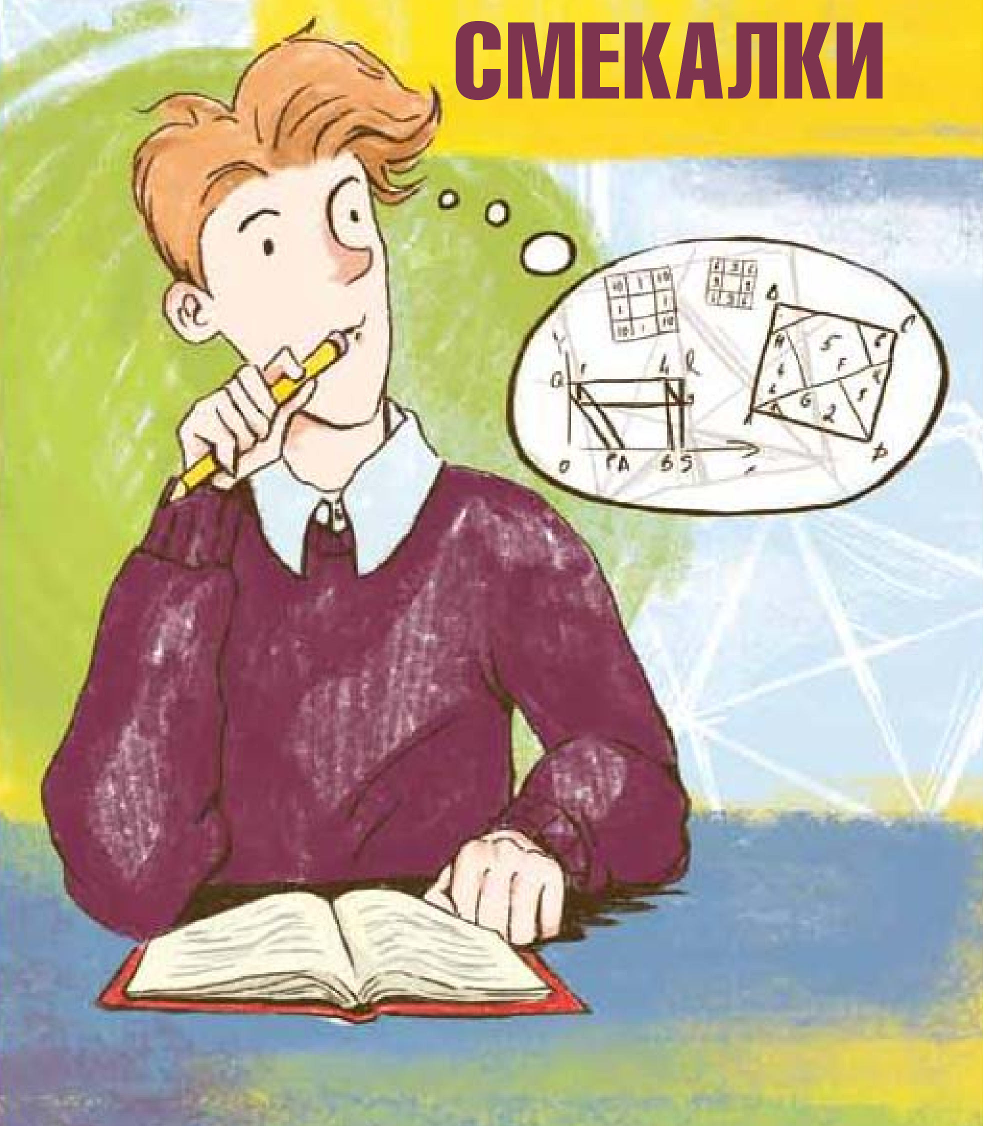
Е. И. ИГНАТЬЕВ

В ЦАРСТВЕ СМЕКАЛКИ



Е. И. ИГНАТЬЕВ

В ЦАРСТВЕ СМЕКАЛКИ

Лекстор
Издание осуществлено при финансовой поддержке
Банка «Новый Символ»
Москва 2017

УДК 087.5
ББК 22.1
И266

6+
Знак информационной продукции
согласно Федеральному закону от
29.12.2010 г. № 436-ФЗ

Игнатьев Е. И.

И266 В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев ; Под редакцией М. К. Потапова с текстологической обработкой Ю. В. Нестеренко. — М. : Лекстор, 2017. — 228 с. : ил.

ISBN 978-5-906122-38-4

Вниманию читателя предлагается одна из старых русских популярных книг по математике — книга преподавателя гимназии Емельяна Игнатьевича Игнатьева (1869–1923), признанного классика в области педагогики и занимательной математики. В своей книге, первое издание которой вышло в 1908 году, он собрал большое количество разнообразных задач на сообразительность по арифметике и геометрии. За более чем сто лет популярная математическая литература, изданная на русском языке, сильно обогатилась, и теперь многие задачи из книги Игнатьева широко известны. И по сей день его работы не потеряли актульности и могут служить учебным пособием.

Книга содержит задачи занимательного характера, имеющие различную степень трудности. Задачи решаются с привлечением минимальных сведений из арифметики и геометрии, но требуют сообразительности и умения логически мыслить.

Многие задачи из книги «В царстве смекалки» вошли в золотой фонд материалов олимпиад по математике для школьников, абитуриентов и студентов вузов как в Советском Союзе, так и в современной России.

Текст печатается по изданию: Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. — М. : Наука, 1978, 192 с.

УДК 087.5
ББК 22.1

ISBN 978-5-906122-38-4

© Оформление, составление.
ООО «Лекстор», 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

Книга Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки», написанная в начале нашего века, является одной из первых популярных книг по математике, изданных на русском языке. В ней содержится большое количество задач занимательного характера, имеющих различную степень трудности. Как правило, задачи решаются с привлечением минимальных сведений из арифметики и геометрии, но требуют сообразительности и умения логически мыслить.

В первую очередь книга рассчитана на школьников, как младших классов, так и старшеклассников. Родители найдут в ней интересные упражнения для развития смекалки у детей дошкольного возраста. Часть задач представляет интерес и для взрослых читателей. Внутри каждого раздела задачи расположены в порядке возрастания трудности. Может быть, взрослым некоторые из них покажутся знакомыми. Причина в том, что многие задачи из книги Е. И. Игнатьева попали в более поздние популярные издания и стали широко известны.

За 70 лет, прошедших с момента выхода первого издания книги, совершились огромные изменения в общественном и социальном устройстве нашей страны. Условия многих задач, отражавшие реальные отношения прошлого века, сегодняшнему читателю показались бы непривычными. Мы переработали часть задач, стараясь придать им более современный вид или стилизуя их под старинные истории и сказки. При этом всюду, где только было возможно, сохранялся образный язык автора. Мы опустили некоторые разделы книги, на наш взгляд, не очень интересные современному читателю, например раздел о вычислительной технике времени Е. И. Игнатьева. Вместе с тем в отдельные разделы книги было добавлено небольшое количество близких по тематике задач.

Стремясь к тому, чтобы книга была понятна школьникам младших классов, мы сочли возможным не вводить терминологию, принятую в старших классах средней школы. В частности, мы сохранили для фигур, совпадающих при наложении, название «равные фигуры», вместо равенства величин углов пишем «равенство углов» и т. д.

Думается, что эта книга, сыгравшая большую роль в развитии отечественной популярной литературы по математике, с интересом будет прочитана современными школьниками и взрослыми, с успехом послужит целям, которые ставил ее автор много лет тому назад.

В заключение хотелось бы поблагодарить А. С. Подколзина и А. Т. Фоменко, оказавших нам помощь в редактировании некоторых разделов книги.

1977 *М. К. Потапов, О. В. Нестеренко*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Станет ли кто в наше время отрицать настоятельную необходимость самого широкого распространения и популяризации математических знаний? Первоначальные математические познания должны входить с самых ранних лет в наше образование и воспитание. Само собой разумеется при этом, что умственную самодеятельность, сообразительность и «смекалку» нельзя ни «вдолбить», ни «вложить» ни в чью голову. Результаты надежны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в легкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью. Пытаясь перенести читателя в «царство смекалки», мы, конечно, не обольщаем себя надеждой, что смогли показать ему это царство во всей его прелести и полноте. Для этого понадобилась бы не одна такая книга: так велика и обширна область только тех отделов математики, которые можно подвести под общее заглавие «математических игр и развлечений».

Внимательный читатель заметит, что книга по возможности разбита на разделы, содержащие каждый однородные задачи в порядке возрастания их трудности. Нет, вообще говоря, никакой надобности читать и разбираться в такой книге подряд. Каждый может для начала взять тот раздел, который его наиболее заинтересует, и разобраться сначала в нем, затем перейти к любому другому и т. д. Нельзя, однако, поручиться, что принятая нами планировка материала удовлетворит всех. Слишком субъективное это дело: что одному дается трудно, то другому легко, и наоборот. Легко убедиться, что почти все предлагаемые в книге задачи можно видоизменять и делать предметом беседы даже с маленькими детьми. С другой стороны, мы надеемся, что данная книга может послужить неплохим пособием для математического саморазвития не одного только учащегося юношества, а для всех вообще чувствующих склонность к работе ума.

1908

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ. РОЛЬ ПАМЯТИ В МАТЕМАТИКЕ

Относительно математики в нашемобществе еще до сих пор существуют самые странные предрассудки. Одни говорят, что заниматься математикой могут только исключительные, одаренные совсем особыми способностями умы, другие утверждают, что для этого необходима особая, так сказать, «математическая память» для запоминания формул и т. д.

Нельзя, конечно, спорить против того, что существуют умы с резко выраженными склонностями к той или иной стороне умственной деятельности. Но точно так же никоим образом нельзя утверждать, что существуют хотя мало-мальски нормальные умы, которые совсем неспособны к восприятию и полному усвоению необходимых математических знаний, хотя бы, скажем, в размерах курса средней школы.

Будем справедливы и признаем, наконец, что выражение «неспособен к математике» есть прежде всего горький продукт нашего неумения, а, пожалуй, иногда и легкомысленного нежелания поставить в семье и школе преподавание математики на должную высоту.

Еще менее можно говорить о необходимости для математики какой-то особой, специальной памяти для запоминания (зазубривания?) каких-то формул или правил, науку сознательной и последовательной логической мысли обращать в какой-то механический, бессознательный процесс. А между тем, как далеко может заходить дело в этом отношении, свидетельствует известный русский математик В.П. Ермаков. Вот что, между прочим, сообщал он в одном из своих докладов Киевскому физико-математическому обществу.

«Когда мне пришлось студентам читать интегральное исчисление, то в первый же год произошел эпизод, который навсегда сохранится в моей памяти.

Прочитавши часть теории, я для пояснения даю задачи. Я прошу студентов решать задачи в тетрадях. По мере решения я пишу полученные результаты на доске. Однажды для пояснения способов понижения биномиальных интегралов я написал на доске подходящую задачу. И вот вижу, что некоторые студенты вынимают из карманов какие-то тетрадки и смотрят в них.

— Что это?

— Общие формулы.

— Зачем?

— Нам прежний профессор советовал иметь список общих формул и по нему решать частные примеры. Ведь не станете же вы требовать, чтобы мы заучили на память все сорок общих формул.

— Заучивать в математике никаких формул не следует. Но я нахожу также неуместным пользование справочными пособиями и нахождение интегралов по общим формулам подстановкою в них данных значений показателей и коэффициентов. Ведь не с неба свалились к нам общие формулы; для вывода их вы употребили ряд рассуждений; применяйте те же рассуждения к частным примерам.

Таким образом оказалось возможным находить всякие интегралы и без общих формул. Пришлось, впрочем, некоторые выкладки видоизменить так, чтобы они непосредственно могли быть приложены к частным примерам.

Получилась еще и та выгода, что на каждом частном примере студенты повторяли все те же рассуждения, которые необходимы для вывода общей формулы. От частого повторения приобретался навык, и в результате — быстрота решения задач.

Рассказанный эпизод заставил меня глубже вникнуть в сущность математики.

В молодых летах и я обращал все внимание на конечные результаты. Разбирая какое-нибудь доказательство, я заботился только о том, чтобы убедиться в его строгости. Вот добрался до окончательного результата, и довольно! Дальше я старался помнить окончательные выводы, весь же процесс доказательства быстро испарялся. Но потом забывались и формулы, а часто эти формулы оказывались необходимыми при дальнейших занятиях. Что же оставалось делать? Собирать библиотеку из справочных книг? Но на это не хватало средств, да и не было помещения для библиотеки. Поневоле приходилось припоминать самый процесс, при помощи которого выводилась та или иная формула. Таким образом, вместо формул мало-помалу я пришел к самим доказательствам. Оказалось, что легче припомнить процесс математического мышления, чем голые формулы. Да и нет надобности помнить целиком весь процесс мышления, достаточно наметить этапные пункты, по которым должна идти наша мысль. И вот уже несколько лет, как я своим слушателям твержу: *в математике следует помнить не формулы, а процесс мышления*.

Прочитавши какой-нибудь отдел из аналитической геометрии, я излагаю студентам конспект, в котором без формул намечаю главные пункты мышления.

Если выражен процесс математического мышления, то получение самих формул является уже делом чисто механическим. В механизме же алгебраических действий ученики должны приобрести навыки еще в средней школе.

Я пришел к тому убеждению, что указанный мною принцип должен быть применен и в средней школе…»

Продолжим мысль В. П. Ермакова и скажем: указанный принцип должен в особенности лечь в основание начального — как семейного, так и школьного — образования в области математических знаний. Не натаскивайте ни ребят, ни юношей на различных «табличках» сложения, вычитания, умножения, на механическом запоминании разных «правил» и формул, а прежде всего приучайте охотно и сознательно мыслить. Остальное приложится. Не мучьте никого длиннейшими скучнейшими и механическими вычислениями и упражнениями.

Когда они понадобятся кому-либо в жизни, он их проделает сам, — да на это нынче есть всякие счетные машины, таблицы и иные приспособления.

1911

I. ЗАДАЧИ-ШУТКИ, ЗАДАЧИ-ЗАГАДКИ И ШУТОЧНЫЕ ИСТОРИИ

1. ДЕЛЕЖ

Разделить 5 яблок между пятью лицами так, чтобы каждый получил по яблоку и одно яблоко осталось в корзине.

Решение. Один человек берет яблоко вместе с корзиной.

2. СКОЛЬКО КОШЕК?

В комнате четыре угла. В каждом углу сидит кошка. Напротив каждой кошки по три кошки. На хвосте каждой кошки по одной кошке. Сколько же всего кошек в комнате?

Решение. Иной, пожалуй, начнет вычислять так: 4 кошки в углах, по 3 кошки против каждой — это еще 12 кошек, да на хвосте каждой кошки по кошке, значит, еще 16 кошек. Всего, значит, 32 кошки. Пожалуй, по-своему он будет и прав… Но еще более прав будет тот, кто сразу сообразит, что в комнате находится всего-навсего четыре кошки. Ни более, ни менее.

3. ПОРТНОЙ

Портной имеет кусок сукна в 16 метров, от которого он отрезает ежедневно по 2 метра. По истечении скольких дней он отрежет последний кусок?

Р е ш е н и е. Если этот вопрос задан быстро и отвечающий не имеет времени на размышление, то часто можно услышать неправильный ответ: по истечении 8 дней. На самом деле последний кусок будет отрезан по истечении 7 дней.

4. ЧТО СКАЗАЛ СТАРИК?

Два молодых казака, оба лихие наездники, бились между собою об заклад, кто кого перегонит. Не раз то тот, то другой был победителем, наконец это им надоело.

— Вот что, — сказал Григорий, — давай спорить наоборот. Пусть заклад достанется тому, чей конь придет в назначенное место вторым, а не первым.

— Ладно! — ответил Михаил.

Казаки выехали на своих конях в степь. Зрителей собралось множество: всем хотелось посмотреть такую диковинку. Один старый казак начал считать, хлопая в ладоши:

— Раз!.. Два!.. Три!..

Спорщики; конечно, ни с места. Зрители стали смеяться, судить да рядить и порешили, что такой спор невозможен и что спорщики простоят на месте, как говорится, до скончания века. Тут к толпе подошел седой старик, видавший на своем веку разные виды.

— В чем дело? — спрашивает он.

Ему сказали.

— Эге ж! — говорит старик, — вот я им сейчас шепну такое слово, что поскачут, как ошпаренные…

И действительно… подошел старик к казакам, сказал им что-то, и через полминуты казаки уже неслись по степи во всю прыть, стараясь непременно обогнать друг друга, но заклад все же выигрывал тот, чья лошадь приходила второй.

Что сказал старик?

Р е ш е н и е. Старик шепнул казакам: «Пересядьте». Те поняли, мигом пересели каждый на лошадь своего противника, и каждый погнал теперь во всю прыть чужую лошадь, на которой он сидел, чтобы собственная его лошадь пришла второй.

5. ЧИСЛО 666

Число 666 увеличить в полтора раза, не производя над ним никаких арифметических действии.

Р е ш е н и е. Написать это число, а затем повернуть бумажку «вверх ногами» (на 180°). Получится 999.

6. РАЗРУБИТЬ ПОДКОВУ

Двумя ударами топора разрубить подкову на шесть частей, не перемещая частей после удара.

Р е ш е н и е. Если вы начертите подкову в виде дугообразной линии, как это обычно и делают, то, сколько бы вы ни ломали голову, вам не удастся разрезать ее двумя прямыми более чем на пять частей (рис. 1).

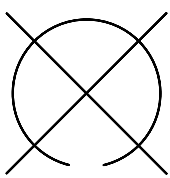


Рис. 1

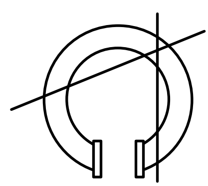


Рис. 2

Другое дело, если вы нарисуете подкову имеющей ширину, т. е. так, как она выглядит в действительности. Тогда после нескольких проб вы нападете на верное решение задачи, разрежете подкову двумя прямыми на шесть частей (рис. 2).

7. ДРОБЬ

Может ли дробь, в которой числитель меньше знаменателя, быть равной дроби, в которой числитель больше знаменателя?

Р е ш е н и е. Может, например: $\frac{-3}{6} = \frac{5}{-10}$.

II. УПРАЖНЕНИЯ СО СПИЧКАМИ

Запаситесь коробкой спичек. С их помощью вы всегда можете придумать ряд забавных и остроумных задач, развивающих сообразительность и смышленость. Вот для примера некоторые простейшие из них.

8. ТРИ

Положено пять спичек (рис. 3). Прибавить к ним еще пять спичек так, чтобы получилось три.

Рис. 3

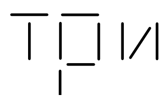


Рис. 4

Р е ш е н и е. Спички прикладываются так, как показано на рис. 4. Образуется слово: *три*.

9. СТО

Приложить к четырем спичкам пять спичек так, чтобы получилось сто.

Рис. 5

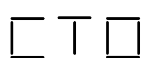


Рис. 6

Р е ш е н и е. Четыре спички положены так, как показано на рис. 5. Прибавляя к ним еще пять, положенных поперечно, образуем слово *сто* (рис. 6).

10. ДОМ

Из спичек построен дом (рис. 7). Переложить две спички так, чтобы дом повернулся другой стороной.

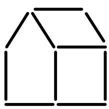


Рис. 7

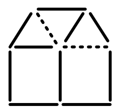


Рис. 8

Р е ш е н и е. Рис. 8.

11. РАК

Спичечный рак ползет вверх (рис. 9). Переложить три спички так, чтобы он пополз вниз.

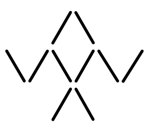


Рис. 9

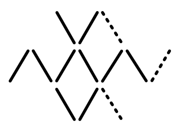


Рис. 10

Р е ш е н и е. Рис. 10.

12. ВЕСЫ

Весы составлены из девяти спичек и не находятся в состоянии равновесия (рис. 11). Требуется переложить в них пять спичек так, чтобы весы были в равновесии.

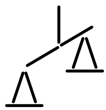


Рис. 11

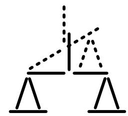


Рис. 12

Р е ш е н и е. Рис. 12.

13. ДВЕ РЮМКИ

Две рюмки составлены из десяти спичек (рис. 13). Переложить шесть спичек так, чтобы получился дом.

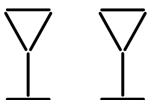


Рис. 13

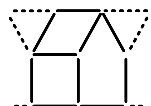


Рис. 14

Р е ш е н и е. Рис. 14.

14. ХРАМ

Этот греческий храм (рис. 15) построен из одиннадцати спичек. Требуется переложить четыре спички так, чтобы получилось пятнадцать квадратов.

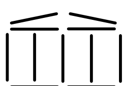


Рис. 15

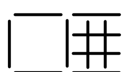


Рис. 16

Р е ш е н и е. Рис. 16.

15. ФЛЮГЕР

Флюгер (рис. 17) составлен из десяти спичек. Переложить четыре спички так, чтобы получился дом.

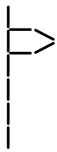


Рис. 17

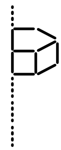


Рис. 18

Р е ш е н и е. Рис. 18.

16. ФОНАРЬ

Переложив 6 спичек, требуется фонарь (рис. 19) превратить в четыре равных треугольника.

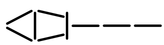


Рис. 19

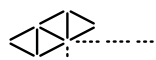


Рис. 20

Р е ш е н и е. Рис. 20.

17. ТОПОР

Переложив четыре спички, превратить топор (рис. 21) в три равных треугольника.

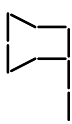


Рис. 21

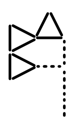


Рис. 22

Р е ш е н и е. Рис. 22.

18. ЛАМПА

В лампе, составленной из двенадцати спичек (рис. 23), переложить три спички так, чтобы получилось пять равных треугольников.

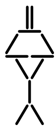


Рис. 23

Рис. 24

Р е ш е н и е. Рис. 24.

19. КЛЮЧ

Из десяти спичек сделан ключ (рис. 25). Переложить в нем четыре спички так, чтобы получилось три квадрата.

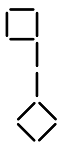


Рис. 25

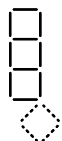


Рис. 26

Р е ш е н и е. Рис. 26.

20. ТРИ КВАДРАТА

Построена фигура, показанная на рис. 27. Переложить в ней пять спичек так, чтобы получилось три квадрата.

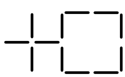


Рис. 27

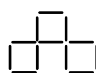


Рис. 28

Р е ш е н и е. Рис. 28.

21. ПЯТЬ КВАДРАТОВ

Спички расположены, как показано на рис. 29. Переложить две спички так, чтобы получилось пять равных квадратов.

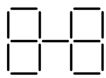


Рис. 29

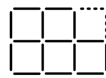


Рис. 30

Решение. Рис. 30.

22. ТРИ КВАДРАТА

В фигуре из решения предыдущей задачи снять три спички так, чтобы получилось три равных квадрата.

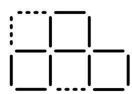


Рис. 31

Решение. Рис. 31.

23. ДВА КВАДРАТА

В фигуре из решения предыдущей задачи переложить пять спичек так, чтобы получилось всего два квадрата.

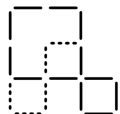


Рис. 32

Решение. Рис. 32.

24. ТРИ КВАДРАТА

В спичечной фигуре на рис. 33 переложить три спички так, чтобы получилось три равных квадрата.

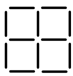


Рис. 33

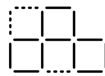


Рис. 34

Р е ш е н и е. Рис. 34.

25. ЧЕТЫРЕ КВАДРАТА

Из спичек сложена фигура, представленная на рис. 35. Переложить семь спичек так, чтобы получилось четыре квадрата.

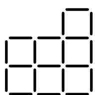


Рис. 35

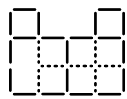


Рис. 36

Р е ш е н и е. Рис. 36.

26. КВАДРАТЫ

В фигуре на рис. 37 снять восемь спичек так, чтобы: 1) осталось только 2 квадрата; 2) осталось 4 равных квадрата.

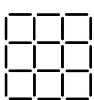


Рис. 37

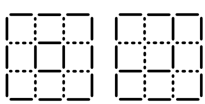


Рис. 38

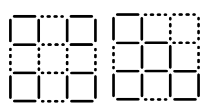


Рис. 39

Р е ш е н и е. 1) Это можно сделать, например, так, как показано на рис. 38.

2) Решения приведены на рис. 39.

27. ЧЕТЫРЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

Из шести спичек составить четыре равных равносторонних треугольника.

Решение. Можно смело поручиться, что мало кому сразу придет в голову решение этой простой задачи. Дело в том, что в данном случае приходится строить из спичек не плоскую фигуру, а фигуру *в пространстве*.

Задачу решите, внимательно вглядевшись в рис. 40. На нем изображено геометрическое тело — правильная трехгранная *пирамида*, иначе — тетраэдр, ограниченный четырьмя равными между собою равносторонними треугольниками. Положите на стол три спички так, чтобы они составили треугольник, затем поставьте остальные три спички так, чтобы они нижними своими концами упирались в углы лежащего на столе треугольника, а верхними концами соединялись вместе над его серединою, — и вы выполните то, что требуется задачей.

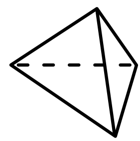


Рис. 40

28. ПОДНЯТЬ ОДНОЙ СПИЧКОЙ 15 СПИЧЕК

Возьмите 15 спичек и поднимите их с помощью одной спички.

Решение. Эта на первый взгляд трудная задача решается, однако, легко. Положим на стол спичку *А* (рис. 41), а поперек этой спички положим затем вплотную одну около другой попеременно вправо и влево головками четырнадцать спичек так, чтобы их головки выдавались на 1–1,5 сантиметра над *А*, в то время как противоположные концы опирались бы на стол. Сверху в углубление, образуемое верхними частями спичек, положим шестнадцатую спичку параллельно *А*. Если поднять теперь спичку *A* за конец, то, к нашему удивлению, вместе с ней поднимутся и остальные 15 спичек (рис. 42).

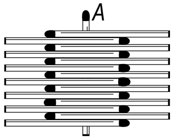


Рис. 41

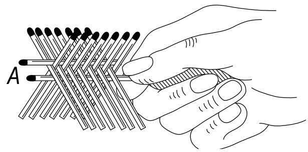


Рис. 42

III. КАК СОСЧИТАТЬ?

29. РЕЙС ЧЕРЕЗ ОКЕАН

Каждый день в полдень отправляется пароход из Гавра через Атлантический океан в Нью-Йорк и в то же самое время пароход той же компании отправляется из Нью-Йорка в Гавр. Переезд в том и другом направлении совершается ровно за 7 дней. Сколько судов своей компании, идущих в противоположном направлении, встречает пароход на пути из Гавра в Нью-Йорк?

Р е ш е н и е. Напрашивающийся ответ «семь», конечно же, неверен. Нужно учитывать как те́ суда, которые уже плывут в Гавр, так и те́, которые еще будут отправляться в путь.

В момент выхода парохода из Гавра в пути, направляясь в Гавр, находится 8 судов компании (одно из них входит в Гавр и одно выходит из Нью-Йорка). Наш пароход встретит все эти 8 судов. Кроме того, в течение его семидневного плавания из Нью-Йорка выйдет еще 7 судов (последнее — в момент прихода парохода в Нью-Йорк). Они также будут встречены пароходом. Итак, правильный ответ — 15 судов.

Представим себе решение задачи нагляднее с помощью графика. На рис. 43 нарисованы графики движения пароходов компании, дни отложены по горизонтальным осям. Из рисунка видно, что пароход, график движения которого изображен отрезком *AB*, встретит в океане 13 судов, да еще два в момент отправления и прибытия, а всего 15 судов. График показывает, кроме того, что встречи будут происходить ежедневно в полдень и в полночь.

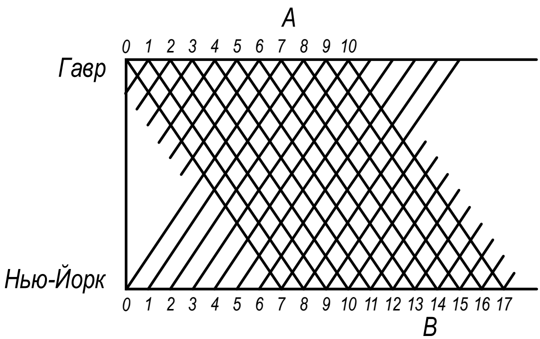


Рис. 43

30. ПРОДАЖА ЯБЛОК

Крестьянка принесла на рынок корзину яблок. Первому покупателю она продала половину всех своих яблок и еще пол-яблока, второму — половину остатка и еще пол-яблока, третьему — половину остатка да еще пол-яблока и т. д. Когда же пришел шестой покупатель и купил у нее половину оставшихся яблок и пол-яблока, то оказалось, что у него, как и у остальных покупателей, все яблоки целые и что крестьянка продала все свои яблоки. Сколько яблок она принесла на рынок?

Р е ш е н и е. Задача сразу решается, если сообразить, что последнему (шестому) покупателю досталось одно целое яблоко. Значит, пятому досталось 2 яблока, четвертому 4, третьему 8 и т. д. Всего же яблок было $1+2+4+8+16+32=63$, т. е. крестьянка принесла на рынок 63 яблока.

31. ГУСЕНИЦА

В шесть часов утра в воскресенье гусеница начала вползать на дерево. В течение дня, т. е. до 18 часов, она вползала на высоту 5 *м*, а в течение ночи спускалась на 2 *м*. В какой день и час она вползет на высоту 9 *м*?

Решение. Часто при решении подобных задач рассуждают так: гусеница за сутки, т. е. за 24 *ч*, вползет на 5 *м* без 2 *м*. Значит, всего в сутки она вползет на 3 *м*. Следовательно, высоты́ 9 *м* она достигнет по истечении трех суток, т. е. она будет на этой высоте в среду в 6 *ч* утра.

Но такой ответ, очевидно, неверен: в конце вторых суток, т. е. во вторник в 6 *ч* утра, гусеница будет на высоте 6 *м*; но в этот же день, начиная с шести часов утра, она до 18 *ч* может вползти еще на 5 *м*. Следовательно, на высоте 9 *м*, как легко рассчитать, она окажется во вторник в 13 *ч* 12 *мин*. (Естественно, надо считать, что гусеница все время движется равномерно.)

32. ВЕЛОСИПЕДИСТЫ И МУХА

Два города, *A* и *B*, находятся на расстоянии 300 *км* друг от друга. Из этих городов одновременно выезжают друг другу навстречу два велосипедиста и мчатся, не останавливаясь, со скоростью 50 *км/ч*. Но вместе с первым велосипедистом из города *A* вылетает муха, пролетающая в час 100 *км*. Муха опережает первого велосипедиста, летит навстречу второму, выехавшему из *B*. Встретив его, она сразу поворачивает назад к велосипедисту A. Повстречав его, опять летит обратно навстречу велосипедисту B, и так продолжала она свои полеты взад и вперед до тех пор, пока велосипедисты не съехались. Тогда она успокоилась и села одному из велосипедистов на шапку. Сколько километров пролетела муха?

Решение. Очень часто при решении этой задачи пускаются в разные «тонкие» и сложные выкладки и соображения, не дав себе труда уяснить, что муха, не останавливаясь, летала ровно 3 часа, а следовательно, пролетела 300 километров.

33. СОБАКА И ДВА ПУТЕШЕСТВЕННИКА

Два путешественника идут по одной и той же дороге в одном и том же направлении. Первый находится на 8 *км* впереди другого и идет со скоростью 4 *км/ч*, второй делает по 6 *км* в час. У одного из путешественников есть собака, которая именно в тот момент, когда мы начали наблюдать за ними, побежала от своего хозяина к другому путешественнику (ее скорость 15 *км/ч*). Затем она вернулась к хозяину и опять побежала к другому путешественнику. Так она бегала от одного к другому до тех пор, пока путешественники не встретились. Нужно узнать, какой путь пробежала собака.

Решение. Эта задача очень похожа на предыдущую. Ответ не зависит от того, кому из путешественников, первому или второму, принадлежит собака. Второй путешественник догонит первого через 4 *ч*, и за это время собака пробежит $4 \times 15 = 60$ *км*.

34. ДВИЖЕНИЕ ПАЛЬЦА

Один малыш жаловался, что ему трудно запомнить таблицу умножения первых десяти чисел на 9. Отец его нашел очень легкий способ помочь памяти с помощью пальцев рук. Вот этот способ.

Положите обе руки рядом на стол и вытяните пальцы. Пусть каждый палец по порядку означает соответствующее число: первый слева 1, второй за ним 2, третий 3, четвертый 4 и т. д. до десятого, который означает 10. Требуется теперь умножить любое из первых десяти чисел на 9. Для этого вам сто́ит только, не сдвигая рук со стола, приподнять вверх тот палец, который обозначает множимое. Тогда остальные пальцы, лежащие налево от поднятого пальца, дадут в сумме число десятков, а пальцы направо — число единиц.

П р и м е р. Умножить 7 на 9. Кладете обе руки на стол и поднимаете седьмой палец, налево от поднятого пальца лежит 6 пальцев, а направо — 3. Значит, результат умножения 7 на 9 равен 63.

Р е ш е н и е. Это удивительное на первый взгляд механическое умножение тотчас же станет понятным, если рассмотреть таблицу умножения первых десяти последовательных чисел на 9:

$$
\begin{array}{ll}
1\times9=09 & 6\times9=54 \\
2\times9=18 & 7\times9=63 \\
3\times9=27 & 8\times9=72 \\
4\times9=36 & 9\times9=81 \\
5\times9=45 & 10\times9=90
\end{array}
$$

Здесь цифры десятков в произведениях идут, последовательно увеличиваясь на единицу: 0, 1, 2, 3, 4, …, 8, 9, а цифры единиц идут, наоборот, уменьшаясь на единицу: 9, 8, 7, …, 1, 0. Сумма же цифр единиц и десятков всюду равна 9. Простым поднятием соответствующего пальца мы отмечаем это и… умножаем. Человеческая рука есть одна из первых счетных машин.

35. БЫСТРОЕ ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ

Существует очень простой прием для устного быстрого возведения в квадрат двухзначных чисел, оканчивающихся на 5.

Нужно цифру десятков умножить на ближайшее к этой цифре большее целое число и к произведению приписать 25.

Так, например, $35^2 = 1225$, $85^2 = 7225$.

Доказательство. Всякое число, оканчивающееся на 5, можно представить в виде $10a + 5$, где a — число десятков. Тогда

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 2 \times 5 \times 10a + 25 = 100a^2 + 100a + 25 = a \times (a+1) \times 100 + 25.$$

Это равенство показывает, почему к числу $a \times (a+1)$ нужно справа дописать 25, чтобы получить квадрат числа $10a + 5$.

Аналогичным приемом можно пользоваться при возведении в квадрат не только двухзначных, но и любых целых чисел, оканчивающихся на 5. В этом случае не всегда легко производить нужные вычисления в уме. Однако он создает большую экономию во времени при умножении на бумаге. Так, например,

$$10 \times 11 = 110, \quad \text{значит,} \quad 105^2 = 11\,025,$$
$$12 \times 13 = 156, \quad \text{значит,} \quad 125^2 = 15\,625,$$
$$123 \times 124 = 15\,252, \quad \text{значит,} \quad 1235^2 = 1\,525\,225.$$

36. СУММА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Для предлагаемой задачи можно пользоваться картами, которые нетрудно нарезать из бумаги, и нарисовать на них карандашом или чернилами черные кружочки. На первой — один кружочек, на второй — 2 на третьей — 3 и т. д. до десяти. Каждую карту надо сделать в двух экземплярах. Теперь мы вполне подготовлены для практического решения задачи.

Взято десять сделанных нами карточек, от единицы до десятки. Вычислить, сколько всего очков будет в этих десяти картах, не прибавляя последовательно очков первой карты ко второй, результата этого сложения — к очкам третьей и т. д., т. е. не делая длинного ряда последовательных сложений.

Р е ш е н и е. Дело сводится к тому, чтобы быстро, без последовательного сложения узнать сумму первых десяти чисел (от 1 до 10). Берем десять карт от единицы до десятки и кладем их в ряд. Берем затем десять других карт и подкладываем их под первым рядом, но только в обратном порядке:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

У нас получается два ряда по десяти карт, или десять столбцов по две карты. Если сосчитать, сколько очков в каждом столбце, окажется, что в *каждом* столбце по *одиннадцати* очков. А всего в десяти столбцах, или в двух рядах карт, — десять раз по одиннадцати очков, или 110 очков. Но в обоих длинных рядах, очевидно, по одинаковому числу очков. Значит, сумма всех очков одного ряда равна половине 110, т. е. равна 55. Итак, в десяти картах — 55 очков.

Нетрудно видеть, что подобным же образом, не прибегая к последовательному сложению, мы можем вычислить сумму любого ряда целых последовательных чисел до любого данного числа. Например, сумма всех чисел от 1 до 100 будет равна половине сто раз взятого 101, т. е. 5050.

37. СБОР ЯБЛОК

На расстоянии метра одно от другого лежат в ряд сто яблок, и на расстоянии метра же от первого яблока садовник принес и поставил корзину. Спрашивается, какой длины путь совершит он, если возьмется собрать эти яблоки так, чтобы брать их последовательно одно за другим и каждое отдельно относить в корзину, которая все время стои́т на одном и том же месте?

Р е ш е н и е. Нужно подойти к каждому яблоку и возвратиться обратно к корзине. Значит, число пройденных метров будет равно удвоенной сумме первых ста чисел, или сто раз взятому 101, т. е. 10 100. Это составит почти ровно *десять километров.* Как видим, способ собирания довольно утомительный!

38. БОЙ ЧАСОВ

Сколько ударов в сутки делают часы с боем.

Р е ш е н и е. Наибольшее количество ударов, отбиваемых обыкновенными часами, есть 12. Задача сводится к тому, чтобы узнать сумму всех чисел от 1 до 12. А это, мы уже знаем, будет половина двенадцать раз взятых тринадцати. Но в сутках два раза 12 часов, или 24 часа. Значит, часы сделают ровно 12 раз по 13 ударов, т. е. 156 ударов ($12 \times 13 = 156$).

Если же часы отбивают также и получасы, то сколько всего ударов они делают в сутки? Полагаю, что вы без труда ответите на этот вопрос.

39. СУММА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Найти сумму n первых натуральных чисел.

Р е ш е н и е. С частными случаями этой задачи мы уже встречались в предыдущих задачах. Представим теперь идею решения геометрически. Возьмем прямоугольник;

боковую сторону его разделим на n равных частей, а основание на $n+1$ частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Получим сетку, разбивающую его на $n(n+1)$ маленьких равных прямоугольников (рис. 44).

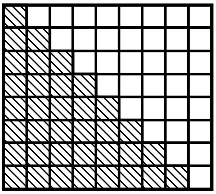


Рис. 44

Рисунок выполнен для случая $n=8$. Заштрихуем теперь клетки так, как показано на рисунке. Число заштрихованных клеток выразится суммой

$$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1.$$

Но и количество белых клеток, если считать их по столбцам справа налево, равно тому же числу. Значит,

$$2\ (1+2+3+\ldots+n)=n\times(n+1),$$

откуда и получаем ответ:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

40. СУММА НЕЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ

Посмотрите на таблицу:

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2.$$

Может быть, эта закономерность (сумма подряд стоящих нечетных чисел, начиная с 1, равна квадрату их числа) сохраняется и дальше. Как это проверить?

Решение. Нам нужно найти сумму всех нечетных чисел от 1 до $2n-1$ и убедиться, что она равна n^2. Это можно сделать различными способами. Мы предпочли геометрический.

Возьмем квадрат из n^2 клеток и заштрихуем клетки так, как это сделано на рис. 45 для $n=6$. Квадрат при этом распадается на чередующиеся по цвету участки. Сосчитаем количество клеток в них, начиная с левого верхнего угла. Первый участок состоит из одной клетки, второй — из 3 клеток, третий — из 5 и так далее, последний n-й участок состоит из $2n-1$ клеток. Следовательно, число клеток в квадрате равно

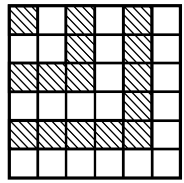


Рис. 45

$$1+3+5+7+\ldots+2n-1.$$

Это убеждает нас, что нужное равенство выполнено всегда.

С помощью геометрических представлений можно вычислять и многие другие суммы.

41. НАЙТИ ЧИСЛО

Некоторое число оканчивается на 2. Если же эту его последнюю цифру переставить на первое место, то число удвоится. Найти это число.

Решение. Так как при перенесении цифры 2 на первое место число удваивается, то предпоследняя цифра его должна быть 4 ($2\times2=4$), предшествующая ей должна быть 8 ($2\times4=8$), перед ней 6 ($8\times2=16$), затем 3 ($1+2\times6=13$), затем 7 ($1+2\times3=7$) и так далее. Наше число должно начинаться с 1. Поэтому следует остановиться, когда после удвоения цифры и добавления

1 от цифр предыдущего разряда мы получим 1. Искомое число

$$105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

Это одно из чисел, удовлетворяющих условию задачи. Все остальные (их бесконечно много) можно получить, продолжая указанный процесс далее. Легко видеть, что каждое из них будет состоять из повторяющейся несколько раз комбинации цифр, уже найденной нами.

IV. ПЕРЕПРАВЫ И РАЗЪЕЗДЫ

42. ЧЕРЕЗ РОВ

Четырехугольное поле окружено рвом, ширина которого всюду одинакова. Даны две доски, длина каждой из которых равна точно ширине рва, и требуется с помощью этих досок устроить переход через ров.

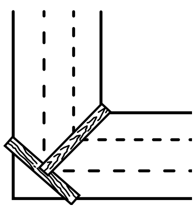


Рис. 46

Решение. Сто́ит взглянуть на прилагаемый здесь рисунок (рис. 46), чтобы понять, как решается задача.

Что касается математического доказательства возможности подобной переправы, то оно следует из неравенства $2\sqrt{2} < 3$ и делается очевидным, если принять ширину рва равной трем каким-либо единицам.

43. ОТРЯД СОЛДАТ

Отряд солдат подходит к реке, через которую необходимо переправиться. Но мост сломан, а река глубока. Как быть? Вдруг командир замечает двух мальчиков, которые катаются на лодке недалеко от берега. Но лодка так мала, что на ней может переправиться только один солдат или только двое мальчиков — не больше! Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке. Как это было сделано?

Р е ш е н и е. Дети переехали реку. Один из мальчиков остался на берегу, а другой пригнал лодку к солдатам и вылез. Тогда сел солдат и переправился на другой берег. Мальчик, оставшийся там, пригнал обратно лодку к солдатам, взял своего товарища, отвез на другой берег и снова доставил лодку обратно, после чего вылез, а в нее сел другой солдат и переправился. Таким образом — после каждых двух перегонов лодки через реку и обратно — переправлялся один солдат. Так повторялось столько раз, сколько было солдат.

44. ВОЛК, КОЗА И КАПУСТА

Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или только волк, или только коза, или только капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как перевез свой груз крестьянин?

Р е ш е н и е. Ясно, что приходится начать с козы. Крестьянин, перевезя козу, возвращается и берет волка, которого перевозит на другой берег, где его и оставляет, но зато берет и везет обратно на первый берег козу. Здесь он оставляет ее и перевозит к волку капусту. Вслед затем, возвратившись, он перевозит козу, и переправа оканчивается благополучно.

