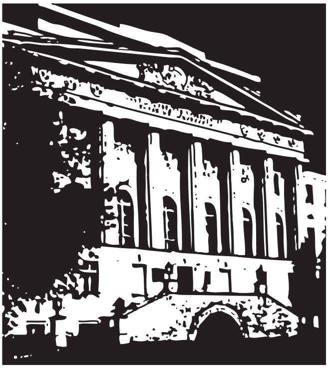
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова



Классический университетский учебник

Серия основана в 2002 г.

Издательство Московского университета

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

ТФФА —
лекции для аспирантов

Под редакцией
академика Б. С. Кашина

Издательство Московского университета | 2023

УДК УДК 517.5:517.98
ББК 22.161.5:22.162
Т926

Авторы:

В. К. Белошапка, В. И. Богачев, П. А. Бородин, А. В. Домрин, Б. С. Кашин, Ю. А. Неретин, П. В. Парамонов, В. Ю. Протасов, В. В. Рыжиков, В. Н. Сорокин, К. Ю. Федоровский, А. Я. Хелемский, И. А. Шейпак, А. А. Шкаликов

Редколлегия:

Б. С. Кашин (*гл. ред.*), В. И. Богачев, П. В. Парамонов

Т926 **ТФФА** — лекции для аспирантов / Б. С. Кашин и др. — Москва : Издательство Московского университета, 2023. — 430, [2] с. : ил. — (Классический университетский учебник).

ISBN 978-5-19-011784-4

Книга основана на курсах лекций, которые ежегодно читаются для аспирантов кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова при подготовке к сдаче кандидатского минимума. Книга содержит 19 глав, посвященных различным темам из теории функций действительного переменного, функционального анализа и теории функций комплексного переменного.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов, специализирующихся в области теории функций и функционального анализа, а также на широкий круг математиков и физиков, использующих теорию функций и функциональный анализ в своих исследованиях.

УДК 517.5:517.98
ББК 22.161.5:22.162

ISBN 978-5-19-011784-4

В 2025 году Московскому университету — старейшему университету России — исполняется 270 лет. За без малого три века он выучил, вырастил и выпустил в жизнь огромную плеяду выдающихся ученых и педагогов. Люди Московского университета сформировали всемирно признанные научные школы, разработали эффективные методики преподавания разных дисциплин внеся тем самым весомый вклад в успешное научно-технологическое и духовно-нравственное развитие нашей страны. Многие из них создали замечательные книги, в которых ярко отражены как научные и педагогические достижения, так и история самого университета.

Готовясь к юбилею, мы издаем и переиздаем книги, которые дают наилучшее представление об интеллектуальном богатстве Московского университета, о его вкладе в науку и образование. Издательские серии «Классический университетский учебник», «Труды выдающихся ученых МГУ», «История Московского университета», «Из сокровищницы Московского университета» включают ставшие классикой учебники, на которых выросло не одно поколение студентов, фундаментальные научные монографии, книги, повествующие об истории и современности старейшего и крупнейшего университета России.

Посвящая этот издательский проект 270-летию нашей Альма-матер, мы надеемся привлечь внимание читателей к достижениям университетских ученых в разных областях знания, к многогранному научно-образовательному наследию Московского университета, чья книжная сокровищница продолжает пополняться фундаментальными трудами, становясь к юбилею еще богаче.

Ректор Московского университета *В. А. Садовничий*
академик

Оглавление

В. К. Белошапка
В. И. Богачев
П. А. Бородин
А. В. Домрин
Б. С. Кашин
Ю. А. Неретин
П. В. Парамонов
В. Ю. Протасов
В. В. Рыжиков
В. Н. Сорокин
К. Ю. Федоровский
А. Я. Хелемский
И. А. Шейпак
А. А. Шкаликов

Предисловие

Эта книга предназначена в первую очередь аспирантам, специализирующимся в теории функций и функциональном анализе или смежных областях математики. Сокращение ТФФА, использованное в названии книги и ниже, означает не что иное, как «теория функций и функциональный анализ». Книга возникла на основе коротких курсов лекций, которые ежегодно, начиная с 2014 г., кафедра ТФФА проводит для аспирантов механико-математического факультета МГУ. За год аспиранты суммарно прослушивают серьезный курс «модульной» структуры, содержащий материал, далеко выходящий за рамки стандартного «кандидатского минимума». Согласованная общая программа курса сформирована в основном по предложениям лекторов и включает как классические результаты, так и результаты, характеризующие современное состояние предмета. Курс завершается довольно сложным экзаменом, причем темы, выносимые на экзамен, могут меняться в зависимости от узкой специализации аспиранта и составляют примерно половину общего объема этой книги. Целью введения нового курса было повышение квалификации и расширение кругозора аспирантов.

Книга содержит девятнадцать глав, авторы которых — тринадцать профессоров кафедры ТФФА и примкнувший к нам профессор кафедры общих проблем управления В. Ю. Протасов. Содержание глав, как уже отмечено выше, вполне соответствует лекциям, прочитанным ранее их авторами. В рамках одной книги невозможно даже бегло рассмотреть основные направления теории функций и функционального анализа. Тем не менее сделанная нами выборка тем дает представление о масштабе, красоте и важности предмета. В книге рассмотрены, в частности, основы теории всплесков (вейвлетов), элементы теории приближений, введение в теорию обобщенных функций и преобразование Фурье, мера Хаара, элементы асимптотического геометрического анализа, общая теория линейных операторов и полугруппы операторов, банаховы алгебры, основы эргодической теории, начала теории целых функций, полиномиальные и рациональные приближения в комплексной области, аналитическое продолжение и функции многих комплексных переменных. Порядок глав, определенный редколлегией, следующий: сначала теория функций действительного переменного и функциональный анализ, затем теория функций комплексного переменного.

Значительную помощь в работе над текстами лекций оказали наши слушатели — бывшие и нынешние аспиранты кафедры, особенно Е. Д. Косов и И. В. Лимонова. Графические материалы помогли изготовить А. А. Авксентьев и В. А. Клепцын. В наборе текста принял участие К. А. Афонин, М. Г. Жижченко редактировала рукопись. Всем им — искренняя благодарность авторов.

Б. С. Кашин,
заведующий кафедрой ТФФА
мехмата МГУ.
Москва, май 2022 г.

Глава 1

Всплески: основные понятия и примеры

В. Ю. Протасов

§ 1.1. Введение

А. Определение всплесков и мотивация

1.1.1. Определение. *Системой всплесков на прямой $\mathbb{R}$ называется ортонормированный базис гильбертова пространства $L_2(\mathbb{R})$, состоящий из функций*

$$\psi_{j,k}(t) = \left\{2^{j/2}\psi(2^j t - k)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}},$$

где $\psi_{0,0} = \psi$ — порождающая функция, называемая всплеск-функцией.

Всплески применяются в инженерных задачах теории обработки информации, при численном решении дифференциальных уравнений, в некоторых теоретических задачах теории приближений и теории функций. Наиболее популярной системой для разложений функций в L_2 всегда была тригонометрическая система Фурье $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Однако она имеет ряд существенных недостатков: 1) она рассчитана на периодические функции; 2) она не локализована, т. е. функции этой системы не убывают при $t \to \infty$. С первым недостатком давно научились справляться с помощью разного рода периодизаций и т. п. Второй оказался куда более сложным. Прежде чем решать эту проблему, мы строго ее сформулируем.

Б. Что такое локализованная функция?

Свойство локализованности функции $f(t)$ означает, что она стремится к нулю при $t \to \infty$, причем чем быстрее стремится, тем лучше она локализована. Скажем, обе функции e^{-t^2} и $(1+t^2)^{-1}$ локализованы, при этом первая имеет лучшую локализацию, чем вторая. Функция e^{-t} не локализована, поскольку она не убывает при $t \to -\infty$. Наиболее локализованные функции — функции с компактным носителем. На практике часто к функции добавляется «шум» — функция с маленьким носителем, но большими значениями. Шумы неизбежны при хранении и передаче сигналов; царапина, щелчок — примеры шумов. Феномен, который мы наблюдаем, применяя преобразование Фурье к функции с шумом, состоит в том, что преобразование Фурье не сохраняет локализацию. Функция, которая имеет хорошую локализацию, скажем, сосредоточенная на очень маленьком отрезке (как шум), имеет коэффициенты Фурье с плохой локализацией: они медленно убывают с ростом номера, либо не убывают вовсе. Происходит это из-за того, что тригонометрические функции сами не локализованы: функция $f(t) = e^{-2\pi ikt}$ равна по модулю единице при всех $t \in \mathbb{R}$. Спасти ситуацию может только переход к другому базису в $L_2[0,1]$, который состоял бы из локализованных функций. Самый простой из таких базисов дает первый пример всплесков — базис Хаара.

§ 1.2. Всплески Хаара

A. Система Хаара на отрезке

Базис в пространстве $L_2[0,1]$ был предложен Альфредом Хааром[1] в 1909 г.

Он столь же прост, как и базис Фурье (во многих отношениях еще проще), но состоит из функций с компактным носителем, и его можно использовать не только для периодических функций. Правда, имеет он и свои недостатки, об этом потом.

Базис Хаара строится последовательно. Вначале берется функция $h_0(t)$, она равна единице тождественно на полуинтервале $[0,1)$. Все дальнейшие функции разбиты на уровни.

`Нулевой уровень` — одна функция $h_1(t)$, она равна 1 на $[0,1/2)$ и равна -1 на $[1/2,1)$.

`Первый уровень` — две функции h_2, h_3:

$$h_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & t \in [0,1/4), \\ -\sqrt{2}, & t \in [1/4,1/2), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad h_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & t \in [1/2,3/4), \\ -\sqrt{2}, & t \in [3/4,1), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

`Второй уровень` — четыре функции h_4, h_5, h_6, h_7:

$$h_4(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1/8); \\ -2, & t \in [1/8,1/4), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad h_5(t) = \begin{cases} 2, & t \in [1/4,3/8), \\ -2, & t \in [3/8,1/2), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

[1] Alfred Haar (1885 – 1933) — венгерский математик, ученик Д. Гильберта.

$$h_6(t) = \begin{cases} 2, & t \in [1/2, 5/8), \\ -2, & t \in [5/8, 3/4), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad h_7(t) = \begin{cases} 2, & t \in [3/4, 7/8), \\ -2, & t \in [7/8, 1), \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

(см. рис. 1).

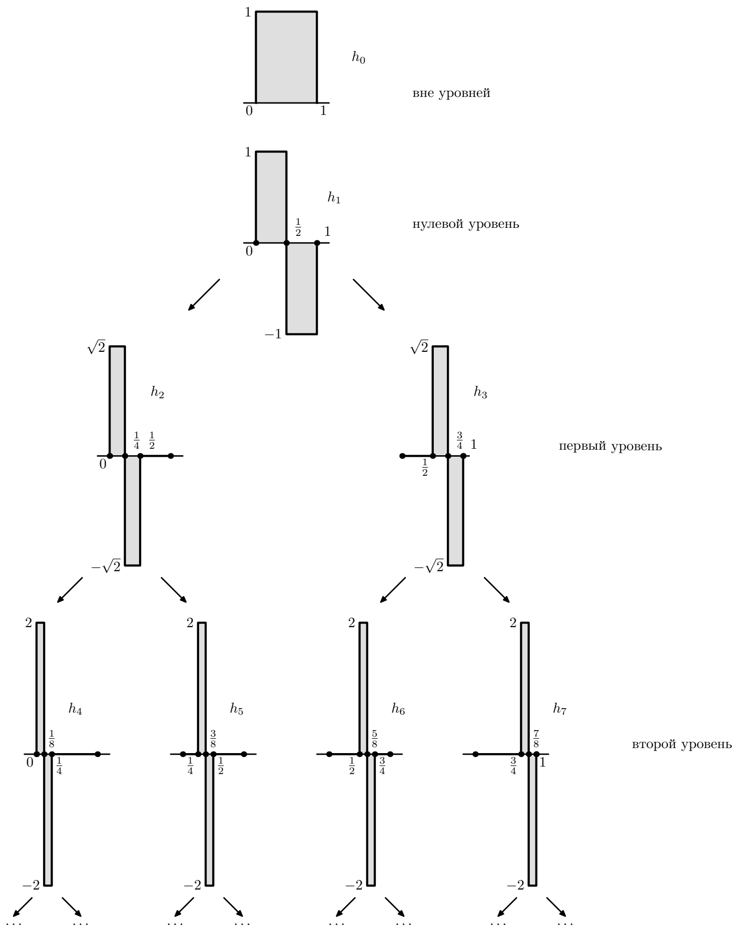


Рис. 1. Дерево функций Хаара

Таким образом, для каждого целого $j \geqslant 0$ уровень с номером j состоит из 2^j функций $h_{2^j}, \ldots, h_{2^{j+1}-1}$. Носитель каждой функции —

отрезок длины 2^{-j}, все носители не пересекаются. Каждая функция принимает три значения: $\pm 2^{j/2}$ или 0. Все функции j-го уровня получаются друг из друга сдвигами аргумента на величину, кратную 2^{-j}. Каждая функция j-го уровня h_m при $m = 2^j + k$, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$, определяется так (см. рис. 2):

$$h_m(t) = \begin{cases} (\sqrt{2})^j, & t \in \bigl[2^{-j}k, 2^{-j}\bigl(k + \frac{1}{2}\bigr)\bigr), \\ -(\sqrt{2})^j, & t \in \bigl[2^{-j}\bigl(k + \frac{1}{2}\bigr), 2^{-j}\bigl(k + 1\bigr)\bigr), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

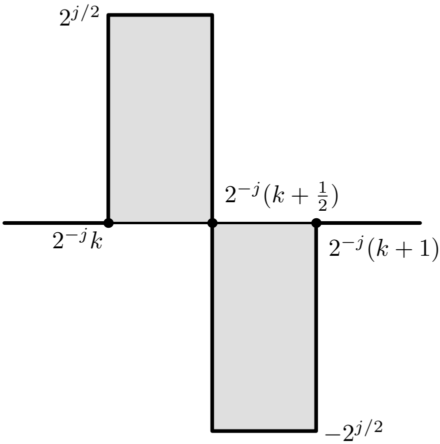


Рис. 2. Функция Хаара j-го уровня h_m, $m = 2^j + k$, $k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$.

Итак, первая функция j-го уровня h_{2^j} имеет носитель на отрезке $[0, 2^{-j}]$, на первой половине отрезка она равна $2^{j/2}$, на второй равна $-2^{j/2}$. Далее эта функция $2^j - 1$ раз сдвигается вправо на 2^{-j}, так получаются все остальные функции j-го уровня $h_{2^j+1}, \ldots, h_{2^j+2^j-1}$.

Обозначим через V_n n-мерное подпространство $L_2[0,1]$, состоящее из кусочно постоянных функций на двоичных интервалах ранга n отрезка $[0,1]$. Это значит, что они постоянны на каждом промежутке $\bigl[2^{-n}s, 2^{-n}(s+1)\bigr)$ (двоичном промежутке ранга n), $s = 0, \ldots, 2^s - 1$. Каждая функция $f \in V_n$, таким образом, может принимать 2^n значений, размерность пространства V_n равна 2^n.

Соберем все функции Хаара, начиная с h_0 (эта функция находится вне уровней) и до уровня $n-1$. Получим 2^n функций $\{h_m\}_{m=0}^{2^n-1}$. Все они постоянны на двоичных интервалах ранга n, значит, принадлежат пространству V_n. Оказывается, они составляют ортонормированный базис этого пространства.

1.2.1. Теорема. *При каждом $n \in \mathbb{N}$, система функций $\{h_m\}_{m=0}^{2^n-1}$ является ортонормированным базисом пространства V_n.*

Доказательство. Заметим, что норма каждой функции равна 1 (именно для этого мы полагаем значение каждой функции j-го уровня равным $\pm\sqrt{2}^j$). Поэтому осталось доказать, что эти функции ортогональны друг другу. В этом случае получится ортонормированная система в пространстве V_m, состоящая из 2^n векторов. Но поскольку $\dim V_n = 2^n$, эта система является базисом пространства V_n.

Итак, остается доказать ортогональность. На одном уровне все функции h_m ортогональны, поскольку их носители не пересекаются. Возьмем произвольные функции на разных уровнях: функцию h_{m_1} на уровне j_1 (допускаем при этом случай $m_1 = 0$, когда функция вне уровней) и функцию h_{m_2} на уровне $j_2 > j_1$. Поскольку функция h_{m_1} принадлежит уровню j_1, она постоянна на каждом двоичном интервале ранга $\geqslant j_1 + 1$. А так как $j_2 \geqslant j_1 + 1$, то она постоянна на каждом двоичном интервале ранга j_2. Поэтому на всем носителе функции h_{m_2} функция h_{m_1} равна некоторой константе c. Следовательно,

$$(h_{m_1}, h_{m_2}) = \int_0^1 c\, h_{m_2}(t)\, dt = c \int_0^1 h_{m_2}(t)\, dt = 0,$$

что и требовалось. □

Мы видим, что система Хаара $\{h_m\}_{m\geqslant 0}$ ортонормирована в пространстве $L_2[0,1]$. Аналогично системе Фурье каждой функции можно сопоставить ее ряд Хаара:

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty} (f, h_m)\, h_m. \tag{1.2.1}$$

Обозначив вновь через $S_n f$ частичную сумму этого ряда (на этот раз сумму 2^n первых слагаемых, а не $2n+1$ слагаемых, как для ряда Фурье), мы получаем формулу для ортогональной проекции функции f на пространство V_n:

$$S_n f = \sum_{m=0}^{2^n-1} (f, h_m)\, h_m. \tag{1.2.2}$$

На самом деле ортогональная проекция $L_2[0,1]$ на подпространство V_n строится очень просто. Дело в том, что пространство V_n имеет еще один ортонормированный базис, который даже проще хааровского. Он состоит из функций c_k, равных константе $2^{n/2}$ на двоичном интервале $I_k = \bigl[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\bigr)$ и нулю за его пределами, при этом k принимает значения от нуля до $2^n - 1$. Очевидно, что система функций $\{c_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ также ортонормирована, а так как их количество равно размерности пространства V_n, то получен базис V_n. Поэтому для проекции на пространство V_n верна и еще одна формула:

$$S_n f = \sum_{k=0}^{2^n-1} (f, c_k)\, c_k. \tag{1.2.3}$$

Подчеркнем, что $S_n f$ в формулах (1.2.2) и (1.2.3) — одна и та же функция, поскольку у элемента f есть только одна проекция на пространство V_n. Из формулы (1.2.3) теперь можно заключить, что проекция на V_n усредняет функцию f на каждом двоичном интервале I_k, т. е. заменяет ее на константу, равную среднему значению: $\dfrac{1}{|I_k|}\displaystyle\int_{I_k} f(t)dt$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ (напомним, что $|I_k|$ — длина интервала, в данном случае она равна 2^{-n}). Таким образом, при проекции на V_n любая функция разбивается на 2^n постоянных кусочков, а ее график превращается в «лесенку» из 2^n ступенек.

Б. Приближения функций системой Хаара. Эффект насыщаемости

Будем обозначать через $\|f\|_2$ норму в L_2. Для системы Хаара верна следующая теорема (называемая иногда теоремой Джексона для системы Хаара), которую мы принимаем без доказательства.

1.2.2. Теорема. *Для всякой* 1*-липшицевой функции* f *на отрезке* $[0,1]$ *верно неравенство*

$$\|f - S_n f\|_2 \leqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}\, 2^{-n}. \tag{1.2.4}$$

Таким образом, если $f \in C^1[0,1]$ и $|f'(t)| \leqslant 1$, $t \in (0,1)$ (в этом случае, как мы уже знаем, функция f является 1-липшицевой), то сумма первых $N = 2^n$ членов ряда Хаара приближает функцию с точностью $\frac{C}{N}$. В отличие от теоремы Джексона для тригонометрической системы, здесь приближение не улучшается с увеличением гладкости функции f. Функции из C^2 или C^{10} система Хаара приближает с такой же точностью $\frac{C}{N}$, и ничего лучшего уже не будет. Такое свойство называется *насыщаемостью*.

Система Хаара насыщаема, т. е. она приближает функции из C^1 так же, как и все более гладкие функции. Происходит это вовсе не из-за того, что функции Хаара сами не гладкие. Существует много систем, состоящих из разрывных функций, которые, тем не менее, прекрасно приближают гладкие функции. Настоящая причина в том, что функции Хаара не порождают своими линейными комбинациями полиномы. Они порождают тождественную константу (т. е. полином степени нуль), но не полином степени 1, т. е. функцию $f(t) = t$. Согласно формуле (1.2.3), проекция этой функции на пространство V_n — лесенка из 2^n ступенек с высотой первой ступеньки 2^{-n-1}, а высота каждой следующей ступеньки равна 2^{-n}:

$$S_n f(t) = 2^{-n-1}(1 + 2k), \quad t \in [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)], \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

Квадрат расстояния $\|f - S_n f\|^2$ — сумма 2^n одинаковых интегралов

$$\int_{I_k} \bigl(f - S_n f\bigr)^2 \, dt = \int_0^{2^{-n}} \bigl(t - 2^{-n-1}\bigr)^2 \, dt = \frac{2}{3}\, 2^{-3(n+1)}.$$

Поэтому

$$\|f - S_n f\| = \Bigl(2^n \, \frac{2}{3} \, 2^{-3(n+1)}\Bigr)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \, 2^{-n}.$$

Таким образом, сумма первых $N = 2^n$ слагаемых ряда Хаара приближает функцию $f(t) = t$ с точностью $\frac{1}{2\sqrt{3}} \, \frac{1}{N}$, и тот факт, что эта функция принадлежит всем классам C^r, $r \geqslant 1$, ситуацию не спасает. Попутно мы доказали, что константа $C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ в теореме 1.2.2 неулучшаема уже для функции $f(t) = t$.

Насыщаемость — главный недостаток системы Хаара. Второй ее недостаток — разрывность функций. Собственно, вся теория всплесков родилась из попыток построить «гладкий Хаар». Системы всплесков наследуют все хорошие свойства системы Хаара, но при этом состоят из гладких функций и сами хорошо приближают гладкие функции. Теорема Джексона не выполнена для них в полном объеме, т. е. для всех r (доказано, что таких всплесков не бывает), но коэффициент насыщаемости у них больше единицы (у Хаара он равен 1).

А где же обещанные достоинства системы Хаара? Пока мы обсуждали только недостатки. Достоинства есть! Первое — локализованность. Функции Хаара имеют компактный носитель, который, более того, быстро сужается с ростом номера функции. До недавнего времени (до изобретения всплесков) система Хаара была единственной ортонормированной системой с таким свойством. Второе — двоичная структура, позволяющая быстро вычислять коэффициенты разложения. Как это работает, мы сейчас увидим, раскладывая дискретные сигналы.

В. Всплески Хаара на прямой

Систему функций Хаара можно распространить с отрезка на всю прямую $\mathbb{R}$. Для этого нужно сделать три вещи:

1) убрать функцию h_0; 2) для всех остальных функций разрешить сдвиги по всей прямой; 3) добавить двоичные растяжения.
В результате мы получим систему функций $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, где $\psi = h_1$ (первая функция Хаара), j, k — произвольные целые числа. В системе Хаара на отрезке было $j \geqslant 0$ и $0 \leqslant k \leqslant 2^j - 1$.

1.2.3. Теорема. *Система функций* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *является базисом в* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Так же, как и для системы Хаара на отрезке, доказываем, что данная система ортонормирована. Сложнее доказать полноту. Для этого достаточно показать, что функция $h_0 = \chi_{[0,1]}$ может быть разложена по этой системе. Ортогональная проекция функции h_0 на замыкание линейной оболочки функций $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ дается формулой $Sh_0 = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}}(h_0, \psi_{j,k})\psi_{j,k}$. Заметим, что при $j \geqslant 0$ все скалярные произведения $(h_0, \psi_{j,k})$ равны нулю, а при $j < 0$ на j-м уровне есть только одна функция, носитель которой пересекается с отрезком $[0,1]$, это $\psi_{j,0}$. Следовательно, $Sh_0 = \sum_{j<0}\big(h_0, \psi_{j,0}\big)\psi_{j,0}$. Поскольку $\big(h_0, \psi_{j,0}\big) = 2^{j/2}$, $j < 0$, имеем

$$\|Sh_0\|^2 = \sum_{j<0}\big|\big(h_0, \psi_{j,0}\big)\big|^2 = \sum_{j<0}[2^{j/2}]^2 = 1.$$

Таким образом, $\|Sh_0\|^2 = \|h_0\|^2$, т. е. h_0 равен по длине своей проекции Sh_0, поэтому $h_0 = Sh_0$. Итак, функция h_0 лежит в замыкании линейной оболочки функций $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$. Следовательно, эта линейная оболочка будет включать систему Хаара на отрезке $[0,1]$, значит, любая функция на отрезке $[0,1]$ разлагается по данной системе. Поэтому по ней разлагается и любая функция на любом целом отрезке. Осталось любую функцию в $L_2[0,1]$ представить как бесконечную сумму функций на единичных отрезках. □

Здесь возникает видимый парадокс с тем, что система Хаара на прямой как-то обходится без функции h_0, а система на отрезке без нее обойтись не может. Причина состоит в том, что в пространстве $L_2[0,1]$ определен непрерывный функционал

$$F(f) = \int_0^1 f(t)\,dt\,,$$

а в $L_2(\mathbb{R})$ такого функционала нет.

Г. Достоинства и недостатки системы Хаара: что сохранить и с чем бороться?

Подведем предварительные итоги.

Главные **достоинства системы Хаара:**

1) **Локализованность.** *Все функции системы имеют компактные носители, причем длина носителя стремится к нулю с ростом номера функции.*

2) **Двоичная структура.** *Все функции системы* (*кроме, возможно, тождественной константы*) *получаются из одной и той же функции с помощью двоичных сжатий и сдвигов аргумента.*

Так, все функции Хаара h_m, кроме h_0 (константы), являются сдвигами и сжатиями в 2^k раз (для различных целых k) функции h_1. Это свойство обеспечивает быстрое вычисление коэффициентов разложения по системе Хаара, а кроме того, обеспечивает быстрый поиск оптимального значения числа уровней n для разложения заданной функции. Подробнее этот аспект будет затронут в следующем разделе.

Свойства 1) и 2) желательно и развить в новых системах. А с чем бороться? С основными **недостатками системы Хаара:**

3) **Низкие аппроксимационные свойства**. *Функции Хаара плохо приближают гладкие функции, из-за чего эффект насыщаемости в теореме Джексона появляется уже при* $r = 1$ (*теорема* 1.2.2). Это ведет к медленной сходимости разложений Хаара и, как следствие, к необходимости хранить большое число коэффициентов. Происходит это из-за того, что функции Хаара не порождают многочленов большой степени (они, как мы видели, порождают константу, т. е. многочлен степени нуль).

Итак, *нужно, чтобы функции системы порождали многочлены высокой степени* (*чем выше, тем лучше*).

4) **Низкая гладкость**. *Функции Хаара разрывны.* Во многих приложениях приходится не только приближать сигнал, но и выполнять некоторые действия с приближением. Например, дифференцировать. Причем иногда (скажем, при численном решении дифференциальных уравнений) дифференцировать несколько раз. С функциями Хаара этого делать нельзя, поскольку они не только не дифференцируемы, но и не непрерывны.

Желательно, чтобы система состояла из гладких функций (*чем выше гладкость, тем лучше*).

Итак, наша главная задача: *нужен аналог системы Хаара, состоящая из гладких функций*!

Естественный вопрос — а существует ли он? Существуют ли системы, наследующие преимущества Хаара — свойства 1), 2) — и лишенные его недостатков — 3), 4)? Да, это системы всплесков (вейвлетов). Но построим мы их не сразу. У человечества на это ушло почти 80 лет, от появления системы Хаара (1909 г.) до изобретения всплесков Мейера (1986 г.) и Добеши (1988 г.)

Мы начнем с того, что изучим подробнее двоичную структуру системы Хаара, которую хотелось бы перенести на другие системы.

§ 1.3. Общая конструкция всплесков

Общая конструкция всплесков связана с понятием кратномасштабного анализа (КМА). Мы определим его на гильбертовом пространстве функций $L_2[0,1]$ и $L_2(\mathbb{R})$.

1.3.1. Определение. *Кратномасштабным анализом называется система замкнутых подпространств $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ гильбертовом пространстве функций, обладающая следующими свойствами*:

1) *каждое следующее пространство содержит предыдущее и не совпадает с ним*;

2) *пересечение всех пространств V_j содержит только нулевую функцию, т. е. тождественный нуль* (*свойство пустоты пересечения*);

3) *пространства V_j стремятся ко всему при $j \to \infty$. Это значит, что любая функция сколь угодно точно может быть приближена функциями пространств V_j* (*свойство полноты*).

4) *каждое следующее есть двоичное сжатие предыдущего, т. е. для всякой функции $f(\cdot) \in V_j$ имеем $f(2\cdot) \in V_{j+1}$*;

5) *пространство V_0 порождено ортогональными друг другу целыми сдвигами некоторой функции φ.*

Для системы Хаара на прямой функция φ есть h_0, а пространства V_j — пространства функций, постоянных на двоичных интервалах ранга j. Функция φ называется обычно *масштабирующей функцией* (scaling function). Так как ее целые сдвиги порождают V_0, двоичные сжатия V_0 порождают пространство V_1, двоичные сжатия которого порождают пространство V_2 и т. д. А также в другом направлении: двоичные растяжения V_0 порождают пространство V_{-1}, двоичные растяжения которого порождают пространство V_{-2} и т. д.

Таким образом, построение масштабирующей функции равносильно построению всего кратномасштабного анализа. Более того, в этом

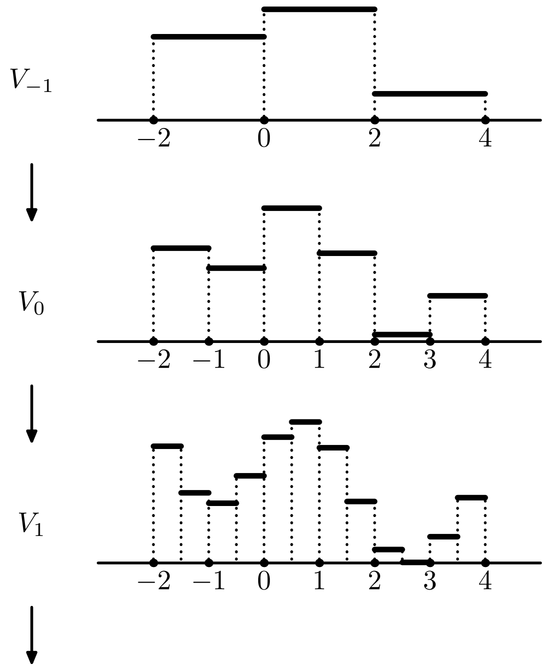


Рис. 3. КМА Хаара

случае из масштабирующей функции φ легко получается и *всплеск-функция* (wavelet-function) ψ, сдвиги и двоичные сжатия которой формируют ортогональный базис гильбертова пространства — *систему всплесков*.

Заметим, что классическая система Хаара на отрезке не является системой всплесков, а система Хаара на прямой является. Ее всплеск-функция есть $\psi = h_1$.

Каждый кратномасштабный анализ порождает систему всплесков. Поэтому построение системы всплесков сводится к построению масштабирующей функции φ. Этим мы займемся в следующих разделах, а пока скажем, почему именно двоичные сжатия функций так естественны для обработки сигналов.

Во-первых, они позволяют быстро вычислять коэффициенты разложения с помощью каскадного алгоритма. Но главная причина в другом. Помните игру, когда нужно угадать целое число от 1 до 1000, задавая вопросы: верно ли, что это число больше такого-то числа?

Плохая стратегия состоит в последовательном переборе: верно ли, что число больше 1, больше 2, больше 3 и т. д. При плохом стечении обстоятельств, нам понадобится задать порядка тысячи вопросов, чтобы определить число. Оптимальная стратегия — метод бисекции или деления пополам. Первый вопрос — больше ли это число 500, второй (в зависимости от полученного ответа) — больше ли оно 250 (или 750) и т. д. Каждый раз делим интервал пополам или примерно пополам, если его длина нечетная. Поскольку $1000 < 2^{10}$, не более чем за 10 вопросов число будет найдено. Теперь вернемся к приближению сигналов.

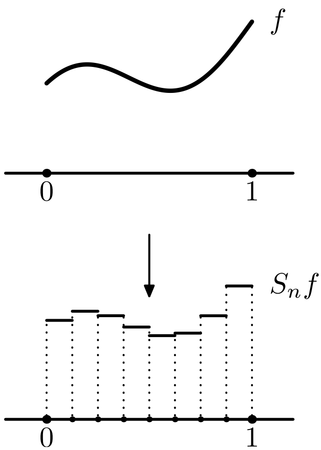


Рис. 4. Приближение функции пространством V_n КМА Хаара

Если у нас есть функция f и мы не знаем, до какого уровня n брать разложение Хаара

$$f \sim S_n = \sum_{m=0}^{2^n-1} (f, h_m) h_m,$$

чтобы приблизить ее с данной точностью ε, возьмем это n произвольно. Находим проекцию S_n функции f на пространство V_n. Если $\|S_n - f\| > \varepsilon$, т. е. точка f отстоит от плоскости V_n дальше, чем нужно, то мы берем следующую плоскость V_{n+1}, которая имеет вдвое большую размерность. Так мы сразу удваиваем число функций Хаара, участвующих в разложении. Если и этого недостаточно, то снова удваиваем число функций, взяв подпространство V_{n+2}. Так делаем, пока не получим нужного приближения. Это и есть оптимальная стратегия.

Обозначим через W_j ортогональное дополнение пространства V_j в пространстве V_{j+1}. Иными словами, W_j состоит из элементов пространства V_{j+1}, перпендикулярных V_j. Для каждого j пространство V_{j+1} есть прямая сумма пространств W_j и V_j. Согласно свойствам 1) и 2), все W_j ортогональны друг другу (в частности, пересекаются только по нулю), а их прямая сумма образует все гильбертово пространство.

1.3.2. Теорема. *Если $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — кратномасштабный анализ, ψ — такая функция, что ее целочисленные сдвиги образуют ортонормированный базис пространства W_0, то ψ является всплеск-функцией.*

Доказательство. При каждом j функции $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ принадлежат W_j и ортогональны друг другу. Так как W_j ортогонально $W_{j'}$ при $j \neq j'$, то $\psi_{j,k}$ ортогонально $\psi_{j',k'}$ при любых $j', k' \in \mathbb{Z}$, если только $j' \neq j$. Таким образом, все функции $\psi_{j,k}$ ортогональны друг другу. Поскольку прямая сумма пространств W_j образует все гильбертово пространство, система $\{\psi_{j,k}\}_{k,j}$ является базисом. □

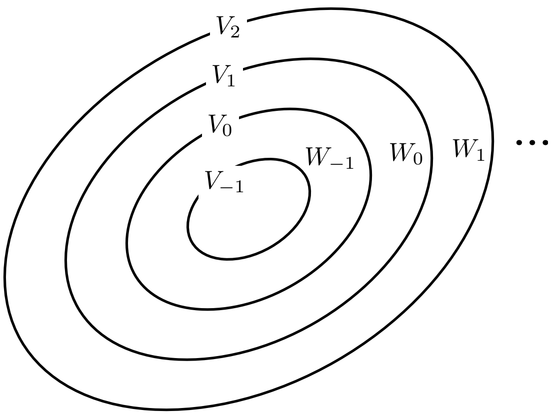


Рис. 5. Кратномасштабный анализ

Таким образом, при построении всплесков нужно сохранить двоичную структуру, как у Хаара, т. е. пространства $\{V_j\}$ должны образовывать кратномасштабный анализ. Вторая система всплесков появилась примерно через четверть века после Хаара. Это система Шеннона – Котельникова.

§ 1.4. Всплески Шеннона – Котельникова

Следующая система функций в каком-то смысле двойственна системе Хаара. Она естественным образом возникает в электронике, поэтому инженеры придумали ее раньше математиков. Для ее построения нам нужно уйти в область частот, т. е. сделать преобразование Фурье.

А. Формула отсчетов (Sampling formula)

Чем отличается старая звукозапись от современной? По каким признакам наше ухо безошибочно определяет, что эта пластинка записана давно? Помехи, треск, шум тут ни причем — запись можно почистить, но она все равно останется старой. Главное отличие — в старой записи отсутствуют высокие частоты. Все звуки мягкие, приглушенные, как будто срезали острые углы. Звукозапись первой половины XX века не умела хранить сигналы высокой частоты. Поэтому старая пластинка просто отрезала от звука все компоненты с высокими частотами. Примерно то же делает формула отсчетов — одна из первых замечательных формул теории обработки сигналов, на которой будет основана конструкция всплесков Шеннона – Котельникова.

Обозначим через V_0 пространство функций из $L_2(\mathbb{R})$, частоты которых не превосходят по модулю $1/2$. Иными словами, преобразование Фурье сосредоточено на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Таким образом,

$$V_0 = \big\{f \colon \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-1/2, 1/2]\big\}.$$

Существуют ли такие функции? Да, достаточно взять любую функцию $g(\xi)$, сосредоточенную на отрезке $[-1/2, 1/2]$, и применить к ней обратное преобразование Фурье. Например, если $g = \chi_{[-1/2,1/2]}$, то $\varphi = \check{g} = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$. Таким образом, $\varphi \in V_0$. Одну функцию из пространства V_0 мы уже знаем. А еще? А еще — любой сдвиг функции φ. В самом деле, преобразование Фурье функции $\varphi(\cdot + a)$ равно $e^{2\pi i a\xi}\, \widehat{\varphi} = e^{2\pi i a\xi}\chi_{[-1/2,1/2]}$ и сосредоточено на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Оказывается, что целых сдвигов функции φ достаточно для полного описания пространства V_0. Конечно, это пространство содержит и другие функции, но все они приближаются линейными комбинациями целых сдвигов функции φ.

1.4.1. Предложение. *Система функций $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где полагаем $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$, есть ортонормированный базис пространства V_0.*

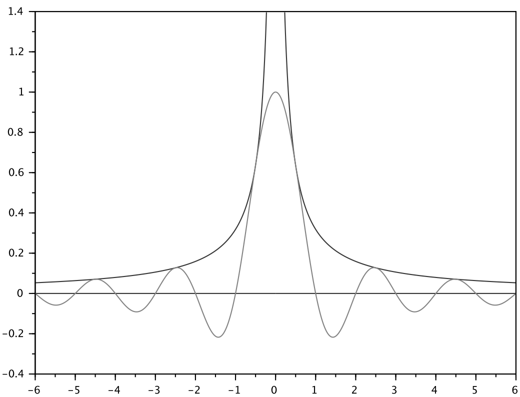


Рис. 6. Функция $\varphi(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$ и мажорирующая ее функция $y=\frac{1}{\pi|t|}$.

Доказательство. Преобразование Фурье функции $\varphi(t-k)$ — функция $e^{-2\pi ik\xi}\chi_{[-1/2,1/2]}$. На отрезке $[-1/2,1/2]$ она равна $e^{-2\pi ik\xi}$, а за его пределами равна нулю. Функции $\{e^{-2\pi ik\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированный базис пространства $L^2[-1/2,1/2]$.

Итак, система функций $\{\varphi(\cdot-x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ переводится преобразованием Фурье в ортонормированный базис $\{e^{-2\pi ik\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ пространства функций, сосредоточенных на отрезке $[-1/2,1/2]$. Поскольку преобразование Фурье сохраняет скалярное произведение, и сама эта система является ортонормированным базисом пространства V_0. $\square$

Как и для любого ортонормированного базиса, разложение функции $f\in V_0$ получается по формуле $f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(f,\varphi(\cdot-k)\big)\,\varphi(\cdot-k)$. Вычислим коэффициенты разложения. Так как $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset[-1/2,1/2]$ и $\widehat{\varphi}=\chi_{[-1/2,1/2]}$, имеем

$$\big(f,\varphi(\cdot-k)\big)=\big(\widehat{f},e^{-2\pi i\xi k}\widehat{\varphi}\big)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}e^{2\pi i\xi k}\overline{\widehat{\varphi}}\,d\xi=\int_{-1/2}^{1/2}\widehat{f}e^{2\pi i\xi k}\,d\xi$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}e^{2\pi i\xi k}\,d\xi=f(k).$$

Таким, образом, коэффициент при функции $\varphi(t-k)$ равен $f(k)$. Мы доказали *формулу отсчетов* (sampling formula) для разложения функций с ограниченными частотами.

1.4.2. Теорема. *Для любой функции $f \in V_0$ имеем*
$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\varphi(t-k), \tag{1.4.1}$$
где $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$.

Это удивительная формула! Она показывает, что функция, частоты которой ограничены отрезком $[-1/2, 1/2]$, целиком определяется значениями только в целых точках. Поэтому хранить непрерывный сигнал, частоты которого ограничены, очень просто: храним значения в целых точках $f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, а потом восстанавливаем сигнал по формуле отсчетов (1.4.2).

Разумеется, на практике мы храним значения не во всех целых точках, а лишь в конечном числе, скажем, для $|k| \leqslant N$. Функция, восстановленная по «урезанной» формуле отсчетов $\sum_{k=-N}^{N} f(k)\,\varphi(x-k)$ уже не будет совпадать с f, но будет приближать ее с ростом N.

Поскольку во времена зарождения теории передачи и обработки сигнала, в середине XX века, все используемые сигналы были сильно ограничены по частоте (вспомним старые музыкальные записи), формула отсчетов постоянно использовалась. О ее важности говорит уже то, что открыли ее независимо четверо ученых в разное время: американцы Гарри Найквист (Harry Nyquist) — в первоначальном виде в 1928 г. — и Клод Шеннон (Claude Shannon) в 1949 г., англичанин Эдмунд Уитеккер (Edmund Whittaker) в 1933 г. и советский ученый Владимир Александрович Котельников в 1933 г. Функции, *ограниченные по частоте* (band limited functions), стали важнейшим предметом изучения в теории обработки сигнала.

А как узнать, будет ли заданный сигнал f band limited? Можно ли к нему применять формулу (1.4.1)? Для этого нужно выполнить преобразование Фурье, но на практике это очень непростая задача. На самом деле, узнавать ничего не нужно. Ряд (1.4.1) дает формулу для линейного отображения произвольного сигнала f в пространство ограниченных по частоте функций V_0, причем это отображение является проекцией, правда, не ортогональной. В самом деле, положим
$$[P_0 f](t) \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\,\varphi(t-k), \tag{1.4.2}$$
где $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$. Конечно, нужно чтобы бесконечная сумма в правой части имела смысл, поэтому мы будем предполагать, что f убывает

на бесконечности, по крайней мере, быстрее, чем $O(1/\sqrt{|t|})$. Любую такую функцию будем называть *допустимой*. Поскольку $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ есть базис пространства V_0, имеем $P_0 f \in V_0$ для любой допустимой функции f. С другой стороны, из формулы отсчетов следует, что если $f_0 \in V_0$, то $P_0 f_0 = f_0$, т. е. P_0 — тождественный оператор на V_0. Следовательно, P_0 — проекция пространства допустимых функций на V_0. Таким образом, формула отсчетов, примененная к любому допустимому сигналу f, убирает все высокие частоты, т. е. делает примерно то же, что делает со звуковым сигналом старая пластинка. Поэтому правильнее было бы называть ее формулой старой пластинки. Как построить систему всплесков на основе этой формулы, мы увидим в следующем разделе.

А как же все-таки получить ортогональную проекцию на V_0? Для этого удобно перейти в частотную область, т. е. выполнить преобразование Фурье. Обозначим через S_0 оператор ортогональной проекции $L_2(\mathbb{R})$ на V_0. Преобразование Фурье является ортогональным преобразованием гильбертова пространства и потому сохраняет ортогональные проекции. Значит, для заданной функции f Фурье-образ $\widehat{S_0 f}$ должен быть проекцией $\widehat{f}$ на образ пространства V_0 в частотной области. Этот образ (по определению V_0) есть пространство функций, сосредоточенных на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Тем самым $\widehat{S_0 f}$ — проекция $\widehat{f}$ на пространство функций, сосредоточенных на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Ортогональная проекция на такое пространство устроена совсем просто: мы берем функцию $\widehat{f}$ и обнуляем ее за пределами отрезка $[-1/2, 1/2]$, а на самом отрезке не меняем.

Мы доказали такой факт.

1.4.3. Лемма. *Для всякой допустимой функции f выполнено равенство*

$$\widehat{S_0 f}\,(\xi) = \begin{cases} \widehat{f}(\xi), & |\xi| \leqslant 1/2, \\ 0, & |\xi| > 1/2. \end{cases}$$

Итак, ортогональная проекция на пространство V_0 просто обнуляет преобразование Фурье функции f за пределами отрезка $[-1/2, 1/2]$. Она обрезает все частоты функции, не входящие в этот промежуток (высокие частоты), оставляя нетронутыми частоты на отрезке (низкие частоты); см. рис. 7.

Б. Построение всплесков Шеннона – Котельникова

Отрезок длины 1 в определении пространства V_0 и в формуле отсчетов взят для простоты. Те же рассуждения можно провести и с любым другим отрезком $[-A, A]$, при этом в формуле отсчетов нужно

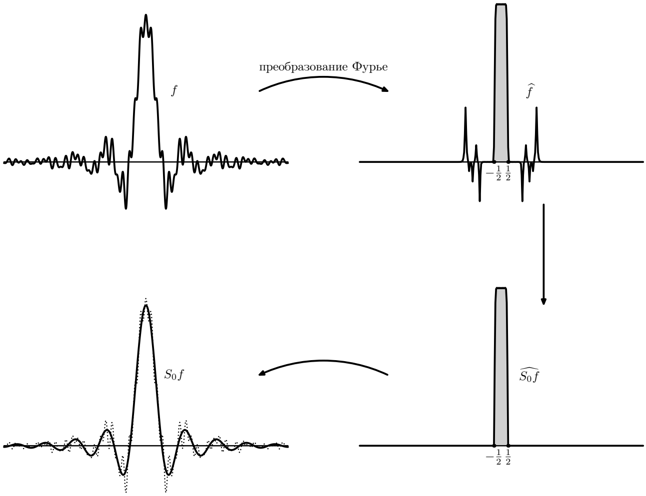


Рис. 7. Формула старой пластинки

взять значения функции f не в точках $k \in \mathbb{Z}$, а в точках $\frac{k}{2A}$, а функцию φ сжать в $2A$ раз по оси абсцисс. Чем больше отрезок, тем чаще должна быть сетка, в которой мы берем значения функции. Для наших целей достаточно взять A в виде целой степени двойки. Рассмотрим пространства

$$V_j = \Big\{ f \colon \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \big[-2^{j-1}, 2^{j-1}\big] \Big\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Сделав линейную замену переменных $t \mapsto 2^j t$ в теореме 1.4.2 и в лемме 1.4.3, получаем такое утверждение.

1.4.4. Теорема. *При $j \in \mathbb{Z}$ система функций $\{2^{j/2}\varphi(2^j t - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$, является ортонормированным базисом пространства V_j. Оператор* (*неортогональной*) *проекции P_j на это пространство дается формулой*

$$\big[P_j f\big](t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2^{-j}k)\varphi(2^j t - k), \tag{1.4.3}$$

Оператор S_j ортогональной проекции на пространство V_j определяется следующей формулой:

$$\widehat{S_j f}\,(\xi) = \begin{cases} \widehat{f}(\xi), & |\xi| \leqslant 2^{j-1}, \\ 0, & |\xi| > 2^{j-1}. \end{cases}$$

Таким образом, ортогональная проекция обрезает все частоты нашей функции f за пределами отрезка $\left[-2^{j-1}, 2^{j-1}\right]$.

1.4.5. Теорема. *Пространства $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют кратномасштабный анализ, $\psi(t) = 2\varphi(2t) - \varphi(t)$ является всплеск-функцией.*

Доказательство. Пространства V_j расширяются с ростом j, а в пределе заполняют все $L_2(\mathbb{R})$, причем $f(\cdot) \in V_j$ тогда и только тогда, когда $f(2\cdot) \in V_{j+1}$. Таким образом, свойства 1) – 4) в определении кратномасштабного анализа выполнены. Так как сдвиги функции φ образуют ортонормированный базис V_0, то выполнено и свойство 5). Далее,

$$\widehat{\psi}(\xi) = 2\widehat{\varphi(2\cdot)} - \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}(\xi/2) - \widehat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-1,-1/2)\cup[1/2,1)}.$$

Итак, $\widehat{\psi}(\xi)$ — индикатор множества $[-1,-1/2) \cup [1/2,1)$. Она принадлежит V_1, поскольку $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset [-1,1]$, и ортогональна V_0, поскольку $\psi|_{[-1/2,1/2]} \equiv 0$. Значит, $\psi \in W_0$. Напомним, что W_0 — ортогональное дополнение V_0 в пространстве V_1. Осталось показать, что целые сдвиги функции ψ образуют ортонормированный базис пространства W_0, после чего останется сослаться на теорему 1.3.2.

Преобразование Фурье переводит функции $\psi(\cdot - k)$ в функции $e^{2\pi ik\xi}$ на множестве $[-1,-1/2) \cup [1/2,1)$. Это множество составляет две части периода $[-1/2,1/2]$: достаточно передвинуть левый отрезок на $+1$, а правый на -1. Следовательно, 1-периодические функции на этом множестве – те же, что и на отрезке $[-1/2,1/2]$. Поскольку система $\{e^{2\pi ik\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $L_2[0,1]$, она образует таковой и на данном множестве. $\square$

Таким образом, кратномасштабный анализ пространств функций с ограниченными частотами $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ порожден масштабирующей функцией φ и соответствует системе всплесков с функцией ψ, где

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad \psi(t) = \frac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t}. \tag{1.4.4}$$

Эта система всплесков называется системой Шеннона – Котельникова. Она в некотором смысле двойственна к системе Хаара. Если в системе Хаара масштабирующая функция φ_{X} — характеристическая

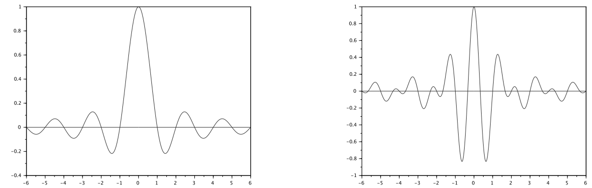


Рис. 8. Графики функций $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ (слева) и $\psi(t) = \frac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t}$ (справа)

функция единичного отрезка $\chi_{[0,1]}$, то в системе Шеннона – Котельникова масштабирующей функцией выступает образ Фурье такой (сдвинутой) характеристической функции: $\varphi_{\text{Ш-К}} = \widehat{\chi_{[-1/2,1/2]}}$. В системе Хаара функции наилучшим образом локализованы и не являются гладкими, в то время как в системе Шеннона – Котельникова все наоборот: функции чрезвычайно гладкие (аналитические!), но при этом плохо локализованные. В отличие от системы Фурье, они все-таки убывают: $\psi(t) = O(1/t)$ при $t \to \infty$. Поэтому локализацией эти всплески обладают. Но убывают они медленно, и это главный недостаток всплесков Шеннона – Котельникова. Плохая локализация (как и для системы Фурье) приводит к распространению шума на всю область и замедляет работу каскадного алгоритма. Что касается аппроксимационных свойств системы Шеннона – Котельникова, то они такие же, как у системы Фурье. Это показывает следующая теорема, являющаяся по сути вариантом теоремы Джексона для системы Шеннона – Котельникова. Через $W_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, обозначается пространство Соболева, состоящее из функций с абсолютно непрерывной $(r-1)$-й производной, у которых r-я производная принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

1.4.6. Теорема. *Если $f \in W_2^r(\mathbb{R})$ и $\|f^{(r)}\|_2 \leqslant 1$, то расстояние от f до ее проекции $S_j f$ на пространство V_j функций ограниченных по частоте, не превосходит $\pi^{-r}\,(2^{-j})^r$.*

Таким образом, функция, у которой r-я производная принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, приближается пространством V_j с точностью порядка $(2^{-j})^r$. При $r = 3$ получаем, что сигнал, для которого $\|f^{(r)}\|_2 \leqslant 1$ приближается проекцией на V_j с точностью $\pi^{-3} 2^{-3j}$. Скажем, расстояние до пространства V_4 меньше 10^{-5}.

Доказательство. Так как $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$, то справедливо равенство

$$\widehat{f^{(r)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^r\widehat{f}(\xi).$$

Следовательно,

$$\left\|(2\pi i\xi)^r\widehat{f}(\xi)\right\|_2 \leqslant 1,$$

откуда

$$\int_{\mathbb{R}} |2\pi\xi|^{2r}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi \leqslant 1.$$

Положим $\Omega_j = [-2^{j-1}, 2^{j-1}]$. Тогда $\widehat{S_jf} = \widehat{f}_{\Omega_j}$. Итак, получаем

$$\begin{aligned}\|f - S_jf\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega_j} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi \leqslant (2\pi 2^{j-1})^{-2r}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega_j}|2\pi\xi|^{2r}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\\ \leqslant (2\pi 2^{j-1})^{-2r}\int_{\mathbb{R}}|2\pi\xi|^{2r}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\\ \leqslant (2\pi 2^{j-1})^{-2r} = \pi^{-2r}2^{-2rj},\end{aligned}$$

что и требовалось. □

§ 1.5. Всплески Мейера

В 1986 г. Ив Мейер создал замечательную систему функций, за которую через 30 лет получил абелевскую премию. Она обладала всеми достоинствами системы Шеннона – Котельникова, но при этом быстро убывала на бесконечности и поэтому была более удобна в использовании. В отличие от последней, система Мейера не была взята «из жизни», а полностью, от начала до конца, придумана. Это — чисто математическая конструкция, причем очень хитрая и тонкая. Многие считают, что именно с системы Мейера началась современная теория всплесков. Прежде чем излагать конструкцию Мейера, надо четко сформулировать задачу, которую она решала.

А. Временно-частотная локализация

Существует прямая связь между гладкостью функции и скоростью убывания ее преобразования Фурье при $\xi \to \infty$. Чем большую гладкость имеет функция, тем быстрее убывает ее преобразование Фурье, и наоборот. Если функция f принадлежит C^r и имеет конечный интеграл от $|f^{(r)}|$, то $\widehat{f}(\xi) = o(\xi^{-r})$ при $\xi \to \infty$. Обратно, если $\int_{\mathbb{R}}(|\xi|^r + 1)|\widehat{f}(\xi)|\,d\xi < \infty$, то $f \in C^r$ (с точностью до множества меры нуль). То же верно и для обратного преобразования Фурье. Есть небольшой зазор между необходимыми и достаточными условиями, причем он непреодолим. Существуют примеры непрерывных функций, когда $\widehat{f}(\xi)$ убывает медленнее, чем $\xi^{-\varepsilon}$ при очень малых $\varepsilon > 0$. С другой стороны, функция $f = \chi_{[-1/2,1/2]}$ разрывна, но для нее, как мы знаем, $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant |\xi|^{-1}$.

Для всплесков важно и то, и другое: функция φ должна быстро убывать (желательно даже иметь компактный носитель) и должна быть гладкой, т. е. ее преобразование Фурье должно быстро убывать. По отдельности эти свойства достижимы. Всплески Хаара имеют компактный носитель, но медленно убывающее преобразование Фурье (убывает как ξ^{-1} при $\xi \to \infty$). Всплески Шеннона – Котельникова, напротив, медленно убывают, но имеют преобразование Фурье с компактным носителем. Совместимы ли эти два свойства? Не вполне. Функция и ее преобразование Фурье не могут одновременно иметь компактный носитель. Если функция имеет компактный носитель, то ее преобразование Фурье является аналитической функцией, и, следовательно, не может иметь компактный носитель. Более, того, как известно, обе функции не могут слишком быстро убывать. Наибольшее одновременное убывание достигается на функции Гаусса $f(t) = e^{-t^2/2}$, которая совпадает со своим преобразованием Фурье.

Итак, никакая функция не может слишком быстро убывать и во временной, и в частотной областях одновременно. Однако достаточно быстрое убывание, как, например, у той же функции Гаусса, возможно. На протяжении почти полувека математики пытались построить системы всплесков, которые бы сочетали быстрое убывание с гладкостью. Это системы Батла – Лемарье (см. [4], [2]). Наиболее удачной и используемой до сих пор стала конструкция Мейера.

Б. План построения КМА

Основная идея Мейера[2] состояла в том, чтобы немного подправить функцию φ, порождающую всплески Шеннона – Котельникова. Подправить так, чтобы она стала быстро убывающей при $t \to \infty$ (по крайней мере, быстрее, чем $O\big(1/t\big)$) и при этом осталась гладкой. Для этого нужно изменить ее преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi} = \chi_{[-1/2,1/2]},$$

сделав его гладким, что обеспечит убывание функции φ (которую можно будет найти как обратное преобразование Фурье от подправленной функции).

[2] Ив Мейер (Yves Meyer), род. 1939, — французский математик, один из основоположников теории всплесков.

Таким образом, нужно попробовать сгладить индикаторную функцию отрезка $[-1/2, 1/2]$, чтобы при этом сохранились все свойства порождаемых ее обратным преобразованием Фурье φ всплесков. Главное — ортогональность целых сдвигов функции φ и порождаемый ею кратномасштабный анализ.

В доказательстве ортогональности целых сдвигов мы существенно использовали, что функция $\widehat{\varphi}$ является кусочно постоянной. Чтобы ослабить это требование, нам понадобится следующий критерий ортогональности целых сдвигов.

1.5.1. Лемма. *Целые сдвиги функции φ с компактным носителем ортонормированы тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+k)|^2 \equiv 1. \tag{1.5.1}$$

Функция в левой части равенства (1.5.1), обозначим ее через $\Phi(\xi)$, называется *периодизацией* функции $|\widehat{\varphi}(\xi)|^2$. Ясно, что функция $\Phi(\xi)$ имеет период 1. Лемма 1.5.1, таким образом, утверждает что *функция φ обладает ортонормированными целыми сдвигами, если и только если периодизация функции $|\widehat{\varphi}|^2$ является тождественной единицей*

Доказательство. Для всякого целого n имеем

$$\begin{aligned}\bigl(\Phi(\xi), e^{2\pi in\xi}\bigr) &= \int_0^1 \Phi(\xi)e^{-2\pi in\xi}\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1 \bigl|\widehat{\varphi}(\xi+k)\bigr|^2 e^{-2\pi in\xi}\,d\xi \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1 \bigl|\widehat{\varphi}(\xi+k)\bigr|^2 e^{-2\pi in(\xi+k)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \bigl|\widehat{\varphi}(\xi)\bigr|^2 e^{-2\pi in\xi}\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}e^{-2\pi in\xi}\,d\xi = \Bigl(\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}e^{2\pi in\xi}\Bigr) \\ &= \Bigl(\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi(\cdot+n)}\Bigr) = \Bigl(\varphi, \varphi(\cdot+n)\Bigr).\end{aligned}$$

Итак,

$$\bigl(\Phi(\xi), e^{2\pi in\xi}\bigr) = \bigl(\varphi, \varphi(\cdot+n)\bigr).$$

Если целые сдвиги функции φ ортонормированы, то скалярное произведение $\bigl(\varphi, \varphi(\cdot+n)\bigr)$ равно единице при $n=0$ и равно нулю при всех остальных целых n. Следовательно, то же верно и для скалярных произведений $\bigl(\Phi(\xi), e^{2\pi in\xi}\bigr)$. Последние являются коэффициентами ряда Фурье периодической функции Φ. Следовательно, у функции Φ все коэффициенты Фурье c_n равны нулю, кроме c_0, который равен 1. Поэтому $\Phi(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi in\xi} = 1$.

Обратно, если $\Phi \equiv 1$, то у этой функции (а она периодическая с периодом 1) все коэффициенты Фурье c_n равны нулю, кроме c_0, который равен 1. Поскольку $c_n = \big(\Phi(\xi), e^{2\pi i n\xi}\big) = \big(\varphi, \varphi(\cdot + n)\big)$, получаем, что $\big(\varphi, \varphi(\cdot + n)\big) = 0$ при всех $n \neq 0$ и $\big(\varphi, \varphi\big) = 1$. $\square$

Лемма 1.5.1 обеспечивает свойство 5) кратномасштабного анализа — ортонормированность целых сдвигов функции φ, а также ортонормированность сдвигов всплеск-функций ψ на каждом уровне. Для проверки этих свойств достаточно, чтобы периодизации соответствующих функций были тождественными константами: периодизации функций $|\varphi|^2$ и $|\psi|^2$ равны единице. Остались два главных свойства кратномасштабного анализа — вложенность пространств V_j (свойство 1) и двоичная структура (свойство 4). Интересно, что оба эти свойства можно обеспечить одной леммой.

1.5.2. Лемма. *Пространство V_0 с ортонормированным бизисом $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, содержится в пространстве $V_1 = \{f(2\cdot)|f(\cdot) \in V_0\}$ тогда и только тогда, когда функция*

$$m(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \tag{1.5.2}$$

является 1-периодической и принадлежит пространству $L_2[0,1]$. Если $2m(-\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k\xi}$ — разложение периодической функции $2m(-\xi)$ в ряд Фурье, т. е. $m(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k\xi}$, то

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi(2t - k). \tag{1.5.3}$$

1.5.3. Замечание. Предполагается, что $m(\xi)$ нигде не обращается в бесконечность, поэтому если $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$, то обязательно $\widehat{\varphi}(2\xi) = 0$. Формально функция $m(\xi)$ в таких точках не определена. Поэтому утверждение леммы 1.5.2 следует понимать так: функция $m(\xi)$ — периодическая на множестве, где она определена. Можно ее продолжить по периодичности на всю прямую и переписать формулу (1.5.2) в виде равенства $\widehat{\varphi}(2\xi) = m(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)$, выполненного уже на всей прямой.

Доказательство. Пространство V_0 порождено всеми функциями $\varphi(t-k),\ k \in \mathbb{Z}$. Значит, пространство V_1 порождено их двоичными сжатиями — функциями $\varphi(2t-k),\ k \in \mathbb{Z}$. Поэтому вложение $V_0 \subset V_1$ равносильно тому, что все порождающие функции $\varphi(\cdot - k)$ лежат в V_1. Для этого достаточно, чтобы $\varphi(\cdot) \in V_1$, тогда и все целые сдвиги будут лежать в V_1. Таким образом, функция $\varphi(t)$ должна быть линейной комбинацией функций $\varphi(2t-k),\ k \in \mathbb{Z}$. Если $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — коэффициенты этой линейной комбинации, то получаем уравнение (1.5.3). Итак,

$V_0 \subset V_1$ в точности тогда, когда φ — решение уравнения (1.5.3) с некоторыми коэффициентами c_k, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Применим теперь преобразование Фурье к обеим частям этого уравнения. Левая часть превратится в $\widehat{\varphi}(\xi)$. Что станет с правой? Пользуясь свойствам преобразования Фурье, получаем $\widehat{\varphi(2t-k)} = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{2\pi i k\xi}{2}}\, \widehat{\varphi}(\xi/2)$. Умножая на c_k и складывая по всем $k \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} c_k e^{-\frac{2\pi i k\xi}{2}} \widehat{\varphi}(\xi/2) = \widehat{\varphi}(\xi/2) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} c_k e^{-\frac{2\pi i k\xi}{2}} = \widehat{\varphi}(\xi/2) m(\xi/2)$$

и приходим к уравнению (1.5.2). Обратное утверждение доказывается аналогично. □

Получается такой план построения кратномасштабного анализа и системы всплесков. Надо найти функцию φ, удовлетворяющую уравнению (1.5.3) и условию (1.5.1). Например, для системы Хаара

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi},$$

для системы Шеннона – Котельникова $\widehat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-1/2,1/2]}$. Потом определить пространство V_0 — оно порождено целыми сдвигами (ортонормированными!) функции φ. Тогда у нас есть и все пространства $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$: каждое V_j состоит из 2^j-сжатий функций из V_0. В силу уравнения (1.5.3) имеем $V_0 \subset V_1$. Сжимая каждую из функций $f \in V_0$ в 2^j раз, получаем, что $V_j \subset V_{j+1}$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Итак, пространства $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют расширяющуюся систему. Значит, свойства 1) – 5) кратномасштабного анализа выполнены.

Чтобы теперь построить систему всплесков, нужно найти функцию $\psi \in V_1$ со свойствами

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi}(\xi+k)\right|^2 \equiv 1\ ; \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi+k)\overline{\widehat{\psi}}(\xi+k) \equiv 0.$$

Тогда ее целые сдвиги $\psi(t-k)$ будут ортонормированы, значит, и целые сдвиги $2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ на j-м уровне будут ортонормированы. А из второго уравнения будет следовать, что эти функции на разных уровнях ортогональны друг другу. Таким образом, ψ будет всплеск-функцией.

B. Конструкция всплесков Мейера

Теперь мы можем реализовать то, что проделал Ив Мейер. Построить систему всплесков, очень близкую к системе Шеннона – Котельникова, в которой функции быстро бы убывали на бесконечности.

С чего начиналось построение системы Шеннона – Котельникова? С функции $\chi_{[-1/2,1/2]}$. Ее обратное преобразование Фурье — функция $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$, порождает кратномасштабный анализ. По нему строилась и всплеск-функция $\psi(t) = \frac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t}$. Надо аккуратно пошевелить функцию $\chi_{[-1/2,1,2]}$, чтобы она стала гладкой (тогда, как мы знаем, ее обратное преобразование Фурье станет быстро убывающим), но при этом по-прежнему порождала кратномасштабный анализ. Задача нетривиальная, успех не гарантирован. Мейер нашел такое решение, хитроумное и довольно сложное. Функцию φ определяем по преобразованию Фурье так:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < \frac{1}{2} - \varepsilon, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{1}{2} + \frac{|\xi| - \frac{1}{2}}{2\varepsilon}\right)\right), & \frac{1}{2} - \varepsilon \leqslant |\xi| \leqslant \frac{1}{2} + \varepsilon, \\ 0, & |\xi| > \frac{1}{2} + \varepsilon, \end{cases} \tag{1.5.4}$$

где ν — произвольная функция, для которой м $\nu(\xi) + \nu(1 - \xi) \equiv 1$ для всех $\xi \in (0, 1)$, причем $\nu(0) = 0$. Конечно, разумно выбирать такую функцию, которая была бы бесконечно гладкой на всей прямой $\mathbb{R}$ и монотонно возрастала на отрезке $[0, 1]$. Пример такой функции изображен на рис. 9.

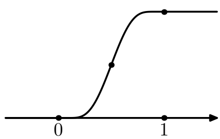


Рис. 9. Функция ν

Таким образом, мы сгладили функцию $\chi_{[-1/2,1/2]}$ на концах отрезка, изменив ее на симметричных интервалах длины 2ε каждый. Надо проверить два свойства: периодизация квадрата этой функции равна 1 и существует 1-периодическая функция m, для которой справедливо равенство $\widehat{\varphi}(2\xi) = m(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi)$.

Периодизация функции $|\widehat{\varphi}|^2$. Обозначим периодизацию через $\Phi(\xi)$. Равенство $\Phi(\xi) = 1$ достаточно проверить на периоде $[-1/2, 1/2]$, причем в силу симметрии (наша функция — четная!) — лишь на полупериоде $[0, 1/2]$. Если $\xi \in [0, 1/2 - \varepsilon]$, то $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ и $\widehat{\varphi}(\xi + k) = 0$ при остальных целых k. Поэтому $\Phi(\xi) = 1$. Если $\xi \in (1/2 - \varepsilon, 1/2]$, то

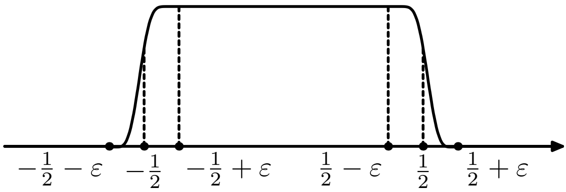


Рис. 10. Преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ функции φ, заданное формулой (1.5.4)

поступим так. Обозначим через $\alpha = \alpha(\xi)$ аргумент функции ν в формуле (1.5.4). Тогда

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(\alpha)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(1-\alpha)\right) \equiv 1. \tag{1.5.5}$$

Если $1/2 - \varepsilon < \xi \leqslant 1/2$, то из (1.5.4) получаем

$$\alpha(\xi - 1) = \alpha(1-\xi) = \frac{1}{2} + \frac{|1-\xi| - \frac{1}{2}}{2\varepsilon} = 1 - \alpha(\xi).$$

Поэтому

$$\Phi(\xi) = \left|\widehat{\varphi}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{\varphi}(\xi-1)\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(\alpha)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(1-\alpha)\right) = 1.$$

Для проверки второго свойства положим $m(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2\xi + 2k)$. Это 1-периодическая функция. Среди всех функций $\widehat{\varphi}(2\xi+2k),\ k \in \mathbb{Z}$, только у $\widehat{\varphi}(2\xi)$, т. е. при $k = 0$, носитель пересекается с носителем функции $\widehat{\varphi}$. Причем на этом пересечении функция $\widehat{\varphi}$ равна 1 (см. рис. 11). Следовательно, $m(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi)$, что и требовалось.

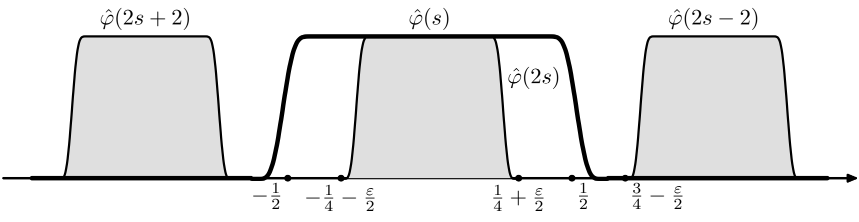


Рис. 11. Функции $\hat{\varphi}(s)$ и $\hat{\varphi}(2s)$

Итак, функция φ, заданная формулой (1.5.4), порождает кратномасштабный анализ. Значит, должна быть и всплеск-функция. Вот она:

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i \xi}\, \widehat{\varphi}(\xi/2)\Big(\widehat{\varphi}(\xi+1) + \widehat{\varphi}(\xi-1)\Big). \qquad (1.5.6)$$

Предоставляем читателю самостоятельно проверить, что периодизация функции $|\widehat{\psi}|^2$ равна единице [3]. Мы примем без доказательства, что ψ есть всплеск-функция; ее график изображен на рис. 12.

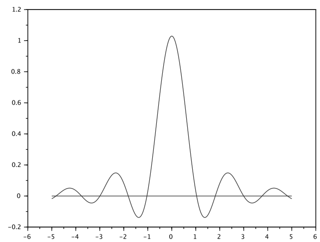


Рис. 12. Функция Мейера

Литература

[1] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд., АФЦ, М., 1999.

[2] Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. Физматлит, М., 2006.

[3] Протасов В. Ю. Синусоида и фрактал. МЦНМО, М., 2020.

[4] Daubechies I. Ten lectures on wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992; рус. пер.: Добеши И. Десять лекция по вейвлетам. Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2001.

[5] Frazier M. W. An introduction to wavelets through linear algebra. Springer, New York, 1999.

Глава 2

Элементы теории приближений

П. А. Бородин

Теория приближений — обширная область анализа, исключительно важная для приложений. Эта глава предназначена для первоначального знакомства с этой областью.

Общая постановка рассматриваемых ниже задач состоит в следующем. В функциональном нормированном пространстве X задается расширяющаяся система подмножеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$, объединение которых всюду плотно в X. Тем самым каждый элемент $f \in X$ получает стремящуюся к нулю последовательность $\rho_n(f) = \rho(f, A_n)$ расстояний до этих подмножеств (наименьших уклонений). Требуется выделить структурные свойства функций f, влекущие определенную скорость стремления к нулю последовательности $\rho_n(f)$ (так называемые прямые теоремы), или, наоборот, вывести какие-то структурные свойства функций из наличия определенной скорости убывания наименьших уклонений (обратные теоремы). Попутно изобретаются методы построения хороших отображений $X \to A_n$, дающих наилучшее или почти наилучшее приближение функций элементами рассматриваемых множеств.

Мы продемонстрируем идеи решения этой общей задачи на конкретных примерах пространств X и систем (линейных и нелинейных) подмножеств A_n.

§ 2.1. Линейные приближения

В самой простой ситуации приближения линейным подпространством речь идет об элементах банахова пространства X и характеристиках их приближений элементами (линейного замкнутого) подпространства $Y \subset X$.

Для расстояния $\rho(x, Y) = \inf\{\|x - y\| \colon y \in Y\}$ от элемента $x \in X$ до Y в этом случае справедлива формула

$$\rho(x, Y) = \sup\left\{f(x) \colon f \in Y^{\perp}, \|f\| = 1\right\},$$

где $Y^{\perp} = \{f \in X^*\colon f(y) = 0$ для всех $y \in Y\}$. Эту формулу удобно применять для оценок расстояния снизу.

Метрическая проекция

$$P_Y(x) = \{y \in Y\colon \|x - y\| = \rho(x, Y)\}$$

элемента x на подпространство Y (множество ближайших элементов) может быть пустой, например, $X = C[0, 1]$,

$$Y = \left\{y \in C[0, 1]\colon \int_0^1 (2t - 1)y(t)\, dt = 0\right\}, \quad x \notin Y,$$

может быть неодноточечной, например, $X = L_1[0, 1]$, $Y = \{\mathrm{const}\}$, $x = I_{[0,1/2]} - I_{[1/2,1]}$. В случае, когда проекция $P_Y(x)$ одноточечна для всякого $x \in X$, подпространство Y называется *чебышёвским*.

Это название мотивируется следующей теоремой Чебышёва (1859): для всякого целого неотрицательного n подпространство $\mathcal{P}_n$ действительных многочленов степени не выше n является в указанном смысле чебышёвским в действительном пространстве $C[a, b]$, причем многочлен $p_n \in \mathcal{P}_n$ наилучшего приближения для функции $f \in C[a, b]$ характеризуется тем, что разность $f - p_n$ альтернирует (т. е. попеременно принимают плюс-минус максимальное по модулю значение) не менее чем в $n + 2$ последовательных точках отрезка $[a, b]$.

В строго выпуклом (на единичной сфере нет отрезков) рефлексивном банаховом пространстве всякое замкнутое линейное подпространство является чебышёвским, поэтому задача описания чебышёвских подпространств интересна для нерефлексивных пространств, в первую очередь для пространств C и L_1. Не углубляясь в эту тематику, приведем несколько фактов. А. Хаар в 1918 г. описал все конечномерные чебышёвские подпространства действительного пространства $C(K)$ непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K: подпространство Y_n размерности n пространства $C(K)$ является чебышёвским тогда и только тогда, когда всякая ненулевая функция из Y_n имеет не более $n - 1$ нулей в K. Базисы таких конечномерных чебышёвских подпространств принято называть чебышёвскими системами, и они имеют широкие приложения. В пространстве $L_1[0, 1]$ с классической мерой Лебега нет чебышёвских подпространств с конечной ненулевой размерностью (М. Г. Крейн, 1938). В произвольном конечномерном нормированном пространстве почти любое подпространство является чебышёвским (В. А. Залгаллер, 1972).

Оператор метрического проектирования $P_Y\colon X \to Y$ для чебышёвского подпространства Y очень редко бывает линейным, как в случае гильбертова пространства X (в котором P_Y совпадает с оператором ортогонального проектирования на Y). Например, оператор, сопоставляющий всякой непрерывной функции ее многочлен наилучшего приближения степени не выше n, при $n \geqslant 1$ не является даже равномерно непрерывным в $C[a,b]$ (см. [3]).

Поэтому на практике стараются найти хорошее (по возможности линейное) отображение $P\colon X \to Y$, для которого $\|x - P(x)\|$ было бы близко к $\rho(x, Y)$ по крайней мере для каких-то классов элементов x.

§ 2.2. Приближения многочленами

Рассмотрим равномерное приближение непрерывных 2π-периодических функций $f \in C[0, 2\pi]$ подпространствами $\mathcal{T}_n$ тригонометрических многочленов степени не выше n. Скорость этого приближения характеризуется модулем непрерывности

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(t+h) - f(t)|\colon t \in [0, 2\pi], 0 \leqslant h \leqslant \delta\}$$

самой функции f или ее производных.

Наименьшие уклонения $\rho(f, \mathcal{T}_n)$ в этом случае по традиции обозначаются через $E_n^T(f)$.

2.2.1. Теорема (D. Jackson, 1911)**.** *Для всякой непрерывной 2π-периодической функции f и всякого $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство*

$$E_n^T(f) \leqslant C\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right), \tag{2.2.1}$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. Для нечетного $m = 2k + 1$ рассмотрим так называемое ядро Джексона

$$J_m(t) = \frac{3}{2\pi(2m^2+1)m}\left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 = \frac{3}{2\pi(2m^2+1)m}\left(\frac{1-\cos mt}{1-\cos t}\right)^2.$$

В силу тождества

$$\frac{1-\cos mt}{1-\cos t} = 2\left(\frac{m}{2} + (m-1)\cos t + (m-2)\cos 2t + \cdots + \cos(m-1)t\right)$$

ядро $J_m(t)$ представляет собой четный неотрицательный тригонометрический многочлен степени $2m-2$, при этом $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_m(t)\,dt = 1$.

Свертка функции f с этим ядром

$$(f * J_m)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_m(x-t) f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} J_m(t) f(x+t)\,dt$$

есть тригонометрический многочлен степени $2m-2$. Имеем

$$|(f*J_m)(x)-f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} J_m(t)(f(x+t)-f(x))\,dt\right|$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} J_m(t)\omega(f,|t|)\,dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} J_m(t)\left(1+\frac{m|t|}{\pi}\right)\omega\left(f,\frac{\pi}{m}\right)\,dt$$

(использовано неравенство $\omega(f,\lambda\delta)\leqslant(1+\lambda)\omega(f,\delta)$)

$$= \omega\left(f,\frac{\pi}{m}\right)\left(1+\frac{m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|J_m(t)\,dt\right). \tag{2.2.2}$$

Оценим последний интеграл:

$$\frac{2\pi(2m^2+1)m}{3}\int_{-\pi}^{\pi}|t|J_m(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}|t|\left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} s\left(\frac{\sin ms}{\sin s}\right)^4 ds \leqslant \frac{16}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 ms}{\sin^3 s}\,ds$$

$$\leqslant \frac{16}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin ms|}{\sin s}\cdot\frac{\sin^2 ms}{\sin^2 s}\,ds \leqslant \frac{16m}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin ms}{\sin s}\right)^2 ds$$

$$= \frac{16m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos kt\right)^2 dt$$

$$= \frac{16m}{\pi}2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right) = 8m^2.$$

Подставляя эту оценку в (2.2.2), получаем

$$E^T_{2m-2}(f) \leqslant \omega\left(f,\frac{\pi}{m}\right)\left(1+\frac{m}{\pi}\cdot\frac{24m^2}{2\pi(2m^2+1)m}\right)$$

$$\leqslant 2\left(1+\frac{6}{\pi^2}\right)\omega\left(f,\frac{\pi}{2m-1}\right).$$

Итак, неравенство (2.2.1) доказано для всех $n=2m-2=4k$, кратных 4. Следовательно, оно верно для всех n с увеличенной константой. □

Отметим, что свертка с ядром Джексона — не единственный способ линейного проектирования на подпространство тригонометрических многочленов, дающий хорошие приближения. Например, так называемые средние Валле Пуссена также дают приближения с оценкой типа (2.2.1), см. [2, гл. 4].

Точная (по всем n) константа $C = 1$ в неравенстве (2.2.1) была найдена Н. П. Корнейчуком (1962).

Для гладких функций теорема Джексона дает одну и ту же оценку $O(1/n)$ скорости убывания наименьших полиномиальных уклонений. Для уточнения этой оценки нужны результаты типа следующей теоремы.

2.2.2. Теорема (Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, J. Favard, 1937). *Для всякой r раз непрерывно дифференцируемой 2π-периодической функции f и всякого $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство*

$$E_n^T(f) \leqslant \frac{K_r}{(n+1)^r} E_n^T(f^{(r)}),$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r+1)\nu}}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

есть постоянная Фавара, точная для этого неравенства.

Доказательство этой теоремы можно найти в [1, гл. 2]. Из этой теоремы и теоремы Джексона следует доказанная также Джексоном классическая прямая теорема для равномерных тригонометрических приближений r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций:

$$E_n^T(f) \leqslant \frac{C(r)}{(n+1)^r}\, \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n+1}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Приведем примеры обратных теорем для таких приближений.

2.2.3. Теорема (С. Б. Стечкин, 1951). *Для всякой непрерывной 2π-периодической функции f и всякого $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\omega(f, \delta) \leqslant 8\delta \sum_{n=0}^{[1/\delta]} E_n^T(f).$$

Доказательство. При $\delta \geqslant 1/2$ имеем

$$\omega(f, \delta) \leqslant 2E_0^T(f) \leqslant 4\delta E_0^T(f).$$

Пусть теперь $2^{-m-1} \leqslant \delta < 2^{-m}$ для некоторого натурального числа m, T_n — тригонометрический многочлен наилучшего приближения степени n для f. Имеем

$$\omega(f, \delta) \leqslant 2E_{2^m}^T(f) + \omega(T_{2^m}, \delta) \leqslant 2E_{2^m}^T(f) + \delta \|T'_{2^m}\|_C. \tag{2.2.3}$$

Таким образом, надо научиться оценивать норму производной тригонометрического многочлена.

2.2.4. Лемма (неравенство Бернштейна)**.** *Для всякого тригонометрического многочлена T_n степени n и всякого $t \in (0,1)$ выполнено неравенство*

$$\|T_n'\|_{C[-\pi,\pi]} \leqslant n\|T_n\|_{C[-\pi,\pi]}.$$

Точность этого неравенства показывает многочлен $T_n(t) = \cos nt$.

Доказательство. Положим $M = \|T_n\|_{C[-\pi,\pi]}$. Пусть, от противного, $\|T_n'\| > nM$. Без ограничения общности можно считать, что $T_n'(0) > n(M+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Подберем t_0 так, чтобы многочлен $S_n(t) = (M+\varepsilon)\cos n(t+t_0)$ в нуле совпадал с T_n:

$$S_n(0) = (M+\varepsilon)\cos nt_0 = T_n(0) \quad \text{и} \quad S_n'(0) = -(M+\varepsilon)n\sin nt_0 > 0. \tag{2.2.4}$$

На каждом интервале

$$I_k = \Bigl(\frac{\pi k}{n} - t_0, \frac{\pi(k+1)}{n} - t_0\Bigr)$$

многочлен S_n меняется от $-(M+\varepsilon)$ до $M+\varepsilon$, поэтому его график имеет на I_k хотя бы одну общую точку с графиком T_n. На том из интервалов I_k, который содержит нуль ($|S_n(0)| = |T_n(0)| \leqslant M < M+\varepsilon$), многочлен S_n возрастает в силу (2.2.4), совпадает с T_n в нуле, причем

$$T_n'(0) > n(M+\varepsilon) > S_n'(0).$$

Следовательно, на этом интервале графики T_n и S_n пересекаются по крайней мере в трех точках, а всего у ненулевой разности $T_n - S_n$ есть не менее $2n-1+3 = 2n+2$ нулей на периоде, что невозможно. □

Применяя неравенство Бернштейна, продолжим оценку (2.2.3):

$$\begin{aligned}
\omega(f,\delta) &\leqslant 2E^T_{2^m}(f) + \delta\sum_{k=1}^m \bigl\|T'_{2^k} - T'_{2^{k-1}}\bigr\|_C + \delta\bigl\|T_1' - T_0'\bigr\|_C \\
&\leqslant 2E^T_{2^m}(f) + \delta\sum_{k=1}^m 2^k\,\|T_{2^k} - T_{2^{k-1}}\|_C + \delta\,\|T_1 - T_0\|_C \\
&\leqslant 8\delta 2^{m-1}E^T_{2^m}(f) + 8\delta\sum_{k=1}^m 2^{k-2}E^T_{2^{k-1}}(f) + 2\delta E^T_0(f)
\end{aligned}$$

(использована оценка $\|T_{2^k} - T_{2^{k-1}}\|_C \leqslant 2E^T_{2^{k-1}}(f)$)

$$\leqslant 8\delta\sum_{n=0}^{2^m} E^T_n(f) \leqslant 8\delta\sum_{n=0}^{[1/\delta]} E^T_n(f),$$

что завершает доказательство. □

Из теорем Джексона и Стечкина вытекает такой факт.

2.2.5. Следствие. *Пусть* $0<\alpha<1$. *Для непрерывной* 2π*-периодической функции* f *следующие утверждения эквивалентны*:
(i) $\omega(f,\delta)=O(\delta^{\alpha}), \quad \delta\to 0;$
(ii) $E_n^T(f)=O(n^{-\alpha}), \quad n\to\infty.$

Импликацию $(ii)\Rightarrow(i)$ в этом следствии доказали С. Н. Бернштейн (1912, в более слабой форме) и Ш. Валле-Пуссен (Ch. J. de la Vallée Poussin, 1919).

2.2.6. Замечание. Из теоремы Стечкина следует не более чем липшицевость функции f — в случае сходимости ряда из ее наименьших уклонений. На самом деле из сходимости ряда $\sum E_n^T(f)$ можно вывести гладкость функции f. Более точно, из сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{r-1}E_n^T(f) \tag{2.2.5}$$

для некоторого натурального r следует непрерывная r-дифференцируемость функции f.

Поясним последнее утверждение. Пусть опять T_n — тригонометрический многочлен наилучшего приближения степени n для f. Ясно, что

$$f=T_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_{2^k}-T_{2^{k-1}}\right), \tag{2.2.6}$$

причем ряд сходится равномерно. Применяя неравенство Бернштейна, получаем

$$\begin{aligned}\left\|T_{2^k}^{(r)}-T_{2^{k-1}}^{(r)}\right\|_C &\leqslant (2^k)^r 2E_{2^{k-1}}^T(f)=2^{k(r-1)+3}2^{k-2}E_{2^{k-1}}^T(f)\\ &\leqslant 2^{k(r-1)+3}\sum_{m=2^{k-2}+1}^{2^{k-1}}E_m^T(f)=2^{2r+1}2^{(k-2)(r-1)}\sum_{m=2^{k-2}+1}^{2^{k-1}}E_m^T(f)\\ &\leqslant 2^{2r+1}\sum_{m=2^{k-2}+1}^{2^{k-1}}m^{r-1}E_m^T(f),\end{aligned}$$

так что ряд из r-х производных ряда (2.2.6) равномерно сходится, поэтому f непрерывно дифференцируема r раз.

До сих пор мы рассматривали приближения тригонометрическими многочленами на периоде. К ним сводятся приближения алгебраическими многочленами на отрезке, поскольку всякая функция f

из $C[-1,1]$ порождает 2π-периодическую непрерывную функцию

$$g(t) = f(\cos t),$$

так что наименьшие уклонения $E_n(f) = E_n(f, C[-1,1])$ от алгебраических многочленов степени не выше n в пространстве $C[-1,1]$ удовлетворяют равенству

$$E_n(f) = E_n^T(g), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(при указанной замене алгебраический многочлен переходит в четный тригонометрический многочлен той же степени, а функция g четная).

Поскольку $\omega(g,\delta) \leqslant \omega(f,\delta)$, теорема Джексона верна и в алгебраическом случае. В то же время $\omega(f,\delta)$ не оценивается через $\omega(g,\delta)$ даже с константой (проблемы вблизи точек ± 1), поэтому обратные теоремы типа теоремы Стечкина приходится формулировать для внутренних отрезков из интервала $(-1,1)$.

В заключение этого параграфа приведем еще одну теорему, характеризующую голоморфные на отрезке функции в терминах их наименьших равномерных полиномиальных уклонений.

2.2.7. Теорема (С. Н. Бернштейн, 1912). *Пусть* $G(z) = (z+1/z)/2$ *есть функция Жуковского,* $q \in (0,1)$*,* $\Gamma_q = G(|z| = q)$ — *эллипс с фокусами в точках* ± 1.

(i) *Если функция* f *голоморфна на замыкании* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma_q}$ *внутренности эллипса* Γ_q *, то*

$$E_n(f, C[-1,1]) \leqslant C(f) q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.2.7}$$

(ii) *Если* $f \in C[-1,1]$ *и выполнено (2.2.7), то* f *голоморфно продолжается с отрезка на внутренность* $\operatorname{Int}\Gamma_q$ *указанного эллипса.*

Доказательство. (i) Композиция $f(G(z))$ голоморфна на замкнутом кольце $\{z\colon q \leqslant |z| \leqslant 1/q\}$, так что для коэффициентов ее ряда Лорана $f(G(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ в этом кольце выполнены неравенства

$$\varlimsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = \varlimsup_{n\to\infty} |c_{-n}|^{1/n} \leqslant q,$$

откуда

$$|c_n| = |c_{-n}| \leqslant C_1(f) q^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(равенство $c_n = c_{-n}$ следует из тождества $f(G(z)) = f(G(1/z))$). Следовательно, частичная сумма $S_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$ хорошо приближает эту функцию на окружности:

$$\|f \circ G - S_n\|_{C(|z|=1)} \leqslant C_2(f) q^n.$$

Поскольку $S_n(z) = S_n(1/z)$, имеем $S_n(z) = P_n(G(z))$ для некоторого многочлена P_n степени n и

$$E_n(f, C[-1,1]) \leqslant \|f - P_n\|_{C[-1,1]} = \|f \circ G - S_n\|_{C(|z|=1)} \leqslant C_2(f) q^n.$$

(ii) Пусть P_n — многочлены, приближающие функцию f с указанной скоростью:

$$\|f - P_n\|_{C[-1,1]} \leqslant C q^n.$$

Тогда f представляется в виде равномерно сходящегося ряда

$$f(x) = P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(P_n(x) - P_{n-1}(x)\right). \tag{2.2.8}$$

Слагаемые этого ряда малы по норме на отрезке:

$$\|P_n - P_{n-1}\|_{C[-1,1]} \leqslant \|f - P_n\| + \|f - P_{n-1}\| \leqslant 2C q^{n-1}. \tag{2.2.9}$$

Следующая лемма показывает, что они малы по норме и в некоторой окрестности отрезка.

2.2.8. Лемма (неравенство Уолша для отрезка)**.** *Для всякого многочлена Q_n степени n и всякого $t \in (0,1)$ выполнено неравенство*

$$\|Q_n\|_{C(\Gamma_t)} \leqslant t^{-n} \|Q_n\|_{C[-1,1]}.$$

Доказательство. Пусть $g(z) \in G^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ — ветвь, конформно отображающая внешность отрезка $[-1,1]$ на внешность единичного круга (при этом отображении всякий эллипс Γ_t переходит в окружность $|z| = 1/t$). Функция $Q_n(z)/g^n(z)$ имеет в ∞ устранимую особенность, поэтому можно считать, что она голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$. По принципу максимума модуля при $z \in \Gamma_t$ и $t < s < 1$ имеем

$$|t^n Q_n(z)| = \left|\frac{Q_n(z)}{g^n(z)}\right| \leqslant \max_{\zeta \in \Gamma_s} \left|\frac{Q_n(\zeta)}{g^n(\zeta)}\right| = s^n \|Q_n\|_{C(\Gamma_s)},$$

что при $s \to 1$ дает искомое неравенство. □

В силу этой леммы неравенство (2.2.9) дает оценку

$$\|P_n - P_{n-1}\|_{C(\Gamma_t)} \leqslant 2C \frac{q^{n-1}}{t^n},$$

поэтому ряд (2.2.8) сходится равномерно на $\overline{\operatorname{Int} \Gamma_t}$ для всякого числа $t \in (q,1)$. Следовательно, функция f голоморфна в $\operatorname{Int} \Gamma_q$. □

§ 2.3. Приближения рациональными функциями

Одним из основных способов нелинейного приближения функций является приближение рациональными функциями. Обозначим через $\mathcal{R}_n(X)$ множество всех действительных или комплексных рациональных функций степени не выше n, принадлежащих заданному функциональному пространству X. Ясно, что наименьшие рациональные уклонения

$$R_n(f, X) = \rho(f, \mathcal{R}_n(X)) = \inf\{\|f - r_n\|_X : r_n \in \mathcal{R}_n(X)\}$$

не превосходят соответствующих полиномиальных уклонений функции f. В ряде случаев рациональные уклонения убывают существенно быстрее полиномиальных.

Классическим примером такого преимущества рациональных приближений над полиномиальными служит равномерное приближение функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$. Наименьшие полиномиальные уклонения $E_n(|x|, C[-1, 1])$, как следует из теоремы Джексона, не превосходят $O(1/n)$. Как следует из замечания 2.2.6, $O(1/n)$ нельзя заменить на $O(1/n^{1+\varepsilon})$ ни для какого $\varepsilon > 0$. Более точно, как доказал С. Н. Бернштейн (1914), существует предел

$$\lim_{n\to\infty} nE_n(|x|, C[-1, 1]) = 0.28\ldots .$$

Как показывает следующий результат, рациональными функциями $|x|$ приближается значительно быстрее.

2.3.1. Теорема (D. Newman, 1964). *При $n \geqslant 5$ имеет место оценка*

$$R_n(|x|, C[-1, 1]) \leqslant 3e^{-\sqrt{n}}. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Покажем, что рациональная функция

$$r_n(x) = x \cdot \frac{N(x) - N(-x)}{N(x) + N(-x)},$$

где

$$N(x) = N_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 + a^k), \quad a = e^{-1/\sqrt{n}},$$

есть так называемый многочлен Ньюмена, приближает $|x|$ нужным образом:

$$\big|\,|x| - r_n(x)\big| \leqslant 3e^{-\sqrt{n}}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{2.3.2}$$

Поскольку обе функции $|x|$ и $r_n(x)$ четные, достаточно доказать (2.3.2) только для $x \in [0, 1]$. Для таких x имеем $N(x) \geqslant N(-x) \geqslant 0$, откуда $0 \leqslant r_n(x) \leqslant x$.

При $x \in [0, e^{-\sqrt{n}}]$ имеем $0 \leqslant x - r_n(x) \leqslant x \leqslant e^{-\sqrt{n}}$. В случае $x \in [e^{-\sqrt{n}}, 1]$ нам понадобится такой вспомогательный факт: при $n \geqslant 5$ и $x \in [e^{-\sqrt{n}}, 1]$ многочлены Ньюмена удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{N(-x)}{N(x)}\right| \leqslant e^{-\sqrt{n}}. \tag{2.3.3}$$

Зафиксируем x и такой номер $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, что $a^{m+1} \leqslant x \leqslant a^m$. Имеем

$$\left|\frac{N(-x)}{N(x)}\right| = \prod_{k=1}^{m} \frac{a^k - x}{a^k + x} \cdot \prod_{k=m+1}^{n-1} \frac{x - a^k}{x + a^k} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \frac{a^k - a^n}{a^k + a^n} \cdot \prod_{k=m+1}^{n-1} \frac{a^m - a^k}{a^m + a^k}$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - a^k}{1 + a^k} \leqslant \exp\left(-2\sum_{k=1}^{n-1} a^k\right) = \exp\left(-2\frac{a - a^n}{1 - a}\right),$$

где использовано неравенство $(1-t)/(1+t) \leqslant e^{-2t}$, верное при всех неотрицательных t. Подставляя $a = e^{-1/\sqrt{n}}$, продолжаем оценку:

$$\exp\left(-\frac{2(e^{-1/\sqrt{n}} - e^{-\sqrt{n}})}{1 - e^{-1/\sqrt{n}}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1 - e^{-1/\sqrt{n}}}\right) \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

в силу условия $n \geqslant 5$ и неравенства $1 - e^{-t} \leqslant t$, которое верно при всех неотрицательных t.

Согласно доказанному неравенству (2.3.3) имеем

$$|x - r_n(x)| = 2x\left|\frac{N(-x)}{N(x) + N(-x)}\right|$$
$$\leqslant \frac{2}{|N(x)/N(-x)| - 1} \leqslant \frac{2}{e^{\sqrt{n}} - 1} \leqslant 3e^{\sqrt{n}},$$

что и требовалось. □

В дальнейшем А. П. Буланов (1969) и Н. С. Вячеславов (1975) установили слабую асимптотику

$$C_1 e^{-\pi\sqrt{n}} \leqslant R_n(|x|, C[-1,1]) \leqslant C_1 e^{-\pi\sqrt{n}},$$

а затем Г. Шталь (H. Stahl, 1992) получил точный результат:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\pi\sqrt{n}} R_n(|x|, C[-1,1]) = 8.$$

Перейдем к рациональным приближениям классов функций. Одной из первых обратных теорем здесь была следующая.

2.3.2. Теорема (Е. П. Долженко, 1962). *Если для действительной функции $f \in C[a,b]$ ряд $\sum R_n(f)$ из ее наименьших равномерных рациональных уклонений сходится, то она абсолютно непрерывна и*

$$\|f'\|_{L_1[a,b]} \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} R_n(f).$$

Для доказательства нам понадобится такое утверждение.

2.3.3. Лемма (неравенство Долженко). *Для всякой действительной рациональной функции r_n степени n, не имеющей полюсов на отрезке $[a,b]$, выполнено неравенство*

$$\|r_n'\|_{L_1[a,b]} \leqslant 2n\|r_n\|_{C[a,b]}.$$

Доказательство. Заметим, что L_1-норма производной r_n' равна вариации функции r_n на отрезке $[a,b]$, а последняя не превосходит $2n\|r_n\|_{C[a,b]}$, поскольку r_n принимает на $[a,b]$ только значения из отрезка $[-\|r_n\|_{C[a,b]}, \|r_n\|_{C[a,b]}]$ и каждое значение не более n раз. $\square$

Точность этого неравенства Долженко показывает многочлен Чебышёва $T_n(t) = \cos n(\arccos t)$ на отрезке $[-1,1]$.

Доказательство теоремы 2.3.2. Можно считать, что сходится ряд из уклонений от действительных рациональных функций. Пусть r_n — действительная рациональная функция степени не выше n наилучшего приближения (она существует и единственна, как доказал еще П. Л. Чебышёв), т. е. $\|f - r_n\|_{C[a,b]} = R_n(f)$. Применяя лемму, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|r_{2^{k+1}}' - r_{2^k}'\|_{L_1[a,b]} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+2}\|r_{2^{k+1}} - r_{2^k}\|_{C[a,b]}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+3} R_{2^k}(f) = 16 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-1} R_{2^k}(f) \leqslant 16 \sum_{n=1}^{\infty} R_n(f).$$

Таким образом, ряд

$$r_1(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (r_{2^{k+1}}(t) - r_{2^k}(t))$$

равномерно на $[a,b]$ сходится к f, а соответствующий ряд из производных сходится в $L_1[a,b]$. Следовательно, f абсолютно непрерывна и

$$\|f'\|_{L_1[a,b]} \leqslant \|r_1'\|_{L_1[a,b]} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} R_n(f).$$

Поскольку имеют место соотношения

$$\|r_1'\|_{L_1[a,b]} = \|r_1' - r_0'\|_{L_1[a,b]} \leqslant 2\|r_1 - r_0\|_{C[a,b]} \leqslant 4R_0(f),$$

нужная оценка нормы f' выполнена с $C = 16$. □

Понятно, что сходимость ряда из рациональных уклонений не гарантирует таких свойств гладкости функции, как в случае сходимости ряда из полиномиальных уклонений (см. замечание 2.2.6). В то же время класс абсолютно непрерывных функций не характеризуется сходимостью ряда из рациональных уклонений: как показал А. А. Гончар (1967), равномерные рациональные уклонения абсолютно непрерывных функций на отрезке могут сходиться к нулю сколь угодно медленно. Ряд прямых теорем для абсолютно непрерывных функций получил болгарский математик V. Popov; например, если $f' \in L_p[a,b]$, $1 < p < \infty$, то $R_n(f) \leqslant C(p)\|f'\|_{L_p}/n$ (ср. с теоремой Джексона, которая дает такую же скорость для полиномиальных уклонений при $f' \in L_\infty[a,b]$).

Классами функций, характеризующимися в терминах скорости убывания рациональных уклонений, оказались классы О. В. Бесова. Приведем определение этих классов на отрезке.

Для функции $f \in L_p[a,b]$, $0 < p < \infty$, определяется ее интегральный модуль непрерывности порядка m:

$$\omega_m(f,\delta)_p := \sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{L_p[a,b-mh]} : 0 \leqslant h \leqslant \min\{\delta,(b-a)/m\}\right\},$$

где $\Delta_h^m f(t) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1} f(t))$, $\Delta_h^1 f(t) = f(t+h) - f(t)$. Говорят, что функция f принадлежит классу Бесова $B_p^\alpha[a,b]$, если

$$\int_0^\infty \left(\frac{\omega_{[\alpha]+1}(f,t)_p}{t^\alpha}\right)^p \frac{dt}{t} < \infty.$$

2.3.4. Теорема (А. А. Пекарский, 1987)**.** *Пусть $f \in C[a,b]$ и $\alpha > 1$. Ряд*

$$\sum R_n(f, C[a,b])^{1/\alpha}$$

сходится тогда и только тогда, когда $f \in B_{1/\alpha}^\alpha[a,b]$.

Отметим, что при $\alpha \geqslant 1$ всякая функция $f \in B_{1/\alpha}^\alpha[a,b]$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ (при $\alpha > 1$ это следует из теоремы Пекарского и теоремы Долженко).

Другие «смыкающиеся» прямые и обратные теоремы для рациональных приближений в различных функциональных пространствах приведены в [6].

§ 2.4. m-членные приближения

В последние десятилетия в связи с разнообразными приложениями исследуется общая схема приближений расширяющейся последовательностью нелинейных множеств, получившая название m-членных приближений.

Пусть X — банахово пространство, D — *словарь* в X, т. е. такое подмножество единичной сферы $S(X)$, что линейные комбинации его элементов плотны в X: $\overline{\operatorname{span}} D = X$. Для всякого натурального m определим нелинейное множество

$$\Sigma_m(D) := \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k \colon \lambda_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ g_k \in D \right\}$$

m-членных линейных комбинаций элементов словаря. Ясно, что

$$\Sigma_1(D) \subset \Sigma_2(D) \subset \cdots .$$

Всякий элемент $x \in X$ получает последовательность наименьших m-членных уклонений

$$\sigma_m(x) = \sigma_m(x, D) = \rho(x, \Sigma_m(D)) = \inf\{\|x - y\| \colon y \in \Sigma_m(D)\},$$

где $m = 1, 2, \ldots$. Естественно также положить $\sigma_0(x) = \|x\|$.

Для различных функциональных классов F в функциональных пространствах X можно пытаться доказывать прямые и обратные теоремы, характеризующие этот класс в терминах скорости убывания к нулю m-членных уклонений его элементов, а также искать оптимальный словарь $D = D(F)$, который, с одной стороны, был бы не слишком массивен, с другой стороны, давал хорошие m-членные приближения элементам $x \in F$. При этом наилучшее m-членное приближение элемента x, т. е. ближайший к нему элемент во множестве $\Sigma_m(D)$, может и не существовать, и речь идет о поиске эффективных алгоритмов хороших или почти наилучших m-членных приближений.

В такой общей постановке задача об оценке m-членных приближений впервые рассматривалась и исследовалась почти одновременно несколькими математиками в 1990-х (R. DeVore, В. Н. Темляков, M. Donahue, G. Davis и др.). Частными случаями m-членных приближений являются приближения рациональными функциями, сплайнами, ридж-функциями и другими нелинейными множествами, которые широко исследовались в последнее столетие. Первым частным случаем вычисления m-членных приближений, по-видимому, были билинейные приближения, возникшие в рамках спектральной теории компактных операторов (1906; см. ниже пример 2.4.4). С. Б. Стечкин (1955) первым определил m-членные приближения относительно конкретного словаря — ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве, и применил их для описания элементов с абсолютно сходящимся рядом коэффициентов Фурье по этому базису.

2.4.1. Пример. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $D = \{e_n\colon n = 1, 2, \dots\}$. Нетрудно видеть, что для всякого $x = \sum x_n e_n \in H$ имеем

$$\sigma_m(x) = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_{k(n)}|^2\right)^{1/2},$$

где $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — перестановка, упорядочивающая коэффициенты Фурье элемента x по убыванию: $|x_{k(1)}| \geqslant |x_{k(2)}| \geqslant \cdots$.

Уже на примере этого простого словаря отчетливо видно преимущество использования m-членных приближений. Положим

$$A_1(\{e_n\}, M) = \left\{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leqslant M\right\}.$$

Для всякого $M > 0$ и всякого $x \in A_1(\{e_n\}, M)$ имеем

$$\sigma_m(x)^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_{k(n)}|^2 \leqslant |x_{k(m+1)}| \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_{k(n)}| \leqslant \frac{M^2}{m+1}.$$

Таким образом, на классах $A_1(\{e_n\}, M)$ элементов с абсолютно суммируемыми коэффициентами Фурье мы имеем гарантированную скорость $M/(m+1)^{1/2}$ сходимости m-членных приближений, в то время как частичные суммы ряда Фурье для элементов этого класса могут сходиться сколь угодно медленно. Точность показателя $1/2$ показывают элементы $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n/n^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Приведем еще один результат об оценке снизу m-членных приближений относительно ортонормированного базиса.

2.4.2. Теорема (Б. С. Кашин, 1985). *Существует такое $\delta_0 > 0$, что для всякого ортонормированного базиса $\Phi = \{\varphi_n\}$ и всякой ортонормированной системы $\Psi = \{\psi_k\}$ в гильбертовом пространстве куб*

$$B_N(\Psi) = \left\{\sum_{k=1}^{N} a_k \psi_k\colon |a_k| \leqslant 1, k = 1, \dots, N\right\}$$

является «несжимаемым»:

$$m \leqslant \delta_0 N \Longrightarrow \max_{f \in B_N(\Psi)} \sigma_m(f, \Phi) \geqslant \frac{3}{4} N^{1/2}.$$

Несжимаемость здесь понимается в том смысле, что указанные m-членные приближения сопоставимы с диаметром куба B_N.

2.4.3. Следствие. *Для всякого ортонормированного базиса* Φ *в пространстве* $L_2[0,1]$ *выполнено неравенство*

$$\max_{f\in H^\alpha} \sigma_m(f,\Phi) \geqslant \frac{C(\alpha,\delta_0)}{m^\alpha},$$

где $\alpha\in(0,1]$ *и*

$$H^\alpha = \{f\in L_2(0,1)\colon \|f\|_{L_\infty}\leqslant 1, |f(x)-f(y)|\leqslant |x-y|^\alpha \ \forall x,y\in[0,1]\}.$$

Доказательство. Положим $N=[m/\delta_0]+1$. Пусть функция ψ_1 равна x^α при $x\in[0,1/(2N)]$, $(1/N-x)^\alpha$ при $x\in[1/(2N),1/N]$ и нулю в остальных точках. Положим $\psi_k(x)=\psi(x-(k-1)/N)$, где $k=2,\ldots,N$. Функции ψ_k имеют непересекающиеся носители в отрезке $[0,1]$, взаимно ортогональны и имеют норму $\eta=C(\alpha)/N^{\alpha+1/2}$ в пространстве $L_2[0,1]$. Куб

$$B_N=\left\{\sum_{k=1}^N a_k\psi_k\colon |a_k|\leqslant 1, k=1,\ldots,N\right\}$$

целиком лежит в H^α. Применяя теорему Кашина к кубу B_N/η, получаем

$$\begin{aligned}\max_{f\in H^\alpha}\sigma_m(f,\Phi) &\geqslant \max_{f\in B_N}\sigma_m(f,\Phi) = \eta\max_{f\in B_N/\eta}\sigma_m(f,\Phi)\\ &\geqslant \eta\cdot\frac{3}{4}N^{1/2} = \frac{C(\alpha,\delta_0)}{m^\alpha},\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Получается, что класс H^α в $L_2[0,1]$ приближается всей совокупностью m-мерных подпространств, натянутых на элементы произвольного ортонормированного базиса, не лучше, чем $O(m^{-\alpha})$. В то же время этот класс даже в равномерной метрике приближается многочленами с той же погрешностью — см. следствие 2.2.5. Таким образом, для класса H^α словарь из ортонормированного базиса не дает m-членных приближений лучше обычных линейных приближений. Для индивидуальных функций из H^α такое улучшение, конечно, бывает. Например, для функции $|\sin t|\in H^1$ наименьшие m-членные уклонения относительно тригонометрического словаря $\{e^{ikt}\colon k\in\mathbb{Z}\}$ в пространстве $C[0,2\pi]$ ведут себя как $m^{-3/2}$ (В. Е. Майоров, 1986), в то время как тригонометрическими многочленами степени m эта функция равномерно приближается не лучше чем $O(1/m)$ (см. выше теорему Джексона и замечание 2.2.6).

2.4.4. Пример. В пространстве $H = L_2([0,1]^2)$ рассмотрим словарь

$$D = \{\varphi(t)\psi(s) \colon \varphi, \psi \in L_2[0,1]\}.$$

Э. Шмидт (E. Schmidt, 1906) фактически доказал, что для всякой функции $f \in H$ справедливо равенство

$$\sigma_m(f) = \left(\sum_{n=m}^{\infty} s_n(f)^2\right)^{1/2},$$

где $\{s_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ — упорядоченная по убыванию последовательность s-чисел (чисел фон Неймана – Шаттена, квадратных корней из собственных чисел оператора A^*A) оператора

$$(Ax)(t) = \int_0^1 f(t,u)x(u)\,du = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \langle x, \psi_n \rangle \varphi_n(t),$$

действующего в $L_2[0,1]$ (после второго равенства написано представление Гильберта – Шмидта компактного оператора A через числа s_n; $\{\psi_n\}$ — ортонормированный базис, $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в $L_2[0,1]$, зависящие от A). Интересно, что s_n равно расстоянию от оператора A до множества всех n-мерных операторов (по операторной норме), т. е. в наших терминах s_n есть наименьшее n-членное уклонение оператора A относительно словаря, состоящего из нормированных одномерных операторов.

2.4.5. Пример. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим словарь D, состоящий из нормированных «ступенек»

$$aI_{[0,s]} + bI_{[s,1]}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{R},\ s \in [0,1].$$

Множество $\Sigma_m(D)$ здесь состоит из кусочно постоянных функций с не более чем $m+1$ отрезками постоянства (сплайны степени 0 с нефиксированными узлами). Аналогично можно представить как m-членные приближения и приближения сплайнами произвольной степени с нефиксированными узлами и с заданным порядком гладкости в этих узлах. В этом очерке мы совсем не касаемся глубоко развитой и важной для приложений теории сплайн-аппроксимации. Представление об этой теории можно получить по соответствующим главам книг [4], [5].

2.4.6. Пример. Пусть в каком-то банаховом пространстве X функций, определенных на некотором подмножестве комплексной плоскости, в качестве словаря D выбраны все такие дробно-линейные функции $r(t) = (at+b)/(ct+d)$, что $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $r \in S(X)$. Для всякого натурального m замыкание множества $\Sigma_m(D)$ совпадает со множеством всех рациональных функций степени не выше m из X. Таким образом, наименьшие m-членные уклонения $\sigma_m(f)$ совпадают с наименьшими рациональными уклонениями $R_m(f)$ порядка m. Для $m = 0$ это может быть неверно: норма $\|f\|$ может не равняться расстоянию от f до множества всех констант (если, конечно, константы принадлежат пространству X).

Докажем одно общее утверждение о дихотомии для словарей в гильбертовом пространстве: либо словарь D «переполнен» и для всякого элемента его наименьшие m-членные уклонения убывают со скоростью геометрической прогрессии, либо существуют элементы со сколь угодно медленным убыванием m-членных уклонений. Все употребительные на практике словари, в частности словари из приведенных выше примеров, относятся ко второму типу.

Пусть H — гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Для словаря $D \subset S(H)$ определим величину

$$\rho(D) = \inf_{x \in S(H)} \sup\{|\langle x, g\rangle| \colon g \in D\},$$

и расширяющееся семейство новых словарей $D_m = \Sigma_m(D) \cap S(H)$, где $m \in \mathbb{N}$.

2.4.7. Теорема (П. А. Бородин, E. Kopecká, 2021)**.** *Предположим, что $D \subset S(H)$ — словарь.*

(i) *Если $\rho(D_k) > 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\sigma_m(x) \leqslant |x|(1 - \rho(D_k)^2)^{[m/k]/2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.4.1}$$

для всякого $x \in H$.

(ii) *Если $\rho(D_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то для всякой последовательности $\alpha_m \to 0$ найдется такой элемент $x \in H$, что $\sigma_m(x) \geqslant \alpha_m$ для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. (i) В соответствии с определением $\rho(D_k)$ для всякого $x \in H$ получаем

$$\sigma_k^2(x) = |x|^2 - \sup_{g \in D_k} |\langle x, g\rangle|^2 \leqslant |x|^2(1 - \rho(D_k)^2),$$

так что для всякого $\varepsilon > 0$ можно уменьшить норму элемента x с коэффициентом $(1 - \rho(D_k)^2 + \varepsilon)^{1/2}$ вычитанием элемента из $\Sigma_k(D)$. При

m-членном приближении элемента x такое вычитание можно произвести $[m/k]$ раз и тем самым уменьшить норму x с коэффициентом $(1-\rho(D_k)^2+\varepsilon)^{[m/k]/2}$. Поскольку ε произвольно, получаем (2.4.1).

(ii) Всякая стремящаяся к нулю последовательность мажорируется монотонной стремящейся к нулю последовательностью, поэтому можно считать, что $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots$. Также можно считать, что $\alpha_0 \leqslant 1/12$: если $\alpha_0 > 1/12$ и требуемый элемент $x \in H$ найдется для последовательности $\{\alpha_m/(12\alpha_0)\}$, то элемент $12\alpha_0 x$ подойдет для $\{\alpha_m\}$. Положим

$$\beta_m = 4\sqrt{\alpha_m^2 - \alpha_{m+1}^2}.$$

Тогда

$$\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n^2 = 16\alpha_m^2, \quad (\beta_m) \in \ell_2.$$

Для всякого натурального k выберем такой вектор $v_k \in S(H)$, что $\sup\{|\langle v_k, g\rangle|\colon g \in D_k\} \leqslant \min\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}/4$. Последовательность $\{v_k\}$ слабо сходится к нулю, поскольку $\overline{\operatorname{span}}\, D = H$ и $D \subset D_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому найдутся такая подпоследовательность $\{v_{k_n}\}$ и такая ортонормированная последовательность $\{w_n\}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $|w_n - v_{k_n}| \leqslant \beta_n/4$. Поскольку $D_n \subset D_{k_n}$, отсюда следует, что

$$\sup_{g \in D_n} |\langle w_n, g\rangle| \leqslant \frac{\beta_n}{4} + \frac{\min\{\beta_1, \ldots, \beta_{k_n}\}}{4} \leqslant \frac{\beta_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.4.2}$$

Положим

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w_n.$$

Имеем $\sigma_0(x) = |x| = 4\alpha_0 \leqslant 1/3$ и $|\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n w_n| = 4\alpha_m$. Пусть элемент $y \in \Sigma_m(D)$ таков, что $|x-y| \leqslant 2\sigma_m(x)$. Тогда $|y| \leqslant 3|x| \leqslant 1$. Для всякого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_m(x) &\geqslant \frac{|x-y|}{2} \geqslant \frac{1}{2}\left|\left\langle x-y, \frac{1}{4\alpha_m}\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n w_n\right\rangle\right| \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\alpha_m}\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n^2 - \frac{1}{4\alpha_m}\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n |\langle y, w_n\rangle|\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(4\alpha_m - \frac{1}{4\alpha_m}\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n^2/2\right) = \frac{1}{2}\left(4\alpha_m - \frac{16\alpha_m^2}{8\alpha_m}\right) = \alpha_m,
\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

§ 2.5. Жадные алгоритмы

Одним из эффективных способов получения хороших m-членных приближений являются жадные приближения, производимые по одному из многочисленных жадных алгоритмов. Рассмотрим один из этих алгоритмов в гильбертовом пространстве H.

Для упрощения технических деталей дополнительно предположим, что словарь $D \subset S(H)$ обладает следующим свойством:

$$\forall\, x \in H \quad \exists\, g(x) \in D \colon |\langle x, g(x)\rangle| = \sup_{g \in D} |\langle x, g\rangle| \tag{2.5.1}$$

(этот supremum больше нуля в силу полноты словаря).

По каждому начальному элементу $x = x_0 \in H$ *чисто жадный* алгоритм относительно словаря D выдает последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \langle x_n, g(x_n)\rangle g(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.5.2}$$

в которой каждый следующий элемент получается из предыдущего вычитанием его проекции на ближайшее к нему направление из словаря. Если максимум в (2.5.1) для $x = x_n$ достигается на нескольких элементах D, то в качестве $g(x_n)$ выбирается любой из них. Этот алгоритм называется чисто жадным в отличие от других алгоритмов приближения, в названии которых фигурирует слово «жадный», см. [7]. Ясно, что разность

$$x_0 - x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x_k, g(x_k)\rangle g(x_k)$$

принадлежит $\Sigma_n(D)$, т. е. является n-членным приближением данного элемента x_0. Например, в случае, когда словарь D образован ортонормированным базисом пространства H (пример 2.4.1), чисто жадный алгоритм дает наилучшие n-членные приближения.

2.5.1. Теорема (L. Jones, 1987). *Для всякого словаря D со свойством* (2.5.1) *и всякого начального элемента $x_0 \in H$ чисто жадный алгоритм сходится, т. е. $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, и x_0 раскладывается в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k, g(x_k)\rangle g(x_k)$ по элементам словаря.*

Доказательство. По теореме Пифагора

$$|x_{n+1}|^2 = |x_n|^2 - |\langle x_n, g(x_n)\rangle|^2 = \cdots = |x_0|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle x_k, g(x_k)\rangle|^2.$$

Отсюда следует, что последовательность норм $|x_n|$ монотонно убывает и для $a_n := |\langle x_n, g(x_n)\rangle|$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{2.5.3}$$

Выберем такую подпоследовательность Λ, что

$$\sqrt{n} a_n \to 0,\ n \to \infty,\ n \in \Lambda. \tag{2.5.4}$$

Возьмем два номера $n, m \in \Lambda$, $m < n$:

$$|x_m - x_n|^2 = |x_m|^2 - |x_n|^2 - 2\langle x_m - x_n, x_n\rangle.$$

Разность $|x_m|^2 - |x_n|^2$ стремится к нулю в силу монотонности $|x_n|$. Оценим последнее выражение:

$$\begin{aligned} |\langle x_m - x_n, x_n\rangle| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} \langle x_k, g(x_k)\rangle \langle g(x_k), x_n\rangle\right| \\ &\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} a_k a_n \leqslant a_n \sqrt{n-m} \sum_{k=m}^{n-1} a_k^2 \leqslant a_n \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \to 0 \end{aligned}$$

в силу (2.5.3) и (2.5.4). Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n\in\Lambda}$ фундаментальна и сходится к некоторому $z \in H$. Если $z = 0$, то и вся последовательность x_n сходится к нулю в силу монотонности норм. Если же $z \neq 0$, то найдется такой элемент $g \in D$, что $|\langle z, g\rangle| > \delta$ с некоторым $\delta > 0$. Тогда и $|\langle x_n, g\rangle| > \delta$ для всех достаточно больших номеров $n \in \Lambda$, что влечет $a_n > \delta$ и противоречие с (2.5.3). □

Приведем результат о скорости сходимости чисто жадного алгоритма.

2.5.2. Теорема (R. DeVore, В. Н. Темляков, 1996). *Пусть $M > 0$ и словарь $D \subset S(H)$ обладает свойством* (2.5.1). *Для всякого начального элемента x_0 из растянутого замыкания выпуклой оболочки словаря*

$$A_1(D, M) = \overline{\left\{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k \colon g_k \in D, m \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k| \leqslant M\right\}}$$

нормы остатков в чисто жадном алгоритме удовлетворяют неравенству

$$|x_n| \leqslant \frac{M}{(n+1)^{1/6}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.5.5}$$

Доказательство. Для всякого ненулевого $x \in H$ положим

$$\rho(x) = \max_{g \in D} \frac{|\langle x, g\rangle|}{|x|} = \frac{|\langle x, g(x)\rangle|}{|x|}.$$

Покажем, что для всякого элемента $x \in A_1(D, M)$ выполнено неравенство

$$\rho(x) \geqslant \frac{|x|}{M}. \tag{2.5.6}$$

Достаточно доказать это неравенство для всевозможных конечных комбинаций $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k$ элементов словаря. Имеем

$$|x|^2 = \left\langle x, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle x, g_k\rangle \leqslant \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k| \rho(x)|x| \leqslant M\rho(x)|x|,$$

что и дает (2.5.6).

Рассмотрим три последовательности: $\rho(x_n)$, $a_n := |x_n|^2$ и последовательность b_n, определяемую индуктивно равенствами $b_0 = M$, $b_{n+1} = b_n + \rho(x_n)|x_n|$, т. е.

$$b_{n+1} = b_n + \rho(x_n) a_n^{1/2}. \tag{2.5.7}$$

Шаг чисто жадного алгоритма, с одной стороны, влечет равенство $|x_{n+1}|^2 = |x_n|^2 - \rho(x_n)^2 |x_n|^2$, т. е.

$$a_{n+1} = a_n(1 - \rho(x_n)^2), \tag{2.5.8}$$

с другой стороны, для начального элемента $x_0 \in A_1(D, M)$ дает включение $x_n \in A_1(D, b_n)$ при всех n. Из этого включения и (2.5.6) получаем

$$\rho(x_n) \geqslant \frac{a_n^{1/2}}{b_n}. \tag{2.5.9}$$

Соотношения (2.5.7) — (2.5.9) дают искомую оценку для $|x_n| = a_n^{1/2}$ чисто алгебраически. Действительно, из (2.5.7) и (2.5.9) получаем

$$b_{n+1} = b_n \left(1 + \frac{\rho(x_n) a_n^{1/2}}{b_n}\right) \leqslant b_n(1 + \rho(x_n)^2),$$

что вместе с (2.5.8) дает неравенства

$$a_{n+1} b_{n+1} \leqslant a_n b_n (1 - \rho(x_n)^4) \leqslant \cdots \leqslant a_0 b_0 = |x_0|^2 M \leqslant M^3,$$

и в итоге приходим к оценке

$$a_n b_n \leqslant M^3. \tag{2.5.10}$$

Из (2.5.8) и (2.5.9) получаем неравенства

$$a_{n+1} = a_n(1 - \rho(x_n)^2) \leqslant a_n \left(1 - \frac{a_n}{b_n^2}\right),$$

откуда

$$a_{n+1}b_{n+1}^{-2} \leqslant a_n b_{n+1}^{-2}(1 - a_n b_n^{-2}) \leqslant a_n b_n^{-2}(1 - a_n b_n^{-2}),$$

так что последовательность $c_n = a_n b_n^{-2}$ удовлетворяет условиям следующего утверждения, которое нетрудно доказывается индукцией по n: если последовательность c_n удовлетворяет условиям $c_0 \leqslant A$, $c_n \geqslant 0$, $c_{n+1} \leqslant c_n(1 - c_n/A)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$c_n \leqslant \frac{A}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

У нас $A = 1 \geqslant a_0 b_0^{-2}$, поэтому получаем

$$a_n b_n^{-2} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

что в комбинации с (2.5.10) приводит к искомой оценке

$$a_n^3 \leqslant \frac{M^6}{n+1} \Longleftrightarrow |x_n| \leqslant \frac{M}{(n+1)^{1/6}},$$

завершающей доказательство. □

Показатель степени $1/6$ в этой теореме можно заменить на 0.182 (А. В. Сильниченко, 2004), но нельзя заменить на 0.1898 (Е. Д. Лившиц, 2009). Точное значение показателя неизвестно.

В настоящее время известны десятки различных жадных алгоритмов, о сходимости и скорости сходимости которых доказаны результаты не только в гильбертовых, но и в банаховых пространствах [7]. Например, *ортогональный* жадный алгоритм относительно словаря D в гильбертовом пространстве H по каждому элементу $x_0 \in H$ выдает последовательность

$$x_{n+1} = x_0 - P_{\mathrm{span}\,\{g(x_0), g(x_1), \ldots, g(x_n)\}} x_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где элементы $g(x_k) \in D$ выбираются по правилу (2.5.1), а P_Y обозначает ортогональный проектор на подпространство Y. Этот алгоритм всегда сходится, т. е. $x_n \to 0$ для всякого x_0 и всякого словаря D. По сравнению с чисто жадным алгоритмом он более сложен в вычислительном плане и не дает разложения в ряд по элементам словаря, но зато его скорость сходимости быстрее: для элементов $x_0 \in A_1(D, M)$ известна оценка

$$|x_n| \leqslant \frac{M}{(n+1)^{1/2}},$$

(R. DeVore, В. Н. Темляков, 1996), причем показатель $1/2$ точен (см. пример 2.4.1 в предыдущем параграфе).

В заключение отметим, что в этом очерке мы почти не касались вопросов приближения функций многих переменных. Представление о результатах в этой области можно получить по книге [8].

Литература

[1] Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Изд-во ЛГУ, Л., 1977.

[2] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. АФЦ, М., 1999.

[3] Изложение лекций С. Б. Стечкина по теории приближений. Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2010.

[4] DeVore R., Lorentz G. Constructive approximation. Springer, 1993.

[5] Lorentz G., von Golitschek M., Makovoz Yu. Constructive approximation. Advanced problems. Springer, Berlin, 1996.

[6] Pekarskii A. A. Approximation by rational functions with free poles. East Journal on Approximations. 2007. V. 13, N 3. P. 227–319.

[7] Temlyakov V. Greedy approximation. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

[8] Temlyakov V. Multivariate approximation. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2018.

Глава 3

Локально выпуклые пространства и обобщенные функции

В. И. Богачев

В этой главе дается краткое введение в теорию локально выпуклых пространств и обобщенных функций. Эта теория играет важную роль в дифференциальных уравнениях в частных производных и математической физике.

§ 3.1. Локально выпуклые пространства

Пусть E — вещественное или комплексное линейное пространство и $\{p_\alpha\}$ — некоторый (непустой) набор полунорм на E, причем для каждого $x \neq 0$ существует такое $\alpha = \alpha(x)$, что $p_\alpha(x) > 0$. Простейший пример — нормированное пространство с семейством полунорм, состоящим из его нормы.

