РГАСНТИ 27.31.15, 27.31.17 ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 31

Научный редактор и составитель
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

МОСКВА 1988

1—10120

УДК 517.951+517.956

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ—2

Консультирующие редакторы-составители тома
профессор *Ю. В. Егоров*,
доктор физико-математических наук *М. А. Шубин*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор-составитель тома

С. А. Вахрамеев

Авторы

Ю. В. Егоров, А. И. Комеч, М. А. Шубин

УДК 517.951+517.956

I. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ

Ю. В. Егоров, М. А. Шубин

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта статья содержит попытку авторов дать эскиз некоторых идей и методов современной теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Она является естественным продолжением содержащейся в предыдущем томе статьи авторов [21], где излагались классические вопросы, и посвящена в основном тем аспектам теории, которые связаны с

возникшим в 60-е годы направлением, позже названным «*микролокальным анализом*» и включающим в себя теорию и приложения псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, а также использование языка волновых фронтов обобщенных функций. При этом по необходимости затрагивается и ряд важных вопросов, относящихся к теории, предшествовавшей возникновению микролокального анализа, а иногда и вполне классических. Авторы ни в коей мере не претендуют на полноту. Эта статья является лишь вводной к серии более детальных статей различных авторов, которые публикуются в этом и последующих томах и будут содержать развернутое изложение большинства затронутых здесь вопросов.

Авторы благодарят М. С. Аграновича, просмотревшего рукопись и сделавшего ряд полезных замечаний.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы будем использовать некоторые стандартные обозначения, которые сейчас перечислим.

$\mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел.

$\mathbf{C}$ — множество всех комплексных чисел.

$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел.

$\mathbf{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел.

$\mathbf{R}^n$ — стандартное вещественное n-мерное векторное пространство.

$\mathbf{C}^n$ — стандартное комплексное n-мерное векторное пространство.

$\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

$D = i^{-1}\partial/\partial x$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbf{C}$; $D_j = i^{-1}\partial/\partial x_j$.

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, где α — мультииндекс, т. е. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbf{Z}_+$.

$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс.

$x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$, если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \ldots \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$.

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство C^∞-функций с компактным носителем в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

$\Delta = \Delta_x = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$ — стандартный лапласиан в $\mathbf{R}^n$.

$|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, если α — мультииндекс.

$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, если α — мультииндекс.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ — пространство всех обобщенных функций в Ω.

$\mathcal{E}'(\Omega)$ — пространство всех обобщенных функций с компактным носителем в Ω.

$L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство всех квадратично интегрируемых функций в Ω.

$S(\mathbf{R}^n)$ — пространство Шварца C^∞-функций на $\mathbf{R}^n$, у которых все производные убывают быстрее любой степени $|x|$ при $|x|\to\infty$.

$S'(\mathbf{R}^n)$ — пространство всех обобщенных функций умеренного роста на $\mathbf{R}^n$.

$\operatorname{supp} u$ — носитель (обобщенной) функции u.

$\operatorname{sing\,supp} u$ — носитель сингулярности обобщенной функции u.

$H^s(\mathbf{R}^n)$ — пространство Соболева, состоящее из таких $u\in S'(\mathbf{R}^n)$, что $(1+|\xi|^2)^{s/2}\tilde{u}(\xi)\in L_2(\mathbf{R}^n)$, где $\tilde{u}$ — преобразование Фурье обобщенной функции u.

$H^s(\Omega)$, где $s\in\mathbf{Z}_+$, — гильбертово пространство, состоящее из таких $u\in L_2(\Omega)$, что $D^\alpha u\in L_2(\Omega)$ при $|\alpha|\leqslant s$.

$H^s_{\text{comp}}(\Omega)=\mathscr{E}'(\Omega)\cap H^s(\mathbf{R}^n)$.

$H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ — пространство таких $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$, что $\varphi u\in H^s(\mathbf{R}^n)$ для любой функции $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

§ 1. Псевдодифференциальные операторы

1.1. Определение и простейшие сведения ([1], [19], [20], [46], [47], [66], [75], [76], [80], [83], [88], [91], [94], [95], [103], [104]). Теория псевдодифференциальных операторов (сокращенно п. д. о.) в ее современной форме появилась в середине 60-х годов. Ее основная цель — распространить стандартное применение преобразования Фурье к операторам с постоянными коэффициентами (основанное на том, что это преобразование переводит дифференцирование D^α в умножение на ξ^α) на операторы с переменными коэффициентами ([80]).

Рассмотрим в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ *дифференциальный оператор*

$$A=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{1.1}$$

где $a_\alpha\in C^\infty(\Omega)$, $D=i^{-1}\partial/\partial x$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$. Запишем функцию $u\in C_0^\infty(\Omega)$ по формуле обращения преобразования Фурье

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)\,d\xi, \tag{1.2}$$

где

$$\tilde{u}(\xi)=\int e^{-iy\cdot\xi}u(y)\,dy \tag{1.3}$$

(мы считаем, что функция u продолжена нулем на $\mathbf{R}^n\setminus\Omega$). Применяя оператор A к обеим частям в (1.2), мы получим

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\,\tilde{u}(\xi)\,d\xi, \tag{1.4}$$

где

$$a(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha. \tag{1.5}$$

Функция $a(x,\xi)$ называется *символом* или *полным символом* оператора A, а сам оператор часто обозначается $a(x,D)$ или $a(x,D_x)$. Мы видим, что $a\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^n)$ и $a(x,\xi)$ есть многочлен по ξ с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$. Подставляя в (1.4) выражение $\tilde{u}(\xi)$ по формуле (1.3), мы можем также записать оператор A в виде

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,\xi)\,u(y)\,dy\,d\xi, \tag{1.6}$$

где интеграл следует понимать как повторный.

В теории п. д. о. рассматривают операторы вида (1.4) (или (1.6)), но с символами $a=a(x,\xi)$, более общими, чем (1.5). Например, удобный класс символов получается, если потребовать выполнения оценок

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta K}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},\quad x\in K,\quad \xi\in\mathbf{R}^n, \tag{1.7}$$

где α, β — произвольные мультииндексы, K — компакт в Ω, m — некоторое действительное число. Класс символов $a\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющих этим оценкам, обозначается через $S^m(\Omega\times\mathbf{R}^n)$ или просто через S^m, если ясно или неважно, о какой области Ω идет речь. Ясно, что символы дифференциальных операторов (символы вида (1.5)) удовлетворяют (1.7), если в качестве m взять порядок оператора A или любое большее число.

Примером символа класса S^m при любом $m\in\mathbf{R}$ является символ $(1+|\xi|^2)^{m/2}$. Соответствующий оператор в $\mathbf{R}^n$ обозначается $(1-\Delta)^{m/2}$, что согласуется с определением степеней дифференциального оператора $1-\Delta$ при целом $m/2$.

Пусть $a\in S^m(\Omega\times\mathbf{R}^n)$. Зададим оператор A формулой (1.4) (или (1.6), где интеграл понимается как повторный). Из оценок (1.7) легко следует, что при $u\in C_0^\infty(\Omega)$ интеграл в (1.4) абсолютно сходится и его можно сколько угодно раз дифференцировать по x под знаком интеграла при $x\in\Omega$, так что мы получаем непрерывный линейный оператор

$$A: C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega), \tag{1.8}$$

который обозначается $a(x,D)$ или $a(x,D_x)$, как и в случае дифференциального оператора. Операторы вида $a(x,D)$ с символами $a\in S^m$ являются простейшими примерами п. д. о.

Изучим свойства п. д. о. вида $a(x,D)$ с символом $a\in S^m$. Прежде всего заметим, что если $m<-n$, то интеграл в (1.6) абсолютно сходится и мы можем, поменяв порядок интегрирования, записать оператор $A=a(x,D)$ в виде

$$Au(x)=\int K_A(x,y)\,u(y)\,dy, \tag{1.9}$$

где

$$K_A(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi)\, d\xi. \tag{1.10}$$

В нашем случае (при $m < -n$) *ядро* K_A непрерывно на $\Omega \times \Omega$. Используя тождество

$$e^{i(x-y)\cdot\xi} = |x-y|^{-2N} (-\Delta_\xi)^N e^{i(x-y)\cdot\xi}, \tag{1.11}$$

где N—целое, $N \geqslant 0$, и затем интегрируя по частям в (1.10), мы можем вместо (1.10) написать при $x \neq y$

$$K_A(x, y) = (2\pi)^{-n} |x-y|^{-2N} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} (-\Delta_\xi)^N a(x, \xi)\, d\xi. \tag{1.12}$$

Поскольку $(-\Delta_\xi)^N a(x, \xi) \in S^{m-2N}$, то этот интеграл можно k раз дифференцировать по x и y, если $m-2N+k < -n$. Поскольку N произвольно, это значит, что $K_A \in C^\infty$ при $x \neq y$, т. е. вне диагонали в $\Omega \times \Omega$.

В общем случае оператор A имеет ядро K_A, которое является обобщенной функцией на $\Omega \times \Omega$. Это следует из теоремы Шварца о ядре (см. [21, гл. 2, п. 1.11], [76, гл. 5]), или может быть непосредственно показано, если записать $\langle Au, v \rangle$ для $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ в виде повторного интеграла

$$\langle Au, v \rangle = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi)\, u(y)\, v(x)\, dy\, d\xi\, dx,$$

который интегрированием по частям с помощью тождества

$$e^{i(x-y)\cdot\xi} = (1+|\xi|^2)^{-N} (1-\Delta_y)^N e^{i(x-y)\cdot\xi} \tag{1.13}$$

преобразуется в интеграл

$$\langle Au, v \rangle = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i(x-y)\cdot\xi} (1+|\xi|^2)^{-N} a(x, \xi) \times \times (1-\Delta_y)^N [u(y)\, v(x)]\, dy\, d\xi\, dx. \tag{1.14}$$

Этот интеграл уже абсолютно сходится при достаточно большом N и остается абсолютно сходящимся, если заменить $u(y)v(x)$ на $\varphi = \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$, что позволяет написать

$$\langle Au, v \rangle = \langle K_A, v \otimes u \rangle,$$

где $K_A \in \mathscr{D}'(\Omega \times \Omega)$. Выполняя теперь в (1.14) интегрирование по частям с помощью (1.11), мы увидим, что и в общем случае $K_A \in C^\infty(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$, где Δ — диагональ в $\Omega \times \Omega$. Это свойство называется *псевдолокальностью* п. д. о. A. Оно равносильно тому, что если $u \in \mathscr{E}'(\Omega) \cap C^\infty(\Omega')$, где Ω' — открытое подмножество в Ω, то $Au \in \mathscr{D}'(\Omega) \cap C^\infty(\Omega')$.