45. ПЕРЕПРАВА ТРЕХ РЫЦАРЕЙ С ОРУЖЕНОСЦАМИ

Три рыцаря, каждый в сопровождении оруженосца, съехались на берегу реки, намереваясь переправиться на другую сторону. Им удалось найти маленькую двухместную лодку, и переправа произошла бы легко, ведь лошади могли перебраться вплавь. Но одно затруднение чуть было не помешало этому предприятию. Все оруженосцы, словно сговорившись, наотрез отказались оставаться в обществе незнакомых рыцарей без своих хозяев. Не помогли ни уговоры, ни угрозы. Трусливые оруженосцы упорно стояли на своем. И все же переправа состоялась, все шесть человек благополучно перебрались на другой берег с помощью одной двухместной лодки. При этом соблюдалось условие, на котором настаивали оруженосцы. Как это было сделано?

Решение. Задача имеет почтенную давность. Обозначим большими буквами *А, Б, В* рыцарей, а их оруженосцев соответственно малыми *а, б, в.*

Имеем:

Первый берег			Второй берег		
А	*Б*	*В*	•	•	•
а	*б*	*в*	•	•	•

I. Сначала отправляются два оруженосца:

А	*Б*	*В*	•	•	•
•	•	*в*	*а*	*б*	•

II. Возвращается один из оруженосцев и перевозит третьего:

А	*Б*	*В*	•	•	•
•	•	•	*а*	*б*	*в*

III. Возвращается один из оруженосцев и остается со своим рыцарем. Два других рыцаря отправляются к своим оруженосцам:

•	•	*В*	|	*А*	*Б*	•
•	•	*в*	|	*а*	*б*	•

IV. Один из рыцарей возвращается со своим оруженосцем, оставляет его и забирает с собой рыцаря.

•	•	•	|	*А*	*Б*	*В*
•	*б*	*в*	|	*а*	•	•

V. Оруженосец *а* переезжает и забирает одного из оставшихся оруженосцев:

•	•	•	|	*А*	*Б*	*В*
•	•	*в*	|	*а*	*б*	•

VI. Рыцарь забирает своего оруженосца:

•	•	•	|	*А*	*Б*	*В*
•	•	•	|	*а*	*б*	*в*

46. ПЕРЕПРАВА ЧЕТЫРЕХ РЫЦАРЕЙ С ОРУЖЕНОСЦАМИ

Можно ли совершить переправу при тех же условиях, если к реке подъехали четыре рыцаря с оруженосцами?

Р е ш е н и е. Четыре рыцаря со своими оруженосцами не смогут переправиться с первого берега на второй, соблюдая условия задачи. Чтобы объяснить это, предположим, что переправа возможна, и перенумеруем, начиная с первого, все рейсы, которые совершит лодка. Тогда после нечетных рейсов она будет находиться на втором берегу, а после четных — на первом. Обозначим через $2k+1$ наименьший номер нечетного рейса, в результате которого на втором берегу окажется более двух рыцарей. Рейс с номером $2k+1$ может доставить на второй берег не более двух человек, поэтому после рейса $2k-1$ на втором берегу должен находиться по крайней мере один рыцарь. Мы видим, что после рейса $2k-1$ на втором берегу могут находиться или один, или два рыцаря.

В первом случае обозначим рыцарей, оставшихся на первом берегу, через A, B, C, а рыцаря на втором берегу — через D. Если соответствующих оруженосцев обозначить a, b, c, d, то с соблюдением условий задачи возможно единственное распределение оруженосцев. Итак, в первом случае после рейса с номером $2k-1$ мы получим такую картину:

Первый берег	Второй берег
A B C	D
a b c	d

Кто же отправится в лодке рейсом $2k$? Рыцарь D уплыть им не может, ведь тогда после рейса $2k+1$ на втором берегу будет не более двух рыцарей. Значит, рейсом $2k$ поплывет один оруженосец d, но тогда на первом берегу он окажется в обществе чужих рыцарей, что противоречит условию задачи. В рейс $2k$ плыть некому. Это означает, что первый случай невозможен.

Во втором случае обозначим рыцарей на первом берегу через A, B и переправившихся рыцарей через C, D. Тогда после рейса $2k-1$ имеем:

Первый берег	Второй берег
A B	C D
a b	c d

Кто же в этом случае отправится рейсом $2k$? Ни один из рыцарей C, D уплыть не может, так как тогда рейсом $2k+1$ с первого берега должны плыть два рыцаря и один из оруженосцев a или b остается без охраны. Но ни один из оруженосцев c, d не может плыть рейсом $2k$ без своего рыцаря, ведь на первом берегу находятся A, B. Опять в рейс $2k$ плыть некому.

Итак мы установили, что с соблюдением условии задачи на второй берег не может переправиться более двух рыцарей.

47. ПЕРЕПРАВА В ТРЕХМЕСТНОЙ ЛОДКЕ

К реке подъехали четыре рыцаря с оруженосцами и обнаружили одну трехместную лодку. Могут ли они переправиться на другой берег, соблюдая условие предыдущих задач?

Р е ш е н и е. Обозначим рыцарей буквами *А*, *Б*, *В*, *Г*, а их оруженосцев *а*, *б*, *в*, *г* соответственно.

Первый берег	Второй берег
А Б В Г	• • • •
а б в г	• • • •

I. Переправляются оруженосцы *б*, *в*, *г*:

А Б В Г	• • • •
а • • •	• *б в г*

II. Оруженосец *б* возвращается, а рыцари *В*, *Г* переправляются на другую сторону:

А Б • •	• • • •
а б • •	• • *в г*

III. Рыцарь *В* и его оруженосец переезжают назад. Затем рыцари *А*, *Б*, *В* переправляются на второй берег:

• • • •	*А Б В Г*
а б в •	• • • *г*

IV. Оруженосец *г* забирает оруженосцев *б*, *в*:

• • • •	*А Б В Г*
а • • •	• *б в г*

V. Один из оруженосцев перевозит последнего оруженосца *а*:

• • • •	*А Б В Г*
• • • •	*а б в г*

48. ПЕРЕПРАВА ЧЕРЕЗ РЕКУ С ОСТРОВОМ

Четыре рыцаря с оруженосцами должны переправиться через реку на лодке без гребца, которая вмещает не более двух человек. Посреди реки есть остров, на котором можно высаживаться. Спрашивается, как совершить эту переправу так, чтобы ни на берегах, ни на острове, ни в лодке ни один оруженосец не находился в обществе чужих рыцарей без своего хозяина?

Р е ш е н и е. Будем пользоваться обозначениями предыдущих задач:

Первый берег	Остров	Второй берег
А Б В Г		• • • •
а б в г		• • • •

I. Рыцарь *Г* перевозит своего оруженосца на остров и возвращается назад:

А	*Б*	*В*	*Г*		•	•	•	•
а	*б*	*в*	•	*г*	•	•	•	•

II. Рыцарь *В* перевозит своего оруженосца на второй берег и возвращается назад:

А	*Б*	*В*	*Г*		•	•	•	•
а	*б*	•	•	*г*	•	•	*в*	•

III. Рыцарь *В* перевозит на остров рыцаря *Г*, заезжает за своим оруженосцем и возвращается с ним на первый берег:

А	*Б*	*В*	•	*Г*	•	•	•	•
а	*б*	*в*	•	*г*	•	•	•	•

IV. Рыцари *А*, *Б*, *В* и их оруженосцы переправляются, не заезжая на остров (см. задачу 45):

•	•	•	•	*Г*	*А*	*Б*	*В*	•
•	•	•	•	*г*	*а*	*б*	*в*	•

V. Рыцарь *А* со своим оруженосцем переезжает на остров, оставляет там оруженосца и перевозит на второй берег рыцаря *Г*:

•	•	•	•		*А*	*Б*	*В*	*Г*
•	•	•	•	*а, г*	•	*б*	*в*	•

VI. Оруженосец *в* перевозит сначала *а*, затем *г*:

•	•	•	•		*А*	*Б*	*В*	*Г*
•	•	•	•		*а*	*б*	*в*	*г*

49. НА СТАНЦИИ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ

Поезд *Б* приближается к станции железной дороги, но его нагоняет быстрее идущий поезд *А*, который необходимо пропустить вперед. У станции от главного пути отходит боковая ветка, куда можно отвести на время вагоны с главного пути, но ветка эта настолько короткая, что на ней не помещается весь поезд *Б*. Спрашивается, как все-таки пропустить поезд *А* вперед?

Р е ш е н и е. Железнодорожный путь у станции имеет такой вид, как показано на рис. 47.

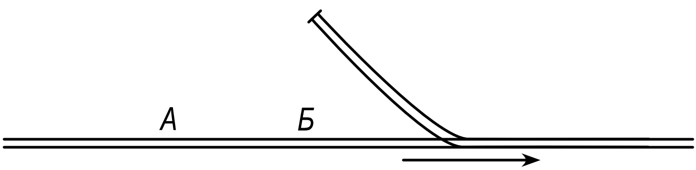


Рис. 47

По главному пути в направлении, обозначенном стрелкой, идут впереди поезд *Б*, а за ним поезд *А*, который надо пропустить вперед, пользуясь боковою веткой, где может поместиться лишь часть вагонов.

Поезд *А* нагнал поезд *Б* и должен пройти дальше. Как же быть? А вот как.

Поезд *Б* идет по главному пути и переходит весь за начало боковой ветки. Затем поезд *Б* идет задним ходом на это ответвление и оставляет там столько вагонов, сколько умещается, а остальная часть поезда *Б* вместе с паровозом уходит опять вперед, в начало ветки. Затем пропускают поезд *А* и, как только он весь пройдет на начало ветки, к последнему его вагону прицепляют оставшиеся на ветке вагоны поезда *Б*, и поезд *А* сводит эту часть поезда *Б* с ветки вперед. Затем поезд *А* пускают назад, влево от начала ветки, и оставляют там вагоны от поезда *Б*. В это время другая часть поезда *Б* (с паровозом) идет задним ходом и становится на ветку, открывая свободный путь для поезда *А*. Он мчится дальше, а паровоз поезда *Б* с несколькими передними вагонами опять выходит на главный путь, прицепляет стоя́щую влево от начала ветки часть своего поезда и следует за поездом *А*.

50. РАЗЪЕЗД ШЕСТИ ПАРОХОДОВ

По каналу, один за другим, идут три парохода: *А*, *Б*, *В*. Навстречу им показались еще три парохода, которые тоже идут один за другим: *Г*, *Д*, *Е*. Канал такой ширины, что два парохода в нем разъехаться не могут, но в канале с одной стороны есть залив, в котором может поместиться только один пароход. Могут ли пароходы разъехаться так, чтобы продолжать свой путь по-прежнему?

Решение. Положение судов и канал с заливом изображены на рис. 48.

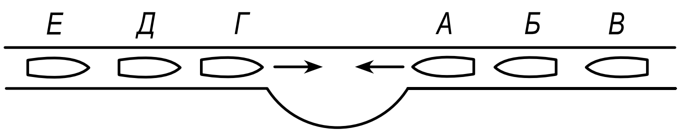


Рис. 48

Пароходы *Б* и *В* отходят назад (вправо), *А* входит в залив; *Г*, *Д* и *Е* проходят по каналу мимо *А*; тогда *А* выходит из залива и идет своей дорогой (влево). *Е*, *Д* и *Г* отступают на прежнее место (налево); тогда с *Б* повторяется все, что делалось с *А*. Таким же образом проходит и *В*, и пароходы плывут своей дорогой.

V. ДЕЛЕЖИ ПРИ ЗАТРУДНИТЕЛЬНЫХ ОБСТОЯТЕЛЬСТВАХ

51. ВМЕСТО МЕЛКИХ ДОЛЕЙ КРУПНЫЕ

Разделить поровну 5 пряников между шестью мальчиками, не разрезая ни одного пряника на 6 равных частей.

Решение. Если мы из 5 данных пряников 3 разрежем пополам, то получим 6 равных кусков, каждый из которых и отдадим мальчикам. Затем 2 оставшихся пряника разрежем каждый на 3 равных части и получим опять 6 равных кусков, которые и отдадим мальчикам. Таким образом, задача решена, причем ни одного пряника не пришлось разрезать на 6 частей.

Подобных задач можно, конечно, придумать сколько угодно. Так, например, в данной задаче вместо чисел 5 и 6 могут быть поставлены следующие числа: 7 на 12, 7 на 6, 7 на 10, 9 на 10, 11 на 10, 13 на 10, 5 на 12, 11 на 12, 13 на 12, 9 на 14, 11 на 14, 13 на 14, 15 на 14, 17 на 14 и т. д.

Во всех задачах подобного рода требуется мелкие доли перевести в более крупные. Разнообразить задачи можно всячески, предлагая, например, такие вопросы:

Можно ли 5 листов бумаги разделить между восемью учениками, не деля ни одного листа на восьмые доли?

Подобные задачи очень полезны для отчетливого и быстрого понимания смысла дробей.

52. КТО ПРАВ?

Два лесоруба, Никита и Павел, работали вместе в лесу и сели завтракать. У Никиты было 4 лепешки, у Павла — 7. Тут к ним подошел охотник.

— Вот, братцы, заблудился в лесу, до деревни далеко, а есть очень хочется; поделитесь со мною хлебом-солью!

— Ну, что ж, садись; чем богаты, тем и рады, — сказали Никита и Павел.

11 лепешек были разделены поровну на троих. После завтрака охотник пошарил в карманах, нашел гривенник и копейку и сказал:

— Не обессудьте, братцы, больше при себе ничего нет. Поделитесь, как знаете!

Охотник ушел, а лесорубы заспорили. Никита говорит:

— По-моему, деньги надо разделить поровну!..

А Павел ему возражает:

— За 11 лепешек 11 копеек. И на лепешку приходится по копейке. У тебя было 4 лепешки, тебе 4 копейки, у меня 7 лепешек, мне 7 копеек!..

Кто из них сделал правильный расчет?

Решение. И Никита и Павел делают неправильный расчет. 11 лепешек разделены на троих поровну, значит, каждый съел 11/3 лепешки.

У Павла было 7 лепешек, он съел 11/3 лепешки, следовательно, охотнику отдал 10/3 лепешки ($7-11/3$).

Никита из четырех своих лепешек съел тоже 11/3 лепешки, следовательно, охотнику отдал 1/3 (одну треть) лепешки ($4-11/3$).

Охотник съел 11/3 лепешки и заплатил за них 11 копеек, значит, за каждую треть лепешки он дал по копейке. У Павла он взял 10 третей, у Никиты — одну треть; следовательно, Павел должен взять себе гривенник, а Никита — копейку.

53. ДЕЛЕЖ МЕЖДУ ТРЕМЯ

Три человека должны поделить между собой 21 бочонок, из которых 7 бочонков полных вина, 7 полных наполовину и 7 пустых. Спрашивается, как они могут поделиться так, чтобы каждый имел одинаковое количество вина и одинаковое количество бочонков, причем переливать вино из бочонка в бочонок нельзя.

Решение. Предполагается, конечно, что все бочонки — полные, полные наполовину и пустые — равны между собою. Ясно, что каждый должен получить по семи бочонков. Подсчитаем теперь, сколько же вина должно прийтись на долю каждого. Есть 7 бочонков полных и семь пустых. Если бы можно было от каждого полного бочонка отлить половину в пустой, то получилось бы 14 наполовину полных бочонков; прибавляя к ним еще 7 имеющихся наполовину полных, мы получили бы всего 21 полный наполовину бочонок. Значит, на долю каждого должно прийтись по 7 наполовину полных бочонков вина. Сообразив это, получаем, что, не переливая вина, можно поделить все поровну так:

	Полные бочонки	Полные наполовину бочонки	Пустые бочонки
Первый человек	2	3	2
Второй человек	2	3	2
Третий человек	3	1	3

А вот и другое решение:

	Полные бочонки	Полные наполовину бочонки	Пустые бочонки
Первый человек	3	1	3
Второй человек	3	1	3
Третий человек	1	5	1

54. ДЕЛЕЖ МЕЖДУ ДВУМЯ

Двое должны разделить поровну 8 ведер вина, находящегося в восьмиведерном бочонке. Но у них есть еще только два пустых бочонка, в один из которых входит 5 ведер, а в другой — 3 ведра. Спрашивается как они могут разделить это вино, пользуясь этими тремя бочонками?

Р е ш е н и е. Задача эта имеет два решения, и решения эти состоят, очевидно, в том, что из полного восьмиведерного бочонка нужно отливать вино в пустые бочонки, из этих последних переливать опять и т. д.

Дадим эти решения в виде двух таблиц, которые показывают, сколько в каждом бочонке остается вина после каждого переливания.

Р е ш е н и е 1

	Бочонки		
	8-ведерн.	5-ведерн.	3-ведерн.
До переливания	8	0	0
После 1-го пер.	3	5	0
После 2-го пер.	3	2	3
После 3-го пер.	6	2	0
После 4-го пер.	6	0	2
После 5-го пер.	1	5	2
После 6-го пер.	1	4	3
После 7-го пер.	4	4	0

Р е ш е н и е 2

	Бочонки		
	8-ведерн.	5-ведерн.	3-ведерн.
До переливания	8	0	0
После 1-го пер.	5	0	3
После 2-го пер.	5	3	0
После 3-го пер.	2	3	3
После 4-го пер.	2	5	1
После 5-го пер.	7	0	1
После 6-го пер.	7	1	0
После 7-го пер.	4	1	3
После 8-го пер.	4	4	0

55. ДЕЛЕЖ ПОПОЛАМ

Как быть, если в условии предшествующей задачи полный бочонок 16-ведерный, а пустые 11- и 6-ведерные?

Решение 1

16-ведерн.	11-ведерн.	6-ведерн.
16	0	0
10	0	6
0	10	6
6	10	0
6	4	6
12	4	0
12	0	4
1	11	4
1	9	6
7	9	0
7	3	6
13	3	0
13	0	3
2	11	3
2	8	6
8	8	0

Решение 2

16-ведерн.	11-ведерн.	6-ведерн.
16	0	0
10	0	6
10	6	0
4	6	6
4	11	1
15	0	1
15	1	0
9	1	6
9	7	0
3	7	6
3	11	2
14	0	2
14	2	0
8	2	6
8	8	0

56. ДЕЛЕЖ ВИНА

Имеются три бочонка вместимостью 6 ведер, 3 ведра и 7 ведер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 ведер вина. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить вино поровну.

Решение 1

6-ведерн.	3-ведерн.	7-ведерн.
4	0	6
1	3	6
1	2	7
6	2	2
5	3	2
5	0	5

Решение 2

6-ведерн.	3-ведерн.	7-ведерн.
4	0	6
4	3	3
6	1	3
2	1	7
2	3	5
5	0	5

ОБЩИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДЕЛЕЖИ

Легко сформулировать множество подобных задач. Но выписанные таблицы не дают ответа на вопрос: каким же правилом руководствоваться для нахождения решения? С целью найти такое правило давайте представим себе задачу иначе — геометрически. Для определенности рассмотрим задачу 56. Обозначим через x и y количество жидкости, содержащейся после какого-либо переливания соответственно в первом и втором бочонках. При переливаниях общее количество жидкости не изменяется, т. е. все время остается равным $4+6=10$ ведрам. Поэтому в третьем бочонке будет находиться $10-x-y$ ведер жидкости. Количество жидкости, содержащейся в бочонке, не может быть больше объема бочонка. Мы видим, что числа x, y удовлетворяют таким условиям:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0 \leqslant y \leqslant 3, \\ 0 \leqslant 10-x-y \leqslant 7, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 3 \leqslant x+y \leqslant 10. \end{cases}$$

Для дальнейшего удобно воспользоваться листом клетчатой бумаги. Возьмем такой лист, выберем на нем некоторую точку и проведем через нее две пендикулярные прямые по линиям нанесенной на бумаге решетки. Одну назовем осью X, другую — осью Y. Каждой паре чисел x, y мы сможем тогда поставить в соответствие некоторую точку на листе бумаги — точку с координатами x, y. Нарисуем на плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют написанным выше неравенствам. На рис. 49 это множество — внутренняя часть четырехугольника $PQRS$ — заштриховано. Начальному распределению жидкости соответствует на этом рисунке точка A ($x=4$, $y=0$). Распределению, которое мы хотим получить, — точка B ($x=5$, $y=0$, при этом в третьем бочонке будет 5 ведер).

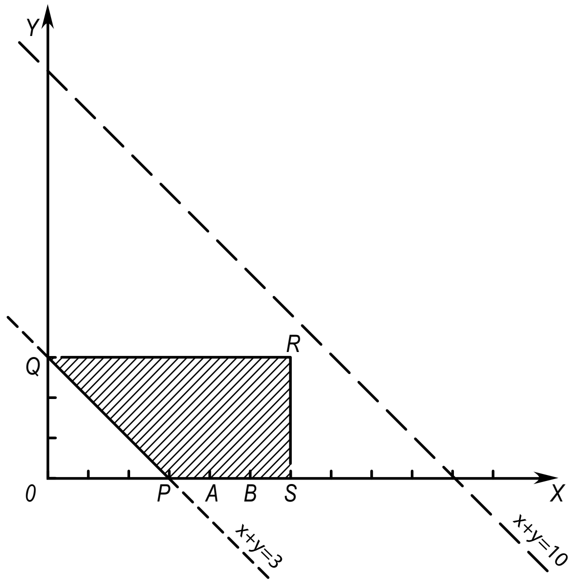


Рис. 49

Последовательность переливаний, ведущая от распределения A к распределению B, представится на этом рисунке в виде некоторой последовательности точек. Или, если мы соединим отрезком прямой линии каждые две последовательные точки, — в виде ломаной с началом в точке A и концом в точке B.

Попробуем выяснить, каким же условиям должны удовлетворять вершины этой ломаной и ее звенья.

Переливание заканчивается, когда наполнится тот бочонок, в который мы льем жидкость, или станет пустым бочонок, из которого мы жидкость выливаем. Это означает, что после каждого переливания обязательно найдется хотя бы один пустой или хотя бы один полный бочонок. Где же на четырехугольнике $PQRS$ будут располагаться соответствующие точки? Если полон первый бочонок ($x=6$), то точка лежит на отрезке RS; если первый бочонок пуст ($x=0$), то должны быть полными второй и третий бочонки ($3+7=10$). Имеется единственная точка с такими условиями — точка Q. Распределениям, при которых пуст второй бочонок ($y=0$), соответствуют точки отрезка PS, а если второй бочонок полон ($y=3$) — точки отрезка QR. Наконец, третий бочонок пустым быть не может, в первые два бочонка 10 ведер не вместятся, а если он полон, то в первых двух должно содержаться $10-7=3$ ведра ($x+y=3$). Соответствующие точки лежат на отрезке PQ. В любом случае точки лежат на границе четырехугольника $PQRS$. Итак, мы установили, что вершины нашей ломаной должны располагаться на границе четырехугольника $PQRS$.

Заметим теперь, что при каждом переливании содержимое одного бочонка остается неизменным, ведь каждое переливание затрагивает только два бочонка. Если не изменяется содержимое первого бочонка (x постоянно), то отрезок, соединяющий точки, соответствующие распределениям до и после переливания, параллелен оси Y (у начала и конца отрезка координата x имеет одно и то же значение). Если при переливании не меняется содержимое второго бочонка, то соответствующее звено ломаной параллельно оси X (y постоянно). Наконец, если в переливании не участвует третий бочонок, то сохраняется общее количество жидкости в первых двух бочонках. Иными словами, в концах отрезка сумма $x+y$ принимает одно и то же значение. Это означает, что звено ломаной параллельно отрезку PQ. Итак, каждое звено ломаной перпендикулярно оси OX, или оси OY, или биссектрисе угла между этими осями.

Чтобы проверить себя, представим, что некоторое звено ломаной расположено на границе многоугольника $PQRS$, например на отрезке PQ. Что это означает? Звено образует равные углы с осями X, Y, поэтому в переливании не участвует третий бочонок. Кроме того, этот бочонок полон. В первых двух бочонках вместе содержится $x+y=3$ ведра жидкости, так что переливание закончится, если станет пустым первый бочонок ($x=0$, точка Q) или второй бочонок ($y=0$, точка P). Точно так же можно рассуждать и для других сторон многоугольника $PQRS$. Мы выяснили, что если некоторое звено ломаной лежит на границе $PQRS$, то его конец обязательно совпадает с одной из точек P, Q, R или S.

Наша задача на геометрическом языке выглядит теперь так: соединить точку A с точкой B ломаной, все вершины которой лежат на границе многоугольника, а звенья параллельны осям X, Y или образуют равные углы с осями. При этом, если звено лежит на стороне многоугольника, то его конец должен совпадать с одной из вершин.

В таком виде задача становится нагляднее, и требуемые ломаные без труда находятся (рис. 50, 51).

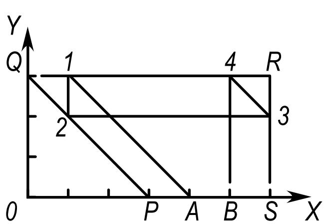


Рис. 50

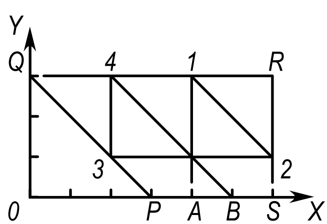


Рис. 51

На клетчатой бумаге проведение ломаных не составляет никакого труда, так как все звенья проходят через узлы решетки, а вершины совпадают с узлами. Ломаные, представленные на рис. 50, 51, соответствуют первому и второму решениям, в чем легко убедиться.

В других задачах роль четырехугольника $PQRS$ могут играть другие многоугольники: параллелограмм (задача 54), пятиугольник (задача 55). Могут встретиться шестиугольники, причем 6 — это максимальное возможное число сторон. Формулировка задачи при этом остается той же самой, изменятся многоугольник и положения точек A, B.

Геометрическое представление задачи и ее решения наглядно, однако выполнение всех построений отнимает лишнее время, требует бумаги и карандаша. Попробуем на основе геометрических соображений дать рекомендации, как в любой подобной задаче найти требуемый способ (если он существует), не прибегая к построениям.

Вершины многоугольника соответствуют распределениям жидкости, при которых сразу два бочонка находятся в граничном состоянии (оба пусты; оба полны; один пуст, другой полон).

I. Прежде всего нужно добиться с помощью переливаний, чтобы по крайней мере два бочонка находились в граничном состоянии.

Геометрически это соответствует тому, что мы строим ломаную, начинающуюся в точке A и кончающуюся в какой-либо вершине многоугольника.

II. Следует обойти все вершины многоугольника, переливая на каждом шаге жидкость из бочонка, который не участвовал в предыдущем переливании, и не изменяя содержимого одного из бочонков, находящихся в граничном состоянии.

Геометрически последовательное применение правила II означает переход от вершины многоугольника к соседней с ним вершине и так далее. Вершин не более шести, поэтому, применив правило II не более шести раз, мы вернемся к распределению, которое нам ранее уже встречалось.

Если, применяя I, мы не попали в *B* и если *B* отлично от вершин многоугольника (применение II не дает нам *B*), то далее нужно поступать следующим образом.

III. Отправляясь от точки *A*, а также от распределений, соответствующих каждой вершине многоугольника, совершать переливания, не приводящие к ранее встречавшимся распределениям, пока это будет возможно сделать или встретится распределение *B*. При этом, как легко видеть, в переливании должны участвовать бочонок, находящийся в граничном состоянии, и бочонок, не участвовавший в предыдущем переливании.

Из геометрических соображений следует, что если это можно сделать, то единственным способом (из точки *A* иногда можно провести две ломаные, как в рассмотренной задаче). Если применение правила III не приведет к распределению *B*, то, значит, переливаниями из *A* в *B* перейти невозможно.

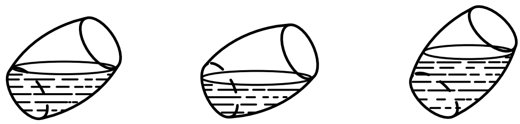
VI. СКАЗКИ И СТАРИННЫЕ ИСТОРИИ

57. СКОЛЬКО ВОДЫ В БОЧКЕ?

В одной сказке хозяин, нанимая работника, предложил ему следующее испытание:

— Вот тебе бочка, наполни ее водой ровно наполовину, ни больше, ни меньше. Но смотри, палкой, веревкой или чем-либо другим для измерения не пользуйся.

Работник справился с заданием. Как он это сделал?



а) б) в)

Рис. 52

Р е ш е н и е. Если вода в бочке налита ровно до половины, то, наклонив бочку так, чтобы уровень воды пришелся как раз у края бочки, мы увидим, что высшая точка дна находится также на уровне воды (рис. 52, *а*). Это случится потому, что плоскость, проведенная через диаметрально противоположные точки верхней и нижней окружностей бочки, делит ее на две равные части. Если вода налита менее чем до половины, то при таком же наклонении бочки из воды должна выступить часть дна (рис. 52, *б*). Наконец, если воды в бочке более половины, то при наклонении дно окажется под водой (рис. 52, *в*).

Рассудив именно так, работник справился с заданием.

58. КАК ГУСЬ С АИСТОМ ЗАДАЧУ РЕШАЛИ

Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» А передний старый гусь ему и отвечает: «Нет, нас не сто гусей! Вот, если б нас было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь, то было бы сто гусей, а теперь… Вот и рассчитай-ка, сколько нас?»

Р е ш е н и е. Полетел одинокий гусь дальше и задумался. В самом деле, сколько же товарищей-гусей он встретил? Думал он, думал и с какой стороны ни принимался, никак не мог этой задачи решить. Вот увидел гусь на берегу пруда аиста: ходит длинноногий и лягушек ищет. Аист — птица важная и пользуется среди других птиц славой математика: по целым часам иногда неподвижно на одной ноге стои́т и все думает, видно, задачи решает. Обрадовался гусь, слетел в пруд, подплыл к аисту и рассказал ему, как он стаю товарищей встретил и какую ему гусь-вожак загадку задал, а он никак этой задачи решить не может.

— Гм!..— откашлялся аист, — попробуем решить. Только будь внимателен и старайся понять. Слышишь?

— Слушаю и постараюсь! — ответил гусь.

— Ну вот. Как тебе сказали? Если бы к встречным гусям прибавить еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да тебя, гуся, то было бы сто? Так?

— Так! — ответил гусь.

— Теперь смотри, — сказал аист. — Вот что я тебе начерчу здесь на прибрежном песке.

Рис. 53

Аист согнул шею и клювом провел черту, рядом такую же черту, потом половину такой же черты, затем четверть черты, да еще маленькую черточку, почти точку.

Получилось то, что показано на рис. 53.

Гусь подплыл к самому берегу, вышел, переваливаясь, на песок, смотрел, но ничего не понимал.

— Понимаешь? — спросил аист.

— Нет еще! — ответил уныло гусь.

— Эх, ты! Ну, вот смотри: как тебе сказали, — стая, еще стая, да половина стаи, да четверть стаи, да ты, гусь, — так я и нарисовал: черту́, да еще черту́, да полчерты, да четверть этой черты, да еще маленькую черточку, т. е. тебя. Понял?

— Понял! — весело проговорил гусь.

— Если к встреченной тобою стае прибавить еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, да тебя, гуся, то сколько получится?

— Сто гусей!

— А без тебя сколько, значит, будет?

— Девяносто девять.

— Хорошо! Откинем на нашем чертеже черточку, изображающую тебя, гуся, и обозначим, что остается 99 гусей.

Аист носом изобразил на песке то, что показано на рис. 54.

Рис. 54

— Теперь сообрази-ка, — продолжал аист, — четверть стаи да полстаи — сколько это будет четвертей?

Гусь задумался, посмотрел на линии на песке и сказал:

— Линия, изображающая полстаи, вдвое больше, чем линия четверти стаи, т. е. в половине заключается две четверти. Значит, половина да четверть стаи — это все равно что три четверти стаи!

— Молодец! — похвалил гуся аист. — Ну, а в *целой* стае сколько четвертей?

— Конечно, четыре! — ответил гусь.

— Так! Но мы имеем здесь стаю, да еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, и это составит 99 гусей. Значит, если перевести все на четверти, то сколько всего четвертей будет?

Гусь подумал и ответил:

— Стая — это все равно что 4 четверти стаи, да еще стая — еще 4 четверти стаи, всего 8 четвертей; да в половине стаи 2 четверти, всего 10 четвертей; да еще четверть стаи, всего 11 четвертей стаи; и это составит 99 гусей.

— Так! — сказал аист. — Теперь скажи, что же ты, в конце концов, получил?

— Я получил, — ответил гусь, — что в одиннадцати четвертях встреченной мною стаи заключается 99 гусей.

— А, значит, в одной четверти стаи сколько гусей?

Гусь поделил 99 на 11 и ответил:

— В четверти стаи — 9 гусей.

— Ну, а в целой стае сколько?

— В целой заключается четыре четверти… Я встретил *36 гусей*, — радостно воскликнул гусь.

— Вот то-то и оно! — важно промолвил аист. — Сам, небось, не мог дойти!.. Эх, ты… гусь!..

59. КРЕСТЬЯНИН И ЧЕРТ

Идет крестьянин и плачется: «Эхма! Жизнь моя горькая! Заела нужда совсем! Вот в кармане только несколько грошей медных болтается, да и те сейчас нужно отдать. И как это у других бывает, что на всякие свои деньги они еще деньги получают? Право, хоть бы кто помочь мне захотел».

Только успел это сказать, как глядь, а перед ним чёрт сто́ит.

— Что ж, — говорит, — если хочешь, я тебе помогу. И это совсем нетрудно. Вот видишь этот мост через реку?

— Вижу! — говорит крестьянин, а сам заробел.

— Ну, так сто́ит тебе перейти только через мост — у тебя будет вдвое больше денег, чем есть. Перейдешь назад, опять станет вдвое больше, чем было. И каждый раз, как ты будешь переходить мост, у тебя будет ровно вдвое больше денег, чем было до этого перехода.

— Ой ли? — говорит крестьянин.

— Верное слово! — уверяет чёрт. — Только, чур, уговор! За то, что я тебе удваиваю деньги, ты каждый раз, перейдя через мост, отдавай мне по 24 копейки. Иначе не согласен.

— Ну, что же, это не беда! — говорит крестьянин. — Раз деньги все будут удваиваться, так отчего же 24 копейки тебе каждый раз не дать? Ну-ка, попробуем!

Перешел он через мост один раз, посчитал деньги. Действительно, стало вдвое больше. Бросил он 24 копейки чёрту и перешел через мост второй раз. Опять денег стало вдвое больше, чем перед этим. Отсчитал он 24 копейки, отдал чёрту и перешел через мост в третий раз. Денег стало снова вдвое больше. Но только и оказалось их равнехонько 24 копейки, которые по уговору… он должен был отдать чёрту. Отдал он их и остался без копейки.

Сколько же у крестьянина было денег сначала.

Р е ш е н и е. Задача разрешается очень легко, если только решение ее начать с конца, приняв во внимание, что после третьего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., которые он должен был отдать.

В самом деле, если после последнего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., то, значит, перед этим переходом у него было 12 коп. Но эти 12 коп. получились после того, как он отдал 24 коп., значит, всего денег у него было 36 коп. Следовательно, второй переход он начал с 18 коп., а эти 18 коп. получились у него после того, как он в первый раз перешел мост и отдал 24 коп. Значит, всего после первого перехода у него было денег 18 да 24 коп., т. е. 42 коп. Отсюда ясно, что перед тем, как первый раз вступить на мост, крестьянин имел в кармане 21 коп. собственных денег.

Прогадал крестьянин! Видно, что на чужой совет всегда надо еще свой ум иметь.

60. КРЕСТЬЯНЕ И КАРТОФЕЛЬ

Шли три крестьянина и зашли на постоялый двор отдохнуть и пообедать. Заказали хозяйке сварить картофель, а сами заснули. Хозяйка сварила картофель, но не стала будить постояльцев, а поставила миску с едою на стол и ушла. Проснулся один крестьянин, увидел картофель и, чтобы не будить товарищей, сосчитал картофель, съел свою долю и снова заснул. Вскоре проснулся другой; ему невдомек было, что один из товарищей уже съел свою долю, поэтому он сосчитал весь оставшийся картофель, съел третью часть и опять заснул. После него проснулся третий; полагая что он проснулся первым, он сосчитал оставшийся в чашке картофель и съел третью часть. Тут проснулись его товарищи и увидели, что в чашке осталось 8 картофелин. Тогда только объяснилось дело. Сосчитайте, сколько картофелин подала на стол хозяйка, сколько съел уже и сколько должен еще съесть каждый, чтобы всем досталось поровну.

Решение. Третий крестьянин оставил для товарищей 8 картофелин, т. е. каждому по 4 штуки. Значит, и сам он съел 4 картофелины. После этого легко сообразить, что второй крестьянин оставил своим товарищам 12 картофелин, по 6 на каждого, значит, и сам съел 6 штук. Отсюда следует, что первый крестьянин оставил товарищам 18 картофелин, по 9 штук на каждого, значит, и сам съел 9 штук.

Итак, хозяйка подала на стол 27 картофелин, и на долю каждого поэтому приходилось по 9 картофелин. Но первый крестьянин всю свою долю съел. Следовательно, из восьми оставшихся картофелин приходится на долю второго 3, а на долю третьего 5 штук.

61. ДВА ПАСТУХА

Сошлись два пастуха, Иван и Петр. Иван и говорит Петру: «Отдай-ка ты мне одну овцу, тогда у меня будет овец ровно вдвое больше, чем у тебя!» А Петр ему отвечает: «Нет! Лучше ты мне отдай одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!»

Сколько же было у каждого овец?

Решение. Задача старинная и многим известная.

Ясно, что овец больше у первого пастуха, у Ивана. Но на сколько у него больше, чем у Петра?

Если Иван отдаст одну овцу не Петру, а кому-либо другому, то станет ли у обоих пастухов овец поровну? Нет, потому что поровну у них было бы только в том случае, если бы эту овцу получил Петр. Значит, если Иван отдаст одну овцу не Петру, а третьему лицу, то у него все-таки будет больше овец, чем у Петра, но на сколько больше? Ясно, что на одну овцу, потому что если прибавить теперь к стаду Петра одну овцу, то у обоих станет поровну. Отсюда следует, что пока Иван не отдаст никому ни одной своей овцы, то у него в стаде на *две* овцы больше, чем у Петра.

Теперь примемся за второго пастуха, за Петра.

У него, как мы нашли, на две овцы меньше, чем у Ивана. Значит, если Петр отдаст, скажем, одну свою овцу не Ивану, а кому-либо иному, то тогда у Ивана будет на три овцы больше, чем у Петра. Но пусть эту овцу получит именно Иван, а не третье лицо. Ясно, что тогда у него будет на четыре овцы больше, чем осталось у Петра.

Но задача говорит, что у Ивана в этом случае будет ровно *вдвое* больше овец, чем у Петра. Стало быть, *четыре* и есть именно то число овец, которое останется у Петра, если он отдаст одну овцу Ивану, у которого получится *восемь* овец. А до предполагаемой отдачи, значит, у Ивана было 7, а у Петра 5 овец.

62. НЕДОУМЕНИЕ КРЕСТЬЯНОК

Две крестьянки продавали на базаре яблоки. Одна продавала за 1 коп. 2 яблока, а другая за 2 коп. 3 яблока.

У каждой в корзине было по 30 яблок, так что первая рассчитывала выручить за свои яблоки 15 коп., а вторая 20 коп. Обе вместе они должны были выручить 35 коп. Сообразив это, крестьянки, чтобы не ссориться да не перебивать друг у друга покупателей, решили сложить свои яблоки вместе и продавать их сообща, причем они рассуждали так: «Если я продаю пару яблок за копейку, а ты — три яблока за 2 копейки, то, чтобы выручить свои деньги, надо нам, значит, продавать пять яблок за 3 копейки».

Сказано — сделано. Сложили торговки свои яблоки вместе (получилось всего 60 яблок) и начали продавать по 3 коп. за 5 яблок.

Распродали и удивились: оказалось, что за свои яблоки они выручили 36 коп., т. е. на копейку больше, чем думали выручить! Торговки задумались, откуда взялась «лишняя» копейка и кому из них следует ее получить? И как, вообще, им поделить теперь все вырученные деньги?

И в самом деле, как это вышло?

Пока эти две крестьянки разбирались в своей неожиданной прибыли, две другие, прослышав об этом, тоже решили заработать лишнюю копейку.

У каждой из них было тоже по 30 яблок, но продавали они так: первая давала за одну копейку пару яблок, а вторая за копейку давала 3 яблока. Первая после продажи должна была, значит, выручить 15 коп., а вторая — 10 коп.; обе вместе выручили бы, следовательно, 25 коп. Они и решили продать свои яблоки сообща, рассуждая совсем так, как и те две первые торговки: если я продаю за одну копейку пару яблок, а ты за копейку продаешь 3 яблока, то, значит, чтобы выручить свои деньги, нам нужно каждые 5 яблок продавать за 2 коп.

Сложили они яблоки вместе, распродали их по 2 коп. за каждые пять штук, и вдруг… оказалось, что они выручили всего 24 коп., значит, недовыручили целую копейку.

Задумались и эти крестьянки: как же это могло случиться и кому из них придется этой копейкой поплатиться?

Р е ш е н и е. Недоумение крестьянок разрешается очень быстро, если сообразим, что, сложив свои яблоки вместе и начав их продавать сообща, они, сами того не замечая, продавали их уже по другой цене, чем раньше.

Возьмем, для примера, двух последних крестьянок и рассмотрим, что они, в сущности, сделали.

Пока первая и вторая думали продавать свои яблоки отдельно, цена одного яблока у первой была полкопейки, а у второй — треть копейки. Когда же они сложились и начали продавать каждые пять яблок по 2 коп., то цена каждого яблока стала уже 2/5 коп.

Значит, первая крестьянка все свои яблоки продала не по полкопейки за штуку, а по 2/5 коп. и на каждом яблоке теряла по 1/10 коп.:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{5-4}{10}=\frac{1}{10}\right),$$

а на всех тридцати яблоках она потеряла 3 коп.

Вторая же крестьянка, наоборот, вошедши в компанию, выигрывала на каждом яблоке по 1/15 коп.:

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}\right),$$

а на всех тридцати яблоках выиграла, значит, 2 коп.

Первая потеряла 3 коп., а вторая выиграла только 2 коп. В общем, все-таки копейка потеряна.

Путем подобных же рассуждений легко узнать, почему у первых двух крестьянок оказалась «лишняя» копейка.

63. НАХОДКА

Четверо крестьян — Сидор, Карп, Пахом и Фока — возвращались из города и говорили, что ничего не заработали.

— Эх! — сказал Сидор, — если бы мне найти кошель с деньгами, я бы взял себе только третью часть, а остальные с кошелем даже отдал бы вам.

— А я, — молвил Карп, — поделил бы между всеми нами поровну.

— Я доволен был бы всего пятой частью, — отозвался Пахом.

— С меня же довольно бы и шестой части, — сказал Фока. — Да что толковать… Статочное ли дело — деньги на дороге найти! Кто это их для нас бросит?..

Вдруг и на самом деле видят на дороге кошелек, подняли его и решили поделить деньги так, как каждый только что говорил, т. е. Сидор получит треть, Карп — четверть, Пахом — пятую, а Фока — шестую часть найденных денег.