Рассмотрим множества вида

$$U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\varepsilon}(a) = \bigl\{x \in E\colon\ p_{\alpha_i}(x-a) < \varepsilon, i = 1,\ldots,n\bigr\}, \qquad (3.1.1)$$

где $\varepsilon > 0$, $a \in E$, $p_{\alpha_i} \in \{p_\alpha\}$. В случае нормированного пространства с нормой p и $p_\alpha = p$ такие множества — просто открытые шары. Всевозможные объединения таких множеств (объединения в произвольном числе, где можно варьировать точки a, число n, индексы α_i и число ε) и пустое множество будем называть открытыми в E. Получена хаусдорфова топология в E. Действительно, по определению любые объединения введенных нами открытых множеств открыты. Чтобы доказать, что пересечение двух открытых множеств открыто, достаточно установить, что пересечение всяких двух множеств $U := U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\varepsilon}(a)$ и $U' := U_{\beta_1,\ldots,\beta_k;\delta}(b)$ открыто. Для этого достаточно проверить, что всякая точка $x \in U \cap U'$ обладает окрестностью

$$V := U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_k;\varepsilon_1}(x) \subset U \cap U'$$

при некотором $\varepsilon_1 > 0$. Включение $x \in U \cap U'$ дает оценки

$$p_{\alpha_i}(x-a) < \varepsilon \quad \text{и} \quad p_{\beta_j}(x-b) < \delta.$$

Положим $\varepsilon_1 := \min\limits_{i\leqslant n, j\leqslant k}\bigl(\varepsilon - p_{\alpha_i}(x-a), \delta - p_{\beta_j}(x-b)\bigr)$. Пусть $y \in V$. Из неравенства треугольника имеем

$$p_{\alpha_i}(y-a) \leqslant p_{\alpha_i}(y-x) + p_{\alpha_i}(x-a) < \varepsilon_1 + p_{\alpha_i}(x-a) < \varepsilon.$$

Аналогичная оценка имеет место для $p_{\beta_j}(y-b)$. Хаусдорфовость полученной топологии следует из того, что для всяких различных x и y найдется p_α с $p_\alpha(x-y) = c > 0$. В силу неравенства треугольника это дает равенство $U_{\alpha,c/4}(x) \cap U_{\alpha,c/4}(y) = \varnothing$.

3.1.1. Определение. *Пространство E называется локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством полунорм p_α.*

Непосредственно из определения ясно, что для всякой окрестности U точки a множество $U-a$ является окрестностью нуля, а множество $U-a+b$ есть окрестность точки b. Базисные окрестности нуля (3.1.1) выпуклы и уравновешены.

3.1.2. Определение. *Последовательность $\{x_n\}$ в локально выпуклом пространстве сходится к элементу x, если*

$$\lim_{n\to\infty} p(x-x_n) = 0$$

для всякой полунормы p из задающего топологию семейства.

3.1.3. Замечание. В нормированном пространстве две эквивалентные нормы задают одну и ту же топологию. Аналогом этого в локально выпуклом пространстве X, топология которого задана полунормами $\{p_\alpha\}$, является следующее утверждение: набор полунорм $\{q_\beta\}$ на X задает ту же топологию в точности тогда, когда для всякой полунормы q_β найдутся число C_β и такие полунормы $p_{\alpha_1},\ldots,p_{\alpha_n}$, что $q_\beta \leqslant C_\beta[p_{\alpha_1} + \cdots + p_{\alpha_n}]$, и, наоборот, для всякой полунормы p_α найдутся число C_α и полунормы $q_{\beta_1},\ldots,q_{\beta_k}$ с $p_\alpha \leqslant C_\alpha[q_{\beta_1} + \cdots + q_{\beta_k}]$. Действительно, совпадение топологий равносильно тому, что во всякой окрестности нуля вида (3.1.1) по одной из двух систем полунорм должна содержаться окрестность по второй системе. Это и есть указанное нами условие.

Рассмотрим основные примеры. Помимо нормированных пространств, отметим такой важный класс примеров: произвольное линейное пространство E с заданным линейным же пространством F линейных функций на E, разделяющих точки, наделенное топологией $\sigma(E,F)$, в которой в качестве полунорм выступают функции $|f|$, где $f \in F$. Если $E = X$ нормированное, то при $F = X^*$ получаем слабую топологию X. Взяв $E = X^*$ и $F = X$, т.е. $x(f) := f(x)$ при $x \in X, f \in X^*$, получим $*$-слабую топологию X^*.

3.1.4. Пример. (i) Пространство $C_b^\infty(0,1)$ всех вещественных бесконечно дифференцируемых функций на $(0,1)$ с конечными полунормами

$$p_k(\varphi) := \sup_{t\in(0,1)} |\varphi^{(k)}(t)|.$$

Аналогично вводится пространство $C_b^\infty(U)$ всех вещественных бесконечно дифференцируемых функций на непустом открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ с конечными полунормами

$$p_k(\varphi) := \sup_{x\in U} \|\varphi^{(k)}(x)\|.$$

Сходимость в $C_b^\infty(U)$ — просто равномерная сходимость на U производных всякого фиксированного порядка. Более широким является пространство $C^\infty(U)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на открытом множестве U из $\mathbb{R}^n$ с полунормами

$$p_{k,S}(\varphi) := \sup_{x\in S} \|\varphi^{(k)}(x)\|,$$

где S — компакт в U. Сходимость в $C^\infty(U)$ — просто равномерная сходимость производных всякого фиксированного порядка на всякой компактной части U. При этом на всем U функции не обязаны быть даже ограниченными.

(ii) Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}$. Комплексное пространство $H(U)$ всех голоморфных в U функций наделяется системой полунорм

$$p_S(\varphi) := \sup_{z\in S} |\varphi(z)|,$$

где S — компакт в U. Сходимость в $H(U)$ — просто равномерная сходимость на компактах из U. Из курса комплексного анализа известно, что такая сходимость дает и равномерную сходимость производных на компактах. Более того, если добавить к полунормам p_S еще и полунормы $p_{k,S}(\varphi) = \sup_{x\in S} \|\varphi^{(k)}(x)\|$, то топология не изменится, так как для всякого компакта $S \subset U$ и всякого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие компакт $S' \subset U$ и число $C = C(S,U,k) > 0$, что $p_{k,S}(\varphi) \leqslant Cp_{S'}(\varphi)$ для всех $\varphi \in H(U)$. Это легко проверяется с помощью формулы Коши.

(iii) Пространство $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^1)$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций φ на $\mathbb{R}^1$ с конечными полунормами

$$p_{k,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^1} (1+|x|^2)^m |\varphi^{(k)}(x)|,$$

где m, k — целые неотрицательные числа. Таким образом, пространство $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^1)$ состоит из гладких функций, все производные которых убывают на бесконечности быстрее всякой степени. Ту же самую топологию можно задать полунормами (которые, как и $p_{k,m}$, являются нормами)

$$p_m(\varphi) := \sup_{k\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{R}^1} (1+|x|^2)^m |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Аналогично вводится пространство $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ функций на $\mathbb{R}^n$. Здесь вместо модуля $|\varphi^{(k)}(x)|$ надо брать либо норму k-линейного отображения $\varphi^{(k)}(x)$, где $\|\varphi^{(k)}(x)\| := \sup_{|h_i|\leqslant 1} |\varphi^{(k)}(x)(h_1,\ldots,h_k)|$, либо величину $\max_{|\alpha|\leqslant k} |\partial^{(\alpha)}\varphi(x)|$, где

$$\partial^{(\alpha)}\varphi := \partial_{x_1}^{(\alpha_1)} \cdots \partial_{x_n}^{(\alpha_n)}\varphi, \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Так как $|\partial^{(\alpha)}\varphi(x)| \leqslant \|\varphi^{(|\alpha|)}(x)\|$ и $\|\varphi^{(k)}(x)\|$ оценивается через сумму величин $|\partial^{(\alpha)}\varphi(x)|$ по всем $|\alpha| = k$, то получаются эквивалентные полунормы.

(iv) Пространство $\mathfrak{D}_m(\mathbb{R}^1)$, $m \in \mathbb{N}$, состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне $[-m,m]$. Оно наделяется счетной системой полунорм (на самом деле норм)

$$p_k(\varphi) := \max_t |\varphi^{(k)}(t)|.$$

Вместо всех норм p_k можно взять любую их счетную часть, ибо ввиду теоремы о среднем $|\varphi^{(k)}(t)| \leqslant 2m \max_t |\varphi^{(k+1)}(t)|$. Аналогично определяется пространство $\mathfrak{D}([a,b])$ всех гладких функций на прямой, равных нулю вне $[a,b]$, наделенное теми же нормами p_k. Пространство $\mathfrak{D}_m(\mathbb{R}^n)$ вводится точно так же: вместо $[-m,m]$ берется шар $|x| \leqslant m$. В многомерном случае, как и в (iii), вместо производных $\varphi^{(k)}(x)$ как полилинейных функций можно использовать частные производные, положив

$$p_k(\varphi) := \max_{k_1+\cdots+k_n=k} \max_{|x|\leqslant m} |\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}\varphi(x)|.$$

Более того, можно взять еще более узкий набор норм

$$q_k(\varphi) := \sup_{|x|\leqslant m} |\partial_{x_1}^{k} \cdots \partial_{x_n}^{k}\varphi(x)|.$$

В самом деле, по теореме о среднем имеем

$$\sup_x |\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}\varphi(x)| \leqslant 2m \sup_x |\partial_{x_i}\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}\varphi(x)|.$$

Поэтому левую часть можно оценить через $(2m)^d q_l$, где l — наибольшее из чисел $k_1,\ldots,k_n$ и $d = \sum_{i=1}^n (l-k_i)$.

(v) Пространство $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций на прямой с ограниченными носителями, т. е. имеем

$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^1) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathfrak{D}_m(\mathbb{R}^1)$. Оно наделяется полунормами

$$p_{\{a_k\}}(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \max_{m=0,\ldots,a_k} \max_{x\in[k,k+1]} |\varphi^{(m)}(x)|, \tag{3.1.2}$$

где в качестве $\{a_k\}$ берутся всевозможные наборы целых неотрицательных чисел a_k, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично вводится пространство $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$: вместо $|\varphi^{(m)}(x)|$ надо брать либо $\|\varphi^{(m)}(x)\|$, либо наибольшее из чисел $|\partial^{(\alpha)}\varphi(x)|$ с $|\alpha| = m$. Конечно, ограничение $x \in [k, k+1]$ заменяется на $k \leqslant |x| \leqslant k+1$.

Топологии пространств из (i)–(iv) задаются метриками, но не задаются нормами, а топология $\mathfrak{D}$ даже и не метризуема. Ниже сходимость последовательностей в $\mathfrak{D}$ определена без топологии.

3.1.5. Лемма. *Если линейное отображение $F\colon\ X \to Y$ между топологическими векторными пространствами непрерывно в некоторой точке, то оно непрерывно в каждой точке.*

Доказательство. Пусть $a, b \in X$, причем F непрерывно в точке a. Если V — окрестность $F(b)$, то $W = V - F(b) + F(a)$ является окрестностью $F(a)$. По условию найдется такая окрестность U точки a, что $F(U) \subset W$. Тогда $U - a + b$ есть окрестность точки b, причем

$$F(U - a + b) = F(U) - F(a) + F(b) \subset W - F(a) + F(b) = V,$$

что показывает непрерывность в точке b. □

3.1.6. Теорема. *Пусть X — локально выпуклое пространство с задающим топологию набором полунорм $\{p_\alpha\}$. Линейная функция f на X непрерывна в точности тогда, когда найдутся конечное семейство $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}$ в указанном наборе и число C, для которых*

$$|f(x)| \leqslant C[p_{\alpha_1}(x) + \cdots + p_{\alpha_n}(x)]$$

при всех $x \in X$.

Доказательство. Указанная оценка влечет непрерывность f в нуле, а тогда и во всякой другой точке. Если же функция f непрерывна, то множество $\{x\colon\ |f(x)| < 1\}$ содержит некоторую окрестность нуля вида $\{x\colon\ p_{\alpha_1}(x) < \varepsilon, \ldots, p_{\alpha_n}(x) < \varepsilon\}$. Следовательно, из условия $p_{\alpha_1}(x) + \cdots + p_{\alpha_n}(x) < \varepsilon$ следует неравенство $|f(x)| < 1$. Значит, в качестве C можно взять $C = \varepsilon^{-1}$. □

Разумеется, от f зависит не только число C (как это было для функционалов на нормированных пространствах), но и конечный набор оценивающих полунорм. В качестве задачи предлагается доказать следующее обобщение этой теоремы.

3.1.7. Теорема. *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства с задающими топологию наборами полунорм $\{p_\alpha\}$ и $\{q_\beta\}$ соответственно. Линейное отображение $F\colon X \to Y$ непрерывно в точности тогда, когда при каждом β найдутся конечное семейство $p_{\beta,\alpha_1}, \ldots, p_{\beta,\alpha_n}$ в наборе $\{p_\alpha\}$ и число C_β, для которых*

$$q_\beta\bigl(F(x)\bigr) \leqslant C_\beta[p_{\beta,\alpha_1}(x) + \cdots + p_{\beta,\alpha_n}(x)], \quad x \in X.$$

Как и в случае нормированных пространств, теорема Хана – Банаха влечет нетривиальность сопряженного к локально выпуклому пространству.

3.1.8. Теорема. *Пусть X — локально выпуклое пространство, X_0 — его линейное подпространство. Всякий непрерывный линейный функционал на X_0 продолжается до непрерывного линейного функционала на всем X.*

Доказательство. Для непрерывного функционала f на X_0 теорема 3.1.6 дает такие полунормы $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}$ из задающего топологию набора и число C, что $|f| \leqslant C[p_{\alpha_1} + \cdots + p_{\alpha_n}]$ на X_0. По теореме Хана – Банаха f обладает линейным продолжением на X, удовлетворяющим этому же неравенству на X, что дает непрерывность продолжения. □

3.1.9. Предложение. *Локально выпуклое пространство метризуемо в точности тогда, когда его топология порождена некоторым счетным набором полунорм. В этом случае из исходного набора полунорм $\{p_\alpha\}$, задающего топологию, можно выделить конечный или счетный поднабор $\{p_{\alpha_n}\}$ со следующим свойством: для каждого α найдутся такие число C_α и индекс $n = n(\alpha)$, что выполнено неравенство $p_\alpha \leqslant C_\alpha(p_{\alpha_1} + \cdots + p_{\alpha_n})$.*

Доказательство. Если топология пространства E порождена счетным набором полунорм p_n, то положим

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\bigl(p_n(x-y), 1\bigr).$$

Легко проверить, что d — метрика. Покажем, что d задает топологию, порождаемую полунормами $\{p_n\}$. Для этого достаточно проверить, что всякий шар $K(a,r) := \{x\colon d(x,a) < r\}$ содержит окрестность вида (3.1.1), а всякая такая окрестность содержит некоторый шар $K(a,r')$. Найдем такое N, что $2^{-N} < r/2$. Положим $\varepsilon = r/2$. Тогда $U_{p_1,\ldots,p_N,\varepsilon}(a) \subset K(a,r)$. Обратно, окрестность (3.1.1), заданная полунормами $p_1, \ldots, p_n$, содержит шар $K(a,r')$ радиуса $r' := 2^{-n-1}\varepsilon$.

Предположим теперь, что локально выпуклая топология E метризуема метрикой d. Тогда каждый шар радиуса $1/k$ с центром в нуле содержит окрестность вида (3.1.1) с $a = 0$ и некоторыми n, ε и α_i. Тем самым для каждого k выделен конечный набор полунорм. Обозначим через $\{p_{\alpha_n}\}$ счетное семейство, являющееся объединением всех этих конечных наборов. Порождаемые p_{α_n} множества вида (3.1.1) представляют собой часть всех таких множеств. Чтобы убедиться в совпадении соответствующих топологий (т. е. объединений множеств такого вида), достаточно установить, что всякое множество вида (3.1.1) для исходного набора содержит множество такого же вида для счетного набора $\{p_{\alpha_n}\}$. В свою очередь, для этого достаточно проверить последнее утверждение доказываемого предложения. Итак, пусть α фиксировано. По условию открытое множество $U := \{x\colon\ p_\alpha(x) < 1\}$ содержит некоторый шар V радиуса $1/k$ по метрике d с центром в нуле. По построению в этом шаре есть множество вида (3.1.1) с α_i из выбранного нами счетного множества. Пусть $C = \varepsilon^{-1}$. Тогда условие $Cp_{\alpha_i}(x) < 1$ при всех $i = 1, \ldots, n$ дает включение $x \in V \subset U$, т. е. оценку $p_\alpha(x) < 1$. Это означает, что $p_\alpha \leqslant C(p_{\alpha_1} + \cdots + p_{\alpha_n})$. □

Естественно возникает вопрос о нормируемости локально выпуклого пространства, т. е. о существовании одной нормы, задающей его топологию. Из сказанного выше легко усмотреть, что таким условием является существование среди p_α такой нормы p_{α_0}, что всякая другая полунорма данного семейства оценивается через нее в виде $p_\alpha \leqslant C_\alpha p_{\alpha_0}$. А. Н. Колмогоров указал следующий критерий нормируемости.

3.1.10. Теорема. *Локально выпуклое пространство нормируемо в точности тогда, когда оно имеет ограниченную окрестность нуля* (*окрестность, на которой ограничены все полунормы, задающие топологию*).

§ 3.2. Пробные функции

Обобщенные функции вводятся как непрерывные линейные функционалы на различных пространствах гладких функций. Основная идея теории обобщенных функций, пришедшая из физики, состоит в том, что во многих проблемах даже обычные функции представляют интерес не столько с точки зрения их значений в отдельных точках, сколько с точки зрения каких-то их средних значений (например, интегралов по отрезкам или интегралов от произведений с гладкими функциями).

Простейший пример обобщенной функции, не задаваемой обычной функцией, является «дельта-функция» Дирака δ, сопоставляющая гладкой функции φ ее значение в нуле: $\delta(\varphi) := \varphi(0)$. Подобные функции играют важную роль в дифференциальных уравнениях и физике.

Мы увидим, что дельта-функция является обобщенной производной функции, равной нулю на отрицательной полуоси и единице на положительной полуоси. Обычная производная последней функции равна нулю всюду, кроме нуля, но эта обычная производная оказывается мало информативной: по ней не отличить указанную функцию от постоянной. Напротив, обобщенная производная определяет обобщенную функцию с точностью до постоянной.

Общая схема такова: берется некоторое пространство $\mathcal{K}$ так называемых «пробных функций» с некоторой сходимостью и рассматривается пространство $\mathcal{K}'$ линейных функций на $\mathcal{K}$, непрерывных относительно этой сходимости. Затем над обобщенными функциями вводятся различные операции, расширяющие известные операции над обычными функциями. Мы рассмотрим примеры, в которых в качестве $\mathcal{K}$ берутся пространства гладких функций C_0^∞, C^∞ или $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Как и выше, обозначим через $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$ с ограниченными носителями.

Для многих приложений основное значение имеет не столько топология, сколько сходимость в $\mathfrak{D}$.

3.2.1. Определение. *Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_j\} \subset \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$ сходится к функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$ в $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$, если все функции φ_j равны нулю вне некоторого общего компакта и для каждого целого неотрицательного k имеет место равномерная сходимость $\varphi_j^{(k)} \rightrightarrows \varphi^{(k)}$ при $j \to \infty$. Аналогично вводится сходимость в $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, где под равномерной сходимостью производных понимается равномерная сходимость частных производных всех порядков.*

Например, если $\varphi_j(x) = \varphi_0(x)/j$, где $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$, то $\varphi_j \to 0$ в $\mathfrak{D}$. Однако если $\varphi_j(x) = \varphi_0(x/j)/j$, причем φ_0 не является тождественным нулем, то сходимости в $\mathfrak{D}$ нет, поскольку нет общего отрезка, вне которого все φ_j равны нулю, хотя при каждом фиксированном k имеет место равномерная сходимость $\varphi_j^{(k)}$ к нулю.

Приведем примеры нетривиальных функций из $\mathfrak{D}$.

3.2.2. Пример. (i) Пусть $\varphi_0(t) = \exp\bigl[(t^2-1)^{-1}\bigr]$ при $|t| < 1$, $\varphi_0(t) = 0$ при $|t| \geqslant 1$. Тогда $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$.

(ii) Пусть $\psi(s) = \varphi_0(s)$ при $s \leqslant 1$, $\psi(s) = 0$ при $1 \leqslant s \leqslant N-1$, $\psi(s) = -\varphi_0(s-N)$ при $s > N-1$, где $N > 2$. Положим

$$\varphi_1(t) = \int_{-1}^{t} \psi(s)\, ds.$$

Тогда $\varphi_1 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$, причем при $1 \leqslant t \leqslant N-1$ значение $\varphi_1(t)$ постоянно. С помощью таких функций для всякого отрезка $[\alpha, \beta]$ и всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такую функцию $\varphi \in \mathfrak{D}$, что $\varphi(t) = 0$ при $t \notin [\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$, $\varphi(t) = 1$ при $t \in [\alpha, \beta]$ и $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ при всех вещественных t.

(iii) Класс $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ плотен в пространствах $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) проверяются непосредственно. Для проверки утверждения (iii) можно ограничиться случаем $n = 1$, ибо функции $\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)$, где $\varphi_i \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$, входят в $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, достаточно показать, что в $L^2[a, b]$ плотны функции из $\mathfrak{D}$ в носителем в $[a, b]$. Так как в $L^2[a, b]$ плотны ступенчатые функции, то достаточно уметь приближать в L^2 индикаторы отрезков. Такие приближения легко строятся с помощью функций описанного в (ii) типа. □

Отметим, что функцию типа (ii) нельзя получить путем склейки $1 - t^2$ и 1 справа от нуля, так как получится функция с разрывной второй производной.

3.2.3. Замечание. Указанную сходимость в $\mathfrak{D}$ нельзя задать метрикой: нет такой метрики, что сходимость последовательности в ней равносильна введенной выше сходимости. В самом деле, возьмем функцию $\varphi_0 \in \mathfrak{D}$, отличную от нуля на $[-1, 1]$, и для каждого натурального k рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_{k,1}(x) = \varphi_0(x/k), \varphi_{k,2}(x) = \frac{\varphi_0(x/k)}{2}, \ldots, \varphi_{k,n}(x) = \frac{\varphi_0(x/k)}{n}, \ldots,$$

которая сходится в $\mathfrak{D}$ к нулю. Если сходимость задается метрикой, то для каждого k найдется такое $n_k > k$, что φ_{k,n_k} попадает в шар радиуса $1/k$ с центром в нуле. Это дает сходимость последовательности $\{\varphi_{k,n_k}\}$ к нулю по метрике. Однако в $\mathfrak{D}$ такая последовательность не может сходиться, так как функция φ_{k,n_k} отлична от нуля на $[-k, k]$. Выше на пространстве $\mathfrak{D}$ была введена топология.

Выше было введено пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ гладких быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^n$. Последовательность $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ называется сходящейся к функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, если для всех фиксированных k, m при $j \to \infty$ мы имеем $p_{k,m}(\varphi_j - \varphi) \to 0$.

Легко проверить (задача 3.4.8), что указанную сходимость в $\mathcal{S}$ можно задать метрикой

$$d(f, g) = \sum_{k,m=0}^{\infty} 2^{-k-m} \min\bigl(p_{k,m}(f - g), 1\bigr). \tag{3.2.1}$$

Относительно такой метрики пространство $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ оказывается полным. Действительно, из фундаментальности $\{f_j\}$ по этой метрике следует фундаментальность по каждой норме $p_{k,m}$. Из этого следует, что все производные функций f_j сходятся равномерно на всем пространстве. Читателю предлагается проверить, что полученная бесконечно дифференцируемая функция f входит в класс $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, причем $p_{k,m}(f - f_j) \to 0$ при $j \to \infty$ для всех k, m.

Нетрудно привести пример функций f_j из $\mathcal{D}$, сходящихся к нулю в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, но не сходящихся в $\mathcal{D}$.

Пусть $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$.

3.2.4. Определение. *Последовательность $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ называется сходящейся к функции $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, если все производные функций φ_j сходятся к соответствующим производным функции φ равномерно на каждом компакте.*

Метрику, задающую такую сходимость на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^1)$, можно задать формулой

$$d(f, g) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{\min\bigl(p_{k,m}(f - g), 1\bigr)}{2^{k+m}}, \quad p_{k,m}(\varphi) := \max_{t\in[-m,m]} |\varphi^{(k)}(t)|.$$

Аналогично вводится метрика на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. С этой метрикой пространство $\mathcal{E}$ полно, что легко проверить.

3.2.5. Замечание. Пространство $\mathcal{D}$ плотно в пространствах $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{E}$: можно взять такие функции $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, что $0 \leqslant \eta_k \leqslant 1$, $\eta_k(t) = 1$ при $|t| \leqslant k$, $\eta_k(t) = 0$ при $|t| \geqslant k + 1$, причем $|\eta_k^{(m)}(t)| \leqslant C_m < \infty$ для каждого m. Например, можно взять четную функцию η_1 такого вида и положить $\eta_k(t) = 1$ при $t \in [0, k]$, $\eta_k(t) = \eta_1(t - k + 1)$ при $t > k$ и аналогично для $t < 0$. Тогда для каждой функции $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^1)$ получаем $f\eta_j \to f$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Это же верно и в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$, а также для $\mathcal{E}$.

Естественным образом вводятся комплексные пространства $\mathcal{D}$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{E}$. Например, комплексные функции класса $\mathcal{D}$ — это функции вида $u + iv$, где u, v входят в вещественный класс $\mathcal{D}$.

§ 3.3. Обобщенные функции

Пусть $\mathcal{K}$ — один из трех введенных выше классов $\mathcal{D}$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ или $\mathcal{E}$. Эти классы являются линейными пространствами (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

3.3.1. Определение. *Обозначим через $\mathcal{K}'$ множество всех линейных функций F на $\mathcal{K}$ со следующим свойством: если $\varphi_j \to 0$ в смысле сходимости в $\mathcal{K}$, то $F(\varphi_j) \to 0$.*

Элементы $\mathcal{K}'$ называются *обобщенными функциями*. Таким образом, мы приходим к пространствам $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, а также $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Элементы $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ называются *обобщенными функциями умеренного роста*.

Очевидно, что $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{E}'$ — линейные пространства.

Если $\mathcal{K}$ — комплексное, то таково и $\mathcal{K}'$. Поскольку в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ сходимость задается метрикой, пространства $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{E}'$ совпадают с множествами всех непрерывных линейных функций на $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ соответственно. Хотя $\mathcal{D}$ неметризуемо, можно показать (см. [2]), что $\mathcal{D}'$ есть множество непрерывных линейных функций на $\mathcal{D}$ с введенной ранее топологией.

3.3.2. Пример. (i) Пусть F — локально интегрируемая по Лебегу функция на $\mathbb{R}^n$. Формула

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)F(x)\,dx$$

задает элемент $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, который обозначается также через F.

(ii) Всякая борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$, ограниченная на каждом шаре, задает обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mu(dx).$$

(iii) Формула $\varphi \mapsto \varphi(0)$ задает обобщенную функцию, называемую δ-функцией (или δ-функцией Дирака). Аналогично для каждого $a \in \mathbb{R}^n$ определена обобщенная функция

$$\delta_a(\varphi) := \varphi(a).$$

Ясно, что δ_a соответствует мере Дирака δ_a в точке a. Заметим, что δ не задается никакой локально интегрируемой функцией F: достаточно взять последовательность таких функций $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, что $\varphi_j(0) = 1$, $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$ и $\varphi_j(x) \to 0$ для каждого $x \neq 0$. Тогда $\delta(\varphi_j) = 1$, но интеграл от $\varphi_j F$ должен стремиться к нулю ввиду теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

(iv) Обобщенная функция $\varphi \mapsto -\varphi'(0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ не задается не только локально интегрируемой функцией, но даже и мерой, ибо легко построить функции $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ с $\varphi_j'(0) = 1$, которые равномерно ограничены и поточечно сходятся к нулю.

Для рассмотренных нами трех классов $\mathcal{K}$ справедлива следующая теорема (доказательство можно найти в [2, гл. 8]).

3.3.3. Теорема. *Пусть $F_j \in \mathcal{K}'$, причем для всякого φ из $\mathcal{K}$ существует конечный предел $F(\varphi) := \lim\limits_{j\to\infty} F_j(\varphi)$. Тогда $F \in \mathcal{K}'$.*

Сходимость обобщенных функций и определяют как такую сходимость на пробных функциях. С помощью этого результата или путем несложного непосредственного обоснования легко построить еще несколько интересных примеров обобщенных функций.

3.3.4. Пример. Для каждого $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^1)$ существует конечный предел

$$\text{V.P.}\frac{1}{x}(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \tag{3.3.1}$$

задающий обобщенную функцию $\text{V.P.}\frac{1}{x}$. Правую часть можно также интерпретировать как интеграл от $\bigl(\varphi(x)-\varphi(0)\bigr)/x$ в смысле главного значения, т. е.

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-m}^{m}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Аналогично обобщенные функции $(x+i0)^{-1}$ и $(x-i0)^{-1}$ задаются равенствами

$$(x+i0)^{-1}(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx,$$

$$(x-i0)^{-1}(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx.$$

Для обоснования существования предела в (3.3.1) заметим, что оно очевидно для функций φ, равных нулю в окрестности нуля. Поэтому достаточно рассмотреть функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$. Пусть $\varphi(x) = 0$ при $|x| \leqslant m$. Функция $[\varphi(x)-\varphi(0)]/x$ интегрируема на $[-m, m]$, так как она оценивается через $\sup_t|\varphi'(t)|$. Значит,

$$\int_{-m}^{m}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|\leqslant m}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx,$$

что доказывает наше утверждение, поскольку интеграл от $\varphi(0)/x$ по $[-m,-\varepsilon]\cup[\varepsilon, m]$ равен нулю. Существование $(x+i0)^{-1}$ и $(x-i0)^{-1}$ обосновывается аналогично (приведите обоснования!).

Хотя обобщенные функции не являются функциями точки на прямой, к ним применимы многие конструкции и понятия, известные для обычных функций. Здесь мы рассмотрим умножение на функцию и понятия носителя и сингулярного носителя, а в следующем параграфе речь пойдет о дифференцировании.

Если $F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, то обобщенная функция fF задается формулой

$$(fF)(\varphi) := F(f\varphi).$$

Ясно, что $fF \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. Аналогично, если даны обобщенная функция $F \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$ и гладкая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем для каждого k при некотором m имеет место оценка

$$\|f^{(k)}(x)\| \leqslant c_{k,m}(1+|x|^2)^m,$$

то $fF \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$. Проверьте, что $\partial_{x_i}(fF) = (\partial_{x_i} f)F + f\partial_{x_i} F$.

Однако распространить такое умножение на все пары обобщенных функций разумным образом нельзя. Например, если бы имелось ассоциативное и коммутативное умножение, то для трех функций x, $\mathrm{V.P.}\,\frac{1}{x}$ и δ мы бы получили $(x \cdot \mathrm{V.P.}\,\frac{1}{x}) \cdot \delta = \delta$, $\mathrm{V.P.}\,\frac{1}{x} \cdot (x \cdot \delta) = 0$, так как $x \cdot \mathrm{V.P.}\,\frac{1}{x} = 1$, $x \cdot \delta = 0$.

Носитель $\operatorname{supp} f$ обычной функции f на $\mathbb{R}^n$ — замыкание множества $\{x\colon\ f(x) \neq 0\}$.

3.3.5. Определение. *Обобщенная функция $F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется гладкой на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, если найдется такая функция $g \in C^\infty(U)$, что*

$$F(\varphi) = \int_U \varphi(x) g(x)\, dx$$

для всех $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Если при этом $g = 0$, то будем говорить, что F равна нулю на U.

Дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых F является гладкой, называется сингулярным носителем F и обозначается через $\operatorname{singsupp} F$.

Дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых F равна нулю, называется носителем F и обозначается посредством $\operatorname{supp} F$.

3.3.6. Пример. Справедливы равенства

$$\operatorname{supp}\delta = \{0\},\ \operatorname{supp}\mathrm{V.P.}\frac{1}{x} = \mathbb{R}^1,\ \operatorname{singsupp}\mathrm{V.P.}\frac{1}{x} = \{0\}.$$

Из определения очевидно, что если $F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} F \cap \operatorname{supp}\varphi = \varnothing$, то $F(\varphi) = 0$.

3.3.7. Пример. Если $F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $f = 1$ в открытом множестве $U \supset \operatorname{supp} F$, то $fF = F$, ибо носитель $f\varphi - \varphi$ не пересекается с $\operatorname{supp} F$. Однако недостаточно равенства $f = 1$ на $\operatorname{supp} F$. Например, если $F(\varphi) = \varphi'(0)$, $f(x) = 1 + x$, то $\operatorname{supp} F = \{0\}$ и $f(0) = 1$, но при этом $fF = F + \delta$, что видно из следующих равенств: $(fF)(\varphi) = F(f\varphi) = (f\varphi)'(0) = \varphi(0) + \varphi'(0)$.

Аналогично придается смысл композиции обобщенной функции с преобразованием Ψ пространства $\mathbb{R}^n$ (например, заменой координат). Если Ψ таково, что $\varphi \circ \Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и отображение $\varphi \mapsto \varphi \circ \Psi$ непрерывно в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то для всякого $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ функционал $F \circ \Psi^{-1}$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ задается формулой $\langle F \circ \Psi^{-1}, \varphi \rangle := \langle F, \varphi \circ \Psi \rangle$. Это согласовано с понятием образа меры из § 1.15. Например, сдвиг обобщенной функции F задается так: $\langle F(x+h), \varphi \rangle = \langle F, \varphi(x-h) \rangle$. Если $F \circ U^{-1} = F$ для всех ортогональных операторов U, то F называют сферически-инвариантным. Аналогичная конструкция работает и для $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

§ 3.4. Производные обобщенных функций

Как известно, бывают даже непрерывные функции, не имеющие производной ни в одной точке. В рамках теории обобщенных функций производную можно определить не только для таких функций, но даже для всюду разрывных локально интегрируемых функций. Правда, эти производные будут не обычными функциями, а обобщенными.

3.4.1. Определение. *Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$. Обобщенная производная F' обобщенной функции F определяется как элемент пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, заданный формулой*

$$F'(\varphi) = -F(\varphi').$$

Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Обобщенная частная производная $\partial_{x_i} F$ определяется как элемент $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, заданный формулой

$$\partial_{x_i} F(\varphi) := -F(\partial_{x_i} \varphi).$$

Аналогично для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ положим

$$\partial^{(\alpha)} F(\varphi) := (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} F(\partial^{(\alpha)} \varphi), \quad \partial^{(\alpha)} \varphi = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \varphi.$$

Аналогично определяется производная $\partial^{(\alpha)} F$ для $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Функционал $\varphi \mapsto -F(\partial_{x_i} \varphi)$ действительно является обобщенной функцией, ибо если $\varphi_j \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то и $\partial_{x_i} \varphi_j \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; случай $\mathcal{S}'$ аналогичен. Таким образом, всякая обобщенная функция имеет обобщенные частные производные любого порядка. В частности, обычная локально интегрируемая функция, даже не имеющая обычной производной ни в одной точке, бесконечно дифференцируема в смысле обобщенных функций. Класс Соболева $W^{p,k}(\mathbb{R}^n)$ с $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)$ состоит из таких функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, что их обобщенные производные $\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n} f$ при $k_1 + \cdots + k_n \leqslant k$ задаются функциями из $L^p(\mathbb{R}^n)$; такие производные называют соболевскими.

3.4.2. Пример. (i) Пусть обобщенная функция F задается обычной функцией $\chi = I_{[0,+\infty)}$ (ее называют *функцией Хевисайда*). Тогда выполнено равенство $F' = \chi' = \delta$ в смысле обобщенных функций, ибо

$$F'(\varphi) = -F(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \delta(0), \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1).$$

При этом $\chi'(t) = 0$ при всех $t \neq 0$, т. е. обобщенная производная не задается обычной производной, существующей вне нуля.

(ii) Пусть обобщенная функция F задается локально интегрируемой функцией $\ln|x|$. Тогда

$$F' = \mathrm{V.P.}\frac{1}{x}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} F'(\varphi) &= -F(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\ln|x|\,dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \varphi'(x)\ln|x|\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \end{aligned}$$

(iii) Если μ — ограниченная борелевская мера на прямой, то обобщенная производная монотонной функции $h(t) = \mu\bigl((-\infty, t)\bigr)$ есть мера μ, ибо для всякой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)h(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mu(dt)$$

по формуле интегрирования по частям в интеграле Стилтьеса. Скажем, пусть f — классическая функция Кантора (канторовская лестница), $f(t) = 0$ при $t < 0$, $f(t) = 1$ при $t > 1$. Ее обычная производная равна нулю почти всюду, но не она служит обобщенной производной, так как функция Кантора непостоянна на $[0, 1]$.

(iv) Пусть функция f непрерывно дифференцируема на промежутках $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$, причем ее производная f' ограничена на $[a-1, a)$ и на $(a, a+1)$, но f имеет различные конечные пределы $f(a-) = \lim\limits_{t\to a-} f(t)$ и $f(a+) = \lim\limits_{t\to a+} f(t)$. Тогда обобщенная производная f есть сумма ее обычной производной f' (существующей вне a и задающей обобщенную функцию в силу локальной ограниченности) и обобщенной функции $\bigl(f(a+) - f(a-)\bigr)\delta_a$.

Для обоснования берем пробную функцию φ и выписываем равенства (в первом из которых f' обозначает обобщенную производную, а в выражениях под интегралом — обычную производную)

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{a} f(t)\varphi'(t)\,dt - \int_{a}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f'(t)\varphi(t)\,dt - f(a-)\varphi(a) + f(a+)\varphi(a) + \int_{a}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= f(a+)\langle \delta_a, \varphi \rangle - f(a-)\langle \delta_a, \varphi \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt.$$

Аналогично находится обобщенная производная кусочно дифференцируемой функции с несколькими скачками, имеющей локально интегрируемую производную вне точек скачка.

Как и в случае обычных функций, обобщенная функция с нулевой производной оказывается константой, т. е. задается постоянной обычной функцией (конечно, это отнюдь не означает, что такая обобщенная функция является постоянным линейным функционалом: линейная функция постоянна лишь в том случае, когда она тождественно равна нулю).

3.4.3. Предложение. *Пусть $F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^1)$ и $F' = 0$. Тогда F задается некоторой постоянной c, т. е.*

$$F(\varphi) = c \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\,dx.$$

Если же $F' = 0$ на интервале U, то найдется постоянная c, для которой указанное равенство верно для всех $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$ имеет интеграл 1 по всей прямой. Положим $c := F(\varphi_0)$ и покажем, что получена искомая постоянная. Для всех $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$ имеем

$$\varphi = \varphi - \theta\varphi_0 + \theta\varphi_0, \quad \theta := \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(t)\,dt.$$

Положим

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} [\varphi(t) - \theta\varphi_0(t)]\,dt.$$

Заметим, что $\psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^1)$, ибо если обе функции φ и φ_0 обращаются в нуль вне некоторого отрезка $[a, b]$, то ψ также обращается в нуль вне $[a,b]$, так как интеграл от $\varphi - \theta\varphi_0$ по всей прямой равен нулю. Ясно, что $\psi' = \varphi - \theta\varphi_0$. Поэтому

$$F(\varphi) = F(\psi') + \theta F(\varphi_0) = -F'(\psi) + c\theta = c\theta = c\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(t)\,dt,$$

что и требовалось. Случай интервала аналогичен. □

Как и локально интегрируемые функции, обобщенные функции обладают первообразными.

3.4.4. Предложение. *Для всякой обобщенной функции F из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ существует такая функция $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, что $G' = F$. Если взять одну такую функцию, то всякая другая отличается от нее на обобщенную функцию, задаваемую константой.*

Доказательство. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ возьмем ту же функцию ψ, что и в предыдущем доказательстве. Положим

$$G(\varphi) := -F(\psi).$$

Функция G линейна на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, так как ψ линейно зависит от φ. Покажем, что она непрерывна. Достаточно проверить, что линейное отображение $\varphi \mapsto \psi$ непрерывно на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Пусть $\varphi_j \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Тогда функции φ_j равны нулю вне некоторого отрезка, а их интегралы θ_j стремятся к нулю. Функции $\varphi_j - \theta_j\varphi_0$ равны нулю вне некоторого отрезка $[a,b]$ и имеют нулевые интегралы. Поэтому соответствующие функции ψ_j равны нулю вне $[a,b]$. Поскольку $\varphi_j - \theta_j\varphi_0 \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, то последовательность функций ψ_j также стремится к нулю в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, что завершает наше доказательство. □

Обобщенная функция G также имеет первообразную и т. д. Оказывается, если зафиксировать отрезок $[a,b]$ и сузить F на функции с носителями в $[a,b]$, то через конечное число шагов мы придем к обычной функции (непрерывной или даже непрерывно дифференцируемой).

3.4.5. Теорема. *Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель в открытом шаре U. Тогда найдутся непрерывная функция Ψ на U и число $k \in \mathbb{N}$, для которых выполнено равенство $F = \partial_{x_1}^k \cdots \partial_{x_n}^k \Psi$. В одномерном случае $F = \Psi^{(k)}$.*

Доказательство можно найти в [2, гл. 8].

Конечно, для обобщенных функций с некомпактными носителями такое представление верно лишь локально. Например, обобщенная функция $\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}$ не может быть производной фиксированного порядка от непрерывной функции.

В случае $n = 1$ и одноточечного носителя предыдущую теорему можно конкретизировать так.

3.4.6. Теорема. *Пусть* $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ *и* $\operatorname{supp} F = \{0\}$. *Тогда*

$$F = c_0\delta + c_1\delta' + \dots + c_N\delta^{(N)}, \quad \textit{где } c_0, \dots, c_N \textit{ — числа.}$$

В заключение приведем ряд задач к этой главе.

3.4.7. Задача. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Доказать, что X со слабой топологией и X^* с $*$-слабой топологией неметризуемы.

3.4.8. Проверить, что указанная в (3.2.1) метрика действительно задает сходимость в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3.4.9. Найти три первые производные в $\mathcal{D}'$ следующей функции F: $F(x) = -x$ при $x < 0$, $F(x) = x^2$ при $x \geqslant 0$.

3.4.10. Доказать, что $(x + i0)^{-1} = \mathrm{V.P.}\frac{1}{x} - i\pi\delta$.

3.4.11. Выяснить, существует ли при $t \to +\infty$ предел обобщенных функций $e^{ixt}(x + i0)^{-1}$ в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

3.4.12. Доказать, что если $|c_k| \leqslant \alpha k^N + \beta$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

3.4.13. (i) Найти первые и вторые производные в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ функций $\sin|x|$ и $|\sin x|$.

(ii) Доказать равенство $|\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\pi}$.

3.4.14. Решить в классе $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ следующие уравнения: (i) $xF = 0$, (ii) $x^nF = 0$, (iii) $x(x+1)F = 0$, (iv) $(\sin x)F = 0$, (v) $x^2F = \delta$.

Литература

[1] Агранович М. С. Обобщенные функции. МЦНМО, М., 2008.

[2] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 3-е изд. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2020.

[3] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. 2-е изд. Наука, М., 1979.

[4] Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Введение в теорию обобщенных функций. Лекционные курсы НОЦ. МИАН им. В. А. Стеклова, М., 2006.

[5] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. Наука, М., 1976.

[6] Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Наука, М., 1965.

Глава 4

Преобразование Фурье

В. И. Богачев

§ 4.1. Преобразование Фурье в L^1

Пусть $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ — множество интегрируемых комплексных функций на $\mathbb{R}^n$, $L^1(\mathbb{R}^n)$ — соответствующее банахово пространство классов эквивалентности. Обозначения $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$ аналогичны.

4.1.1. Определение. *Преобразованием Фурье функции f из $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (возможно, комплексной) называется комплексная функция*

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,x)} f(x)\, dx.$$

Преобразованием Фурье элемента $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ называется функция $\widehat{f}$ для любого представителя класса эквивалентности f.

В одномерном случае формула такова:

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} f(x)\, dx.$$

Необходимость проведения различия между версиями (переопределениями на множестве меры нуль) интегрируемой функции при рассмотрении преобразования Фурье будет ясна из дальнейшего, когда пойдет речь о восстановлении значений f в отдельных точках по функции $\widehat{f}$. Множитель $(2\pi)^{-n/2}$ делает преобразование Фурье унитарным оператором в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Наконец, выбор знака минус в экспоненте связан лишь с тем, что такова традиция. Как мы увидим ниже, замена минуса на плюс дает определение обратного преобразования Фурье.

В некоторых случаях удается явно вычислить преобразование Фурье. Рассмотрим один из важнейших примеров.

4.1.2. Пример. Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-i(y,x)] \exp[-\alpha|x|^2]\, dx = \frac{1}{(2\alpha)^{n/2}} \exp\Big[-\frac{1}{4\alpha}|y|^2\Big].$$

Доказательство. Вычисление интеграла сводится к одномерному случаю по теореме Фубини. Здесь после очевидной замены переменной достаточно рассмотреть случай $\alpha = 1/2$. В этом случае обе части доказываемого равенства являются аналитическими функциями y, совпадающими при $y = it$, $t \in \mathbb{R}$, что известно из курса анализа (читателю полезно воспроизвести детали). Поэтому эти функции совпадают и при всех $y \in \mathbb{R}$. □

4.1.3. Предложение. *Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна, причем*

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1} \quad \text{и} \quad \lim_{|y|\to\infty} \widehat{f}(y) = 0. \tag{4.1.1}$$

Доказательство. Первое соотношение в (4.1.1) очевидно. Если f — индикатор куба с ребрами, параллельными координатным осям, то $\widehat{f}$ легко вычислить явно с помощью теоремы Фубини, так как в одномерном случае

$$\int_a^b e^{-ixy}\,dy = \frac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{ix}.$$

Здесь второе соотношение очевидно. Оно остается в силе для линейных комбинаций индикаторов таких кубов. Остается взять последовательность f_j указанных линейных комбинаций, сходящуюся к f в пространстве $L^1(\mathbb{R}^n)$, и заметить, что функции $\widehat{f_j}$ равномерно сходятся к функции $\widehat{f}$ ввиду первого соотношения в (4.1.1). □

Вот еще два полезных свойства преобразования Фурье.

4.1.4. Предложение. (i) *Если непрерывно дифференцируемая и интегрируемая функция f обладает интегрируемой частной производной $\partial_{x_j} f$, то*

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(y) = iy_j\widehat{f}(y).$$

В одномерном случае $\widehat{f'}\,(y) = iy\widehat{f}(y)$.

(ii) *Если функция $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ такова, что для некоторого номера $j \in \{1, \ldots, n\}$ функция $g_j\colon\ y \mapsto y_j f(y)$ интегрируема, то функция $\widehat{f}$ имеет непрерывную производную по x_j, причем*

$$\partial_{x_j}\widehat{f}(x) = -i\widehat{g_j}(x).$$

В одномерном случае $\widehat{f}\,'(x) = -i\widehat{yf(y)}(x)$.

Доказательство. (i) Если f имеет ограниченный носитель, то доказываемое равенство следует из формулы интегрирования по частям. Например, при $n = 1$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} f'(x)\,dx = iy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} f(x)\,dx.$$

Чтобы свести к этому общий случай, достаточно взять последовательность функций $\zeta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами: $0 \leqslant \zeta_k \leqslant 1$, $\sup_k |\partial_{x_j}\zeta_k| \leqslant C$, $\zeta_k(x) = 1$ при $|x| \leqslant k$. Тогда функции $\zeta_k f$ сходятся в $L^1(\mathbb{R}^n)$ к f, а функции $\partial_{x_j}(\zeta_k f)$ сходятся к $\partial_{x_j} f$, поскольку $f\partial_{x_j}\zeta_k \to 0$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$ в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Утверждение (ii) очевидным образом следует из теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру и соотношения $|\partial_{x_j} \exp[i(x,y)] f(y)| = |y_j f(y)|$. $\square$

Комплексификацию $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ обозначим тем же символом и будем иметь с ней дело при рассмотрении преобразования Фурье.

4.1.5. Следствие. *Если $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{f} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. По доказанному выше, для всех $j = 1, \ldots, n$ и $k \in \mathbb{N}$ функция $\partial_{x_j}^k \widehat{f} = (-i)^k \widehat{h_{j,k}}$, где $h_{j,k}(y) = y_j^k f(y)$, убывает на бесконечности быстрее $|x|^{-m}$ при всех m. $\square$

Ниже будет показано, что преобразование Фурье — изоморфизм пространства $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, будет установлено, что преобразование Фурье инъективно на $L^1(\mathbb{R}^n)$; этот факт совсем не очевиден. Естественно возникает вопрос, как восстановить функцию f по ее преобразованию Фурье, определяющему эту функцию с точностью до модификации. Для этой цели используется *обратное преобразование Фурье*. Для интегрируемой функции f обратное преобразование Фурье задается формулой

$$\check{f}(x) := \widehat{f}(-x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,x)} f(y)\,dy.$$

Мы увидим, что если прямое преобразование Фурье f интегрируемо, то его обратное преобразование дает исходную функцию f. На самом деле это верно и без предположения об интегрируемости функции $\widehat{f}$, если определить обратное преобразование Фурье для обобщенных функций. Пока мы отложим этот вопрос, однако приведем одно достаточное условие восстановления функции в фиксированной точке по ее преобразованию Фурье, а затем докажем равенство Парсеваля, служащее основой определения преобразования Фурье обобщенных функций.

4.1.6. Теорема. *Пусть функция f интегрируема на прямой, причем в некоторой точке x она удовлетворяет условию Дини: функция*

$$t \mapsto \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t}$$

интегрируема в окрестности нуля (скажем, достаточна интегрируемость функции $t \mapsto [f(x+t) - f(x)]/t$ около нуля). Тогда справедлива следующая формула обращения:

$$f(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{ixy} \widehat{f}(y)\, dy. \tag{4.1.2}$$

В частности, равенство (4.1.2) *верно во всех точках дифференцируемости функции f.*

Доказательство можно найти в Богачев, Смолянов [2, гл. 9] и Колмогоров, Фомин [5]. Ниже доказана формула обращения при иных предположениях.

Известен пример А. Н. Колмогорова интегрируемой функции f на $[0, 2\pi]$, ряд Фурье которой расходится в каждой точке. С помощью такой функции можно построить интегрируемую функцию, для которой предел (4.1.2) не существует ни в одной точке прямой. Однако равенство (4.1.2) верно в смысле сходимости обобщенных функций, что следует из случая гладких функций и равенства Парсеваля.

Приведем результат, в котором вместо условия Дини в точке требуется лишь непрерывность, если дополнительно известно, что функция f ограничена, а функция $\widehat{f}$ интегрируема (что, конечно, не всегда имеет место). Помимо самостоятельного интереса этот результат имеет еще и техническое значение: он доказывается короче и проще, но тоже дает формулу обращения на классе $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

4.1.7. Предложение. *Если функция $f \in \boldsymbol{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{\mathcal{L}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\widehat{f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$, то для всякой точки x, в которой f непрерывна, верно равенство*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,x)} \widehat{f}(y)\, dy. \tag{4.1.3}$$

В частности, это верно, если $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для упрощения формул мы рассмотрим случай $n = 1$. Тогда с помощью теоремы Фубини и примера 4.1.2 (а также замены переменных $z = x + 2\varepsilon u$) получаем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\widehat{f}(y)\,dy &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}e^{-\varepsilon^2y^2}\widehat{f}(y)\,dy\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ixy}e^{-\varepsilon^2y^2}e^{-iyz}f(z)\,dz\,dy\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{iy(x-z)}e^{-\varepsilon^2y^2}f(z)\,dy\,dz\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}\,f(z)e^{-(x-z)^2/(4\varepsilon^2)}\,dz\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}\,f(x+2\varepsilon u)e^{-u^2}\,du = \sqrt{2\pi}\,f(x).\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости ввиду ограниченности f и непрерывности в точке x. □

Особая роль пространства $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ видна из такого результата.

4.1.8. Следствие. *Преобразование Фурье линейно и непрерывно отображает комплексное $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ на комплексное $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Выше было показано, что $\widehat{f} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ при всех $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ и $f(-\,\cdot\,)$ есть преобразование Фурье функции $\widehat{f}$. Значит, преобразование Фурье — линейный изоморфизм пространства $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$. Проверим непрерывность $\mathcal{F}$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$. Для упрощения обозначений рассмотрим случай $n = 1$. Мы имеем

$$y^{2m}\widehat{f}^{(k)}(y) = (-i)^k y^{2m}\mathcal{F}(x^k f)(y) = (-i)^{k+2m}\mathcal{F}\bigl[(x^k f)^{(2m)}\bigr](y).$$

Функция $(x^k f)^{(2m)}$ — конечная сумма функций вида $x^l f^{(r)}$. При этом

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|x^l f^{(r)}(x)|\,dx &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|^2)^{l+1}|f^{(r)}(x)|(1+|x|^2)^{-1}\,dx\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|^2)^{-1}\,dx\ \sup_x(1+|x|^2)^{l+1}|f^{(r)}(x)|.\end{aligned}$$

Итак, $p_{k,m}(\mathcal{F}f)$ оценивается через $C\sum_{r\leqslant 2m, l\leqslant k+1} p_{r,l}(f)$, где C не зависит от f. Значит, если $f_j \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, то $\mathcal{F}f_j \to 0$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. □

Следующие равенства относятся к числу важнейших в теории интегралов Фурье. Как и выше, все пространства — комплексные.

4.1.9. Теорема. *Для всех $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ верны равенства*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\psi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\widehat{\psi}\, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\overline{\psi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\check{\psi}}\, dx. \tag{4.1.4}$$

Если же $\psi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(y)\overline{\widehat{\psi}(y)}\, dy. \tag{4.1.5}$$

Доказательство. Интегралы существуют, ибо $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\psi}$ ограничены. Применив теорему Фубини к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\psi(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}\varphi(y)\psi(x)\, dy\, dx,$$

получим первую формулу в (4.1.4), а вторая следует из нее ввиду тождества $\overline{\check{\psi}} = \widehat{\overline{\psi}}$. Чтобы проверить (4.1.5), вспомним, что $f := \widehat{\psi}$ входит в $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$, и применим формулу обращения $\psi = \check{f}$. □

Взяв комплексное сопряжение во втором равенстве в (4.1.4), получим еще одну формулу:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{\psi}\overline{\varphi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi\overline{\widehat{\varphi}}\, dx.$$

4.1.10. Следствие. *Если $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{f} = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду.*

Доказательство. Из равенства Парсеваля следует, что интеграл от $f\varphi$ равен нулю для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, откуда вытекает доказываемое утверждение. □

Применим преобразование Фурье для доказательства полноты системы функций Эрмита, получаемых ортогонализацией в $L^2(\mathbb{R})$ функций $t^k \exp(-t^2/2)$. Их можно записать в виде $H_k(t)\exp(-t^2/2)$, где H_k — многочлены Чебышёва–Эрмита, полученные ортогонализацией степеней $1, t, \ldots$ в L^2 по стандартной гауссовской мере.

4.1.11. Теорема. *Предположим, что функция $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1)$ такова, что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\exp(-t^2/2)\, dt = 0 \quad \text{для всех целых } k \geqslant 0.$$

Тогда $f(t) = 0$ п.в.

Доказательство. Функция

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(itz - t^2/2)\, dt$$

определена и аналитична в комплексной плоскости, ибо для каждого $R > 0$ функция $f(t)\exp(R|t| - t^2/2)$ интегрируема, поскольку функция $\exp(R|t| - t^2/2)$ входит в $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1)$. Из условия следует, что все производные g в нуле равны нулю (включая значение g в нуле). Значит, $g(z) \equiv 0$. Поэтому интегрируемая функция $f(t)\exp(-t^2/2)$ имеет нулевое преобразование Фурье и потому почти всюду равна нулю, откуда следует доказываемое. □

§ 4.2. Преобразование Фурье в L^2

Отметим следующую очевидную лемму.

4.2.1. Лемма. *Пусть S — всюду плотное множество в метрическом пространстве X, Y — полное метрическое пространство, отображение $F\colon S \to Y$ сохраняет расстояния. Тогда F однозначно продолжается до сохраняющего расстояния отображения из X в Y.*

С помощью равенства Парсеваля для интегралов Фурье преобразование Фурье распространяется на функции из $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для этого применим лемму к подпространству $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$, которое плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и переходит в себя под действием преобразования Фурье, причем последнее на $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ сохраняет скалярное произведение в силу равенства (4.1.5). Мы получим унитарный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$, совпадающий с преобразованием Фурье на $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$.

4.2.2. Определение. *Преобразованием Фурье в комплексном пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ называется унитарный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$, продолжающий преобразование Фурье в комплексном $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$.*

Преобразование Фурье элемента $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ обозначается через $\mathcal{F}f$ или $\widehat{f}$.

Данное определение означает, что для нахождения преобразования Фурье элемента $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ мы берем последовательность функций $f_j \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$, сходящуюся к f в $L^2(\mathbb{R}^n)$ (как мы видели в примере 3.2.2(iii), такая последовательность обязательно существует, можно даже взять $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$), и полагаем

$$\widehat{f} := \lim_{j\to\infty} \widehat{f_j},$$

где имеется в виду предел в пространстве L^2, который существует ввиду фундаментальности $\{f_j\}$ в L^2 и равенства

$$\|\widehat{f_j} - \widehat{f_i}\|_{L^2} = \|f_j - f_i\|_{L^2}.$$

Доказываемая ниже теорема Планшереля дает способ нахождения преобразования Фурье в пространстве L^2 без использования гладких приближений.

Из определения ясно, что на $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ оператор $\mathcal{F}$ задается обычным преобразованием Фурье. Однако если функция f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ не входит в $L^1(\mathbb{R}^n)$, то функцию $\mathcal{F}f$ уже нельзя задать как лебеговский интеграл от функции $(2\pi)^{-n/2}\exp[-i(x,y)]f(y)$. С другой стороны, для всех функций $f \in L^2 \cap L^1$ данное определение согласовано с имеющимся для интегрируемых функций.

4.2.3. Лемма. *Если $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье функции f в $L^2(\mathbb{R}^n)$ задается ее преобразованием Фурье $\widehat{f}$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}f$ — преобразование Фурье функции f в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{f}$ — ее преобразованием Фурье в $L^1(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ п.в. Достаточно проверить, что для всякой вещественной функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ функции $(\mathcal{F}f)\varphi$ и $\widehat{f}\varphi$ имеют равные интегралы. Пусть ψ — обратное преобразование Фурье φ. Тогда $\psi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{\psi} = \varphi$. В силу равенства Парсеваля имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

С другой стороны, взяв $f_j \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ так, что $f_j \to f$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, получаем $(\mathcal{F}f, \varphi)_{L^2} = \lim\limits_{j\to\infty} (\mathcal{F}f_j, \varphi)_{L^2} = \lim\limits_{j\to\infty} (f_j, \psi)_{L^2} = (f, \psi)_{L^2}$, что доказывает наше утверждение. □

Теперь легко доказать следующую *теорему Планшереля*, которую иногда используют как способ задания преобразования Фурье в пространстве L^2.

4.2.4. Теорема. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда функции*

$$g_R(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|y|\leqslant R} \exp\bigl(-i(x,y)\bigr) f(y)\,dy$$

сходятся в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при $R \to +\infty$ к определенному выше преобразованию Фурье функции f в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $f_R(y) := f(y)I_{\{|y|\leqslant R\}}(y)$. Тогда $f_R \to f$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при $R \to +\infty$. Поэтому $\mathcal{F}f_R \to \mathcal{F}f$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. В силу доказанной выше леммы $\mathcal{F}f_R = \widehat{f_R}$, ибо $f_R \in L^1$. □

Таким образом,

$$\widehat{f}(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|y|\leqslant R} \exp\bigl(-i(x,y)\bigr) f(y)\, dy$$

в смысле сходимости в L^2. В одномерном случае

$$\widehat{f}(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-ixy} f(y)\, dy \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^1).$$

Возникает вопрос о сходимости почти всюду. Напомним, что сходимость в L^2 дает последовательность $R_j \to \infty$, для которой функции g_{R_j} из теоремы сходятся почти всюду. При $n = 1$ известно, что сходимость g_R при $R \to \infty$ имеет место почти всюду, но это оставалось открытым более полувека и было доказано лишь в 1966 г. шведским математиком Л. Карлесоном, причем доказательство этого факта весьма трудно. При $n > 1$ вопрос все еще открыт (если шары заменить на кубы $[-R, R]^n$, то и здесь ответ положительный).

С помощью преобразования Фурье в L^2 можно следующим образом описать функции из класса Соболева $W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$, см. с. 80.

4.2.5. Теорема. *Пространство $W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех таких $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, что функция $y \mapsto |y|^k \widehat{f}(y)$ входит в $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Если $f \in W^{2,k}(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{\partial_{x_i}^k f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, но $\widehat{\partial_{x_i}^k f}(y) = i^k y_i^k \widehat{f}(y)$, что следует из такого равенства для функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обратно, пусть функции $g_{i_1,\ldots,i_m}(y) = i^m y_{i_1} \cdots y_{i_m} \widehat{f}(y)$ при $m \leqslant k$ лежат в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда $h_{i_1,\ldots,i_m} := \mathcal{F}^{-1} g_{i_1,\ldots,i_m} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ есть $\partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_m}} f$ в смысле обобщенных функций, ибо ввиду унитарности $\mathcal{F}$ имеем $(f, \partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_m}} \varphi)_{L^2} = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}\partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_m}} \varphi)_{L^2}$, что равно $(-1)^m (g_{i_1,\ldots,i_m}, \widehat{\varphi})_{L^2} = (-1)^m (h_{i_1,\ldots,i_m}, \varphi)_{L^2}$. □

Напомним, что свертка интегрируемых функций задается так:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy.$$

При этом $f * g = g * f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Если $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, то свертка тоже определена и $f * g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

4.2.6. Теорема. *Если $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\widehat{f * g}(y) = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(y) \widehat{g}(y). \tag{4.2.1}$$

Это равенство верно почти всюду, если $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Как было отмечено, $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. По теореме Фубини имеем

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,x)} f(x-z) g(z)\, dz\, dx$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,u)} e^{-i(y,z)} f(u) g(z)\, dz\, du,$$

что дает (4.2.1). Если $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, то равенство получается предельным переходом. Для этого можно взять гладкие функции g_k с ограниченными носителями, сходящиеся к g в L^2. Тогда $\widehat{g_k} \to \widehat{g}$ и $\widehat{g_k * f} \to \widehat{g * f}$ в L^2 (поскольку $g_k * f \to g * f$ в L^2, как нетрудно проверить). □

Положим $f := \mathcal{F}\psi$. Предыдущая теорема дает

$$\mathcal{F} S_\psi \varphi = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}\psi \cdot \mathcal{F}\varphi.$$

Следовательно, верно равенство $\mathcal{F} S_\psi \mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{n/2} A_f$, где A_f — оператор умножения на ограниченную непрерывную функцию f. Спектр последнего оператора нам известен: это множество существенных значений f, т. е. замыкание множества значений f ввиду непрерывности f. При этом $0 \in \sigma(S_\psi)$, ибо спектр замкнут и f имеет нулевой предел на бесконечности. Если функция f вещественна, то спектр S_ψ — отрезок вещественной прямой, содержащий начало координат. Обратим внимание на то, что оператор свертки некомпактен (в отличие от интегральных операторов в L^2 на отрезке), если не равен нулю.

§ 4.3. Преобразование Фурье и свертка обобщенных функций

Равенство Парсеваля, использованное выше для определения преобразования Фурье в L^2, а также формула (4.1.4) подсказывают, как продолжить его и на комплексные обобщенные функции. Ниже рассматриваются комплексные пространства $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.

4.3.1. Определение. *Пусть $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Положим*

$$\mathcal{F}F(\varphi) := \widehat{F}(\varphi) := F(\widehat{\varphi}), \quad \text{где } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

и назовем функционал $\mathcal{F}F = \widehat{F}$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ преобразованием Фурье обобщенной функции F.

Так как отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ линейно и непрерывно в $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ и имеет непрерывное обратное, то $\widehat{F} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$, причем преобразование Фурье оказывается взаимно однозначным линейным оператором на пространстве $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$: $\mathcal{F}^{-1}F(\varphi) = F(\check{\varphi})$.

Если обобщенная функция F задана посредством обычной интегрируемой функции F_0 по формуле

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} F_0(x)\varphi(x)\,dx,$$

то $\widehat{F}$ задается обычной функцией $\widehat{F_0}$, ибо по формуле (4.1.4) для всех $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\widehat{F}(\varphi) = F(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} F_0(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F_0}(x)\varphi(x)\,dx.$$

Отметим, что если действие обычной функции как обобщенной задавать через скалярное произведение в L^2, т. е. в интеграле ставить $\overline{\varphi}$ вместо φ, то для согласованности обобщенного и обычного преобразований Фурье на интегрируемых функциях следует положить в определении $\mathcal{F}F(\varphi) = F(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$, как сделано в некоторых учебниках.

Вычислим преобразования Фурье некоторых типичных обобщенных функций.

4.3.2. Пример. (i) Справедливы равенства

$$\widehat{1} = (2\pi)^{n/2}\delta, \quad \widehat{\delta} = (2\pi)^{-n/2},$$

ибо для всех $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ по формуле обращения имеем

$$\widehat{1}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\,dx = (2\pi)^{n/2}\varphi(0) = (2\pi)^{n/2}\delta(\varphi).$$

Из этих же соотношений для $\widehat{\varphi}$ вместо φ получаем второе равенство, ибо $\mathcal{F}^2\varphi(x) = \varphi(-x)$.

(ii) Для функции Хевисайда $\chi := I_{[0,+\infty)}$ на прямой имеем

$$\widehat{\chi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x - i0}.$$

Для обоснования положим $\chi_\varepsilon := e^{-\varepsilon x}I_{[0,+\infty)}$, $\varepsilon > 0$. Для $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^1)$ имеем $\widehat{\chi}(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\widehat{\chi_\varepsilon}(\varphi)$. Так как $\widehat{\chi_\varepsilon}(x) = (2\pi)^{-1/2}(x - i\varepsilon)^{-1}$, то указанное равенство верно по определению $(x - i0)^{-1}$.

(iii) Пусть μ — ограниченная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$. Тогда ее преобразование Фурье в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$ задается функцией

$$\widehat{\mu}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp[-i(x,y)]\, \mu(dy).$$

В самом деле, для всех $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ с помощью теоремы Фубини получаем

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\varphi) = \langle \mu, \widehat{\varphi} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(y)\, \mu(dy) \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \biggl(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \exp[-i(x,y)]\, dx \biggr) \mu(dy) \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \biggl(\int_{\mathbb{R}^n} \exp[-i(x,y)]\, \mu(dy) \biggr) dx,
\end{aligned}$$

что доказывает наше утверждение.

(iv) Для функции $f(x) = \exp(-\alpha|x|)$ на прямой, где $\alpha > 0$, непосредственным вычислением находим

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Bigl(\frac{1}{\alpha - iy} + \frac{1}{\alpha + iy} \Bigr) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{y^2 + \alpha^2}.$$

Поэтому для функции $g(y) = (y^2 + \alpha^2)^{-1}$ получаем

$$\widehat{g}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|x|}.$$

Если в случае (iii) взять в качестве μ меру Дирака δ_a в точке a, то получаем равенство

$$\widehat{\delta_a}(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp[-i(x,a)].$$

Это же равенство можно получить непосредственно аналогично случаю (i). Кроме того, для функции $e_a(x) = \exp[i(x,a)]$ имеем

$$\widehat{e_a} = (2\pi)^{-n/2} \delta_a.$$

С помощью этого равенства легко найти преобразования Фурье обобщенных функций, задаваемых функциями $\sin x$ и $\cos x$. Посредством дифференцирования и умножения на многочлены запас явно вычисляемых преобразований Фурье можно расширить, поскольку для всех $F \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$ мы имеем

$$\widehat{\partial_{y_j} F} = i x_j \widehat{F}, \quad \partial_{x_j} \widehat{F} = -i \widehat{y_j F} \tag{4.3.1}$$

ввиду аналогичных соотношений для функций из $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$. Скажем, первое соотношение проверяется следующим образом (для упрощения выкладок на прямой):

$$\widehat{F'}(\varphi) = F'(\widehat{\varphi}) = -F(\widehat{\varphi}\,') = -F(-i\widehat{x\cdot\varphi}) = i\widehat{F}(x\cdot\varphi) = i(x\cdot\widehat{F})(\varphi).$$

Преобразование Фурье обобщенных функций играет важную роль в теории уравнений с частными производными.

Обсудим теперь свертку $f*F$ обычной и обобщенной функций. Мы рассмотрим лишь два случая: $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $f\in\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$, $F\in\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$. Наша цель — так определить свертку $f*F$, чтобы она совпадала с классической для обобщенных функций F, задаваемых интегрируемыми функциями. Для этого запишем действие свертки интегрируемых функций f и F на функцию $\varphi\in\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f*F(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)F(y)\varphi(x)\,dy\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(x)F(y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(-\,\cdot\,)*\varphi(y)F(y)\,dy,$$

где $f(-\,\cdot\,)$ обозначает функцию $x\mapsto f(-x)$.

Это подсказывает такое определение свертки с обобщенной функцией. Пусть либо $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, либо $f\in\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ и $F\in\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$f*F(\varphi) := F\bigl(f(-\,\cdot\,)*\varphi\bigr).$$

Заметим, что в первом случае $f(-\,\cdot\,)*\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а во втором случае $f(-\,\cdot\,)*\varphi\in\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi\in\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$. Последнее легко усмотреть из того, что преобразование Фурье свертки двух функций из $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ есть произведение двух элементов из $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$, причем преобразование Фурье переводит $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ в $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, нами корректно определена свертка с нужным свойством согласованности. Оказывается, полученные выше объекты являются гладкими функциями.

4.3.3. Предложение. *Если либо $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, либо $f\in\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ и $F\in\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$, то $f*F$ задается гладкой функцией.*

Доказательство см. в [2, § 9.8].

Имеются и другие случаи существования свертки. Если $f\in\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, $F\in\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, причем $\mathcal{F}f$ является гладкой функцией с производными не более чем полиномиального роста (т. е. умножение на нее задает оператор в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$), то свертку $f*F$ можно определить как $(2\pi)^{n/2}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}F)$. Скажем, так можно сделать для $f\in\boldsymbol{\mathcal{S}}$ или для $F=\delta_a$, что даст

$f * \delta_a = f(\cdot - a)$. Если $F, G \in \mathfrak{D}'$ имеют компактные носители, то теорема 3.4.5 позволяет определить свертку так: записав F и G в виде

$$F = \partial_{x_1}^k \cdots \partial_{x_n}^k \Psi, \quad G = \partial_{x_1}^m \cdots \partial_{x_n}^m \Phi,$$

где Ψ и Φ непрерывны, положим $F * G = \partial_{x_1}^{k+m} \cdots \partial_{x_n}^{k+m}(\Psi * \Phi)$. Для разных специальных случаев используются и другие приемы. Важно, однако, то, что свертку нельзя разумным образом продолжить на все пары обобщенных функций из $\mathfrak{D}'$ или $\mathcal{S}'$ по тем же причинам, почему нельзя продолжить произведение.

§ 4.4. Уравнения с обобщенными функциями

Преобразование Фурье и свертка эффективно применяются для решения дифференциальных уравнений с обычными и обобщенными функциями. Особенно полезны они при изучении линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим несколько типичных примеров.

4.4.1. Пример. Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}F = c_k F^{(k)} + c_{k-1} F^{(k-1)} + \cdots + c_1 F' + c_0 F = G$$

в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ с правой частью $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$. Взятие преобразования Фурье переводит его в алгебраическое уравнение

$$[c_k (ix)^k \cdot \widehat{F} + \cdots + c_1 (ix) \cdot \widehat{F} + c_0 \widehat{F}] = \widehat{G} = \mathcal{P}(x) \cdot \widehat{F} = \widehat{G},$$

где многочлен

$$\mathcal{P}(x) := c_k (ix)^k + \cdots + c_1 (ix) + c_0$$

называется символом дифференциального оператора $\mathcal{L}$; он получается подстановкой $(ix)^k$ вместо d^k в $\mathcal{L}$. Таким образом, для нахождения F надо поделить $\widehat{G}$ на $\mathcal{P}$ и взять обратное преобразование Фурье. Если многочлен $\mathcal{P}$ не имеет вещественных нулей, то на него можно поделить в обычном смысле. Например, если

$$\mathcal{L}F = F'' - F = G,$$

то $\mathcal{P}(x) = -x^2 - 1$ и $\widehat{F} = -(x^2+1)^{-1}\widehat{G}$. При наличии нулей приходится прибегать к некоторым процедурам регуляризации типа использованной при определении функции V.P.$\frac{1}{x}$. В многомерном случае ситуация аналогична, но появляются дополнительные сложности из-за значительно более сложного устройства нулей многочленов. Однако Л. Хёрмандер доказал, что для любого многочлена $\mathcal{P}$, не равного тождественно нулю, уравнение $\mathcal{P} \cdot \widehat{F} = \widehat{G}$ разрешимо в $\mathcal{S}'$ при любой правой части из $\mathcal{S}'$. Правда, доказательство этого довольно безобидного и элементарно выглядящего факта чрезвычайно трудно и занимает много страниц. Таким образом, для ненулевого дифференциального оператора L уравнение $LF = G$ имеет решения в $\mathcal{S}'$ при любой правой части G из $\mathcal{S}'$. Если многочлен $\mathcal{P}$ отделен от нуля на $\mathbb{R}^n$ (для этого уже мало отсутствия вещественных корней), то проблема деления тривиальна. Например, для уравнения

$$\Delta F - F = G$$

получаем $\widehat{F} = -(|x|^2+1)^{-1}\widehat{G}$. По теореме Мальгранжа–Эренпрайса для всякого ненулевого дифференциального оператора L уравнение $LF = G$ имеет решения в $\mathcal{D}'$ при любой правой части G из $\mathcal{D}'$. Однако решения в $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$ могут отличаться. Например, уравнение $F' - F = 0$ имеет в $\mathcal{S}'$ лишь нулевое решения, а в $\mathcal{D}'$ есть решение e^x.

4.4.2. Пример. Предположим, что есть некоторая функция Φ (обобщенная или обычная), для которой $1/\mathcal{P} = \widehat{\Phi}$, причем определена свертка $\Phi * G$. Тогда решение уравнения из предыдущего примера можно записать формулой

$$F = (2\pi)^{-n/2}\Phi * G.$$

Действительно, преобразование Фурье правой части есть как раз произведение $\widehat{\Phi}\cdot\widehat{G} = \widehat{G}/\mathcal{P}$. Например, в одномерном случае функция $(x^2+1)^{-1}$ есть преобразование Фурье функции $\sqrt{\pi/2}e^{-|x|}$. Поэтому решение уравнения $F'' - F = G$ дается сверткой $-G$ и $e^{-|x|}/2$. Есть и многомерные аналоги этого примера. Конечно, описанный прием полезен и для решения уравнений с обычными функциями.

Отметим еще одно важное обстоятельство, в котором особо проявляется роль обобщенных функций. Как уже говорилось, уравнение с постоянными коэффициентами можно решить для любой правой части, в частности для $G = \delta$. Решение уравнения

$$\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta$$

называется *фундаментальным решением* для оператора $\mathcal{L}$. Для фундаментального решения в $\mathcal{S}'$ мы получаем $\mathcal{P}\cdot\widehat{\mathcal{E}} = (2\pi)^{-n/2}$. Таким образом, для нахождения фундаментального решения надо разделить постоянную на символ оператора и взять обратное преобразование Фурье. Если фундаментальное решение $\mathcal{E}$ известно, то решение уравнения $\mathcal{L}F = G$ дается формулой $\mathcal{E} * G$ для тех G, для которых свертка определена.

Аналогично решаются параболические линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

4.4.3. Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = c_k \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t) + c_{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} F(t) + \cdots + c_1 \frac{\partial}{\partial x} F(t) + c_0 F + G(t)$$

с начальным условием $F(0) = F_0$, где $G(t) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'$ при каждом $t \in \mathbb{R}^1$, $F_0 \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'$. Под решением понимается отображение $t \mapsto F(t)$ со значениями в $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$, удовлетворяющее тождеству

$$\langle F(t), \varphi \rangle = \langle F_0, \varphi \rangle + \int_0^t \bigl[\langle F(s), \mathcal{L}\varphi \rangle + \langle G(s), \varphi \rangle \bigr] \, ds$$

при всех $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$; здесь $\mathcal{L}\varphi = c_k \varphi^{(k)} + \cdots + c_0 \varphi$. Применение преобразования Фурье сводит это уравнение с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \widehat{F(t)} = \mathcal{P} \cdot \widehat{F(t)} + \widehat{G(t)}, \quad \widehat{F(0)} = \widehat{F_0}$$

в пространстве $\boldsymbol{\mathcal{S}}'$. Если все возникшие здесь преобразования Фурье оказались обычными функциями, то надо решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \widehat{F(t)}(y) = \mathcal{P}(y) \cdot \widehat{F(t)}(y) + \widehat{G(t)}(y), \quad \widehat{F(0)}(y) = \widehat{F_0}(y)$$

при каждом фиксированном y, затем взять по y обратное преобразование Фурье. Например, для уравнения

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 F(t)}{\partial x^2}$$

с начальным условием F_0 получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \widehat{F(t)}(y) = -y^2 \widehat{F(t)}(y), \quad \widehat{F(0)}(y) = \widehat{F_0}(y),$$

решение которого есть функция $\widehat{F(t)}(y) = e^{-ty^2} \widehat{F_0}(y)$. Теперь можно привлечь свертку, ибо e^{-ty^2} есть преобразование Фурье функции $\Phi_t(x) = (2t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)}$. Таким образом, мы получаем классическую формулу

$$F(t,x) = (2\pi)^{-1/2} \Phi_t * F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} \Phi_0(y) \, dy,$$

представляющую решение нашего уравнения в виде свертки начального условия с гауссовским ядром. Для уравнения на $\mathbb{R}^n$ вида

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \mathcal{L} F(t), \quad F(0) = F_0$$

ситуация совершенно аналогична. Преобразование Фурье также сводит его к обыкновенному уравнению в $\mathcal{S}'$. Если $\widehat{F(t)}$ является обычной функцией, то для $\psi(t, y) = \widehat{F(t)}(y)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\psi(t, y) = \mathcal{P}(y) \cdot \psi(t, y), \quad \psi(0, y) = \widehat{F_0}(y),$$

решение которого при каждом y дается формулой $e^{t\mathcal{P}(y)}\widehat{F_0}(y)$. Теперь $F(t)$ находится обратным преобразованием Фурье, причем во многих случаях решение можно записать в виде свертки начального условия F_0 с некоторым ядром, зависящим от t.

§ 4.5. Задачи

4.5.1. Задача. Найти преобразования Фурье функций из $L^2(\mathbb{R}^1)$:
(i) $f(x) = xe^{-x^2}$, (ii) $f(x) = I_{[a,b]}$, (iii) $f(x) = \sin x/x$,
(iv) $f(x) = \sin x/(x - \pi)$, (v) $f(x) = (x + i)^{-1}$.

4.5.2. Задача. Найти преобразование Фурье обобщенных функций из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, заданных обычными функциями:
(i) $f(x) = x \sin x$; (ii) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, где $\operatorname{sgn} x$ — знак x;
(iii) $f(x) = |x|$; (iv) $f(x) = \exp(iax^2)$.

4.5.3. Задача. Пусть $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}\widehat{g}$, где левая часть понимается как преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ ограниченной функции $f * g$.

4.5.4. Задача. (i) Положим $f(x) = x$ при $x \in [0, 2\pi)$ и продолжим f на прямую с периодом 2π. Представить f в виде $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ в смысле сходимости в $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$ и показать, что $c_0 = \pi$, $c_k = i/k$ при всех $k \neq 0$.

(ii) Показать, что производная f в $\mathcal{D}'$ и в $\mathcal{S}'$ есть обобщенная функция $f' = 1 - 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$.

(iii) (Формула Пуассона) Доказать в $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$ равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}.$$

(iv) Показать, что для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ верно равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) = \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi).$$

4.5.5. Задача. Проверить, что преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$ задает унитарную эквивалентность оператора умножения на аргумент на области $\{\varphi \in L^2(\mathbb{R})\colon\ t\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$ и оператора $-id/dt$ на области определения $\mathfrak{D} = W^{2,1}(\mathbb{R})$.

4.5.6. Задача. Обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ называется периодической с периодом 2π, если $F(\,\cdot + 2\pi) = F$, где $F(\,\cdot + 2\pi)$ определяется в смысле предыдущей задачи.

(i) Пусть $\xi_{2\pi}$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая четная функция с носителем в $[-3\pi/2, 3\pi/2]$, равная 1 на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ и удовлетворяющая условию $\xi_{2\pi}(x) + \xi_{2\pi}(x + 2\pi) = 1$ при $x \in [-3\pi/2, -\pi/2]$. Проверить, что $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{2\pi}(x + 2\pi k) = 1$, причем для всякой обобщенной функции F с периодом 2π верно равенство

$$F = (\xi_{2\pi} F) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}.$$

(ii) Используя формулу Пуассона из задачи 4.5.4, доказать, что всякая обобщенная функция F с периодом 2π разлагается в сходящийся в $\mathcal{D}'$ ряд Фурье

$$F = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F) e^{ikx}, \quad c_k(F) = (2\pi)^{-1} F(\xi_{2\pi} e^{-ikx}).$$

Литература

[1] Агранович М. С. Обобщенные функции. МЦНМО, М., 2008.

[2] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 3-е изд. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2020.

[3] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. 2-е изд. Наука, М., 1979.

[4] Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Введение в теорию обобщенных функций. Лекционные курсы НОЦ. МИАН им. В. А. Стеклова, М., 2006.

[5] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. Наука, М., 1976.

Глава 5

Дифференцирование в нормированных пространствах и экстремальные задачи

В. Ю. Протасов

§ 5.1. Дифференцирование в нормированных пространствах

5.1.1. Определение. *Пусть X, Y — нормированные пространства, $G \subset X$, $x \in \operatorname{int} G$, $h \in X$. Вариацией по Лагранжу отображения $F: G \to Y$ в точке x по направлению h называется следующий предел:* $\delta_F(x,h) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+th)-F(x)}{t}$.

Отображение называется *дифференцируемым по Лагранжу* в точке x, если вариация по Лагранжу в данной точке существует по всякому направлению $h \in X$. Следующая теорема является обобщением теоремы Ферма на нормированные пространства.

5.1.2. Теорема (теорема Ферма для нормированных пространств). *Если $x \in \operatorname{int} G \subset X$ — точка локального минимума функции $f: G \to \mathbb{R}$ и функция f дифференцируема по Лагранжу в этой точке, то выполнено равенство $\delta_f(x,h) = 0$ для всякого $h \in X$.*

Доказательство. Для фиксированного h рассмотрим функцию $F_h(t) = f(x+th)$. Так как $0 \in \operatorname{locmin} F_h$, то $F_h'(0) = 0$. Остается заметить, что $F_h'(0) = \delta_F(x,h)$. □

Теперь мы можем обобщить два главных свойства выпуклых функций на произвольные нормированные пространства. Соответствующее утверждение для функции нескольких переменных не меняется вовсе, ни формулировка, ни доказательство: *для выпуклой задачи каждый локальный минимум является ее абсолютным минимумом.*

5.1.3. Предложение. *Если задача выпукла, функция f дифференцируема по Лагранжу в точке $x \in \operatorname{int} G$ и $\delta_f(x,h) = 0$ для всех $h \in X$, то эта точка дает абсолютный минимум.*

Доказательство. Предположим, что существует точка $y \in G$, для которой $f(y) < f(x)$. Проведем прямую $\{x+th \big| t \in \mathbb{R}\}$ через точки x и y, где $h = y - x$. Ограничение функции f на эту прямую является выпуклой функцией одной переменной, ее производная в точке x равна $\delta_f(x, h) = 0$, следовательно, абсолютный минимум этой функции на прямой достигается в точке x, значит, $f(y) \geqslant f(x)$. $\square$

5.1.4. Определение. *Отображение $F\colon G \to Y$, где $G \subset X$, называется дифференцируемым по Гато в точке $x \in \operatorname{int} G$, если оно дифференцируемо по Лагранжу в этой точке и существует линейный непрерывный оператор $A\colon X \to Y$ такой, что $\delta_F(x, h) = Ah$. Оператор A называется производной по Гато отображения F в точке x.*

5.1.5. Следствие. *В условиях теоремы* 5.1.2 *функция f дифференцируема по Гато в точке x и производная по Гато равна нулю.*

5.1.6. Определение. *Отображение $F\colon G \to Y$, где $G \subset X$, называется дифференцируемым по Фреше в точке $x \in \operatorname{int} G$, если существует линейный непрерывный оператор $A\colon X \to Y$ такой, что $F(x + h) = F(x) + Ah + o(h)$, $h \to 0$, $h \in X$. Оператор A называется производной по Фреше отображения F в точке x и обозначается через $A = F'(x)$.*

Таким образом, $F(x + h) = F(x) + F'(x)[h] + o(h)$, $h \to 0$. Из этого следует, что функция, дифференцируемая по Фреше в точке x, непрерывна в x. Для дифференцируемости по Гато это может не выполняться (пример 5.1.8). Заметим, что производная по Фреше, если существует, однозначно определена. В противном случае, если найдутся два оператора A_1, A_2, для которых $F(x + h) = F(x) + A_i[h] + o(h)$, $h \to 0$, $i = 1, 2$, то получим $(A_1 - A_2)[h] = o(h)$, $h \to 0$. Последнее означает, что $A_1 = A_2$. Иначе было бы $(A_1 - A_2)[\widetilde{h}] \neq 0$ для некоторого $\widetilde{h} \in X$, тогда $t(A_1 - A_2)[\widetilde{h}] = (A_1 - A_2)[t\widetilde{h}] = o(t)$, $t \to 0$, что невозможно.

Как связана производная по Фреше с вариацией по Лагранжу? Имеем

$$\delta_F(x, h) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F'(x)[th] + o(th)}{t} = F'(x)[h].$$

Следовательно, отображение, дифференцируемое по Фреше, дифференцируемо и по Лагранжу. Более того, так как его вариация по Лагранжу равна $\delta_F(x, h) = Ah$, где $A = F'(x)$, то приходим к выводу, что отображение, дифференцируемое по Фреше, дифференцируемо и по Гато (с той же производной). Итак,

Фреше $\Rightarrow$ **Гато** $\Rightarrow$ **Лагранж.**

Обратные импликации не выполняются, как показывают следующие примеры.

5.1.7. Пример. Функция $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2) = \bigl(x_1^2 x_2\bigr)^{1/3}$, дифференцируема по Лагранжу в точке $x = (0,0)$: $\delta_F(x,h) = \bigl(h_1^2 h_2\bigr)^{1/3}$. Если $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$, то $\delta_F(x,e_1) = \delta_F(x,e_2) = 0$. Однако $\delta_F(x, e_1+e_2) = 1$. Если отображение дифференцируемо по Гато, то $\delta_F(x,h)$ линейно зависит от h. Значит, должно выполняться равенство $\delta_F(x,e_1+e_2) = \delta_F(x,e_1) + \delta_F(x,e_2)$, что неверно. Поэтому F не дифференцируемо по Гато.

5.1.8. Пример. Функция $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & x_2 = x_1^2,\ x_1 \neq 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

дифференцируема по Лагранжу в точке $x = (0,0)$: $\delta_F(x,h) = 0$ для любого $h \in \mathbb{R}^2$. Значит, она дифференцируема и по Гато, ее производная по Гато равна 0. Но по Фреше она не дифференцируема, так как она разрывна в точке x.

Класс функций, дифференцируемых по Фреше в точке x, обозначим через $\mathcal{D}(x)$, а дифференцируемых в каждой точке области G — через $\mathcal{D}(G)$. Далее, если не оговорено иное, под дифференцируемыми функциями мы будем понимать именно дифференцируемые по Фреше.

§ 5.2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнения Эйлера – Лагранжа

Простейшей задачей вариационного исчисления называется следующая задача:

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L\bigl(t, x, \dot{x}\bigr)\, dt \to \min, \\ \\ x \in C^1\bigl([t_0, t_1], \mathbb{R}^n\bigr),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

где $x(t) = \bigl(x_1(t), \ldots, x_n(t)\bigr)$ — непрерывно-дифференцируемая вектор-функция из $[t_0, t_1]$ в $\mathbb{R}^n$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ — заданные точки (граничные условия), $L \in C\bigl([t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}\bigr)$ — заданная функция, называемая *интегрантом*. Таким образом, среди всех непрерывно-дифференцируемых функций, принимающих данные значения на концах нашего отрезка, найти такую, которая доставляет минимум интегральному функционалу $\mathcal{J}(x)$. Функции $x \in C^1\bigl([t_0,t_1], \mathbb{R}^n\bigr)$, удовлетворяющие данным граничным условиям, будем называть *допустимыми*.

5.2.1. Определение. *Допустимая функция* $\hat{x} \in C^1\big([t_0,t_1],\mathbb{R}^n\big)$ *доставляет слабый локальный минимум в задаче* (5.2.1)*, если существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\mathcal{J}(x) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x})$ *для любой допустимой функции* x*, удовлетворяющей условию* $\big\|x - \hat{x}\big\|_{C^1[t_0,t_1]} < \varepsilon$.

Термин *слабый* относится к метрике пространства C^1, которая определяет окрестность для данного локального минимума. Таким образом, точка $\hat{x}$ доставляет слабый локальный минимум, если для всех допустимых x, расположенных достаточно близко от $\bar{x}$ в метрике пространства C^1, имеем $\mathcal{J}(x) \geqslant \mathcal{J}(\hat{x})$. Следующая теорема дает необходимые условия слабого локального минимума.

5.2.2. Теорема. *Предположим, что в задаче* (5.2.1) *функции* L, L_x *и* $L_{\dot{x}}$ *непрерывны. Если функция* $\hat{x}$ *доставляет слабый локальный минимум, то выполнено уравнение Эйлера–Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt}\,L_{\dot{x}}(t,\hat{x},\dot{\hat{x}}) \quad = \quad L_x(t,\hat{x},\dot{\hat{x}}). \tag{5.2.2}$$

Любое решение $\hat{x}(t)$ уравнения (5.2.2) называется *экстремалью*. Уравнение (5.2.2) — система из n уравнений

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i} = L_{x_i}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Таким образом, для поиска экстремали имеется система из n дифференциальных уравнений второго порядка и $2n$ граничных условий $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ (т. е. $x_i(t_0) = x_{0i}, x_i(t_1) = x_{1i}$, $i = 1,\ldots,n$). Согласно теореме 5.2.2 любая функция, доставляющая слабый локальный минимум, является экстремалью. Но, вообще говоря, не наоборот. Мы докажем теорему 5.2.2 в случае $n = 1$. Многомерный случай полностью аналогичен, мы оставляем его читателю. Доказательство состоит из двух лемм. Пространство функций из $C^1[t_0,t_1]$, удовлетворяющих условию $h(t_0) = h(t_1) = 0$, будем обозначать через $C_0^1[t_0,t_1]$ или просто через C_0^1.

5.2.3. Лемма. *Если функции* L, L_x *и* $L_{\dot{x}}$ *непрерывны, то для любой функции* $h \in C_0^1[t_0,t_1]$ *имеем*

$$\delta_{\mathcal{J}}\big(x,h\big) = \int_{t_0}^{t_1} \big(L_x h + L_{\dot{x}}\dot{h}\big)\,dt.$$

Доказательство. Так как частные производные L_x и $L_{\dot{x}}$ непрерывны, то функция $\varphi(\lambda) = L(t, x + \lambda h, \dot{x} + \lambda\dot{h})$ дифференцируема по λ. Пользуясь правилом дифференцирования функции многих переменных и дифференцированием интеграла по параметру, имеем

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{J}}\big(x,h\big) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\mathcal{J}(x+\lambda h)-\mathcal{J}(x)}{\lambda}\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\lim_{\lambda\to 0}\Big(\frac{L(t,x+\lambda h,\dot{x}+\lambda\dot{h})-L(t,x,\dot{x})}{\lambda}\Big)\,dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{d\lambda}L(t,x+\lambda h,\dot{x}+\lambda\dot{h})\Big|_{\lambda=0}dt = \int_{t_0}^{t_1}\big(L_x h + L_{\dot{x}}\dot{h}\big)\,dt,\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

5.2.4. Лемма (Дюбуа – Реймон). *Пусть* $a(t), b(t)\in C[t_0,t_1]$ *и для всякой функции* $h\in C_0^1[t_0,t_1]$ *имеем*

$$\int_{t_0}^{t_1}\big(a(t)h(t)+b(t)\dot{h}(t)\big)\,dt = 0.$$

Тогда функция $b(t)$ *непрерывно дифференцируема и* $b'(t)=a(t)$.

Доказательство. Пусть $A(t)$ — любая первообразная функции $a(t)$, т. е. $A(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau+K$. Интегрируя по частям, имеем

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\!\big(a(t)h(t)+b(t)\dot{h}(t)\big)\,dt = A(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\!\big(-A(t)+b(t)\big)\dot{h}(t)\,dt.$$

Теперь учитывая, что $h(t_0)=h(t_1)=0$, находим

$$\int_{t_0}^{t_1}\big(-A(t)+b(t)\big)\dot{h}(t)\,dt = 0.$$

Это равенство выполнено для любой функции $h\in C_0^1[t_0,t_1]$. Выберем теперь нужную функцию h. Для этого подберем константу K таким образом, чтобы интеграл функции $-A(t)+b(t)$ по отрезку $[t_0,t_1]$ был равен нулю. Тогда функция $h(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}\big(-A(\tau)+b(\tau)\big)\,d\tau$ принадлежит пространству $C_0^1[t_0,t_1]$, при этом

$$\int_{t_0}^{t_1}\big(-A(t)+b(t)\big)\dot{h}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\big(-A(t)+b(t)\big)^2\,dt \;=0.$$

Следовательно, $b(t)\equiv A(t)$. Поэтому $b\in C^1[t_0,t_1]$ и $b'(t)=a(t)$. □

Доказательство теоремы 5.2.2. Для точки $\bar{x}$ локального минимума функционала $\mathcal{J}$ в пространстве $C_0^1[t_0,t_1]$ имеем $\delta_{\mathcal{J}}(\bar{x},h)=0$ для всякой функции $h\in C_0^1[t_0,t_1]$. Применяя теперь лемму 5.2.3, а затем лемму 5.2.4 для $a=L_x$, $b=L_{\dot{x}}$, завершаем доказательство. $\square$

Применив теперь предложение 5.1.3, получаем такое утверждение.

5.2.5. Следствие. *Если интегрант в простейшей задаче является выпуклым функционалом от x, т. е.*

$$L\bigl(t,(1-\lambda)x+\lambda y,(1-\lambda)\dot{x}+\lambda\dot{y}\bigr)\leqslant(1-\lambda)L(t,x,\dot{x})+\lambda L(t,y,\dot{y})$$

для всех допустимых $x,y\in C^1[t_0,t_1]$ в любой точке $t\in[t_0,t_1]$, то уравнение Эйлера – Лагранжа является достаточным условием абсолютного минимума.

В некоторых частных случаях уравнение Эйлера – Лагранжа может быть сведено у уравнению первого порядка. Введем еще два полезных определения: интеграла импульса $p(t)=L_{\dot{x}}$, а также интеграла энергии $H(t)=\dot{x}L_{\dot{x}}-L$.

5.2.6. Предложение. *Если интегрант $L(t)$ не зависит явно от $\dot{x}$, т. е. $L(t,x,\dot{x})=L(t,x)$, то уравнение Эйлера – Лагранжа равносильно уравнению $\hat{L}_x(t)\equiv 0$.*

Если интегрант $L(t)$ не зависит явно от x, то уравнение Эйлера – Лагранжа равносильно уравнению $\hat{p}(t)=\hat{L}_{\dot{x}}(t)\equiv\mathrm{const}$.

Если интегрант $L(t)$ не зависит явно от t, то из уравнения Эйлера – Лагранжа следует, что $\hat{H}(t)=\hat{L}_{\dot{x}}\dot{\hat{x}}-L\equiv\mathrm{const}$. Если известно, что экстремаль $\hat{x}$ не является тождественной константой ни на каком интервале, то верно и обратное: из уравнения $\hat{H}\equiv\mathrm{const}$ следует уравнение Эйлера – Лагранжа.

Доказательство. Первые два пункта очевидны, докажем третий. Имеем

$$H'=\frac{d}{dt}\bigl(L_{\dot{x}}\bigr)\dot{x}+L_{\dot{x}}\ddot{x}-L_x\dot{x}-L_{\dot{x}}\ddot{x}=\Bigl(\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}-L_x\Bigr)\dot{x}.$$

Поэтому из уравнения Эйлера – Лагранжа следует, что $\hat{H}'\equiv 0$, т. е. $\hat{H}\equiv\mathrm{const}$. Если функция $\dot{\hat{x}}(t)$ не обращается в нуль ни на каком интервале, то функция $\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}-\hat{L}_x$ равна нулю на всюду плотном подмножестве отрезка $[t_0,t_1]$, а значит, в силу непрерывности, и на всем отрезке. $\square$

5.2.7. Пример (пример Гильберта)**.** Рассмотрим задачу

$$J(x) = \int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2\,dt \to \min, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1. \tag{5.2.3}$$

Так как интегрант не зависит явно от x, то уравнение Эйлера – Лагранжа дает $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$, откуда $L_{\dot{x}} = \mathrm{const}$, следовательно, $2t^{2/3}\dot{x} = c$. Единственное решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, $\hat{x}(t) = t^{1/3}$. Докажем, что $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$. Для любой допустимой вариации $h \in C_0^1[0,1]$ имеем

$$J(\hat{x}+h)-J(\hat{x}) = \int_0^1 [t^{2/3}(\dot{\hat{x}}+\dot{h})^2 - t^{2/3}\dot{\hat{x}}^2]\,dt = \int_0^1 [2t^{2/3}\dot{\hat{x}}\dot{h} + t^{2/3}\dot{h}^2]\,dt$$

$$\geqslant \int_0^1 2t^{2/3}\dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt = \int_0^1 2t^{2/3}\frac{1}{3}t^{-2/3}\dot{h}\,dt = \frac{2}{3}\big(h(1)-h(0)\big) = 0.$$

Таким образом, $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум. Тем не менее эта функция не является экстремалью, поскольку она не принадлежит $C^1[0,1]$. Поэтому в данной задаче вообще нет допустимых экстремалей. Этот пример показывает, что в некоторых случаях пространство C^1 слишком узко для решения простейшей задачи и имеет смысл искать экстремали в более широких пространствах, например в пространствах Соболева.

5.2.8. Пример (задача о минимальной площади поверхности вращения)**.** Общая задача Лагранжа – Плато состоит в нахождении поверхности минимальной площади, содержащей заданное компактное множество в $\mathbb{R}^3$. Мы рассмотрим случай, когда это множество — два круга радиусом 1, причем отрезок между их центрами равен $2a$ и перпендикулярен плоскостям кругов. Мы ограничимся только поверхностями вращения (что выглядит естественно, но не так просто обосновывается). Если поверхность образована вращением вокруг оси абсцисс графика функции $x(t)$, для которой $x(-a) = x(a) = 1$, то задача формализуется в виде

$$J(x) = \int_{-a}^{a} 2\pi x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \min, \quad x(-a) = x(a) = 1. \tag{5.2.4}$$

Так как интегрант не зависит явно от t, можем воспользоваться интегралом энергии: $H = \dot{x}L_{\dot{x}} - L = \mathrm{const}$. Вычислив производные и проделав очевидные преобразования, получаем $\frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = c$, откуда $\frac{dx}{\sqrt{(x/c)^2-1}} = dt$. С помощью замены $x = c\,\mathrm{ch}\,\tau$ находим решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным

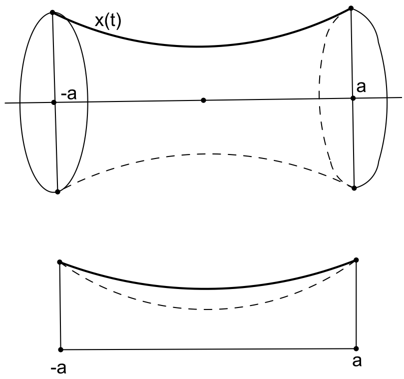


Рис. 1.

условиям: $\hat{x}(t) = c\,\mathrm{ch}\,(t/c)$. Остается найти параметр c из краевого условия $\hat{x}(a) = 1$ (условие $\hat{x}(-a) = 1$ будет тогда выполнено в силу четности функции). Положив $s = a/c$, получаем уравнение $\mathrm{ch}\,s = s/a$. Пусть число a_0 таково, что прямая $y = s/a_0$ касается графика функции $y = \mathrm{ch}\,s$ (рис. 2).

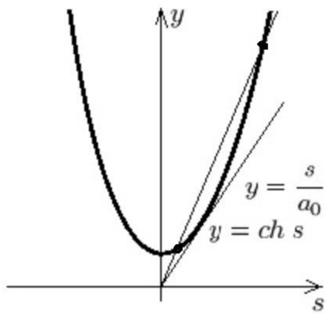


Рис. 2.

Имеем $a_0 = 0.662\ldots$. При каждом $a < a_0$ прямая пересекает график в двух точках, поэтому есть два значения параметра c, т. е. задача имеет две допустимые экстремали. При $a = a_0$ экстремаль единственна, а при $a > a_0$ экстремалей нет. Последнее объясняется тем, что при $a > a_0$ площадь любой поверхности вращения становится больше суммы площадей двух кругов радиусом 1, поэтому минимальная поверхность «распадается» в объединение двух кругов. В случае $a < a_0$ из двух экстремалей абсолютный минимум дает одна, соответствующая меньшему из двух значений c, т.е. меньшему корню уравнения $c\operatorname{ch}\left(\frac{a}{c}\right) = 1$; вторая не доставляет даже локального минимума. Это мы доказывать не будем.

§ 5.3. Производные высших порядков

Для получения условий второго порядка в простейшей задаче мы вначале определим вторую производную по Фреше. Пусть X, Y — нормированные пространства, $F\colon X \to Y$ — некоторое отображение. Обозначим также через $\mathcal{L}(X, Y)$ пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y.

5.3.1. Определение. *Отображение $F\colon X \to Y$ является дважды дифференцируемым в точке x, если оно дифференцируемо в окрестности этой точки и отображение $x \to F'(x)$ из пространства X в $\mathcal{L}(X, Y)$ является дифференцируемым. Производная этого отображения называется второй производной функции F в точке x.*

По определению, таким образом, имеем

$$F'(x + h_1)[h_2] = F'(x)[h_2] + \big(F''(x)[h_1]\big)[h_2] + o(\|h_1\| \cdot \|h_2\|).$$

Если функция дважды дифференцируема, то

$$\big(F''(x)[h_1]\big)[h_2] = \big(F''(x)[h_2]\big)[h_1]$$

для любых $h_1, h_2 \in X$. Мы оставим этот факт без доказательства. Таким образом, вторая производная — непрерывная симметричная билинейная форма на X: $F''[h_1, h_2] = \big(F''(x)[h_1]\big)[h_2]$. Следующее предложение мы также не будем доказывать.

5.3.2. Предложение. *Если отображение F дважды дифференцируемо в точке x, то*

$$F(x + h) = F(x) + F'(x)[h] + \frac{1}{2}F''(x)[h, h] + o(\|h\|^2).$$

Симметрическая билинейная форма $Q\colon X \times X \to \mathbb{R}$, как и соответствующая ей квадратичная форма $Q(x, x)$, называется неотрицательно определенной (в других терминах — положительно полуопределенной, при этом пишут $Q \geqslant 0$), если $Q(x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$. Если же $Q(x, x) > 0$ для всех $x \in X, x \neq 0$, то форма называется положительно определенной (при этом пишут $Q > 0$).

5.3.3. Теорема. *Если $\hat{x}$ — точка локального минимума функции $F\colon X \to \mathbb{R}$, причем в этой точке F дважды дифференцируема, то $F'(\hat{x}) = 0$ и $F''(\hat{x}) \geqslant 0$. Обратно, если $F'(\hat{x}) = 0$ и выполнено неравенство $F''(\hat{x})[h,h] \geqslant \alpha\|h\|^2$, то точка $\hat{x}$ доставляет локальный минимум.*

Доказательство. Если $\hat{x} \in \operatorname{locmin}$, то $F'(\hat{x}) = 0$. Если при этом $F''(\hat{x})[h,h] < 0$ для некоторого $h \in X$, то при всех $t \neq 0$ получаем $F''(\hat{x})[th,th] = t^2F''(\hat{x})[h,h] < 0$. При $t \to 0$ применяем предложение 5.3.2 и получаем, что $F(\hat{x} + th) < F(\hat{x})$ при малых t. Доказательство достаточности немедленно вытекает из предложения 5.3.2. □

5.3.4. Замечание. В пограничном случае, когда $F'(\hat{x}) = 0$ и выполнено нестрогое неравенство $F''(\hat{x}) \geqslant 0$, т. е. когда необходимые условия выполнены, а достаточные нет, могут быть разные ситуации. Так, для функции $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3$ точка $\hat{x} = 0$ не дает локального минимума.

Рассмотрим теперь простейшую задачу и соответствующий функционал $\mathcal{J}(x) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt$. Предполагая, что вторые частные производные $L_{xx}, L_{x\,\dot{x}}, L_{\dot{x}\dot{x}}$ существуют и непрерывны, получаем

$$\mathcal{J}''(x)[h,h] = \int_{t_0}^{t_1} \left(L_{xx}h^2 + 2L_{x\dot{x}}h\dot{h} + L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2\right)dt. \qquad (5.3.1)$$

Литература

[1] Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория, примеры, задачи. Физматлит, М., 2006.

[2] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. Наука, М., 1979.

[3] Протасов В. Ю. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Курс лекций. $http://opu.math.msu.su/sites/default/files/main_courses/course-opu15f.pdf$

Глава 6

Мера Хаара

Ю. А. Неретин

§ 6.1. Введение и примеры

Топологические группы.

6.1.1. Определение. *Топологическая группа G — хаусдорфово топологическое пространство с групповыми операциями, причем умножение $G \times G \to G$ непрерывно по совокупности переменных, а взятие обратного элемента $G \to G$ непрерывно.*

6.1.2. Замечание. Эти условия можно ослабить и требовать лишь:
1) раздельную непрерывность умножения $(x, y) \to xy$; 2) непрерывность умножения в точке (e, e); 3) непрерывность отображения $x \mapsto x^{-1}$ в точке e.

Это иногда бывает полезно при проверке того, что данная группа G является топологической.

Предмет нашего интереса — *локально компактные группы*. Напомним, что топологическое пространство называется локально компактным, если всякая его точка имеет окрестность с компактным замыканием. Чтобы не лезть в дебри общей топологии и теории меры, мы по умолчанию будем рассматривать лишь группы со счетной базой топологии, хотя это во многих случаях и не является необходимым.

Такая группа автоматически метризуема, более того, на ней существует (неканоническая) метрика d, инвариантная относительно левых сдвигов, т. е. для всех элементов группы g_1, g_2, h выполнено равенство $d(hg_1, hg_2) = d(g_1, g_2)$. Напомним теорему Биркгофа – Какутани (см. [11, теорема II.8.2]): если топологическая группа имеет счетную фундаментальную систему окрестностей единицы, то на ней есть левоинвариантная метрика, совместимая с топологией. Такие метрики никогда не используются, но факт метризуемости удобен и полезен.

Это изложение весьма кратко, здесь и ниже мы даем ссылки, где можно найти дополнительную информацию на ту или иную тему, см. [5, § 23], [11, гл. II].

6.1.3. Пример. 1) Любая группа, снабженная дискретной топологией, является топологической.

2) *Классические группы*, см. [5, §49], [13, гл. 2, 3]:

— $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ — группа всех обратимых вещественных матриц порядка n;

— $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ — группа всех вещественных матриц порядка n с определителем единица;

— $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ — определяемые аналогично группы комплексных матриц;

— $\mathrm{O}(n)$ — группа ортогональных ($gg^t = 1$) вещественных матриц порядка n; $\mathrm{SO}(n)$ — ее подгруппа, состоящая из матриц с определителем единица;

— $\mathrm{U}(n)$ — группа унитарных ($gg^* = 1$) комплексных матриц порядка n; $\mathrm{SU}(n)$ — ее подгруппа, состоящая из матриц с определителем единица;

— $\mathrm{O}(p,q)$ — *псевдоортогональная группа*, т. е. группа вещественных матриц порядка $(p+q)$, сохраняющих знаконеопределенное скалярное произведение; иными словами $g \in \mathrm{O}(p,q)$, если

$$g\begin{pmatrix}1_p & 0\\ 0 & -1_q\end{pmatrix}g^t = \begin{pmatrix}1_p & 0\\ 0 & -1_q\end{pmatrix},$$

где через 1_p мы обозначаем единичную матрицу размера p, а через g^t — транспонированную матрицу. Наиболее важный пример — *группа Лоренца* $\mathrm{O}(1,4)$, нам ниже встретится группа $\mathrm{O}(n,n)$.

Обозначения происходят из аббревиатур слов general linear, special linear, orthogonal, unitary.

3) Некоторые матричные группы:

— группа матриц порядка 2 вида $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где $a > 0$;

— *группа верхнетреугольных матриц* порядка n, т. е. группа матриц вида

$$\begin{pmatrix}t_{11} & t_{11} & t_{13} & \dots\\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots\\ 0 & 0 & t_{33} & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},$$

где диагональные элементы t_{jj} обратимы;

— *группа строго верхнетреугольных матриц* состоит их матриц того же вида с $t_{jj} = 1$.

4) Группа диффеоморфизмов компактного многообразия, снабженная топологией равномерной сходимости всех частных производных; эта группа не является локально компактной.

5) Полная группа $\mathbf{U}(\infty)$ унитарных операторов гильбертова пространства; на ней есть две естественных топологии: равномерная операторная топология и слабая операторная топология. Эти две группы также не являются локально компактными.

6) Любая подгруппа топологической группы является топологической группой.

7) Замкнутая подгруппа локально компактной группы является локально компактной группой (замкнутая подгруппа компактной группы компактна).

8) *Фактор-группа.* Пусть G — топологическая группа, H — ее замкнутая нормальная подгруппа. Тогда фактор-группа G/H, снабженная фактор-топологией, является топологической группой. Если G локально компактна, то G/H локально компактна.

9) Конечное или счетное произведение компактных групп — компактная группа. Конечное произведение локально компактных групп — локально компактная группа.

Подробности см. в [6, § 5].

Теорема Хаара.

Левым сдвигом $L_h\colon G \to G$, где $h \in G$, называется преобразование $L_h g = hg$. Аналогично *правый сдвиг* R_h — преобразование $R_h g = gh$.

Напомним конструкцию образа меры (см. [2, § 3.12(ii)]). Пусть на пространстве M определена мера μ. Пусть $\psi\colon M \to N$ — измеримое отображение. Мера ν на N определяется равенством $\nu(A) := \mu(\psi^{-1}A)$. Наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества, называется борелевской. Заданные на ней меры называются борелевскими.

6.1.4. Теорема (Хаар)**.** *На всякой локально компактной группе со счетной базой существует единственная с точностью до постоянного множителя ненулевая σ-конечная борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно левых сдвигов.*

Эта мера называется *лево-инвариантной мерой Хаара.* Разумеется, право-инвариантная мера тоже существует, она получается из лево-инвариантной преобразованием $g \mapsto g^{-1}$. Доказательство дано в § 6.2 для компактных групп.

6.1.5. Теорема. *На компактной группе левоинвариантная мера Хаара является двусторонне инвариантной, она инвариантна также относительно преобразования $g \mapsto g^{-1}$.*

6.1.6. Пример. Мера Хаара на $\mathbb{R}^n$ — мера Лебега. Мера Хаара на торе $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ — тоже мера Лебега.

6.1.7. Пример. Для дискретной группы мы полагаем, что мера каждой точки равна 1.

6.1.8. Пример. Мера Хаара на мультипликативной группе положительных чисел равна $x^{-1}\,dx$, где dx – мера Лебега (а чему равна мера Хаара на мультипликативной группе комплексных чисел?).

6.1.9. Пример. Рассмотрим счетное произведение $\mathbb{Z}_2^\infty$ групп $\mathbb{Z}_2$. Мера Хаара совпадает с естественной мерой на счетном произведении двоеточий.

См. [4, § 7, 8], [5, § 26], [9, гл. 11], [12], [11, § 15], [3, гл. 7].

Мера Хаара на $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$**.** Рассмотрим пространство $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ вещественных матриц порядка n. Группа $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n)$ является дополнением до гиперповерхности $\det(X) = 0$. Пусть dX — мера Лебега на $\mathrm{Mat}(n)$. Мы будем искать меру Хаара в виде $\varphi(X)\,dX$, где $\varphi(X)$ — функция плотности.

Сначала заметим, что для $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ выполнено равенство

$$d(AX) = |\det A|^n \cdot dX.$$

В самом деле, матрица X составлена из своих столбцов $X^1, \ldots, X^n$, т. е. $\mathrm{Mat}(n) \simeq (\mathbb{R}^n)^n$. Преобразование $X \mapsto AX$ устроено как

$$(X^1, \ldots, X^n) \mapsto (AX^1, \ldots, AX^n).$$

На каждой копии $\mathbb{R}^n$ мера Лебега умножается на $|\det A|$, а на $(\mathbb{R}^n)^n$ — на $|\det A|^n$. Теперь мы можем написать множитель $\varphi(X)$.

6.1.10. Предложение. *Мера Хаара на* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *задается формулой* $|\det X|^{-n}\,dX$.

6.1.11. Задача. Чему равна мера Хаара на $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$?

Ниже нам понадобится еще одно упражнение в том же духе. Рассмотрим пространства $\mathrm{Symm}(n,\mathbb{R})$ и $\mathrm{Asymm}(n,\mathbb{R})$, состоящие из вещественных симметричных и кососимметричных матриц. Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathfrak{A}\colon X \mapsto AXA^t$$

пространства всех матриц. Оно распадается в прямую сумму таких же преобразований на $\mathrm{Symm}(n)$ и $\mathrm{Asymm}(n)$, обозначим их через $\mathfrak{A}_{\mathrm{Symm}(n)}$ и $\mathfrak{A}_{\mathrm{Asymm}(n)}$.

6.1.12. Лемма. *Верно равенство*

$$\det(\mathfrak{A}_{\mathrm{Symm}(n)}) = |\det A|^{n+1}, \quad \det(\mathfrak{A}_{\mathrm{Asymm}(n)}) = |\det A|^{n-1}.$$

Доказательство. Проверим первое равенство. Пусть $\mathcal{D}(A)$ — искомый определитель. Перейдем к комплексификации, определители при этом не изменятся. Ясно, что $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\,\mathcal{D}(B)$. Поэтому

$\mathcal{D}(CAC^{-1}) = \mathcal{D}(A)$. Так как в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ плотно множество диагонализируемых матриц, а функция $\det A$ непрерывна, то утверждение достаточно проверить для диагональных матриц.

Рассмотрим диагональную матрицу Λ с элементами λ_j. Тогда матрица $\Lambda X \Lambda^t$ имеет матричные элементы $x_{ij}\lambda_i\lambda_j$. Обозначим через E_{ij} матричные единицы, т. е. матрицы, у которых ij-й элемент равен единице, а остальные равны нулю. Тогда базис $E_{ij} + E_{ji}$, E_{ii} оказывается собственным для линейного преобразования $X \mapsto \Lambda X \Lambda^t$, а потому $D(\Lambda)$ равно произведению собственных чисел:

$$D(\Lambda) = \prod_{i<j} \lambda_i\lambda_j \prod_i \lambda_i^2 = \det(\Lambda)^{n+1},$$

что и требовалось. Второе равенство аналогично. $\square$

Дальнейшие примеры. 1) Рассмотрим группу строго верхнетреугольных матриц T. Мы утверждаем, что мера Хаара совпадает с мерой Лебега $dT = \prod_{i<j} dt_{ij}$. Пусть для определенности размер матриц равен 4. Вместо меры мы будем писать дифференциальную форму старшей степени

$$dt_{12} \wedge dt_{13} \wedge dt_{14} \wedge dt_{23} \wedge dt_{24} \wedge dt_{34}.$$

Перемножая матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & t_{12}+a_{12} & t_{13}+a_{12}t_{23}+a_{13} & t_{14}+a_{12}t_{24}+a_{13}t_{34}+a_{14} \\ 0 & 1 & t_{23}+a_{23} & t_{24}+a_{23}t_{34}+a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34}+a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мы получаем формулу для левого сдвига. Соответственно, наша дифференциальная форма переходит в

$$d(t_{12}+a_{12}) \wedge d(t_{13}+a_{12}t_{23}+a_{13}) \wedge d(t_{14}+a_{12}t_{24}+a_{13}t_{34}+a_{14}) \wedge \\ \wedge d(t_{23}+a_{23}) \wedge d(t_{24}+a_{23}t_{34}+a_{24}) \wedge d(t_{34}+a_{34}).$$

Так как a_{ij} — постоянные, $da_{ij} = 0$. Заметим, что в нашем произведении присутствуют сомножители

$$dt_{12} = d(t_{12}+a_{12}), \quad dt_{23} = d(t_{23}+a_{23}), \quad dt_{34} = d(t_{34}+a_{34}).$$

Поэтому под другими знаками дифференциалов переменные t_{12}, t_{23}, t_{34} могут быть убраны, и мы приходим к сумме

$$dt_{12} \wedge dt_{13} \wedge d(t_{14} + a_{12}t_{24}) \wedge dt_{23} \wedge dt_{24} \wedge dt_{34}.$$

Теперь в качестве множителя появился dt_{24}, и мы повторяем тот же довод. В случае произвольного n надо было бы сказать «и так далее», а в нашем случае вычисление на этом кончилось. Разумеется, дифференциальных форм можно было бы не писать, а заметить, что матрица Якоби левого сдвига как преобразования пространства $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ является строго верхнетреугольной. Легко видеть также, что наша мера правоинвариантна.

2) Рассмотрим группу вещественных матриц вида $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u > 0$. Тогда при левом сдвиге

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & av+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

дифференциальная форма $du \wedge dv$ переходит в

$$d(au) \wedge d(av+b) = a^2 du \wedge dv.$$

Соответственно, левоинвариантная форма объема задается формулой

$$u^{-2} du \wedge dv.$$

6.1.13. Задача. Вычислить правоинвариантную меру Хаара на той же группе и убедиться, что она отлична от левоинвариантной.

6.1.14. Задача. Найти левоинвариантную меру Хаара на группе верхнетреугольных вещественных (комплексных) матриц.

3) Рассмотрим группу $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Для элемента $X \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ общего положения матричный элемент x_{nn} однозначно определяется остальными матричными элементами x_{ij} из уравнения $\det(X) = 1$. Фактически мы получаем координаты на открытом плотном подмножестве группы.

6.1.15. Задача. Обозначим через $[X]_{n-1}$ левый верхний угол матрицы X размера $(n-1) \times (n-1)$. Двусторонне инвариантная мера Хаара на $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ задается формулой

$$\bigl(\det[X]_{n-1}\bigr)^{-1} \prod_{i,j\colon\, (i,j) \neq (n,n)} dx_{ij}.$$

Мера Хаара на ортогональной группе. Во всех ранее разобранных случаях на группах легко вводились координаты. Координатное выражение для меры Хаара на $\mathrm{SO}(n)$ мы напишем в § 6.4, откуда, в частности, будет следовать ее существование. Но здесь также работает простой общий прием.

6.1.16. Теорема. *На группе* $\mathrm{SO}(n)$ *существует единственная с точностью до пропорциональности левоинвариантная дифференциальная форма максимальной степени.*

Доказательство. Это утверждение очевидно. *Единственность.* В силу инвариантности эта форма определяется своим значением в точке 1. В силу максимальности степени такое значение единственно с точностью до пропорциональности. *Существование.* Мы фиксируем значение формы в точке 1, а потом посредством левых сдвигов переносим ее во все точки группы. □

Легко видеть, что в этом доказательстве мы почти не использовали то, что наша группа есть именно $\mathrm{SO}(n)$, нам нужно было лишь то, чтобы группа была многообразием. См. [5, п. 32.9], [14, § 5.2].

§ 6.2. Доказательство для компактных групп

По-видимому, наиболее естественное доказательство существования меры Хаара — оригинальное доказательство Хаара, см. книгу Халмоша [9, гл. 11]. Детали его довольно утомительны, мы приведем доказательство для компактных групп, предложенное фон Нейманом. Как и прежде, мы будем рассматривать лишь группы со счетной базой топологии. Разные доказательства в разной общности см. в [4, § 7,8], [5, § 26], [9, гл. 11], [12], [11, § 15], [3, гл. 7], [8, теорема 5.14], [13, § 2], [7, § V.6.b], [14, § 5.2].

Единственность меры Хаара для компактных групп. Мы докажем такое условное утверждение. *Если на компактной группе есть вероятностная левоинвариантная мера Хаара, то она единственна, двусторонне инвариантна, а также инвариантна относительно отображения* $g \mapsto g^{-1}$.

Заметим, что отображение $g \mapsto g^{-1}$ переводит левоинвариантную меру в правоинвариантную. Возьмем правоинвариантную меру Хаара μ и левоинвариантную меру ν. Предположим, что эти меры вероятностные. Мы утверждаем, что они совпадают. Возьмем их *свертку* $\mu * \nu$ (см. [5, § 27], [11, § 19, 20]), т. е. меру, определяемую из условия

$$\int_G f(z)\, d(\mu * \nu)(z) = \int_{G\times G} f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

для всякой непрерывной функции f (аналогичной формулой можно задать значения свертки на множествах). В силу правой инвариантности меры μ этот интеграл равен

$$\int_G \left(\int_G f(x)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_G f(x)\, d\mu(x).$$

Итак, $\mu * \nu = \mu$. Аналогично $\mu * \nu = \nu$.

Предварительные замечания. Итак, пусть K – компактная группа со счетной базой топологии. Как выше отмечалось, на ней есть левоинвариантная метрика. Метрика позволяет вводить такие понятия, как равномерная непрерывность, равностепенная непрерывность, вполне ограниченность, полнота, отсутствующие для произвольных топологических пространств. Более того, эти понятия есть для произвольных топологических групп: топологические группы являются равномерными пространствами в смысле А. Вейля – Н. Бурбаки, см. любой учебник общей топологии, правда, стоит быть чуть осторожным (особенно с полнотой), на некоммутативной группе есть четыре естественных равномерных структуры (левая, правая, а также Райкова и Roelcke).

6.2.1. Задача. Пусть L — компактное метризуемое топологическое пространство. a) Пусть ρ и $\varkappa$ — метрики на L, совместимые с топологией. Для функции $f\colon L \to \mathbb{R}$ равномерная непрерывность относительно метрики ρ равносильна равномерной непрерывности относительно $\varkappa$.

b) Для метрики ρ обозначим через $U_\rho(\varepsilon)$ подмножество в $L \times L$, определяемое условием $\rho(x, y) < \varepsilon$. Покажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $U_\varkappa(\delta) \subset U_\rho(\varepsilon)$.

Доказательство существования меры Хаара в случае компактных групп (фон Нейман, 1934). Пусть G — некоторая компактная группа, $C(G)$ — пространство непрерывных вещественных функций на G с обычной нормой $\max|f|$. Обозначим через L_h, R_h операторы левого и правого сдвига в $C(G)$, заданные равенствами

$$L_h f(g) = f(hg), \qquad R_h f(g) = f(gh).$$

Очевидно, что левые и правые сдвиги коммутируют: $L_h R_q = R_q L_h$. Мы построим линейный функционал $I(f)$ на $C(G)$, инвариантный относительно сдвигов, т. е.

$$I(f) = I(L_h f) = I(R_q f),$$

а потом сошлемся на теорему Рисса – Маркова. Зафиксируем функцию f на группе и возьмем множество S всех ее левых сдвигов. По теореме Асколи – Арцела (см. [2, задача 1.9.75]) S является компактом. Обозначим через $K_f = K_f^{\text{left}}$ замкнутую выпуклую оболочку множества S.

В силу той же теоремы Арцела $K_f = K_f^{\text{left}}$ — компакт. Очевидно также, что для любой функции $\varphi \in K_f$ имеет место включение $K_\varphi \subset K_f$.

6.2.2. Лемма. *Множество $K_f = K_f^{\text{left}}$ содержит постоянную функцию.*

Доказательство. Рассмотрим следующую непрерывную функцию на $C(G)$:

$$Z(\varphi) = \max(\varphi) - \min(\varphi).$$

Пусть ψ — точка ее минимума на K_f, допустим, что ψ не является константой. Пусть $\Xi \subset K_f$ — компактное множество точек, где ψ достигает своего максимума M. Возьмем малое ε. Пусть $\mathcal{U}$ — множество, где $\psi(x) < \min(\psi) + \varepsilon$. Рассмотрим конечное открытое покрытие множества Ξ сдвигами $g_j\mathcal{U}$. Возьмем произвольную функцию вида

$$\psi^*(g) = a\psi(g) + \sum b_j\psi(g_jg), \quad \text{где } a + \sum b_j = 1,\ a > 0,\ b_j > 0.$$

Тогда $\psi^* \in K_\psi \subset K_f$. С другой стороны,

$$\max(\psi^*) < \max(\psi), \quad \min(\psi^*) \geqslant \min(\psi).$$

Таким образом, $Z(\psi^*) < Z(\psi)$, и мы приходим к противоречию. □

Эта константа и является значением функционала If.

6.2.3. Задача. Не ссылаясь на следующую лемму, докажите, что K_f содержит единственную константу.

6.2.4. Лемма. *Пусть константа c содержится в K_f^{left}, а константа c° содержится в K_f^{right}. Тогда $c = c^\circ$. В частности, K_f^{left} содержит единственную константу.*

Доказательство. Пусть выпуклая комбинация $\sum a_j f(h_jg)$ приближает c с точностью до ε, а выпуклая комбинация $\sum b_i f(gq_i)$ приближает c° с точностью до ε. Рассмотрим операторы

$$\mathcal{L} := \sum a_j L_{h_j} \quad \mathcal{R} := \sum b_i R_{q_i}.$$

Тогда $\mathcal{RL}f = \mathcal{LR}f$. По построению $c - \varepsilon \leqslant \mathcal{L}f(g) \leqslant c + \varepsilon$. Поэтому функция $\mathcal{RL}f \in K_{\mathcal{L}f}^{\text{right}}$ меняется в тех же пределах. Аналогично имеем $c^\circ - \varepsilon \leqslant \mathcal{LR}f \leqslant c^\circ + \varepsilon$. Поэтому $|c - c^\circ| \leqslant 2\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. □

6.2.5. Лемма. *Функционал If аддитивен*: $I(f_1 + f_2) = If_1 + If_2$.