Оператор $A = a(x, D_x)$ с символом $a \in S^m$ можно единственным образом продолжить до непрерывного отображения

$$A : \mathscr{E}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega). \tag{1.15}$$

Чтобы увидеть это, введем *транспонированный оператор* ${}^tA$, определяемый тождеством

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, {}^tAv \rangle, \quad u, v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.16}$$

Легко видеть, что такой оператор можно задать формулой

$${}^tAv(y) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi)\, v(x)\, dx\, d\xi,$$

или, что то же самое,

$${}^tAv(x) = (2\pi)^{n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(y, -\xi)\, v(y)\, dy\, d\xi. \tag{1.17}$$

Оператор ${}^tA$ задает отображение

$${}^tA : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega), \tag{1.18}$$

откуда, по двойственности, получаем непрерывное отображение (1.15), продолжающее отображение (1.8) в силу тождества (1.16). Формулу (1.16) можно считать определением Au при $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, беря в ней любое $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вместо транспонированного оператора ${}^tA$ можно было бы рассмотреть *формально сопряженный оператор* A^*, задаваемый формулой

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad u, v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.19}$$

где $(\cdot, \cdot)$—скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Такой оператор дается формулой

$$A^*v(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \overline{a(y, \xi)}\, v(y)\, dy\, d\xi \tag{1.20}$$

и тоже отображает $C_0^\infty(\Omega)$ в $C^\infty(\Omega)$.

Псевдолокальность оператора A равносильна следующему свойству задаваемого им отображения (1.15):

$$\operatorname{sing\,supp}(Au) \subset \operatorname{sing\,supp} u. \tag{1.21}$$

1.2. Запись оператора с помощью амплитуды. Связь амплитуды и символа. Символы транспонированного и сопряженного операторов ([19], [20], [46], [75], [76], [83], [103], [104]). Вид формул (1.17) и (1.20), задающих ${}^tA$ и A^*, слегка отличается от вида (1.6) оператора $A = a(x, D_x)$ и наводит на мысль рассмотреть более общие операторы A, определяемые выражениями вида

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\xi} a(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi, \tag{1.22}$$

где функция $a = a(x, y, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbf{R}^n)$ принадлежит $S^m = S^m(\Omega \times \Omega \times \mathbf{R}^n)$, т. е. удовлетворяет оценкам

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^{\beta_1} \partial_y^{\beta_2} a(x, y, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta_1\beta_2K} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}, \quad (x, y) \in K,$$

где K — компакт в $\Omega \times \Omega$. Функция $a(x, y, \xi)$ в записи (1.22) называется *амплитудой* оператора A. Класс операторов вида (1.22) с амплитудами $a \in S^m$ обозначается через L^m или $L^m(\Omega)$

и представляет собой простейший класс п. д. о. Легко видеть, что любой п. д. о. $A\in L^m$ задает непрерывные отображения (1.8) и (1.15). Каждый оператор $A\in L^m$ имеет транспонированный и формально сопряженный операторы ${}^tA$ и A^*, также принадлежащие L^m: их амплитуды ${}^ta$ и a^* выражаются через амплитуду a оператора A формулами

$${}^ta(x, y, \xi)=a(y, x, -\xi), \quad a^*(x, y, \xi)=\overline{a(y, x, \xi)}. \qquad (1.23)$$

Всякий оператор $A\in L^m$ псевдолокален (это доказывается так же, как и для операторов $A=a(x, D_x)$).

Запись оператора $A\in L^m$ в виде (1.22) неоднозначна: например, интегрируя по частям, можно заменить амплитуду $a(x, y, \xi)$ на амплитуду $a_1(x, y, \xi)=(1+|x-y|^2)^{-N}(1-\Delta_\xi)^N a(x, y, \xi)$, не меняя самого оператора. Запись же оператора A в виде $a(x, D_x)$ существенно уменьшает эту неоднозначность (например, в случае $\Omega=\mathbf{R}^n$ такая запись вообще единственна, т. е. символ $a(x, \xi)$ однозначно определяется оператором A). Поэтому возникает желание уметь упрощать запись (1.22), переходя от нее, например, к (1.6) с подходящим образом подобранным символом. Оказывается, что с точностью до операторов с гладким ядром это можно сделать.

Теорема 1.1. Всякий оператор $A\in L^m(\Omega)$ с амплитудой $a\in S^m$ может быть записан в виде $A=\sigma_A(x, D_x)+R$, где $\sigma_A\in S^m$, а R — оператор с ядром $K_R\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$. Эту запись можно выбрать так, что

$$\sigma_A(x, \xi)-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x}\in S^{m-N}(\Omega\times\mathbf{R}^n) \text{ [1]} \qquad (1.24)$$

при любом целом $N>0$.

Ниже мы укажем идею доказательства этой теоремы, а пока отметим, что все члены суммы в (1.24) зависят лишь от значений амплитуды $a(x, y, \xi)$ и ее производных при $y=x$ (в частности, главный член этой суммы равен просто $a(x, x, \xi)$). Это значит, что с точностью до символов порядка $m-N$ (при любых N) символ σ_A определяется значениями амплитуды $a(x, y, \xi)$ вблизи $\Delta\times\mathbf{R}^n$, где Δ — диагональ в $\Omega\times\Omega$. В самом деле, если $a(x, y, \xi)=0$ в окрестности $\Delta\times\mathbf{R}^n$, то $K_A\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$, поскольку в этом случае интегрирование по частям с помощью (1.11) позволяет заменить амплитуду $a(x, y, \xi)$ на амплитуду $|x-y|^{-2N}(-\Delta_\xi)^N a(x, y, \xi)\in S^{m-N}$, не меняя оператора. Укажем кстати, что любой оператор R с гладким ядром K_R может быть записан в виде (1.22) с амплитудой $a_R(x, y, \xi)=(2\pi)^n e^{-i(x-y)\xi}\cdot K_R(x, y)\psi(\xi)$, где функция $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ такова, что $\int\psi(\xi)d\xi=1$. Ясно, что $a_R\in S^{-\infty}$, где

$$S^{-\infty}=\bigcap_{m\in\mathbf{R}} S^m.$$

[1] Напомним, что $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$ для любого мультииндекса.

В дальнейшем мы будем использовать также обозначения

$$L^{-\infty}=\bigcap_{m\in\mathbf{R}} L^m, \quad S^\infty=\bigcup_{m\in\mathbf{R}} S^m, \quad L^\infty=\bigcup_{m\in\mathbf{R}} L^m.$$

Ясно, что $L^{-\infty}$ — это в точности класс всех операторов с гладким ядром.

Система соотношений (1.24) при всех $N=1, 2, \ldots$ будет в дальнейшем кратко записываться в виде асимптотического ряда

$$\sigma_A(x, \xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x}. \qquad (1.24')$$

Более общо, если дана система функций $a_j=a_j(x, \xi)\in S^{m_j}$, $j=0, 1, 2\ldots$, причем $m_j\to-\infty$ при $j\to\infty$, и дана функция $a=a(x, \xi)$, то мы будем писать, что

$$a\sim\sum_{j=0}^\infty a_j, \qquad (1.25)$$

если для любого целого $N\geqslant 0$

$$a-\sum_{j=0}^{N-1} a_j\in S^{\overline{m}_N}, \qquad (1.26)$$

где $\overline{m}_N=\max_{j\geqslant N} m_j$. Вместо последнего равенства достаточно, очевидно, считать, что $\overline{m}_N$ — любые числа, для которых $\overline{m}_N\to-\infty$ при $N\to\infty$. Функция a очевидным образом определена однозначно с точностью до добавления любой функции из $S^{-\infty}$. Ясно, что $a\in S^m$, где $m=\max_{j\geqslant 0} m_j$. Нетрудно доказать, что для любой последовательности $a_j\in S^{m_j}$ существует такая функция a, что выполнено (1.25): нужно взять

$$a(x, \xi)=\sum_{j=0}^\infty\chi\left(\frac{\xi}{t_j}\right)a_j(x, \xi), \qquad (1.27)$$

где $\chi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\chi(\xi)=1$ при $|\xi|\geqslant 2$, $\chi(\xi)=0$ при $|\xi|\leqslant 1$, а числа t_j достаточно быстро стремятся к $+\infty$ при $j\to\infty$.

Аналогичным образом асимптотические суммы определяются для амплитуд $a(x, y, \xi)$.

С помощью асимптотического суммирования полезно выделить в S^m класс *классических или полиоднородных символов* $S^m_{\text{кл}}$, состоящий из символов $a\in S^m$, имеющих разложения вида (1.25), в котором $m_j=m-j$ и функция a_j положительно однородна по ξ при $|\xi|\geqslant 1$ порядка $m_j=m-j$, т. е.

$$a_j(x, t\xi)=t^{m-j}a_j(x, \xi), \quad |\xi|\geqslant 1, \ t\geqslant 1.$$

Аналогичным образом определяются *классические амплитуды*.

Пусть $a^0_{m-j}(x, \xi)$ — положительно однородная по ξ (уже при всех $\xi \neq 0$) функция на $\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$, совпадающая с $a_j(x, \xi)$ при $|\xi| \geqslant 1$. Такая функция однозначно определена и вместо (1.25) при $a \in S^m_{\text{кл}}$ мы будем также писать

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a^0_{m-j}. \tag{1.28}$$

Эта запись корректна, поскольку функции a^0_{m-j} также определяют a по модулю $S^{-\infty}$. Функция $a^0_m = a^0_m(x, \xi)$, однородная по ξ порядка m, называется *главным символом* оператора A.

Ясно, что переход от амплитуды a к символу σ_A по формуле (1.24′) не выводит за пределы $S^m_{\text{кл}}$, т. е. если $a \in S^m_{\text{кл}}$, то и $\sigma_A \in S^m_{\text{кл}}$. Классическими будут и символы дифференциальных операторов. Ряд других важных операций также не выводит за пределы класса классических символов и амплитуд.

Укажем идею доказательства теоремы 1.1. Прежде всего, умножая амплитуду $a(x, y, \xi)$ на срезающую функцию $\chi = \chi(x, y) \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$, равную 1 в окрестности диагонали, мы, как уже отмечалось, меняем оператор A на оператор с гладким ядром и можем теперь добиться того, чтобы $a(x, y, \xi) = 0$ при $(x, y) \notin U$, где U — любая наперед заданная окрестность диагонали в $\Omega \times \Omega$. Теперь разложим $a(x, y, \xi)$ по формуле Тейлора по y при $y = x$:

$$a(x, y, \xi) = \sum_{|\alpha| < N-1} \frac{1}{\alpha!} [D^\alpha_y a(x, y, \xi)]|_{y=x} [i(y-x)]^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} [i(y-x)]^\alpha r_\alpha(x, y, \xi), \tag{1.29}$$

где $r_\alpha \in S^m$. Подставляя это разложение в (1.22) и замечая, что

$$[i(y-x)]^\alpha = (-\partial_\xi)^\alpha e^{i(x-y)\xi},$$

мы, интегрированием по частям из членов первой суммы (1.29), получим операторы с символами, равными слагаемым суммы в (1.24). Остаток же (2-я сумма в (1.29)) преобразуется таким же образом в оператор с амплитудой из S^{m-N}. Отсюда следует, что если взять символ σ_A, разлагающийся в асимптотический ряд (1.24′), то оператор $A - \sigma_A(x, D_x)$ будет принадлежать L^{m-N} при любом N, т. е. будет оператором с гладким ядром, что и требовалось.