Открыли кошелек и нашли в нем 8 кредитных билетов: один в 3 рубля, а остальные рублевые, пятирублевые и десятирублевые. Но ни один крестьянин не мог взять своей части без размена. Поэтому решили ждать, не разменяет ли кто из проезжих. Скачет верховой; крестьяне останавливают его.

— Так и так, — рассказывают они, — нашли кошелек с деньгами; деньги хотим разделить так-то. Будь такой добрый, разменяй нам рубль!

— Рубля я вам не разменяю, а давайте мне кошелек с деньгами: я положу туда свою рублевку и из всех денег выдам каждому его долю, а кошелек мне.

Крестьяне с радостью согласились. Верховой сложил все деньги вместе, выдал первому 1/3, второму 1/4, третьему 1/5, четвертому 1/6 всех денег, а кошелек спрятал себе за пазуху.

— Ну, спасибо вам, братцы, большое: и вам хорошо, и мне хорошо! — и ускакал.

Задумались мужики.

— За что же он нас поблагодарил?

— Ребята, сколько у нас всего бумажек? — спросил Карп.

Сосчитали — оказалось 8.

— А где же трехрублевка? У кого она?

— Ни у кого нет!

— Как же так, ребята? Верховой-то, значит, надул нас? Давай считать, на сколько он обидел каждого…

Прикинули в уме.

— Нет, братцы, я получил больше, чем мне следовало! — сказал Сидор.

— И я получил на 25 коп. больше, — сказал Карп.

— Как же так? Всем дал больше, чем нужно, а трехрублевку увез! Ишь ты, как ловко нас обошел! — решили крестьяне.

Сколько денег нашли крестьяне? Обманул ли их верховой? Какие бумажки дал он каждому?

Р е ш е н и е. Крестьяне не умели правильно складывать дроби. В самом деле, сложите все части, на которые крестьяне хотели поделить находку:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}.$$

Значит, они все вместе хотели получить меньше, чем нашли (нашли они $60/60$). Найденные деньги вместе с деньгами верхового были разделены на 60 частей; из них $57/60$ отданы крестьянам, а $3/60$, или $1/20$, остались у верхового. Но мы знаем, что у верхового осталось 3 руб. Значит, $1/20$ всех денег составляют 3 рубля; следовательно, всех денег было $3\times20=60$ руб. Карп получил из этих денег $1/4$ часть, т. е. 15 руб.; но, если бы верховой не приложил своих денег, Карп должен был бы получить на 25 коп. меньше, т. е. 15 руб. – 25 коп. = 14 руб. 75 коп.: такова 1/4 часть найденных денег. Отсюда заключаем, что найдено было 14 руб. 75 коп. × 4 = 59 руб. С деньгами верхового стало 60 руб.; значит, верховой действительно приложил 1 рубль. Приложил он рубль, а увез 3 рубля: 2 рубля выгадал себе за умный дележ.

Какие же деньги были найдены в кошельке?

Пять бумажек по 10 руб., одна в 5, одна в 3 и одна в 1 рубль. Сидору верховой дал 20 руб.: две десятирублевки; Карпу — 15 руб.: десятирублевку и пятирублевку; Пахому — 12 руб.: десятирублевку и две рублевки (одну — найденную, другую — свою); Фоке — последнюю десятирублевку, а трехрублевку взял себе.

64. ДЕЛЕЖ ВЕРБЛЮДОВ

Старик, имевший трех сыновей, распорядился, чтобы они после его смерти поделили принадлежащее ему стадо верблюдов так, чтобы старший взял половину всех верблюдов, средний — треть и младший — девятую часть всех верблюдов. Старик умер и оставил 17 верблюдов. Сыновья начали дележ, но оказалось, что число 17 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 9. В недоумении, как им быть, братья обратились к мудрецу. Тот приехал к ним на собственном верблюде и разделил по завещанию. Как он сделал?

Решение. Мудрец пустился на уловку. Он прибавил к стаду на время своего верблюда, тогда их стало 18. Разделив это число, как сказано в завещании (старший брат получил $18 \times \frac{1}{2} = 9$ верблюдов, средний $18 \times \frac{1}{3} = 6$ верблюдов, младший $18 \times \frac{1}{9} = 2$ верблюда), мудрец взял своего верблюда обратно $(9 + 6 + 2 + 1 = 18)$. Секрет, как и в предыдущей задаче, заключается в том, что части, на которые по завещанию должны были делить стадо сыновья, в сумме не составляют 1. Действительно,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}.$$

65. РАССТАНОВКА ЧАСОВЫХ

Вдоль стен квадратного бастиона требовалось поставить 16 часовых. Комендант разместил их так, как показано на рис. 55, по 5 человек с каждой стороны. Затем пришел полковник и, недовольный размещением часовых, распорядился расставить солдат так, чтобы с каждой стороны было их по 6. Вслед за комендантом пришел генерал, рассердился на полковника за его распоряжение и разместил солдат по 7 человек с каждой стороны. Каково было размещение в двух последних случаях?

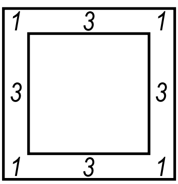


Рис. 55

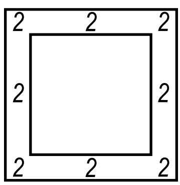


Рис. 56

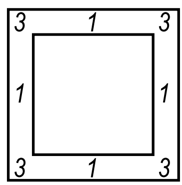


Рис. 57

Р е ш е н и е. Решения приведены на рис. 56 и рис. 57.

66. ОБМАНУТЫЙ ХОЗЯИН

Хозяин устроил в своем погребе шкаф в форме квадрата с девятью отделениями. Среднее (внутри) отделение он оставил свободным для пустых бутылок, а в остальных расположил 60 бутылок вина так, что в каждом угловом отделении их было по 6, а в каждом из средних по 9. Таким образом, на каждой стороне квадрата было по 21 бутылке. Слуга подметил, что хозяин проверяет число бутылок, только считая бутылки по сторонам квадрата и следя за тем, чтобы на каждой стороне квадрата было по 21 бутылке. Тогда слуга унес сначала 4 бутылки, а остальные расставил так, что вновь получилось по 21 на каждой стороне. Хозяин пересчитал бутылки своим обычным способом и подумал, что бутылок остается то же число и что слуга только переставил их. Слуга воспользовался оплошностью хозяина и снова унес 4 бутылки, расставив остальные так, что на каждой стороне квадрата выходило опять по 21 бутылке. Так он повторял, пока было возможно. Спрашивается, сколько раз он брал бутылки и сколько всего бутылок он унес?

Первоначальное распроложение бутылок

6	9	6
9		9
6	9	6

1-я кража

7	7	7
7		7
7	7	7

2-я кража

8	5	8
5		5
8	5	8

3-я кража

9	3	9
3		3
9	3	9

4-я кража

10	1	10
1		1
10	1	10

Рис. 58

Р е ш е н и е. Слуга брал себе по бутылке из каждого среднего отделения и из тех же отделений, чтобы обмануть хозяина, после каждого воровства прибавлял по бутылке в угловые отделения. Так он воровал 4 раза по 4 бутылки, а всего, значит, унес 16 бутылок. Все это видно из рис. 58. Слуга мог расставлять бутылки и другими способами. Но всегда в первом и третьем столбцах квадрата он должен был бы оставлять по 21 бутылке и потому не мог бы унести более $60-2\times21=18$ бутылок, т. е. совершить более четырех краж.

67. СКАЗКА ОБ ИВАНЕ-ЦАРЕВИЧЕ И КАЩЕЕ БЕССМЕРТНОМ, УМЕВШЕМ СЧИТАТЬ ТОЛЬКО ДО ДЕСЯТИ

Из этой сказки мы приведем только отрывки. Сказка очень занимательна, но нас интересуют возникающие в ней математические задачи.

«В некотором царстве, в некотором государстве жил-был Иван-царевич. У него было три сестры: одна Марья-царевна, другая Ольга-царевна, третья Анна-царевна. Отец и мать у них померли.

Отдал Иван-царевич сестер своих замуж за царей медного, серебряного и золотого царств, остался один. Целый год жил без сестер, и сделалось ему скучно. Решил он идти искать сестриц, проведать их».

Далее сказка рассказывает, как повстречал Иван-царевич Елену Прекрасную, как полюбили они друг друга, как похитил ее Кащей Бессмертный и решил сделать женой своей. Отказалась Елена Прекрасная быть женой Кащея, и в злобе превратил он ее в тонкую белую березку.

«Иван-царевич собрал воинов и поехал искать свою любимую. Долго странствовал он, пока приехал к избушке бабы-яги. Рассказал он ей, куда и зачем путь держит. Баба-Яга давно враждовала с Кащеем, согласилась она помочь Ивану-царевичу:

— Чтобы снять чары Кащеевы, нужно собрать у ворот его дворца царей трех царств: медного, серебряного и золотого. Ровно в полночь должны они и ты вместе с ними произнести волшебное слово. Тогда чары спадут и Кащей бессилен будет что-либо сделать.

Черный ворон подслушал этот разговор бабы-яги с Иваном-царевичем и рассказал обо всем Кащею.

Прощаясь с Иваном-царевичем, дала ему баба-яга волшебное кольцо.

— Оно приведет к Кащею. А коль нужно будет тебе, Иван-царевич, какой запор отпереть или замкнуть накрепко, проси кольцо о том. Мигом исполнит.

Кащей Бессмертный подстерег Ивана-царевича, схватил его и бросил вместе с воинами в глубокое подземелье.

— Не видать тебе, Ивашка, Елены Прекрасной, как ушей своих».

Далее в сказке следует описание подземелья. В квадратной пещере было 8 погребов, расположенных вдоль стен (мы изобразили их условно на рис. 59 в виде маленьких квадратиков). Погреба сообщались между собой, а всё подземелье, имевшее один выход, накрепко запиралось семью замка́ми. Всех воинов вместе с Иваном-царевичем было 24, и Кащей разместил их в 8 погребах поровну.

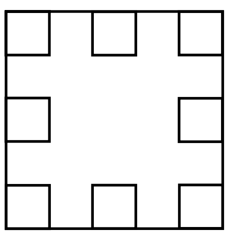


Рис. 59

Каждый вечер приходил он в подземелье, издевался над Иваном-царевичем и пересчитывал своих пленников. Считать Кащей умел только до десяти, поэтому он проверял число узников, находящихся в трех погребах вдоль каждой стены подземелья, находил всюду 9 человек и успокаивался.

Трудности не сломили Ивана-царевича. С помощью волшебного кольца отпер он все семь запоров и отправил трех своих воинов гонцами к царям медного, серебряного и золотого царств. А чтобы Кащей ничего не заподозрил, Иван-царевич рассадил оставшихся воинов по погребам иначе, сохранив вдоль каждой стены подземелья по 9 человек.

Как всегда, вечером пришел Кащей, поворчал, что воины не сидят спокойно на месте. Пересчитал их вдоль каждой стены и ничего не заподозрил.

Спустя некоторое время гонцы добрались до царей медного, серебряного и золотого царств, рассказали им всю историю и вместе с ними вернулись в подземелье Кащеева дворца.

Как раз в этот момент Кащей решил осмотреть подземелье. Иван-царевич рассадил всех своих воинов и трех прибывших царей так, что опять в погребах вдоль каждой стены сидело по 9 человек. И опять ему удалось обмануть Кащея.

После этого в сказке повествуется, как ровно в полночь три царя вместе с Иваном-царевичем подошли к воротам Кащеева дворца и произнесли волшебное слово, как спали чары с Елены Прекрасной, как удалось им всем выбраться из Кащеева царства и, наконец, о свадьбе Ивана-царевича и Елены Прекрасной.

Сказка кончилась, но остался вопрос: как рассаживал узников Иван-царевич?

Р е ш е н и е. В первом случае в пещере остался 21 человек. Рассадить их с соблюдением условия, чтобы вдоль каждой стены находилось 9 человек, можно многими способами. Один из них показан на рис. 60.

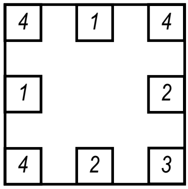


Рис. 60

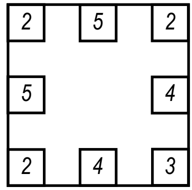


Рис. 61

Во втором случае требуется рассадить 27 человек. Одно из возможных решений представлено на рис. 61.

68. ЗА ГРИБАМИ

Дедушка пошел с четырьмя внучатами в лес за грибами. В лесу разошлись в разные стороны и стали искать грибы. Через полчаса дедушка сел под дерево отдохнуть и пересчитал все грибы: их оказалось 45 штук. Тут прибежали к нему внучата, все с пустыми руками, ни один ничего не нашел.

— Дедушка! — просит один внук, — дай мне своих грибов, чтобы кузовок не был пустой. Авось, с твоей легкой руки много грибов наберу.

— И мне, дедушка!

— И мне дай!

Дед дал каждому и роздал, таким образом, детям все свои грибы. Все снова разбрелись в разные стороны, и случилось следующее. Один мальчик, нашел еще 2 гриба, другой 2 потерял, третий нашел еще столько, сколько получил от деда, а четвертый потерял половину полученных от деда. Когда дети пришли домой и подсчитали свои грибы, то оказалось у всех поровну.

Сколько каждый получил от дедушки грибов и сколько было у каждого, когда они пришли домой?

Р е ш е н и е. Нетрудно видеть, что третьему внуку дед дал грибов меньше всего, потому что третий внук должен был набрать еще столько же грибов, чтобы сравняться с братьями. Для простоты скажем, что третьему внуку дед дал грибов одну горсть.

Сколько же он дал таких же горстей четвертому?

Третий внук принес домой 2 горсти, потому что сам еще нашел столько же грибов, сколько дал ему дед. Четвертый внук принес домой ровно столько же грибов, сколько и третий, т. е. тоже 2 горсти; но он половину своих грибов растерял по дороге, значит, дед дал ему 4 горсти.

Первый внук принес домой 2 горсти, но из них 2 гриба он сам нашел, значит, ему дед дал 2 горсти без двух грибов. Второй внук принес домой 2 горсти, да по дороге он потерял 2 гриба; значит, дед ему дал 2 горсти да еще два гриба.

Итак, дед роздал внукам 1 горсть, да 4 горсти, да 2 горсти без двух грибов, да 2 горсти с двумя грибами, итого 9 полных горстей (в двух горстях не хватало по два гриба, зато в двух других горстях было по два лишних гриба). В 9 равных горстях было 45 грибов; значит, в каждой горсти $45:9=5$ грибов.

Третьему внуку дед дал 1 горсть, т. е. 5 грибов; четвертому — 4 горсти, т. е. $5\times4=20$ грибов; первому — 2 горсти без двух грибов, т. е. $(5\times2)-2=8$ грибов; второму — 2 горсти с двумя грибами, т. е. $(5\times2)+2=12$ грибов.

69. СКОЛЬКО БЫЛО?

Женщина несла для продажи корзину яиц. Встретившийся прохожий по неосторожности так толкнул ее, что корзина упала на землю и все яйца разбились. Прохожий захотел уплатить женщине стоимость разбитых яиц и спросил, сколько их всего было. «Я не помню этого, — сказала женщина, — знаю только хорошо, что когда я перекладывала яйца по 2, то оставалось одно яйцо. Точно так же всегда оставалось по одному яйцу, когда я перекладывала их по 3, по 4, по 5 и по 6. Когда же я перекладывала их по 7, то не оставалось ни одного яйца». Спрашивается, сколько было яиц?

Решение. Задача, очевидно, сводится к нахождению такого числа, которое делится нацело (т. е. *без остатка*) на 7, а при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает в остатке 1.

Наименьшее число, которое делится без остатка на числа 2, 3, 4, 5 и 6 (*наименьшее кратное этих чисел*), есть 60. Нужно, значит, найти такое число, которое делилось бы на 7 нацело и было бы вместе с тем на одну единицу больше числа, делящегося на 60. Такое число тотчас можно найти путем последовательных попыток: 60, деленное на 7, дает в остатке 4, следовательно, 2×60 дает в остатке единицу ($2\times4=8$; $8-7=1$). Значит,

$$2\times60=\text{числу, кратному } 7+1,$$

откуда следует, что

$$(7\times60-2\times60)+1=\text{числу, кратному } 7,$$

т. е.

$$5\times60+1=\text{числу, кратному } 7,$$
$$5\times60+1=301.$$

Итак, наименьшее число, решающее задачу, есть 301. То есть *наименьшее число яиц, которое могло быть в корзине у женщины, есть* 301.

70. НАЙТИ ЧИСЛО

Найти число, которое, будучи разделено на 2, дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 6 дает в остатке 5, но на 7 это число делится нацело.

Р е ш е н и е. Решение этой задачи тотчас сводится к предыдущему, если сообразить, что число, кратное 6, плюс 5 есть в то же время число, кратное 6, без единицы, число, кратное 5, плюс 4 есть в то же время число, кратное 5, без единицы и т. д. Итак, нужно для данного случая, чтобы удовлетворялось равенство:

число, кратное 7 = числу, кратному 60, без 1,

или

число, кратное 60 = числу, кратному 7, плюс 1.

Число 119 — наименьшее, решающее задачу.

71. ЧАСЫ ПОСТАВЛЕНЫ ВЕРНО!

Двое приятелей, Петр и Иван, живут в одном городе не очень далеко друг от друга. У каждого из них до́ма имеются только стенные часы. Однажды Петр забыл завести свои часы и они остановились. «Пойду-ка я в гости к Ивану, заодно и посмотрю, который час», — решил Петр. Отправившись в гости и просидев у Ивана некоторое время, Петр вернулся домой и верно поставил свои стенные часы. Смогли бы вы сделать так же?

Р е ш е н и е. Вопрос, очевидно, сводится к тому, чтобы знать точное время при возвращении домой. Петр рассуждал так. Я завожу свои часы и перед уходом замечаю их показание, которое, положим, равно a. Приходя к знакомому, немедленно справляюсь у него о времени, и пусть его часы показывают b. Перед уходом от знакомого опять замечаю время по его часам, которые на этот раз показывают c. Придя домой, я немедленно замечаю, что мои часы показывают d. По этим данным легко определить искомое показание часов. Разность $d-a$ покажет время моего отсутствия дома. Разность $c-b$ — время, проведенное мною у знакомого. Разность $(d-a)-(c-b)$, полученная от вычитания второго времени из первого, даст время, проведенное мною в дороге. Половина этого времени $\frac{b+d-a-c}{2}$ употреблена мною на обратную дорогу. Прибавим эту половину к c, получим $\frac{b+c+d-a}{2}$; это и будет точное показание часов при моем возвращении домой.

72. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗАПИСИ

В памятной книжке найдена запись, воспроизведенная на рис. 62. Эта запись оказалась залитою в некоторых местах чернилами так, что нельзя разобрать ни числа проданных кусков, ни первых трех цифр полученной суммы. Спрашивается, можно ли по сохранившимся данным узнать число проданных кусков и всю вырученную сумму?

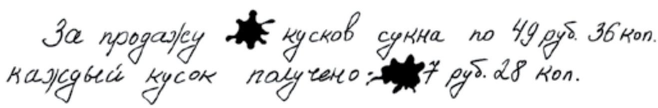


Рис. 62

Р е ш е н и е. По условию вся вырученная сумма, очевидно, не превышает 9997 руб. 28 коп. Значит, число проданных кусков не более 999728 : 4936, т. е. не более 202 кусков.

Последняя цифра неизвестного числа кусков должна быть такова, чтобы она, будучи умножена на 6, давала произведение, оканчивающееся на 8; такая цифра может быть 3 или 8.

Положим, что последняя цифра неизвестного числа кусков равна 3. Стоимость трех кусков равна 14808 коп. Вычитая это число из вырученной суммы, мы должны получить число, оканчивающееся на 920.

Если предположить, что последняя цифра равна 3, то вторая от конца цифра может быть или 2, или 7, так как только эти цифры, будучи умножены на 6, дают произведения, оканчивающиеся на 2.

Положим, что неизвестное число оканчивается на 23. Вычитая стоимость 23 кусков из всей вырученной суммы, получим число, оканчивающееся на 200. Третья цифра может быть или 2, или 7; но так как неизвестное число не превосходит 202, то наше предположение неверно.

Если бы мы предположили, что неизвестное число оканчивается на 73, то третья цифра была бы равна 4 или 9; такое предположение тоже неверно.

Итак, последняя цифра не может быть 3; остается предположить, что она равна 8. Рассуждения, подобные предыдущим, покажут нам, что вторая цифра может быть или 4, или 9; из этих двух предположений верным может быть только второе.

Задача имеет одно решение: число проданных кусков равно 98, вся вырученная сумма равна 4837 руб. 28 коп.

73. ХИТРЕЦЫ

В трактире стояло четыре стола, по одному вдоль каждой стены. Проголодавшиеся, возвращавшиеся с маневров солдаты в числе 21 человека остановились там пообедать и пригласили к обеду хозяина. Расселись все так: за тремя из столов сели солдаты — по 7 за каждый стол, а за четвертым столом сел хозяин (на рис. 63 солдаты и хозяин изображены черточками). Солдаты уговорились с хозяином, что платить по счету будет тот, кто останется последним при следующем условии: считая по кругу (по часовой стрелке) всех, в том числе и хозяина, освобождать от уплаты каждого седьмого. Каждый

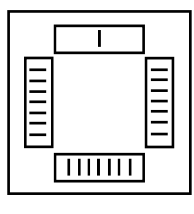


Рис. 63

освобожденный тотчас уходил из трактира и в дальнейшем в счете не участвовал. А последним остался хозяин. С кого начали счет?

С кого нужно было бы начать, если бы солдат было только по 4 за каждым из трех столов?

Решение. Надо начинать счет с 6-го солдата, сидящего по левую руку от хозяина. Во втором же случае — с 5-го из солдат направо от хозяина.

74. СПОР КУЧЕРА С ПАССАЖИРОМ

На постоялом дворе нетерпеливый проезжий, увидя кучера, спросил:

— Не пора ли запрягать?

— Что вы! — ответил кучер, — еще полчаса до отъезда. За это время я успею двадцать раз и запрячь, и отпрячь, и опять запрячь. Нам не впервой…

— А сколько в карету впрягается лошадей?

— Пять.

— Сколько времени полагается на запряжку лошадей?

— Да минуты две — не больше.

— Ой ли? — усомнился проезжий. — Пять лошадей запрячь в две минуты. Что-то уж очень скоро…

— И очень просто, — отвечал кучер. — Выведут лошадей в сбруе, постромках с вальками, в вожжах. Остается только накинуть кольца вальков на крюки, приструнить двух средних лошадей к дышлу, взял вожжи в руки, сел на козлы и готово… Поезжай! Дело знакомое…

— Ну, хорошо! — заметил пассажир. — Допустим, что таким образом можно запрячь и отпрячь лошадей хоть двадцать раз в полчаса. Но если их придется перепрягать одну на место другой, да еще всех, то уж этого никогда не сделать не только в пол, но и в два часа.

— Тоже пустячное дело! — расхвастался кучер. — Разве нам не приходится перепрягать! Да какими угодно способами я их всех перепрягу в час, а то и меньше. Одну лошадь поставил на место другой, и готово! Минутное дело!

— Нет, ты перепряги их не теми способами, которые мне угодны, — сказал пассажир, — а всеми способами, какими только можно перепрячь пять лошадей, считая на перепряжку одну минуту, как ты хвастаешь.

Самолюбие кучера было несколько задето.

— Конечно, всех лошадей и всеми способами перепрягу не больше как за час.

— Я дал бы сто рублей, чтобы посмотреть, как ты сделаешь это за час! — сказал пассажир.

— А я при своей бедности заплачу за ваш проезд в карете, если этого не сделаю, — ответил кучер.

Так и условились. Каков был результат спора?

Р е ш е н и е. В пылу спора кучер не смог представить, сколь велико количество запряжек, которые он должен сделать. Подсчитаем же мы это количество.

Обозначив лошадей цифрами 1, 2, 3, 4, 5, мы должны выяснить, сколькими способами можно переставить эти пять цифр.

Две цифры можно переставить двумя способами: (1, 2) и (2, 1). Перестановок из трех цифр 1, 2, 3, начинающихся с цифры 1, будет также две. Но это число не зависит от того, какая фиксированная цифра из трех сто́ит на первом месте. Значит, всего перестановок из трех цифр будет $3\times2=6$:

123	213	312
132	231	321

Продолжая далее, мы находим, что перестановок из четырех цифр с фиксированной первой цифрой будет 6 и множество всех перестановок из 4 цифр распадается на 4 группы по 6 перестановок, начинающихся с одной и той же цифры — 1, 2, 3 или 4. Так что всех перестановок будет $4 \times 6 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Аналогично, множество всех перестановок из 5 цифр состоит из 5 групп по 24 перестановки, начинающихся с одной цифры — 1, 2, 3, 4 или 5. Всего их будет $5 \times 24 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Можно доказать, что множество перестановок из n цифр $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ равняется произведению $1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$. Это число обозначается $n!$.

Вернемся к нашей задаче. Итак, кучеру предстояло сделать 120 перепряжек. Если он на каждую затратит только минуту времени, то на все ему понадобится 2 часа. Кучер проспорил.

75. КТО НА КОМ ЖЕНАТ?

Трое крестьян, Иван, Петр и Алексей, пришли на рынок с женами: Марией, Екатериной и Анной. Кто на ком женат, нам не известно. Требуется узнать это на основании следующих данных: каждый из этих шести человек заплатил за каждый купленный предмет столько копеек, сколько предметов он купил. Каждый мужчина истратил на 48 копеек больше своей жены. Кроме того, Иван купил на 9 предметов больше Екатерины, а Петр — на 7 предметов больше Марии.

Р е ш е н и е. Если один из мужчин купил, скажем, x предметов, то по условию он заплатил за них x^2 копеек. Если его жена купила y предметов, то она заплатила за них y^2 копеек. Значит, имеем $x^2 - y^2 = 48$, или $(x - y) \times (x + y) = 48$.

Числа x, y по условию целые и положительные. Это возможно только в том случае, когда $x - y$ и $x + y$ четны и $x + y > x - y$. Разлагая 48 на сомножители, видим, что имеется только три удовлетворяющие этому условию возможности: $48 = 2 \times 24 = 4 \times 12 = 6 \times 8$, или

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = 2, \\ x_1 + y_1 = 24, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - y_2 = 4, \\ x_2 + y_2 = 12, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 - y_3 = 6, \\ x_3 + y_3 = 8. \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, находим $x_1 = 13$, $y_1 = 11$, $x_2 = 8$, $y_2 = 4$, $x_3 = 7$, $y_3 = 1$.

Отыскивая те значения x и y, разность которых равна 9, находим, что Иван купил 13 предметов, Екатерина — 4 предмета. Точно так же Петр купил 8 предметов, Мария — 1 предмет. Таким образом, имеем следующие пары:

$$\begin{cases} \text{Иван} & 13, \\ \text{Анна} & 11; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Петр} & 8, \\ \text{Екатерина} & 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Алексей} & 7, \\ \text{Мария} & 1. \end{cases}$$

VII. УПРАЖНЕНИЯ С КУСКОМ БУМАГИ

Вряд ли кто из наших читателей не умеет сам из квадратного куска бумаги сделать «петушка», лодочку, кораблик, коробочку и т. д. Достигается это путем разнообразного перегибания и складывания бумажного квадрата. Полученные при этом сгибы (складки) позволяют придавать взятому куску бумаги ту или иную желаемую форму. Сейчас мы убедимся, что с помощью перегибания бумаги можно не только делать забавные или интересные игрушки, но и получить наглядное представление о многих фигурах на плоскости, а также об их свойствах. Кусок обыкновенной белой (а еще лучше — цветной) бумаги и перочинный ножик для разглаживания или удаления ненужных частей могут оказаться прекрасным пособием для усвоения начал геометрии.

Сгибая кусок бумаги, совместим какие-либо две точки, затем, прижав их друг к другу пальцем, разгладим ножом сгиб. Каждый, наверное, не один раз проделывал это. Но задумывались ли вы когда-нибудь, почему линия сгиба обязательно получается прямой? Если подумать, то легко увидеть в этом проявление одной из геометрических теорем, а именно теоремы о том, что совокупность точек плоскости, равноудаленных от двух фиксированных, есть прямая линия.

Очень полезно подыскивать геометрические обоснования и в последующих задачах.

76. ПРЯМОУГОЛЬНИК

Имеется кусок бумаги неправильной формы. Как, пользуясь только перочинным ножом, вырезать из него прямоугольник?

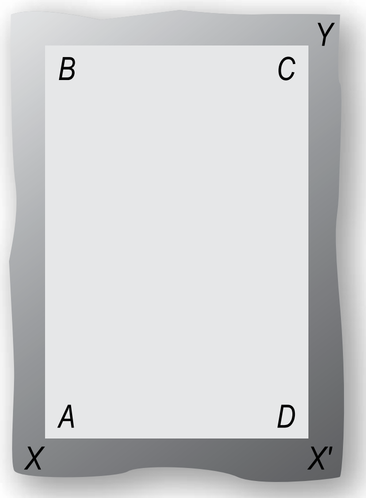


Рис. 64

Р е ш е н и е. Положите кусок бумаги неправильной формы на стол и сделайте сгиб близ края. Пусть полученный при этом сгиб будет *XX'* (рис. 64). Это прямая линия. Проведите ножом по сгибу и отделите меньшую часть куска. Таким образом вы получите прямолинейный край. Подобно предыдущему, согните бумагу по линии *DY* так, чтобы прямолинейный край *XX′* накладывался аккуратно сам на себя. Развернув затем бумагу, вы убедитесь, что сгиб *DY* идет *под прямым углом* к краю *XX′*, так как наложение показывает, что угол *YDX′* равен углу *YDX*. Как раньше, проведите ножом по второй складке и удалите ненужную часть.

Повторяя указанный прием, вы получите края *CB* и *BA*. Наложение докажет, что углы при *A*, *B*, *C* и *D* равны друг другу и прямые и что стороны *BC* и *CD* соответственно равны *DA* и *AB*. Итак, полученный кусок бумаги *ABCD* (рис. 64) имеет форму прямоугольника. Наложение доказывает следующие его свойства:

1) четыре его угла все прямые;

2) четыре же стороны не все равны;

3) но две более длинные стороны равны между собой, а две более короткие — между собой.

77. КВАДРАТ

Из прямоугольника сгибанием получить квадрат.

Р е ш е н и е. Взяв прямоугольный кусок бумаги *A′D′CB*, складываем его наискось так, чтобы одна из коротких сторон, например *CB*, легла на длинную *BA′*, как это показано на рис. 65.

Угол *B* поместится на краю *BA′* в точке *A*, конец перегиба по краю *CD′* получится в точке *D*. Сделаем затем перегиб через точки *A* и *D*, отогнув по прямой *AD* часть *A′D′DA*, которая выдается. Развернув после этого лист, найдем фигуру *ABCD*, которая и есть квадрат. В нем все четыре угла прямые и все стороны равны.

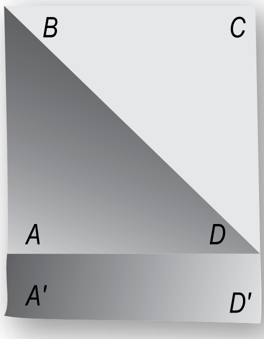


Рис. 65

Линия сгиба, проходящая через два противоположных угла B и D, есть *диагональ* этого квадрата. Другая диагональ получается перегибом квадрата через другую пару противоположных углов, как это видно на рис. 66. Непосредственным наложением убеждаемся, что диагонали квадрата пересекаются друг с другом под прямыми углами и что в точке пересечения они взаимно делятся пополам. Эта точка пересечения диагоналей квадрата называется *центром* квадрата.

Каждая диагональ делит квадрат на два совпадающих при наложении *треугольника*, вершины которых находятся в противоположных углах квадрата.

Каждый из этих треугольников имеет, очевидно, по две равные стороны, т. е. эти треугольники *равнобедренные*. Кроме того, эти треугольники и *прямоугольные*, так как каждый из них имеет по прямому углу.

Рис. 66

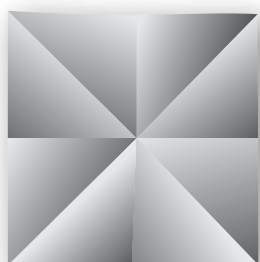


Рис. 67

Две диагонали, как легко видеть, разделяют квадрат на 4 совпадающих при наложении прямоугольных и равнобедренных треугольника, общая вершина которых находится в центре квадрата.

Перегнем теперь наш бумажный квадрат пополам так, чтобы одна сторона совпадала с противоположною ей. Получаем сгиб, проходящий через центр квадрата (рис. 67). Линия этого сгиба обладает, как легко убедиться, следующими свойствами: 1) она *перпендикулярна* двум другим сторонам квадрата, 2) делит эти стороны пополам, 3) *параллельна*

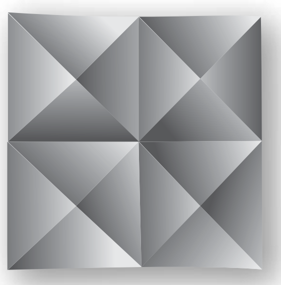


Рис. 68

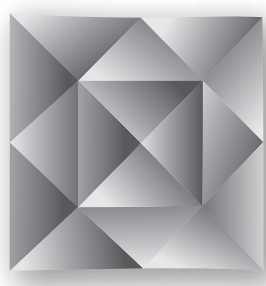


Рис. 69

двум первым сторонам квадрата, 4) сама делится в центре квадрата пополам, 5) делит квадрат на два совпадающих при наложении прямоугольника, 6) каждый из этих прямоугольников *равновелик* (т. е. равен по площади) одному из треугольников, на которые квадрат делится диагональю. Перегнем квадрат еще раз так, чтобы совпадали две другие строны. Полученный сгиб и сделанный раньше делят квадрат на 4 совпадающих при наложении квадрата (рис. 67).

Перегнем эти 4 меньших квадрата через их углы, лежащие посередине сторон большего квадрата (по диагоналям), и получим квадрат (рис. 68), вписанный в наш начальный квадрат. Этот вписанный квадрат, как легко убедиться, имеет площадь, равную половине площади большого квадрата и имеет тот же центр. Соединяя середины сторон этого внутреннего, вписанного, квадрата, получим квадрат, площадь которого равна 1/4 площади первоначального (рис. 69). Если в этот последний квадрат по предыдущему опять впишем квадрат, то его площадь будет равна 1/8 площади первоначального. В этот, в свою очередь, можем вписать квадрат, площадь которого равна 1/16 площади первоначального, и т. д.

Если перегнуть наш квадрат как угодно, но так, чтобы сгиб проходил через центр, то квадрат разделится на две совпадающие при наложении *трапеции*.

78. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Из бумажного квадрата сгибанием получить равнобедренный треугольник.

Р е ш е н и е. Возьмем квадратный кусок бумаги и сложим его вдвое так, чтобы противоположные края его совпадали (рис. 70). Получается сгиб, проходящий через середины двух других сторон и перпендикулярный к ним. На этой *средней линии квадрата* берем какую-нибудь точку и делаем такие сгибы, которые проходят через эту точку и через углы квадрата, лежащие по обе стороны средней линии. Таким образом получаем *равнобедренный треугольник*, в основании которого лежит сторона квадрата. Средняя линия делит, очевидно, равнобедренный треугольник на два совпадающих

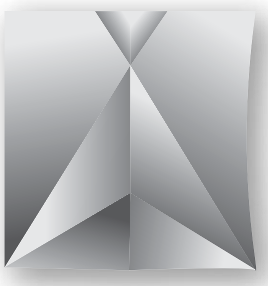


Рис. 70

при наложении и прямоугольных треугольника. Она же делит угол при *вершине* равнобедренного треугольника пополам.

79. РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Из бумажного квадрата сгибанием получить равносторонний треугольник.

Р е ш е н и е. Возьмем на средней линии квадрата такую точку, чтобы расстояния ее от двух вершин квадрата были равны его стороне, и сделаем сгибы, как выше. В таком случае получим равносторонний треугольник (рис. 71).

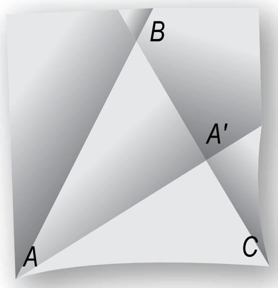


Рис. 71

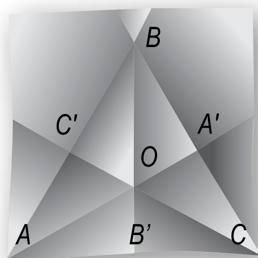


Рис. 72

П р и м е ч а н и е. Требуемую точку на средней линии квадрата найти легко. Для этого надо над AA' (рис. 71) поворачивать основание AC около одного из его концов, A, пока другой его конец, C, не упадет на среднюю линию в B.

Сложим равносторонний треугольник, накладывая каждую из сторон на основание. Мы получим таким образом три высоты этого треугольника: AA', BB', CC' (рис. 72).

Вот некоторые свойства равностороннего треугольника, которые можно вывести из рассмотрения полученной нами фигуры на рис. 72.

Каждая из высот разделяет треугольник на два совпадающих при наложении прямоугольных треугольника.

Они делят стороны пополам и перпендикулярны к ним.

Они проходят через одну общую точку.

Пусть высóты AA' и CC' встречаются в O. Проведем BO и продолжим ее до встречи с AC в B'. Теперь докажем, что BB' есть третья высота. Из треугольников $C'OB$ и BOA' находим, что $|OC'|=|OA'|$, и убеждаемся, что углы OBC' и $A'BO$ равны. Затем, из треугольников $AB'B$ и $CB'B$ следует, что углы $AB'B$ и $BB'C$ равны, т. е. каждый из них есть прямой угол. Значит, BB' есть высота равностороннего треугольника ABC. Она также делит AC пополам в B'.

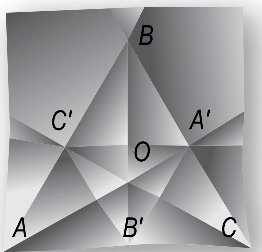


Рис. 73

Можно, аналогично предыдущему, показать, что OA, OB и OC равны и что также равны OA', OB' и OC'.

Поэтому из O, как центра, можно описать окружности, которые пройдут соответственно через A, B и C и через A', B' и C'. Последний круг касается сторон треугольника.

Равносторонний треугольник ABC делится на шесть совпадающих при наложении прямоугольных треугольников, углы которых при точке O равны, и на три таких совпадающих при наложении симметричных четырехугольника, что около них можно описать окружности.

Площадь треугольника AOC равна удвоенной площади треугольника $A'OC$; отсюда $|AO|=2|OA'|$. Аналогично, $|BO|=2|OB'|$ и $|CO|=2|OC'|$. Значит, радиус круга, описанного около треугольника *ABC*, вдвое больше радиуса вписанного круга.

Прямой угол *A* квадрата делится прямыми *AO* и *AC* на три равные части. Угол *BAC* равен 2/3 прямого угла. Углы *C'AO* и *OAB'* равны 1/3 прямого угла каждый. То же относится к углам при *B* и *C*.

Шесть углов при *O* равны 2/3 прямого каждый.

Перегните бумагу по линиям *A'B'*, *B'C'* и *C'A'* (рис. 73). В таком случае *A'B'C'* есть равносторонний треугольник. Его площадь равна 1/4 площади треугольника *ABC*. *A'B'*, *B'C'*, *C'A'* параллельны соответственно *AB*, *BC*, *CA* и равны половинам их. *AC'A'B'* есть *ромб*, *C'BA'B'* и *CB'C'A'* — также. *A'B'*, *B'C'*, *C'A'* делят соответственные высоты пополам.

80. ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

Из квадрата получить правильный шестиугольник.

Р е ш е н и е. Перегибаем квадрат через середины противоположных сторон (рис. 74). Получаем линии *AOB* и *COD*. На сгибах *AO* и *OB* строим известным нам уже способом равносторонние треугольники *AOE*, *AON*, *BOF*, *BOG*.

Делаем сгибы *EF* и *NG*.

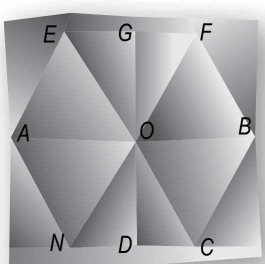


Рис. 74

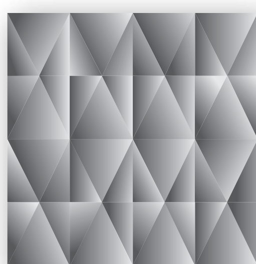


Рис. 75

Многоугольник *AECFBGDN* и будет правильным шестиугольником, в чем каждый без труда убедится сам. Наибольшее расстояние между точками многоугольника есть, очевидно, *AB*.

На рис. 75 представлен образец орнамента из равносторонних треугольников и правильных шестиугольников, который вы теперь легко можете построить сами.

Можно, в свою очередь, разделить шестиугольник на равные правильные шестиугольники и равносторонние треугольники (рис. 76), делая перегибы через точки, делящие его стороны на три равные части. Получается красивый симметричный орнамент.

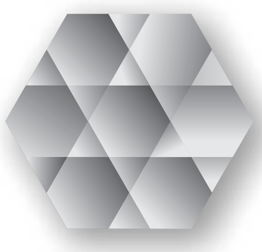


Рис. 76

Можно получить шестиугольник еще и следующим путем. Возьмем равносторонний треугольник и перегнем его так, чтобы все его вершины сошлись в центре.

Из того, что мы уже знаем о равностороннем треугольнике, нетрудно вывести, что сторона полученного шестиугольника равна 1/3 стороны взятого равностороннего треугольника. Площадь же этого шестиугольника равна 2/3 площади взятого треугольника.

81. ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК

В данном квадрате построить правильный восьмиугольник.

Решение. Возьмем квадрат и известным уже нам способом посредством сгибов впишем в него другой квадрат (рис. 77). Разделим пополам углы между сторонами данного и вписанного квадратов. Пусть сгибы, делящие эти углы пополам, пересекаются в точках *E*, *F*, *G* и *H*.

Полученный многоугольник *AEBFCGDH* и есть искомый правильный восьмиугольник. Действительно, треугольники *ABE*, *BEC*, *CGD* и *DHA* в нем равнобедренные и при наложении совпадают. Значит, стороны полученного восьмиугольника равны.

Углы многоугольника *AEBFCGDH* тоже равны. В самом деле, каждый из углов при вершинах *E*, *F*, *G*, *H* тех же треугольников равен полтора раза взятому прямому углу, так как углы при основании этих треугольников равны четверти прямого угла. Отсюда ясно, что и углы восьмиугольника при точках *A*, *B*, *C* и *D* также равны полтора раза взятому прямому углу каждый, т. е. все углы восьмиугольника равны между собой.

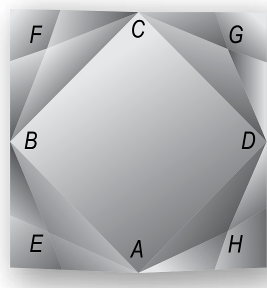


Рис. 77

Сторона взятого квадрата *a* представляет наибольшее расстояние между точками восьмиугольника.

82. ОРИГИНАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Каждый, изучавший геометрию, знает, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Но мало кому известно, что эта фундаментальная теорема может быть «доказана» с помощью простого лоскутка бумаги.