Доказательство. Рассмотрим конечную выпуклую комбинацию $\mathcal{L} = \sum a_j L_j$ такую, что $|\mathcal{L}f_1 - I(f_1)| \leqslant \varepsilon$. Отметим, что $I(\mathcal{L}f_2) = I(f_2)$, так как $K^{\text{left}}_{\mathcal{L}f_2} \subset K^{\text{left}}_{f_2}$. Теперь рассмотрим выпуклую комбинацию $\mathcal{M}$ левых сдвигов, такую, что $|\mathcal{M}\mathcal{L}f_2 - I(f_2)| < \varepsilon$. Автоматически выполняется условие $|\mathcal{M}\mathcal{L}f_1 - I(f_1)| \leqslant \varepsilon$. Поэтому

$$|\mathcal{M}\mathcal{L}(f_1 + f_2) - I(f_1) - I(f_2)| < 2\varepsilon,$$

что завершает доказательство. □

Таким образом, I является непрерывным линейным функционалом на $C(G)$, причем $f \geqslant 0$ влечет $If \geqslant 0$. В силу теоремы Рисса – Маркова (см. [2, теорема 6.10.76], [7, теорема IV.1]) этот функционал задается положительной мерой на G. См. также [8, гл. 5, § 7].

§ 6.3. Модулярный характер и инвариантные меры на однородных пространствах

Этот параграф содержит несколько простых общих замечаний о мере Хаара и об инвариантных мерах на однородных пространствах.

Модулярный характер.

Пусть ν — левоинвариантная мера Хаара на группе G. Легко видеть, что ее правый сдвиг $R_g\nu$ является левоинвариантной мерой. Следовательно, эти меры различаются числовым множителем

$$R_g\nu = \Delta(g)\nu.$$

С другой стороны, $R_{g_1}R_{g_2} = R_{g_1g_2}$. Поэтому

$$\Delta(g_1)\Delta(g_2) = \Delta(g_1g_2),$$

т. е. мы получаем гомоморфизм Δ_G из G в мультипликативную группу $\mathbb{R}^\times_+$ положительных вещественных чисел, он называется *модулярным характером*.

В конкретных случаях модулярный характер легко вычисляется. Группа называется *унимодулярной* если он равен единице, т. е. если мера Хаара двусторонне инвариантна.

6.3.1. Задача. Покажите, что мера $\Delta_G(g)^{-1}\nu$ правоинвариантна. Покажите, что она совпадает с образом ν при отображении $g \mapsto g^{-1}$.

6.3.2. Пример. У группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ гомоморфизмов в группу $\mathbb{R}^\times_+$ нет. Поэтому она унимодулярна. Легко проверить, что группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ порождается подгруппами, изоморфными $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (при этом мы вкладываем группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ в $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ в качестве диагонального блока). Поэтому группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ унимодулярна. Похожим образом показывается унимодулярность $\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$.

6.3.3. Задача. Вычислите модулярный характер группы верхнетреугольных вещественных матриц B_n (одно из возможных соображений: модулярный характер равен 1 на коммутанте группы (т. е. на группе строго верхнетреугольных матриц T_n). Поэтому достаточно вычислить его на диагональных матрицах. Другой рецепт предлагается в следующем пункте.

См. [3, п. VII.1.4], [4, § 8], [5, п. 26.9].

Вычисление модулярных характеров матричных групп. Рассмотрим замкнутую подгруппу G в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Через $\mathfrak{g}$ обозначим касательное пространство к G в единице. Сопряжение $g \mapsto hgh^{-1}$ на группе индуцирует оператор $\mathrm{Ad}(g)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ в касательном пространстве. Берем левоинвариантную дифференциальную форму ω. Мы сдвигаем форму левым сдвигом из единицы в g. Далее сдвигаем ее обратно правым сдвигом. Она должна умножиться на $\Delta(g)$. С другой стороны, она умножается на $\det(\mathrm{Ad}(g))$. Итак,

$$\Delta(g) = |\det(\mathrm{Ad}(g))|.$$

6.3.4. Задача. Вычислите таким способом модулярный характер для $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, для группы верхнетреугольных матриц и для группы строго верхнетреугольных матриц.

Разложения групп.

Следующее утверждение часто дает способ явно записывать меру Хаара в «системах координат».

6.3.5. Предложение. *Пусть G — локально компактная унимодулярная группа, K, H — ее замкнутые подгруппы. Допустим, что отображение $\Pi\colon K \times H \to G$, $(k, h) \mapsto kh$ является биекцией дополнения некоторого множества меры нуль. Пусть $d\lambda_K$ — левая мера Хаара на K, а $d\rho_H$ — правая мера Хаара на H. Тогда образ меры $d\lambda_K \times d\rho_H$ при отображении Π совпадает с мерой Хаара на G.*

Доказательство. Рассмотрим прообраз меры Хаара при отображении Π. Получится мера на $K \times H$, инвариантная относительно левых сдвигов на K и правых сдвигов на H. Пусть H° — группа, антиизоморфная H. Это то же множество H, на котором введено умножение $g \circ h := hg$. Тогда наша мера становится левоинвариантной мерой на $K \times H^\circ$, т. е. произведением мер Хаара. □

6.3.6. Пример. а) Пусть $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, N_- — подгруппа строго нижнетреугольных матриц, B_+ — подгруппа верхнетреугольных матриц. Почти любой элемент $g \in G$ представим в виде произведения $g = nb$, где $n \in N_-$, $b \in B_+$, причем такое разложение единственно.

b) Пусть $G = \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})$, $\mathcal{N}$ — группа блочных $p+q$-матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}$, а $\mathcal{B}$ — группа блочных матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Почти любой элемент $g \in G$ представим в виде произведения $g = nb$, где $n \in \mathcal{N}$, $b \in \mathcal{B}$, причем такое разложение единственно.

c) Возьмем в $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ортогональную подгруппу $\mathrm{O}(n)$ и подгруппу B_+ верхнетреугольных матриц с положительными числами на диагонали. Тогда любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде произведения $g = ub$, где $u \in \mathrm{O}(n)$, $b \in B_+$.

d) Возьмем группу аффинных изометричных преобразований $\mathbb{R}^n$. Любой элемент этой группы однозначно представим в композиции элемента из $\mathrm{O}(n)$ и сдвига.

6.3.7. Задача. Докажите эти утверждения.

Во всех этих примерах мы автоматически получаем явное выражение для меры Хаара в соответствующих «координатах».

Инвариантные меры на компактных пространствах.

6.3.8. Теорема. *Пусть K — компактная группа, H — замкнутая подгруппа в K. Тогда на однородном пространстве K/H существует единственная K-инвариантная вероятностная мера.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $K \to K/H$. Берем образ меры Хаара. Обратно, пусть ν — вероятностная инвариантная мера на K/H, $\varkappa$ — вероятностная мера Хаара на K. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$ на K/H. Тогда

$$\int_{K/H} f(kx)\, d\nu(x) = \int_{K/H} f(x)\, d\nu(x).$$

Интегрируя это равенство по K и учитывая, что в правой части стоит константа, получаем

$$\int_K \int_{K/H} f(kx)\, d\nu(x)\, d\varkappa(k) = \int_{K/H} f(x)\, d\nu(x).$$

Переставив пределы интегрирования в левой части, получим

$$\int_{K/H} \Big[\int_K f(kx)\, d\varkappa(k)\Big]\, d\nu(x).$$

В квадратных скобках стоит K-инвариантная функция, т. е. константа. Интегрируя ее по вероятностной мере ν, получаем результат, не зависящий от ν. Поэтому мера ν единственна. $\square$

6.3.9. Задача. Пусть G – локально компактная группа со счетной базой, K — компактная подгруппа. Тогда на G/K существует G-инвариантная мера.

Примеры компактных однородных пространств. Приведем примеры компактных однородных пространств, встречавшихся в разных математических курсах (на каждом из этих пространств естественным образом определена инвариантная мера).

1) *Сферы.* Сфера S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ является $\mathrm{SO}(n)$-однородным пространством. Инвариантная мера μ на ней нам хорошо известна. С другой стороны, зафиксировав единичный вектор $e \in \mathbb{R}^n$, получаем отображение $g \mapsto ge$ из $\mathrm{SO}(n) \to S^{n-1}$. Поэтому образ меры Хаара на $\mathrm{SO}(n)$ должен совпадать с инвариантной мерой на S^{n-1} (с точностью до нормировочного множителя, к примеру, мы можем обе меры взять вероятностными).

Иными словами, *для всякого измеримого подмножества Ω сферы мера множества таких элементов $g \in \mathrm{SO}(n)$, что $ge \in \Omega$, равна мере множества Ω.*

6.3.10. Задача. Рассмотрим стереографическую проекцию из S^{n-1} на $\mathbb{R}^{n-1}$. Найдите образ инвариантной меры при этой проекции.

6.3.11. Задача. a) Рассмотрим проекцию сферы на первую координатную ось. Найдите образ инвариантной меры. Покажите, что при $n = 2$ мы получим меру $2\pi dz$ на отрезке $[-1, 1]$, где dz — мера Лебега (решение, впрочем, не очень понятно изложенное, есть у Архимеда в [1, пп. 1.XXXVII, 1.XL, 2.IV]).

b) Найдите образ инвариантной меры на n-мерной сфере (а также меры Лебега на шаре) при проекции на двумерную координатную плоскость.

2) *Грассманианы.* Множество $\mathrm{Gr}(p, q) = \mathrm{Gr}(p, q)(\mathbb{R})$ всех p-мерных подпространств в $\mathbb{R}^{p+q}$ естественно отождествляется с однородным пространством $\mathrm{O}(p + q)/\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ (убедитесь в этом). Поэтому на $\mathrm{Gr}(p, q)$ существует $\mathrm{O}(p+q)$-инвариантная мера. Явное выражение для меры см. в следующем параграфе.

Множество p-мерных подпространств в $\mathbb{C}^{p+q}$ является однородным пространством $\mathrm{U}(p + q)/\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$.

3) В случае $p = 1$ грассманиан $\mathrm{Gr}(p, q)(\mathbb{R})$ — известное из курса аналитической геометрии проективное пространство $\mathbb{RP}^q$. В этом случае мы имеем отображение сферы S^q в $\mathbb{RP}^q$, которое каждой точке сферы ставит в соответствие прямую, выходящую из нуля и проходящую через эту точку. Тогда у каждой точки из $\mathbb{RP}^q$ есть ровно два

прообраза на сфере, образ $\mathrm{O}(q)$-инвариантной меры на сфере является $\mathrm{O}(q)$-инвариантной мерой на проективном пространстве.

4) *Пространство флагов.* Рассмотрим пространство $\mathrm{Fl}_n(\mathbb{C})$, точками которого являются возрастающие последовательности подпространств (флаги) в $\mathbb{C}^n$:

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = \mathbb{C}^n, \quad \dim L_k = k.$$

Это однородное пространство $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(1)^n$, где подгруппа $\mathrm{U}(1)^n$ состоит из диагональных матриц. Аналогично пространство $\mathrm{Fl}_n(\mathbb{R})$ флагов в $\mathbb{R}^n$ является однородным пространством $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(1)^n$. Группа $\mathrm{O}(1)$ состоит из двух элементов ± 1.

5) *Многообразия Штифеля.* Это многообразие $\mathrm{St}(k, n)$, точками которого являются наборы из k попарно ортогональных единичных векторов в $\mathbb{R}^n$. Оно является однородным пространством $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k)$. Равносильно, многообразие Штифеля — множество изометричных вложений $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. На нем также действует группа $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n)$. Кстати, какой в этом случае стабилизатор точки?

6.3.12. Замечание. Пусть K — компактная группа. Тогда $K \times K$ действует на K левыми и правыми сдвигами:

$$(h_1, h_2)\colon g \mapsto h_1 g h_2^{-1}.$$

Стабилизатором точки 1 является диагональная подгруппа $\mathrm{diag}(K)$, состоящая из пар $(h, h) \in K \times K$. Инвариантная мера, разумеется, является мерой Хаара.

Некомпактные однородные пространства. Здесь мы приведем для сведения и без доказательств несколько полезных общих утверждений (см. [3], [4]).

6.3.13. Предложение. *Пусть теперь G — локально компактная группа, H — замкнутая подгруппа. Тогда на однородном пространстве G/H существует единственная с точностью до эквивалентности мера, квазиинвариантная относительно группы G.*

Напомним, что мера μ на измеримом пространстве M называется *квазиинвариантной* относительно измеримого биективного преобразования $g\colon M \to M$, если g переводит меру μ в эквивалентную меру (т. е. подмножество $A \subset M$ имеет меру нуль тогда и только тогда, когда gA имеет меру нуль). В этом случае определена *производная Радона–Никодима* $g'(m)$, удовлетворяющая равенству

$$\mu(gB) = \int_B g'(m)\, d\mu(m)$$

для всякого измеримого множества B.

Для конкретных групп $G \supset H$ явное описание квазиинвариантных мер на G/H обычно является конструктивной задачей, но это не входит в предмет настоящих лекций (пример есть в следующем параграфе).

6.3.14. Пример. Рассмотрим окружность S^1, отождествленную с множеством лучей на плоскости с началом в нуле. Очевидно, что на S^1 нет $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$-инвариантной меры.

6.3.15. Предложение. *Если группы G и H унимодулярны, то на G/H есть единственная G-инвариантная мера.*

6.3.16. Задача (плоскость Лобачевского)**.** Рассмотрим некомпактную группу $\mathrm{SU}(1,1)$ матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, где $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Она действует на круге $|z| < 1$ известными из курса комплексного анализа мёбиусовскими преобразованиями

$$z \mapsto \frac{b + \overline{a}z}{a + \overline{b}z}.$$

Покажите, что мера $(1 - |z|^2)^{-2}\, \mathrm{Re}\, z\, d\, \mathrm{Im}\, z$ на круге является инвариантной относительно $\mathrm{SU}(1,1)$.

Свертка. Пусть G — топологическая группа, μ и ν — конечные (комплекснозначные) борелевские меры на G с компактным носителем. Свертка (мы ее уже упоминали) $\mu * \nu$ определяется равенством

$$\int_G f(g)\, d(\mu * \nu)(g) = \int_{G\times G} f(pq)\, d\mu(p)\, d\nu(q),$$

где f пробегает пространство ограниченных непрерывных функций.

Обозначим через δ_g дираковскую меру в точке g. Тогда $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$, а для конечных линейных комбинаций дираковских мер имеем

$$\Big(\sum_k a_k \delta_{g_k}\Big) * \Big(\sum_l b_l \delta_{h_l}\Big) = \sum_{k,l} a_k b_l \delta_{g_k h_l}.$$

Пусть G — некоторая унимодулярная локально компактная группа с мерой Хаара dg. Тогда каждой функции φ на группе мы можем поставить в соответствие меру $\varphi(g)\, dg$, и это дает возможность перенести сверку на функции, а именно:

$$(\varphi * \psi)(g) = \int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g)\, dh.$$

6.3.17. Задача. a) Покажите, что если φ, $\psi \in L^1(G)$, то свертка корректно определена и лежит в $L^1(G)$. b) Убедитесь, что в случае, когда G есть $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ или окружность, введенная нами свертка совпадает со сверткой, известной из курса анализа. c) Убедитесь, что в случае конечных групп свертка совпадает с умножением в групповой алгебре.

См. [4], [14, § 5.2].

§ 6.4. Инвариантные меры на грассманиане и ортогональной группе

В качестве «разминки» перед этим параграфом мы предлагаем следующие задачи (ниже они все равно решаются).

6.4.1. Задача. Рассмотрим пространство $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ вещественных квадратных матриц размера $n\times n$. a) Найти дифференциал отображения $T \mapsto T^{-1}$. Найти его якобиан.

b) Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — блочная матрица размера $(n+n)\times(n+n)$. Рассмотрим «*дробно-линейные отображения*» пространства $\mathrm{Mat}(n)$ вида

$$T \mapsto (A + TC)^{-1}(B + TD).$$

Покажите, что композиция дробно-линейных отображений соответствует произведению матриц. Убедитесь, что вы можете вычислить дифференциал дробно-линейного отображения.

c) Найдите якобиан отображения $T \mapsto T^{-1}$ для пространств симметричных и кососимметричных матриц.

6.4.2. Задача. a) Рассмотрим множество $\mathbb{RP}^2$ прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через 0. Прямая общего положения имеет вид $y = sx$, $z = tx$. Напишите формулу для действия группы линейных преобразований в координатах (s, t). Найдите якобиан такого преобразования.

b) Покажите, что мера $(1 + s^2 + t^2)^{-3/2}\, ds\, dt$ инвариантна относительно действия группы $\mathrm{O}(3)$.

Координаты на грассманиане. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$. Элементы группы $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})$ будем записывать как блочные матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ размера $p + q$. Будем считать, что эти матрицы действуют на $\mathbb{R}^{p+q}$ умножением справа на матрицы-строчки.

Обозначим через $\mathrm{Gr}(p, q)$ грассманиан всех p-мерных подпространств в $\mathbb{R}^{p+q}$. Через $\mathrm{Mat}(p, q) = \mathrm{Mat}(p, q; \mathbb{R})$ обозначим пространство матриц размера $p\times q$. Каждому элементу $T \in \mathrm{Mat}(p, q)$ поставим в соответствие его график, т. е. множество векторов вида $(x, xT) \in \mathbb{R}^p\oplus\mathbb{R}^q$.

Таким образом, получаем отображение $\mathrm{Mat}(p,q) \to \mathrm{Gr}(p,q)$. Его образ — открытое плотное множество в $\mathrm{Gr}(p,q)$. Дополнение до образа состоит из подпространств, имеющих ненулевое пересечение с $0 \oplus \mathbb{R}^q$. Очевидно, что это множество меры нуль. Таким образом, пространство $\mathrm{Mat}(p,q)$ может рассматриваться как всюду плотная карта на многообразии $\mathrm{Gr}(p,q)$.

6.4.3. Предложение. *Преобразованию грассманниана, заданному матрицей* $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, *соответствует дробно-линейное преобразование пространства* $\mathrm{Mat}_{p,q}$, *заданное формулой*

$$T \mapsto T^{[g]} := (\alpha + T\gamma)^{-1}(\beta + T\delta). \tag{6.4.1}$$

Доказательство. Применим нашу матрицу к вектору (x, xT):

$$\begin{pmatrix} x & xT \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\alpha + T\gamma) & x(\beta + T\delta) \end{pmatrix}.$$

Полагая $y = x(\alpha + T\gamma)$, мы получаем, что новое подпространство состоит состоит из векторов $\big(y, y(a + T\gamma)^{-1}(\beta + T\delta)\big)$. □

См. [6, пп. 2.3.2, 2.3.3].

Инвариантная мера на грассманиане.

6.4.4. Предложение. *Мера на* $\mathrm{Gr}(p,q)$, *инвариантная относительно группы* $\mathrm{O}(p+q)$, *в координатах* $\mathrm{Mat}(p,q;\mathbb{R})$ *задается следующей формулой*:

$$\det(1 + TT^t)^{-(p+q)/2}\, dT. \tag{6.4.2}$$

Утверждение вытекает из двух лемм, которые позволяют преобразовать выражение (6.4.2) под действием ортогональной группы.

6.4.5. Лемма. *Якобиан дробно-линейного преобразования*

$$T \mapsto T^{[g]} = (\alpha + T\gamma)^{-1}(\beta + T\delta)$$

равен

$$\det(\alpha + T\gamma)^{-p-q} \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^p.$$

6.4.6. Лемма. *Если* $g \in \mathrm{O}(p+q)$, *то*

$$\det\Big(1 + T^{[g]}\big(T^{[g]}\big)^t\Big) = \det(1 + TT^t) \cdot |\det(\alpha + T\gamma)|^{-2}.$$

Приступим к доказательствам сформулированных утверждений (см. также [6, § 2.11]).

Вычисление якобиана.

6.4.7. Лемма. *Дифференциал дробно-линейного преобразования вида* (6.4.1) *равен*

$$(\alpha + T\gamma)^{-1} \cdot dT(-\gamma T^{[g]} + \delta).$$

Доказательство. Нам достаточно разложить с точностью до ε выражение

$$\bigl(\alpha + (T + \varepsilon\Delta)\gamma\bigr)^{-1}\bigl(\beta + (T + \varepsilon\Delta)\delta\bigr).$$

Преобразуем сначала первый множитель:

$$\begin{aligned}\bigl(\alpha + T\gamma + \varepsilon\Delta\gamma\bigr)^{-1} &= (\alpha + T\gamma)^{-1}\bigl(1 + \varepsilon\Delta\gamma(\alpha + T\gamma)^{-1}\bigr)^{-1} \\ &= (\alpha + T\gamma)^{-1} - \varepsilon \cdot (\alpha + T\gamma)^{-1}\Delta\gamma(\alpha + T\gamma)^{-1} + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Остается перемножить два множителя:

$$\begin{aligned}&\bigl[(\alpha+T\gamma)^{-1} - \varepsilon(\alpha+T\gamma)^{-1}\Delta\gamma(\alpha+T\gamma)^{-1} + o(\varepsilon)\bigr]\bigl[(\beta+T\delta)+\varepsilon\Delta\delta\bigr] \\ &= (\alpha+T\gamma)^{-1}(\beta+T\delta) + \varepsilon(\alpha+T\gamma)^{-1}\Delta\bigl(-\gamma(\alpha+T\gamma)^{-1}(\beta+T\delta)+\delta\bigr) + o(\varepsilon),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Итак, дифференциал имеет вид $A\,dz\,B$ где A, B — явно выписанные матрицы. Очевидно (см. § 6.1), что якобиан равен

$$(\det A)^q(\det B)^p = \det(\alpha + T\gamma)^{-q} \det(-\gamma T^{[g]} + \delta)^p.$$

Сейчас мы покажем, что

$$\det(-\gamma T^{[g]} + \delta) = \det(\alpha + \gamma T)^{-1} \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{6.4.3}$$

Для этого мы воспользуемся формулой для определителя блочной матрицы, которая важна и сама по себе.

6.4.8. Теорема. *Предположим, что* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *— блочная матрица размера* $(p + q) \times (p + q)$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B) \qquad (6.4.4) \\ &= \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C).\end{aligned}$$

Формально в равенстве (6.4.4) нужна невырожденность блока A. Фактически в правой части стоит рациональное выражение с устранимой особенностью.

Доказательство. Равенство (6.4.4) вытекает из равенства

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -A^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

которое проверяется непосредственно. $\square$

Теперь мы замечаем, что выражение $-\gamma(\alpha + T\gamma)^{-1}(\beta + T\delta) + \delta$ имеет форму $D - CA^{-1}B$. Поэтому

$$\det\bigl(-\gamma(\alpha+T\gamma)^{-1}(\beta+T\delta)+\delta\bigr) = \det(\alpha+T\gamma)^{-1} \det\begin{pmatrix} \alpha + T\gamma & \beta + T\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Что касается последней матрицы, то

$$\det\begin{pmatrix} \alpha + T\gamma & \beta + T\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Это доказывает (6.4.3) и завершает вычисление якобиана.

6.4.9. Задача. Если $p = q$, то есть и иной способ вычисления якобиана. Любое дробно-линейное преобразование разлагается в произведение преобразований вида $T \mapsto T + A$, $T \mapsto BTC$, $T \mapsto T^{-1}$. Можно найти якобианы этих преобразований и проверить, что величина $J(g, T) = \det(\alpha + T\gamma)^{-1}$ удовлетворяет цепному правилу.

$$J(gh, T) = J(g, T)J(h, T^{[g]}).$$

Доказательство леммы 6.4.6. Выполнены равенства

$$1 + T^{[g]}(T^{[g]})^t = 1 + (\alpha + T\gamma)^{-1}(\beta + T\delta)(\beta^t + \delta^t T^t)(\alpha^t + \gamma^t T^t)^{-1}$$
$$= (\alpha+T\gamma)^{-1}\Bigl[(\alpha+T\gamma)(\alpha^t+\gamma^t T^t)+(\beta+T\delta)(\beta^t+\delta^t T^t)\Bigr](\alpha^t+\gamma^t T^t)^{-1}.$$

В квадратных скобках мы имеем

$$\Bigl[\cdots\Bigr] = (\alpha\alpha^t + \beta\beta^t) + T(\gamma\alpha^t + \delta\beta^t) + (\alpha\gamma^t + \beta\delta^t)T^t + T(\gamma\gamma^t + \delta\delta^t)T^t.$$

Теперь вспомним, что матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ортогональна, т. е.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^t + \beta\beta^t & \alpha\gamma^t + \beta\delta^t \\ \gamma\alpha^t + \delta\beta^t & \gamma\gamma^t + \delta\delta^t \end{pmatrix}.$$

Поэтому получаем

$$\Big[\cdots\Big] = 1+TT^t, \quad 1+T^{[g]}(T^{[g]})^t = (\alpha+T\gamma)^{-1}\,(1+TT^t)\,(\alpha^t+\gamma^t T^t)^{-1},$$

что и влечет утверждение леммы. □

Преобразование Кэли и мера Хаара на ортогональной группе. Преобразование Кэли матрицы g задается формулой

$$T := (1+g)^{-1}(1-g).$$

Легко видеть, что это преобразование обратно самому себе, g выражается через T по формуле

$$g := (1+T)^{-1}(1-T).$$

Обозначим через $\mathrm{Asymm}(n,\mathbb{R})$ кососимметричных матриц размера n.

6.4.10. Теорема. a) *Преобразование Кэли переводит* $\mathrm{Asymm}(n,\mathbb{R})$ *в* $\mathrm{SO}(n)$. b) *Пусть* $g \in \mathrm{SO}(n)$, *причем его собственные числа отличны от* -1. *Тогда его преобразование Кэли содержится в* $\mathrm{Asymm}(n,\mathbb{R})$.

Доказательство. a) Пусть $T = -T^t$. Тогда

$$\left(\frac{1-T}{1+T}\right)\left(\frac{1-T}{1+T}\right)^t = \left(\frac{1-T}{1+T}\right)\left(\frac{1+T}{1-T}\right) = 1.$$

b) Пусть $g \in \mathrm{SO}(n)$. Тогда

$$\left(\frac{1-g}{1+g}\right)+\left(\frac{1-g}{1+g}\right)^t = \left(\frac{1-g}{1+g}\right)+\left(\frac{1-g^{-1}}{1+g^{-1}}\right) = \left(\frac{1-g}{1+g}\right)+\left(\frac{g-1}{1+g}\right),$$

что равно нулю. □

6.4.11. Задача. Почему мы рассматриваем элементы $g \in \mathrm{SO}(n)$, а не $g \in \mathrm{O}(n)$? Что будет, если применить преобразование Кэли к ортогональной матрице с определителем, равным -1?

Таким образом, мы можем рассматривать Asymm_n как карту на многообразии $\mathrm{SO}(n)$. Дополнение до этой карты — гиперповерхность $\det(1+g) = 0$.

6.4.12. Предложение. *Зафиксируем* u, $v \in \mathrm{SO}(n)$. *Преобразование*

$$g \mapsto u^{-1}gv$$

в координатах Asymm_n *задается дробно-линейным преобразованием* $z \mapsto (\alpha+T\gamma)^{-1}(\beta+T\delta)$, *где*

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}u+v & u-v\\ u-v & u+v\end{pmatrix}. \tag{6.4.5}$$

Доказательство. Нам надо вычислить композицию трех отображений

$$\mathrm{Asymm}_n \to \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Asymm}_n.$$

Пусть $T \in \mathrm{Asymm}_n$. Этот оператор переходит

$$T \mapsto (1+T)^{-1}(1-T) \mapsto u^{-1}(1+T)^{-1}(1-T)v$$
$$\mapsto \bigl(1+u^{-1}(1+T)^{-1}(1-T)v\bigr)^{-1}\bigl(1-u^{-1}(1+T)^{-1}(1-T)v\bigr).$$

Преобразуем последнее выражение. Для этого умножим обе скобки слева на $(1+T)u$. Получим

$$\bigl((1+T)u+(1-T)v\bigr)^{-1}\bigl((1+T)u-(1-T)v\bigr)$$
$$= \bigl((u+v)+T(u-v)\bigr)^{-1}\bigl((u-v)+T(u+v)\bigr),$$

что и требовалось доказать. □

Стоит заметить, что матрица (6.4.5) ортогональна. Это легко проверить непосредственно умножением, но мы сошлемся на равенство

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u+v & u-v \\ u-v & u+v \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}J^{-1}, \qquad \text{где } J = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица J, как легко видеть, ортогональна.

6.4.13. Теорема (Хуа Ло Кен [10]). *Мера Хаара в координатах* Asymm_n *задается формулой*

$$\det(1+TT^t)^{-(n-1)/2}dT.$$

Мы докажем, что это выражение $\mathrm{SO}(n)$-инвариантно (без ссылки на теорему существования меры Хаара). Как преобразуется выражение $\det(1+TT^t)$ под действием ортогональной группы, мы уже знаем, см. лемму 6.4.6. Нам надо вычислить, как преобразуется dT, т. е. вычислить якобиан нашего дробно-линейного преобразования на кососимметрических матрицах. Дифференциал нам известен:

$$(\alpha+T\gamma)^{-1}\cdot dT\cdot(-\gamma T^{[g]}+\delta). \tag{6.4.6}$$

6.4.14. Лемма. *Справедливо равенство*

$$(-\gamma T^{[g]}+\delta)^t = (\alpha+T\gamma)^{-1}.$$

Доказательство. В принципе это можно доказать «в лоб», используя ортогональность нашей матрицы. Мы пойдем другим путем. Заметим, что дифференциал (6.4.6) имеет вид $\Delta \mapsto A\Delta B$, где Δ — кососимметрическая матрица, а A, B – фиксированные матрицы. Это отображение должно переводить кососимметрические матрицы в кососимметрические. Заметим, что матрица

$$A^{-1}A\Delta BA^{t-1} = \Delta BA^{t-1}$$

должна быть кососимметричной при любой кососимметричной матрице Δ. Но тогда BA^{t-1} должна быть скалярной матрицей, $B = s \cdot A^t$. Чтобы вычислить этот скаляр, достаточно вычислить определитель матрицы B. Но мы это уже делали выше, см. (6.4.3). Получается, что $\det B = \det A$ и $s = \pm 1$. Из соображений связности группы $\mathrm{SO}(n)$ мы имеем $s = +1$. Впрочем, конец доказательства теоремы от этого не зависит. □

В силу леммы 6.1.12 якобиан нашего отображения равен

$$\pm\det(\alpha + T\gamma)^{-n+1},$$

что нам и требовалось.

См. также [10, § 3.1].

6.4.15. Задача. Покажите, что преобразование Кэли переводит унитарную группу $\mathrm{U}(n)$ в множество антиэрмитовых матриц ($T = -T^*$). Покажите, что мера Хаара задается формулой $\det(1 + TT^*)^{-n}dT$.

Комментарии к вычислению. Вычисление меры Хаара с помощью формальных манипуляций с дробно-линейными отображениями может показаться странным. Объясним, геометрическое происхождение преобразования Кэли.

Рассмотрим прямую сумму $V \oplus W = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ двух n-мерных пространств. Каждое из них снабдим стандартным скалярным произведением. Введем в $V \oplus W$ симметричную билинейную форму B, задаваемую матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех максимальных изотропных подпространств в $V \oplus W$. Напомним, что подпространство L называется *изотропным*, если форма B равна 0 на L (подробности см. в [13, § 2.1, 2.3]). Размерность L не может превосходить n, иначе $L \cap W \neq 0$, а форма B на нем одновременно равна 0 и отрицательна. В силу того же довода в случае n-мерного пространства $L \cap W = 0$. Поэтому n-мерное изотропное подпространство является графиком оператора $V \to W$.

6.4.16. Задача. Покажите, что n-мерное подпространство в $V \oplus W$ является изотропным тогда и только тогда, когда оно является графиком ортогонального оператора $V \to W$.

Таким образом, пространство $\mathcal{L}$ отождествляется с ортогональной группой $\mathrm{O}(n)$. Кстати, отсюда следует, что $\mathcal{L}$ состоит из двух компонент связности.

Рассмотрим в $V \oplus W$ графики единичного оператора и минус-единичного оператора $V \to W$. Обозначим их через P, Q. Эти подпространства изотропны, а форма B относительно разложения $P \oplus Q$ записывается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.4.17. Задача. График оператора $T\colon P \to Q$ является изотропным подпространством тогда и только тогда, когда T кососимметричен.

Таким образом, одной и той же точке грассманиана $\mathcal{L}$ соответствует и ортогональная матрица, и кососимметрическая матрица. Это и есть преобразование Кэли. Становится понятным, почему техника для работы с грассманианом подходит и для $\mathrm{SO}(n)$. См. также [6, § 2.4].

6.4.18. Замечание. (К задаче о проекции меры на сфере на вертикальную ось из § 6.3). Архимед в [1, п. 2.IV] доказывает, что площадь сферического сегмента $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 1 - h$ равна $2\pi h$. Равносильно, площадь сферического пояса $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $a < z < b$ равна $2\pi(b - a)$ и равна площади цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 1$, $a < z < b$ (что и решает упомянутую задачу). Равносильно, проекция сферы на описанный цилиндр $x^2 + y^2 = 1$ из координатной оси Oz, т. е. $(x, y, z) \mapsto \bigl(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}, z\bigr)$ является отображением, сохраняющим площадь (но буквально этого высказывания у Архимеда не видно, в явном виде оно было сформулировано Ламбертом в 1772 г. и было использовано им для картографии). В работе «О коноидах и сфероидах» Архимед вычисляет объемы эллипсоидов, параболоидов и гиперболоидов вращения, разрезая их на тонкие цилиндрики постоянной высоты и вычисляя явно верхние и нижние интегральные суммы для интеграла Римана (фактически надо интегрировать квадратичные выражения). На взгляд современного человека, знание утверждения о сферических поясах позволяет предъявить похожий вывод площади поверхности сферы (на нашем языке надо проинтегрировать константу, но сначала это надо оправдать). Трудно представить себе, что Архимед мог бы не понимать этого на эвристическом уровне. Однако требования к строгости в математике того времени были чрезвычайно высоки, в борьбе за строгость Архимед вычисляет площадь сферы и сферических сегментов хитроумными и длинными рассуждениями (отсюда в работе [1] он выводит объем шара). Как известно, Архимед завещал изобразить на своем надгробии шар, вписанный в цилиндр.

Литература

[1] Архимед. О шаре и цилиндре. Рус. пер. в Архимед. Сочинения. Физматгиз, М., 1962.

[2] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 3-е изд. НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, М. – Ижевск, 2020.

[3] Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. Наука, М., 1970.

[4] Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения. ИЛ, М., 1950.

[5] Желобенко Д. П. Основные структуры и методы теории представлений. МЦНМО, М., 2004.

[6] Неретин Ю. А. Топологические группы и инвариантные меры. Preprint, `https://arxiv.org/abs/1510.03082`

[7] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. Мир, М., 1977.

[8] Рудин У. Функциональный анализ. Мир, М., 1975.

[9] Халмош П. Теория меры. ИЛ, М., 1953.

[10] Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. ИЛ, М., 1959.

[11] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. Наука, М., 1975.

[12] Nachbin L. The Haar integral. Van Nostrand, Princeton – Toronto – London, 1964.

[13] Neretin Yu. A. Lectures on Gaussian integral operators and classical groups. European Math. Soc., Zürich, 2011.

[14] Rossmann W. Lie groups. An introduction through linear groups. Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.

Глава 7

Выпуклые тела и операторы в конечномерных нормированных пространствах

Б. С. Кашин

В этой главе изложен ряд важных результатов о выпуклых телах в $\mathbb{R}^n$ и операторах, действующих между конечномерными пространствами. Каждый из этих результатов представляет отдельное обширное направление в функциональном анализе. Поэтому изложенный материал позволяет получить первоначальное представление о достаточно широком круге вопросов. Изучение выпуклых тел и выпуклых функций занимает весьма важное место в функциональном анализе. В последние десятилетия в связи с развитием и широким внедрением в практику computer science результаты о конечномерных выпуклых телах и операторах приобрели большое прикладное значение. Подробнее о рассматриваемых ниже вопросах см. специализированные монографии, в частности, [7], [15].

§ 7.1. Некоторые результаты о векторах и подпространствах в $\mathbb{R}^n$

Пусть $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ — конечномерное нормированное пространство, обозначим через B_X единичный шар в пространстве X, т. е.

$$B_X := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_X \leqslant 1\}.$$

Введем семейство норм, положив для $x = \{x_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_{l_p^n} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \text{при } 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\|x\|_{l_\infty^n} := \max_i |x_i|, \quad \text{при } p = \infty.$$

Обозначим через l_p^n n-мерное нормированное пространство $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{l_p^n})$, пусть $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_{l_p^n} \leqslant 1\}$ — единичный шар в l_p^n.

Нас будут интересовать, в первую очередь, три классических выпуклых тела: B_∞^n — куб, B_2^n — шар, B_1^n — октаэдр. В многомерном случае эти тела имеют совершенно разные свойства, в частности:

$V(B_2^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sim \frac{1}{n^{n/2}}$,

$V(B_1^n) = \frac{2^n}{n!} \sim \frac{1}{n^n}$,

$V(B_\infty^n) = 2^n \sim 1$, где $\sim$ означает эквивалентность с точностью до множителя C^n, а $V(A)$ — объем множества A.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^n$, μ_n — нормированная мера Лебега на $\mathbb{S}^{n-1}$, $(\cdot,\cdot)$ или $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Ясно, что для случайных векторов $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ величина (x, y) распределена так же, как и для случая, когда $x = (1, 0, \dots, 0)$, а y — случайный вектор, т. е. как y_1. Отсюда легко понять, что для случайной пары векторов $|(x, y)| \asymp \frac{1}{\sqrt{n}}$ (по сути векторы почти ортогональны). Отметим следующий факт.

7.1.1. Задача. Проверить, что

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\, d\mu_n \asymp \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}}.$$

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ — канонический базис. Для подмножества L нормированного пространства X и вектора $z \in X$ введем обозначение

$$\rho_X(z, L) = \inf_{y\in L} \|z - y\|_X\,,$$

для $X = l_2^n$ будем писать

$$\rho_2(z, L) \equiv \rho_X(z, L).$$

7.1.2. Предложение. *Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ — подпространство размерности m, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^n \rho_2^2(e_i, L) = n - m.$$

Доказательство. Возьмем в $\mathbb{R}^n$ такой ортонормированный базис (о.н.б.) $\{v_j\}_{j=1}^n$, что $\{v_j\}_{j=1}^m$ — о.н.б. в L. Тогда справедливы следующие равенства:

$$e_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha_{ij} = \langle e_i, v_j\rangle,$$

причем $\{\alpha_{ij}\}$ — ортогональная матрица. Заметим, что выполнены равенства $\rho_2^2(e_i, L) = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}^2$, $i = 1, \ldots, n$, откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_2^2(e_i, L) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}^2 = \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^2 = n - m,$$

что и требовалось доказать. □

7.1.3. Следствие. *Для любого подпространства L размерности $\dim L = m$ найдется такое число $i \in \{1, \ldots, n\}$, что*

$$\rho_2(e_i, L) \geqslant \sqrt{\frac{n-m}{n}}.$$

В частности, при $n = 2m$ получаем, что, каково бы ни было m-мерное подпространство L, найдется элемент e_{i_0} канонического базиса в $\mathbb{R}^n$ с $\rho_2(e_{i_0}, L) \geqslant 1/\sqrt{2}$.

Следующее понятие, введенное в работе [12], играет в этой главе весьма важную роль.

7.1.4. Определение. *Пусть $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ — нормированное пространство, $A \subset X$ — ограниченное множество. Тогда m-поперечником по Колмогорову называется величина*

$$d_m(A, X) := \inf_{L \subset \mathbb{R}^n} \sup_{y \in A} \rho_X(y, L),$$

где L пробегает множество линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$ размерности $\dim L \leqslant m$.

Интересно отметить, что А. Н. Колмогоров вводил поперечники не только в нормированных, но и в метрических функциональных пространствах. В такой общности это понятие стало актуальным лишь недавно. К оценкам поперечников множеств в метрических пространствах сводится ряд задач современной дискретной математики.

В терминах поперечника в следствии 7.1.3 мы доказали, что

$$d_m(B_1^n, l_2^n) \geqslant \sqrt{\frac{n-m}{n}}.$$

Поскольку октаэдр является выпуклой оболочкой своих крайних точек, то приблизить октаэдр линейным подпространством — все равно, что приблизить его вершины. На самом деле

$$d_m(B_1^n, l_2^n) = \sqrt{\frac{n-m}{n}}.$$

Для доказательства оценки сверху достаточно построить ортогональную $n \times n$-матрицу, у которой сумма квадратов первых m элементов в каждом столбце равна m/n. Этого можно добиться, исходя из произвольной ортогональной матрицы, последовательными поворотами в двумерных плоскостях, порожденных парами ее столбцов.

В терминах поперечника изложенные выше результаты впервые были сформулированы С. Б. Стечкиным в 1950-е годы.

7.1.5. Следствие. *Пусть*

$$\{v_i\}_{i=1}^{2n}, \{w_j\}_{j=1}^{2n} \subset \mathbb{R}^n, \quad \langle v_i, w_i \rangle = 1, \quad i = 1, \ldots, 2n.$$

Тогда

$$\sum_{i,j \leqslant 2n,\ i \neq j} |\langle v_i, w_j \rangle|^2 \geqslant n.$$

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ — канонический базис $\mathbb{R}^{2n}$, A — матрица со столбцами w_j, где $j = 1, \ldots, 2n$, и строками $z_\nu \in \mathbb{R}^{2n}$, где $\nu = 1, \ldots, n$. Пусть L — подпространство $\mathbb{R}^{2n}$, натянутое на векторы z_ν, $\nu = 1, \ldots, n$. Рассмотрим вектор $y_i = \sum_{\nu=1}^{n} (v_i)_\nu z_\nu$, где $(v_i)_\nu$ есть координата вектора v_i с номером ν. Тогда $(y_i)_i = 1$, $(e_i)_i = 1$, $(y_i)_j = \langle v_i, w_j \rangle$ при $j \neq i$. Имеет место равенство

$$\rho_2^2(e_i, L) \leqslant \rho_2^2(e_i, y_i) = \sum_{j \leqslant 2n,\, j \neq i} |\langle v_i, w_j \rangle|^2.$$

Из предложения 7.1.2 получаем

$$n \leqslant \sum_{i \leqslant 2n} \rho_2^2(e_i, L) \leqslant \sum_{i \leqslant 2n,\ i \neq j} |\langle v_i, w_j \rangle|^2,$$

что и требовалось. □

7.1.6. Следствие. *Пусть* $\{v_i\}_{i=1}^{2n} \subset \mathbb{S}^{n-1}$. *Тогда справедливо неравенство* $\gamma := \max\limits_{i \neq j} |\langle v_i, v_j \rangle| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Доказательство. В качестве w_j в следствии 7.1.5 берем v_j. Тогда $\sum_{i \neq j} |\langle v_i, v_j \rangle|^2 \geqslant n$, в этой сумме $2n(2n-1)$ слагаемых, поэтому найдется слагаемое не меньше $\frac{1}{2(2n-1)}$. □

Для приложений нужны оценки величины γ сверху. Такие оценки систематически изучаются в теории кодирования. Однако следующая конструкция была предложена специалистом по теории функций Р. Девором в 2007 г. в работе [8].

7.1.7. Теорема. *Пусть $n = p^2$, где p — простое число, $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует $n^k - 1$ векторов $\{v_i\}_{i=1}^{n^k-1} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ таких, что*

$$|\langle v_i, v_j \rangle| \leqslant \frac{2k-1}{\sqrt{n}} \quad \textit{при } i \neq j.$$

7.1.8. Замечание. Известно, что в числителе правой части последнего неравенства нельзя написать величину меньше $\sqrt{k}$, однако точная зависимость оптимальной оценки от k неизвестна.

7.1.9. Замечание. Используя случайную выборку, нетрудно построить n^k единичных векторов, попарные скалярные произведения которых по модулю не превосходят $\frac{C(k)(\log n)^{1/2}}{\sqrt{n}}$.

Доказательство теоремы 7.1.7. Координаты векторов из пространства $\mathbb{R}^n$ будем нумеровать точками из множества $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Рассмотрим $\mathcal{P}_k$ — семейство ненулевых многочленов степени не выше $2k-1$ над $\mathbb{Z}_p$. Такие многочлены имеют вид

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2k-1} x^{2k-1}.$$

Их количество равно $p^{2k} - 1 = n^k - 1$. Каждому многочлену $q(x)$ поставим в соответствие вектор из $\mathbb{R}^n$ следующим образом. Рассмотрим вектор, координаты которого, соответствующие паре $(x, q(x))$ из $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, равны 1, а остальные координаты — 0. Обозначим этот вектор через $\tilde{v}_q$. Пусть

$$v_q = \frac{\tilde{v}_q}{\sqrt{p}} = \frac{\tilde{v}_q}{n^{1/4}}.$$

Ясно, что $v_q \in \mathbb{S}^{n-1}$. Проверим, что скалярные произведения построенных векторов v_q оцениваются нужным образом. Пусть $q \neq s$, тогда, учитывая, что число корней многочлена не превышает его степени, находим

$$\begin{aligned}|\langle v_q, v_s \rangle| = \langle v_q, v_s \rangle &= \frac{\#\{\nu\colon q(\nu) = s(\nu)\}}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{\#\{\nu\colon (q-s)(\nu) = 0\}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2k-1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Здесь и ниже через $\# A$ или $|A|$ обозначается число элементов конечного множества A. $\square$

7.1.10. Следствие ([2]). *Справедливо неравенство*

$$d_n(B_1^{n^k-1}, l_\infty^{n^k-1}) \leqslant \frac{2k}{\sqrt{n}}, \qquad n = p^2, \quad p \textit{ – простое.}$$

Доказательство. Как отмечалось ранее, достаточно приблизить только e_i, $1 \leqslant i \leqslant n^k - 1$. Пусть A — матрица со столбцами v_i (построенными в теореме 7.1.7), z_ν — ее строки. Рассмотрим вектор $\sum_\nu (v_i)_\nu z_\nu$. На i-м месте стоит 1, на оставшихся — скалярное произведение различных векторов v_i, т. е. величины, не превосходящие по модулю $2k/\sqrt{n}$. □

§ 7.2. Теорема Джона

7.2.1. Определение. *Эллипсоидом в $\mathbb{R}^n$ называется множество V, координаты элементов которого в некотором ортонормированном базисе удовлетворяют условию*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1,$$

для некоторых чисел $a_i \neq 0$.

7.2.2. Определение. *Эллипсоид наименьшего объема, содержащий данное множество, называется эллипсоидом Лёвнера.*

7.2.3. Предложение (без доказательства). *Пусть A — компакт в $\mathbb{R}^n$, причем A не содержится ни в каком линейном подпространстве размерности $n-1$. Тогда существует и единствен эллипсоид наименьшего объема, содержащий A.*

Для выпуклых тел естественно рассматривать также двойственное понятие: эллипсоид наибольшего объема, содержащийся внутри тела. Существование такого эллипсоида следует из соображений компактности.

7.2.4. Теорема (Ф. Джон, 1948). *Для всякого конечномерного пространства $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ найдется такой эллипсоид Э, что*

$$Э \subset B_X \subset \sqrt{n}Э.$$

7.2.5. Замечание. В случае, когда $X = l_\infty^n$, утверждение теоремы 7.2.4 не может быть усилено, т. е. если $Э \subset B_\infty^n \subset \lambda Э$, то выполнено неравенство $\lambda \geqslant \sqrt{n}$.

Доказательство теоремы 7.2.4. Пусть Э — эллипсоид максимального объема, содержащийся в B_X. Сделав линейную замену, можно считать, что $Э = B_2^n$ — обычный евклидов шар. Покажем, что $B_X \subset \sqrt{n}Э$. Будем действовать от противного. Предположим, что найдется такая точка $z \in B_X$, что $\|z\|_{l_2^n} > \sqrt{n}$. Сделав ортогональное преобразование, можно считать, что $z = (z_1, 0, \ldots, 0)$. Наша цель — найти в B_X эллипсоид $\widetilde{V}$ большего объема в виде

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i^2}{b^2} \leqslant 1$$

и прийти тем самым к противоречию. Отметим, что справедливо равенство $\mathrm{Vol}(\widetilde{V}) = ab^{n-1} \mathrm{Vol}\, B_{l_2^n}$. Таким образом, нам нужно подобрать параметры a и b из следующих соображений:

$$1)\ ab^{n-1} > 1, \quad 2)\ \widetilde{V} \subset B_X.$$

Так как $z \in B_X$, $B_{l_2^n} \subset B_X$ и B_X — выпуклое множество, то

$$Q := \mathrm{conv}\left\{z, -z, B_{l_2^n}\right\} \subset B_X,$$

где $\mathrm{conv}(D)$ — выпуклая оболочка множества D. Подберем $\widetilde{V}$ так, чтобы $\widetilde{V} \subset Q$. Легко понять, что проверку включения 2) можно свести к двумерному случаю, т. е. проверить, что $\widetilde{V} \cap L \subset Q$, где L — произвольное двумерное подпространство, содержащее точку z. Далее, подходящее ортогональное преобразование сводит проверку к случаю, когда $L = \{x_1, x_2, 0, \ldots, 0\}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Пусть B — точка z, A — точка (с обеими положительными координатами) касания касательной, проведенной из точки B к окружности радиуса 1 с центром в нуле, C — точка пересечения прямой BA со второй координатной осью (осью x_2). Из подобия треугольников легко найти координаты точки A: $A = (1/z_1, \sqrt{1 - 1/z_1^2})$. Из этого несложно найти уравнение прямой BA:

$$\frac{x_1}{z_1} + x_2 \frac{\sqrt{z_1^2 - 1}}{z_1} = 1.$$

Мы хотим, чтобы наш эллипсоид $\widetilde{V}$ лежал «ниже» этой прямой. Таким образом, нам нужно потребовать выполнение следующего условия:

$$\sup_{x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 \leqslant 1} \frac{x_1}{z_1} + x_2 \frac{\sqrt{z_1^2 - 1}}{z_1} \leqslant 1,$$

или, что то же самое,

$$\sup_{v_1^2 + v_2^2 \leqslant 1} \frac{a}{z_1} v_1 + v_2 \frac{b\sqrt{z_1^2 - 1}}{z_1} \leqslant 1.$$

В последнем неравенстве супремум в левой части равен

$$\sqrt{\frac{a^2}{z_1^2}+\frac{b^2(z_1^2-1)}{z_1^2}},$$

поэтому интересующее нас неравенство примет вид

$$a^2+b^2(z_1^2-1)\leqslant z_1^2. \tag{7.2.1}$$

Положим

$$a=\frac{z_1}{\sqrt{n}},\quad b=\frac{\sqrt{1-1/n}}{\sqrt{1-1/z_1^2}}.$$

Отметим, что при таком выборе неравенство (7.2.1) обращается в равенство.

Теперь нам нужно проверить, что при таком выборе параметров a и b эллипсоид $\widetilde{V}$ «лежит под единичной окружностью» на отрезке $[0,1/z_1]$, т. е. для всякой такой точки (x_1,x_2), что

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1,\quad 0\leqslant x_1\leqslant 1/z_1,$$

имеет место неравенство $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$. Заметим, что для таких точек справедливо равенство

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+b^2,$$

а так как функция в правой части последнего равенства возрастает по аргументу x_1 ($b^2/a^2<1$, поскольку $z_1>\sqrt{n}$) и в точке $1/z_1$ она не превосходит 1, то она не превосходит 1 и во всех точках отрезка $[0,1/z_1]$.

Остается лишь проверить неравенство $ab^{n-1}>1$. Действительно,

$$ab^{n-1}=\frac{z_1^n}{\left(\sqrt{z_1^2-1}\right)^{n-1}}\,\frac{\left(\sqrt{n-1}\right)^{n-1}}{\left(\sqrt{n}\right)^n},$$

и интересующее нас неравенство следует из возрастания функции

$$f(t)=\frac{t^n}{\left(\sqrt{t^2-1}\right)^{n-1}}$$

на луче $(\sqrt{n},+\infty)$. $\square$

§ 7.3. Почти сферические сечения октаэдра, поперечники и неравенство Гротендика

7.3.1. Лемма (об ε-сетях)**.** *Пусть $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ и $0 < \varepsilon < 1$. Тогда единичная сфера $S(X) := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ пространства X имеет ε-сеть $\Omega \subset S(X)$ с числом элементов $\#\Omega \leqslant (3/\varepsilon)^n$.*

Доказательство. Пусть $\Omega = \{x_i\}_{i=1}^N$ — максимальное ε-различимое семейство на сфере, т. е. $\Omega \subset S(X)$ и $\|x_i - x_j\| \geqslant \varepsilon$ при $i \neq j$. Конечность элементов в Ω легко следует из соображений компактности. Ясно, что множество Ω — ε-сеть (иначе оно не было бы максимальным). Также очевидно, что

$$B(x_i, \varepsilon/2) \cap B(x_j, \varepsilon/2) = \varnothing,$$

где $B(z, r)$ — открытый шар с центром в точке z радиуса r в пространстве X. Так как

$$B(x_i, \varepsilon/2) \subset B(0, 1 + \varepsilon/2), \quad \mathrm{Vol}(B(x_i, \varepsilon/2)) = \mathrm{Vol}(B(0, \varepsilon/2)),$$

то

$$N\mathrm{Vol}(B(0, \varepsilon/2)) \leqslant \mathrm{Vol}(B(0, 1 + \varepsilon/2)).$$

Таким образом,

$$N(\varepsilon/2)^n \leqslant (1 + \varepsilon/2)^n,$$

значит, $N \leqslant (1 + 2/\varepsilon)^n \leqslant (3/\varepsilon)^n$. □

7.3.2. Лемма. *Пусть $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(B_X) = v_n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{\|\theta\|^n} \, \mu_n(d\theta),$$

где, как и ранее, $\mathbb{S}^{n-1}$ — евклидова сфера, v_n — объем единичного евклидова шара, μ_n — стандартная нормированная мера Лебега на сфере.

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда, переходя к полярным координатам, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = c_n \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} f(r\theta) \, \mu_n(d\theta) \, dr,$$

где c_n — площадь сферы. Взяв в качестве f индикатор единичного евклидова шара, имеем

$$v_n = \mathrm{Vol}(B_{l_2^n}) = c_n \int_0^1 r^{n-1} \, dr = c_n n^{-1}.$$

Взяв теперь в качестве f индикатор I_{B_X} множества B_X, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B_X) &= nv_n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty I_{B_X}(r\theta)r^{n-1}\,dr\mu_n(d\theta)\\ &= nv_n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{1/\|\theta\|} r^{n-1}\,dr\mu_n(d\theta)\\ &= v_n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{\|\theta\|^n}\,\mu_n(d\theta),\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

7.3.3. Лемма. *Пусть* $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *и* $c > 0$ — *такая постоянная, что*

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}(B_X)}{\mathrm{Vol}(B_{l_2^n})}\right)^{1/n} \leqslant c.$$

Тогда при $y \geqslant 1$ *имеем*

$$\mu_n\Bigl\{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}\colon \|\theta\| \leqslant \frac{1}{y}\Bigr\} \leqslant \left(\frac{c}{y}\right)^n.$$

Доказательство. Из неравенств

$$y^n\mu_n\{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}\colon \|\theta\|^{-n}\geqslant y^n\} \leqslant \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{\|\theta\|^n}\,\mu_n(d\theta) = \frac{\mathrm{Vol}(B_X)}{\mathrm{Vol}(B_{l_2^n})} \leqslant c^n$$

следует наше утверждение. □

Если $B_X = \sqrt{n}B_{l_1^n}$, то

$$\mathrm{Vol}(B_X) = \frac{2^n n^{n/2}}{n!},\ \mathrm{Vol}(B_{l_2^n}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},\ \left(\frac{\mathrm{Vol}(B_X)}{\mathrm{Vol}(B_{l_2^n})}\right)^{1/n} \leqslant \frac{4}{3}.$$

Это неравенство нам потребуется в следующей теореме.

7.3.4. Теорема (Б. С. Кашин [3]). *Пусть* $0 < \delta < 1$ *и*

$$L_{n,\delta} := \{x\in\mathbb{R}^n\colon x = (x_1,\ldots,x_{\lceil n(1-\delta)\rceil},0,\ldots,0)\},$$

где $\lceil x\rceil := \min\{m\in\mathbb{Z}\colon m\geqslant x\}$ — *верхняя целая часть числа. Пусть* ν_n — *мера Хаара на* $\mathrm{SO}(n)$. *Тогда для всякого* $\delta > 0$ *найдется такая постоянная* $c_\delta > 0$, *что*

$$\nu_n\Bigl\{T\in\mathrm{SO}(n)\colon \inf_{x\in\mathbb{S}^{n-1}\cap T(L_{n,\delta})}\|x\|_{l_1^n}\geqslant c_\delta\sqrt{n}\Bigr\} \geqslant 1-2^{-n}.$$

7.3.5. Замечание. Теорема 7.3.4 фактически означает, что сечение октаэдра B_1^n случайным подпространством L размерности $[n(1-\delta)]$ почти сферическое, т. е. для $x \in L$

$$c_\delta \|x\|_{l_2^n} \sqrt{n} \leqslant \|x\|_{l_1^n} \leqslant \|x\|_{l_2^n} \sqrt{n}.$$

Классическая теорема А. Дворецкого (с уточнением В. Мильмана) утверждает существование почти сферических сечений размерности не меньше $\log n$ для произвольного выпуклого центрально-симметричного тела B в $\mathbb{R}^n$. Если же $B = B_\infty^n$, то логарифмическая оценка размерности почти сферического сечения точна по порядку (подробнее см. [7]). Для приложений (см., в частности, следующий параграф) особенно интересен случай, когда *коразмерность* почти сферических сечений мала по сравнению с n.

Доказательство теоремы 7.3.4. Не ограничивая общность, мы можем считать число n достаточно большим, так что верно неравенство $\lceil n(1-\delta) \rceil \leqslant [n(1-\delta/2)]$. Напомним следующее свойство меры Хаара: для любой точки $z \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ имеем

$$\nu_n\{T\colon Tz \in \Omega\} = \mu_n\{\Omega\}.$$

Поэтому по лемме 7.3.3

$$\nu_n\left\{T\colon \|Tz\|_{l_1^n} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{y}\right\} \leqslant \left(\frac{4/3}{y}\right)^n.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. По лемме 7.3.1 найдем на $\mathbb{S}^{n-1} \cap L_{n,\delta}$ некоторую α-сеть Ω_α с числом элементов

$$\#\Omega_\alpha \leqslant \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{n(1-\delta/2)}.$$

Пусть $Q := \left\{T \in \mathrm{SO}(n)\colon \inf\limits_{z \in \Omega_\alpha} \|Tz\|_{l_1^n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{y}\right\}$, тогда

$$\nu_n(Q) \leqslant \left(\frac{4/3}{y}\right)^n \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{n(1-\delta/2)},$$

$$\nu_n(SO(n)\backslash Q) \geqslant 1 - \left(\frac{4/3}{y}\right)^n \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{n(1-\delta/2)}.$$

Для всяких $x \in \mathbb{S}^{n-1} \cap L_{n,\delta}$ и $T \in \mathrm{SO}(n)\backslash Q$ найдется такое $z \in \Omega_\alpha$, что $\|z - x\|_{l_2^n} \leqslant \alpha$. Используя определение множества Q, имеем

$$\|Tx\|_{l_1^n} \geqslant \|Tz\|_{l_1^n} - \|T(z-x)\|_{l_1^n} \geqslant \|Tz\|_{l_1^n} - \sqrt{n}\alpha \geqslant \frac{\sqrt{n}}{y} - \sqrt{n}\alpha,$$

где в предпоследнем неравенстве применена оценка $\|u\|_{l_1^n} \leqslant \sqrt{n}\|u\|_{l_2^n}$. Если $\alpha = (2y)^{-1}$, то $\|Tx\|_{l_1^n} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2y}$. Взяв $y = y(\delta)$ достаточно большим, чтобы

$$\left(\frac{4/3}{y}\right)^n (6y)^{n(1-\delta/2)} \leqslant 2^{-n},$$

получим утверждение теоремы с $c_\delta = \frac{1}{2y}$. □

Для множества A и подпространства B положим

$$\Delta_{l_\infty^n}(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_{l_\infty^n}.$$

7.3.6. Следствие. *В условиях предыдущей теоремы имеем*

$$\nu_n \left\{ T \in \mathrm{SO}(n)\colon\ \Delta_{l_\infty^n}(B_{l_2^n}, T(L_{n,\delta}^\perp)) \leqslant \frac{C_\delta}{\sqrt{n}} \right\} \geqslant 1 - 2^{-n},$$

где C_δ — некоторая постоянная, а $L^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству $L \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $x \in B_{l_2^n}$, $L \subset \mathbb{R}^n$ — подпространство. Тогда известное из курса функционального анализа следствие теоремы Хана – Банаха влечет, что

$$\mathrm{dist}_{l_\infty^n}(x, L) = \sup_{z \in L^\perp,\ \|z\|_{l_1^n} \leqslant 1} \langle z, x \rangle.$$

Применяя это соотношение, имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{l_\infty^n}(B_{l_2^n}, T(L_{n,\delta}^\perp)) &= \sup_{x \in B_{l_2^n}} \mathrm{dist}_{l_\infty^n}(x, T(L_{n,\delta}^\perp)) \\ &= \sup_{x \in B_{l_2^n}} \sup_{z \in T(L_{n,\delta}),\ \|z\|_{l_1^n} \leqslant 1} \langle z, x \rangle \\ &= \sup_{z \in T(L_{n,\delta}),\ \|z\|_{l_1^n} \leqslant 1} \|z\|_{l_2^n} \leqslant (c_\delta \sqrt{n})^{-1},\end{aligned}$$

где последняя оценка сделана в предположении, что оператор T берется из множества $\mathrm{SO}(n) \backslash Q$, введенного выше в доказательстве теоремы 7.3.4. Взяв $C_\delta = 1/c_\delta$, получаем утверждение следствия. □

Очевидно, что следствие 7.3.6 влечет такой результат.

7.3.7. Следствие. *Пусть $0 < \delta < 1$. При $n \in \mathbb{N}$ имеет место оценка поперечника:*

$$d_{[n\delta]}(B_2^n, l_\infty^n) \leqslant \frac{C_\delta}{\sqrt{n}}.$$

Применим теперь следствие 7.3.6 для доказательства следующего классического неравенства.

7.3.8. Теорема (Гротендик, 1953)**.** *Существует такая абсолютная постоянная K_G, что при $n = 1, 2, \ldots$ для всякой матрицы $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ с действительными элементами имеет место соотношение*

$$\sup_{\substack{\{x_i\}_{i=1}^n \subset B_H,\\ \{y_j\}_{j=1}^n \subset B_H}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \leqslant K_G \sup_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1,\\ \delta_j = \pm 1}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \delta_j.$$

Выше через B_H мы обозначили единичный шар в гильбертовом пространстве H. Не ограничивая общности, можно считать далее, что $H = L^2[0,1]$. Доказано, что $K_G < 2$, а точное значение этой константы неизвестно. Здесь нас величина K_G не интересует.

7.3.9. Лемма. *Пусть $f_i, g_j \in B_{L^2[0,1]}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Тогда найдутся функции $\widetilde{f}_i, \widetilde{g}_j \in C_{2/3} B_{L^\infty[0,1]}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, где $C_{2/3}$ — константа из следствия* 7.3.6*, такие что*

$$\langle f_i, g_j \rangle = \langle \widetilde{f}_i, \widetilde{g}_j \rangle.$$

Вывод неравенства Гротендика из леммы 7.3.9. Легко заметить, что выполнено неравенство

$$\sup_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1,\\ \delta_j = \pm 1}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \delta_j = \sup_{\substack{|\varepsilon_i| \leqslant 1,\\ |\delta_j| \leqslant 1}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \delta_j,$$

так как любой вектор из $B_{l_\infty^n}$ есть выпуклая комбинация векторов с координатами, по модулю равными 1. Теперь, пользуясь леммой 7.3.9, для любых наборов $\{f_i\}_{i=1}^n \subset B_{L^2[0,1]}$, $\{g_j\}_{j=1}^n \subset B_{L^2[0,1]}$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int_0^1 f_i g_j \, dt = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{f}_i \widetilde{g}_j \, dt \leqslant \int_0^1 \Bigl| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{f}_i \widetilde{g}_j \Bigr| \, dt,$$

где функции $\widetilde{f}_i, \widetilde{g}_j \in C_{2/3} B_{L^\infty[0,1]}$ построены исходя из леммы. При этом для п.в. t имеет место оценка

$$\Bigl| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{f}_i(t) \widetilde{g}_j(t) \Bigr| \leqslant C_{2/3}^2 \sup_{\substack{|\varepsilon_i| \leqslant 1,\\ |\delta_j| \leqslant 1}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \delta_j,$$

завершающая доказательство неравенства Гротендика. □

Доказательство леммы 7.3.9. Рассмотрим три линейных подпространства в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$:

$$L_1 := \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0)\},$$

$$L_2 := \{(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_{2n}, 0, \dots, 0)\},$$

$$L_3 := \{(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, x_{2n+1}, \dots, x_{3n})\}.$$

По следствию 7.3.6 найдется такое преобразование $T \in \mathrm{SO}(n)$, что для всех трех подпространств L_1, L_2, L_3 выполняется соотношение

$$\Delta_{l_\infty^{3n}}(B_{l_2^{3n}}, T(L_i)) \leqslant \frac{C_{2/3}}{\sqrt{3n}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя изоморфизм евклидовых пространств одной размерности, выберем $x_i, y_j \in B_{l_2^{3n}} \cap T(L_1)$ так, чтобы

$$(x_i, y_j) = \langle f_i, g_j \rangle, \ \ 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — стандартное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^{3n}$. Найдутся такие точки $z_i \in T(L_2)$ и $w_j \in T(L_3)$, что

$$\|x_i - z_i\|_{l_\infty^{3n}} \leqslant \frac{C_{2/3}}{\sqrt{3n}}, \quad \|y_j - w_j\|_{l_\infty^{3n}} \leqslant \frac{C_{2/3}}{\sqrt{3n}}.$$

Положим

$$\widetilde{x}_i := x_i - z_i, \quad \widetilde{y}_j := y_j - w_j,$$

Тогда $\|\widetilde{x}_i\|_\infty, \|\widetilde{y}_j\|_\infty \leqslant \frac{C_{2/3}}{\sqrt{3n}}$ и по построению $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j) = (x_i, y_j)$.

Положим

$$\widetilde{f}_i(t) = (\widetilde{x}_i)_s \sqrt{3n}, \quad \text{если } t \in \left(\frac{s-1}{3n}, \frac{s}{3n}\right],$$

$$\widetilde{g}_j(t) = (\widetilde{y}_j)_s \sqrt{3n}, \quad \text{если } t \in \left(\frac{s-1}{3n}, \frac{s}{3n}\right],$$

где $(u)_s$ означает координату вектора u с номером s. При таком выборе получаем $\langle \widetilde{f}_i, \widetilde{g}_j \rangle = (\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$. $\square$

7.3.10. Замечание. Доказательства теорем 7.3.4 и 7.3.8 изложены по работам [13] и [11] соответственно.

§ 7.4. Сжатые измерения

Вектор $u \in \mathbb{R}^m$ называют k-разреженным, если $\#\{i\colon u_i \neq 0\} \leqslant k$.

Пусть нам дано уравнение $Au = y$, где A — $n\times m$-матрица (n строк, m столбцов), $m > n$. Ясно, что решение уравнения не единственно, но, в соответствии с запросами приложений, нас интересуют разреженные решения. Если, например, известно, что любой минор порядка n матрицы A отличен от нуля, то легко понять, что $(n/2)$-разреженное решение единственно, так как разность любых двух таких решений имеет не более n ненулевых координат. Однако в приложениях необходим эффективный алгоритм нахождения разреженных решений; подробнее о так называемых сжатых измерениях (compressed sensing) см. [6], [9] и [14]. Такой алгоритм для специально выбранных матриц A может быть построен на основе следующего результата.

7.4.1. Теорема. *Найдутся такие постоянная C и $n\times m$-матрица A, что $Cn\bigl(\ln(em/n)\bigr)^{-1}$-разреженное решение уравнения $Au=y$ может быть найдено как единственное решение экстремальной задачи*

$$\|v\|_{l_1^m} \to \inf, \ \textit{при условии, что } Av = y.$$

Схема доказательства. Из теоремы 7.3.4 вытекает, что в $\mathbb{R}^m$ есть подпространство L размерности $m-n$ со следующим свойством:

$$\inf_{x\in\mathbb{S}^{m-1}\cap L} \|x\|_{l_1^m} \geqslant c_{n/m}\sqrt{m}.$$

С помощью более точных оценок (см. [1], [3]) можно установить существование подпространства Γ размерности $m-n$ со следующим свойством:

$$m^{-1/2}\|x\|_{l_1^m} \leqslant \|x\|_{l_2^m} \leqslant cn^{-1/2}\ln^{1/2}\left(\frac{em}{n}\right)\|x\|_{l_1^m},$$

для всякого вектора $x \in \Gamma$.

Пусть

$$s(m,n) := c^{-2}n\left(\ln\left(\frac{em}{n}\right)\right)^{-1}.$$

Через $\operatorname{supp}(x)$ обозначим множество номеров отличных от нуля координат вектора x. Заметим, что для всякого ненулевого вектора $x \in \Gamma$ справедливо соотношение

$$|\operatorname{supp}(x)| \geqslant s(m,n).$$

Действительно, если $\Lambda = \operatorname{supp}(x)$, то справедливы неравенства

$$\|x\|_{l_1^m} \leqslant |\Lambda|^{1/2}\|x\|_{l_2^m} \leqslant |\Lambda|^{1/2}s(m,n)^{-1/2}\|x\|_{l_1^m}.$$

Также заметим, что для всякого ненулевого вектора $x \in \Gamma$ и для всякого множества индексов Λ с количеством элементов $|\Lambda| < s(m,n)/4$ справедлива следующая оценка:

$$\sum_{j\in\Lambda} |x_j| < \frac{\|x\|_{l_1^m}}{2}.$$

В самом деле,

$$\sum_{j\in\Lambda} |x_j| \leqslant |\Lambda|^{1/2} s(m,n)^{-1/2} \|x\|_{l_1^m} < \frac{\|x\|_{l_1^m}}{2}.$$

Пусть теперь вектор u таков, что $|\mathrm{supp}(u)| < s(m,n)/4$. Тогда для всякого отличного от нуля вектора $x \in \Gamma$ справедливо неравенство

$$\|u + x\|_{l_1^m} > \|u\|_{l_1^m}.$$

Действительно, пусть $\Lambda = \mathrm{supp}(u)$, $v = u + x$. Тогда

$$\begin{aligned}\|v\|_{l_1^m} &= \sum_{j\in\Lambda} |u_j + x_j| + \sum_{j\notin\Lambda} |x_j| \geqslant \sum_{j\in\Lambda} |u_j| - \sum_{j\in\Lambda} |x_j| + \sum_{j\notin\Lambda} |x_j| \\ &= \|u\|_{l_1^m} + \|x\|_{l_1^m} - 2\sum_{j\in\Lambda} |x_j| > \|u\|_{l_1^m}.\end{aligned}$$

Пусть $\Gamma^\perp$ – линейная оболочка строк матрицы A. Тогда $\mathrm{Ker}(A) = \Gamma$. Если u является $\frac{s(m,n)}{4}$-разреженным вектором, который удовлетворяет уравнению $Au = y$, то любое иное решение v уравнения $Av = y$ имеет вид $v = u+z$, $z \in \Gamma$ и $\|v\|_{l_1^m} > \|u\|_{l_1^m}$, что и требовалось проверить. □

7.4.2. Замечание. Все известные доказательства существования матриц со свойствами, указанными в теореме 7.4.1, как и доказательство теоремы 7.3.4, имеют вероятностный характер. Вопрос об эффективном построении таких матриц остается открытым.

§ 7.5. Теоремы факторизации

Первые теоремы факторизации были установлены в 1950-е годы А. Гротендиком. После ознакомления с формулировками полученных им результатов (см. ниже) термин «теоремы факторизации» не требует пояснений. Важное место в работах Гротендика и в дальнейшем развитии темы занимает неравенство Гротендика, полученное в § 7.3 как следствие результатов о почти сферических сечениях октаэдра. Теоремы факторизации интенсивно изучались в 1960–80-е годы и нашли разнообразные приложения в анализе, теории вероятностей и дискретной математике. Важный вклад в развитие этого направления внес профессор кафедры ТФФА Е. М. Никишин (1945 – 1986). Ниже доказываются две теоремы Гротендика. Следуя выбору темы главы, мы ограничиваемся основным для приложений в дискретной математике случаем операторов с конечномерной областью значений. О теоремах факторизации для бесконечномерных пространств см. [5] и [15].

7.5.1. Теорема. *Пусть на множествах $T = \langle N \rangle := \{1, \dots, N\}$ и $S = \langle N' \rangle$ заданы равномерные вероятностные меры ρ и ρ' соответственно, и пусть $A\colon L^\infty(T) \to L^1(S)$ — линейный оператор. Тогда существуют такие гильбертово пространство H и операторы $A_1\colon H \to L^1(S)$ и $A_2\colon L^\infty(T) \to H$, что $A = A_1 A_2$ и*

$$\|A_1\| \cdot \|A_2\| \leqslant K_G \|A\|,$$

где K_G — константа Гротендика.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что для каждой функции $v_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $i = 1, 2, \dots, N$, на T выполнено неравенство

$$A(v_i) \neq 0 \tag{7.5.1}$$

и для каждой функции $w_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $i = 1, 2, \dots, N'$, заданной на S, можно найти такой элемент $x \in L^\infty(T)$, что

$$(A(x), w_i) \neq 0, \tag{7.5.2}$$

иначе, не изменяя норму оператора, удаляем из T элементы i, для которых (7.5.1) не выполняется (соответственно, из S удаляем те i', для которых не выполняется (7.5.2)), и будем рассматривать новые T и S, для которых достаточно установить утверждение теоремы.

Для произвольных функций $x \in L^\infty(T)$ и $y \in L^\infty(S)$ зададим функцию $\varphi\colon L^\infty(T \times S) \to \mathbb{R}$ так:

$$\varphi(x, y) := \int_S (Ax) y \, d\rho' = \frac{1}{N'} \sum_{s \in S} A(x)(s) y(s). \tag{7.5.3}$$

7.5.2. Лемма. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых последовательностей $x_k \in L^\infty(T)$ и $y_k \in L^\infty(S)$, $k = 1, 2, \dots, n$, выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k, y_k)| \leqslant K_G \|\varphi\| \Big\| \sum_{k=1}^n x_k^2 \Big\|^{1/2}_{L^\infty(T)} \Big\| \sum_{k=1}^n y_k^2 \Big\|^{1/2}_{L^\infty(S)}, \tag{7.5.4}$$

где под нормой билинейной формы φ мы, как обычно, понимаем

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_{L^\infty(T)}\leqslant 1,\ \|y\|_{L^\infty(S)}\leqslant 1} |\varphi(x,y)|.$$

Доказательство. Пусть

$$x_k = \sum_{i=1}^{N} x_k^i v_i, \quad y_k = \sum_{i=1}^{N'} y_k^i w_i,$$

где, как и ранее,

$$v_i = (0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^N, \quad w_i = (0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{N'}.$$

Тогда справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k,y_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N'} x_k^i y_k^j \varphi(v_i,w_j) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N'}\varphi(v_i,w_j)\sum_{k=1}^{n} x_k^i y_k^j$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N'}\varphi(v_i,w_j)(X_i,Y_j),$$

где $X_i = \{x_k^i\},\ Y_j = \{y_k^j\}$, откуда по неравенству Гротендика

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k,y_k)\leqslant K_G \sup_{\varepsilon_i,\delta_j=\pm 1}\Bigl|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N'}\varphi(v_i,w_j)\varepsilon_i\delta_j\Bigr| \max_i \|X_i\|_{l_2^n}\max_j\|Y_j\|_{l_2^n}$$
$$\leqslant K_G\|\varphi\|\Bigl\|\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Bigr\|^{1/2}_{L^\infty(T)}\Bigl\|\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Bigr\|^{1/2}_{L^\infty(S)}.$$

Заменяя x_k на $-x_k$ для тех k, для которых $\varphi(x_k,y_k) < 0$, получим неравенство (7.5.4). □

С учетом (7.5.3) имеем $\|\varphi\|\leqslant\|A\|$. Пусть

$$\varphi'(x,y) = \frac{2\varphi(x,y)}{\|A\|K_G}.$$

По лемме 7.5.2 справедливо неравенство

$$|\varphi'(x,y)|\leqslant 2\|x^2\|^{1/2}_{L^\infty(T)}\|y^2\|^{1/2}_{L^\infty(S)}\leqslant\|x^2\|_{L^\infty(T)}+\|y^2\|_{L^\infty(S)}. \quad (7.5.5)$$

Для произвольных $x\in L^\infty(T)$ и $y\in L^\infty(S)$ рассмотрим функцию $F_{x,y}\colon T\times S\to\mathbb{R}$, заданную следующим образом:

$$F_{x,y}(t,s) = x^2(t)+y^2(s)-|\varphi'(x,y)|.$$

Из (7.5.5) вытекает, что для каждой пары (x, y) найдется пара (t, s), для которой $F_{x,y}(t, s) \geqslant 0$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{N\times N'}$ выпуклый конус (конус — такое множество K, что для всех $k_1, k_2 \in K$ и $\alpha, \beta \geqslant 0$ имеем $\alpha k_1 + \beta k_2 \in K$)

$$K := \left\{ \sum_{k=1}^{R} F_{x_k, y_k},\ x_k \in L^\infty(T),\ y_k \in L^\infty(S),\ R = 1, 2, \dots \right\}.$$

По лемме 7.5.2 для всякой функции $f \in K$ найдется точка (t, s), в которой $f(t, s) \geqslant 0$. Также в $\mathbb{R}^{N\times N'}$ рассмотрим множество M_-, которое определим следующим образом:

$$M_- := \left\{ g \in \mathbb{R}^{N\times N'} : \quad g(t, s) < 0 \quad \forall\, (t, s) \in T\times S \right\}.$$

Из выпуклости этого множества и теоремы о существовании разделяющей выпуклые непересекающиеся множества гиперплоскости следует существование такого ненулевого вектора $\mu \in \mathbb{R}^{N\times N'}$, что

$$\langle \mu, k\rangle \geqslant c \quad \forall k \in K, \quad \langle \mu, m\rangle \leqslant c \quad \forall\, m \in M_-, \tag{7.5.6}$$

где $\langle \cdot, \cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N\times N'}$. Поскольку $0 \in K$, то имеем $c \leqslant 0$. С другой стороны, 0 является предельной точкой для множества M_-, т. е. $c \geqslant 0$. Значит, $c = 0$. Можем считать, что

$$\|\mu\| = \sum_{\nu\in T\times S} |\mu_\nu| = 1,$$

при этом из (7.5.6) следует, что $\mu_\nu \geqslant 0$ для всех ν, т. е. μ задает вероятностную меру на $T \times S$. Согласно (7.5.6) для всех $x \in L^\infty(T)$, $y \in L^\infty(S)$ и $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\varphi'(x, y)| = |\varphi'(\lambda x, \lambda^{-1} y)| &\leqslant \lambda^2 \int_{T\times S} x^2(t)\, d\mu + \frac{1}{\lambda^2} \int_{T\times S} y^2(s)\, d\mu \\ &= \lambda^2 \int_T x^2(t)\, d\mu_T + \frac{1}{\lambda^2} \int_S y^2(s)\, d\mu_S, \end{aligned} \tag{7.5.7}$$

где $\mu_T(E) = \mu(E\times S)$ при $E \subset T$ и $\mu_S(E') = \mu(T\times E')$ при $E' \subset S$. Переходя в (7.5.7) к минимуму по λ, имеем

$$|\varphi'(x, y)| \leqslant 2\left(\int_T x^2(t)\, d\mu_T\right)^{1/2} \left(\int_S y^2(s)\, d\mu_S\right)^{1/2},$$

откуда

$$\left|\int_S (Ax)y\,d\rho'\right| = |\varphi(x,y)| \tag{7.5.8}$$
$$\leqslant \|A\|K_G\Big(\int_T x^2(t)\,d\mu_T\Big)^{1/2}\Big(\int_S y^2(s)\,d\mu_S\Big)^{1/2}.$$

Заметим, что если при некотором $t\in T$ выполнено $\mu_T(t)=0$, то по предположению (7.5.1) существует такое $s\in S$, что $\langle A(v_t), w_s\rangle\neq 0$, а тогда при $x=v_t,\ y=w_s$ в левой части (7.5.8) стоит положительное число, а в правой — нуль. Значит, $\mu_T(t)>0$ для любого $t\in T$. Аналогично из сделанного выше предположения (7.5.2) следует положительность меры μ_S.

Пространство $L^2_{\mu_T}$ возьмем в качестве искомого пространства H и покажем, что для него справедливо утверждение теоремы. Пусть $A_2\colon L^\infty(T)\to L^2_{\mu_T}(T)$ — тождественный оператор (как оператор в линейном пространстве). Имеем $\|A_2\|\leqslant 1$.

Пусть $A_1'\colon L^2_{\mu_S}(S)\to L^1(S)$ — тождественный оператор. Тогда

$$A = A_1'A_1''A_2,$$

где оператор $A_1''\colon L^2_{\mu_T}(T)\to L^2_{\mu_S}(S)$, как оператор между линейными пространствами без задания на них норм, совпадает с A. Положим $A_1 := A_1'A_1''\colon L^2_{\mu_T}(T)\to L^1(S)$. Тогда, согласно (7.5.8), при любом $x\in L^2_{\mu_T}(T)$ с условием $\|x\|=1$ и при любом y таком, что

$$y_i = \operatorname{sgn} A(x)(i),\quad i=1,2,\ldots,N',$$

получаем оценку

$$\|A_1x\|_{L^1(S)} = \|A_1'A_1''x\|_{L^1(S)} = \frac{1}{N'}\sum_{s\in S}|A_1''(x)(s)|$$
$$= \frac{1}{N'}\sum_{s\in S}|A(x)(s)| = |\varphi(x,y)| \leqslant \|A\|K_G,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

7.5.3. Определение. *Банахово пространство X имеет тип p, где $1\leqslant p\leqslant 2$, если существует такое число $C>0$, что для всякого $n\in\mathbb{N}$ и всяких $x_1,\ldots,x_n\in X$ выполнено неравенство*

$$\int_0^1\Big\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\Big\|_X\,dt \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^n\|x_i\|_X^p\Big)^{1/p}, \tag{7.5.9}$$

где $r_i(t)$ — функции Радемахера. Наименьшее возможное значение C называется константой типа.

Определение и свойства функций Радемахера см. в [5].

При $p = 1$ и $C = 1$ неравенство (7.5.9) выполняется для всякого банахова пространства.

7.5.4. Определение. *Банахово пространство X имеет котип q, где $2 \leqslant q \leqslant \infty$, если существует такое число $K > 0$, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ и всяких $x_1, \ldots, x_n \in X$ выполнено неравенство*

$$\int_0^1 \Bigl\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \Bigr\|_X dt \geqslant K \Bigl(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \Bigr)^{1/q}.$$

7.5.5. Предложение (без доказательства)**.** *Если банахово пространство имеет тип 2 и котип 2, то оно изоморфно гильбертову пространству.*

7.5.6. Лемма. *Пространство $L^1(\Omega)$ имеет котип 2.*

Доказательство. Для $f_1, \ldots, f_n \in L^1(\Omega)$ выполнены соотношения

$$\int_0^1 \int_\Omega \Bigl| \sum_{i=1}^n f_i(\omega) r_i(t) \Bigr| \, d\omega \, dt = \int_\Omega \int_0^1 \Bigl| \sum_{i=1}^n f_i(\omega) r_i(t) \Bigr| \, dt \, d\omega$$

$$\underset{(*)}{\geqslant} \mathcal{K}_1 \int_\Omega \Bigl(\sum_{i=1}^n f_i(\omega)^2 \Bigr)^{1/2} d\omega \underset{(**)}{\geqslant} \mathcal{K}_1 \Bigl(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^1}^2 \Bigr)^{1/2},$$

где $\mathcal{K}_1$ — абсолютная постоянная. Неравенство $(*)$ вытекает из неравенства Хинчина для системы Радемахера (см. ниже). Точное значение постоянной $\mathcal{K}_1$ было найдено в 1975 г. польским математиком С. Шареком и равно $1/\sqrt{2}$. □

7.5.7. Теорема (неравенство Хинчина)**.** *Для каждого числа $p > 2$ существует такая постоянная $D_p > 0$, что для всякого натурального числа n и любых действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ справедливо следующее неравенство*:

$$\Bigl(\int_0^1 \Bigl| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \Bigr|^p dt \Bigr)^{1/p} \leqslant D_p \Bigl(\sum_{k=1}^n a_k^2 \Bigr)^{1/2}.$$

7.5.8. Задача. Докажите неравенство $(**)$.

7.5.9. Лемма. *Гильбертово пространство H имеет тип 2 с постоянной типа, равной 1.*

7.5.10. Задача. Докажите лемму 7.5.9.

7.5.11. Лемма. *Пусть* $A\colon H \to L^1(\Omega,\mu)$ — *линейный непрерывный оператор* (*вместо гильбертова пространства* H *можно взять любое пространство типа* 2, *изменится только соответствующая константа*). *Тогда для любых числа* $n \in \mathbb{N}$ *и векторов* $x_1,\ldots,x_n \in H$ *выполнено неравенство*

$$I := \int_\Omega \Bigl(\sum_{i=1}^n \bigl|A(x_i)(\omega)\bigr|^2\Bigr)^{1/2} d\omega \leqslant \frac{1}{\mathcal{K}_1}\|A\|\Bigl(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2\Bigr)^{1/2}.$$

Доказательство. По свойствам котипа пространства $L^1(\Omega,\mu)$ и типа пространства H имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 I &\leqslant \int_\Omega\int_0^1 \Bigl|\sum_{i=1}^n r_i(t)A(x_i)(\omega)\Bigr|\,dt\,d\omega\\ &= \int_0^1\int_\Omega \Bigl|A\Bigl(\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\Bigr)(\omega)\Bigr|\,d\omega\,dt\\ &\leqslant \|A\|\int_0^1 \Bigl\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\Bigr\|_H dt \leqslant \|A\|\Bigl(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2\Bigr)^{1/2},\end{aligned}$$

что и требовалось. □

7.5.12. Теорема. *Для множества* $S := \{1,\ldots,N\}$ *с заданной на нем равномерной вероятностной мерой* ρ *и любого линейного непрерывного оператора* $A\colon H \to L^1(S)$, *действующего из гильбертова пространства* H, *найдутся такие оператор* $A_1\colon H \to L^2(S)$ *и функция* $g \in L^2(S)$, *что* $A = A_gA_1$ *и*

$$\|A_g\|\cdot\|A_1\| \leqslant \frac{1}{\mathcal{K}_1}\|A\|,$$

где $\mathcal{K}_1$ — *константа из леммы* 7.5.11, *оператор* $A_g\colon L^2(S) \to L^1(S)$ *задан формулой* $A_g(f) = gf$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что для любой функции $w_j = (0,\ldots,0,\underset{j}{1},0,\ldots,0)$, $j = 1,2,\ldots,N$, заданной на S, найдется такой элемент $x \in H$, что

$$(A(x), w_j) \neq 0, \tag{7.5.10}$$

иначе удалим все $j \in S$, для которых (7.5.10) не выполняется ни для какого $x \in H$, и будем рассматривать новое S. Положим

$$K_n = \sup\biggl\{ \int_S \Bigl(\sum_{i=1}^n |A(x_i)(s)|^2\Bigr)^{1/2} d\rho\colon\ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2 \leqslant 1 \biggr\}.$$

Ясно, что $K_1 \leqslant K_2 \leqslant \cdots$, поэтому по лемме 7.5.11 существует предел

$$K = \lim_{n\to\infty} K_n \leqslant \frac{1}{\mathcal{K}_1}\|A\|.$$

Для всякого $n \in \mathbb{N}$ возьмем такие $\{x_i^n\}_{i=1}^n \subset H$, что справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^n \|x_i^n\|_H^2 \leqslant K_n^{-2}(1+1/n), \qquad \int_S \Bigl(\sum_{i=1}^n \bigl|A(x_i^n)(s)\bigr|^2\Bigr)^{1/2} d\rho = 1.$$

Поскольку

$$f_n(s) := \Bigl(\sum_{i=1}^n \bigl|A(x_i^n)(s)\bigr|^2\Bigr)^{1/2} \geqslant 0, \qquad \int_S f_n(s)\,d\rho = 1,$$

то $f_n(s) \leqslant N$ для всех n и s. Поэтому существуют такие подпоследовательность $\{n_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ и функция h, что $f_{n_\nu} \rightrightarrows h$ на S и $\displaystyle\int_S h(s)\,d\rho = 1$. Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $x \in H$ с $\|x\|_H = 1$ при всех $t > 0$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
&\int_S \Bigl(f_{n_\nu}^2(s) + t^2\bigl|A(x)(s)\bigr|^2\Bigr)^{1/2} d\rho \\
&\qquad = \int_S \Bigl(\sum_{i=1}^{n_\nu} \bigl|A(x_i^{n_\nu})(s)\bigr|^2 + t^2\bigl|A(x)(s)\bigr|^2\Bigr)^{1/2} d\rho \\
&< K_{n_\nu+1}\Bigl(\sum_{i=1}^{n_\nu} \|x_i^{n_\nu}\|_H^2 + t^2\Bigr)^{1/2} \leqslant K_{n_\nu+1}\Bigl(K_{n_\nu}^{-2}(1+1/n_\nu) + t^2\Bigr)^{1/2}.
\end{aligned}$$

После перехода к пределу при $\nu \to \infty$ получаем, что для каждого вектора $x \in H$ с $\|x\|_H = 1$ верно неравенство

$$G_x(t) := G(t) := \int_S \Bigl(h^2(s) + t^2\bigl|A(x)(s)\bigr|^2\Bigr)^{1/2} d\rho \leqslant (1+K^2t^2)^{1/2}.$$

При $t = 0$ это неравенство обращается в равенство, т. е.

$$G(t) \leqslant (1+K^2t^2)^{1/2}, \qquad G(0) = 1. \tag{7.5.11}$$

Покажем, что

$$h(s) \neq 0, \qquad s \in S. \tag{7.5.12}$$

Допустим противное, т. е. $h(s_0) = 0$. Пользуясь (7.5.10), выберем такой элемент z с $\|z\|_H = 1$, что $A(z)(s_0) \neq 0$. Тогда легко видеть, что при малых $t > 0$ выполняется оценка

$$G_z(t) \geqslant 1 + t|A(z)(s_0)|/N,$$

в то время как $(1 + K^2t^2)^{1/2} = 1 + o(t)$, что противоречит (7.5.11). Из (7.5.12) вытекает, что функции $G(t)$ и $G(t) - (1 + K^2t^2)^{1/2}$ аналитичны в окрестности нуля, откуда с учетом (7.5.11) при малых $t > 0$ получаем неравенство

$$G'(t) \leqslant \frac{d}{dt}\bigl(1 + K^2t^2\bigr)^{1/2},$$

т. е.

$$\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} \frac{2t\bigl|A(x)(s)\bigr|^2}{2\sqrt{h(s)^2 + t^2\bigl|A(x)(s)\bigr|^2}} \leqslant \frac{2K^2t}{2\sqrt{1 + K^2t^2}}. \tag{7.5.13}$$

Поделим обе части (7.5.13) на t и устремим t к нулю. Тогда получим

$$\int_S \frac{\bigl|A(x)(s)\bigr|^2}{h(s)}\, d\rho \leqslant K^2.$$

Положим $g := h^{1/2}$, $A_1 := A/g$, тогда $A = A_gA_1$ и

$$\|A_g\| = \|g\|_{L^2} = 1, \quad \|A_1\| \leqslant K \leqslant \frac{1}{\mathcal{K}_1}\|A\|,$$

поэтому $\|A_g\| \cdot \|A_1\| \leqslant \|A\|/\mathcal{K}_1$. □

Приведем пример использования теоремы факторизации 7.5.12 в далекой, казалось бы, задаче о свойствах операторов действующих между конечномерными евклидовыми пространствами.

Для данной $N \times n$-матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, n$, при $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$ полагаем

$$\|A\|_{(p,q)} = \sup_{x \in B_p^n} \|Ax\|_{l_q^N}.$$

Пусть также для краткости $\|A\|_{(2,2)} \equiv \|A\|$.

7.5.13. Теорема ([4]). *Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $C(\varepsilon)$, что при $N/n \geqslant C(\varepsilon)$ каждая $N \times n$-матрица A с $\|A\| = 1$ содержит $n \times n$-подматрицу $\widetilde{A}$ с $\|\widetilde{A}\| \leqslant \varepsilon$.*

7.5.14. Замечание. К настоящему времени оценкам (p,q) норм подматриц и их приложениям посвящена довольно обширная литература. Что касается теоремы 7.5.13, то точная по порядку оценка: $C(\varepsilon) \leqslant K\,\varepsilon^{-2}$ была в 1989 г. установлена А. А. Луниным (подробнее см. обзорную статью [10]).

Нам потребуются следующие обозначения. Пусть, как и ранее, $\langle N\rangle = \{1,2,\dots,N\}$. Если $\Lambda \subset \langle N\rangle$ и $k \leqslant |\Lambda|$, то E^k_Λ — семейство всех k-элементных подмножеств Λ. Для краткости полагаем также $E^k_{\langle N\rangle} \equiv E^k_N$. Пусть $\omega \in E^k_N$, тогда $A(\omega)$ является $k\times n$-подматрицей матрицы A:

$$A(\omega) = \{a_{i,j},\ i \in \omega,\ j = 1,2,\dots,n\}.$$

7.5.15. Лемма. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ есть $1/2$-сеть в метрике l^n_2 на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ с числом элементов $\leqslant 6^n$ (см. лемму 7.3.1), X — произвольное нормированное пространство. Пусть также для линейного оператора $A\colon l^n_2 \to X$ имеем $\|Az\|_X \leqslant 1$, если $z \in \Omega$. Тогда верна оценка $\|A\colon l^n_2 \to X\| \leqslant 2$.*

Доказательство. Как легко видеть, всякий элемент $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ представим в виде ряда

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu z_\nu, \quad z_\nu \in \Omega, \quad |\lambda_\nu| \leqslant 2^{-\nu},\ \ \nu = 0,1,\dots .$$

Из этого представления следует, что

$$\|Ax\|_X \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu}\|Az_\nu\|_X \leqslant 2,$$

что и требовалось доказать. □

7.5.16. Лемма. *Для каждого $y \in (0,1)$ найдется такая постоянная R_y, что при $N \geqslant R_y n$ для любого вектора $x = \{x_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ с $\|x\|_2 \leqslant 1$ имеет место неравенство $|G_y| \leqslant 10^{-n} C^{2n}_N$, где*

$$G_y = \Big\{\omega \in E^{2n}_N\colon \sum_{i\in\omega} |x_i| \geqslant y(2n)^{1/2}\Big\},$$

а C^k_N — число сочетаний из N по k.

Доказательство. Пусть

$$Q_y = \Big\{i \in \langle N\rangle\colon |x_i| \geqslant \frac{1}{2} y(2n)^{-1/2}\Big\}.$$

Так как $\|x\|_2 \leqslant 1$, то
$$|Q_y| \leqslant \frac{8n}{y^2}. \tag{7.5.14}$$
Проверим, что выполнено включение
$$G_y \subset G'_y := \Big\{\omega \in E_N^{2n}\colon |\omega \cap Q_y| \geqslant 2n\Big(\frac{y}{2}\Big)^2\Big\}. \tag{7.5.15}$$
Действительно, для $\omega \in E_N^{2n}$ имеем
$$\sum_{i\in\omega\setminus Q_y} |x_i| \leqslant 2n\cdot\frac{1}{2}\,y(2n)^{-1/2} = \frac{yn^{1/2}}{\sqrt{2}}.$$
Поэтому для $\omega \in G_y$ по неравенству Коши получаем
$$\frac{yn^{1/2}}{\sqrt{2}} \leqslant \sum_{i\in\omega\cap Q_y} |x_i| \leqslant |\omega\cap Q_y|^{1/2}\|x\|_2 \leqslant |\omega\cap Q_y|^{1/2},$$
откуда следует (7.5.15).

Пусть $\mu = 2n(y/2)^2$, $\mu' = \min\{2n, |Q_y|\}$. Тогда
$$G'_y = \bigcup_{\mu\leqslant r\leqslant\mu'} \{\omega \in E_N^{2n}\colon |\omega\cap Q_y| = r\},$$
$$|G'_y| = \sum_{\mu\leqslant r\leqslant\mu'} C^r_{|Q_y|}\, C^{2n-r}_{N-|Q_y|} \tag{7.5.16}$$
(в равенстве (7.5.16) полагаем $C_p^q = 0$, если $p < q$). Для оценки правой части в (7.5.16) применим хорошо известные оценки для числа сочетаний: $C_N^k \geqslant (N/2k)^k$ при $2k \leqslant N$ и $C_N^k \leqslant (eN/k)^k$.

Учитывая (7.5.14) и неравенство $r \geqslant \mu$, из равенств (7.5.16) несложно вывести, что $|G'_y| \leqslant 10^{-n}C_N^{2n}$, если N/n достаточно велико: а именно $N/n \geqslant R_y$. Полученная оценка для $|G'_y|$ в силу (7.5.15) влечет утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 7.5.13. Для данного $\varepsilon \in (0,1)$ положим $y = \varepsilon\mathcal{K}_1/4$, где $\mathcal{K}_1$ — постоянная из теоремы 7.5.12, и пусть R_y определено в лемме 7.5.16. Пусть также $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ — сеть из леммы 7.5.15. Тогда при $N/n \geqslant R_y$ имеем
$$\Big|\Big\{\omega \in E_N^{2n}\colon \sup_{x\in\Omega}\sum_{i\in\omega} |(Ax)_i| \geqslant y\sqrt{2n}\Big\}\Big| \leqslant \Big(\frac{6}{10}\Big)^n C_N^{2n},$$

значит, по лемме 7.5.15 получаем неравенство

$$\left|\left\{\omega \in E_N^{2n}\colon \|A(\omega)\|_{(2,1)} \geqslant 2y\sqrt{2n}\right\}\right| \leqslant \left(\frac{6}{10}\right)^n C_N^{2n}, \tag{7.5.17}$$

если $N/n \geqslant R_y$.

Используя (7.5.17), выберем и зафиксируем произвольный набор $\omega \in E_N^{2n}$, для которого

$$\|A(\omega)\|_{(2,1)} \leqslant 2y\sqrt{2n}. \tag{7.5.18}$$

Рассмотрим оператор с матрицей $A(\omega)$ между банаховыми пространствами l_2^n и $L^1(\omega)$. Учитывая определение нормы в $L^1(\omega)$ (см. теорему 7.5.12), мы можем переписать неравенство (7.5.18) в виде

$$\|A(\omega)\colon l_2^n \to L^1(\omega)\| \leqslant \frac{2y}{\sqrt{2n}},$$

а значит, используя теорему 7.5.12, получаем $A(\omega) = A_g \cdot A_1$, где

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} = \|A_1\colon l_2^n \to L^2(\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{2n}}\,\|A_1\colon l_2^n \to l_2(\omega)\| \tag{7.5.19}$$

и $A_g(z) = \{g_i z_i,\ i \in \omega\}$ для $z \in L^2(\omega)$, причем

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{\sum_{i\in\omega} g_i^2} = \|g\|_{L^2(\omega)} \leqslant \frac{2y}{\mathcal{K}_1}. \tag{7.5.20}$$

Из (7.5.20) следует, что при $N/n \geqslant R_y$ найдется множество $\omega' \subset \omega$ такое, что $|\omega'| = n$ и

$$|g_i| \leqslant \frac{4y}{\mathcal{K}_1}, \qquad i \in \omega'. \tag{7.5.21}$$

Тогда (см. (7.5.19) и (7.5.21)) справедливы неравенства

$$\|A(\omega')\colon l_2^n \to l_2(\omega')\| \leqslant \max_{i\in\omega'} |g_i| \cdot \|A_1\colon l_2^n \to l_2(\omega)\| \leqslant \frac{4y}{\mathcal{K}_1} = \varepsilon.$$

Полагая $\widetilde{A} = A(\omega')$ и $C(\varepsilon) = R_y$, завершаем доказательство теоремы 7.5.13. □

Литература

[1] Гарнаев А. Ю., Глускин Е. Д. О поперечниках евклидова шара. Докл. АН СССР. 1984. V. 277, N 5. С. 1048–1052.

[2] Кашин Б. С. О поперечниках октаэдров. Успехи матем. наук. 1975. Т. 30, N 4. С. 251–252.

[3] Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций. Изв. АН СССР. 1977. Т. 41, N 2. С. 334–351.

[4] Кашин Б. С. О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m. Изв. АН Арм. ССР. 1980. Т. 15, N 5. С. 379–394.

[5] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. АФЦ, М., 1999.

[6] Кашин Б. С., Темляков В. Н. Замечание о задаче сжатого измерения. Матем. зам. 2007. Т. 82, N 6. С. 829–837.

[7] Arstein-Avidan S., Giannopoulos A., Milman V. D. Asymptotic geometric analysis. Part I. Amer. Math. Sos., Providence, RI, 2015.

[8] DeVore R. A. Deterministic constructions of compressed sensing matrices. J. Complexity. 2007. V. 23. P. 918–925.

[9] Foucart S., Rauhut H. A mathematical introduction to compressive sensing. Birkhäuser, New York, 2013.

[10] Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems. J. Complexity. 2022. V. 71. Article number 101653.

[11] Kashin B., Szarek S. The Knaster problem and the geometry of high-dimensional cubes. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris Ser. I. 2003. T. 336. P. 931–936.

[12] Kolmogoroff A. Über die beste annäherung von functionen einen gegebenen functionenklasse. Ann. Math. 1936. V. 37, N 1. P. 107–110.

[13] Szarek S. J. On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of l_1^n. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1978. V. 2. P. 691–694.

[14] Temlyakov V. Greedy approximation. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

[15] Wojtaszczyk P. Banach spaces for analysts. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

Глава 8

Теория операторов

И. А. Шейпак

§ 8.1. График оператора и замкнутые операторы

8.1.1. Определение. *Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$. Графиком оператора назовем следующее множество в $H \oplus H$:*

$$\Gamma(A) := \{\{x; Ax\},\ x \in D(A)\}.$$

Определим также *норму графика* равенством $\|x\|_\Gamma^2 := \|x\|^2 + \|Ax\|^2$ и эквивалентную ей норму равенством $\|x\|_\Gamma := \|x\| + \|Ax\|$.

Оператор A ограничен тогда и только тогда, когда исходная норма в H эквивалентна норме графика, т. е. $\|\cdot\|_H \sim \|\cdot\|_\Gamma$ на $D(A)$.

Определим *пространство H_A* так: это область определения оператора A (т. е. $D(A)$), снабженное скалярным произведением

$$(x, y)_A := (x, y) + (Ax, Ay), \quad x, y \in D(A).$$

Пространство H_A является, вообще говоря, предгильбертовым пространством.

8.1.2. Определение. *Оператор A называется замкнутым, если пространство H_A является полным* (*что эквивалентно тому, что график* $\Gamma(A)$ *замкнут в* $H \oplus H$).

Можно дать эквивалентное определение замкнутости оператора на языке последовательностей: если $x_n \in D(A)$ и $x_n \to x$, $Ax_n \to y$, то $x \in D(A)$ и $y = Ax$. Другими словами, для замкнутых операторов корректен предельный переход на области определения, т. е. замкнутые неограниченные операторы с точки зрения предельных переходов близки к ограниченным операторам.

Введем естественные проекции $\pi_1, \pi_2 \colon \Gamma(A) \to H$ графика оператора на исходное пространство H, которые задаются следующими формулами: $\pi_1\{x, y\} = x$, $\pi_2\{x, y\} = y$.

8.1.3. Теорема. *Линейное множество $M \subset H \oplus H$ есть график оператора* $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\pi_1|_M) = \{0\}$.

Доказательство. 1) Если M — график, то $\pi_1(\{x, Ax\}) = x = 0$ равносильно равенству $\{x, Ax\} = \{0, 0\}$. 2) Если $\operatorname{Ker}(\pi_1|_M) = \{0\}$, положим $D(A) := \pi_1(M)$, $A := \pi_2(\pi_1|_M)^{-1}$. □

Если A не замкнут, то можно попробовать рассмотреть $\overline{\Gamma(A)}$. При замыкании $\Gamma(A)$ может возникнуть два варианта.

1) $\overline{\Gamma(A)}$ есть график некоторого оператора (его обозначают $\overline{A}$ и говорят, что A замыкаем. Таким образом $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\overline{A})$ по определению.

2) $\overline{\Gamma(A)}$ не является графиком. Это значит, что топологии в H_A и H не согласованы, т. е. существуют последовательности $\{x_n\} \in D(A)$, что $x_n \to 0$, но $Ax_n \to y \neq 0$. В таком случае говорят, что оператор A не замыкаем. Незамыкаемые операторы — «плохие» операторы.

§ 8.2. Сопряженный оператор

8.2.1. Определение. *Пусть $A \in L(H)$, $\overline{D(A)} = H$. Элемент $y \in H$ входит в $D(A^*)$, если существует такой элемент $h \in H$, что*

$$(Ax, y) = (x, h) \quad \forall\, x \in D(A).$$

При этом $A^* y := h$.

Сделаем следующие замечания:

1) если $\overline{D(A)} \neq H$, то элемент h определяется неоднозначно;

2) $D(A^*) \neq \varnothing$, так как $0 \in D(A^*)$;

3) имеется пример оператора A, что $D(A^*) = \{0\}$.

Рассмотрим также *геометрический подход* к определению сопряженного оператора. Рассмотрим в $H \oplus H$ оператор W, заданный равенством $W\{x, y\} = \{-y, x\}$. Тогда при условии плотности $D(A)$ подпространство $(W\Gamma(A))^{\perp}$ является графиком некоторого оператора, а именно справедлива следующая теорема.

8.2.2. Теорема. *Если $A \in L(H)$, $\overline{D(A)} = H$, то* $(W\Gamma(A))^{\perp} = \Gamma(A^*)$.

Доказательство. Равенство $(Ax, y) = (x, h)$, равносильное равенству $(-Ax, y) + (x, h) = 0$, означает ортогональность элемента $\{-Ax, x\} = W\{x, Ax\} \in W\Gamma(A)$ элементу $\{y, h\} = \{y, A^* y\} \in \Gamma(A^*)$ в $H \oplus H$. □

8.2.3. Следствие. *Оператор A^* линеен и замкнут.*

Линейность A^* очевидна, а ортогональное дополнение всегда замкнуто.

8.2.4. Теорема. *Если оператор A замыкаем, то $(\overline{A})^* = A^*$.*

Доказательство. Следует из соотношений $(W\Gamma(A))^\perp = D(A^*)$ и $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\overline{A})$ и того факта, что для линейного множества Ω имеем $\Omega^\perp = (\overline{\Omega})^\perp$. Действительно: $(W\Gamma(A))^\perp = \left(\overline{W\Gamma(A)}\right)^\perp = \left(W\Gamma(\overline{A})\right)^\perp$, что дает равенство $(\overline{A})^* = A^*$. $\square$

8.2.5. Теорема (Несложное упражнения для самостоятельной работы)**.** $\operatorname{Im} A \perp \operatorname{Ker} A^*$ *и* $H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A^*$.

8.2.6. Лемма. *Пусть $A \in L(H)$. Множество $W(\Gamma(A))^\perp$ есть график линейного оператора $\Leftrightarrow \overline{D(A)} = H$* (*дополнение к теореме* 8.2.2).

Доказательство. Элемент $\{0, h\}$ ортогонален $W(\Gamma(A))$ в точности тогда, когда $h \perp D(A)$ ($h \neq 0 \Leftrightarrow \overline{D(A)} \neq H$). $\square$

8.2.7. Теорема. *Пусть $A \in L(H)$, $\overline{D(A)} = H$. Тогда $\overline{D(A^*)} = H$ $\Leftrightarrow$ A замыкаем. В этом случае $A^{**} = \overline{A}$.*

Доказательство. Так как $W^2 = -I$, то

$$W(\Gamma(A^*)) = W(W(\Gamma(A))^\perp) = (W^2\Gamma(A))^\perp = (\Gamma(A))^\perp.$$

Следовательно, $W(\Gamma(A^*))^\perp = \overline{\Gamma(A)}$. Множество $\overline{\Gamma(A)}$ является графиком оператора в том и только том случае, когда A замыкаем. По определению замыкания оператора $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\overline{A})$, поэтому

$$W(\Gamma(A^*))^\perp = \Gamma(\overline{A}) \tag{8.2.1}$$

С другой стороны, по лемме 8.2.6 множество $W(\Gamma(A^*))^\perp$ является графиком оператора $\Leftrightarrow \overline{D(A^*)} = H$, т.е. равенство (8.2.1) равносильно существованию замыканию оператора A.

Если $\overline{D(A^*)} = H$, то существует оператор A^{**}. Утверждение теоремы получается из (8.2.1) применением теоремы 8.2.2. $\square$

8.2.8. Пример. $H = L_2[0,1]$, $D(A) = C[0,1]$, $(Af)(x) = f(0) \cdot \mathbf{1}$; вычислим оператор A^*. Пусть $\langle v \rangle$ — линейная оболочка v.

Имеем $D(A^*) = \langle 1 \rangle^\perp$, а так как $\operatorname{Ker} A^* \perp \operatorname{Im} A$, то $A^* g = 0$ для всех $g \in D(A^*)$. В самом деле: $(Af, g) = (f, A^* g)$, откуда

$$\int_0^1 f(x)(A^* g)(x)\,dx = f(0)\int_0^1 g(x)\,dx = f(0)(1, g) = 0.$$

§ 8.3. Дефектные числа, спектр оператора

Дефектное число. Если A — замкнутый оператор в H, то его дефектное число задается равенством $d_A = \dim(\overline{\operatorname{Im} A})^{\perp} = \dim(\operatorname{Ker}(A^*))$.

Если есть ограниченный обратный A^{-1} (иначе говоря, $\exists\ c > 0$: $\|Ax\| \geqslant c\|x\|\ \forall\, x \in D(A)$), то d_A есть число условий ортогональности на y, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо (как в теории Фредгольма).

Заметим, что из условия $\exists\, c > 0$: $\|Ax\| \geqslant c\|x\|\ \forall\, x \in D(A)$ следует, что образ оператора A замкнут.

8.3.1. Определение. *Оператор B сильно подчинен оператору A, если $D(B) \supset D(A)$ и есть такие $a \in [0, 1)$, $b \geqslant 0$, что*

$$\|Bx\| \leqslant a\|Ax\| + b\|x\|.$$

8.3.2. Теорема. *Пусть A — замкнутый оператор, существует обратный $A^{-1} \in B(H)$ (т. е. $\exists c > 0$: $\|Ax\| \geqslant c\|x\|\ \forall\, x \in D(A)$), $D(B) \supset D(A)$ и есть такое $a \in (0, 1)$, что $\|Bx\| < a\|Ax\|\ \forall\, x \in D(A)$. Тогда*: 1) *оператор $A+B$ замкнут*; 2) *существует $(A+B)^{-1} \in B(H)$*; 3) $d_{A+B} = d_A$.

Доказательство. 1) По определению оператор B сильно подчинен оператору A. Если $b \leqslant a$, то

$$(1-a)\|x\|_A \leqslant \|x\|_{A+B} \leqslant (1+a)\|x\|_A \quad \forall x \in D(A).$$

Правое неравенство проверяется так:

$$\begin{aligned}\|x\|_{A+B} &= \|x\| + \|(A+B)x\| \leqslant \|x\| + \|Ax\| + \|Bx\| \\ &\leqslant \|x\| + \|Ax\| + a\|Ax\| + b\|x\| \leqslant (1+a)\|x\|_A.\end{aligned}$$

Проверим левое неравенство:

$$\begin{aligned}\|x\|_A &= \|x\| + \|Ax\| = \|x\| + \|(A+B)x - Bx\| \\ &\leqslant \|x\| + \|(A+B)x\| + \|Bx\| \\ &\leqslant \|x\|_{A+B} + a\|Ax\| + b\|x\| \leqslant \|x\|_{A+B} + a\|x\|_A,\end{aligned}$$

откуда $(1-a)\|x\|_A \leqslant \|x\|_{A+B}$. Тогда нормы $\|\cdot\|_A$ и $\|\cdot\|_{A+B}$ эквивалентны на $D(A)$. Поскольку $D(A)$ полно по норме $\|\cdot\|_A$, то оно полно и по норме $\|\cdot\|_{A+B}$. Случай $b > a$ сводится к рассмотренному с помощью замены $A \mapsto qA$, $B \mapsto qB$, где $q = a/b$.

2) Имеем

$$c\|x\| \leqslant \|Ax\| = \|(A+B)x\| + \|Bx\| \leqslant \|(A+B)x\| + a\|Ax\|,$$

откуда $\|(A+B)x\| \geqslant (1-a)\|Ax\| \geqslant (1-a)\|x\|$.

3) Предположим, что $d_{A+B} < d_A$. Тогда существует такой элемент $y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$, что $y \neq 0$ и $y \perp (\operatorname{Im}(A+B))^{\perp}$. Поэтому $y \in \operatorname{Im}(A+B)$, т. е. $y = (A+B)x$, $x \in D(A)$. Так как $y \perp \operatorname{Im} A$, то $(y, Ax) = 0$ и

$$
\begin{aligned}
(Ax, Ax) &= (Ax, Ax) - (y, Ax) = (Ax, Ax) - ((A+B)x, Ax) \\
&= (-Bx, Ax).
\end{aligned}
$$

Если же $d_{A+B} > d_A$, то существует такой элемент $y \in (\operatorname{Im}(A+B))^{\perp}$, что $y \neq 0$ и $y \perp (\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Значит, $y \in \operatorname{Im} A$, т. е. $y = Ax$, $x \in D(A)$. Так как $y \perp \operatorname{Im}(A+B)$, то $((A+B)x, y) = 0$ и

$$
\begin{aligned}
(Ax, Ax) &= (Ax, Ax) - ((A+B)x, y) = (Ax, Ax) - ((A+B)x, Ax) \\
&= (-Bx, Ax).
\end{aligned}
$$

Из соотношения $(Ax, Ax) = (-Bx, Ax)$ следует, что выполнена оценка $\|Ax\|^2 \leqslant \|Ax\| \cdot \|Bx\| \leqslant a\|Ax\|^2$ — противоречие, ибо $a < 1$. $\square$

Дадим следующую классификацию точек комплексной плоскости.

8.3.3. Определение. *Точка регулярного типа*: $\lambda \in \mathbb{C}$ *есть* *точка регулярного типа*, *если на* $\operatorname{Im}(A - \lambda I)$ *существует ограниченный оператор* $(A - \lambda I)^{-1}$;

поле регулярности определим так: $\hat{\rho}(A)$ — *все точки регулярного типа. Для точек регулярного типа определена целочисленная функция* $d_A(\lambda) := d_{A-\lambda I}$.

Регулярные точки: *если* $\lambda \in \hat{\rho}(A)$ *и* $d_A(\lambda) = 0$, *то оператор* $(A - \lambda I)^{-1}$ *лежит в* $B(H)$. *Все такие точки образуют* *резольвентное множество* $\rho(A)$.

Ядро спектра: $\hat{\sigma}(A) := \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(A)$.

Остаточный спектр: $\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus \hat{\sigma}(A)$; *множество* $\sigma_r(A)$ *открыто и состоит из тех точек* $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, *для которых* $d_A(\lambda) \neq 0$.

Отметим свойства: $\sigma_p(A) \subset \hat{\sigma}(A)$, $\sigma_c(A) \subset \hat{\sigma}(A)$, где

$$
\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)}\},
$$

может пересекаться с точечным спектром.

8.3.4. Теорема. *Если* $A \in B(H)$ *замкнут, то* $\hat{\sigma}(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$.

8.3.5. Теорема. *Пусть* A *замкнут,* $\lambda_0 \in \hat{\rho}(A)$, $\|(A - \lambda_0 I)\| \geqslant c\|x\|$. *Если* $|\lambda - \lambda_0| < c$, *то* $\lambda \in \hat{\rho}(A)$ *и для всех таких* λ $d_A(\lambda)$ *постоянна.*

Доказательство. Имеем $A - \lambda I = A - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I$. Считаем $(\lambda - \lambda_0)I$ возмущением $A - \lambda_0 I$, т. е. $(\lambda - \lambda_0)I = B$ из теоремы 8.3.2. Норма возмущения равна $|\lambda - \lambda_0|$, т.е. $\|Bx\| = |\lambda - \lambda_0| \|x\| < c\|x\|$. По теореме 8.3.2 имеем $\lambda \in \hat{\rho}(A)$ и $d_A(\lambda) = d_A(\lambda_0)$. Таким образом, множество $\hat{\rho}(A)$ открыто. Открытое множество распадается на не более чем счетное множество непересекающихся связных открытых множеств (компонент). В каждой компоненте связности $d_A(\lambda_0)$ постоянно (берем открытое покрытие ломанной, соединяющей λ_1 и λ_2, и выбираем конечное подпокрытие). $\square$

§ 8.4. Симметричный оператор, индексы дефекта

8.4.1. Определение. *Оператор A называется симметричным, если $\overline{D(A)} = H$ и $(Ax, y) = (x, Ay)\ \forall\, x, y \in D(A)$.*

Так как $A \subset A^*$, то A допускает замыкание $\overline{A}$ и $\overline{A}^* = A^*$.

8.4.2. Теорема. *Если оператор A замкнут и симметричен, то верхняя полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и нижняя полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda < 0$ принадлежат $\hat{\rho}(A)$.*

Доказательство. Неравенство $\|(A-\lambda I)x\| \geqslant |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|$ влечет оба включения. $\square$

8.4.3. Следствие. *В каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$ дефектное число $d_A(\lambda)$ постоянно.*

8.4.4. Определение. *Положим $n_+(A) := d_A(\lambda)$ для $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $n_-(A) := d_A(\lambda)$ для $\operatorname{Im}\lambda < 0$.*

8.4.5. Пример. $H = L_2[0,1]$, $(Af)(x) = if'(x)$, $D(A) = C_0^\infty[0,1]$.

8.4.6. Следствие. *Пусть A — замкнутый симметричный оператор. Тогда множество $\hat{\sigma}(A)$ вещественно.*

8.4.7. Теорема. *Если $A = A^*$, то $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$ и, следовательно, $\hat{\sigma}(A) = \sigma(A)$.*

Доказательство. Если $A = A^*$, то для $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ имеем равенство $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$, откуда $n_\pm(A) = 0$ и $\lambda \in \rho(A)$. Если $\operatorname{Im}\lambda = 0$ и $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, то $d_A(\lambda) = \dim\operatorname{Ker}(A^* - \lambda I) = \dim\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 0$ и $\lambda \in \rho(A)$. $\square$

8.4.8. Теорема. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор. Тогда $A = A^* \Leftrightarrow n_+(A) = n_-(A) = 0$.*

Доказательство. Необходимость обеспечивает теорема 8.4.7.

Достаточность. Если $n_\pm(A) = 0$, то $\operatorname{Im}(A - iI) = \operatorname{Im}(A + iI) = H$. Пусть $y \in D(A^*)$ и $h := (A^* + iI)y$. Найдем $y_0 \in D(A)$ с $(A + iI)y_0 = h$. Для всех $x \in D(A)$ имеем

$$((A - iI)x, y) = (x, (A^* + iI)y) = (x, (A + iI)y_0) = ((A - iI)x, y_0).$$

Так как $(A - iI)x$ пробегает все H, то $y = y_0 \in D(A)$. $\square$

8.4.9. Пример. $H = L_2[0,1]$, $A_0 f = if'$, $D(A_0) = C_0^\infty[0,1]$. Положим $A := \overline{A_0}$. Известно, что $A_0^* = A^*$.

1) $D(A^*) = \{g \in AC[0,1]\colon g' \in L_2[0,1]\} = W_2^1[0,1]$. Действительно, включение $g \in D(A^*)$ означает, что $g \in L_2[0,1]$ и существует такая функция $g^* \in L_2[0,1]$, что

$$\int_0^1 if'\overline{g}\,dx = \int_0^1 f\overline{g^*}\,dx.$$

При этом $A^*g = g^*$. Получили, что g имеет обобщенную производную $g' = -ig^* \in L_2[0,1]$, откуда следует, что $g \in AC[0,1]$ и $g^* = ig'$ почти всюду. 2) $n_+(A) = n_-(A) = 1$. 3) $D(A) = \{f \in D(A^*)\colon f(0) = f(1) = 0\}$.

§ 8.5. Изометрические и унитарные операторы

8.5.1. Определение. *Оператор V называется изометрическим, если $\|Vx\| = \|x\|$ для всех $x \in D(V)$.*

Положим $I_V := I|_{D(V)}$.

Если $|z| \neq 1$, то $z \in \hat\rho(V)$, поскольку

$$\|(V - zI)x\| \geqslant \big|\|Vx\| - |z| \cdot \|x\|\big| = \big|1 - |z|\big| \cdot \|x\|.$$

Дефектное число изометрического оператора V в точке z определяется как $\dim(\operatorname{Im}(V - zI))^\perp$.

Числа $n_i(V)$ и $n_e(V)$ (для $|z| < 1$ и $|z| > 1$ соответственно) называют *индексами дефекта* изометрического оператора V.

8.5.2. Теорема. *Справедливы равенства*

$$n_i(V) = \dim(\operatorname{Im}(V - zI))^\perp, \quad n_e(V) = \dim(D(V - zI))^\perp.$$

Доказательство. Первое равенство верно по определению. Далее, $\dim(D(V))^\perp = \dim(\operatorname{Im}(I_V))^\perp = d_{I_V}(0)$. При $|z| > 1$ имеем $1 = \|V\| < \|zI_V\| = |z|$. По теореме об устойчивости дефектного числа при возмущении (теорема 8.3.2) получаем, что

$$\dim(D(V))^\perp = d_{I_V}(0) = \dim(\operatorname{Im}(V - zI))^\perp = n_e(V),$$

что завершает доказательство. □

8.5.3. Определение. *Изометрический оператор V называется унитарным, если $D(V) = \operatorname{Im}(V) = H$ (т. е. $n_i(V) = n_e(V) = 0$).*

Преобразование Кэли. Пусть A — замкнутый симметричный оператор с плотной областью определения, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ фиксировано,

$$V := (A - \lambda I)(A - \overline{\lambda} I)^{-1},$$

точнее, $y := (A - \overline{\lambda} I)x \in D(V)$, $Vy := (A - \lambda I)x\ \forall\, x \in D(A)$.

Получили равенства $D(V) = \operatorname{Im}(A - \overline{\lambda}I)$, $\operatorname{Im} V = \operatorname{Im}(A - \lambda I)$.

Так как $A - \overline{\lambda}I$ обратим при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то каждому $y = (A - \overline{\lambda}I)x$ отвечает ровно один Vy, т. е. оператор V определен корректно. При этом $D(V) = \operatorname{Im}(A-\overline{\lambda}I)$, $\operatorname{Im} V = \operatorname{Im}(A-\lambda I)$ (эти множества замкнуты вследствие замкнутости оператора A). Проверим изометричность V ($\lambda = \alpha + i\beta$):

$$\|y\|^2 = \|(A - \overline{\lambda}I)x\|^2 = \|(A - \alpha I)x\|^2 + |\beta|^2 \cdot \|x\|^2,$$

$$\|Vy\|^2 = \|(A - \lambda I)x\|^2 = \|(A - \alpha I)x\|^2 + |\beta|^2 \cdot \|x\|^2.$$

8.5.4. Определение. *Оператор V называют преобразованием Кэли оператора A.*

Отметим следующие свойства оператора V:

1) $1 \notin \sigma_p(V)$. В самом деле, если $y \in D(V)$ и $Vy = y$, то имеем $(A - \lambda I)x = (A - \overline{\lambda}I)x$, откуда $\lambda x = \overline{\lambda}x$, т. е. $x = 0$, а тогда и $y = 0$.

2) $\overline{\operatorname{Im}(V - I)} = H$. В самом деле, если $z \perp \operatorname{Im}(V - I)$, то для всех $y \in D(V)$ имеем $((V-I)y, z) = 0$, откуда $((A-\lambda I)x-(A-\overline{\lambda}I)x, z) = 0$, поэтому $((\overline{\lambda} - \lambda)x, z) = 0$, где $x \in D(A)$. Так как $\overline{D(A)} = H$, то $z = 0$.

Имеется взаимно однозначное соответствие между A и V:

$$(\overline{\lambda} - \lambda)x = (V - I)y, \quad (\overline{\lambda} - \lambda)Ax = (\overline{\lambda}V - \lambda I)y,$$

или в явной форме $Ax = (\overline{\lambda}V - \lambda I)(V - I)^{-1}x$. Так как $\overline{D(A)}=H$, то должно выполняться условие $\overline{\operatorname{Im}(V - I)} = H$. Покажем, что при этом условии изометрический оператор является преобразованием Кэли некоторого замкнутого симметрического оператора.

Действительно, если $Vx = x$, то для всех $z \in D(V)$ имеем

$$((V - I)z, x) = (Vz, x) - (z, x) = (Vz, Vx) - (z, x) = 0.$$

В силу указанного условия получаем $x = 0$. Следовательно, по вектору x из $D(A) = \operatorname{Im}(V - \lambda I)$ значение Ax определено однозначно и выполнено равенство $\overline{D(A)} = H$.

Для квадратичной формы оператора A получаем

$$4\beta^2(Ax, x) = ((\overline{\lambda}V - \lambda I)y, (V - I)y) = 2\alpha\|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(Vy, \lambda y) \in \mathbb{R}.$$

8.5.5. Теорема. *Преобразование Кэли взаимно однозначно отображает множество замкнутых симметрических операторов с плотной областью определения на множество изометрических операторов с условием $\overline{(V - I)} = H$.*

Индексы дефекта: $n_-(A) = n_e(V)$, $n_+(A) = n_i(V)$.

§ 8.6. Расширения симметричных операторов и формулы фон Неймана

Пусть V — изометрический оператор и линейные подпространства $D_0 \subset H \ominus D(V)$, $R_0 \subset H \ominus \operatorname{Im} V$ таковы, что

$$\dim D_0 = \dim R_0 = n_0.$$

Пусть V_0 — какой-либо изометрический оператор $V\colon D_0 \to R_0$ (точнее, $D(V) = D_0$, $\operatorname{Im} V_0 = R_0$). На множестве $D(\tilde{V}) = D(V) \oplus D_0$ рассмотрим оператор $\tilde{V} = V \oplus V_0$.