С помощью теоремы 1.1 легко получаются формулы, выражающие через σ_A (по модулю $S^{-\infty}$) символы $\sigma_{{}^tA}$ и σ_{A^*} транспонированного и формально сопряженного операторов. В самом

деле, с точностью до операторов с гладким ядром можно считать, что ${}^tA$ и A^* задаются амплитудами

$${}^ta = {}^ta(x, y, \xi) = \sigma_A(y, -\xi), \quad a^*(x, y, \xi) = \overline{\sigma_A(y, \xi)}$$

(см. (1.23)). Но теперь из теоремы 1.1 следует, что

$$\sigma_{{}^tA}(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi D^\alpha_x \sigma_A(x, -\xi), \tag{1.30}$$

$$\sigma_{A^*}(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi D^\alpha_x \overline{\sigma_A(x, \xi)}. \tag{1.31}$$

В частности, $\sigma_{A^*} - \bar{\sigma}_A \in S^{m-1}$. Отсюда следует, что если оператор $A \in L^m$ формально сопряжен (т. е. симметричен на $C^\infty_0(\Omega)$), то $\operatorname{Im} \sigma_A \in S^{m-1}$, и если при этом оператор является классическим, то старшая однородная часть $\sigma^0_A(x, \xi)$ (порядка m) его символа вещественнозначна.

Приведем два важных примера п. д. о., не являющихся дифференциальными операторами.

Пример 1.1 (*Одномерный сингулярный интегральный оператор*). Рассмотрим оператор A на $\mathbf{R}^1$ вида

$$Au(x) = a(x) u(x) + \text{v. p.} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(x, y)}{x-y} u(y)\, dy,$$

где $a \in C^\infty(\mathbf{R})$, $L \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, а v. p. означает «valeur principale» — *главное значение интеграла*, т. е.

$$\text{v. p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(x, y)}{x-y} u(y)\, dy = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi i} \int_{|y-x| \geqslant \varepsilon} \frac{L(x, y)}{x-y} u(y)\, dy.$$

Записывая по лемме Адамара $L(x, y) = b(x) + (y-x) L_1(x, y)$, где $b(x) = L(x, x)$, $L_1 \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, мы получим, что

$$Au(x) = a(x) u(x) + b(x) Su(x) + R_1 u(x),$$

где $R_1 \in L^{-\infty}$, а S — *преобразовние Гильберта*

$$Su(x) = \text{v. p.} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy,$$

которое сводится к умножению $\tilde{u}(\xi)$ на $-\operatorname{sgn} \xi$ и поэтому, с точностью до оператора с гладким ядром A, имеет вид $a(x, D_x)$, где $a(x, \xi) = a(x) - b(x) \chi(\xi) \operatorname{sgn} \xi$, $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\chi(\xi) = 1$ при $|\xi| \geqslant 1$, $\chi(\xi) = 0$ при $|\xi| < 1/2$. Таким образом, A — классический п. д. о. порядка 0 с главным символом $\sigma(x, \xi) = a(x) - b(x) \operatorname{sgn} \xi$.

Пример 1.2 (*Многомерный сингулярный интегральный оператор*). В $\mathbf{R}^n$ рассмотрим оператор A вида

$$Au(x)=a(x)u(x)+\text{v. p.}\int \frac{L\left(x, \frac{x-y}{|x-y|}\right)}{|x-y|^n}u(y)\,dy=$$
$$=a(x)u(x)+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|y-x|\geq\varepsilon}\frac{L\left(x, \frac{x-y}{|x-y|}\right)}{|x-y|^n}u(y)\,dy,$$

где $a\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $L=L(x, \omega)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times S^{n-1})$ (здесь S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$), причем

$$\int_{S^{n-1}} L(x, \omega)\,d\omega=0, \quad x\in\mathbf{R}^n.$$

Тогда выражение $|z|^{-n}L(x, z)$ задает гладко зависящую от x однородную (порядка $-n$) обобщенную функцию на $\mathbf{R}^n_z$ (см. [21, § 1 гл. 2], [76, § 3.2], преобразование Фурье которой (по z) есть обобщенная функция $g(x, \xi)$ на $\mathbf{R}_\xi^n$, однородная порядка 0 по ξ, гладкая при $\xi\neq0$ и гладко зависящая от $x\in\mathbf{R}^n$. Отсюда легко следует, что, с точностью до оператора с гладким ядром, A записывается в виде $a(x, D_x)$, где $a(x, \xi)=a(x)+\chi(\xi)g(x, \xi)$, $\chi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\chi(\xi)=1$ при $|\xi|\geqslant1$, $\chi(\xi)=0$ при $|\xi|\leqslant1/2$. В частности, A — классический п. д. о. порядка 0 с главным символом $\sigma(x, \xi)=a(x)+g(x, \xi)$.

1.3. Теорема о композиции. Параметрикс эллиптического оператора ([19], [20], [46], [76], [83], [103], [104]). Пусть даны два п. д. о. A, $B: C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$. Для того чтобы композиция $A\circ B$ имела смысл, нужно потребовать, чтобы оператор B отображал $C_0^\infty(\Omega)$ в $C_0^\infty(\Omega)$ или чтобы оператор A продолжался до непрерывного оператора из $C^\infty(\Omega)$ в $C^\infty(\Omega)$. На самом деле удобнее наложить чуть более сильное требование собственности. А именно, назовем оператор $A\in L^m(\Omega)$ *собственным*, если обе естественные проекции π_1, $\pi_2: \operatorname{supp} K_A\to\Omega$ являются собственными отображениями (напомним, что отображение $f: X\to Y$ двух локально компактных пространств называется *собственным*, если прообраз $f^{-1}(K)$ любого компакта $K\subset Y$ есть компакт в X). Собственность оператора A равносильна одновременному выполнению двух условий: 1) для любого компакта $K\subset\Omega$ существует такой компакт $K_1\subset\Omega$, что оператор A отображает $C_0^\infty(K)$ в $C_0^\infty(K_1)$; 2) то же самое верно для транспонированного оператора ${}^tA$.

Срезая ядро K_A вблизи диагонали, легко для любого п. д. о. $A\in L^m(\Omega)$ получить разложение $A=A_1+R$, где $R\in L^{-\infty}(\Omega)$, а оператор A_1 является собственным. Это замечание позволяет в большинстве случаев без ущерба для общности ограничиться рассмотрением собственных операторов.

Собственный оператор $A\in L^m(\Omega)$ задает непрерывные отображения

$$A: C_0^\infty(\Omega)\to C_0^\infty(\Omega),$$
$$A: C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega),$$
$$A: \mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{E}'(\Omega),$$
$$A: \mathscr{D}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega).$$

Поэтому если один из операторов A, $B\in L^\infty(\Omega)$ является собственным, то композиция $A\circ B$ имеет смысл.

Для описания символа композиции рассмотрим сначала случай дифференциальных операторов $A=a(x, D_x)$ и $B=b(x, D_x)$. Положим $C=A\circ B$. По формуле Лейбница, имеем

$$Cu(x)=a(x, D_x+D_y)[b(x, D_y)u(y)]|_{y=x}=$$
$$=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x, D_y)D_x^\alpha b(x, D_y)u(y)|_{y=x}$$

(мы воспользовались формулой Тейлора, разложив $a(x, D_x+D_y)$ по D_x). Это означает, что $C=c(x, D_x)$, где

$$c(x, \xi)=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)D_x^\alpha b(x, \xi).$$

Здесь сумма конечна ввиду того, что функция a — многочлен по ξ. В случае, если $a\in S^{m_1}$, $b\in S^{m_2}$, эта сумма будет иметь смысл как асимптотическая.

Теорема 1.2 (*теорема о композиции*). Пусть $A\in L^{m_1}$, $B\in L^{m_2}$ — два п. д. о. в Ω, один из которых является собственным. Тогда $C=A\circ B\in L^{m_1+m_2}$ и $C=c(x, D_x)+R$, где $R\in L^{-\infty}$, а $c(x, \xi)$ имеет асимптотическое разложение

$$c(x, \xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\left[\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)\right]\cdot\left[D_x^\alpha b(x, \xi)\right]. \tag{1.32}$$

Для доказательства можно рассуждать так же, как для дифференциальных операторов, но ограничить разложение по Тейлору конечной суммой и провести оценку остаточного члена. Другой возможный путь состоит в том, чтобы пользуясь записью $B={}^t({}^tB)$, представить оператор B с помощью амплитуды $\tilde b(y, \xi)=\sigma_{{}^tB}(y, -\xi)$, откуда

$$\widetilde{Bu}(\xi)=\iint e^{-iy\xi}\tilde b(y, \xi)u(y)\,dy$$

и

$$Cu(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\xi}a(x, \xi)\tilde b(y, \xi)u(y)\,dy\,d\xi,$$

так что C есть оператор с амплитудой $c(x, y, \xi)=a(x, \xi)\tilde b(y, \xi)$. Применяя теорему 1.1, мы получаем, что $C\in L^{m_1+m_2}$. Теперь применение формулы (1.30), из которой находится $\tilde{b}(y, \xi)$, а также формула (1.24) и несложные алгебраические преобразования приводят к (1.32).

Отметим, что главный член в правой части (1.32) равен просто произведению $a(x, \xi)b(x, \xi)$, так что

$$c(x, \xi)-a(x, \xi)\, b(x, \xi)\in S^{m_1+m_2-1}. \qquad (1.33)$$

Если A и B — классические п. д. о. порядков m_1 и m_2 соответственно, то $C=A\circ B$ — классический п. д. о. порядка m_1+m_2, имеющий главный символ

$$c^0_{m_1+m_2}(x, \xi)=a^0_{m_1}(x, \xi)\, b^0_{m_2}(x, \xi). \qquad (1.34)$$

Дадим теперь важное

Определение 1.1. Оператор $A=a(x, D_x)\in L_m(\Omega)$ называется *эллиптическим п. д. о.* порядка m, если для любого компакта $K\subset\Omega$ существуют такие положительные постоянные $R=R(K)$ и $\varepsilon=\varepsilon(K)$, что

$$|a(x, \xi)|\geqslant\varepsilon|\xi|^m,\ x\in K,\ |\xi|\geqslant R. \qquad (1.35)$$

Более общий оператор $A=a(x, D_x)+R\in L^m(\Omega)$, (здесь $R\in L^{-\infty}$, $a\in S^m$) называется *эллиптическим*, если эллиптичен оператор $a(x, D_x)$. При выполнении (1.35) символ $a(x, \xi)$ называется *эллиптическим символом.*

Если $A\in L^m_{\text{кл}}(\Omega)$ и $a^0_m(x, \xi)$ — главный символ оператора A (однородный порядка m), то эллиптичность A равносильна тому, что

$$a^0_m(x, \xi)\neq 0 \text{ при } \xi\neq 0, \qquad (1.36)$$

что согласуется с определением эллиптичности дифференциального оператора (см. [21, § 2 гл. 1]).

Теорема 1.3. Если A — эллиптический п. д. о. порядка m в Ω, то существует такой собственный п. д. о. $B\in L^{-m}(\Omega)$, что

$$B\circ A=I-R_1,\ A\circ B=I-R_2, \qquad (1.37)$$

где $R_j\in L^{-\infty}(\Omega)$, $j=1, 2, \ldots$. Такой п. д. о. B определен однозначно с точностью до добавления операторов с гладким ядром и является эллиптическим п. д. о. порядка $-m$. Если A — классический п. д. о. порядка m, то B — классический п. д. о. порядка $-m$.