Мы ставим слово «доказана» в кавычках, потому что это не доказательство в строгом смысле слова, а скорее лишь наглядная демонстрация. Но все же этот остроумный прием очень любопытен и поучителен.

Вырезают из бумаги треугольник любой формы и перегибают его сначала по линии *AB* (рис. 78) так, чтобы основание треугольника легло на себя. Затем, снова разогнув бумагу, перегибают треугольник по линии *CD* так, чтобы вершина *A* попала в точку *B*.

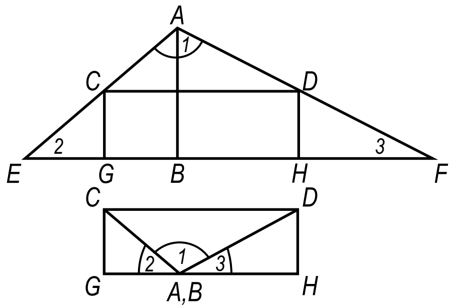


Рис. 78

Перегнув затем треугольник по линиям *DH* и *CG* так, чтобы точки *E* и *F* попали в точку *B*, получим прямоугольник *CGHD* и наглядно убеждаемся, что все три угла треугольника (1, 2, 3) составляют в сумме два прямых.

Необычайная наглядность и простота этого приема позволяют познакомить даже детей, не изучавших геометрии, с одной из ее важнейших теорем. Для знающих же геометрию он представляет интересную задачу — объяснить, почему такое сгибание бумажного треугольника всегда дает желаемый результат. Объяснить это нетрудно, и мы не хотели бы лишить читателя удовольствия самому подыскать геометрическое обоснование этого своеобразного «доказательства».

83. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Показать, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

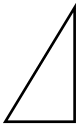


Рис. 79

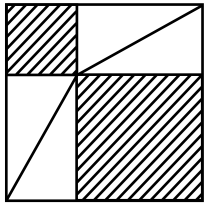


Рис. 80

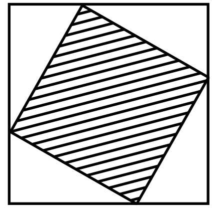


Рис. 81

Нарисуем два равных квадрата, стороны которых равны сумме обоих катетов данного на рис. 79 треугольника. Затем в полученных нами квадратах произведем построения, указанные на рис. 80, 81. Здесь от каждого из равных квадратов мы отнимаем по 4 равных треугольника. Если отнимать от равных величин поровну, то и остатки получатся равные. Эти остатки на рис. 80, 81 заштрихованы; но на рис. 80 получаются два квадрата, построенные на катетах данного треугольника, а на рис. 81 — квадрат, построенный на гипотенузе, и сумма площадей первых двух квадратов равна, следовательно, площади второго.

Мы доказали, таким образом, знаменитую теорему Пифагора.

Другое доказательство той же знаменитой теоремы найдем, если на взятом бумажном квадрате сделаем сгибы, как указано на рис. 82.

Здесь *GEH* есть прямоугольный треугольник и площадь квадрата, построенного на *EH*, равна сумме площадей квадратов, построенных на *EG* и *GH*.

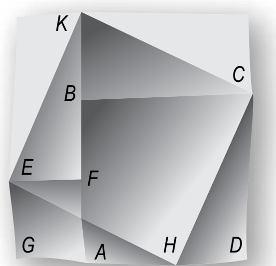


Рис. 82

84. КАК ВЫРЕЗАТЬ?

Призовем теперь на помощь ножницы и будем не только перегибать, но и разрезать бумагу. Так мы придем ко многим интересным и поучительным задачам.

Пусть фигура состоит из трех равных квадратов, расположенных так, как показано на рис. 83. Вы́резать из этой фигуры такую часть, чтобы, приложив ее к оставшейся части, получить квадрат, внутри которого имеется квадратное отверстие.

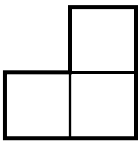


Рис. 83

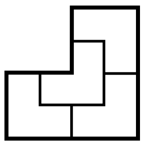


Рис. 84

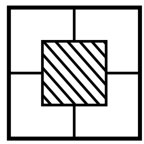


Рис. 85

Р е ш е н и е. При решении этой задачи можно пользоваться листом картона или бумаги (лучше всего разлинованной на квадратные клетки). Как сделать требуемую вырезку, видно из рис. 84 и 85. Нетрудно видеть, что все четыре полученные из трех квадратов фигуры при наложении одной на другую совпадают.

85. ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНИКА — КВАДРАТ

Кусок бумаги или картона имеет форму прямоугольника, одна сторона которого равна 4, а другая 9 единицам длины. Требуется разре́зать этот прямоугольник на две равные части так, чтобы, сложив их надлежащим образом, получить квадрат.

Р е ш е н и е. Решение задачи видно из рис. 86, 87. Как ни проста и ни легка эта задача, но она представляет геометрическое толкование того, что $4\times9=6\times6$. Кроме того, подобного рода задачи прекрасно подготовляют к более сложным

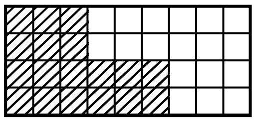


Рис. 86

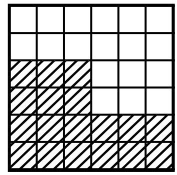


Рис. 87

задачам о превращении одних фигур в другие посредством разрезывания их на части и перекладывания этих частей. Желающий может сам придумать еще много подобных задач.

86. КОВРИК

У одной хозяйки был прямоугольный коврик размером 120×90 сантиметров. Два противоположных угла его истрепались, пришлось их отрезать (на рис. 88 эти треугольные куски заштрихованы). Но хозяйке все же хотелось иметь коврик в форме прямоугольника. Она поручила мастеру разрезать его на такие две части, чтобы из них можно было сшить прямоугольник, не теряя, конечно, ни кусочка материи. Мастер исполнил желание хозяйки.

Спрашивается, как ему удалось это сделать?

Решение. Решение задачи видно из прилагаемого чертежа (рис. 89). Если зубчатую часть *A* вынуть из части *B* и затем снова вдвинуть ее между зубьев части *B*, передвинув на один зуб вправо, то получится безукоризненный прямоугольник и даже квадрат.

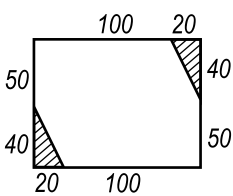


Рис. 88

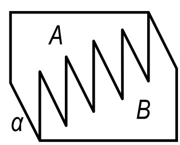


Рис. 89

87. ДВА КОВРИКА

У другой хозяйки было два клетчатых коврика: один размером 60×60 *см*, другой 80×80 *см* (рис. 90). Она

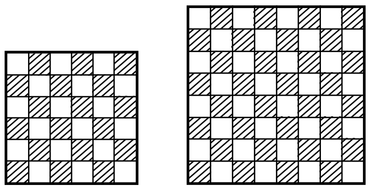


Рис. 90

решила сделать из них один клетчатый коврик размером 100×160 *см*. Мастер взялся выполнить эту работу и пообещал, что каждый коврик будет разрезан не более чем на две части и при этом не будет разрезана ни одна клетка. Обещание свое он сдержал. Как он поступил?

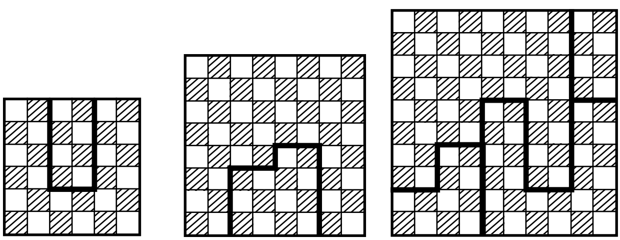


Рис. 91

Р е ш е н и е. Решение задачи приведено на рис. 91.

88. КОВРИК С РОЗАМИ

На коврике (рис. 92) изображено 7 роз. Требуется тремя прямыми линиями разрезать коврик на 7 частей, каждая из которых содержала бы по одной розе.

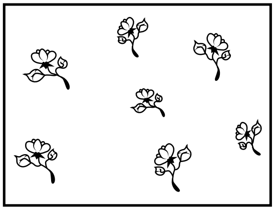


Рис. 92

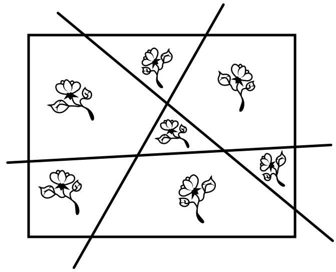


Рис. 93

Р е ш е н и е. Решение задачи приведено на рис. 93.

89. КВАДРАТ НА 20 РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Разрезать квадратный кусок бумаги на 20 равных треугольников и сложить из них 5 равных квадратов.

Р е ш е н и е. 1) Середины сторон квадрата соединим прямыми с противоположными вершинами квадрата; 2) из середин сторон квадрата проведем линии, параллельные проведенным линиям соединения, до встреч с другими линиями соединения; 3) в полученных прямоугольниках проведем диагонали, и тогда данный квадрат будет разбит на 20 прямоугольных треугольников, как можно видеть из рис. 94.

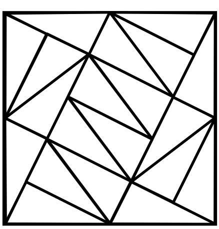


Рис. 94

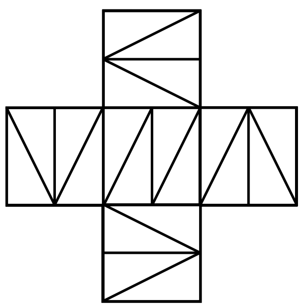


Рис. 95

Нетрудно показать также, что в полученных прямоугольных треугольниках катеты таковы, что один вдвое больше другого.

Из полученных 20 треугольников можно сложить 5 равных квадратов (рис. 95).

90. ИЗ КРЕСТА — КВАДРАТ

Крест, составленный из пяти квадратов, требуется разрезать на такие части, из которых можно было бы составить один квадрат.

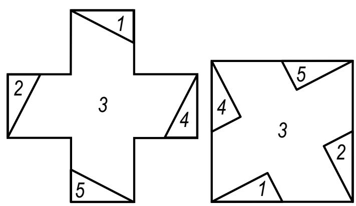


Рис. 96

Р е ш е н и е. На рис. 96, 97 читатель найдет два решения этой задачи. Второе решение столь же просто,

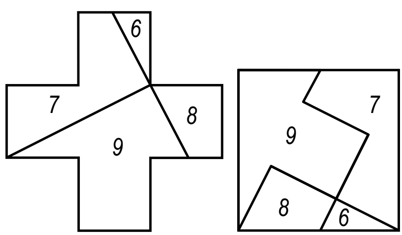


Рис. 97

сколь и остроумно: задача решается проведением всего двух прямых линий.

91. ИЗ КВАДРАТА — ТРИ КВАДРАТА

Разрезать квадрат на семь таких частей, чтобы, сложив их надлежащим образом, получить три равных квадрата.

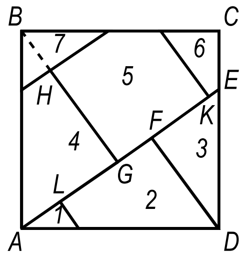


Рис. 98

Р е ш е н и е. Пусть *ABCD* (рис. 98) — данный квадрат. Отложим на его стороне отрезок *DE*, равный половине диагонали этого квадрата. Соединим *A* с *E* и на полученную прямую *AE* опустим перпендикуляры *DF* и *BG*. Затем откладываем отрезки *GH*, *GK*, *FL*, все равные *DF*; заканчиваем построение прямыми, параллельными или перпендикулярными *DF*, как показано на рис. 98. Если разрезать теперь квадрат по проведенным линиям и сложить затем все полученные части так, как указано на рис. 99, то получим три искомых квадрата.

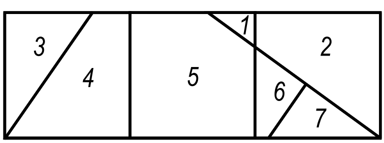


Рис. 99

Замечание. Математическое доказательство этого факта предоставляем читателю, заметив только, что, пользуясь подобием треугольников и теоремой Пифагора, доказанной В одной из предыдущих задач, нетрудно вывести, что $3|DF|^2=|AB|^2$.

Рассматриваемую задачу можно обобщить:

1. Разрезать квадрат на такие части, из которых можно было бы составить данное число равных квадратов.

2. Разрезать квадрат на наименьшее число частей, которые, соответственно сложенные, давали бы некоторое число равных между собою квадратов.

92. ИЗ КВАДРАТА — ДВА КВАДРАТА

Разрезать квадрат на 8 таких частей, чтобы, сложив их соответственным образом, получить два квадрата,

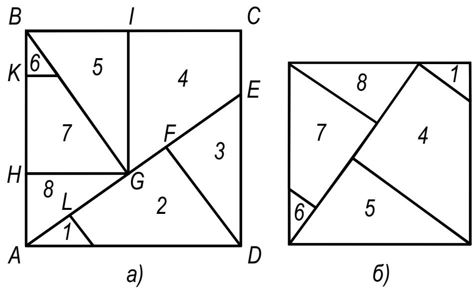


Рис. 100

площадь одного из которых была бы вдвое больше площади другого.

Р е ш е н и е. Из прилагаемого чертежа (рис. 100) видно, как нужно разрезать квадрат. Прямые *DF* и *GB* и точка *L* определяются так же, как и в предыдущей задаче.

Затем параллельно сторонам квадрата проводятся *GH* и *GI* (рис. 100, *а*) и берется *HK*=*GH*. Таким образом получается 8 частей, из которых и составляются требуемые квадраты. Один из них представлен на рис. 100, *б,* а другой есть средний на рис. 101.

93. ИЗ КВАДРАТА — ТРИ КВАДРАТА

Разрезать квадрат на такие 8 частей, чтобы, соответственно сложенные, они составили 3 квадрата, площади которых были бы пропорциональны числам 2, 3 и 4.

Р е ш е н и е. Квадрат разрезается точно так же, как в предыдущей задаче (рис. 100). Из полученных 8 частей составляются 3 требуемых квадрата так, как на рис. 101.

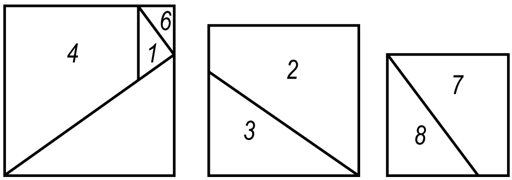


Рис. 101

По данным решениям-рисункам нетрудно доказать математически правильность этих построений, что желающий вникнуть в сущность данной задачи пусть и сделает.

94. ИЗ ШЕСТИУГОЛЬНИКА — КВАДРАТ

Разрезать правильный шестиугольник на 5 таких частей, чтобы, соответственно сложенные, они образовали квадрат.

Р е ш е н и е. Разрезаем шестиугольник сначала по диагонали и складываем полученные 2 половины так, чтобы они образовали параллелограмм *ABFE* (рис. 102). Из точки *A*, как из центра, радиусом, равным средней пропорциональной между длиной *AE* и высотой параллелограмма, проводим окружность, которая пересечет *BF* в точке *G*. Затем из точки *E* опускаем перпендикуляр *EH* на продолжение *AG* и проводим прямую *IK* параллельно *EH* и на расстоянии от нее, равном *AG*. Таким способом шестиугольник оказывается разрезанным на 5 таких частей, из

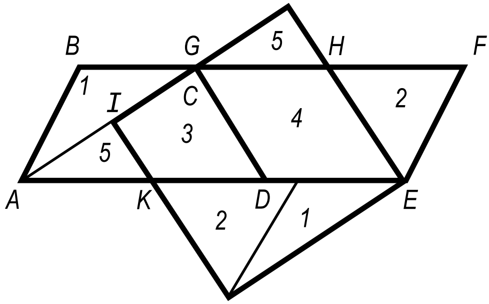


Рис. 102

которых можно образовать квадрат. Не разъясняем более этой задачи, так как предназначаем ее для знающих курс элементарной геометрии на плоскости.

VIII. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ

95. ЗАГАДОЧНОЕ ИСЧЕЗНОВЕНИЕ

Начертите на прямоугольном куске картона 13 одинаковых палочек на равном расстоянии друг от друга, так, как показано на рис. 103. Теперь разрежьте прямоугольник по прямой *MN*, проходящей через верхний конец первой палочки и через нижний конец последней. Если затем вы

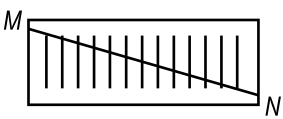


Рис. 103

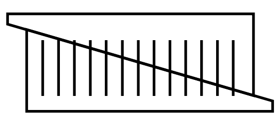


Рис. 104

сдвинете обе половины так, как показано на рис. 104, то заметите любопытное явление: вместо 13 палочек перед вами окажется всего 12! Одна палочка исчезла бесследно. Куда же она девалась?

Р е ш е н и е. Если вы сопоставите дли́ны палочек на первом и втором рисунках, то обнаружите, что палочки на втором рисунке на 1/12 длиннее палочек первого рисунка. Исчезнувшая 13-я палочка улетучилась не бесследно: она словно растворилась в 12 остальных, удлинив каждую из них на 1/12 своей длины. Геометрическую причину этого понять очень легко. Прямая *MN* и та прямая, которая проходит через верхние концы всех палочек, образуют угол, стороны которого пересечены рядом параллельных прямых. Из подобия треугольников следует, что прямая *MN* отсекает от второй палочки 1/12 ее длины, от третьей 2/12, от четвертой 3/12 и т. д. Когда же мы сдвигаем обе части картона, то приставляем отсеченный отрезок каждой палочки (начиная со второй) к нижней части предыдущей. А так как каждый отсеченный отрезок больше предыдущего на 1/12, то каждая палочка должна удлиниться на 1/12 своей длины. На глаз это

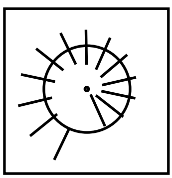


Рис. 105

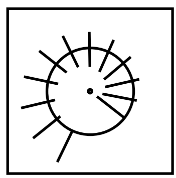


Рис. 106

удлинение незаметно, так что исчезновение 13-й палочки на первый взгляд представляется довольно загадочным.

Чтобы усилить эффект, можно расположить палочки по кругу, как показано на рис. 105. Если вырезать внутренний круг и укрепить его в центре так, чтобы он мог вращаться, то, повернув круг на небольшой угол, мы опять увидим, что одна палочка исчезла (рис. 106).

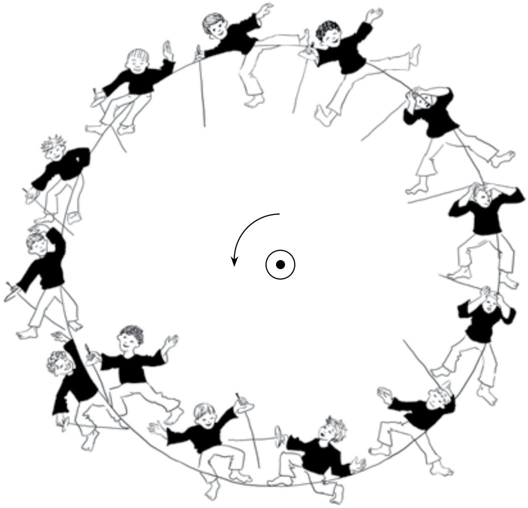


Рис. 107

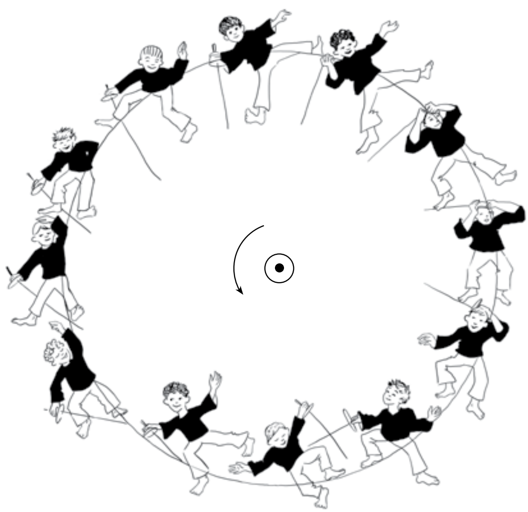


Рис. 108

96. НА АРЕНЕ ЦИРКА

На только что рассмотренном принципе основана остроумная игрушка-задача, изображенная на рис. 107.

Вы видите арену цирка, по краю которой художник разместил 13 клоунов в весьма воинственных позах. Внутренний диск вырезан и может вращаться вокруг своего центра. И вот, слегка повернув этот круг, вы уничтожаете одного клоуна (рис. 108): вместо прежних 13 перед вами уже всего 12 артистов веселого жанра. Тот клоун, который находился внутри круга и так воинственно наступал на своего собрата, бесследно улетучился!..

Исчезновение клоуна заставило бы вас долго ломать голову, если бы вы не познакомились с рассмотренными выше схематическими примерами. А теперь дело ясно: он «растворился» в дюжине своих собратьев по профессии, как раньше «растворилась» у нас простая палочка.

Надо отдать справедливость художнику: немало потребовалось остроумия и терпения, чтобы достичь такого эффекта!

97. ИСКУСНАЯ ПОЧИНКА

На дне деревянного судна во время плавания случилась прямоугольная пробоина в 13 *см* длины и 5 *см* ширины, т. е. площадь пробоины оказалась равной 13 *см* × 5 *см* = 65 *см*². Судовой плотник взял квадратную дощечку со стороной квадрата в 8 *см* (т. е. площадь квадрата равнялась 64 *см*²), разрезал ее прямыми линиями на четыре части A, B, C, D так, как это показано на рис. 109, а затем сложил их так, что получился прямоугольник, как раз соответствующий пробоине (рис. 110). Этим прямоугольником он и заделал пробоину. Вышло таким образом, что плотник сумел квадрат в 64 *см*² обратить в прямоугольник с площадью 65 *см*². Как это могло случиться?

Р е ш е н и е. Легко видеть, что получившиеся при разрезании квадрата треугольники *A* и *B* равны между собой. Также равны и трапеции *C*, *D*. Меньшее основание трапеций и меньший катет треугольников равны 3 *см* и поэтому должны совпасть при совмещении треугольника *A* с трапецией *C* и треугольника *B* с трапецией *D*. В чем же секрет? Его легко обнаружить, если посмотреть на рис. 111. Дело в том, что точки *G*, *H*, *E* не лежат на одной прямой, $tg\,\angle EHK = 8/3$, а $tg\,\angle HGJ = 5/2$. Так как $8/3 - 5/2 = 1/6 > 0$, то $\angle EHK > \angle HGJ$. Линия *GHE* является не прямой, а ломаной

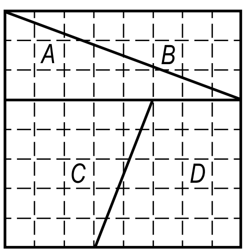


Рис. 109

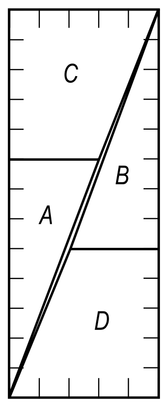


Рис. 110

линией. Точно так же линия *EFG* — ломаная. Площадь полученного прямоугольника действительно равна 65 $см^2$, но в нем имеется щель в виде параллелограмма, площадь которого в точности равна 1 $см^2$. Наибольшая ширина щели равна, как легко видеть, $5 - 3 - 5 \times 3/8 = 1/8$ сантиметра. Таким образом, хитрому плотнику все равно пришлось при починке замазывать небольшую щель.

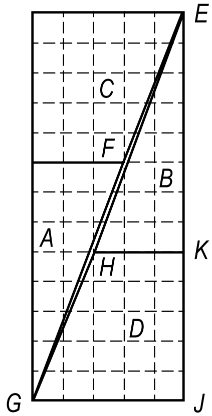


Рис. 111

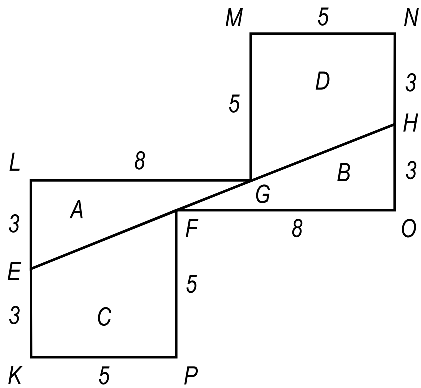


Рис. 112

Из тех же частей *A*, *B*, *C*, *D* можно сложить еще одну фигуру (рис. 112).

Многоугольник *KLGMNOFP* может быть разложен на два прямоугольника размером 5×6 *см*^{2} и маленький прямоугольник размером 3×1 *см*^{2}. Следовательно, его площадь равна 2×30 *см*$^2 + 3$ *см*$^2 = 63$ *см*^{2}. Но, с другой стороны, он состоит из частей *A*, *B*, *C*, *D*, суммарная площадь которых, как мы знаем, равна 64 *см*^{2}. Разгадка этого софизма опять заключена в том, что точки *E*, *F*, *G*, *H* не лежат на прямой линии. Подробное рассмотрение этого случая мы оставляем читателю.

98. ЕЩЕ ОДИН СОФИЗМ

Вот еще один «фокус», который можно сделать с квадратом.

Возьмем квадрат со стороной 8 *см* и, следовательно, с площадью 64 *см*^{2}. Разрежем его на три части так, как показано на рис. 113, *а*. Затем переложим эти части так, как показано на рис. 113, *б*. Получается прямоугольник, площадь которого «легко вычислить»: 7 *см* × 9 *см* = 63 *см*². В чем же дело?

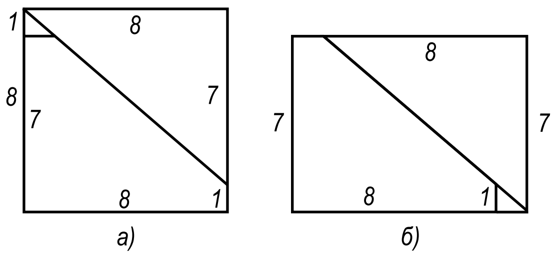


Рис. 113

Р е ш е н и е. Дело в том, что маленький прямоугольный треугольник не будет равнобедренным. Один из его катетов равен 1 *см*, а другой, как легко сосчитать, равен 8/7 *см*. Длина основания прямоугольника равняется не 9, а 8 $см + \frac{8}{7}$ $см = 9\frac{1}{7}$ *см*, а его площадь 7 $см \times 9\frac{1}{7}$ $см = 64$ *см*². Противоречия не получается.

99. ПОХОЖАЯ ЗАДАЧА

Построим прямоугольник со сторонами 11 *см* и 13 *см*. Рассечем его диагональю (рис. 114) и сдвинем затем полученные треугольники по их общей гипотенузе в положение, показанное на рис. 115. Эта последняя фигура по виду состоит из квадрата *VRXS* со сторонами 12 *см*, т. е. площадью 12² *см*² = 144 *см*², и двух треугольников *PQR* и *STU*, каждый площадью 0,5 *см*². Следовательно, площадь всей фигуры на рис. 115 равна 144 *см*² + 2 × 0,5 *см* = 145 *см*. Но как же это получилось, если площадь исходного прямоугольника равна только 13 *см* × 11 *см* = 143 *см*².

Р е ш е н и е. Более подробное рассмотрение того, как диагональ пересекает клетки прямоугольника (рис. 114),

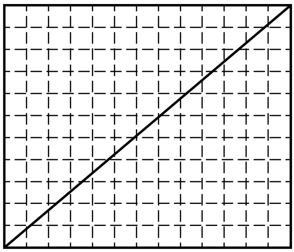


Рис. 114

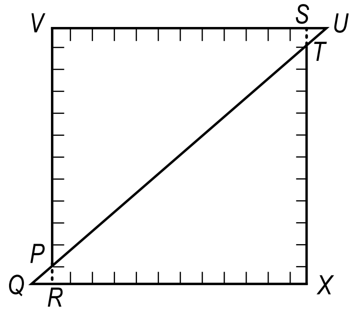


Рис. 115

показывает, что $VRXS$ не есть квадрат. Это можно подтвердить и с помощью вычислений.

Из подобных треугольников PQR и TQX получаем $PR:QR = TX:QX$ и $PR = \frac{TX \times QR}{QX} = \frac{11 \times 1}{13} = \frac{11}{13}$. Значит, стороны прямоугольника $VRXS$ равны 12 *см* и $11\frac{11}{13}$ *см*, а площадь равна 12 *см* $\times 11\frac{11}{13}$ *см* $= 142\frac{2}{13}$ *см*^{2}. Площадь треугольника STU равна площади треугольника PQR и равна $\frac{1}{2} \times 1$ *см* $\times \frac{11}{13}$ *см* $= \frac{11}{26}$ *см*^{2}. Таким образом, площадь фигуры равняется $142\frac{2}{13}$ *см*$^2 + 2 \times \frac{11}{26}$ *см*$^2 = 143$ *см*^{2}.

100. ЗЕМЛЯ И АПЕЛЬСИН

Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее, вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 *м*. Тогда, разумеется, обручи отстанут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, и образуется некоторый зазор. Спрашивается, в каком случае этот зазор будет больше — у земного шара или у апельсина?

Р е ш е н и е. «Здравый смысл» подсказывает такой ответ: «Конечно, у апельсина образуется больший зазор, чем у Земли! Ведь в сравнении с окружностью земного шара — 40 000 *км* — какой-нибудь один метр есть столь ничтожная величина, что прибавка ее останется совершенно незаметной. Другое дело апельсин: по сравнению с его окружностью один метр — огромная величина, и прибавка ее к длине окружности должна быть весьма ощутима».

Однако давайте проверим наше заключение с помощью вычислений. Пусть длина окружности земного шара равна C, а апельсина c метрам. Тогда радиус Земли $R=\frac{C}{2\pi}$ и радиус апельсина $r=\frac{c}{2\pi}$. После прибавки к обручам одного метра окружность обруча у Земли будет $C+1$, а у апельсина $c+1$, радиусы же их соответственно будут $\frac{C+1}{2\pi}$ и $\frac{c+1}{2\pi}$. Если из новых радиусов вычтем прежние, то получим в обоих случаях одно и то же приращение:

$$\frac{C+1}{2\pi}-\frac{C}{2\pi}=\frac{1}{2\pi} \text{ для Земли,}$$

$$\frac{c+1}{2\pi}-\frac{c}{2\pi}=\frac{1}{2\pi} \text{ для апельсина.}$$

Итак, у Земли и у апельсина получится один и тот же зазор в $\frac{1}{2\pi}$ метра, т. е. примерно 16 *см*. Столь «поразительный» результат есть следствие постоянства отношения длины любой окружности к ее радиусу.

IX. УГАДЫВАНИЕ ЧИСЕЛ

О каком угадывании идет речь?

Конечно, дело, в сущности, сводится не к отгадке, а к решению некоторой задачи. Желающему предлагают задумать число и этого числа у него не спрашивают. Взамен этого предлагают задумавшему произвести над задуманным им числом разные с виду совсем произвольные действия и сказать «угадывающему», что в результате получилось. «Угадчик» получает, таким образом, в руки конец нити, по которой разматывает весь клубок и добирается до начала.

Задаваемые в остроумной и забавной форме, которую каждый играющий может придумать по своему вкусу, задачи эти представляют очень хорошее и полезное развлечение для всех играющих. Они развивают навыки в быстром устном счете и развивают их постепенно, так как можно задумывать малые и большие числа, смотря по желанию и силам участвующих в игре лиц. Теоретические основания подобных задач настолько просты, что мы даем их сжато и коротко. Впрочем, если «доказательства» в нашем изложении кому-либо окажутся не по силам, то он может их смело опустить, а пусть разберется только в самой задаче. Разобравшись, он, почти наверное, сам дойдет до объяснения каждой задачи.

Обращаем внимание на то, что здесь в большинстве случаев даются только сравнительно сухие остовы задач. Читателю предоставляется самая широкая возможность каждое условие подобной задачи украсить плодами собственной выдумки и фантазии или приноровить к известному случаю.

101. УГАДАТЬ ЧИСЛО

Возьмем числа от 1 до 12 и расположим их по кругу (рис. 116). Можно смело взяться угадать задуманное кем-либо число из этого круга.

Можно, очевидно, для той же цели взять часы и предложить угадать задуманный кем-либо час.

Можно также пользоваться домино, очками, лото и т. д. Как же угадать задуманное число?

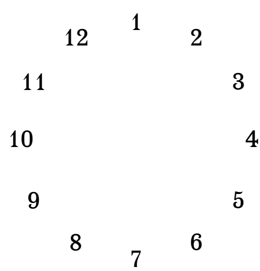


Рис. 116

Пусть кто-либо задумает про себя любое из чисел круга. Затем *укажите* ему сами *любое число* на этом круге и прибавьте про себя к этому числу 12 (т. е. наивысшее число круга). Вы получите некоторое число, и это число вы скажете громко. Пусть потом задумавший считает про себя от задуманного им числа, притрагиваясь сначала к указанному вами числу, а потом к каждому следующему числу по кругу, *идя в обратном порядке*, и пусть считает до сказанного вами громко числа. Когда он досчитает до него, последовательно притрагиваясь к числам, то остановится как раз на задуманном им числе или часе.

Пусть, например, кто-либо задумал на круге 5, а вы указываете, например, 9, прибавляете к нему про себя 12 и получите 21. Затем говорите громко задумавшему:

— Считайте про себя, начиная от задуманного вами числа, до 21, но, начиная счет, притроньтесь сначала к 9, потом к 8, потом к 7 и т. д., идя по кругу в обратном порядке; когда же досчитаете до 21, то скажите это число громко и остановитесь.

Задумавший исполнит сказанное ему, и когда досчитает до 21, то как раз сам укажет *задуманное им число 5*.

Можно обставить эту задачу еще таинственнее, например, так.

Кто-нибудь задумывает какое-нибудь число (например 5). Вы берете, например, число 9, прибавляете к нему мысленно 12, получаете 21 и говорите задумавшему:

— Теперь я буду стучать карандашом (или пальцем), и при каждом стуке вы прибавляете про себя к задуманному вами числу по единице. Но, когда досчитаете до 21, скажите громко: «21».

Затем стучите по 9, по 8, по 7 и т. д. …, по 12, по 11 и т. д. … Задумавший число в это время про себя будет считать 5, 6, 7 и т. д., но когда скажет громко: «21», то окажется, что вы стучите как раз по задуманному им числу.

— Вы задумали число 5! — говорите вы ему.

— Совершенно верно! — ответит вам задумавший, дивясь, как вы могли узнать это, если он сам знает, в чем разгадка этого будто бы фокуса.

Решение. «Фокуса» здесь, конечно, нет, только правильный математический расчет.

Чтобы от 5 прийти к 9, нужно считать так: 5, 6, 7, 8, 9. Значит, от 9 до 5 нужно пройти через те же числа 9, 8, 7, 6, 5, только считая их в обратном порядке. Если, указывая на 9, мы скажем «пять», затем, указывая на 8, скажем «шесть» и т. д., то, придя к задуманному числу 5, скажем «девять». Если затем идти по кругу в том же направлении и присчитать к «девяти» еще 12 последовательных чисел круга, то опять приходим к тому же числу 5. Дело сводится, следовательно, к счету по кругу в обратном направлении от указанного числа 9 до $9+12$, т. е. до 21.

Если, наоборот, задумано 9, а указано 5, то от 9 до 5, считая в прямом направлении по кругу (по порядку возрастания чисел), получаем: 9, 10, 11, 12, $12+1$, $12+2$, $12+3$, $12+4$, $12+5$, т. е. 17. Следовательно, начиная с 5, можно прийти к задуманному числу 9, идя в обратном направлении и отсчитывая те же $5+12=17$ чисел.

102. СКОЛЬКО ОСТАЛОСЬ ПРЕДМЕТОВ?

Предложите своему товарищу взять в каждую руку по одинаковому количеству предметов (например спичек). При этом надо потребовать, чтобы число предметов в одной руке было не меньше, чем некоторое число b. Число взятых предметов вам не известно. Предложите партнеру переложить из правой рук в левую то число предметов, которое вы ему скажете (например, число a; естественно, что $a<b$). Затем, ничего не показывая и не говоря вам, пусть он отложит из левой руки столько предметов, сколько у него осталось в правой, и, наконец, опять-таки ничего вам не показывая, пусть он отложит в сторону все предметы из правой руки. Теперь вы можете смело утверждать, что у вашего партнера осталось в левой руке $2a$ предметов. Почему?

Решение. Пусть у партнера в руках по n спичек (причем $n \geqslant b$) и вы предлагаете ему переложить из правой руки в левую a спичек (причем $a<b$). Тогда до перекладывания в обеих руках у него по n предметов (причем $n>a$), после первого перекладывания — в левой $n+a$, в правой $n-a$ предметов, после второго перекладывания — в левой $(n+a)-(n-a)=2a$, в правой $n-a$ предметов и, наконец, в левой $2a$ предметов, а правая рука пуста.

103. ЧЕМУ РАВНА РАЗНОСТЬ?

Попросите своего товарища написать любое двузначное число, но пусть затем он поменяет местами в этом числе цифры и вычтет из большего числа меньшее. Если он скажет вам последнюю цифру разности, то вы сразу скажете, какова вся разность. Как это сделать?

Решение. Двузначное число представимо в виде $10a+b$, где $0<a\leqslant 9$ — число десятков, $0\leqslant b<9$ — число единиц. Разность имеет вид $10a+b-(10b+a)$, т. е. делится на 9. Если эта разность равна $10k+l$ ($k\leqslant 9$, $l\leqslant 9$), то $10k+l=9k+(k+l)$ и, значит, $k+l=9$. Итак, первую цифру разности можно найти, вычитая из 9 цифру, названную вам.

Например, если задумано число 37, то имеем: $73-37=36$. Вам сообщают цифру 6, и вы находите первую цифру: $9-6=3$. Еще один пример: $54-45=9$. Последняя цифра 9, значит, первая равна $9-9=0$, т. е. разность равна 9.

104. ЧЕМУ РАВНО ЧАСТНОЕ?

Попросите своего товарища написать любое трехзначное число, но только такое, чтобы крайние цифры отличались друг от друга на число, которое вы укажете. Пусть затем он поменяет местами в этом числе крайние цифры. Получится еще одно число. Предложите вашему товарищу вычесть меньшее число из большего. Разность всегда делится на 9, и вы можете всегда сказать наперед, какое будет частное от деления этой разности на 9. Чему же равняется частное?

Решение. Частное равняется указанной вами разности между крайними цифрами числа, умноженной на 11. Например, если взять сначала число 845, то $845-548=279$, $279:9=33=(8-5)\times 11$.

Чтобы доказать это правило, заметим, что каждое трехзначное число можно представить в виде $100a+10b+c$, где $0<a\leqslant 9$ — число сотен, $b\leqslant 9$ — число десятков и $c\leqslant 9$ — число единиц во взятом числе. Тогда число с переставленными цифрами будет равно $100c+10b+a$. Вычитая второе из первого и деля на 9, имеем

$$\frac{100a+10b+c-(100c+10b+a)}{9}=\frac{99\,(a-c)}{9}=11\times(a-c).$$

Эту задачу можно предлагать в следующем более занимательном (особенно для детей) варианте.

Число 1089. Напишите на бумажке число 1089, вложите бумажку в конверт и запечатайте его. Затем предложите кому-нибудь, дав ему этот конверт, написать на нем трехзначное число, но такое, чтобы крайние цифры в нем были различны и отличались бы друг от друга более чем на единицу. Пусть затем он поменяет местами крайние цифры и вычтет из большего трехзначного числа меньшее. В результате пусть он опять переставит крайние цифры и получившееся трехзначное число прибавит к разности первых двух. Когда он получит сумму, предложите ему открыть конверт. Там он найдет бумажку с числом 1089, которое, к его удивлению, и есть полученное им число.

Почему так произошло?

Р е ш е н и е. Из решения предыдущей задачи мы знаем, что разность между любым трехзначньм числом и числом, полученным из него перестановкой крайних цифр, всегда делится на 99. Так как крайние цифры отличаются более чем на единицу, то эта разность обязательно будет трехзначным числом; обозначим ее $100k+10l+m$ $(0<k\leqslant 9,\ l\leqslant 9,\ m\leqslant 9)$. Имеем

$$100k+10l+m=99k+(10l+m+k).$$

Так как разность делится на 99, то это равенство показывает, что обязательно $10l+m+k=99$, откуда вытекает, что $l=9$, $m+k=9$. Число с переставленными крайними цифрами имеет вид $100m+10l+k$, и сумма равняется

$$\begin{aligned}100k+10l+m+100m+10l+k&=\\ =100(k+m)+20\times l+(m+k)&=\\ =100\times 9+20\times 9+9&=1089.\end{aligned}$$

105. КАКОЕ ЧИСЛО ЗАДУМАНО?

Попросите своего товарища задумать число, пусть затем он удвоит задуманное число и к полученному произведению прибавит 5. Потом пусть полученное число возьмет пять раз и прибавит к результату число 10. Эту последнюю сумму пусть он умножит еще на 10. Если после этого спросить, какое, в конце концов, получилось число, и отнять от него 350, то *число* оставшихся *сотен* и будет задуманным числом. Почему это так?

П р и м е р. Пусть задумано 3. По удвоении его получается 6; если прибавить 5, получится 11; взять пять раз 11 — получится 55; прибавить сюда 10 — получится 65; увеличить в 10 раз — получится 650. Если отнять отсюда 350, останется 300, т. е. *три* сотни. Итак, задуманное число есть 3.

Р е ш е н и е. Над задуманным числом n совершаются следующие действия:

$$n\times2+5=2n+5,\ (2n+5)\times5=10n+25,$$
$$10n+25+10=10n+35,\ (10n+35)\times10=100n+350,$$
$$100n+350-350=100n,\ 100n:100=n.$$

То есть всегда получится задуманное число.

З а м е ч а н и я. Рассматривая решение последней задачи, нетрудно понять, что ей можно придать любое число различных видоизменений. Так, например, если пожелать, чтобы всегда в результате число сотен выражало задуманное число и чтобы приходилось умножать всегда на 2, 6 и 10, но вычитать приходилось бы не 350, как в приведенной задаче, а другое число, то нужно принять во внимание, как получилось в вышеприведенной задаче 350. Это число произошло так: прибавлено 5, да умножено на 5, итого 25; к этому числу прибавлено 10, получилось 35; умножив же это число на 10, получаем 350. Следовательно, если захотеть вместо 350 вычитать из окончательного результата другое число, то и задавать нужно прибавлять не 5 и 10, а другие числа. Зададим, например, вместо 5 прибавить 4, а вместо 10 прибавить 12. Ясно, что из последнего полученного числа придется вычесть 320 ($4\times5=20$; $20+12=32$; $32\times10=320$), и тогда получим остаток, *число сотен* которого и даст нам задуманное число. Таким образом, задачу можно видоизменять до бесконечности.

Точно так же легко заметить, что, умножая задуманное число на 2, на 5 и на 10, мы умножаем его, в сущности, на 100 ($2 \times 5 \times 10 = 100$).

Поэтому, если мы опять-таки хотим, чтобы число сотен окончательного результата показывало задуманное число, — все равно, какие множители выбрать, лишь бы умножение на них давало в окончательном результате умножение на 100. Отсюда следует, что, оставляя те же множители 2, 5, 10, можно изменить их порядок, т. е. сначала умножить, например, на 5, потом на 10, а затем на 2 и т. д.