8.6.1. Теорема. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с плотной областью определения,* $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. *Область определения сопряженного оператора представима в виде*

$$D(A^*) = D(A) \dotplus \operatorname{Ker}(A^* - \lambda I) \dotplus \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I). \qquad (8.6.1)$$

Доказательство. 1) ($\Leftarrow$) Каждое слагаемое в правой (8.6.1) лежит в $D(A^*)$. 2) ($\Rightarrow$) Пусть $y \in D(A^*)$. В соответствии с разложением $H = \operatorname{Im}(A - \lambda I) \oplus \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$ представим $(A^* - \lambda I)y$ в виде

$$(A^* - \lambda I)y = (A - \lambda I)x + (\overline{\lambda} - \lambda)u, \quad x \in D(A),\ u \in \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I).$$

Из этого представления следует, что $(A^* - \lambda I)(y - x - u) = 0$, откуда получаем, что $v := y - x - u \in \operatorname{Ker}(A^* - \lambda I)$, т. е. $y = x + u + v$. Осталось проверить, что сумма прямая. Пусть $x + u + v = 0$. Применив $A^* - \lambda I$, получим $(A - \lambda I)x + (\overline{\lambda} - \lambda)u = 0$. В силу разложения H на ядро и образ, получаем, что $u = 0$ и $(A - \lambda I)x = 0$. Тогда $x = 0$ ($\operatorname{Im} \lambda \neq 0$!), значит, $v = 0$. □

Симметричные расширения. Как обычно, пусть A — замкнутый симметрический оператор с плотной областью определения.

8.6.2. Теорема. *Пусть $D_0 \subset \operatorname{Ker}(A^* - \lambda I)$, $R_0 \subset \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$ — произвольные подпространства с условием*

$$\dim D_0 = \dim R_0.$$

Пусть V_0 — произвольное изометрическое отображение D_0 на R_0. Тогда формулой

$$D(\tilde{A}) := D(A) + (V_0 - I)D_0$$

задается область определения некоторого замкнутого симметричного расширения $\tilde{A}$ оператора A. Любое такое расширение имеет указанное выше представление.

Доказательство. Имеем

$$D_0 \subset H \ominus D(V) = H \ominus \operatorname{Im}(A - \overline{\lambda} I) = \operatorname{Ker}(A^* - \lambda I),$$

аналогично $R_0 \subset \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} D(\tilde{A}) &= (\tilde{V} - I)D(\tilde{V}) = (\tilde{V} - I)(D(V) \oplus D_0) \\ &= (V - I)D(V) \dotplus (V_0 - I)D_0 = D(A) + (V_0 - I)D_0, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Если $u \in \operatorname{Ker}(A^* - \lambda I)$, то $A^* u = \lambda u$, $v := V_0 u \in \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$, т. е. $\tilde{A}(v) = \tilde{A} V_0 u = \overline{\lambda} v$. Поэтому получаем такой результат.

8.6.3. Следствие. *Если $y \in D(\tilde{A})$, т. е. $y = x + (V_0 - I)u$, $u \in D_0$, то $\tilde{A} y = Ax - \lambda u + \overline{\lambda} v$.*

8.6.4. Пример (продолжение примера 8.4.9)**.** Возьмем $\lambda = i$. Тогда

$$D_0 = \operatorname{Ker}(A^* - iI) = \langle \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}} e^x \rangle,$$

$$V_0 D(V_0) = \operatorname{Ker}(A^* + iI) = \langle \tfrac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2-1}} e^{-x} \rangle, \ V_0 \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}} e^x = \gamma \tfrac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2-1}} e^{-x},$$

где $|\gamma| = 1$, так как V_0 изометрический (даже унитарный). После вычислений получаем: $D(\tilde{A}) = \{y \in A^* \colon y(0) = \theta y(1), \text{ где } |\theta| = 1\}$.

8.6.5. Определение. *Сопряженно-линейное отображение C, сохраняющее норму, называется инволюцией, если $C^2 = I$.*

8.6.6. Теорема (фон Нейман)**.** *Пусть A — симметрический оператор A и пусть существует инволюция $C \colon D(A) \to D(A)$ со свойством $AC = CA$. Тогда A имеет равные индексы дефекта и потому обладает самосопряженными расширениями.*

Доказательство. Так как $C^2 = I$, то $CD(A) = D(A)$. Пусть $x_+ \in \operatorname{Im}(A + iI)^\perp = \operatorname{Ker}(A^* - iI)$, $y \in D(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= ((A^* - iI)x_+, y) = (x_+, (A + iI)y) = (Cx_+, C(A + iI)y) \\ &= (Cx_+, (A - iI)Cy) = ((A^* + iI)Cx_+, Cy). \end{aligned}$$

Тогда $Cx_+ \in \operatorname{Ker}(A^* + iI)$, $C \colon \operatorname{Ker}(A^* - iI) \to \operatorname{Ker}(A^* + iI)$. Аналогично $C : \operatorname{Ker}(A^* + iI) \to \operatorname{Ker}(A^* - iI)$. Так как C сохраняет норму, то $\dim \operatorname{Ker}(A^* - iI) = \dim \operatorname{Ker}(A^* + iI)$. □

8.6.7. Пример (проблема моментов Гамбургера)**.** Последовательность вещественных чисел $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ служит моментами положительной меры μ: $a_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^n \, d\mu$ тогда и только тогда, когда для всех чисел $N \in \mathbb{N}$ и $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{C}$ имеем $\sum_{m,n=0}^N a_{n+m} \beta_n \overline{\beta_m} \geqslant 0$.

Доказательство. 1) Пусть μ — положительная мера, для которой числа a_n являются моментами. Тогда

$$\sum_{m,n=0}^{N} a_{n+m}\beta_n\overline{\beta_m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\sum_{k=0}^{N} \beta_k x^k\Big|^2 \, d\mu \geqslant 0.$$

2) Обратно, пусть выполнено условие. Определим $\mathcal{P}$ — множество полиномов на $\mathbb{R}$ с комплексными коэффициентами. Определим на $\mathcal{P}$ полуторалинейную форму (скалярное произведение):

$$\left(\sum_{m=0}^{N} \alpha_m x^m, \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n\right) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} a_{n+m}\alpha_m\overline{\beta_n}.$$

Эта форма неотрицательна. Пусть $\mathcal{Q} := \{q \in \mathcal{P} \colon (q,q) = 0\}$ и $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, полученное пополнением фактопространства $\mathcal{P}/\mathcal{Q}$ относительно введенного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим отображение $A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, определяемой формулой

$$A\colon \sum_{m=0}^{N} \alpha_m x^m \mapsto \sum_{m=0}^{N} \alpha_m x^{m+1}.$$

Проверяется, что A симметричный оператор, отображающий $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{Q}$, поскольку в силу неравенства Коши – Буняковского

$$(Aq, Aq) = |(A^2q, q)| \leqslant \sqrt{(A^2q, A^2q)}\sqrt{(q,q)} = 0.$$

Это свойство позволяет определить симметричный оператор $\hat{A}$ в $\mathcal{H}$ с $D(\hat{A}) = \mathcal{P}/\mathcal{Q}$. Оператор $\hat{A}$ коммутирует с инволюцией — стандартным комплексным сопряжением $Cp = \overline{p}$ на $\mathcal{H}$, следовательно, оператор $\hat{A}$ допускает некоторое самосопряженное расширение $\tilde{A}$. Пусть E_λ — его спектральная функция, $\mu(\Omega) := (E(\Omega)1, 1)$. Тогда интеграл от x^n по мере μ равен $(\tilde{A}^n 1, 1) = (x^n, 1) = a_n$. □

Единственность меры μ связана с единственностью самосопряженного расширения оператора $\hat{A}$.

§ 8.7. Спектральная теорема для унитарных операторов

8.7.1. Определение. *Пусть $\mathcal{P}$ — множество таких многочленов $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$, что $|c_{-n}| + |c_n| \neq 0$ при $n \geqslant 1$.*

Положим $p^+(z) := \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_{-k}} z^k = \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{z^{-k}}} = \overline{p(\overline{z^{-1}})}$.

Заметим, что для $|z| = 1$ имеем $p^+(z) = \overline{p(z)}$.

8.7.2. Лемма. *Если $p \in \mathcal{P}$ и для всех z с $|z| = 1$ имеем $p(z) \geqslant 0$, то существует такой многочлен $q \in \mathcal{P}$, что $p(z) = q(z) \cdot q^+(x)$.*

Доказательство. Если для $|z| = 1$ выполнено $p(z) \in \mathbb{R}$, то $p^+(z) = \overline{p(z)} = p(z)$. Рассмотрим $z^n p(z) = c_{-n} + c_{-n+1} z + \cdots + c_n z^{2n}$. Из предыдущей строчки и определения $\mathcal{P}$ следует, что $c_{-n} \cdot c_n \neq 0$, т. е. $z = 0$ не является нулем многочлена $z^n p(z)$. Если z_j нуль многочлена $p(z)$, то $1/\overline{z_j}$ тоже корень многочлена $p(z)$. Если z_j лежит на единичной окружности, то это двукратный корень. Тогда все нули можно разбить на пары так, что справедливо представление

$$z^n p(z) = c_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \prod_{j=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_j}} \right).$$

Положим $q(z) := \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$. Тогда $q^+(z) = \prod_{j=1}^{n} \overline{(\overline{z}{-}1 - z_j)}$ равно $z^{-n} \prod_{j=1}^{n} (1 - z\overline{z_j})$. С другой стороны,

$$\prod_{j=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_j}} \right) = \frac{\prod_{j=1}^{n} (z\overline{z_j} - 1)}{\prod_{j=1}^{n} \overline{z_j}} = \frac{(-1)^n z^n q^+(z)}{\prod_{j=1}^{n} \overline{z_j}}.$$

Таким образом, $p(z) = Cq(z) \cdot q^+(z)$, где $C = (-1)^n \left(\prod_{j=1}^{n} \overline{z_j} \right)^{-1}$. Так как $p(z) \geqslant 0$ при $|z| = 1$, то $C \geqslant 0$ (в самом деле, $p(z) = Cq^+(z)q(z)$, а для $z \in \mathbb{T}$ имеем $p(z) = C|q|^2(z)$). Включим $\sqrt{C}$ в $q(z)$. $\square$

Зададим отображение $j\colon \mathcal{P} \to \mathcal{B}(H)$ так: $j(p) = p(V)$; при этом $j(1) = I$, $j(z) = V$, $p^+(V) = (p(V))^*$ (так как $j\left(\frac{1}{z}\right) = V^{-1} = V^*$), $j(p \cdot q) = p(V) \cdot q(V)$, $j(\alpha p + \beta q) = \alpha p(V) + \beta q(V)$. Положим

$$\|p\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

Заметим, что $\mathcal{P}$ плотно в $C(\mathbb{T})$ по норме $\|\cdot\|_{C(\mathbb{T})}$.

8.7.3. Лемма. *Если $p(z) \geqslant 0$ при $|z| = 1$, то $p(V) \geqslant 0$.*

Доказательство. По лемме 8.7.2 имеем $p(z) = q^+(z)q(z)$ и

$$(p(V)x, x) = (q^+(V)q(V)x, x) = ((q(V))^* q(V)x, x) = \|q(V)x\|^2 \geqslant 0,$$

как объявлено. $\square$

8.7.4. Лемма. *Верна оценка $\|p(V)\|_H \leqslant \|p\|_{C(\mathbb{T})}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $p_1(z) := \|p\|^2 - p^+(z)p(z)$. Очевидно, что $p_1 \in \mathcal{P}$ и $p_1(z) \geqslant 0$ для всех $z \in \mathbb{T}$. Поэтому

$$p_1(V) = I \cdot \|p\|^2 - p^+(V)p(V) \geqslant 0$$

откуда $\|p(V)\|_H^2 \leqslant \|p\|_{C(\mathbb{T})}^2$. Из леммы 8.7.3 следует утверждение. □

Пусть $x, y \in H$ — фиксированные векторы, для $p \in \mathcal{P}$ положим

$$F_{x,y}(p) := (p(V)x, y).$$

Так как $|F_{x,y}(p)| \leqslant \|p(V)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \leqslant \|p\|_{C(\mathbb{T})} \cdot \|x\| \cdot \|y\|$, то линейный функционал $F_{x,y}$ непрерывен на $\mathcal{P}$. По непрерывности он продолжается до ограниченного функционала на $C(\mathbb{T})$ с той же оценкой: $|F_{x,y}(p)| \leqslant \|p\|_{C(\mathbb{T})} \cdot \|x\| \cdot \|y\|$. Следовательно, существует такая борелевская мера $\mu_{x,y}$ на $\mathbb{T}$, что

$$F_{x,y}(p) = (p(V)x, y) = \int_{\mathbb{T}} p(z)\, d\mu_{x,y}(z). \qquad (8.7.1)$$

Интеграл можно продолжить и на $p \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ (класс ограниченных борелевских функций на $\mathbb{T}$). Если $p_n(z) \to p(z)$ в каждой точке $z \in \mathbb{T}$ равномерно ограничены, то $p_n(V) \rightharpoonup p(V)$. Из слабой сходимости $p_n^+(V)p_n(V)$ к $p^+(V)p(V)$ следует сильная сходимость $p_n(V)$ к $p(V)$.

Для произвольного борелевского множества $\Omega \in \mathbb{T}$ оператор $E(\Omega)$ можно определить двумя путями.

1) Форма $\mu_{x,y}(\Omega)$ полуторалинейна (линейна по x и сопряженно-линейна по y, что следует из (8.7.1)) и ограничена:

$$|\mu_{x,y}(\Omega)| \leqslant |\mu_{x,y}(\mathbb{T})| = \|F_{x,y}\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Поэтому определен такой оператор $E(\Omega)$, что $\mu_{x,y}(\Omega) =: (E_\Omega x, y)$.

2) Характеристическую функцию борелевского множества $\Omega \in \mathbb{T}$ приблизим (поточечно) многочленами $p_n \in \mathcal{P}$ (непрерывную функцию можно приблизить равномерно, а борелевскую ограниченную только поточечно). Тогда в (8.7.1) средняя часть слабо сходится к некоторому оператору, а правая часть по теореме Лебега сходится к интегралу от $\chi_\Omega(z)$ по $\mathbb{T}$ по мере $\mu_{x,y}$, т. е. получаем

$$F_{x,y}(\chi_\Omega) = (E_\Omega x, y) = \int_\Omega d\mu_{x,y}(z).$$

Если идти по первому пути и использовать, что $\chi^2 = \chi$, то $E(\Omega)$ проектор. Так как функция χ_Ω вещественна, то ее можно приближать такими многочленами $p_n \in \mathcal{P}$, что $p_n = p_n^+$. Тогда $(E(\Omega))^* = E(\Omega)$.

По второму пути получаем

$$\int p\,d\mu_{x,x} = (p(V)x,x) = \overline{(p^+(V)x,x)} = \overline{\int p^+\,d\mu_{x,x}} = \int p\,\overline{d\mu_{x,x}}.$$

Значит, квадратичная форма $(E(\Omega)x,x) = \mu_{x,x}(\Omega)$ вещественна, а поэтому $E(\Omega)$ самосопряжен. Пусть $p,q \in \mathcal{P}$, $x,y \in H$. Тогда

$$\int pq\,d\mu_{x,y} = (p(V)q(Y)x,y) = \int p\,d\mu_{q(V)x,y}.$$

Следовательно, для любого $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ имеем

$$\int q\chi_\Omega\,d\mu_{x,y} = \int_\Omega q\,d\mu_{x,y} = \mu_{q(V)x,y}(\Omega).$$

Для правой части используем представление $\mu_{x,y}(\Omega) = (E_\Omega x,y)$:

$$\mu_{q(V)x,y}(\Omega) = (E(\Omega)q(V)x,y) = (q(V)x,E(\Omega)y) = \int q\,d\mu_{x,E(\Omega)y}.$$

Тогда для произвольных $\Omega_1,\Omega_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ получаем

$$\mu_{x,E(\Omega_1)y}(\Omega_2) = \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2),$$

т. е. справедливо равенство

$$(E(\Omega_1)E(\Omega_2)x,y) = (E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x,y).$$

Интегральное представление V. Из (8.7.1) получаем

$$(Vx,y) = \int z\,d\mu_{x,y}(z) = \left(\int z\,dE(z)x,y\right),$$

т. е. равенство заведомо выполнено в слабой операторной топологии. Равенство справедливо и в сильной операторной топологии (см. замечание).

§ 8.8. Интегральное представление самосопряженных операторов

Пусть $A = A^*$, V — преобразование Кэли оператора A, соответствующее $\lambda = i$:

$$V = (A - iI)(A + iI)^{-1}.$$

Оператор A восстанавливается по V формулой

$$A = -i(V+I)(V-I)^{-1}, \quad D(A) = \operatorname{Im}(V-I).$$

Пусть E_V — спектральная мера для V. Так как $1 \notin \sigma_p(V)$, то $E_V(1)=0$. Полюс дробно-линейной функции $\varphi(z) := -i\dfrac{z+1}{z-1}$ не принадлежит множеству $\sigma_p(V)$, поэтому, положив $z = e^{it}$, имеем

$$A = \int_{\mathbb{T}} \varphi(z)\, dE_V(z) = -\int_{[0,2\pi)} i\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}\, dE_V(t) = -\int_{[0,2\pi)} \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) dE_V(t).$$

Определим спектральную функцию оператора A так: для всякого борелевского множества $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ положим $E_A(\Omega) = E_V(\varphi^{-1}(\Omega))$, $\varphi\colon \mathbb{T} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE(\lambda)$$

§ 8.9. Расширение полуограниченных операторов

Рассмотрим ограниченные операторы.

8.9.1. Теорема. *Пусть A — самосопряженный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H, H_0 — замкнутое подпространство. Рассмотрим множество самосопряженных операторов*

$$\mathcal{Q} := \{C \in B(H)\colon C \leqslant A,\ \operatorname{Im} C \subset H_0\}.$$

Тогда в $\mathcal{Q}$ существует максимальный оператор A_{H_0}, т. е. $C \leqslant A_{H_0}$ для всех $C \in \mathcal{Q}$. При этом

$$A_{H_0} = A^{1/2} P_L A^{1/2}, \quad L := \{z \in H\colon z \perp A^{1/2}(H_1)\}.$$

Доказательство. Положим $H_1 := H_0^{\perp}$. По определению множества $\mathcal{Q}$ для всех $x \in H$ и $y \in H_1$ выполнено равенство $(Cx, y) = 0$. Тогда для всех $y \in H_1$ имеем

$$\begin{aligned}(Cx, x) &= (Cx, x) - (Cx, y) = (Cx, x - y) = (x, C(x - y)) \\ &= (x - y, C(x - y)) = (C(x - y), (x - y)) \\ &\leqslant (A(x - y), (x - y)) = \|A^{1/2}(x - y)\|^2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(Cx, x) \leqslant \inf_{y \in H_1} \|A^{1/2}(x - y)\|^2.$$

Возьмем ортогональный проектор P_L на L и получим

$$(Cx, x) \leqslant \|P_L A^{1/2} x\|^2 = (P_L A^{1/2} x, P_L A^{1/2} x) = (A^{1/2} P_L A^{1/2} x, x).$$

Докажем принадлежность оператора $A^{1/2} P_L A^{1/2}$ множеству $\mathcal{Q}$. Очевидно, что $A^{1/2} P_L A^{1/2} \leqslant A$. По определению L элемент z лежит в L, если $(z, A^{1/2} y) = 0$ при $y \in H_1$, т. е. $(A^{1/2} z, y) = 0$, иначе говоря, $A^{1/2} z \in H_0$. Следовательно, $\operatorname{Im}(A^{1/2} P_L A^{1/2}) \subset H_0$.

Установим некоторые свойства оператора A_{H_0}. Рассмотрим пространство $H_A := H_0 \cap \mathrm{Im}(A^{1/2})$. Из представления оператора A_{H_0} следует, что

$$\mathrm{Im}(A_{H_0}) \subset H_A.$$

Множество L не изменится, если H_0 заменить на $\overline{H_A}$, таким образом, $A_{H_0} = A_{\overline{H_A}}$. Заметим, что $A_{H_0} = 0 \Leftrightarrow H_A = \{0\}$. Достаточно проверить, что $A_{H_0} \neq 0$, если $H_A \neq \{0\}$. Если $h \in H_A$, $h \neq 0$, то $h = A^{1/2}z$. Нормируем h так, что $\|z\| = 1$; тогда получим $(\forall x \in H)$

$$|(x,h)|^2 = |(x, A^{1/2}z)|^2 = |(A^{1/2}x, z)|^2 \leqslant \|A^{1/2}x\|^2 = (Ax, x).$$

Таким образом, оператор $C_h x := (x,h)h$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}$, ибо $(C_h x, x) = (x,h)(h,x) = |(x,h)|^2$. Равенство $A_{H_0}x = Ax$ верно для тех и только тех $x \in H$, для которых $Ax \in H_0$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\|P_L A^{1/2}x\|^2 &= (P_L A^{1/2}x, P_L A^{1/2}x) = (A^{1/2} P_L A^{1/2}x, x)\\ &= (A_{H_0}x, x) = (Ax, x) = \|A^{1/2}x\|^2,\end{aligned}$$

а из этого равенства следует, что $P_L A^{1/2}x = A^{1/2}x$, т. е. $A^{1/2}x \in L$. Вектор $y := A^{1/2}x$ входит в L в точности тогда, когда $A^{1/2}y \in H_0$, но $A^{1/2}y = Ax$, т. е. $Ax \in H_0$.

Если существует ограниченный обратный A^{-1}, то оператор A_{H_0}, рассматриваемый только на H_0, имеет там обратный оператор и

$$A_{H_0}^{-1}x = P_{H_0}A^{-1}P_{H_0}x \quad \forall\, x \in H_0$$

В самом деле, по доказанному $(A_{H_0}x, x) = (Ax, x)$ при $x \in A^{-1}H_0$. Подставив $x = A^{-1}y$, где $y \in H_0$, получим

$$(A_{H_0}A^{-1}y, A^{-1}y) = (AA^{-1}y, A^{-1}y) \Leftrightarrow (A^{-1}A_{H_0}A^{-1}y, y) = (A^{-1}y, y).$$

Представляя здесь $y = P_{H_0}z$, $z \in H$ и пользуясь тем, что

$$A_{H_0}z = A_{H_0}P_{H_0}z = P_{H_0}A_{H_0}z,$$

получим

$$(RA_{H_0}Ry, y) = (Ry, y), \tag{8.9.1}$$

где через R мы обозначили оператор, действующий в H_0 и определяемый там равенством $Ry := P_{H_0}A^{-1}P_{H_0}y = P_{H_0}A^{-1}y$, $y \in H_0$. Так как $(Ry, y) = (A^{-1}y, y) \geqslant l^{-1}(y, y)$, где $y \in H_0$, $l = \|A\|$, то существует ограниченный обратный оператор R^{-1} и, совершая в (8.9.1) подстановку $y = R^{-1}z$ $(z \in H_0)$, получим $A_{H_0}z = R^{-1}z$. □

Глава 9

Полугруппы операторов

Шкаликов А. А.

§ 9.1. Введение

Нетрудно показать, что если непрерывная скалярная функция $f(t)$ обладает свойством $f(t)f(s) = f(t+s)$ ($t, s \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^+$), то она допускает представление

$$f(t) = e^{\alpha t}, \quad \alpha = \mathrm{const}.$$

Если речь идет о матриц-функциях в пространстве $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$, то свойство $f(t)f(s) = f(t+s)$ также влечет представление

$$f(t) = e^{tT},$$

где T — линейный оператор в $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$ (т.е. матрица), при этом операторная экспонента определяется соотношением

$$e^{tT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k T^k}{k!}.$$

Здесь ряд сходится по норме пространства $\mathbb{C}^n$ равномерно на любом промежутке вещественной оси, а поэтому определяет линейный оператор. Этот ряд можно почленно дифференцировать, и при любом $x_0 \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Tu(t), \qquad u(t) = e^{tT}x_0, \\ u(0) = x_0. \end{cases} \tag{9.1.1}$$

Тем самым, функция $u(t) = e^{tT}x_0$ является решением задачи Коши (9.1.1), причем можно показать, что это решение единственно.

Ясно, что очень полезно иметь обобщение операторной экспоненты и возможность решения задачи Коши в случае гильбертова, банахова или локально выпуклого топологического пространства X. Это легко сделать, если линейный оператор T в соответствующем пространстве ограничен. Тогда операторную экспоненту e^{tT} можно определить тем же рядом Тейлора и проверить равенство $e^{(t+s)T} = e^{tT}e^{sT}$. Но для неограниченных операторов такой подход не пройдет. При изучении уравнений математической физики мы имеем дело именно с неограниченными операторами, поэтому построение экспоненты от неограниченного оператора представляет особый интерес.

Далее для гильбертова пространства резервируем обозначение H, а для банахова X. Ограничиваясь поначалу случаем гильбертова пространства, заметим следующее. Пусть $A = A^*$ — неограниченный самосопряженный оператор в H. Тогда спектр A вещественен, а функция

$$f_t(s) = e^{its}$$

ограничена на всей вещественной оси. Числовая функция $g(s) = e^{-ts}$ при $t \geqslant 0$ ограничена на полуоси $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ (здесь s — переменная, а t — параметр). Пользуясь спектральной теоремой для неограниченных самосопряженных операторов, мы можем однозначно определить операторные функции ($s \to A$)

$$f_t(A) = e^{itA}, \;\; t \in \mathbb{R}, \qquad g_t(A) = e^{-tA}, \;\; t \in \mathbb{R}^+,$$

если во втором случае кроме самосопряженности выполнено условие $A \geqslant 0$ (см., например, [4, теорема VIII.5]). В этом случае спектр оператора A лежит в $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ и спектральная теорема также работает (для ее применения нужно, чтобы соответствующая скалярная функция была ограничена на спектре). Здесь мы используем спектральную теорему в терминах функционального исчисления, получая при этом сохранение мультипликативных свойств соответствующих операторфункций

$$e^{i(t+s)A} = e^{itA}e^{isA}, \;\; e^{-(t+s)A} = e^{-tA}e^{-sA}$$

Это хороший пример демонстрации значимости спектральной теоремы.

Наша дальнейшая цель — определить операторную экспоненту в банаховом пространстве (это можно сделать и в локально выпуклых топологических пространствах пространствах, но мы не будем этим заниматься). При этом мы хотим реализовать эту цель для максимально широкого класса неограниченных операторов. Более того, мы найдем необходимые и достаточные условия для оператора в терминах его резольвенты, чтобы соответствующая операторная экспонента был корректно определена. Конечно, мы не забудем при этом задачу Коши (9.1.1) и покажем, что если операторная экспонента e^{tT} корректно определена, то задача Коши (9.1.1) однозначно разрешима при любом начальном условии x_0 из области определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T.

§ 9.2. Сильно непрерывные полугруппы, генератор полугруппы и условия Хилле – Иосиды

2.1. Будем изучать полугруппы операторов в банаховом пространстве X. Алгебру ограниченных операторов в X обозначим через $\mathcal{L}(X)$.

9.2.1. Определение. *Пусть* $U(t)$ *— семейство операторов, определенных при* $t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, *причем* $U(t) \in \mathcal{L}(X)$ *при всех* $t \geqslant 0$.

Это семейство называем сильно непрерывной полугруппой (*или* C_0*-полугруппой*), *если*

1) $U(0) = 1$ *— единичный оператор и* $U(t+s) = U(t)U(s)$ $\forall\, t, s \geqslant 0$;

2) *Орбиты* $U_x(t) := U(t)x$ *непрерывны в норме пространства* X *при каждом фиксированном* $x \in X$ (эквивалентно: *семейство* $U(t)$ *сильно непрерывно на* $[0, \infty)$).

Термин C_0 не связан с понятием сильной непрерывности, а связан с понятием *суммируемости по Чезаро порядка нуль*. Этот термин также часто используется в литературе, и исторически он возник благодаря связи с теорией суммируемости рядов.

9.2.2. Предложение. *Найдутся такие постоянные* $M > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *что*

$$\|U(t)\| \leqslant M e^{\beta t} \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{9.2.1}$$

Доказательство. Покажем, что семейство $U(t)$ равномерно ограничено на $[0, 1]$ по операторной норме. При любом $x \in X$ функция $U(t)x$ непрерывна по норме X, а потому ограничена по $t \in [0, 1]$ некой константой c_x, т. е.

$$\|U(t)x\| \leqslant c_x$$

независимо от $t \in [0, 1]$. В силу теоремы Банаха – Штейнгауза, найдется постоянная M, такая что

$$\|U(t)\| \leqslant M \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Если $[s]$ и $\{s\}$ — целая и дробная части числа s, то

$$\|U(t)\| \leqslant \|(U(1))^{[t]}\, U(\{t\})\| \leqslant M e^{\beta t}$$

при некотором $\beta \in \mathbb{R}$. □

Из этой оценки следует, что существует предел

$$\omega = \varlimsup_{t \to \infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{t} \leqslant \beta,$$

который называется *типом* C_0-полугруппы $U(t)$ (нетрудно показать, что существует не только верхний, но и обычный предел, см. [2, гл. IX.1]).

9.2.3. Предложение. *Фигурирующее в определении C_0-полугруппы условие* 2) *непрерывности орбит при всех* $t \geqslant 0$ *можно заменить условием их непрерывности справа в точке* $t = 0$.

Доказательство. (Ср. [6, п. 2.5.3]). При $t \geqslant 0$ и $0 < \delta \to 0$ имеем

$$\|U(t+\delta)x - U(t)x\| \leqslant \|U(t)\| \, \|(U(\delta) - 1)x\| \to 0, \quad x \in X,$$

поскольку семейство $U(t)$ сильно непрерывно в нуле. Тем самым, отображение $U(t)$ непрерывно справа при всех $t \geqslant 0$.

Для доказательства непрерывности слева покажем, что семейство $U(t)$ равномерно ограничено на любом компакте. Сначала покажем, что семейство ограничено на интервале $[0, \varepsilon]$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$. Предположим, что это неверно. Тогда найдется последовательность $\varepsilon_n \to 0$, такая, что $\|U(\varepsilon_n)\| \to \infty$. Следовательно, найдется элемент $x \in X$, такой, что $\|U(\varepsilon_n)x\| \to \infty$ (иначе получаем противоречие с принципом равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза). Но последнее соотношение противоречит сильной непрерывности орбиты в нуле. Следовательно, семейство $U(t)$ ограничено на интервале $[0, \varepsilon]$, а тогда, повторив прием из предложения 9.2.2, получим ограниченность семейства на каждом отрезке $[0, t_1]$. Теперь в любой точке $t \in (0, t_1)$ при $\delta \in (0, t)$, $\delta \to 0$ из соотношения

$$\|U(t-\delta)x - U(t)x\| \leqslant \|U(t-\delta)\| \, \|(U(\delta)-1)x\| \leqslant M \, \|(U(\delta)-1)x\| \to 0$$

получаем сильную непрерывность слева. □

2.2. Рассмотрим в правой окрестности нуля семейство операторов

$$T_t = \frac{U(t) - 1}{t}, \quad t \in (0, \varepsilon).$$

Предельный оператор T при $t \to +0$ можно рассматривать как производную оператор-функции $U(t)$ в нуле. Конечно, $u\text{-}\lim_{t\to+0} T_t$ вовсе не обязан существовать (здесь $u\text{-}\lim$ (uniform) понимается как предел по операторной норме). Если же он существует, то легко показать, что $U(t) = e^{tT}$, т.е. дело сводится к простому случаю, когда семейство $U(t)$ порождается ограниченным оператором, а экспонента понимается как ряд Тейлора. Но можно рассмотреть линеал $\mathcal{D}(T) \subset X$, состоящий из всех векторов $x \in X$, для которых существует

$$s\text{-}\lim_{t\to+0} T_t x =: z.$$

Здесь $s\text{-}\lim$ (strong) понимается в сильном смысле на векторах x из подпространства $\mathcal{D}(T)$. Ясно, что $\mathcal{D}(T)$ есть линейное подмножество в X, этот линеал назовем *областью определения* предельного оператора T, определяемого равенством

$$Tx = z.$$

Этот оператор называют *производящим оператором*, или *генератором полугруппы* $U(t)$. Используется также термин *инфинитезимальный* оператор. Полугруппа с генератором T обозначается через e^{tT}.

Из определения вовсе не следует, что генератор C_0-полугруппы определен хотя бы на одном ненулевом векторе $x \in X$. Но оказывается, что генератор T определен для достаточно широкого множества векторов $\mathcal{D}(T)$, которое всегда плотно в X. При этом сам оператор T обладает непустым резольвентным множеством, а потому замкнут. Сформулируем основные свойства генератора T в следующей теореме.

9.2.4. Теорема. *Пусть $U(t)$ сильно непрерывная полугруппа, тем самым, при некоторых M и β выполнена оценка* (9.2.1). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Область определения $\mathcal{D}(T)$ генератора T плотна в X.*

(ii) *Генератор полугруппы — оператор T — замкнут.*

(iii) *Если $x \in \mathcal{D}(T)$, то $U(t)x \in \mathcal{D}(T)$, функция $U_x = U(t)x$ дифференцируема при $t \geqslant 0$, причем*

$$\frac{d}{dt}U(t)x = U(t)Tx = TU(t)x. \tag{9.2.2}$$

В частности, для любого $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ функция $U(t)x_0$ доставляет единственное решение задачи Коши (9.1.1). *Здесь эта функция принимает значения в пространстве X (вместо $\mathbb{C}^n$).*

(iv) *Полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ принадлежит резольвентному множеству оператора T, а его резольвента подчинена оценке*

$$\| (\lambda - T)^{-n} \| \leqslant \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \beta)^n} \quad \forall\, \lambda:\ Re\,\lambda > \beta, \ \ n = 1, 2, \ldots, \tag{9.2.3}$$

где постоянная M не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

Условия (9.2.3) на резольвенту оператора T называются условиями Хилле – Иосиды. Они независимо возникли в работах Хилле [7] и Иосиды [10], которые доказали также обратное утверждение.

9.2.5. Теорема. *Пусть T — замкнутый, плотно определенный оператор, причем полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ принадлежит его резольвентному множеству и выполнены оценки на резольвенту* (9.2.3). *Тогда он является генератором C_0-полугруппы $U(t) = e^{tT}$, для которой выполнены оценки* (9.2.1).

9.2.6. Замечание. Отметим, что при доказательстве обратной теоремы будут использоваться оценки (9.2.3) только на вещественной оси при $\lambda > \beta$. Это говорит о том, что оценки (9.2.3) на вещественной оси при $\lambda > \beta$ и в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ эквивалентны.

§ 9.3. Доказательство теоремы 9.2.4

3.1. Приведем доказательство утверждения (i).

Рассмотрим семейство вектор-функций (сглаженных орбит)

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t U(s)x\,ds, \quad x \in X,\ t \in [0, \varepsilon)$$

(часто этот сглаживающий оператор называют оператором Стеклова). Так как вектор-функция $U(s)x$ непрерывна по переменной s в окрестности нуля, то

$$U(s)x = x + o(1),$$

где $o(1)$ — бесконечно малая вектор-функция (в норме пространства X) при $s \to +0$. Следовательно,

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t (x + o(1))\,ds = x + o(1) \ \to\ x \tag{9.3.1}$$

при $t \to +0$. Таким образом, предложение будет доказано, если показать, что $x_t \in \mathcal{D}(T)$ $\forall\, t > 0$. Имеем согласно определению ($h > 0$)

$$\begin{aligned}
T_h x_t =&\frac{1}{h}\left(U(h)x_t - x_t\right) = \frac{1}{th}\left(\int_0^t U(s+h)x\,ds - \int_0^t U(s)x\,ds\right)\\
=&\frac{1}{th}\left(\int_h^{t+h} U(\xi)x\,d\xi - \int_0^t U(s)x\,ds\right)\\
=&\frac{1}{t}\biggl(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} U(s)x\,ds + \frac{1}{h}\int_h^t U(s)x\,ds\\
&- \frac{1}{h}\int_h^t U(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h U(s)x\,ds\biggr).
\end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые в последней сумме сокращаются. Первое слагаемое в силу непрерывности $U(s)$ в точке t стремится в норме X при $h \to 0$ к $U(t)x$, а четвертое стремится к x (так же, как в соотношении (9.3.1)). Следовательно,

$$T_h x_t \to \frac{U(t)x - x}{t} \quad \text{при} \ \ h \to +0.$$

Поэтому, согласно определению, $x_t \in \mathcal{D}(T)$.

3.2. Приведем доказательство утверждения (iii).

Из определения полугруппы следует, что операторы $U(h)$ и $U(t)$ коммутируют при всех $h, t \geqslant 0$. Поэтому операторы T_h и $U(t)$ также коммутируют ($h > 0$):

$$T_h U(t)x = U(t)T_h x. \tag{9.3.2}$$

Если $x \in \mathcal{D}(T)$, то существует предел $T_h x \to Tx$ при $h \to 0$ (по определению оператора T). Следовательно, предел правой части (9.3.2) также существует, а это означает, что $U(t)x \in \mathcal{D}(T)$ и

$$T_h U(t)x \to TU(t)x = U(t)Tx.$$

По определению предел левой части (9.3.2) есть правая производная функции $U(t)x$ в точке t. Следовательно, верно равенство (9.2.2). Но нужно доказать, что при $t > 0$ левая производная также существует и равна правой. Воспользуемся равенством

$$\frac{U(t-h) - U(t)}{-h} = U(t-h)T_h = T_h U(t-h), \quad 0 < h < t.$$

Как и ранее, при $x \in \mathcal{D}(T)$ в равенстве $U(t-h)T_h x = T_h U(t-h)x$ можно перейти к пределу при $h \to +0$ (здесь мы используем лемму 9.4.3, которая приведена ниже) и получить, что левая производная совпадает с правой.

Далее, если $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, то функция $u_0(t) = U(t)x_0$ удовлетворяет уравнению (9.2.2), а из определения полугруппы следует выполнение начального условия, т. е. эта функция — решение задачи Коши (9.1.1).

Наконец, докажем единственность решения задачи Коши (9.1.1) с генератором T. Пусть $v(t)$ — другое решение:

$$v(t) \in D(T), \qquad v'(t) = Tv(t), \qquad v(0) = x_0.$$

Имеем

$$\frac{d}{ds}U(s)v(t-s) = (U(s)T)\,v(t-s) - U(s)\,(Tv(t-s)) = 0,$$

если $0 \leqslant s \leqslant t$. Тогда

$$U(t)x_0 - v(t) = U(s)v(t-s)\Big|_{s=0}^{s=t} = \int_0^t \frac{d}{ds}U(s)v(t-s)\,ds = 0.$$

3.3. Докажем утверждение (iv).

Шаг 1. Не ограничивая общности, будем считать, что полугруппа $U(t)$ равномерно ограничена, т. е. число β в (9.2.1) равно 0. Положим

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt, \quad x \in X. \tag{9.3.3}$$

Так как $U(t)x$ — непрерывная ограниченная функция, то интеграл сходится для всякого λ такого, что $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Тем самым функция $R(\lambda)x$ корректно определена в правой полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Конечно, из (9.3.3) следует, что

$$\|R(\lambda)x\| \leqslant M\lambda^{-1}\|x\| \quad \forall\lambda > 0,$$

т. е. $R(\lambda)$ — ограниченный оператор в X.

Покажем, что $R(\lambda)y \in \mathcal{D}(T)$ и

$$(\lambda - T)R_\lambda y = y \qquad \forall\, y \in X. \tag{9.3.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned} T_t R_\lambda y &= \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}U(t)U(s)y\,ds - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)y\,ds \\ &= \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}U(t+s)y\,ds - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)\,ds \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{t}\int_t^\infty e^{-\lambda s}U(s)y\,ds - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)y\,ds \\ &= \frac{e^{\lambda t}-1}{t}\int_t^\infty e^{-\lambda s}U(s)y\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\lambda s}U(s)y\,ds \\ &= \frac{e^{\lambda t}-1}{t}\Big(R_\lambda y - \int_0^t e^{-\lambda s}U(s)y\,ds\Big) - \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\lambda s}U(s)y\,ds. \end{aligned}$$

Устремим в этих равенствах $t \to +0$. Интеграл в скобках стремится к нулю при $t \to +0$, а последний интеграл стремится к x в силу непрерывности подынтегральной функции в точке $s = 0$ (см. соотношение (9.3.1)). Таким образом, последнее выражение в равенствах имеет предел при $t \to +0$, равный $(\lambda R_\lambda y - y)$. Следовательно, при любом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}^+$ функция $T_t R_\lambda y$ имеет предел при $t \to +0$, равный $(\lambda R_\lambda y - y)$. По определению это означает, что $R_\lambda y \in \mathcal{D}(T)$ и

$$TR_\lambda y = \lambda R_\lambda y - y \quad \forall\, y \in X,$$

что влечет равенство (9.3.4).

Шаг 2. Покажем теперь, что

$$R_\lambda(\lambda - T)x = x \quad \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{9.3.5}$$

Образ ограниченного оператора R_λ на пространстве X обозначим через $\mathcal{R} := \mathrm{Ran}(R_\lambda)$. Если равенство (9.3.5) уже доказано, то из него следует, что $\mathcal{R} \supset \mathcal{D}(T)$. Но из равенства (9.3.4) следует, что $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}(T)$. Следовательно, $\mathcal{R} = \mathcal{D}(T)$, а тогда отображение $\lambda - T : \mathcal{D}(T) \mapsto X$ есть биекция. Поэтому оператор $\lambda - T$ имеет ограниченный обратный оператор $R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$, т.е. λ лежит в резольвентном множестве $\rho(T)$ оператора T.

Для доказательства равенства (9.3.5) заметим, что если T — генератор полугруппы $U(t)$, то по определению $(T - \lambda)$ — генератор полугруппы $V(t) = e^{-\lambda t}U(t)$. Тогда согласно (9.2.2) имеем

$$\frac{d}{dt}e^{-\lambda t}U(t)x = e^{-\lambda t}(T-\lambda)U(t)x \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T).$$

Интегрируя от 0 до ∞, получаем

$$-x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}(T-\lambda)U(s)x\,ds = R_\lambda y, \quad y = (T-\lambda)x \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T).$$

Это равенство эквивалентно соотношению (9.3.5). Тем самым мы показали, что в открытой полуплоскости $\mathbb{C}^+$ существует резольвента генератора полугруппы $U(t)$ и определяется она как преобразование Лапласа этой полугруппы

$$(\lambda - T)^{-1}y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)y\,dt, \quad \forall\, y \in X. \tag{9.3.6}$$

Шаг 3. Докажем неравенства Хилле – Иосиды (9.2.3). По-прежнему считаем, что $\beta = 0$ в неравенстве (9.2.1). В пространстве X введем новую норму

$$\|x\|_1 = \sup_{t>0}\|U(t)x\|.$$

Легко видеть, что $\|\cdot\|_1$ есть норма, причем она эквивалентна исходной:

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|,$$

где M — постоянная в неравенстве (9.2.1). Тогда имеем

$$\|R(\lambda)x\|_1 \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\|x\|_1\,dt = \frac{1}{\lambda}\|x\|_1, \quad \lambda > 0. \tag{9.3.7}$$

Следовательно,

$$\|(\lambda - T)^{-1}\|_1 \leqslant \frac{1}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \|(\lambda - T)^{-n}\|_1 \leqslant \frac{1}{\lambda^n}, \quad \lambda > 0.$$

В силу эквивалентности норм

$$\|(\lambda - T)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{\lambda^n}, \quad \lambda > 0.$$

Легко видеть, что оценка (9.3.7) выполняется не только при $\lambda \in \mathbb{R}^+$, но и во всей открытой полуплоскости $\mathbb{C}^+$, если λ заменить на $\operatorname{Re}\lambda$.

Поэтому неравенства Хилле – Иосиды также справедливы в полуплоскости $\mathbb{C}^+$, а именно

$$\|(\lambda - T)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda)^n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^+. \tag{9.3.8}$$

3.4. Докажем утверждение (ii).

Замкнутость оператора T можно проверить независимо, пользуясь непосредственно определением замкнутости: если последовательность $x_n \in D(T)$ такова, что $x_n \to x$ и $Tx_n \to y$, то $x \in D(T)$ и $Tx = y$. Эквивалентное определение такое: график оператора $\{x, Tx\}$ (когда x пробегает $D(T)$) является замкнутым подпространством в $X \times X$. Мы не будем проводить такое доказательство «в лоб», а воспользуемся тем, что замкнутость генератора T попутно получена в предложении (iv). А именно: оператор $R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$ ограничен, а потому замкнут, тогда оператор $(\lambda - T)$ также замкнут, так как графики прямого и обратного оператора получаются перестановкой координат в произведении $X \times X$.

§ 9.4. Доказательство теоремы 9.2.5

Шаг 1. Если T — скаляр или матрица (или ограниченный оператор в X), то можно показать, что существуют пределы

$$e^{tT} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n} T\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n} T\right)^{-n}. \tag{9.4.1}$$

Первое равенство бесполезно в случае неограниченного оператора T, а второе оказывается пригодным для построения операторной экспоненты в условиях теоремы 9.2.5. Для упрощения записи будем предполагать, что неравенства (9.2.3) выполнены при $\beta = 0$. Это не ограничивает общности, поскольку при $\beta \neq 0$ можно перейти к рассмотрению оператора $T - \beta$.

Итак, наш план следующий. Сначала мы покажем, что фигурирующие в (9.4.1) оператор-функции

$$S_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n} T\right)^{-n}$$

равномерно ограничены (по операторной норме) при всех $t \geqslant 0$ и сильно непрерывны в нуле (что влечет сильную непрерывность на любом отрезке $[0, t_0] \subset \mathbb{R}^+$). На следующем шаге мы покажем, что функции $S_n = S_n(t)$ сильно сходятся к некоторой сильно непрерывной функции $U(t)$. Наконец, на последнем шаге покажем, что для этой функции выполняется мультипликативное свойство и семейство $U(t)$ является полугруппой с генератором T. Приступая к реализации этого плана, приведем простые, но часто используемые утверждения, которые сформулируем в виде лемм.

9.4.1. Лемма. *Пусть нормы оператор-функций $V_n(t)$, $t \in [a,b]$, равномерно ограничены: $\|V_n(t)\| \leqslant M$, где M не зависит от $t \in [a,b]$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть линеал $\mathcal{L} \subset X$ плотен в X и для всех $x \in \mathcal{L}$*

$$\sup_{t\in[a,b]} \|(V_n(t) - V(t))x\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{9.4.2}$$

Тогда (9.4.2) *верно при всех $x \in X$. Аналогично, если при фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $t_0 \in [a,b]$ соотношение $\|V_n(t)x - V_n(t_0)x\| \to 0$ при $t \to t_0$ выполняется при всех $x \in \mathcal{L}$, причем линеал $\mathcal{L}$ плотен в X, то это соотношение верно при всех $x \in X$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $x \in X$. При любом $\varepsilon > 0$ найдется такой $y \in \mathcal{L}$, что $\|x - y\| \leqslant \varepsilon/(2M)$. Тогда

$$\|V_n(t)x - V(t)x\| \leqslant \|V_n(t)y - V(t)y\| + \|V_n(t)(x-y) - V(t)(x-y)\| \leqslant \varepsilon,$$

поскольку первое слагаемое в правой части первого неравенства можно оценить величиной $\varepsilon/2$, если $n \geqslant n_0$, а n_0 достаточно велико. Точно также получается второе утверждение леммы. □

9.4.2. Лемма. *Если T — плотно определенный замкнутый оператор в X с непустым резольвентным множеством, то область определения оператора T^2 плотна в X.*

Доказательство. Область определения оператора T сохраняется при его возмущении ограниченным оператором. В частности, верно равенство $\mathcal{D}(T - \lambda) = \mathcal{D}(T)$. Поэтому можно считать, что $0 \in \rho(T)$. В этом случае операторы T^{-1} и $(T^{-1})^*$ имеют нулевые ядра. Тогда ядро оператора $(T^{-2})^*$ также тривиально. Известно [3, гл. 3.5], что для оператора A в банаховом пространстве справедливо соотношение $\mathrm{Ker A}^* = (\mathrm{Im} A)^{\perp}$, где правая часть означает аннулятор образа оператора A (в случае гильбертова пространства ортогональное дополнение). В нашем случае, полагая $A = T^{-2}$, получаем $\mathrm{Ker} A^* = \{0\}$, а тогда линеал $\mathrm{Ran}\, T^{-2} = \mathcal{D}(T^2)$ плотен в пространстве X. □

9.4.3. Лемма. *Пусть $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ — последовательности равномерно ограниченных операторов, причем $A_n \to A$ и $B_n \to B$. Тогда $A_nB_n \to AB$, где знак $\to$ означает сильную сходимость. Аналогично, если определенные на $[a,b]$ равномерно ограниченные оператор-функции $A(t)$ и $B(t)$ сильно непрерывны в точке $t_0 \in [a,b]$, то их произведение также сильно непрерывно в этой точке.*

Доказательство. Доказательство проводится с помощью стандартного приема «прибавить и отнять». □

Шаг 2. Согласно (9.4.1) покажем, что оператор-функции

$$S_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}T\right)^{-n}, \quad t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

сильно сходятся к сильно непрерывной функции $U(t)$, относительно которой покажем, что она и есть операторная экспонента e^{tT}. Заметим, что выполнение оценок (9.2.3) (при $\beta = 0$) влечет оценки

$$\|(1 - \alpha T)^{-n}\| \leqslant M \quad \forall\, \alpha > 0,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Это сразу получается после замены в (9.2.3) $\lambda = \alpha^{-1}$. Следовательно, отображения $S_n(t)$ равномерно ограничены:

$$\|S_n(t)\| \leqslant M \quad \forall\, t \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots . \tag{9.4.3}$$

Функция $S_n(t)$ определена при $t > 0$, резольвентное множество $\rho(T)$ открыто, поэтому при фиксированном $t > 0$ функция $S_n = S_n(t)$ определена в некоторой комплексной окрестности точки t. А тогда можно рассматривать комплексную производную (понимая предел в операторной норме), которая вычисляется так же, как в случае, когда T скаляр. В частности, при $t > 0$ имеем

$$\frac{d}{dt} S_n(t) = T\left(1 - \frac{t}{n}T\right)^{-n-1}. \tag{9.4.4}$$

Докажем, что существует сильный предел

$$S_n(t) \to 1 \text{ при } t \to +0. \tag{9.4.5}$$

Используя равенство $(1 - \alpha T)^{-1} - 1 = \alpha(1 - \alpha T)^{-1} T$, получаем, что сильный предел существует для x на плотном множестве $\mathcal{D}(T)$. Применяя второе утверждение леммы 9.4.1, получаем, что $S_n(t)x \to x$ при $t \to +0$ для всех $x \in X$. При $t > 0$ эти функции непрерывны даже по операторной норме, поэтому они сильно непрерывны на любом отрезке $[0, t_0] \subset \mathbb{R}^+$.

Шаг 3. Теперь установим сильную сходимость семейства операторов $S_n(t)$ равномерно на каждом отрезке $[0, t_0] \subset \mathbb{R}^+$. Покажем, что последовательность $S_n(t)x$ фундаментальна. Сначала получим вспомогательные равенства. Используя (9.4.4), при $x \in \mathcal{D}(T^2)$ получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\big(S_m(t-\xi)S_n(\xi)\,x\big) \qquad\qquad (9.4.6)\\
&= \Big[-T\Big(1-\frac{t-\xi}{m}T\Big)^{-m-1}\Big(1-\frac{\xi}{n}T\Big)^{-n}\Big]x\\
&+ \Big[\Big(1-\frac{t-\xi}{m}T\Big)^{-m}T\Big(1-\frac{\xi}{n}T\Big)^{-n-1}\Big]x\\
&= T\Big[\Big(1-\frac{t-\xi}{m}T\Big)-\Big(1-\frac{\xi}{n}T\Big)\Big]\\
&\times \Big[\Big(1-\frac{t-\xi}{m}T\Big)^{-m-1}\Big(1-\frac{\xi}{n}T\Big)^{-n-1}\Big]x\\
&= \Big[\Big(\frac{\xi}{n}-\frac{t-\xi}{m}\Big)T^2\Big(1-\frac{t-\xi}{m}T\Big)^{-m-1}\Big(1-\frac{\xi}{n}T\Big)^{-n-1}\Big]x\\
&= \Big[\Big(\frac{\xi}{n}-\frac{t-\xi}{m}\Big)\Big(1-\frac{t-\xi}{m}T\Big)^{-m-1}\Big(1-\frac{\xi}{n}T\Big)^{-n-1}\Big]T^2\,x.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что оператор T коммутирует со своей резольвентой при условии $x \in \mathcal{D}(T)$.

Мы уже доказали ограниченность и сильную непрерывность функций S_n на любом отрезке $[0, t_0]$. Тогда с учетом Леммы 9.4.2 получаем, что функция, выраженная в последнем равенстве (9.4.6), является непрерывной при $0 \leqslant \xi \leqslant t$. Поэтому ее можно проинтегрировать

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\Big(S_m(t-\xi)\,S_n(\xi)\Big)x\,d\xi = \big(S_n(t)x - S_m(t)\big)x.$$

Подставляя в интеграл в левой части последнее выражение в цепочке равенств (9.4.6), получаем оценку

$$\|S_n(t)\,x - S_m(t)\,x\| \leqslant \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)M^2\|T^2x\|.$$

Следовательно, последовательность $\{S_n(t)x\}_1^\infty$ фундаментальна и равномерно по $t \geq 0$ на каждом конечном интервале существует сильный предел $S_n(t)x \to U(t)\,x$, если $x \in D(T^2)$. В силу непрерывности $S_n(t)\,x$ по t предел $U(t)\,x$ также непрерывная функция по t. Из первого утверждения леммы 9.4.1 и леммы 9.4.2 следует, что предел $U(t)x$ существует и является непрерывной функцией при всех $x \in X$, причем $U(0) = 1$. Кроме того, из (9.4.3) следует оценка $\|U(t)\| \leqslant M$.

Шаг 4. Для окончания доказательства теоремы 9.2.5 нужно доказать мультипликативное свойство семейства $U(t)$, т. е. установить равенство $U(t+s) = U(t)U(s)$. В ходе доказательства станет также ясно, что оператор T является генератором этого семейства. Из соотношений (9.4.4) и (9.4.5) получаем

$$S_n(t)x - x = \int_0^t \left(1 - \frac{s}{n}T\right)^{-n-1} Tx\,ds, \quad x \in \mathcal{D}(T). \tag{9.4.7}$$

С учетом леммы 9.4.3 при $n \to \infty$ имеем сильную сходимость

$$\left(1 - \frac{t}{n}T\right)^{-n-1} = \left(1 - \frac{t}{n}T\right)^{-1} S_n(t) \to U(t)$$

равномерно по t на любом конечном интервале. Оператор T коммутирует со своей резольвентой, поэтому для всех $x \in \mathcal{D}(T)$ имеем $TS_n(t)x = S_n(t)Tx$. В силу замкнутости T значение $TU(t)x$ при таких x определено и

$$TU(t)x = U(t)Tx.$$

Переходя в (9.4.7) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$U(t)x - x = \int_0^t U(\xi)Tx\,d\xi, \quad x \in \mathcal{D}(T).$$

Функция под интегралом непрерывна, поэтому при $x \in D(T)$ отображение $U(t)x$ дифференцируемо и

$$U'(t)x = U(t)Tx = TU(t)x, \quad U(0)x = x.$$

В частности, имеем $U'(0)x = Tx$ при $x \in \mathcal{D}(T)$. Так же, как в утверждении (iii) теоремы 9.2.4, доказываем, что решение $u(t) = U(t)x$ этой задачи Коши единственно при $x \in \mathcal{D}(T)$. Поэтому решение задачи Коши в момент $(t+s)$ однозначно определено: $u(t+s) = U(t+s)x$. В момент времени t оно определено равенством $u(t) = U(t)x$. Выбирая значение $u(t)$ в качестве начального условия для уравнения

$$u'(s) = Tu(s),$$

получаем, что $u(t+s) = U(s)u(t)$. В силу единственности,

$$U(t+s)x = U(s)u(t)x = U(s)U(t)x.$$

Таким образом, построенное семейство $U(t)$ есть C_0-полугруппа. Ее генератор T_1 однозначно определен равенством (9.3.6). Так как для всех $x \in \mathcal{D}(T)$ имеем $U'(0)x = Tx$, то $1 - T_1 \supset 1 - T$. Поскольку оба эти оператора обратимы, то они равны. Теорема доказана. $\square$

§ 9.5. Примеры и теоремы Люмера – Филлипса и Стоуна

5.1. При $t \geqslant 0$ рассмотрим в пространстве $X = C_0(\mathbb{R})$ семейство операторов
$$U(t)f(x) = f(x+t).$$
Здесь $C_0(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x = \pm\infty$ с обычной нормой: $\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Ясно, что $U(t)$ — полугруппа и даже группа, если считать, что t меняется на всей вещественной оси. Ее генератором служит оператор
$$(Tf)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{d}{dx}f(x).$$
В качестве области определения $\mathcal{D}(T)$ берутся все функции f, для которых $f' \in C_0(\mathbb{R})$. Вместо $C_0(\mathbb{R})$ могут выступать пространства $L_p(\mathbb{R})$ или $L_p(\mathbb{R}^+),\ p \geqslant 1$.

5.2. В пространстве $X = C(\mathbb{R})$ или $X = L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим гауссовскую плотность
$$N_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$
Семейство $U(t)$ определим равенствами
$$U(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}} N_t(x-s)f(s)\,ds, \quad \text{если } t > 0,$$
$$U(t)f(x) = f(x), \quad \text{если } t = 0.$$
Из определения и свойств ядра N_t легко понять, что $\|U(t)\| \leqslant 1$. Из известных формул для гауссовских плотностей также следуют полугрупповое свойство $U(t+s) = U(t)U(s)$ и сильная непрерывность отображения $U(t)$.

В качестве генератора этой полугруппы выступает оператор
$$T = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(T) = W_2^2(\mathbb{R}),$$
если основное пространство $X = L_2(\mathbb{R})$. Здесь $W_2^2(\mathbb{R})$ — соболевское пространство. Известно, что этот оператор самосопряжен и отрицателен. Доказательство того, что этот оператор является генератором рассматриваемой полугруппы, становится ясным после анализа формул Пуассона для уравнения теплопроводности
$$\frac{d}{dt}u(x,t) = \frac{d^2}{dx^2}u(x,t).$$
Детальный анализ этого примера имеется в книге [2]. Другие многочисленные примеры можно найти в книге [6].

5.3. Оператор T в гильбертовом пространстве H называется *диссипативным*, если его область определения плотна и $\mathrm{Re}\,(x, Tx) \leqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(T)$. Диссипативный оператор называют *m-диссипативным* (максимально диссипативным), если $\mathrm{Im}\,(1-T) = H$, что эквивалентно условию $1 \in \rho(T)$. Несложно показать, что в этом случае вся открытая правая полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(T)$.

Полезно отметить следующий результат Люмера и Филлипса [8] о сжимающих полугруппах, который получается как следствие теоремы Хилле – Иосиды. Напомним, что полугруппа $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ называется сжимающей, если $\|U(t)\| \leqslant 1$.

9.5.1. Теорема. *Сильно непрерывная полугруппа $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ в гильбертовом пространстве H является сжимающей, если и только если ее генератор является максимально диссипативным оператором.*

Доказательство. Согласно теореме Хилле – Иосиды полугруппа сжимающая, если и только если

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1} \quad \forall\, \lambda > 0. \tag{9.5.1}$$

Эта оценка влечет неравенство $\|(\lambda - T)x\| \geqslant \lambda\|x\|$ для $x \in \mathcal{D}(T)$. Тогда

$$\lambda^2\|x\|^2 \leqslant \|(\lambda - T)x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\,\mathrm{Re}\,(x, Tx) + \|Tx\|^2,$$

откуда получаем

$$\mathrm{Re}\,(x, Tx) \leqslant (2\lambda)^{-1}\,\|Tx\|^2.$$

Полагая $\lambda \to \infty$, получаем $\mathrm{Re}\,(x, Tx) \leqslant 0$. Следовательно, оператор T диссипативен. Так как открытая левая полуплоскость принадлежит его резольвентному множеству, то он m-диссипативен.

Обратно, если оператор T является m-диссипативным, то оценка (9.5.1) вытекает из общего результата. *Если $W(T)$ — числовой образ оператора T, дополнение $\mathbb{C}\backslash W(T)$ к которому связно, и найдется точка $\mu \in \mathbb{C}\backslash W(T)$, принадлежащая резольвентному множеству $\rho(T)$, то $\mathbb{C} \setminus \overline{W(T)} \subset \rho(T)$ и справедлива оценка*

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, W(T))} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{W(T)}.$$

В доказательстве этого предложения используется теорема Хаусдорфа-Теплица о выпуклости числового образа оператора. Этим завершается доказательство теоремы. □

Отметим, что эта теорема остается справедливой в банаховом пространстве, если понятие диссипативного оператора расширить на банахово пространство. Согласно определению Филлипса, плотно определенный оператор T в банаховом пространстве X называется диссипативным, если для любого $x \in \mathcal{D}(T)$ найдется функционал $l \in X^*$, такой, что $\|l\| = 1,\ l(x) = 1$ и $\operatorname{Re} l(Tx) \leqslant 0$. Доказательство последней теоремы не меняется в банаховом случае, если учесть, что приведенное условие диссипативности равносильно условию

$$\|(\lambda - T)x\| \geqslant \lambda\|x\| \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Доказательство этого факта имеется в [5] и [1, задача 10.7.43].

5.4. Важным этапом, базой для становления теории групп и полугрупп явилась теорема Стоуна о сильно непрерывной группе унитарных операторов в гильбертовом пространстве. Определение сильно непрерывной группы операторов дается аналогично определению сильно непрерывной полугруппы, только предполагается, что переменная t, параметризующая семейство $U(t)$, изменяется на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ вместо $\mathbb{R}^+$. Напомним, что оператор U называется унитарным, если он изометрический (сохраняет норму) и обратим. В этом случае $U^{-1} = U^*$.

Следующая теорема Стоуна о группе унитарных операторов появилась значительно раньше теоремы Хилле – Иосиды (объединения теорем 9.2.4 и 9.2.5).

9.5.2. Теорема (Стоун)**.** *Пусть $U(t)$ — сильно непрерывная группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве H. Тогда ее генератор является кососамосопряженным оператором, т. е. $T = iA$, где $A = A^*$, при этом $U(t) = e^{itA}$. Верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть $U(t)$ сильно непрерывная группа унитарных операторов: $U(t+s) = U(t)U(s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R},\ U(0) = 1$. Тогда $U^*(t) = U^{-1}(t) = U(-t)$. Пусть T и T_1 — генераторы полугрупп $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{U^*\}_{t\geqslant 0}$. Тогда

$$U^*(t) - 1 = U(-t) - 1 = U(-t)(1 - U(t)).$$

Поэтому для всех $x \in \mathcal{D}(T)$ имеем

$$\lim_{t\to+0} \frac{U^*(t) - 1}{t}\, x = -\lim_{t\to+0} U(-t)\, \frac{U(t) - 1}{t}\, x = -Tx$$

(здесь пользуемся леммой 9.4.3). Таким образом, $\mathcal{D}(T_1) \supset \mathcal{D}(T)$ и $T_1 x = -Tx$ для всех $x \in \mathcal{D}(T)$. Аналогично справедливо равенство

$$U(t) - 1 = U^*(-t) - 1 = U^*(-t)(1 - U^*(t)),$$

из которого следует включение $\mathcal{D}(T) \supset \mathcal{D}(T_1)$, а тогда имеем $T_1 = -T$.

Оператор T замкнут, поэтому однозначно определен сопряженный к нему оператор T^* с плотной областью $\mathcal{D}(T^*)$ (см. [3, гл. III, § 5]). Если при этом $\lambda - T$ обратим, то $\overline{\lambda} - T^*$ также обратим (см. [3, гл. III, теорема 5.30]) и

$$\big[(\lambda - T)^{-1}\big]^* = (\overline{\lambda} - T^*)^{-1}.$$

Согласно равенству (9.3.6) генераторы T и T_1 однозначно определяются преобразованиями Лапласа оператор-функций U и U^*, поэтому

$$(\lambda - T_1)^{-1} = \big[(\lambda - T)^{-1}\big]^* = (\lambda - T^*)^{-1}, \quad \lambda > 0.$$

Это равенство влечет равенство $T_1 = T^*$. Тогда $T^* = -T$, т. е. $T = iA$, где $A = iT = A^*$.

Доказательство обратного утверждения получается, если воспользоваться спектральной теоремой в терминах функционального исчисления (см., например, [4, теорема VIII.5]). Спектр оператора A лежит в $\mathbb{R}$, а функция e^{itx} непрерывна и ограничена на вещественной оси (здесь x — переменная, а t — параметр). Согласно указанной теореме, однозначно определено семейство операторов e^{itA}, для которого сохраняются мультипликативные свойства экспоненты. $\square$

§ 9.6. Голоморфные полугруппы

Проверка условий Хилле – Иосида (9.2.3) в полуплоскости или на положительной оси удается реализовать при работе с конкретными операторами лишь в исключительных случаях. Трудность состоит в доказательстве этих оценок при всех $n \in \mathbb{N}$ с константой, не зависящей от n. Однако часто удается показать, что резольвентному множеству $\rho(T)$ принадлежит не только правая полуплоскость, но и некоторые малые секторы из левой полуплоскости, примыкающие к мнимой оси. А именно предположим, что

$$\rho(T) \supset \Lambda_\alpha := \{\lambda\colon\ |\arg\lambda| < \alpha\}$$

при некотором $\alpha > \pi/2$ и выполнена оценка

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant M\,|\lambda|^{-1} \quad \forall\,\lambda \in \Lambda_\alpha. \tag{9.6.1}$$

При исследовании конкретных операторов нужную оценку чаще удается получить в сдвинутых секторах $\Lambda_\alpha + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Но, как и ранее, не уменьшая общности, мы полагаем $\beta = 0$.

Вовсе не очевидно, что условие (9.6.1) существенно сильнее условия Хилле – Иосиды (9.2.3). Но это так, и ниже мы это покажем (утверждение будет вытекать из теоремы 9.6.2). Полугруппы, генераторы которых удовлетворяют условию (9.6.1), называют *голоморфными.* Объясняется это название следующим. При выполнении условия (9.6.1) экспонента $U(t) = e^{tT}$ не только сильно непрерывна при $t \geqslant 0$, но и продолжается в сектор $\Lambda_{\alpha-\pi/2}$ как голоморфная оператор-функция (ее производная в комплексном смысле понимается в равномерной операторной топологии). Это мы докажем ниже. Перед формулировкой теоремы сделаем полезное замечание. Это замечание позволяет существенно упростить проверку свойства голомофности полугруппы при работе с конкретными операторами.

9.6.1. Предложение. *Выполнение оценки* (9.6.1) *в правой полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ *влечет ее выполнение в секторе* Λ_α *при некотором* $\alpha > \pi/2$.

Доказательство. Пусть оценка (9.6.1) выполнена на мнимом луче $\lambda = it$. Положим $\mu = ite^{i\delta}$ и заметим, что

$$(\mu - T) = (1 + Q(\lambda))\,(\lambda - T), \quad \text{где } Q(\lambda) = \lambda(e^{i\delta} - 1)(\lambda - T)^{-1}.$$

Зафиксируем число $q < M^{-1}$. Тогда при всех $\delta > 0$, подчиненных условию $|e^{i\delta} - 1| \leqslant q$, оператор-функция $1 + Q(\lambda)$ обратима. Учитывая равенство $|\lambda| = |\mu|$, получаем

$$\|(\mu - T)^{-1}\| \leqslant |\lambda)^{-1}|\,\|(1 + Q(\lambda))^{-1}\| \leqslant M(1 - qM)^{-1}\,|\mu|^{-1}.$$

Таким образом, выполнение оценки (9.6.1) в замкнутой правой полуплоскости влечет ее выполнение с другой константой в секторе $\Lambda_{\pi/2+\delta}$ при условии $|e^{i\delta} - 1| \leqslant M^{-1}$. □

9.6.2. Теорема. *Пусть выполнена оценка* (9.6.1) *в секторе* Λ_α *при некотором* $\alpha > \pi/2$. *Тогда оператор* T *является генератором голоморфной (по переменной* t*) полугруппы* $U(t) = e^{tT}$ *в секторе* $\Lambda_{\alpha-\pi/2}$, *которая равномерно ограничена в меньшем секторе* Λ_ω *при всяком* $\omega < \alpha - \pi/2$. *При этом* $U'(t) = TU(t)$, *если* $t \in \Lambda_\omega$, $|t| > 0$, *где комплексная производная понимается в равномерной операторной топологии. При этом* $U(t)$ *сильно непрерывна в нуле, т. е.* $U(t)$ *также является* C_0*-полугруппой.*

Доказательство. *Шаг 1.* Зафиксируем малое число ε из интервала $(0, \alpha - \pi/2)$ и определим семейство $U(t)$ равенством

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\xi t}(\xi - T)^{-1}\,d\xi, \tag{9.6.2}$$

где Γ — положительно ориентированный контур, состоящий из отрезков лучей $e^{\pm i(\alpha-\varepsilon)}r$ при $r \geqslant \varepsilon$ и дуги окружности $|\lambda| = \varepsilon$, соединяющей эти два луча так, чтобы точка 0 и спектр оператора T находились слева от контура. Экспонента $e^{\xi t}$ убывает при $\xi \in \Gamma$, $\xi \to \infty$, поэтому интеграл определен корректно. Более того, эта экспонента остается убывающей при выходе t из вещественной оси в комплексный сектор $|\arg t| < \alpha - \varepsilon - \pi/2$, тем самым в сектор $|\arg t| < \alpha - \pi/2$, так как число $\varepsilon > 0$ произвольно. Докажем мультипликативное свойство семейства $U(t)$. Пусть контур Γ' совпадает с контуром Γ, смещенным немного вправо. Имеем

$$\begin{aligned} U(s)\,U(t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma'} e^{\xi' s + \xi t} (\xi' - T)^{-1} (\xi - T)^{-1}\, d\xi\, d\xi' \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\int_{\Gamma'} e^{\xi' t} (\xi' - T)^{-1}\, d\xi' \int_\Gamma e^{\xi t} (\xi - \xi')^{-1}\, d\xi \right. \\ &\left. - \int_\Gamma e^{\xi t} (\xi - T)^{-1}\, d\xi \int_{\Gamma'} e^{\xi' s} (\xi - \xi')^{-1}\, d\xi' \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\xi(t+s)} (\xi - T)^{-1}\, d\xi = U(t+s). \end{aligned}$$

Здесь при переходе ко второму равенству мы использовали тождество Гильберта

$$(\xi' - T)^{-1} (\xi - T)^{-1} = (\xi - \xi')^{-1} \left[(\xi' - T)^{-1} - (\xi - T)^{-1}\right],$$

а при переходе к третьему равенству соотношения

$$\int_\Gamma e^{\xi t} (\xi - \xi')^{-1}\, d\xi = 0, \quad \int_{\Gamma'} e^{\xi' t} (\xi' - \xi)^{-1}\, d\xi' = -2\pi i e^{\xi s}.$$

Шаг 2. Как было отмечено, оператор-функция $U(t)$ корректно определена в секторе $|\arg t| < \alpha - \pi/2$ и ее можно дифференцировать под знаком интеграла, так как функция $\xi e^{\xi t}$ экспоненциально убывает при $\xi \in \Gamma,\ \xi \to \infty$. Используя равенство $\xi(\xi - T)^{-1} = 1 + T(\xi - T)^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\xi t} \xi (\xi - T)^{-1}\, d\xi \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\xi t} &\left(1 + T(\xi - T)^{-1}\right) d\xi = \frac{T}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\xi t} (\xi - T)^{-1}\, d\xi = TU(t). \end{aligned}$$

Переход к последнему равенству нуждается в пояснении. Во-первых, мы используем тот факт, что при $t > 0$ экспонента убывает слева от контура Γ, а потому интеграл от нее равен нулю. Во-вторых, последнее равенство для операторов понимается в сильном смысле: на всех элементах $x \in X$. Мы также учитываем, что при $x \in X$ интеграл

$\int_\Gamma e^{\xi t} T(\xi - T)^{-1} x \, d\xi$ понимается как предел последовательности

$$Tx_n \to z = \int_\Gamma e^{\xi t} T(\xi - T)^{-1} x \, d\xi,$$

где

$$\mathcal{D}(T) \ni x_n = \sum_{\xi_k \in \Gamma} e^{\xi_k t} (\xi_k - T)^{-1} x \to y = \int_\Gamma e^{\xi t} (\xi - T)^{-1} x \, d\xi.$$

Оператор T замкнут, а тогда из определения замкнутости следует, что $y \in \mathcal{D}(T)$ и $Ty = z$.

Шаг 3. Покажем, что полугруппа $U(t)$ сильно непрерывна в нуле. Проведем замену $\xi' = \xi t, t > 0$. Получим

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{\Gamma'} e^{\xi'} \left(\frac{\xi'}{t} - T \right)^{-1} d\xi' = \frac{1}{2\pi i t} \int_{\Gamma_1} e^{\xi'} \left(\frac{\xi'}{t} - T \right)^{-1} d\xi', \tag{9.6.3}$$

где контуры Γ' и Γ_1 — такие же, как Γ, но дуга окружности $|\xi'| = \varepsilon$ заменена на дуги $|\xi'| = \varepsilon t$ и $|\xi'| = 1$ соответственно (конечно, интегралы совпадают, так как подынтегральная функция голоморфна между контурами Γ' и Γ_1). Здесь от Γ' мы перешли к контуру Γ_1, который не зависит от переменной t.

Из оценки (9.6.1) следует, что при $\xi' \in \Gamma_1 \subset \Lambda_\alpha$ верны оценки

$$\|(\xi' t^{-1} - T)^{-1}\| \leqslant Mt|\xi'|^{-1} \leqslant Mt, \quad t > 0. \tag{9.6.4}$$

Кроме того, функция $e^{\xi'}$ экспоненциально убывает при $\xi' \to \infty$ на контуре Γ_1, который не зависит от t. Тогда из (9.6.3) и (9.6.4) получаем $\|U(t)\| \leqslant \mathrm{const}$ при всех $t > 0$. Те же аргументы приводят к этой оценке (с другой константой) в любом угле $|\arg t| < \alpha - \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Более того,

$$U(t) - 1 = \int_{\Gamma_1} e^{\xi'} \left[(\xi' - tT)^{-1} - \xi'^{-1} \right] d\xi' = \frac{t}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\xi'}}{\xi'} T(\xi' - tT)^{-1} d\xi'.$$

Из оценки (9.6.4) при $x \in \mathcal{D}(T)$ тогда получаем

$$\|U(t)x - x\| \leqslant |t| \, \|Tx\| \, \mathrm{const} \to 0 \quad \text{при } t \to 0.$$

В силу леммы 9.4.2 получаем, что

$$U(t)x \to x \quad \text{при всех } \ x \in \mathcal{D}(T).$$

Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Вещественный и функциональный анализ. 3-е изд. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М. – Ижевск, 2020.

[2] Иосида К. Функциональный анализ. Мир, М., 1967.

[3] Като Т. Теория возмущений линеных операторов. Мир, М., 1972.

[4] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Мир, М., 1977.

[5] Хилле Е., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962.

[6] Engel K. J., Nagel R. One-parameter semigroups for liner evolution equations. Springer-Verlag, New York – Berlin – Heildelberg, 2000.

[7] Hille E. Functional analysis and semigroups. Amer. Math. Soc., 1948.

[8] Lumer G., Phillips R.S., Dissipative operator in Banach space. Pacific J. Math. 1961. V. 11. P. 670-698.

9 [7] M.H. Stone, On one-parameter unitary groups in Hilbert space, Ann. of Math. 1932. V. 33. P. 643–648.

[10] Yosida K. On the differentiability and the representaton of one-parameter semigroups of linear operators. J. Math. Soc. Japan. 1948. V. 1. P. 15–21.

Глава 10

Банаховы Алгебры

А. Я. Хелемский

Вот о чем пойдет речь на этих лекциях. В §10.2 я дам, после подготовительных определений, краткую формулировку (самую суть) пяти теорем, которые, по мнению вашего лектора, являются основными в теории банаховых алгебр. Это теорема Гельфанда, две теоремы Гельфанда – Наймарка («коммутативная» и «некоммутативная»), теорема Сакаи и теорема фонНоймана (это более точная передача фамилии von Neumann, чем принятая в отечественной литературе «фон Нейман»). В §10.3 я дам развернутую формулировку теоремы Гельфанда и ее полное доказательство; в частности, расскажу об основной используемой конструкции — так называемом преобразовании Гельфанда. В последнем §10.4 я дам развернутую формулировку некоммутативной теоремы Гельфанда – Наймарка и кратко расскажу об основной конструкции, используемой в этой теореме — так называемой ГНС-конструкции; эти факты будут сообщены без доказательств.

§ 10.1. Вступление: основные исторические вехи

1920-е годы. Банаховы пространства уже открыты, но наличие во многих из них умножения игнорируется.

1930. Работы фон Ноймана о специальном классе (будущих) банаховых алгебр операторных «алгебрах фон Ноймана», предполагаемых вместилищах наблюдаемых квантовой механики. Среди результатов — характеризация коммутативных алгебр фон Ноймана (ср. будущую теорему 10.2.31).

1936. Банаховы алгебры (под другим именем) введены Нагумо, но толком не изучены.

1939 – 1941. Гельфанд создает теорию коммутативных банаховых алгебр (в его терминологии «нормированных колец»). См. ниже теорему 10.2.12.

1943. Гельфанд и Наймарк осознают роль инволюции и создают теорию C^*-алгебр (теоремы 10.2.22 и 10.2.23).

1956. Сакаи получает аксиоматическое описание алгебр фон Ноймана (теорема 10.2.30). «Круг замкнулся».

§ 10.2. Начальные определения, примеры и краткие формулировки основных теорем

10.2.1. Определение. *Умножением в комплексном линейном пространстве A называется билинейный оператор $m\colon A{\times}A \to A$, удовлетворяющий в записи $ab := m(a,b)$, «тождеству ассоциативности» $(ab)c = a(bc)$. Алгебра — пространство, снабженное умножением.*

Алгебра называется коммутативной, если всегда $ab = ba$. Элемент $e \in A$ называется единицей, если всегда $ea = ae = a$. Унитальная алгебра — алгебра с единицей. Элемент a унитальной алгебры называется обратимым, если существует (необходимо единственный) элемент $b \in A$ такой, что $ab = ba = e$. Этот элемент b называется обратным к a и обозначается символом a^{-1}.

Подалгебра в A — такое подпространство B, что $ab \in B$ для всех $a, b \in B$.

Примеры — любимые игрушки чистых алгебраистов. Вот они.

10.2.2. Пример. (i) $\mathbb{C}[t]$ — многочлены;
(ii) $\mathbb{C}(t)$ — рациональные функции;
(iii) M_n — $n{\times}n$-матрицы;
(iv) $\mathcal{O}(U)$ — функции голоморфные в области $U \subset \mathbb{C}$;
(v) $\mathbb{C}^M$ — все комплекснозначные функции на множестве M;
(vi) $\mathcal{L}(E)$ — все линейные операторы в линейном пространстве E;
(vii) $\mathcal{F}(E)$ — вообще говоря, не унитальная подалгебра в $\mathcal{L}(E)$, состоящая из конечномерных операторов.

Если единицы в алгебре A нет, ее можно «присоединить». Положим $A_+ := A \otimes \mathbb{C}$ и введем в A_+ умножение по следующему правилу: $(a+\lambda)(b+\mu) = ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu$. Тогда $(0,1)$ — единица в A_+, причем A отождествляется с подалгеброй $\{(a,0)\colon a \in A\}$ в A_+. Алгебра A_+ называется *унитизацией* алгебры A.

10.2.3. Определение. *Гомоморфизм — такой оператор $\varphi\colon A \to B$ между алгебрами, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Унитальный гомоморфизм — такой гомоморфизм между унитальными алгебрами, что $\varphi(e_A) = e_B$. Изоморфизм алгебр — биективный гомоморфизм.*

Спускаемся из алгебры в анализ. Вот наше основное определение.

10.2.4. Определение. *Банахова алгебра — алгебра A, одновременно являющаяся банаховым пространством, причем $\|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|$ для всех $a, b \in A$. В унитальной банаховой алгебре предполагается, что выполнено равенство $\|e\| = 1$.*

Если A — не унитальная банахова алгебра, то, если не оговорено что-нибудь другое, ее унитизация A_+ рассматривается как банахова алгебра относительно нормы

$$\|(a, \lambda)\| := \|a\| + |\lambda|.$$

В анализе есть три основных источника банаховых алгебр. Наши примеры — любимые игрушки «банаховых алгебраистов». Первый источник — теория функций. Она дает следующие примеры.

10.2.5. Пример. (i) $B(M)$ — ограниченные функции на непустом множестве M; (ii) $C(K)$ — непрерывные функции на компакте K; (iii) l_∞ — ограниченные последовательности; (iv) $L_\infty(X, \mu)$ — существенно ограниченные функции на измеримом пространстве; (v) $\mathcal{A}(D)$ — непрерывные функции на замкнутом единичном диске в $\mathbb{C}$, голоморфные в его внутренности; (vi) $C^n[a, b]$ — n раз гладкие функции на отрезке.

Все эти алгебры наделены поточечным умножением, и все, кроме последней, наделены равномерной либо — в случае $L_\infty(X, \mu)$ — существенно равномерной нормой (обозначение $\| \cdot \|_\infty$). Алгебра $C^n[a, b]$ снабжена нормой $\|f\| := \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty / k!$.

Особо выделим некоторое обобщение алгебры $C(K)$. Будем называть топологическое пространство *локально компактным*, если оно получается из компактного после выбрасывания некоторой точки. Для хаусдорфова компакта это эквивалентно «внутреннему» определению локально компактного пространства как пространства, каждая точка которого обладает окрестностью с компактным замыканием (но нам это не понадобится). Разумеется, компактное пространство локально компактно (присоединили изолированную точку, а потом выбросили).

Если локально компактное пространство K получается из компакта K_+ после выбрасывания некоей точки $\{*\}$, то заданная на K непрерывная функция φ называется *исчезающей на бесконечности*, если она остается непрерывной, будучи продолжена нулем на $\{*\}$. В случае хаусдорфова K_+ это, как легко видеть, эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $L \subset K$, что $\varphi < \varepsilon$ вне L. В частности, любая непрерывная функция на компакте исчезает на бесконечности — опять-таки (ср. выше), потому что к компакту можно присоединить изолированную точку, а потом ее выбросить. Множество непрерывных исчезающих на бесконечности функций на локально компактном пространстве K обозначается через $C_0(K)$; очевидно, что это банахова алгебра относительно поточечного умножения и равномерной нормы.

10.2.6. Замечание. Банахово пространство $C_0(\mathbb{R})$, известное вам из анализа [4], является частным случаем только что введенных пространств под тем же обозначением. Ведь прямая, с точностью до гомеоморфизма, — окружность с выброшенной точкой.

Второй источник банаховых алгебр — теория операторов.

10.2.7. Пример. (i) $\mathcal{B}(E)$ — ограниченные операторы в банаховом пространстве E; (ii) $\mathcal{K}(E)$ — вообще говоря, не унитальная подалгебра в $\mathcal{B}(E)$, состоящая из компактных операторов; (iii) $\mathcal{D}(l_p)$ — подалгебра в $\mathcal{B}(l_p), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, состоящая из диагональных операторов.

В этих алгебрах умножение — композиция, и все они снабжены операторной нормой.

Наконец, третий источник — гармонический анализ. Он дает новые примеры.

10.2.8. Пример. (i) $l_1(G)$ — все функции на группе G с конечной нормой $\|f\| = \sum_{t \in G} |f(t)| < \infty$ и так называемым сверточным умножением

$$f * g(t) = \sum_{r,s\colon\, rs=t} f(r)g(s);$$

(ii) $L_1(\mathbb{R})$ — известное вам банахово пространство, наделенное сверточным умножением.

Гомоморфизмы банаховых алгебр, как правило, предполагаются ограниченными как операторы. (Мы увидим, что часто это свойство выполнено автоматически).

10.2.9. Пример. Изометрический изоморфизм $l_\infty \to \mathcal{D}(l_p)$, сопоставляющий последовательности диагональный оператор поточечного умножения на эту последовательность.

10.2.10. Пример. Если $F\colon L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ — классическое преобразование Фурье на прямой, то $\sqrt{2\pi}F$ — сжимающий (но не изометрический) гомоморфизм банаховых алгебр.

Наиболее глубокие результаты теории банаховых алгебр получены при одном из двух предположений: либо наша алгебра коммутативна, либо она обладает некоей внутренней симметрией, так называемой инволюцией. Начнем с «коммутативной» теории.

Пусть A — (пока произвольная) банахова алгебра. Ее элемент a называется *обобщенным нульстепенным* (на западный манер — топологически нильпотентным), если $\lim \sqrt[n]{\|a^n\|} = 0$.

10.2.11. Пример. «Оператор неопределенного интегрирования» в пространстве $L_2[0,1]$ задается формулой $Tx(t) := \int_0^t x(s)\,ds$ и является обобщенным нульстепенным элементом в алгебре $\mathcal{B}(L_2[0,1])$ (или в $\mathcal{K}(L_2[0,1])$).

Коммутативную банахову алгебру называют *полупростой*, если 0 — ее единственный обобщенный нульстепенный элемент. На самом деле, есть чисто алгебраическое определение полупростой (коммутативной или некоммутативной) алгебры, которое в предположении коммутативности и «банаховости» совпадает с тем, что я сказал. Но этот факт совсем не тривиален.

Теперь уже можно передать самую суть основной теоремы «коммутативной» теории.

10.2.12. Теорема (Гельфанд). *Каждая полупростая коммутативная банахова алгебра совпадает, с точностью до изометрического изоморфизма алгебр, с некоторой алгеброй, состоящей из исчезающих на бесконечности непрерывных функций на некотором хаусдорфовом локально компактном пространстве. Эта алгебра наделена поточечным умножением и нормой, равной или большей равномерной нормы.*

И уж совсем кратко: всякая коммутативная банахова алгебра есть, при условии полупростоты, алгебра функций.

Вы можете спросить: откуда берется локально компактное пространство, на котором эти функции определены? Ответ дает знаменитая конструкция, называемая преобразованием Гельфанда. О ней пойдет речь во второй части.

Перейдем к «некоммутативной» теории. Как уже говорилось, ее основные результаты получены в предположении наличия у рассматриваемой алгебры некоей внутренней симметрии.

10.2.13. Определение. *Инволюция в алгебре* A — *отображение* $(*)\colon A \to A$*, которое, в обозначении* $a^* := (*)(a)$, $a \in A$*, обладает следующими свойствами*:

$(a+b)^* = a^* + b^*$ *(аддитивность)*;

$(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$ (*анти-однородность*);

$(ab)^* = b^* a^*$ (*анти-гомоморфность*);

$a^{**} = a$ (*период* 2).

Алгебра, снабженная инволюцией, называется *инволютивной алгеброй* или, короче, $*$*-алгеброй*. Подалгебра B в $*$-алгебре называется $*$*-подалгеброй*, если из $a \in B$ следует $a^* \in B$.

В инволютивной унитальной алгебре очевидным ообразом $e^* = e$, а также $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$ для обратимого a.

10.2.14. Пример. (i) Инволюция в пространстве $\mathbb{C}[t]$ задается равенством $(\lambda_0 + \dots + \lambda_n t^n)^* = \overline{\lambda}_0 + \dots + \overline{\lambda}_n t^n$. (ii) Инволюция в $C_0(\Omega)$, l_∞, $L_\infty(X, \mu)$ и $C^n[a,b]$ — комплексно-сопряженная функция или последовательность. (iii) Инволюция в $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $\mathcal{A}(D)$ задается равенством $w^*(z) = \overline{w(\overline{z})}$. (iv) Если H — гильбертово пространство, то инволюция в $\mathcal{B}(H)$ — переход к гильбертову сопряженному оператору. Очевидно, что $\mathcal{K}(H)$ — $*$-подалгебра в $\mathcal{B}(H)$. (v) Инволюция в $l_1(G)$ задается равенством $f^*(t) = \overline{f(t^{-1})}$, а инволюция в $L_1(\mathbb{R})$ — равенством $f^*(t) = \overline{f(-t)}$.

10.2.15. Определение. *Инволютивный гомоморфизм, или, коротко, $*$-гомоморфизм — такой гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ между $*$-алгебрами, что $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$.*

$*$-Изоморфизм $*$-алгебр — биективный $*$-гомоморфизм.

10.2.16. Пример. Указанные выше гомоморфизмы $l_\infty \to \mathcal{D}(l_p)$ и $\sqrt{2\pi}F$ являются $*$-гомоморфизмами $*$-алгебр.

Если алгебра одновременно обладает инволюцией и нормой, эти структуры обычно предполагаются согласованными. Например, так.

10.2.17. Определение. *Банахова алгебра A называется звездной, если $\|a^*\| = \|a\|$ для всякого $a \in A$.*

Разумеется, все инволютивные банаховы алгебры, приведенные выше в качестве примеров, являются звездными.

Следующее условие имеет наиболее далеко идущие последствия.

10.2.18. Определение. *Инволютивная банахова алгебра A называется абстрактной C^*-алгеброй, или просто C^*-алгеброй, если в ней выполнено «C^*-тождество» $\|a^*a\| = \|a\|^2$.*

Легко показать, что всякая C^*-алгебра является звездной.

Откуда взялся такой термин? Его ввел Ирвинг Сигал, который впоследствии объяснял, что под “C” он имел в виду замкнутость (“closeness”) алгебр при их операторной реализации (см. ниже), а звездочка подчеркивала роль инволюции.

10.2.19. Пример («Коммутативный»)**.** Алгебра $C_0(\Omega)$ на любом локально компактном пространстве Ω.

10.2.20. Пример («Некоммутативный»)**.** Алгебра $\mathcal{B}(H)$, где H — произвольное гильбертово пространство, а также ее любая замкнутая по операторной норме $*$-подалгебра (скажем, $\mathcal{K}(H)$ или алгебра диагональных операторов в $H := l_2$). Такие алгебры называются *конкретными*, или *операторными* C^*-алгебрами.

10.2.21. Замечание. Указанные инволютивные банаховы алгебры $\mathcal{A}(D)$, $C^n[a,b]$ и $L_1(\mathbb{R})$ не являются C^*-алгебрами. Для первых двух это легко проверить, а для третьей это не столь просто.

Оказывается, других примеров C^*-алгебр, кроме указанных, не существует!

10.2.22. Теорема (коммутативная теорема Гельфанда – Наймарка)**.** *Каждая коммутативная C^*-алгебра совпадает, с точностью до изометрического $*$-изоморфизма алгебр, с $C_0(\Omega)$ на некотором локально компактном пространстве Ω.*

Отсюда ценный вывод: функционально-аналитические свойства коммутативной C^*-алгебры — раз это $C_0(\Omega)$ — полностью определяются топологическими свойствами локально компактного пространства Ω, и наоборот. Говоря неформально, «коммутативная C^*-алгебра — все равно, что локально компактное пространство». (Подобное заявление имеет строгую теоретико-категорную формулировку, от которой я вас избавляю). Более того, как оказалось, имеет смысл — и приносит практические результаты! — мыслить теорию общих C^*-алгебр как «некоммутативную топопогию». (Часть весьма модной в последнее время «некоммутативной геометрии». Любопытные могут залезть в [6]).

Но что можно сказать о некоммутативных C^*-алгебрах? Ответ содержится в следующем классическом результате.

10.2.23. Теорема (некоммутативная теорема Гельфанда – Наймарка, 1943)**.** *Произвольная C^*-алгебра совпадает, с точностью до изометрического $*$-изоморфизма алгебр, с некоторой операторной* ($=$ *конкретной*) *C^*-алгеброй.*

Итак, перефразируя знаменитые слова пророка Мухаммеда, можно сказать: нет C^*-алгебр, кроме операторных C^*-алгебр.

А теперь вы можете спросить: откуда берется гильбертово пространство, где эти операторы действуют? Ответ дает ГНС-конструкция, названная так в честь Гельфанда и Наймарка, ее создавших, и Сигала, ее усовершенствовавшего и осознавшего ее независимую ценность (включая физические интерпретации). Я собираюсь вкратце объяснить, что это такое, в §10.4.

10.2.24. Замечание. Легко заметить, что в C^*-алгебре выполнена и такая вариация C^*-тождества: $\|a^*a\| = \|a^*\|\|a\|$. Вопрос о том, верно ли обратное, оказался весьма крепким орешком. Только через четверть века после работы Гельфанда и Наймарка, благодаря усилиям целого ряда математиков, оказалось, что это действительно так.

Но я обещал сформулировать пять основных теорем, а пока привел только три. Остались самая молодая и, как ни странно, самая старая из этих теорем.

Во вступлении упоминалось, что первый конкретный (в житейском смысле слова) класс операторных алгебр, с подчеркнутым вниманием к операции умножения, был введен фон Нойманом в 1930 г. Выражаясь по-современному, это был специальный класс C^*-алгебр.

Как вам должно быть известно, алгебра $\mathcal{B}(H)$, где H — гильбертово пространство, обладает, помимо «нормовой» топологии, еще и другими топологиями. Нам хватит любой из них; пусть это будет, для определенности, так называемая *сильно-операторная* (so-) топология, задаваемая системой преднорм $\{\|\cdot\|_x \colon x \in H\}$, где $\|T\|_x := \|Tx\|$ (см. [4]).

10.2.25. Определение. *Инволютивная подалгебра в $\mathcal{B}(H)$, содержащая тождественный оператор $\mathbf{1}$, называется алгеброй фон Ноймана* (*иногда, чтобы избежать недоразумений, конкретной алгеброй фон Ноймана*)*, если она замкнута в $\mathcal{B}(H)$ относительно сильно-операторной топологии.*

Поскольку so-топология слабее нормовой, всякая алгебра фон Ноймана является C^*-алгеброй. Разумеется, сама $\mathcal{B}(H)$, алгебра скалярных операторов $\{\lambda\mathbf{1}\colon \lambda \in \mathbb{C}\}$, а также алгебра диагональных операторов в l_2 являются алгебрами фон Ноймана. С другой стороны, $\mathcal{K}(H)$ таковой не является.

10.2.26. Задача. so-замыкание $\mathcal{K}(H)$ в алгебре $\mathcal{B}(H)$ совпадает со всей $\mathcal{B}(H)$.

Оказалось, и это также один из важнейших результатов теории «алгебр анализа», что алгебры фон Ноймана могут быть определены в чисто алгебраических терминах. Назовем *коммутантом* подмножества M в $\mathcal{B}(H)$ множество $M^! := \{b \in \mathcal{B}(H) \colon ab = ba$ для всех $a \in M\}$, а *бикоммутантом* этого множества — множество $M^{!!} := (M^!)^!$.

10.2.27. Задача. Коммутант алгебры $\mathcal{K}(H)$ — алгебра скалярных операторов. Как следствие, бикоммутант алгебры $\mathcal{K}(H)$ — вся $\mathcal{B}(H)$.

10.2.28. Теорема (фон Ноймана о бикоммутанте)**.** *Самосопряженная подалгебра A в $\mathcal{B}(H)$ является алгеброй фон Ноймана тогда, и только тогда, когда она равна своему бикоммутанту*: $A^{!!} = A$.

После реализации абстрактных C^*-алгебр как операторных (Теорема 10.2.23) возник естественный вопрос: можно ли аксиоматически охарактеризовать алгебры фон Ноймана? Долго над этим бились, и только в 1956 г. неожиданно простой и красивый ответ пришел из Японии.

10.2.29. Определение. *Абстрактная C^*-алгебра A называется W^*-алгеброй, или абстрактной алгеброй фонНоймана, если, как банахово пространство, она обладает предсопряженным пространством. Последнее означает, что есть банахово пространство A_*, такое, что его сопряженное $(A_*)^*$ изометрически изоморфно A.*

Тут уместно заметить, что алгебра диагональных операторов в l_2 обладает предсопряженным, а именно l_1; это вы можете доказать сами. Далее (это уже труднее), сама $\mathcal{B}(H)$ тоже обладает предсопряженным, чью роль играет так называемое пространство ядерных операторов $\mathcal{N}(H)$. А вот $\mathcal{K}(H)$ уже не обладает предсопряженным.

10.2.30. Теорема (Сакаи)**.** *C^*-алгебра тогда и только тогда является W^*-алгеброй* (*т. е. имеет предсопряженное пространство*)*, когда она изометрически $*$-изоморфна некоторой конкретной алгебре фон Ноймана* (*т. е. so-замкнутой $*$-подалгебре в $\mathcal{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H*)*.*

Теперь, «чтобы все было красиво», чего не хватает? Посмотрите на таблицу:

Некоммутативная Теорема Гельфанда – Наймарка дает характеризацию, в конкретных терминах анализа, абстрактных C^*-алгебр	Коммутативная Теорема Гельфанда – Наймарка дает характеризацию, в конкретных терминах анализа, абстрактных коммутативных C^*-алгебр
Теорема Сакаи дает характеризацию, в конкретных терминах анализа, W^*-алгебр ($=$ абстрактных алгебр фонНоймана)	?

«?» означает, конечно, следующий вопрос. Как можно охарактеризовать, в конкретных терминах анализа, *коммутативные* W^*-алгебры?

Но ответ уже существовал, причем еще с 1930 г., только он был сформулирован для алгебр, состоящих из операторов и в терминах того времени. Это пятая (и последняя) основная теорема этих лекций.

10.2.31. Теорема (фон Нойман)**.** *Коммутативная W^*-алгебра совпадает, с точностью до изометрического $*$-изоморфизма, с алгеброй $L_\infty(X, \mu)$ на некотором измеримом пространстве (X, μ).*

Так что вместо вопросительного знака в таблице мы могли бы написать «Теорема фон Ноймана дает характеризацию, в конкретных терминах анализа, коммутативных W^*-алгебр».

Если, как было сказано, теория C^*-алгебр (абстрактных или конкретных — сейчас это не важно) заслуживает, в силу теоремы 10.2.22, названия «некоммутативная топология», то с тем же основанием мы вправе сказать, что теория W^*-алгебр (или, в конкретной форме, алгебр фон Ноймана) есть, в силу теоремы 10.2.31, «некоммутативный действительный анализ». И снова это весьма полезный взгляд на вещи; см., например, [6], эту библию некоммутативных геометров.

§ 10.3. Теорема Гельфанда: развернутая формулировка и доказательство

Мы переходим к более детальному изложению «коммутативной» теории. Так откуда берется желанное локально компактное пространство Ω и каким образом элементы нашей абстрактной алгебры превращаются в функции? Следующее определение, как мы потом увидим, доставит точки нашего пространства.

10.3.1. Определение. *Характер* (*пока произвольной*) *алгебры — такой функционал χ на A, что $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b), a, b \in A$. Иными словами, характер алгебры — ее гомоморфизм в простейшую алгебру $\mathbb{C}$.*

Разумеется, нулевой функционал, обозначаемый $\mathbf{0}$, является характером. Если χ — ненулевой характер унитальной алгебры, то очевидным образом $\chi(e) = 1$.

При фиксированной алгебре A обозначим множество всех ее характеров через Ω_+, а множество ненулевых характеров через Ω; может так случиться, что последнее, в отличие от первого, пусто.

10.3.2. Предложение. *Каждый характер χ банаховой алгебры A является* («*автоматически*») *ограниченным, более того, сжимающим функционалом* (*т. е.* $\|\chi\| \leqslant 1$).

Доказательство. Если χ не является сжимающим, то найдется такой элемент $a \in A$, что $\|a\| < 1$ и $\chi(a) = 1$. Положим $b := \sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Тогда $ab = b - a$ и $\chi(b) = \chi(ab) = \chi(b) - 1$. Противоречие. $\square$

10.3.3. Задача. У алгебр M_n и (что сложнее показать) $\mathcal{B}(H)$ нет ни одного нетривиального характера. Этим же свойством обладает коммутативная банахова алгебра, определенная как замыкание в $\mathcal{B}(L_2[0,1])$ множества многочленов без свободного члена от оператора неопределенного интегрирования.

С этого момента и вплоть до особого объявления мы считаем, что A — банахова алгебра. В этой ситуации из предыдущего предложения следует, что Ω_+ и Ω — части сопряженного пространства A^* банахова пространства A и, более того, единичного шара B_{A^*} в A^*.

Напомним об известной вам слабой* ($= w^*$-) топологии в A^*. Индуцированная ею топология в Ω, а также в Ω_+, называется топологией Гельфанда в соответствующем пространстве. Будучи топологическими подпространствами в (A^*, w^*), Ω и Ω_+ хаусдорфовы.

10.3.4. Предложение. *Подмножество Ω_+ замкнуто в (A^*, w^*). Если A унитальна, то же верно и для Ω.*

Доказательство. Предположим, что направленность χ_ν сходится в пространстве (A^*, w^*) к некоему элементу f, т. е. для всякого элемента $c \in A$, в частности для $c = a, b, ab$, выполнено равенство

$$f(c) = \lim_\nu \chi_\nu(c).$$

Тогда

$$f(ab) = \lim_\nu \chi_\nu(ab) = \lim_\nu \chi_\nu(a)\chi_\nu(b) = \lim_\nu \chi_\nu(a) \lim_\nu \chi_\nu(b) = f(a)f(b).$$

Отсюда $f \in \Omega_+$, и Ω_+ замкнуто. Далее, если A унитальна, а все χ_ν в нашей направленности — ненулевые, то $f(e) = \lim_\nu \chi_\nu(e) = 1 \neq 0$. Итак, $f \in \Omega$, т. е. Ω замкнуто. □

Напомним, что, в силу теоремы Банаха – Алаоглу, B_{A^*} — компакт в слабой* топологии. Поэтому из предыдущего предложения вытекает такое утверждение.

10.3.5. Предложение. *В топологии Гельфанда пространство Ω_+ — хаусдорфов компакт; таково же в унитальном случае и Ω. В общем случае $\Omega = \Omega_+ \setminus \mathbf{0}$ — локально компактное пространство.*

Теперь для $a \in A$ обозначим через $\widehat{a}_+ \colon \Omega_+ \to \mathbb{C}$ функцию, сопоставляющую каждому χ число $\chi(a)$. Ясно, что $\widehat{a}_+(\mathbf{0}) = 0$. Если $\Omega \neq \varnothing$, то обозначим сужение $\widehat{a}_+$ на Ω через $\widehat{a}$.

10.3.6. Предложение. *Для любого $a \in A$ функция $\widehat{a}_+$ непрерывна на Ω_+ относительно топологии Гельфанда. Если, вдобавок, $\Omega \neq \varnothing$, то функция $\widehat{a}$ непрерывна на Ω относительно той же топологии и исчезает на бесконечности.*

Доказательство. Каноническое вложение $i \colon A \to A^{**}$ определено по правилу $[i(a)](f) := f(a)$. Как известно (и очевидно), «функционал означивания» $i(a) \colon A^* \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(a)$ непрерывен в слабой* топологии. Но функция $\widehat{a}_+$ — не что иное, как ограничение этого функционала на Ω_+. Дальше ясно. □

Теперь каждому $a \in A$ сопоставим функцию $\widehat{a}_+$. По предыдущему предложению этим определено отображение $\Gamma_+ \colon A \to C(\Omega_+)$. Очевидно, что Γ_+ — гомоморфизм, к тому же являющийся, в силу предложения 10.3.2, сжимающим оператором.

Если же, вдобавок, $\Omega \neq \varnothing$, то, в силу того же предложения, определено отображение $\Gamma \colon A \to C_0(\Omega)$, $a \mapsto \widehat{a}$. Это также, разумеется, сжимающий гомоморфизм банаховых алгебр.

10.3.7. Определение. *В случае, когда A — коммутативная банахова алгебра, пространство Ω с топологией Гельфанда называется гельфандовским спектром, или просто спектром этой алгебры. В этом же случае, если, конечно, $\Omega \neq \varnothing$, для элемента $a \in A$ функция $\widehat{a} \colon \Omega \to \mathbb{C}$ называется преобразованием Гельфанда этого элемента, а гомоморфизм $\Gamma \colon A \to C_0(\Omega)$ называется преобразованием Гельфанда алгебры A.*

Дотошности ради подчеркнем, что гомоморфизм Γ_+ определен всегда, а преобразование Гельфанда Γ определено тогда и только тогда, когда у алгебры A есть ненулевые характеры.

10.3.8. Замечание. Если A унитальна, пространство Ω также называется *пространством максимальных идеалов* нашей алгебры. Почему так красиво — выяснится позднее.

Наконец, мы готовы дать подробную формулировку основной теоремы «коммутативной» главы теории банаховых алгебр, краткая формулировка которой фигурировала выше как теорема 10.2.12.

10.3.9. Теорема (Гельфанд). *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Тогда*

(i) *для любого $a \in A$ выполнено равенство*

$$\|\widehat{a}_+\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|},$$

в частности, $\widehat{a}_+ = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim \sqrt[n]{\|a^n\|} = 0$.

Как немедленные следствия:

— гельфандовский спектр Ω нашей алгебры (*множество ненулевых характеров*) *пуст тогда и только тогда, когда все элементы в A являются нульстепенными;*

— если не все элементы в A являются нульстепенными (*т. е. — см. выше — Ω не пуст, и преобразование Гельфанда $\Gamma \colon A \to C_0(\Omega)$ имеет смысл*)*, то ядро преобразования Гельфанда состоит в точности из обобщенных нульстепенных элементов.*

(ii) *Если A унитальна, то Ω заведомо не пуст и элемент $a \in A$ обратим тогда, и только тогда, когда $\chi(a) \neq 0$ для всех $\chi \in \Omega$.*

Из этой теоремы видно, в частности, что если алгебра A полупроста и отлична от нуля, то гомоморфизм Γ инъективен и, следовательно, осуществляет изоморфизм между A и ее образом. Этот образ состоит из непрерывных исчезающих на бесконечности функций на Ω и является банаховой алгеброй относительно нормы, корректно определенной равенством $\|\Gamma(a)\| := \|a\|$. После введения этой нормы наш изоморфизм, разумеется, становится изометрическим. Напомнив, что, в силу предложения 10.3.2, $\|\Gamma(a)\|_\infty \leqslant \|a\|$, мы немедленно получаем теорему 10.2.12 (случай $A = 0$ очевиден).

Преобразование Гельфанда присутствует, явно или неявно, практически во всех разделах функционального анализа. Рекомендуем слушателям разобраться в приведенных четырех примерах.

10.3.10. Пример. Для «алгебры на диске» $\mathcal{A}(D)$ ее спектр Ω совпадает (здесь и в других примерах имеется в виду — с точностью до гомеоморфизма) с D, а $\Gamma\colon \mathcal{A}(D) \to C(D)$ есть просто естественное вложение.

Следующие два примера на самом деле суть специальные случаи сформулированной выше теоремы 10.2.22 («коммутативной теоремы Гельфанда – Наймарка»).

10.3.11. Пример. Для алгебры l_∞ ее спектр Ω есть $\beta\mathbb{N}$, так называемая стоун-чеховская компактификация натурального ряда $\mathbb{N}$, довольно сложно устроенный компакт, содержащий $\mathbb{N}$ в качестве плотного подмножества и имеющий мощность «два в степени континуум». В этом случае $\Gamma\colon l_\infty \to C(\beta\mathbb{N})$ — изометрический изоморфизм, сопоставляющий функции $a \in l_\infty$, $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ее продолжение по непрерывности на компакт $\beta\mathbb{N}$.

10.3.12. Замечание. Вообще, для функциональных алгебр преобразование Гельфанда указывает на «исправленную», по сравнению с исходной, область определения рассматриваемых функций.

10.3.13. Пример. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, A — замыкание по операторной норме множества всех многочленов от T. Тогда Ω — спектр $\sigma(T)$, нашего оператора, Γ — изометрический изоморфизм, переводящий $S \in A$ в ту единственную $f \in C(\sigma(T))$, для которой $f(T) = S$.

10.3.14. Пример. Для $A = L_1(\mathbb{R})$ имеем $\Omega = \mathbb{R}$, а преобразование Гельфанда, с точностью до множителя, есть классическое преобразование Фурье: $\Gamma = \sqrt{2\pi}F$ есть сжимающий, но не изометрический гомоморфизм.

Доказательство теоремы Гельфанда мы приведем позже, а сейчас расскажем об одном, чуть ли не первом приложении этой теоремы.

Много лет назад оно вызвало к теории Гельфанда значительный интерес широких кругов математиков. Рассмотрим объект классического гармонического анализа: 2π-периодическую функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, разлагающуюся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, т. е. представимую в виде $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$. Множество таких функций обозначим через W. Хорошо известен такой факт.

10.3.15. Теорема (Винер). *Если функция $f \in W$ нигде не обращается в нуль, то функция $1/f$ также лежит в W.*

Первоначальное доказательство Винера нетривиально и основано — по крайней мере, по мнению вашего лектора — на изощренной аналитической технике. А вот как доказывает эту теорему Гельфанд.

Доказательство. Как легко проверить, W является коммутативной банаховой алгеброй относительно поточечных операций и нормы $\|f\| := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$, где $c_n, n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье нашей функции. Найдем ее гельфандовский спектр.

Очевидно, что каждое число $s \in [0, 2\pi)$ доставляет «характер означивания» $\chi_s\colon f \mapsto f(s)$. Покажем, что других ненулевых характеров алгебра W не имеет.

Возьмем произвольный элемент $\chi \in \Omega$. Пусть $\chi(e^{it}) = \lambda$. Тогда, конечно, $\chi(e^{-it}) = 1/\lambda$, значит, $\chi(e^{int}) = \lambda^n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Но так как $\|e^{it}\| = \|e^{-it}\| = 1$, то в силу предложения 10.3.2 имеем $|\lambda|, |1/\lambda| \leqslant 1$. Отсюда $|\lambda| = 1$ и $\lambda = e^{is}$ для некоторого $s \in [0, 2\pi)$. Но тогда для любой функции $f \in W$, разлагающейся в ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, абсолютная сходимость этого ряда влечет равенство

$$\chi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ins} = f(s).$$

Таким образом, в терминах преобразования Гельфанда $\widehat{f}(\chi) = f(s)$. Поэтому, раз функция f нигде не равна нулю, то же верно и для функции $\widehat{f}$ на Ω. Но тогда, в силу утверждения (ii) теоремы Гельфанда, f — обратимый элемент алгебры W. Это как раз то, что нам нужно. □

10.3.16. Задача. Как топологическое пространство, гельфандовский спектр алгебры W гомеоморфен окружности.

Теперь вплотную займемся доказательством теоремы Гельфанда. Оно использует идеи и факты алгебры и комплексного анализа, представляющие большой самостоятельный интерес. По-видимому, именно благодаря Гельфанду они нашли применение в функциональном анализе.

Для унитальной алгебры A мы обозначим через $\mathrm{Inv}(A)$ множество ее обратимых элементов, а через $\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(A) \to \mathrm{Inv}(A)$ отображение $a \mapsto a^{-1}$.

10.3.17. Предложение. *Открытый шар $U(e, 1)$ лежит в $\mathrm{Inv}(A)$, а отображение inv непрерывно в e.*

Отсюда следует такое утверждение.

10.3.18. Предложение. *Множество $Inv(A)$ открыто в A, а отображение inv непрерывно всюду.*

Эти факты сообщались вам на третьем курсе, по крайней мере для операторов, но все рассуждения дословно переносятся на случай элементов банаховых алгебр. Следующее определение также по существу вам известно.

10.3.19. Определение. *Спектр элемента a унитальной алгебры A есть множество $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon a - \lambda e$ не обратим$\}$. Если алгебра A не унитальна, то спектром ее элемента a считается спектр этого элемента в A_+. Обозначим спектр через $\sigma(a)$. Функция $\mathcal{R}\colon \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to A$, $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ называется резольвентной функцией элемента a.*

10.3.20. Задача. Найдите $\sigma(a)$, где (i) $a \in \mathbb{C}[t]$, причем $a \neq \mathrm{const}$; (ii) $a \in \mathbb{C}(t), a \neq \mathrm{const}$; (iii) $a \in \mathbb{C}^M$. Ответы: $\mathbb{C}, \varnothing, \{a(t)\colon t \in M\}$.

Мы видим, что каждое подмножество в $\mathbb{C}$, пустое или не пустое, может быть спектром некоторого элемента некоторой алгебры. Однако если A — банахова алгебра, то подобной вседозволенности нет: из предыдущих предложений следует такое фактически вам знакомое утверждение.

10.3.21. Предложение. *Для любого элемента $a \in A$ его спектр $\sigma(a)$ принадлежит кругу $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant \|a\|\}$ и замкнут. Таким образом, $\sigma(a)$ — компакт.*

Точно также, как для случая операторов, доказывается, что для элемента банаховой алгебры A его резольвентная функция непрерывна и даже голоморфна в том смысле, что для любого $f \in A^*$ функция $\lambda \mapsto f[\mathcal{R}(\lambda)]$ голоморфна в обычном смысле. Отсюда, с помощью знакомого вам рассуждения, использующего сперва теорему Лиувилля, а затем теорему Хана – Банаха, мы получаем такой результат.

10.3.22. Предложение. *Спектр каждого элемента банаховой алгебры не пуст.*

А вот об одном из важнейших следствий этого предложения, возможно, вам не рассказывали. Напомним, что алгебра называется телом, если ее любой ненулевой элемент обратим.

10.3.23. Теорема (Гельфанд – Мазур). *Банахово тело изометрически изоморфно полю комплексных чисел.*

Доказательство. Произвольно выберем элемент $a \in A$. Согласно предыдущему предложению, найдется $\lambda \in \mathbb{C}$, такое, что $a - \lambda e$ не обратим. Но тогда $a - \lambda e = 0$, и $a = \lambda e$. Сопоставив нашему a это $\lambda \in \mathbb{C}$, мы получаем корректно определенное отображение $i\colon A \to \mathbb{C}$. Рассмотрим также отображение $j\colon \mathbb{C} \to A$, $\lambda \mapsto \lambda e$; это, разумеется, изометрический гомоморфизм. Но очевидно, что $ij = \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ и $ji = \mathbf{1}_A$. Это означает, в частности, что j биективен. Дальше ясно. $\square$

Вернемся в чистую алгебру и напомним одно из ее важнейших понятий.

10.3.24. Определение. *Подпространство I алгебры A называется ее левым идеалом, если для всех $x \in I$, $a \in A$ верно включение $ax \in I$. Определение правого идеала получаем заменой на включение $xa \in I$. Подпространство алгебры, являющееся одновременно ее левым и правым идеалом, называется ее двусторонним идеалом.*

Разумеется, в случае коммутативной алгебры различие между указанными тремя типами идеалов пропадает, и мы будем говорить просто *идеал*.

10.3.25. Пример. Пусть E_0 — подпространство в линейном пространстве E. Тогда множество $\{T\colon E_0 \subset \mathrm{Ker}(T)\}$ является левым, множество $\{T\colon \mathrm{Im}(T) \subset E_0\}$ — правым идеалом в алгебре $\mathcal{L}(E)$. Кроме того, $\mathcal{F}(E)$ — двусторонний идеал указанной алгебры.

10.3.26. Задача. Если E конечномерно, то других односторонних идеалов, кроме указанных, в $\mathcal{L}(E)$ нет, а $\{0\}$ — единственный двусторонний идеал этой алгебры. Если E счетномерно, то $\mathcal{F}(E)$ — единственный ненулевой двусторонний идеал в $\mathcal{L}(E)$.

Напомним также такое очевидное утверждение.

10.3.27. Предложение. *Ядро любого гомоморфизма алгебр, в частности, любого характера — двусторонний идеал в своей области определения.*

10.3.28. Пример. Пусть M — множество, N — его подмножество. Тогда $I := \{f\colon f|_N = 0\}$ — идеал в $\mathbb{C}^M$.

10.3.29. Задача. Если M бесконечно, то в алгебре $\mathbb{C}^M$ есть и другие идеалы.

10.3.30. Предложение. *Если алгебра унитальна, то ее элемент обратим тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному* *собственному* ($=$ *не совпадающему со всей алгеброй*) *идеалу любого типа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $a \in I$, где I, для определенности, левый идеал. Любой элемент $b \in A$ представим как $ba^{-1}a$. Отсюда $b \in I$, и $I = A$.

Достаточность. Для рассматриваемого элемента $a \in A$ левый идеал $\{ba\colon b \in A\}$ и правый идеал $\{ab\colon b \in A\}$ должны содержать единицу. Это означает, что a обратим слева и справа, а потому обратим. $\square$

10.3.31. Определение. *Максимальный идеал — такой собственный идеал, который не содержится ни в одном собственном идеале того же типа.*

10.3.32. Предложение. *Ядро ненулевого характера является максимальным идеалом любого типа.*

Доказательство. В силу предложения 10.3.27, это двусторонний, а значит, левый и правый идеал. К тому же, будучи ядром ненулевого функционала, это подпространство коразмерности 1. Значит, это максимальное собственное подпространство и уж тем более идеал. $\square$

10.3.33. Предложение. *В унитальной алгебре всякий собственный* (*в том числе нулевой*) *идеал содержится в максимальном идеале того же типа. Как следствие, в унитальной алгебре всегда есть максимальные идеалы любого типа.*

Доказательство. Данное доказательство — типичный ритуальный танец вокруг леммы Цорна (и здесь, кстати, без нее, а, стало быть, без аксиомы выбора не обойтись). Если I — наш идеал, рассмотрим множество $\mathcal{I}$ всех собственных идеалов того же типа, содержащих I; оно частично упорядочено по включению. Поскольку объединение любого возрастающего семейства идеалов из $\mathcal{I}$ не содержит единицу и является идеалом, условия леммы Цорна выполнены. Поэтому $\mathcal{I}$ содержит максимальный элемент, который и будет нужным максимальным идеалом. $\square$

10.3.34. Задача. Идеал c_{00} в алгебре c_0 не содержится ни в одном максимальном.

Комбинируя предложения 10.3.30 и 10.3.33, мы получаем такой факт.

10.3.35. Предложение. *Если алгебра унитальна, то ее элемент обратим тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному максимальному идеалу любого типа.*

10.3.36. Предложение. *В унитальной банаховой алгебре максимальный идеал любого типа замкнут.*

Доказательство. Пусть I — наш идеал. Тогда его замыкание $\overline{I}$ есть очевидным образом идеал того же типа. Далее, I, состоя из необратимых элементов, не пересекается с открытым шаром $U(e,1)$ (предложение 10.3.17). Значит, то же верно и для идеала $\overline{I}$. Поэтому последний — собственный идеал, содержащий I. Следовательно, он совпадает с идеалом I. □

Пусть теперь I — двусторонний идеал в алгебре A. Как легко проверить, факторпространство A/I является алгеброй относительно умножения $(a+I)(b+I) := ab+I$. Если A имеет единицу e, то $e+I$ — единица в A/I. Построенная алгебра называется *факторалгеброй алгебры A по идеалу I*; она, разумеется коммутативна, если такова A. Если A, вдобавок, есть банахова алгебра, а I замкнут, то, как вы знаете, A/I — банахово пространство относительно факторнормы

$$\|a+I\| = \inf\{\|b\|\colon b \in a+I\}.$$

В данной ситуации это, конечно, еще и банахова алгебра. При этом факторотображение $\tau\colon A \to A/I$, $a \mapsto a+I$ есть сюръективный гомоморфизм, более того, коизометрия, с ядром I.

10.3.37. Предложение. *Пусть I — идеал в унитальной коммутативной алгебре A. Тогда I — максимальный идеал в том и только том случае, когда A/I — поле.*

Доказательство. Покажем, что если $a \notin I$, то $a+I \in \mathrm{Inv}(A/I)$. Рассмотрим в A/I множество $J := \{ba+c\colon b \in A, c \in I\}$. Очевидно, что это идеал, содержащий I и не совпадающий с последним. Так как I — максимальный идеал, то верно равенство $J = A$, поэтому для некоторых элементов b и c выполнено равенство $ba+c = e$. Это влечет равенство

$$(a+I)(b+I) = ba+I = e+I,$$

т. е. $b+I = (a+I)^{-1}$.

Проверку достаточности (которая нам не пригодится) я оставляю читателям. □

Мы подошли к кульминационному моменту в доказательстве теоремы 10.2.12. В предположении, что алгебра A коммутативна, обозначим через $\mho$ множество ее максимальных идеалов. В силу предложения 10.3.32, корректно определено отображение $\mathcal{G}\colon \Omega \to \mho$, сопоставляющее ненулевому характеру его ядро.

10.3.38. Предложение. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Тогда $\mathcal{G}$ осуществляет биекцию между Ω и $\mho$.* (*Таким образом, множество ненулевых характеров нашей алгебры естественно отождествляется с множеством ее максимальных идеалов*; *отсюда и название «пространство максимальных идеалов»*).

Доказательство. Инъективность $\mathcal{G}$ легко следует из того, что ядра ненулевых характеров имеют коразмерность 1. Нам осталось показать, что каждый максимальный идеал I в A есть ядро некоторого характера. Рассмотрим A/I. Это, как отмечалось, банахова алгебра и к тому же, согласно предыдущему предложению, поле (и тем более тело). Поэтому, в силу теоремы Гельфанда – Мазура, существует изометрический изоморфизм $i\colon A/I \to \mathbb{C}$. Но тогда $\chi := i\tau\colon A \to \mathbb{C}$ есть, разумеется, характер с ядром I. $\square$

Отсюда мы получаем, в частности, утверждение (ii) теоремы Гельфанда: надо лишь объединить предыдущее предложение с предложениями 10.3.33 и 10.3.35. Но над утверждением (i) еще придется поработать.

Везде до конца этого параграфа, говоря об A, мы предполагаем, что это коммутативная банахова алгебра.

10.3.39. Предложение. *Если A унитальна, то для $a \in A$ выполнено равенство $\sigma(a) = \{\widehat{a}(\chi)\colon \chi \in \Omega\}$. Если A не унитальна, то для $a \in A$ выполнено равенство $\sigma(a) = \{\widehat{a}_+(\chi)\colon \chi \in \Omega_+\}$.*

Доказательство. В унитальном случае для $\lambda \in \mathbb{C}$ включение $\lambda \in \sigma(a)$, иначе говоря, необратимость $a - \lambda e$, эквивалентно, согласно уже доказанному (ii) теоремы Гельфанда, тому, что некоторого $\chi \in \Omega$ выполнено $\chi(a - \lambda e) = 0$, т. е. $\lambda = \widehat{a}(\chi)$.

Если же A не унитальна, то, согласно только что доказанному, включение $\lambda \in \sigma(a)$ эквивалентно тому, что $\lambda = \widetilde{\chi}(a)$ для некоторого ненулевого характера $\widetilde{\chi}$ на A_+. Отсюда $\lambda = \chi(a)$, где $\chi \in \Omega_+$ — сужение $\widetilde{\chi}$ на A. Обратно, если $\lambda = \chi(a)$ для $\chi \in \Omega_+$, то $\lambda = \widetilde{\chi}(a)$, где $\widetilde{\chi}$ совпадает с χ на A и равен 1 в присоединенной единице в A_+. Поэтому включение $\lambda \in \sigma(a)$ эквивалентно тому, что для некоторого $\chi \in \Omega_+$ выполнено равенство $\lambda = \chi(a)$, т. е. $\lambda = \widehat{a}_+(\chi)$. $\square$

Поскольку для любого $a \in A$ его спектр $\sigma(a)$ — непустой компакт, то корректно определено число

$$r(a) := \max\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(a)\},$$

так называемый *спектральный радиус* элемента a. Из предыдущего предложения непосредственно следует такое утверждение.

10.3.40. Предложение. *Для любой коммутативной банаховой алгебры A (унитальной или нет) и любого элемента $a \in A$ выполнено равенство $\|\widehat{a}_+\|_\infty = r(a)$.*

Осталось связать спектральный радиус элемента алгебры с поведением норм его степеней.

10.3.41. Предложение. *Для любого элемента $a \in A$ существует предел $\lim \sqrt[n]{\|a^n\|}$, и это число совпадает с $r(a)$.*

Доказательство. Доказательство предложения естественно распадается на две части, объединяя которые мы получаем требуемое равенство. Если A не унитальна, то присоединенную единицу мы будем также обозначать через e; это не вызовет путаницы.

Докажем, что выполнено неравенство

$$r(a) \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{\|a^n\|}.$$

Для этого возьмем $\lambda \in \sigma(a)$. Тогда $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Иначе элемент $a^n - \lambda^n e$, равный $(a - \lambda e)b$ для

$$b = a^{n-1} + \lambda a^{n-2} + \lambda^2 a^{n-3} + \dots + \lambda^{n-2} a + \lambda^{n-1},$$

имел бы обратный, скажем, c, тогда $a - \lambda e = cb^{-1}$ также имел бы обратный bc^{-1}. В силу предложения 10.3.21 имеем $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$, откуда $|\lambda| \leqslant \sqrt[n]{\|a^n\|}$. Остается перейти к нижнему пределу по n.

Не столь проста вторая часть. Докажем неравенство

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\|a^n\|} \leqslant r(a).$$

Вспомним о резольвентной функции $\mathcal{R}\colon \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to A$, $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ элемента $a \in A$. Из записи $a - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1} a)$ при $\lambda \neq 0$ следует, что для некоторой окрестности, скажем, U, бесконечно удаленной точки в $\mathbb{C}$ выполнено равенство $\mathcal{R}(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} a^n$ (здесь мы полагаем $a^0 := e$). Поэтому для любых $f \in A^*$ и $\lambda \in U$ имеем $f[\mathcal{R}(\lambda)] = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} f(a^n)$. Но, как уже упоминалось ранее, функция $f[\mathcal{R}(\lambda)]$ голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, в частности в кольце $V := \{\lambda\colon |\lambda| > r(a)\}$. Следовательно, в последнем кольце эта функция разлагается в ряд Лорана. Как вы знаете из комплексного анализа, коэффициенты этого ряда должны быть теми же, что и коэффициенты ряда Лорана, представляющего нашу функцию в U. Поэтому равенство

$$f[\mathcal{R}(\lambda)] = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} f(a^n)$$

выполнено во всем кольце V. Отсюда, в частности, следует, что для каждого $\lambda \in V$ последовательность $-\lambda^{-(n+1)} f(a^n)$, $n = 0, 1, \ldots$, ограничена.