Оператор B, удовлетворяющий условиям этой теоремы, называется *параметриксом* оператора A. Тот факт, что параметрикс эллиптического п. д. о. также является п. д. о., показывает правильность выбора класса п. д. о. В частности, параметрикс эллиптического дифференциального оператора является классическим п. д. о.

Для построения параметрикса B оператора A нужно прежде всего в качестве первого приближения рассмотреть оператор

$B_0\in L^{-m}$, символ которого равен $a^{-1}(x, \xi)$ при больших $|\xi|$ (т. е. при $x\in K$, $|\xi|>R(K)$ для любого компакта $K\subset\Omega$). Добавляя оператор с гладким ядром, мы можем сделать оператор B_0, собственным. Из теоремы о композиции следует, что

$$B_0A=I-T_1,\ AB_0=I-T_2;\ T_j\in L^{-1}(\Omega),\ j=1, 2.$$

Строя теперь такие собственные операторы B_0' и B_0'', что

$$B_0'\sim I+T_1+T_1^2+\ldots,\quad B_0''\sim I+T_2+T_2^2+\ldots$$

(это означает, что символы операторов B_0' и B_0'' задаются соответствующими асимптотическими суммами операторов, стоящих в правых частях), и затем полагая $B_1=B_0'B_0$, $B_2=B_0B_0''$, мы получим соотношения

$$B_1A=I-R_1',\quad AB_2=I-R_2';\quad R_j'\in L^{-\infty},\quad j=1, 2.$$

Умножая первое из них справа на B_2 и пользуясь вторым соотношением, мы получим, что $B_1-B_2\in L^{-\infty}(\Omega)$, так что в качестве B можно взять любой из операторов B_j. Попутно доказана единственность параметрикса B с точностью до оператора из $L^{-\infty}(\Omega)$.

Из существования параметрикса вытекает регулярность решений эллиптических уравнений с гладкой правой частью. А именно, пусть $u\in\mathscr{D}'(\Omega$ и $Au=f\in\mathscr{D}'(\Omega)\cap C^\infty(\Omega_1)$, где $\Omega_1\subset\Omega$ (мы считаем, что Au имеет смысл: достаточно, например, чтобы было $f\in\mathscr{E}'(\Omega)$, или чтобы оператор A был собственным). Тогда $u\in C^\infty(\Omega_1)$, поскольку, применяя к обеим частям равенства $Au=f$ оператор B, мы получим: $u=Bf+R_1u$ и останется воспользоваться тем, что $Bf\in C^\infty(\Omega_1)$, ввиду псевдолокальности оператора B, а $R_1u\in C^\infty(\Omega)$, поскольку R_1 — оператор с гладким ядром. Более точные теоремы регулярности могут быть сформулированы в терминах соболевских норм, что будет сделано ниже.

Укажем чуть подробнее структуру параметрикса B для классического эллиптического п. д. о. A порядка m. Пусть символ $a(x, \xi)$ оператора A имеет асимптотическое разложение (1.28). Пусть символ $b(x, \xi)$ параметрикса B имеет аналогичное разложение

$$b(x, \xi)\sim\sum_{k=0}^{\infty} b^0_{-m-k}(x, \xi). \qquad (1.38)$$

При нахождении оператора $B\circ A-I$, по формуле композиции, все однородные компоненты должны обратиться в 0. Отсюда, группируя члены ряда, задающего символ оператора $B\circ A-I$, по степеням однородности, получим для функций b^0_{m-k} следующие уравнения

$$b^0_{-m}a^0_m=1,$$

$$b^0_{-m-l}a^0_m+\sum_{\substack{|\alpha|+j+k=l\\ k<l}}\frac{1}{\alpha!}[\partial^\alpha_\xi b_{-m-k}][D^\alpha_x a_{m-j}]=0. \tag{1.39}$$

Из первого из этих уравнений находим, что $b^0_{-m}=(a^0_m)^{-1}$. Следующие, очевидно, дают возможность индуктивно определить все слагаемые в сумме (1.38), определяющие параметрикс с точностью до оператора из $L^{-\infty}(\Omega)$.

1.4. Действие псевдодифференциальных операторов в пространствах Соболева и точные теоремы о регулярности решений эллиптических уравнений ([19], [20], [46], [76], [83], [103], [104]). Ключевым фактом, позволяющим рассматривать п. д. о. в пространствах Соболева, является следующая

Теорема 1.4. Пусть оператор $A=a(x, D_x)\in L^0(\mathbf{R}^n)$ имеет символ $a(x, \xi)$, удовлетворяющий оценкам

$$|\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x a(x, \xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|},\quad x,\ \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.40}$$

Тогда A продолжается до линейного непрерывного оператора

$$A: L_2(\mathbf{R}^n)\to L_2(\mathbf{R}^n).$$

Разница между оценками (1.40) и обычными оценками (1.7), определяющими класс символов $S^0(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$, состоит в том, что постоянные $C_{\alpha\beta}$ в (1.40) не зависят от x, тогда как в (1.7) они выполнялись при $x\in K$ для любого компакта $K\subset\mathbf{R}^n$ с постоянными $C_{\alpha\beta K}$, зависящими от K. В частности, оценки (1.40) выполнены для любого такого символа $a\in S^m(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$, что $a(x, \xi)=0$ при $|x|>R$ или $a(x, \xi)=a_\infty(\xi)$ при $|x|>R$, т. е. для символа, равного нулю или даже просто не зависящего от x при больших x. В частности, сингулярные интегральные операторы примеров 1.1 и 1.2 продолжаются до ограниченных операторов в $L^2(\mathbf{R}^n)$, при условии, что определяющие их функции $a(x)$, $L(x, y)$ таковы, что в окрестности бесконечности рассматриваемый оператор превращается в оператор свертки (это значит, что $a(x)=a_\infty$ при $|x|>R$ и $L(x, y)=L_0$ при $|x|>R$ или $|y|>K$ в случае примера 1.1, $L(x, z)=L_\infty(z)$ в случае примера 1.2.).

Одно из возможных доказательств теоремы 1.4 может быть основано на уже развитом алгебраическом формализме. А именно, пользуясь теоремой о композиции, модифицированной на случай равномерных по x оценок символов, и выбирая такую постоянную $M>0$, что $M>\overline{\lim\limits_{|\xi|\to\infty}}\sup\limits_x|a(x, \xi)|$, мы можем построить такой оператор $B=b(x, D_x)\in L^0(\mathbf{R}^n)$, символ которого $b(x, \xi)$ также удовлетворяет оценкам вида (1.40), что $M^2=A^*A+B^*B+R$, где $R=r(x, D_x)\in L^{-\infty}$ и символ $r(x, \xi)$ также удовлетворяет равномерным по x оценкам класса $S^{-\infty}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$. Отсюда следует, что при $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\|Au\|^2=M^2\|u\|^2-\|Bu\|^2-(Ru, u)\leqslant M^2\|u\|^2+|(Ru, u)|,$$

т. е. дело сводится к ограниченности оператора R, вытекающей из неравенства Юнга, поскольку ядро K_R оператора R мажорируется ядром оператора свертки с быстро убывающей функцией.

Это же рассуждение показывает, что если в условиях теоремы 1.4

$$\overline{\lim_{|x|+|\xi|\to\infty}}|a(x, \xi)|=0, \tag{1.41}$$

то оператор A компактен (вполне непрерывен) в $L^2(\mathbf{R}^n)$. В самом деле, в этом случае, производя срезку в окрестности бесконечности, мы можем заменить оператор A на такой же оператор с символом $a(x, \xi)$, равным 0 при больших $|x|$, отличающийся от A на оператор со сколь угодно малой нормой. Теперь, считая уже, что $a(x, \xi)=0$ при больших $|x|$, повторим ту же конструкцию, что и выше; мы можем считать тогда постоянную $M>0$ сколь угодно малой, а символ $r(x, \xi)$ равным 0 при больших $|x|$, так что оператор R будет оператором Гильберта—Шмидта и, следовательно, компактным оператором. В итоге получаем для любого $\varepsilon>0$

$$\|Au\|^2\leqslant\varepsilon^2\|u\|^2+|(R_\varepsilon u, u)|$$

с компактным оператором R_ε, откуда, очевидно, следует компактность самого оператора A. В частности, если $A=a(x, D_x)\in L^m(\mathbf{R}^n)$, где $m<0$ и $a(x, \xi)=0$ при больших $|x|$, то оператор A компактен в $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Из теоремы 1.4 легко следует

Теорема 1.4′. Пусть оператор $A=a(x, D_x)\in L^m(\mathbf{R}^n)$ имеет символ $a(x, \xi)$, удовлетворяющий оценкам

$$|\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x a(x, \xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},\quad x,\ \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.42}$$

Тогда A продолжается до линейного непрерывного оператора

$$A: H^s(\mathbf{R}^n)\to H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$$

для любого $s\in\mathbf{R}$.

(Здесь $H^s(\mathbf{R}^n)$ — стандартное пространство Соболева в $\mathbf{R}^n$ (см. [21, § 3 гл. 2]).

В самом деле, если воспользоваться операторами $(1-\Delta)^{s/2}$, осуществляющими изоморфизм $H^s(\mathbf{R}^n)$ на $L_2(\mathbf{R}^n)$, то дело сводится к ограниченности в $L_2(\mathbf{R}^n)$ оператора $(1-\Delta)^{(s-m)/2}A(1-\Delta)^{-s/2}$, удовлетворяющего условиям теоремы 1.4.

Из теоремы 1.4′ очевидным образом следует, что если $A\in L^m(\Omega)$, то A задает непрерывный линейный оператор

$$A: H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega)\to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Это позволяет вывести из существования параметрикса эллиптического оператора A порядка m точную теорему регулярности для решения соответствующего эллиптического уравнения $Au=f$. А именно, если $Au=f\in H^s_{\rm loc}(\Omega)$, то $u\in H^{s+m}_{\rm loc}(\Omega)$, поскольку если B — параметрикс оператора A, то мы получаем $u=Bf-Ru$, где $R\in L^{-\infty}(\Omega)$, так что $Ru\in C^\infty(\Omega)$, а $Bf\in H^{s+m}_{\rm loc}(\Omega)$, по теореме 1.4′, поскольку $B\in L^{-m}(\Omega)$ и оператор B — собственный. Отсюда легко следуют также локальные априорные оценки решений:

$$\|u\|_{s,\Omega'}\leqslant C(\|Au\|_{s-m,\Omega}+\|u\|_{-N,\Omega}),$$

где Ω' — такая подобласть в Ω, что $\overline{\Omega'}$ — компакт, содержащийся в Ω, и $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ означает норму в $H^s(\Omega)$.

Отметим еще, что оператор A, удовлетворяющий условиям теоремы 1.4, ограничен также в $L_p(\mathbf{R}^n)$ при любом $p\in(1,\infty)$, а также в гёльдеровском пространстве $C^\gamma(\mathbf{R}^n)$ при любом нецелом $\gamma>0$ (см. [21, п. 2.13, гл. 2]). Это позволяет установить точные теоремы об ограниченности и регулярности, а также априорные оценки, аналогичные вышеуказанным, в шкалах W_p^s и C^γ.