Точно так же вместо множителей 2, 5, 10 можно брать другие, дающие в произведении 100, например: 5, 4, 5 или 2, 2, 25 и т. д. Нужно помнить только при этом, конечно, что всем этим изменениям множителей и прибавляемых чисел соответствует изменение числа, которое в конце нужно вычесть. Так, например, будем умножать на 5, 4, 5, а прибавлять числа 6 и 9, и пусть задуманное число будет 8.

Умножив на 5, получим 40; прибавив 6, получим $40 + 6 = 46$; умножив на 4, получим $160 + 24 = 184$; прибавив 9, получим $160 + 33 = 193$; умножив это число на 5, получим $800 + 165 = 965$, т. е. для получения числа сотен, показывающего задуманное число, нужно отнять в данном случае 165 ($6 \times 4 = 24$; $24 + 9 = 33$; $33 \times 5 = 165$).

Можно также взять не 100, а любое иное число и сделать так, чтобы оно заключалось в остатке от последнего вычитания столько раз, сколько единиц заключается в задуманном числе. Так, например, возьмем число 24, которое можно представить состоящим из множителей 2, 3, 4 ($2 \times 3 \times 4 = 24$), а числа, которые будем прибавлять, пусть будут 7 и 8.

Пусть задуманное число есть 5. Удваивая его, находим 10, прибавляя 7, находим $10 + 7 = 17$; утраивая, находим

$(10+7)\times 3=30+21=51$; прибавляя 8, находим $30+29=59$; беря последнее число 4 раза, получим $120+116=236$. Отнимаем отсюда 116, остается 120, в котором 24 содержится 5 раз, т. е. получается задуманное число 5.

Можно также вместо трех множителей брать только два, а вместо двух чисел прибавлять только одно, и тогда *число десятков* числа, полученного после вычисления, подобного предыдущему, покажет задуманное число.

Можно также брать четыре, пять, шесть и т. д. множителей, прибавлять соответствующее (три, четыре и т. д.) количество чисел, затем, поступая, как указано выше, угадывать задуманное кем-либо число.

Можно, наконец, вместо того, чтобы прибавлять числа, вычитать их, а в конце вместо вычитания прибавлять известное число. Так, например, воспользуемся числами первого примера настоящей задачи, и пусть задуманное число будет 12. Удвоив его, получим 24; вычитая отсюда 5, получим $24-5$; умножая на 5, получим $120-25$; вычитая 10, получим $120-35$; умножая на 10, получим $1200-350$. Здесь вместо того, чтобы вычесть, нужно прибавить 350: сумма получится 1200, и число сотен в ней (12) дает задуманное число.

Словом, читатель может видоизменять и разнообразить эту задачу, как ему угодно.

106. ВОЛШЕБНАЯ ТАБЛИЦА

Вот таблица (см. стр. 117), в которой в пяти столбцах написаны известным образом все числа от 1 до 31. Таблица эта отличается следующим «волшебным свойством».

Задумайте какое угодно число (но, конечно, не больше 31) и укажите только, в каких столбцах этой таблицы находится задуманное вами число, а я тотчас же «угадаю» это число.

5	4	3	2	1
16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	8 9 10 11 12 13 14 15 24 25 26 27 28 29 30 31	4 5 6 7 12 13 14 15 20 21 22 23 28 29 30 31	2 3 6 7 10 11 14 15 18 19 22 23 26 27 30 31	1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31
16	8	4	2	1

Если, например, вы задумаете число 27, то скажите только, что задуманное вами число находится в 1-м, 2-м, 4-м и 5-м столбцах; а я уже сам вам скажу, что вы задумали именно число 27. (Можно это сказать, даже не глядя на таблицу.)

Вместо такой таблицы можно смастерить

Волшебный веер. Сделайте сами или купите подходящий веер и на пяти пластинках его выпишите изображенную выше таблицу. Можете, обвевая себя веером, предлагать вашему собеседнику задумать число и указать вам только пластинки, на которых оно написано. Вы тотчас угадаете задуманное число.

Но в чем секрет?

Решение. Секрет разгадывания с виду прост: обратите внимание на цифры, написанные в самой нижней графе. Если вам скажут, например, что задуманное число находится во 2-м, 3-м и 5-м столбцах, считая справа (или на 2-й, 3-й, 5-й пластинках веера), то сложите числа, стоящие в этих столбцах *внизу*, получите 22 (2+4+16), и будьте уверены, что задумано именно это, а не иное какое-нибудь число.

Еще пример — число 18. Вы найдете его во 2-м и 5-м столбцах. Внизу этих столбцов стоят числа 2 и 16; сложенные вместе, они дают действительно 18.

Как же составляется подобная таблица?

Если написать ряд чисел, начиная с 1, таких, чтобы каждое было вдвое больше предыдущего, т. е. 1, 2, 4, 8, 16, 32, …, то ряд этот обладает тем замечательным свойством, что каждое целое положительное число может быть получено, и не более чем одним способом, как сумма некоторых членов ряда. Например, $27=16+8+2+1$. Для составления таблицы мы взяли только начальные члены ряда: 1, 2, 4, 8, 16 (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4), сложением которых можно получить все числа от 1 до 31 ($=2^5-1$). За каждым из них закреплен определенный столбец таблицы (см. нижнюю строку). Воспользовавшись указанным выше свойством ряда степеней двойки, мы помещаем каждое целое число в те столбцы, в основании которых стоят степени двойки, в сумме составляющие это число. Так 27 попадает в столбцы с основаниями 1, 2, 8, 16. Теперь ясно, почему для угадывания достаточно сложить числа, стоящие внизу столбцов. Можно воспользоваться этим свойством степеней двойки для обозначения чисел. Напишем для каждого числа последовательность из 0 и 1 такую, что на первом месте справа сто́ит 1 или 0 в соответствии с тем, содержится наше число в первом столбце или нет, на втором 1 или 0 в зависимости от того, сто́ит ли число во втором столбце, и так далее. Например, число 27 обозначается этим способом так: 1 1 0 1 1, а число 12 — так: 0 1 1 0 0. Условимся не писать нули, стоящие слева, тогда для числа 12 получим представление 1100.

Такой способ записи называется двоичной системой изображения чисел.

Для того чтобы изобразить число с его помощью, совсем не обязательно иметь перед глазами таблицу. Достаточно представить целое число в виде суммы степеней двойки и на местах, номера которых (считая справа налево, начиная с 0) участвуют в этом представлении, поставить 1, а на остальных местах 0:

Число	Двоичное изображение
$2=2^1$	10
$3=2^1+2^0$	11
$5=2^2+2^0$	101
$19=2^4+2^1+2^0$	10011
$134=2^7+2^2+2^1$ и т. д.	10000110 и т. д.

Двоичная система очень удобна для представления чисел в вычислительных машинах, так как для записи любого числа достаточно только двух знаков — 0 и 1. В общеупотребительной же десятичной системе для этого требуется 10 знаков — 0, 1, 2, …, 8, 9.

107. ЧЕТНОЕ ЧИСЛО

Задумайте четное число. Утройте его. Возьмите половину полученного числа и опять утройте ее. Если вы скажете, чему равно частное от деления найденного числа на 9, то я назову задуманное число.

Пример. Задумано 6. После утроения получается 18. Половина этого числа равна 9. Утроив, получаем 27. Если теперь разделить на девять, то получится 3, т. е. половина задуманного числа.

Доказательство. Если задумано четное число $2n$, то, проделав с ним указанную последовательность действий, получим

$$2n\times3=6n,\ 6n:2=3n,\ 3n\times3=9n,\ 9n:9=n.$$

Удваивая частное n, получаем задуманное число $2n$.

Этот фокус можно показывать и в более общем виде, предлагая задумать произвольное целое число. При этом вводятся некоторые изменения.

Если утроенное задуманное число на два не делится, то к утроенному числу нужно сначала добавить 1, а потом разделить на два и действовать, как и ранее. Нужно также иметь в виду, что в этом случае при угадывании числа после удвоения нужно обязательно прибавить 1.

Пример. Задумано число 5. Утраивая, получаем 15. Чтобы разделить пополам нацело, нужно прибавить 1, получится 16. Половина от 16 равна 8, утроив, получаем 24. Частное от деления с остатком этого числа на 9 равно 2. Умножая это число на 2 и прибавляя 1, получаем задуманное число 5.

Проверим это правило для нахождения задуманного числа в общем случае. Если задумано число четное, проверка уже сделана. Пусть теперь задумано нечетное число $2n+1$. Наши действия принимают вид

$$(2n+1)\times3=6n+3.$$

Поскольку это число на 2 не делится, то, прибавляя 1, находим $6n+3+1=6n+4$. Разделив это число на 2, получим $3n+2$. Далее, $(3n+2)\times3=9n+6$.

Частное от деления $9n+6$ на 9 равно n (а остаток равен 6). Удваивая это частное и прибавляя 1, находим задуманное число $2n+1$.

Если вы показываете этот фокус в первый раз и утроенное число на 2 не делится, то ваш товарищ обязательно спросит: «А что делать, если число на 2 не делится?» Этот вопрос укажет вам, что при угадывании нужно удвоенное частное увеличить на единицу. Вы можете и сами спросить, разделилось ли число на 2. Нужно только, чтобы этот вопрос прозвучал как попытка помочь вашему товарищу в выполнении арифметических действий и он не заподозрил бы, что его ответ на этот вопрос поможет вам в угадывании задуманного числа.

108. ВИДОИЗМЕНЕНИЕ ПРЕДЫДУЩЕЙ ЗАДАЧИ

Утроить задуманное число, затем взять половину произведения; если же произведение получится нечетное, то прибавить к нему единицу и потом разделить пополам. Утроить снова эту половину, затем взять половину полученного числа, прибавляя, как выше, 1, если от умножения на 3 получится нечетное число. Затем надо спросить, чему равно частное от деления последнего числа на 9, и частное умножить на 4. При этом нужно иметь в виду, что если при делении на два в первый раз приходилось прибавлять 1, то угадывающему нужно тоже держать в уме 1, а если при делении и во второй раз приходилось прибавлять 1, то нужно запомнить еще 2. Следовательно, если оба раза деление на 2 не могло быть выполнено нацело без прибавления 1, то, умножив частное на 4, нужно к полученному числу прибавить еще 3; если же деление пополам нацело не выполняется только в первый раз, то прибавляется 1, а если только во второй, то прибавляется 2.

Пример. Задумано 7; утраивая, получим 21; чтобы разделить пополам нацело, надо прибавить 1; прибавляя ее и деля 22 пополам, получим 11; по утроении получим 33; чтобы взять половину, опять нужно прибавить 1, после чего получим 34, половина этого числа есть 17. Здесь 9 содержится только 1 раз. Следовательно, нужно взять число 4 и к нему прибавить еще 3, так как деление и в первом и во втором случае совершалось лишь после прибавления 1. Получается: $4+3=7$, т. е. задуманное число.

Доказательство. Всякое число может быть представлено в одной из следующих форм: $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, где букве n нужно придавать значения 0, 1, 2, 3, 4 и т. д.

1) Возьмем сначала число вида $4n$ и произведем над ним указанные выше действия. Получается

$4n\times3=12n$, $12n:2=6n$, $6n\times3=18n$,

$18n:2=9n$, $9n:9=n$, $4\times n=4n$.

2) Для числа вида $4n+1$ получим

$(4n+1)\times3=12n+3$, $(12n+3+1):2=6n+2$,

$(6n+2)\times3=18n+6$, $(18n+6):2=9n+3$.

Частное от деления $9n+3$ на 9 равно n, и, пользуясь правилом, мы угадываем число $4n+1$.

3) Для числа вида $4n+2$ имеем

$(4n+2)\times3=12n+6$, $(12n+6):2=6n+3$,

$(6n+3)\times3=18n+9$, $(18n+9+1):2=9n+5$.

Частное от деления $9n+5$ на 9 равно n, и, прибавляя к $4n$ число 2 (деление нацело не выполнилось только во второй раз), получаем задуманное число.

4) Для числа вида $4n+3$ имеем

$(4n+3)\times3=12n+9$, $(12n+9+1):2=6n+5$,

$(6n+5)\times3=18n+15$, $(18n+15+1):2=9n+8$.

Частное от деления $9n+8$ на 9 равно n, и, поступая с ним, как указано в условии, находим задуманное число $4n+3$.

Таким образом, всегда получается задуманное число.

109. ЕЩЕ ОДНО ВИДОИЗМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ 107

Задумайте число; прибавьте к нему половину того же числа; к полученной сумме прибавьте половину этой же суммы. Затем нужно спросить, чему равно частное от деления последнего числа на 9, и умножить его на 4, как выше. Но и здесь, как всегда, нужно помнить, что если в первом случае число не делится нацело на 2, то нужно прибавить к нему 1 и затем поделить на две равные части; точно так же нужно поступать и во втором случае. А затем, если деление нацело не выполнялось только в первом случае, то угадывающий должен держать в уме 1, если только во втором, то 2, а если и в первом и во втором, то 3 и эти числа соответственно потом прибавлять для получения правильного ответа.

Пример. Задумано число 10; прибавляя к нему его половину, получим 15 — число нечетное; поэтому, прибавляя к нему 1 и беря половину, получим 8; прибавляя 8 к 15, получим 23; в этом числе 9 содержится 2 раза. Два раза по четыре равно 8, но к 8 надо прибавить еще 2, потому что во втором случае, чтобы разделить на 2 нацело, приходилось прибавлять 1. Итак, $8+2=10$, т. е. получаем задуманное число.

Если число нечетное, то разделим его на две такие части, чтобы одна была на единицу больше другой, и условимся для краткости называть первое слагаемое большей половиной, а второе — меньшей. Тогда рассматриваемую нами задачу можно представить еще в одной довольно интересной форме.

Задумайте число. Прибавьте к нему его половину или, если оно нечетное, то его «бóльшую половину». К этой сумме прибавьте ее половину или, если она нечетна, то ее «бóльшую половину». Сколько раз в полученном числе содержится 9?

Умножив затем частное на 4, задумавшему число надо предложить такие вопросы: можно ли от остатка от деления на 9 отнять еще 8? Если можно, то, значит, чтобы получить задуманное число, нужно к числу, полученному от умножения частного на 4, прибавить 3.

Если же нельзя отнять 8, то надо спросить, нельзя ли отнять 5. Если можно, то нужно прибавить 2. Если же 5 нельзя вычесть, то спросить, нельзя ли вычесть 3, и если можно, то прибавляется 1.

Легко убедиться, что задача, предложенная в этой последней форме, сводится, в сущности, к предыдущим, потому что утроить число и взять потом половину полученного произведения — это все равно что прибавить к числу его половину и т. д.

З а м е ч а н и е. Понявший и всесторонне усвоивший доказательства приведенных выше задач в их различных видоизменениях может сам легко создать множество правил, подобных предыдущим, для угадывания задуманного числа.

Можно, например, заставить утроить задуманное число, затем взять половину полученного произведения, эту половину предложить умножить уже на 5 и взять половину произведения. Вслед за тем спросить, чему равно частное от деления последнего числа на 15, и умножить его на 4. При этом, как и раньше, нужно к произведению прибавлять 1, 2 или 3, смотря по тому, когда деление на 2 не совершается нацело: в первом случае, во втором или в обоих вместе.

Внимательный читатель легко все это докажет сам.

Можно также, например, предложить умножить задуманное число на 5, взять половину полученного произведения, эту половину опять умножить на 5, полученное снова разделить на 2, а затем спросить, чему равно частное от деления найденного числа на 25, и умножить его на 4. При этом нужно иметь в виду опять-таки случаи, когда деление на 2 совершается нацело, а когда нет, и прибавить 1, 2 или 3, где следует, или же не прибавлять ничего, если деление на 2 в обоих случаях было нацело.

Словом, предложенные задачи можно разнообразить всячески.

110. УГАДАТЬ ЗАДУМАННОЕ ЧИСЛО ИНЫМ СПОСОБОМ

Сначала нужно поступать, как в предыдущих задачах, т. е. предложить утроить задуманное число, взять половину (или «бóльшую половину») полученного произведения, утроить эту половину и взять снова половину (или «бóльшую половину») полученного числа. Но затем вместо вопроса, чему равно частное от деления последнего числа на 9, можно попросить назвать все цифры, которыми пишется это последнее число, *кроме одной*, лишь бы эта неизвестная отгадывающему цифра *не была нуль*.

Точно так же необходимо, чтобы загадывающий сказал и *порядок цифр* — как тех, которые уже им названы, так и той, которая угадывающему еще неизвестна.

После этого, чтобы узнать задуманное число, надо сложить все цифры, которые названы, и отбросить от этой суммы 9 столько раз, сколько возможно. Остаток, который после этого получится, надо вычесть из 9, и тогда получится неизвестная цифра; или же, если остаток будет нуль, то неизвестная цифра и есть 9. Поступают именно так в том случае, если оба раза деление пополам совершалось нацело. Если же, чтобы разделить число пополам, приходилюсь прибавлять 1 в первый раз, то нужно сначала к сумме известных цифр прибавить еще 6 и поступать затем, как указано.

Если же для деления пополам приходилось прибавить 1 только второй раз, то к той же сумме нужно добавить 4.

Если же в обоих случаях деление не совершалось сразу нацело и приходилось прибавлять по 1, то к сказанной сумме нужно прибавить 1.

Нашедши таким образом неизвестную цифру последней половины, мы узнаем и саму половину. Узнав же, сколько раз в ней заключается по 9, взяв соответственное число раз по 4 и прибавляя, когда нужно, 1, 2 или 3, получим искомое задуманное число.

Пример. Задумано 24. Утроив и разделив два раза, находим, что последняя половина есть 54. Пусть задумавший число назовет угадывающему первую цифру 5. Тогда вычитанием 5 из 9 получается вторая цифра 4. Итак, последняя половина есть 54. В ней 9 содержится 6 раз.

Следовательно, задуманное число есть $4\times6=24$.

Положим еще, что задумано 25. Утраивая и беря половину произведения, утраивая эту половину и беря снова половину, находим 57. Но нужно помнить, что в первом случае, чтобы получить половину, приходилось прибавлять 1; поэтому, если задумавший число объявит, например, первую цифру 5, то надо к 5 прибавить 6, получится 11; отбрасывая 9, получим 2; вычитая 2 из 9, получим вторую цифру 7. Итак, вторая половина 57; в ней 9 содержится 6 раз. Отсюда задуманное число равно $4\times6+1=25$.

Пусть задумавший число скажет, что последняя полученная им половина числа состоит из трех цифр, что две последние цифры суть 13 и что для деления пополам нацело приходилось во второй раз прибавлять 1. В таком случае к сумме $1+3=4$ нужно прибавить еще 4, получается 8. Вычитая 8 из 9, получим 1. Следовательно, последняя половина есть 113; в ней 9 содержится 12 раз. Поэтому задуманное число есть $4\times12+2=50$.

Точно так же, если бы задумавший число сказал, что после утроений и делений на 2 он получил трехзначное число, в котором первая цифра 1, а последняя 7, и что в обоих случаях при делении на 2 приходилось прибавлять по 1, то на основании предыдущего поступаем так: $1+7+1=9$. Отбрасывая 9, получим в остатке нуль, т. е. неизвестная цифра последней половины есть 9, и сама это половина есть 197, где 9 содержится 21 раз. Отсюда по предыдущему заключаем, что задуманное число есть $4 \times 21 + 3 = 87$.

Доказательство. Обращаясь к доказательству, данному для задачи 108, находим, что для числа вида $4n$ окончательный результат вычисления дает $9n$, т. е. *число, кратное* 9. Следовательно, сумма цифр этого числа должна делиться на 9, а отсюда заключаем, что неизвестная нам цифра такова, что, сложив ее с остальными известными цифрами, мы должны получить число, делящееся на 9 (т. е. кратное 9). Если же сумма известных цифр кратна 9, то значит, неизвестная цифра сама есть 9, ибо нам дано, что она не нуль.

Для числа вида $4n+1$ результат вычислений есть $9n+3$; прибавляя сюда 6, получаем число, кратное 9, т. е. кратна 9 и сумма его цифр.

Для числа вида $4n+2$ результат вычислений дает $9n+5$; прибавляя 4, получаем число, кратное 9, следовательно, и сумма его цифр должна быть кратной 9.

Наконец, для числа вида $4n+3$ окончательный результат вычислений дает $9n+8$. Прибавляя 1, находим число, кратное 9. Сумма его цифр также должна быть кратна 9.

Итак, указанные нами выше правила верны.

111. УГАДАТЬ ЗАДУМАННОЕ ЧИСЛО ЕЩЕ ОДНИМ СПОСОБОМ

Изложим теперь способ, который с виду кажется замысловатее других, хотя доказывается очень легко.

Пусть кто-нибудь задумает какое-либо число. Затем предложите ему умножить это число на какое угодно заданное вами другое число, полученное произведение разделить на какое угодно, заданное вами число, затем результат опять умножить на какое вам угодно число, это произведение опять разделить на какое угодно заданное вами число и т. д. Если угодно, то можно предоставить тому, кто задумал число, самому умножить и делить задуманное число на какие ему угодно числа, лишь бы он сообщал каждый раз, на какое число он множит и на какое делит. Но, чтобы угадать задуманное число, сам угадывающий пусть в то же время возьмет какое-либо число и проделывает над ним все те же самые умножения и деления, что и задумавший число. Остановившись затем на каком-либо делении, попросите задумавшего число, чтобы он разделил на задуманное им число то последнее число, которое он получил. Точно так же и вы (угадывающий) разделите последнее вами полученное число на взятое вами первоначально. *Тогда у вас получится то же число, что и у задумавшего число*. После этого пусть задумавший число прибавит к полученному им в уме частному задуманное число и скажет вам результат. Вычитая из этого результата известное уже вам число, получаете задуманное число.

Пример. Пусть кто-нибудь задумает число 5. Предложите ему помножить его на 4; результат (20) разделить на 2 (получится 10), полученное число умножить на 6 (получится 60), это последнее произведение разделить на 4 (получится 15). Но в то же время вы сами должны выбрать какое-либо число и делать над ним все те же действия. Пусть, например, вы возьмете 4 (лучше, вообще, брать для удобства 1). Умножая на 4, вы получаете 16; деля на 2, вы получаете 8; умножая на 6, вы получаете 48; деля это число на 4, вы получаете 12. Вслед за тем вы говорите задумавшему число, чтобы он последнее полученное им число (т. е. 15) разделил на задуманное (т. е. на 5). У него получается 3.

Если вы в то же время свое последнее число 12 разделите на взятое вами сначала, т. е. на 4, то получите также 3. Сделав вид, что вам неизвестно полученное вашим партнером частное, вы говорите ему, чтобы он прибавил к полученному им числу задуманное число и сказал вам результат; он, конечно, скажет вам в этом примере 8. Отнимая от 8 полученное вами уже частное 3, найдете задуманное вашим партнером число 5.

Доказательство. Если над каким-либо числом n производится ряд умножений и делений, то получается результат вида $n\,\frac{abc...}{ghk...}$. Если произвести те же действия над числом p, то получится результат вида р $\frac{abc...}{ghk...}$. Оба эти результата, разделенные первый на n, а второй на p, дадут, очевидно, одно и то же число $\frac{abc...}{ghk...}$. Итак, зная число $\frac{abc...}{ghk...}$ и сумму $\frac{abc...}{ghk...}+n$, достаточно из последнего вычесть первое, чтобы получить число n.

Замечание. Можно, очевидно, всячески видоизменять настоящую задачу, так как, во-первых, можно делить и умножать на какие угодно числа, а во-вторых, вместо того, чтобы умножать и делить поочередно, можно сначала умножать два, три и т. д. раза подряд, затем столько же раз делить или наоборот. Можно также, зная последнее частное, заменять сложение вычитанием, если задуманное число окажется меньше полученного последнего частного, и т. д.

112. УГАДАТЬ НЕСКОЛЬКО ЗАДУМАННЫХ ЧИСЕЛ

I. Пусть кто-нибудь задумает нечетное число каких-либо чисел, т. е. 3, или 5, или 7, или 9 и т. д. чисел, и пусть он скажет вам сумму первого и второго чисел, затем суммы второго и третьего, третьего и четвертого и т. д., наконец, сумму последнего из задуманных им чисел и первого.

Возьмите эти суммы в *том же порядке*, как они сказаны вам, и сложите вместе все те, которые стоят на нечетных местах (т. е. 1-ю с 3-й, с 5-й и т. д.), а затем сложите все те, которые стоят на четных местах (т. е. 2-ю с 4-й, с 6-й и т. д.), и вычтите из первого результата второй. Остаток и даст *удвоенное первое задуманное число*. Беря половину этого остатка, получаем *само число*. Зная его, нетрудно найти остальные числа, так как суммы первого и второго, второго и третьего и т. д. известны.

Доказательство. Пусть задуманные числа будут a, b, c, d, e. Даны суммы $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$, $e+a$. Складывая суммы, стоящие на нечетных местах, получим $a+b+c+d+e+a$ и, складывая суммы, стоящие на четных местах, получим $b+c+d+e$.

Вычитая из первой суммы вторую, получаем $2a$. Половина этого числа есть первое из задуманных чисел a. Вычитая a из $a+b$, получим b и т. д.

II. Если же кто-нибудь задумает четное число чисел, то, как и выше, пусть он скажет суммы задуманных чисел по два (первого со вторым, второго с третьим и т. д.), но в конце пусть объявит сумму не последнего с первым задуманным числом, но *последнего со вторым*. После этого опять нужно сложить все суммы, стоящие на нечетных местах, кроме первой, затем все суммы, стоящие на четных местах, и из второго результата вычесть первый. Остаток и даст удвоенное второе задуманное число.

Доказательство. Пусть задуманы числа a, b, c, d, e, f. Даны суммы $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$, $e+f$, $f+b$. Суммы, стоящие на нечетных местах, за исключением первой, дают $c+d+e+f$. Суммы, стоящие на четных местах, дают $b+c+d+e+f+b$. Разность между этой суммой и предыдущей есть $2b$; половина этого числа и есть задуманное второе число b. Остальные числа найти уже легко.

Замечания. Можно эти задачи решать иными способами, из которых укажем на следующие.

Пусть число задуманных чисел будет нечетное.

Сложив все данные суммы и разделив полученное число пополам, найдем сумму всех задуманных чисел. Если же задумано четное число чисел, то сложим все данные суммы, кроме первой, результат поделим пополам и получим сумму всех задуманных чисел, кроме первого. Но, зная сумму всех задуманных чисел, легко найти в данном случае каждое число в отдельности. Пусть, например, задуманы числа 2, 3, 4, 5, 6. Суммы, которые даются, будут: 5, 7, 9, 11, 8. Складывая эти числа, получим 40. Половина этого числа (20) и есть сумма всех задуманных чисел.

Зная теперь, что сумма 2-го и 3-го задуманных чисел есть 7, а сумма 4-го и 5-го чисел есть 11, вычитаем $7+11=18$ из 20 и получаем первое задуманное число 2 и т. д.

Подобным же образом надо поступать и в том случае, когда задумано четное число чисел.

Можно узнавать числа и так. Если кто-либо задумает 3 числа, предложите ему сказать их суммы по два, как объяснено выше; если он задумал 4 числа, предложите ему сложить их по три и сказать вам суммы; если задумано 5 чисел, предложите сложить их по четыре и сказать вам суммы и т. д. Затем, чтобы отгадать задуманные числа, нужно руководствоваться следующим общим правилом.

Все известные суммы сложить и полученный результат разделить на число, единицей меньшее числа задуманных чисел. Полученное частное и есть сумма всех задуманных чисел. После этого уже нетрудно найти каждое число в отдельности. Пусть, например, задуманы 3, 5, 6, 8. Суммы по три будут $3+5+6=14$, $5+6+8=19$, $6+8+3=17$, $8+3+5=16$. Складывая эти суммы, получаем 66. Эту сумму надо разделить на 3 (т. е. на число, единицей меньшее числа задуманных чисел). Получается 22 — сумма всех задуманных чисел. Если теперь из 22 вычесть 14, получим последнее из задуманных чисел (8); вычитая 19, получаем первое (3) и т. д. Понять и доказать все это нетрудно.

Желающим предоставляем доказать, почему в случае четного числа задуманных чисел нельзя брать попарно суммы так, чтобы последняя состояла из последнего задуманного числа плюс первое, а непременно надо так, чтобы складывать последнее и второе из задуманных чисел.

113. УГАДАТЬ ЗАДУМАННОЕ ЧИСЛО, НИЧЕГО НЕ СПРАШИВАЯ У ЗАДУМЫВАЮЩЕГО

Предложите кому-либо задумать число, затем пусть он умножит задуманное число на произвольно выбранное вами число, к этому числу пусть он прибавит любое данное вами число и полученную сумму разделит на данное вами же произвольное число. В то же время данный вами множитель разделите в уме на данный делитель, — сколько единиц и частей единицы заключается в полученном частном, столько раз предложите задумавшему число отнять от полученного им частного задуманное число, и вы тотчас же скажете ему остаток, который он получил. Этот остаток всегда равен частному, полученному от деления того числа, которое вы дали, чтобы прибавить к произведению, на данный вами же делитель.

Пример. Пусть кто-нибудь задумает 6; предложите ему умножить его на 4, получится 24; предложите прибавить 15; получится 39. Пусть разделит на 3; получится 13. Деля в уме в то же время 4 на 3, вы получаете 4/3, или $1\frac{1}{3}$. Поэтому предложите задумавшему число отнять от полученного им частного задуманное число да еще одну треть этого числа (т. е. шесть да еще два — всего восемь): $13-8=5$, остается 5. Тот же результат получится, если вы данное вами число 15 разделите на данный вами же делитель 3.

Доказательство. Действия, которые производятся в данном случае над задуманным числом n, можно выразить так: $\frac{na+b}{c}$, а это выражение можно представить в виде $\frac{na}{c}+\frac{b}{c}$. Ясно, что, вычитая $n\frac{a}{c}$, получим остаток $\frac{b}{c}$.

Замечание. Настоящая задача решена здесь в довольно общем виде. Употребляется часто такой частный случай ее. Заставляют удваивать задуманное число, затем прибавлять к результату произвольное, но четное число, затем заставляют полученную сумму делить на 2 и из частного вычитать один раз задуманное число. Остаток, конечно, всегда получится равным половине прибавленного раньше четного числа. Очевидно, однако, что интереснее решать задачу в общем виде. Тем более, что при этом можно практиковаться в дробях. Если же почему-либо нежелательно получать дроби, то всегда возможно подобрать такие числа, чтобы дробей не получалось.

114. КТО ВЫБРАЛ ЧЕТНОЕ ЧИСЛО?

Даны два числа — одно четное, другое нечетное, и предложено двум лицам взять одному четное число, а другому — нечетное, как кто пожелает. Угадать, кто выбрал четное, а кто нечетное.

Вы предлагаете, например, Петру и Ивану два числа (одно четное и другое нечетное), например 10 и 9. Из них один уже без вашего ведома берет четное, а другой — нечетное число. Чтобы угадать, какое кто взял число, вы тоже возьмите два числа, четное и нечетное, например 2 и 3, предложите, чтобы Петр взятое им число умножил про себя на 2, а Иван свое число — на 3, после чего пусть они сложат полученные ими числа и скажут вам полученную сумму. Или же пусть скажут только, *четное* или *нечетное* число они получили после сложения, так как вам нужно знать только это. Если же хотите задачу сделать более непонятной, то выведайте это у них другим путем (предлагая, например, разделить полученную ими сумму на два и сказать, делится или не делится она нацело, и т. д.). Положим, вы узнали, что получилась четная сумма; тогда ясно, что число, умноженное на 3, было четное, т. е. Иван взял четное число 10, а Петр — нечетное 9. Если же после сложений у них получилась нечетная сумма, то ясно, что тот взял нечетное число, кому вы предложили умножить его число на 3.

Доказательство. Число, которое умножается на 2, дает *всегда четное* произведение. Следовательно, сумма обоих произведений четна или нечетна, смотря по тому, будет ли *четное* или *нечетное* другое произведение. Но если число множится на нечетный множитель, то произведение будет четным, если множимое четно, и нечетным, если нечетное множимое. Итак, по сумме обоих произведений можно судить, четно или нечетно то число, которое множится на нечетный множитель.

115. ТА ЖЕ ЗАДАЧА С ДВУМЯ ВЗАИМНО ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Предложите двоим заметить любое из данных двух чисел, но таких, чтобы эти числа были между собой *взаимно простые*, как, например, 9 и 7, и, кроме того, чтобы одно из них было составное (как в данном примере 9). Множителями, на которые вы хотите, чтобы умножили замеченные числа, возьмите также два взаимно простых числа, но таких, чтобы одно из них содержалось целое число раз в одном из чисел, данных на выбор. Например, если взять 3 и 2, то эти числа и взаимно простые и 3 есть множитель 9. Вслед за тем предложите одному умножить выбранное им число на 2, а другому — на 3, сложить результаты и сказать вам или полученную сумму, или же сказать, делится ли эта сумма нацело на тот данный вами множитель, который, в свою очередь, содержится в одном из предложенных вами на выбор чисел. (Например, во взятом нами примере узнать, делится ли число на 3.) Узнав это, сразу можно определить, кто какое число заметил. В самом деле, если полученная сумма делится на 3, это значит, что на 3 умножено число, не делящееся на 3, т. е. 7; наоборот, если полученная сумма не делится на 3, то это значит, что на 3 было умножено число, делящееся на 3, т. е. 9. Точно так же поступают и в тех случаях, когда берутся и предлагаются другие числа, лишь бы они удовлетворяли изложенным выше условиям.

Доказательство. Пусть A и B — взаимно простые числа и два других a и c — тоже взаимно простые числа, причем A кратно числу a. После соответствующих умножений может получиться сумма $Ac+Ba$ или $Aa+Bc$. Ясно, что первая сумма делима на a, вторая же — нет. Следовательно, B умножится или не умножится на a, смотря по тому, делима или неделима на a сумма, полученная задумавшими после соответствующих умножений и сложения.

116. ОТГАДАТЬ НЕСКОЛЬКО ЗАДУМАННЫХ ЧИСЕЛ, ЕСЛИ КАЖДОЕ ИЗ НИХ НЕ ПРЕВЫШАЕТ ДЕСЯТИ

Попросите задумавшего умножить *первое* из задуманных чисел на 2 и к произведению прибавить 5, полученную сумму умножить на 5 и к результату прибавить 10. К полученному числу прибавить *второе* задуманное число и все умножить на 10; к полученному результату прибавить *третье* задуманное число и опять умножить на 10; потом прибавить *четвертое* из задуманных чисел и опять умножить на 10 и т. д. Словом, пусть задумавший несколько чисел, каждое из которых не превышает десяти, постоянно умножает на 10 и прибавляет одно из задуманных чисел, пока не прибавит последнего. Вслед за тем пусть задумавший числа объявит последнюю полученную им сумму; и если задумано только два числа, то, вычтя из этой суммы 35, найдем, что число десятков остатка дает первое задуманное число, а число простых единиц дает второе задуманное число. Если же задумано три числа, то из сказанной вам суммы вычтите 350, и тогда число сотен даст первое задуманное число, число десятков — второе, число простых единиц — третье. Если задумано четыре числа, то из сказанной вам суммы вычтите 3500, и тогда число тысяч остатка даст первое задуманное число, число сотен — второе, число десятков — третье; число простых единиц — четвертое. Ясно, что в случае пяти задуманных чисел нужно из сказанного вам результата вычитать 35 000 и т. д.

П р и м е р. Пусть задуманы 3, 5, 8, 2. Удваивая первое из них, получаем 6; прибавляя 5, находим 11; умножая это число на 5, имеем 55; прибавляя 10, получаем 65; прибавляя второе задуманное число, получаем 70; умноженное на 10, оно дает 700; прибавляя сюда третье задуманное число, получаем 708; умножая на 10, получаем 7080; прибавляя сюда четвертое число, получаем 7082. Если теперь из этого последнего числа вычесть 3500, то получится остаток 3582, который и выражает по порядку цифр задуманные числа: 3, 5, 8, 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задуманные числа будут а, b, c, d, … Над ними производятся следующие действия:

для первых двух чисел:

$$(2a+5)\times 5=10a+25,\ 10a+25+10=10a+35,$$
$$10a+35+b=10a+b+35;$$

для третьего числа:

$$(10a+b+35)\times 10+c = 100a+10b+c+350;$$

для четвертого:

$$(100a+10b+c+350)\times 10+d=1000a+100b+10c+d+3500$$

и т. д.

Отсюда ясно, что, вычитая из результата 35, 350, 3500, смотря по количеству задуманных чисел, мы получим все задуманные числа в виде цифр остатка, считая слева направо.

Замечание. Эту задачу, изложенную в довольно общем виде, можно, очевидно, видоизменять и прилагать ко многим частным случаям.

Так, например, при игре в кости* с помощью этой задачи можно угадать, не глядя, число выброшенных каждой костью очков. И это тем более легко, что число очков каждой кости не превышает шести. Способ угадывания и правила остаются совершенно те же.

X. ИГРЫ С ЧИСЛАМИ И ПРЕДМЕТАМИ

117. ЗАПИСАТЬ ЕДИНИЦУ ТРЕМЯ ПЯТЕРКАМИ

Пользуясь тремя пятерками и какими угодно знаками математических действий, написать выражение, равное единице.

Решение. Если вы никогда не пробовали решать подобные задачи, то вам немало придется подумать, прежде чем вы нападете на одно из правильных решений. Вот некоторые решения предлагаемой задачи:

$$1=\left(\frac{5}{5}\right)^5=\sqrt[5]{\frac{5}{5}}=5^{5-5}.$$

* Кость — это кубик, на каждой из шести граней которого написано по одной цифре от 1 до 6.

118. ЗАПИСАТЬ ДВОЙКУ ТРЕМЯ ПЯТЕРКАМИ

Р е ш е н и е. $2=\frac{5+5}{5}$.

119. ЗАПИСАТЬ ЧЕТЫРЕ ТРЕМЯ ПЯТЕРКАМИ

Р е ш е н и е. $4=5-\frac{5}{5}$.

120. ЗАПИСАТЬ ПЯТЬ ТРЕМЯ ПЯТЕРКАМИ

Р е ш е н и е. $5=5+5-5=5\times\frac{5}{5}$.

121. ЗАПИСАТЬ НУЛЬ ТРЕМЯ ПЯТЕРКАМИ

Р е ш е н и е. $0=5\times(5-5)=\frac{5-5}{5}=\sqrt[5]{5-5}=(5-5)^5$.

122. ЗАПИСАТЬ 31 ПЯТЬЮ ТРОЙКАМИ

Р е ш е н и е. Эта задача сложнее предыдущих. Вот некоторые из ее решений:

$$31=3^3+3+\frac{3}{3},\qquad 31=33-3+\frac{3}{3},\qquad 31=33-\frac{3+3}{3}.$$

123. АВТОБУСНЫЙ БИЛЕТ

В автобусе вам попался билет с номером 524127. Попробуйте, не меняя порядка цифр, расставить между ними знаки математических действий так, чтобы в итоге получилось 100.

Р е ш е н и е. $100=5\times(-2+4)\times(1+2+7)$.

Эта занятная игра может скрасить вам время длительной поездки, если вы попытаетесь получить 100 подобным же образом из номера попавшегося вам билета. Если вы едете не один, то можно устроить маленькое соревнование: кто быстрее получит 100 из цифр своего билета.

124. КТО ПЕРВЫЙ СКАЖЕТ «СТО»?

Двое поочередно говорят произвольные числа, но не превышающие десяти. Эти числа складываются одно за другим, и выигрывает тот, кто первый достигнет *ста*. Сделать так, чтобы всегда первым сказать «сто».

Наперед заданное число есть 100, а числа, которые говорят играющие, не превышают десяти, т. е. можно называть 10 и всякое меньшее число. Итак, если первый скажет, например, «7», а второй «10», получится «17»; затем первый говорит, например, «5», получится «22»; второй говорит «8», получится «30» и т. д. Победителем будет тот, кто первый получит «100».

Решение. Чтобы быть победителем, старайтесь только, чтобы вам пришлось сказать число 89. Ясно, что если вы скажете это число, то, какое бы число (десять или меньше) ни прибавил ваш противник, вы тотчас найдете соответственное число, добавив которое к полученному противником вы получаете сто и выигрываете.

Но, чтобы суметь всегда сказать «89», а потом, значит, и «100», постарайтесь разобраться в следующих очень нетрудных рассуждениях.

Начнем отнимать, сколько возможно, от ста по одиннадцати. Получим ряд таких чисел: 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Или же, если напишем их в порядке возрастания, получим

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Запомнить эти числа очень легко: стоит только взять предельное число, т. е. 10, и прибавить к нему 1 — получится 11. Затем берем это число и все числа, составленные умножением 11 на 2, на 3, на 4, …, на 8, — получим 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88; увеличим каждое из этих чисел единицей и начнем единицей же ряд. Получим опять-таки предыдущий, уже написанный нами ряд чисел:

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Ясно теперь, если вы скажете «1», то, какое бы число (по условию не больше 10) ни сказал другой играющий, он не помешает вам сказать 12; точно так же вы всегда можете сказать 23, а затем 34, 45, 56, 67, 78 и 89.

Когда вы скажете «89», то, какое бы число (не больше 10) ни сказал ваш соперник, вы говорите «*сто*» и выигрываете.

Отсюда видно также, что если оба играющих знают, в чем дело, то выигрывает всегда тот, кто первый скажет «один», т. е. тот, кто начинает игру.

125. ОБОБЩЕНИЕ

Предыдущую задачу можно предложить и в таком общем виде.

Двое говорят поочередно произвольные числа, не превышающие, однако, какого-нибудь условленного предела. Эти числа складываются одно за другим, и выигрывает тот, кто первый достигнет какого-нибудь *заранее назначенного числа*. Сделать так, чтобы всегда первым прийти к этому назначенному числу.

Если вы хорошо усвоили решение предыдущей задачи, то нетрудно видеть, как надо поступать в каждом отдельном случае.

Пусть, например, назначенное число будет 120; предельное, как и выше, равно 10. Тогда, очевидно, нужно иметь в виду числа 109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10, т. е., начиная с 10, все числа, кратные 11, увеличены на 10. Отсюда также видно, что знающий решение этой задачи выигрывает всегда, если он начинает.

Пусть, например, заданное число будет 100, но предельное число есть не 10, а 8. В таком случае нужно иметь в виду числа 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1, т. е., начиная от единицы, все числа, кратные 9, увеличены на единицу. И в данном случае знающий задачу всегда выигрывает, если он начинает.

Но если принять за предельное число, например, 9, то числа, которые нужно иметь в виду, будут 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10. И ясно, что начинающий здесь может проиграть, если другому известен секрет, ибо, какое бы число начинающий ни сказал, он не может помешать другому назвать 10, 20 и т. д. — все числа до 100.

126. СОБРАТЬ В ГРУППЫ ПО 2

Десять спичек положены в один ряд (рис. 117). Требуется распределить их попарно, всего в 5 пар, перекладывая по одной спичке через две (например, первую переложить к четвертой).

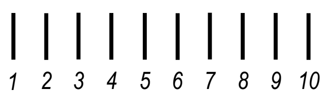


Рис. 117

Р е ш е н и е. Можно перекладывать спички так:

4 к 1, 7 к 3, 5 к 9, 6 к 2, 8 к 10 — или иначе: 7 к 10, 4 к 8, 6 к 2, 1 к 3 и 5 к 9.