Сопоставив всяким $f \in A^*$ и $n \in \mathbb{N}$ число $-\lambda^{-(n+1)} f(a^n)$, мы видим, что для каждого $\lambda \in V$ возникает последовательность ограниченных функционалов на $A*$, а именно $\alpha_n \colon f \mapsto -\lambda^{-(n+1)} f(a^n)$. Из только что сказанного следует, что эта последовательность поточечно ограничена. Отсюда, по теореме Банаха – Штейнгауза, для некоторого $C > 0$ верна оценка $\|\alpha_n\| \leqslant C$. В то же время, поскольку α_n есть образ $-\lambda^{-(n+1)} a^n$ при каноническом изометрическом вложении $i \colon A \to A^{**}$, то $\|\alpha_n\| = \| - \lambda^{-(n+1)} a^n\|$ и $\|a^n\| \leqslant |\lambda|^{n+1} C$. Извлекая корни, получаем для каждого n оценку $\sqrt[n]{\|a^n\|} \leqslant |\lambda| \sqrt[n]{\lambda C}$. Переходя к верхнему пределу по n и видя, что правая часть имеет предел $|\lambda|$, мы получаем нужное неравенство. Поскольку λ — любое число из V, лемма доказана. Дальше ясно. □

Объединяя предложения 10.3.40 и 10.3.41, мы получаем равенство, фигурирующее в первом утверждении теоремы Гельфанда, и, как его немедленные следствия, остальные факты, указанные в его формулировке. Теорема Гельфанда полностью доказана.

В заключение приведем без доказательства более подробную формулировку теоремы 10.2.22.

10.3.42. Теорема. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра. Тогда ее преобразование Гельфанда $\Gamma \colon A \to C_0(\Omega)$ является изометрическим $*$-изоморфизмом банаховых алгебр.*

§ 10.4. ГНС-конструкция и универсальное представление

Здесь мы вкратце, не особо вдаваясь в детали, изложим основные доказательства теоремы 10.2.23 (некоммутативной теоремы Гельфанда – Наймарка).

Итак, A есть C^*-алгебра; будем для простоты считать, что она унитальна. Очевидно, наша задача — найти гильбертово пространство $\mathbf{H}$ и изометрический $*$-гомоморфизм $\pi \colon A \to \mathcal{B}(\mathbf{H})$. Тогда образ этого гомоморфизма, разумеется, и окажется той самой конкретной C^*-алгеброй, которая изометрически $*$-изоморфна нашей «абстрактной» алгебре A.

Если в коммутативной теории выдающуюся роль играют характеры, то теперь на первый план выходит следующее понятие.

До особого объявления A — произвольная унитальная $*$-алгебра.

10.4.1. Определение. *Функционал $f \colon A \to \mathbb{C}$ называется положительным, если $f(a^* a) \geqslant 0$ для всех $a \in A$.*

Заметим, что указанное свойство влечет равенство $f(a^*) = \overline{f(a)}$.

10.4.2. Пример. Положительным функционалом на Ω, где Ω — компакт, является $f\colon a \mapsto \int_\Omega a(t)\,\mu(dt)$ для любой конечной регулярной меры μ на Ω.

10.4.3. Пример. Положительным функционалом на $\mathcal{B}(H)$ является $f\colon a \mapsto \langle ax, x\rangle$, где x — любой вектор. Такие функционалы называются векторными.

Взяв положительный функционал f, рассмотрим функцию двух переменных $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle\colon A\times A \to \mathbb{C}$, положив $\langle\langle a, b\rangle\rangle := f(b^* a)$. Получаем так называемое предскалярное произведение. (Выполнены аксиомы скалярного произведения, за исключением того, что из $\langle\langle a, a\rangle\rangle = 0$, вообще говоря, не следует $a = 0$). А нам хотелось бы где-то получить настоящее скалярное произведение.

Положим $I = \{a \in A\colon \langle\langle a, a\rangle\rangle = 0\}$. С помощью неравенства типа Коши – Буняковского нетрудно усмотреть, что I — левый идеал в A.

Рассмотрим A/I и положим $\langle a + I, b + I\rangle := \langle\langle a, b\rangle\rangle$. Это уже корректно определенное скалярное произведение. Поменяем обозначение: будем писать $\widetilde{H}^f$ вместо A/I. Пополнение $\widetilde{H}^f$ по соответствующей норме обозначим через H^f; это уже гильбертово пространство.

Обратим внимание на корректно определенное отображение $\widetilde{\pi}^f$ из A в $\mathcal{L}(\widetilde{H}^f)$, сопоставляющее каждому элементу $a \in A$ оператор $\widetilde{\pi}^f_a\colon b + I \mapsto ab + I$. Это гомоморфизм алгебр.

Если бы наши отображения $\widetilde{\pi}^f_a$ были ограничены, мы бы продолжили их на H^f. Но это не всегда так. Однако имеет место такой факт, сообщаемый вам без доказательства.

10.4.4. Предложение. *Если A — C^*-алгебра или хотя бы звездная банахова алгебра, то для любого f оператор $\widetilde{\pi}^f_a$ ограничен, причем верно равенство $\|\widetilde{\pi}^f_a\| \leqslant \|a\|$.*

С этого момента A — произвольная звездная банахова алгебра.

Теперь мы вправе продолжить $\widetilde{\pi}^f_a$ до оператора $\pi^f_a \in \mathcal{B}(H^f)$. Получаем сжимающий $*$-гомоморфизм $\pi^f\colon A \to \mathcal{B}(H^f)$, $a \mapsto \pi^f_a$.

10.4.5. Определение. *Этот гомоморфизм называется ГНС-представлением алгебры A, порожденным функционалом f (а его конструкция — ГНС-конструкцией).*

10.4.6. Пример. Если $A = C(\Omega)$, а f действует как интеграл по мере μ (см. выше), то $H^f = L_2(\Omega, \mu)$, а π^f переводит функцию a в оператор умножения на a.

10.4.7. Пример. Если f — векторный функционал на $A = \mathcal{B}(H)$ (см. выше), то H^f изометрически изоморфно H, а $\pi^f : \mathcal{B}(H^f) \to \mathcal{B}(H)$ является изометрическим $*$-изоморфизмом.

Разумеется, ожидать, что π^f — изометрический оператор, можно только когда A — C^*-алгебра. Для многих C^*-алгебр действительно удается выбрать f так, что π^f обладает желанным свойством. Но вот беда: может так случиться, что π^f не является инъективным ни для какого положительного $f\colon A \to \mathbb{C}$. Идея Гельфанда и Наймарка: чтобы достичь цели, надо устроить нечто вроде суммы достаточно большого числа ГНС-представлений.

Оказывается, хватит и так называемых *состояний*, т. е. положительных функционалов нормы 1. (Это условие эквивалентно тому, что $f(e) = 1$ — нетривиальный факт). Термин «состояние» связан с тем, что такие функционалы можно (при большом желании) интерпретировать как «состояния квантово-механической системы». Множество состояний алгебры A мы обозначим через $\mathrm{St}(A)$.

Рассмотрим «гильбертову сумму»

$$\mathbf{H} := \bigotimes (H^f\colon f \in \mathrm{St}(A)).$$

Она состоит из «строк» $x = (\ldots x_f \ldots)$, $x_f \in H^f$, таких, что

$$\sum \{\|x^f\|^2\colon f \in \mathrm{St}(A)\} < \infty.$$

Это гильбертово пространство относительно корректно определенного скалярного произведения

$$\langle x, y\rangle := \sum \{\langle x_f, y_f\rangle\colon f \in \mathrm{St}(A)\}.$$

Теперь сопоставим каждому $a \in A$ оператор π_a в $\mathbf{H}$, действующий по правилу

$$(\ldots x_f \ldots) \mapsto (\ldots \pi_a^f(x_f) \ldots).$$

Для любой звездной алгебры A мы получаем корректно определенный сжимающий $*$-гомоморфизм $*$-алгебр $\pi\colon A \to \mathcal{B}(\mathbf{H})$, $a \mapsto \pi_a$, который, однако, не всегда является инъективным.

10.4.8. Определение. *Гомоморфизм π называется универсальным представлением алгебры A.*

И вот момент истины.

10.4.9. Теорема (Некоммутативная теорема Гельфанда – Наймарка в подробной формулировке)**.** *Если A — C^*-алгебра, то ее универсальное представление является изометрическим $*$-гомоморфизмом.*

Чаще всего доказательство состоит из двух утверждений: (i) π инъективно, (ii) каждый инъективный $*$-гомоморфизм между C^*-алгебрами (автоматически) является изометрическим. Оба факта далеки от тривиальности.

10.4.10. Замечание. Если алгебра A сепарабельна, то можно построить ее изометрический $*$-изоморфизм с операторной C^*-алгеброй, действующей в сепарабельном гильбертовом пространстве.

10.4.11. Замечание. С виду универсальное представление выглядит, выражаясь неформально, весьма неэкономным; например, пространство $\mathbf{H}$, как правило, несепарабельно. Гельфанд и Наймарк тоже не были от него в восторге (мне когда-то говорил об этом Марк Аронович), однако оно было им необходимо для доказательства их теоремы. Но вот прошло 15 лет и обнаружилось, что универсальное представление обладает рядом замечательных свойств. В частности, в некотором разумном смысле любые $*$-гомоморфизмы алгебры A в различные $\mathcal{B}(H)$ содержатся в этом представлении (отсюда и название «универсальное»). Еще одно замечательное свойство универсального представления состоит в том, что алгебра фон Ноймана, являющаяся бикоммутантом его образа в $\mathcal{B}(\mathbf{H})$ — в наши дни она называется *обертывающей алгеброй фон Ноймана C^*-алгебры A* — изометрически изоморфна A^{**} как банахово пространство. Именно после этого открытия теория C^*-алгебр и теория алгебр фон Ноймана, ранее развивавшиеся независимо друг от друга, слились в одну общую «теорию операторных алгебр».

Литература

[1] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 3-е изд., Ин-т компьютерных исследований, М. – Ижевск, 2020.

[2] Мёрфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов. Факториал, М., 1997.

[3] Федоров В. М. Курс функционального анализа. Лань, СПб., 2005.

[4] Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. 2-е изд. МЦНМО, М., 2014.

[5] Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. Наука, М., 1989.

[6] Connes A. Noncommutative geometry. Academic Press, London, 1994.

Глава 11

Эргодические преобразования

В. В. Рыжиков

Цель этой главы – познакомить слушателя с приложениями ТФФА к эргодической теории и попутно с некоторыми общими фактами о преобразованиях с инвариантной мерой. Эргодичность и слабое перемешивание, как мы узнаем, полностью определяются спектральными характеристиками унитарных операторов, индуцированных преобразованиями. Мы также рассмотрим типичные в смысле Бэра свойства слабого замыкания сохраняющих меру действий. При помощи спектральной теории преобразований докажем утверждение о кратном возвращении, эквивалентное знаменитой комбинаторной теореме Рота о прогрессиях длины три.

§ 11.1. Введение

Для краткости под *преобразованием* в этой главе подразумевается сохраняющее меру обратимое преобразование T пространства Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Такие преобразования часто называют автоморфизмами пространства с мерой. Ниже речь пойдет о стандартном вероятностном пространстве, т. е. $\mu(X) = 1$. Преобразования, отличающиеся на множестве меры нуль, отождествляются.

11.1.1. Определение. *Преобразование T эргодично, если всякое измеримое множество A, такое, что $A = TA$, имеет меру 0 или 1. Иначе говоря, фазовое пространство X нельзя разбить на две нетривиальные инвариантные части.*

11.1.2. Определение. *Преобразование T называется слабо перемешивающим, если найдется последовательность $n_i \to \infty$ такая, что*

$$\mu(T^{n_i} A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \quad \text{при } i \to \infty \text{ для всех } A, B \in \mathcal{B}.$$

11.1.3. Определение. *Преобразование T называется перемешивающим, если*

$$\mu(T^{i} A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \quad \text{при } i \to \infty \text{ для всех } A, B \in \mathcal{B}.$$

Пример эргодического преобразования. Пусть a — действительное число, рассмотрим сдвиг $T_a\colon [0,1) \to [0,1)$

$$T_a(x) = \{x+a\} := x + a \pmod 1.$$

Если a иррационально, преобразование T_a эгодично относительно меры Лебега на $[0,1)$. Найдите доказательство этого факта, основанное на том, что мера пересечения множества положительной меры с некоторым отрезком меры $\varepsilon > 0$ больше 0.9ε.

Рассмотрим более общий пример: сдвиг на торе

$$T_{(a_1,\dots,a_n)}(x_1,\dots,x_n) = (\{x_1+a_1\},\dots,\{x_n+a_n\}),$$

где $\{x+a\}$ обозначает дробную часть числа $x+a$. Какие нужно наложить условия на $a_1,\dots,a_n$, чтобы сдвиг оказался эргодическим относительно меры Лебега на торе?

Пример перемешивающего преобразования. Рассмотрим сдвиг Бернулли $T\colon \mathbf{Z}_2^{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}_2^{\mathbf{Z}}$ на пространстве двусторонних последовательностей, принимающих значения 0 и 1. Пусть x — такая последовательность, тогда

$$T(x)_z = x_{z-1}.$$

Мера μ на $X = \mathbf{Z}_2^{\mathbf{Z}}$ задается так: множество всех последовательностей, принимающих заданные значения для фиксированного конечного набора $F \subset \mathbf{Z}$, имеет меру Бернулли $2^{-|F|}$. Такие множества естественно назвать цилиндрами, они образуют полукольцо, на котором μ счетно-аддитивна. Свойство перемешивания достаточно проверить на цилиндрах. Если A и B — цилиндры, то

$$\mu(T^i A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

для всех достаточно больших i, что сразу вытекает из определения меры Бернулли.

Заметим, что преобразование T является автоморфизмом компактной коммутативной группы $\mathbf{Z}_2^{\mathbf{Z}}$, сохраняющим меру Хаара (борелевскую вероятностную меру, инвариантную относительно всех групповых сдвигов). Преобразование T специалисты также называют преобразованием пекаря, представляя X в виде квадрата, на котором T действует следующим образом:

$$T\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_{-i+1}}{2^i}\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_{i-1}}{2^i}, \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_{-i}}{2^i}\Big).$$

Преобразование пекаря сохраняет плоскую меру Лебега (она же мера Бернулли и мера Хаара). Локально T сжимает по одной координате в два раза и растягивает в два раза по другой.

Из свойства перемешивания непосредственно вытекает слабое перемешивание, которое влечет за собой эргодичность. Действительно, если $TA = A$, то $T^n A = A$, то с учетом слабого перемешивания при $B = A$ имеем

$$\mu(A) = \mu(T^{n_i} A \cap A) \to \mu(A)\mu(A), \quad \mu(A) \in \{0, 1\}.$$

Это означает, что T эргодично: инвариантное множество есть все или ничего. Отметим, что вращения окружности (сдвиги на торах) не обладают слабым перемешиванием. Слабое перемешивание влечет за собой такое свойство: множества $T^{n_i} A$ асимптотически имеют непустое пересечение с любыми фиксированными множествами положительной меры. Однако маленький отрезок под действием вращения не может пересекаться с двумя удаленными отрезками одновременно — отсутствие эффекта перемешивания в этом случае очевидно.

Купмановские операторы. Для обратимого сохраняющего меру преобразования T рассмотрим унитарный оператор T, действующий в $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$ по формуле

$$Tf(x) = f(T(x)).$$

Оператор и преобразование обозначаем одинаково, это не приводит к недоразумениям. В дальнейшем пишем Tx вместо $T(x)$. Упомянутые сдвиги на $\mathbf{Z}_2^{\mathbf{Z}}$ и на $\mathbf{Z}_3^{\mathbf{Z}}$ как операторы изоморфны: они являются одинаково устроенными перестановками подходящих ортонормированных систем. Читатель, знакомый с характерами коммутативных групп (или с системами Радемахера – Уолша), легко найдет эти системы и сдвиги на них. Введя в эргодическую теорию фундаментальное понятие энтропии действия, А.Н. Колмогоров показал, что этот унитарный изоморфизм не индуцируется никаким метрическим изоморфизмом. Преобразования S и T называются метрически изоморфными, если найдется такое преобразование R, что $S = R^{-1}TR$.

Обозначим через Θ ортопроекцию на пространство констант в L_2. Свойство перемешивания эквивалентно сходимости

$$T^i \to_w \Theta, \quad i \to \infty$$

(операторы T^i слабо сходятся к Θ). Слабое перемешивание выражается аналогично: найдется такая последовательность n_i, что

$$T^{n_i} \to_w \Theta.$$

Эргодичность также выражается в терминах слабых пределов:

$$\frac{1}{N} \sum_1^N T^i \to_w \Theta.$$

Обоснование приведенных утверждений мы приведем несколько позже, поскольку для этого требуются вспомогательные результаты.

Слабо перемешивающие неперемешивающие преобразования. Своства эргодического поворота окружности и бернуллиевского сдвига благодаря приведенному ниже следствию из леммы Рохлина – Халмоша позволят построить много слабо перемешивающих преобразований, не обладающих перемешиванием.

11.1.4. Лемма (Рохлин – Халмош). *Для эргодического преобразования T, числа $\varepsilon > 0$ и натурального числа H найдется измеримое множество B такое, что множества T^iB не пересекаются при $0 \leqslant i \leqslant H-1$ и*

$$\mu\Big(\bigsqcup_{i=0}^{H-1} T^iB\Big) > 1-\varepsilon.$$

11.1.5. Задача. Найдите такое множество A, что для некоторого $n \gg H$ выполнено неравенство $\mu\big(\bigsqcup_{i=0}^{n} T^iA\big) > 0$.

11.1.6. Задача. Представьте все пространство X в виде объединения непересекающихся (высоких) башен:

$$X = \bigsqcup_{n>N} \bigsqcup_{i=0}^{n} T^iA_n, \quad N >> H.$$

Докажите лемму Рохлина – Халмоша, используя предыдущую задачу.

11.1.7. Следствие. *Для эргодических преобразований T, T' и $\delta > 0$ можно так изменить преобразование T на множестве меры, меньшей δ, что измененное преобразование будет изоморфно* (*сопряжено с*) T'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для отображений T и T' применим лемму Рохлина – Халмоша при $\mu(B) = \mu(B')$ (это несложно обеспечить) и таких ε и H, что $\varepsilon + \frac{1}{H} \gg \delta$. Далее находим такое R, что на множестве $\bigsqcup_{i=0}^{H-2} T'^iB'$ сопряжение $R^{-1}TR$ совпадает с T'. $\square$

Теперь поясним, как строить слабо перемешивающие преобразования, не обладающие перемешиванием. Эргодический поворот окружности S обладает свойством жесткости: $S^{k_j} \to_w I$, где I — тождественный оператор, $k_j \to \infty$. Свойство жесткости, как и свойство перемешивания, инвариантно относительно сопряжения, чем мы скоро воспользуемся.

Рассмотрим последовательность преобразований T_p таких, что

$$\sum_p \mu(\{x\colon T_p(x) \neq T_{p+1}(x)\}) < \infty,$$

тогда преобразования T_p сходятся к некоторому преобразованию T. Будем выбирать преобразования T_{2p} жесткими, а T_{2p+1} пусть перемешивают. Быстрая скорость сходимости приведенного выше ряда обеспечивает сходимости

$$T_{2p+1}^{k_{2p+1}} \approx_w T^{k_{2p+1}} \to_w \Theta,$$

$$T_{2p}^{k_{2p}} \approx_w T^{k_{2p}} \to_w I,$$

где запись вида $U(p) \approx_w V(p)$ означает, что $U(p) - V(p) \to_w 0$ при $p \to \infty$. Сходимость последовательности степеней преобразования T к оператору Θ означает слабое перемешивание, а сходимость к I влечет за собой отсутствие свойства перемешивания.

§ 11.2. Свойства преобразований, эквивалентные эргодичности

Эргодичность преобразования T относительно меры μ эквивалентна следующему свойству: если f является μ-измеримой и $Tf = f$, то f является константой почти всюду.

Действительно, из инвариантности множества $\{x\colon f(x) > c\}$ при $Tf = f$ имеем: $\mu(\{x\colon f(x) > c\})$ есть 0 или 1 для всех c. Отсюда $f = \mathrm{const} = \inf$ по всем a, для которых $\mu(\{x\colon f(x) > a\}) = 0$.

11.2.1. Теорема (слабая эргодическая теорема). *Эргодическое преобразование T обладает перемешиванием в среднем: для любых измеримых множеств A, B имеет место сходимость*

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \mu(T^i A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \quad \textit{при} \quad N \to \infty,$$

что равносильно слабой сходимости операторов

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} T^i \to_w \Theta.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что ограниченное семейство операторов $P_N = \sum_1^N T^i/N$ имеет предельную точку в слабой операторной топологии. Пусть $P_{N_m} \to_w P$. Для любого $f \in L_2$ с учетом $\|TP_N - P_N\| \leqslant 2/N$ получим $TPf = Pf$. Для T-инвариантной функции Pf, как мы отмечали выше, выполнено $Pf = \mathrm{const}$. Очевидно, что $\mathrm{const} = \displaystyle\int f\,d\mu$. Это означает, что $P = \Theta$. Так как результат не зависит от выбора предельного оператора P, мы показали, что $P_N \to_w \Theta$.

Из доказанного получаем соотношение

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu(T^iA\cap B) = (P_N\chi_A, \chi_B) \to (\Theta\chi_A, \chi_B) = \mu(A)\mu(B),$$

что дает перемешивание в среднем. □

11.2.2. Теорема (фон Нейман)**.** *Для всякого эргодического преобразования T имеет место сильная сходимость $\frac{1}{N}\sum_1^N T^i \to_s \Theta$.*

Доказательство. Ограничив данный оператор T на пространство функций, ортогональных константам, убедимся в сходимости

$$P_N = \frac{1}{N}\sum_1^N T^i \to_s 0.$$

Сильная сходимость $P_N \to_s 0$ означает, что $P_N^*P_N \to_w 0$. Действительно,

$$\|P_Nf\|^2 = (P_Nf, P_Nf) = (P_N^*P_Nf, f) \to 0.$$

В силу оценки

$$\|TP_N - P_N\| \leqslant \frac{2}{N}$$

имеем $\|TP_N^*P_N - P_N^*P_N\| \to 0$, поэтому всякий предельный оператор Q для ограниченного семейства операторов $P_N^*P_N$ будет удовлетворять условию

$$TQ = Q.$$

В силу эргодичности преобразования T получим $Q = 0$, так как для функции f с нулевым средним имеем

$$Qf = TQf = \mathrm{const} = 0.$$

Получили

$$P_N^*P_N \to_w 0, \quad \|P_Nf\| \to 0,$$

что завершает доказательство. □

11.2.3. Задача. Классическая теорема фон Неймана звучит так: для унитарного оператора U усреднения $P_N = \sum_{i=1}^N U^i/N$ сильно сходятся к ортопроекции на пространство векторов, неподвижных относительно U. Докажите это утверждение, используя следующее указание. Векторы вида $Uv - v$ плотны в ортогональном дополнении к пространству неподвижных векторов. Сходимость $P_N(Uv - v) \to 0$ очевидна.

§ 11.3. Эргодическая теорема Биркгофа

11.3.1. Теорема. *Пусть T — эргодическое преобразование вероятностного пространства и $f \in L_1$. Тогда для почти всех x имеет место сходимость*

$$\frac{1}{N}\sum_1^N f(T^i x) \to \int f\,d\mu.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай нулевого интеграла от f, так как общий случай к нему тривиально сводится. Положим

$$X_a = \Bigl\{x\colon \limsup_N \frac{1}{N}\sum_1^N f(T^i x) > a\Bigr\}.$$

Очевидно, что $TX_a = X_a$, поэтому в силу эргодичности T мера X_a равна 1 или 0. Докажем, что первый случай невозможен при $a > 0$. Пусть это не так. Тогда для почти каждого x найдется такое минимальное натуральное число $N(x)$, что

$$\frac{1}{N(x)}\sum_0^{N(x)-1} f(T^i x) > a. \tag{11.3.1}$$

Функция $N(x)$ измерима, поэтому, вспоминая действительный анализ, для данного $\varepsilon > 0$ можем найти N такое, что

$$\mu(Y_N) > 1-\varepsilon, \quad Y_N = \{x\colon N(x) < N\}.$$

Лемма Рохлина – Халмоша гласит: для эргодического преобразования T, числа $\varepsilon > 0$ и натурального числа H найдется такое измеримое множество B, что множества $T^i B$ дизъюнктны при $0 \leqslant i \leqslant H-1$ и

$$\mu\Bigl(\bigsqcup\nolimits_{i=0}^{H-1} T^i B\Bigr) > 1-\varepsilon.$$

Рассмотрим такое множество B для очень маленького ε и очень большого $H \gg N \gg 1$. Представим фазовое пространство X в виде объединения следующих множеств (кусков орбит):

$$x, Tx, T^2x, \ldots, T^{H(x)}x,$$

где x пробегает все B, а натуральное число $H(x) > 0$ выбирается так, что $T^{H(x)+1}x \in B$, причем $Tx, T^2x, \ldots, T^{H(x)}x$ не принадлежат множеству B. Заметим, что $H(x) \geqslant H$.

Определим множество $X' \subset X$. Для каждого $x \in B$ рассмотрим точки множества $x, Tx, T^2x, \ldots, T^{H(x)}x$ и выполним следующую процедуру. Если $x \in Y_N$, то $N(x)$ первых точек, начиная с x, считаем элементами X'. Смотрим на следующую за ними точку $T^{N(x)}x$. Если она не принадлежит Y_N, то пропустим ее, переходим к следующей точке в списке $x, Tx, T^2x, \ldots, T^{H(x)}x$ и т. д. Встретив точку $x' = T^k x$ из Y_N, записываем $x', Tx', T^2x', \ldots, T^{N(x')-1}x'$ в элементы X' и продолжаем описанную процедуру, пока не встретится точка $x' = T^h x$, для которой верно, что $H(x) - h < N(x)$. Выполнив описанную процедуру для каждой точки $x \in B$, получим множество X'. Заметим, что его мера больше, чем $1 - N/H - \varepsilon$, следовательно, может быть сколь угодно близкой к 1.

На множествах $x', Tx', T^2x', \ldots, T^{N(x')-1}x'$ среднее значение нашей функции f больше $a > 0$, что следует из (11.3.1). Поэтому имеет место неравенство

$$\int_{X'} f\,d\mu > a\mu(X').$$

Используя абсолютную непрерывность интеграла Лебега, приходим к противоречию:

$$0 = \int_X f d\mu > \frac{a}{2} > 0.$$

Итак, $\mu(X_a) = 0$ при $a > 0$. Теперь при $a > 0$ положим

$$X_{-a} = \Big\{x\colon \liminf_N \frac{1}{N}\sum_1^N f(T^i x) < -a\Big\}.$$

Аналогично (или рассматривая $-f$ вместо f) получим $\mu(X_{-a}) = 0$. Таким образом, выполнено соотношение

$$\mu\Big(x\colon \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N f(T^i x) = 0\Big) = 1,$$

что и требовалось. □

11.3.2. Задача. Для пары коммутирующих преобразований S, T, порождающих эргодическое действие, имеет место сходимость почти всюду $\dfrac{1}{N^2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^N f(S^iT^jx) \to \int f\,d\mu$. Однако для доказательства этого факта потребуется дополнительный инструментарий.

§ 11.4. Свойства, эквивалентные слабому перемешиванию

Рассмотрим следующие свойства преобразования T.

1. Найдется последовательность $n_i \to \infty$ такая, что $T^{n_i} \to_w \Theta$.

2. Спектр оператора T в пространстве, ортогональном константам, непрерывен (нет собственных значений).

3. Произведение $T \times T$ эргодично относительно меры $\mu\otimes\mu$.

4. Преобразование T обладает почти перемешиванием:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\mu(T^iA\cap B)-\mu(A)\mu(B)| \to 0 \quad \text{при } N \to \infty \text{ для всех } A, B \in \mathcal{B}.$$

5. Для всякого эргодического S произведение $S\times T$ эргодично.

11.4.1. Теорема. *Свойства* 1 – 5 *эквивалентны.*

Доказательство. Импликация 1⇒2 очевидна.

Докажем 2⇒3 (не 3 влечет за собой не 2). Пусть T — эргодическое преобразование, а произведение $T\times T$ не эргодично. Тогда найдется множество $D \subset X\times X$, инвариантное относительно $T\times T$, причем $0<\mu\otimes\mu(C)=c<1$. Пусть $K(x,y)=\chi_C(x,y)$. Рассмотрим оператор $P\colon L_2(\mu)\to L_2(\mu)$, заданный формулой

$$Pf(y)=\int_X K(x,y)f(x)\,d\mu.$$

Выполняется равенство $P\mathrm{Const}=P^*\mathrm{Const}=c\,\mathrm{Const}$. Действительно,

$$P\,Const(y)=\int_X K(x,y)\,\mathrm{Const}\,d\mu=\mathrm{Const}\int_X K(x,y)\,d\mu,$$

причем функция

$$g(y)=\int_X K(x,y)\,d\mu$$

инвариантна относительно T, поэтому в силу эргодичности преобразования T функция g является константой, очевидно, равной c. Аналогично для P^*.

Итак, операторы P, P^* переводят пространство H функций с нулевым средним (оно ортогонально константам) в него же. Так как $K(x,y)$ не является константой, получаем $P^*PH\neq\{0\}$. Докажите это, показав, что в противном случае $P=c\,\Theta$.

Оператор P^*P является компактным самосопряженным оператором и коммутирует с оператором T. Последнее вытекает из инвариантности $K(Tx,Ty)=K(x,y)$. По теореме Гильберта – Шмидта найдется собственная функция v: $P^*Pv=av$, где собственное число a отлично от нуля. Так как T коммутирует с P^*P, все векторы T^iv являются собственными функциями оператора P^*P с собственным числом a. В силу компактности оператора P^*P получаем, что пространство L, порожденное всеми векторами $T^i v$, конечномерно. Имеем $TL = L$, а из курса линейной алгебры мы знаем, что линейный оператор T на конечномерном комплексном пространстве L имеет собственный вектор. Тем самым мы установили импликацию 2⇒3.

Докажем импликацию 3⇒4. Положим

$$c_i = \mu(T^i A \cap B), \ \ c = \mu(A)\mu(B).$$

Из эргодичности T при $N \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_i \to c,$$

из эргодичности $T \times T$ заключаем, что

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \to c^2.$$

Из сказанного вытекает , что

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(c_i - c)^2 \to 0, \ N \to \infty,$$

откуда в силу ограниченности c_i имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |c_i - c| \to 0, \ N \to \infty,$$

что и требовалось. Импликация 4⇒1 представляется неформально очевидной. Докажите ее. Импликация 5⇒3 тривиальна.

Осталась импликация 4⇒5. Идея доказательства такая: большинство T^i близки к Θ, операторы $N^{-1}\sum_{i=1}^{N} S^i$ стремятся к Θ (эргодичность преобразования S), следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S^i \otimes T^i \to \Theta\otimes\Theta,$$

а это (перемешивание в среднем на цилиндрах) равносильно эргодичности $S \times T$ относительно $\mu\otimes\mu$. □

§ 11.5. Типичные свойства преобразований

В функциональном анализе заметную роль играет теорема Бэра о категориях (в доказательстве теоремы Банаха – Штейнгауза и теоремы Банаха об обратном операторе). Категории нашли применения в эргодической теории. Семейство преобразований типично (массивно), если дополнение к нему является множеством первой категории, т. е. счетным объединением нигде не плотных множеств. Свойство преобразования называется типичным, если множество всех преобразований, обладающих этим свойством, является типичным.

Зафиксируем какое-либо стандартное вероятностное пространство $(X, \mathcal{B}, \mu)$ и рассмотрим группу его автоморфизмов Aut, снабженную полной метрикой Халмоша ρ:

$$\rho(S,T) = \sum_i 2^{-i} \left(\mu(SA_i \Delta TA_i) + \mu(S^{-1}A_i \Delta T^{-1}A_i) \right),$$

где семейство множеств $\{A_i\}$ плотно в алгебре $\mathcal{B}$. Без доказательства мы пользуемся тем, что метрика ρ полна, а метрическое пространство (Aut, ρ) сепарабельно. Если в качестве пространства с мерой рассматривать $X = [0,1]$ с мерой Лебега, то в Aut плотно семейство всех простейших перекладываний отрезков. Они получаются так: разбиваем X на отрезки одинаковой длины и переставляем. Получаем счетную группу периодических преобразований, плотную в Aut.

Типичность и нетипичность слабых пределов. Отсутствие перемешивания и наличие слабого перемешивания, как показали Рохлин и Халмош, являются типичными свойствами. Сейчас мы докажем более общий факт. Функция от оператора $Q(T)$ называется допустимой, если она имеет вид

$$Q(T) = a\Theta + \sum_i a_i T^i, \quad a, a_i \geqslant 0, \ \sum_i a_i = 1 - a,$$

где Θ — ортопроектор на пространство констант в $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Если $T^m \to_w \Theta$ при $m \to \infty$, преобразование T является перемешивающим. В §11.10 описан класс преобразований, в котором для каждой допустимой функции Q найдется такое T, что

$$T^{k_i} \to_w Q(T), \quad k_i \to \infty.$$

11.5.1. Задача. Если слабое замыкание степеней эргодического преобразования T для всех k содержит операторы $\frac{1}{2}(T^k + I)$, то оно содержит все допустимые операторы $Q(T)$.

11.5.2. Теорема. *Для бесконечного множества $M \subset \mathbf{N}$ и допустимых функций Q, R верно следующее*:

(i) *типично множество преобразований T таких, что для некоторого бесконечного подмножества $M(T) \subset M$ верно соотношение $T^m \to_w R(T)$ при $m \in M(T)$, $m \to \infty$*;

(ii) *множество преобразований T таких, что $T^m \to_w Q(T)$ при $m \in M, m \to \infty$, является множеством первой категории.*

Доказательство. (i) Выберем плотное в Aut множество преобразований $\{J_q\}$, $q \in \mathbf{N}$. Найдутся бесконечное множество $M' \subset M$ и слабо перемешивающее преобразование S такие, что имеет место сходимость $S^m \to_w R(S)$, $m \in M'$. Нужное отображение S можно реализовать при помощи конструкции ранга 1 (описание в §11.10).

Пусть w обозначает метрику, задающую слабую операторную топологию. Для любых n и q находим число $m = m(n,q) \in M$ и окрестность $U(n,q)$ преобразования $J_q^{-1}SJ_q$ такие, что неравенство $w(T^m, R(T)) < 1/n$ верно для всех преобразований $T \in U(n,q)$. Получаем G_δ-множество

$$W = \bigcap_n \bigcup_q U(n,q).$$

Оно плотно в Aut, ибо класс сопряженности эргодического преобразования S плотен в Aut (следствие леммы Рохлина–Халмоша).

Если $T \in W$, то для любого n найдется $q(n)$ такое, что для числа $m(n) = m(n, q(n)) \in M$ верно неравенство

$$w(T^{m(n)}, R(T)) < \frac{1}{n}.$$

Такие числа $m(n)$ образуют множество $M(T) \subset M$. Тем самым мы получили, что W состоит из преобразований, удовлетворяющих условию пункта (i).

Утверждение (ii) логически вытекает из (i). Действительно, зафиксируем бесконечное множество M. Для типичного преобразования S найдется бесконечное множество $M(S) \subset M$ такое, что

$$S^m \to_w R(S) \neq Q(S), \quad m \to \infty,\ m \in M(S).$$

Итак, условие $T^m \to_w Q(T)$ при $m \in M$ выполнено только для нетипичных T. □

При $R = I$, $Q = \Theta$ получаем упомянутые результаты Халмоша и Рохлина.

§ 11.6. Спектральная теорема для унитарных операторов

Обратимые преобразования, сохраняющие меру, индуцируют унитарные операторы, а свойства последних полностью определяются так называемой спектральной мерой. Рассмотрим некоторые примеры.

Рассмотрим сдвиг U, $Ue_n = e_{n+1}$, на ортонормированном базисе $\{e_n : n \in \mathbf{Z}\}$ в гильбертовом пространстве H, продолженный до унитарного оператора на всем H.

Рассмотрим оператор $V : L_2(\mathbf{T}, \sigma) \to L_2(\mathbf{T}, \sigma)$,

$$Vf(z) = zf(z), \quad |z| = 1,$$

где $\mathbf{T}$ — единичная окружность в комплексной плоскости, σ — нормированная мера Лебега на $\mathbf{T}$. Заметим, что сопоставление Φ,

$$\Phi e_n = z^n,$$

(здесь z^n — функция на $\mathbf{T}$) осуществляет изоморфизм пространств H и $L_2(\mathbf{T},\sigma)$ и изоморфизм операторов U и V. Оказывается, что V — спектральное представление оператора U, а σ — его спектральная мера.

Приведем совсем простой пример унитарного оператора в одномерном пространстве: $Ux = -x$. Рассмотрим оператор умножения V в $L_2(\mathbf{T},\sigma)$, заданный формулой $Vf(z) = zf(z)$, где σ — мера на $\mathbf{T}$, сосредоточенная в единственной точке -1. Эта мера является спектральной мерой оператора U.

Перейдем к рассмотрению ключевого случая.

11.6.1. Теорема. *Если унитарный оператор U в H имеет циклический вектор, то для некоторой борелевской меры σ на $\mathbf{T}$ он изоморфен оператору $V\colon L_2(\mathbf{T},\sigma)\to L_2(\mathbf{T},\sigma)$, $Vf(z) = zf(z)$.*

Доказательство. Пусть h — циклический вектор оператора U, т. е. замыкание пространства, содержащего все $U^n h,\ n\in\mathbf{Z}$, есть H. Пусть $(h,h)=1$. Определим функцию ρ_N на $\mathbf{T}$ формулой

$$\rho_N(z) = \frac{1}{N}\Bigl(\sum_{i=0}^{N-1} z^i U^{-i}h, \sum_{j=0}^{N-1} z^j U^{-j}h\Bigr) = \frac{1}{N}\Bigl(\sum_{i,j=0}^{N-1} z^{i-j}U^{j-i}h, h\Bigr) \geqslant 0.$$

Так как

$$\int_{\mathbf{T}} z^{i-j}\,dm = 0,\ i\neq j,\ \int_{\mathbf{T}} z^0 dm = 1,$$

получаем

$$\int_{\mathbf{T}} \rho_N\,dm = \frac{N(h,h)}{N} = 1.$$

Рассмотрим последовательность мер σ_N: $d\sigma_N = \rho_N(z)\,dm$. Как всякая последовательность нормированных мер на компакте, последовательность σ_N имеет слабую предельную точку σ, являющуюся нормированной мерой на окружности $\mathbf{T}$. Поэтому найдется последовательность N_k такая, что для всякой $f\in C(\mathbf{T})$ выполнено

$$\int_{\mathbf{T}} f\,d\sigma_{N_k} \to \int_{\mathbf{T}} f\,d\sigma.$$

Мера σ — искомая. Проверим это. Так как

$$\int_{\mathbf{T}} z^i\, d\sigma_{N_k} = \frac{N_k - |i|}{N_k}(U^i h, h) \to (U^i h, h),$$

$$\int_{\mathbf{T}} z^i\, d\sigma_{N_k} \to \int_{\mathbf{T}} z^i\, d\sigma,$$

приходим к равенству

$$(U^i h, h) = \int_{\mathbf{T}} z^i\, d\sigma.$$

Таким образом,

$$(U^i h, U^j h) = \int_{\mathbf{T}} z^i \bar{z}^j\, d\sigma,$$

из чего заключаем, что сопоставление $\Phi U^i h = z^i$ сохраняет скалярное произведение и продолжается до линейной изометрии пространств H и $L_2(\sigma)$, сплетающей операторы U и V, т.е. $\Phi U = V\Phi$. $\square$

Полученная мера σ называется спектральной мерой, ее определение зависело от выбора циклического вектора. Спектральные меры эквивалентны между собой, а класс эквивалентности называется спектральным типом унитарного оператора. Сформулируем общее утверждение.

11.6.2. Теорема. *Унитарный оператор $U\colon H \to H$ в сепарабельном гильбертовом пространстве изоморфен оператору V, действующему в $L_2(\mathbf{T}\times\mathbf{N}, \sigma)$ для некоторой борелевской меры σ на $\mathbf{T}\times\mathbf{N}$ по формуле*

$$Vf(z,n) = zf(z,n), \quad |z| = 1, \quad f \in L_2(\mathbf{T}\times\mathbf{N}, \sigma).$$

Доказательство получается из предыдущей теоремы с использованием разложения пространства H в ортогональную сумму циклических подпространств.

§ 11.7. Собственные функции эргодического преобразования, компактный фактор и алгебра Кронекера

Начнем с замечаний о собственных функциях эргодического преобразования T.

1. Если $Tf = \lambda f$, то $|f| = \mathrm{const}$, так как

$$T|f| = |Tf| = |\lambda f| = |f|,$$

но T эргодично.

2. Если $Tf = \lambda f$ и $Tg = \lambda g \neq 0$, то $f/g = Tf/Tg = \mathrm{Const}$. Иначе говоря, кратность собственного значения эргодического преобразования равна 1.

3. Собственные значения сохраняющего меру преобразования образуют группу. Это следует из свойства мультипликативности операторов, индуцированных заменой переменной, так как для них имеет место равенство

$$T(fg) = Tf\,Tg.$$

Если $Tf = \lambda_1 f$ и $Tg = \lambda_2 g$, получаем $T(fg) = \lambda_1\lambda_2 fg$.

4. Если $Sf = \lambda f \neq Const$ и $Tg = \lambda g \neq \mathrm{Const}$, произведение $S\times T$ не является эргодическим, так как $f(x)/g(y) = Sf(x)/Tg(y) \neq \mathrm{Const}$.

Алгебра Кронекера и компактный фактор. Наименьшая σ-алгебра $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, относительно которой измеримы все собственные функции преобразования T, называется алгеброй Кронекера.

Компактным фактором $\mathcal{K}'$ преобразования T называется алгебра множеств, порожденная компактными векторами, т. е. такими функциями $f \in L_2$, что орбита $\{T^i f\}$ предкомпактна в L_2.

11.7.1. Теорема. *Для сохраняющего меру преобразования его компактный фактор совпадает с алгеброй Кронекера.*

Приведем схему доказательства. Из спектральной теоремы получаем, что пространство, на котором действует унитарный оператор, индуцированный преобразованием, является ортогональной суммой двух пространств: первое порождено собственными векторами (соответствует дискретной части спектра), а второе — ортогональное дополнение к первому (соответствует непрерывной части спектра). Компактные векторы в точности образуют первое пространство. Пространство $L_2(\mathcal{K}')$ состоит из компактных векторов, значит, оно совпадает с $L_2(\mathcal{K})$, откуда $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. Попробуйте провести подробное доказательство.

§ 11.8. Кратное возвращение в случае слабого перемешивания

Знаменитая теорема Семереди (он учился на мехмате МГУ) о прогрессиях эквивалентна тому, что для каждого множества A положительной меры и обратимого сохраняющего меру преобразования T вероятностного пространства найдется $i > 0$, для которого выполняется свойство кратного возвращения:

$$\mu(A \cap T^i A \cap T^{2i} A \cap \cdots \cap T^{ki} A) \ > 0.$$

Фюрстенберг доказал это утверждение методами эргодической теории и тем самым дал совершенно новое доказательство теоремы Семереди. Случай $k = 1$ давно известен как теорема Пуанкаре о возвращении.

При $k>1$ и особенно при $k>2$ доказательство становится чрезвычайно нетривиальным. Сейчас мы изучим случай, когда преобразование обладает свойством слабого перемешивания.

11.8.1. Теорема. *Для каждого слабо перемешивающего преобразования T вероятностного пространства $(X,\mathcal{B},\mu)$ для всех множеств $A,A_1,\ldots,A_k\in\mathcal{B}$ при $N\to\infty$ имеем*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu(A\cap T^iA_1\cap\cdots\cap T^{ki}A_k)\to\mu(A)\mu(A_1)\cdots\mu(A_k). \quad (11.8.1)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k=2$. Из бесконечного подмножества натурального ряда всегда можно выбрать подпоследовательность $N(k)\to\infty$ так, чтобы для всех $A,A_1,A_2\in\mathcal{B}$ иметь

$$\frac{1}{N(k)}\sum_{i=1}^{N(k)}\mu(A\cap T^iA_1\cap T^{2i}A_2)\to\nu(A\times A_1\times A_2),$$

где $\nu(A\times A_1\times A_2)$ — пока такое своеобразное обозначение предела выражений слева. Несложно заметить, что ν как функция на цилиндрах $A\times A_1\times A_2$, образующих полукольцо, является мерой. Очевидна инвариантность $\nu(A\times A_1\times A_2)=\nu(TA\times TA_1\times TA_2)$, а в силу усреднения имеет место дополнительная инвариантность

$$\nu(A\times A_1\times A_2)=\nu(A\times TA_1\times T^2A_2).$$

Мера ν как мера на кубе проектируется на сомножители в меру μ.

Свойство слабого перемешивания эквивалентно эргодичности преобразования $T\times T^2$, что в свою очередь означает равносоставленность множеств $A_1\times A_2$ и $B_1\times B_2$ при $\mu(A_1)\mu(A_2)=\mu(B_1)\mu(B_2)$. Равносоставленность множеств по определению означает, что

$$A_1\times A_2 = \bigsqcup\nolimits_{n=1}^{\infty}(C_n\times D_n),$$

$$B_1\times B_2 = \bigsqcup\nolimits_{n=1}^{\infty}(T^{p(n)}C_n\times T^{2p(n)}D_n),$$

где равенства выполняются с точностью до множеств нулевой $\mu\otimes\mu$-меры. Получаем

$$\sum_n\nu(A\times C_n\times D_n)=\sum_n\nu(A\times T^{p(n)}C_n\times T^{2p(n)}D_n),$$

$$\nu(A\times A_1\times A_2)=\nu(A\times B_1\times B_2).$$

Из сказанного вытекает, что $\nu = \mu\otimes\mu\otimes\mu$, откуда получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu(A\cap T^iA_1\cap T^{2i}A_2)\to\mu(A)\mu(A_1)\mu(A_2),$$

что завершает доказательство при $k=2$. $\square$

11.8.2. Задача. Докажите сходимости (11.8.1) для $k>2$.

§ 11.9. Двукратное возвращение

11.9.1. Теорема (Рот, Фюрстенберг)**.** *Для множества A положительной меры и обратимого сохраняющего меру преобразования T вероятностного пространства $(X,\mathcal{B},\mu)$ найдется $i>0$, для которого $\mu(A\cap T^iA\cap T^{2i}A)\ >0$.*

Доказательство. Благодаря теореме Рохлина о разложении инвариантной меры на эргодические компоненты общий случай сводится к случаю эргодического преобразования T, который мы сейчас рассмотрим. Эргодичность преобразования T эквивалентна выполнению условия

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}T^if\to_w \mathrm{const}=\int_X f\,d\mu\quad\text{для всех } f\in L_\infty(\mu).$$

Определим оператор $J\colon L_2(\mu)\to L_2(\mu\otimes\mu)$ формулой

$$(Jf,g\otimes h)=\lim_{N_k}\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\int_X f\,T^ig\,T^{2i}h\,d\mu,$$

где $f,g,h\in L_\infty(\mu)$. Оператор J корректно определен, так как в силу эргодичности преобразования T мы имеем

$$\lim_{N_k}\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\int_X T^ig\ T^{2i}h\,d\mu=\lim_{N_k}\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\int_X gT^ih\ d\mu=\int_X g\,d\mu\int_X h\,d\mu.$$

Усреднение, фигурирующее в определении оператора J, обеспечивает равенство

$$(T\otimes T^2)J=J.$$

Отметим, что это равенство непосредственно связано с обсуждавшейся инвариантностью $(Id\times T\times T^2)\nu=\nu$ для меры ν, связанной с оператором J соотношением

$$\nu(A\times B\times C)=(J\chi_A,\chi_B\otimes\chi_C).$$

Можно задать оператор J явно как оператор условного математического ожидания. Действительно, пусть $\nu_{(x_1,x_2)}$ — семейство условных мер для меры ν:

$$\nu(A\times B\times C) = \int_{B\times C} \nu_{(x_1,x_2)}(A)\, d(\mu\otimes\mu).$$

Тогда

$$(Jf)(x_1,x_2) = \int_X f(x)\, d\nu_{(x_1,x_2)}.$$

Вернемся к доказательству. Так как $(T\otimes T^2)Jf = Jf$, образ оператора J состоит из функций, неподвижных относительно оператора $T\otimes T^2$. Пространство таких неподвижных функций является подпространством $V\otimes V$, где V порожденное всеми собственными векторами оператора T. В качестве задачи предлагается показать, что сказанное вытекает из стандартных фактов спектральной теории унитарных операторов.

Обозначим через π ортопроекцию пространства $L_2(\mu)$ на V.

Из равенства $(T\otimes T^2)Jf = Jf$ вытекают следующие соотношения: $(\pi\otimes\pi)J = J$ и $(Jf, g\otimes h) = (Jf, (\pi\otimes\pi)g\otimes h)$. Поэтому

$$\lim_{N_k} \frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\int_X f\ T^i\pi g\ T^{2i}\pi h\, d\mu = \lim_{N_k}\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\int_X \pi f\ R^i\pi g\ R^{2i}\pi h\, d\mu,$$

где R — ограничение T на пространство V. Контрольный вопрос: почему мы можем заменить f на πf, не изменив значения интеграла?

Степени оператора R с регулярной частотой оказываются близкими к тождественному оператору, иначе говоря, множество тех i, когда

$$\|R^i\pi f - \pi f\| < \varepsilon,\ \|R^{2i}\pi f - \pi f\| < \varepsilon,$$

имеет положительную плотность. Покажите это.

Положив $f = g = h = \chi_A$ при условии $\mu(A) > 0$, получаем

$$0 \leqslant \pi\chi_A \leqslant 1,\quad \int_X \pi\chi_A\, d\mu = \mu(A),$$

$$(J\chi_A, \chi_A\otimes\chi_A) = \lim_{N_k}\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\int_X \pi\chi_A R^i\pi\chi_A R^{2i}\pi\chi_A\, d\mu > 0.$$

Мы показали, что неравенство $\mu(A\cap T^iA\cap T^{2i}A) > 0$ выполняется для бесконечного множества значений i. $\square$

§ 11.10. Конструктор преобразований

Дадим теперь описание класса эргодических преобразований T, слабое замыкание степеней которых может содержать операторы вида $a\Theta + \sum_i a_i T^i$ при условии $a, a_i \geqslant 0$, $a + \sum_i a_i = 1$.

Преобразования ранга один. Зафиксируем некоторую последовательность чисел $r_j > 1$ и последовательность векторов

$$\bar{s}_j = (s_j(1), s_j(2), \ldots, s_j(r_j - 1), s_j(r_j))$$

с целыми координатами $s_j(i) \geqslant 0$. На этапе $j = 1$ дан интервал E_1. Положим $h_1 = 1$. На этапе с номером j частично определенное преобразование T является обычной перестановкой непересекающихся интервалов

$$E_j, TE_j, T^2E_j, \ldots, T^{h_j-1}E_j.$$

Разрежем интервал E_j на r_j интервалов $E_j^1, E_j^2, E_j^3, \ldots, E_j^{r_j}$ одинаковой меры. Рассмотрим i-ю колонну

$$E_j^i, TE_j^i, T^2E_j^i, \ldots, T^{h_j-1}E_j^i, \quad i = 1, 2, \ldots, r_j,$$

добавив к ней $s_j(i)$ новых интервалов, и получим набор

$$E_j^i, TE_j^i, T^2E_j^i, \ldots, T^{h_j+s_j(i)-1}E_j^i$$

(эти интервалы не пересекаются и имеют одинаковую меру). Для всех $i < r_j$ положим

$$T^{h_j+s_j(i)}E_j^i = E_j^{i+1}.$$

Этап $j+1$ завершен, мы имеем набор непересекающихся интервалов $E_{j+1}, TE_{j+1}, T^2E_{j+1}, \ldots, T^{h_{j+1}-1}E_{j+1}$, где

$$E_{j+1} = E_j^1, \quad h_{j+1} = h_j r_j + \sum_{i=1}^{r_j} s_j(i).$$

Продолжая построение, получим сохраняющее меру преобразование T на объединении X всех упомянутых интервалов. Если мера множества X конечна, нормируем ее.

В том случае, когда $s_j(i) = 0$ для всех i и j, оператор, отвечающий такой конструкции, имеет чисто точечный спектр. В предложенных ниже задачах читатель найдет примеры конструкций с непрерывным спектром и нетривиальным слабым замыканием эргодических действий, которые они порождают.

11.10.1. Задача. Доказать, что конструкции преобразований ранга 1 эргодичны.

11.10.2. Задача. Для конструкции T с параметрами $r_j = j$, $s_j(i) = i$ при $1 \leqslant i \leqslant j$ доказать $T^{h_j} \to_w \Theta$, пользуясь тем, что $T^{h_j} - j^{-1} \sum_{i=1}^{j-1} T^{-i} \to_w 0$.

11.10.3. Задача. Найти конструкцию T, для которой выполнено $T^{n_j} \to_w \Theta$ и $T^{2n_j} \to_w I$. Почему сочетание пределов $T^{n_j} \to I$ и $T^{2n_j} \to \Theta$ невозможно?

11.10.4. Задача. Для конструкции преобразования T с параметрами $r_j = 2$, $s_j(1) = 0$, $s_j(2) = 1$ установить следующую сходимость: $T^{-h_j} \to_w (2I - T)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1} T^i$. В случае $r_j = 3$, $s_j(1) = 0$, $s_j(3) = 0$, $s_j(2) = 1$ проверить, что $T^{-h_j} \to_w (I + T)/2$. Доказать, что эти преобразования обладают слабым перемешиванием.

11.10.5. Задача. Конструкция T задана параметрами $r_j = 2j$, $s_j(i) = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant j$ и $s_j(i) = 1$ при $j + 1 \leqslant i \leqslant 2j$. Доказать, что для всех k имеем $T^{-kh_j} \to_w (I + T^k)/2$. Показать, что слабое замыкание степеней T содержит оператор $e^{T-I} = \sum_{i=0}^{\infty} (en!)^{-1} T^i$.

Литература

[1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. Наука, М., 1980.

[2] Халмош П. Лекции по эргодической теории. ИЛ, М., 1959.

[3] Рыжиков В. В. О сохраняющих меру преобразованиях ранга один. Тр. Моск. матем. об-ва. 2020. Т. 81, N 2. С. 281–318.

Глава 12

Начала теории целых функций

К. Ю. Федоровский

Напомним, что функция комплексного переменного $f(z)$ называется *целой*, если она голоморфна всюду в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Теория целых функций не только представляет существенный интерес как отдельная красивая область комплексного анализа, но и имеет ряд важных и глубоких приложений в других разделах анализа, в теории операторов, в теории дифференциальных уравнений, в других разделах математики, а также в ряде прикладных областей (например, в радиотехнике и оптике). Нашей целью является изложение некоторых базовых фактов о целых функциях.

§ 12.1. Порядок и тип целой функции

Рассмотрим степенной ряд с центром в начале координат

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{12.1.1}$$

Радиус сходимости этого ряда, согласно формуле Коши – Адамара, равен R, где $1/R = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$. Если ряд (12.1.1) представляет целую функцию, то $R = \infty$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}(|c_n|^{1/n}) = 0$.

Для $r > 0$ положим $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Если из контекста ясно, о какой функции f идет речь, то будем писать $M(r)$ вместо $M_f(r)$. В силу неравенств Коши для коэффициентов рядов Тейлора для любого $r > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ выполнена оценка

$$|c_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}. \tag{12.1.2}$$

Предположим, что функция f удовлетворяет дополнительно условию $|f(z)| \lesssim r^k$ при всех $r > r_0$, где $r_0 > 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ — некоторые числа (запись $A \lesssim B$ означает, что существует константа C такая, что $A \leqslant CB$ при всех допустимых значениях параметров и переменных, входящих в выражения A и B). Тогда из (12.1.2) вытекает, что

$|c_n| \lesssim r^{k-n}$. Полагая $r \to \infty$, получаем отсюда, что $c_n = 0$ при всех $n > k$ и, следовательно, целая функция f с условием $|f(z)| \lesssim r^k$ — многочлен степени не выше k. В частности, всякая целая ограниченная функция — константа. Эти утверждения составляют основное содержание классической теоремы Лиувилля, входящей в основной курс комплексного анализа. Нам важно следующее наблюдение, вытекающее из приведенного утверждения: если целая функция f не является многочленом, то величина $M_f(r)$ при $r \to \infty$ растет быстрее любой функции вида r^m, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Это соображение приводит к следующему определению.

12.1.1. Определение. *Пусть f — целая функция. Говорят, что f — функция конечного порядка, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $R > 0$, что для всех $r > R$ выполнено неравенство*

$$M_f(r) < \exp(r^\alpha). \tag{12.1.3}$$

Нижняя грань ρ чисел α таких, что для некоторого $R > 0$ при $r > R$ справедливо неравенство (12.1.3)*, называется порядком функции f.*

Пусть теперь f — целая функция конечного порядка ρ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое R_ε, что для всех $r > R_\varepsilon$ выполнено $M_f(r) < \exp(r^{\rho+\varepsilon})$ и найдется возрастающая последовательность $\{r_k\}_{k=1}^\infty$, $r_k > 0$, $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такая, что $M_f(r_k) > \exp(r_k^{\rho-\varepsilon})$. Другими словами,

$$\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} < \rho + \varepsilon$$

при $r > R_\varepsilon$ и, с другой стороны,

$$\frac{\ln\ln M_f(r_k)}{\ln r_k} > \rho - \varepsilon, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}. \tag{12.1.4}$$

До сих пор мы исходили из предположения, что функция f имеет конечный порядок ρ. Если же неравенство (12.1.3) не выполняется ни для какого конечного α, то говорят, что функция f имеет *бесконечный порядок*. В этом случае (для такой функции f) пишем $\rho = \infty$.

После того, как мы определили порядок целой функции, естественно определяется еще одна характеристика ее роста — *тип*.

12.1.2. Определение. *Пусть f — целая функция порядка ρ, где $0 < \rho < \infty$. Функция f имеет конечный тип относительно порядка ρ,* *если найдутся такие числа $s > 0$ и $R_s > 0$, что при всех $r > R_s$ выполнено неравенство*

$$M_f(r) < \exp(sr^\rho). \tag{12.1.5}$$

Нижняя грань σ чисел s, для которых выполнено это неравенство, называется типом функции f (относительно порядка ρ). Если же это неравенство не выполняется ни для какого конечного s, то функция f имеет, по определению, бесконечный тип относительно порядка ρ (т. е. $\sigma = \infty$).

Аналогично тому, как из определения порядка целой функции было получено его выражение (12.1.4), можно показать, что для типа целой функции f порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, имеет место формула

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \tag{12.1.6}$$

12.1.3. Определение. *Пусть f — целая функция порядка ρ, где $0 < \rho < \infty$. Пусть σ — тип функции f относительно порядка ρ. Если $\sigma = 0$, то функция f называется функцией нулевого (по другой терминологии минимального) типа, при $0 < \sigma < \infty$ — нормального, а при $\sigma = \infty$ — функцией бесконечного (или максимального) типа (относительно порядка ρ), соответственно.*

Рассмотрим несколько простых примеров. Целая функция $\sin z$ — функция порядка 1 типа 1 (относительно этого порядка). Пусть P — многочлен комплексного переменного степени m со старшим коэффициентом p_0, т. е. $P(z) = p_0z^m + p_1z^{m-1} + \dots + p_m$. Функция $\exp(P(z))$ имеет порядок $m = \deg P$. Ее тип относительно этого порядка равен $|p_0|$ (нужная оценка сверху для соответствующей величины $M(r)$ тривиальна, а необходимую нижнюю оценку легко получить рассматривая поведение функции $\exp(P(z))$ на луче $\arg z = -\arg p_0/m$). В качестве примера целой функции бесконечного порядка можно привести функцию $f(z) = \exp(\cos z)$.

12.1.4. Задача. Показать, что если $P(z)$ — многочлен комплексного переменного, f — целая функция порядка ρ (причем $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$), то функция fP также имеет порядок ρ. Если же f — функция порядка ρ, где $0 < \rho < \infty$, и имеет тип σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$, относительно порядка ρ, то функция fP также имеет тип σ относительно порядка ρ.

Представляется весьма интересным и полезным получить выражения для порядка и типа целой функции f в терминах коэффициентов ее ряда Тейлора в начале координат (12.1.1). По сути дела речь в этом вопросе идет о связи между скоростью роста функции и скоростью убывания ее тейлоровских коэффициентов в нуле. Мы начнем с простой леммы.

12.1.5. Лемма. *Пусть* f — *целая функция, и пусть* (12.1.1) — *ее ряд Тейлора в нуле. Предположим также, что существует* $R > 0$ *такое, что при всех* $R > 0$ *выполнено неравенство*

$$M_f(r) < exp(Ar^\alpha)$$

при некоторых $A > 0$ *и* $\alpha > 0$. *Тогда найдется* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что при всех* $n > N$ *выполнено неравенство*

$$|c_n|^{1/n} < \left(\frac{A\alpha e}{n}\right)^{1/\alpha}. \tag{12.1.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора вытекает, что $|c_n| < \exp(Ar^\alpha)\big/r^n$ при $r > R$. Остается найти минимум функции $\varphi(r) = \exp(Ar^\alpha)\big/r^n$. Непосредственным дифференцированием φ проверяется, что $\varphi'(r') = 0$ при $r' = (n/(A\alpha))^{1/\alpha}$. Ясно, что $r' > R$ при достаточно больших значениях n. Остается подставить r' в оценку для $|c_n|$. □

Эта техническая лемма позволяет получить необходимую нам в дальнейшем оценку.

12.1.6. Лемма. *Пусть* f — *сумма степенного ряда* (12.1.1). *Если найдется* $N > 0$ *такое, что при всех* $n > N$ *выполнено неравенство* (12.1.7), *то* f — *целая функция и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* R_ε *такое, что при всех* $r > R_\varepsilon$ *выполнено неравенство*

$$M_f(r) < \exp\big((A+\varepsilon)r^\alpha\big).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из условия (12.1.7) немедленно вытекает, что $|c_n|^{1/n} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что ряд (12.1.1) сходится всюду в $\mathbb{C}$ и f — целая функция. Пусть $N_1(r)$ — наименьшее целое число такое, что $N_1(r) > A\alpha e(2r)^\alpha$. Тогда $r(A\alpha e/N_1)^{1/\alpha} < 0.5$. Так как найдется r_1 такое, что $N_1 = N_1(r_1) > N$, то $|c_n|r^n < (0.5)^n$ при всех $r > r_1$ и $n > N_1$. Значит,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |c_n|r^n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

для всех $r > r_1$. Пусть, далее, $\mu(r) = \max\{|c_n|r^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Тогда, как легко видеть,

$$M_f(r) \leqslant N_1(r)\mu(r) + 1$$

при всех $r > r_1$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ таково, что $\mu(r) = |c_m|r^m$. Заметим, что $m \to \infty$ при $r \to \infty$. Выберем r_2 так, чтобы $m > N$ при $r > r_2$. Для таких r получаем

$$\mu(r) = |c_m|r^m < \varphi(m) \leqslant \max_{t \geqslant 1} \varphi(t),$$

где $\varphi(t) = \big((A\alpha e t^{-1})^{1/\alpha} r\big)^t$ при $t \in [1, +\infty)$. Найдем соответствующий максимум. Заметим, что $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Кроме того, $\varphi(1) = (A\alpha e)^{1/\alpha} r$. Непосредственное вычисление показывает, что $\varphi'(t') = 0$ при $t' = A\alpha r^\alpha$, откуда $\varphi(t') = \exp(Ar^\alpha)$. Ясно, что при больших значениях r выполнено неравенство $\varphi(t') > \varphi(1)$. Таким образом, максимум функции φ на $[1, \infty)$ достигается в точке t'. Значит,

$$M_f(r) < \big(A\alpha e(2r)^\alpha + 1\big)\exp(Ar^\alpha) + 1 < \exp((A + \varepsilon)r^\alpha)$$

при $r > R_\varepsilon$ (где $R_\varepsilon > \max\{r_1, r_2\}$ подбирается так, чтобы максимум функции φ достигался в точке t' и выполнялось последнее неравенство). □

12.1.7. Теорема. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ. Тогда*

$$\rho = \limsup_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{\ln(1/|c_n|)}. \tag{12.1.8}$$

Если $0 < \rho < \infty$, σ — тип функции f относительно порядка ρ, то

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} = \limsup_{n \to \infty} n^{1/\rho}|c_n|^{1/n}. \tag{12.1.9}$$

Доказательство. Пусть f имеет порядок ρ и $\rho < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_0 > 0$ такое, что при всех $r > R_0$ выполнено неравенство

$$M_f(r) < \exp(r^{\rho + \varepsilon}).$$

Из этого неравенства, используя лемму 12.1.5 получаем, что найдется $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N_0$ справедлива оценка

$$|c_n|^{1/n} < \Big(\frac{e\,(\rho + \varepsilon)}{n}\Big)^{1/(\rho + \varepsilon)}.$$

Отсюда вытекает, что при $n > N_0$

$$\ln\Big(\frac{1}{|c_n|}\Big) > \frac{n \ln n}{\rho + \varepsilon} - \lambda n,$$

где $\lambda = \ln(e(\rho + \varepsilon))/(\rho + \varepsilon)$. Заметим, далее, что из полученного неравенства следует, что найдется $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > N_1$

выполнено неравенство

$$\frac{n \ln n}{\ln(1/|c_n|)} < \rho + 2\varepsilon.$$

Это означает, что

$$L := \limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln(1/|c_n|)} \leqslant \rho.$$

Докажем теперь обратное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Найдется $N_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > N_2$ выполнено неравенство

$$\frac{n \ln n}{\ln(1/|c_n|)} < L + \varepsilon,$$

откуда $|c_n|^{1/n} < (1/n)^{1/(L+\varepsilon)}$. По лемме 12.1.6 получаем, что

$$M_f(r) < \exp(K r^{(L+\varepsilon)}), \quad K = \frac{1}{e(L+\varepsilon)} + \varepsilon$$

при $r > R_2$ для некоторого $R_2 > 0$. Из этой оценки вытекает, что $\rho \leqslant L$. Случай функций бесконечного порядка ($\rho = \infty$) оставляется в качестве *упражнения*. Кроме того, читателю предлагается самостоятельно доказать справедливость указанной формулы для типа. $\square$

12.1.8. Следствие. *Целая функция f и ее производная f' имеют одинаковые порядок и тип* (*относительно этого порядка*).

В самом деле, если f имеет тейлоровское разложение в начале координат вида (12.1.1), то $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ и остается применить формулы (12.1.8) и (12.1.9), выражающие порядок и тип функции через ее тейлоровские коэффициенты.

Приведем несколько простых примеров.

а) Пусть $c_n = (A/n)^{n/\alpha}$, где $A > 0$ — некоторая константа, а число α таково, что $0 < \alpha < \infty$. Тогда функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — целая функция порядка $\rho = \alpha$.

б) Далее, пусть $c_n = (e\alpha\beta/n)^{n/\alpha}$, где $0 < \alpha < \infty$ (как и раньше), $\beta \in (0, +\infty)$ — тоже некоторое число. Как уже отмечено выше, функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — целая порядка $\rho = \alpha$. Непосредственно проверяется, что тип этой функции (относительно порядка $\rho = \alpha$) равен β.

в) Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность чисел, что $\alpha_n > 0$, и пусть c_n таковы, что $|c_n| = n^{-n/\alpha_n}$. Заметим, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(1/|c_n|)} = \limsup_{n\to\infty} \alpha_n =: \alpha.$$

Если $\alpha < \infty$, то функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — целая порядка $\rho = \alpha$. В частности, при $\alpha = 0$ (это достигается, например, при $\alpha_n = 1/n$) получаем пример целой функции нулевого порядка. Наконец, в случае $\alpha = \infty$ и, например, $\alpha_n = o(\ln n)$ (можно взять, скажем, $\alpha_n = (\ln n)^\gamma$ при $\gamma \in (0,1)$) получаем целую функцию бесконечного порядка.

г) Приведем, наконец, примеры конкретных целых функций с заданными значениями типа относительно данного порядка ρ. Так, функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\ln n}{n}\Big)^{n/\rho} z^n$$

имеет максимальный (бесконечный) тип относительно порядка $\rho > 0$, функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n \ln n}\Big)^{n/\rho} z^n$$

имеет нулевой тип (также относительно порядка ρ). Заметим далее, что функция

$$f(z) = \frac{\sin(z^{1/2})}{z^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n$$

имеет порядок $1/2$ и тип 1 относительно этого порядка.

§ 12.2. Нули целых функций

Ясно, что целая функция может не иметь нулей, может иметь конечное или, максимум, счетное множество нулей. Как хорошо известно из базового курса комплексного анализа, если f — голоморфная в некоторой односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ функция и $f \neq 0$ в D (т. е. $f(z) \neq 0$ для всех $z \in D$), то найдется такая голоморфная в D функция g, что $f = \exp(g)$. Из этого сразу вытекает, что всякая целая функция f без нулей имеет вид $f = \exp(g)$, а целая функция f, имеющая лишь конечное множество нулей, скажем, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (точки в этом множестве перечислены с учетом кратности), имеет вид

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k).$$

Изучим вопрос о том, как устроена целая функция с бесконечным множеством нулей. Будем считать, что читатель знаком с основными элементарными свойствами числовых и функциональных бесконечных произведений, и будем использовать их свойства без дополнительных комментариев. Мы начнем с доказательства классической теоремы Вейерштрасса о существовании целой функции с заданными нулями. Так как в каждом конечном круге $\{|z| < R\}$ любая целая функция имеет не более чем конечное число нулей, последовательности нулей целых функций удобно записывать в следующем виде: $\{0, \ldots, 0, a_1, \ldots\}$, где первые m членов равны нулю, $0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ и $|a_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

12.2.1. Теорема. *Для любой последовательности* $\{a_n\}$ *указанного выше вида существует целая функция* f*, множество нулей которой в точности совпадает с этой последовательностью* (*нули считаются, как обычно, с учетом кратности*).

Доказательство. Рассмотрим бесконечное произведение

$$z^m \prod_{n=1}^{\infty} \Bigl(1-\frac{z}{a_n}\Bigr) \exp(P_n(z)), \quad \text{где} \quad P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k a_n^k} = \frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^n}{n a_n^n}, \tag{12.2.1}$$

и докажем, что оно сходится равномерно в кругах $D_R = \{z\colon |z| < R\}$ к некоторой целой функции, имеющей нули в точках $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (и только в них). Как хорошо известно, для этого необходимо проверить, что найдется $N > 0$ такое, что ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty} \Bigl(\ln\Bigl(1 - \frac{z}{a_n}\Bigr) + P_n(z) \Bigr)$$

сходится локально равномерно в D_R. Зафиксируем $R > 0$ и выберем N так, что $|a_n| \geqslant 2R$ при $n \geqslant N$. Тогда при $z \in D_R$ выполнено неравенство $|z/a_n| \leqslant 1/2$ при $n \geqslant N$. Таким образом, для рассматриваемых n и z корректно определено значение $\ln(1 - z/a_n)$ (можно рассматривать главное значение логарифма) и, более того,

$$\ln\Bigl(1 - \frac{z}{a_n}\Bigr) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k a_n^k},$$

откуда

$$\Bigl| \ln\Bigl(1 - \frac{z}{a_n}\Bigr) + P_n(z) \Bigr| = \Bigl| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k a_n^k} \Bigr| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

при всех $z \in D_R$. Из этого вытекает локально равномерная сходимость рассматриваемого ряда в D_R. Таким образом, бесконечное произведение (12.2.1) определяет целую функцию Φ, нули которой — точки последовательности $\{a_n\}$ и только они. $\square$

Из теоремы 12.2.1 вытекает, что всякая целая функция с нулями $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет вид

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{z}{a_n}\Bigr) e^{P_n(z)},$$

где m — кратность нуля f в начале координат, g — некоторая целая функция. В самом деле, нули целой функции $\varPhi(z)$, построенной в Теореме 12.2.1, совпадают с нулями рассматриваемой функции f. Это означает, что функция $f/\varPhi$ — целая функция без нулей, которая, как уже отмечалось, имеет вид $\exp(g)$ для некоторой целой функции g.

Формула Йенсена. Для дальнейшего изучения строения последовательностей нулей целых функций введем так называемую *считающую функцию* $n_f(r)$, значение которой равно числу нулей целой функции f в круге $D_r = \{z\colon |z| < r\}$. Представляет интерес оценка величины $n_f(r)$ сверху в терминах $M_f(r)$. Для получения такой оценки нам потребуется следующее утверждение.

12.2.2. Лемма. *Пусть f — функция, голоморфная в некотором круге $D_R = \{z\colon |z| < R\}$, причем $f(0) \neq 0$, и пусть $\{a_n\}_{n=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}$, — совокупность всех нулей f в D_R, записанных в порядке неубывания модулей* (*с учетом кратности*)*. При $0 < r < R$ имеет место формула* (*известная как формула Йенсена*)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta = \ln|f(0)| + \sum_{n\colon |a_n|<r} \ln\Bigl(\frac{r}{|a_n|}\Bigr). \qquad (12.2.2)$$

Доказательство. Предположим вначале, что $r \neq |a_n|$ для всех $n = 1, 2, \ldots, N$. Рассмотрим конечное произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{n\colon |a_n|<r} \frac{r(z - a_n)}{r^2 - \overline{a_n} z}$$

и функцию $F(z) = f(z)/B(z)$. Легко видеть, что функция F голоморфная в D_r и не имеет там нулей (на самом деле F голоморфна и не имеет нулей в некоторой окрестности замкнутого круга $\overline{D_r}$). Тогда в круге D_r существует голоморфная ветвь $\ln F(z)$ соответствующего многозначного логарифма, следовательно, функция $\ln|F(z)|$ — гармоническая в некоторой окрестности $\overline{D_r}$. По теореме о среднем для гармонических функций

$$\ln|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta.$$

Остается заметить, что $|F(re^{i\vartheta})| = |f(re^{i\vartheta})|$ (в силу базовых свойств множителей и конечных произведений Бляшке, проверка оставляется читателю в качестве *упражнения*), имеет место равенство $|B(re^{i\vartheta})|=1$ при $\vartheta \in [0, 2\pi]$), причем

$$\ln|F(0)| = \ln|f(0)| + \sum_{n\colon\, |a_n|<r} \ln\Big(\frac{r}{|a_n|}\Big).$$

Таким образом, формула (12.2.2) доказана для $r \neq |a_n|$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Справедливость этой формулы для всех $r < R$ вытекает из того, что в случае $r = |a_k|$ при некотором k с $1 \leqslant k \leqslant N$ подынтегральная функция в (12.2.2) имеет лишь конечное число интегрируемых особенностей. Проверка оставшихся деталей — *упражнение*. □

Связь между ростом целой функции и свойствами последовательности ее нулей. Заметим, что $n_f(r) = 0$ при $r \in [0, |a_1|)$, и положим

$$J = \int_0^r \frac{n_f(t)\,dt}{t},$$

Далее, пусть $N = n_f(r)$. Тогда

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{|a_k|}^{|a_{k+1}|} \frac{n_f(t)\,dt}{t} + \int_{|a|_N}^{r} \frac{n_f(t)\,dt}{t} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{|a_k|}^{|a_{k+1}|} \frac{k\,dt}{t} + \int_{|a|_N}^{r} \frac{n_f(t)\,dt}{t}. \end{aligned}$$

Из этого вытекает, что

$$J = \sum_{k=1}^{N-1} \ln\Big(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\Big)^k + \ln\Big(\frac{r}{|a_N|}\Big)^N = \sum_{n:|a_n|<r} \ln\Big(\frac{r}{|a_n|}\Big).$$

Таким образом, формула Йенсена может быть представлена в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta = \ln|f(0)| + \int_0^r \frac{n_f(t)\,dt}{t}.$$

Это представление, в свою очередь, имеет полезное следствие:

$$\int_0^r \frac{n_f(t)\,dt}{t} \leqslant \ln M_f(r) - \ln|f(0)| = \ln\frac{M_f(r)}{|f(0)|}.$$

Полученное неравенство связывает возможное число нулей целой функции в круге D_r с оценкой максимума ее модуля на границе круга.

Дальнейшее продвижение в изучении последовательностей нулей целых функций связано с понятием показателя сходимости числовой последовательности.

12.2.3. Определение. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что* $0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $|a_n| \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}} \tag{12.2.3}$$

сходится при некотором $\lambda > 0$, *то говорят, что последовательность* $\{a_n\}$ *имеет конечный показатель сходимости. Точная нижняя грань тех* $\lambda > 0$, *при которых ряд* (12.2.3) *сходится, называется показателем сходимости последовательности* $\{a_n\}$. *Если ряд* (12.2.3) *расходится при всех* $\lambda > 0$, *то говорят, что соответствующая последовательность имеет бесконечный показатель сходимости.*

12.2.4. Лемма. *Если* $0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *и* $|a_n| \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то показатель сходимости последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равен*

$$\tau = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln |a_n|}.$$

Доказательство этой леммы оставляется читателю в качестве *задачи*. Приведем простые примеры. Последовательность $\{e^n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет показатель сходимости 0. Показатель сходимости последовательности $\{n^{1/\beta}\}_{n=1}^{\infty}$ при $\beta > 0$ равен β. Наконец, последовательность $\{\ln n\}_{n=2}^{\infty}$ имеет бесконечный показатель сходимости.

Пусть $\delta \in (0,1)$. Тогда

$$\int_0^r \frac{n_f(t)\,dt}{t} \geqslant \int_{\delta r}^{r} \frac{n_f(t)\,dt}{t} \geqslant n_f(\delta r) \ln\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

откуда

$$n_f(\delta r) \leqslant \frac{1}{\ln(1/\delta)} \ln \frac{M_f(r)}{|f(0)|}. \tag{12.2.4}$$

Предположим теперь, что f — целая функция конечного порядка ρ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_0 > 0$ такое, что $\ln M_f(r) < r^{\rho+\varepsilon}$ при всех $r > R_0$. Из этого и (12.2.4) вытекает, что

$$\frac{n_f(\delta r)}{r^{\rho+\varepsilon}} < \frac{1}{\ln(1/\delta)} - \frac{\ln|f(0)|}{\ln(1+\delta)},$$

откуда

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n_f(\delta r)}{r^{\rho+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{\ln(1/\delta)},$$

или, после замены $t = \delta r$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{n_f(t)}{t^{\rho+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{\delta^{\rho+\varepsilon}\ln(1/\delta)}.$$

Заметив, что минимум выражения, стоящего в правой части последнего неравенства, достигается при $\delta = \exp(-1/(\rho+\varepsilon))$, окончательно получаем

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n_f(r)}{r^{\rho+\varepsilon}} \leqslant e(\rho+\varepsilon). \tag{12.2.5}$$

Предположим далее, что f имеет конечный тип σ относительно порядка ρ. Тогда оценку (12.2.5) можно уточнить. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдется R_1 такое, что при $r > R_1$ выполнена оценка $\ln M_f(r) < (\sigma+\varepsilon)r^\rho$. Используя это неравенство и рассуждая аналогично тому, как при выводе оценки (12.2.5), можно показать, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n_f(r)}{r^{\rho}} \leqslant \sigma\, e\, \rho. \tag{12.2.6}$$

Вывод этой оценки оставляется в качестве *упражнения*.

Оценки (12.2.5) и (12.2.6) позволяют получить следующее утверждение.

12.2.5. Лемма. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ и $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность ее нулей. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} \leqslant e(\rho+\varepsilon). \tag{12.2.7}$$

Кроме того, если f имеет конечный тип σ относительно порядка ρ, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{|a_n|^{\rho}} \leqslant \sigma\, e\, \rho. \tag{12.2.8}$$

Для доказательства достаточно заметить, что $n_f(|a_n|+1) \geqslant n$ при $n = 1, 2, \dots$ (в силу принятого упорядочивания нулей функции f), когда f имеет бесконечное множество нулей. Это неравенство позволяет заменить $n_f(r)$ на n и r на $|a_n|$ в неравенствах (12.2.5) и (12.2.6). Это сразу дает (12.2.7) и (12.2.8).

Из леммы 12.2.5 вытекает следующий результат, принадлежащий Адамару.

12.2.6. Предложение. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ. Тогда ее последовательность нулей имеет конечный показатель сходимости $\tau \leqslant \rho$.*

Доказательство. Из (12.2.7) непосредственно вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{|a_n|} \leqslant \Bigl(\frac{e(\rho + 2\varepsilon)}{n}\Bigr)^{1/(\rho+\varepsilon)}.$$

Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда

$$\frac{1}{|a_n|^\lambda} \leqslant \Bigl(\frac{e(\rho + 2\varepsilon)}{n}\Bigr)^{\lambda/(\rho+\varepsilon)},$$

откуда видно, что ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-\lambda}$ сходится при $\lambda > \rho + \varepsilon$. Таким образом, показатель сходимости последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ конечен и не превосходит ρ. □

Лемма 12.2.5 и предложение 12.2.6 позволяют сформулировать следующую теорему единственности для целых функций конечного порядка.

12.2.7. Теорема. *Пусть порядок целой функции f не превосходит некоторое число ρ и $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность нулей функции f. Если показатель сходимости этой последовательности больше ρ, то имеем $f \equiv 0$.*

Теорема Адамара о факторизации, канонические произведения и теорема Бореля. Докажем две технические леммы.

12.2.8. Лемма. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность ненулевых комплексных чисел. Пусть существует такое целое число $p \geqslant 0$, что*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty. \tag{12.2.9}$$

Далее, пусть

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k a_n^k},$$

при $p > 0$, а при $p = 0$ пусть $P_n \equiv 0$. Тогда функция

$$f(z) = \prod_{n=1}^\infty \Bigl(1 - \frac{z}{a_n}\Bigr) \exp(P_n(z)) \tag{12.2.10}$$

является целой, а ее нули (с учетом кратности) — в точности элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство. Доказательство этой леммы проходит по той же схеме, что и доказательство Теоремы 12.2.1. Возьмем произвольное $R > 0$. Нам достаточно проверить, что найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty} \Big(\ln\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) + P_n(z)\Big)$$

сходится локально равномерно в круге $D_R = \{z\colon |z| < R\}$. Как и раньше, выберем N так, что $|a_n| \geqslant 2R$ при $n > N$. Тогда при $n > N$ и $z \in D_R$ имеем $|z/a_n| < 1/2$. Заметим, что

$$\Big|\ln\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) + P_n(z)\Big| = \Big|\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k a_n^k}\Big| \leqslant \frac{|z|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{|a_n|^k}$$
$$\leqslant \frac{R^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\frac{R^{p+1}}{|a_n|^{p+1}},$$

из которой сразу следует локально равномерная сходимость требуемого ряда в круге D_R. □

Следующая лемма дает оценку тейлоровских коэффициентов голоморфной в круге функции (типа неравенств Коши) через верхнюю оценку ее вещественной части.

12.2.9. Лемма. *Пусть* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *в круге* $D_R = \{z\colon |z| < R\}$ *и* $\operatorname{Re} f(z) \leqslant A$ *при* $z \in D_R$. *Тогда*

$$|b_n| \leqslant \frac{2(A - \operatorname{Re} f(0))}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Возьмем функцию $g(z) = A - f(z)$, для которой $\operatorname{Re} g(z) \geqslant 0$ при $z \in D_R$. По формуле для коэффициентов Тейлора при $n \geqslant 1$ и $r \in (0, R)$ получаем

$$-b_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} g(re^{i\vartheta}) e^{-in\vartheta}\, d\vartheta, \quad \int_0^{2\pi} \overline{g(re^{i\vartheta})}\, e^{-in\vartheta}\, d\vartheta = 0.$$

Таким образом,

$$-b_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(re^{i\vartheta}) e^{-in\vartheta}\, d\vartheta,$$

откуда следует нужная оценка

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(re^{i\vartheta})\, d\vartheta = \frac{2\operatorname{Re} g(0)}{r^n} = \frac{2(A - \operatorname{Re} f(0))}{r^n},$$

в которой остается перейти к пределу при $r \to R$. □

Мы готовы сформулировать и доказать первый из заявленных результатов этого подраздела — теорему Адамара о факторизации.

12.2.10. Теорема. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n \neq 0$, — последовательность нулей функции f, упорядоченная стандартным образом, причем f имеет в начале координат нуль порядка m, $m \in \mathbb{Z}_+$. Далее, пусть $p \in \mathbb{Z}_+$ — наименьшее целое число такое, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} \tag{12.2.11}$$

сходится. Тогда

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp(P_n(z)), \tag{12.2.12}$$

где, как и в лемме 12.2.8,

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k a_n^k},$$

g — многочлен степени не выше ρ.

Доказательство. Так как f — целая функция порядка $\rho < \infty$, то показатель сходимости ее последовательности нулей τ конечен и $\tau \leqslant \rho$. Таким образом, существует $p \in \mathbb{Z}_+$, для которого условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)}$ выполняется. Ясно, что $p \leqslant \tau \leqslant p+1$. По лемме 12.2.8 функция

$$F(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp(P_n(z))$$

есть целая функция, нули которой совпадают с нулями функции f. Тогда

$$f(z) = e^{g(z)} F(z),$$

где g — некоторая целая функция. Для доказательства теоремы остается показать, что g — многочлен степени не выше ρ. Для этого возьмем произвольное $R > 1/2$ и некоторое $N = N(R)$, которое выберем позднее, и представим функцию f в виде

$$f(z) = z^m \times \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \times F_N(z),$$

где функция F_N определена следующим образом:

$$F_N(z) = \exp\Big(g(z) + \sum_{n=1}^{N} P_n(z)\Big) \times \prod_{n=N+1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) \exp(P_n(z)).$$

Уточним теперь выбор числа N. Пусть это число выбрано так, что $|a_n| \leqslant R$ при $n \leqslant N$ и $|a_n| > R$ при $n > N$. Тогда

$$\begin{aligned} M_f(2R) &= \max_{|z|=2R} |f(z)| = (2R)^m \max_{|z|=2R} \prod_{n=1}^{N} \Big|1 - \frac{z}{a_n}\Big| \max_{|z|=2R} |F_N(z)| \\ &\geqslant \max_{|z|=2R} |F_N(z)|. \end{aligned}$$

По принципу максимума модуля для голоморфных функций при всех $z \in D_{2R}$ имеем $|F_N(z)| \leqslant M_f(2R)$. Заметим далее, что в круге D_R функция F_N не имеет нулей. Следовательно, F_N в этом круге может быть представлена в виде $F_N(z) = \exp(g_N(z))$, где

$$g_N(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{N} P_n(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big(\ln\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) + P_n(z)\Big),$$

а функция g_N голоморфна в круге D_R (заметим, что главные ветви всех соответствующих логарифмов определены в D_R, ибо $|z/a_n| < 1$ при $z \in D_R$ и $n > N$). Так как $P_n(z)$ — многочлены степени p, то при $k > p$ имеет место равенство

$$c_k(g_N) = c_k(g) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{k a_n^k},$$

где $c_j(h) = h^{(j)}(0)/j!$ — соответствующий коэффициент Тейлора функции h в начале координат. Поскольку $\operatorname{Re} g_N(z) < \ln M_f(2R)$ при всех $z \in D_R$, то по лемме 12.2.9 при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|c_k(g_N)| \leqslant \frac{2\big(\ln M_f(2R) - \operatorname{Re} g_N(0)\big)}{R^k}.$$

Так как $\ln M_f(2R) < (2R)^{\rho+\varepsilon}$ при достаточно больших R и достаточно малом $\varepsilon > 0$, то при $k > \rho$ выполнено неравенство

$$\lim_{R\to\infty} \frac{2\big(\ln M_f(2R) - \operatorname{Re} g_N(0)\big)}{R^k} = 0.$$

Далее, так как $p \leqslant \tau \leqslant \rho$, то при $k > \rho$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k}$$

сходится. Более того, при $N = N(R)$ выбранном так, как указано выше,

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^{-k} \to 0.$$

Таким образом, при всех $k > \rho$ имеем

$$|c_k(g)| < \frac{2\big(\ln M_f(2R) - \operatorname{Re} g_N(0)\big)}{R^k} + \frac{1}{k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k} \to 0,$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы. □

12.2.11. Определение. *Целые функции вида*

$$F(z) = z^m \times \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) \exp(P_n(z)), \tag{12.2.13}$$

возникшие в доказательстве теоремы 12.2.10*, называются каноническими произведениями. Число p называется родом канонического произведения* (12.2.13).

12.2.12. Теорема (Борель). *Пусть f — некоторая целая функция вида* (12.2.12)*, где последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $a_n \neq 0$ имеет показатель сходимости τ, $p \in \mathbb{Z}_+$ — наименьшее целое число, для которого выполнено условие* (12.2.11)*, g — многочлен степени k. Тогда f имеет конечный порядок $\rho = \max\{\tau, k\}$. Более того, если $\tau < k$ или выполнено условие $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\tau} < \infty$, то функция f имеет конечный тип* (*относительно порядка ρ*).

Доказательство. Начнем с оценки сомножителей канонического произведения рода p. Пусть

$$\varphi(u) = (1 - u) \exp\Big(\sum_{j=1}^{p} \frac{u^j}{j}\Big).$$

Покажем, что $|\varphi(u)| \leqslant \exp(C|u|^\lambda)$, где $C > 0$ — некоторая константа и $\lambda \in [p, p+1]$. В самом деле, пусть $|u| \geqslant 1/2$. Тогда

$$|\varphi(u)| \leqslant (1+|u|)\exp\Big(\sum_{j=1}^{p}|u|^j\Big) = \exp\Big(\ln(1+|u|) + |u|^p\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{|u|^j}\Big)$$
$$\leqslant \exp(C_1 2^p|u|^p) \leqslant \exp(C_1 2^\lambda|u|^\lambda)$$

при $\lambda \geqslant p$ и некотором $C_1 > 0$. Если же $|u| \leqslant 1/2$, то

$$|\varphi(u)| = \Big|\exp\Big(\ln(1-u) + \sum_{j=1}^{p}\frac{u^j}{j}\Big)\Big| = \Big|\exp\Big(-\sum_{j=p+1}^{\infty}\frac{u^j}{j}\Big)\Big|$$
$$\leqslant \exp(2|u|^{p+1}) \leqslant \exp(2|u|^\lambda)$$

при $\lambda \leqslant p+1$.

Далее выберем λ так, что ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-\lambda}$ сходится. При этом, если ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-\tau}$ сходится, то $p < \tau \leqslant p+1$, и мы возьмем $\lambda = \tau$. Если ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-\tau}$ расходится, то $p \leqslant \tau < p+1$, и мы положим $\lambda = \tau + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon \in (0, p+1-\tau]$. Тогда имеет место неравенство

$$\Big|\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\exp(P_n(z))\Big| \leqslant \exp\big(C|z|^\lambda/|a_n|^\lambda\big).$$

Так как $g(z) = q_0 + q_1 z + \cdots + q_k z^k$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_0 > 0$ такое, что при $|z| > R_0$ выполнено

$$\big|z^m\exp(g(z))\big| < \exp((|q_k| + \varepsilon)|z|^k).$$

Таким образом, при $|z| > R_0$ получаем

$$|f(z)| < \exp\Big((|q_k|+\varepsilon)|z|^k + C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|z|^\lambda}{|a_n|^\lambda}\Big). \tag{12.2.14}$$

Из этой оценки сразу вытекает, что f имеет конечный порядок ρ и $\rho \leqslant \max\{k, \lambda\}$. Так как $\lambda = \tau$ или $\lambda = \tau + \varepsilon$, то, в силу произвольности выбора ε, выполнена оценка $\rho \leqslant \max\{k, \tau\}$. Но ранее доказанные утверждения показывают, что $\tau \leqslant \rho$ (предложение 12.2.6) и $k \leqslant \rho$ (теорема 12.2.10). Итак, $\rho = \max\{k, \tau\}$.

Пусть $\tau < k$. В этом случае $\rho = k$. Выберем λ так, что $\tau < \lambda < k$. Тогда при достаточно больших $|z|$ из неравенства (12.2.14) вытекает, что $|f(z)| \leqslant \exp(C|z|^k)$. Из этого вытекает, что f имеет конечный тип. Если же $k \leqslant \tau$ и ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-\tau}$ сходится, то можно взять число

$\lambda = \tau$ в (12.2.14). Тогда $|f(z)| \leqslant \exp(C_2|z|^\tau)$, где $C_2 > 0$ — некоторая константа, откуда снова вытекает конечность типа функции f. $\square$

12.2.13. Следствие. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ и τ — показатель сходимости последовательности нулей f. Если $\rho \notin \mathbb{Z}$, то $\rho = \tau$.*

12.2.14. Следствие. *Всякая целая функция f порядка $\rho \in [0,1)$ может быть представлена в виде*

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big),$$

где C — некоторая константа.

Последнее следствие, разумеется, включает в себя случай, когда функция f — многочлен. В этом случае вместо последовательности нулей возникает конечное множество, и соответствующее произведение оказывается конечным.

Разложение функций $\sin z$ и $\cos z$ в бесконечные произведения. В качестве примера применения полученных результатов (в частности теоремы 12.2.10) рассмотрим разложение функции $\sin z$ в бесконечное произведение. Функция $\sin z$ имеет конечный порядок $\rho = 1$. Нули $\sin z$ — точки $\{\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$. Легко видеть, что показатель сходимости последовательности нулей $\sin z$ равен $\tau = 1$. Заметим также, что род канонического произведения в разложении $\sin z$ по формуле (12.2.12) равен $p = 1$. Наконец, степень многочлена g в представлении (12.2.12) для $\sin z$ не выше 1. Так как при $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\Big(1 - \frac{z}{\pi n}\Big) \exp\Big(\frac{z}{\pi n}\Big) \times \Big(1 + \frac{z}{\pi n}\Big) \exp\Big(-\frac{z}{\pi n}\Big) = \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big),$$

то представление (12.2.12) для функции $f(z) = \sin z$ имеет вид

$$\sin z = z e^{az+b} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big).$$

Поскольку $\sin z/z \to 1$ при $z \to 0$, то $e^b = 1$. Так как функция $\sin z$ нечетная, то $e^{az} = e^{-az}$, откуда $a = 0$. Таким образом, окончательно разложение $\sin z$ в бесконечное произведение имеет вид

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big).$$

Совершенно аналогично проверяется, что

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 (n-1/2)^2}\Big).$$

Плотности последовательностей нулей целых функций. Пусть дана такая последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\rho \geqslant 0$ — некоторое число.

12.2.15. Определение. *Величина*

$$\Delta_\rho^\sharp(\Lambda) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{|a_n|^\rho}$$

называется верхней ρ-плотностью последовательности Λ. Величину

$$\Delta_\rho^\flat(\Lambda) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{|a_n|^\rho}$$

называют нижней ρ-плотностью Λ, предел $\Delta_\rho(\Lambda)$ выражения $n|a_n|^{-\rho}$ (если он существует) называют ρ-плотностью Λ.

12.2.16. Лемма. *Пусть $n_\Lambda(t) = \#\{n\colon |a_n| < t\}$, $t \geqslant 0$, — считающая функция последовательности Λ. Имеют место равенства*

$$\Delta_\rho^\sharp(\Lambda) = \limsup_{t\to\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho},\ \Delta_\rho^\flat(\Lambda) = \liminf_{t\to\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho},\ \Delta_\rho(\Lambda) = \lim_{t\to\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho},$$

причем в последнем случае соответствующие пределы существуют одновременно.

Доказательство этой леммы оставляем в качестве *задачи*.

Приведем без доказательства следующие два утверждения, которые желающие могут изучить самостоятельно, найдя доказательства в литературе.

12.2.17. Предложение. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ и типа σ относительно этого порядка. Пусть также Λ — последовательность нулей f (упорядоченных стандартным образом). Тогда $\Delta_\rho^\sharp(\Lambda) \leqslant e\rho\sigma$ и $\Delta_\rho^\flat(\Lambda) \leqslant \rho\sigma$, причем эти неравенства точные.*

12.2.18. Предложение. *Пусть f — целая функция конечного порядка ρ и $\rho \notin \mathbb{Z}$. Пусть также Λ — последовательность нулей f (упорядоченных стандартным образом). Тогда величина $\Delta_\rho^\sharp(\Lambda)$ и тип σ функции f относительно порядка ρ либо равны нулю или бесконечности, либо конечны и положительны одновременно.*

Один пример в связи с полнотой системы экспонент.

12.2.19. Определение. *Система* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *элементов некоторого линейного топологического пространства* $\mathcal{E}$ *называется полной, если замыкание ее линейной оболочки совпадает с* $\mathcal{E}$.

Другими словами, система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $\mathcal{E}$, если всякий элемент из $\mathcal{E}$ можно сколь угодно хорошо приблизить конечной линейной комбинацией элементов данной системы. Если же система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является полной в $\mathcal{E}$, то замыкание ее линейной оболочки — замкнутое собственное подпространство $\mathcal{E}_0$ пространства $\mathcal{E}$. В этом случае по теореме Хана – Банаха существует ненулевой линейный функционал $\varphi \in \mathcal{E}^*$ такой, что $\varphi(y) = 0$ для всех $y \in \mathcal{E}_0$. Разумеется, верно и обратное: из существования $\varphi \in \mathcal{E}^*$ такого, что $\varphi(y) = 0$ для всякого элемента y из замыкания линейной оболочки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, вытекает неполнота этой системы в $\mathcal{E}$. Нас будет интересовать вопрос о полноте системы экспонент $\{\exp(i\lambda_n t)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $C[-\pi,\pi]$ непрерывных функций на отрезке $[-\pi,\pi]$, где $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — заданная последовательность вещественных чисел.

Пусть, как обычно, $n(t)$ — считающая функция последовательности Λ, т. е. $n(t)$ — число точек λ_n последовательности Λ, для которых выполнено неравенство $|\lambda_n| \leqslant t$.

12.2.20. Предложение. *Пусть* Λ — *некоторая последовательность вещественных чисел,* $n(t)$ — *ее считающая функция. Если*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{n(t)}{t} > 2,$$

то система $\{\exp(i\lambda_n t)\}_{n=1}^{\infty}$ *полна в пространстве* $C[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Если рассматриваемая система не полна, то найдется такой непрерывный линейный функционал φ на пространстве $C[-\pi,\pi]$, что $\varphi\big(\exp(i\lambda_n t)\big) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как

$$\varphi(h) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\, d\mu(t)$$

для некоторой конечной комплекснозначной борелевской меры μ на $[-\pi,\pi]$, то условие неполноты рассматриваемой системы экспонент эквивалентно существованию указанной меры μ, по которой интеграл от $\exp(i\lambda_n t)$ равен нулю при всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\, d\mu(t).$$

Легко проверяется, что F — целая функция, а также, что для F при всех $z \in \mathbb{C}$ выполнена оценка

$$|F(z)| \leqslant \|\mu\| e^{\pi|\operatorname{Im} z|},$$

где $\|\mu\|$ — норма меры μ (в смысле полной вариации). Так как $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность нулей функции F, то, используя формулу Йенсена, получаем

$$\int_\delta^r \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{\pi r}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin\vartheta|\, d\vartheta + \mathcal{O}(1) = 2r + \mathcal{O}(1), \quad r \to \infty, \tag{12.2.15}$$

где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. С другой стороны, найдутся $\varepsilon > 0$ и $T_0 > 0$ такие, что $n(t)/t > 2 + \varepsilon$ при $t > T_0$. Это явно противоречит оценке (12.2.15). □

A-точки целых функций. Пусть $A \in \mathbb{C}$ и f — некоторая функция. Точка $z \in \mathbb{C}$ называется A-точкой для f, если $f(z) = A$. Во многих ситуациях свойства A-точек голоморфных функций похожи на свойства нулей. Но в случае целых функций есть интересная особенность.

12.2.21. Предложение. *Пусть f — целая функция конечного ненулевого порядка ρ. Если $\rho \notin \mathbb{Z}$, то для любого значения A функции f последовательность A-точек f имеет показатель сходимости $\tau_A = \rho$. Если же $\rho \in \mathbb{Z}$, то показатель сходимости последовательности A-точек f равен $\tau_A = \rho$ для всех ее значений A, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Пусть $\rho \notin \mathbb{Z}$. Тогда A-точки функции f — нули функции $g(z) = f(z) - A$ порядка ρ. По теореме Бореля показатель сходимости этой последовательности равен ρ.

Пусть теперь $\rho \in \mathbb{N}$, $\tau_A < \rho$ и $\tau_B < \rho$ для двух значений $A \neq B$ функции f. Рассмотрим функции $f - A$ и $f - B$ и заметим, что они могут быть представлены в виде

$$f(z) - A = \exp(P(z))\,\varphi(z), \quad f(z) - B = \exp(Q(z))\,\psi(z),$$

где P и Q — некоторые многочлены степени ρ, а φ и ψ — некоторые целые функции порядка меньше ρ. Проверка этого факта оставляется в качестве простого *упражнения*. Тогда

$$A - B = \exp(Q(z))\,\psi(z) - \exp(P(z))\,\varphi(z).$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$0 = \exp(Q(z))\big(Q'(z)\psi(z) + \psi'(z)\big) - \exp(P(z))\big(P'(z)\varphi(z) + \varphi'(z)\big).$$

Заметим, что выражения в обеих скобках выше не тождественно равны нулю. В самом деле, если, например, $P'(z)\varphi(z) + \varphi'(z) \equiv 0$, то имеем $\varphi(z) = \exp(P(z)+C)$ с некоторой константой C, что невозможно, так как порядок функции φ строго меньше ρ, а порядок функции $\exp(P(z)+C)$ равен степени многочлена P, т. е. ρ. Следовательно,

$$\exp(Q(z) - P(z))\big(Q'(z)\psi(z) + \psi'(z)\big) = P'(z)\varphi(z) + \varphi'(z).$$

Пусть теперь a — старший коэффициента многочлена P, b — старший коэффициент многочлена Q. Если $a \neq b$, то в левой части последнего выражения стоит целая функция порядка ρ, а в правой — целая функция порядка меньше ρ. Полученное противоречие показывает, что $a = b$. Но если $a = b$, то выражение для $A - B$ можно переписать в виде

$$(A - B)\exp(-az^\rho) = \exp(Q_1(z))\psi(z) - \exp(P_1(z))\varphi(z),$$

где $P_1(z) = P(z) - az^\rho$ и $Q_1(z) = Q(z) - az^\rho$. Как и выше, легко заметить, что в левой части этого равенства стоит целая функция порядка ρ, а в правой — функция порядка меньше ρ. Таким образом, должно выполняться равенство $A = B$. □

12.2.22. Определение. *Значение A целой функции f называется исключительным борелевским значением, если для показателя τ_A выполнено $\tau_A < \rho$.*

Целая функция конечного нецелого порядка не имеет исключительных борелевских значений. Целая функция конечного ненулевого целого порядка может их иметь, но не более одного. Например, функция $\exp(z^2)\sin z$ имеет порядок $\rho = 2$, а значение 0, как легко проверить, имеет показатель сходимости $\tau_0 = 1$.

§ 12.3. Теорема Фрагмена – Линделёфа и ее простое следствие

Изучая рост целой функции f, мы до сих пор имели дело только с функцией $M_f(r)$, $r > 0$. Однако эта функция не содержит информации, достаточной для полного описания поведения f на бесконечности. В самом деле, для функции $f(z) = e^z$ имеем $M_f(r) = e^r$. Но если $\arg z \in (-\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то $|e^z| > e^{|z|\sin\varepsilon} \to \infty$ при $|z| \to \infty$. В то же время, при $\arg z \in (\pi/2 + \varepsilon, 3\pi/2 - \varepsilon)$ получаем $|e^z| < e^{-|z|\sin\varepsilon} \to 0$ при $|z| \to \infty$. Следующий фундаментальный результат дает понимание того, как связано поведение целой функции внутри некоторого сектора и поведение этой функции на его границе.

12.3.1. Теорема (принцип Фрагмена – Линделёфа)**.** *Пусть f — целая функция конечного порядка не выше ρ, причем $\alpha < 1/\rho$. Пусть также S — сектор раствора $\pi\alpha$ в комплексной плоскости с центром в начале координат. Если $|f(z)| \leqslant C$ при $z \in \partial S$, где C — некоторая константа, то $|f(z)| \leqslant C$ при $z \in S$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать далее, что $S = \{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| < \pi\alpha/2\}$. Выберем числа β и γ так, что $\rho < \beta < \gamma < 1/\alpha$. Так как порядок f не превосходит ρ, то найдется такая последовательность $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $0 < R_n < R_{n+1}$, $R_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$|f(z)| < \exp(|z|^{\beta}) \quad \text{при } |z| = R_n,\ n = 1, 2, \dots .$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = f(z)\exp(-\varepsilon z^{\gamma}),$$

где z^{γ} — главная ветвь соответствующей многозначной функции (определенная вне отрицательной вещественной полуоси).

Пусть $S_n = S \cap \{z : |z| < R_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. При этом $\partial S_n = \Gamma_n \cup \Sigma_n$, где Γ_n — соответствующая дуга окружности $\{z\colon |z| = R_n\}$, множества $\Sigma_n = \partial S_n \setminus \Gamma_n$ — «боковые стороны» рассматриваемого «усеченного» сектора. По условию теоремы при $z = re^{i\vartheta} \in \Sigma_n$ имеем $\vartheta = \pm\alpha\pi/2$ и

$$|g(z)| \leqslant C\exp\big(-\varepsilon r^{\gamma}\cos(\gamma\vartheta)\big) \leqslant C,$$

так как $\cos(\gamma\vartheta) = \cos(\gamma\pi\alpha/2) > 0$, коль скоро $\gamma < 1/\alpha$. Пусть теперь $z \in \Gamma_n$, т. е. $z = R_n e^{i\vartheta}$ при $|\vartheta| < \pi\alpha/2$. Учитывая оценку $|f(z)|$ на окружности $\{z\colon |z| = R_n\}$, получаем, что для $z \in \Gamma_n$ выполнено неравенство

$$|g(z)| < \exp\big(R_n^{\beta} - \varepsilon R_n^{\gamma}\cos(\gamma\vartheta)\big) \leqslant \exp\big(R_n^{\beta} - \varepsilon R_n^{\gamma}\cos(\gamma\alpha\pi/2)\big).$$

Отсюда видно, что найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > N$ и $z \in \Gamma_n$ имеем $|g(z)| \leqslant C$. Другими словами, при таких n для всех $z \in \partial S_n$ верна оценка $|g(z)| \leqslant C$. Следовательно, по принципу максимума модуля, оценка $|g(z)| \leqslant C$ выполнена для всех $z \in S_n$.

Так как $R_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то для любого $z \in S$ можно найти такое n, что $z \in S_n$ и $|g(z)| \leqslant C$. Таким образом, для всех $z \in S$ имеем

$$|f(z)\exp(-\varepsilon z^{\gamma})| \leqslant C.$$

Остается положить $\varepsilon \to 0$. □

Мы привели здесь далеко не самый общий вариант теоремы Фрагмена – Линделёфа, а тот, который приспособлен к нашим задачам. В частности, как непосредственное следствие нашего варианта теоремы Фрагмена – Линделёфа мы получаем следующее утверждение.

12.3.2. Следствие. *Пусть f — целая функция конечного порядка $\rho < 1/2$, ограниченная на некотором луче $\{z \in \mathbb{C}\colon \arg z = \vartheta_0\}$. Тогда имеем $f \equiv \mathrm{const}$.*

Для функций порядка $\rho \geqslant 1/2$ это утверждение уже неверно, как показывает, например, функция $\sin(z^{1/2})/z^{1/2}$ порядка $\rho = 1/2$, которая ограничена на положительной вещественной полуоси.

§ 12.4. Целые функции экспоненциального типа

12.4.1. Определение. *Целая функция f называется целой функцией экспоненциального типа, если порядок ρ функции f меньше* 1 *или* $\rho = 1$*, но тип σ относительно этого порядка конечен.*

Для целой функции экспоненциального типа f естественно определить показатель

$$\varkappa = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r}.$$

Этот показатель не что иное, как тип относительно порядка 1, но определяется он и для функций порядка, отличного от 1 (для функций порядка меньше 1 он равен 0, а для функций порядка больше 1 он равен бесконечности). Показатель $\varkappa$ в случае целой функции экспоненциального типа можно назвать *степенью* f.

Тейлоровское разложение целой функции экспоненциального типа обычно записывают в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n z^n}{n!},$$

выделяя множитель $1/n!$ в тейлоровских коэффициентах. Из формулы (12.1.9) и формулы Стирлинга вытекает, что

$$\varkappa = \limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n}.$$

Рассмотрим функцию

$$\gamma(t) = \gamma_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{t^{n+1}},$$

где соответствующий ряд Лорана сходится при $|t| > \varkappa$ и на окружности $|t| = \varkappa$ существует хотя бы одна особая точка для суммы этого ряда. Функция γ_f называется *преобразованием Бореля* функции f.

Отметим, что преобразование Бореля линейно. Для ряда конкретных целых функций его можно вычислить явно.

Если $f(z) = Ae^{az}$, то $\gamma(t) = A\big/(t-a)$.

При $f(z) = \sin z = \big(e^{iz} - e^{-iz}\big)\big/(2i)$ получаем

$$\gamma(t) = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{t-i} - \frac{1}{2i}\,\frac{1}{t+i} = \frac{1}{1+t^2},$$

а при $f(z) = \cos z = \left(e^{iz} + e^{-iz}\right)/2$ имеет место

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{t-i} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{t+i} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Для $1 + e^z$ преобразование Бореля равно $\gamma(t) = t^{-1} + (t-1)^{-1}$.

Роль преобразования Бореля в этой теории состоит в том, что имеет место связь между ростом функции f на лучах $\{z\colon \arg z = \alpha\}$ и строением множества особенностей функции $\gamma(\cdot)$ (точнее говоря, выпуклой оболочки соответствующего множества особенностей).

Напомним некоторые понятия выпуклого анализа, которые потребуются нам в дальнейшем. Пусть G — выпуклое множество на плоскости. При $\alpha \in [0, 2\pi]$ рассмотрим функцию

$$K(\alpha) = \max_{z\in G} \operatorname{Re}(ze^{-i\alpha}),$$

которая называется *опорной функцией* G. Заметим, что $\operatorname{Re}(ze^{-i\alpha})$ — ортогональная проекция z на луч $L_\alpha = \{z\colon \arg z = \alpha\}$.

Для любого α множество G лежит по одну сторону от прямой $\{z = x+iy\colon x\cos\alpha + y\sin\alpha = K(\alpha)\}$ и имеет как минимум одну точку пересечения с этой прямой. Указанная прямая называется *опорной прямой*.

Например, если G — круг с центром в начале координат и радиусом R, то $K(\alpha) = R$ при всех α. Для отрезка $[-id, id]$ мнимой оси функция $K(\alpha) = d|\sin\alpha|$. Если, наконец, G — квадрат с центром в начале координат и стороной $2d$, то $K(\alpha) = d\sqrt{2}\cos(\pi/4 - |\alpha|)$ при $|\alpha| < \pi/4$. Далее функция $K(\alpha)$ может быть определена из соображений $\pi/2$-периодичности, которая вытекает из симметрии квадрата.

Известно, что опорная функция выпуклого компакта G непрерывна. Кроме того, если G_1 и G_2 — такие выпуклые множества, что выполнено равенство $K_1(\alpha) = K_2(\alpha)$ при всех α (здесь имеются в виду соответствующие опорные функции), то $G_1 = G_2$.

Пусть теперь f — некоторая целая функция экспоненциального типа и γ — ее преобразование Бореля. Пусть D^* — выпуклая оболочка множества особых точек функции γ. Обозначение D^* связано с тем, что для множества $E \subset \mathbb{C}$ символом E^* часто обозначают множество $\{z\colon \overline{z} \in E\}$. Как было отмечено выше, $D^* \subset \{z\colon |z| \leqslant \varkappa\}$ и $D^* \cap \{z\colon |z| = \varkappa\} \neq \varnothing$. Пусть, далее, $K(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ — опорная функция множества D^*. При этом $\max_\alpha K(\alpha) = \varkappa$, если $\zeta_0 = \varkappa e^{i\alpha_0} \in D^*$, то $\max_\alpha K(\alpha) = K(\alpha_0)$. Кроме того, $K(\alpha) \geqslant -\varkappa$ при всех α.

Для функции Ae^{az} множество D^* — точка $\{a\}$. Для $f(z) = \sin z$ множество D^* — отрезок $[-i, i]$. Более интересный пример возникает для функции $f(z) = \cosh z + \sin z$, для которой D^* — квадрат с вершинами в точках ± 1 и $\pm i$ (вычисление преобразования Бореля γ в этом случае оставляется в качестве *упражнения*). Традиционно множество D^* называют *сопряженной диаграммой* f.

12.4.2. Предложение. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, γ — ее преобразование Бореля, D^* — сопряженная диаграмма функции f. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \gamma(t)\, e^{zt}\, dt, \tag{12.4.1}$$

где Γ — любая замкнутая жорданова спрямляемая кривая, для которой $D^* \subset \mathrm{Int}(\Gamma)$, где $\mathrm{Int}(\Gamma)$ — область, ограниченная кривой Γ.

Доказательство. Пусть $R > \varkappa$. Тогда

$$\int_\Gamma \gamma(t)\, e^{zt}\, dt = \int_{|z|=R} \gamma(t)\, e^{zt}\, dt = \sum_{n=0}^\infty b_n \int_{|z|=R} \frac{e^{tz}\, dt}{t^{n+1}}$$
$$= 2\pi i \sum_{n=0}^\infty \frac{b_n z^n}{n!} = 2\pi i f(z),$$

что дает наше утверждение. □

12.4.3. Следствие. *Пусть f, γ и D^* такие же, как в предыдущем утверждении. Пусть $K(\alpha)$, где $\alpha \in [0, 2\pi]$, — опорная функция множества D^*. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка*

$$|f(re^{i\alpha}| < A(\varepsilon) \exp\bigl(r(K(-\alpha) + \varepsilon)\bigr),$$

где $A(\varepsilon)$ не зависит от r и α.

В самом деле, пусть $D_\varepsilon = \{z\colon\ \mathrm{dist}(z, D^*) \leqslant \varepsilon\}$. Тогда $K(\cdot) + \varepsilon$ является опорной функцией множества D_ε. Далее,

$$|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_{\partial D_\varepsilon} \gamma(t) e^{tz}\, dt \right| \leqslant \frac{\mathrm{len}(\partial D_\varepsilon)}{2\pi} \max|\gamma(t)| \exp(r \max \mathrm{Re}(te^{i\alpha})),$$

где $\max$ в обоих случаях берется по $\{t \in \partial D_\varepsilon\}$, $\mathrm{len}(\cdot)$ обозначает длину кривой. Остается заметить, что $\max \mathrm{Re}(te^{i\alpha}) = K(-\alpha) + \varepsilon$.

Далее, для всякой целой функции экспоненциального типа f введем характеристику, показывающую, как f растет в направлении луча $L_\alpha = \{z\colon\ \arg z = \alpha\}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Эта характеристика $h(\alpha) = h_f(\alpha)$ называется *индикатором* функции f и определяется так:

$$h(\alpha) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(re^{i\alpha})}{r}.$$

В ряде случаев при определении индикатора вместо r в знаменателе берут r^ρ, где $\rho \leqslant 1$ — тип функции f, но мы будем придерживаться приведенного нами определения индикатора.

Если $f(z) = e^{az}$, где $a = a_1 + ia_2$, то при $z = re^{i\vartheta}$ верно равенство $|e^{az}| = \exp\bigl(r(a_1 \cos\vartheta - a_2 \sin\vartheta)\bigr)$, следовательно, приходим к формуле $h_f(\alpha) = a_1 \cos\alpha - a_2 \sin\alpha$.

Следующий замечательный результат мы приведем без доказательства.

12.4.4. Предложение (теорема Пойа)**.** *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, $K(\cdot)$ — опорная функция сопряженной диаграммы f, $h(\cdot)$ — индикатор f. Тогда $h(\alpha) = K(-\alpha)$ при $\alpha \in [0, 2\pi]$.*

Из этого утверждения и свойств $K(\cdot)$ непосредственно вытекает, что индикатор h целой функции экспоненциального типа f — непрерывная 2π-периодическая функция, $\max_{\alpha\in[0,2\pi]} h(\alpha) = \varkappa$, где $\varkappa$ — степень f, наконец, $h(\alpha) \geqslant -\varkappa$ при $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Кроме того, индикатор h совпадает с опорной функцией множества $D = \{z\colon \overline{z} \in D^*\}$, где D^* — сопряженная диаграмма f. Множество D называется *индикаторной диаграммой* f.

Приведем еще один простой пример. Для функции $f(z) = \sin z$ порядок ρ и тип σ равны 1, индикаторная диаграмма D и сопряженная диаграмма D^* — отрезок $[-i, i]$, $K(\alpha) = |\sin\alpha| = h(\alpha)$ при $\alpha \in [0, 2\pi]$.

12.4.5. Предложение (индикатор производной)**.** *Пусть f — целая функция экспоненциального типа и D — индикаторная диаграмма f. Пусть выполнено одно из следующих условий*: (i) 0 — *внутренняя точка множества D*; (ii) $0 \notin D$; (iii) *точка 0 — внутренняя точка одного из отрезков, составляющих границу D. Тогда индикатор производной f' совпадает с индикатором исходной функции f.*

Это утверждение мы также приводим без доказательства. Заметим, однако, что если начало координат попадает в «угловую» точку индикаторной диаграммы, то индикаторы f и f' могут быть различными. Пусть $f(z) = 1 + e^z$. Тогда $f'(z) = e^z$, преобразования Бореля f и f' равны соответственно $\gamma(t) = t^{-1} + (t-1)^{-1}$ и $\gamma_1(t) = (t-1)^{-1}$. При этом индикаторная и сопряженная диаграммы f — отрезок $[0, 1]$, а для функции f' — множество $\{1\}$.

Заметим, что преобразования Бореля γ и γ_1 функций f и f' (для целых функций f экспоненциального типа) всегда связаны соотношением $\gamma_1(t) = t\gamma(t) - f(0)$, которое немедленно вытекает из определения преобразования Бореля.

Из этого наблюдения вытекает, что если f — функция рассматриваемого вида, а γ_m — преобразование Бореля ее производной $f^{(m)}$

порядка $m \in \mathbb{N}$, то

$$\gamma_m(t) = t^m\gamma(t) - t^{m-1}f(0) - t^{m-2}f'(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0). \quad (12.4.2)$$

Читатель, знакомый с преобразованием Лапласа и его свойствами легко увидит очевидную аналогию.

В завершение параграфа разберем несколько простых примеров, показывающих возможное применение преобразования Бореля и формулы (12.4.1) для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами и с правой частью, являющейся целой функцией экспоненциального типа. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$a_0 f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}f' + a_n f = \varphi$$

с начальными условиями $f^{(m)}(0) = b_m$ при $m = 0, 1, \ldots, n-1$, где φ — данная целая функция экспоненциального типа. Пусть γ — преобразование Бореля φ. Мы будем искать решение поставленной задачи в классе целых функций экспоненциального типа. Пусть μ — преобразование Бореля функции f. С использованием (12.4.2) получаем

$$P(t)\mu(t) + Q(t) = \gamma(t),$$

где P и Q — многочлены, $\deg(P) = n$, $\deg(Q) = n-1$, причем P имеет вид $P(t) = a_0 t^n + \cdots + a_n$, а коэффициенты Q выражаются через $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Тогда

$$\mu(t) = \frac{\gamma(t) - Q(t)}{P(t)}.$$

Из этой формулы непосредственно вытекает, что функция μ голоморфна в окрестности бесконечно удаленной точки и $\mu(\infty) = 0$. Таким образом, μ разлагается в ряд Лорана на ∞:

$$\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{t^{k+1}}.$$

Тогда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu_k/k!)z^k$ — решение рассматриваемой задачи.

Описанный метод решения задачи Коши составляет основу так называемого *операционного исчисления*. Кроме непосредственного разложения функции μ в ряд Лорана, для нахождения f через μ можно использовать формулу (12.4.1), интеграл в которой во многих случаях можно вычислить в терминах вычетов.

Решим, например, уравнение $f'' - 2f' + f = 0$ с начальными условиями $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. Если μ — преобразование Бореля f, то $t\mu(t)$ есть преобразование Бореля f', $t^2\mu(t) - 1$ есть преобразование Бореля функции f''. Из этого вытекает, что $\mu(t) = 1\big/(t-1)^2$. Таким образом, сопряженная диаграмма f — множество $\{1\}$, а в формуле (12.4.1) с качестве контура Γ можно взять окружность $C(1,\delta)$ при некотором $\delta > 0$. Соответствующий интеграл легко вычисляется по формуле Коши для производных:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-1|=\delta}\frac{e^{zt}\,dt}{(t-1)^2} = z\,e^{z}.$$

Аналогичным образом можно решить уравнение $f''+f'+f = \cos z$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Напомним, что преобразование Бореля функции $\cos z$ равно $t\big/(t^2+1)$. Действуя как в предыдущем примере получаем, что преобразование Бореля μ функции f равно $1\big/(t^2+1)$. Сопряженная диаграмма f в данном случае — отрезок $[-i,i]$, в качестве контура Γ можно взять окружность $\{|t| = 2\}$. После этого по теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=2}\frac{e^{zt}\,dt}{t^2+1} = \frac{e^{iz}}{2i} - \frac{e^{-iz}}{2i} = \sin z.$$

Глава 13

Теоремы Рунге и Мергеляна

П. В. Парамонов

§ 13.1. Теоремы Рунге и Хартогса – Розенталя

13.1.1. Формула Помпейю. Напомним, что если f есть $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция в точке $a \in \mathbb{C}$, то по определению

$$\overline{\partial} f(a) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\bigg|_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_a.$$

По теореме Коши – Римана f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{C}$, если и только если она $\mathbb{R}$-дифференцируема в этой точке и выполнено равенство $\overline{\partial} f(a) = 0$.

Оператор $\overline{\partial}\colon f \mapsto \overline{\partial} f$ называют оператором Коши – Римана.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\}$. Положим $C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega)\colon \operatorname{supp}(f) — \text{компакт в } \Omega\}$, где $\operatorname{supp}(f)$ — наименьшее замкнутое подмножество из Ω, вне которого f обращается в нуль (в Ω). При $k = 0$ пишем $C_0^0(\Omega) = C_0(\Omega)$.

13.1.1. Теорема (Формула Помпейю). *Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$, тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:*

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta},$$

где Λ — мера Лебега в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$ и найдем $R > 0$ с условием $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(z, R)$. Введем полярные координаты ρ, θ с центром z:

$$\zeta - z = \rho e^{i\theta}, \quad \overline{\zeta - z} = \rho e^{-i\theta}$$

при $\zeta \neq z$. Таким образом,

$$e^{2i\theta} = \frac{\zeta - z}{\overline{\zeta} - \overline{z}}, \quad \rho^2 = (\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z}).$$

Дифференцируя последние два равенства по $\overline{\zeta}$, находим

$$e^{2i\theta}2i\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = -\frac{\zeta - z}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}, \quad 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \zeta - z,$$

откуда

$$\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{ie^{i\theta}}{2\rho}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{2}.$$

Рассмотрим функцию $F(\rho,\theta) = \varphi(\zeta) = \varphi(z + \rho e^{i\theta})$, являющуюся 2π-периодической по θ при $\rho > 0$. Тогда при $\zeta \neq z$ имеем

$$\overline{\partial}\varphi(\zeta) = F'_\rho\frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}} + F'_\theta\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\zeta}} = F'_\rho\frac{e^{i\theta}}{2} + F'_\theta\frac{ie^{i\theta}}{2\rho}.$$

Интегрируя повторно в полярных координатах и учитывая периодичность F по θ, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_\delta^R\left(F'_\rho\frac{e^{i\theta}}{2} + F'_\theta\frac{ie^{i\theta}}{2\rho}\right)\frac{1}{-\rho e^{i\theta}}\rho\,d\rho\,d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\left(\int_0^{2\pi}\!\!\int_\delta^R F'_\rho d\rho\,d\theta + \int_\delta^R\!\!\int_0^{2\pi} F'_\theta\,d\theta\frac{i}{\rho}\,d\rho\right) \\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(F(\delta,\theta) - F(R,\theta))\,d\theta = \varphi(z),\end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы пользуемся непрерывностью функции φ в точке z и условием $F(R,\theta) = 0$. Отметим, что переходом к введенным выше полярным координатам легко доказывается и абсолютная сходимость исходного интеграла. □

13.1.2. Замечание. При $z = 0$ имеем:

$$\varphi(0) = \frac{-1}{\pi}\int\frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{\zeta}.$$

По определению обобщенных производных последнее означает, что $\overline{\partial}\Big(\dfrac{1}{\pi\zeta}\Big)$ есть δ-функция Дирака, т. е. $\dfrac{1}{\pi\zeta}$ есть *фундаментальное решение* уравнения Коши – Римана $\overline{\partial}f = 0$.

13.1.2. Стандартное разбиение единицы. Пусть

$$\mathbb{Z}^2 = \{j = (j_1, j_2) \equiv j_1 + ij_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$$

есть стандартная 1-решетка, $\delta\mathbb{Z}^2 = \{a_j \equiv \delta j_1 + i\delta j_2\}_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ — стандартная δ-решетка ($\delta > 0$) в $\mathbb{C}$.

Зафиксируем функцию $\psi \in C_0^1(B(0,1))$ с условиями $0 \leqslant \psi(z) \leqslant 1$ при всех z и $\psi(z) = 1$ при всех $z \in B(0, 1/\sqrt{2})$. Пусть $A_1 = \|\overline{\partial}\psi\|$.

13.1.3. Задача. Доказать, что можно выбрать ψ с условием $A_1 \leqslant 2$.

Зафиксируем $\delta > 0$. Пусть $B_j = B(a_j, \delta)$, $\psi_j(z) = \psi\Bigl(\dfrac{z-a_j}{\delta}\Bigr)$, $j \in \mathbb{Z}^2$. Наконец, при $j \in \mathbb{Z}^2$ положим

$$\varphi_j(z) = \frac{\psi_j(z)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2} \psi_k(z)}.$$

13.1.4. Лемма. *В указанных обозначениях*

$$\varphi_j \in C_0^1(B_j), \quad 0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1, \quad \|\overline{\partial}\varphi_j\| \leqslant \frac{5A_1}{\delta}, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1 \ \textit{на} \ \mathbb{C},$$

причем каждая точка z принадлежит не более чем 4 кругам B_j.