1.5. Замена переменных и псевдодифференциальные операторы на многообразии ([46], [76], [83], [103], [104]). Рассмотрим в области Ω оператор $A:C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$ и пусть дан диффеоморфизм $\varkappa:\Omega\to\Omega_1$. Введем на функциях индуцированное отображение замены переменных $\varkappa^*:C^\infty(\Omega_1)\to C^\infty(\Omega)$, по формуле

$$(\varkappa^*f)(x)=(f\circ\varkappa)(x)=f(\varkappa(x));$$

$\varkappa^*$ отображает также $C_0^\infty(\Omega_1)$ в $C_0^\infty(\Omega)$. Определим оператор A_1 на Ω_1 с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C_0^\infty(\Omega) & \xrightarrow{A} & C_0^\infty(\Omega)\\ \uparrow{\scriptstyle\varkappa^*} & & \uparrow{\scriptstyle\varkappa^*}\\ C_0^\infty(\Omega) & \xrightarrow{A_1} & C^\infty(\Omega_1),\end{array}$$

т. е. $A_1u=[A(u\circ\varkappa)]\circ\varkappa_1$, где $\varkappa_1=\varkappa^{-1}$.

Теорема 1.5. Если $A\in L^m(\Omega)$, то $A_1\in L^m(\Omega_1)$, причем, если $A=a(x,D_x)+R$, где $R\in L^{m-1}(\Omega)$, то $A_1=a_1(y,D_y)+R_1$, $R_1\in L^{m-1}(\Omega_1)$, где символ a_1 дается формулой

$$a_1(y,\eta)=a(\varkappa_1(y),({}^t\varkappa_1'(y))^{-1}\eta),\tag{1.43}$$

в которой $\varkappa_1'(y)$ означает матрицу Якоби отображения $\varkappa_1$ в точке y, ${}^t\varkappa_1'(y)$ — транспонированная матрица к $\varkappa_1'(y)$. Если A — классический п. д. о. порядка m, то A_1 — также классический п. д. о. порядка m, причем если a_m^0 — главный символ оператора A, то главный символ a_{1m}^0 оператора A_1 задается формулой

$$a_{1m}^0(y,\eta)=a_m^0(\varkappa_1(y),({}^t\varkappa_1'(y))^{-1}\eta).\tag{1.44}$$

Для доказательства нужно записать оператор A через амплитуду $a(x,y,\xi)\in S^m$ по формуле (1.22), откуда непосредственно получается, что

$$A_1u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(\varkappa_1(x)-y)\cdot\xi}a(\varkappa_1(x),y,\xi)\,u(\varkappa(y))\,dyd\xi.$$

Полагая здесь $y=\varkappa_1(z)$, получим

$$A_1u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(\varkappa_1(x)-\varkappa_1(z))\cdot\xi}a(\varkappa_1(x),\varkappa_1(z),\xi)\times$$
$$\times|\det\varkappa_1'(z)|\,u(z)\,dzd\xi.\tag{1.45}$$

Заметим теперь, что с точностью до оператора с гладким ядром мы можем считать, что $a(x,y,\xi)=0$ при $(x,y)\notin U$, где U — сколь угодно малая окрестность диагонали в $\Omega\times\Omega$. При близких x и z мы можем преобразовать фазу в показателе экспоненты в (1.45) следующим образом:

$$(\varkappa_1(x)-\varkappa_1(z))\cdot\xi=[\psi(x,z)(x-z)]\cdot\xi=(x-z)[{}^t\psi(x,z)\xi],$$

где $\psi=\psi(x,z)$ — матричная функция, определенная и гладкая при близких x и z, причем $\psi(x,x)=\varkappa_1'(x)$. Делая теперь в интеграле (1.45) замену переменных ${}^t\psi(x,z)\xi=\eta$, мы получим

$$A_1u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-z)\cdot\eta}a(\varkappa_1(x),\varkappa_1(z),[{}^t\psi(x,z)]^{-1}\eta)\,|\det\varkappa_1'(z)|\times$$
$$\times|\det[{}^t\psi(x,z)]|^{-1}u(z)\,dzd\eta,$$

откуда видно, что $A_1\in L^m(\Omega_1)$. Формулы (1.43), (1.44) теперь легко получаются из теоремы 1.1.

Формулу (1.44) можно интерпретировать следующим образом. Отождествим Ω и Ω_1 с помощью диффеоморфизма $\varkappa$. Тогда оператор A перейдет в оператор A_1. Отождествим также естественным образом касательные расслоения $T\Omega$ и $T\Omega_1$ (слой $T_x\Omega$ отождествляется со слоем $T_{\varkappa(x)}\Omega_1$ с помощью линейного изоморфизма $\varkappa'(x)$), а также кокасательные расслоения $T^*\Omega$ и $T^*\Omega_1$ (слой $T_x^*\Omega$ отождествляется со слоем $T^*_{\varkappa(x)}\Omega_1$ с помощью отображения ${}^t\varkappa'(x):T^*_{\varkappa(x)}\Omega_1\to T_x^*\Omega$, дуального к отображению $\varkappa'(x)$: $:T_x\Omega\to T_{\varkappa(x)}\Omega_1$). Но тогда (1.44) означает, что главные символы операторов A и A_1 отождествляются, если считать, что они заданы на кокасательных расслоениях $T^*\Omega$ и $T^*\Omega_1$, т. е. считать аргумент (x,ξ) в главном символе $a_m^0(x,\xi)$ точкой в $T^*\Omega\cong\cong\Omega\times\mathbf{R}^n$ и, аналогично, аргумент (y,η) в $a_{1m}^0(y,\eta)$ точкой в $T^*\Omega_1\cong\Omega_1\times\mathbf{R}^n$. Таким образом, можно сказать, что главный символ классического п. д. о. A есть корректно определенная функция на кокасательном расслоении. Аналогично можно интерпретировать формулу (1.43), сказав, что символ $a=a(x,\xi)\in\in S^m$ оператора $A\in L^m$ корректно определен на кокасательном расслоении по модулю символов из S^{m-1}.

Теорема 1.5 позволяет дать определение *п. д. о. класса* S^m *и классических п. д. о. на произвольном паракомпактном многообразии* M. А именно, рассмотрим оператор

$$A: C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

и для любой координатной окрестности $\Omega \subset M$ (не обязательно связной) определим ограничение оператора A на Ω по формуле

$$A_\Omega = p_\Omega A i_\Omega : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega),$$

где $i_\Omega : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(M)$ — естественное вложение (продолжение нулем вне Ω), а $p_\Omega : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega)$ — оператор ограничения, переводящий f в $f|_\Omega$. Будем писать $A \in L^m(M)$ или $A \in L^m_{\text{кл}}(M)$, если для любой координатной окрестности на Ω ограничение A_Ω принадлежит $L^m(\Omega)$ или $L^m_{\text{кл}}(\Omega)$, соответственно, в локальных координатах на Ω. По теореме 1.5, принадлежность A_Ω к L^m или $L^m_{\text{кл}}$ не зависит от выбора координат в Ω. Главный символ оператора A, по теореме 1.5, оказывается корректно определенной функцией на T^*M.

Заметим, что поскольку любые две точки $x, y \in M$ могут быть включены в одну координатную окрестность Ω (для этого мы не требовали связности Ω), ядро $K_A = K_A(x, y)$ оператора A[1] гладко (класса C^∞) вне диагонали в $M \times M$ (т. е. при $x \neq y$), т. е. оператор $A \in L^m(M)$ псевдолокален.

Аналогичным образом определяются п. д. о. классов L^m и в сечениях векторных расслоений. Для этого нужно прежде всего ввести матричные п. д. о. этих классов на области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, которые определяются точно также, как обычные (скалярные) п. д. о. с той лишь разницей, что символ a оператора A (и главный символ a_m для оператора $A \in L^m_{\text{кл}}$) должен быть матричной функцией (вообще говоря, прямоугольной), причем под $|a(x, \xi)|$ и $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)|$ надо понимать нормы соответствующих матриц. Пусть теперь даны два гладких векторных расслоения E и F на многообразии M. Тогда классы $L^m(M, E, F)$ и $L^m_{\text{кл}}(M, E, F)$ состоят из таких отображений

$$A: C_0^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F) \tag{1.46}$$

(здесь $C^\infty(M, F)$ — пространство гладких сечений расслоения F; $C_0^\infty(M, E)$ — пространство гладких сечений расслоения E, имеющих компактный носитель), что ограничение A_Ω оператора A на любую координатную окрестность Ω при любом выборе тривиализаций E и F над Ω превращается в матричный п. д. о. соответствующего класса (из теоремы 1.5 и теоремы о композиции следует, что это обстоятельство не зависит от выбора локальных координат и тривиализаций расслоений E и F). Главный символ $a_m^0 = a_m^0(x, \xi)$ оператора $A \in L^m_{\text{кл}}(M, E, F)$ при любом ненулевом $(x, \xi) \in T^*M$ (здесь x — проекция вектора (x, ξ) на M) задает отображение слоев

$$a_m^0(x, \xi): E_x \to F_x, \tag{1.47}$$

так что в целом получается отображение расслоений

$$a_m^0: \pi_0^* E \to \pi_0^* F, \tag{1.48}$$

где $\pi_0: T^*M \setminus 0 \to M$ — каноническая проекция кокасательного расслоения без нулевого сечения на базу M; π_0^*E, π_0^*F — индуцированные расслоения (со слоями E_x, F_x над каждой точкой $(x, \xi) \in T^*M \setminus 0$). Оператор A вида (1.46) называется *эллиптическим*, если эллиптичны все его локальные представители (полученные выбором координатной окрестности Ω, координат на ней и тривиализацией $E|_\Omega$ и $F|_\Omega$), которые суть матричные п. д. о. и эллиптичность которых означает выполнение оценок

$$|a^{-1}(x, \xi)| \leqslant C |\xi|^{-m}, \ |\xi| \geqslant R, \ x \in K, \tag{1.49}$$

где $C = C(K)$, $R = R(K)$, K — произвольный компакт в Ω (в скалярном случае эти оценки равносильны (1.35)). Для классического п. д. о. $A \in L_{\text{кл}}{}^m(M; E, F)$ эллиптичность означает обратимость каждого отображения (1.47) или тот факт, что отображение (1.48) есть изоморфизм расслоений.