127. СОБРАТЬ В ГРУППЫ ПО 3

Пятнадцать спичек расположены в ряд. Требуется собрать их в 5 кучек по 3 спички, перекладывая их по одной и каждый раз перескакивая при этом через 3 спички.

Р е ш е н и е. Обозначим положенные в ряд спички номерами 1, 2, 3, …, 15. Тогда задача решается путем следующих 12 перекладываний: 2 к 6, 1 к 6, 8 к 12, 7 к 12, 9 к 5, 10 к 5, 4 между 5 и 6, 3 между 5 и 6, 11 между

5 и 6, 13 на место с номером 11, 14 на то же место, 15 на то же место.

128. ДЕТСКАЯ ПИРАМИДА

Возьмем 8 деревянных или из толстого картона кружков уменьшающегося диаметра и 3 вертикально укрепленные на подставках палочки (стержня). Кружки снабжены в центре отверстиями, и их накладывают, начиная с наибольшего, на одну из палочек *A*. Это и есть детская пирамида в 8 этажей (рис. 118, вверху).

Требуется эту пирамиду с палочки *A* перенести на палочку *B*, пользуясь третьей палочкой (*I*, *II* и *III* на нашем рисунке) как вспомогательной и соблюдая следующие условия: 1) не переносить за один раз более одного кружка, 2) класть снятый кружок или на ту палочку, которая свободна, или накладывать его на кружок большего диаметра. Надевать на какую-либо из палочек больший кружок поверх меньшего нельзя.

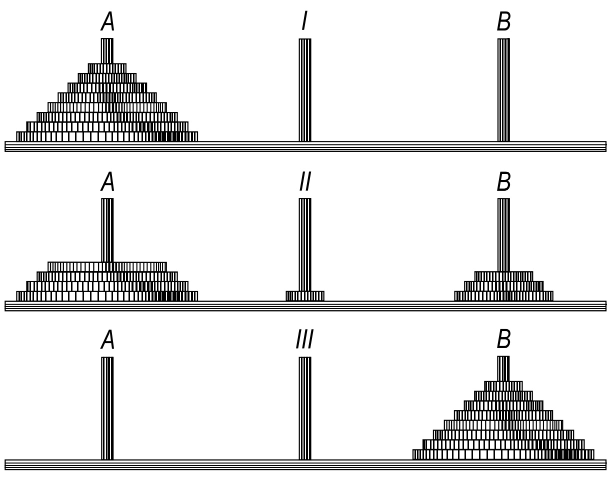


Рис. 118

Р е ш е н и е. Чтобы показать процесс правильного перенесения кружков, обозначим кружки цифрами 1, 2, 3, …, 7, 8, начиная с наименьшего, затем изобразим процесс перенесения таблицей:

	Палочка *A*	*Вспомогательная палочка*	Палочка *B*
До начала	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	—	—
После 1-го перенесения	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1	—
« 2-го «	3, 4, 5, 6, 7, 8	1	2
« 3-го «	3, 4, 5, 6, 7, 8	—	1, 2
« 4-го «	4, 5, 6, 7, 8	3	1, 2
« 5-го «	1, 4, 5, 6, 7, 8	3	2
« 6-го «	1, 4, 5, 6, 7, 8	2, 3	—
« 7-го «	4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3	—
« 8-го «	5, 6, 7, 8	1, 2, 3	4
« 9-го «	5, 6, 7, 8	2, 3	1, 4
« 10-го «	2, 5, 6, 7, 8	3	1, 4
« 11-го «	1, 2, 5, 6, 7, 8	3	4
« 12-го «	1, 2, 5, 6, 7, 8	—	3, 4
« 13-го «	2, 5, 6, 7, 8	1	3, 4
« 14-го «	5, 6, 7, 8	1	2, 3, 4
« 15-го «	5, 6, 7, 8	—	1, 2, 3, 4
………………………………			

Отсюда мы видим, что на палочку *III*, когда она свободна, надеваются только нечетные кружки (1-й, 3-й, 5-й и пр.), а на *B* — только четные. Так что, например, для перенесения четырех верхних кружков нужно было сначала перенести три верхних на вспомогательную палочку — что, как видно из таблицы, потребовало семи отдельных перекладываний, — затем мы перенесли 4-й кружок на третью палочку — еще одно перекладывание — и, наконец, три верхних кружка со второй палочки перенесли на ту же третью поверх 4-го кружка (причем 1-я палочка играла у нас роль вспомогательной), что опять потребовало семи отдельных перекладываний.

Итак, вообще, чтобы при таких условиях перенести колонну из n каких-нибудь кружков, расположенных вертикально в убывающем порядке, нужно сначала перенести колонну из $(n-1)$ верхних кружков на одно из свободных мест, потом основание, т. е. n-й кружок, на другое свободное место и, наконец, на то же место опять всю колонну из $(n-1)$ верхних кружков.

Обозначая число необходимых отдельных перенесений буквою Π со значком, соответствующим числу кружков, имеем, следовательно,

$$\Pi_n = 2\Pi_{n-1} + 1.$$

Понижая значение n до единицы и делая подстановку, легко находим

$$\Pi_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Получаем, следовательно, сумму геометрической прогрессии, которая дает

$$\Pi_n = 2^n - 1.$$

Таким образом, в случае детской пирамиды из 8 кружков нужно сделать 2^8-1, или 255, отдельных перекладываний кружков.

Легенда. Если выше вместо 8 кружков возьмем 64 кружка, то получим задачу, связанную с древнеиндийской легендой. Легенда эта гласит, будто в городе

Бенаресе, под куполом главного храма, в том месте, где находится середина Земли, бог Брама поставил вертикально на бронзовой площадке три алмазные палочки, каждая длиною в локоть и толщиною в корпус пчелы. При сотворении мира на одну из этих палочек были надеты 64 кружка из чистого золота с отверстиями посередине — так, что они образовали род усеченного конуса, так как диаметры их шли в возрастающем порядке, начиная сверху. Жрецы, сменяемые один другим, днем и ночью без устали трудятся над перенесением этой колонны кружков с первой палочки на третью, пользуясь второй как вспомогательной, причем они обязаны соблюдать уже указанные условия, т. е. 1) не переносить за один раз более одного кружка и 2) класть снятый кружок или на свободную в этот момент палочку, или накладывать его на кружок только большего диаметра. Когда, соблюдая все эти условия, жрецы перенесут все 64 кружка с первой палочки на третью, наступит конец мира…

Допустим, что перенос одного кружка продолжается всего одну секунду, тогда на перемещение пирамиды из восьми кружков потребуется 4 минуты с лишком. Что же касается переноса башни из 64 кружков, то на это понадобится

18 446 744 073 709 551 615 сек.

А это значит, ни более и ни менее, как пять с лишним миллиардов веков.

129. ИНТЕРЕСНАЯ ИГРА

Попробуйте со своим товарищем сыграть в следующую игру. Расположите на столе три кучки спичек. Например, в 12, 10 и 7 спичек. Игра заключается в том, чтобы поочередно брать из кучек некоторое, какое вам захочется, количество спичек, но каждый раз только из одной кучки. Можно взять и сразу целую кучку. Выигрывает тот, кто последним возьмет спички. Давайте для примера разыграем партию. Одного игрока обозначим *А*, другого *Б*.

Исходное положение			12,10, 7
После хода		*А*	12,10, 6
»	»	*Б*	12, 7, 6
»	»	*А*	1, 7, 6
»	»	*Б*	1, 5, 6
»	»	*А*	1, 5, 4
»	»	*Б*	1, 3, 4
»	»	*А*	1, 3, 2
»	»	*Б*	1, 2, 2
»	»	*А*	0, 2, 2
»	»	*Б*	0, 1, 2
»	»	*А*	0, 1, 1
»	»	*Б*	0, 0, 1

Последним ходом игрок *А* выигрывает. Вопрос состоит в следующем: может ли *А* играть так, чтобы всегда выигрывать?

Р е ш е н и е. Ответ на вопрос неожиданно оказывается связанным с двоичной системой изображения чисел. Представим каждое из чисел 12, 10, 7 в двоичной системе:

$$\begin{array}{rcr} 12 & — & 1100 \\ 10 & — & 1010 \\ 7 & — & 111 \end{array}$$

В каждом столбце получившейся таблицы, за исключением крайнего правого, стоит по две единицы. Первым ходом игрок *А* делает так, чтобы в каждом столбце стояло по две единицы или ни одной:

$$\begin{array}{rcr} 12 & — & 1100 \\ 10 & — & 1010 \\ 6 & — & 110 \end{array}$$

Своим ходом игрок *Б* нарушает это свойство, а игрок *А* его опять восстанавливает:

$$\begin{array}{rcr} 1 & — & 1 \\ 7 & — & 111 \\ 6 & — & 110 \end{array}$$

Если мы проследим за игрой далее, то увидим, что каждым ответным ходом игрок *А* восстанавливает нарушенное предыдущим ходом *Б* свойство таблицы содержать в каждом столбце четное количество единиц.

Назовем систему из трех целых неотрицательных чисел правильной, если после представления каждого числа в двоичной системе любой столбец содержит четное количество единиц, и неправильной в противном случае.

Легко видеть, что правильная система после любого хода становится неправильной, а из любой неправильной системы одним ходом всегда можно сделать правильную. Для этого давайте выберем самый левый столбец, где стоит нечетное число единиц, и то из чисел, которое в этом столбце имеет единицу, заменим на меньшее так, чтобы получилась правильная система. Это, очевидно, всегда можно сделать.

Если исходная система чисел неправильная (как в нашем примере), то начинающий игру всегда будет в выигрыше. Для этого он должен каждым своим ходом делать правильный набор чисел. Если же исходная система правильная (например, 12, 10, 6 или 13, 11, 6), то ваш противник, если он знает секрет игры, выиграет у вас, как бы вы ни играли. В этом случае делайте произвольные ходы в надежде, что противник ошибется и после его хода система чисел станет неправильной. Тогда перехватывайте инициативу и доводите игру до победного конца.

Можно раскладывать спички на 4, 5 и более кучек.

Вы выиграете, если будете играть так, чтобы после каждого вашего хода в любом столбце таблицы стояло четное число единиц.

XI. ДОМИНО

Историческая справка.

Предполагают, что игра «домино» перешла к нам от индусов или древних греков. Действительно, простота этой игры наводит на мысль, что она придумана еще в очень отдаленные времена, на первых ступенях цивилизации. Что касается названия самой игры, то относительно него существуют разногласия. Филологи ищут его корень в древних языках, но вероятнее всего такое предположение. Игра в домино разрешалась в католических монастырях и религиозных общинах. Но всякое дело там начиналось, как известно, с восхваления «имени божия». И когда игрок выставлял первую кость, он произносил: «*benedicamus Domino*» (бенедикамус Домино), т. е. «восхвалим господа». Или произносилось «*Domino gratias*» (Домино гратиас), т. е. «благодарение господу». Отсюда и получилось в сокращении просто слово «домино».

130. УДИВИТЕЛЬНЫЙ ОТГАДЧИК

Десять косточек домино вниз «лицом» положены в последовательно возрастающем справа налево порядке, т. е. одно, два, три и т. д. до десяти очков. «Отгадчик» объявляет остальным, что он уйдет в другую комнату или отвернется, а они без него могут переместить справа налево сколько угодно косточек, причем единственным условием ставится то, чтобы не изменялось относительное расположение как перемещенных, так и остальных косточек.

По возвращении отгадчик берется узнать не только число перемещенных косточек, но и открыть ту косточку, которая укажет (числом очков), сколько перемещено косточек.

Решение. И действительно, оказывается, что требуемую косточку всегда можно открыть. Но для этого не нужно даже «догадки», а достаточно самого простого, не выходящего из предела первого десятка, арифметического расчета.

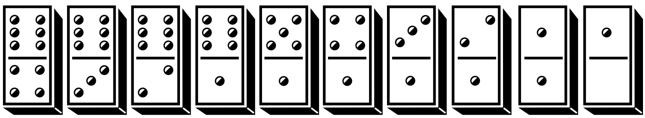


Рис. 119

Разъясним подробно задачу. Для этого перевернем косточки домино «лицом» вверх. Справа налево они первоначально лежат в таком порядке, как указано на рис. 119.

Воображаемый «маг и чародей» оставляет комнату, а тот, кто желает убедиться в «чудесных» его способностях, перемещает несколько косточек справа налево, не изменяя их относительного расположения, а затем двигает все косточки в этом новом порядке так, чтобы весь ряд косточек занимал прежнее место.

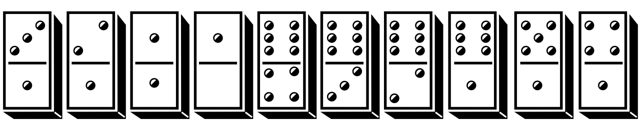


Рис. 120

Пусть, например, перемещено вначале 4 косточки. Тогда новый порядок их будет представлен рис. 120.

Очевидно, что первая косточка слева четверка и показывает число перемещенных косточек. Поэтому явившийся в комнату «угадчик» открывает первую косточку *слева*, кладет ее на стол и говорит: «Перемещено четыре косточки домино». Здесь могут быть для большего интереса пущены в ход маленькие хитрости. Хотя дело в том, чтобы посмотреть эту первую косточку слева, но «угадчик» может сделать вид и внушить собеседникам, что он знает число перемещенных косточек раньше, чем открывает косточку, и что открывание четверки есть только добавочное доказательство его всезнанья.

Дальше дело пойдет еще удивительнее и занимательнее. Косточки остаются в том же порядке, и угадывающий уходит, зная, что последняя косточка слева есть четверка. Сколько бы косточек в его отсутствие ни переместили (опять справа налево и не изменяя порядка), если он придет и откроет пятую косточку ($4+1=5$), считая слева направо, то число очков этой косточки покажет ему всегда число перемещенных косточек. Так, пусть перемещено во второй его выход справа налево три косточки. Тогда получится такой порядок косточек, какой показан на рис. 121, и пятая косточка, считая слева, действительно

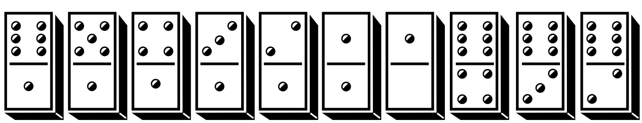


Рис. 121

показывает три очка. Открыв эту тройку и положив ее опять на место, нетрудно уже, не глядя, сообразить, что последняя косточка слева теперь будет семерка. Запомнив это, угадывающий опять уходит в другую комнату, предлагая переместить сколько угодно косточек справа налево, заранее зная, что по приходе он откроет восьмую косточку и число очков этой косточки ему покажет, сколько косточек было перемещено в его отсутствие.

Вообще, если вы знаете число очков последней слева косточки, а это, видим, нетрудно, то к этому числу надо прибавить единицу, и вы получите то место, считая по порядку слева, на котором лежит косточка, указывающая, сколько косточек перемещено. Задача эта, как видим, весьма проста, но и весьма эффектна. Разобраться в решении ее не составляет особого труда, и каждый желающий может это сделать.

131. ВЕРНАЯ ОТГАДКА

Возьмите двадцать пять косточек домино, переверните их «лицом» вниз и положите рядом одну за другой так, чтобы они соприкасались более, длинными сторонами. Вслед за тем объявите, что вы отвернетесь, или даже уйдите в другую комнату, а кто-нибудь пусть с правого конца переместит на левый какое-нибудь число косточек домино (не более, однако, двенадцати). Возвратившись в комнату, вы сразу открываете косточку, число очков которой непременно укажет число перемещенных в ваше отсутствие косточек домино.

Р е ш е н и е. Все дело в том, чтобы, приготовляясь к «угадыванию» и переворачивая косточки домино «лицом» вниз, тринадцать из них расположить в таком последовательном порядке, как на рис. 122.

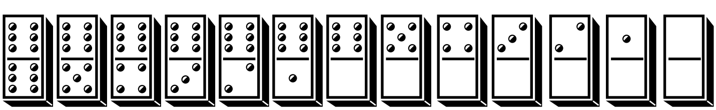


Рис. 122

Ряд этих косточек, как видим, представляет ряд первых двенадцати натуральных чисел да еще нуль:

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0,

и числа эти идут в убывающем порядке. Справа за этим рядом вы помещаете (тоже «лицом» вниз) еще 12 косточек в каком угодно порядке. Если теперь вы уйдете в другую комнату, а кто-нибудь переместит справа налево несколько (менее 12) косточек и приставит их так, чтобы они шли за (6, 6) влево, то, возвратясь, вы откроете *среднюю* (т. е. 13-ю по счету, считая слева) косточку в ряду, и на ней будет как раз столько очков, сколько было перемещено в ваше отсутствие косточек.

Почему так, нетрудно разобраться. Когда вы уходите в другую комнату, то вы знаете, что в середине ряда перевернутых «изнанкой» вверх косточек домино лежит пустая косточка, т. е. (0, 0). Представим теперь, что перемещена в ваше отсутствие с правого конца на левый одна косточка. Какая тогда косточка будет находиться в середине? Очевидно, (0, 1), т. е. единица. А если переместить две косточки, то в середине будет находиться косточка с двумя очками; если переместить три косточки, то в середине будет косточка с тремя очками и т. д. Словом, средняя косточка обязательно верно покажет вам число перемещенных справа на левый конец косточек домино. (Перемещаются, что надо всегда помнить, не более 12 косточек.)

Игру можно продолжать. Опять уйти в другую комнату и попросить кого-либо переместить с правого конца на левый еще несколько косточек. Возвратясь в комнату, вы откроете косточку, указывающую число перемещенных косточек. Она будет теперь вправо от средней и, чтобы найти ее, надо за этой средней отсчитать по порядку ровно столько, сколько косточек было перемещено в предыдущий раз.

132. СУММА ВСЕХ ОЧКОВ ДОМИНО

Сосчитать сумму очков, содержащихся на всех косточках домино.

Р е ш е н и е. Сумма всех очков равна 168. Убедиться в этом можно непосредственным вычислением, перебрав все 28 косточек домино. Но это долго и скучно. Поступим иначе.

Предположим, что у нас имеется два комплекта домино. Разобьем все 56 косточек на 28 пар так, чтобы в каждую пару входили две косточки из разных комплектов, причем такие, что сумма очков на первых и вторых местах у них равна 6. Например: (3, 5) и (3, 1), (6, 4) и (0, 2), (0, 6) и (6, 0), (3, 3) и (3, 3) и т. д. Это, очевидно, можно сделать. Сумма очков в каждой паре равна 12, следовательно, сумма очков в двух комплектах равна $28 \times 12 = 336$. В одном же комплекте будет содержаться вдвое меньше очков, т. е. 168.

Сравните это решение с решением задачи 36.

133. НЕБОЛЬШАЯ ЗАБАВА

Переверните «лицом» вниз все косточки домино без дублей. Одну же из косточек тихонько спрячьте, наблюдая только, чтобы эта косточка не была дублем. Затем предложите кому-нибудь взять любую из лежащих на столе косточек, посмотреть ее и положить на стол вверх лицевой стороной, а вслед за тем пусть он же раскроет и все остальные косточки домино и расположит их вместе с первой открытой косточкой по правилам игры, но так, чтобы не замкнуть игры. Получится некоторое расположение косточек, и *вы сможете заранее предсказать числа очков*, которые получатся на концах этого расположения. Эти числа будут как раз те, которые находятся на квадратиках раньше спрятанной вами косточки домино.

В самом деле, если расположить все косточки домино одну за другой в порядке, требуемом правилами игры, т. е. чтобы последовательные косточки соприкасались квадратиками с одинаковым числом очков, то игра всегда окончится таким же числом очков, каким она началась. Если, скажем, расположение косточек начинается квадратиком с пятью очками, то оно и окончится пятью при условии, конечно, не закрывать игру, пока не будут положены все косточки. Итак, все 21 косточки без дублей можно расположить, соблюдая правила игры, по кругу, и если из этого круга отнять, например, косточку (3, 5), то ясно, что расположение остальных 20 косточек начнется с одной стороны *пятью*, а окончится *тремя*.

Этой небольшой забавой вы можете очень заинтересовать тех, кто не знает, в чем дело, особенно если сделать вид, что вы будто бы производите в уме самые сложные вычисления. Следует также при повторении забавы по возможности ее разнообразить и видоизменять.

134. НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО

Допустим, что играют в домино четверо. Каждый играет «за себя», т. е. на каждого игрока ведется отдельный счет выигранных очков. Перед началом игры каждый игрок имеет по семи косточек. При этом могут получаться такие интересные расположения косточек, при которых первый игрок *обязательно выигрывает*, в то время как второй и третий игроки не смогут положить ни одной косточки. Пусть, например, у первого игрока будут четыре первых нуля и три последних единицы, т. е. такие косточки:

(0, 0) (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

а у четвертого игрока пусть будут остальные единицы и нули, т. е. косточки

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6) и еще какая-либо косточка. Остальные косточки домино поделены между вторым и третьим игроками. В таком случае первый игрок выигрывает после того, как будут положены все 13 указанных выше косточек домино, а второй и третий игроки не смогут поставить ни одной из своих.

В самом деле, первый игрок начинает игру и ставит (0, 0). Второй и третий досадуют, ибо у них нет подходящей косточки. Тогда четвертый игрок может положить любую из трех косточек (0, 4), (0, 5) или (0, 6). Но первый приложит в ответ (4, 1), (5, 1) или (6, 1). Второй и третий опять не смогут ничего положить, а четвертый поставит (1, 1), или (1, 2), или (1, 3), на что первый может ответить (1, 0), (2, 0), (3, 0) и т. д. Таким образом, он положит все свои косточки, в то время как у второго и третьего игроков останутся все их косточки, а у четвертого — одна. Сколько же выигрывает первый? Сумма очков в положенных 13 косточках равна, как легко видеть, 48, а число очков всей игры есть 168. Значит, первый игрок выигрывает $158-48=120$ очков в одну игру. Это *наибольшее возможное число*.

Можно составить и другие партии, подобные предыдущей. Для этого стоит только нули и единицы заменить соответственно косточками с иным количеством очков: 2, 3, 4, 5 или 6. Число подобных партии, следовательно, равно числу всех простых сочетаний из семи элементов по 2, т. е. равно 21. Ясно, что вероятность получить такую партию *случайно* весьма мала. Кроме того, все остальные партии, за исключением приведенной выше, дадут меньшее, чем 120, число выигранных очков.

135. КВАДРАТ ИЗ 8 КОСТОЧЕК

Можно ли из 8 косточек домино сложить квадрат такой, что любая проведенная через него прямая пересекает хотя бы одну косточку? Квадрат, изображенный на рис. 123, не годится, так как прямая *AB* не пересекает ни одной косточки.

Р е ш е н и е. Предположим, что такой квадрат сложить можно. Проведем параллельно основанию квадрата три прямые, делящие боковые стороны квадрата на четыре равные части. По условию каждая из проведенных прямых

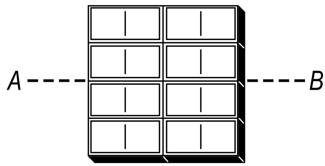


Рис. 123

пересечет хотя бы одну косточку домино. Но над любой из прямых лежит четное число (4, 8 или 12) маленьких квадратов, равных половине косточки. Поэтому каждая прямая пересекает четное число косточек и, значит, не меньше двух. Таким образом, проведенные прямые пересекают не менее шести косточек. Если теперь аналогичным образом провести три прямые, параллельные боковым сторонам, то и они должны пересечь не менее шести косточек. Поскольку ни одна косточка не может пересекаться двумя прямыми, то в нашем квадрате должны присутствовать по крайней мере 12 косточек, что невозможно.

136. КВАДРАТ ИЗ 18 КОСТОЧЕК

Можно ли из 18 косточек домино сложить квадрат, удовлетворяющий условию предыдущей задачи?

Р е ш е н и е. Такой квадрат сложить нельзя. Показать это можно точно так же, как и в предыдущей задаче. Необходимо провести по пяти прямых, параллельных сторонам квадрата.

137. ПРЯМОУГОЛЬНИК ИЗ 15 КОСТОЧЕК

Можно ли из 15 косточек домино сложить прямоугольник, удовлетворяющий условию задачи 135?

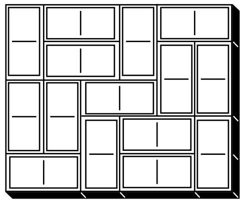


Рис. 124

Р е ш е н и е. Прямоугольник сложить можно. Одно из решений приведено на рис. 124.

XII. ШАШКИ

138. ПЕРЕСТАВИТЬ ШАШКИ

Четыре белых шашки и четыре черных расположены так, как показано на рис. 125. Требуется переставить белые шашки на клетки с номерами 1, 2, 3, 4, а черные — на клетки с номерами 6, 7, 8, 9 с соблюдением условий:

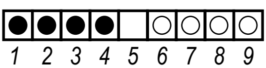


Рис. 125

1) каждая шашка может перескочить на ближайшую клетку или через одну клетку, но не дальше;

2) никакая шашка не должна возвращаться на клетку, где она уже побывала;

3) в каждой клетке не должно быть более одной шашки;

4) начинать с белой шашки.

Р е ш е н и е. Задача решается в 24 хода следующими перемещениями:

6 в 5	2 в 4	4 в 6
4 в 6	1 в 2	2 в 4
3 в 4	3 в 1	3 в 2
5 в 3	5 в 3	5 в 3
7 в 5	7 в 5	7 в 5
8 в 7	9 в 7	6 в 7
6 в 8	8 в 9	4 в 6
4 в 6	6 в 8	5 в 4

139. ЧЕТЫРЕ ПАРЫ

Взять 4 белых и 4 черных шашки и положить в ряд в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д. Можно пользоваться свободным местом только для двух шашек, и можно на это свободное место перемещать только две рядом лежащие шашки, не меняя порядка, в котором они лежат. Требуется в *четыре* перемещения шашек попарно переместить их так, чтобы оказались подряд четыре черных и затем четыре белых.

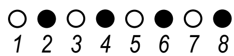


Рис. 126

Р е ш е н и е. Исходное положение шашек показано на рис. 126.

Первое перемещение. Слева имеем два свободных места, перекладываем туда 6-ю и 7-ю шашки. Получается расположение, как на рис. 127.

Второе перемещение. 3-ю и 4-ю шашки перекладываем на освободившиеся места и получаем рис. 128.

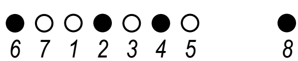


Рис. 127

Рис. 128

Третье перемещение. 7-ю и 1-ю шашки перекладываем на свободные места, получаем расположение, как на рис. 129.

Четвертое перемещение. Наконец, перекладываем на свободные места 4-ю и 8-ю шашки и получаем требуемое расположение: идут подряд четыре черных и четыре белых шашки (рис. 130).

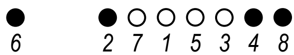


Рис. 129

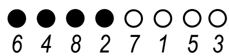


Рис. 130

Из этого последнего расположения шашек, наоборот, можно перейти к исходному также четырьмя перемещениями. Решите эту обратную задачу. Теперь это нетрудно.

140. ПЯТЬ ПАР

Кладут в ряд пять белых и пять черных шашек в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д. Требуется, пользуясь двумя свободными местами и перемещая на них по две соседние шашки без изменения их взаимного положения, в *пять* перемещений расположить их так, чтобы подряд были расположены сначала черные, а затем белые шашки.

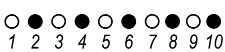


Рис. 131

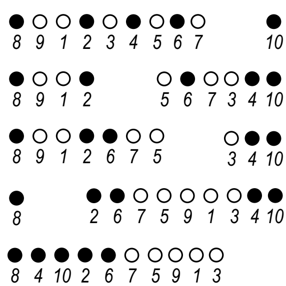


Рис. 132

Решение. Первоначальное расположение шашек показано на рис. 131. На рис. 132 показаны последовательные перемещения шашек:

1) перемещаются на свободные места 8-я и 9-я шашки;

2) перемещаются на свободные места 3-я и 4-я шашки;

3) перемещаются на свободные места 6-я и 7-я шашки;

4) перемещаются на свободные места 9-я и 1-я шашки;

5) наконец, перемещаются на свободные места 4-я и 10-я шашки.

141. ШЕСТЬ ПАР

Положены в ряд в переменном порядке шесть белых и шесть черных шашек: белая, черная, белая, черная и т. д. Пользуясь двумя свободными местами, требуется, передвигая каждый раз только по две соседние шашки без изменения их взаимного положения, в *шесть* перемещений расположить сначала все черные, а затем все белые шашки.

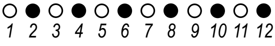


Рис. 133

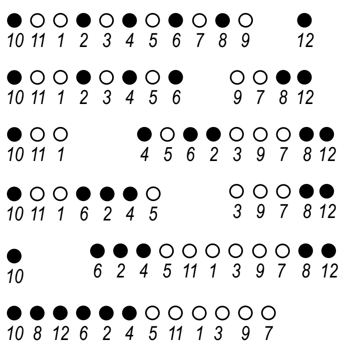


Рис. 134

Решение. Первоначальное расположение показано на рис. 133. Последовательные перемещения показаны на рис. 134.

142. СЕМЬ ПАР

Кладут в ряд 7 белых и 7 черных шашек в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д.

○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ●
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Рис. 135

Пользуясь свободным местом для двух шашек, требуется, передвигая каждый раз только по две соседних шашки без изменения их взаимного положения, в *семь* перемещений расположить сначала все черные, а затем все белые шашки.

Решение. Первоначальное расположение показано на рис. 135. Шесть последовательных перемещений показаны на рис. 136. Нетрудно догадаться, как сделать седьмое и последнее перемещение.

● ○ ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○ ● ○   ●
12 13 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11   14

● ○ ○ ● ○ ●   ○ ● ○ ● ○ ○ ● ●
12 13 1 2 3 4   7 8 9 10 11 5 6 14

● ○ ○ ● ○ ● ● ○ ○   ● ○ ○ ● ●
12 13 1 2 3 4 8 9 7   10 11 5 6 14

● ○ ○ ●   ● ○ ○ ○ ● ● ○ ○ ● ●
12 13 1 2   8 9 7 3 4 10 11 5 6 14

● ○ ○ ● ● ● ● ○ ○ ○   ○ ○ ● ●
12 13 1 2 4 10 8 9 7 3   11 5 6 14

●   ● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ● ●
12   2 4 10 8 9 7 3 13 1 11 5 6 14

Рис. 136

143. ПЯТЬ ЛИНИЙ, 10 ШАШЕК

Начертите на бумаге пять прямых линий и разложите на них 10 шашек так, чтобы на каждой линии лежало по 4 шашки.

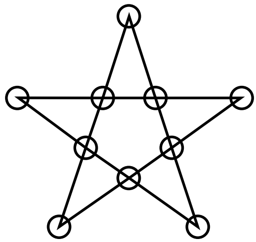


Рис. 137

Р е ш е н и е. Рис. 137 показывает, как решается задача.

144. ИНТЕРЕСНАЯ РАССТАНОВКА

Расставить в круг или в ряд 12 черных и 12 белых шашек так, чтобы при отсчитывании, начиная с первой шашки, выбрасывать из круга или ряда каждую седьмую шашку и чтобы выброшенными оказались все белые шашки, а черные остались на своих местах.

Р е ш е н и е. Для решения задачи шашки нужно поставить так, как показано на рис. 138.

● ● ● ○ ○ ● ○ ● ○ ○ ● ○ ● ○ ○ ● ● ● ● ○ ○ ○ ● ○

Рис. 138

Как же найти это решение? Поставим в ряд 24 спички (рис. 139).

Рис. 139

Считая от 1 до 7, находим, что в первый раз придется выбросить 7-ю, 14-ю и 21-ю спички. Отбрасываем их и опять начинаем считать от 1 до 7; сначала отсчитаем три спички за 21-й, а затем возвращаемся к началу ряда, который содержит теперь только 21 спичку. Из него придется на этот раз выбросить 4-ю, 12-ю и 20-ю спички. Повторяя этот процесс, на следующем шаге мы выбросим 5-ю, 15-ю, 24-ю спички, затем 10-ю, 22-ю и, наконец, 9-ю спичку. Останется 12 спичек. Если теперь на места оставшихся спичек поставить черные шашки, а на места выброшенных белые, то получим требуемое расположение (рис. 138).

XIII. ШАХМАТЫ

По поводу 20-значного числа, приведенного в задаче 128, существует другая легенда, тоже индусского происхождения, которую рассказывает арабский писатель Асафад.

Брамин Сесса, сын Дагера, придумал игру в шахматы, где король, хотя и самая важная фигура, не может ступить шагу без помощи и защиты своих подданных пешек и других фигур. Изобрел он эту игру в забаву своему монарху и повелителю Индии, Шерану. Царь Шеран, восхищенный выдумкой брамина, сказал, что даст *ему все, что только брамин захочет*.

— В таком случае, — сказал Сесса, — прикажи дать мне столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить зерно, на вторую 2, на третью 4, на четвертую 8 и т. д., все удваивая, пока не дойдут до 64-й клетки.

Повелитель Индии не смог этого сделать. Число требуемых зерен выражалось двадцатизначным числом. Чтобы удовлетворить «скромное» желание брамина, нужно было бы восемь раз засеять всю поверхность земного шара и восемь раз собрать жатву. Тогда бы только получилось нужное для Сессы количество зерен.

Обещать «все, что хочешь», легко, но трудно исполнить!

145. ЧЕТЫРЕ КОНЯ

На шахматной доске стоят 4 коня (рис. 140). Требуется разделить доску на 4 одинаковые по форме части, на каждой из которых стоял бы в точности один конь.

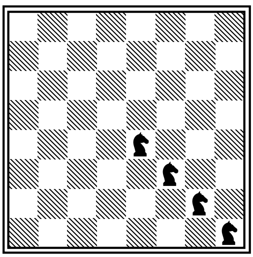


Рис. 140

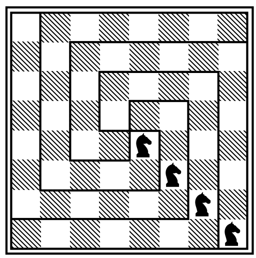


Рис. 141

Р е ш е н и е. Решение приведено на рис. 141.

146. ПЕШКА И КОНЬ

Поставим на шахматную доску одну пешку. Может ли конь, помещенный на одну из свободных клеток, обойти все остальные клетки и вернуться на исходную, побывав на каждом поле только один раз?

Р е ш е н и е. Для того чтобы конь обошел все свободные 63 клетки, он должен сделать 63 хода. Заметим, что при каждом ходе конь меняет цвет поля, на котором он находился. Так что после хода с номером 63 он будет находиться на поле, цвет которого отличен от цвета исходного поля. Но по условию после этого хода конь должен вернуться на исходную клетку. Полученное противоречие доказывает, что конь не может совершить требуемое путешествие.

Точно так же можно рассуждать, если на доске стоит любое нечетное число фигур.

147. ДВЕ ПЕШКИ И КОНЬ

Поставим две пешки в противоположные углы шахматной доски. Может ли конь обойти оставшуюся часть доски так, как это требуется в предыдущей задаче?

Решение. Предположим, что маршрут коня, отвечающий условию задачи, существует. Перенумеруем все 62 свободных поля шахматной доски следующим образом. Исходному полю присвоим номер 1. А все оставшиеся поля будем нумеровать 2, 3, …, 62 в том порядке, как их проходит конь. Ввиду того, что конь при каждом ходе меняет цвет поля, все поля с нечетными номерами будут иметь один цвет и точно так же одного цвета будут все поля с четными номерами. Следовательно, свободная часть доски состоит из 31 черного и 31 белого поля. Но это неверно, так как поля, занятые пешками, имеют один цвет. Требуемый маршрут не существует.

148. КОНЬ

Может ли конь обойти 16 центральных полей шахматной доски, побывав на каждом поле по одному разу?

Решение. Расставим в клетках центрального квадрата буквы a, b, c, d, e, f и цифру 0 так, как это показано на рис. 142. Выпишем теперь их последовательно в порядке прохождения полей конем. Получим цепочку из 16 знаков. С любого из полей, обозначенных буквами, конь может перейти на поле, обозначенное другой буквой, только через поле, где стоит 0. Поэтому в последовательности между любыми двумя буквами разного наименования обязательно встретится 0. Заменим теперь каждую группу рядом стоящих одинаковых букв одной буквой того же наименования. После этого в последовательности останется по крайней мере 6 букв и эти буквы должны быть отделены друг от друга нулями. Ясно, что имеющихся у нас четырех нулей для этого недостаточно. Следовательно, обход невозможен.

a	*f*	*e*	*b*
e	0	0	*f*
f	0	0	*e*
d	*e*	*f*	*c*

Рис. 142

149. ЖУКИ

Представьте себе, что вам удалось поймать 25 жуков и рассадить их по одному на каждой клетке куска шахматной доски размером 5×5 (рис. 143). Давайте предположим теперь, что каждый жук переполз на соседнюю по горизонтали или вертикали клетку этого куска доски.Как вы думаете, останутся ли при этом пустые клетки?

Р е ш е н и е. Как бы жуки ни переползали, всегда останется пустая клетка. Действительно, назовем черными тех жуков, которые сначала сидели на черных клетках, а остальных назовем белыми. После того, как каждый жук переполз на соседнюю клетку, все черные жуки оказались на белых клетках. Мы имеем 13 черных жуков и только 12 белых клеток. Значит, на некоторой белой клетке встретятся по крайней мере два жука. Но тогда одна клетка доски останется пустой (ведь число клеток равно числу жуков).

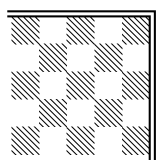


Рис. 143

Точно такой же ответ будет в случае любой квадратной доски с нечетным числом клеток. Подтвердить это можно аналогичным рассуждением.

150. ЖУКИ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Каков будет ответ на вопрос предыдущей задачи для всей шахматной доски размером 8×8?

Р е ш е н и е. Жуки могут переползти на соседние поля так, что все клетки останутся занятыми. Чтобы показать это, давайте разрежем шахматную доску на кольца (рис. 144). И пусть каждый жук переползет по своему

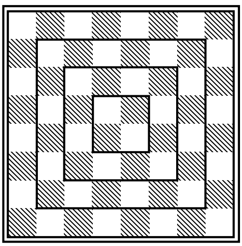


Рис. 144

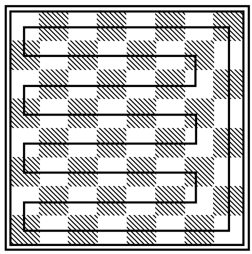


Рис. 145

кольцу на соседнюю клетку, двигаясь по направлению движения часовой стрелки. Очевидно, при этом каждая клетка останется занятой.

151. ЗАМКНУТЫЙ ПУТЬ ЖУКА

Может ли жук, помещенный на некоторую клетку шахматной доски, переползая на соседние клетки по горизонтали или вертикали, обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав при этом на каждой клетке только один раз?

Р е ш е н и е. На рис. 145 показана замкнутая линия, проходящая через каждую клетку доски. Если жук будет ползти по этой линии в одном направлении, то он обойдет доску так, как это требуется условием задачи.

152. ПЕШКА И ДОМИНО

Предположим, что у нас имеется шахматная доска и 32 косточки домино, каждая величиной в две клетки доски. Поставим на какую-нибудь клетку доски пешку. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть костями домино так, чтобы ни одна кость не вылезала за пределы доски и кости не налегали друг на друга?

Решение. Если бы это можно было сделать, то покрытым оказалось бы четное число клеток: ведь каждая кость домино покрывает в точности две клетки. Но свободная часть доски состоит из 63 клеток. Ответ: невозможно.

153. ДВЕ ПЕШКИ И ДОМИНО

Поставим две пешки на противоположные угловые поля доски. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть костями домино так, как это требовалось в предыдущей задаче?

Решение. Каждая положенная на доску кость домино покрывает одно черное и одно белое поле. Поэтому, если какая-то часть доски покрыта костями домино, то она состоит из одинакового числа черных и белых полей. Но пешки, поставленные на доску, заняли два поля одного цвета; значит, в оставшейся части доски будет разное число черных и белых клеток (во всей доске 32 черных и 32 белых поля). Значит, ее нельзя покрыть костями домино.

Из приведенного рассуждения видно, что если мы поставим две пешки на любые поля одного цвета, то оставшаяся часть доски не может быть покрыта костями домино.

154. ОПЯТЬ ДВЕ ПЕШКИ И ДОМИНО

Поставим две пешки на поля разного цвета. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть костями домино?

Решение. Рассмотрим замкнутую линию на рис. 145. Если пешки стоят на соседних полях, то разорванная линия будет состоять из одного куска, проходящего через 62 поля, при этом цвета полей чередуются. Легко видеть, что если мы начнем класть кости домино вдоль этой линии, то закроем всю оставшуюся часть доски. Если пешки не стоят на соседних полях, то линия разорвется на два непересекающихся куска. Каждый при этом будет проходить через четное число клеток (пешки стоят на полях разных цветов). Значит, каждый кусок линии может быть закрыт костями домино. Ответ: как бы мы ни расставляли две пешки на полях разных цветов, оставшуюся часть доски всегда можно покрыть костями домино.

155. ШАХМАТНЫЕ ФИГУРЫ И ДОМИНО

Сколько шахматных фигур нужно поставить на доску для того, чтобы на ней нельзя было разместить ни одной кости домино?

Решение. Если мы разместим 32 шахматные фигуры на белых полях, то все белые поля будут заняты и кость домино положить будет негде (как мы уже условились, кость домино покрывает два соседних поля, одно из них белое, другое черное). Покажем, что, как бы мы ни размещали на доске 31 фигуру, всегда найдется место для домино. Покроем шахматную доску 32 костями домино (например, вдоль линии на рис. 145). Как бы мы ни расставляли теперь на доске 31 фигуру, по крайней мере на одной кости фигур стоять не будет. Этим все и доказано.

156. О ВОСЬМИ КОРОЛЕВАХ

На шахматной доске, состоящей из 64 клеток, расставить восемь королев так, чтобы ни одна из них не могла бить другую. Другими словами: на восьми клетках шахматной доски поставить восемь королев так, чтобы каждые две из них не были расположены ни на одной линии, параллельной какому-либо краю, и ни на одной из прямых, параллельных какой-нибудь диагонали доски.

Этой задачей занимался знаменитый немецкий математик Гаусс.

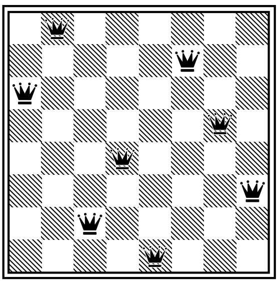


Рис. 146

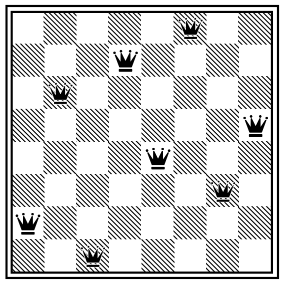


Рис. 147

Покажем некоторые решения этой задачи и приведем затем таблицу всех 92 ее решений.

На прилагаемом рис. 146 содержится одно из решений.