Доказательство. Это очевидно, ибо $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \psi_k \geqslant 1$ на $\mathbb{C}$. □

13.1.3. Определения основных пространств функций. Введем (или напомним) ряд общепринятых обозначений, важных для дальнейшего. Пусть $E \neq \varnothing$ — произвольное множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{A}(E)$ класс функций f, каждая из которых определена и голоморфна в некоторой (своей) окрестности U_f множества E (если E открыто, то $\mathcal{A}(E)$ есть класс всех голоморфных на E функций). Как и ранее, через $C(E)$ обозначаем пространство всех комплекснозначных *непрерывных и ограниченных* на E функций f с равномерной нормой $\|f\|_E = \sup_{z\in E}|f(z)|$. Для *компакта* $X \neq \varnothing$ через $P(X)$ обозначается *замыкание* в $C(X)$ подпространства $\{P\}|_X$, где $\{P\}$ — совокупность всех полиномов комплексного переменного z. Ясно, что $f \in P(X)$, если и только если f равномерно на X приближается (с любой точностью) полиномами от z. Определим еще пространство $R(X)$ — замыкание в $C(X)$ подпространства $\{g|_X\}$, где g пробегает класс всех рациональных функций (от z) с полюсами вне X. По аналогии, $f \in R(X)$ тогда и только тогда, когда f равномерно на X приближается рациональными функциями. Наконец, положим $C_{\mathcal{A}}(X) = C(X) \cap \mathcal{A}(X^\circ)$, где E° — множество внутренних точек множества E (при $X^\circ = \varnothing$ полагаем $C_{\mathcal{A}}(X) = C(X)$). Следующие включения очевидны:

$$P(X) \subseteq R(X) \subseteq C_{\mathcal{A}}(X) \subseteq C(X).$$

Иначе говоря, приближать (с любой точностью) полиномами или рациональными функциями равномерно на X можно только функции класса $C_{\mathcal{A}}(X)$ («простейшее» необходимое условие приближаемости).

Напомним, что компонентой (связности) множества E в $\mathbb{C}$ называется всякое максимальное связное подмножество из E. Если E — открыто, то всякая его связная компонента является областью, причем E есть конечное или счетное объединение своих компонент. Поэтому если X — компакт, то его *дополнение* состоит из неограниченной компоненты Ω и ограниченных компонент $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ (если они есть).

Оболочкой компакта X в $\mathbb{C}$ (обозначается через $\widehat{X}$) называется объединение компакта X и всех ограниченных компонент его дополнения.

Ясно, что $X = \widehat{X}$, если и только если множество $\mathbb{C} \backslash X$ связно.

В 1885 г. К. Вейерштрасс и К. Рунге доказали свои знаменитые теоремы о равномерных приближениях функций полиномами. Сформулируем их, используя наши обозначения.

13.1.5. Теорема (Вейерштрасс)**.** *Если X — отрезок на вещественной оси, то $C(X) = P(X)$.*

13.1.6. Теорема (Рунге)**.** *Пусть X — произвольный компакт в $\mathbb{C}$, тогда* (1) $\mathcal{A}(X)|_X \subset R(X)$; (2) $\{\mathcal{A}(X)|_X \subset P(X)\} \Leftrightarrow \{X = \widehat{X}\}$.

Основной целью этого раздела является доказательство теоремы Рунге.

13.1.4. Свойства потенциала Коши. Нам неоднократно понадобится следующее утверждение.

13.1.7. Лемма. *Пусть K — компакт, $h \in L_\infty(K, \Lambda)$. Положим*

$$f(z) = \int_K \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}$$

(*интеграл абсолютно сходится при всех z, см. ниже*). *Тогда*

(а) *для любого компакта X с условием $X \cap K = \varnothing$ верно включение $f \in R(X)$, причем f равномерно на X с любой точностью приближается рациональными дробями вида*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z - a_n}, \quad \text{где} \quad a_n \in K, \ \text{и} \ \lambda_n \in \mathbb{C};$$

(б) *функция f голоморфна вне K, $f \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f(\infty) = 0$, причем*

$$\|f\| = \|f\|_{\overline{\mathbb{C}}} \leqslant 2M\sqrt{\pi\Lambda(K)},$$

где $M = \|h\|_{K,\Lambda}$ — норма h в $L_\infty(K, \Lambda)$.

13.1.8. Замечание. Функция f, определенная в предыдущей лемме, называется *потенциалом Коши* функции h *по мере Лебега* Λ. При этом рассматриваемая функция h *финитна*, т. е. обращается в нуль вне компакта K.

Доказательство леммы 13.1.7. (а) Пусть $d = \mathrm{dist}(X, K)$, $d > 0$. При $\mu \in (0, d/2)$ разобьем K на конечное число $(N = N(\mu))$ попарно непересекающихся борелевских множеств K_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, с условиями $\mathrm{diam}(K_n) < \mu$. Зафиксируем

$$a_n \in K_n, \quad \lambda_n = \int_{K_n} h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta),$$

тогда при $z \in X$ получаем

$$\begin{aligned} \Bigl|\int_K \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} - \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n}{z-a_n}\Bigr| &= \Bigl|\sum_{n=1}^N \int_{K_n} \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} \\ - \sum_{n=1}^N \int_{K_n} \frac{h(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-a_n}\Bigr| &\leqslant \sum_{n=1}^N M \int_{K_n} \Bigl|\frac{(z-a_n)-(z-\zeta)}{(z-\zeta)(z-a_n)}\Bigr|\, d\Lambda(\zeta) \\ &\leqslant M \sum_{n=1}^N \frac{\mu}{d^2}\Lambda(K_n) \leqslant \frac{\Lambda(K)M}{d^2}\mu \to 0 \quad \text{при } \mu \to 0. \end{aligned}$$

(б) Поскольку функции $\sum_{n=1}^N \lambda_n (z-a_n)^{-1}$ голоморфны вне K, в силу (а) и теоремы Вейерштрасса f голоморфна вне K. Свойство $f(\infty) = 0$ очевидно. Оценим $|f(z)|$ для произвольного $z \in \mathbb{C}$. Пусть $r = \sqrt{\Lambda(K)/\pi}$. Так как $\Lambda(B(z,r)) = \Lambda(K)$ и функция $|\zeta - z|^{-1}$ *убывает* при удалении ζ от (фиксированного) z, мы получаем

$$\begin{aligned} |f(z)| \leqslant M \int_K \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta) &\leqslant M \int_{B(z,r)} \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta) \\ &= M \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\rho} = 2M\pi r = 2M\sqrt{\pi\Lambda(K)}, \end{aligned}$$

причем вместе с нужной равномерной оценкой мы автоматически доказали абсолютную сходимость (при всех z) интеграла, определяющего f. Непрерывность f вытекает из леммы 13.1.10 ниже. □

13.1.9. Определение. *Пусть* $E \subset \mathbb{C}$, $\tau \in (0,1]$. *Пространство* $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ *есть совокупность функций* $g \in C(E)$, *для каждой из которых найдется* $c = c(g) \in [0, \infty)$ *с условиями*

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leqslant c|z_1 - z_2|^\tau, \quad |g(z_1)| \leqslant c$$

для всех $z_1, z_2 \in E$. *Банахова норма в* $\mathrm{Lip}_\tau(E)$ *определяется так*: $\|g\|_{\tau,E} = \min\{c(g)\}$, *где* $\min$ *берется по всем* $c(g)$, *удовлетворяющим последним двум неравенствам.*

Читателю предлагается проверить, что минимум достигается.

Очевидно, что $\mathrm{Lip}_\tau(E) \subset C(E)$ при всех $\tau \in (0,1]$.

13.1.10. Лемма. *В условиях леммы* 13.1.7 *для любого* $\tau \in (0,1)$ *имеем* $f \in \mathrm{Lip}_\tau \mathbb{C}$, *причем* $\|f\|_{\tau,\mathbb{C}} \leqslant Mc(\tau,K)$ (*где* $c(\tau,K)$ *зависит только от* τ *и* K). *Однако найдется такой компакт* K, *что даже при* $h \equiv 1|_K$ *имеем* $f \notin \mathrm{Lip}_1(\mathbb{C})$.

Доказательство. Пусть $z_1 \neq z_2$, $\delta = |z_1 - z_2|/2$, $a = (z_1+z_2)/2$, $D_1 = B(z_1,\delta)$, $D_2 = B(z_2,\delta)$, $D_3 = B(a,2\delta)\backslash(D_1\cup D_2)$, $D_4 = \mathbb{C}\backslash B(a,2\delta)$. Нам нужно оценить слагаемые в правой части неравенств:

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leqslant \sum_{s=1}^{4} \int_{D_s\cap K} |h(\zeta)| \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta) \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{4} 2M\delta \int_{D_s\cap K} \frac{1}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta). \end{aligned}$$

Слагаемое, соответствующее $s = 1$ ($s = 2$ аналогично), оценивается сверху величиной $4\pi M\delta$ как в предыдущей лемме переходом к полярным координатам с центром z_1 и интегрированием по всему D_1. Слагаемое при $s = 3$ оценивается сверху тривиально (тем же $4\pi M\delta$). Выберем $r > 0$ так, что $\Lambda(B(a,r)\cap D_4) = \Lambda(K)$. При интегрировании по D_4 мы пользуемся оценкой $|z_1-\zeta||z_2-\zeta| \geqslant |\zeta - a|^2/4$, монотонным убыванием подынтегральной функции (от $|\zeta - a|$) и полярными координатами с центром a:

$$\begin{aligned} \int_{D_4\cap K} \frac{1}{|z_1-\zeta||z_2-\zeta|}\, d\Lambda(\zeta) &\leqslant \int_{D_4\cap K} \frac{4}{|\zeta-a|^2}\, d\Lambda(\zeta) \\ &\leqslant 8\pi \int_{2\delta}^{r} \rho^{-1}\, d\rho = 8\pi \ln\Big(\frac{r}{2\delta}\Big). \end{aligned}$$

При этом $\pi r^2 - \pi(2\delta)^2 = \Lambda(K)$, откуда $r = \sqrt{4\delta^2 + \Lambda(K)/\pi}$.

Теперь легко видеть, что при фиксированном $\tau \in (0,1)$ имеем оценку

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\tau} \leqslant AM\delta^{1-\tau} \ln\left(\frac{\sqrt{4\delta^2 + \pi^{-1}\Lambda(K)}}{2\delta}\right) \leqslant A'M,$$

не зависящую от z_1 и z_2, если $\delta < 1$. Случай $\delta \geqslant 1$ оставляем читателю.

Контрпример для $\tau = 1$ строится так: берем $z_1 = 0$, $z_2 = -2\delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало, $K = \{z\colon |z| \leqslant 1,\ \mathrm{Re}(z) \geqslant |\operatorname{Im}(z)|\}$. $\square$

Доказательство теоремы 13.1.6. (1). Докажем, что для всякого компакта X верно включение $\mathcal{A}(X)|_X \subset R(X)$.

Пусть функция f голоморфна в d-окрестности U_d компакта X. Надо приблизить f равномерно на X (с любой точностью) рациональными функциями. Пусть $\delta = d/3$. Построим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}$ (см. лемму 13.1.4): $B_j = B(a_j, \delta)$, где $a_j \in \delta\mathbb{Z}^2$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1$. Пусть

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon B_j \subset U_d\}, \quad \varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j \in C_0^1(U_d).$$

Ясно, что $\varphi = 1$ в δ-окрестности U_δ компакта X, $\varphi = 0$ вне U_d.

Положим $g = f\varphi$, $g \in C_0^1(\mathbb{C})$. По теореме 13.1.1 при $z \in X$ имеем

$$f(z) = g(z) = \frac{1}{\pi}\int_{U_d\setminus U_\delta} \frac{\overline{\partial} g(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta},$$

поскольку $\overline{\partial} g(\zeta) = \overline{\partial} f(\zeta) = 0$ в окрестности U_δ. Остается воспользоваться леммой 13.1.7 при $h(\zeta) = \overline{\partial} g(\zeta)$, $K = \overline{U_d}\setminus U_\delta$.

Следует отметить, что при доказательстве этой части теоремы Рунге, как правило, пользуются интегральной формулой Коши. Однако для *аккуратного* ее применения (при построении специального контура интегрирования) требуются дополнительные топологические построения, которые в контексте нашего изложения обходятся интегрированием по площади, т. е. с помощью формулы Помпейю. Кроме того, предложенное здесь доказательство теоремы Рунге (в отличие от стандартного) легко модифицируется в доказательство уже более тонкой теоремы Хартогса – Розенталя (см. ниже).

(2). Надо показать, что $\mathcal{A}(X) \subset P(X) \Leftrightarrow X = \widehat{X}$.

($\Rightarrow$) Пусть, от противного, $\mathcal{A}(X) \subset P(X)$, но $\mathbb{C}\setminus X$ несвязно, т. е. существует ограниченная связная компонента Ω_1 в $\mathbb{C}\setminus X$, в частности $\partial\Omega_1 \subset X$. Зафиксируем $a_1 \in \Omega_1$. Так как $f(z) = (z-a_1)^{-1}$ входит в $\mathcal{A}(X) \subset P(X)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется полином $p_\varepsilon(z)$ с условием $|(z-a_1)^{-1} - p_\varepsilon(z)| < \varepsilon$ при всех $z \in X$ и, в частности, при $z \in \partial\,\Omega_1$. Пусть $d = \operatorname{diam}(\Omega_1)$, тогда справедливо неравенство

$$|1 - p_\varepsilon(z)(z-a_1)| \leqslant \varepsilon d, \quad \forall\, z \in \partial\,\Omega_1.$$

При $\varepsilon < 1/d$ мы получаем противоречие с принципом максимума модуля в Ω_1, так как функция $1 - p_\varepsilon(z)(z-a_1)$ равна 1 при $z = a_1$.

($\Leftarrow$) Пусть $\Omega = \mathbb{C}\setminus X$ связно, $f \in \mathcal{A}(X)$. Согласно (1) для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset \Omega$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ такие, что

$$\Bigl|f(z) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{z-a_n}\Bigr| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in X.$$

Остается доказать, что $(z-a)^{-1}\big|_X \in P(X)$ при всех $a \in \Omega$ (потом каждую функцию $\lambda_n(z-a_n)^{-1}$ приблизим многочленом $p_{\varepsilon_n}(z)$ с точностью $\varepsilon_n = \varepsilon/(2N)$, т. е. f будет приближена с точностью ε).

Пусть $G = \big\{a \in \Omega\colon (z-a)^{-1}\big|_X \in P(X)\big\}$. Установим, что $G = \Omega$. Действительно, во-первых, $G \neq \varnothing$, так как по теореме Коши – Тейлора G содержит все точки из внешности какого-либо круга, содержащего X. Во-вторых, G замкнуто в Ω, поскольку если $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset G$ и $a = \lim\limits_{k\to\infty} z_k \in \Omega$, то $a \in G$, что непосредственно вытекает из равномерной сходимости $(z-z_k)^{-1}$ к $(z-a)^{-1}$ на X при $k \to \infty$. Установим, в-третьих, что G открыто в Ω. Пусть $a \in G$, $d = \operatorname{dist}(a, X)$, $a_1 \in B(a, d)$. Докажем, что $a_1 \in G$. Из элементарных свойств геометрических прогрессий вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное L, что

$$\Big|\frac{1}{z-a_1} - \sum_{l=1}^{L} \frac{(a_1-a)^{l-1}}{(z-a)^l}\Big| < \varepsilon$$

для всех $z \in X$. Но $(z-a)^{-1} \in P(X)$, откуда $(z-a)^{-l} \in P(X)$ при всех натуральных l, следовательно, $(z-a_1)^{-1} \in P(X)$. Теперь равенство $G = \Omega$ следует из связности Ω. $\square$

13.1.11. Замечание. Определим $\mathcal{A}_C(X)$ как замыкание в $C(X)$ пространства $\mathcal{A}(X)|_X$. Тогда теорема Рунге в точности означает, что $\mathcal{A}_C(X) = R(X)$ для всякого компакта X, причем $R(X) = P(X)$ тогда и только тогда, когда $X = \widehat{X}$.

13.1.12. Задача. Пусть $f \in C^1(\mathbb{C})$, причем $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$ — компакт. Положим

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Доказать, что $f-F$ есть целая функция, причем $f \equiv F \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

13.1.13. Задача. Пусть X — произвольный компакт в $\mathbb{C}$, Ω_j — его ограниченные компоненты дополнения (если есть). Зафиксируем a_j в каждой компоненте Ω_j. Доказать, что для всякой функции $f \in \mathcal{A}(X)$ и всякого $\varepsilon > 0$, найдется такая рациональная функция R с полюсами, принадлежащими множеству $\{a_j\}_{j\geqslant 1}$, что $\|f-R\|_X < \varepsilon$.

13.1.14. Теорема (Хартогс – Розенталь). *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$ лебеговой меры нуль* ($\Lambda(X) = 0$). *Тогда $C(X) = R(X)$.*

Сначала установим следующую лемму.

13.1.15. Лемма. *Пусть $X \subset \mathbb{C}$ — произвольный компакт. Для всяких функции $f \in C(X)$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ с условием $\|f - \varphi\|_X < \varepsilon$.*

Доказательство. Пользуясь равномерной непрерывностью функции f на X, найдем $\delta > 0$ такое, что $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ для всех z_1 и z_2 из X с условием $|z_1 - z_2| < 2\delta$. Теперь мы рассмотрим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ (см. лемму 13.1.4). Для него положим $J = \{j \in \mathbb{Z}^2 | B_j \cap X \neq \varnothing\}$. При $j \in J$ зафиксируем какую-либо точку $b_j \in X \cap B_j$. Положим $\varphi(z) = \sum_{j \in J} f(b_j)\varphi_j(z)$. Ясно, что $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$, причем для всех $z \in X$ имеем (проверить!):

$$|f(z) - \varphi(z)| = \Big| \sum_{j \in J} (f(z) - f(b_j))\varphi_j(z) \Big| < \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 13.1.14. Пусть $\Lambda(X) = 0$. Нам остается показать, что $C_0^1(\mathbb{C})|_X \subset R(X)$. Зафиксируем $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Пусть $A = \|\overline{\partial}\varphi\|$ и $S = \operatorname{supp}(\varphi)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая открытая окрестность U компакта X, что $\Lambda(U) < \varepsilon$ и $\Lambda(\partial U) = 0$. Пусть

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\overline{U}} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}, \quad \varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \int_{S \setminus U} \frac{\overline{\partial}\varphi(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)}{z - \zeta}.$$

По теореме 13.1.1 верно равенство $\varphi = \varphi_\varepsilon + f_\varepsilon$, а по лемме 13.1.7 имеем $\varphi_\varepsilon|_X \in R(X)$ и $\|f_\varepsilon\| \leqslant 2A\sqrt{\varepsilon/\pi} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. □

13.1.16. Задача (Пример Алисы Рот, 1938 г.)**.** Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$, полученный удалением из некоторого замкнутого круга $\overline{B_0}$ семейства попарно внешних открытых кругов $\{B_j = B(z_j, r_j)\}_{j=1}^{+\infty}$ таких, что X является нигде не плотным и $\sum_{j=1}^{+\infty} r_j < +\infty$, где $B_j \subset B_0$. Доказать, что $C(X) \neq R(X)$, в частности $\Lambda(X) > 0$.

Указание. Доказать, что мера $d\mu(z) = dz|_{\partial^+ B_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} dz|_{\partial^+ B_n}$ ортогональна $R(X)$ и найдется $f \in C(X)$ с $\displaystyle\int f(z)\, d\mu(z) \neq 0$.

§ 13.2. Локализационный оператор Витушкина и теорема Мергеляна

13.2.1. Формулировка теорем Мергеляна и доказательство интегральной теоремы Коши. Здесь мы сформулируем теорему Мергеляна и рассмотрим некоторые средства для ее доказательства.

13.2.1. Теорема (Мергелян). *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Для выполнения равенства $C_{\mathcal{A}}(X) = P(X)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{C}\backslash X$ было связным.*

13.2.2. Следствие (теорема Лаврентьева). $C(X) = P(X)$*, если и только если $X = \widehat{X}$ и $X^o = \varnothing$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $C_{\mathcal{A}}(X) = P(X)$, тогда автоматически $\mathcal{A}(X) \subset P(X)$ и по теореме Рунге $X = \widehat{X}$. ($\Leftarrow$) Пусть $X = \widehat{X}$. По теореме Рунге достаточно установить, что $C_{\mathcal{A}}(X) = \mathcal{A}_C(X)$. Мы докажем следующий более сильный результат. □

13.2.3. Теорема (Мергелян). *Пусть X — компакт, Ω_s — ограниченные компоненты дополнения компакта X (если они есть). Если $d = \inf_{s\geqslant 1} \operatorname{diam}(\Omega_s) > 0$, то $C_{\mathcal{A}}(X) = \mathcal{A}_C(X)$.*

13.2.4. Замечание. Если $\Omega = \mathbb{C}\backslash X$ связно, то компоненты Ω_s отсутствуют и мы полагаем $d = +\infty$.

Доказательство теоремы 13.2.3 весьма сложно. Мы приведем его в следующем параграфе после соответствующей подготовки.

13.2.5. Следствие (интегральная теорема Коши). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом попарно непересекающихся спрямляемых замкнутых жордановых кривых. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ выполняется равенство*

$$\int_{\partial^+ D} f(z)\, dz = 0.$$

При этих же условиях справедливы интегральная формула Коши и формула Коши для производных.

Доказательство. Используем теорему 13.2.3 и лемму 13.1.7(a). Детали оставляем читателю. □

13.2.2. Свойства локализационного оператора Витушкина. Напомним, что если $f \in C^1(\mathbb{C})$, то по теореме Коши – Римана множество $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$ есть множество особых точек функции f (вне него f голоморфна). Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Рассмотрим функцию

$$f_{(\varphi)}(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\varphi(\zeta)}{z - \zeta}\, d\Lambda(\zeta).$$

В последней формуле интегрирование (реально) ведется по множеству $K = \operatorname{supp}(\overline{\partial} f) \cap \operatorname{supp}(\varphi)$. По лемме 13.1.7 функция $f_{(\varphi)}$ голоморфна вне K, т. е. ее особые точки лежат среди особых точек функции f и одновременно на $\operatorname{supp}\varphi$. Говорят, что оператор $f \mapsto f_{(\varphi)}$ (при фиксированном φ) *локализует* особенности f на $\operatorname{supp}(\varphi)$.

Пусть $f \in C_0^1(\mathbb{C})$ и $\{B_j, \varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}^2}$ — стандартное δ-разбиение единицы (см. лемму 13.1.4). Положим

$$J = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon \overline{B_j} \cap \operatorname{supp}(\overline{\partial} f) \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, что J — конечное множество индексов, причем функция

$$\varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j$$

удовлетворяет условиям $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$ и $\varphi(z) = 1$ в некоторой окрестности $\operatorname{supp}(\overline{\partial} f)$. Пусть $f_j = f_{(\varphi_j)}$. Тогда по теореме 13.1.1 имеем

$$\sum_{j\in J} f_j(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\sum_{j\in J}\varphi_j(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial} f(\zeta)\,d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta} = f(z)$$

для всех z. Тем самым f разлагается в конечную сумму функций с «локализованными» особенностями. (Для этой цели нельзя просто полагать $f_j = f\varphi_j$, так как φ_j не голоморфна в $\mathbb{C}$ и у таких f_j могут появиться новые особенности.)

Нашей ближайшей целью является получение аналогичного разложения для произвольной функции f класса $C_0(\mathbb{C})$.

Пусть пока $f \in C^1(\mathbb{C})$. Пользуясь формулой Помпейю, получаем

$$\begin{aligned} f_{(\varphi)}(z) &= \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial}(f(\zeta)\varphi(\zeta)) - f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta) \\ &= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta). \end{aligned}$$

Это уже нужная формула локализации.

13.2.6. Определение. *Пусть* $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Локализационным *оператором* (*оператором Витушкина*)*, соответствующим функции* φ*, называется оператор* $f \to V_\varphi f$*, где* $f \in C(\mathbb{C})$ *и*

$$\begin{aligned} V_\varphi f(z) \equiv f_{(\varphi)}(z) &= \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta) \\ &= f(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta). \end{aligned} \tag{13.2.1}$$

13.2.7. Лемма (свойства $V_\varphi f$)**.** *Пусть* $B = B(a, r)$*,* $\varphi \in C_0^1(B)$*, т. е.* $S := \operatorname{supp}(\varphi) \subset B$*. При* $f \in C_0(\mathbb{C})$ *обозначим через* $\omega(t)$ *модуль непрерывности функции* f *на* $\mathbb{C}$*,* $t \geqslant 0$*. Тогда верно следующее.*

(а) $V_\varphi f \equiv f_{(\varphi)} \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f_{(\varphi)}(\infty) = 0$, *причем имеет место оценка*

$$\|f_{(\varphi)}\| \leqslant 4\omega(r)r\,\|\overline{\partial}\varphi\|. \tag{13.2.2}$$

(б) *Если f голоморфна на открытом множестве U, то $f_{(\varphi)}$ голоморфна на множестве $U \cup (\mathbb{C} \setminus S)$, т. е. особенности $f_{(\varphi)}$ локализуются на носителе S функции φ.*

Пусть $U_1 = \{z\colon \varphi(z) = 1\}^o$, тогда $f - f_{(\varphi)} \in \mathcal{A}(U_1)$, т. е. $V_\varphi f$ «вбирает» в себя все особенности функции f на U_1.

(в) *Разложим $f_{(\varphi)}$ вне $\overline{B(a,r)}$ в ряд Лорана:*

$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}.$$

Тогда справедливы оценки

$$|c_n| \leqslant \omega(r) r^{n+1} \|\overline{\partial}\varphi\|. \tag{13.2.3}$$

Доказательство. Первое и второе утверждения в (а), а также голоморфность $f_{(\varphi)}$ вне S вытекают из леммы 13.1.7 (б) и локализационной формулы (13.2.1). Для доказательства (13.2.2) воспользуемся принципом максимума модуля вне B, согласно которому нам достаточно оценить $|f_{(\varphi)}(z)|$ только при $z \in \overline{B}$:

$$\begin{aligned}|f_{(\varphi)}(z)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_B \frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|}|\overline{\partial}\varphi(\zeta)|\,d\Lambda(\zeta)\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\,\omega(2r)\,\|\overline{\partial}\varphi\| \int_B \frac{1}{|z-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta) \leqslant 4\omega(r)r\,\|\overline{\partial}\varphi\|.\end{aligned}$$

При этом мы воспользовались очевидным неравенством $\omega(2r) \leqslant 2\omega(r)$ и оценкой, полученной в лемме 13.1.7:

$$\int_B \frac{1}{|z-\zeta|}\,d\Lambda(\zeta) \leqslant 2\pi r.$$

(б) Пусть функция f голоморфна в $B(b,\delta) \subset U$; докажем, что верно включение $f_{(\varphi)} \in \mathcal{A}\big(B(b,\delta/2)\big)$. Выберем $\psi \in C_0^1(B(b,\delta))$ так, что $\psi(z) = 1$ в $B(b,\delta/2)$, и рассмотрим функции $g = f\psi$, $h = f(1-\psi)$, для которых $f_{(\varphi)} = g_{(\varphi)} + h_{(\varphi)}$. Для функции g класса $C_0^1(\mathbb{C})$ соответствующее утверждение доказано выше. Поскольку $h = 0$ в $B(b,\delta/2)$, то голоморфность $h_{(\varphi)}$ в $B(b,\delta/2)$ вытекает из локализационной формулы и леммы 13.1.7 (б). Итак, $f_{(\varphi)} \in \mathcal{A}(U)$.

Аналогично по лемме 13.1.7 (б) и ввиду $\overline{\partial}\varphi = 0$ в U_1 имеем

$$f(z) - f_{(\varphi)}(z) = f(z)(1-\varphi(z)) + \frac{1}{\pi}\int_{S\setminus U_1} \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta) \in \mathcal{A}(U_1).$$

(в) Найдем c_n, $n \geqslant 1$. Из равенств

$$\begin{aligned} f_{(\varphi)}(z) &= \frac{1}{\pi}\int \frac{(f(z)-f(a)) - (f(\zeta)-f(a))}{z-\zeta}\overline{\partial}\varphi(\zeta)\,d\Lambda(\zeta) \\ &= (f(z)-f(a))\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int_{B(a,r)} \frac{(f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\,d\Lambda(\zeta), \end{aligned}$$

учитывая, что $\varphi(z) = 0$ вне $B(a,r) = B$ и используя формулу для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

(при $|z-a| > r$ ряд сходится равномерно по ζ на $\overline{B}$), получаем при $|z-a| > r$ разложение

$$f_{(\varphi)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^n}\left[-\frac{1}{\pi}\int_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\Lambda(\zeta)\right].$$

Следовательно,

$$c_n = -\frac{1}{\pi}\int_B (f(\zeta)-f(a))\overline{\partial}\varphi(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\Lambda(\zeta),$$

откуда получаем $|c_n| \leqslant \pi^{-1}\omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\| r^{n-1}\pi r^2 = \omega(r)\|\overline{\partial}\varphi\| r^{n+1}$. □

Приведем еще краткое доказательство следующего частного случая известной теоремы Брауэра – Титце – Урысона, необходимого для доказательства теоремы 13.2.3.

13.2.8. Теорема (Брауэр). *Если X — компакт в $\mathbb{C}$ и $f \in C(X)$, то найдется функция $F \in C_0(\mathbb{C})$ с условиями $F|_X = f$, $\|F\| \leqslant \|f\|_X$.*

Доказательство. Пусть $G_k = \{z\colon \operatorname{dist}(z,X) \in [2^{-k}, 2^{-k+1})\}$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $J(k)$ — совокупность тех индексов j в стандартном δ_k-разбиении единицы $\{B_j^k, \varphi_j^k\}$ при $\delta_k = 2^{-k-4}$, для которых $B_j^k \cap G_k$ непусто. При всех k и $j \in J(k)$ положим

$$\psi_j^k(z) = \varphi_j^k(z)\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z},\ \sigma\in J(l)} \varphi_\sigma^l(z)\Big)^{-1}.$$

Совокупность этих функций представляет собой локально конечное разбиение единицы на $G = \mathbf{C} \setminus X$ (проверить!). Пусть a_j^k — центр B_j^k и z_j^k — какая-либо конкретная точка на X, ближайшая к a_j^k. Теперь остается положить $F(z) = f(z)$ при $z \in X$ и

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j \in J(k)} f(z_j^k) \psi_j^k(z)$$

при $z \in G$. Окончательную проверку оставляем читателю. $\square$

13.2.9. Задача. Пусть K_1 замкнуто, K_2 — компакт в $\mathbb{C}$, причем $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Если $f \in BC(\mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2))$, то существуют такие функции f_1 и f_2 класса $BC(\mathbb{C})$, голоморфные вне K_1 и K_2 соответственно, что $f = f_1 + f_2$. Эти функции f_1 и f_2 определены однозначно с точностью до аддитивных постоянных.

13.2.10. Задача. Пусть K — компакт, $\mathbb{C} \setminus K$ связно, $f \in \mathcal{A}(K)$. Тогда найдется такая последовательность полиномов $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем $p_n^{(k)} \to f^{(k)}$ при $n \to +\infty$ равномерно на K.

§ 13.3. Доказательство теоремы Мергеляна

Проведем доказательство теоремы 13.2.3. Зафиксируем компакт X с указанным в теореме условием и произвольную непрерывную функцию f на X, голоморфную на X^o. Продолжим f по теореме Брауэра до функции $f \in C_0(\mathbb{C})$. Пусть $\omega(t) = \omega_{\mathbb{C}}(f, t)$ — модуль непрерывности функции f на $\mathbb{C}$ (тогда $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$). Мы докажем, что найдется такая константа $A_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует $g \in \mathcal{A}(X)$ с условием

$$\|f - g\|_X < A_0\, \omega(\delta).$$

Затем останется устремить δ к 0.

Через $A_0, A_1, A_2, \ldots$ в доказательстве этой теоремы будут обозначаться положительные константы, которым, в принципе, можно придать конкретные числовые значения.

Зафиксируем произвольное число δ из $(0, 1)$ и построим стандартное δ-разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ (см. лемму 13.1.4). Напомним, что $B_j = B(a_j, \delta)$, $\varphi_j \in C_0^1(B_j)$,

$$0 \leqslant \varphi_j(z) \leqslant 1,\ \|\overline{\partial} \varphi_j\| \leqslant \frac{A_1}{\delta},\ \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1.$$

При каждом j положим

$$f_j(z) = V_{(\varphi_j)} f(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{(f(z) - f(\zeta))}{z-\zeta} \overline{\partial} \varphi_j(\zeta)\, d\Lambda(\zeta)$$
$$= f(z)\varphi_j(z) - \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\zeta)\overline{\partial}\varphi_j(\zeta)}{z-\zeta}\, d\Lambda(\zeta).$$

Пусть

$$J_* = \{j \in \mathbb{Z}^2 \colon B_j \cap \operatorname{supp}(f) \neq \varnothing\}.$$

При $j \notin J_*$ имеем $f_j \equiv 0$, причем число элементов в множестве J_* (коротко $\sharp J_*$) может иметь порядок $1/\delta^2$ (не выше), что «очень велико» при малом δ.

13.3.1. Лемма. *Каждая функция f_j обладает следующими свойствами*:

(а) $f_j \in C(\overline{\mathbb{C}})$, $f_j(\infty) = 0$, $\|f_j\| \leqslant A_2\omega(\delta)$;

(б) *функция f_j голоморфна на X^o и вне* $\operatorname{supp}(\varphi_j)X$; *в частности, если $B_j \subset X^o$, то $f_j \equiv 0$; наконец, $\sum_{j\in J_*} f_j \equiv f$;*

(в) *пусть*

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^j}{(z-a_j)^n}$$

есть ряд Лорана f_j вне $\overline{B_j}$, тогда

$$|c_n^j| \leqslant A_2\omega(\delta)\,\delta^n.$$

Доказательство. Утверждения (а) и (в) вытекают сразу из леммы 13.2.7 при $r = \delta$. Установим (б). Рассмотрим функцию

$$\varphi = \sum_{j\in J_*} \varphi_j,$$

где $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности $\operatorname{supp}(f)$, т. е.

$$\operatorname{supp}(f) \subset U_1 = \big(\varphi^{-1}(1)\big)^o.$$

Согласно утверждению (б) леммы 13.2.7 функция

$$f - \sum_{j\in J_*} f_j = f - f_{(\varphi)}$$

является целой и равной нулю в точке ∞, т. е. она — тождественный нуль. $\square$

Пусть

$$J = \{j \in J_* \colon B_j \cap \partial X \neq \varnothing\}.$$

Если $j \notin J$, то либо $B_j \subset X^o$ и $f_j \equiv 0$, либо $B_j \cap X = \varnothing$ и по лемме 13.3.1(б) имеем $f_j \in \mathcal{A}(X)$, так что такие f_j не нуждаются в приближении.

13.3.2. Замечание. Если $\Lambda(\partial X) > 0$, то $\sharp J$ имеет порядок $1/\delta^2$, т. е. при приближении функции f с заданной точностью ε на первый взгляд мы должны бы приближать каждую f_j, $j \in J$, с точностью порядка $\varepsilon\delta^2$. Следующая лемма Витушкина показывает, что достаточно приближать каждую f_j с точностью до порядка ε, если дополнительно имеется «касание» третьего порядка на ∞.

13.3.3. Лемма (о касании третьего порядка). *Пусть существует такая постоянная $A_3 > 0$, что для каждого $j \in J$ найдется функция $g_j \in \mathcal{A}(X) \cap C(\mathbf{C})$, голоморфная вне $\overline{B_j^*} = \overline{B(a_j, 2\delta)}$, удовлетворяющая оценке $\|g_j\| \leqslant A_3\omega(\delta)$, причем*

$$f_j(z) - g_j(z) = O\Big(\frac{1}{z^3}\Big) \text{ при } z \to \infty,$$

т. е. f_j и g_j имеют касание порядка 3 на ∞.

Тогда найдется постоянная A_0 (выражающаяся только через постоянные A_1, A_2, A_3) с условием

$$\Big\|\sum_{j\in J}(f_j - g_j)\Big\| \leqslant A_0\omega(\delta).$$

13.3.4. Замечание. Смысл этой леммы таков: если ее требования выполнены при всех достаточно малых δ (где постоянная A_3 не зависит от δ), то $f \in \mathcal{A}_C(X)$, поскольку она равномерно на X (с точностью $A_0\,\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$) приближается функциями

$$g = \sum_{j\in J} g_j + \sum_{j\in J_*\setminus J} f_j \in \mathcal{A}(X).$$

Доказательство леммы 13.3.3. Ниже подразумевается, что все встречающиеся по мере необходимости константы $A_4, \ldots, A_8$ выражаются только через A_1, A_2 и A_3. Разложим каждую функцию g_j (здесь всюду $j \in J$) в ряд Лорана вне $\overline{B_j^*}$:

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^j}{(z - a_j)^n}.$$

Напомним, что вне $\overline{B_j}$ имеем разложение

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^j}{(z-a_j)^n}.$$

Условие «касания» (порядка 3) эквивалентно тому, что

$$c_1^j = b_1^j, \quad c_2^j = b_2^j,$$

т. е. у функций f_j и g_j «уравнены» первые два коэффициента Лорана.

Следующие оценки сразу следуют из свойств f_j и g_j:

$$\|f_j - g_j\| \leqslant A_4\, \omega(\delta). \tag{13.3.1}$$

Теперь покажем, что при $|z-a_j| > 2\delta$ (т. е. вне $\overline{B_j^*}$) справедливы неравенства

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leqslant A_5\, \omega(\delta) \frac{\delta^3}{|z-a_j|^3}\,. \tag{13.3.2}$$

Действительно, пусть

$$F_j(z) = \bigl(f_j(z) - g_j(z)\bigr)(z-a_j)^3,$$

тогда функция F_j голоморфна вне $\overline{B_j^*}$, причем особенность ∞ устранима для F_j, ибо F_j ограничена вблизи ∞ по условиям «касания». Так как на $\overline{B_j^*}$ очевидным образом (см. (13.3.1)) выполнено неравенство

$$|F_j(z)| \leqslant A_4 \omega(\delta)(2\delta)^3 = A_5 \omega(\delta)\delta^3,$$

то по принципу максимума модуля вне $\overline{B_j^*}$ последняя оценка верна для всех z, что дает (13.3.2). Зафиксируем z и оценим величину

$$\Bigl|\sum_{j\in J} (f_j(z) - g_j(z))\Bigr|.$$

Пусть

$$J_1 = \{j \in J \colon |z-a_j| \leqslant 2\delta\},$$

а при $k = 2, 3, \ldots$ положим

$$J_k = \{j \in J \colon k\delta < |z-a_j| \leqslant (k+1)\delta\}.$$

Из элементарной геометрии находим, что $\sharp J_k \leqslant A_6 k$ при всех $k \geqslant 1$. Отсюда, а также из (13.3.1) и (13.3.2) окончательно получаем

$$\Big|\sum_{j\in J}(f_j(z)-g_j(z))\Big| \leqslant \sum_{j\in J_1}|f_j(z)-g_j(z)| + \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{j\in J_k}|f_j(z)-g_j(z)|$$

$$\leqslant A_7\omega(\delta) + \sum_{k=2}^{+\infty} A_6 k A_5 \omega(\delta)\frac{1}{k^3} = A_0\omega(\delta),$$

что завершает доказательство леммы. □

Отметим, что ввиду замечания 13.3.4 нам остается для всех достаточно малых $\delta \in (0,1)$ найти функции g_j, удовлетворяющие условиям леммы 13.3.3. Завершим доказательство теоремы 13.2.3.

13.3.5. Предложение. *В условиях теоремы* 13.2.3 *и обозначениях леммы* 13.3.3 *при любом* $\delta < \min\{1, d/3\}$ *существуют соответствующие функции* g_j, $j \in J$.

Доказательство. Зафиксируем δ, $0 < \delta < \min\{1, d/3\}$, $j \in J$. Тогда найдется такое s, что $\Omega_s \cap B_j \neq \varnothing$ и, следовательно, имеется жорданова ломаная $\Gamma_1\colon [0,1] \to \Omega_s \cap B_j^*$ с условием $\operatorname{diam}([\Gamma_1]) = \delta$, где $B_j^* = B(a_j, 2\delta)$. Поскольку функция $\operatorname{diam}(\Gamma_1([t_0,t]))$ непрерывна по t ($0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant 1$), нетрудно показать, что существуют t_1 и t_2 ($0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$) такие, что ломаная $\Gamma = \Gamma_1|_{[t_1,t_2]}$ с началом $\Gamma(t_1) = \alpha$ и концом $\Gamma(t_2) = \beta$ обладает такими свойствами:

$$\operatorname{diam}(\Gamma) = |\beta - \alpha| = \delta, \quad \Gamma \subset \Omega_s \cap B_j^*.$$

В частности, Γ лежит вне X (здесь и далее мы отождествляем ломаную Γ и ее носитель).

Положим

$$G_1 = B(\alpha,\delta) \cap B(\beta,\delta),$$

так что $\Gamma \subset \overline{G_1}$. Пусть I — замкнутый луч с вершиной в точке α, идущий в направлении вектора $(\alpha-\beta)$. Нетрудно доказать, что в области $\mathbb{C}\backslash I$ существует голоморфная ветвь $V_1(z)$ многозначной функции $\sqrt{z-\alpha}$, а в области $\mathbb{C}\backslash(I\cup\Gamma)$ — голоморфная ветвь $V_2(z)$ многозначной функции $\sqrt{z-\beta}$.

Положим

$$h_0(z) = V_1(z)V_2(z), \quad z \in \mathbb{C}\backslash(I\cup\Gamma).$$

Так как при переходе через I функции V_1 и V_2 меняют только свой знак, то h_0 непрерывно продолжается на область $G = \mathbb{C}\backslash\Gamma$, а из теоремы Мореры сразу следует, что $h_0 \in \mathcal{A}(G)$. Меняя, при необходимости, знак у V_1, мы дополнительно можем считать, что $h_0(z) = z + O(1)$ при $z \to \infty$. Теперь положим

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \frac{8}{\delta}\Big(h_0(z) - z + \frac{\alpha+\beta}{2}\Big) \\ &= \frac{8}{\delta}\frac{(z-\alpha)(z-\beta) - \big(z-(\alpha+\beta)/2\big)^2}{h_0(z) + \big(z-(\alpha+\beta)/2\big)} \\ &= \frac{8}{\delta}\frac{\alpha\beta - (\alpha+\beta)^2/4}{2z+O(1)} = -\frac{(\beta-\alpha)^2}{\delta(z+O(1))}. \end{aligned}$$

Следовательно, разложение Лорана функции h_1 вне B_j^* имеет такой вид:

$$h_1(z) = \frac{\delta e^{i\theta}}{z-a_j} + \frac{d_2}{(z-a_j)^2} + \cdots$$

(напомним, что $|\beta-\alpha| = \delta$, т. е. указанное $\theta \in \mathbb{R}$ существует).

По принципу максимума вне $\overline{G_1}$ (полагаем $h_1 = 0$ на Γ) имеем:

$$\|h_1\| \leqslant \|h_1\|_{\overline{G_1}} \leqslant \frac{8}{\delta}(\delta+\delta) \leqslant 16,$$

откуда

$$|d_2| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a_j|=3\delta} h_1(\zeta)(\zeta-a_j)\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}16\cdot 3\delta\cdot 2\pi 3\delta = 144\delta^2.$$

Пусть $\mu = \operatorname{dist}(X,\Gamma)$, U — открытая $\mu/2$-окрестность ломаной Γ. По теореме Брауэра продолжим h_1 из $\mathbb{C}\backslash(U\cap B_j^*)$ до функции $h \in C(\mathbb{C})$ с сохранением $\sup$-нормы (вне B_j^* функция h_1 не меняется). При этом функция h голоморфна вне $\overline{U}$, т. е. в окрестности X.

Наконец, будет искать функции g_j в виде

$$g_j(z) = \lambda_1 h(z) + \lambda_2 (h(z))^2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Напомним, что

$$f_j(z) = \frac{c_1^j}{z-a_j} + \frac{c_2^j}{(z-a_j)^2} + \cdots, \quad |c_1^j| \leqslant A_2\delta\omega(\delta), \quad |c_2^j| \leqslant A_2\delta^2\,\omega(\delta).$$

Нужные условия «касания» имеют вид

$$c_1^j = \lambda_1\delta e^{i\theta}, \quad c_2^j = \lambda_1 d_2 + \lambda_2\delta^2 e^{2i\theta},$$

откуда λ_1 и λ_2 однозначно находятся, причем очевидны оценки

$$|\lambda_1| \leqslant A_8\omega(\delta), \quad |\lambda_2| \leqslant A_8\omega(\delta).$$

Таким образом, справедливы оценки $\|g_j\| \leqslant A_3\omega(\delta)$, что завершает доказательство предложения. $\square$

Таким образом, с учетом установленных выше результатов теорема 13.2.3 полностью доказана.

13.3.6. Задача. Привести пример компакта K, у которого внутренность K° связна, односвязна и плотна в K, но $C_{\mathcal{A}}(K) \neq R(K)$.

13.3.7. Задача. Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{C})$. Доказать, что оператор Витушкина $V_\varphi\colon f \to V_\varphi f$, действующий по формуле (13.2.1), непрерывен в следующих пространствах: (1) $\operatorname{Lip}_\tau(\mathbb{C})$, $\tau \in (0,1)$; (2) $C^1(\mathbb{C})$.

13.3.8. Задача. Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, f — голоморфная в D функция. Доказать, что найдется последовательность $\{p_n\}$ полиномов комплексного переменного, которая равномерно сходится к f на каждом компакте из D.

13.3.9. Задача. Привести пример банахова подпространства в пространстве $C(\mathbb{C})$, разделяющего точки из $\mathbb{C}$, но не инвариантного относительно оператора Витушкина (выбрать соответствующую индекс-функцию φ).

Глава 14

Специальные области и интеграл в смысле главного значения

П. В. Парамонов

§ 14.1. Специальные области

Вводимое ниже понятие специальной области позволяет значительно расширить возможности теоремы Коши о вычетах.

14.1.1. Определение. *Жорданова область D в $\mathbb{C}$ называется* специальной*, если найдутся конечное множество $\Sigma \subset D$ и непрерывная на $\overline{D}\setminus\Sigma$ функция $S \in \mathcal{A}(D\setminus\Sigma)$, для которой $S(z) = \overline{z}$ при всех $z \in \partial D$. Такая функция S единственна и называется* функцией Шварца *области D.*

Единственность функции Шварца легко доказывается с помощью теоремы Морера и теоремы Римана.

Простейшим примером специальной области служит любой круг $B(a, r)$, для которого $(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = r^2$, откуда $S(z) = r^2/(z - a) + \overline{a}$, причем $\Sigma = \{a\}$.

14.1.2. Задача. Доказать, что всякая жорданова область, содержащая отрезок прямой на своей границе, не может быть специальной.

Покажем, как используется функция Шварца при вычислении интегралов.

14.1.3. Пример. Функция $S(z) = 4/z$ является функцией Шварца области $B(0, 2)$, поэтому

$$\int_{\{|z|=2\}^+} \overline{z}^2 \operatorname{tg} z\, dz = \int_{\{|z|=2\}^+} \frac{16}{z^2} \operatorname{tg} z\, dz,$$

где интеграл справа легко считается с помощью теоремы Коши о вычетах, в то время как слева под интегралом стоит всюду неголоморфная функция.

14.1.4. Задача. Вычислить интегралы

$$\int_{|z-i|=3} \cos(\overline{z})\,dz, \qquad \int_{|z+i|=1} |z|^2 \ln(iz)\,dz\,.$$

14.1.5. Задача. Пусть D — произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. Если $f(\partial D) \subset \mathbb{R}$, то $f \equiv \mathrm{const}$ в $\overline{D}$.

Указание: использовать дробно-линейные отображения, принцип максимума модуля и теорему Коши – Римана.

Из утверждения в задаче 14.1.5 вытекают два важных факта про специальные области.

14.1.6. Предложение. *Пусть D — специальная область и функция Шварца S этой области имеет в D одну особую точку a — полюс первого порядка. Тогда D — круг с центром в точке a.*

Доказательство. Положим $S(z) = h(z) + \lambda(z-a)^{-1}$, где функция h входит в $\mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда при $z \in \partial D$ имеем

$$\begin{aligned} 0 < |z-a|^2 = (\overline{z} - \overline{a})(z-a) &= \Big(h(z) + \frac{\lambda}{z-a} - \overline{a}\Big)(z-a) \\ &= (h(z) - \overline{a})(z-a) + \lambda. \end{aligned}$$

Поскольку функция $H(z) = (h(z) - \overline{a})(z-a) + \lambda \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ принимает на ∂D вещественные значения, имеем $H(z) \equiv C > 0$ в $\overline{D}$, откуда получаем $|z-a| = \sqrt{H(z)} \equiv \sqrt{C}$ на ∂D, следовательно, D — круг радиуса $\sqrt{C}$ с центром в точке a. $\square$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

14.1.7. Предложение. *В указанных выше обозначениях для всякой специальной области D множество Σ непусто.*

14.1.8. Определение. *Специальная область D называется* неванлинновской*, если ее функция Шварца не имеет в D других особых точек, кроме полюсов.*

14.1.9. Пример. Пусть $B = B(a, r)$ — круг, где $a \in (0, +\infty)$ и $0 < r \leqslant a$. Пусть D — образ круга B при отображении $w = z^2$. Отметим, что при $r = a$ область D (кардиоида!) имеет негладкую границу — точку возврата в 0. Докажем, что D — неванлинновская область. Действительно, если $z \in \partial B$ и $w = z^2$, то $z = s(w), \bar{z} = s(\bar{w})$ (через $s(w)$ мы обозначаем главное значение $\sqrt{w}$, являющееся функцией класса $\mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$). Отсюда при $w \in \partial D$ имеем

$$(s(\bar{w}) - a)(s(w) - a) = r^2 \Leftrightarrow \bar{w} = \Big(a + \frac{r^2}{s(w) - a}\Big)^2,$$

т. е. $\bar{w} = \left(a + \dfrac{r^2(s(w)+a)}{w-a^2}\right)^2$, где последняя функция Шварца (для D) имеет в D только одну особую точку $w = a^2$ — полюс второго порядка. Аналогично (для $p \in \{3, 4, \dots\}$) строится неванлинновская область D с одним полюсом порядка p у ее функции Шварца.

14.1.10. Задача. Привести пример специальной области D, у которой функция Шварца имеет в D только одну особую точку — существенно особую.

14.1.11. Задача. Привести пример неванлинновской области D, у которой функция Шварца имеет в D два полюса первого порядка.

14.1.12. Задача. Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей и $f \in \mathcal{A}(D) \cap C^1(\overline{D})$. Доказать, что

$$2i \iint_D f(z)\,dx\,dy = \int_{\partial^+ D} f(z)\bar{z}\,dz.$$

Для неванлинновских областей D такие интегралы всегда можно вычислять с помощью вычетов. Пользуясь теоремой Мергеляна, нетрудно доказать, что утверждение предыдущей задачи остается справедливым для произвольной жордановой области со спрямляемой границей и любой функции $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$.

С помощью функции Шварца удобно вычислять интегралы Пуассона, задающие решения задачи Дирихле для гармонических функций в кругах.

14.1.13. Теорема (о специальных областях). *Пусть функция f голоморфна в $\mathbb{C}^\sharp = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, за исключением конечного множества точек $F \subset \mathbb{C}^\sharp \backslash \overline{B_1}$, и взаимно-однозначна на $\overline{B_1}$. Тогда $\mathrm{O} = f(B_1)$ является специальной областью. Пусть $F = \{a_1, \dots, a_N\}$, $z_n = 1/\bar{a_n}$, $w_n = f(z_n)$, $\Sigma = \{w_1, \dots, w_N\} \subset \mathrm{O}$. Тогда функция Шварца S области O определена по формуле*

$$S(w) = \overline{f(1/\overline{f^{-1}(w)})}.$$

При этом функция S имеет в точке w_n особенность аналогичную особенности у функции f в точке a_n. В частности, область O является неванлинновской в точности тогда, когда указанная функция f рациональна.

Обратно, если O — специальная область с функцией Шварца S (голоморфной в $\mathrm{O}\backslash\Sigma$), f — какое-либо конформное отображение из B_1 на O, продолженное до гомеоморфизма их замыканий, то f продолжается голоморфно из B_1 на $\mathbb{C}^\sharp\backslash F$, где F и Σ связаны, как ранее (включая типы соответствующих особых точек для f и S).

Доказательство. Отметим сначала, что формула для S получена из условия

$$\overline{z} = \overline{f^{-1}(w)} = 1/f^{-1}(w) = 1/z \Longleftrightarrow \overline{w} = \overline{f(1/\overline{f^{-1}(w)})}$$

при $w \in \partial\text{O}$, $z \in \partial B_1$, так что имеем $\overline{w} = S(w)$ на ∂O. Положим $Z = \{z_1, \ldots, z_N\}$. Как в принципе симметрии, доказывается, что функция $g(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$ голоморфна на $B_1 \backslash Z$, следовательно, функция $S(w) = g(f^{-1}(w))$ голоморфна на $\text{O}\backslash\Sigma$. Легко проверяется наличие или отсутствие $\lim_{w\to w_n} S(w)$ (аналогично $\lim_{z\to a_n} f(z)$, т. е. соответствие типов особых точек у f и S), а также непрерывность функции S на $\overline{\text{O}}\backslash\Sigma$. Обратное утверждение теоремы доказывается аналогично с использованием теоремы Мореры. □

14.1.14. Задача. Пусть $w_1, \ldots, w_N$ — заданные различные точки в $\mathbb{C}$; $p_1, \ldots, p_N$ — натуральные числа. Пользуясь предыдущей теоремой, привести алгоритм построения какой-либо неванлинновской области Ω, у которой функция Шварца имеет в Ω полюса w_n порядка p_n, $n \in \{1, \ldots, N\}$ (без других особых точек в Ω).

Указание. При обозначениях предыдущей теоремы при $a_1 = \infty$ ($z_1 = 0$) рассмотреть функцию f вида

$$f(z) = z + \frac{\varepsilon z^p (z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - a_2)^{p_2} \cdots (z - a_N)^{p_N}}, \quad p = p_1 + \cdots + p_N - (N - 1),$$

для достаточно малого ε. Тогда $w_n = z_n$ при $n \in \{1, \ldots, N\}$.

Можно определять специальные области и на сфере Римана $\mathbb{C}^\sharp$. Важным в приложениях примером такой области является внешность крыла Жуковского (вместе с точкой ∞).

§ 14.2. Интеграл в смысле главного значения

Пусть Γ^+ — кусочно гладкая жорданова или замкнутая жорданова (ориентированная) кривая в $\mathbb{C}$. Такие кривые мы будем для краткости называть КГ-*допустимыми в* $\mathbb{C}$. «Образ» произвольной КГ-допустимой в $\mathbb{C}$ кривой под действием какого-либо дробно-линейного отображения будем называть КГ-*допустимой кривой в* $\mathbb{C}^\sharp$ (так здесь обозначается расширенная комплексная плоскость, сфера Римана). Наиболее частый пример – положительно ориентированная компактифицированная (одной точкой ∞) вещественная ось $\mathbb{R}^\sharp$ — КГ-допустимая кривая в $\mathbb{C}^\sharp$, полученная, например, из стандартно ориентированной окружности $\{|z| = 1\}^+$ под действием дробно-линейного отображения $\dfrac{1}{z - i} - \dfrac{i}{2}$ (проверить!). С другой стороны, ориентированная граница какой-либо полосы, дополненная точкой ∞, не является КГ-допустимой кривой в $\mathbb{C}^\sharp$.

Напомним, что через $B(a,\delta)$ обозначается открытый круг с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $\delta > 0$. Через $B'(a,\delta)$ обозначается соответствующий проколотый круг.

При $a = \infty$ полагаем $B(a,\delta) = \{z \in \mathbb{C}^\sharp \colon |z| > /\delta\}$ (соответственно $B'(a,\delta) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1/\delta\}$).

Пусть $\mathfrak{A}_* = \{a_1, \ldots, a_J\}$ – конечное (возможно пустое) подмножество в $[\Gamma]$, где $[\Gamma]$ — носитель Γ^+, причем, если $\infty \in [\Gamma]$, то по определению $\infty \in \mathfrak{A}_* \neq \varnothing$. При $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_J\}$, где $\delta_j \in (0, +\infty)$, положим $|\Delta| = \max\{\delta_1, \ldots, \delta_J\}$. При всех Δ с достаточно малым $|\Delta|$ выражение

$$\Gamma^+_{\mathfrak{A}_*\Delta} = \Gamma^+ \backslash \Big(\bigsqcup_{j=1}^{J} B(a_j, \delta_j) \Big) \tag{14.2.1}$$

естественно интерпретируется как цепь (формальное конечное объединение) КГ-допустимых кривых в $\mathbb{C}$.

В рассматриваемых обозначениях пусть $f \colon [\Gamma] \backslash \mathfrak{A}_* \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Величина

$$(vp) \int_{\Gamma^+} f(z)\, dz = \lim_{|\Delta| \to 0} \int_{\Gamma^+_{\mathfrak{A}_*\Delta}} f(z)\, dz,$$

если указанный предел существует и конечен, называется *главным значением* (*value principal*) *интеграла* от функции f вдоль кривой Γ^+.

Это определение естественно распространяется на цепи КГ-допустимых кривых в $\mathbb{C}^\sharp$ (дать определение самостоятельно).

Так, непосредственно по определению проверяется, что верно равенство $(vp) \displaystyle\int_{\mathbb{R}^\sharp} \frac{1}{z}\, dz = 0$ (здесь $\mathfrak{A}_* = \{0, \infty\}$).

Нашей целью будет доказательство аналога теоремы Коши о вычетах для (vp)-интегралов и, в частности, доказательство соответствующей теоремы существования для (vp)-интегралов. Сначала мы введем аналог понятия вычета и установим ряд его свойств.

Вычет функции в точке относительно области. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, ограниченная конечным числом попарно непересекающихся замкнутых КГ-допустимых (в $\mathbb{C}$) кривых. Такие области мы будем называть КГ- допустимыми в $\mathbb{C}$. Образ произвольной КГ-допустимой в $\mathbb{C}$ области под действием какого-либо дробно-линейного отображения будем называть КГ-*допустимой областью в* $\mathbb{C}^\sharp$. Через $\partial^\sharp_+ D$ обозначается ориентированная граница в $\mathbb{C}^\sharp$ КГ-допустимой области в $\mathbb{C}^\sharp$.

Топологическая граница обозначается через $\partial^\sharp D$. Через ${}^\sharp\overline{D}$ обозначается *замыкание в* $\mathbb{C}^\sharp$ области D (отметим, что термин $D^\sharp$ уже занят для одноточечной компактификации области D).

Основным примером КГ-допустимой области в $\mathbb{C}^\sharp$ является открытая верхняя полуплоскость.

Зафиксируем произвольную КГ-допустимую область D в $\mathbb{C}^\sharp$ и точку $a \in {}^\sharp\overline{D}$. При малых $\delta > 0$ кривая $\gamma_\delta^+(a) = \partial^+ B(a,\delta) \cap {}^\sharp\overline{D}$ представляет собой связную (ориентированную) дугу окружности. Пусть при некотором $\delta_0 > 0$ задана функция $f\colon B'(a,\delta_0) \cap {}^\sharp\overline{D} \to \mathbb{C}$, непрерывная на указанной области определения. В этих обозначениях выражение

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\to 0} \int_{\gamma_\delta^+(a)} f(z)\,dz$$

(если последний предел существует и конечен) называется *вычетом функции f в точке a относительно области D*.

Приведем ряд утверждений о вычислении таких вычетов.

14.2.1. Лемма. *Если $a \in D$ и функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a, то* $\operatorname{res}_{(a,D)} f = \operatorname{res}_a f$ *— обычный вычет функции f в точке a.*

14.2.2. Лемма. *Пусть $a \neq \infty$ и $f(z) = o(1/(z-a))$ при $z \to a$ ($z \in {}^\sharp\overline{D}$) или $a = \infty$ и $f(z) = o(1/z)$ при $z \to \infty$ ($z \in {}^\sharp\overline{D}$). Тогда выполнено равенство*

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = 0.$$

Доказательства этих двух лемм очевидны.

14.2.3. Лемма. *Пусть $a \in \partial^\sharp D \cap \mathbb{C}$ является* полюсом первого порядка *функции f и θ_a — абсолютная величина* внутреннего угла *области D в точке a. Тогда* $\operatorname{res}_{(a,D)} f = \theta_a (2\pi)^{-1} \operatorname{res}_a f$.

Доказательство. При малых $\delta > 0$ кривую $\gamma_\delta^+(a)$ можно параметризовать следующим образом:

$$\left\{ z(t) = a + \delta e^{it} \middle| t \in [\alpha(\delta), \beta(\delta)] \right\},$$

где $\alpha(\delta) < \beta(\delta) < \alpha(\delta) + 2\pi$, причем $\beta(\delta) - \alpha(\delta) \to \theta_a$ при $\delta \to 0$. Разложим функцию f в ряд Лорана в $B'(a,\delta_0)$ при некотором $\delta_0 > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $c_{-1} = \mathrm{res}_a f$. Тогда справедливо равенство

$$\operatorname*{res}_{(a,D)} f = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\to 0} \int_{\alpha(\delta)}^{\beta(\delta)} \left(\frac{c_{-1}}{\delta e^{it}} + O(1) \right) \delta e^{it}\, i\, dt = \frac{\theta_a c_{-1}}{2\pi}.$$

Лемма доказана. $\square$

Для полюсов более высокого порядка полезно следующее утверждение, которое доказывается аналогично предыдущей лемме.

14.2.4. Задача. Пусть $D = \Pi_+$ и точка $a \in \mathbb{R}$ является *полюсом порядка* $p > 1$ функции f. Тогда $\mathrm{res}_{(a,D)} f$ существует в точности тогда, когда главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки a содержит только нечетные степени $z - a$. В указанном случае всегда верно равенство $\mathrm{res}_{(a,D)} f = 2^{-1} \mathrm{res}_a f$.

Следующее утверждение является простой переформулировкой леммы Жордана.

14.2.5. Лемма. *Пусть* $R \in (0, +\infty)$, *функция* f *непрерывна на множестве* $\overline{\Pi_+} \setminus B(0, R))$, *причем* $\lim_{z\to\infty,\, z\in\overline{\Pi_+}} f(z) = 0$. *Тогда для любого фиксированного* $\lambda > 0$ *имеем*

$$\operatorname*{res}_{(\infty,\Pi_+)} \big(f(z) e^{i\lambda z} \big) = 0.$$

14.2.6. Задача. Для области $D = (B(2,2) \setminus \overline{B(1,1)}) \cap \{Im(z) > 0\}$ и функции $f(z) = z^{-2}$ вычислить $\mathrm{res}_{(0,D)} f$. Как следствие полученного найти интеграл $(vp) \displaystyle\int_{\partial^+ D} f(z)\, dz$.

Обратимся к теореме о вычетах для интегралов в смысле главного значения.

14.2.7. Теорема. *Пусть* D – КГ-*допустимая область в* $\mathbb{C}^\sharp$ *и множество* $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ *в* $^\sharp\overline{D}$ *конечно* (*возможно, пусто*); *по определению, если* $\infty \in {}^\sharp\overline{D}$, *то* $\infty \in \mathfrak{A} \neq \varnothing$. *Пусть* $f \colon {}^\sharp\overline{D} \setminus \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(D \setminus \mathfrak{A})$ *и функция* f *непрерывна на* $^\sharp\overline{D} \setminus \mathfrak{A}$. *Тогда*

$$(vp) \int_{\partial_+^\sharp D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{res}_{(a_n, D)} f,$$

где имеется в виду, что интеграл слева существует, если и только если каждый вычет справа существует, и в этом случае выполняется равенство.

Доказательство. Положим $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A} \cap \partial^\sharp D$. Если $\mathfrak{A}_* = \varnothing$ (откуда, в частности, $\infty \notin \partial^\sharp D$), то утверждение теоремы непосредственно вытекает из стандартной теоремы Коши о вычетах (возможный здесь случай $\infty \in D$ рассмотреть отдельно, самостоятельно!). Пусть далее $\mathfrak{A}_* \neq \varnothing$ (если $\infty \in \partial^\sharp D$, то $\infty \in \mathfrak{A}_*$). Без ограничения общности будем считать, что $\mathfrak{A}_* = \{a_1, \ldots, a_J\}$, где $J \leqslant N$. Пусть, как и ранее, $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_J\}$. Для любого Δ с достаточно малым $|\Delta|$ рассмотрим область $D_{\mathfrak{A}_*\Delta} = D \setminus \bigsqcup_{j=1}^J \overline{B(a_j, \delta_j)}$. Напомним, что обозначение $\left(\partial_+^\sharp D\right)_{\mathfrak{A}_*\Delta}$ определено выше в формуле 14.2.1.

Для функции f в области $D_{\mathfrak{A}_*\Delta}$ применима стандартная теорема Коши о вычетах:

$$\int_{\partial_+^\sharp \left(D_{\mathfrak{A}_*\Delta}\right)} f(z)\,dz = \int_{\left(\partial_+^\sharp D\right)_{\mathfrak{A}_*\Delta}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{J} \int_{\gamma_{\delta_j}^+(a_j)} f(z)\,dz$$
$$= 2\pi i \sum_{n=J+1}^{N} \operatorname*{res}_{a_n} f,$$

где последняя сумма считается равной нулю в случае $J = N$. Остается устремить $|\Delta|$ к нулю. $\square$

14.2.8. Пример. Вычислим $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x^2(x^2+1)}\,dx$.

Положим $D = \Pi_+$, $f(z) = (1-e^{2iz})/(z^2(z^2+1))$. Тогда (абсолютно сходящийся) интеграл I является вещественной частью (vp)-интеграла $I_1 = (vp)\displaystyle\int_{\partial_+^\sharp D} f(z)\,dz$. В обозначениях теоремы 14.2.7 имеем равенство $\mathfrak{A} = \{a_1 = 0, a_2 = i, a_3 = \infty\}$. Применяя леммы 14.2.2 – 14.2.5 (a_1 и a_2 — полюса первого порядка функции f), находим

$$I_1 = 2\pi i \left(\frac{1}{2}\operatorname*{res}_{a_1} f + \operatorname*{res}_{a_2} f\right) = \pi(1+e^{-2}),$$

откуда $I = \pi(1+e^{-2})$.

14.2.9. Пример. Вычислим $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\sin(x)}{x^3}\,dx$.

Пусть $D = \Pi_+$, $f(z) = (iz - e^{iz})/z^3$. Тогда исходный (абсолютно сходящийся) интеграл совпадает с мнимой частью (vp)-интеграла $I_1 = (vp)\displaystyle\int_{\partial_+^\sharp D} f(z)\,dz$. По теореме 14.2.7 при $\mathfrak{A} = \{a_1 = 0, a_2 = \infty\}$

с применением леммы 14.2.2, леммы 14.2.5 и упражнения 14.2.4 (точка a_1 есть полюс порядка 3 функции f), находим:

$$I_1 = 2\pi i \, \frac{1}{2} \operatorname*{res}_{a_1} f = \frac{\pi i}{2},$$

откуда $I = \pi/2$.

14.2.10. Пример. Вычислим $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}\, dx$.

Пусть $f(z) = \dfrac{\ln_*(z)}{z^2 - 1}$, где ветвь логарифма $\ln_*(z) = \ln|z| + i \arg_*(z)$ выбрана с условием $\arg_*(z) \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ (т. е. с разрезом по отрицательной мнимой полуоси). Пусть D — верхняя полуплоскость. При $\mathfrak{A} = \{-1, 0, 1, \infty\}$, применяя теорему 14.2.7 и леммы 14.2.2 и 14.2.3, находим:

$$(vp) \int_{\partial^\sharp_+ D} f(z)\, dz = 2\pi i \, \frac{1}{2} \operatorname*{res}_{-1} f = \frac{\pi^2}{2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{Re} \Big[(vp) \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(z)\, dz \Big] = I$, получаем $I = \pi^2/4$.

14.2.11. Задача. Вычислить $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x-1)(x^2+4)}\, dx$.

Указание. Для функции $f_1(z) = \dfrac{\big(\ln_*(z)\big)^2}{(z-1)(z^2+4)}$ в верхней полуплоскости D_1 (функция $\ln_*(z)$ определяется как в предыдущем примере) и функции $f_2(z) = \dfrac{\big(\ln^*(z)\big)^2}{(z-1)(z^2+4)}$ в нижней полуплоскости D_2 (здесь $\ln^*(z) = \ln|z| + i \arg^*(z)$, где $\arg^*(z) \in (\pi/2, 5\pi/2)$, т. е. с разрезом по положительной мнимой полуоси) применяем теорему 14.2.7 и леммы 14.2.2 и 14.2.3). Далее складываем полученные ответы для $\displaystyle\int_{\partial^\sharp_+ D_1} f_1(z)\, dz$ и $\displaystyle\int_{\partial^\sharp_+ D_2} f_2(z)\, dz$ и учитываем, что $f_1(z) = f_2(z)$ в левой полуплоскости $\big($в частности, на $(-\infty, 0)\big)$. Остается воспользоваться равенством $\operatorname{Im}\big(f_1(x) - f_2(x)\big) = -4\pi \dfrac{\ln(x)}{(x-1)(x^2+4)}$ на $(0, +\infty)$.

14.2.12. Задача. Доказать, что преобразование Гильберта

$$f \mapsto H[f](x) = \frac{1}{\pi}\, (vp) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - x}\, dt$$

удовлетворяет условию $H\big[H[f]\big](x) = -f(x)$ для всякой правильной рациональной функции f без вещественных полюсов.

14.2.13. Замечание. Формально в последнем интеграле следовало интегрировать по $\mathbb{R}^\sharp$, а не по $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbb{R}$ не является КГ-допустимой кривой в $\mathbb{C}^\sharp$.

§ 14.3. Теоремы Привалова и Сохоцкого – Племеля

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ и $f \in C(\Gamma)$. *Задача Дирихле* (для голоморфных функций) состоит в нахождении функции $F \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ такой, что $F|_\Gamma = f$.

14.3.1. Теорема (Привалов, 1918)**.** *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$ со спрямляемой границей Γ (где $\Gamma^+ = \partial^+ D$) и $f \in C(\Gamma)$. Следующие условия эквивалентны*:

(a) *задача Дирихле для f в D разрешима*;

(b) $\displaystyle\int_{\Gamma^+} f(z) z^n\, dz = 0$ *для всех* $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$;

(c) $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$ *для всех* $a \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}$.

Доказательство. Доказательство (a)⇒(b)⇔(c) мы оставляем читателю. Оно непосредственно следует из интегральной теоремы Коши (в усиленной формулировке), интегральной формулы Коши, теоремы Коши о разложении в ряд Тейлора и теоремы единственности. Доказательство (c)⇒(a) в общем случае требует немалых усилий; в частном случае, когда f непрерывно продолжается с Γ до функции, голоморфной в некоторой односторонней (со стороны D) окрестности кривой Γ, последнее утверждение мы установим после доказательства (тоже специального случая) следующей теоремы. □

14.3.2. Теорема (Сохоцкий (1873) – Племель (1908))**.** *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$ с* гладкой *границей Γ и $f \in \mathrm{Lip}_s(\Gamma)$ при некотором $s \in (0, 1)$. Положим*

$$F_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D;$$

$$F_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega = \mathbb{C}\backslash\overline{D}.$$

Справедливы следующие утверждения:

(a) *функции F_+ и F_- непрерывно продолжаются на $\overline{D}$ и $\overline{\Omega}$ соответственно*;

(b) *функция*

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}(vp)\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Gamma$$

определена и непрерывна на Γ;

(c) *при* $z \in \Gamma$ *имеем* $F_\pm(z) = F_0(z) \pm f(z)/2$*, в частности, имеет место равенство* $f(z) = F_+(z) - F_-(z)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы приведем для случая, когда функция f продолжается с Γ голоморфно в некоторую окрестность U множества Γ. Из теоремы 13.1.14 Хартогса – Розенталя следует, что множество таких функций f всюду плотно в $C(\Gamma)$, однако этот факт не дает возможности доказать рассматриваемую теорему в общем случае. Итак, пусть найдется функция $F \in \mathcal{A}(U)$ с условием $F|_\Gamma = f$. Пользуясь, например, теоремой Каратеодори, можно найти гладкие жордановы кривые Γ_1 и Γ_2, близкие к Γ, такие, что Γ_1 лежит в $U \cap D$ и ограничивает область D_1, Γ_2 лежит в $U \cap \Omega$ и ограничивает область D_2, причем $\Omega \subset \Omega_1 = \mathbb{C}\backslash\overline{D}_1$, $D \subset D_2$, а область $G = D_2\backslash\overline{D}_1$ удовлетворяет условиям $\Gamma \subset G \subset \overline{G} \subset U$.

По интегральной теореме Коши (для области $G_2 = D_2\backslash\overline{D}$ и функции $F(\zeta)/(\zeta - z)$, $z \in D$ фиксировано) имеем:

$$F_+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^+} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

откуда следует, что функция F_+ голоморфно продолжается из D на D_2. Аналогично рассуждая, получаем, что F_- голоморфно продолжается из Ω на Ω_1. По интегральной формуле Коши в G для F при $z \in \Gamma$ получаем:

$$f(z) = F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^+} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^+} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = F_+(z) - F_-(z).$$

Наконец, при $z \in \Gamma$ по теореме о вычетах для $(vp)\int$ и леммам перед ней (о вычислении вычетов относительно области) имеем

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}(vp)\int_{\Gamma^+} \frac{F_+(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}(vp)\int_{\Gamma^+} \frac{F_-(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$
$$= \operatorname*{res}_{(z,D)} \frac{F_+(\zeta)}{\zeta - z} + \operatorname*{res}_{(z,\Omega)} \frac{F_-(\zeta)}{\zeta - z} + \operatorname*{res}_{(\infty,\Omega)} \frac{F_-(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{F_+(z) + F_-(z)}{2},$$

что и требовалось доказать. □

14.3.3. Замечание. Для окончания доказательства (частного случая) теоремы 14.3.1 рассмотрим одностороннюю окрестность U кривой Γ со стороны D. Пусть найдется $F \in \mathcal{A}(U) \cap C(U \cup \Gamma)$ с условием $F|_\Gamma = f$. Проведем в U кривую Γ_1, как в доказательстве предыдущей теоремы. Пусть D_1 — область, ограниченная Γ_1, $G_1 = D \setminus D_1$. Применяя интегральную теорему Коши для области G_1 и функции $F(z)/(z-a)$, получим, что для области D_1 и функции $f_1 = F|_{\Gamma_1}$ выполнено условие (c) теоремы 14.3.1 (откуда следует, что $F_{1-} = 0$ на дополнении D_1). Остается для D_1 и f_1 применить утверждение (c) теоремы 14.3.2 (функция F_{1+} нужным образом продолжает f_1 в D_1) и надлежащим образом воспользоваться теоремой Морера.

14.3.4. Задача. Что изменится в формулировке теоремы 14.3.2, если область будет иметь кусочно гладкую границу?

Глава 15

Принцип симметрии и его приложения

В. Н. Сорокин

§ 15.1. Принцип симметрии Римана – Шварца

Пусть U — открытый круг, A и B — две различные точки на границе ∂U. Соединим эти точки жордановой дугой γ такой, что $\mathring{\gamma} \subset U$, где $\mathring{\gamma} = \gamma \backslash \{A, B\}$. По теореме Жордана дуга γ разбивает круг U на две односвязные области D_1 и D_2, т. е. $U = D_1 \sqcup \mathring{\gamma} \sqcup D_2$. Каждую из этих областей будем называть обобщенным полукругом с диаметром γ.

15.1.1. Теорема. *Пусть область G в $\overline{\mathbb{C}}$ содержит обобщенный полукруг D с диаметром γ, причем γ — отрезок прямой или дуга окружности. Если функция f мероморфна в G, непрерывна в замыкании $\overline{D}$ и $f(\gamma) \subset \Gamma$, где Γ — прямая или окружность, то f аналитически продолжается из области G в область G^*, симметричную области G относительно γ.*

Доказательство. С помощью соответствующих дробно-линейных отображений (ДЛО) на z-плоскости и на w-плоскости придем к следующей ситуации: D — обычный полукруг (для определенности, в верхней полуплоскости), его диаметр γ — отрезок вещественной оси, Γ — вещественная ось. Область G^* симметрична области G относительно вещественной оси. Можно считать, что f голоморфна в G, причем $\infty \notin G$. Рассмотрим в области G^* функцию

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in G^*.$$

Докажем, что она голоморфна в этой области. Зафиксируем какую-либо точку $z_0 \in G^*$. Тогда $\overline{z}_0 \in G$. Функция f голоморфна в точке $\overline{z}_0$, следовательно, она раскладывается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \overline{z}_0)^n, \quad |z - \overline{z}_0| < R,\ R > 0.$$

Тогда имеет место разложение

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Поскольку функция f^* раскладывается в степенной ряд в окрестности точки z_0, то она голоморфна в этой точке. Пусть D^* — полукруг, симметричный D относительно вещественной оси, $\overline{D}$ и $\overline{D}^*$ — замкнутые полукруги, $\overline{U} = \overline{D} \cup \overline{D}^*$ – замкнутый круг, U — соответствующий открытый круг. В замкнутом круге $\overline{U}$ рассмотрим функцию

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in \overline{D}, \\ f^*(z), & \text{если } z \in \overline{D}^*. \end{cases}$$

Докажем корректность определения. Если $z \in \gamma$, то по построению числа $f(z)$ и $f^*(z)$ являются комплексно сопряженными, а по условию $f(z)$ вещественно, следовательно, $f(z) = f^*(z)$. Отсюда также следует, что функция F непрерывна в круге $\overline{U}$. Докажем, что функция F голоморфна в круге U. Воспользуемся теоремой Мореры. Пусть Δ — произвольный замкнутый треугольник в круге U. Докажем, что

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0. \tag{15.1.1}$$

Действительно, если $\Delta \subset \overline{D}$ или $\Delta \subset \overline{D}^*$, то (15.1.1) следует из интегральной теоремы Коши. Если диаметр γ пересекает внутренность треугольника Δ, то этот треугольник разбивается на два многоугольника Δ_1 и Δ_2. По теореме Коши

$$\int_{\partial\Delta_j} f(z)\, dz = 0, \ j = 1, 2.$$

Отсюда следует (15.1.1). Элементы $(G, f), (U, F), (G^*, f^*)$ образуют цепь. Следовательно, элемент (G^*, f^*) является аналитическим продолжением (АП) элемента (G, f). □

§ 15.2. Формула Кристоффеля – Шварца

На комплексной z-плоскости обозначим через $\mathbb{H}$ верхнюю полуплоскость, на комплексной w-плоскости зафиксируем некоторый многоугольник $\mathbb{P}$ (не обязательно выпуклый), вершины которого обозначим через $A_1, \ldots, A_n$ (направление обхода против часовой стрелки), $n \geqslant 3$. Внутренний угол при вершине A_j обозначим через $\alpha_j \pi$, где $0 < \alpha_j < 2$, и можно считать, что $\alpha_j \neq 1, \ j = 1, \ldots, n$.

Требуется построить конформное отображение верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ на многоугольник $\mathbb{P}$.

По теореме Римана такое конформное отображение $w = f(z)$ существует. Оно определено не единственным образом, а с точностью до трехпараметрической группы автоморфизмов верхней полуплоскости. По теореме Каратеодори это отображение продолжается по непрерывности на границу. Точнее, $f\colon \overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{P}}$ — гомеоморфизм замкнутых областей. Обозначим через $a_1, \ldots, a_n$ прообразы вершин $A_1, \ldots, A_n$. Можно считать, что $a_j \neq \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что здесь выполнены все условия принципа симметрии Римана – Шварца. Следовательно, функция f аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость, причем n различными способами, а именно через каждый из интервалов, на которые точки $a_1, \ldots, a_n$ разбивают вещественную ось. Образами нижней полуплоскости будут многоугольники, симметричные $\mathbb{P}$ относительно его сторон. Аналогично каждую из n полученных функций можно аналитически продолжить снова в верхнюю полуплоскость n различными способами. При одном из них мы вернемся к исходному элементу, а остальные продолжения новые. Пусть это ветвящееся построение продолжается до бесконечности. Мы получим некоторую полную аналитическую функцию по Вейерштрассу (ПАФ). Выясним, как эта функция устроена в проколотой окрестности каждой из точек a_j. Для всех элементов рассуждения одинаковые. Выберем, для определенности, исходный элемент. Возьмем малую полукруговую окрестность D точки a_j. Отображение f переводит ее в криволинейный сектор с вершиной A_j и с углом $\alpha_j\pi$. В этом секторе выделяются однозначные ветви функции $\zeta = (w - A_j)^{1/\alpha_j}$. Фиксируем любую из них. В образе получим криволинейный полукруг с центром в нуле. Для функции

$$f_j(z) = (f(z) - A_j)^{1/\alpha_j}, \quad z \in D,$$

выполнены все условия принципа симметрии Римана – Шварца. Следовательно, она аналитически продолжается в круговую окрестность точки a_j. Итак, функция f_j голоморфна в точке a_j. Кроме того, $f_j'(a_j) \neq 0$, потому что это отображение взаимно-однозначное. Имеем

$$f_j(z) = \widetilde{C}_j(z - a_j)(1 + O(z - a_j)), \quad z \to a_j.$$

Здесь $\widetilde{C}_j \neq 0$, а O — голоморфная функция. Возвращаясь к функции f, получим

$$f(z) = \tilde{A}_j + C_j(z - a_j)^{\alpha_j}(1 + O(z - a_j)), \quad z \to a_j, \tag{15.2.1}$$

где $C_j \neq 0$, а O — голоморфная функция. Функция $(z - a_j)^{\alpha_j}$ многозначна, при некотором выборе значений получим элемент $f(z)$. Заметим также, что константы C_j и функции O (и $\widetilde{A}_j$ тоже) зависят не только от j, но и от выбора ветви $f(z)$. Дифференцируя (15.2.1), получим

$$f'(z) = C_j \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1}(1 + O(z - a_j)), \quad z \to a_j.$$

Дифференцируя еще раз, будем иметь

$$f''(z) = C_j \alpha_j (\alpha_j - 1)(z - a_j)^{\alpha_j - 2}(1 + O(z - a_j)), \quad z \to a_j.$$

Тогда

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}(1 + O(z - a_j)), \quad z \to a_j,$$

где O — голоморфная функция. Рассмотрим функцию

$$h(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}.$$

Она не имеет особых точек в $\mathbb{C}$. Точнее, точки $a_1, \ldots, a_n$ — устранимые особые точки. Их мы по умолчанию устраняем, доопределив функцию в этих точках по непрерывности. Тогда по теореме о монодромии $h(z)$ — однозначная аналитическая функция в $\mathbb{C}$. Исследуем поведение функции f в бесконечности. Рассуждая так же, как для конечных точек a_j, получим

$$f(z) = A_0 + \frac{C_0}{z}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big), \quad z \to \infty,$$

где $C_0 \neq 0$, и O — голоморфная функция. Следовательно, при $z \to \infty$ имеем

$$f'(z) = -\frac{C_0}{z^2}\big(1 + O\big), \; f''(z) = \frac{2C_0}{z^3}\big(1 + O\big), \; \frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z}\big(1 + O\big),$$

где $O = O(1/z)$ — голоморфная функция. Итак, $h(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Тогда по теореме Лиувилля $h(z) \equiv 0$. Мы доказали, что для любого элемента ПАФ f справедлива формула

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}.$$

Осталось два раза проинтегрировать это равенство. Имеем

$$\log f'(z) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - 1) \log(z - a_j) + \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$f'(z) = A \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{\alpha_j - 1}.$$

Окончательно,

$$f(z) = A\int_0^z \prod_{j=1}^n (t-a_j)^{\alpha_j-1}\,dt + B, \quad z\in\mathbb{H}. \tag{15.2.2}$$

Здесь A и B — постоянные интегрирования. Интеграл выше берется вдоль любого спрямляемого пути в верхней полуплоскости. Для определенности ветви многозначных функций выделяем условием

$$0 < \operatorname{Arg}(t-a_j) < \pi, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Формула (15.2.2) называется *формулой* или *интегралом Кристоффеля – Шварца*. Она дает «явный вид» конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольник. Как пользоваться этой формулой? Положим сначала $A = 1$, $B = 0$. Получим многоугольник, подобный $\mathbb{P}$. Далее находим A и B такие, чтобы получить $\mathbb{P}$ (сдвиг, растяжение, поворот). Мы также можем произвольным образом (с учетом порядка) зафиксировать три параметра среди $a_1,\ldots,a_n$. Тогда остальные параметры будут не любыми, они жестко зафиксированы многоугольником. Их надо уметь вычислять.

§ 15.3. Модулярная функция

15.3.1. Теорема. *Существует полная аналитическая функция по Вейерштрассу со следующими свойствами*:

(i) *любой ее элемент аналитически продолжается вдоль любого пути в области* $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{0,1,\infty\}$,

(ii) *множеством ее значений служит открытый единичный круг,*

(iii) *она инъективна.*

Обозначим эту функцию через $w = \boldsymbol{\omega}(z)$. Она многозначная. Инъективность означает, что различным каноническим элементам (даже если они имеют один центр) соответствуют разные значения. Другими словами, существует такая однозначная аналитическая функция

$$\boldsymbol{\mu}\colon \mathbb{D} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}\backslash\{0,1,\infty\}, \quad \mathbb{D} = \{|w|<1\},$$

что $\boldsymbol{\mu}\circ\boldsymbol{\omega} = \mathrm{id}$ — тождественное отображение области $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{0,1,\infty\}$ на себя. Функция $\boldsymbol{\mu}$ называется *модулярной*.

Доказательство теоремы 15.3.1. На комплексной z-плоскости возьмем верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$. На комплексной w-плоскости возьмем единичный круг $\mathbb{D}$. На его границе выберем любые три различные точки A, B, C (направление обхода против часовой стрелки). Соединим точки A и B дугой окружности, ортогональной единичной.

Аналогичным образом проведем дуги BC и CA. Получим криволинейный треугольник с нулевыми углами — известный треугольник Лобачевского $\boldsymbol{\Delta}$.

По теореме Римана существует конформное отображение $\boldsymbol{\omega}$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ на треугольник $\boldsymbol{\Delta}$. Оно определено не единственным образом, а с точностью до трехпараметрической группы конформных (и тем самым дробно-линейных) автоморфизмов верхней полуплоскости. По теореме Каратеодори это отображение продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей $\boldsymbol{\omega}\colon \overline{\mathbb{H}} \longrightarrow \overline{\boldsymbol{\Delta}}$. Выделим единственное отображение потребовав, чтобы точки $0, 1, \infty$ переходили в точки A, B, C соответственно.

Легко видеть, что выполняются все условия принципа симметрии Римана – Шварца. Следовательно, функцию $\boldsymbol{\omega}$ можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость, причем тремя разными способами: через интервал $(0, 1)$, через интервал $(1, +\infty)$ и через интервал $(-\infty, 0)$. Образами нижней полуплоскости будут треугольники, симметричные треугольнику $\boldsymbol{\Delta}$ относительно его сторон AB, BC и CA соответственно. Они снова будут треугольниками Лобачевского, вписанными в единичный круг. Мы можем еще раз применить принцип симметрии, а именно продолжить каждый из трех полученных элементов в верхнюю полуплоскость тремя способами. В одном случае мы придем к исходному элементу, но есть и два новых элемента (для каждого из трех). Будем повторять эту процедуру до бесконечности. Получим все элементы некоторой ПАФ. Докажем, что это искомая функция. Свойства (i) и (iii) выполнены по построению.

Докажем свойство (ii). Мы уже показали, что все значения функции $\boldsymbol{\omega}$ лежат в открытом единичном круге. Осталось доказать, что они заполняют весь круг. Удобнее это сделать, используя верхнюю полуплоскость. Пусть λ — такое дробно-линейное отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость, что точки A, B, C переходят в $0, 1, \infty$ соответственно. Образом треугольника $\boldsymbol{\Delta}$ будет криволинейный треугольник Лобачевского $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}$. Пусть $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \lambda \circ \boldsymbol{\omega}$. Докажем, что значения $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ заполняют верхнюю полуплоскость. Достаточно доказать, что они заполняют полуполосу $\{0 \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant 1,\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$. На первом шаге незаполненная область есть полукруг с диаметром $[0, 1]$ длины $d_1 = 1$. Симметрично отразим треугольник $(1) = \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}$ относительно полуокружности. Получим треугольник (2), а незаполненная область будет объединением двух полукругов с диаметрами $d_2 = 1/2$. Симметрично отразим треугольник (2) относительно полуокружностей. Получим два новых треугольника, а незаполненная область будет объединением четырех полукругов, максимальный диаметр которых обозначим через d_3. Пусть $[0, x)$ — диаметр самого левого полукруга. По определению симметричных точек имеем $(3/4)(x - 1/4) = 1/16$, откуда $x = 1/3$. Итак, $d_3 = 1/3$. Продолжим этот процесс до бесконечности. На n-м шаге незаполненная область будет объединением 2^{n-1} полукругов. Их максимальный диаметр обозначим через d_n. По индукции $d_n = 1/n \to 0$. $\square$

Из построения функции $\boldsymbol{\omega}$ следует, что ее риманова поверхность (РП) как накрытие склеивается из бесконечного числа экземпляров верхней и нижней полуплоскостей. А именно: к каждому экземпляру верхней полуплоскости подклеивается три экземпляра нижней полуплоскости и наоборот. Моделью РП служит открытый единичный круг, разбитый на треугольники Лобачевского (паркет), закрашенные в шахматном порядке. Например, черные треугольники соответствуют верхним полуплоскостям, белые — нижним. Таким образом, РП как аналитическое многообразие является открытым кругом. Функция $\boldsymbol{\omega}$, поднятая на свою РП, осуществляет конформное отображение этой РП на круг.

Исследуем особые точки функции $\boldsymbol{\omega}$. Это точки $0, 1$ и ∞. Все они устроены одинаково. Рассмотрим, например, точку нуль. Будем ее обходить против часовой стрелки по окружности радиуса ε, где $0 < \varepsilon < 1$. Начнем с исходной ветви, т. е. с треугольника $(1) = ABC$. Пересекая разрез $(-\infty, 0)$, придем к треугольнику $(2) = ACB'$, симметричному треугольнику ABC относительно стороны AC. Пересекая разрез $(0, 1)$, придем к треугольнику $(3) = AB'C'$, симметричному треугольнику ACB' относительно стороны AB'. Итак, после одного обхода получим ветвь — треугольник (3). Аналогично осуществляются последующие обходы, а также обходы по часовой стрелке. Окончательно мы имеем следующий бесконечный двусторонний цикл элементов:

$$\cdots \to (-3) \to (-1) \to (1) \to (3) \to (5) \to \ldots .$$

До аналитической функции в проколотой окрестности нуля его дополняет аналогичный цикл с четными номерами. Это — логарифмическая точка ветвления. Но в эти циклы входят далеко не все элементы ПАФ $\boldsymbol{\omega}$. Например, аналогичные циклы получим с общей вершиной A', симметричной вершине A относительно стороны BC, и, более общим образом, со всеми вершинами, которые получаются из A симметриями относительно сторон паркета. Они образуют счетное всюду плотное множество на окружности. Мы можем сделать вывод, что каждой из точек $0, 1, \infty$ соответствует бесконечно много логарифмических точек ветвления.

В дальнейшем ПАФ $\boldsymbol{\omega}$ будем называть «функцией омега». Модулярная функция, обратная к функции омега, интересна, например, тем, что она непродолжима за пределы единичного круга. Действительно, эта функция имеет бесконечный некасательный предел во всех точках, получающихся из C всевозможными симметриями относительно сторон паркета, а они образуют счетное всюду плотное множество на единичной окружности.

Модулярная функция дает также интересный пример так называемой автоморфной функции, т. е. функции, инвариантной относительно некоторой дискретной группы ДЛО. Напомним, что группа всех конформных (значит, ДЛ) автоморфизмов единичного круга $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ устроена следующим образом:

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ w = c \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} : a \in \mathbb{D},\ c \in \mathbb{T} = \partial\mathbb{D} \right\}.$$

Топологически это бублик (заполненный тор) $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$. Матричная реализация этой группы следующая:

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{D}) = \mathrm{SU}_{1,1}/\mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_2 = \langle \pm I \rangle,$$

где I — единичная матрица. Это группа движений гиперболической геометрии Лобачевского в модели Клейна. Она также изоморфна группе $\mathrm{SO}^{+}_{1,2}$ — группе движений в модели на двуполостном гиперболоиде. Группа автоморфизмов модулярной функции — некоторая дискретная подгруппа группы $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. Из построения функции омега следует, что эта группа состоит из композиций четного числа симметрий относительно всевозможных сторон паркета. Хотелось бы иметь более явное описание этой группы, например, ее матричную реализацию. Это удобнее сделать в модели Пуанкаре для верхней полуплоскости, т. е. для функции $\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{-1}$.

Любой конформный автоморфизм сферы Римана есть ДЛО. Таким образом, группа $\operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ есть группа всех ДЛО. Ее матричная реализация следующая: $\operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, где

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} :\ a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 \right\}$$

есть специальная линейная группа над полем комплексных чисел.

В группе $\operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ есть интересная подгруппа автоморфизмов верхней полуплоскости $\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ (специальная линейная группа над полем вещественных чисел). В этой группе есть интересная дискретная подгруппа $\boldsymbol{\Sigma}/\mathbb{Z}_2$, где $\boldsymbol{\Sigma}$ — так называемая модулярная группа, а именно $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ — специальная линейная группа над кольцом целых чисел. Например, она является группой преобразований ориентированных базисов решетки на плоскости. Но не эта группа служит группой автоморфизмов модулярной функции, а некоторая ее подгруппа $\mathbb{M}/\mathbb{Z}_2$. В качестве задачи докажите, что

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, d \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad b, c \in 2\mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}.$$

§ 15.4. Малая теорема Пикара

15.4.1. Теорема. *Целая функция, отличная от константы, принимает все комплексные значения, кроме, быть может, одного.*

Напомним, что целой называется функция, голоморфная во всей комплексной плоскости. Примером целой функции, не принимающей одно значение, служит экспонента. Функция $w = e^z$ не принимает значение нуль.

Доказательство теоремы 15.4.1. Пусть целая функция f не принимает два комплексных значения, скажем, 0 и 1. Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Положим $w_0 = f(z_0)$. Поскольку $w_0 \neq 0, 1, \infty$, то существует круг V с центром в точке w_0, не содержащий точек $0, 1, \infty$. По теореме о монодромии многозначная аналитическая функция омега распадается в круге V на однозначные ветви. Зафиксируем любую из них $\zeta = \boldsymbol{\omega}(w),\ w \in V$. Функция f непрерывна в точке z_0. Следовательно, существует круг U с центром в точке z_0 такой, что $f(U) \subset V$. Тем самым корректно определена композиция голоморфных отображений $g(z) = \boldsymbol{\omega}(f(z)),\ z \in U$.

Итак, имеем элемент (U, g). Будем его аналитически продолжать. Пусть γ — произвольный путь на z-плоскости, имеющий начало в точке z_0. Тогда его образ $f(\gamma)$ — путь на w-плоскости, имеющий начало в точке w_0. Он не проходит через точки $0, 1, \infty$. Вдоль любого такого пути элемент $(V, \boldsymbol{\omega})$ аналитически продолжается. Следовательно, элемент (U, g) аналитически продолжается вдоль любого пути на плоскости. По теореме о монодромии он продолжается до однозначной аналитической функции во всей комплексной плоскости.

Итак, мы построили целую функцию g. Ее значения суть какие-то значения функции $\boldsymbol{\omega}$. Они лежат в единичном круге. Таким образом, функция g — целая и ограниченная. По теореме Лиувилля она константа. Поскольку функция омега инъективна, то f тоже константа. $\square$

15.4.2. Теорема. *Функция, мероморфная во всей комплексной плоскости и отличная от константы, принимает все комплексные значения, кроме, быть может, двух.*

Напомним, что функция f мероморфна в области D, если она голоморфна в этой области, кроме некоторого множества полюсов.

Приведем пример мероморфной функции, которая не принимает два комплексных значения. Достаточно применить любое (нелинейное) ДЛО к экспоненте. Например, функция $w = (e^z - 1)/(e^z + 1)$ не принимает значение -1 (поскольку $e^z \neq 0$) и значение $+1$ (поскольку $e^z \neq \infty$). Аналогично $\operatorname{tg} z \neq \pm i$.

Теоремы 15.4.1 и 15.4.2 можно объединить в одно утверждение: мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, отличная от константы, принимает все значения из $\overline{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, двух.

Доказательство теоремы 15.4.2. Пусть f — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Пусть она не принимает различные значения $a, b, c \in \mathbb{C}$. Напишем двойное (ангармоническое) отношение

$$F(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - b} : \frac{c - a}{c - b}.$$

Докажем, что функция $F(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$. Действительно, знаменатель не обращается в нуль, поскольку $f(z) \neq b$. Пусть z_0 — полюс функции f. Тогда $f(z) \to \infty$, когда $z \to z_0$. Следовательно, $F(z)$ имеет конечный предел в точке z_0, т. е. z_0 — УОТ этой функции. По умолчанию УОТ мы устраняем, доопределив функцию в этих точках по непрерывности. Итак, $F(z)$ — целая функция. Она не принимает значение 0, поскольку $f(z) \neq a$, и значение 1, поскольку $f(z) \neq c$. По теореме 15.4.1 $F(z)$ — константа. Следовательно, $f(z)$ — константа. □

15.4.3. Задача. Доказать, что функция $w = z + e^z$ принимает все комплексные значения.

Решение. Эта функция целая и не константа. Она принимает вещественные значения на вещественной оси. Следовательно, в комплексно сопряженных точках она принимает комплексно сопряженные значения. Если $w_0 \notin \mathbb{R}$ — исключительное значение, то $\overline{w}_0 \neq w_0$ — тоже исключительное значение. Это противоречит теореме 15.4.1. Исключительные значения могут быть только вещественные. На вещественной оси функция $w(x)$ строго возрастает. При этом, $\lim_{x \to \pm\infty} w(x) = \pm\infty$. По теореме о промежуточных значениях функция $w(x)$ принимает все вещественные значения. □

15.4.4. Задача. Доказать, что функция $w = ze^z$ принимает все комплексные значения.

Решение. Положим $z = e^\zeta$. Тогда $w = \exp(\zeta + e^\zeta)$. Если ζ пробегает плоскость, то величина $\zeta + e^\zeta$ также пробегает всю плоскость (см. задачу 15.4.3). Следовательно, w пробегает всю плоскость без нуля. Но значение нуль эта функция принимает при $z = 0$. □

15.4.5. Задача. Решить в целых функциях уравнение $f^3 + g^3 = 1$.

Решение. Докажем, что решения — лишь константы. Если $g \not\equiv 0$, то $(f/g)^3 + 1 = 1/g^3$. Мероморфная функция $1/g^3$ не принимает значение нуль. Следовательно, мероморфная функция $h = f/g$ не принимает три значения, это корни кубические из числа -1, а именно $-1, 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. По теореме 15.4.2 функция h константа. Следовательно, f и g тоже константы. □

§ 15.5. Нормальные семейства

15.5.1. Определение. *Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство функций, голоморфных в области $D \subset \mathbb{C}$. Семейство $\mathcal{F}$ называется нормальным, если для всякой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, что она сходится внутри D либо к голоморфной в D функции, либо к бесконечности.*

Сходимость последовательности $\{f_n\}$ внутри D к бесконечности означает, что для всякого компакта $K \subset D$ и всякого $M > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ и $z \in K$ верно неравенство $|f_n(z)| > M$.

Если семейство $\mathcal{F}$ предкомпактное, то оно нормальное. Обратное неверно. Например, последовательность констант $f_n(z) = n$ сходится к бесконечности. Приведем пример семейства, которое не является нормальным.

15.5.2. Пример. Пусть $f_n(z) = z^n,\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$. Тогда в круге $\{|z| < 1\}$ имеем $f_n \to 0$, а в области $\{|z| > 1\}$ имеем $f_n \to \infty$.

15.5.3. Теорема (вторая теорема Монтеля). *Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство функций, голоморфных в области $D \subset \mathbb{C}$. Если все функции этого семейства не принимают два различных комплексных значения, то семейство $\mathcal{F}$ нормальное.*

Доказательство. Будем считать, что данные функции не принимают значения 0 и 1. Без ограничения общности можно считать, что D является односвязной областью. Действительно, теорему достаточно доказать для круга. Покрывая компакт конечным числом кругов докажем, что для любого компакта существует своя сходящаяся подпоследовательность. Затем строим исчерпание области компактами и применяем диагональный метод Кантора. Зафиксируем последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ и произвольную точку $z_0 \in D$. Последовательность $\{f_n(z_0)\}$ имеет предельные точки в $\overline{\mathbb{C}}$. Теперь возьмем любую предельную точку α. К ней сходится некоторая подпоследовательность. Без ограничения общности считаем, что $f_n(z_0) \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Пусть $\alpha \neq 0, 1, \infty$. Тогда существует круг V с центром в точке α, не содержащий точек $0, 1, \infty$. По теореме о монодромии в этом круге многозначная аналитическая функция омега распадается на однозначные ветви. Зафиксируем любую из них. Для всех достаточно больших n имеем $f_n(z_0) \in V$. Пусть это верно для всех n. При каждом n из непрерывности функции f_n следует, что существует круг U_n с центром в точке z_0 такой, что $U_n \subset D$, и $f_n(U_n) \subset V$. Следовательно, корректно определена композиция голоморфных отображений $g_n(z) = \boldsymbol{\omega}(f_n(z)),\ z \in U_n$. Итак, мы имеем элемент (U_n, g_n). Будем его аналитически продолжать. Пусть γ — произвольный путь в D, имеющий начало в точке z_0. Тогда его образ $f_n(\gamma)$ — путь на w-плоскости, выходящий из точки $f_n(z_0)$ и не проходящий через точки $0, 1, \infty$. Вдоль такого пути элемент $(V, \boldsymbol{\omega})$ продолжается. Следовательно, элемент (U_n, g_n) продолжается вдоль любого пути в области D. Поскольку D — односвязная область, то по теореме о монодромии этот элемент продолжается до однозначной аналитической функции.

Итак, мы построили последовательность функций g_n, которые голоморфны в области D. Значения этих функций суть некоторые значения функции омега. Все они лежат в единичном круге, т. е.

$$|g_n(z)| < 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, z \in D. \tag{15.5.1}$$

Так как последовательность $\{g_n\}$ равномерно ограничена в D, то по принципу компактности она является предкомпактным семейством. Следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность. Снова считаем, что $g_n \to g$ при $n \to \infty$, где g — некоторая функция, голоморфная в области D, причем сходимость равномерна внутри D. Переходя в неравенстве (15.5.1) к пределу, получим, $|g(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in D$. Докажем, что неравенство строгое. Предположим противное. Это значит, что $|g|$ достигает максимума в D. По принципу максимума модуля функция g константа, т. е. $g(z) = c$ для всех $z \in D$. При этом $|c| = 1$. Однако $|g(z_0)| = |\boldsymbol{\omega}(\alpha)| < 1$. Пришли к противоречию. Итак, все значения функции g лежат в открытом единичном круге.

Пусть $\boldsymbol{\mu}$ — модулярная функция. Тогда $\boldsymbol{\mu} \circ g_n \to \boldsymbol{\mu} \circ g$, причем по теореме Кантора о равномерной непрерывности сходимость будет равномерной на компактах. По построению $\boldsymbol{\mu} \circ g_n = f_n$. При этом функция $f = \boldsymbol{\mu} \circ g$ голоморфна в D. Таким образом, мы выбрали искомую сходящуюся подпоследовательность $f_n \to f$.

Пусть $\alpha = 1$ и $V = \{|w - 1| < 1\}$. В этом круге многозначная аналитическая функция $\log w$ распадается на однозначные ветви. Выберем так называемую главную ветвь, для которой $\log 1 = 0$. Поскольку $f_n(z_0) \to 1$, то $f_n(z_0) \in V$ для всех достаточно больших n. Пусть это верно для всех n. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из непрерывности функции

f_n следует, что существует круг U_n с центром в точке z_0 такой, что $U_n \subset D$ и $f_n(U_n) \subset V$. Тем самым корректно определена голоморфная функция

$$h_n(z) = \frac{\log f_n(z) + 2\pi i}{4\pi i}, \quad z \in U_n.$$

Будем аналитически продолжать элемент (U_n, h_n). Пусть γ — путь в области D с началом в точке z_0. Тогда его образ $f_n(\gamma)$ — путь, начинающийся в точке $f_n(z_0)$ и не проходящий через точки 0 и ∞. Вдоль такого пути элемент $(V, \log w)$ продолжается. Следовательно, элемент (U_n, h_n) продолжается вдоль любого пути. По теореме о монодромии он продолжается до однозначной аналитической функции.

Мы построили последовательность функций h_n, голоморфных в области D. Эти функции не принимают значения 0 и 1 потому, что функции f_n не принимают значение 1. Далее, $h_n(z_0) \to 1/2$. Выше было доказано, что существует сходящаяся подпоследовательность $h_n \to h$, где h — функция, голоморфная в D. Тогда

$$f_n = \exp(4\pi i h_n) \longrightarrow f = \exp(4\pi i h).$$

Искомая сходящаяся подпоследовательность выбрана.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда функции $\varphi_n = 1 - f_n$ голоморфны в D и не принимают значения 0 и 1. Далее, $\varphi_n(z_0) \to 1$. Следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность $\varphi_n \to \varphi$. Тогда $f_n \to f$, где $f = 1 - \varphi$. Имеем $f(z_0) = 0$. Докажем, что функция f тождественно равна нулю. Предположим противное. Тогда по теореме единственности для голоморфных функций существует круг U с центром в точке z_0 такой, что $\overline{U} \subset D$ и функция f не принимает значение нуль на границе круга. По теореме Гурвица для всех достаточно больших n функции f_n имеют нули в круге U. Пришли к противоречию. Итак, мы выделили сходящуюся к нулю подпоследовательность.

Пусть $\alpha = \infty$. Тогда функции $\psi_n = 1/f_n$ голоморфны в области D и не принимают значения 0 и 1. При этом $\psi_n(z_0) \to 0$. Следовательно, существует сходящаяся к нулю подпоследовательность $\psi_n \to 0$. Это равносильно тому, что $f_n \to \infty$. Искомая сходящаяся к бесконечности подпоследовательность выбрана. □

§ 15.6. Большая теорема Пикара

15.6.1. Теорема. *В любой окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает все комплексные значения, кроме, быть может, одного.*

Пусть f — целая трансцендентная функция, т. е. не многочлен. Тем самым бесконечность — ее СОТ. Тогда для всех $w_0 \in \mathbb{C}$ (кроме, быть может, одного) уравнение $f(z) = w_0$ имеет бесконечно много решений.

Доказательство теоремы. Пусть, без ограничения общности, функция $f(z)$ голоморфна в проколотом единичном круге, и нуль — ее СОТ. Пусть она не принимает значения a и b. Через Γ обозначим кольцо $\{1/2 < |z| < 1\}$. В этом кольце определим последовательность функций $f_n(z) = f(z/2^n),\ n \in \mathbb{Z}_+$. Они не принимают значения a и b. Следовательно, $\{f_n\}$ — нормальное семейство. Тем самым, существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, что она сходится внутри Γ либо (A) к голоморфной в Γ функции F, либо (B) к бесконечности.

Рассмотрим случай (A). Зафиксируем число ρ: $1/2 < \rho < 1$. Через γ обозначим окружность $\{|z| = \rho\}$. Положим $\gamma_n = \gamma/2^n,\ n \in \mathbb{Z}_+$. Последовательность $\{f_{n_k}\}$ равномерно ограничена на γ, т. е. существует такое $M > 0$, что $\|f_{n_k}\|_\gamma \leqslant M$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Другими словами, верны оценки $\|f\|_{\gamma_{n_k}} \leqslant M$ для всех $k \in \mathbb{N}$. По следствию из принципа максимума модуля для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $|f(z)| \leqslant M$ при $1/2^{n_k} < |z| < 1/2^{n_1}$. Следовательно, $|f(z)| \leqslant M$ при $0 < |z| < 1/2^{n_1}$. Итак, функция f голоморфна и ограничена в некоторой проколотой окрестности нуля. Следовательно, нуль — устранимая особая точка функции f. Мы пришли к противоречию.

Рассмотрим случай (B). В проколотом единичном круге определим голоморфную функцию $g = 1/(f - a)$. Для нее нуль — СОТ. Положим также $g_n = 1/(f_n - a)$. Тогда $g_{n_k} \to 0$. По доказанному выше нуль — УОТ функции g. Мы снова пришли к противоречию. □

15.6.2. Задача. В качестве примера применения БТП снова рассмотрим задачу 15.4.4. Доказать, что функция $w = ze^z$ принимает все комплексные значения.

Решение. Уравнение $ze^z = 0$ имеет единственное решение $z = 0$, т. е. $w_0 = 0$ — исключительное значение для БТП. Других нет. □

15.6.3. Задача. Доказать, что уравнение $\sin z = z$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Функция $f(z) = \sin z - z$ целая трансцендентная. Через $Z(w)$ обозначим множество решений уравнения $f(z) = w$. Заметим, что $Z(w + 2\pi in) = Z(w) + 2\pi in,\ n \in \mathbb{Z}$. Если число w — исключительное значение для БТП, т. е. множество $Z(w)$ конечное, то все числа $w + 2\pi in,\ n \in \mathbb{Z}$, также будут исключительными значениями. Следовательно, исключительных значений нет. □

Глава 16

Многозначные аналитические функции

В. К. Белошапка

§ 16.1. Вводные замечания

Эта тема входит в общие курсы комплексного анализа, но, как показывает опыт, ее изучение не всегда проходит успешно, поэтому мы помещаем здесь этот пункт для повторения.

Пусть на интервале (a, b) вещественной прямой задана непрерывная (или гладкая, т. е. C^1, или же бесконечно гладкая, т. е. класса C^∞) функция $y = f(x)$, и мы задаем риторический вопрос: «Какое значение эта функция принимает в точке c, где $c > b$?» Этот вопрос можно уточнить так. Какое значение в точке c принимает продолжение f на интервал (функцией того же класса), содержащий как интервал (a, b), так и точку c? Пусть такое продолжение существует (сформулируйте соответствующее условие). При этом ясно, что таких продолжений очень много и можно продолжить f в точку c для произвольного значения $f(c)$. Если же заменить гладкие функции на вещественно аналитические (класс C^ω), т. е. функции, локально представимые сходящимися степенными рядами, и продолжение — на продолжение в качестве аналитической функции, то ситуация меняется кардинально. Если существуют два продолжения с меньшего на больший интервал, то они совпадают. Причина — *теорема единственности*. Эта теорема утверждает, что если две аналитические функции совпали на множестве с предельной точкой в области определения, то они совпадают на всей области определения. Эта теорема справедлива как для вещественно аналитических, так и для комплексно аналитических, т. е. голоморфных функций. Если функция вещественно аналитична и мы в окрестности некоторой точки написали ее разложение в сумму вещественного степенного ряда, то сам этот ряд дает продолжение нашей функции до функции, голоморфной в круге сходимости ряда. Поэтому уместно сразу говорить о продолжении голоморфных функций.

Знакомство с элементарными функциями комплексного переменного, такими как $\log(z)$ и $\sqrt[N]{z}$, дает понимание того, что функции, с которыми мы часто имеем дело в комплексном анализе, могут быть принципиально многозначными. Конечно, можно провести разрезы, после которых наши функции распадутся на однозначные ветви, которые представляют собой обычные однозначные голоморфные функции. Однако такая хирургическая операция есть акт нашего произвола по отношению к функции. Сама же функция принципиально многозначна. Причем, в силу теоремы единственности, такая многозначная функция однозначно восстанавливается по своим значениям в произвольно малой окрестности. Процедура восстановления, которая будет описана ниже, называется *аналитическое продолжение*.

Теперь зададим еще один риторический вопрос: «что такое функция?» В действительном анализе со времен революции Г. Кантора на этот вопрос принято отвечать так. Функция $y = f(x)$ — *поточечное соответствие*. Элементам множества X (область определения) ставятся в соответствие элементы множества Y (область значений). Удобство этого определения в его необъятной общности. Даже в контексте числовых функций $X \subseteq \mathbf{R}^1$, $Y = \mathbf{R}^1$ в этих рамках можно говорить о весьма разнообразных классах функций: аналитических, гладких, непрерывных, измеримых и т. д. Есть единственное ограничение. Одному элементу x из области определения X ставится в соответствие единственный элемент y множества Y. Это ограничение, роковым образом, делает его непригодным для работы даже с элементарными функциями комплексного переменного. Таким образом, для работы с многозначными функциями комплексного переменного нам требуется другая концепция функции. Неудивительно, что переход к другой концепции функции требует целого спектра новых понятий и определений. Он также связан с преодолением некоторых психологических препятствий.

§ 16.2. Аналитическое продолжение

Нам потребуется список новых понятий. Дадим определения.

(O.1) *Элемент* — пара (f, D), где D — область на комплексной плоскости, f — функция, голоморфная в D.

(O.2) *Росток функции в точке*. Фиксируем точку $a \in \mathbf{C}$. Пусть (f, U_a) — элемент, где U_a — окрестность точки a. Среди совокупности таких элементов введем отношение, которое (проверьте) является формальным отношением эквивалентности. Говорим, что $(f, U_a) \sim (g, V_a)$, если найдется окрестность $W_a \subseteq U_a \cap V_a$, на которой $f = g$. Росток, порожденный элементом (f, U_a), т. е. его класс эквивалентности, обозначим $[f]_a$. Говорим, что точка a — *центр ростка*. Вопрос, чему равен росток в точке, близкой к a, следует признать бессмысленным, но значение $[f]_a(a)$, т. е. в самой точке a, как и значения всех производных, определены корректно, и ответ не зависит от выбора представителя ростка.

Если (f, D) — элемент, то имеется соответствие $a \in D \to [f]_a$. И наоборот, если $[f]_a$ — росток, то мы можем рассмотреть элемент (f, U_a), который является его представителем. Использование термина «росток» удобно тем, что позволяет уйти от уточнения области определения.

Когда мы говорим о ростках голоморфных функций, то имеется возможность выбора *канонического представителя* ростка. А именно: мы можем взять произвольного представителя (f, U_a), разложить его в степенной ряд в центре ростка $f(z) = \sum_0^\infty c_n\,(z-a)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ и объявить каноническим представителем пару $(\sum_0^\infty c_n\,(z-a)^n, \{|z-a| < R\})$, т. е. сумму ряда в круге его сходимости.

$(O.3)$ *Непосредственное продолжение элемента*. Пусть (f_1, D_1) и (f_2, D_2) — два элемента, для которых $D_1 \cap D_2$ не пусто и связно, причем выполнено равенство $f_1 = f_2$ на $D_1 \cap D_2$. Тогда мы говорим, что (f_2, D_2) есть непосредственное продолжение (f_1, D_1).

$(O.4)$ *Продолжение элемента по цепочке*. Пусть

$$((f_0, D_0), (f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n))$$

есть последовательность элементов, причем (f_j, D_j) — непосредственное продолжение $(f_{j-1}, D_{j-1}),\ j = 1, \ldots, n$. Тогда мы говорим, что последний элемент (f_n, D_n) является продолжением начального (f_0, D_0) по данной цепочке.

Ясно, что в таком случае (f_0, D_0) является продолжением (f_n, D_n) по цепочке, пронумерованной в обратном порядке. Отметим также, что в случае, если имеются непустые пересечения несоседних областей, то совпадение соответствующих функций на них не предполагается.

$(O.5)$ *Продолжение ростка вдоль кривой*. Пусть на $\mathbf{C}$ имеется кривая γ с параметризацией $(z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ z(0) = a,\ z(1) = b)$. Пусть в каждой точке кривой задан росток $[f]_{z(t)}$, причем это семейство ростков, согласованных между собой следующим естественным способом. Возьмем произвольную точку кривой $z(t_0)$, пусть $(f_0, U_{z(t_0)})$ — представитель ростка $[f]_{z(t_0)}$. При значениях t из малой окрестности $V = \{|t - t_0| < \varepsilon\}$ точки $z(t)$ кривой γ содержатся в $U_{z(t_0)}$. Функция f_0, определенная в окрестности $U_{z(t_0)}$, задает в каждой точке этой окрестности росток $[f_0]_{z(t)}$. Условие согласования заключается в том, что $[f]_{z(t)} = [f_0]_{z(t)}$ при $t \in V$.

Между продолжением по цепочке и продолжением вдоль кривой имеется простая связь. Пусть имеется цепочка элементов

$$((f_0, D_0), (f_1, D_1), \dots, (f_n, D_n)),$$

осуществляющая продолжение (f_0, D_0) в (f_n, D_n). Пусть γ — кривая, которая начинается в точке $z(0) \in D_0$ и которая, последовательно проходя области $D_0, D_1, \dots, D_n$, заканчивается в точке $z(1) \in D_n$. Тогда мы можем определить согласованное в смысле $(O.5)$ семейство ростков $\{[g]_{z(t)}\}$ вдоль этой кривой следующим образом. Пока текущая точка кривой $z(t)$ находится в пределах D_0, полагаем, что $[g]_{z(t)}$ — ростки, порожденные функцией f_0. Далее, попадая в D_1, пользуемся для определения ростков в текущей точке функцией f_1, и так далее до конца кривой. Противоречий при прохождении последовательных пересечений не возникает в силу условия согласованности для цепочки. И наоборот. Если у нас имеется семейство $\{[f]_{z(t)}\}$, обеспечивающее продолжение ростка вдоль кривой, ему можно сопоставить цепочку. Для этого сопоставим этому семейству ростков семейство его канонических представителей. При этом нетрудно заметить, что в силу компактности кривой на радиусы кругов сходимости для всех канонических элементов имеется равномерная положительная оценка снизу $\varepsilon > 0$. Поэтому, двигаясь по кривой с шагом $\varepsilon/3$, мы получим цепочку канонических элементов с условием последовательного согласования, которая осуществляет продолжение начального элемента в последний.

Продемонстрируем введенные определения на примере $\log(z)$. Как известно, эта многозначная функция имеет вид $\log(z) = \log|z| + i \arg z$. В любом открытом угле D с вершиной в нуле, чей раствор не превосходит 2π, можно определить однозначный и непрерывный аргумент. Если под аргументом понимать такую однозначную ветвь, то логарифм становится однозначной голоморфной функцией $f(z)$ (докажите), которая обращает экспоненту $e^{f(z)} = z$ (однозначная ветвь логарифма). Пары вида (угол, однозначная ветвь логарифма) и есть элементы, представляющие нашу многозначную функцию.

Пусть теперь D_0 — угол, содержащий точку $z = 1$, функция f_0 — однозначная ветвь логарифма в D_0. Угол D_1 получен из D_0 поворотом в положительном направлении, причем так, что их пересечение непусто. Тогда, выбирая однозначную ветвь аргумента в D_1, мы можем сделать так, что на пересечении $D_1 \cap D_0$ его значения совпадут с теми, что были выбраны для области D_0. В результате мы получим f_1 — голоморфную ветвь логарифма в D_1, которая будет совпадать с

f_0 на пересечении углов. В итоге мы получаем, что элемент (D_1, f_1) есть непосредственное продолжение (D_0, f_0). Повторяя это построение многократно, мы получим цепочку элементов и продолжение по цепочке. Исходный угол может, таким образом, многократно оборачиваться вокруг нуля. Каждый такой оборот дает приращение аргумента, равное 2π. т. е. возвращаясь в исходную точку $z = 1$, мы не возвращаемся к исходному элементу. Элемент (D_0, f_0) определяет росток логарифма в точке $z = 1$. Если при определении ветви аргумента в D_0 взять ту ветвь, которая равна нулю на положительных числах, то канонический элемент, соответствующий этому ростку, это пара:

$$\Delta = \{|z| < 1\}, \quad f(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{3} \cdots .$$

Если же γ — кривая с началом в точке $z = 1$ и не проходящая через $z = 0$ и $[f]_1$ — росток логарифма в точке $z = 1$, то нетрудно построить последовательность элементов, которая будет являться цепочкой, продолжающей элемент логарифма из начальной точки кривой в конечную. Причем такой, которая будет соответствовать кривой γ в том смысле, что кривая будет последовательно проходить пронумерованные углы. А это, как мы видели выше, определяет продолжение ростка вдоль кривой. Почему нельзя продолжать по кривым, проходящим через нуль? Потому что нет ростков и, соответственно, элементов, представляющих логарифм в окрестности нуля (докажите).

§ 16.3. Основные теоремы, ветви и особые точки

Теперь мы сформулируем и докажем два базовых, по отношению к аналитическому продолжению, утверждения. Первое — про то, что продолжение не зависит от семейства, по которому мы продолжаем. Важен только начальный росток и кривая. Второе — про то, что продолжение в некотором смысле не зависит от кривой.

16.3.1. Предложение. *Пусть $\{[f]_{z(t)}\}$ и $\{[g]_{z(t)}\}$ — два семейства, осуществляющих продолжение одного и того же стартового ростка $[f]_{z(0)} = [g]_{z(0)}$ из точки $a = z(0)$ в точку $b = z(1)$ вдоль одной и той же кривой γ. Тогда результаты продолжения $[f]_b$ и $[g]_b$ совпадают.*

Доказательство. Смысл доказательства прост. Двигаясь по кривой ищем ближайшую точку, где нет совпадения текущих ростков. В этой точке получаем противоречие с теоремой единственности. Рассмотрим множество $E = \{t \in [0,1] \colon [f]_{z(t)} = [g]_{z(t)}\}$. Это множество не пусто, так как $0 \in E$. Это множество открыто в силу условия согласования ростков вдоль кривой. Дополнение к E открыто в силу теоремы единственности. Поэтому $E = [0, 1]$. $\square$

Применительно к нашему примеру с логарифмом это можно понимать так. Если у нас есть кривая в плоскости без нуля и росток логарифма в начальной точке, тогда то продолжение, которое мы строим с помощью цепочки углов, — единственное и другого нет.

16.3.2. Предложение. *Пусть γ_0 и γ_1 — две кривые на плоскости с началом в точке a и концом в точке b. Пусть некоторый росток $[f]_a$ в точке a можно продолжить в точку b как по γ_0 (результат — $[f]_b^0$), так и по γ_1 (результат — $[f]_b^1$). Пусть также (это главное условие) эти кривые гомотопны в классе кривых, по которым продолжение этого ростка из a в b возможно. Тогда результаты продолжения совпадут, т. е. $[f]_b^1 = [f]_b^0$.*

Доказательство. Пусть $z = z(t, \tau)$ — непрерывная на квадрате $[0,1] \times [0,1]$ комплекснозначная функция, которая гомотопирует γ_0 в γ_1, т. е. $z(t,0)$ — параметризация γ_0, а $z(t,1)$ — параметризация γ_1. В процессе гомотопии мы следим за дискретным параметром «да/нет» (совпали ростки в точке b или не совпали). Для доказательства нашего утверждения, тем самым, достаточно убедиться, что этот параметр не изменится в малой окрестности точки $\tau' \in [0,1]$. Рассмотрим продолжение начального ростка $[f]_a$ вдоль кривой $z(t,\tau')$ (подразумевается, что τ' фиксировано) в росток $[f]_b$. Перейдем, как это было показано выше, от продолжения по кривой к продолжению по упорядоченной цепочке канонических элементов $(D_1, F_1), \ldots, (D_n, F_n)$. Если параметр τ достаточно близок к τ', то кривая $z(t,\tau)$ последовательно проходит цепочку выбранных кругов. Это порождает новое продолжение $[f]_a$ в $[f]_b$ по кривой $z(t,\tau)$. По предыдущему предложению это продолжение совпадает с тем, которое исходно имеется по условию теоремы. □

(O.6) *Полная аналитическая функция*, порожденная ростком $[f]_a$. Это просто совокупность всех ростков, полученных из $[f]_a$ продолжением по всем тем путям, по которым продолжение возможно. Обозначаем — ПАФ($[f]_a$).

Отметим, что, сопоставляя ростку $[f]_\alpha$ полной аналитической функции его производную $[f']_\alpha$ и надлежащую первообразную $[F]_\alpha$, $F' = f$, мы получаем еще две ПАФ — f' и F, которые продолжаются по тем же путям с сохранением свойств «быть производной» и «быть первообразной» по отношению к продолжениям ростков f.

16.3.3. Теорема (Пуанкаре – Вольтерра)**.** *Совокупность ростков произвольной* ПАФ($[f]_a$) *в произвольной точке b плоскости не более чем счетна.*

Доказательство. Продолжение из a в b по кривой можно заменить на продолжение по цепочке кругов. Без потери общности произвольную цепочку кругов можно заменить на цепочку кругов с центрами в рациональных точках (т. е. рациональны обе координаты) и рационального радиуса. Совокупность всех таких кругов счетна. $\square$

(O.7) *Ветвь* ПАФ в области D, порожденная ростком $[f]_a$ или *функция, аналитическая в области* D. Пусть имеется область D, точка $a \in D$ и росток $[f]_a$, который можно продолжать по любым путям в D. Ветвь ПАФ$([f]_a)$ в области D, порожденная ростком $[f]_a$, — совокупность тех ростков, которые получены из $[f]_a$ продолжениями по путям, содержащимся в D. При этом мы также говорим, что такая ветвь — функция, аналитическая в D.

Иногда к слову аналитическая прибавляют прилагательное «многозначная». Отметим, что наш логарифм $\log(z)$ — функция, аналитическая в $\mathbf{C}\setminus 0$. В качестве стартового ростка можно взять любой росток логарифма в любой точке, отличной от нуля. При этом полученная ветвь логарифма совпадает с полной аналитической функцией, порожденной любым ростком. Это и есть та многозначная аналитическая функция, которую мы называем логарифмом и обозначаем через $\log(z)$.

(O.8) Число значений функции, аналитической в области, m-значная функция, аналитическая в области. Пусть m — полное число различных ростков функции, аналитической в некоторой области D в точке $a \in D$. Все эти ростки можно продолжить в любую другую точку области, и из предложения 16.3.1 следует, что их число при этом не изменится. Назовем эту величину, которая не зависит от точки, числом значений, а функцию при этом будем называть m-значной. Величина m может принимать значения от 1 до ∞.