Пример 1.3 (*сингулярный интегральный оператор на гладкой замкнутой кривой*). Пусть Γ — гладкая замкнутая кривая в комплексной плоскости и пусть Γ ориентирована, т. е. на ней выбрано определенное направление обхода. Рассмотрим на Γ оператор $A: C^\infty(\Gamma) \to C^\infty(\Gamma)$, задаваемый формулой

$$Au(z) = a(z) u(z) + \text{v. p.} \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{L(z, w)}{z - w} u(w)\, dw,$$

где $a \in C^\infty(\Gamma)$, $L \in C^\infty(\Gamma \times \Gamma)$, dw означает комплексный дифференциал от функции $w: \Gamma \to \mathbf{C}$, задаваемой вложением Γ в $\mathbf{C}$, а главное значение интеграла понимается так же, как в примере 1.1. Вводя на Γ локальные координаты, ориентация которых согласована с ориентацией Γ, мы легко получаем, что в любых локальных координатах оператор A превращается в оператор примера 1.1. Следовательно, A — классический п. д. о. порядка 0 на Γ. Можно считать $u(z)$ вектор-функцией с N компонентами, а $a(z)$ и $L(z, w)$ — матричными функциями (размера $N \times N$); тогда A превращается в матричный классический п. д. о. порядка 0. Его главный символ является однородной по ξ порядка 0 матричной функцией $\sigma = \sigma(z, \xi)$ на $T^*\Gamma \setminus 0 = \Gamma \times (\mathbf{R} \setminus 0)$, равной

$$\sigma(z, \xi) = a(z) - b(z) \operatorname{sgn} \xi, \quad b(z) = L(z, z).$$

[1] Ядро K_A можно, например, определить, выбрав фиксированную гладкую положительную плотность $d\mu$ на M и формально записывая A в виде $Au(x) = \int K_A(x, y) u(y)\, d\mu(y)$.

Условие эллиптичности оператора A в скалярном случае состоит в том, что $a^2(z)-b^2(z)\neq 0$, $z\in\Gamma$, а в матричном случае — означает обратимость матриц $a(z)-b(z)$ и $a(z)+b(z)$ во всех точках $z\in\Gamma$.

П. д. о. на многообразии M можно строить склейкой с помощью разбиения единицы. А именно, пусть дано покрытие многообразия M координатными окрестностями $M=\bigcup_j \Omega_j$ и пусть $A_j\in L^m(\Omega_j)$ для любого j. Построим разбиение единицы $1=\sum_j \varphi_j$, подчиненное данному покрытию (это значит, что $\varphi_j\in C^\infty(M)$, сумма локально конечна и $\operatorname{supp}\varphi_j\subset\Omega_j$). Выберем функции $\psi_j\in C^\infty(M)$ так, что $\operatorname{supp}\psi_j\subset\Omega_j$ и $\psi_j\varphi_j\equiv\varphi_j$, причем сумма $\sum_j \psi_j$ также локально конечна[1]). Обозначим через Φ_j и Ψ_j операторы умножения на φ_j и ψ_j соответственно. Тогда мы можем рассмотреть оператор $A=\sum_j \Psi_j A_j \Phi_j$. Легко проверить, что $A\in L^m(M)$, а если $A_j\in L^m_{\text{кл}}(\Omega_j)$ при любом j, то $A\in L^m_{\text{кл}}(M)$. Аналогично с помощью матричных п. д. о. можно склеивать п. д. о. в расслоениях. С помощью этой процедуры можно, например, для любого эллиптического оператора A порядка m на M построить его параметрикс $B\in L^{-m}$:

$$B=\sum_j \Psi_j B_j \Phi_j, \tag{1.50}$$

где B_j — параметрикс оператора A_{Ω_j}. При этом будут выполнены соотношения

$$B\circ A=I-R_1,\quad A\circ B=I-R_2,\quad R_j\in L^{-\infty} \tag{1.51}$$

(точнее, если A — эллиптический оператор из $C_0^\infty(M;E)$ в $C^\infty(M,F)$, то B — собственный п. д. о., отображающий $C_0^\infty(M;F)$ и $C^\infty(M,F)$ в $C_0^\infty(M;E)$ и $C^\infty(M;E)$ соответственно; при этом

$$R_1\in L^{-\infty}(M;E,E),\quad R_2\in L^{-\infty}(M;F;F)).$$

В случае компактного многообразия M удобно также ввести соболевские пространства сечений $H^s(M;E)$, определяемые как пространства сечений, принадлежащих H^s_{loc} в локальных координатах иа любой координатной окрестности $\Omega\subset M$ и при любом выборе тривиализаций E над Ω. Если $R\in L^{-l}(M;E,E)$, $l>0$, то

---
1) Локальная конечность сумм $\sum_j \varphi_j$ и $\sum_j \psi_j$ будет иметь место автоматически, если локально конечно само покрытие $M=\bigcup_j \Omega_j$, что можно обычно предполагать без ущерба для общности.

из рассуждений п. 1.4 вытекает, что R задает компактный линейный оператор в пространстве $H^s(M;E)$ при любом $s\in\mathbf{R}$. По известной теореме Рисса, операторы $I-R_1$ и $I-R_2$ фредгольмовы в пространствах $H^s(M;E)$ и $H^{s-m}(M;F)$ соответственно. Отсюда и из соотношений (1.51) вытекает, что эллиптический оператор $A\in L^m(M;E,F)$ порядка m при любом $S\in\mathbf{R}$ задает фредгольмов оператор

$$A: H^s(M;E)\to H^{s-m}(M;F). \tag{1.52}$$

Ядро $\operatorname{Ker} A$ этого оператора лежит в $C^\infty(M;E)$ и, следовательно, не зависит от s. Используя формально сопряженный оператор A^*, построенный по каким-нибудь гладкой плотиости на M и гладким скалярным произведениям в слоях расслоений E и F, легко показать, что образ оператора A в пространстве $H^{s-m}(M;F)$ может быть описан с помощью соотношений ортогональности к конечному числу гладких сечений, так что $\dim\operatorname{Coker} A$ также не зависит от s. Таким образом, верна

Теорема 1.6. Если $A\in L^m(M;E,F)$ — эллиптический оператор порядка m на компактном многообразии M, то A определяет для любого $s\in\mathbf{R}$ фредгольмов оператор (1.52), у которого $\dim\operatorname{Ker} A$ и $\dim\operatorname{Coker} A$ не зависят от s.

В частности, определен *индекс*

$$\operatorname{ind} A=\dim\operatorname{Ker} A-\dim\operatorname{Coker} A, \tag{1.53}$$

который также не зависит от s (его можно понимать просто как индекс оператора $A: C^\infty(M;E)\to C^\infty(M;F)$).

Заметим еще, что если в условиях теоремы 1.6 оператор A обратим (как оператор из $C^\infty(M;E)$ в $C^\infty(M;F)$ или как оператор (1.52) при каком-нибудь $s\in\mathbf{R}$), что равносильно выполнению условий $\operatorname{Ker} A=0$, $\operatorname{Ker} A^*=0$, то A^{-1} — снова п. д. о. из $L^{-m}(M;F,E)$, классический в том случае, когда сам оператор A является классическим. В самом деле, умножая обе части второго из соотношений (1.51) слева на A^{-1}, мы получим соотношение

$$A^{-1}=B+A^{-1}R_2. \tag{1.54}$$

Но $A^{-1}R_2$ — оператор с ядром $K_{A^{-1}R_2}(x,y)=[A^{-1}K_{R_2}(\cdot,y)](x)$, прииадлежащим $C^\infty(M\times M)$, поскольку оператор A^{-1} непрерывно отображает $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$. Таким образом,

$$A^{-1}-B\in L^{-\infty}(M), \tag{1.55}$$

так что, с точностью до операторов с гладким ядром, A^{-1} совпадает с B. Мы видим, что исчисление п. д. о. позволяет описать структуру оператора A^{-1} и даже явно найти его по модулю $L^{-\infty}(M)$. В частности, если оператор A классический, то однородные компоненты $\overset{\circ}{b}_{-m-k}$ символа оператора A^{-1} находятся по формулам (1.39).

1.6. Постановка проблемы индекса. Простейшие формулы индекса ([43], [91]). В соответствии с известными теоремами функционального анализа, для любого фредгольмова оператора $A : H_1 \to H_2$ (здесь H_1, H_2 — гильбертовы пространства) существует такое $\varepsilon > 0$, что если оператор $B : H_1 \to H_2$ имеет норму $\|B\| < \varepsilon$, то оператор $A+B$ фредгольмов и

$$\operatorname{ind}(A+B) = \operatorname{ind} A.$$

В частности, индекс $\operatorname{ind} A$ не меняется при любых деформациях оператора A (непрерывных по операторной норме), не выводящих за пределы класса фредгольмовых операторов. Кроме того, если оператор $A : H_1 \to H_2$ фредгольмов, а оператор $T : H_1 \to H_2$ компактен, то оператор $A+T$ также фредгольмов, причем

$$\operatorname{ind}(A+T) = \operatorname{ind} A.$$

Отсюда и из теоремы 1.6 легко следует, что индекс эллиптического оператора на компактном многообразии зависит лишь от главного символа этого оператора и не меняется при непрерывных деформациях этого главного символа. Таким образом, индекс является гомотопическим инвариантом главного символа и поэтому можно надеяться выразить индекс через гомотопические инварианты главного символа. Проблема вычисления индекса эллиптического оператора в описанной здесь форме была сформулирована в 1960 г. И. М. Гельфандом и в общем виде решена в 1963 г. Атьей и Зингером — см. [91]. Формула Атьи—Зингера предписывает построение по символу эллиптического оператора A некоторой дифференциальной формы, интегрирование которой дает индекс оператора A. Не выписывая общей формулы, мы укажем два ее частных случая, которые были известны до появления работы Атьи—Зингера.

А. Формула Нётера — Мусхелишвили. Эта формула задает индекс эллиптического матричного сингулярного интегрального оператора примера 1.3 на замкнутой ориентированной кривой Γ, которую мы для простоты будем считать связной. Она имеет вид

$$\operatorname{ind} A = \frac{1}{2\pi} \arg\det [\sigma(z, 1)^{-1}\sigma(z, -1)]|_\Gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \arg\det [(a(z) - b(z))^{-1}(a(z) + b(z))]|_\Gamma, \qquad (1.56)$$

где использованы обозначения, введенные в примере 1.3, а $\arg f(z)|_\Gamma$ означает приращение аргумента функции $f(z)$ при обходе по кривой Γ в выбранном направлении.

В. Формула Дынина — Федосова. Эта формула относится к случаю матричного эллиптического оператора $A = a(x, D_x)$ порядка m в $\mathbf{R}^n$, совпадающего в окрестности бесконечности с некоторым оператором $a_\infty(D_x)$, имеющим постоянный символ $a_\infty(\xi)$, обратимый при всех $\xi \in \mathbf{R}^n$. Такой оператор будет задавать фредгольмов линейный оператор

$$A : H^s(\mathbf{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbf{R}^n),$$

индекс которого не зависит от $s \in \mathbf{R}$. К вычислению индекса таких операторов легко сводится общая задача об индексе матричных эллиптических п. д. о. на сфере S^n. Формула индекса имеет вид

$$\operatorname{ind} A = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2\pi i)^n (2n-1)!} \int\limits_{\{(x,\xi):|\xi|=R\}} \operatorname{Tr} [(a^{-1}(x, \xi)\, da(x, \xi))^{2n-1}], \qquad (1.57)$$

где $R > 0$ достаточно велико, $a^{-1}da$ понимается как матрица дифференциальных 1-форм на $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi$, $(a^{-1}da)^{2n-1}$ — степень этой матрицы, при вычислении которой элементы матриц $a^{-1}da$ перемножаются внешним образом, так что $(a^{-1}da)^{2n-1}$ есть матрица $(2n-1)$-форм, а ее след — обычная $(2n-1)$-форма, которая далее интегрируется по $(2n-1)$-мерному многообразию $S_R = \{(x, \xi) : |\xi| = R\}$, ориентированному как граница области $\{(x, \xi) : |\xi| < R\}$, ориентированной с помощью $2n$-формы $(dx_1 \wedge d\xi_1) \wedge \ldots \wedge (dx_n \wedge d\xi_n)$. Заметим, что если $n \geqslant 2$, то при больших x матрица $[a^{-1}(x, \xi)\, da(x, \xi)]^{2n-1}$ обращается в 0, поскольку если $a = a_\infty(\xi)$, то форма $a^{-1}da$ выражается лишь через $d\xi_1, \ldots, d\xi_n$, а всякая внешняя $(2n-1)$-форма от n переменных равна 0. Поэтому при $n \geqslant 2$ интеграл в (1.57) фактически берется по компактному множеству и, следовательно, имеет смысл. В случае $n=1$ интеграл также имеет смысл, поскольку если 1-форма содержит лишь $d\xi$ и не содержит dx, то ее ограничение на S_R равно 0, т. е. интегрирование снова можно вести по компактному множеству. При $n=1$ формула (1.57) легко преобразуется в формулу (1.56) предыдущего примера (для случая классического п. д. о. A на $\mathbf{R}^1$, совпадающего с обратимым п. д. о. $a_\infty(D)$ в окрестности бесконечности).