Обозначим это решение восемью цифрами (68241753), где каждая цифра означает высоту королевы в каждой колонне доски, т. е. 6 показывает, что королева находится в первой колонне на шестой клетке, считая снизу, 8 — что королева находится во второй колонне на восьмой клетке, считая снизу, и т. д. Мы и впредь вертикальные ряды клеток будем называть *колоннами*, а горизонтальные — *линиями*. Линии мы тоже будем обозначать числами от 1 до 8 и считать их снизу вверх.

Таким образом, записанное нами выше первое решение с помощью одного ряда чисел было бы правильнее записать так:

(*A*)	Линии	6 8 2 4 1 7 5 3
	Колонны . . .	1 2 3 4 5 6 7 8

Если мы повернем доску на четверть окружности в направлении, обратном движению часовой стрелки, то из первого решения получим ему *соответственное*, которое представлено у нас на рис. 147.

Чтобы получить это соответственное решение численно из первого, достаточно расположить колонки таблички (*A*) так, чтобы цифры первой строки шли в убывающем порядке:

(*B*)	8 7 6 5 4 3 2 1
	2 6 1 7 4 8 3 5

Цифры второй строки полученной таким способом таблички образуют соответственное первому решение (*B*) (2 6 1 7 4 8 3 5).

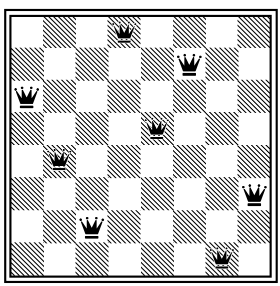


Рис. 148

Следующие два рисунка (рис. 148 и 149) представляют второе и третье решения, соответственные рис. 146.

Их можно получить, заставляя шахматную доску вращаться еще на четверть и еще на четверть окружности в направлении, обратном движению часовой стрелки. Можно вывести также, подобно предыдущему, численное обозначение положения III (рис. 148) из положения II (рис. 147), а положения IV (рис. 149) из положения III. Но можно и прямо положение III получить из I, а положение IV — из II.

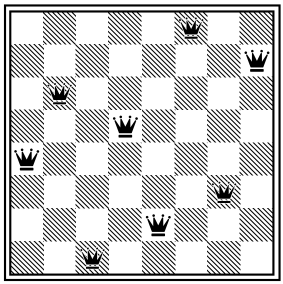


Рис. 149

Для этого поступаем так. Решения рис. 146 и 147 обозначены у нас рядами цифр:

(6 8 2 4 1 7 5 3) и (2 6 1 7 4 8 3 5).

Напишем эти цифры в обратном порядке:

(3 5 7 1 4 2 8 6) и (5 3 8 4 7 1 6 2),

и вычтем каждую из этих цифр из 9, получим

(6 4 2 8 5 7 1 3) и (4 6 1 5 2 8 2 7).

Это и будут численные обозначения решений на рис. 148 и 149.

Таким образом, в общем случае некоторые решения задачи о королевах дают место еще трем *соответственным* решениям.

На рис. 150 дано другое решение задачи. Особенность его заключается в том, что из него получается только одно соответственное решение (рис. 151). В самом деле, если повернуть шахматную доску на полуокружность, то получаем опять то же расположение. Ряд цифр (4 6 8 2 7 1 3 5), изображающий это решение, отличается тем, что, сложенный с рядом, состоящим из тех же цифр, но написанным в обратном порядке, дает (9 9 9 9 9 9 9 9).

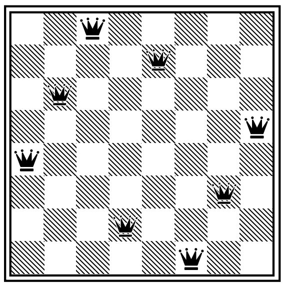


Рис. 150

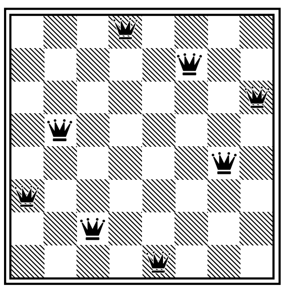


Рис. 151

Возьмем какое-нибудь решение задачи о восьми королевах и перевернем на рисунке порядок колонн, т. е. 1-ю сделаем 8-й, 2-ю сделаем 7-й и т. д. Или, что сводится к тому же, напишем числовое обозначение решения в обратном порядке — мы получим *решение, обратное* данному. Легко убедиться, что это решение отличается от всякого из соответственных решений.

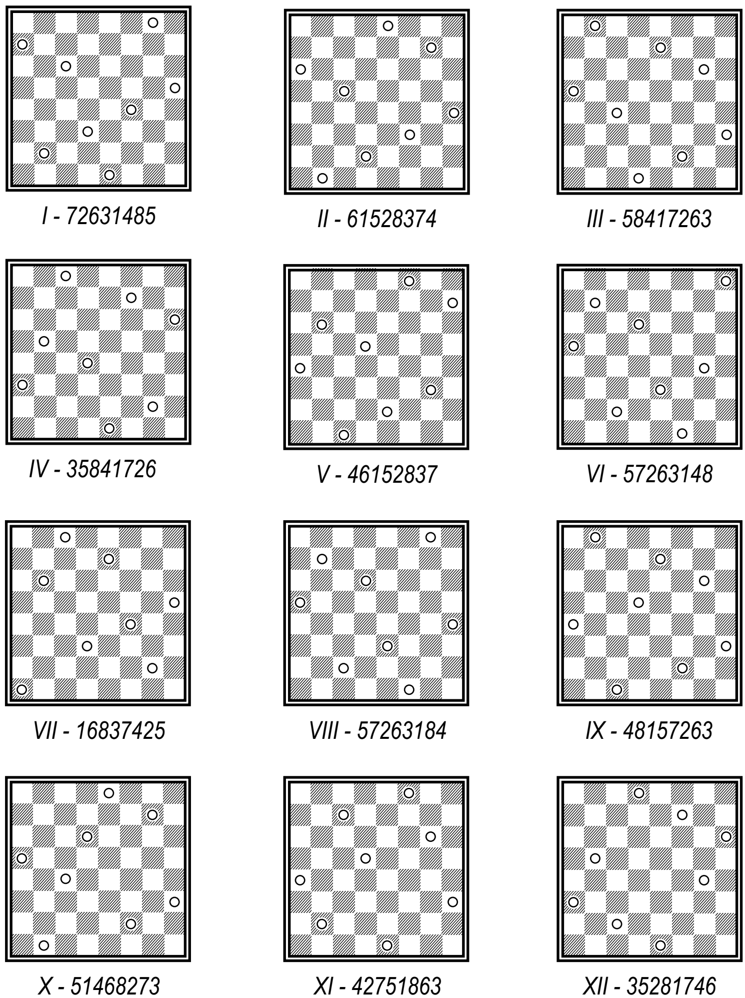


Рис. 152

Опуская способы отыскания самых простейших решений задачи, дадим эти решения на рис. 152. Каждое из решений I–XI дает, как выше объяснено, 4 соответственных и 4 обратных, т. е. всего 8 решений, последнее же, XII, дает только 4 решения. Всего, следовательно, получается 92 решения, которые исчерпывают все решения задачи. Вот таблица всех этих решений:

Таблица всех решений задачи о восьми королевах

1	1586 3724	24	3681 5724	47	5146 8273	70	6318 5247
2	1683 7425	25	3682 4175	48	5184 2736	71	6357 1428
3	1746 8253	26	3728 5146	49	5186 3724	72	6358 1427
4	1758 2463	27	3728 6415	50	5246 8317	73	6372 4815
5	2468 3175	28	3847 1625	51	5247 3861	74	6372 8514
6	2571 3864	29	4158 2736	52	5261 7483	75	6374 1825
7	2574 1863	30	4158 6372	53	5281 4736	76	6415 8273
8	2617 4835	31	4258 6137	54	5316 8247	77	6428 5713
9	2683 1475	32	4273 6815	55	5317 2864	78	6471 3528
10	2736 8514	33	4273 6851	56	5384 7162	79	6471 8253
11	2758 1463	34	4275 1863	57	5713 8642	80	6824 1753
12	2861 3574	35	4285 7136	58	5714 2863	81	7138 6425
13	3175 8246	36	4286 1357	59	5724 8136	82	7241 8536
14	3528 1746	37	4615 2837	60	5726 3148	83	7263 1485
15	3528 6471	38	4682 7135	61	5726 3184	84	7316 8524
16	3571 4286	39	4683 1752	62	5741 3862	85	7382 5164
17	3584 1726	40	4718 5263	63	5841 3627	86	7425 8136
18	3625 8174	41	4738 2516	64	5841 7263	87	7428 6135
19	3627 1485	42	4752 6138	65	6152 8374	88	7531 6824
20	3627 5184	43	4753 1682	66	6271 3584	89	8241 7536
21	3641 8572	44	4813 6275	67	6271 4853	90	8253 1746
22	3642 8571	45	4815 7263	68	6317 5824	91	8316 2574
23	3681 4752	46	4853 1726	69	6318 4275	92	8413 6275

Таблицу всех решений можно построить самому, пользуясь следующим весьма простым систематическим приемом. Помещают сначала одну королеву на самую низкую клетку первой колонны слева, затем ставят другую королеву во второй колонне опять на самую низкую по возможности клетку и т. д., всегда стремясь поместить в следующей колонне королеву настолько низко, насколько это позволяют королевы, стоящие слева. Когда наступит такой момент, что в колонне нельзя поместить королеву, подымают королеву в предыдущей колонне на одну, две, три, … клетки и продолжают размещать остальных королев, руководствуясь всегда раз принятым правилом: поднимать поставленных королев выше только в том случае, если справа нет совсем места для следующей королевы.

Всякий раз, когда решение найдено, его записывают, и, таким образом, решения будут следовать одно за другим тоже в последовательном числовом порядке. Таблицу, полученную таким путем, можно проверять, образуя соответственные и обратные решения, которые можно вывести из первого и т. д.

157. О ХОДЕ ШАХМАТНОГО КОНЯ

Мы встречались уже в этом разделе с вопросом, может ли конь обойти часть шахматной доски, побывав при этом на каждом поле только один раз.

Вот еще одна старинная задача о ходе шахматного коня:

Требуется обойти конем все 64 клетки шахматной доски так, чтобы на каждой клетке конь был только один раз и затем возвратился бы в клетку, из которой вышел.

Задачей этой занимался Эйлер и в письме к Гольдбаху (26 апреля 1757 года) дал одно из решений ее. Вот что, между прочим, пишет он в этом интересном письме:

«…Воспоминание о предложенной когда-то мне задаче послужило для меня недавно поводом к некоторым тонким изысканиям, в которых обыкновенный анализ, как кажется, не имеет никакого применения. Вопрос состоит в следующем. Требуется обойти шахматным конем все 64 клетки шахматной доски так, чтобы на каждой клетке он побывал только один раз. С этой целью все места, которые занимал конь при своих последовательных ходах, закрывались марками. Но к этому присоединилось еще требование, чтобы начало хода делалось с данного места.

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Рис. 153

Это последнее условие казалось мне очень затрудняющим вопрос, так как я скоро нашел некоторые пути, при которых, однако, выбор начала для меня свободен. Я утверждаю, однако, что если полный обход коня будет возвратный, т. е. если конь из последнего места опять может перейти на первое, то устраняется и это затруднение. После некоторых изысканий по этому поводу я нашел, наконец, ясный способ находить сколько угодно подобных решей (число их, однако, не бесконечно), не делая проб. Подобное решение представлено на рисунке (рис. 153).

Конь ходит в порядке, указанном числами. Так как из последнего места 64 он может перейти на 1, то этот полный ход есть возвратный».

Таково решение задачи о ходе шахматного коня, данное Эйлером. В письме не указаны ни приемы, ни путь, которыми знаменитый ученый пришел к своему открытию. Сейчас мы укажем на методы иных, более симметричных и методичных решений.

I

Разделим шахматную доску на две части: *внутреннюю*, состоящую из 16 клеток, и *краевую* (рис. 154).

a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*a'*	*b'*	*c'*	*d'*	*d*	*c*
d	*c*	*c'*	*d'*	*a'*	*b'*	*b*	*a*
a	*b*	*b'*	*a'*	*d'*	*c'*	*c*	*d*
c	*d*	*d'*	*c'*	*b'*	*a'*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*

Рис. 154

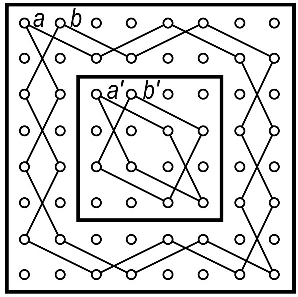


Рис. 155

Каждые 12 клеток краевой доски, обозначенные у нас одинаковыми буквами, дают один из частных зигзагообразных путей шахматного коня вокруг доски; точно так же четыре одноименные клетки внутренней части доски дают частный замкнутый путь шахматного коня в виде квадрата или в виде ромба. Рис. 155 представляет два зигзагообразных частных пути коня на *краевой* части доски. Эти пути обозначим буквами a и b. Там же начерчены и два пути на *внутренней* части доски. Эти пути назовем a' и b' соответственно обозначениям на рис. 154.

Закончив какой-нибудь частный круговой путь по краевой части доски, конь может перескочить на любой из трех путей другого наименования на *внутренней* части доски. Нетрудно (стоит лишь взять в руки шахматную доску и коня) найти, и притом различными способами, четыре пути из 16 клеток — таких, например, как

$$ab',\ bc',\ cd',\ da'.$$

В самом деле, всмотритесь в рис. 154 и 155 или поставьте перед собой шахматную доску, и вы увидите, что для получения частного пути коня в 16 клеток надо только *краевой* частный круговой путь из 12 клеток соединить с *внутренним* путем, но *другого* наименования, прямой чертой, уничтожая при этом в каждом из частных круговых путей замыкающую линию. Так получим четыре частных круговых пути по 16 клеток. Эти четыре частных пути по 16 клеток опять можно соединить различным образом и получить полный путь шахматного коня из 64 клеток.

Итак, ставят коня на какую-нибудь клетку, например, *краевой* части доски и описывают по ней путь из 12 клеток; вслед за тем конь перепрыгивает на клетку одного из трех (*не одноименных*) *внутренних* путей, проходит этот путь в любом направлении и перескакивает опять на краевую часть, где снова делает следующий частный зигзагообразный путь из 12 клеток, вновь перескакивает на один из внутренних, не одноименных с предыдущим, путей, описывает его, переходит опять на новый краевой путь и т. д., пока не обойдет все 64 клетки.

Способ решения задачи настолько прост и легок, что не нуждается в более подробных разъяснениях и указаниях.

II

Можно эту же задачу решить и другим, не менее легким, приемом. Здесь для удобства доска делится на 4 части по 16 клеток в каждой двумя серединными линиями (рис. 156). 16 клеток каждой четверти, обозначенных одинаковыми буквами, можно соединить посредством сторон двух квадратов и двух ромбов, не имеющих ни одной общей вершины (рис. 157). Соединяя, в свою очередь, одноименные квадраты и ромбы всех четвертей доски, можно получить четыре частных круговых возвратных пути из 16 клеток. Соединяя затем эти последние пути, получим полный путь коня в 64 клетки.

a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*
a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*
b	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*a*	*d*	*c*	*b*	*a*

Рис. 156

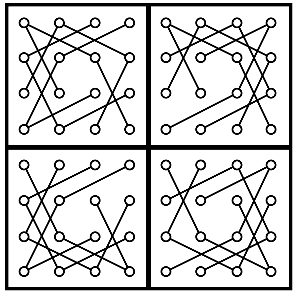


Рис. 157

Полезно сделать еще следующие замечания. На каждой четверти доски ромбами и квадратами обозначены по четыре пути коня. Если соединим ромбы и квадраты, обозначенные одинаковыми буквами во всех четырех четвертях доски, получим по четыре частных возвратных пути из 16 клеток.

Некоторые трудности могут представиться кому-нибудь, когда для получения полного пути в 64 клетки он начинает соединять между собой эти четыре частных пути по 16 клеток. Здесь полезно иметь в виду, что *цепь* (или *ряд ходов*) *можно видоизменять, не разрывая ее*. Основано это на так называемом правиле Бертрана, которое состоит в следующем.

Пусть имеем незамкнутую цепь ходов, проходящих через клетки A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, и пусть оконечности этой цепи будут A и L. Если клетка, например D, отличная от предпоследней K, находится от последней L на расстоянии хода коня, то DE можно заменить через DL и цепь ходов обратится в

$$ABCDLKJIHGFE,$$

т. е. вторая половина цепи будет пройдена в обратном порядке.

То же самое относится и к тому случаю, когда какая-нибудь клетка, кроме второй, сообщается ходом коня с первой. Итак, цепь (или ряд ходов) можно видоизменять, не разрывая ее.

Число путей, которыми конь может обойти доску и которые можно найти указанными выше приемами, не бесконечно. Но оно настолько огромно, что трудно его представить.

XIV. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ С КВАДРАТАМИ

В следующих четырех задачах мы будем заниматься составлением «волшебных квадратов». Так называются квадратные таблицы чисел, в которых суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и в каждой из двух диагоналей квадрата все равны между собой.

158. РАССТАВИТЬ ТРИ ЧИСЛА

В каждой из 9 клеток квадрата (рис. 158) поставить одно из чисел 1, 2, 3 так, чтобы сумма чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также по любой диагонали равнялась 6. Найти все расстановки.

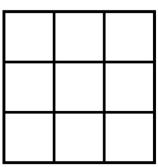


Рис. 158

Решение. Конечно, можно во всех клетках квадрата поставить число 2. Получившийся числовой квадрат будет удовлетворять условиям задачи. Но если потребовать, чтобы среди чисел было по крайней мере одно нечетное, задача становится не такой простой.

Прежде всего, сделав несколько проб, легко убедиться, что в центре квадрата не могут стоять ни 1, ни 3. Этому факту можно дать и строгое доказательство.

Предположим, что числа расставлены так, как требуется. Прибавим друг к другу числа, стоящие на диагоналях и во втором столбце (при этом число, стоящее в центре квадрата, будет взято трижды), и вычтем из результата числа, стоящие в первой и третьей строках. Разность, как легко видеть, будет равна утроенному числу из центра квадрата. С другой стороны, сумма чисел на диагоналях, в каждом столбце и в каждой строке равняется 6; значит, разность должна равняться 6. Следовательно, в центре квадрата стоит число 2.

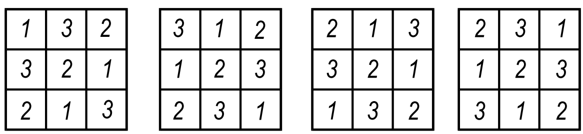


Рис. 159

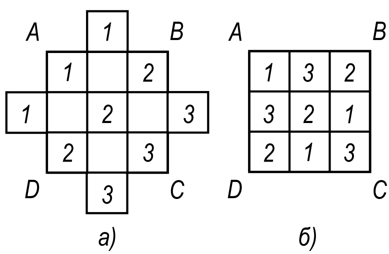


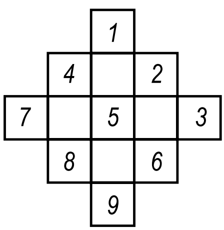
Рис. 160

Далее, легко видеть, что сумма чисел равняется 6 только в том случае, если все они различны или все равны 2. Поэтому по крайней мере в одной из вершин квадрата должно стоять число 2. Искомые расстановки теперь легко находятся (рис. 159). Все они получаются из первой с помощью симметрий относительно диагонали (2, 2, 2), относительно второй строки и относительно второго столбца.

Для построения нужного размещения чисел можно воспользоваться одним легко запоминающимся приемом. Расположим сначала числа так, как на рис. 160, *а*. Затем числа, лежащие вне квадрата *ABCD*, сдвигаем соответственно вниз, вверх, влево или вправо на 3 клетки так, чтобы они попали на свободные места в квадрате. Получаем в результате требуемое размещение (рис. 160, *б*).

159. РАССТАВИТЬ 9 ЧИСЕЛ

В квадрате, состоящем из 9 клеток, расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также на любой диагонали были равны.



а)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

б)

Рис. 161

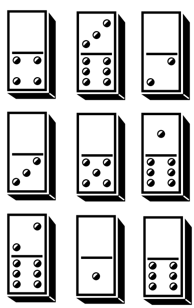


Рис. 162

Р е ш е н и е. Поступим так же, как в конце решения предыдущей задачи. Расставим числа, как показано на рис. 161, *а*, а затем сдвинем стоящие вне квадрата числа соответственно на 3 клетки влево, вправо, вниз и вверх так, чтобы они попали на свободные места в квадрате. Получим нужное размещение (рис. 161, *б*).

Можно также для решения этой задачи взять соответствующие кости домино (рис. 162).

160. РАССТАВИТЬ 25 ЧИСЕЛ

Расположить 25 чисел, от 1 до 25, в квадрате из 25 клеток так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце, а также по обеим диагоналям квадрата получились одинаковые суммы.

Р е ш е н и е. Использованный нами прием поможет и в этом случае. Пристроим на всех сторонах квадрата из 25 клеток еще по четыре клетки (рис. 163), а затем в полученной фигуре расположим косыми рядами последовательно числа от 1 до 25.

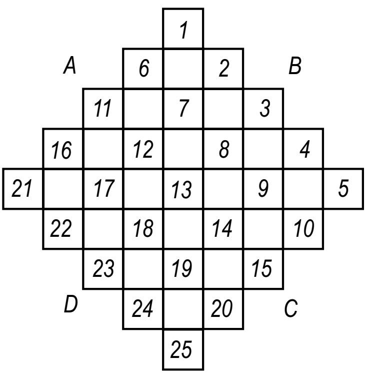


Рис. 163

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Рис. 164

Затем, сдвинув все числа, стоящие вне квадрата *ABCD*, на 5 клеток соответственно вниз, вверх, влево и вправо, получим требуемое расположение (рис. 164).

161. РАССТАВИТЬ 16 ЧИСЕЛ

В квадрате, состоящем из 16 клеток, расставить целые числа от 1 до 16 так, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также на любой диагонали были равны.

Р е ш е н и е. Прием, изложенный в решениях предыдущих задач, не позволяет, как легко видеть, строить волшебные квадраты с 16 клетками, и тем не менее существует большое число расположений, удовлетворяющих условиям задачи.

Не рассматривая общего приема решения таких задач, приведем лишь два ответа к этой задаче. (рис. 165).

4	5	14	11
1	15	8	10
16	2	9	7
13	12	3	6

3	2	15	14
13	16	1	4
10	11	6	7
8	5	12	9

Рис. 165

Простой способ, использованный нами в решениях задач 159, 160, пригоден для построения волшебных квадратов с любым нечетным количеством клеток. К сожалению, приемы построения волшебных квадратов с четным числом клеток намного более сложны.

162. РАССТАВИТЬ ЧЕТЫРЕ БУКВЫ

В квадрате, состоящем из 16 клеток, расставить четыре буквы так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой диагонали встречалась только одна буква. Как велико число решей этой задачи при одинаковых и разных буквах?

Решение. Прежде всего предположим, что буквы одинаковы. Поставим одну букву в какой-нибудь клетке первой диагонали. При этом на второй диагонали окажутся запрещенными две клетки, стоящие в одном горизонтальном и вертикальном ряду с уже занятой клеткой. В одной из остальных двух клеток второй диагонали можно поставить вторую букву. Далее легко заметить, что две буквы, поставленные на диагоналях, однозначно определяют расстановку в соответствии с условиями задачи двух оставшихся букв (рис. 166). Итак, если фиксировать место буквы на первой диагонали, то задача имеет два решения. Но так как первую букву можно поставить в любой клетке первой диагонали, то задача имеет $2 \times 4 = 8$ решений. Так как четыре различных буквы можно перемещать 24 способами, то в этом случае задача имеет $8 \times 24 = 192$ решения.

a			
		a	
			a
	a		

Рис. 166

163. РАССТАВИТЬ 16 БУКВ

В квадрате, состоящем из 16 клеток, расставить 16 букв (четыре буквы a, четыре b, четыре c, четыре d) так, чтобы в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном ряду любая буква встречалась только один раз.

Решение. Предположим, что мы расставим буквы так, как это требуется в задаче. Поменяем местами какие-либо два столбца или две строки. При этом получится новое расположение букв, также удовлетворяющее условию задачи. Очевидно, столбцы и строки можно переставить так, что в верхней строке и крайнем левом столбце буквы разместятся в таком порядке, как показано на рис. 167.

a	b	c	d
b			
c			
d			

Рис. 167

Подобные расположения букв будем называть основными. Найдем теперь все основные расстановки букв. Легко видеть, что во второй строке буквы a, c, d можно разместить только тремя способами: (c, d, a), (d, a, c), (a, d, c). Первым двум соответствуют единственные расположения букв в третьей и четвертой строках, третьему соответствуют два расположения. Итак, имеется всего четыре основных размещения букв, представленных на рис. 168.

Из каждого основного перестановкой столбцов можно получить 24 новых размещения. А при каждом расположении столбцов перестановкой второй, третьей и четвертой строк — еще 6 новых. Очевидно, все эти расположения различны. Итак, существует $4 \times 24 \times 6 = 576$ различных расстановок букв, удовлетворяющих условию задачи.

a	b	c	d
b	c	d	a
c	d	a	b
d	a	b	c

a	b	c	d
b	d	a	c
c	a	d	b
d	c	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	b	a
d	c	a	b

Рис. 168

Аналогичный вопрос можно поставить для квадрата, состоящего из 25, 36 и в общем случае n^2 клеток. Квадратная таблица, в которой каждый ряд является перестановкой некоторого числа различных букв или цифр, причем в каждом столбце буквы или цифры различны, называется *латинским квадратом*. Такие квадраты впервые изучал Эйлер в 1782 году. Термин «латинские» связан с тем, что элементы квадрата обозначались латинскими буквами a, b, c, … Количество различных латинских квадратов из n^2 клеток очень быстро растет с увеличением числа n. Условимся обозначать через $k!$ произведение всех целых чисел от 1 до k, $k = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times k$. Известно, что существует не менее чем $n! \times (n-1)! \ldots \times 2! \times 1!$ латинских квадратов размером $n \times n$. Точное значение этого количества известно только при маленьких n.

164. РАЗМЕСТИТЬ 16 ОФИЦЕРОВ

В каждом из четырех полков выбрано по четыре офицера разных званий (полковник, майор, капитан, лейтенант). Требуется разместить эти шестнадцать офицеров в виде квадрата так, чтобы в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном ряду был офицер каждого звания и представитель каждого полка.

П	*М*	*К*	*Л*
Л	*К*	*М*	*П*
М	*П*	*Л*	*К*
К	*Л*	*П*	*М*

Рис. 169

(*П*,1)	(*М*,4)	(*К*,2)	(*Л*,3)
(*Л*,2)	(*К*,3)	(*М*,1)	(*П*,4)
(*М*,3)	(*П*,2)	(*Л*,4)	(*К*,1)
(*К*,4)	(*Л*,1)	(*П*,3)	(*М*,2)

Рис. 170

Р е ш е н и е. Обозначим для краткости звания офицеров буквами *П*, *М*, *К*, *Л*, а номера полков цифрами 1, 2, 3, 4. Очевидно, каждый офицер полностью характеризуется парой: (буква, цифра). Например, (*К*, 3) — капитан из третьего полка. Задача, следовательно, сводится к тому, чтобы в 16 клетках квадрата разместить по четыре буквы *П*, *М*, *К*, *Л* и по четыре цифры 1, 2, 3, 4 так, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду не было одинаковых букв и цифр. Кроме того, все пары (буква, цифра) должны быть различны.

Расположим сначала буквы (см. предыдущую задачу) так, как показано на рис. 169.

Чтобы разместить цифры, мы сначала приставим к каждой букве соответствующую ей по порядку цифру (т. е. ко всем *П* приставим 1, ко всем *М* приставим 2, ко всем *К* приставим 3, ко всем *Л* приставим 4), а затем переставим каждую цифру в клетку, симметричную относительно диагонали (*П*, *К*, *Л*, *М*). В результате получим рис. 170. Это расположение и является ответом к задаче.

165. ШАХМАТНЫЙ МАТЧ

В шахматном матче встречаются две команды, состоящие из четырех человек. Каждый участник должен сыграть по одной партии с каждьм игроком противной команды. Требуется составить расписание турнира так, чтобы:

1) каждый шахматист сыграл две партии белыми и две партии черными фигурами;

2) в каждом туре обе команды играли две партии белыми и две черными фигурами.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадрат из 16 клеток. Пусть его строки отвечают участникам первой команды, а столбцы — участникам второй команды.

Разместим в клетках квадрата пары цифр следующим образом. Возьмем размещение букв и цифр предыдущей задачи и заменим каждую букву соответствующей ей цифрой ($П \to 1$, $М \to 2$, $К \to 3$, $Л \to 4$). В результате получим рис. 171.

Положим теперь, что первая цифра в каждой клетке указывает номер тура, в котором встречаются игроки,

I \ II	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,4)	(3,2)	(4,3)
2	(4,2)	(3,3)	(2,1)	(1,4)
3	(2,3)	(1,2)	(4,4)	(3,1)
4	(3,4)	(4,1)	(1,3)	(2,2)

Рис. 171

соответствующие строке и столбцу, содержащим данную клетку. И если вторая цифра нечетная, то игрок первой команды играет белыми, а в противном случае черными фигурами. Поскольку любая цифра, стоящая на первом месте, встречается в каждой строке и в каждом столбце по одному разу, то в любом туре будут заняты все шахматисты, при этом у каждого будет определен единственный партнер.

Покажем, что такое расписание удовлетворяет условиям задачи. Так как в каждой строке и в каждом столбце на втором месте расположены числа 1, 2, 3, 4 в некотором порядке, то каждый шахматист сыграет по две партии белыми и по две партии черными фигурами. Далее, так как все пары различны, то, выбрав любые четыре пары чисел, отвечающие одному туру, т. е. имеющие на первом месте одну и ту же цифру — номер тура, мы получим на вторых местах расположенные в некотором порядке числа 1, 2, 3, 4. Это означает, что в данном туре игроки первой команды будут играть две партии белыми и две партии черными фигурами. Нагляднее это расписание игр представлено на рис. 172. Здесь цвет клетки означает цвет фигур, которыми должен играть представитель первой команды, а цифра — номер тура, в котором встречаются соперники.

I \ II	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

Рис. 172

Можно предлагать задачи, подобные двум последним, для любого числа n офицеров и полков и для команд с любым числом участников. Легко видеть, что при $n=2$ первая задача неразрешима. Невозможно разместить четырех офицеров двух званий из двух полков так, как требуется в условии этой задачи. В 1782 году Эйлер предположил, что задача неразрешима при $n=2$, 6, 10, 14, …, т. е. при всех n, которые при делении на 4 дают в остатке 2. Это было подтверждено в 1900 году для $n=6$. И, наконец, в 1959 году было установлено, что при всех $n\neq 2$ и $n\neq 6$ задачу решить можно. Оказалось, что при $n>6$ предположение Эйлера неверно. Он ошибся.

Пары латинских квадратов, решающие задачу 164 при некотором n, дают возможность составить расписание турнира с n участниками подобно тому, как это делалось в решении задачи 165. Интересно, что при $n=6$ расписание турнира может быть составлено, хотя задача 164 неразрешима.

Заметим, наконец, что задачи этой главы представляют примеры вопросов, относящихся к разделу математики, называемому комбинаторикой.

XV. ГЕОМЕТРИЯ ПУТЕШЕСТВИЙ

166. О ПАУКЕ И МУХЕ

На потолке в углу *C* комнаты (рис. 173) сидит паук, а на полу в противоположном углу *K* спит муха. Какой путь должен избрать паук, чтобы добраться до мухи по кратчайшему расстоянию?

Р е ш е н и е. С первого взгляда кажется ясным, что паук должен пробежать потолок по диагонали *CE* и затем спуститься к мухе по ребру *EK*.

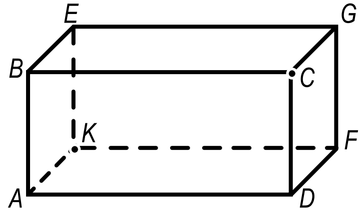


Рис. 173

Поразмыслив, мы найдем для паука и другой путь: он может пробежать боковую стену по диагонали *CF* и подобраться к жертве по *FK*.

И, наконец, паук мог бы пойти по *CA* и по *AK*.

Параллелепипед симметричен относительно середины диагонали *CK*, поэтому каждый из путей *CDK*, *CBK* и *CGK* равен по длине одному из трех приведенных выше путей.

Какой же из них является кратчайшим?

Оказывается, что ни тот, ни другой, ни третий. Есть еще более короткие пути, займемся их разысканием.

Ввиду симметрии параллелепипеда можно считать, что кратчайший путь паука не заходит на боковую стену *ABEK*. Действительно (рис. 174), например, длина пути *KLC* равняется длине пути *KMC*. Поэтому можно считать, что путь пересекает одно из ребер *EG*, *GF*, *FD*, *AD*. Ввиду симметрии ребер *AD* и *EG* достаточно считать, что он пересекает *EG*, *GF* или *FD*.

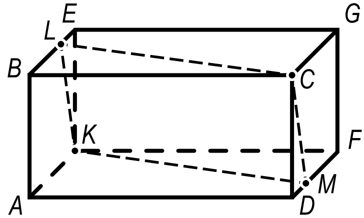


Рис. 174

Развернем параллелепипед, изображающий нашу комнату, на плоскость. Получим чертеж, представленный на рис. 175.

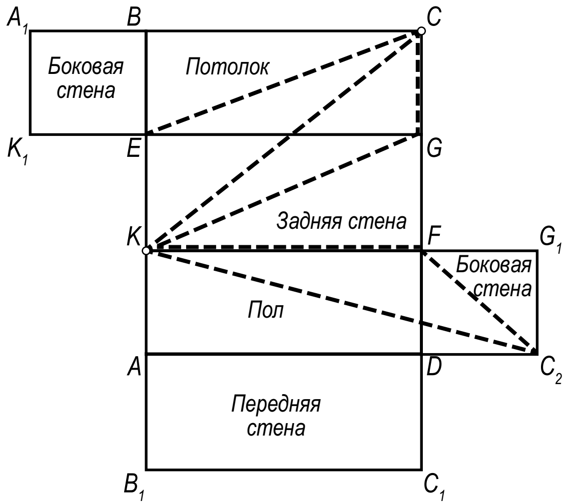


Рис. 175

Паук сидит в точке C, а муха — в точке K. Теперь мы ясно видим, что пути CEK и CGK, казавшиеся нам в неразвернутом чертеже кратчайшими, на самом деле таковыми не являются. Стоит соединить точки C и K прямой линией, чтобы получить заметно более короткий путь. Этот путь будет кратчайшим среди всех путей, пересекающих ребро EG. Аналогично, путь KC_2 будет кратчайшим среди всех путей, пересекающих ребро FD (точка C_2 также отвечает вершине C нашего параллелепипеда). В частности, он будет короче пути CFK.

Для того чтобы представить себе кратчайший среди путей, пересекающих ребро GF, развернем комнату, как показано на рис. 176. Мы видим, что KC_3 — кратчайший из путей, пересекающих ребро GF.

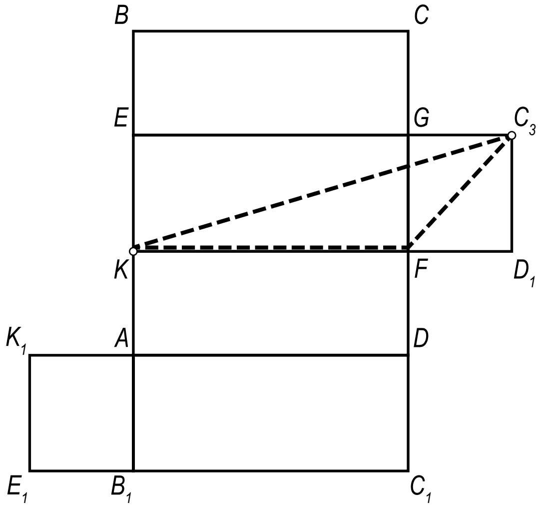


Рис. 176

Остается теперь решить вопрос: какой же из этих трех путей (KC, KC_2, KC_3) будет самым коротким. Оказывается, что это зависит от относительных размеров комнаты в длину, ширину и высоту.

Обозначим длину комнаты AD через a, высоту AB через b и ширину AK через c. Тогда из рис. 175 и 176 имеем

$$|KC| = \sqrt{a^2 + (b+c)^2},$$

$$|KC_2| = \sqrt{(a+b)^2 + c^2},$$

$$|KC_3| = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}.$$

Раскрывая скобки и сравнивая между собой подкоренные выражения, мы видим, что они отличаются друг от друга лишь членами $2bc$, $2ab$, $2ac$. Деля три произведения на $2abc$, получим $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{b}$. Отсюда видно, что если $a>b$, $a>c$, то кратчайшим путем будет путь KC; если $c>a$, $c>b$, то кратчайший KC_2, если же $b>a$, $b>c$, то кратчайший путь KC_3.

Мы видим, что кратчайший путь паука должен пересекать самое длинное из ребер EG, GF, FD.

Задача о пауке и мухе оказалась гораздо сложнее, чем можно было думать с первого взгляда.

МОСТЫ И ОСТРОВА

Не приходилось ли вам жить, а может быть, вы и сейчас живете в городе или местности, где течет река, которая делится на протоки и рукава, образующие острова? Через реку и ее протоки переброшены, быть может, мосты, соединяющие различные части города. В Ленинграде, например, очень много подобных протоков, разветвлений Невы и разных каналов, через которые переброшено весьма большое количество мостов и переходов. Не приходила ли вам когда-нибудь в голову мысль (если, конечно, вы живете в местности, где есть река, острова и мосты) совершить такую прогулку, чтобы во время ее перейти все эти мосты, но перейти их так, чтобы на каждом побывать *только по одному разу*? Вряд ли вы думали об этом, а между тем мы стоим здесь перед весьма интересной и важной задачей, поставленной впервые знаменитым математиком Эйлером. Она служит отличным введением в совсем особую область геометрии, которую можно было бы назвать *геометрией расположений.*

Геометрия расположений занимается только вопросами *порядка* и *расположения*, оставляя в стороне всё относящееся к измерению и отношению величин геометрических фигур и тел. Все почти вопросы, связанные с такими играми, как шахматы, шашки, домино, лото, многие карточные задачи и т. д., наконец, такая практическая задача, как подбор разноцветных нитей для составления известного узора ткани, — все это относится к геометрии расположений. Значит, практически геометрия эта известна людям с глубокой древности. А на желательность ее научного развития указывал еще Лейбниц в 1710 году. Эйлер, как упомянуто, тоже занимался вопросами этого порядка и, между прочим, задачей о мостах, которую мы здесь и излагаем в упрощенном виде.

Кроме того, поучительная сторона предлагаемых задач состоит в исследовании, возможна или нет данная задача, прежде чем приниматься за решение ее. Эйлер, в частности, подробно исследовал случай невозможности.

167. ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Задача, предложенная Эйлером в 1759 году, заключается в следующем.

Река, огибающая остров, делится на два рукава, через которые переброшено семь мостов: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* (рис. 177). Спрашивается, можно ли совершить такую прогулку, чтобы за один раз перейти через все эти мосты, не переходя ни через один мост два или более раз?

— Это вполне возможно! — скажет кто-нибудь.

— Нет, это невозможно! — скажет другой.

Но кто прав и кто нет и как это доказать?

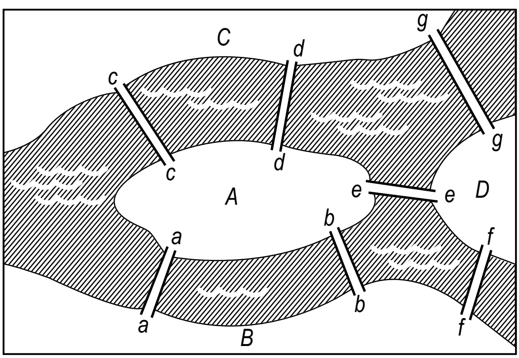


Рис. 177

Самый простой путь решения задачи, казалось бы, такой: сделать *все возможные пробы* таких переходов, т. е. перечислить все возможные пути, и затем рассмотреть, какой или какие из них удовлетворяют условиям вопроса. Но очевидно, что даже в случае только семи мостов приходится делать слишком много таких проб. А при увеличении числа мостов такой способ решения практически совершенно немыслим. Да, кроме того, при одном и том же числе мостов задача изменяется в зависимости еще от *расположения* этих мостов. Поэтому изберем иной, более надежный путь решения задачи.

Решение. Прежде всего исследуем, *возможен или нет* искомый нами путь для данного расположения семи мостов. Для облегчения рассуждений введем такие условные обозначения:

Пусть A, B, C и D будут разные части суши, разделенной рукавами реки (рис. 177).

Затем, переход из места A в место B мы будем обозначать через AB — все равно, по какому бы мосту мы ни шли, по a или по b. Если затем из B мы перейдем в D, то этот путь обозначим через BD, а весь переход, или путь из A в D, обозначим через ABD, так что здесь B одновременно обозначает и место прибытия и место отправления.

Если теперь из D перейдем в C, то весь пройденный путь обозначим через $ABDC$. Итак, это *обозначение из четырех букв* показывает, что из места A мы, пройдя места B и D, пришли в C, причем перешли *три* моста.

Значит, если мы перейдем *четвертый* мост, то для обозначения пути нам понадобится *пять* букв. После перехода следующего, пятого моста понадобится обозначить пройденный путь *шестью* буквами и т. д.

Словом, если мы обошли по *одному разу* все семь данных мостов, то наш *путь должен был бы обозначаться* *восемью буквами* (вообще, если есть n мостов, то для обозначения искомого нами пути через эти мосты понадобится $n+1$ буква).

Но как и в каком порядке должны идти буквы в этом обозначении?

Между берегами A и B есть два моста. Значит, последовательность букв AB или BA должна быть два раза. Точно так же два раза должно повторяться соседство букв A и C (между этими местами тоже два моста). Затем, по одному разу должно быть соседство букв A и D, B и D, D и C.

Следовательно, если предложенная задача разрешима, т. е. можно мосты перейти так, как требуется задачей, то *необходимо*:

1) чтобы весь путь обозначался восемью буквами;

2) чтобы в расположении этих букв соблюдались указанные условия относительно соседства и повторяемости букв.

Разберемся теперь в следующем весьма важном обстоятельстве.

Возьмем, например, местность A, соединенную с другими местностями несколькими мостами: a, b, c, … (в данном случае пятью мостами). Если мы перейдем мост а (все равно откуда, из A или из B), то в обозначении пути буква A появится один раз. Пусть пешеход перешел 3 моста a, b и c, ведущие в A. Тогда в обозначении пройденного пути буква A появится два раза, в чем нетрудно убедиться. Если же на A ведут 5 мостов, то в обозначении пути через все эти мосты буква A повторится 3 раза. Вообще, легко вывести, что если число мостов, ведущих в A, есть *нечетное*, то, чтобы узнать, сколько раз в обозначении требуемого пути повторится буква A, надо к этому нечетному числу мостов прибавить единицу и полученное число разделить пополам. То же, конечно, относится и ко всякой иной местности с нечетным числом мостов, которую для краткости будем называть *нечетной местностью*.

Усвоив все предыдущее, приступим к окончательному исследованию задачи Эйлера.