Так, $\log(z)$ есть ∞-значная функция, а $\sqrt{z}$ — 2-значная. Производная и первообразная функции, аналитической в области, — функции, аналитические в той же области. При этом число значений может меняться. Пример: $(\log(z))' = 1/z$.

Из предложения 16.3.2 вытекает такой факт.

16.3.4. Следствие. *Пусть D — односвязная область и F — ветвь* ПАФ *в D. Тогда F — однозначная и, тем самым, голоморфная функция.*

Таким образом, если сделать разрез, соединяющий нуль и бесконечность, то корень и логарифм в полученной области распадутся на однозначные голоморфные ветви.

Это следствие называется *теоремой о монодромии*, но иногда теоремой о монодромии называется базовое предложение 16.3.1.

($O.9$) *Изолированная особая точка*. Пусть область D — проколотая окрестность некоторой точки a. Пусть F — m-значная функция, аналитическая в области D. Тогда говорим, что a — изолированная особая точка F (ветви), а также, что a — точка ветвления порядка m. При этом если $m = \infty$, мы говорим, что a — логарифмическая особая точка, а если $m = 1$ — что a есть точка однозначного характера. В последнем случае F — голоморфная в D функция для которой a — изолированная особая точка в смысле прежнего определения (устранимая — полюс — существенно особая). Подчеркнем, что в этом определении точка привязана не к полной аналитической функции, а к ее ветви в проколотой окрестности. Можно, допуская вольность речи, говорить об изолированной особой точке соответствующей ПАФ, но при этом не следует забывать, что в развернутой форме это означает следующее. Точка a — изолированная особая точка для некоторой ветви данной ПАФ.

Поскольку мы знаем, что такое функция, голоморфная на сфере Римана, то во всех наших определениях и утверждениях, относящихся к аналитическому продолжению, мы можем считать, что все наши объекты (элементы, ростки и т.п.) расположены не на конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$, а на расширенной $\bar{\mathbf{C}}$, т. е. на сфере Римана.

Так, логарифм и корень — функции, аналитические на $\bar{\mathbf{C}}\backslash\{0, \infty\}$, имеющие две изолированные особые точки.

Пример логарифма показывает, что тип особой точки первообразной может не совпадать с типом точки для самой функции. У функции $1/z$ нуль имеет однозначный характер (полюс), бесконечность — тоже (устранимая), а у логарифма — бесконечный порядок ветвления как в нуле, так и в бесконечности.

16.3.5. Задача. Для понимания этой тонкости опишите все особые точки функции $\sqrt{1-\sqrt{z}}$ на сфере.

Более того, так же, без каких-либо изменений, мы с нашей техникой можем переехать на произвольное одномерное комплексное многообразие (сфера Римана — частный случай).

Вот поучительный пример. Функция $f(z) = z$ на комплексном торе $\mathbf{C}/ < \omega_1, \omega_2 >$ — факторе комплексной плоскости по решетке, порожденной (ω_1, ω_2). Это ∞-значная аналитическая функция, не имеющая на торе особых точек. Тор не односвязен, поэтому противоречий с теоремой о монодромии нет.

Базовыми для техники аналитического продолжения, описанной выше, являются предложения 16.3.1 и 16.3.2. Эти предложения, в свою очередь, основаны на теореме единственности. Теорема единственности для голоморфных функций одного переменного имеет специфическую формулировку. Для доказательства предложений 16.3.1 и 16.3.2 достаточно слабой версии. А именно: две функции, определенные в области, тождественно равны, если они равны на непустом открытом подмножестве этой области. Такая формулировка имеет место, например, для

— голоморфных функций нескольких переменных,

— гармонических функций,

— вещественных частей голоморфных функций нескольких переменных (т. е. плюригармонических функций).

Каждый раз, когда мы имеем дело с классом функций, для которого имеет место такая формулировка теоремы единственности, мы можем использовать нашу процедуру аналитического продолжения и расширить этот класс до многозначных функций. Так, без дополнительных изменений, мы можем говорить о многозначных аналитических функциях нескольких комплексных переменных, о многозначных гармонических и плюригармонических функциях. Очень простой пример ∞-значной гармонической функции на сфере без нуля и бесконечности — функция $u(x, y) = \arg(x + iy)$.

§ 16.4. Риманова поверхность

Полная аналитическая функция в том виде, как мы ее определили выше, — довольно аморфный объект: просто множество ростков. Концепция римановой поверхности полной аналитической функции — способ привнести в эту картину геометрию. Риманова поверхность — некий геометрический объект, комплексное многообразие, которое следует представлять «висящим» над комплексной сферой (или каким-либо другим исходным комплексным многообразием). При этом наша полная аналитическая функция некоторым естественным образом «поднимается» на свою риманову поверхность, становясь там однозначной голоморфной функцией.

Риманова поверхность логарифма строится с помощью бумаги, ножниц и клея. Возьмем бесконечную стопку комплексных плоскостей, пронумерованную целыми числами. На каждой из них сделаем разрез по положительной полуоси (сфера с разрезом от нуля до бесконечности) и склеим из этой стопки бесконечную винтовую лестницу. Верхний берег разреза плоскости с номером ноль подклеим к нижнему берегу разреза плоскости с номером один и так далее в обе стороны. То, что получилось, есть просто график функции $\arg(z)$. Над нулем (и бесконечностью) не висит ничего, а у любой конечной точки исходной комплексной плоскости, отличной от нуля, есть круговая окрестность, над которой располагается бесконечная серия непересекающихся областей на поверхности, каждая из которых гомеоморфна исходному кругу. Аргумент, а вместе с ним и логарифм, очевидным образом поднимаются на эту винтовую лестницу. Данная конструкция сразу получает статус топологического пространства. Базис топологии — выше описанные прообразы кругов. Дополнительно мы имеем глобально определенную непрерывную функцию — проекцию на плоскость, которая является локальным гомеоморфизмом. Наличие проекции тут же позволяет ввести на поверхности структуру одномерного комплексного многообразия. Атлас (локальные координаты) — та же проекция, определенная на связных компонентах прообраза круга на плоскости без нуля. Функции перехода — тождественные отображения, которые, очевидно, голоморфны вместе со своим обратным (биголоморфны). Пересаженный на поверхность логарифм, очевидно, оказывается однозначной функцией, голоморфной на этом комплексном многообразии (т. е. голоморфной функцией локальных координат).

Если бы мы строили риманову поверхность не для логарифма, а для корня, например, квадратного, то нам хватило бы двух экземпляров разрезанной плоскости, с номерами ноль и один. Мы без труда подклеим верхний берег нулевой плоскости к нижнему — первой. Но после этого, чтобы правильно отразить процедуру аналитического продолжения корня, надо склеить верхний берег первого экземпляра с нижним — нулевого. В трехмерном пространстве это без самопересечения невозможно. Но с этой задачей легко справится всякий постигший тайну четвертого измерения. Сначала надо это сделать в $\mathbf{R}^3$ с самопересечением (на положительной полуоси), а затем слегка приподнять одну склейку над другой по четвертому измерению. Тем же образом получаем структуру комплексного многообразия, глобальную проекцию и пересаживаем корень на поверхность как голоморфную функцию.

Функции, даже элементарные, могут быть весьма сложными, и рассчитывать на бумагу и ножницы в общем случае не приходится. Однако после наших упражнений возникает вопрос. А почему бы не взять в качестве римановой поверхности график нашей многозначной функции. Для логарифма и корня это годится. Но проблема в том, что разные ростки нашей функции могут принимать в какой-либо точке одно и то же значение. Например, все ростки многозначной функции $f(z) = (z-1)\log(z)$ в точке $z = 1$ равны нулю. И график этой функции $\Gamma_f = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \colon w = (z-1)\log(z)\}$ в окрестности точки $(1, 0)$ не имеет структуры комплексного многообразия. Поэтому мы вынуждены для построения римановой поверхности произвольной аналитической функции прибегнуть к более сложной конструкции.

Итак, у нас имеется $F = \{[f]_z\}$, некоторая ПАФ. Для определенности — на комплексной плоскости. Если на сфере или же на многообразии, то это ничего не меняет. Из чего мы можем построить риманову поверхность $X = X(F)$? Только из F. При этом эта процедура, вроде бы, не дает нам новой информации о функции. Однако эта конструкция позволяет привлечь геометрическую интуицию. А главное, она устраняет сомнения и успокаивает нашу математическую совесть. На вопрос: «А для любой ли полной аналитической функции существует риманова поверхность?» — мы сможем отвечать: «Да, любой».

Переходим к описанию конструкции $X(F)$ *римановой поверхности полной аналитической функции* F. Как множество это совокупность пар (точка, росток в точке): $X = \{(z, [f]_z)\colon [f]_z \in F\}$. Сразу можем определить проекцию $\pi\colon X \to \mathbf{C}$, $\pi((z, [f]_z)) = z$. Далее — базис топологии. Пусть $A \in X$, где $A = (a, [f]_a)$ и (V_a, φ) — элемент, являющийся представителем $[f]_a$, где V_a — окрестность точки a. В каждой точке z этой окрестности голоморфная функция φ задает росток $[\varphi]_z$. Базисную окрестность точки A зададим как $W_A = \{(z, [\varphi]_z)\colon z \in V_a\}$. После этого X становится топологическим пространством, а π — глобально определенной непрерывной функцией, являющейся локальным гомеоморфизмом. Эта система окрестностей, как в примере с логарифмом, позволяет ввести на X структуру комплексного многообразия. Действительно, $\pi\colon W_A \to V_a$ — гомеоморфизм, который задает атлас, при этом функции перехода — тождественные отображения. Поднимаем F на X. Положим $\widetilde{F}(x) = \widetilde{F}((z, [f]_z)) = ([f]_z)(z)$, т.е. значение в точке $x = (z, [f]_z) \in X$ — значение ростка в центре ростка. Голоморфность на X есть голоморфность в локальных координатах, а это у нас тавтологически выполнено, как и однозначность. В завершение этого построения можно добавить, что $X(F)$ — связное многообразие. Действительно, любой росток $[f]_z \in F$ является продолжением стартового ростка по некоторой кривой γ. Поэтому, поднимая γ на X с сохранением проекции, мы получим кривую $\widetilde{\gamma}$, соединяющую $x = (z, [f]_z)$ со стартовой точкой $A = (a, [f]_a)$.

Пусть у нас имеется m-значная функция f, аналитическая в некоторой области D. Если, начиная с некоторого стартового ростка $[f]_a$ в точке a области D, мы повторим построение римановой поверхности, но при продолжениях ограничимся продолжениями только по путям, не выходящим за пределы этой области, мы получим область $\widetilde{X}$ на римановой поверхности $X(F)$ полной аналитической функции $F =$ПАФ$([f]_a)$, которую естественно назвать *римановой поверхностью ветви* f. Любая точка $a \in \widetilde{X}$ имеет окрестность V_a, прообраз которой при проектировании $\pi^{-1}(V_a)$ — дискретный набор из m открытых подмножеств $\widetilde{X}$, гомеоморфных V_a. В таком случае говорят, что $\widetilde{X}$ есть m-листное накрытие над D.

Отметим связь наших построений с *теорией пучков*. Если для фиксированной точки z рассмотреть совокупность ростков голоморфных функций в этой точке, то эта совокупность, по отношению к операциям сложения и умножения, представляет собой коммутативное кольцо, которое обычно обозначается $\mathcal{O}_z$ (локальное кольцо). Ясно что эти кольца, центрированные по отношению к разным точкам, изоморфны. Если D — область на плоскости, то, вводя на $\mathcal{O}_z \times D$ топологию так, как мы это сделали при построении римановой поверхности, мы получим некое топологическое пространство, которое называется *пучком ростков* голоморфных функций в D и которое обозначается $\mathcal{O}_D$. Так же, как и в конструкции римановой поверхности, мы получаем непрерывную функцию π, которая локально гомеоморфно отображает $\mathcal{O}_D$ на D. В этой терминологии прообраз точки $\pi^{-1}(z)$ — *стебель* пучка, элемент голоморфной функции с областью определения $\Omega \subseteq D$ — *сечение* пучка над Ω и т. д.

Можно аналогично рассмотреть пучок ростков голоморфных функций нескольких переменных, пучок полей мероморфных функций, а также голоморфные и мероморфные пучки на произвольном комплексном многообразии.

§ 16.5. Многозначные элементарные функции

Причин появления среди элементарных функций многозначных, на первый взгляд, две: корень и логарифм. Однако, поскольку корень выражается через логарифм, то логарифм есть, по существу, единственная причина. Пусть имеется некоторое конкретное выражение, построенное как суперпозиция простых элементарных функций. Как погрузить это выражение в контекст аналитического продолжения? Если в некоторой точке $z = a$ и для некоторого выбора значений участвующих в построении суперпозиции многозначных функций наше выражение определено, то мы получаем в этой точке некоторый голоморфный росток. С нашим выражением естественно связать совокупность всех ростков, полученных таким образом. Аналитическое продолжение любого такого ростка — ростки из нашей совокупности, т. е. также полученные из нашего выражения. Каждый из них определяет некоторую полную аналитическую функцию. Нетрудно увидеть, что отношение «росток $[f]_b$ есть продолжение ростка $[f]_a$ по некоторой кривой» — формальная эквивалентность. Тем самым наша совокупность ростков распадается на некоторую не более чем счетную совокупность полных аналитических функций, т. е. аналитическое выражение не обязано, вообще говоря, задавать одну полную аналитическую функцию, оно может распадаться на несколько таких функций. Вот пример.

16.5.1. Пример. Функция $\sqrt{z}+\sqrt{z}$ является формально 4-значной, в любой точке отличной от нуля каждое слагаемое независимо принимает два значения. Однако если знаки согласованы, то это $2\sqrt{z}$, а если в противофазе, то тождественный нуль, т. е. формула задает две полных аналитических функции: двузначную и однозначную.

Рассмотрим вопрос о логарифме мероморфной функции в общем виде. Пусть $w = f(z)$ — функция, мероморфная в области D, отличная от тождественного нуля. Пусть a — точка области, которая не является ни нулем, ни полюсом f. На плоскости переменной w точку $f(a)$ можно поместить в некоторый угол Ω, в котором есть однозначная ветвь $\log(w)$. В малой окрестности V_a точки a функция f принимает значения из Ω. Тем самым в V_a мы получаем элемент $\log(f(z))$ и росток $[\log(f(z))]_a$. Если кривая γ с началом в точке a не проходит через нули и полюса f, то, выбирая подходящие углы и ветви логарифма, мы получим цепочку дающую продолжение вдоль γ, т. е. исходный элемент продолжается по любому пути в дополнении к дискретному множеству σ нулей и полюсов f. Таким образом, это продолжение является функцией, аналитической в $D\backslash\sigma$, а каждая точка σ — изолированная особая точка ветви. Осталось определить порядок ветвления. Пусть $b \in \sigma$, выберем проколотую окрестность b, которая не содержит точек σ. Пусть c — точка этой проколотой окрестности. Возьмем угол на плоскости w с центром в нуле, содержащий точку $f(c)$. Этим мы задали элемент $\log(f(z))$. Вопрос о характере ветвления в точке b есть вопрос о приращении $\arg f(z)$ при обходе по замкнутой кривой, один раз обходящей a в положительном направлении. Ответ хорошо известен: $\operatorname{Var}\arg f(z) = 2\pi \operatorname{ord}_a f$, где $\operatorname{ord}_a f$ — порядок f в точке a (кратность нуля или минус кратность полюса). После чего становится очевидным, что a — логарифмическая точка ветвления.

16.5.2. Задача. (a) Чему равен порядок ветвления $\sqrt[n]{f}$ в точке a, если $\operatorname{ord}_a f = m$? (b) Опишите все особые точки функций на сфере:

$$\sqrt{1+\log(z)}, \quad \log(1+\sqrt{z}), \quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{z}}}, \quad \sqrt{1+e^z}.$$

§ 16.6. Ряды Пюизо и замыкание римановой поверхности в точке ветвления

Пусть у нас имеется m-значная ($m < \infty$) функция $f(z)$, аналитическая в непустом кольце $\{r < |z-a| < R\}$. В частности, если $r = 0$, то это проколотая окрестность и a — изолированная особая точка, а именно — точка ветвления порядка m. Рассмотрим следующее отображение: $z = a + \zeta^m$. Это отображение плоскости ζ на плоскость z является m-листным. Обратное к нему отображение $\zeta = \sqrt[m]{z-a}$ оказывается m-значным. Нашему кольцу соответствует кольцо $\{\sqrt[m]{r} < |\zeta| < \sqrt[m]{R}\}$. Любой элемент функции f в первом кольце становится после замены $z = a + \zeta^m$ элементом некоторой функции g, аналитической во втором кольце. Возьмем в первом кольце на плоскости z некоторую стартовую точку b и некоторый элемент $F(z)$, представляющий f в окрестности b. Функция $G(\zeta) = F(a + \zeta^m)$ голоморфна в окрестности точки $B = a + b^m$. Продолжим G по окружности C с центром в нуле, проходящей через точку B. У отображения $z = a + \zeta^m$ есть простой геометрический смысл. Сектора переходят в сектора, а их раствор увеличивается в m раз. Если сектор не слишком велик, то отображение пересечения кольца и сектора конформно. Ясно, что если точка ζ проходит один раз по окружности C, то соответствующая ей точка $z = a + \zeta^m$ сделает m оборотов по окружности в своей плоскости. Это означает, что при продолжении ростка функции g по C мы вернемся к исходному элементу. т. е. функция g однозначна и голоморфна в своем кольце. Любую функцию, голоморфную в кольце, можно представить там в виде суммы ряда Лорана $g(z) = \sum, c_n\zeta^n$, что дает представление исходной функции в виде $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^{n/m}$. Такие ряды называются *рядами Пюизо* (*Puiseux*). Если в кольце сделать разрез и выбрать однозначную ветвь корня, то это ряд голоморфных функций, сходящийся равномерно на компактных подмножествах. Как известно, такие ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Итак, имеет место следующее утверждение.

16.6.1. Предложение. *Пусть $m < \infty$. Следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *a — точка ветвления порядка m функции f,*

(b) *функция f представима в виде $f(z) = g(\sqrt[m]{z-a})$, где $g(\zeta)$ голоморфна в проколотой окрестности нуля,*

(c) *функция f представима в виде суммы сходящегося в этой окрестности ряда Пюизо $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^{n/m}$.*

Теперь становится ясно, что $\widetilde{X}(f)$, риманова поверхность m-значной в проколотой окрестности функции f, есть область на римановой поверхности корня. Действительно, картой, задающей координаты на всей римановой поверхности функции f, является проколотая окрестность нуля на плоскости ζ. На римановой поверхности f нет точек, соответствующих $\zeta = 0$. Добавим к римановой поверхности новую точку A, соответствующую $\zeta = 0$, продолжим проекцию в A по непрерывности, объявляя $\pi(A) = a$. В итоге мы получим новое комплексное многообразие $\bar{X} = \widetilde{X}(f) \cup \{A\}$, которое мы назовем *замыканием* $\widetilde{X}(f)$ в окрестности точки a.

Поясним описанную конструкцию еще раз. Рассмотрим график функции $w = \sqrt[m]{z}$. Если поменять точку зрения, то это график $z = w^m$. Как всякий график, он гомеоморфен области определения функции, в данном случае комплексной плоскости. Если рассмотреть часть графика над $|w| < R$, то она гомеоморфна этому кругу. Когда мы смотрим на ту же область на графике со стороны плоскости z, вне нуля мы получаем m-листное накрытие, с особенностью над нулем (у нуля не m прообразов, а один). Переход к замыканию в этой ситуации — возвращение на график точки $(0, 0)$ и переход к параметризации графика переменной w.

Используя наше утверждение о почленном интегрировании и дифференцировании рядов Пюизо, получаем такой результат.

16.6.2. Предложение. *Пусть a — точка ветвления порядка $m < \infty$ функции f, а f' и F — ее производная и некоторая первообразная. Тогда*

(1) *для f' точка a — также точка ветвления порядка m,*

(2) *для F точка a — точка ветвления порядка m в том и только том случае, если разложение f в ряд Пюизо не содержит степени с показателем (-1), в противном случае — точка бесконечного порядка.*

§ 16.7. Вспомогательный материал

Для дальнейшего нам понадобится некоторый материал из анализа и алгебры. Имеется много версий *теоремы о неявной функции*. Это один из китов, на которых стоит математика. Теорема о неявной функции (отображении) — классическая теорема, которая присутствует во всех курсах анализа. Однако для наших целей нам нужна аналитическая версия этой теоремы, а реальность такова, что для того, чтобы сформулировать и доказать минимальный вариант этой теоремы, необходимо ввести в рассмотрение голоморфные функции нескольких (хотя бы двух) переменных. Поскольку их нет в программе, то эта теорема обычно выпадает из основных курсов. Функции нескольких комплексных переменных мы рассмотрим позже, а пока нам достаточно следующего. Функцию нескольких комплексных переменных, определенную в некоторой области, мы будем называть голоморфной, если она в каждой точке имеет полный дифференциал и голоморфна по каждой комплексной переменной. Такая функция, как мы это увидим ниже, обязана принадлежать классу C^1 по совокупности вещественных переменных. Отображение называем голоморфным, если голоморфна каждая его координата. Теорему о неявной можно доказывать средствами комплексного анализа, а именно с помощью теоремы о вычетах. Но мы здесь приведем рассуждение, которое сводит комплексную теорему к стандартной вещественной. Минимальный вариант этой теоремы — условие разрешимости одного скалярного уравнения $F(z, w) = 0$ относительно переменной w. Однако с вещественной точки зрения здесь речь идет о решении системы из двух уравнений

$$P(x, y, u, v) = Q(x, y, u, v) = 0,\ F = P + iQ,\ z = x + iy,\ w = u + iv$$

относительно пары переменных (u, v). Мы не сильно сэкономим, если ограничимся простым скалярным вариантом, поэтому будем формулировать теорему как теорему о неявном отображении. Итак,

$$Z = X + i\,Y \in \mathbf{C}^n, \quad W = U + i\,V \in \mathbf{C}^m,$$

$$F\colon \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m, \quad F(Z, W) = P(X, Y, U, V) + iQ(X, Y, U, V).$$

Основной результат состоит в следующем.

16.7.1. Теорема (о неявном отображении)**.** *Пусть отображение F определено и голоморфно в окрестности точки $(a, b) \in \mathbf{C}^{n+m}$, причем $F(a, b) = 0$ и $\det(F'_W) \neq 0$, тогда в окрестности a существует голоморфное решение $W = f(Z)$ системы уравнений $F(Z, W) = 0$, причем при условии $f(a) = b$ это решение единственно.*

Доказательство. Наше доказательство состоит из двух частей. Первая часть: мы интерпретируем условие на комплексный якобиан $\det(P'_W) \neq 0$ с помощью условия на вещественный якобиан и на основе вещественной теоремы получаем C^1-решение. Вторая часть: мы показываем, что дифференциал этого решения комплексно линеен, значит, решение голоморфно.

Первый вопрос — линейная алгебра. Пусть $C = F'_W$ — комплексная матрица размера $m \times m$, ее вещественная и мнимая части есть $A = P'_W$ и $B = Q'_W$ — вещественные матрицы того же размера. Дифференциал отображения F по W имеет вид

$$CdW = (A + i\,B)(dU + i\,dV) = (A\,dU - B\,dV) + i\,(B\,dU + A\,dV).$$

Матрица дифференциала овеществления нашего отображения (P, Q) по переменным (U, V) имеет, таким образом, вид

$$M = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Это вещественная матрица M размера $2m\times 2m$ имеет блочную структуру. Осуществляя блочные элементарные преобразования (они не меняют определителя), получаем

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A+iB & 0 \\ B & A-iB \end{bmatrix}.$$

Наличие нулевого блока у последней матрицы означает, что ее определитель есть

$$\det M = \det(A+iB)\det(A-iB) = |\det(A+iB)|^2 = |\det C|^2.$$

Таким образом, наше условие $\det C \neq 0$ означает, что $\det M \neq 0$, а это есть условие разрешимости системы $P = Q = 0$ относительно (U, V) в окрестности (a, b). Получаем C^1-решение $U = p(X, Y), V = q(X, Y)$, которое можно записать как $W = p(Z)+iq(Z) = f(Z)$. Дифференциал отображения f можно записать в виде $df = f'_Z\,dZ + f'_{\bar{Z}}\,d\bar{Z}$. Записывая дифференциал тождества $F(Z, f(Z)) = 0$, получаем

$$F'_Z\,dZ + F'_W(f'_Z\,dZ + f'_{\bar{Z}}\,d\bar{Z}) = 0.$$

Равенство нулю указанного линейного выражения означает равенство нулю матричных коэффициентов как при dZ, так и при $d\bar{Z}$. Коэффициент при $d\bar{Z}$ с учетом обратимости производной F'_W дает наше условие голоморфности $f'_{\bar{Z}} = 0$. □

Частным случаем комплексной теоремы о неявном отображении является комплексная версия теоремы об обратном отображении. Минимальный вариант: если $w = f(z)$ голоморфна в окрестности нуля, причем $f(a) = b$ и $f'(a) \neq 0$, то в окрестности b существует и голоморфна обратная функция $z = g(w)$.

16.7.2. Задача. Пусть функция $w = f(z)$ голоморфна в окрестности нуля и $\mathrm{ord}_0 f = m > 1$, тогда обратная функция $z = g(w)$ имеет нуль точкой ветвления порядка m.

Следующий вопрос — вопрос о *результанте пары многочленов и дискриминанте многочлена*. Он входит во все стандартные курсы алгебры, поэтому здесь мы только напомним формулировки. Для нас основным является случай многочленов над полем комплексных чисел, которое, как известно, алгебраически замкнуто. Таким образом, если $a(x)$ и $b(x)$ — два многочлена от одной переменной x степеней n и m, то их можно записать в виде

$$a(x) = a_0\,x^n + \dots + a_n = a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),$$
$$b(x) = b_0\,x^m + \dots + b_m = b_0(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m).$$

Результант этих многочленов $\mathrm{Res}\,(a, b)$ — величина, которая имеет два представления:

$$\det\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{bmatrix} = b_0^n a_0^m \prod_{\substack{i\leqslant n,\\ j\leqslant m}} (\beta_j - \alpha_i).$$

Представление в виде определителя позволяет заключить, что результант является многочленом от коэффициентов a и b с целыми коэффициентами. Представление в виде произведения — что причин для обращения результанта в нуль всего две: общий корень у a и b или обращение в нуль старшего коэффициента.

Дискриминантом многочлена $a(x)$ называется величина

$$\mathrm{Dis}(a) = a_0^{2n-2} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_i - a_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2}\,\mathrm{Res}(a, a'),$$

которая, с одной стороны, есть многочлен от коэффициентов многочлена a, а с другой — обращается в нуль только при наличии кратных корней или при обращении в нуль старшего коэффициента. В наших дальнейших рассмотрениях мы будем рассматривать дискриминанты многочленов двух переменных $P(z, w)$. При этом мы будем смотреть на такой многочлен как на многочлен переменной w, коэффициенты которого — многочлены от z.

При этом нам понадобится еще одно свойство дискриминанта. Напомним, что многочлен $P(z, w)$ называют приводимым, если его можно представить в виде произведения $P_1(z, w)\,P_2(z, w)$ двух многочленов положительных степеней. В противном случае он называется *неприводимым* (скажем, $z^2 + w^2$ приводим, а $z_2 + w^2 - 1$ нет). Так вот, если $P(z, w)$ неприводим, то его дискриминант (как многочлена от w) не есть тождественный нуль.

§ 16.8. Алгебраические функции и их римановы поверхности

Для изолированных особых точек голоморфных функций мы различали точки конечного порядка $\mathrm{ord}_a f$ (полюса и устранимые) и бесконечного (существенно особые). Как известно, функция, которая на сфере имеет лишь точки конечного порядка, — рациональная функция. Естественным обобщением класса рациональных функций являются алгебраические функции. В отличие от рациональных, они замкнуты относительно операции взятия обратной функции.

(O.10) *Алгебраическая особая точка* — точка a ветвления конечного порядка ветви аналитической функции, такая что разложение этой ветви в ряд Пюизо в проколотой окрестности a содержит лишь конечное число слагаемых с отрицательными показателями.

Для функции $e^{\sqrt{z}}$ нуль — алгебраическая особая точка, бесконечность — нет, при этом обе точки — точки ветвления порядка два. Если ветвь однозначная, то данное определение означает, что a — точка конечного порядка (т. е. не хуже, чем полюс).

16.8.1. Задача. (a) Если точка была алгебраической для f, то она останется алгебраической для f'. (b) При каком условии точка останется алгебраической и для первообразной?

Алгебраические функции мы будем определять дважды. Первый раз — как ПАФ с некоторыми свойствами (функциональное определение) и второй — как функцию, неявно заданную полиномиальным уравнением (алгебраическое определение). А затем покажем их эквивалентность.

(O.11) (функциональное определение=ФО) *Алгебраическая функция* — конечнозначная ПАФ, такая, что все ее ветви имеют на сфере Римана лишь конечную совокупность изолированных особых точек, причем все они алгебраические.

(O.12) (алгебраическое определение=АО) *Алгебраическая функция* есть совокупность локальных решений $w=f(z)$ уравнения $P(z,w)=0$, где P — неприводимый полином положительной по w степени.

Доказательство эквивалентности будет строиться в несколько этапов. Первый — доказательство того, что все ростки функции, алгебраической в смысле ФО, удовлетворяют некоторому полиномиальному соотношению.

Пусть $\sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — совокупность особых точек на сфере и a — точка, не попавшая в их число. Пусть $([f_1]_a, \ldots, [f_m]_a)$ — полный набор ростков нашей ПАФ в точке a. Можно констатировать, что результат продолжения этих ростков по путям, начинающимся в a и не пересекающим σ — m-значная функция, аналитическая в $\bar{\mathbb{C}}\backslash\sigma$.

Сформулируем очевидное наблюдение.

16.8.2. Предложение. *Если алгебраическая функция однозначна, то она рациональна.*

Доказательство. Это следует из того, что все особые точки в этом случае — не более чем полюса. □

Развивая наш успех, введем в рассмотрение ростки симметрических функций для нашего набора $([f_1]_a, \ldots, [f_m]_a)$:

$$s_a^1 = \sum [f_j]_a, \quad s_a^2 = \sum [f_i]_a [f_j]_a, \ldots, s_a^m = [f_1]_a [f_2]_a \cdots [f_m]_a.$$

Каждый из этих ростков продолжается по всем путям вне σ, определяя при этом однозначную функцию, причем все особые точки алгебраичны, т. е. в силу предыдущего предложения все эти функции рациональны. Обозначим эти рациональные функции через $S^1(z), \ldots, S^m(z)$ и рассмотрим полином степени m от w вида

$$w^m + (-1)^1 S^1(z)\, w^{m-1} + \cdots + (-1)^m S^m(z).$$

Это полином, коэффициенты которого — рациональные функции от z, при этом он связан с набором ростков нашей ПАФ в любой неособой точке z следующим образом:

$$w^m + (-1)^1 S^1(z)\, w^{m-1} + \cdots + (-1)^m S^m(z) = (w - [f_1]_z) \cdots (w - [f_m]_z).$$

Домножая на наименьшее общее кратное знаменателей коэффициентов S^j, т. е. $h(z)$, получаем $P(z, w) = h(z)(w - [f_1]_z) \ldots (w - [f_m]_z)$, где P — полином от (z, w). Этот полином замечателен тем, что в окрестности каждой неособой точки любой элемент $w = f(z)$ нашей ПАФ является решением уравнения $P(z, w) = 0$.

Теперь мы совершим обратный ход. А именно мы покажем, что совокупность локальных решений неприводимого полиномиального соотношения (т. е. алгебраическая функция в смысле АО) — алгебраическая функция в смысле ФО.

Рассмотрим соотношение $P(z, w) = p_0(z) w^m + \cdots + p_m(z) = 0$ как уравнение на w при фиксированном z. Пусть $\mathrm{Dis}_P(z)$ — дискриминант P. Если P неприводим, то многочлен $\mathrm{Dis}_P(z)$ не есть тождественный нуль и множество σ его нулей конечно. Переходя к другим локальным координатам на сфере, отдельно рассмотрим точку $z = \infty$ и в случае изменения числа решений присоединим ее к множеству σ. Таким образом, если точка a не попала в σ и $(b_1, \ldots, b_m)$ — полный набор корней уравнения $P(a, w) = 0$, то все они попарно различны. И в каждой из этих точек $P'_w(a, b_j) \neq 0$. В таком случае для каждой пары (a, b_j) мы вправе применить теорему о неявной функции и получить набор из m голоморфных функций $w = f_j(z)$, определенных в окрестности a и являющихся решениями нашего уравнения при соответствующих начальных условиях, т. е. $f_j(a) = b_j$.

Если γ — путь с началом в точке a, не проходящий через точки σ, то в каждой точке $z(t)$ пути γ мы можем повторить наше рассуждение и получить полный набор ростков $([f_1]_{z(t)}, \ldots, [f_m]_{z(t)})$, являющихся решениями нашего уравнения. При этом из теоремы о неявной следует, что если два решения совпали в одной точке, то они совпали и в ее окрестности, а из теоремы единственности, что они совпали на связной компоненте пересечения областей определения. Откуда мы видим, что каждое локальное решение продолжается вдоль γ. При этом, с другой стороны, из той же теоремы единственности следует, что результат аналитического продолжения решения — решение. Поэтому можно заключить, что в результате аналитического продолжения всех ростков мы получим одну или несколько конечнозначных функций, аналитических на $\bar{\mathbf{C}}\backslash\sigma$. Каждая из точек σ для каждой из этих функций является точкой ветвления конечного порядка. Покажем, что все эти точки — алгебраические. Пусть точка z_0 — точка ветвления k-го порядка для функции $f(z)$. Сформулируем следующее, вполне очевидное, наблюдение. Точка z_0 — алгебраическая в том и только том случае, если найдется такой натуральный показатель l, что $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^l f(z) = 0$ (полная аналогия с полюсом). Запишем наше уравнение в виде $w^m + \frac{p_1(z)}{p_0(z)}w^{m-1} + \cdots + \frac{p_m(z)}{p_0(z)} = 0$. Теперь вместо нашего уравнения на функцию $w = f(z)$ рассмотрим уравнение на функцию $W = g(z) = (z-z_0)^l f(z) = (z-z_0)^l w$. Поскольку $w = W/(z-z_0)^l$, то уравнение имеет вид

$$W^m + (z-z_0)^l \frac{p_1(z)}{p_0(z)} W^{m-1} + (z-z_0)^{2l} \frac{p_2(z)}{p_0(z)} W^{m-2} + \cdots$$
$$+ (z-z_0)^{ml} \frac{p_m(z)}{p_0(z)} = 0.$$

Ясно, что, выбирая натуральное число l достаточно большим, можно добиться того, что все коэффициенты этого уравнения станут голоморфными функциями, обращающимися в нуль при $z = z_0$. Теперь, чтобы доказать алгебраичность точки z_0, достаточно доказать, что все корни приведенного полиномиального уравнения (старший коэффициент — единица) стремятся к нулю, когда коэффициенты стремятся к нулю. Это утверждение следует из несложной оценки. Если W — корень уравнения $W^m + c_1 W^{m-1} + c_2 W^{m-2} + \cdots + c_m = 0$, то

$$|W| \leqslant \max\Big\{\sum |c_j| \sqrt[m]{\sum |c_j|}\Big\}$$

(докажите). Теперь покажем, что ПАФ одна. Если их несколько, то каждая ПАФ, порожденная решениями уравнения $P(z,w) = 0$, алгебраична в смысле ФО и по доказанному удовлетворяет полиномиальному соотношению $P_1(z,w) = 0$ меньшей чем m степени по w. При этом P_1 обязан делить P, что невозможно в силу неприводимости полинома P. Этим мы завершаем доказательство (АО $\Rightarrow$ ФО). Вернемся к импликации (ФО $\Rightarrow$ АО). Нам осталось убедиться, что построенный по функции, алгебраической в смысле ФО, полином неприводим. Пусть все продолжения нашей ПАФ удовлетворяют соотношению $P(z,w) = P_1(z,w)P_2(z,w) = 0$. Возьмем какой-то элемент $w = f(z)$. Если на открытом множестве $P(z,f(z)) = P_1(z,f(z))P_2(z,f(z)) = 0$, то из теоремы единственности следует, что хотя бы один из сомножителей — тождественный нуль. Этот сомножитель является многочленом степени меньшей чем m. Откуда следует, что ПАФ, порожденная этим элементом, имеет меньшее чем m число значений. Получили противоречие. Можем резюмировать так.

16.8.3. Предложение. *Оба данных выше определения алгебраической функции — функциональное определение* ($O.11$)*=ФО и алгебраическое* ($O.12$)*=АО — эквивалентны.*

16.8.4. Задача. Пусть f — алгебраическая функция, не равная нулю тождественно. Докажите, что множество ее нулей, т. е. множество нулей всех ее элементов, конечно.

Все особые точки алгебраической функции — точки ветвления конечного порядка, к которым применима описанная выше процедура замыкания римановой поверхности. Говоря о римановой поверхности алгебраической функции, мы будем подразумевать, что это риманова поверхность после перехода к замыканию во всех особых точках.

16.8.5. Предложение. *Риманова поверхности алгебраической функции — компактное, ориентируемое, вещественно* 2*-мерное многообразие.*

Доказательство. Ориентируемость — свойство всех комплексных многообразий. Оно означает, что имеется согласованный атлас, т. е. такой атлас, что якобианы (определители дифференциалов) всех функций перехода положительны. Чтобы получить такой атлас, следует овеществить комплексный атлас и рассмотреть комплексные функции перехода как вещественные отображения. После этого осталось заметить, что, как мы показали при доказательстве теоремы о неявной функции, определитель овеществления комплексной квадратной матрицы — квадрат модуля определителя комплексной матрицы. Для 2-мерного вещественного многообразия выбор ориентации можно понимать как выбор согласованного направления вращения в каждом касательном пространстве. Для комплексного многообразия такой выбор осуществляется умножением вектора на $i = \sqrt{-1}$. Для доказательства компактности рассмотрим бесконечную последовательность точек поверхности $\{x_j\}$. Пользуясь компактностью сферы Римана, выберем из последовательности проекций $\{\pi(x_j)\}$ подпоследовательность, сходящуюся к точке сферы a. У этой точки есть такая окрестность V_a, что ее полный прообраз $\pi^{-1}(V_a)$ гомеоморфен конечному набору непересекающихся кругов. Теперь становится ясно, что из этой подпоследовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к одному из прообразов точки a. □

Теперь после ссылки на стандартную топологическую классификацию 2-мерных многообразий получаем такой результат.

16.8.6. Следствие. *Риманова поверхность алгебраической функции гомеоморфна сфере с g ручками, $g = 0, 1, \ldots$.*

Число ручек называется *родом* поверхности. Род 2-мерного многообразия связан с другой топологической характеристикой χ — эйлеровой характеристикой, а именно $\chi = 2 - 2g$. Эйлерова характеристика определяется по триангуляции многообразия. Триангулировать двумерное многообразие — разрезать его на плоские 2-мерные односвязные куски — грани. Или, наоборот, сшить его из таких граней, как сшивается футбольный мяч из плоских шестигранников. При этом сама схема разрезов — граф на многообразии: ребра и вершины. Если обозначить через Г число граней, P — ребер и B — вершин, то эйлерова характеристика многообразия M равна $\chi(M) = \Gamma - P + B$ для любой триангуляции.

16.8.7. Задача. Докажите, что при любой триангуляции сферы верно равенство $\Gamma - P + B = 2$.

Пусть задана m-значная алгебраическая функция, у которой имеется набор особых точек с порядками ветвления $(k_1, \ldots, k_N)$. Пусть также $(a_1, \ldots, a_n)$ — соответствующие точки сферы Римана (их может быть меньше, одной точке плоскости может соответствовать несколько ветвей). Зададим триангуляцию сферы Римана с единственным условием. Сделаем так, что все особые точки войдут в число вершин этой триангуляции. Пусть (b, r, γ) — числа вершин, ребер и граней полученной триангуляции. По построенной триангуляции, пользуясь проекцией на сферу, нетрудно построить триангуляцию римановой поверхности этой функции. Грани, ребра и вершины — прообразы граней, ребер и вершин триангуляции плоскости, их количество обозначим (Γ, P, B). При этом над каждой гранью на сфере лежит стопка из m непересекающихся граней триангуляции поверхности, т. е. $\Gamma = m\gamma$, над каждым ребром — m ребер, т. е. $P = mr$. А вот с вершинами ситуация иная. Если мы напишем $B = mb$, то мы ошибемся в бо́льшую сторону. Действительно, когда мы въезжаем по ребру триангуляции сферы в особую точку, над которой есть ветвь с ветвлением порядка k_j, то на этой ветви k_j прообразов над близкой точкой превращаются в одну точку (склеиваются). Поэтому можно точно сказать, на сколько мы ошибемся. Правильный ответ: $B = mb - \Sigma(k_j - 1)$. Теперь мы можем вычислить эйлерову характеристику римановой поверхности $\chi(X) = B - P + \Gamma = m(b - rp + \gamma) - (k_j - 1) = 2m - (k_j - 1)$. Если теперь выразить из полученного равенства род поверхности, то мы получаем известную формулу.

16.8.8. Предложение (формула Римана – Гурвица)**.** *Род χ римановой поверхности m-значной алгебраической функции, порядки ветвления которой — $(k_1, \ldots, k_N)$, равен*

$$\chi = \frac{1}{2} \sum (k_j - 1) - m + 1.$$

Конечно, это чисто топологическое рассуждение, и если вместо римановой поверхности мы имеем топологическое пространство, устроенное таким же образом, то ответ будет тем же. Такие топологические пространства называются разветвленными конечнолистными накрытиями над сферой. Если многообразие внизу (база) не сфера, то рассуждение остается в силе, в результате мы свяжем эйлерову характеристику накрытия и эйлерову характеристику базы.

16.8.9. Пример. (1) Возьмем функцию, обратную к функции Жуковского $w = (z + z^{-1})/2$. Здесь есть две особые точки, а именно $(1, -1)$. Бесконечность не является точкой ветвления, т. е. порядок — единица. При этом две однозначные ветви в окрестности бесконечности имеют разный тип: у одной бесконечность устранима у другой — полюс первого порядка (сопоставьте это с поведением функции Жуковского). Род римановой поверхности по формуле Римана – Гурвица равен $g = ((2 - 1) + (2 - 1))/2 - 2 + 1 = 0$, т. е. это сфера.

(2) Пусть $P(z)$ — многочлен без кратных корней. Рассмотрим функцию $w = \sqrt{P(z)}$. Особые точки — корни и бесконечность. При этом корни — точки ветвления 2-го порядка, а тип бесконечности зависит от четности числа корней, т. е. степени многочлена P. Если степень четна, то бесконечность не является точкой ветвления (полюс на обеих ветвях), а если нечетна — ветвление второго порядка. Подсчет рода по формуле Римана – Гурвица дает: степень 1 и 2 — род 0, степень 3 и 4 – род 1 и т. д.

Пример $\sqrt{z} + \sqrt{z}$, который мы обсудили выше, показывает, что арифметическое выражение, составленное из алгебраических функций, может быть не одной алгебраической функцией, а несколькими.

Это же касается операции композиции. Например, $\sqrt{z^2}$ — две функции. Все это приводит к тому, что для того, чтобы снабдить совокупность алгебраических функций структурой поля, нужны другие подходы (концепция алгебраического замыкания поля рациональных функций).

Если мы имеем две алгебраические функции f и g, то выражение $f \odot g$, где $\odot$ — произвольная арифметическая операция, есть одна или несколько алгебраических функций (операция выполняется для каждой пары ростков в точке). Действительно, количество особых точек останется конечным. Это особые точки операндов, а также, в случае если $\odot$ — деление, то нули элементов знаменателя (это дискретное подмножество сферы). При этом все эти точки, включая нули, алгебраичны.

§ 16.9. Алгебраические кривые в $\mathbf{CP}^2$

Если алгебраическая функция задана соотношением $P(z,w) = 0$, то имеется очевидный способ сопоставить ей геометрический образ. Это график, т. е. $\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \colon P(z,w) = 0\}$. Любой такой график, независимо от приводимости многочлена P, называется плоской алгебраической кривой.

16.9.1. Задача. Покажите, что справедливы следующие утверждения. (1) $C_1 = \{z^2 + w^2 = a,\ a \neq 0\}$ — комплексное подмногообразие пространства $\mathbf{C}^2$, гомеоморфное проколотой плоскости.

(2) $C_2 = \{z^2 + w^2 = 0\}$ в окрестности точки $(0,0)$ не гомеоморфна плоской области; $C_2 \backslash (0,0)$ имеет две связных компоненты, каждая из которых гомеоморфна проколотой плоскости.

В случае если многочлен приводим, то соответствующая кривая есть объединение кривых, заданных неприводимыми полиномами. Такие кривые называются неприводимыми.

Пусть $C = \{P(z,w) = 0\}$ — кривая и (a,b) — ее точка. Если в этой точке отличен от нуля комплексный градиент $(P'_z(a,b), P'_w(a,b))$, то мы, применяя теорему о неявной функции, получаем представление окрестности этой точки кривой в виде графика голоморфной функции $w = f(z)$ или $z = g(w)$. Точки кривой, в которых градиент обращается в нуль, называются *особыми*.

16.9.2. Задача. Покажите, что множество особых точек кривой конечно.

Кривая C_1 из задачи 16.9.1 не имеет особых точек, единственная особая точка C_2 есть $(0,0)$.

Любая алгебраическая кривая в $\mathbf{C}^2$ некомпактна (докажите). Есть естественный способ ее компактифицировать. Надо рассмотреть данное $\mathbf{C}^2$ как аффинную часть $\mathbf{CP}^2$. Если $z = Z/T$, $w = W/T$, где $T\colon Z\colon W$ — однородные координаты $\mathbf{CP}^2$, то кривой

$$C = \{P(z, w) = 0\},$$

где P — полином общей степени m, ставится в соответствие ее замыкание в $\mathbf{CP}^2$, а именно $\bar{C} = \{Q(T, Z, W) = 0\}$, где

$$Q(T, Z, W) = T^m\, P(Z/T, W/T)$$

является однородным полиномом степени m. Построенное замыкание компактно как замкнутое подмножество компактного многообразия $\mathbf{CP}^2$. Замыкание C отличается от C точками, которые лежат на бесконечно удаленной прямой $T = 0$. Переходя к другим аффинным картам, мы можем распространить определение особых и неособых точек на точки, лежащие на бесконечности. При этом их множество остается конечным. Если замыкание кривой не имеет особых точек, кривая называется неособой.

Если Q — однородный полином степени m, то имеет место формула Эйлера

$$mQ(T, Z, W) = T\,\frac{\partial Q}{\partial T} + Z\,\frac{\partial Q}{\partial Z} + W\,\frac{\partial Q}{\partial W},$$

поэтому особые точки замыкания — в точности решения системы уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{\partial Q}{\partial Z} = \frac{\partial Q}{\partial W} = 0.$$

16.9.3. Задача. Найдите все особые точки в $\mathbf{CP}^2$ следующих кривых: (1) $w^2 = q(z)$, где q — многочлен, (2) $z^m + w^m = 1$ — кривая Ферма.

Рассмотрим общий многочлен P степени m, как многочлен, зависящий от (z, w) и от p — набора всех своих коэффициентов. Значения z, для которых система $P(z, w) = P'_z(z, w) = 0$ имеет решения по w, есть нули результанта $R_1(z, p) = \operatorname{Res}(P, P'_z)$ по переменной w. Аналогично, z, для которых система $P(z, w) = P'_w(z, w) = 0$ имеет решения по w, — нули результанта $R_2(z, p) = \operatorname{Res}(P, P'_w)$ по переменной w. Результанты R_1 и R_2 — многочлены от z. Значения p, для которых система $R_1(z, p) = R_2(z, p) = 0$ имеет решения по z, — нули результанта $R(p) = \operatorname{Res}(R_1, R_2)$ по переменной z. Таким образом, если набор коэффициентов p многочлена P не обращает в нуль результант R, то соответствующая кривая C — неособая. Если перейти к другой аффинной карте, то условие неособости — то же самое $R(p) \neq 0$. Это рассуждение сохраняется при переходе к однородным координатам (T, Z, W). Там мы получаем аналогичное условие неособости кривой в $\mathbf{CP}^2$ — $\widetilde{R}(p) \neq 0$. Отметим, что если степень многочлена фиксирована, то условие $\widetilde{R}(p) = 0$ означает наличие особой точки, т. е. это условие — критерий особости. Осталось показать, что $\widetilde{R}(p)$ не есть тождественный нуль. Для этого достаточно предъявить пример неособой кривой степени m. Этим примером является кривая Ферма $\{Z^m + W^m = T^m\}$ (упражнение выше).

Итак, имеет место такой факт.

16.9.4. Предложение. (1) *Есть такой ненулевой многочлен $\widetilde{R}(p)$, зависящий от набора коэффициентов многочлена $P(T, Z, W)$ однородной степени m, что кривая $C = \{P(T, Z, W) = 0\}$ особая тогда и только тогда, когда $\widetilde{R}(p) = 0$.*

(2) *Неособая кривая в $\mathbf{CP}^2$ — компактное комплексное подмногообразие, гомеоморфное сфере с g ручками.*

Один и тот же неприводимый многочлен $P(z, w)$ определяет два геометрических объекта: C_1 — замыкание римановой поверхности алгебраической функции $w(z)$, такой, что $P(z, w(z)) = 0$, и C_2 — замыкание кривой $\{P(z, w) = 0\}$ в проективном пространстве. В любом случае C_1 — компактное комплексное многообразие. Если кривая неособая, то C_2 тоже.

16.9.5. Задача. Покажите, что если кривая C_2 неособая, то C_1 и C_2 эквивалентны как комплексные многообразия.

Ясно, что непрерывному изменению коэффициентов многочлена в дополнении к дискриминантному множеству $R = 0$ соответствует непрерывная деформация соответствующей кривой. При этом такой дискретный параметр как род измениться не может. Учитывая, что дополнение к $R = 0$ связно (это задача 18.6.8 ниже), получаем, что все неособые кривые одинаковой степени имеют один и тот же род. Вычислим его для кривой Ферма. Поскольку кривая Ферма неособая, ее род можно вычислить по формуле Римана – Гурвица.

Действительно, функция $w = \sqrt[m]{1 - z^m}$ является m-значной, проекции особых точек — все корни степени m из единицы, над каждым корнем из единицы лежит одна точка ветвления порядка m. По формуле Римана – Гурвица получаем

$$g = \frac{1}{2}(m-1)m - m + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Итак, верен такой факт.

Формула рода: Род любой неособой плоской кривой степени m равен

$$g = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

16.9.6. Задача. Пусть $P = w^2 - g(z)$, где g — многочлен степени m без кратных корней. Сравните род римановой поверхности алгебраической функции, вычисленной по формуле Римана – Гурвица с результатом, который дает формула рода. Почему ответы не совпадают?

Литература

[1] Витушкин А. Г. Замечательные факты комплексного анализа. Итоги науки и техники, ВИНИТИ, т. 7. М., 1985.

[2] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. Наука, М., 1968.

[3] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Наука, М., 1968.

[4] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т. 2. Наука, М., 1985.

Глава 17

Ортогональные многочлены и рациональные аппроксимации

В. Н. Сорокин

§ 17.1. Аппроксимации Паде

Таблица Паде. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

есть формальный степенной ряд с комплексными коэффициентами. Зафиксируем целые неотрицательные числа n и m. Будем искать два многочлена $Q = Q_{n,m}$ и $P = P_{n,m}$ такие, что степень Q не превосходит m, степень P не превосходит n и выполняются следующие интерполяционные условия:

$$Q(z)f(z) - P(z) = Az^{n+m+1} + \cdots .$$

При этом многочлен Q не равен тождественно нулю.

Таким образом, мы должны приравнять нулю коэффициенты

$$\{Qf\}_{z^k} = 0, \quad k = n+1, \ldots, n+m.$$

Это — система m линейных однородных уравнений относительно $m+1$ неизвестных коэффициентов многочлена Q. Поэтому нетривиальное решение существует. Тогда многочлен P равен n-й частичной сумме ряда Qf.

Любое решение (P, Q) назовем (n, m)*-й парой Паде.* Рациональная функция $\pi = P/Q$, где $\pi = \pi_{n,m}$, называется (n, m)*-й аппроксимацией Паде* ряда f. Она не зависит от выбора пары Паде. Действительно, пусть (P, Q) и (P', Q') — пары Паде. Тогда

$$(Qf - P)(z) = Az^{n+m+1} + \cdots ,$$
$$(Q'f - P')(z) = A'z^{n+m+1} + \cdots .$$

Откуда вытекает, что

$$(QP' - Q'P)(z) = O\big(z^{n+m+1}\big), \quad z \to 0.$$

Слева стоит многочлен степени не выше $n+m$. Следовательно, он тождественно равен нулю: $QP' \equiv Q'P$, т. е. $P/Q \equiv P'/Q'$. Утверждение доказано.

Бесконечная двумерная таблица рациональных функций

$$\Pi = \{\pi_{n,m} | n, m \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \Pi = \Pi(f),$$

называется *таблицей Паде* ряда f.

Таблица Паде экспоненты. Теперь вычислим таблицу Паде для функции $f(z) = e^z$, т. е. для ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Имеем

$$R(z) = Q(z)e^z - P(z) = O\big(z^{n+m+1}\big),$$

где $\deg Q \leqslant m,\ \deg P \leqslant n$. Продифференцируем это равенство $n+1$ раз:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+1} R(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^{n+1} \big(Q(z)e^z\big) = O\big(z^m\big).$$

Имеем

$$\frac{d}{dz}\big(Q(z)e^z\big) = \big(Q(z) + Q'(z)\big)e^z.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+1} \big(Q(z)e^z\big) = (I + D)^{n+1} Q(z) \cdot e^z,$$

где I — единичный оператор, D — оператор дифференцирования. Оператор $I + D$ действует в линейном пространстве многочленов и не меняет степень многочлена. Итак,

$$(I + D)^{n+1} Q(z) = O\big(z^m\big).$$

Поскольку слева стоит многочлен степени не выше m, то он (с точностью до нормировки) равен z^m. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} Q(z) = (I + D)^{-n-1} z^m &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n-1}{k} D^k z^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{-n-1}{k} \frac{m!}{(m-k)!} z^{m-k}. \end{aligned} \tag{17.1.1}$$

Поскольку
$$P(z)e^{-z} - Q(z) = O\big(z^{n+m+1}\big),$$
то
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-m-1}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(-z)^{n-k}. \tag{17.1.2}$$
После согласования нормировки получим (n,m)-ю пару Паде $(P(z)/P(0), Q(z)/Q(0))$, где многочлены Q и P заданы формулами (17.1.1) и (17.1.2) соответственно. Она определена единственным образом (с точностью до нормировки).

Иррациональность числа π. Установим следующий классический результат.

17.1.1. Теорема. *Число π иррационально.*

Доказательство. Рассмотрим диагональ таблицы Паде экспоненты (будем писать один индекс). При некоторой нормировке
$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n}\binom{n}{k} k!(-z)^{n-k}, \quad P_n(z) = Q_n(-z).$$
Многочлены Q_n и P_n имеют целые рациональные коэффициенты.

Многочлены $z^n Q_n(1/z)$ называются *многочленами Бесселя.*

Пусть
$$f(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^{n+1} g(z), \quad g(z) = O\big(z^{n+1}\big),$$
где f и g — функции, голоморфные в нуле. Тогда
$$g(z) = \big(\mathsf{J}^{n+1} f\big)(z),$$
где
$$(\mathsf{J}f)(z) = \int_0^z f(x)\,dx$$
есть интегральный *оператор Вольтерра*. По индукции получим *формулу Коши–Дирихле*
$$g(z) = \frac{1}{n!}\int_0^z (z-x)^n f(x)\,dx.$$
Применим эту формулу к функции
$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+1} R_n(z) = (-z)^n e^z.$$

Получим

$$R_n(z) = \frac{1}{n!}\int_0^z (z-x)^n(-x)^n e^x\,dx.$$

Сделаем замену $x = zt$. Получим *интеграл Эрмита*

$$R_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n e^{zt}\,dt.$$

Положим $z = \pi i$. Тогда

$$-R_n(\pi i) = \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin(\pi t)\,dt > 0.$$

С другой стороны,

$$-R_n(\pi i) = Q_n(\pi i) + Q_n(-\pi i).$$

Предположим, что $\pi = p/q$, где p и q — натуральные числа. Тогда $-q^n R_n(\pi i)$ – натуральное число. С другой стороны,

$$-q^n R_n(\pi i) \leqslant \frac{p^{2n+1}}{q^{n+1}n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Мы пришли к противоречию. □

§ 17.2. Непрерывные дроби

Диагональные аппроксимации Паде. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{z^{k+1}} \tag{17.2.1}$$

есть формальный ряд с комплексными коэффициентами. Если в диагонали таблицы Паде для ряда $f(1/z)$ сделать замену $z \mapsto 1/z$, то мы получим *диагональные аппроксимации Паде* ряда f. Дадим прямое определение. Зафиксируем целое неотрицательное число n. Требуется найти многочлен $Q_n \not\equiv 0$, $\deg Q_n \leqslant n$, такой, что для некоторого многочлена P_n выполняются интерполяционные условия

$$Q_n(z)f(z) - P_n(z) = \frac{A_n}{z^{n+1}} + \cdots.$$

Для нахождения многочлена Q_n мы должны приравнять нулю коэффициенты при следующих степенях:

$$\{Q_n f\}_{1/z^k} = 0, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{17.2.2}$$

Это — система n линейных однородных уравнений относительно $n+1$ неизвестных коэффициентов многочлена Q_n. Поэтому нетривиальное решение существует. Многочлен P_n равен полиномиальной части ряда $Q_n f$. Тогда $\deg P_n \leqslant n-1$. Любое решение (P_n, Q_n) называется *n-й парой Паде*, а отношение $\pi_n = P_n/Q_n$, определенное единственным образом, называется n-й диагональной аппроксимацией Паде.

Индекс $n \in \mathbb{Z}_+$ называется *нормальным*, если для всякой n-й пары Паде $\deg Q_n = n$. Тогда пара определена единственным образом (с точностью до нормировки). Положим

$$Q_n(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_n z^n$$

и напишем в явном виде систему (17.2.2):

$$\begin{cases} q_0 s_0 + q_1 s_1 + \dots + q_n s_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_0 s_{n-1} + q_1 s_n + \dots + q_n s_{2n-1} = 0. \end{cases}$$

Введем *определители Ганкеля*

$$H_n = \begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \ n \geqslant 1, \quad H_0 = 1.$$

Индекс n нормален тогда и только тогда, когда $H_n \neq 0$.

17.2.1. Теорема (Кронекер). *Ряд $f(z)$ является рядом Лорана рациональной функции тогда и только тогда, когда для всех достаточно больших n определители Ганкеля H_n равны нулю.*

Доказательство. Пусть n_0 и n_1 — последовательные нормальные индексы, $n_0 < \nu < n_1$. Тогда $\pi_\nu = \pi_{n_0}$. Действительно, запишем $\pi_\nu = P/Q$ в виде несократимой дроби и положим $r = \deg Q$. Тогда $r < \nu$. Поскольку (P, Q) — r-я пара Паде, то индекс r нормален. Следовательно, $r \leqslant n_0$. Тогда (P, Q) — n_0-я пара Паде. Тем самым

$$f(z) - \pi_{n_0}(z) = \frac{A}{z^{n_0+n_1}} + \dots, \quad A \neq 0.$$

Пусть f — рациональная функция порядка N. Тогда $\pi_n = f$ для всех $n > N$, т. е. эти индексы не являются нормальными, следовательно, $H_n = 0$.

Обратно, если $H_n = 0$ для всех $n > N$, то $\pi_n = \pi_N$, и разложение $f - \pi_N$ не может начаться с конечного номера, т. е. $f = \pi_N$. $\square$

Непрерывная дробь. Применим к ряду (17.2.1) *алгоритм Евклида*. Если $f \neq 0$, то $1/f = a_1 + \varphi_1$, где a_1 — многочлен степени не ниже первой, а φ_1 — снова ряд вида (17.2.1). Если $\varphi_1 \neq 0$, то можем сделать еще один шаг и т. д. В итоге приходим к конечной или бесконечной так называемой *непрерывной дроби*

$$f(z) = \cfrac{1}{a_1(z) + \cfrac{1}{a_2(z) + \cdots}}.$$

Для таких дробей введем обозначение $[a_1, a_2, \dots]$. Рассмотрим *подходящие дроби*

$$\tau_n = [a_1, \dots, a_n],\ n \geqslant 1, \quad \tau_0 = 0.$$

Их можно записать в виде отношения многочленов $\tau_n = A_n/B_n$, удовлетворяющих *рекуррентным соотношениям*

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= a_{n+1}A_n + A_{n-1}, \\ B_{n+1} &= a_{n+1}B_n + B_{n-1}, \end{aligned} \tag{17.2.3}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, и начальным условиям

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad A_1 = 1, \\ B_0 &= 1, \quad B_1 = a_1. \end{aligned}$$

Действительно, по индукции имеем

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + 1/a_{n+1}] &= \frac{(a_n + 1/a_{n+1})A_{n-1} + A_{n-2}}{(a_n + 1/a_{n+1})B_{n-1} + B_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}(a_nA_{n-1} + A_{n-2}) + A_{n-1}}{a_{n+1}(a_nB_{n-1} + B_{n-2}) + B_{n-1}} = \frac{a_{n+1}A_n + A_{n-1}}{a_{n+1}B_n + B_{n-1}}. \end{aligned}$$

Из рекуррентных соотношений вытекает *тождество Лагранжа*

$$B_{n+1}A_n - B_nA_{n+1} = (-1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тем самым многочлены A_n и B_n взаимно просты. Положим

$$d_n = \deg a_n.$$

Тогда

$$g_n = \deg B_n = d_1 + \dots + d_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда имеют место следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
f-\tau_n=[a_1,\dots,a_{n+1}+\varphi_{n+1}]-[a_1,\dots,a_n]&=\frac{\widetilde{A}_{n+1}}{\widetilde{B}_{n+1}}-\frac{A_n}{B_n}\\
&=\frac{(a_{n+1}+\varphi_{n+1})A_n+A_{n-1}}{(a_{n+1}+\varphi_{n+1})B_n+B_{n-1}}-\frac{A_n}{B_n}\\
=\frac{B_n((a_{n+1}+\varphi_{n+1})A_n+A_{n-1})-A_n((a_{n+1}+\varphi_{n+1})B_n+B_{n-1})}{B_n((a_{n+1}+\varphi_{n+1})B_n+B_{n-1}))}&\\
&=\frac{(-1)^n}{B_n(B_{n+1}+B_n\varphi_{n+1})}=\frac{(-1)^n}{B_nB_{n+1}(1+O(1/z))}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
f(z)-\tau_n(z)=\frac{c_n}{z^{g_n+g_{n+1}}}+\cdots, \quad c_n\neq 0.
$$

Мы установили связь между диагональными аппроксимациями Паде и непрерывной дробью. А именно $\{g_n\}_0^\infty$ — последовательность нормальных индексов, а подходящие дроби суть диагональные аппроксимации Паде: $\tau_n=\pi_{g_n}$.

Непрерывная дробь Ламберта. Рассмотрим пример разложения степенного ряда (с центром в нуле) в непрерывную дробь. Обозначим через $F(c;z)$ *вырожденную гипергеометрическую функцию*

$$
F(c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!(c)_n},
$$

где $(c)_0=1, (c)_n=c\cdots(c+n-1), n\geqslant 1,$ — *символ Похгаммера*. Пусть $c\neq 0,-1,-2,\dots$. Положим

$$
f(c;z)=\frac{F(c;z)}{F(c+1;z)}.
$$

Имеем

$$
\begin{gathered}
F(c;z)-F(c+1;z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(\frac{1}{(c)_n}-\frac{1}{(c+1)_n}\right)\\
=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\frac{n}{(c)_{n+1}}=\frac{z}{c(c+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!(c+2)_n}=\frac{z}{c(c+1)}F(c+2;z).
\end{gathered}
$$

Следовательно,

$$
f(c;z)=1+\frac{F(c;z)-F(c+1;z)}{F(c+1;z)}=1+\frac{z/c(c+1)}{f(c+1;z)}.
$$

По индукции приходим к *непрерывной дроби Ламберта*

$$f(c;z) = 1 + \cfrac{z/c(c+1)}{1 + \cfrac{z/(c+1)(c+2)}{1+\cdots}}. \qquad (17.2.4)$$

Теоремы Прингсхейма и Ворпицкого. Докажем две теоремы о сходимости непрерывных дробей. Непрерывную дробь

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2+\cdots}}$$

будем записывать в виде $[b_1/a_1, b_2/a_2, \ldots]$.

17.2.2. Теорема (Прингсхейм)**.** *Если $|a_n| \geqslant |b_n| + 1$ для всех натуральных n, то числовая непрерывная дробь $[b_1/a_1, b_2/a_2, \ldots]$ сходится.*

Доказательство. Обозначим через $\tau_n = p_n/q_n$ подходящие дроби. Как и в (17.2.3), мы имеем рекуррентные соотношения

$$q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2},$$
$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2},$$

где $n = 1, 2, 3\ldots$, а начальные условия таковы:

$$p_{-1} = 1, \quad p_0 = 0,$$
$$q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1.$$

Тождество Лагранжа примет вид

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1} b_1 \cdots b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Имеем

$$\tau_n - \tau_{n-1} = \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{k=1}^n b_k}{q_n q_{n-1}}.$$

Далее,

$$|q_n| \geqslant |a_n||q_{n-1}| - |b_n||q_{n-2}| \geqslant |a_n||q_{n-1}| - (|a_n| - 1)|q_{n-2}|.$$

Следовательно,

$$|q_n| - |q_{n-1}| \geqslant (|a_n| - 1)(|q_{n-1}| - |q_{n-2}|).$$

По индукции получим, что последовательность $|q_n|$ не убывает. Тогда можем продолжить неравенство

$$|q_n| - |q_{n-1}| \geqslant |b_n|(|q_{n-1}| - |q_{n-2}|).$$

Отсюда по индукции следует, что

$$|q_n| - |q_{n-1}| \geqslant \prod_{k=1}^{n} |b_k|.$$

Окончательно получаем

$$|\tau_n - \tau_{n-1}| \leqslant \frac{1}{|q_{n-1}|} - \frac{1}{|q_n|}.$$

Тем самым ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n - \tau_{n-1})$$

сходится, т. е. последовательность τ_n сходится. □

17.2.3. Теорема (Ворпицкий). *Если* $|b_n| \leqslant 1/4$*, то непрерывная дробь* $[b_1/1, b_2/1, \dots]$ *сходится.*

Доказательство. Достаточно переписать указанную дробь в эквивалентном виде $[2b_1/2, 4b_2/2, 4b_3/2, \dots]$ и затем применить теорему Прингсхейма. □

Вернемся к непрерывной дроби Ламберта (17.2.4). Поскольку мы имеем $z/(c+n)(c+n-1) \to 0$ при $n \to \infty$, то по теореме Ворпицкого дробь сходится (равномерно на компактах в сферической метрике) к мероморфной во всей комплексной плоскости функции $f(c, z)$. Рассмотрим частный случай

$$F(1/2; z^2/4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} z,$$

$$F(3/2; z^2/4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sh} z}{z}.$$

Следовательно,

$$f(1/2; z^2/4) = z \operatorname{cth} z. \tag{17.2.5}$$

Таким образом,

$$\operatorname{th} z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cdots}}}.$$

Теорема Эйлера. Любое вещественное иррациональное число с помощью алгоритма Евклида можно разложить в бесконечную *цепную дробь*, т. е. дробь вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} = a_0 + [a_1, a_2, \dots],$$

где a_0 — целое число, а *неполные частные* $a_1, a_2, \dots$ суть натуральные числа. Например, число $1 + [1, 1, \dots]$ равно *золотому сечению* $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

17.2.4. Теорема (Эйлер). *Число e имеет следующее разложение в цепную дробь $e = 2 + [1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$.*

Доказательство. Подходящие дроби цепной дроби Эйлера обозначим через p_n/q_n. Они сходятся к некоторому числу ζ. Знаменатели q_n удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} q_{3n-3} &= \quad q_{3n-4} + q_{3n-5}, \\ q_{3n-2} &= \quad q_{3n-3} + q_{3n-4}, \\ q_{3n-1} &= 2nq_{3n-2} + q_{3n-3}, \\ q_{3n} \quad &= \quad q_{3n-1} + q_{3n-2}, \\ q_{3n+1} &= \quad q_{3n} \quad + q_{3n-1}, \end{aligned}$$

где $n \geqslant 2$, и начальным условиям $q_1 = 1,\ q_2 = 3$. Числители p_n удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям и начальным условиям $p_1 = 3,\ p_2 = 8$. Рассмотрим следующую линейную комбинацию этих соотношений: 1-е соотношение умножим на 1, 2-е — на -1, 3-е — на 2, 4-е – на 1, 5-е — на 1, затем сложим все эти равенства. Получим

$$q_{3n+1} = (4n+2)q_{3n-2} + q_{3n-5}, \quad n \geqslant 2.$$

Положим

$$\widetilde{r}_n = p_{3n+1},\ \widetilde{s}_n = q_{3n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{r}_n &= (4n+2)\widetilde{r}_{n-1} + \widetilde{r}_{n-2}, \\ \widetilde{s}_n &= (4n+2)\widetilde{s}_{n-1} + \widetilde{s}_{n-2}, \end{aligned} \tag{17.2.6}$$

где $n \geqslant 2$, и

$$\begin{aligned} \widetilde{r}_0 &= 3, \quad \widetilde{r}_1 = 19, \\ \widetilde{s}_0 &= 1, \quad \widetilde{s}_1 = 7. \end{aligned}$$

Имеем $\widetilde{r}_n/\widetilde{s}_n \to \zeta$.

Из (17.2.5) при $z = 1/2$ следует, что число $\alpha = \frac{e+1}{e-1}$ раскладывается в цепную дробь $2 + [6, 10, 14, \dots]$. Через r_n/s_n обозначим ее подходящие дроби. Числители r_n и знаменатели s_n удовлетворяют соотношениям (17.2.6) с начальными условиями

$$\begin{aligned} r_0 &= 2, \quad r_1 = 13, \\ s_0 &= 1, \quad s_1 = 6. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widetilde{r}_n = r_n + s_n, \ \widetilde{s}_n = r_n - s_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким образом,

$$\frac{\widetilde{r}_n}{\widetilde{s}_n} = \frac{r_n + s_n}{r_n - s_n} = \frac{r_n/s_n + 1}{r_n/s_n - 1} \to \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

Итак,

$$\zeta = \frac{(e+1) + (e-1)}{(e+1) - (e-1)} = e,$$

что завершает доказательство. □

§ 17.3. Ортогональные многочлены

Матрица Якоби. Бесконечная последовательность вещественных чисел $s = \{s_n\}_0^\infty$ называется *позитивной*, если для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ квадратичная форма

$$\sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k} x_j x_k, \quad x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

положительно определена. Согласно критерию Сильвестра это означает, что все определители Ганкеля положительны: $H_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{z^{k+1}} \tag{17.3.1}$$

все индексы $n \in \mathbb{Z}_+$ нормальные, т. е. n-я диагональная аппроксимация Паде $\pi_n = P_n/Q_n$ имеет порядок n, а числитель и знаменатель определены единственным образом (с точностью до нормировки).

Пусть $\mathfrak{S}$ — линейный функционал в линейном пространстве многочленов $\mathbb{C}[\lambda]$ и

$$s_n = \mathfrak{S}\{\lambda^n\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

— его *степенные моменты*. Функционал $\mathfrak{S}$ называется позитивным, если последовательность s позитивна. Такой функционал определяет в пространстве многочленов скалярное произведение $\mathfrak{S}\{f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\}$. Систему линейных уравнений (17.2.2), которой удовлетворяют коэффициенты многочлена Q_n, можно записать в виде следующих *соотношений ортогональности*:

$$\mathfrak{S}\{Q_n(\lambda)\lambda^k\} = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Таким образом, знаменатели Паде суть *многочлены, ортогональные* относительно функционала $\mathfrak{S}$. Будем считать, что последовательность $\{Q_n\}_0^\infty$ ортонормирована, т. е. старший коэффициент α_n многочлена Q_n положителен и

$$\mathfrak{S}\{Q_n Q_m\} = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Справедлива следующая детерминантная формула:

$$Q_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{H_n H_{n+1}}} \begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & \ldots & s_{2n-1} \\ 1 & \ldots & \lambda^n \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Через $\mathcal{M}$ обозначим *выпуклый конус конечных положительных борелевских мер* μ с бесконечным *носителем* S_μ на вещественной оси, таких, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda^n|\, d\mu(\lambda) < +\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Если $\mu \in \mathcal{M}$, то функционал

$$\mathfrak{S}_\mu\{f(\lambda)\} = \int f(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

является позитивным. Действительно,

$$\sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k} x_j x_k = \int \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \lambda^k \right)^2 d\mu(\lambda) > 0$$

для любых вещественных $x_0, \ldots, x_n$, не равных нулю одновременно.

В дальнейшем будем считать, что $s_0 = 1$. Разложив многочлен $\lambda Q_n(\lambda)$ в *ряд Фурье* по ортонормированной системе $\{Q_k\}_0^\infty$, приходим к *трехчленному рекуррентному соотношению*

$$h_n Q_{n+1}(\lambda) = (\lambda - v_n) Q_n(\lambda) - h_{n-1} Q_{n-1}(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.3.2}$$

с начальными условиями $Q_{-1} = 0,\ Q_0 = 1$, где числа

$$v_n = \mathfrak{S}\{\lambda Q_n^2(\lambda)\}$$

вещественны, а числа

$$h_n = \mathfrak{S}\{\lambda Q_n(\lambda)Q_{n+1}(\lambda)\} = \alpha_n/\alpha_{n+1}$$

положительны. Числители P_n удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, но с другими начальными условиями, а именно $P_{-1}=1$, $P_0 = 0$ $(h_{-1} = -1)$. Пусть $\widetilde{Q}_n = Q_n/\alpha_n$ — ортогональные многочлены с единичным старшим коэффициентом. Они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\widetilde{Q}_{n+1}(\lambda) = (\lambda - v_n)\widetilde{Q}_n(\lambda) - h_{n-1}^2\widetilde{Q}_{n-1}(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тем самым ряд (17.3.1) раскладывается в *непрерывную дробь Чебышёва*

$$f(z) = \cfrac{1}{z - v_0 - \cfrac{h_0^2}{z - v_1 - \cfrac{h_1^2}{z - v_2 - \cdots}}}.$$

Ее подходящие дроби суть диагональные аппроксимации Паде.

Рассмотрим следующую симметричную трехдиагональную *матрицу Якоби*

$$A = \begin{bmatrix} v_0 & h_0 & & \\ h_0 & v_1 & h_1 & \\ & h_1 & v_2 & h_2 \\ & & \ldots & \ldots \end{bmatrix}. \tag{17.3.3}$$

Через $Q(\lambda)$ обозначим вектор-столбец ортонормированных многочленов. Тогда рекуррентное соотношение (17.3.2) можно записать в виде

$$AQ(\lambda) = \lambda Q(\lambda).$$

Каждому позитивному функционалу мы поставили в соответствие матрицу Якоби. Оказывается, верно и обратное утверждение (теорема Фавара), т. е. матрица Якоби определяет последовательность многочленов $\{Q_n\}_0^\infty$ (пусть $Q_0 = 1$), которая ортонормирована относительно некоторого позитивного функционала. Покажем, что функционал, определенный формулой

$$\mathfrak{S}\{Q_0\} = 1, \qquad \mathfrak{S}\{Q_n\} = 0, \quad n \geqslant 1,$$

является искомым. Если $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то многочлен $\lambda^k Q_n(\lambda)$ является линейной комбинацией многочленов $Q_j(\lambda)$, где $j \geqslant n-k \geqslant 1$. Следовательно, $\mathfrak{S}\{\lambda^k Q_n(\lambda)\} = 0$. Из рекуррентных соотношений по индукции получим, что $\mathfrak{S}\{\lambda^n Q_n(\lambda)\} = h_{n-1}\cdots h_0$. С другой стороны, $\alpha_n = 1/(h_{n-1}\cdots h_0)$. Следовательно,

$$\mathfrak{S}\{Q_n^2(\lambda)\} = \mathfrak{S}\{\alpha_n\lambda^n Q_n(\lambda)\} = 1.$$

Итак, $\{Q_n\}_0^\infty$ ортонормирована относительно $\mathfrak{S}$. Значит, этот функционал позитивен.

Теорема Маркова. Эта теорема, доказываемая ниже, устанавливает равномерную сходимость непрерывной дроби Чебышёва к *марковской функции* меры с компактным носителем, а именно

$$\widehat{\mu}(z) = \int_{\Delta_\mu} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}} \backslash \Delta_\mu,$$

где Δ_μ — наименьший отрезок, содержащий носитель S_μ. Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

17.3.1. Предложение. *Функционал $\mathfrak{S}$ является позитивным тогда и только тогда, когда для всякого многочлена $Q \not\equiv 0$, неотрицательного на вещественной оси, имеем $\mathfrak{S}\{Q\} > 0$.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k} x_j x_k = \mathfrak{S}\left\{ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \lambda^k \right)^2 \right\} > 0$$

для любых вещественных $x_0, \ldots, x_n$, неравных нулю одновременно.

Обратное утверждение следует из того, что любой многочлен Q, неотрицательный на вещественной оси, можно представить в виде $Q = A^2 + B^2$ с некоторыми многочленами A и B. Действительно,

$$Q(\lambda) = \alpha \prod_k (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \bar{\lambda}_k), \quad \alpha > 0.$$

Далее, $(\lambda-(a+bi))(\lambda-(a-bi)) = (\lambda-a)^2+b^2$. При этом произведение суммы двух квадратов на сумму двух квадратов снова есть сумма двух квадратов. □

17.3.2. Предложение. *Все нули ортогональных многочленов являются вещественными и простыми.*

Доказательство. Через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ обозначим все точки вещественной оси, в которых фиксированный многочлен Q_n меняет знак. Положим $Q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_m)$. Тогда $Q_n Q \geqslant 0$, следовательно, $\mathfrak{S}\{Q_n Q\} > 0$. С другой стороны, если $m < n$, то $\mathfrak{S}\{Q_n Q\} = 0$. Следовательно, $m = n$. □

Нули многочлена Q_n будем обозначать $x_{n,1} < \cdots < x_{n,n}$. Для функционала $\mathfrak{S}_\mu$, где μ — мера с бесконечным компактным носителем, эти нули лежат внутри отрезка Δ_μ.

Запишем диагональные аппроксимации Паде в виде суммы простых дробей

$$\pi_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{n,j}}{z - x_{n,j}},$$

где

$$\mu_{n,j} = \operatorname*{res}_{z=x_{n,j}} \pi_n(z), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Эти величины называются *коэффициентами Кристоффеля.*

17.3.3. Предложение. *Квадратурная формула Гаусса*

$$\mathfrak{S}\{T(\lambda)\} = \sum_{j=1}^{n} \mu_{n,j} T(x_{n,j})$$

точна на многочленах степени не выше $2n-1$.

Доказательство. С одной стороны,

$$f(z) - \pi_n(z) = O\big(z^{-2n-1}\big), \quad z \to \infty.$$

С другой стороны,

$$\pi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{j=1}^{n} \mu_{n,j} x_{n,j}^k.$$

Таким образом, квадратурная формула точна на многочленах λ^k, где $k = 0, \ldots, 2n-1$. □

17.3.4. Предложение. *Коэффициенты Кристоффеля обладают следующими свойствами*:

(i) $\mu_{n,1} + \cdots + \mu_{n,n} = 1$;

(ii) $\mu_{n,j} > 0, \quad j = 1, \ldots, n.$

Доказательство. Свойство (i) очевидно из того, что

$$\mu_{n,1} + \cdots + \mu_{n,n} = \mathfrak{S}\{1\} = s_0 = 1.$$

Теперь докажем (ii). Рассмотрим *интерполяционные многочлены Лагранжа*

$$l_{n,j}(x) = \frac{Q_n(x)}{Q_n'(x_{n,j})(x - x_{n,j})}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\mathfrak{S}\{l_{n,j}^2\} = \sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} l_{n,j}^2(x_{n,k}) = \mu_{n,j} > 0,$$

что и требовалось доказать. □

17.3.5. Теорема (Марков). *Если μ — мера с компактным носителем, то диагональные аппроксимации Паде ряда Лорана в бесконечности ее марковской функции сходятся к ней равномерно внутри области $G = \mathbb{C}\backslash\Delta_\mu$.*

Доказательство. Можно считать, что носитель S_μ — бесконечное множество. Функции π_n голоморфны в области G. Пусть K — компакт в G и d — расстояние между K и Δ_μ, $d > 0$. Тогда

$$\|\pi_n\|_K = \max_{z\in K}\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{n,j}}{z - x_{n,j}}\right| \leqslant \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}\mu_{n,j} = \frac{1}{d}.$$

Последовательность $\{\pi_n\}_0^\infty$ равномерно ограничена внутри G. По теореме Монтеля она предкомпактна. Пусть f — любая ее предельная точка. Ряды Лорана функций f и $\widehat{\mu}$ совпадают, следовательно, эти функции равны в некоторой окрестности бесконечности. По теореме единственности $f = \widehat{\mu}$ в G. Единственность предельной точки равносильна существованию предела: $\pi_n \to \widehat{\mu}$. □

Классические ортогональные многочлены. В качестве примера рассмотрим матрицу Якоби с постоянными коэффициентами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & 1/2 & 0 & 1/2 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Найдем соответствующую ей меру ортогональности. Марковская функция этой меры есть сумма следующей чебышёвской дроби

$$f(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{1/4}{z - \cfrac{1/4}{z - \cdots}}}.$$

Имеем

$$f = \frac{1}{z - \frac{1}{4}f},$$

откуда

$$f^2 - 4zf + 4 = 0.$$

Следовательно,

$$f(z) = 2\big(z - \sqrt{z^2 - 1}\big), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}\backslash[-1, 1],$$

где берется ветвь функции, обратной к функции Жуковского, конформно отображающая внешность отрезка на единичный круг. Теперь плотность меры находим по *формуле Сохоцкого*

$$\mu'(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} f(x - i \cdot 0), \quad -1 < x < 1.$$

Получим следующее вероятностное распределение:

$$d\mu(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2}\, dx, \quad -1 < x < 1,$$

так называемый *универсальный закон полукруга.*

Многочлены, ортогональные по этой мере, называются *многочленами Чебышёва второго рода. Многочленами Чебышёва* первого рода называются многочлены, ортогональные по мере

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Многочленами Лежандра называются многочлены, ортогональные по мере Лебега на отрезке $[-1, 1]$. Все они суть частные случаи *многочленов Якоби*, ортогональных по мере

$$d\mu(x) = (1 - x)^{\alpha} (1 + x)^{\beta} dx, \quad -1 < x < 1,$$

где $\alpha > -1,\ \beta > -1$. Справедлива *формула Родрига*

$$Q_n(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

которая проверяется интегрированием по частям. Отметим, что здесь Q_n не ортонормированные многочлены, а ортогональные многочлены с другой нормировкой (стандартизованные).

Ниже мы рассмотрим также классические ортогональные многочлены, мера ортогональности которых имеет неограниченный носитель.

Иррациональность $\log 2$. Теперь получим верхнюю оценку меры иррациональности числа $\log 2$. Применим многочлены Лежандра для отрезка $[0, 1]$. Справедлива формула Родрига

$$Q_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{x^n (x - 1)^n\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} (-1)^{n-k} x^k.$$

Эти многочлены имеют целые рациональные коэффициенты.

Марковская функция равна

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x} = -\log\Bigl(1-\frac{1}{z}\Bigr), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}\backslash[0,1],$$

где берется главная ветвь логарифма. Она имеет следующее разложение в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\frac{1}{z^k}, \quad |z| > 1.$$

Положим

$$R_n(z) = Q_n(z)f(z) - P_n(z) = A_n z^{-n-1} + \cdots, \quad A_n \neq 0.$$

Обозначим через ω_n наименьшее общее кратное n первых натуральных чисел. Поскольку P_n — полиномиальная часть ряда $Q_n f$, то многочлены $\omega_n P_n$ имеют целые рациональные коэффициенты. Далее, верно равенство

$$R_n(z) = \int_0^1 \frac{Q_n(x)}{z-x}\,dx.$$

Интегрируя его по частям, получим

$$R_n(z) = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dx.$$

Положим $z=-1$, а также $\theta = f(-1) = \log 1/2$. Справедлива оценка

$$|Q_n(-1)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} \leqslant \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant 4^n \cdot 2^n.$$

Далее,

$$|R_n(-1)| \leqslant \int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx \leqslant 4^{-n}.$$

Известно, что $\omega_n \leqslant 3^n,\ n \in \mathbb{Z}_+$. Возьмем натуральное число q и целое число p. Пусть $l = q\theta - p$. Тогда

$$\omega_n Q_n(-1) l = \omega_n q R_n(-1) + Z_n,$$

где

$$Z_n = \omega_n(qP_n(-1) - pQ_n(-1))$$

есть целое рациональное число. Если $Z_n \neq 0$, то $|Z_n| \geqslant 1$. Следовательно,

$$|\omega_n Q_n(-1) l| \geqslant 1 - q\omega_n |R_n(-1)|.$$

Откуда

$$|l| \geqslant \alpha^n - q\beta^n, \tag{17.3.4}$$

где $\alpha = 1/24,\ \beta = 1/32$. Рассмотрим определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} Q_n & P_n \\ Q_{n+1} & P_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что это многочлен. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \begin{vmatrix} Q_n & P_n - Q_n f \\ Q_{n+1} & P_{n+1} - Q_{n+1} f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_n & Q_n \\ R_{n+1} & Q_{n+1} \end{vmatrix} \\ &= \Big(\frac{A_n}{z^{n+1}} + \cdots\Big)\big(\alpha_{n+1} z^{n+1} + \cdots\big) + O\big(z^{-2}\big) \\ &= A_n \alpha_{n+1} + O\big(z^{-1}\big), \quad z \to \infty,\end{aligned}$$

где α_{n+1} — старший коэффициент многочлена Q_{n+1}. Следовательно, многочлен $\Delta_n(z)$ является отличной от нуля константой. Поэтому для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ найдется индекс $n' = n$ или $n' = n + 1$ такой, что $Z_{n'} \neq 0$.

На промежутке $[1, +\infty)$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = \alpha^x - q\beta^x$. Найдем ее наибольшее значение. Имеем

$$\varphi'(x) = \alpha^x \log\alpha - q\beta^x \log\beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^x = q\,\frac{\log\beta}{\log\alpha}.$$

Следовательно,

$$x_* = \frac{\log(q\,\log\beta/\log\alpha)}{\log(\alpha/\beta)},$$

а наибольшее значение функции φ равно

$$\varphi(x_*) = c_* q^{-\nu}, \quad \nu = \frac{\log\alpha}{\log(\beta/\alpha)},$$

где

$$c_* = \alpha^{\nu_*} - \beta^{\nu_*}, \quad \nu_* = \frac{\log(\log\beta/\log\alpha)}{\log(\alpha/\beta)}.$$

Подставляя в неравенство (17.3.4) числа $n = [x_*]$ (целая часть) или $n = [x_*] + 1$, получим оценку $|l| \geqslant cq^{-\nu}$ с некоторой положительной постоянной c. Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

17.3.6. Теорема. *Существует такая эффективно вычислимая положительная постоянная c, что для любого натурального числа q и любого целого числа p выполняется неравенство*

$$|q\log 2 - p| \geqslant cq^{-\nu},$$

где показатель равен

$$\nu = \frac{3\log 2 + \log 3}{2\log 2 - \log 3}.$$

Гармонический осциллятор. Рассмотрим квантование *закона Гука* — колебания груза на пружинке, а именно напишем *стационарное уравнение Шрёдингера* для *гармонического осциллятора*

$$H\psi = E\psi, \tag{17.3.5}$$

где *оператор Гамильтона* имеет вид

$$H = p^2 + x^2,$$

при этом

$$p = -i\frac{d}{dx}$$

есть *оператор импульса.* Тем самым p^2 — *кинетическая энергия*, x^2 — *потенциальная энергия*. Здесь E — спектральный параметр — значение энергии системы. Решения уравнения (17.3.5) должны принадлежать гильбертову пространству $L^2(\mathbb{R})$. Мы опускаем все физические постоянные.

Введем *операторы рождения* и *уничтожения фотона*

$$a_+ = \frac{d}{dx} - x, \quad a_- = \frac{d}{dx} + x.$$

Их *коммутатор* равен $[a_+, a_-] = 2I$, где I — единичный оператор. Оператор Гамильтона равен $H = I - a_+a_-$. *Вакуум*, т. е. состояние с наименьшей энергией, находим из уравнения

$$a_-\psi_0 = 0. \tag{17.3.6}$$

Тогда $H\psi_0 = \psi_0$, т. е. $E_0 = 1$. Заметим, что и в состоянии вакуума система обладает ненулевой энергией. Положим $\psi_n = a_+^n\psi_0$. Имеем

$$H\psi_1 = (I - a_+a_-)a_+\psi_0 = \psi_1 + a_+(2I - a_+a_-)\psi_0 = 3\psi_1.$$

По индукции получим

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \quad E_n = 2n + 1,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{17.3.7}$$

Таким образом, оператор H имеет чисто дискретный спектр, состоящий из уровней энергии (17.3.7), где n — число фотонов. Собственные *волновые функции* $\{\psi_n\}_0^\infty$ образуют полную ортогональную систему в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Из (17.3.6) находим $\psi_0(x) = e^{-x^2/2}$. Далее по индукции получаем

$$\psi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где H_n — многочлены степени n, которые называются *многочленами Эрмита* или *Чебышёва–Эрмита*. Они ортогональны с весом e^{-x^2} на всей вещественной оси. Через $H_n^*(x) = \alpha_n x^n + \cdots$ обозначим ортонормированные многочлены.

Нам осталось найти матрицу Якоби для многочленов Эрмита, т. е. матрицу оператора умножения на независимую переменную x в базисе $\{H_n^*(x)\}_0^\infty$ весового *пространства Лебега* $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. Справедлива формула Родрига

$$\widetilde{H}_n(x)e^{-x^2} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Здесь $\widetilde{H}_n(x) = (-2x)^n/n! + \cdots$ — стандартизованные многочлены. Интегрируя по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \widetilde{H}_n(x)e^{-x^2}\,dx = \frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n \cdot e^{-x^2}\,dx$$
$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = (-1)^n\sqrt{\pi}.$$

Следовательно, старший коэффициент многочлена H_n^* равен

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{n!}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким образом, коэффициенты рекуррентных соотношений равны

$$h_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Окончательно получаем, что матрица Якоби имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & & & \\ \sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{2/2} & & \\ & \sqrt{2/2} & 0 & \sqrt{3/2} & \\ & & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & \end{bmatrix}.$$

К классическим ортогональным многочленам, кроме многочленов Якоби и Эрмита, относятся также *многочлены Лагерра* L_n, ортогональные на полуоси $[0; +\infty)$ с весом $x^\alpha e^{-x}$, где $\alpha > -1$. Для них справедлива формула Родрига

$$L_n(x)x^\alpha e^{-x} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

§ 17.4. Линейные операторы

Лебеговы операторы. Как видно из построения матрицы Якоби A (см. (17.3.3)), она определяет в гильбертовом пространстве $l_2 = l_2(\mathbb{Z}_+)$ линейный оператор $A_0\colon D_{A_0} \to l_2$, определенный на всюду плотном в l_2 линейном многообразии финитных последовательностей. Взяв замыкание графика оператора A_0, получим *минимальное замкнутое расширение* $A\colon D_A \to l_2$, определенное на некотором линейном многообразии $D_A \supset D_{A_0}$. Этот оператор является *симметрическим*, т. е.

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad x, y \in D_A.$$

Оператор A будем называть *оператором Якоби.*

Пусть H — абстрактное гильбертово пространство, $A\colon D_A \to H$ — минимальный замкнутый симметрический линейный оператор. Оператор A называется *лебеговым* или оператором с *простым спектром*, если существует *циклический вектор* φ, т. е. такой вектор, что система векторов $\{\varphi_n = A^n\varphi\colon n \in \mathbb{Z}_+\}$ полна в H. Лебегов оператор унитарно эквивалентен оператору Якоби. Действительно, применяя к последовательности $\{\varphi_n\}_0^\infty$ процесс ортогонализации Грама – Шмидта, получим ортонормированный базис $\{f_n\}_0^\infty$, в котором матрицей оператора A будет некоторая матрица Якоби. Соответствующий унитарный оператор переводит этот базис в канонический базис $\{e_n\}_0^\infty$ пространства l_2.

Пусть линейное многообразие D_{A^*} состоит из тех и только тех векторов $y \in H$, для которых линейный функционал

$$F_y(x) = (Ax, y), \quad x \in D_A$$

будет ограниченным. Тогда по непрерывности он продолжается на все пространство H, и по теореме Рисса существует единственный вектор $y^* \in H$ такой, что

$$F_y(x) = (x, y^*), \quad x \in H.$$

Положим $A^*y = y^*$. Линейный оператор $A^*\colon D_{A^*} \to H$ называется *сопряженным* к оператору A. Оператор A^* есть *максимальное замкнутое расширение* оператора A. Другими словами, $y \in D_{A^*}$, если $y \in l_2$ и результат умножения матрицы на вектор-столбец есть $y^* = Ay \in l_2$. Оператор A называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т. е. $D_A = D_{A^*}$.

Оператор A ограничен тогда и только тогда, когда элементы матрицы Якоби ограничены. Это означает, что оператор всюду определен, т. е. $D_A = H$. Ограниченный оператор является самосопряженным. Неограниченные операторы могут быть как самосопряженными, так и несамосопряженными.

Из теоремы 17.3.5 следует, что для любого ограниченного лебегова оператора A существует (и единственна) такая вероятностная мера μ с бесконечным компактным носителем на вещественной оси, что оператор A унитарно эквивалентен оператору умножения на независимую переменную в пространстве L^2_μ. Эта мера называется *спектральной мерой* оператора A. Соответствующий унитарный оператор переводит канонический базис $\{e_n\}_0^\infty$ в басис из ортонормированных многочленов $\{Q_n\}_0^\infty$.

Аналогичный результат справедлив для неограниченных самосопряженных операторов. Мы рассмотрим лишь один пример.

Многочлены Полачека. Найдем спектральную меру оператора

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 2 & & \\ & 2 & 0 & 3 & \\ & & 3 & 0 & 4 \\ & & & \dots & \end{bmatrix}. \tag{17.4.1}$$

Ортогональные многочлены удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$xQ_n(x) = (n+1)Q_{n+1}(x) + nQ_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.4.2}$$

и начальным условиям $Q_{-1}(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$. Рассмотрим *Z-преобразование* последовательности $\{Q_n\}_0^\infty$, т. е. введем производящую функцию

$$\Phi(x; z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) z^n.$$

Умножим обе части равенства (17.4.2) на z^n и просуммируем эти равенства по $n \in \mathbb{Z}_+$. Получим

$$x\Phi = \frac{\partial}{\partial z}\Phi + z\frac{\partial}{\partial z}z\Phi$$

или

$$(z^2+1)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (x-z)\Phi. \tag{17.4.3}$$

Полученное дифференциальное уравнение является линейным и однородным первого порядка. Решаем его методом разделения переменных:

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{x-z}{z^2+1}\,dz, \qquad \frac{x-z}{z^2+1} = \frac{(x-i)/2}{1+iz} + \frac{(x+i)/2}{1-iz},$$

откуда

$$\Phi(x; z) = (1+iz)^{(-ix-1)/2}(1-iz)^{(ix-1)/2}.$$

Функция Φ голоморфна в единичном круге. Мы берем главные ветви многозначных функций такие, что выполнено начальное условие $\Phi(x; 0) = 1$.

Многочлены второго рода $P_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (17.4.2) при $n \geqslant 1$, а также двум начальным условиям

$P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 1$. Рассмотрим производящую функцию

$$\Psi(x; z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Аналогично предыдущему получим следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(z^2 + 1)\frac{\partial \Psi}{\partial z} = (x - z)\Psi + 1,$$

соответствующее однородному уравнению (17.4.3). Решаем его методом Лагранжа (методом вариации постоянной). Пусть $\Psi = C\Phi$. Тогда

$$(z^2 + 1)\Phi C' = 1.$$

Отсюда

$$C(x; z) = \int_0^z (1 + it)^{(-1+ix)/2}(1 - it)^{(-1-ix)/2}\, dt.$$

Кроме того, выполнено начальное условие $C(x; 0) = 1$.

Нам понадобится следующая *теорема тауберова типа*.

17.4.1. Теорема (лемма Дарбу)**.** *Пусть степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

имеет радиус сходимости $R = 1$ и $\zeta = 1$ — единственная особая точка на границе круга сходимости, причем функция $f(z)$ имеет в этой точке алгебро-логарифмическую (*степенную*) *особенность, а именно*

$$f(z) = (1 - z)^{\nu} g(z),$$

где $\nu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_+$, при этом берется главная ветвь степенной функции, функция $g(z)$ голоморфна в точке $z = 1$ и $g(1) \neq 0$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$a_n = \frac{g(1)}{\Gamma(-\nu)} n^{-\nu-1}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$(1 - z)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} (-z)^n, \quad |z| < 1.$$

По формуле Стирлинга имеет место соотношение

$$(-1)^n \binom{\nu}{n} = \frac{n^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big), \quad n \to \infty.$$

Зафиксируем натуральные числа $l \geqslant \operatorname{Re}\nu + 2$ и $m \geqslant l - \operatorname{Re}\nu$. Пусть

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (1-z)^j.$$

Положим

$$f^*(z) = (1-z)^{\nu} \sum_{j=0}^{m} b_j (1-z)^j = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* z^n, \quad |z| < 1.$$

Тогда

$$a_n^* = \frac{b_0}{\Gamma(-\nu)} n^{-\nu-1} \Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big), \quad n \to \infty.$$

Положим

$$\widetilde{f}(z) = f(z) - f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{a}_n z^n, \quad |z| < 1.$$

Имеем

$$\widetilde{f}(z) = O\big((1-z)^{\nu+m+1}\big) = O\big((1-z)^{l+1}\big), \quad z \to 1.$$

Следовательно, функция $\widetilde{f}(e^{i\varphi})$ будет l раз непрерывно дифференцируемой на вещественной оси. Тогда ее коэффициенты Фурье $\widetilde{a}_n$ убывают следующим образом:

$$\widetilde{a}_n = o(n^{-l}) = O(n^{-\nu-2}), \quad n \to \infty.$$

Равенство

$$a_n = a_n^* + \widetilde{a}_n$$

доказывает теорему. □

Вернемся к исследованию функции Ф. Если радиус сходимости R — любое число из интервала $(0; +\infty)$, а ζ — любая точка на границе круга сходимости, то сделав замену $z \mapsto \zeta z$, придем к лемме Дарбу. Если на границе круга сходимости имеется конечное число особых точек, то каждая из них вносит свой вклад в асимптотику коэффициентов.

Функция Ф голоморфна в единичном круге. Отметим, что на единичной окружности она имеет, вообще говоря, две особые точки $\pm i$. Воспользуемся леммой Дарбу. Пусть x лежит в верхней полуплоскости. Тогда основной вклад в асимптотику дает точка $-i$, а именно

$$Q_n(x) = B_n(x)(1 + O(1/n)), \quad n \to \infty,$$

где имеет место представление

$$B_n(x) = \frac{(-i)^n}{\Gamma\big((-ix+1)/2\big)} (2n)^{(-ix-1)/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогично для многочленов второго рода имеем

$$P_n(x) = B_n(x)C(x; -i)(1 + O(1/n)), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, аппроксимации Паде $\pi_n = P_n/Q_n$ сходятся равномерно на компактах в верхней полуплоскости к функции $f(x) = C(x; -i)$. Аналогично, в нижней полуплоскости $f(x) = C(x; +i)$. Плотность спектральной меры вычисляем по формуле

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\big(f(x - i \cdot 0) - f(x + i \cdot 0)\big), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Получим

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i}^{+i} (1 + it)^{(-1+ix)/2}(1 - it)^{(-1-ix)/2}\, dt.$$

Сделаем замену $t = i(1 - 2s)$. Тогда

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 s^{(-1+ix)/2}(1 - s)^{(-1-ix)/2}\, ds = \frac{1}{2\pi}\mathsf{B}\left(\frac{1 + ix}{2}, \frac{1 - ix}{2}\right),$$

где B — бета-функция. Из формулы дополнения для гамма-функции получим окончательный результат.

17.4.2. Теорема. *Спектральная мера оператора* (17.4.1) *равна*

$$d\mu(x) = \frac{dx}{2\operatorname{ch}(\pi x/2)}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Многочлены, ортогональные по этой мере, называются *многочленами Полачека*. Функция $1/\operatorname{ch} x$ является производящей функцией чисел Эйлера.

Цепочка Ленгмюра. Бесконечная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{c}_n = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.4.4}$$

с граничным условием $c_{-1} = 0$, называется цепочкой Ленгмюра. Решение $c(t) = (c_0(t), c_1(t), \dots)$ ищется на полуоси $t \in [0, +\infty)$. Решение должно состоять из положительных функций $c_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для системы (17.4.4) ставится задача Коши, т. е. задаются начальные условия $c(0)$. Мы рассмотрим лишь случай, когда эта последовательность ограничена.

17.4.3. Теорема. *Решение цепочки Ленгмюра существует и определено формулой*

$$\frac{\int_S e^{tx^2}(z-x)^{-1}\,d\mu(x)}{\int_S e^{tx^2}\,d\mu(x)} = \cfrac{1}{z-\cfrac{c_0(t)}{z-\cfrac{c_1(t)}{z-\cdots}}}, \tag{17.4.5}$$

где μ — конечная положительная борелевская мера с бесконечным компактным носителем S на вещественной оси.

Поясним формулу (17.4.5). Это — *метод прямой/обратной спектральной задачи.* При $t = 0$ известная нам непрерывная дробь Чебышёва в правой части равенства (17.4.5) сходится равномерно на компактах в области $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta$, где Δ — выпуклая оболочка носителя S, к марковской функции некоторой (пусть вероятностной) меры μ. Тем самым, мы решили прямую спектральную задачу, а именно, нашли спектральную меру оператора Якоби. Дальнейшая динамика меры задана в левой части равенства (17.4.5). При каждом $t > 0$ мы решаем обратную спектральную задачу, т. е. по спектральной мере восстанавливаем оператор Якоби, а именно, раскладываем соответствующую этой мере марковскую функцию в чебышёвскую непрерывную дробь.

Доказательство теоремы 17.4.3. Через A обозначим ограниченный самосопряженный оператор в пространстве l_2, заданный матрицей Якоби

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & & & \\ a_0 & 0 & a_1 & & \\ & a_1 & 0 & a_2 & \\ & & \cdots & \cdots & \end{bmatrix}, \quad a_n = \sqrt{c_n},\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

Через μ обозначим спектральную меру оператора A. Наряду с оператором A рассмотрим ограниченный кососимметрический оператор B, заданный матрицей

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -b_1 & & & \\ b_0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & & \\ & b_1 & 0 & 0 & 0 & -b_3 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{bmatrix}, \ b_n = \frac{1}{2}\sqrt{c_n c_{n+1}},\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

17.4.4. Лемма. *Функции c_n удовлетворяют системе* (17.4.4) *тогда и только тогда, когда операторы A и B образуют пару Лакса, т. е.*

$$\dot A = [A,B], \quad \text{где } [A,B] = AB - BA. \tag{17.4.6}$$

Доказательство. Равенство (17.4.6) проверяется прямым вычислением. Имеем

$$A_{n,n+1} = A_{n+1,n} = a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Остальные матричные элементы оператора A равны нулю. Далее,

$$-B_{n,n+2} = B_{n+2,n} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Остальные матричные элементы оператора B равны нулю. Имеем

$$(AB)_{n,m} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k} B_{k,m} = a_{n-1} B_{n-1,m} + a_n B_{n+1,m}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &(AB)_{n,n-3} = a_{n-1} b_{n-3}, \quad (AB)_{n,n+1} = -a_{n-1} b_{n-1}, \\ &(AB)_{n,n-1} = a_n b_{n-1}, \qquad (AB)_{n,n+3} = -a_n b_{n+1}. \end{aligned}$$

Остальные матричные элементы оператора AB равны нулю. Аналогично,

$$\begin{aligned} &(BA)_{n,n-3} = a_{n-3} b_{n-2}, \quad (BA)_{n,n+1} = -a_{n+1} b_n, \\ &(BA)_{n,n-1} = a_{n-2} b_{n-2}, \quad (BA)_{n,n+3} = -a_{n+2} b_n. \end{aligned}$$

Остальные матричные элементы оператора BA равны нулю. Таким образом,

$$[A, B]_{n,n+1} = [A, B]_{n+1,n} = a_{n+1} b_n - a_{n-1} b_{n-1} = \frac{1}{2}\sqrt{c_n}(c_{n+1} - c_{n-1}).$$

Остальные матричные элементы оператора $[A, B]$ равны нулю. Теперь осталось заметить, что

$$\dot{a}_n = \frac{d}{dt}\sqrt{c_n} = \frac{\dot{c}_n}{2\sqrt{c_n}} = \frac{1}{2}\sqrt{c_n}(c_{n+1} - c_{n-1}),$$

что завершает доказательство. □

Обозначим через $\{s_n\}_0^\infty$ степенные моменты спектральной меры. Заметим, что $s_0 = 1$, $s_1 = s_3 = \cdots = 0$. В некоторой окрестности бесконечности марковская функция раскладывается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}}.$$

17.4.5. Лемма. *Функции c_n удовлетворяют системе* (17.4.4) *тогда и только тогда, когда степенные моменты s_n удовлетворяют* *следующей бесконечной цепочке обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений*:

$$\dot{s}_{2n} = s_{2n+2} - s_{2n}s_2, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{17.4.7}$$

Доказательство. Умножим обе части (17.4.7) на $1/z^{2n+1}$ и просуммируем полученные равенства по всем $n \in \mathbb{Z}_+$. Получим

$$\dot{f} = (z^2 - s_2)f - z.$$

Через

$$R_z = (zI - A)^{-1}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}}\backslash S,$$

обозначим резольвенту оператора A. Тем самым S есть спектр оператора A. Функция R_z голоморфна в указанной области. В некоторой окрестности бесконечности она раскладывается в ряд Лорана

$$R_z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}}.$$

Тогда

$$f(z) = (R_z e_0, e_0)$$

есть резольвентная функция (или *функция Вейля*) оператора A. Заметим, что

$$(A^n)^{\cdot} = [A^n, B], \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Действительно, по индукции имеем

$$\begin{aligned} &(A^{n+1})^{\cdot} = (A^n \cdot A)^{\cdot} = (A^n)^{\cdot} \cdot A - A^n \cdot \dot{A} \\ &= (A^n B - BA^n)A + A^n(AB - BA) = A^{n+1}B - BA^{n+1} = [A^{n+1}, B]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{R}_z = [R_z, B].$$

Эта формула нами доказана в некоторой окрестности бесконечности, но по теореме единственности для голоморфных функций она справедлива на всем резольвентном множестве $\bar{\mathbb{C}}\backslash S$. В частности,

$$\begin{aligned} \dot{f}(z) = (\dot{R}_z e_0, e_0) =&[R_z, B]_{0,0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(R_z)_{0,k}B_{k,0} - \sum_{k=0}^{\infty} B_{0,k}(R_z)_{k,0} = 2b_0(R_z)_{0,2}. \end{aligned}$$

Таким образом, нам осталось проверить тождество

$$2b_0(R_z)_{0,2} = (z^2 - s_2)f - z.$$

Имеем $s_0 = 1,\ s_1 = 0,\ s_2 = (A^2)_{0,0} = a_0^2 = c_0$. Далее, из рекуррентных соотношений получим

$$Q_0(z) = 1, \quad Q_1(z) = \frac{z}{\sqrt{c_0}}, \quad Q_2(z) = \frac{z^2}{\sqrt{c_0c_1}} - \sqrt{\frac{c_0}{c_1}}.$$

Многочлены второго рода вычисляем по формуле

$$P_n(z) = \int_S \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x}\, d\mu(x).$$

Получим

$$P_0(z) = 0, \quad P_1(z) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}, \quad P_2(z) = \frac{z}{\sqrt{c_0c_1}}.$$

Обозначим через $X = (X_0, X_1, \dots)$ нулевую строку матрицы резольвенты. Она удовлетворяет матричному уравнению $X(zI - A) = I$, или в явном виде

$$\begin{aligned} &a_0X_1 = zX_0 - 1,\\ &a_nX_n + a_{n+1}X_{n+2} = zX_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Решением этой системы служат функции второго рода $X_n = Q_nf - P_n$. При этом $X_0 = f$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} 2b_0(R_z)_{0,2} &= \sqrt{c_0c_1}X_2 = \sqrt{c_0c_1}(Q_2f - P_2)\\ &= \sqrt{c_0c_1}\Big(\Big(\frac{z^2}{\sqrt{c_0c_1}} - \sqrt{\frac{c_0}{c_1}}\Big)f - \frac{z}{\sqrt{c_0c_1}}\Big) = (z^2 - c_0)f - z, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Пусть $\nu = \sigma_0\mu$. Степенные моменты меры ν равны $\sigma_n = s_n\sigma_0$. Положим $\dot\sigma_0 = \sigma_2$. Тогда $\dot\sigma_{2n} = \sigma_{2n+2}$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, $d\dot\nu(x) = x^2d\nu(x)$. Откуда $d\nu(x) = e^{tx^2} \cdot d\mu(x)|_{t=0}$. □

Глава 18

Функции нескольких комплексных переменных

В. К. Белошапка

Теория функций нескольких комплексных переменных при начальном знакомстве очень похожа на классическую теорию голоморфных функций одного переменного. Однако дальнейшее знакомство позволяет обнаружить ряд существенных отличий.

§ 18.1. Многомерное комплексное линейное пространство

Если функция зависит от n комплексных переменных, то ее область определения — область пространства $\mathbf{C}^n$. Геометрия этих пространств при $n > 1$ гораздо разнообразнее, чем геометрия комплексной плоскости. Забывая о комплексной структуре нашего линейного пространства, мы можем смотреть на него как на вещественное пространство $\mathbf{R}^{2n}$. Поточечно эти пространства совпадают. Линейное пространство подразумевает сложение векторов и умножение их на константы (элементы поля констант). Сложение в $\mathbf{R}^{2n}$ и в $\mathbf{C}^n$ также совпадают, разница в том, что во втором пространстве констант больше. Все различие можно свести к дополнительной возможности умножения на единственную дополнительную константу $i = \sqrt{-1}$. С точки зрения вещественного пространства преобразование

$$J\colon (x,y) = (x+iy) \to i(x+iy) = (-y+ix) = (-y,x)$$

есть линейный оператор (линейное отображение пространства в себя) со свойством $J^2 = -Id$ (тождественный оператор).

18.1.1. Задача. (1) Пусть в некотором вещественном линейном пространстве V размерности N задан оператор J, для которого $J^2 = -Id$. Тогда N четно; определяя умножение на комплексные константы с помощью J, мы превратим V в комплексное линейное пространство размерности $N/2$.

(2) Пусть координаты $\mathbf{C}^n$ есть $(z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n)$. Записать в указанных вещественных координатах (x_i, y_i) матрицу оператора $Jz = iz$.

При этом оператор J называется *оператором комплексной структуры*. Комплекснозначная (определенная на $\mathbf{R}^{2n}$) вещественно линейная функция $l(z)$ является комплексно линейной функцией, если она правильно реагирует на умножение на i. А именно $l(iz) = il(z)$.

18.1.2. Задача. Найти условие на координатную запись комплекснозначной вещественно линейной функции $l(z)$, эквивалентное ее комплексной линейности. *Указание*: воспользуйтесь формализмом $(z, \bar{z})$.

Комплексная плоскость, с точки зрения размерностей, демонстрировала три типа объектов: нульмерные — точки, одномерные — кривые, двумерные — области. При этом точки и области можно признать чисто комплексными объектами (комплексными многообразиями), а кривые — объекты вещественные. Кривые присутствуют в комплексном анализе разнообразно и на вполне законных основаниях (границы областей, пути интегрирования, пути аналитического продолжения и т. п.). В многомерном анализе мы также будем интересоваться как комплексными объектами (подмногообразиями), так и вещественными.

Если не выходить за рамки линейных подпространств, то даже 2-мерное комплексное подпространство $\mathbf{C}^2 \approx \mathbf{R}^4$ позволяет рассматривать собственные подпространства размерностей 1, 2 и 3 (вещественные прямые, 2-мерные плоскости и 3-мерные гиперплоскости). Каждое линейное пространство можно задавать параметрически, как линейную оболочку векторов, и как решение системы уравнений.

Пусть $z = x + iy = (z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2)$ — координаты в $\mathbf{C}^2$. Гиперплоскость задается одним вещественным уравнением, 2-мерная плоскость — двумя. Одномерное комплексное подпространство с вещественной точки зрения — 2-мерная плоскость в $\mathbf{R}^4$, которая удовлетворяет дополнительному условию $J(V) = V$ — инвариантность относительно комплексного умножения.

18.1.3. Задача. Пусть 2-мерная плоскость в комплексном пространстве задана в виде $V = \{l_1(x, y) = l_2(x, y) = 0\}$. Найти условие на коэффициенты l_1 и l_2, равносильные тому, что V — комплексная прямая.

18.1.4. Задача. (1) Любая вещественно линейная функция $l(x, y)$ в $\mathbf{C}^n \approx \mathbf{R}^{2n}$ имеет вид $l(x, y) = 2\mathrm{Re}(L(z))$, где L — комплексно линейная функция.

(2) Если V — вещественное подпространство $\mathbf{R}^{2n}$ (вещественной) коразмерности 1, тогда $W = V \cap J(V)$ — комплексное подпространство в $\mathbf{C}^n$ комплексной коразмерности 1.

(3) Любая вещественная гиперплоскость — семейство параллельных комплексных гиперплоскостей.

В связи с этой задачей дадим общее определение. Пусть V — вещественное подпространство $\mathbf{C}^n \approx \mathbf{R}^{2n}$. Комплексное подпространство $V^C = V \cap J(V)$ называется *комплексной частью* пространства V.

18.1.5. Задача. Пусть V — 2-мерное подпространство $\mathbf{C}^2 \approx \mathbf{R}^4$. Какие значения может принимать $\dim V^C$?

В пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ длины векторов и соответственно расстояния между точками измеряет стандартная квадратичная форма, которая в $\mathbf{C}^n$ может быть записана как эрмитова

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |x|^2 + |y|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n.$$

В качестве стандартных окрестностей в комплексном пространстве можно предложить два варианта.

Первый — шар $B(a, r) = \{|z - a| < r\}$ с центром в a радиуса $r > 0$, второй — полидиск $\Delta(a, r) = \{|z_j - a_j| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — декартово произведение n координатных дисков, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ — полирадиус. Это комплексный аналог вещественного куба. На границе полидиска лежит n-мерный тор T^n — произведение n окружностей $\{|z_j - a_j| = r_j\}$. Этот тор называется остовом полидиска.

18.1.6. Задача. Опишите явно границы шара и полидиска.

18.1.7. Задача. Пусть M — $2k$-мерное гладкое замкнутое подмногообразие $\mathbf{C}^n \approx \mathbf{R}^{2n},\ k < n$. Докажите, что M — k-мерное комплексное подмногообразие $\mathbf{C}^n$ тогда и только тогда, когда касательное пространство T_pM в каждой точке $p \in M$ является k-мерной комплексной плоскостью $\mathbf{C}^n$.

18.1.8. Задача. Пусть a — точка сферы $S^{2n-1} = \{|z| = 1\}$. Напишите уравнение касательной плоскости в точке a и ее комплексной части.

§ 18.2. Голоморфные функции

На голоморфные функции функции нескольких переменных, как и на функции одной переменной, можно смотреть с нескольких разных точек зрения. И так же, как и в одном переменном, эти точки зрения оказываются эквивалентными. Эта цепочка эквивалентностей повторяет, с небольшим отступлением, ту, что имела место при определении голоморфных функций одного переменного.

Первый шаг. Пусть функция $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ определена в области D пространства $\mathbf{C}^n$. Если в точке $a \in D$ функция имеет полный дифференциал (в смысле вещественного анализа, т. е. как отображение $\mathbf{R}^{2n}$ в $\mathbf{R}^2$, то этот дифференциал $df|_a$ представляет собой линейное отображение со значениями в $\mathbf{R}^2$. Если воспользоваться комплексной арифметикой и считать, что значения принимаются в $\mathbf{C}^1$, то тогда мы можем записать дифференциал как комплекснозначную линейную форму $2n$ вещественных переменных

$$df|_a(dx, dy) = f'_{x_1}(a)\,dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(a)\,dx_n + f'_{y_1}(a)\,dy_1 + \cdots + f'_{y_n}(a)\,dy_n.$$

Замена $dx_j = (dz_j + d\bar{z}_j)/2,\ dy_j = (dz_j - d\bar{z}_j)/(2i)$ в этом равенстве дает выражение, линейное по $(dz, d\bar{z})$. Причем коэффициент при dz_j равен $(f'_{x_j} - i\,f'_{y_j})/2$, а коэффициент при $d\bar{z}_j$ равен $(f'_{x_j} + i\,f'_{y_j})/2$. Обозначая эти выражения через f'_{z_j} и $f'_{\bar{z}_j}$ соответственно, можем записать

$$df|_a = f'_{z_1}(a)\,dz_1 + \cdots + f'_{z_n}(a)\,dz_n + f'_{\bar{z}_1}(a)\,d\bar{z}_1 + \cdots + f'_{\bar{z}_n}(a)\,d\bar{z}_n.$$

Часть этого выражения, линейную по dz, обозначим через ∂f, а линейную по $d\bar{z}$ через $\bar{\partial} f$, т. е. $df = \partial f + \bar{\partial} f$. Ясно, что условие того, что дифференциал f — комплексно линейное выражение, есть условие $\bar{\partial} f = 0$. Это соотношение называется уравнениями Коши – Римана.

18.2.1. Задача. Запишите уравнения Коши – Римана как соотношения на вещественные производные вещественной и мнимой частей $f = u + iv$.

Если функция дифференцируема в области, мы зафиксируем все переменные, кроме одного, и рассмотрим ее как функцию одного переменного на пересечении области с этой комплексной прямой, то полученная функция будет, несомненно, голоморфной функцией этого переменного.

Второй шаг. Пусть f непрерывна в D и голоморфна по каждому переменному, a — точка D, и пусть $\Delta = \Delta(a, r)$ — некоторый полидиск с центром в a, содержащийся в D вместе со своим замыканием. Воспользовавшись голоморфностью f по первому переменному в окрестности круга $\{|z_1 - a_1| \leqslant r_1\}$, мы можем для $z \in \Delta$ написать интегральную формулу Коши в виде

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)\,d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)}.$$

Используя формулу Коши для функции $f(\zeta_1, z_2, ..., z_n)$ по второму переменному, мы получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_1 - a_1| = r_1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z_2 - a_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, z_n)\,d\zeta_2}{(\zeta_2 - z_2)} \right) \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)}.$$

Применяя это рассуждение n раз мы получаем представление нашей функции в виде повторного интеграла по переменным $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Функция f непрерывна на остове полидиска, поэтому теорема Фубини позволяет нам заменить повторный интеграл на кратный интеграл по остову. В итоге получаем кратную интегральную формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}. \tag{18.2.1}$$

Третий шаг. Представим ядро этой интегральной формулы как сумму кратной геометрической прогрессии для членов $1/(\zeta_j - z_j)$:

$$\frac{1}{(\zeta_j - a_j) - (z_j - a_j)} = \frac{1}{(\zeta_j - a_j)} \frac{1}{1 - \frac{(z_j - a_j)}{(\zeta_j - a_j)}} = \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(z_j - a_j)^{m_j}}{(\zeta_j - a_j)^{m_j+1}}.$$

Поэтому подынтегральное выражение можем записать в виде

$$\sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \frac{(z_1 - a_1)^{m_1}}{(\zeta_1 - a_1)^{m_1+1}} \cdots \frac{(z_n - a_n)^{m_n}}{(\zeta_n - a_n)^{m_n+1}}.$$

Со сходимостью этой геометрической прогрессии все в порядке, так как в наших предположениях все знаменатели $\frac{(z_j - a_j)}{(\zeta_j - a_j)}$ по модулю строго меньше единицы. Если же рассмотреть этот ряд на $q\Delta,\ 0 < q < 1$, то он сходится равномерно. Мажоранта — числовой ряд Σq^m. Пользуясь абсолютной сходимостью, мы поменяли порядок сложения и умножения. Теперь, пользуясь равномерной сходимостью по ζ, проинтегрируем этот ряд по $q\,T^n$ почленно и получим

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} c_{m_1, \ldots, m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \cdots (z_n - a_n)^{m_n},$$

где для коэффициентов получаем интегральные представления вида

$$c_{m_1, \ldots, m_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{qT^n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - a_1)^{m_1+1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{m_n+1}}. \tag{18.2.2}$$

т. е. внутри полидиска Δ мы получили представление функции f в виде суммы кратного степенного ряда. Ряд сходится равномерно на компактных подмножествах Δ. Ниже мы вернемся к обсуждению свойств кратных степенных рядов, а пока сделаем еще один шаг и замкнем нашу цепочку.

Четвертый шаг. Покажем, что сумма кратного степенного ряда — функция, которая в каждой точке полидиска имеет комплексно линейный полный дифференциал.

Кратный степенной ряд является степенным рядом по каждому переменному по отдельности. Его сумма — функция класса C^1 (непрерывные вещественные частные производные), а это гарантирует наличие полного дифференциала. Оставшееся условие $\bar{\partial} f = 0$ следует из равенства нулю производных $f'_{\bar{z}_j}$. В итоге доказан такой факт.

18.2.2. Предложение. *Пусть f — непрерывная функция в области D пространства $\mathbf{C}^n$. Следующие условия эквивалентны*:

(a) *в каждой точке D функция f имеет комплексно линейный полный дифференциал, т. е. $df = \partial f$, $\bar{\partial} f = 0$;*

(b) *в каждом полидиске Δ, компактно содержащемся в D, функция f представима кратной интегральной формулой Коши* (18.2.1);

(c) *в каждом полидиске Δ, компактно содержащемся в D, функция f представима в виде суммы кратного степенного ряда.*

(O.1) Функция f, удовлетворяющая любому из этих условий, называется *голоморфной* в D.

В этот список можно включить следующую формулировку.

18.2.3. Предложение. *Непрерывная функция f голоморфна в D тогда и только тогда, когда оно голоморфна по каждому переменному по отдельности* (*сепаратная аналитичность*).

Это сразу следует из того, что в этом случае выполнен пункт (b), т. е. наличие полного дифференциала следует из сепаратной аналитичности и непрерывности. Уместно задать вопрос: «А что если непрерывности исходно нет?» Ответ на этот вопрос положительный. Непрерывность и все остальное следует из одной только раздельной аналитичности. Однако доказательство этой теоремы (теоремы Хартогса), с которым можно ознакомиться по книге [4], требует техники субгармонических функций, и мы его здесь не приводим. Чтобы понять характер возникающих затруднений, попробуйте доказать следующую адаптированную версию этого утверждения. Это утверждение можно найти в сборнике задач Б. П. Демидовича по математическому анализу.

18.2.4. Задача. Пусть вещественнозначная функция $p(x, y)$ определена на всей вещественной плоскости и удовлетворяет следующему свойству. При каждом фиксированном y это многочлен по x и наоборот. Тогда p — многочлен от x и y.

§ 18.3. Интегрирование

При определении голоморфных функций одного комплексного переменного возникала похожая логическая цепочка, но она была на одно звено длиннее. Из существования комплексной производной в каждой точке области следовала одна из форм интегральной теоремы Коши (интеграл по замкнутому контуру равен нулю), а лишь потом из нее выводилась интегральная формула Коши. То, что для полноценной голоморфности достаточно равенства нулю интеграла, в одном переменном носит название теоремы Мореры. Чтобы разобраться с многомерным аналогом этого утверждения нам потребуется теорема Стокса. Теорема Стокса, она входит в стандартные курсы математического анализа, — формула Ньютона – Лейбница плюс серия тонко и правильно подобранных определений. Недавнее историческое расследование, проведенное В. А. Зоричем, показало, что автором этой замечательной теоремы является А. Пуанкаре.

Чтобы интегрировать, нужно иметь два типа объектов: что интегрируем и по чему. В контексте теоремы Стокса интегрируем k-формы в пространстве $\mathbf{R}^N$ по k-цепям в этом пространстве. Для форм определены операции внешнего произведения $\omega_1 \wedge \omega_2$ и внешнего дифференцирования d, для цепи σ — операция взятия границы $\delta\sigma$. С точки зрения требований к гладкости все объекты — объекты класса C^1. Теорема Стокса — соотношение $\displaystyle\int_M d\,\omega = \int_{\delta M} \omega$ где ω есть k-форма, определенная в окрестности носителя $(k+1)$-цепи M. Для целей комплексного анализа потребуется небольшая адаптация. А именно предполагается, что $\mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2n} \approx \mathbf{C}^n$. При этом формы становятся комплекснозначными, и в качестве базисных дифференциалов мы берем не набор

$$(dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_n), \quad \text{а набор} \quad (dz_1, \ldots, dz_n, d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n),$$

связанный с первым известным образом.

18.3.1. Задача. Покажите, что из известного соотношения $d^2 = 0$ следуют соотношения

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0.$$

С точки зрения этой техники интегрирования форм одномерная интегральная теорема Коши — простое следствие плоской версии теоремы Стокса — формулы Грина. Здесь $N = 2$, $k = 1$, цепь M — ограниченная область с правильно ориентированной кусочно гладкой границей δM, которая представляет собой конечную линейную комбинацию кусочно гладких жордановых контуров, форма $\omega = f(z)\,dz$. Записывая в этой ситуации теорему Стокса, получаем формулу Грина

$$\int_{\delta M} f(z)\,dz = \int_M df \wedge dz = \int_M (f'_z\,dz + f'_{\bar{z}}\,d\bar{z}) \wedge dz = \int_M f'_{\bar{z}}\,d\bar{z} \wedge dz,$$

и в случае когда f голоморфна, мы получаем нуль.

Вот многомерный аналог интегральной теоремы Коши.