Укажем еще два простых частных случая формулы Атьи—Зингера.

С. Пусть A — скалярный (т. е. действующий в обычных функциях) эллиптический п. д. о. на компактном многообразии M размерности $n \geqslant 2$. Тогда $\operatorname{ind} A = 0$. В случае, когда M есть сфера, это следует из формулы (1.57), поскольку внешнее произведение скалярной 1-формы на себя всегда равно 0.

D. Пусть A — дифференциальный (а не псевдодифференциальный!) оператор, действующий в сечениях векторных расслоений над компактным ориентируемым нечетномерным многообразием M. Тогда $\operatorname{ind} A = 0$. В случае, когда $M = S^n$ (n нечетно) и расслоения тривиальны, это легко вывести из формулы (1.57): надо свести дело к случаю, когда вместо a стоит главный символ оператора (полиномиальная матрица, однородная по ξ), что достигается гомотопией, а затем проследить за действием отображения $\xi \mapsto -\xi$ на индекс и на интеграл.

1.7. Эллиптичность с параметром. Резольвента и комплексные степени эллиптических операторов ([4], [46], [98], [99], [100]).

В [21, § 2 гл. 2] мы уже обсуждали условие эллиптичности с параметром краевых задач, гарантирующее однозначную разрешимость краевой задачи при больших значениях параметра. Здесь мы обсудим аналогичное условие для п. д. о. на многообразии M.

Пусть Λ — замкнутый угол с вершиной в точке 0 в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (Λ может вырождаться в луч); A — классический п. д. о. порядка $m>0$ на M (для простоты мы здесь и ниже будем считать оператор A скалярным, хотя все результаты легко распространяются на случай операторов, действующих в сечениях данного векторного расслоения E); $a_m{}^0 = a_m{}^0(x,\xi)$ — главный символ оператора A. Сформулируем основное условие:

(Ell_Λ) (*условие эллиптичности с параметром* $\lambda\in\Lambda$)

$$a_m{}^0(x,\xi)-\lambda\neq 0 \text{ при всех } (x,\xi)\in T^*M\setminus 0 \text{ и } \lambda\in\Lambda.$$

При выполнении этого условия в случае компактного многообразия M можно построить параметрикс оператора с параметром $A-\lambda I$, являющийся аппроксимацией резольвенты $(A-\lambda I)^{-1}$, которая при выполнении условия (Ell_Λ) существует при $\lambda\in\Lambda$ для достаточно больших $|\lambda|$. Зная структуру резольвенты, можно построить комплексные степени A^z оператора A и описать их структуру. Схема использования п. д. о. для описания резольвенты и комплексных степеней была предложена Сили [98] и играет важную роль в спектральной теории, о чем пойдет речь в дальнейшем.

Опишем, следуя Сили, процедуру построения параметрикса оператора с параметром $A-\lambda I$ при $\lambda\in\Lambda$ и при большом λ. Это делается локально в каждой координатной окрестности с последующей склейкой глобального параметрикса с помощью разбиения единицы, как описано в п. 1.5.

Итак, будем строить параметрикс $B(\lambda)$ оператора $A-\lambda I$ в какой-нибудь координатной окрестности $\Omega\subset M$, фиксируя в ней локальные координаты. При этом мы будем отождествлять $T^*\Omega$ с $\Omega\times\mathbf{R}^n$. Заметим прежде всего, что ввиду компактности M и однородности функции $a_m{}^0(x,\xi)-\lambda$ по $(\xi,\lambda^{1/m})$, условие (Ell_Λ) равносильно тому, что

$$|a_m{}^0(x,\xi)-\lambda|\geqslant\varepsilon>0 \text{ при } \lambda\in\Lambda \text{ и } |\xi|^m+|\lambda|=1. \tag{1.58}$$

Это условие (быть может, с меньшим ε) останется выполненным, если слегка расширить угол Λ. Поэтому угол Λ можно считать не вырождающимся в луч.

Пусть асимптотическое разложение символа $a(x,\xi)$ оператора A в Ω по однородным функциям имеет вид (1.28).

Из (1.58) следует возможность такого продолжения функции $a_m^0(x,\xi)$ с множества $\mathscr{L}=\{(x,\xi) : x\in\Omega,\ |\xi|\geqslant 1\}$ до гладкой функции $a_m(x,\xi)$ на $\Omega\times\mathbf{R}^n$ (в частности, тогда $a_m\in S^m(\Omega\times\mathbf{R}^n)$), что

$$|a_m(x,\xi)-\lambda|\geqslant\varepsilon_1>0 \text{ при } (x,\xi)\in\Omega\times\mathbf{R}^n,\ \lambda\in\Lambda. \tag{1.59}$$

Пусть также $a_{m-j}=a_{m-j}(x,\xi)$, $j=1, 2, \ldots,$ — любые продолжения функций $a_{m-j}^0(x,\xi)$ с множества $\mathscr{L}$ до функций $a_{m-j}\in C^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^n)$ (тогда автоматически $a_{m-j}\in S^{m-j}(\Omega\times\mathbf{R}^n)$).

Построение искомого параметрикса ведется так, как если бы главным символом оператора $A-\lambda I$ была функция $a_m-\lambda$. Учитывая теорему о композиции, можно тогда ожидать, что хорошей аппроксимацией резольвенты в области Ω будет оператор $B(\lambda)$, символ которого будет равен следующей сумме:

$$b(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=0}^{K} b_{-m-k}(x,\xi,\lambda), \tag{1.60}$$

где $K>0$ достаточно велико, а компоненты b_{-m-k} находятся из уравнений (ср. с уравнениями (1.39))

$$\begin{gathered} b_{-m}(a_m-\lambda)=1,\\ b_{-m-l}(a_m-\lambda)+\sum_{\substack{|\alpha|+j+k=l\\ k<l}}\frac{1}{\alpha!}\left[\partial_\xi^\alpha b_{-m-k}\right]\left[D_x^\alpha a_{m-j}\right]=0,\ l>0. \end{gathered} \tag{1.61}$$

Пусть теперь дано конечное покрытие $M=\bigcup\limits_{j=1}^{N}\Omega_j$ многообразия M координатными окрестностями Ω_j и пусть $B_j(\lambda)$ — построенный по вышеизложенной схеме параметрикс оператора $A-\lambda I$ на Ω_j. Склеим оператор $B=B(\lambda)$ из операторов $B_j=B_j(\lambda)$ по формуле (1.50). Это и будет искомый параметрикс оператора $A-\lambda I$. Опишем его свойства.

Основной факт, получающийся анализом композиции $B(\lambda)(A-\lambda I)$ в духе доказательства теоремы о композиции, состоит в следующем: существует такое целое $N>0$, зависящее от числа K, входящего в (1.60), что $N\to+\infty$ при $K\to+\infty$, и, если $\mathbf{K}_R=\mathbf{K}_R(x,y,\lambda)$ — ядро оператора $R(\lambda)=B(\lambda)(A-\lambda I)-I$, то $\mathbf{K}_R\in C^N(M\times M)$ при каждом фиксированном λ, причем для любого дифференциального оператора L с гладкими коэффициентами порядка $\leqslant N$ на $M\times M$ имеем

$$|L\mathbf{K}_R(x,y)|\leqslant C_L|\lambda|^{-1},\ \lambda\in\Lambda,\ |\lambda|\geqslant 1. \tag{1.62}$$

Рассмотрим теперь очевидное соотношение

$$B(\lambda)(A-\lambda I)=I+R(\lambda). \tag{1.63}$$

Из (1.62) следует, что если $\|R\|_{s,t}$ означает норму оператора R как оператора из $H^s(M)$ в $H^t(M)$, то

$$\|R(\lambda)\|_{s,t}\leqslant C_N|\lambda|^{-1},\ \lambda\in\Lambda,\ |\lambda|\geqslant 1;\ s,t\in[-N,N]. \tag{1.64}$$

В частности, отсюда следует, что оператор $I+R(\lambda)$ обратим в $H^s(M)$ при $s\in[-N,N]$, $\lambda\in\Lambda$, $|\lambda|\geqslant R_0$, если $R_0>0$ достаточно велико. Более того, $(I+R(\lambda))^{-1}=I+R_1(\lambda)$, где $R_1(\lambda)$ имеет те же оценки норм (1.64), что и оператор $R(\lambda)$. Из (1.63) получаем теперь, что если $B_1(\lambda)=(I+R_1(\lambda))B(\lambda)$, то $B_1(\lambda)(A-\lambda I)=I$, т. е. $B_1(\lambda)$ — левый обратный оператор к $A-\lambda I$ при $\lambda\in\Lambda$, $|\lambda|\geqslant R_0$.

Заметим, что индекс оператора $A-\lambda I$ равен 0, поскольку из условия эллиптичности с параметром следует, что оператор $A-\lambda I$ гомотопен (в классе эллиптических операторов) самосопряженному оператору. Поэтому из обратимости слева вытекает его обратимость, причем

$$(A-\lambda I)^{-1}=(I+R_1(\lambda))B(\lambda)=B(\lambda)+R_1(\lambda)B(\lambda). \tag{1.65}$$

Можно непосредственно проверить, анализируя доказательство теоремы об ограниченности, что

$$\|B(\lambda)\|_{s,s}\leqslant C_N|\lambda|^{-1},\quad \lambda\in\Lambda,\quad |\lambda|\geqslant 1,\quad s\in\mathbf{R}. \tag{1.66}$$

Поэтому

$$\|R_1(\lambda)B(\lambda)\|_{s,t}\leqslant C_N'|\lambda|^{-2},\quad \lambda\in\Lambda,\quad |\lambda|\geqslant 1;\quad s,t\in[-N,N]. \tag{1.67}$$

Отсюда следует, что оператор $T(\lambda)=R_1(\lambda)B(\lambda)$ имеет сколь угодно гладкое (при $K\to\infty$) ядро, производные которого оцениваются через $C|\lambda|^{-2}$ при $\lambda\in\Lambda$, $|\lambda|\geqslant R_0$, поскольку его ядро $K_T=K_T(x,y)$, как и ядро всякого оператора с достаточно гладким ядром, дается формулой

$$K_T(x,y)=T[\delta(\cdot-y)](x),$$

а $\delta(\cdot-y)$ представляет собой функцию класса C^l от y со значениями в пространстве $H^{-l-n/2-\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$. Таким образом, из (1.65) и (1.66) следует, что

$$(A-\lambda I)^{-1}=B(\lambda)+T(\lambda), \tag{1.68}$$

где оператор $T(\lambda)$ имеет достаточно гладкое ядро, убывающее при $\lambda\in\Lambda$, $|\lambda|\to\infty$, как $O(|\lambda|^{-2})$ вместе со сколь угодно большим (в зависимости от K) числом производных. Мы получили искомый факт существования резольвенты $(A-\lambda I)^{-1}$ и ее приближенное представление с точностью до $O(|\lambda|^{-2})$.