В местность A ведет пять мостов. В каждую из местностей B, C и D ведет по три моста. Значит, все эти местности *нечетные*, и на основании только что сказанного в обозначение полного пути через все семь мостов необходимо, чтобы

буква A вошла $\frac{5+1}{2}$, т. е. 3 раза;

буква B вошла $\frac{3+1}{2}$, т. е. 2 раза;

буква C вошла $\frac{3+1}{2}$, т. е. 2 раза;

буква D вошла $\frac{3+1}{2}$, т. е. 2 раза;

Всего 9 букв.

Получается, таким образом, что в обозначение искомого пути обязательно должно войти 9 букв. Но мы уже доказали выше, что в случае возможности решения задачи весь путь должен обозначаться *только восемью* буквами. *Итак, задача для данного расположения семи мостов неразрешима.*

Значит ли это, что задача о переходе по одному разу через мосты неразрешима всегда, когда имеется один остров, два рукава реки и семь мостов? Конечно нет. Доказано только, что задача неразрешима для *данного* *расположения* мостов. При ином расположении этих мостов и решение могло бы быть иное.

Теперь же заметим, что во всех тех случаях, когда число мостов, ведущих в различные места, нечетное, можно применять рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, и, таким образом, убедиться в возможности или невозможности решения задачи. И нетрудно вывести для данного случая такое общее правило:

Если число букв, которые должны входить в обозначение полного пути перехода через все мосты по одному разу, не равно числу мостов, увеличенному на единицу, то задача неразрешима.

Для этого же случая «нечетных местностей» заметим и то, что правило для нахождения числа повторений какой-либо буквы, например *A*, в обозначении полного пути всегда одинаково приложимо, будут ли ведущие из *A* мосты вести в одно какое-нибудь место *B* или же в различные места.

Чтобы перейти к более общему решению задачи, необходимо рассмотреть случаи, когда имеется четное число мостов, ведущих откуда-нибудь в другие места.

Пусть, например, из места *A* переброшено через реку четное число мостов. Тогда при обозначении пути перехода через все мосты по одному разу надо различать два случая: 1) начинается ли путь из *A* или 2) из другого места.

В самом деле, если из *A* в *B*, например, ведут два моста (рис. 178), то путник, отправившийся из *A* и прошедший по одному разу оба моста, должен свой путь обозначать так: *ABA*, т. е. буква *A* повторяется два раза. Если же путник пройдет через те же два моста, но из места *B*, то буква *A* появится всего один раз, ибо этот путь обозначится через *BAB*.

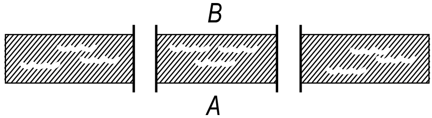


Рис. 178

Предположим теперь, что в *A* ведут четыре моста, — из одной ли местности или из разных, это все равно. И пусть путник отправляется в обход по одному разу всех мостов из места *A*. Опять легко видеть, что в таком случае при обозначении пройденного пути буква *A* повторяется три раза; но если начать обход из другой местности, то буква *A* повторится только два раза. Точно так же в случае шести мостов буква *A* в обозначении всего пути повторится четыре раза или три, смотря по тому, начался ли переход из *A* или из другой местности. Словом, можно вывести такое правило:

Если число мостов известной местности четное (четная местность), то в соответствующем обозначении пути буква, обозначающая местность, появляется число раз, равное половине числа мостов, если переход начался из другой местности. Если же переход начался из самой четной местности, то число появлений этой буквы равно половине числа мостов плюс единица.

Очевидно, однако, что при полном пути переход начинается из одной только какой-нибудь определенной местности. Поэтому *условимся раз навсегда* для *четной* местности число повторений ее букв в обозначении пути считать равным *половине* числа мостов, ведущих в эту местность, а для *нечетной* местности число повторений ее букв получим, если к числу мостов этой местности прибавим единицу и полученный результат разделим пополам.

Итак, при решении задачи о мостах необходимо различать два случая:

1) *идущий отправляется из нечетной местности*;

2) *он идет из четной местности*.

В первом случае число повторений букв, обозначающих полный путь, должно быть равным числу мостов, увеличенному на единицу, иначе задача неразрешима.

Во втором случае полное число повторений букв должно равняться числу мостов, так как, начиная путь с четной местности, нужно число повторений соответствующей буквы увеличить на единицу только для одной местности.

Общее решение. Рассмотрим теперь задачу о мостах с более общей точки зрения. Из предыдущих рассуждений мы уже можем вывести общий прием решения каждой подобной задачи о мостах. Во всяком случае, мы можем сразу убедиться в невозможности подобного решения. Для этого расположим лишь решение так:

1) Отмечаем общее количество мостов и ставим его в заголовке решения.

2) Обозначаем различные местности, разделенные рекой, буквами A, B, C, D, … и пишем их в столбец одна под другой.

3) Против каждой из местностей пишем во втором столбце число всех ведущих на нее мостов.

4) *Четные местности* отмечаем звездочкой при соответствующих буквах 1-го столбца.

5) В третьем столбце соответственно пишем половины четных чисел 2-го столбца, а если во втором столбце есть числа нечетные, то прибавляем к ним единицу и пишем в 3-м столбце половину полученного числа. (Каждое число 3-го столбца показывает число повторений соответствующей буквы.)

6) Находим сумму 3-го столбца.

Если эта последняя сумма 1) равна числу мостов или 2) больше его всего на одну единицу, то вопрос о полном обходе всех мостов по одному разу *может* быть решен. Но при этом надо иметь в виду, что в первом случае обход надо начинать с четной местности, а во втором — с нечетной. Для случая рассмотренной нами задачи о семи мостах будем иметь, значит, такую схему решения:

Число мостов	7	
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
	Всего	9

Так как 9 больше, чем $7+1$, то, следовательно, задача неразрешима.

168. ПЕРЕХОД ЧЕРЕЗ 15 МОСТОВ

Попробуем теперь решить другую задачу, в которой имеем два острова, соединенных между собой и с берегами реки 15 мостами, как это указано на прилагаемом рисунке (рис. 179).

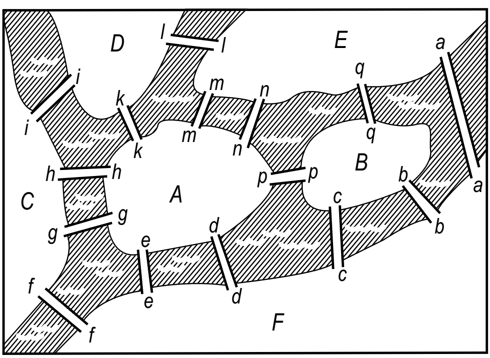


Рис. 179

Спрашивается, можно ли за один раз обойти все эти мосты, не проходя ни через один более одного раза?

Р е ш е н и е. Согласно выведенным нами уже раньше приемам решения, обозначаем разными буквами все местности, разделенные различными рукавами реки и соединенные мостами. После этого составляем следующую таблицу:

Число мостов	15	
*A**	8	4
*B**	4	2
*C**	4	2
D	3	2
E	5	3
*F**	6	3
	Всего	16

Отсюда делаем вывод, что задача разрешима, ибо число повторений букв на единицу больше числа мостов. Кроме того, по предыдущему знаем, что обход должен начаться из нечетной местности D или E.

Искомый обход мостов может быть сделан так.

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBqElD,$$

или в обратном порядке. Маленькие буквы среди больших показывают, какие именно переходятся мосты.

Изложенные выше приемы решения задачи прежде всего позволяют судить об ее разрешимости или неразрешимости. Сделаем теперь еще несколько выводов, ведущих к более определенному уяснению подобных задач.

Заметим прежде всего, что сумма чисел второго столбца точно равна двойному количеству мостов. Это зависит от того, что в каждом мосту мы считаем оба его конца, упирающиеся в различные берега. Отсюда нетрудно вывести следующее:

1) Сумма чисел второго столбца всегда должна быть четной, ибо половина ее должна дать число мостов.

2) Значит, если задача разрешима, то в ней или нет совсем *нечетных местностей*, или же они есть в *четном* количестве (однако не более двух, как увидим сейчас ниже). Иначе второй столбец при сложении не давал бы четного числа.

3) Если в задаче все местности четные, то задача всегда разрешима, из какой бы местности мы ни отправлялись.

Так, например, задачу 167 можно было бы решить если бы задано было обойти все мосты по два раза каждый, что сводится, в сущности, к удвоению числа мостов, т. е. к обращению всех данных местностей в четные.

4) Если в задаче есть только две нечетные местности, а остальные все четные, то сумма цифр третьего столбца на единицу больше числа мостов, и задача разрешима, если начать обход мостов с одной из двух нечетных местностей. Но если число нечетных местностей будет более двух, т. е. 4, 6, 8 и т. д., то задача оказывается неразрешимой, так как сумма чисел третьего столбца будет более числа мостов на 2, на 3, на 4 и т. д. единицы.

Вообще, при всяком данном расположении мостов сразу нетрудно определить случай разрешимости или неразрешимости задачи. Задача неразрешима, если число нечетных местностей более двух. Задача разрешима, если 1) все местности четные и 2) если нечетных местностей только две. В последнем случае обход мостов надо начинать с одной из этих нечетных местностей.

Докажем, что если все местности четные, то существует замкнутый путь (кончающийся в местности, с которой он начался), проходящий по каждому мосту ровно один раз. Будем называть длиной пути количество мостов, по которым этот путь проходит. Так, длина пути из решения задачи 168 равна 15. Среди всех путей, которые можно провести по нашим местностям с соблюдением условия задачи, выберем самый длинный путь и обозначим его *abc* … *g* (где буквы *a*, *b*, *c*, …, *g* — это названия мостов, пересекаемых путем). Обозначим через *A* местность, в которой он начинается, и предположим, что он заканчивается в местности *G*, отличной от *A*. Если путь ранее проходил через *G*, скажем, *r* раз, то, двигаясь по нему, мы должны были уже пройти 2*r* мостов, ведущих в *G*. Поскольку местность *G* четная, то, войдя в нее по мосту *g*, мы должны найти еще один мост *A*, ведущий из *G* и отличный от уже пройденных 2*r* мостов и моста *g*. Это означает, что мы можем продолжить путешествие и далее, в противоречие с тем, что выбранный путь имеет максимальную длину. Итак, путь *abc* … *g* кончается в местности *A*, с которой начался, т. е. он замкнут. Покажем теперь, что он проходит через каждый мост. Предположим, что он не проходит через некоторый мост. Ясно, что мост *f* можно выбрать так, что через одну из соединяемых им местностей проходит путь *abc* … *g*. Для определенности предположим, что ведет в местность *B*, из которой выходят мосты *a*, *b*. Тогда путь *fbc* … *ga* имеет длину, на единицу большую, чем *abc* … *g*. Но мы обозначили через *abc* … *g* самый длинный путь, который только можно провести по нашим местностям. Полученное противоречие доказывает, что путь *abc* … *g* проходит через все мосты.

Докажем теперь, что требуемый путь существует и во втором случае, когда есть только две нечетные местности, скажем, *A* и *B*. Построим новый мост *a*, соединяющий *A* и *B*. Тогда все местности станут четными и, по доказанному выше, существует путь, проходящий по одному разу через все мосты. Этот путь замкнут, следовательно, его можно начинать с любого моста, например с моста *a*: *abc* … *g*. Легко видеть, что путь *b*c … *g*, концы которого лежат в местностях *A* и *B*, решает нашу задачу.

Исследовав задачу и сделав вывод о ее разрешимости, остается только совершить самый обход мостов. Но это уже сравнительно легкая часть задачи.

169. ПУТЕШЕСТВИЕ КОНТРАБАНДИСТА

Задачу о переходе через мосты можно предлагать в различных видоизменениях. Можно представить ее, например, как путешествие контрабандиста, который решил побывать во всех странах Европы, но так, чтобы через границу каждого государства ему пришлось переходить только один раз.

В данном случае очевидно, что различные страны и их границы будут соответствовать разным местностям и рукавам реки, через которые переброшено по одному мосту (для каждой границы, общей двум странам).

Исследуя разрешимость задачи, сразу видим, что Финляндия, Испания и Дания имеют *нечетное* число границ с соседними государствами, т. е. число нечетных местностей более двух. А следовательно, путешествие, которое предполагает совершить контрабандист, невозможно.

170. О ФИГУРАХ, ВЫЧЕРЧИВАЕМЫХ ОДНИМ РОСЧЕРКОМ

Известен анекдот: некто давал миллион рублей каждому, кто начертит следующую фигуру (рис. 180). Но при вычерчивании ставилось одно условие. Требовалось, чтобы фигура эта была вычерчена одним непрерывным росчерком, т. е. не отнимая пера или карандаша от бумаги и не удваивая ни одной линии, другими словами, по раз проведенной линии нельзя уже было пройти второй раз.

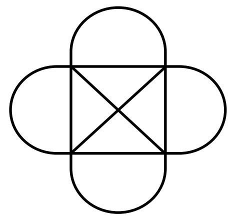


Рис. 180

Надежда стать «миллионером», решив такую легкую задачу, может заставить испортить много бумаги и потратить много времени на попытки вычертить эту фигуру, как требовалось, одним росчерком. Задача, однако, не решается, и это тем досаднее, что она не решается только «чуть-чуть»… Никак не удается провести только одной «последней» какой-либо линии. Удается даже открыть секрет, что вся трудность в том, чтобы вычертить сначала одним росчерком, не повторяя линии, еще более простую фигуру — четырехугольник с двумя диагоналями (рис. 181). Это, казалось бы, уже совсем просто, а все-таки… не удается!..

Сомнения в невозможности решения этой задачи все-таки остаются, тем более что фигуры, гораздо более сложные и трудные с виду, легко вычерчиваются одним росчерком. Так, например, выпуклый пятиугольник со всеми его диагоналями легко вычерчивается одним непрерывным движением без повторения, причем получается фигура, представленная на рис. 182.

То же самое легко удается со всяким многоугольником с нечетным числом сторон и никак не удается с квадратом, шестиугольником и т. д. — словом, с многоугольником с четным числом сторон.

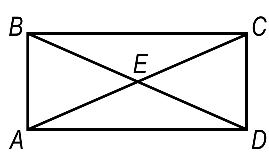


Рис. 181

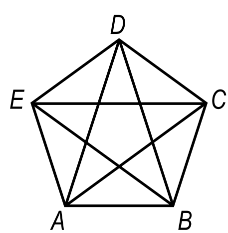


Рис. 182

Теперь нам нетрудно будет разобраться и показать, какую из любых данных фигур можно вычертить одним росчерком, без повторения линий, а какую нет. Каждую из задач подобного рода можно свести к разобранной уже нами *Эйлеровой задаче о мостах*.

В самом деле, возьмем, например, четырехугольник *ABCD* с двумя его диагоналями, пересекающимися в *E* (рис. 181). Можно ли его вычертить одним непрерывным росчерком, без повторения линий?

Точки *A*, *B*, *C*, *D* и *E* мы представим себе как центры некоторых местностей, разделенных рекой, а линии, соединяющие эти точки, — как мосты, ведущие в эти местности. Что же в данном случае получаем? Пять местностей, из которых четыре *нечетные* и одна четная. Мы знаем уже, что в таком случае нельзя за один раз обойти все мосты, не переходя ни через один два раза, или, другими словами, нельзя обойти все данные точки одной непрерывной линией без повторения прежнего пути.

Случаи возможности и невозможности вычерчивания одним росчерком фигур совершенно те же, что и в задаче о мостах. Одна задача, в сущности, сводится к другой.

Всякий нечетный многоугольник со всеми его диагоналями можно вычертить одним росчерком без повторения линий потому, что этот случай соответствует тому, когда данные в задаче о мостах местности все четные.

Соображения, изложенные здесь, одинаково прилагаются ко всякой фигуре, образована ли она прямыми или кривыми линиями, на плоскости или в пространстве. Так, нетрудно видеть, что можно описать одним непрерывным движением все ребра правильного октаэдра и нельзя этого сделать для четырех остальных правильных выпуклых тел.

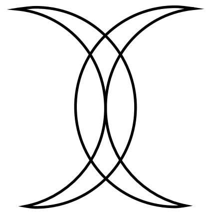


Рис. 183

Говорят, что Магомет вместо подписи (он был неграмотен) описывал одним росчерком состоящий из двух рогов Луны знак, представленный на рис. 183. И это понятно, потому что в данном случае мы имеем дело только с точками четного порядка, а следовательно, вычертить такую фигуру одним росчерком без повторения тех же линий всегда можно. Всегда можно также вычертить одним росчерком и такую фигуру, где, помимо точек четного порядка, есть и две точки (но не более) нечетного порядка. Весьма красивый и замысловатый образчик такой фигуры, заключающий в себе две нечетные точки A и Z, показан на рис. 184. С какой-нибудь из этих точек и надо начинать непрерывное вычерчивание фигуры, как мы уже знаем из задачи о мостах.

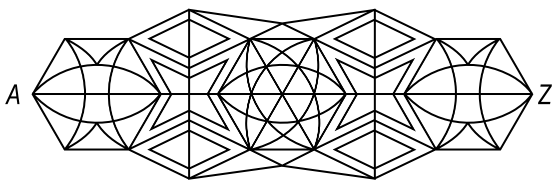


Рис. 184

Также нельзя вычертить одним росчерком фигуры на рис. 185 и 186 при всей их видимой простоте, так как в первой восемь, а во второй — двенадцать точек нечетного порядка. Первая может быть вычерчена не менее как *четырехкратной*, т. е. состоящей из четырех непрерывных кусков, а вторая — не менее как *шестикратной* линией.

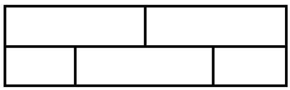


Рис. 185

Рис. 186

Если взять шахматную доску с 64 клетками, то в ней — 28 точек нечетного порядка, и, чтобы вычертить ее, надо чертить 14-кратную линию. С другой стороны, если взять треугольник, поделить каждую из его сторон на 12 (или сколько угодно) равных частей и провести из точек деления линии, параллельные другим сторонам, то полученная сетчатая фигура может быть вычерчена одним непрерывным движением без повторений. Таких примеров можно подобрать сколько угодно.

Для упражнения предлагаем читателю заняться во время досуга вычерчиванием с *одного росчерка* фигур, приведенных на рис. 187*а*, 187*б*.

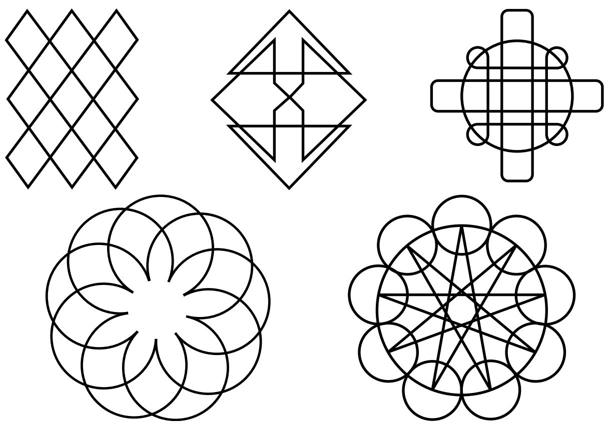


Рис. 187*а*

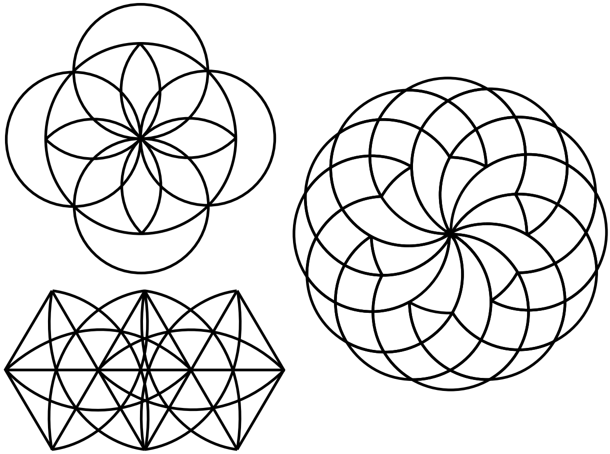


Рис. 187*б*

XVI. ЛАБИРИНТЫ

Происхождение задачи о лабиринтах относится к глубокой древности и теряется во мраке легендарных сказаний. Древние — да, пожалуй, многие и теперь, — задачу о лабиринтах считали вообще неразрешимой. Человек, попавший в лабиринт, не мог уже из него выйти, если только какое-либо чудо или случай не приходили ему на помощь.

Из настоящего раздела мы, наоборот, увидим, что безвыходных лабиринтов нет, что разобраться и найти выход из самого запутанного лабиринта не составляет особого труда. Решению задачи мы предпошлем историческую справку о лабиринтах.

Слово «лабиринт» — греческое и в переводе означает ходы в подземельях. Существует, действительно, очень много природных подземных пещер с таким огромным количеством по всем направлениям перекрещивающихся коридоров, закоулков и тупиков, что нетрудно в них заблудиться, потеряться и, не найдя выхода, умереть от голода и жажды.

Примеры такого же рода, но уже искусственных лабиринтов, могут представить шахты иных рудников, или так называемые «катакомбы».

Вероятнее всего, что подобные подземелья возбудили у строителей еще древнейших времен желание подражать им искусственными сооружениями. И у древних писателей мы встречаем указание на существование искусственных лабиринтов, например, у египтян. В конце концов, словом «лабиринт» чаще всего обозначали именно искусственное чрезвычайно сложное сооружение, составленное из очень большого числа аллей или галерей, бесчисленные разветвления, перекрестки и тупики которых заставляли попавшего туда бесконечно блуждать в тщетных поисках выхода. Об устройстве таких лабиринтов слагались целые легенды.

Известнее всего рассказ о лабиринте, построенном мифическим Дедалом на острове Крит для мифического же царя Миноса. В центре лабиринта жило чудовище Минотавр, и никто из попавших туда не мог выйти обратно, делаясь в конце концов жертвой чудовища. Семь юношей и семь девушек приносили афиняне в дань ежегодно чудовищу, которое преисправно их пожирало. Наконец Тезей не только убил Минотавра, но и вышел из лабиринта, не заблудившись в нем, при помощи, впрочем, нити из клубка царевны Ариадны. С той поры слова «нить Ариадны» имеют символическое значение как способ, дающий выход из самого затруднительного положения.

Лабиринты бывают самой разнообразной формы и устройства. До наших дней сохранились еще и запутанно-сложные галереи, и ходы пещер, и архитектурные лабиринты над могилами, и извилистые планы на стенах или полах, обозначенные цветным мрамором или черепицей, и извивающиеся тропинки на почве, и рельефные извилины в скалах.

Рисунками лабиринтов украшались одеяния христианских императоров до девятого столетия, и остатки таких же украшений сохранились до сих пор на стенах церквей и соборов того времени. Вероятно, эти украшения служили символом сложности жизненного пути и человеческих заблуждений. Особенно употребительны были лабиринты в первой половине двенадцатого столетия. Во Франции того времени лабиринты выкладывались из камня или изображались на полу церквей и соборов. Они назывались большей частью «путь в Иерусалим» и служили символом трудного земного путешествия в «святые места», наградой за которое является небесная благодать, поэтому центр лабиринта часто называли «небом».

В Англии не встречаются лабиринты на церковном полу, но зато было очень много лабиринтов, сделанных из дерна на лужайках. Они носили различные названия: «Город Троя», «Следы пастуха» и т. п. О таких лабиринтах упоминает Шекспир в своих пьесах «Сон в летнюю ночь» и «Буря».

Все эти лабиринты имеют более исторический, чем математический интерес. Распутать их нетрудно. С течением времени фигуры эти потеряли свое символическое значение и сделались мало-помалу предметом развлечения. Лабиринты переходят в сады, цветники и парки, где путем проведения прихотливо извивающихся, то пересекающихся, то внезапно прегражденных или заканчивающихся тупиком дорожек получались самые запутанные и головоломные фигуры, в которых, действительно, нелегко было найти дорогу от края к центру и где трудно было не заблудиться.

Приведенная историческая справка показывает, насколько стар вопрос о лабиринтах и вместе с тем насколько многих он интересовал в свое время. Люди изощрялись в изобретении самых замысловатых и «безвыходных» лабиринтов. Но, в самом деле, возможно ли построить или даже начертить безвыходный лабиринт, т. е. такой, в котором найти путь к его центру и найти отсюда обратный выход было бы только делом удачи, случая, счастья, а не совершенно определенного и правильного математического расчета?

Разрешение этого вопроса принадлежит сравнительно позднейшему времени, и начало ему положено знаменитым Эйлером. Результаты произведенных в этом отношении изысканий привели к заключению, что *нет безвыходных лабиринтов*.

Разрешение каждого лабиринта может быть найдено, и притом сравнительно простым путем. Внимательный читатель сам сейчас убедится в этом.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ЛАБИРИНТАХ

Аллеи, дорожки, коридоры, галереи, шахты и т. п. лабиринты тянутся, изгибаясь во все стороны, перекрещиваются, расходятся по всевозможным направлениям, ответвляются, образуют тупики и т. д. Но мы для большей ясности рассмотрения вопроса все перекрестки обозначим просто точками, а все эти аллеи, дорожки, коридоры и т. д. будем принимать просто за линии, прямые или кривые, плоские или нет — все равно, но эти линии соединяют наши точки (перекрестки).

Эти точки и эти линии вместе составляют *геометрическую сеть*, или *лабиринт*, если какая-либо точка, движущаяся по линиям этой сети, может прийти к любой другой точке, не покидая линий нашей системы (или сети).

Приняв это, мы докажем, что подобная движущаяся точка (представляющая, например, человека) может последовательно описать все линии сети без всяких скачков и перерывов и при этом по каждой линии сети она пройдет ровно два раза.

Другими словами, лабиринт всегда может быть разрешен.

Но еще раньше, чем приступить к этому доказательству, можно доставить себе довольно интересное математическое развлечение, которое поможет уяснить все предыдущее и весьма полезно будет для усвоения самого доказательства. На листе белой бумаги возьмите произвольно несколько точек и соедините их по две столько раз, сколько хотите, произвольным числом прямых или кривых линий, но так, чтобы ни одна точка системы не осталась совершенно изолированной. Итак, вы получите то, что мы назвали геометрической сетью. Или нарисуйте, например, сеть трамваев или троллейбусов города, сеть железных дорог страны, сеть рек и каналов и т. д., прибавьте к ним, если хотите, границы страны — вы опять получите геометрическую сеть, или лабиринт (для начала, конечно, лучше брать не особенно сложную сеть).

Теперь на куске непросвечивающей бумаги или картона вырежьте небольшое отверстие, через которое была бы видна только небольшая часть составленной вами решетки, или лабиринта. Без такого приспособления в глазах рябит и легко запутаться в сети. Затем направьте окуляр (отверстие для глаза) вашего «экрана» на какой-либо перекресток (точку) вашей сети, например точку, которую назовем *A*, и дайте себе такое задание: обежать этим окуляром непрерывно все линиц сети два раза (пройти каждый путь вперед и назад) и возвратиться в точку *A*. Чтобы помнить уже пройденные окуляром линии, примите за правило на каждой проходимой линии ставить поперечную черточку при входе в перекресток и при выходе из него. Отсюда следует, что две оконечности каждого пути от перекрестка до перекрестка (от точки до точки) после выполнения задания (пройти каждую сеть линии два раза) должны быть обозначены двумя поперечными черточками, но не более.

Если мы имеем дело с действительным лабиринтом, или галереями подземных шахт, с разветвлениями пещер и т. д., то блуждающему в этих шахтах вместо черточек на бумаге придется делать уже иной знак, чтобы ориентироваться, и класть, например, камень при входе и выходе из каждого перекрестка — в галерее, которую он покидает, и в той, в которую он входит.

Но обратимся к упомянутому раньше доказательству, что всякий лабиринт разрешим, что нет «безвыходного» лабиринта. Другими словами, решим общую задачу о лабиринтах.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЛАБИРИНТАХ

Правило I. Отправляемся от начального пункта (первого перекрестка) и идем по какой угодно дороге, пока не приходим или в тупик, или к новому перекрестку. Тогда:

1. Если окажется, что мы попали в тупик, то возвращаемся назад и пройденный путь должен быть уже отброшен, так как мы его прошли два раза (вперед и обратно).

2. Если же мы приходим к новому перекрестку, то направляемся по новому произвольному пути, не забывая только всякий раз отметить поперечной

черточкой путь, по которому мы прибыли, и путь, по которому отправились дальше.

Как это показано на рис. 188, где мы движемся в направлении, показанном стрелкой *f*, мы приходим к пересечению путей и берем направление, обозначенное стрелкой *g*, но тот и другой путь мы обозначаем черточкой (на рисунках крестиками обозначены черточки, поставленные при последнем прохождении через перекресток).

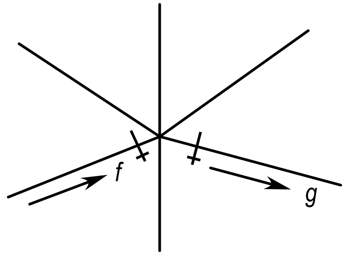


Рис. 188

Мы следуем указанному выше первому правилу всякий раз, когда приходим на такой перекресток, на котором мы еще не были. Но в конце концов мы должны прийти к перекрестку, на котором мы уже были, и здесь может представиться два случая. На известный уже нам пункт мы приходим по дороге, уже раз пройденной нами, или же по пути новому, не отмеченному еще черточкой. Следует придерживаться таких правил:

П р а в и л о II. Прибыв на известный уже наш перекресток по новой дороге, мы должны сейчас же повернуть обратно, предварительно отметив этот путь двумя черточками (прибытие и обратное отправление), как это указано на рис. 189.

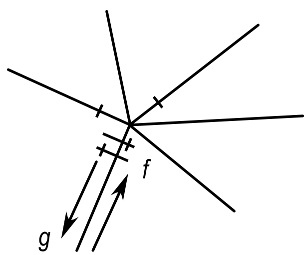


Рис. 189

П р а в и л о III. Если мы приходим на известный нам перекресток таким путем, которым уже раз прошли раньше, то, отметив этот путь второй черточкой, отправляемся дальше путем, которым мы еще не шли, если только такой путь существует. Этот случай изображен на рис. 190.

Но если такого пути нет, то выбираем дорогу, по которой прошли только один раз. Случай этот изображен на рис. 191.

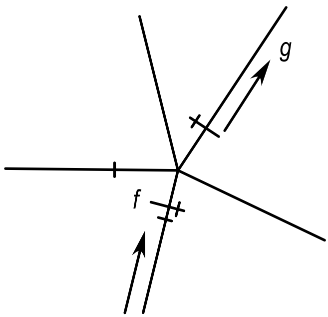


Рис. 190

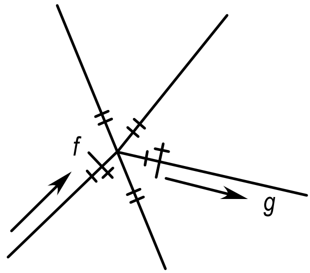


Рис. 191

Придерживаясь точно указанных правил, мы обойдем два раза все линии сети и придем в точку отправления. Это можно доказать, сделав и уяснив себе предварительно такие замечания:

1. Выходя из точки отправления, скажем *A*, мы ставим начальный знак (поперечную черточку).

2. Прохождение через перекресток по одному из предыдущих трех правил каждый раз добавляет два знака (две поперечные черточки) на линиях, которые сходятся в этой точке.

3. В любой момент прохождения лабиринта, перед прибытием на какой-либо перекресток или после отправления из него, начальный перекресток (пункт отправления)

имеет нечетное число знаков (черточек), а всякий другой перекресток имеет их четное число.

4. В любой момент, до или после прохода через перекресток, начальный перекресток имеет только один путь, обозначенный только одной черточкой. Всякий же иной из посещенных уже перекрестков может иметь только два пути, обозначенных одной черточкой.

5. После полного обхода лабиринта у всех перекрестков все пути должны иметь по две черточки. Это, впрочем, входит прямо в условие задания.

Приняв во внимание все вышеизложенное, мы легко убедимся, что если кто-либо отправляется из начального перекрестка, скажем A, и прибывает в какой-либо иной перекресток M, то он не может встретить таких трудностей задачи, которые могли бы остановить его дальнейшее путешествие. В самом деле, в это место он приходит или новым путем, или путем, который уже один раз пройден. В первом случае прилагается первое или второе из данных выше правил. Во втором случае вступление на перекресток M и остановка здесь дала бы *нечетное* число знаков около него, следовательно, за неимением нового пути надо пойти по уже пройденному один раз пути, и около перекрестка будет четное число знаков (если он не начальный) по замечанию 3.

Пусть, наконец, мы будем вынуждены закончить наш путь и возвратиться в начальный перекресток A. Назовем эту последнюю линию ZA, т. е. она ведет из перекрестка Z в начальный A. Этот путь должен быть необходимо тем самым, которым мы отправились первый раз из A, иначе путь можно было бы продолжить. И если теперь мы принуждены этим же путем возвратиться в начальную точку, то это значит, что из перекрестка *Z* нет уже никакого другого пути, который бы не был уже 2 раза пройден. Иначе это значило бы, что забыли применить первую часть правила III, более того, это значило бы, что в *Z* есть какой-то путь *YZ*, пройденный только один раз по замечанию 4. Итак, при последнем возвращении в *A* все пути в *Z* должны быть отмечены двумя черточками. Точно так же это можно доказать для предшествующего перекрестка *Y* и для всех остальных. Другими словами, наше предложение доказано, и задача решена.

171. ГОЛОВОЛОМНЫЙ ЛАБИРИНТ

Приведем один не построенный, а только начерченный лабиринт (рис. 192) с готовым и упрощенным решением его: все тупики (слепые проходы) в нем уже заштрихованы,

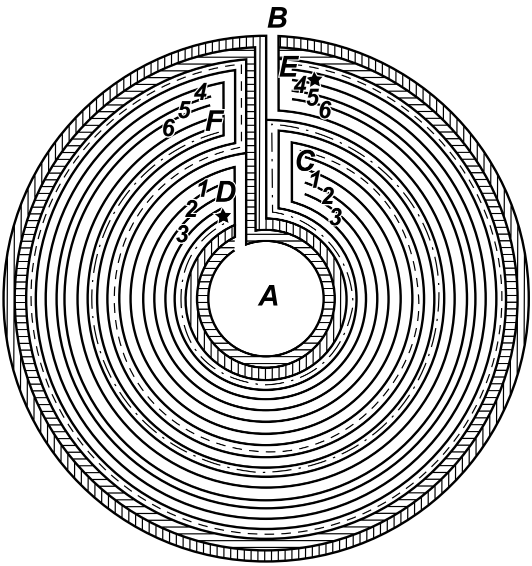


Рис. 192

и главнейшие пути указаны точечными или штриховыми линиями. И по решению, данному на этой фигуре, видно, что от *A* надо сначала идти к *C* и потом от *F* к *B*.

Но, когда мы придем к *C*, у нас появляются три дороги, обозначенные 1, 2, 3, чтобы дойти до *D*. Точно так же, когда мы дойдем до *E*, тоже видны три дороги, обозначенные 4, 5, 6, чтобы дойти до *F*. У нас есть также обозначенная точками дорога от *C* до *E*, другая — обозначенная точками дорога от *D* до *F* и проход от *D* до *E*, указанный звездами. Мы можем, следовательно, выразить положение дела маленькой упрощенной диаграммой на рис. 193. Здесь все пути соответствуют путям кругообразного лабиринта, но только более доступны глазу. И вот при таких-то условиях, при условии также, которое здесь можно выполнить, не проходить дважды через один и тот же проход, окажется 640 путей от *A* до *B*.

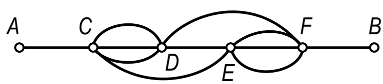


Рис. 193

Для головоломного лабиринта это — не правда ли? — довольно хорошо.

172. ХИЖИНА

А теперь, почтенный читатель, после изложенного уже и, думаем, усвоенного вами решения задачи о лабиринтах, для вас будет нетрудно найти путь к хижине, расположенной в парке, изображенном на рис. 194. Быть может, для сокращения времени вам не бесполезен будет совет начать поиски от хижины и найти лучше выход из этого коварного парка, чем начинать с входа. Впрочем, при наличии свободного времени это безразлично.

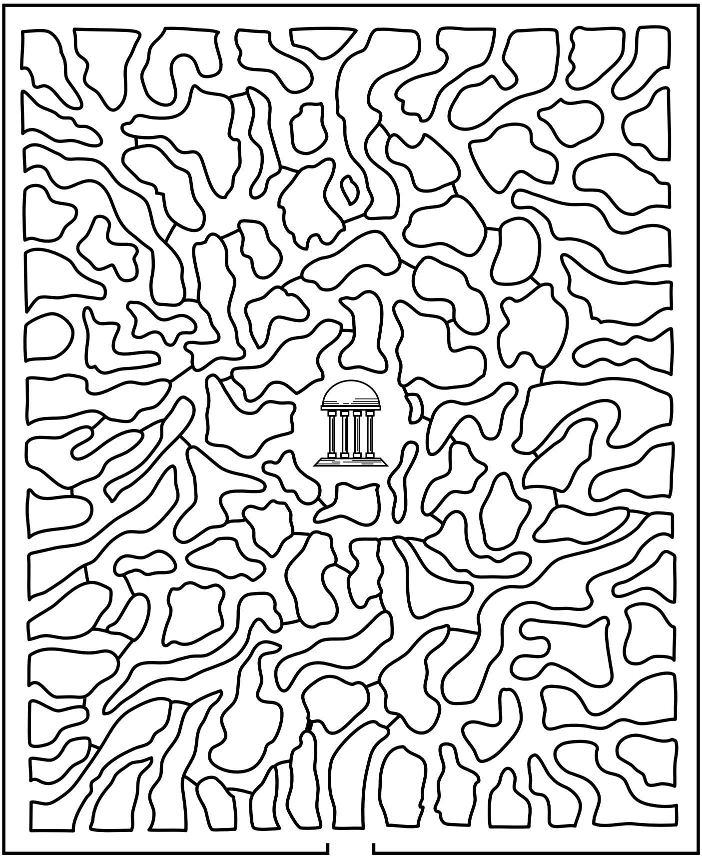


Рис. 194

173. ЕЩЕ ЛАБИРИНТ

Вот еще любопытный образчик лабиринта, в котором надо пробраться по кратчайшей дороге к центру (рис. 195).

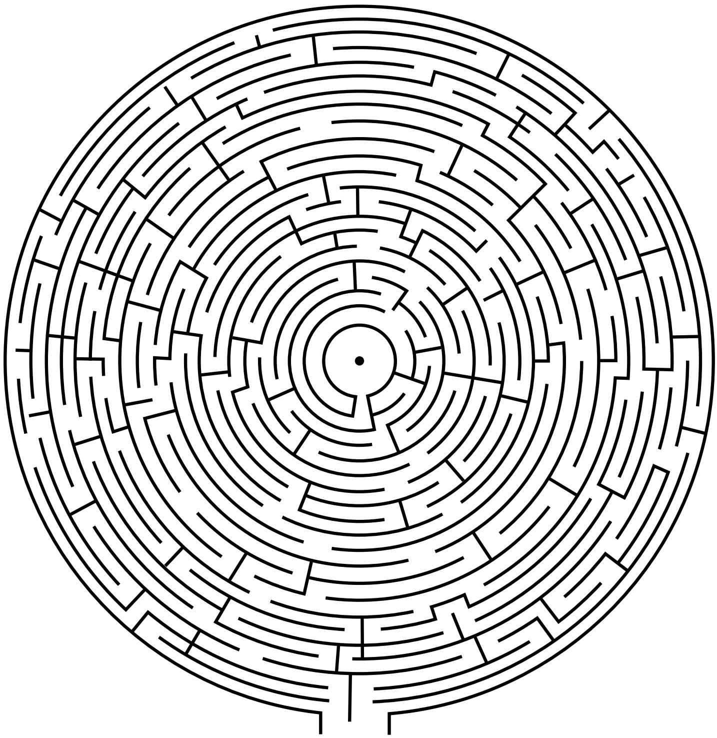


Рис. 195

ОГЛАВЛЕНИЕ

Издательство Лектор представляет:

Льюис Кэрролл

«История с узелками, или Все не так, как кажется»

Математика интересовала Чарльза Доджсона (Льюиса Кэрролла) еще со школьной скамьи. Там, где другие дети видели одни сухие цифры, он замечал увлекательную игру. Так, в «Истории с узелками» в каждый узелок автор постарался как можно незаметнее вплести одну или несколько математических задачек для развлечения и, быть может, в назидание читателям.

Математику и писателю Льюису Кэрроллу приписывают несколько изобретений: книжную суперобложку, дорожные шахматы, трехколесный велосипед, электрическую ручку, мнемоническую систему для запоминания имен и дат. А еще никтографию — инструмент для писания в потемках. Сам никтограф (карточка с сеткой из 16 квадратных отверстий, через которые чертились придуманные символы) Кэрролл тоже изобрел сам — он использовал систему точек и штрихов с обязательной точкой в левом верхнем углу.

Не удивительно, что это изобретение принадлежит именно Льюису Кэрроллу: он страдал бессонницей. Пытаясь отвлечься от грустных мыслей и уснуть, он выдумывал математические головоломки и сам же их решал. Так появился на свет сборник «Полуночные задачи», в котором Кэрролл собрал 72 задачи по тригонометрии, алгебре и планиметрии.

Издательство Лектор представляет:

Льюис Кэрролл

«Символическая логика, или Безупречная бессмыслица»

Льюис Кэрролл, хорошо известный как автор книг о приключениях Алисы, опубликовал немало математических работ, с некоторыми из которых мы хотим познакомить нашего читателя.

Многие его достижения в области математической логики намного опередили свое время. Способность Кэрролла решать так называемые сориты (сорит по-гречески «куча») — логические задачи, представленные цепочкой силлогизмов, у которых заключение одного силлогизма служит посылкой другого, — сравнивали с искусством. Вы поймете это, погрузившись в книгу «Символическая логика», в которой Кэрролл-математик предлагает более сотни чудесных задач.

Вторая часть книги включает раздел «Разные разности», где представлены логические парадоксы и письма. Кэрролл достиг вершины своего творчества в двух парадоксах: «Что черепаха сказала Ахиллу?» и «Аллен, Браун и Карр», озадачивающих многих и поныне.

Письма Льюиса Кэрролла к его большим друзьям — детям — особый, поистине уникальный жанр, не имеющий аналогий и параллелей. Каких только писем нет в его огромном эпистолярном наследии: тут и письма-ворчалки (если воспользоваться терминологией Винни-Пуха), и письма-дразнилки, и письма-сказки, и зеркальные письма, написанные от конца к началу, и, конечно, письма с математическими выкладками.

Научно-популярное издание

Емельян Игнатьевич Игнатьев

В ЦАРСТВЕ СМЕКАЛКИ

Над книгой работали:

Оформление — Заплавская Т. И.
Компьютерная верстка — Тарасов А. А., Махонин А. В.
Ответственный за выпуск — Захаров С. В.

Генеральный директор — Бодрова Ж. Л.

ООО «Лекстор»
http://www.rimis.ru
123007, Москва, 2-й Силикатный пр-д, д. 8
Оптовые и розничные продажи: +7 (499) 946-22-06
E-mail: info@rimis.ru
Интернет-магазин www.rimis.ru

Подписано в печать 03.07.2017 г.
Формат 84x108$^{1}/_{32}$.
Усл. печ. л. 11,97.
Тираж 1000 экз.