18.3.2. Теорема (Коши – Пуанкаре)**.** *Пусть f — функция, голоморфная в области D пространства $\mathbf{C}^n$ и M есть $(n+1)$-цепь с носителем в D. Тогда*

$$\int_{\delta M} f(z)\,dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = 0. \tag{18.3.1}$$

Доказательство сводится к проверке того, что дифференциал этой формы равен нулю. Для того чтобы сформулировать аналог теоремы Мореры, рассмотрим n-цепи специального вида $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$, где каждая кривая — кусочно гладкая кривая в своей координатной плоскости, причем одна из них — простая замкнутая (жорданова). Поскольку жорданов цикл — граница области, то наша цепь является границей $(n+1)$-мерной призмы M (один из сомножителей — кривую — надо заменить на ограниченную ею область).

18.3.3. Теорема (Многомерная теорема Мореры)**.** *Пусть в D имеется непрерывная функция f с условием* (18.3.1) *для каждой такой призмы. Тогда f голоморфна.*

Доказательство. В достаточно малой окрестности точки a определим n-кратную первообразную соотношением

$$F(z) = \int_{\gamma_n} \left(\ldots \left(\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta_1 \right) \ldots \right) d\zeta_n,$$

где γ_j — гладкая несамопересекающаяся кривая в j-й координатной плоскости с началом в a_j и концом в z_j. В силу нашего условия этот интеграл не зависит от выбора таких кривых и, при фиксированной точке a есть функция точки z. Меняя по теореме Фубини порядок интегрирования, мы можем убедиться, что F имеет комплексные производные по каждой переменной. Это вместе с непрерывностью означает голоморфность F, из которой следует голоморфность функции

$$f(z) = \frac{\partial^n F}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}(z),$$

что и требовалось доказать. □

В одномерной теореме Мореры в исходном предположении можно ограничиться требованием того, что равны нулю интегралы по малым треугольникам. В многомерной версии можно также ограничиться цепями специального вида. Аналогом треугольника будут $(n+1)$-цепи M, которые представляют собой «треугольные» призмы, содержащиеся в D следующего вида. Это декартово произведение треугольника (внутренность вместе с границей) в одной из координатных плоскостей на набор прямолинейных отрезков в остальных плоскостях.

Кратная интегральная формула Коши, которую мы получили в предыдущем пункте, имеет существенное отличие от одномерной. В одномерном случае интегрирование осуществлялось по всей топологической границе области, в многомерном — по вещественно n-мерному остову полидиска, который представляет собой «тонкое» подмножество $(2n-1)$-мерной границы. Интегральную формулу для полидиска нетрудно адаптировать к области, которая представляет собой декартово произведение плоских областей (полиобласть).

Отметим также, что если в одном переменном интегральная формула Коши была вполне универсальной формулой, подходящей во всех отношениях, то в многомерной ситуации таких формул великое множество. Все эти формулы, так или иначе, основаны на формуле Стокса. Описанная выше кратная формула Коши пригодна только для полиобластей. Есть формула Мартинелли – Бохнера, которая пригодна для любых областей с гладкой границей, но ее ядро не голоморфно. Есть формула Вейля, некое обобщение формулы Коши, ее ядро голоморфно, но она пригодна только областей специального вида — аналитических полиэдров (см. [4]).

§ 18.4. Степенные ряды

Пусть имеется степенной ряд

$$\sum c_{m_1,\dots,m_n}(z_1-a_1)^{m_1}\cdots(z_n-a_n)^{m_n},$$

где индекс пробегает точки n-мерной неотрицательной решетки $\mathbb{Z}^n_+$. Специфика многомерного случая в том, что порядок прохождения узлов решетки заранее не фиксирован. Эта проблема снимается, если мы находимся в контексте абсолютно сходящихся рядов. Если в некоторой точке $z=b$ общий член ряда не ограничен по модулю, то ясно, что в этой точке ряд не сходится ни при каком порядке суммирования. С другой стороны имеет место такой факт.

18.4.1. Лемма (Абель). *Если при некотором $z=b$ общий член ряда ограничен, т. е. $|c_{m_1,\dots,m_n}(b_1-a_1)^{m_1}\cdots(b_n-a_n)^{m_n}|\leqslant C$, то*

(a) *в каждой точке полидиска $\triangle=\{|z_j-a_j|<|b_j-a_j|, j\leqslant n\}$ ряд сходится абсолютно,*

(b) *на $k\triangle=\{|z_j-a_j|\leqslant k\,|b_j-a_j|,\ j=1,\dots,n,\ 0<k<1\}$ ряд сходится равномерно.*

Доказательство леммы Абеля — мажорирование кратной геометрической прогрессией. Геометрическая прогрессия $\sum q_1^{m_1}\dots q_m^{m_n}$ — частный случай кратного степенного ряда. Если хотя бы один из знаменателей прогрессии по модулю не меньше единицы, то ряд не сходится (ни при каком порядке суммирования), ибо общий член не стремится к нулю. Если же все знаменатели по модулю строго меньше единицы, то ряд абсолютно сходится и его сумма равна $1/((1-q_1)\cdots(1-q_n))$.

После этого уместно дать следующее определение.

($O.2$) Областью сходимости степенного ряда называется внутренность (открытая часть) множества таких точек z, в которых общий член ряда ограничен. В силу леммы Абеля в каждой точке области сходимости имеется абсолютная сходимость, а на компактных подмножествах — равномерная. Это означает, что сумма представляет собой голоморфную функцию. Ясно, что при определении области сходимости условие «ограниченности общего члена» можно заменить на «сходимость ряда при каком-либо порядке суммирования» без изменения результата.

18.4.2. Пример. (1) Геометрическая прогрессия $\sum z_1^{m_1} z_2^{m_2}$, область сходимости — полидиск $\Omega = \{|z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$;

(2) $\sum z_1^m z_2^m$, $\Omega = \{|z_1 z_2| < 1\}$;

(3) $\sum z_1^m z_2$, $\Omega = \{|z_1| < 1\}$.

В примере (3) выше ряд сходится также на прямой $z_2 = 0$ при всех z_1, но в область сходимости эта прямая не входит. Для степенных рядов одного переменного важную роль играет круг сходимости. Для рядов от нескольких переменных можно дать определение *полидиска сходимости*. Это такой полидиск, который содержится в области сходимости, но нет большего полидиска, его содержащего, который также содержится в области сходимости. При этом радиусы такого полидиска называются *сопряженными радиусами сходимости* ряда. В примере (1) выше таким полидиском сходимости является сама область сходимости. Однако в примере (2) это любой полидиск, радиусы которого связаны соотношением $r_1 r_2 = 1$. Из этого примера становится понятно, что единого полидиска может не быть. С другой стороны, понятно, что область сходимости есть объединение полидисков сходимости. Для радиуса круга сходимости в одном переменном имела место формула Коши – Адамара. Для сопряженных радиусов сходимости кратных степенных рядов имеется аналогичная формула. Прежде чем написать эту формулу, мы запишем одномерную формулу Коши – Адамара не так, как обычно. А именно: r — радиус сходимости ряда $\sum c_m z^m$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|\, r^m} = 1$. Многомерный аналог выглядит так. Пусть $|m| = m_1 + \cdots + m_n$, тогда $(r_1, \ldots, r_n)$ — набор сопряженных радиусов сходимости, если

$$\overline{\lim}_{|m|\to\infty} \sqrt[|m|]{|c_{m_1,\ldots,m_n}| r_1^{m_1} \cdots r_n^{m_n}} = 1. \qquad (18.4.1)$$

18.4.3. Задача. Докажите эту формулу.

Таким образом, если мы вычислили этот предел как функцию радиусов, то соотношение (18.4.1) определяет границу области сходимости. Любая область сходимости Ω в силу леммы Абеля обладает следующим свойством. Вместе с каждой точкой b область Ω содержит весь, подчиненный ей полидиск $\{|z_j| \leqslant |b_j|, j = 1, \ldots, n\}$. Пусть $n = 2$, тогда области Ω можно сопоставить ее образ в неотрицательном квадранте вещественной плоскости $(z_1, z_2) \to (|z_1|, |z_2|)$. Этот образ содержит полную информацию об области, но у него есть дефект. Внутренние точки области (начало координат, координатные прямые) оказываются на границе образа. Чтобы сделать эту плоскую картинку более достоверной, поступим так. Наличие у комплексного числа аргумента компенсируем тем, что перед каждым модулем будем ставить произвольный знак, т. е. $(z_1, z_2) \to (\pm|z_1|, \pm|z_2|)$. При таком способе изображения область станет симметричной относительно обеих осей.

Есть еще один способ смотреть на области сходимости. Пусть $L(\Omega)$ — образ при отображении $L(z_1, \ldots, z_n) = (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$. При этом способе все неудобные точки исчезают, улетая на минус бесконечность. Например, если $\triangle(r_1, r_2) = \{|z_1| \leqslant r_1,\ |z_2| \leqslant r_2\}$, то $L(\triangle) = \{(p_1, p_2)\colon p_1 \leqslant \log r_1,\ p_2 \leqslant \log r_2\}$.

С помощью логарифмического образа формулируется важное свойство областей сходимости.

$(O.3)$ Область $\Omega \in \mathbf{C}^n$ называется логарифмически выпуклой, если ее логарифмический образ $L(\Omega)$ является выпуклым в обычном (геометрическом) смысле слова.

Если область не является логарифмически выпуклой, то логарифмически выпуклую оболочку $LC(\Omega)$ определим как $L^{-1}(\mathrm{conv}(L(\Omega))$ (прообраз выпуклой оболочки).

18.4.4. Предложение. (a) *Область сходимости степенного ряда логарифмически выпукла.* (b) *Если область D лежит в области сходимости степенного ряда, то $LC(D)$ лежит там же.*

Доказательство. Достаточно доказать выпуклость логарифмического образа множества точек, в которых ограничен общий член ряда. Пусть a и b — две такие точки, т. е. $|c_{m_1,\ldots,m_n} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}| \leqslant C$, $|c_{m_1,\ldots,m_n} b_1^{m_1} \cdots b_n^{m_n}| \leqslant C$. Выпуклость образа означает, что вместе с парой точек в нем содержится соединяющий их отрезок, т. е. точки вида $\log|z_j| = t\log|a_j| + (1-t)\log|b_j|$, или $|z_j| = |a_j|^t |b_j|^{(1-t)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$. Имеем

$$|c_{m_1,\ldots,m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}| = |c_{m_1,\ldots,m_n} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}|^t |c_{m_1,\ldots,m_n} b_1^{m_1} \cdots b_n^{m_n}|^{1-t},$$

что оценивается через $C^t C^{1-t} = C$. Это доказывает утверждение (a), откуда следует и (b). $\square$

18.4.5. Задача. Приведите пример степенного ряда при $n > 1$, такого что область его сходимости — шар.

§ 18.5. Свойства голоморфных функций нескольких переменных, унаследованные от одномерной теории

Совокупность функций, голоморфных в некоторой области D, есть бесконечномерное линейное пространство над полем комплексных чисел, оно же коммутативное кольцо относительно сложения и умножения, оно же — алгебра $\mathcal{O}(D)$ над $\mathbf{C}$. Эта алгебра замкнута относительно обычной для голоморфных функций сходимости — равномерной сходимости на компактных подмножествах D (именно так сходится степенной ряд в своей области сходимости). Для доказательства можно сослаться на соответствующую одномерную теорему Вейерштрасса. Она дает голоморфность по каждой координате, а если добавить непрерывность, то этого и достаточно. Заодно получаем сходимость производных (почленное дифференцирование ряда), т. е. теорема Вейерштрасса переносится на многие переменные дословно.

18.5.1. Теорема (Вейерштрасс)**.** *Пусть последовательность голоморфных в области D функций $\{f_k\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах к функции f. Тогда* (a) *функция f голоморфна в D,* (b) *для любого $j \leqslant n$ последовательность производных $\{(f_k)'_{z_j}\}$ сходится к f'_{z_j} равномерно на компактах.*

18.5.2. Следствие. *Если голоморфная функция в окрестности точки a представлена степенным рядом*

$$f(z) = \sum c_{m_1,\dots,m_n}(z_1 - a_1)^{m_1} \cdots (z_n - a_n)^{m_n},$$

то это ее ряд Тейлора, т. е. для всех $(m_1, \dots, m_n)$ имеем

$$c_{m_1,\dots,m_n} = \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \, \frac{\partial^{m_1+\dots+m_n}}{\partial z_{m_1} \cdots \partial z_{m_n}} f(a).$$

18.5.3. Задача. (Для любителей функционального анализа.) (a) Определить в $\mathcal{O}(D)$ топологию, соответствующую данной сходимости. (b) Доказать, что на $\mathcal{O}(D)$ нет нормы, соответствующей данной сходимости, но есть последовательность полунорм, т. е., как и при $n = 1$, пространство $\mathcal{O}(D)$ не банахово, но является пространством Фреше. (c) Как любое пространство Фреше, $\mathcal{O}(D)$ метризуемо.

18.5.4. Теорема (теорема единственности)**.** *Пусть функция f голоморфна в D. Следующие условия эквивалентны*: (a) *для всех мультииндексов $(m_1, \dots, m_n)$ имеем $\frac{\partial^{m_1+\dots+m_n}}{\partial z_{m_1} \cdots \partial z_{m_n}} f(a) = 0$,* (b) *функция f равна нулю в окрестности a,* (c) $f(z) \equiv 0$ *в D.*

Доказательство. По следствию 18.5.2 из (a) следует (b). Стандартное рассуждение показывает, что множество $\{f(z)=0\}$ замкнуто и открыто, непусто, и, следовательно, совпадает с D. Таким образом, из (b) следует (c). То, что из (c) следует (a), — очевидно. $\square$

После этой теоремы можно без изменений подключать весь аппарат аналитического продолжения и говорить о многозначных аналитических функциях нескольких переменных. Также из этой теоремы следует, что в кольце голоморфных функций в области нет делителей нуля, т. е. оно целостное, и можно корректно определить поле отношений и, далее, поле функций, мероморфных в области.

18.5.5. Задача. Рассмотрите функции $\sqrt[m]{z^2+w^2}$, $\sqrt[m]{1-(z^2+w^2)}$ как многозначные аналитические функции.

Доказательство следующего утверждения демонстрирует некоторый новый прием, позволяющий сводить доказательства многомерных утверждений к одномерным.

18.5.6. Теорема (принцип максимума модуля)**.** *Пусть функция f голоморфна в D и в некоторой точке $a \in D$ функция достигает нестрогого локального максимума модуля. Тогда $f = const$.*

Доказательство. Проведем через точку a комплексную прямую $l = \{z = a + \alpha t\}$ (здесь α — направляющий вектор, t — комплексный параметр). Функция $g(t) = f(a + \alpha t)$ голоморфна в окрестности нуля на плоскости t и по одномерному принципу максимума постоянна на l. В объединении таких прямых имеется шаровая окрестность, и сужение f на каждую прямую равно $f(a)$. $\square$

Абсолютно так же доказывается принцип открытости.

18.5.7. Теорема (принцип сохранения области)**.** *Если функция f голоморфна в D и непостоянна, то $f(D)$ — область на плоскости.*

18.5.8. Теорема (Неравенства Коши)**.** *Пусть функция f голоморфна в окрестности полидиска $\triangle(a,r)$, $M(r_1,\dots,r_n)=\max_{|z-a|=r}|f(z)|$. Тогда для коэффициентов разложения f в степенной ряд имеем*

$$c_{m_1,\dots,m_n} \leqslant \frac{M(r_1,\dots,r_n)}{r_1^{m_1}\cdots r_n^{m_n}}.$$

Доказательство. Оценка интеграла в интегральной формуле для коэффициентов ряда. $\square$

Из этих неравенств, как и в одномерном случае, следует теорема Лиувилля: если функция голоморфна в $\mathbf{C}^n$ и ограничена, то она постоянна. Впрочем, ее можно получить и как следствие одномерной теоремы.

§ 18.6. Свойства голоморфных функций нескольких переменных, специфические для многомерной теории

Рассмотрим функцию f, голоморфную в следующей «крестообразной» области Ω пространства $\mathbf{C}^2$, которая представляет объединение двух полидисков:

высокого $\{|z| < 1,\ |w| < 100\}$ и широкого $\{|z| < 100,\ |w| < 1\}$.

18.6.1. Задача. (a) Изобразите на плоскости образ $L(\Omega)$, его выпуклую оболочку и опишите его логарифмически выпуклую оболочку $LC(\Omega)$. (b) Покажите, что $LC(\Omega)\backslash\Omega$ имеет внутренние точки.

Ясно, что аналогичный пример строится для произвольного числа переменных, большего одного. Разложим f в степенной ряд с центром в начале координат. Поскольку f голоморфна в каждом из двух полидисков, то область сходимости этого ряда обязана содержать и их логарифмически выпуклую оболочку $LC(\Omega)$. Мы наблюдаем абсолютно новое явление. Все функции, голоморфные в Ω, голоморфно продолжаются в большую область $LC(\Omega)$. В связи с этим следующее определение является содержательным.

$(O.4)$ Область называется *областью голоморфности*, если существует функция, голоморфная в этой области и не продолжающаяся аналитически ни через одну граничную точку.

Ясно, что Ω — пример области, которая не является областью голоморфности. На плоскости одного комплексного переменного таких областей нет. Простейший способ в этом убедиться — сослаться на теорему Вейерштрасса о нулях: для любой области и любого дискретного множества ее точек существует голоморфная в области функция, множество нулей которой совпадает с этим дискретным множеством, при этом можно даже заказать любые кратности. Пусть D — произвольная область на плоскости. Нетрудно построить дискретную последовательность точек этой области, такую что множество ее предельных точек совпадает с границей области. Построив функцию с этим множеством нулей, мы видим, что ее аналитическое продолжение через любую граничную точку невозможно. Если область в $\mathbf{C}^n$ есть декартово произведение плоских областей (полиобласть), то в качестве такой непродолжаемой функции можно предложить произведение функций, построенных как было описано для каждой их них. Поэтому полидиск, как и любая полиобласть, есть область голоморфности. Построенная выше крестообразная область, не являющаяся областью голоморфности, позволяет нам получить некоторые общие следствия.

18.6.2. Следствие. *У голоморфных функций нескольких переменных не бывает изолированных особенностей.*

Действительно, если f голоморфна в проколотой окрестности U_a точки a, мы можем сдвигами и сжатиями расположить нашу область Ω так, что она окажется в U_a, а точка a попадет в логарифмически выпуклую оболочку $LC(\Omega)\backslash\Omega$. И степенной ряд даст голоморфное продолжение f в a.

18.6.3. Следствие. *У голоморфных функций нескольких переменных не бывает изолированных нулей.*

Действительно, в противном случае, рассмотрев функцию $1/f$, мы получили бы противоречие с предыдущим следствием.

Наша формулировка теоремы единственности отличается от одномерной. Нуль-множества полиномов от двух переменных хорошо нам знакомы в контексте алгебраических функций, и мы знаем, что такое множество не может быть ни дискретным, ни компактным, как в случае одного переменного.

18.6.4. Следствие. *Если функция нескольких переменных* $(n > 1)$ *голоморфна в пространстве минус компакт, то она голоморфно продолжается до функции, голоморфной на всем пространстве.*

Доказательство. Нашу крестообразную область нужно увеличить так, чтобы компакт лежал в открытой части $LC(\Omega)\backslash\Omega$. $\square$

То же самое можно сказать и про функции, имеющие компактные особенности в области, они также устранимы, но доказательство этого требует более развитой техники.

Вещественная часть голоморфной функции одного переменного гармонична. В односвязной области это утверждение обратимо. Какие функции являются вещественными частями голоморфных функций нескольких переменных?

$(O.5)$ Вещественная функция $u(z,\bar z)$ *плюригармонична* в области D, если $\forall a \in D$ мы сможем подобрать такую функцию v, что $u + iv$ будет голоморфной в окрестности точки a.

Если $u(z,\bar z) = 2\operatorname{Re} f(z) = f(z) + \overline{f(z)}$, имеем следующее необходимое условие:

$$\partial\bar\partial u = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\,\partial \bar z_k} = 0 \text{ для всех } 1 \leqslant j,k \leqslant n. \tag{18.6.1}$$

При $n = 1$ мы имеем единственное условие — лапласиан равен нулю, если же $n > 1$, то таких условий несколько. Покажем, что локально система этих условий является достаточной.

Пусть функция $f = u + iv$ голоморфна, тогда голоморфна и функция $-i(u + iv)$. Следовательно, $\bar\partial(v - i\,u) = \partial(v + i\,u) = 0$. Поэтому $dv = (\partial + \bar\partial)(v) = (-i)(\partial - \bar\partial)(u)$, т. е. если функция v существует, то ее дифференциал есть 1-форма $\omega = (-i)(\partial - \bar\partial)(u)$. В силу известной леммы Пуанкаре для локального существования функции с заданным дифференциалом необходима и достаточна замкнутость этой формы: $d\omega = 0$ (докажите). В нашей ситуации это условие совпадает с условием (18.6.1). Итак, нами доказано такое утверждение.

18.6.5. Предложение. *Пусть u — функция класса C^2 в области D. Следующие два условия эквивалентны*: (a) *функция u удовлетворяет условию* (18.6.1), (b) *функция u плюригармонична в D.*

18.6.6. Задача. (1) Покажите, что условие плюригармоничности равносильно тому, что сужение этой функции на любую комплексную прямую гармонично. (2) Покажите, что плюригармонические функции гармоничны как функции в $\mathbf{R}^{2n}$. Обратное неверно.

Значительная часть одномерной теории связана с классификацией изолированных особых точек и теорией вычетов. При этом нули голоморфной функции в одном переменном — дискретное множество. Мы уже убедились в том, что множество нулей голоморфной функции нескольких переменных устроено иначе. Основным инструментом изучения аналитических множеств (т. е. множеств, локально заданных голоморфными уравнениями) является подготовительная теорема Вейерштрасса. Это утверждение обобщает известное свойство голоморфных функций. Если F голоморфна в окрестности нуля и не есть тождественный нуль, то имеется представление вида $F(z) = z^p\varphi(z)$, где $\varphi(0) \neq 0$ (т. е. $1/\varphi(z)$ — локально голоморфна).

Выберем среди координат пространства $\mathbf{C}^{n+1}$ одну и обозначим ее через w, а остальные через $z = (z_1, \dots, z_n)$.

18.6.7. Теорема (подготовительная теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть функция $F(z, w)$ голоморфна в окрестности нуля в $\mathbf{C}^{n+1}$, причем имеем $\operatorname{ord}_0 F(0, w) = m < \infty$. Тогда в окрестности нуля есть представление $F(z, w) = P(z, w)\varphi(z, w)$, где φ — голоморфная функция, $\varphi(0, 0) \neq 0$, P — полином по w с коэффициентами, голоморфными по z в окрестности нуля, имеющий вид* (*многочлен Вейерштрасса*)

$$P(z, w) = w^m + a_1(z)w^{m-1} + \dots + a_m(z), \quad \text{где } a_1(0) = \dots = a_m(0) = 0,$$

причем это представление единственно.

Эта теорема позволяет сводить уравнение $F(z, w) = 0$ к уравнению $P(z, w) = 0$. К изучению последнего можно подойти так же, как к изучению алгебраических функций. А именно: (1) разложим F на неприводимые множители, далее считаем, что F неприводим; (2) определим дискриминантное множество $\sigma = \{\mathrm{Dis}_w(P)(z) = 0\}$, (3) в точке a вне дискриминантного множества для каждого из m корней $P(a, w) = 0$ применим теорему о неявной функции и получим набор элементов $\{w = f_j(z)\}$ — решений уравнения $P(z, w) = 0$; (4) в итоге получаем описание множества решений как m-листного накрытия над окрестностью нуля в $\mathbf{C}^n$, с особым множеством ветвления σ; (5) для описания σ повторяем процесс в пространстве меньшей размерности. Если $m = 1$, то подготовительная теорема Вейерштрасса превращается в теорему о неявной функции. В частном случае, а именно когда P — неприводимый полином от (z, w), мы получаем, что $w = f(z)$ — алгебраическая функция нескольких переменных.

18.6.8. Задача. Пусть $P(z_1, \ldots, z_n)$ — ненулевой полином, покажите, что дополнение $\mathbf{C}^n \setminus \{P(z_1, \ldots, z_n) = 0\}$ связно.

Что касается классификации особенностей, то в случае нескольких переменных ситуация богаче, чем в одном. Если для функции $f = 1/w$ в $\mathbf{C}^2$ особое множество — прямая $\{w = 0\}$ очень похожа на полюс, то для функции z/w особое множество то же самое, но множество предельных значений f в начале координат — вся плоскость (говорим, что это точка неопределенности).

Теория вычетов остается важным инструментом и в многомерной теории.

18.6.9. Задача. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_\sigma \frac{dz \wedge dw}{z^2 + w^2}$, где σ — гладкий 2-мерный тор в дополнении к особому множеству $\{z^2 + w^2 = 0\}$.

Основой многомерной теории вычетов является теорема Коши–Пуанкаре. Сформулируем здесь ее очевидное следствие.

18.6.10. Следствие. *Пусть функция f голоморфна в области D, а σ_1 и σ_2 — два таких n-мерных цикла в D, что $\sigma_1 - \sigma_2$ — граница $(n+1)$-мерной цепи Σ в D (гомологичные циклы). Тогда*

$$\int_{\sigma_1} f(z)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = \int_{\sigma_2} f(z)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

§ 18.7. Голоморфные отображения

(*O.*6) *Голоморфное отображение* — отображение $f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ с голоморфными координатами.

(O.7) Если имеется обратимое отображение области D_1 на D_2, причем само отображение и его обратное голоморфны, то отображение называется *биголоморфным*.

Биголоморфные отображения в одном переменном — конформные отображения. Поскольку композиция голоморфных отображений голоморфна (упражнение), то так же, как в одном переменном, совокупность биголоморфных автоморфизмов области (отображений на себя) есть группа по отношению к операции композиции $\mathrm{Aut}\,(D)$. Возникающее отношение между областями (существование биголоморфного отображения) — отношение эквивалентности, и все области распадаются на классы биголоморфно эквивалентных. Группы эквивалентных областей изоморфны. В группе биголоморфных автоморфизмов $\mathbf{C}^n$ отметим известные подгруппы: полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ и унитарная группа $\mathrm{U}(n)$. На примере отображений из $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ мы видим, что биголоморфные отображения нескольких переменных не являются конформными. Группа $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ при $n > 1$ бесконечномерна.

18.7.1. Задача. Покажите, что $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^{n+1})$ содержит подгруппу треугольных преобразований вида $(z \to z,\ w \to w + P(z))$, где P — произвольный полином от z.

18.7.2. Задача. Непостоянное голоморфное отображение $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$ может не быть открытым, приведите пример. Сформулировать условие, достаточное для открытости.

Если голоморфное отображение однолистно (взаимно однозначно отображает область на ее образ) и якобиан нигде не обращается в нуль, то по теореме об обратном отображении это отображение биголоморфно. В случае обращения якобиана в нуль в некоторой точке отображение в окрестности этой точки многолистно. Доказательство нетрудно, но здесь мы его не приводим. Итак, как и при одном переменном, для биголоморфности достаточно голоморфности и однолистности.

Комплексное проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ — результат факторизации $\mathbf{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ с координатами $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$ по действию

$$(\zeta_0 \to \lambda\zeta_0, \ldots, \zeta_n \to \lambda\zeta_n), \quad \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

На пространство $\mathbf{C}^n$ с координатами $(z_1, \ldots, z_n)$ можно посмотреть, как на аффинную часть комплексного проективного пространства $\mathbf{CP}^n$ с однородными координатами $(\zeta_0 \colon \zeta_1 \colon \cdots \colon \zeta_n)$ Это компактное комплексное n-мерное многообразие, где имеется стандартный атлас из $(n+1)$-й карты: $U_j = \{\zeta_j \neq 0\}$. Отождествляя $\mathbf{C}^n$ с U_0, получаем связь аффинных и однородных координат $z_j = \zeta_j/\zeta_0$. При $n = 1$ эта процедура приводит к пополнению комплексной плоскости до сферы Римана.

18.7.3. Задача. Выпишите функции перехода от U_j к U_k и убедитесь в том, что $\mathbf{CP}^n$ — компактное комплексное многообразие.

С топологической точки зрения одномерное проективное пространство $\mathbf{CP}^1$ представляет собой клеточный комплекс, состоящий из 2-мерной клетки $\mathbf{R}^2$ и 0-мерной (точка бесконечность) и гомеоморфный 2-мерной сфере.

18.7.4. Задача. Покажите, что $\mathbf{CP}^n$ — клеточный комплекс вида $\{\mathbf{C}^n \cup \mathbf{C}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbf{C}^1 \cup \mathbf{C}^0\}$.

Действие $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{C})$ на $\mathbf{C}^{n+1}$ порождает действие на $\mathbf{CP}^n$. Соответствующие преобразования называются проективными, их совокупность (группа) обозначается $\mathrm{PSL}(n, \mathbf{C})$. Многомерное дробно-линейное отображение — проективное преобразование, записанное в аффинных координатах.

18.7.5. Задача. (a) Запишите действие проективного преобразования, используя (как в прообразе, так и в образе) карту U_0. (b) Предложите аналог двойного отношения для многомерных дробно-линейных отображений.

18.7.6. Задача. Покажите, что если $n > 1$, то полупространство $H = \{\mathrm{Im}\, z_n > 0\}$ и шар $B = \{|z| < 1\}$ не эквивалентны. Более того, H не эквивалентно никакой подобласти шара.

В связи с последней задачей дадим определение.

(O.8) Область называется *областью ограниченного вида*, если она биголоморфно эквивалентна ограниченной области.

Результат из задачи можно сформулировать так: полупространство не является областью ограниченного вида.

Одна из основных теорем одномерной теории — теорема Римана о конформном отображении односвязной области. В многомерной теории даже две простейшие односвязные области — шар и полидиск — не эквивалентны, и их группы автоморфизмов не изоморфны (см. [4]).

18.7.7. Теорема (А. Картан)**.** *Пусть D — область ограниченного вида, $a \in D$, $f \in \mathrm{Aut}(D)$, $f(a) = a$, $f'(a) = Id$. Тогда f — тождественное преобразование, т. е. $f(z) = z$.*

Доказательство. Можно считать, что $a = 0$. Возьмем вместо D ее ограниченную реализацию полидиске $|z_j| \leqslant C$, $j \leqslant n$. Разложим компоненты f в степенные ряды в начале координат и запишем это разложение в векторном виде $f = \sum f_j$, где f_j — столбец из однородных многочленов степени j. Из условия теоремы получаем, что $f_0 = 0$, $f_1(z) = z$. Если f отлично от тождественного, то среди оставшихся компонент есть ненулевые, пусть f_s — младшая из них, т. е.

$f(z) = z + f_s(z) + \cdots$. Рассмотрим последовательные итерации автоморфизма f: $f^{(1)}(z) = f(z), f^{(2)}(z) = f(f(z)), \ldots$. Нетрудно проверить, что разложение $f^{(m)}$ имеет вид $f^{(m)}(z) = z + mf_s(z) + \cdots$. Так как m можно брать сколь угодно большим, среди коэффициентов s-х компонент этих итераций есть сколь угодно большие. Это противоречит неравенствам Коши. Действительно, если наше разложение в степенные ряды сходится в окрестности полидиска $|z_j| < \varepsilon$, $j \leqslant n$, то модули всех коэффициентов f_s не превосходят C/ε^s. □

Более точными рассуждениями можно показать, что группа автоморфизмов области ограниченного вида — вещественная группа Ли в естественной топологии сходимости на компактах, и тогда можно сформулировать следствие из доказанной выше теоремы А. Картана.

18.7.8. Следствие. *Если D — область ограниченного вида, то выполнено неравенство* $\dim \operatorname{Aut}(D) \leqslant 2n^2 + 2n$.

Доказательство. В качестве системы параметров при фиксированной точке a можно предложить $(f(a), f'(a))$. □

Эта оценка неточна. Точная оценка — $\dim \operatorname{Aut}(D) \leqslant n^2 + 2n$, она реализуется для шара. Если область ограниченного вида по размерности группы автоморфизмов близка к шару, то это шар. Отметим также, что автоморфизмы и шара, и полидиска — дробно-линейные преобразования (как и в одном переменном). Размерность группы автоморфизмов полидиска равна $3n$, что меньше $n^2 + 2n$. При этом даже среди ограниченных односвязных областей с гладкой или вещественно аналитической границей «почти все» области вообще не имеют (нетождественных) автоморфизмов.

18.7.9. Задача. (a) Покажите, что бидиск $\{|z| < 1, |w| < 1\}$ биголоморфно эквивалентен кубу $\{|\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1, \operatorname{Re} w| < 1, |\operatorname{Im} w| < 1\}$.
(b) Покажите, что следующие области попарно биголоморфно эквивалентны $\{|z|^2 + |w|^2 < 1\} \approx \{\operatorname{Im} w > |z|^2\} \approx \{\operatorname{Im} w > |\operatorname{Re} z|^2\}$.

Литература

[1] Витушкин А. Г. Замечательные факты комплексного анализа. Итоги науки и техники, ВИНИТИ, т. 7. М., 1985.

[2] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. Наука, М., 1968.

[3] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Наука, М., 1968.

[4] Шабат Б. В. Введение в комплексный анали. Т. 2. Наука, М., 1985.

Глава 19

Абелевы функции

А. В. Домрин

Абелевы функции — периодические мероморфные функции на $\mathbb{C}^n$, имеющие $2n$ линейно независимых (над $\mathbb{R}$) периодов или, что то же самое, мероморфные функции на торе $\mathbb{C}^n/\Lambda$, где $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n}$ — решетка периодов. При $n = 1$ это эллиптические функции, за двести с лишним лет своей истории нашедшие многочисленные применения в анализе, геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории чисел (включая криптографию) и физике. Однако оказывается, что при $n > 1$ на большинстве n-мерных комплексных торов нет ни одной непостоянной мероморфной функции. В n^2-мерном (над $\mathbb{C}$) семействе всех n-мерных комплексных торов есть только $n(n + 1)/2$-мерное подсемейство хороших торов (называемых абелевыми многообразиями), где абелевых функций достаточно много, чтобы голоморфно вложить этот тор в комплексное проективное пространство, а в этом подсемействе в свою очередь есть $(3n - 3)$-мерное (при $n \geqslant 2$) подсемейство очень хороших торов (называемых якобианами комплексных кривых), абелевы функции на которых играют важную роль в алгебраической геометрии и теории солитонных уравнений (нелинейных интегрируемых уравнений математической физики). При этом комплексный тор, на котором есть хотя бы одна невырожденная (т. е. не сводящаяся линейной заменой координат к функции от меньшего числа переменных) абелева функция, автоматически является абелевым многообразием (но не обязательно якобианом). Целью курса является проследить доказательство этого утверждения и возникающие при этом связи между задействованными в нем объектами, начиная с краткого разговора о комплексных кривых и их якобианах.

§ 19.1. Теория функций на сфере и торе

Одномерные комплексные многообразия. Синонимами этого понятия являются слова *комплексная кривая* (исходный пример: множество нулей в $\mathbb{C}^2$ некоторого неприводимого полинома от двух комплексных переменных, градиент которого отличен от нуля всюду на этом множестве) и *риманова поверхность* (что отражает исторический ход событий: такие поверхности были введены Риманом). Под этим понимается связное хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, снабженное открытым покрытием $\{U_\varphi \,|\, \varphi \in \Phi\}$, где $\varphi\colon U_\varphi \to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм на некоторое открытое подмножество $\mathbb{C}$ (называемый картой или локальной координатой), причем всякий раз, когда пересечение $V := U_{\varphi_1} \cap U_{\varphi_2}$ непусто, композиция $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ (называемая функцией перехода) голоморфно отображает открытое множество $\varphi_1(V) \subset \mathbb{C}$ на открытое множество $\varphi_2(V) \subset \mathbb{C}$. Это позволяет говорить о *голоморфных отображениях* $f\colon X \to Y$ в следующем смысле: для каждой точки $p \in X$ и каких-то (или, эквивалентно, любых) карт $U_\varphi \ni p$ на X и $V_\psi \ni f(p)$ на Y композиция $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ должна быть голоморфна в точке $\varphi(p) \in \mathbb{C}$. Биективное голоморфное отображение $f\colon X \to Y$, обратное к которому тоже голоморфно, называется *биголоморфным*. Такое отображение по существу отождествляет X и Y друг с другом как одномерные комплексные многообразия.

Примерами одномерных комплексных многообразий являются любое открытое связное подмножество $D \subset \mathbb{C}$ (в частности сама комплексная плоскость $\mathbb{C}$) с единственной тождественной картой и расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ с двумя картами: тождественной картой $\varphi_1(z) = z$ на $U_1 = \mathbb{C}$ и картой $\varphi_2(z) = 1/z$ на $U_2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, доопределенной по правилу $\varphi_2(\infty) = 0$. Эти примеры подробно изучаются в курсе ТФКП, причем биголоморфные отображения открытых связных подмножеств (расширенной) комплексной плоскости называются там конформными отображениями областей. Можно наглядно изобразить $\overline{\mathbb{C}}$ в виде сферы Римана $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с помощью хорошо известной стереографической проекции, а также биголоморфно отождествить $\overline{\mathbb{C}}$ с пространством $\mathbb{C}P^1$ всех комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$, проходящих через начало координат (считая структуру n-мерного комплексного многообразия на $\mathbb{C}P^n$ известной из геометрии).

Всюду далее через X обозначается компактное одномерное комплексное многообразие, если не оговорено противное.

19.1.1. Предложение. *Любая голоморфная функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ постоянна.*

Доказательство. В силу компактности X функция $|f|$ достигает своего максимума на X в некоторой точке $p \in X$. Так как $f(p)$ не является внутренней точкой множества $f(X)$, то из принципа сохранения области для функции $f \circ \varphi^{-1}$ (где φ — любая локальная координата в окрестности точки p) вытекает, что $f \equiv \mathrm{const}$ в окрестности точки p. Тогда из связности X и теоремы единственности получаем, что $f \equiv \mathrm{const}$ всюду на X. $\square$

Мероморфные функции и дивизоры. *Мероморфные функции* на многообразии X — голоморфные отображения $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$, $f \not\equiv \infty$; или, что то же самое, голоморфные функции $f\colon X \setminus E \to \mathbb{C}$ для некоторого дискретного (т. е. состоящего только из изолированных точек) множества $E \subset X$ такого, что для всех $p \in E$ имеем $f(q) \to \infty$ при $q \to p$. Точки $p \in E$ называются *полюсами* функции f. Для каждой из них определен *порядок полюса* как порядок нуля функции $1/f$ в точке p (в любой локальной карте). В силу предложения 19.1.1 мероморфная функция $f \not\equiv 0$ определяется набором своих нулей и полюсов (с учетом кратностей) однозначно с точностью до умножения на $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому удобно ввести специальное название для такого набора.

19.1.2. Определение. *Дивизор на X есть формальная линейная комбинация $k_1p_1 + \dots + k_np_n$ точек $p_j \in X$ с целыми коэффициентами $k_j \in \mathbb{Z}$. Сумма $k_1 + \dots + k_n$ всех коэффициентов называется степенью дивизора. Дивизор называется главным, если он имеет вид $\sum_{i=1}^{I} k_iq_i - \sum_{j=1}^{J} l_jp_j$, где $\{q_i\}$ (с кратностями k_i) и $\{p_j\}$ (с кратностями l_j) — списки всех нулей и полюсов некоторой мероморфной функции $f \not\equiv 0$ на X.*

19.1.3. Предложение. *Мероморфная функция $f \not\equiv \mathrm{const}$ на X принимает любое значение $c \in \overline{\mathbb{C}}$ одно и то же число раз с учетом кратностей. В частности, степень главного дивизора равна 0.*

Доказательство. Как и на любом многообразии, гладкие 1-формы на X можно интегрировать по кусочно гладким путям $\gamma\colon [a, b] \to X$. Среди всех гладких комплекснозначных 1-форм ω на X (записываемых локально в картах $z = \varphi(p)$ в виде $g(z)\,dz + h(z)\,d\bar{z}$, где g, h — гладкие функции) нас больше всего интересуют *мероморфные* 1-формы, записываемые локально в виде $\omega = g(z)\,dz$, где g мероморфна. *Вычет* мероморфной 1-формы ω в произвольной точке $p \in X$ определяется как $\operatorname{res}_p \omega := (1/2\pi i) \displaystyle\int_{\partial D} \omega$, где $D \subset X$ — любая достаточно малая биголоморфная кругу (причем биголоморфизм продолжается на окрестность $\overline{D}$) окрестность точки p. Триангулируя X достаточно мелко и так, чтобы полюсы ω лежали не более чем по одному в каждом треугольнике, применяя теорему Коши о вычетах к каждому треугольнику (в своей карте) и складывая результаты, получаем, что *сумма вычетов любой мероморфной* 1*-формы* ω *на* X *по всем ее полюсам равна нулю* (интегралы по всем сторонам треугольников попарно сократятся).

Далее, если $\omega = g(z)\,dz$ в карте $z = \varphi(q)$ с $\varphi(p) = 0$ и имеется разложение $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ при $0 < |z| < \varepsilon$, то $\operatorname{res}_p \omega = c_{-1}$. В частности, для любой мероморфной функции $f \not\equiv \mathrm{const}$ на X и любого числа $c \in \mathbb{C}$ вычет мероморфной 1-формы $df/(f-c)$ в каждой точке $p \in X$ с $f(p) = c$ равен порядку нуля функции $f - c$ в этой точке, а вычет этой 1-формы в каждом полюсе функции f равен минус порядку этого полюса. Приравнивая сумму вычетов нулю, получаем требуемое утверждение. □

Посмотрим, верно ли обратное (т. е. всякий ли дивизор степени 0 является главным) на сфере $\overline{\mathbb{C}}$ и одномерном торе $\mathbb{C}/\Lambda$, где $\Lambda \cong \mathbb{Z}^2$ — решетка в $\mathbb{C}$. Эти многообразия настолько тесно связаны с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, что изучение мероморфных функций на них является частью ТФКП.

Рациональные функции. Любая мероморфная функция f на $\overline{\mathbb{C}}$ рациональна (является отношением двух полиномов), так как, вычитая из f главные части ее рядов Лорана во всех полюсах, получим голоморфную функцию на $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. константу по предложению 19.1.1 (или по теореме Лиувилля). Обратно, так как все рациональные функции мероморфны на $\overline{\mathbb{C}}$, то имеем следующий факт.

19.1.4. Предложение. *Любой дивизор степени* 0 *на* $\overline{\mathbb{C}}$ *является главным.*

Доказательство. Любой дивизор на $\overline{\mathbb{C}}$ есть $C = A - B + m\cdot\infty$, где A, B — линейные комбинации точек из $\mathbb{C}$ с неотрицательными коэффициентами. Если записать A и B как множества нулей полиномов $P(z)$ и $Q(z)$, то степень дивизора C равна $\deg P - \deg Q + m$. В случае ее равенства нулю данный дивизор C является дивизором мероморфной функции $P(z)/Q(z)$. □

Эллиптические функции. Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Решетка $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \,|\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$ является дискретной подгруппой аддитивной группы $\mathbb{C}$. Факторгруппа, т. е. множество $\mathbb{C}/\Lambda$ классов эквивалентности по отношению эквивалентности $z_1 \equiv z_2 \bmod \Lambda \iff z_1 - z_2 \in \Lambda$, есть компактное одномерное комплексное многообразие, для которого естественная проекция $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ голоморфна. Мероморфные функции на $\mathbb{C}/\Lambda$ —

то же самое, что мероморфные функции f на $\mathbb{C}$, для которых все элементы решетки Λ являются периодами, т. е. $f(z+\omega)=f(z)$ для всех $z\in\mathbb{C}, \omega\in\Lambda$. Такие непостоянные функции действительно существуют, причем с любым предписанным значением степени, начиная с двух. *Степенью* мероморфной функции на компактном одномерном комплексном многообразии X называется степень ее дивизора полюсов или, что по предложению 19.1.3 то же самое, число прообразов любой точки. Значение 0 для степени непостоянной мероморфной функции на $\mathbb{C}/\Lambda$ запрещено предложением 19.1.1, а значение 1 — теоремой о вычетах из доказательства предложения 19.1.3 для 1-формы $f(z)\,dz$. Например, $\wp$-функция Вейерштрасса

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]$$

есть эллиптическая функция степени 2 (с дивизором полюсов $2\cdot 0$), а ее $(n-2)$-я производная $\wp^{(n-2)}(z)$ — эллиптическая функция степени n (с дивизором полюсов $n\cdot 0$) при любом целом $n\geqslant 3$.

19.1.5. Предложение. *Дивизор* $\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{k=1}^n b_k$ *степени* 0 *на торе* $\mathbb{C}/\Lambda$ (*где наборы* $\{a_1,\dots,a_n\}$ *и* $\{b_1,\dots,b_n\}$ *комплексных чисел могут содержать повторяющиеся элементы, но не пересекаются* $\operatorname{mod}\Lambda$) *является главным тогда и только тогда, когда выполнено равенство* $\sum_{j=1}^n a_j \equiv \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{mod}\Lambda$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z)$ — мероморфная Λ-периодическая функция на $\mathbb{C}$ с нулями $a_1,\dots,a_n \operatorname{mod}\Lambda$ и полюсами $b_1,\dots,b_n \operatorname{mod}\Lambda$. Выберем $z_0\in\mathbb{C}$ так, чтобы на границе $\partial\Pi$ параллелограмма $\Pi := \{z_0+t_1\omega_1+t_2\omega_2 \,|\, 0<t_1,t_2<1\}$ не было ни нулей, ни полюсов, и будем считать, что все точки a_j и b_k лежат в Π. Тогда интеграл от функции $zf'(z)/f(z)$ по $\partial\Pi$ равен $2\pi i(\sum a_j - \sum b_k)$ по теореме Коши о вычетах. В силу периодичности f сумма интегралов по сторонам, параллельным ω_1, равна

$$-\omega_2\int_{z_0}^{z_0+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -\omega_2\cdot 2\pi i n_2,$$

где $2\pi n_2$ есть изменение аргумента f вдоль $[z_0,z_0+\omega_1]$, т. е. $n_2\in\mathbb{Z}$. Сумма интегралов по сторонам, параллельным ω_2, тоже равна $2\pi i n_1\omega_1$, где $n_1\in\mathbb{Z}$.

Достаточность. Сначала напомним еще о двух функциях Вейерштрасса. Почленное дифференцирование показывает, что производная функции

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right]$$

равна $-\wp(z)$ всюду на $\mathbb{C}$, кроме Λ. Сама функция $\zeta(z)$ имеет во всех точках решетки Λ полюсы 1-го порядка с вычетом 1, а вместо периодичности обладает свойством $\zeta(z+\omega_j) - \zeta(z) = \eta_j = \mathrm{const}$, $j = 1, 2$. Структура полюсов $\zeta(z)$ такая же, как у логарифмической производной некоторой целой функции с нулями первого порядка в точках решетки Λ, и эту функцию легко найти почленным интегрированием и экспоненцированием (только вычтем $1/z$ из $\zeta(z)$, чтобы интегрировать от точки $z = 0$). Итак, функция

$$\sigma(z) := \exp\left\{\log z + \int_0^z \left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] du\right\},$$

равная произведению

$$z \prod_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{z-\omega}{-\omega} \exp\left\{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right\},$$

голоморфна всюду на $\mathbb{C}$, удовлетворяет равенству $\sigma'(z)/\sigma(z) = \zeta(z)$ всюду вне Λ, имеет нуль первого порядка в каждой точке $\omega \in \Lambda$ и обладает еще двумя свойствами: нечетностью $\sigma(-z) = -\sigma(z)$ (получаемой заменой z на $-z$ и ω на $-\omega$ в произведении выше) и, вместо периодичности,

$$\sigma(z+\omega_j) = -\sigma(z)\exp\{\eta_j(z+\omega_j/2)\}, \quad z \in \mathbb{C},\ j = 1, 2.$$

Для доказательства интегрируем равенство $\zeta(z+\omega_j) - \zeta(z) = \eta_j$ и экспоненцируем результат $\log\sigma(z+\omega_j) - \log\sigma(z) = \eta_j z + C_j$. Получаем $\sigma(z+\omega_j)/\sigma(z) = B_j \exp\{\eta_j z\}$. Константу B_j находим, подставляя значение $z = \omega_j/2$ и пользуясь нечетностью функции σ. В частности, для $\varphi_{ab}(z) := \sigma(z-a)/\sigma(z-b)$ выполнено равенство

$$\varphi_{ab}(z+\omega_j) = \varphi_{ab}(z)\exp\{\eta_j(b-a)\}, \quad z \in \mathbb{C},\ j = 1, 2.$$

Поэтому для любых непересекающихся $\operatorname{mod}\Lambda$ наборов комплексных чисел $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, \ldots, b_n\}$ функция

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sigma(z-a_j)}{\sigma(z-b_j)}$$

мероморфна на $\mathbb{C}$, имеет наборы нулей $a_1, \ldots, a_n \operatorname{mod}\Lambda$ и полюсов $b_1. \ldots, b_n \operatorname{mod}\Lambda$, но вместо Λ-периодичности обладает свойством

$$f(z+\omega_j) = f(z)\exp\{\eta_j C\}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \quad C = \sum b_k - \sum a_k.$$

Отсюда вытекает достаточность, поскольку представители нулей и полюсов могут быть выбраны таким образом, что $C = 0$. $\square$

Общие тэта-функции. Сыгравшая основную роль в доказательстве предложения 19.1.5 сигма-функция Вейерштрасса является примером *общей тэта-функции*, т. е. такой функции $\theta \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, которая при сдвиге аргумента на любой элемент решетки умножается на экспоненту от линейной функции:

$$\theta(z+\omega) = \theta(z)\exp\{a(\omega)z + b(\omega)\}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ и $\omega \in \Lambda$. Ясно, что достаточно требовать выполнения этого условия только для $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$, т. е. должны найтись числа $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $\theta(z+\omega_j) = \theta(z)\exp\{a_j z + b_j\}$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $j = 1, 2$. Эти числа не совсем произвольны.

19.1.6. Предложение. *Числа выше удовлетворяют соотношению*

$$a_1\omega_2 - a_2\omega_1 = 2\pi i n,$$

где $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ *есть число нулей функции* $\theta(z)$ *в параллелограмме* $\Pi := \{z_0 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \,|\, 0 < t_1, t_2 < 1\}$ *для тех* $z_0 \in \mathbb{C}$*, при которых* $\theta(z)$ *не обращается в нуль на* $\partial\Pi$.

Доказательство. Обе части равны интегралу от θ'/θ по $\partial\Pi$: правая — по теореме Коши о вычетах, а левая — поскольку при сдвиге аргумента на ω_j к значению функции θ'/θ прибавляется a_j. $\square$

На самом деле других ограничений нет: для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих равенству $a_1\omega_2 - a_2\omega_1 = 2\pi i n$ для некоторого числа $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, и любых $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ можно подобрать общую тэта-функцию с такими константами в виде

$$\theta(z) = \exp\{Az^2 + Bz + C\}\sigma(z - z_1)\cdots\sigma(z - z_n).$$

Множество всех таких функций $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, что

$$f(z+\omega_j) = f(z)\exp\{a_j z + b_j\}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ и $j = 1, 2$, является в этом случае векторным пространством размерности n над $\mathbb{C}$. (Убедитесь в этом, сделав $a_1 = b_1 = 0$ за счет умножения на экспоненту от квадратичного полинома и записав после этого $f(z)$ в виде ряда Лорана от $\exp\{2\pi i z/\omega_1\}$.) Общие тэта-функции на многомерных торах будут играть важную роль в дальнейшем.

19.1.7. Задача. Чему равно $\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1$? Определение и свойства чисел η_j даны в доказательстве предложения 19.1.5.

§ 19.2. Теорема Абеля и задача обращения Якоби

Понятие рода. Известно, что любое компактное одномерное комплексное многообразие X гомеоморфно сфере с g ручками для некоторого $g \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Число g называется *родом* X. Его можно также определить формулой Эйлера $V - E + F = 2 - 2g$, где V, E, F — число вершин, ребер и граней любой триангуляции X, т. е. разбиения X на гомеоморфные образы замкнутых треугольников, пересечение любых двух из которых либо пусто, либо является общей вершиной, либо является общей стороной. Это определение годится и для (не всегда являющихся многообразиями в смысле § 19.1) множеств нулей неприводимых полиномов в $\mathbb{C}^2$ и нормализованных замыканий этих множеств в $\mathbb{C}P^2$ или в пространстве $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, как в следующем утверждении.

19.2.1. Предложение (формула Римана – Гурвица)**.** *Пусть дан непостоянный неприводимый полином P от двух комплексных переменных. Тогда существует такая* (*единственная*) *аналитическая функция $w = \mathscr{F}(z)$ на дополнении $\mathbb{C} \setminus A$ к некоторому конечному множеству $A \subset \mathbb{C}$, что для $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus A) \times \mathbb{C}$ равенство $P(z, w) = 0$ эквивалентно тому, что $w = \mathscr{F}(z)$. При этом*

$$2 - 2g = 2m - \sum (k_j - 1),$$

где g означает род нормализованного (*см. комментарий ниже*) *замыкания $P^{-1}(0)$ в $\mathbb{C}P^2$ или в $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, m — число элементов функции $\mathscr{F}$ с центром в любой точке $z \in \mathbb{C} \setminus A$, сумма берется по всем точкам ветвления функции $\mathscr{F}$, а через k_j обозначается порядок ветвления в j-й точке.*

Комментарий. Напомним, что сужение $\mathscr{F}$ на проколотую окрестность V любой точки $a \in A \cup \{\infty\}$ может состоять из нескольких аналитических функций на V, каждая с ветвлением своего порядка или со своей изолированной особой точкой однозначного характера при $z = a$. Нормализация замыкания множества $P^{-1}(0)$, упомянутая в формулировке предложения, состоит в том, что все эти графики рассматриваются как непересекающиеся. Например, $\mathscr{F}(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$ с $m = 4$ имеет две точки ветвления 2-го порядка над $z = 0$, одну точку ветвления 2-го порядка над $z = 1$ и одну точку ветвления 4-го порядка над $z = \infty$. Формула Римана – Гурвица принимает вид $2 - 2g = 2 \cdot 4 - 1 - 1 - 1 - 3$, т. е. $g = 0$. Действительно, замыкание множества нулей полинома $P(z, w) = (w^2 - 1)^2 - z$ в $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ гомеоморфно (и даже биголоморфно) сфере $\overline{\mathbb{C}}$ посредством проекции $(z, w) \mapsto w$. В данном случае нормализация не требуется. А вот для

$\mathcal{F}_1(z) = \sqrt{z^2 - z^3}$ замыкание графика $\mathcal{F}_1$ в $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ гомеоморфно сфере с отождествленными (в точку $z = w = 0$) полюсами, для которой $V - E + F = 1$ (и род замыкания получается равным $1/2$), тогда как нормализованное замыкание (полученное раздвоением точки $z = w = 0$ на две устранимые особые точки функции $\mathcal{F}_1$ над $z = 0$) гомеоморфно сфере и имеет род 0 в соответствии с формулой Римана – Гурвица. В дальнейшем мы будем для краткости опускать упоминание о нормализации замыкания множества $P^{-1}(0)$ и будем говорить просто о замыкании этого множества.

Доказательство формулы Римана – Гурвица. Расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ переменного z триангулируем так, чтобы все точки из $A \cup \{\infty\}$ были вершинами. Если V, E, F — число вершин, ребер и граней этой триангуляции, то $V - E + F = 2$ по формуле Эйлера. По теореме о монодромии сужение $\mathscr{F}$ на каждый треугольник распадается на m графиков голоморфных функций над этим треугольником. Получаем триангуляцию графика $\mathscr{F}$ с числом граней $F' = mF$ и числом ребер $E' = mE$. Что касается числа вершин, то каждая точка ветвления порядка k вносит только одну вершину вместо полагающихся k, так что $V' = mV - \sum (k_j - 1)$. Вычисляя $V' - E' + F' = 2 - 2g$, приходим к требуемой формуле. □

19.2.2. Пример. Пусть $P(z, w) = z^n + w^n - 1$. Тогда функция $\mathscr{F}(z) = \sqrt[n]{1 - z^n}$ имеет n точек ветвления порядка n (в корнях n-й степени из 1) и n особенностей однозначного характера (полюсов первого порядка) над точкой $z = \infty$. В итоге $2 - 2g = n(n - 1)$ и $g = (n - 1)(n - 2)/2$. Замыкание X_0 множества $P^{-1}(0)$ в $\mathbb{C}P^2$ является одномерным комплексным многообразием и получается из $P^{-1}(0)$ добавлением n попарно различных точек $p_1, \ldots, p_n$ бесконечно удаленной прямой в $\mathbb{C}P^2$. Однако замыкание $X_1 = P^{-1}(0) \cup \{q\}$ множества $P^{-1}(0)$ в $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ получается добавлением только одной точки $q = (\infty, \infty)$ и не является одномерным комплексным многообразием из-за особенности типа $\zeta^n = \eta^n$ в точке q (в надлежащей карте $\varphi = (\zeta, \eta)$ многообразия $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ с $\varphi(q) = (0, 0)$), вблизи которой X_1 выглядит как объединение n графиков голоморфных функций с одной общей точкой. Это легко исправить. Удалив из X_1 точку q и добавив n различных точек $q_1, \ldots, q_n$ (по одной для каждого графика) вместе с соответствующими им картами (сужениями проекции $(\zeta, \eta) \mapsto \zeta$ на каждый график), получим одномерное комплексное многообразие $X_2 = P^{-1}(0) \cup \{q_1, \ldots, q_n\}$. При этом тождественное отображение множества $P^{-1}(0)$ на себя однозначно (по непрерывности) продолжается до биголоморфизма между X_0 и X_2.

19.2.3. Пример. Пусть $P(z,w) = w^2 - (z-z_1)\cdots(z-z_n)$, где $z_j \neq z_k$ при $j \neq k$. Тогда $\mathscr{F}(z) = \sqrt{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}$ имеет n точек ветвления порядка 2 (в точках $z_1,\dots,z_n$) и либо одну точку ветвления порядка 2 (при нечетном n), либо два полюса (при четном n) над точкой $z=\infty$. В итоге род равен целой части числа $(n-1)/2$. Замыкание X_3 множества $P^{-1}(0)$ в $\overline{\mathbb{C}}\times\overline{\mathbb{C}}$ опять получается добавлением одной точки $q=(\infty,\infty)$ и имеет в этой точке особенность типа $\eta^2=\zeta^n$. При $n=1$ никакой особенности нет, при любом четном $n=2k$ от нее можно избавится, удалив q и добавив q_1,q_2 (получим одномерное комплексное многообразие $X_4 = P^{-1}(0)\cup\{q_1,q_2\}$ рода $k-1$), а при нечетных $n \geqslant 3$ нужны более серьезные методы разрешения особенностей. Замыкание X_5 множества $P^{-1}(0)$ в $\mathbb{C}P^2$ тоже получается добавлением одной точки $p=(0:1:0)$, но имеет в этой точке особенность уже типа $\eta^{n-2}=\zeta^n$, если $n\geqslant 3$ (при $n=1,2$ особенности в точке p нет). При $n=3$ особенности тоже нет, при $n=4$ от нее можно избавится, удалив p и добавив p_1,p_2 (получим одномерное комплексное многообразие $X_6 = P^{-1}(0)\cup\{p_1,p_2\}$ рода 1), а при $n\geqslant 5$ нужны другие методы.

19.2.4. Замечание. Если требуется явный пример компактного одномерного комплексного многообразия X какого-либо заданного рода $g\in\{0,1,2,\dots\}$, то проще всего взять X_4 с $n=2g+2$. В случае, когда $g=k(k+1)/2$ для некоторого $k\in\{0,1,2,\dots\}$, подойдет и X_0 с $n=k+2$. Любое компактное одномерное комплексное подмногообразие $X\subset\mathbb{C}P^2$ имеет род $g=k(k+1)/2$ для некоторого $k\in\{0,1,2,\dots\}$, но мы не будем это доказывать.

Род и голоморфные 1-формы. Комплекснозначная 1-форма на одномерном комплексном многообразии X называется *голоморфной*, если в любой карте $z=\varphi(p)$ этого многообразия она имеет вид $f(z)\,dz$, где функция f голоморфна. Ясно, что голоморфные 1-формы на X образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$.

19.2.5. Предложение (без доказательства)**.** *Размерность векторного пространства голоморфных 1-форм на компактном комплексном одномерном многообразии X равна роду g этого многообразия.*

Проиллюстрируем это утверждение на предыдущих примерах.

(A) На сфере $\overline{\mathbb{C}}$ нет голоморфных 1-форм, кроме тождественно нулевой (если в обычной карте имеем $\omega=f(z)\,dz$, где $f\in\mathscr{O}(\mathbb{C})$ и $f\not\equiv 0$, то в карте $\zeta=1/z$ будет $\omega=g(\zeta)\,d\zeta$, где функция

$$g(\zeta) = (-1/\zeta^2)f(1/\zeta)$$

не может быть голоморфна при $\zeta = 0$, так как ее ряд Лорана содержит только отрицательные степени ζ), и род сферы действительно равен нулю.

(B) На торе $\mathbb{C}/\Lambda$ нет голоморфных 1-форм, кроме $C\,dz$, $C \in \mathbb{C}$ (ибо любая Λ-периодическая целая функция постоянна), и род тора действительно равен единице.

(C) Пусть $P(z,w) = \sum_{k,l=0}^{m} c_{kl} z^k w^l \not\equiv \mathrm{const}$ — неприводимый полином от двух комплексных переменных, а X — компактное одномерное комплексное многообразие, либо равное замыканию множества $P^{-1}(0)$ в $\mathbb{C}P^2$ или $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, либо полученное из такого замыкания удалением точки и добавлением нескольких, как в начале параграфа. Выпуклая оболочка множества всех (k,l), для которых $c_{kl} \neq 0$, называется *многоугольником Ньютона* полинома P. Любой паре (a,b) целых чисел отвечает мероморфная 1-форма на X вида

$$\omega_{ab} := \frac{z^{a-1} w^{b-1}}{P_w}\,dz = -\frac{z^{a-1} w^{b-1}}{P_z}\,dw,$$

где P_z и P_w — частные производные от P по z и w. Во всех приведенных выше примерах верно следующее. С одной стороны, род X равен числу целых точек (a,b) внутри многоугольника Ньютона полинома P, а с другой — соответствующие этим точкам 1-формы ω_{ab} образуют базис пространства голоморфных 1-форм на X. Это сообщается без доказательства, но проверить, что указанные 1-формы действительно голоморфны на X во всех этих примерах — полезное упражнение.

Периоды голоморфных 1-форм. Пусть X — компактное одномерное комплексное многообразие и ω — голоморфная 1-форма на X. Какие значения может принимать интеграл от ω по замкнутым кусочно гладким путям $\gamma\colon [0,1] \to X$? Оказывается, не произвольные.

Рассмотрим случай тора $X = \mathbb{C}/\Lambda$, $\omega = dz$. Пусть $\pi\colon \mathbb{C} \to X$ — естественная проекция, $p_0 = \gamma(0) \in X$ — начальная точка пути γ, $z_0 \in \mathbb{C}$ — любая точка с $\pi(z_0) = p_0$. Тогда существует единственный кусочно гладкий путь $\delta\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, такой, что $\gamma(t) = \pi(\delta(t))$ для всех $t \in [0,1]$ и $\delta(0) = z_0$. Так как $\gamma(1) = p_0$, то $\delta(1) = z_0 + k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ для некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Отсюда

$$\int_\gamma \omega = \int_\delta dz = k_1\omega_1 + k_2\omega_2.$$

Переобозначая ω_j для удобства через ρ_j, мы можем сказать, что множество значений интегралов формы ω по всем замкнутым кусочно гладким путям γ в X имеет вид $\mathbb{Z}\rho_1 + \mathbb{Z}\rho_2$, где ρ_j — интегралы по специальным замкнутым путям $\gamma_j(t) = z_0 + \omega_j t$, $t \in [0,1]$, $j = 1, 2$.

В общем случае найдутся $2g$ замкнутых кусочно гладких путей $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ таких, что для любой голоморфной 1-формы ω на X множество значений ее интегралов по всем замкнутым кусочно гладким путям γ в X имеет вид $\mathbb{Z}\rho_1 + \cdots + \mathbb{Z}\rho_{2g}$, где $\rho_j = \displaystyle\int_{\gamma_j} \omega$. Зафиксируем точку $p_0 \in X$ и назовем два замкнутых кусочно гладких пути на X с началом и концом p_0 *гомологичными*, если интегралы по ним от всякой замкнутой гладкой 1-формы ω на X равны. Это отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается через $H_1(X, \mathbb{Z})$ и является абелевой группой относительно следующих операций: $\gamma_1 + \gamma_2$ есть класс эквивалентности, содержащий результат последовательного прохождения γ_1 и γ_2, а $-\gamma$ есть класс эквивалентности, содержащий результат прохождения γ в обратном направлении. Нулевым элементом служит класс эквивалентности постоянного пути $\gamma(t) \equiv p_0$. Известно, что $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ есть свободно порожденная абелева группа с $2g$ образующими, которые можно описать так.

Тор $\mathbb{C}/\Lambda$ получается из $\overline{\Pi} = \{z_0 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \,|\, 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1\}$ склеиванием противоположных сторон. Обозначим эти стороны через $a = [z_0, z_0 + \omega_1]$, $b = [z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_1 + \omega_2]$, $a^{-1} = [z_0 + \omega_1 + \omega_2, z_0 + \omega_2]$, $b^{-1} = [z_0 + \omega_2, z_0]$ (считая, что $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, чтобы указанный порядок обхода вершин был положительным — это будет важно в предложении 19.2.7; обозначения a^{-1} и b^{-1} связаны с тем, что на торе отрезки a и a^{-1} дадут одну и ту же кривую, но проходимую в противоположных направлениях). Пусть $c : [0, 1] \to \overline{\Pi}$ — замкнутая кусочно гладкая кривая, которая лежит в Π, кроме точки $c(0) = c(1) = z_0$, и ограничивает область $D \subset \Pi$, гомеоморфную кругу. Тогда $\overline{\Pi} \setminus D$ можно представить как 5-угольник со сторонами $aba^{-1}b^{-1}c$. При склеивании a с a^{-1} и b с b^{-1} он превращается в ручку (т. е. тор с дыркой; границей дырки служит c). Многообразие X получается из сферы с g дырками (т. е. из множества $T := S^2 \setminus (\overline{U}_1 \cup \cdots \cup \overline{U}_g)$, где $\overline{U}_j \subset S^2$ — замкнутые множества, гомеоморфные кругу и не пересекающиеся, кроме ровно одной общей для всех граничной точки p_0) заклеиванием каждой дырки $\overline{U}_j$ своей ручкой $R_j = a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} c_j$ так, что каждая кривая c_j начинается и кончается в точке p_0. Множество T получается из некоторого g-угольника (замкнутого круга, на границе которого отмечены g различных точек, называемые вершинами) склеиванием всех его вершин в точку p_0. Поэтому X получается из того же g-угольника, к j-й стороне которого при каждом $j = 1, \ldots, g$ приклеен снаружи 5-угольник $R_j = a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} c_j$ вдоль кривой c_j (так что в итоге возник $4g$-угольник со сторонами $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$) склеиванием a_j

с a_j^{-1} и b_j с b_j^{-1} для $j = 1, \ldots, g$. Результат склейки a_j с a_j^{-1} — кусочно гладкая замкнутая кривая на X с началом и концом p_0, обозначаемая через α_j. Результат склейки b_j с b_j^{-1} обозначим через β_j.

19.2.6. Предложение. *Классы эквивалентности (гомологические классы) замкнутых кривых α_j, β_j, $j = 1, \ldots, g$, являются образующими абелевой группы $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. В частности, для любой голоморфной (и даже для любой замкнутой гладкой) 1-формы ω на X множество чисел $\int_\gamma \omega$ по всем кусочно гладким замкнутым кривым γ на X имеет вид $\mathbb{Z}A_1 + \cdots + \mathbb{Z}A_g + \mathbb{Z}B_1 + \cdots + \mathbb{Z}B_g$, где*

$$A_j := \int_{\alpha_j} \omega, \quad B_j := \int_{\beta_j} \omega, \quad j = 1, \ldots, g.$$

Числа $\int_\gamma \omega$, где γ — кусочно гладкий замкнутый путь на X, называются *периодами* голоморфной 1-формы ω. Заметим, что γ может начинаться и кончаться в любой точке $p_1 \in X$, не обязательно в точке p_0. Все периоды имеют вид $\sum_{j=1}^{g} (k_j A_j + l_j B_j)$, где $k_j, l_j \in \mathbb{Z}$.

Билинейные соотношения Римана.

19.2.7. Предложение. *Пусть ω, ω' — голоморфные 1-формы на X, A_j, B_j и A'_j, B'_j — их периоды (см. предложение 19.2.6). Тогда*

$$\sum_{j=1}^{g} \bigl(A_j B'_j - A'_j B_j\bigr) = 0, \tag{19.2.1}$$

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^{g} \overline{A}_j B_j > 0, \quad \textit{если} \quad \omega \not\equiv 0. \tag{19.2.2}$$

Комментарий. В случае, когда $X = \mathbb{C}/\Lambda$, $\omega = C\,dz$ и $\omega' = C'\,dz$, равенство (19.2.1) тривиально: $C\omega_1 C'\omega_2 - C\omega_2 C'\omega_1 = 0$, а неравенство (19.2.2) принимает вид $\operatorname{Im}(|C|^2 \overline{\omega}_1 \omega_2) > 0$, равносильный соглашению $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$.

Доказательство соотношений Римана. Удалив все кривые α_j, β_j из X, получим (см. с. 413) открытое подмножество $G \subset X$, гомеоморфное $4g$-угольнику со сторонами $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Обозначим этот $4g$-угольник через Π, как в случае $g = 1$. В силу односвязности Π (а значит, и G) существует голоморфная функция f на G такая, что $df = \omega$ на G. Сдвинув на $\varepsilon > 0$ внутрь все стороны Π, получим $4g$-угольник $\Pi_\varepsilon \subset \Pi$ и отвечающую ему область $G_\varepsilon \subset G$. Интеграл от голоморфной 1-формы $f\omega'$ по границе ∂G_ε этой области равен 0 по интегральной теореме Коши. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим, что интеграл от $f\omega'$ по границе области G равен 0. Эта граница состоит из дважды пройденных кривых α_j, β_j и представлена всеми сторонами $4g$-угольника Π. Фиксируем $j \in \{1, \ldots, g\}$ и параметризуем стороны a_j, a_j^{-1} функциями $a_j(t)$, $a_j^{-1}(t)$, $t \in [0,1]$, так, чтобы точки с одинаковым t совпали при склеивании сторон, а возрастанию t отвечало прохождение стороны a_j в положительном направлении границы Π. Тогда $a_j(1)$ и $a_j^{-1}(1)$ — начальная и конечная точки стороны b_j. Считая многоугольник Π выпуклым, рассмотрим в нем отрезок, соединяющий точки $a_j(t)$ и $a_j^{-1}(t)$ при данном $t \in [0,1]$. Склейка сторон превратит этот отрезок в замкнутый путь на X, причем этот путь и β_j составляют границу области на X, полученной склейкой $a_j([t,1])$ с $a_j^{-1}([t,1])$. По интегральной теореме Коши, интеграл от ω по указанному пути равен интегралу от ω по β_j, т. е. числу B_j. Значит, если $\varphi(t)$ — предельное значение f изнутри Π в точке $a_j(t)$, то предельное значение f изнутри Π в точке $a_j^{-1}(t)$ равно $\varphi(t) + B_j$. Поэтому

$$\int_{a_j} f\omega' + \int_{a_j^{-1}} f\omega' = \int_{a_j} \varphi\omega' - \int_{a_j} (\varphi + B_j)\omega' = -B_j \int_{a_j} \omega' = -A'_j B_j.$$

Сумма интегралов от $f\omega'$ по сторонам b_j и b_j^{-1} аналогично равна $A_j B'_j$. Суммируя полученные равенства по всем j от 1 до g, получаем (19.2.1).

Доказательство (19.2.2) аналогично, только вместо $f\omega'$ интегрируем $\overline{f}\omega$. С одной стороны, интеграл от $\overline{f}\omega$ по границе области G равен $\sum_{j=1}^{g}(\overline{A}_j B_j - A_j \overline{B}_j)$, т. е. $2i \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{g} \overline{A}_j B_j$. С другой стороны, по формуле Стокса (или Грина) он равен интегралу по G от 2-формы $d(\overline{f}\omega) = d(\overline{f}\,df) = d\overline{f} \wedge df$. Эта 2-форма в любой карте записывается в виде $d\overline{f} \wedge df = \overline{f'(z)}\,d\overline{z} \wedge f'(z)\,dz = |f'(z)|^2\,d\overline{z} \wedge dz = 2i|f'(x+iy)|^2 dx \wedge dy$. Поэтому интеграл от нее, деленный на $2i$, положителен, если только не будет $f' \equiv 0$, т. е. $\omega \equiv 0$. $\square$

19.2.8. Предложение. *Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис пространства голоморфных 1-форм на X. Тогда $g\times g$-матрицы $A = (A_{jk})$ и $B = (B_{jk})$, где $A_{jk} := \displaystyle\int_{\alpha_k} \omega_j$ и $B_{jk} := \displaystyle\int_{\beta_k} \omega_j$, невырождены, причем матрица $R := A^{-1}B$ симметрична (т. е. $R^\top = R$) и $\operatorname{Im} R > 0$ (т. е. $\operatorname{Im} R$ является матрицей положительно определенной эрмитовой формы на $\mathbb{C}^g$). При любом выборе базиса $\omega_1, \ldots, \omega_g$ векторного пространства* *голоморфных 1-форм на X и системы образующих $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ абелевой группы $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, столбцы матрицы периодов $\Omega := (\rho_{kl})$, где $\rho_{kl} := \displaystyle\int_{\gamma_l} \omega_k$, $1 \leqslant k \leqslant g$, $1 \leqslant l \leqslant 2g$, представляют собой $2g$ линейно независимых над $\mathbb{R}$ векторов из $\mathbb{C}^g$.*

Доказательство. Если $v \in \mathbb{C}^g$ и $A^\top v = 0$, то все A-периоды 1-формы $\omega = \sum_{j=1}^g v_j \omega_j$ равны 0, а тогда $\omega = 0$ в силу (19.2.2), откуда $v = 0$. Значит, матрица A невырождена. Аналогично для B. Для любого другого базиса $\omega'_j = \sum_{k=1}^g c_{jk} \omega_k$, где $C = (c_{jk}) \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{C})$, имеем $A' = CA$ и $B' = CB$. В частности, если $C = A^{-1}$, то $A' = I$ и $B' = A^{-1}B = R$. Но если $A' = I$, то матрица B' симметрична в силу (19.2.1) с $\omega = \omega'_j$ и $\omega' = \omega'_k$, а матрица $\mathrm{Im}(B')$ положительно определена в силу (19.2.2) для $\omega = \sum_{j=1}^g v_j \omega'_j$ с любыми $v_j \in \mathbb{R}$ (тогда $\mathrm{Im} \sum_{j=1}^g \overline{A}_j B_j = \sum_{k,l=1}^g \mathrm{Im}\, B'_{jk} v_j v_k$). Этим доказаны нужные свойства матрицы R. Столбцы матрицы периодов $\Omega = (I, R)$, отвечающей базису $\omega'_1, \ldots, \omega'_g$, линейно независимы над $\mathbb{R}$ (если их линейная комбинация с вещественными коэффициентами равна 0, то взятие Im в силу невырожденности матрицы $\mathrm{Im}\, R$ дает равенство нулю последних g коэффициентов, а тогда и первые g равны 0). Эта линейная независимость сохраняется при любом выборе базиса голоморфных 1-форм и набора образующих $H_1(X, \mathbb{Z})$, так как их замена (по формулам $\omega'_j = \sum_{j=1}^g c_{jk} \omega_k$ и $\gamma'_l = \sum_{m=1}^{2g} \gamma_m d_{ml}$ для любой матрицы $C = (c_{jk}) \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{C})$ и любой целочисленной $(2g \times 2g)$-матрицы $D = (d_{ml})$ с определителем ± 1) приводит к матрице $\Omega' = C \Omega D$. $\square$

Отображение Абеля. Зафиксируем точку $p_0 \in X$, базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$ векторного пространства голоморфных 1-форм на X и систему образующих $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ свободной абелевой группы $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Сопоставим каждому кусочно гладкому пути $\gamma\colon [0, 1] \to X$ вектор

$$\left(\int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g.$$

При замене γ на другой путь с тем же началом и концом к этому вектору прибавляется какой-то элемент множества $\Omega \mathbb{Z}^{2g} \subset \mathbb{C}^g$ (где Ω — матрица периодов из предложения 19.2.8), представляющего собой по предложению 19.2.8 изоморфную $\mathbb{Z}^{2g}$ дискретную подгруппу в абелевой группе $\mathbb{C}^g$ по сложению. Поэтому класс эквивалентности указанного вектора в факторгруппе $T_{\omega\gamma} := \mathbb{C}^g / \Omega \mathbb{Z}^{2g}$ зависит только от конечной точки $p = \gamma(1)$ пути γ. Получаем голоморфное отображение

$\mathscr{A}\colon X \to T_{\omega\gamma}$ из компактного одномерного комплексного многообразия X рода g в g-мерный комплексный тор, называемое *отображением Абеля*. Так как любой дивизор есть линейная комбинация точек из X, то $\mathscr{A}$ продолжается «по линейности» до (обозначаемого той же буквой и также называемого *отображением Абеля*) гомоморфизма абелевых групп

$$\mathscr{A}\colon \{\text{все дивизоры на } X\} \to \mathbb{C}^g/\Omega\mathbb{Z}^{2g}.$$

19.2.9. Предложение (теорема Абеля)**.** *Дивизор D степени* 0 *на X является главным тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}(D) = 0$.*

Доказательство необходимости. Обозначим через D дивизор мероморфной функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$. Считая прообраз $f^{-1}(w)$ каждой точки $w \in \overline{\mathbb{C}}$ дивизором степени m на X, можно записать так: $D = f^{-1}(0) - f^{-1}(\infty)$. Тогда $w \mapsto \mathscr{A}(f^{-1}(w))$ есть голоморфное отображение $\varphi\colon \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^g/\Omega\mathbb{Z}^{2g}$. Любое такое отображение постоянно, ибо в силу односвязности $\overline{\mathbb{C}}$ можно по теореме о монодромии записать $\varphi = \pi \circ \Phi$ для некоторого голоморфного отображения $\Phi\colon \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^g$, где $\pi\colon \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g/\Omega\mathbb{Z}^{2g}$ — естественная проекция, а любое такое Φ постоянно по предложению 19.1.1 (или теореме Лиувилля). Поэтому $\mathscr{A}(D) = \varphi(0) - \varphi(\infty) = 0$. □

19.2.10. Замечание. В случае, когда $X = \mathbb{C}/\Lambda$ — одномерный тор, можно выбрать dz в качестве базиса пространства голоморфных 1-форм и $\alpha(t) = t\omega_1$, $\beta(t) = t\omega_2$, $t \in [0,1]$, в качестве образующих группы $H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$. Тогда матрица перидов есть $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$, якобиев тор $\mathbb{C}^1/\Omega\mathbb{Z}^2$ совпадает с X, отображение Абеля из X в $\mathbb{C}^1/\Omega\mathbb{Z}^2$ тождественно: $\mathscr{A}z = z$, а критерий главного дивизора, данный в предложении 19.2.9, превращается в предложение 19.1.5

Эллиптический синус. Для компактного одномерного комплексного многообразия X рода 1 отображение Абеля $\mathscr{A}\colon X \to \mathbb{C}^1/\Omega\mathbb{Z}^2$ биголоморфно, т. е. отождествляет X с некоторым тором. Вместо доказательства приведем пример.

Известно из ТФКП, что при любом $k \in (0,1)$ функция

$$\eta = F(z,k) := \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},$$

где знаменатель понимается как голоморфная ветвь, равная 1 в нуле, конформно отображает верхнюю полуплоскость $D_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$

на прямоугольник $\Pi_0 = \{\eta\in\mathbb{C}\colon\ -K<\operatorname{Re}\eta<K, 0<\operatorname{Im}\eta<K'\}$, где

$$K := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,, \quad K' := \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}\,,$$

причем обратное отображение $z = \operatorname{sn}(\eta, k)$ аналитически продолжается с указанного прямоугольник до мероморфной функции на всей плоскости $\mathbb{C}$. Это делается с помощью принципа симметрии, так что функция $z = \operatorname{sn}(\eta, k)$ конформно отображает прямоугольники Π_1 и Π_2, где $\Pi_1 = \{-K < \operatorname{Re}\eta < K,\ K' < \operatorname{Im}\eta < 2K'\}$ и Π_2 — сдвиг P_1 на число $2K - iK'$, на нижнюю полуплоскость, а прямоугольник Π_3 — сдвиг Π_2 на iK' — опять на верхнюю полуплоскость. Пусть $z_0 = -K$, $\omega_1 = 4K$, $\omega_2 = 2iK'$ и $\Pi = \{z_0 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \,|\, 0 < t_1, t_2 < 1\}$ — открытый прямоугольник, замыкание которого равно объединению замыканий всех Π_l, $l = 0, 1, 2, 3$. Тогда $\eta \mapsto (\operatorname{sn}(\eta, k), \operatorname{sn}'(\eta, k))$ является биголоморфным отображением тора $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$ на компактное одномерное комплексное многообразие X, полученное из замыкания множества $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, w^2 = (1 - z^2)(1 - k^2z^2)\}$ в $\mathbb{C}P^2$ или $\overline{\mathbb{C}}\times\overline{\mathbb{C}}$ удалением одной точки и добавлением двух, как в примере 19.2.3. В эти две точки переходят два полюса $iK', 2K + iK' \in \Pi$ функции $\operatorname{sn}(\eta, k)$. Обратное отображение есть не что иное как отображение Абеля $\mathscr{A}\colon X \to \mathbb{C}^1/\Omega\mathbb{Z}^2$, отвечающее выбору $w^{-1}dz$ в качестве базиса голоморфных 1-форм (как в примере (С) на с. 411) и прообразов отрезка $[-1, 1]$ и мнимой оси $i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ при отображении $X \ni (z, w) \mapsto z \in \overline{\mathbb{C}}$ в качестве образующих $H_1(X, \mathbb{Z})$. (Полный прообраз $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ состоит из двух замкнутых кривых на X, одна из которых берется за образующую.) Матрица периодов Ω при этом равна $(\omega_1, \omega_2) = (4K, 2iK')$.

Задача обращения Якоби. При другом выборе базиса пространства голоморфных 1-форм и системы образующих группы гомологий g-мерный комплексный тор $T_{\omega\gamma} = \mathbb{C}^g/\Omega\mathbb{Z}^{2g}$ заменяется на биголоморфный ему в силу сказанного в конце доказательства предложения 19.2.8. Этот класс биголоморфной эквивалентности торов называется *якобиевым тором* или *якобианом* многообразия X и обозначается через $J(X)$. Обобщая случай $g = 1$ (рассмотренный в предыдущем пункте на примере $\operatorname{sn}(\cdot, k)$), спросим: *является ли сужение $\mathscr{A}_g\colon X^{(g)} \to J(X)$ отображения Абеля на множество $X^{(g)}$ всех дивизоров вида $p_1 + \dots + p_g$, где $p_1, \dots, p_g \in X$, биголоморфным отображением*?

Ответ: при $g \geqslant 2$ это не так, но почти так. А именно: для почти всех $w \in J(X)$ прообраз $\mathscr{A}_g^{-1}(w)$ состоит ровно из одной точки (точнее, это верно для всех w вне некоторого $(g-1)$-мерного комплексного подмногообразия, возможно с особенностями). Прообразы остальных точек $w \in J(X)$ — комплексные проективные пространства, отвечающие по предложению 19.2.9 мероморфным функциям на X, имеющим ровно g полюсов с учетом кратностей (при $g \geqslant 2$ такие функции всегда существуют). Обратное отображение $\mathscr{A}_g^{-1}$ тем самым *определено почти всюду* на $J(X)$, но задается оно уже не голоморфными, а *мероморфными* функциями g переменных (локально как отношение двух голоморфных). Ситуацию можно понять на примере отображения $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $F(z_1, z_2) = (z_1, z_1 z_2)$. Оно переводит всю ось z_2 в начало координат, а обратное отображение $F^{-1}(w_1, w_2) = (w_1, w_2/w_1)$ определено всюду вне оси w_2 и задается мероморфными функциями.

Под *задачей обращения Якоби* в XIX веке понималась задача явного построения тех мероморфных функций от g комплексных переменных, которые задают отображение $\mathscr{A}_g^{-1}$. В качестве глобальных координат на $X^{(g)}$ брались выражения вида

$$\zeta(p_1 + \dots + p_g) = s(\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_g)),$$

где s — симметрический полином от g переменных, а $\varphi \in \mathscr{M}(X)$ — мероморфная функция (например, проекция на ось z, если X задано как множество нулей полинома $P(z, w)$). Тогда композиция $\zeta \circ \mathscr{A}_g^{-1}$ оказывается мероморфной функцией на торе $J(X)$, т. е. *абелевой функцией*. Средством явного построения служило то или иное обобщение конструкций из § 19.1 теории эллиптических функций, отвечающей случаю $g = 1$. Решения этой задачи были даны (независимо) Гёпелем и Розенхайном в 1840-х, Вейерштрасом и Риманом в 1850-х, Клейном в 1880-х. Решение Римана (с помощью тэта-функции Римана) годится для всех компактных одномерных комплексных многообразий X, остальные — для гиперэллиптических кривых (пример 19.2.3), причем у Гёпеля и Розенхайна только для ультраэллиптических (рода 2). Подобно тому, как эллиптический синус является решением уравнения движения маятника, от полученных абелевых функций ожидалось, что они удовлетворяют интересным и важным для приложений дифференциальным уравнениям. И действительно, решение Розенхайна (с помощью прямого обобщения тэта-функций Якоби) было изложено в книге В. В. Голубева (1953) и применено к интегрированию уравнений движения твердого тела в случае Ковалевской. Решение Римана излагается во всех учебниках по римановым поверхностям и было применено в 1970-х к построению конечнозонных решений солитонных уравнений. Решение Клейна (с помощью обобщения сигма-функции Вейерштрасса из § 19.1), развивающее решение Вейерштрасса, было изложено в книге Г. Ф. Бейкера (1897), в работах которого, как обнаружили в начале XXI века, была выписана и вся иерархия уравнения Кортевега – де

Фриза для (одной из) вторых логарифмических производных гиперэллиптической сигма-функции.

§ 19.3. Тэта-функции на многомерных торах

Торы и функции нескольких комплексных переменных. Понятия n-мерного комплексного многообразия M, голоморофной функции $f \in \mathscr{O}(M)$ и биголоморфного отображения $\Phi\colon M_1 \to M_2$ определяются аналогично одномерному случаю (мы уже пользовались ими в последнем подразделе § 19.2). Основной пример — n-мерный комплексный тор $M = \mathbb{C}^n/\Lambda$, где $\Lambda = \mathbb{Z}\gamma_1 + \dots + \mathbb{Z}\gamma_{2n}$ есть решетка ранга $2n$, т. е. дискретная абелева подгруппа в аддитивной группе $\mathbb{C}^n$, имеющая $2n$ образующих $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n} \in \mathbb{C}^n$, линейно независимых над $\mathbb{R}$. Набор $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$ называется *$\mathbb{Z}$-базисом* решетки Λ. Можно, как в предложении 19.2.8, записать $\Lambda = \Omega\mathbb{Z}^{2n}$, где Ω — комплексная $n{\times}2n$-матрица, j-й столбец которой состоит из координат вектора $\gamma_j \in \mathbb{C}^n$, $j = 1, \dots, 2n$.

Мероморфная функция f на M есть такая голоморфная функция на $M \setminus P$, где $P \subset M$ — замкнутое нигде не плотное множество, что для каждой точки $p \in P$ найдется открытая связная окрестность U и голоморфные функции $g, h \not\equiv 0$ на U, для которых $fh = g$ на $U \setminus P$. В отличие от случая $n = 1$, мероморфная функция на n-мерном комплексном многообразии M при $n \geqslant 2$, вообще говоря, не продолжается до голоморфного отображения $M \to \overline{\mathbb{C}}$ из-за *точек неопределенности*, подобных началу координат для мероморфной функции $f(z, w) = z/w$ на $\mathbb{C}^2$. Мероморфные функции на торе $\mathbb{C}^n \setminus \Lambda$ — то же самое, что *Λ-периодические мероморфные функции на* $\mathbb{C}^n$, т. е. такие $f \in \mathscr{M}(C^n)$, что $f(z + \lambda) = f(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и $\lambda \in \Lambda$.

Пример мероморфной функции на M — отношение двух голоморфных функций на M. Для некоторых M других мероморфных функций нет (например для $M = \mathbb{C}$ по теореме Вейерштрасса), а для некоторых есть (например для $M = \overline{\mathbb{C}}$). Приведем без доказательства результаты об этом для нужных нам случаев (далее используется только теорема 19.3.3).

19.3.1. Теорема (Пуанкаре – Кузен)**.** *Всякая мероморфная функция на $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, есть отношение двух целых.*

19.3.2. Определение. *Целая функция $\theta \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$ называется тэта-функцией относительно решетки Λ, если для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется такой полином $P_\lambda\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ степени не выше 1 , что верно равенство $\theta(z + \lambda) = \theta(z)\exp\{2\pi i P_\lambda(z)\}$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и $\lambda \in \Lambda$*

19.3.3. Теорема (Аппель – Эмбер)**.** *Всякая Λ-периодическая мероморфная функция на $\mathbb{C}^n$ есть отношение двух тэта-функций.*

Покажем, что множество периодов всякой мероморфной функции $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C}^n)$ является дискретной подгруппой аддитивной группы $\mathbb{C}^n$ (и тогда имеет вид $\mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_{2n}$ для некоторых линейно независимых над $\mathbb{R}$ векторов $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n} \in \mathbb{C}^n$), если только f не сводится линейной заменой координат к функции от меньшего числа переменных (такие функции f будем называть *невырожденными*). Это вытекает из следующего утверждения.

19.3.4. Предложение. *Если $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C}^n)$, то следующие условия эквивалентны*: (i) *f вырождена, т. е. существует такое линейное отображение $z = Qw$, $Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, что $f(Qw)$ зависит только от набора $w_1, \ldots, w_{n-1}$*; (ii) *множество периодов*

$$G(f) := \{\lambda \in \mathbb{C}^n \mid f(z+\lambda) = f(z) \text{ для всех } z \in \mathbb{C}^n\}$$

не дискретно; (iii) *существуют такие $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, не все равные 0, что $\sum_{k=1}^n b_k \,\partial f/\partial z_k \equiv 0$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). $G(f)$ содержит комплексную прямую $Q(\mathbb{C}^1_{w_n})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). По условию найдется такая последовательность точек $a_n \in G(f) \setminus \{0\}$, что $a_n \to 0$. Пусть b — предельная точка последовательности $\beta_n := a_n/|a_n|$ на единичной сфере в $\mathbb{C}^n$. Тогда имеем $xb \in G(f)$ для всех $x \geqslant 0$. Действительно, деля с остатком, найдем такие точки $x_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $x_n|a_n| \leqslant x < (x_n+1)|a_n|$. Тогда $|x_n a_n - xb| = |x_n|a_n|(\beta_n - b) + (x_n|a_n| - x)b| \leqslant x|\beta_n - b| + |a_n||b| \to 0$ при $n \to \infty$, откуда $xb \in G(f)$ в силу замкнутости $G(f)$. Теперь возьмем любую точку $z_0 \in \mathbb{C}^n$, в которой f голоморфна. Функция $\varphi(\zeta) := f(z_0 + \zeta b) - f(z_0)$ голоморфна в круге $U := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < \varepsilon\}$ и равна нулю на $U \cap [0, +\infty)$, а тогда и всюду в U по теореме единственности. В частности, производная функции f по направлению b тождественно равна 0. (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — любая матрица с n-м столбцом $(b_1, \ldots, b_n)$. Тогда для линейного отображения $z = Qw$ имеем $\partial z_k/\partial w_n = b_k$, $k = 1, \ldots, n$. Поэтому по условию верно равенство $\partial(f \circ Q)/\partial w_n = \sum_{k=1}^n (\partial f/\partial z_k) b_k \equiv 0$, т. е. $f(Qw)$ зависит только от $w_1, \ldots, w_{n-1}$. □

Четыре определения абелева многообразия. Комплексный тор $\mathbb{C}^n/\Lambda$, где $\Lambda = \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_{2n} = \Omega\mathbb{Z}^{2n}$ есть решетка ранга $2n$, называется *абелевым многообразием*, если выполнено одно из следующих условий.

19.3.5. Предложение. *Следующие свойства решетки $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ эквивалентны*:

(A) *Существует невырожденная Λ-периодическая мероморфная функция на $\mathbb{C}^n$ (или, что равносильно, невырожденная мероморфная функция на торе $\mathbb{C}^n/\Lambda$),*

(B) *существует такая эрмитова форма $H > 0$ на $\mathbb{C}^n$, что имеет место включение $\operatorname{Im} H(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$,*

(C) *найдутся $\mathbb{Z}$-базис Λ и $\mathbb{C}$-базис $\mathbb{C}^n$, в которых $\Omega = (D_\varepsilon, \tau)$, где $D_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, все $\varepsilon_j \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_1|\varepsilon_2|\ldots|\varepsilon_n$, а $\tau \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ такова, что $\tau^\top = \tau$ и $\operatorname{Im}\tau > 0$. Равносильная формулировка: тор $\mathbb{C}^n/\Lambda$ биголоморфен тору $\mathbb{C}^n/(D_\varepsilon\mathbb{Z}^n + \tau\mathbb{Z}^n)$,*

(D) *существует голоморфное вложение $\mathbb{C}^n/\Lambda \to \mathbb{C}P^N$ для некоторого N.*

Комментарий. В пункте (B) неравенство $H > 0$ означает, что $H(z, z) > 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, а запись $\operatorname{Im} H(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$ означает, что $\operatorname{Im} H(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}$ для всех $\lambda, \mu \in \Lambda$. Пункт (C) гласит, что с точностью до биголоморфизма комплексный тор $\mathbb{C}^n/\Lambda$ имеет тот же вид, что и якобиан в предложении 19.2.8, только там вместо любого набора $\varepsilon_1|\varepsilon_2|\ldots|\varepsilon_n$ натуральных чисел, делящих друг друга, был набор из одних единиц. В частности, отсюда получается, что *якобиан любого компактного одномерного комплексного многообразия является абелевым многообразием*. В связи с (D) напомним, что голоморфным вложением комплексных многообразий называется инъективное голоморфное отображение с дифференциалом максимального ранга в каждой точке. Оно является биголоморфизмом на свой образ. Из существования такого вложения, как в пункте (D), вытекает наличие на $\mathbb{C}^n/\Lambda$ большого запаса мероморфных функций, в том числе невырожденных (см. доказательство импликации (D)$\Rightarrow$(A)).

19.3.6. Замечание. Следующие свойства Λ также эквивалентны друг другу:

(A$'$) существует непостоянная Λ-периодическая мероморфная функция на $\mathbb{C}^n$ (или, что равносильно, непостояннная мероморфная функция на торе $\mathbb{C}^n/\Lambda$),

(B$'$) существует такая эрмитова форма $H \geqslant 0$, $H \not\equiv 0$ на $\mathbb{C}^n$, что $\operatorname{Im} H(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$.

Оставшаяся часть настоящего параграфа посвящена доказательствам сформулированного предложения. Вывод (B$'$) из (A$'$) — такой же, как вывод (B) из (A), а вывод (A$'$) из (B$'$) таков: факторизация по ядру $\ker H = \ker \operatorname{Im} H \cong \mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$ даст по предложению 19.3.5 абелево многообразие, невырожденная мероморная функция на котором продолжится до вырожденной, но не постоянной функции на исходном торе. Примеры разных случаев см. ниже.

Доказательство (A)⇒(B) и (A′)⇒(B′). Пусть функция $f \not\equiv 0$ есть Λ-периодическая мероморфная функция на $\mathbb{C}^n$. По теореме 19.3.3 имеем $f = \theta_1/\theta_2$, где $\theta_1, \theta_2 \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$ не равны тождественно нулю и удовлетворяют соотношениям

$$\theta(z+\lambda) = \theta(z)\exp\{2\pi i P_\lambda(z)\} \quad z \in \mathbb{C}^n,\ \lambda \in \Lambda, \tag{19.3.1}$$

где P_λ — полином на $\mathbb{C}^n$ степени не выше единицы. Приравнивая друг другу два выражения для $\theta(z+\lambda+\mu)$, получим условия совместности этих соотношений:

$$P_{\lambda+\mu}(z) - P_\lambda(z) - P_\mu(z+\lambda) \in \mathbb{Z} \quad z \in \mathbb{C}^n,\ \lambda, \mu \in \Lambda. \tag{19.3.2}$$

Записав $P_\lambda(z) = L(z,\lambda) + J(\lambda)$ (члены степени 1 и 0) и отделив члены степени 1 в (19.3.2), получаем, что $L(z,\lambda+\mu) = L(z,\lambda) + L(z,\mu)$. Поэтому, заменяя целые коэффициенты в разложении λ по $\mathbb{Z}$-базису $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$ на вещественные, мы продолжим $L\colon \mathbb{C}^n \times \Lambda \to \mathbb{C}$ до функции $L\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, которая $\mathbb{C}$-линейна по первому аргументу и $\mathbb{R}$-линейна по второму.

19.3.7. Лемма. *Полагая $A_0(z,w) := L(z,w) - L(w,z)$, получим билинейную кососимметричную функцию $A_0\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ такую, что $A_0(\Lambda,\Lambda) \subset \mathbb{Z}$ и $A_0(iz,iw) = A_0(z,w)$ для всех $z, w \in \mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Билинейность (над $\mathbb{R}$) и кососимметричность ясны из определения. Отделив члены степени 0 в (19.3.2), получим, что $J(\lambda+\mu) - J(\lambda) - J(\mu) - L(\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}$ для всех $\lambda, \mu \in \Lambda$. Меняя местами λ и μ и вычитая, получим, что $A_0(\Lambda,\Lambda) \subset \mathbb{Z}$. Отсюда в силу билинейности вытекает $\mathbb{R}$-значность A_0 на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Наконец, $A_0(iz,iw) - A_0(z,w) = iA_0(iz,w) + iA_0(z,iw)$ (выразить обе части через L и вынести i из первого аргумента), а тогда обе части равны 0, ибо левая вещественна, а правая — чисто мнимая. □

Теперь применим следующую лемму из линейной алгебры.

19.3.8. Лемма. *Введенное выше отображение $H \mapsto \operatorname{Im} H$ есть линейная* (*над полем* $\mathbb{R}$) *биекция между множеством всех эрмитовых форм $H\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ и множеством всех билинейных кососимметричных форм $A\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих равенству $A(iz,iw) = A(z,w)$ для всех $z, w \in \mathbb{C}^n$. Обратное отображение задается формулой $H(z,w) = A(iz,w) + iA(z,w)$.*

Доказательство. Положим $S := \operatorname{Re} H$ и $A := \operatorname{Im} H$. Отделяя Re и Im в равенстве $H(w,z) = \overline{H(z,w)}$, получаем, что билинейная форма S симметрична, а A кососимметрична. Взяв Im в равенстве $H(iz,iw) = H(z,w)$, видим, что $A(iz,iw) = A(z,w)$. Наконец, отделяя Re и Im в равенстве $H(iz,w) = iH(z,w)$, получаем, что по каждой из форм S, A однозначно находится вторая (значит, и H), поскольку $S(iz,w) = -A(z,w)$ и $A(iz,w) = S(z,w)$. Обратно, для кососимметричной формы $A\colon \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ с $A(iz,iw) = A(z,w)$ прямая проверка показывает, что форма $A(iz,w) + iA(z,w)$ эрмитова. $\square$

Итак, лемма 19.3.7 и лемма 19.3.8 дают на пространстве $\mathbb{C}^n$ эрмитову форму $H(z,w) := A_0(iz,w) + iA_0(z,w)$. Покажем, что она искомая, т. е. $H \geqslant 0$, $H \not\equiv 0$ в случае, когда $f \not\equiv \mathrm{const}$, и $H > 0$ в случае, когда f невырождена. Из равенства членов степени 0 в (19.3.2) вытекает, что функция $K'(\lambda) := J(\lambda) - (1/2)L(\lambda,\lambda)$ удовлетворяет условию $K'(\lambda+\mu) - K'(\lambda) - K'(\mu) \in \mathbb{Z}$ для всех $\lambda, \mu \in \Lambda$. Рассмотрим $\mathbb{R}$-линейную функцию $K\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ равную K' на векторах $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$. Тогда $J(\lambda) - (1/2)L(\lambda,\lambda) - K(\lambda) \in \mathbb{Z}$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Поэтому равенства (19.3.1) можно записать в виде

$$\theta(z+\lambda) = \theta(z)\exp\Big\{2\pi i\Big[L(z,\lambda) + \frac{1}{2}L(\lambda,\lambda) + K(\lambda)\Big]\Big\}. \qquad (19.3.3)$$

Функция $\theta_0(z) := \exp\{2\pi i[\Phi(z,z)/2 + \Psi(z)]\}$ с любой $\mathbb{C}$-билинейной симметричной формой $\Phi\colon \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ и любым $\mathbb{C}$-линейным функционалом $\Psi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ удовлетворяет при всех $z \in \mathbb{C}^n$ и $\lambda \in \Lambda$ похожим равенствам

$$\theta_0(z+\lambda) = \theta_0(z)\exp\Big\{2\pi i\Big[\Phi(z,\lambda) + \frac{1}{2}\Phi(\lambda,\lambda) + \Psi(\lambda)\Big]\Big\}.$$

Поэтому функция $g := \theta/\theta_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$ также удовлетворяет соотношениям вида (19.3.3), но с заменой L на $L - \Phi$ и K на $K - \Psi$.

Выберем $\Phi := L - H/(2i)$ (эта $\mathbb{R}$-билинейная функция симметрична в силу совпадения $\operatorname{Im} H(z,w) = H(z,w)/(2i) - H(w,z)/(2i)$ с $A_0(z,w) = L(z,w) - L(w,z)$ и $\mathbb{C}$-линейна по первому аргументу, а значит, и $\mathbb{C}$-билинейна) и $\Psi := K_1 - K_2$ при записи $K(z) = K_1(z) + \overline{K_2(z)}$ для некоторых $\mathbb{C}$-линейных $K_1, K_2\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Тогда (19.3.3) принимает вид

$$g(z+\lambda) = g(z)\exp\Big\{\pi H(z,\lambda) + \frac{\pi}{2}H(\lambda,\lambda) + 2\pi i R(\lambda)\Big\},$$

где $R := \overline{K_2} + K_2$ есть $\mathbb{R}$-значная функция на $\mathbb{C}^n$. Отсюда вытекает, что непрерывная функция $h(z) := |g(z)|\exp\{-(\pi/2)H(z,z)\}$ является Λ-периодической, а значит, ограниченной на всем $\mathbb{C}^n$. Из полученного неравенства

$$|g(z)| \leqslant C\exp\Big\{\frac{\pi}{2}H(z,z)\Big\}, \quad z \in \mathbb{C}^n \qquad (19.3.4)$$

вытекает, что (a) если существует $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ с $H(z_0,z_0) < 0$, то получим $f \equiv 0$; (b) если $H \equiv 0$, то $f \equiv \mathrm{const}$; (c) если пространство

$\ker H := \{z \in \mathbb{C}^n\colon H(z,w) = 0$ для всех $w \in \mathbb{C}^n\}$ не сводится к $\{0\}$, то функция $\zeta \mapsto f(z_0 + \zeta)$ постоянна на $\ker H$ при каждом $z_0 \in \mathbb{C}^n$ и потому функция f вырождена. Это и есть требуемые свойства H.

Докажем (a). Из (19.3.4) видно, что целая функция $\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto g(\zeta z_0)$ стремится к 0 при $\zeta \to \infty$, т. е. $g(\zeta z_0) \equiv 0$ по теореме Лиувилля. Для $z \in \mathbb{C}^n$, близких к z_0, также имеем $H(z,z) < 0$, так что $g = 0$ на открытом подмножестве $\mathbb{C}^n$ и, значит, $g \equiv 0$ на $\mathbb{C}^n$. Значит, любая функция $\theta \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющая (19.3.1), тождественно равна нулю. Тогда и функция $f = \theta_1/\theta_2$ такова. В доказательстве (b) и (c) вместо $\theta \equiv 0$ получается $\theta \equiv \mathrm{const}\,\theta_0$ на $\mathbb{C}^n$ и $z_0 + \ker H$ соответственно, откуда $f \equiv \mathrm{const}$ там же.

Примеры выполнения и невыполнения (B) и (B′).

19.3.9. Пример. Для любой решетки $\Lambda = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2 \subset \mathbb{C}$ выполнено условие (B) (и тем более (B′)). Действительно, годится функция $H(z,w) = kz\overline{w}$, где $k > 0$ выбрано так, чтобы $A(\gamma_1,\gamma_2) = k\,\mathrm{Im}(\gamma_1\overline{\gamma_2})$ (площадь фундаментального параллелограмма решетки) было целым. Условие (B) выполнено и для всех многомерных комплексных торов, являющихся произведением одномерных. Например, эрмитова форма $H(z,w) = k_1 z_1\overline{w_1} + k_2 z_2\overline{w_2}$ годится для тора $\mathbb{C}^2/\Omega_0\mathbb{Z}^4$ с матрицей

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

19.3.10. Пример. Рассмотрим решетку $\Lambda = \Omega_1\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{C}^2$ с матрицей

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ia & ic \\ 0 & 1 & ib & id \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ и } ad - bc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Пусть $H(z,w) = h_{11}z_1\overline{w_1} + h_{12}z_1\overline{w_2} + h_{21}z_2\overline{w_1} + h_{22}z_2\overline{w_2}$ есть эрмитова форма (так что $h_{11}, h_{22} \in \mathbb{R}$ и $h_{21} = \overline{h_{12}}$), мнимая часть которой $A := \mathrm{Im}\,H$ принимает целые значения на всех столбцах $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ матрицы Ω_1. В частности, число $A(\gamma_1,\gamma_2) = h_{12}$ целое. Обозначим его через n. Тогда $A(\gamma_3,\gamma_4) = n(ad - bc)$. Это число тоже должно быть целым, что в силу иррациональности $ad - bc$ возможно только при $n = 0$. Таким образом, все числа h_{kl} вещественны. Пользуясь этим, запишем $A(\gamma_3,\gamma_1) = ah_{11} + bh_{12} =: k_{31} \in \mathbb{Z}$, $A(\gamma_4,\gamma_1) = ch_{11} + dh_{12} =: k_{41} \in \mathbb{Z}$, $A(\gamma_3,\gamma_2) = ah_{12} + bh_{22} =: k_{32} \in \mathbb{Z}$, $A(\gamma_3,\gamma_2) = ch_{12} + dh_{22} =: k_{42} \in \mathbb{Z}$. Из первых двух равенств можно найти h_{12}, решив линейную систему, и из последних двух тоже. Приравняем результаты:

$$h_{12} = \frac{k_{31}d - k_{41}b}{ad - bc} = \frac{ak_{42} - ck_{32}}{ad - bc}.$$

Отсюда $k_{31}d - k_{41}b = ak_{42} - ck_{32}$. Если a, b, c, d линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то все k_{ij} должны равняться нулю, а тогда и $H \equiv 0$. Итак, *если $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $ad - bc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то не выполнено условие* (B′) *и, следовательно, на торе $\mathbb{C}^2/\Omega_1\mathbb{Z}^4$ нет непостоянных мероморфных функций.*

19.3.11. Пример. Проверьте, что для тора $\mathbb{C}^2/\Omega_2\mathbb{Z}^4$ с матрицей

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & ib \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

выполнено условие (B′), но не выполнено условие (B). Таким образом, на этом торе есть непостоянные мероморфные функции (а именно, не зависящие от z мероморфные функции на $\mathbb{C}^1_w/(\mathbb{Z} + ib\mathbb{Z})$), но нет невырожденных мероморфных функций.

Доказательство (B)⇒(C). По условию, $A := \operatorname{Im} H$ есть невырожденная (так как $A(iz, z) > 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$; см. доказательство леммы 19.3.8) $\mathbb{R}$-билинейная кососимметричная форма на $\mathbb{C}^n$, целочисленная на Λ. Воспользуемся этим, чтобы построить $\mathbb{Z}$-базис $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ решетки Λ, в котором (как в $\mathbb{R}$-базисе пространства $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$) матрица формы A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & D_\varepsilon \\ -D_\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \text{для некоторых } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{N} \text{ с } \varepsilon_1 | \varepsilon_2 | \ldots | \varepsilon_n.$$

Обозначим через $m(A)$ наименьшее положительное значение A на $\Lambda \times \Lambda$. Ясно, что $m(A) \in \mathbb{N}$. Пусть векторы $\gamma_1, \gamma_{n+1} \in \Lambda$ таковы, что $A(\gamma_1, \gamma_{n+1}) = m(A)$. Тогда число $A(\gamma_1, \lambda) \in \mathbb{Z}$ делится на $m(A)$ для всех $\lambda \in \Lambda$ (иначе $\lambda - k\gamma_{n+1}$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$ даст меньшее $m(A)$ положительное значение A) и аналогично $A(\lambda, \gamma_{n+1})$. Поэтому для всех $\lambda \in \Lambda$ вектор

$$v := \lambda - \frac{A(v_1, \lambda)}{m(A)}\gamma_{n+1} - \frac{A(\lambda, v_{n+1})}{m(A)}\gamma_{n+1}$$

принадлежит решетке Λ и A-ортогонален подрешетке $\mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_{n+1}$ (т. е. $A(v, \mu) = 0$ для всех μ из последней). Записав $\lambda = v + (\lambda - v)$, получаем разложение на блоки размера 2×2 и $(2n-2) \times (2n-2)$:

$$A = \begin{pmatrix} m(A)J & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}, \quad \text{где } J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а A' — невырожденная кососимметричная $\mathbb{R}$-билинейная форма на $\mathbb{R}$-линейной оболочке $\mathbb{R}^{2n-2}$ некоторой подрешетки $\Lambda' \subset \Lambda$, целая на Λ'. Это позволяет провести индукцию по n (и доказывает требуемое в случае $n = 1$).

При этом целое число $\varepsilon_1 := m(A)$ будет делителем целого числа $\varepsilon_2 := m(A') = A'(x', y')$, поскольку если $m(A') = km(A) + l$, где $0 < l < m(A')$, то число

$$A(x' - k\gamma_1, y' + \gamma_{n+1}) = m(A') - 0 + 0 - km(A) = l$$

будет положительным и меньшим $m(A)$, что противоречит определению $m(A)$.

Заметим, что векторы $e_j := \gamma_j/\varepsilon_j$, $j = 1, \ldots, n$, образуют $\mathbb{C}$-базис $\mathbb{C}^n$. Действительно, если $V \subset \mathbb{C}^n$ — их $\mathbb{R}$-линейная оболочка, то имеем $A(z, w) = 0$ для всех $z, w \in V$ по построению базиса $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$. Тогда для любого вектора $\xi \in V \cap iV$ справедливо соотношение $H(\xi, \xi) = A(i\xi, \xi) + iA(\xi, \xi) = 0 + i0 = 0$, откуда $\xi = 0$ в силу условия $H > 0$. Равенство $V \cap iV = \{0\}$ как раз и означает $\mathbb{C}$-линейную независимость векторов $e_1, \ldots, e_n$.

В $\mathbb{Z}$-базисе $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ решетки Λ и $\mathbb{C}$-базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{C}^n$ матрица Ω принимает вид $\Omega = (D_\varepsilon, \tau)$ из двух $(n\times n)$-блоков. Покажем, что матрица τ симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть. Для этого запишем матрицу билинейной формы A в $\mathbb{R}$-базисе $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ пространства $\mathbb{C}^n$. Матрица перехода имеет вид

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{2n}) = (e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n) \begin{pmatrix} D_\varepsilon & R \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

где $R := \operatorname{Re}\tau$ и $S := \operatorname{Im}\tau$. Нас больше интересует обратная матрица

$$P := \begin{pmatrix} D_\varepsilon & R \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_\varepsilon^{-1} & -D_\varepsilon^{-1}RS^{-1} \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix},$$

так как матрица билинейной формы A в новом базисе имеет вид

$$P^\top \begin{pmatrix} 0 & D_\varepsilon \\ -D_\varepsilon & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & S^{-1} \\ -S^{-1\top} & S^{-1\top}RS^{-1} - S^{-1\top}R^\top S^{-1} \end{pmatrix}.$$

Условие $A(iz, iw) = A(z, w)$ означает теперь, что $S^{-1\top} = S^{-1}$ и $S^{-1\top}RS^{-1} - S^{-1\top}R^\top S^{-1} = 0$, т. е. матрицы S и T симметричны. Условие $A(iz, z) > 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ означает, что $S^{-1} > 0$. Таким образом, матрица τ симметрична, а ее мнимая часть положительно определена.

Доказательство (C)$\Rightarrow$(D). Пусть сначала $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1$, т. е. $\Omega = (I, \tau)$, где $\tau \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, $\tau = \tau^\top$, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Определим *тэта-функцию Римана*

$$\theta(z) = \theta(z, \tau) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \exp\left\{2\pi i m^\top \cdot z + \pi i m^\top \cdot \tau \cdot m\right\}.$$

Так как $\operatorname{Im}\tau > 0$, то квадратичная функция $\operatorname{Re}(\pi i m^\top \tau m)$ от m всюду отрицательна. Отсюда вытекает равномерная на компактах в $\mathbb{C}^n$ сходимость ряда. Таким образом, $\theta(\cdot,\tau) \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$. При этом $\theta(\cdot,\tau) \not\equiv 0$ как ряд Фурье с ненулевыми коэффициентами.

Любой элемент λ решетки $\Lambda := \Omega\mathbb{Z}^{2n} = \mathbb{Z}^n + \tau\mathbb{Z}^n$ однозначно записывается в виде $\lambda = k+\tau l$, где $k, l \in \mathbb{Z}^n$. Пользуясь этим, определим функцию

$$e_\lambda(z) := \exp\Big\{-2\pi i\Big[l^\top \cdot z + \frac{1}{2}l^\top \cdot l\Big]\Big\}.$$

Тогда основные свойства тэта-функции Римана можно записать так:

(периодичность) $\theta(z+\lambda) = \theta(z)e_\lambda(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \Lambda$;

(четность) $\theta(-z) = \theta(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$.

(Докажите эти свойства.) Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$S_k := \{f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n) \mid f(z+\lambda) = f(z)e_\lambda^k(z) \text{ для всех } z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \Lambda\}.$$

Множество S_k есть векторное пространство над $\mathbb{C}$, не равное $\{0\}$ (так как S_1 содержит θ, а S_k при $k \geqslant 2$ содержит все функции вида $\theta(z+a_1)\cdots\theta(z+a_k)$, где $a_1+\cdots+a_k = 0$). Покажем, что оно *конечномерно*. Действительно, всякая функция $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$ со свойством $f(z+e_j) = f(z)$, $j = 1,\ldots,n$ (где $e_j \in \mathbb{C}^n$ — вектор с $e_{jk} = 0$ при $k \neq j$ и $e_{jj} = 1$) является целой функцией от $\exp\{2\pi i z_1\},\ldots,\exp\{2\pi i z_n\}$ (это локально так по условию периодичности, а тогда и глобально так по теореме о монодромии), т. е. имеет вид $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} c(m)\exp\{2\pi i m^\top \cdot z\}$. Тогда условие $f \in S_k$ означает, что $c(m+ke_j) = c(m)\exp\Phi$, где Φ — линейная функция от m, причем из вида этой линейной функции следует, что любая $f \in S_k$ есть линейная комбинация функций $\theta(kz+e_j l/k)$, где $j = 1,\ldots,n$, $l = 0,1,\ldots,k-1$. В частности, размерность пространства S_k над $\mathbb{C}$ не превосходит k^n (на самом деле она равна k^n, но нам это не потребуется).

Заметим, что все элементы всех пространств S_k являются тэта-функциями в смысле определения 19.3.2, а частное двух функций из S_k есть Λ-периодическая мероморфная функция на $\mathbb{C}^n$, т. е. *абелева функция*. Чтобы избавиться от точек неопределенности таких функций, составим из них отображение в проективное пространство. В следующем утверждении выбрано $k = 3$.

19.3.12. Предложение. *Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_N$ — произвольный базис векторного пространства S_3 над $\mathbb{C}$. Тогда $\Phi := (f_0 : f_1 : \cdots : f_N)$ является голоморфным вложением тора $\mathbb{C}^n/\Lambda$ в $\mathbb{C}P^N$.*

Доказательство. Проверим корректность определения отображения Φ, т. е. то, что все функции $f_0, f_1, \ldots, f_N$ не могут обратиться в нуль ни в какой точке $z_0 \in \mathbb{C}^n$. В силу базисности это означало бы, что $f(z_0) = 0$ для всех $f \in S_3$. Но функция

$$f_{ab}(z) := \theta(z+a)\theta(z+b)\theta(z-a-b) \tag{19.3.5}$$

принадлежит S_3 для всех $a, b \in \mathbb{C}^n$, а так как $\theta \not\equiv 0$, то найдется a с $\theta(z_0+a) \neq 0$. Тогда (при этом a) найдется b с $\theta(z_0+b)\theta(z_0-a-b) \neq 0$, так что $f_{ab}(z_0) \neq 0$. Покажем теперь, что Φ — голоморфное вложение.

1) *Максимальность ранга дифференциала в каждой точке*. Голоморфное отображение $F = (f_0, f_1, \ldots, f_N)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ таково, что $\Phi = \pi \circ F$, где $\pi\colon \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^N$ — естественная проекция. Имеем $d_z\Phi = d_{F(z)}\pi \circ d_zF$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$ по теореме о дифференцировании сложной функции. Так как $d_{F(z)}\pi$ имеет одномерное ядро $\mathbb{C}F(z)$, то образ $d_z\Phi$ равен образу $d_{F(z)}\pi \circ M$, где (в сокращенных обозначениях $\partial_k f := \partial f/\partial z_k$)

$$M := \begin{pmatrix} f_0(z) & \partial_1 f_0(z) & \ldots & \partial_n f_0(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_N(z) & \partial_1 f_N(z) & \ldots & \partial_n f_N(z) \end{pmatrix}$$

есть $(n+1)\times(N+1)$-матрица, составленная из столбца $F(z)$ и матрицы d_zF. Достаточно доказать, что ранг M не меньше $n+1$ (тогда ранг $d_z\Phi$ будет не меньше n, т.е. не меньше размерности области определения отображения Φ). Доказательство от противного. Если ранг M в какой-то точке $z_0 \in \mathbb{C}^n$ меньше $n+1$, то найдутся такие $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, не все равные нулю, что $\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \partial_\alpha f_j(z_0) = c_0 f_j(z_0)$ для всех $j = 0, 1, \ldots, N$. Разлагая $f_{ab} \in S_3$ (см. (19.3.5)) по базису $\{f_j\}$ пространства S_3, выводим отсюда, что

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \partial_\alpha f_{ab}(z_0) = c_0 f_{ab}(z_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}^n.$$

Для функции $\varphi(z) := \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \partial_\alpha \theta(z)/\theta(z) \in \mathscr{M}(\mathbb{C}^n)$ это означает, что

$$\varphi(z_0+a) + \varphi(z_0+b) - \varphi(z_0-a-b) = c_0, \quad a, b \in \mathbb{C}^n. \tag{19.3.6}$$

Заметим, что для любой точки $a \in \mathbb{C}^n$ найдется такой $b \in \mathbb{C}^n$, что $\varphi \in \mathscr{O}(z_0+b)$ и $\varphi \in \mathscr{O}(z_0-a-b)$ (надо выбрать b вне двух сдвигов множества нулей $\theta(z)$). Тогда из (19.3.6) вытекает, что $\varphi \in \mathscr{O}(z_0+a)$. В силу произвольности a заключаем, что $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$. Далее, из свойств периодичности

$$\theta(z+e_\alpha) = \theta(z), \quad \theta(z+\tau_\alpha) = \theta(z)\exp\Big\{-2\pi i\Big(z_\alpha + \frac{1}{2}\tau_{\alpha\alpha}\Big)\Big\}$$

тэта-функции Римана (где $\alpha = 1, \ldots, n$ и τ_α означает α-й столбец матрицы τ) и из определения функции $\varphi(z)$ вытекает, что

$$\varphi(z + e_\alpha) = \varphi(z), \quad \varphi(z + \tau_\alpha) = \varphi(z) - 2\pi i c_\alpha \tag{19.3.7}$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и $\alpha = 1, \ldots, n$. Поэтому все частные производные первого порядка *целой* функции $\varphi(z)$ являются Λ-периодическими, т. е. равны константам по теореме Лиувилля. Имеем $\varphi(z) = c + \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha z_\alpha$, где $b_\alpha, c \in \mathbb{C}$. Все $b_\alpha = \varphi(z + e_\alpha) - \varphi(z)$ равны нулю по первому равенству (19.3.7). Но тогда второе равенство (19.3.7) дает равенство нулю всех c_α. Это противоречие с определением констант c_α доказывает требуемую оценку ранга матрицы M, а значит, и ранга дифференциала отображения Φ.

2) *Инъективность.* Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$ таковы, что $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$, т. е. нашлось ненулевое число $C \in \mathbb{C}$ для которого $f_j(z_1) = C f_j(z_2)$ при всех $j = 0, 1, \ldots, N$. В силу базисности $\{f_j\}$ этим же свойством обладают все $f \in S_3$. В частности, имеем $f_{ab}(z_1) = C f_{ab}(z_2)$ для всех $a, b \in \mathbb{C}^n$, т. е.

$$\frac{\theta(z_1 + a)\theta(z_1 + b)\theta(z_1 - a - b)}{\theta(z_2 + a)\theta(z_2 + b)\theta(z_2 - a - b)} = C, \quad a, b \in \mathbb{C}^n. \tag{19.3.8}$$

Для любой точки $a \in \mathbb{C}^n$ найдется такой $b \in \mathbb{C}^n$, что все сомножители, кроме $\theta(z_1 + a)$ и $\theta(z_2 + a)$, отличны от нуля (надо выбрать b вне четырех сдвигов множества нулей $\theta(z)$). В силу произвольности a равенство (19.3.8) означает, что функция $\theta(z_1 + a)/\theta(z_2 + a)$ голоморфна и отлична от нуля всюду на $\mathbb{C}^n_a$. Поэтому существует функция $\varphi \in \mathscr{O}(C^n)$ такая, что $\exp\varphi(a) = \theta(z_1 + a)/\theta(z_2 + a)$ для всех $a \in \mathbb{C}^n$. Пользуясь указанными перед (19.3.7) свойствами периодичности функции $\theta(z)$, находим свойства периодичности функции φ:

$$\varphi(z + e_\alpha) - \varphi(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \quad \varphi(z + \tau_\alpha) - \varphi(z) - 2\pi i C_\alpha \in 2\pi i\mathbb{Z} \tag{19.3.9}$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и $\alpha = 1, \ldots, n$, где через $C_\alpha \in \mathbb{C}$ обозначена α-я координата вектора $z_1 - z_2 \in \mathbb{C}^n$. Из (19.3.9) ясно, что все первые частные производные функции φ являются Λ-периодическими и, следовательно, константами по теореме Лиувилля. Запишем

$$\varphi(z) = c + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha z_\alpha.$$

Тогда $b_\alpha \in \mathbb{Z}$ по первому равенству (19.3.9). Второе же равенство в (19.3.9) принимает вид

$$2\pi i \sum_{\beta=1}^n b_\beta \tau_{\alpha\beta} - 2\pi i C_\alpha \in 2\pi i\mathbb{Z}, \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

откуда $z_1 - z_2 \in \Lambda$. Итак, равенство $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$ возможно только при $z_1 - z_2 \in \Lambda$, т. е. Φ инъективно на торе $\mathbb{C}^n/\Lambda$. $\square$

19.3.13. Замечание. При любом целом $k \geqslant 3$ любой $\mathbb{C}$-базис пространства S_k аналогично предложению 19.3.12 задает голоморфное вложение Φ тора в проективное пространство. При $k = 2$ это неверно, поскольку $\Phi(-z) = \Phi(z)$ в силу четности $\theta(z)$. Но это — единственное препятствие, так что Φ задает вложение тора, профакторизованного по $\{\pm \mathrm{Id}\}$, в проективное пространство.

19.3.14. Замечание. Доказательство (C)⇒(D) для любых чисел $\varepsilon_1|\varepsilon_2|\ldots|\varepsilon_n$ проводится аналогично, только с записью $\lambda = D_\varepsilon k + \tau l$ $(k, l \in \mathbb{Z}^n)$ в определении функции $e_\lambda(z)$. Тут есть новые детали, на которых мы не останавливаемся.

Доказательство (D)⇒(A). Для любой точки $p \in \mathbb{C}^n/\Lambda$, спроектировав многообразие $\Phi(\mathbb{C}^n/\Lambda) \subset \mathbb{C}P^N$ на его касательное пространство в точке $\Phi(p)$, получим n функций $f_1, \ldots, f_n$ из пространства $\mathscr{M}(\mathbb{C}^n/\Lambda)$, задающих обратимое голоморфное отображение окрестности точки p на окрестность некоторой точки в $\mathbb{C}^n$. После сдвига и линейной замены можно считать, что $f_j(p) = 0$ и $\partial_k f_j(p) = \delta_{jk}$ для всех $j, k = 1, \ldots, n$. Тогда матрица $(\partial_{kl} f(p))_{k,l=1}^n$ вторых частных производных функции $f := (f_1^2 + \cdots + f_n^2)/2$ является тождественной. Для вырожденной мероморфной функции такая матрица вырождена в силу предложения 19.3.4(iii). Значит, f — невырожденная мероморфная функция на торе $\mathbb{C}^n/\Lambda$.

Учебное издание

ТФФА — ЛЕКЦИИ ДЛЯ АСПИРАНТОВ
Под редакцией академика Б. С. Кашина

Художественное оформление *К. В. Саутенков*
Верстка *К. А. Афонин*

Подписано в печать 14.03.2023. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 27,0. Тираж 200 экз.
Изд. № 12195. Заказ №

Издательство Московского университета

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
(ул. Академика Хохлова, 11).
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
http://msupress.com

Отдел реализации.
Тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

Отпечатано в типографии