Из (1.66), (1.67) и (1.68) вытекает следующая оценка нормы резольвенты:

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|_{s,s}\leqslant C_N|\lambda|^{-1},\quad \lambda\in\Lambda,\quad |\lambda|\geqslant R_0;\quad s\in[-N,N]. \tag{1.69}$$

Она верна уже при любом $N>0$, т. к. мы можем взять параметрикс $B(\lambda)$, содержащий сколь угодно большое число слагаемых.

Из (1.68) следует также, что $(A-\lambda I)^{-1}$ — классический п. д. о. порядка $-m$. Такой оператор компактен в $L_2(M)$, откуда следует, в соответствии с известными теоремами функционального анализа (см. [17]), что спектр $\sigma(A)$ оператора A в пространстве $L_2(M)$ есть дискретное множество точек конечной

кратности (здесь оператор A надо рассматривать как неограниченный оператор в $L_2(M)$ с областью определения $H^m(M)$). В угле Λ может при этом лежать лишь конечное число точек спектра. Поэтому, уменьшая угол Λ, можно добиться того, что $\sigma(A)\cap\Lambda$ состоит не более чем из одной точки 0. Более того, для оператора $A-\delta_0 I$ при любом фиксированном $\delta_0\in\mathbf{C}\setminus\sigma(A)$ мы получим, что $0\notin\sigma(A-\delta_0 I)$. Заменяя, в случае необходимости, A на $A-\delta_0 I$, будем в дальнейшем предполагать, что $0\notin\sigma(A)$ (т. е. оператор A обратим) и теперь, уменьшая, в случае необходимости Λ, мы можем добиться, чтобы $\sigma(A)\cap\Lambda=\varnothing$, что также будет предполагаться в дальнейшем.

При этих предположениях можно построить комплексные степени A^z оператора A. Для этого выберем в комплексной λ-плоскости луч $L=\{re^{i\varphi_0}: r\geqslant 0\}$, лежащий в Λ, и построим контур Γ следующим образом: $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, где

$\lambda=re^{i\varphi_0}$ (r меняется от $+\infty$ до $\rho>0$) на Γ_1,

$\lambda=\rho e^{i\varphi}$ (φ меняется от φ_0 до $\varphi_0-2\pi$) на Γ_2,

$\lambda=re^{i(\varphi_0-2\pi)}$ (r меняется от ρ до $+\infty$) на Γ_3.

При этом при обходе контура надо проходить эти части в естественном порядке: Γ_1, Γ_2, Γ_3 (см. рис. 1)

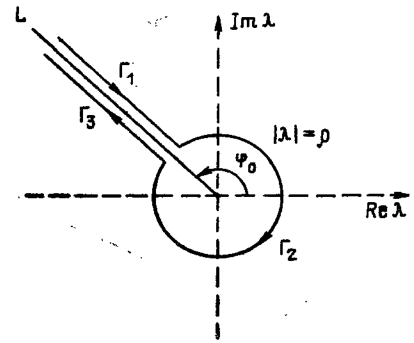

Рис. 1

Число $\rho>0$ надо взять столь малым, чтобы круг $\{\lambda:|\lambda|\leqslant\rho\}$ не пересекался со спектром оператора A. Положим теперь

$$A_z=\frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^z(A-\lambda I)^{-1}d\lambda, \tag{1.70}$$

где $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z<0$, λ^z определяется как голоморфная функция от λ в $\mathbf{C}\setminus L$, а именно,

$$\lambda^z=e^{z\ln\lambda}=e^{z\ln|\lambda|+iz\arg\lambda}=|\lambda|^z e^{iz\arg\lambda},$$

где $\arg\lambda$ выбирается так, что $\varphi_0-2\pi\leqslant\arg\lambda\leqslant\varphi_0$ (естественно, мы считаем $\arg\lambda=\varphi_0$ на Γ_1 и $\arg\lambda=\varphi_0-2\pi$ на Γ_3).

Интеграл в (1.70) сходится (при $\operatorname{Re} z<0$) по операторной норме в пространстве $H^s(M)$, в силу оценки (1.69), при любом $s\in\mathbf{R}$. Подставляя в (1.70) выражение резольвенты $(A-\lambda I)^{-1}$ из (1.68) и используя оценки (1.67) для норм $T(\lambda)$, получим, что

$$A_z=B_z+R_z,\quad B_z=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z B(\lambda)\,d\lambda, \tag{1.71}$$

где оператор R_z имеет сколь угодно гладкое (в зависимости от K) ядро, голоморфно зависящее от z. Оператор B_z в локальных координатах с точностью до оператора с гладким ядром, аналитически зависящим от z, представляется в виде $B_z=b_{(z)}(x, D_x)$, где

$$b^{(z)}(x,\xi)=\sum_{k=0}^{K}\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z b_{-m-k}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda. \tag{1.72}$$

Заметим, что каждый из интегралов в сумме (1.72) представляет собой интеграл от рациональной функции, который может быть описан если использовать выражения для b_{-m-k}, получаемые из (1.61). Например, по формуле Коши, главный член в (1.72) имеет вид

$$b_0^{(z)}(x,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z b_{-m}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda=$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z (a_m(x,\xi)-\lambda)^{-1}d\lambda=a_m^z(x,\xi),$$

где при вычислении степени $a_m{}^z$ нужно использовать то же значение аргумента a_m, что и при вычислении λ^z в определении интеграла (1.70). Аналогично остальные интегралы берутся от рациональных функций с единственным полюсом при $\lambda=a_m(x, \xi)$ и оказываются функциями, гладкими по x, ξ и голоморфными по ξ. При этом, из однородности функции $b_{-m-k}(x,\xi)$ по $(\xi, \lambda^{1/m})$ при $|\xi|\geqslant 1$ (порядка $-m-k$), следует, что

$$b_k^{(z)}(x,\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z b_{-m-k}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda \tag{1.73}$$

однородна по ξ при $|\xi|\geqslant 1$ порядка $mz-k$ и голоморфно зависит от z. Таким образом, B_z — классический п. д. о. порядка mz с символом, голоморфно зависящим от z, и, следовательно, таковым же является A_z (заметим, что ранее мы рассматривали классические п. д. о. лишь вещественного порядка, но классические п. д. о. любого комплексного порядка определяются аналогично).

Заметим теперь, что из формулы Коши легко выводится, во-первых, групповое свойство операторов A_z:

$$A_zA_w=A_{z+w},\ \operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Re} w<0, \tag{1.74}$$

и, во-вторых, что $A_{-1}=A^{-1}$ (откуда $A_{-k}=A^{-k}$ при любом целом $k>0$). Пользуясь этим, можно корректно при любом $z\in\mathbf{C}$ определить операторы A^z:

$$A^z=A^k\circ A_{z-k},\quad k\in\mathbf{Z},\quad k>\operatorname{Re} z,\quad k\geqslant 0. \tag{1.75}$$

Из описанных выше свойств A_z легко выводится, что A^z — классический п. д. о. порядка mz с главным символом, равным $[a_m{}^0(x, \xi)]^z$. Все однородные компоненты символа оператора A^z (в локальных координатах) голоморфно зависят от z, и, более того, при этом

$$A^z=\sum_{k=1}^{K} b_k^{(z)}(x, D_x)+T_K^{(z)},$$

где оператор $T_K^{(z)}$ имеет при $\operatorname{Re} z<d_0$ ядро класса C^N, и $N=N(K, d_0)\to+\infty$ при $K\to+\infty$ и при любом фиксированном d_0; при этом производные этого ядра до порядка N голоморфны по z в полуплоскости $\{z:\operatorname{Re} z<d_0\}$. Таким образом, операторы A^z в естественном смысле голоморфно зависят от z.

Операторы A^z естественно называть *комплексными степенями п. д. о. A*. В самом деле, из (1.75) легко выводится, что при любых целых z оператор A^z совпадает с обычной целой степенью оператора A (в частности, $A^0=I$ и $A^1=A$). Далее, $A^z=A_z$ при $\operatorname{Re} z<0$ и групповое свойство выполнено уже при всех z:

$$A^z\circ A^w=A^{z+w},\quad z,\ w\in\mathbf{C}. \tag{1.76}$$

Наконец, предположим, что оператор A имеет собственную функцию $\psi: A\psi=\lambda\psi$ (отсюда $\psi\in C^\infty(M)$ ввиду эллиптичности оператора A). Тогда, пользуясь формулой Коши, мы немедленно получаем, что $A_z\psi=\lambda^z\psi$, т. е. ψ будет собственной функцией и для оператора A^z, но с собственным значением λ^z. В частности, если оператор A самосопряжен и положителен (в наших условиях положительность означает, что в качестве луча L можно взять луч $(-\infty, 0]$), то, рассматривая значения A^z на полной ортогональной системе собственных функций оператора A, мы получим, что наше определение A^z совпадает с определением, принятым в спектральной теории.

Таким образом, исчисление п. д. о. дает возможность описать структуру таких важных объектов операторного исчисления, как резольвента и комплексные степени для эллиптических операторов на компактных многообразиях. В дальнейшем мы увидим, что оно играет важную роль также в теории краевых задач для эллиптических уравнений.

1.8. Псевдодифференциальные операторы в $\mathbf{R}^n$ ([46], [76], [83]). Хотя евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ можно рассматривать как частный случай многообразия и тем самым имеет смысл говорить о классах п. д. о. L^m на $\mathbf{R}^n$, часто возникают и используются другие классы п. д. о. на $\mathbf{R}^n$, описание которых связано с наличием на $\mathbf{R}^n$ дополнительных алгебраических структур. Выше уже упоминалось, что можно, например, рассматривать на $\mathbf{R}^n$ операторы с равномерными (по x) оценками символов (см. теорему 1.4, комментарий после ее формулировки, а также теорему 1.4′). Уточняя это замечание, введем класс символов $S_u^m(\mathbf{R}^n)$, состоящий из функций $a=a(x, \xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющих равномерным оценкам (1.42). Соответствующие операторы $a(x, D_x)$, действующие по обычной формуле (1.6), отображают в себя пространство $S(\mathbf{R}^n)$, а также пространство

$$C_b^\infty(\mathbf{R}^n)=\left\{u: u\in C^\infty(\mathbf{R}^n),\ \sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\partial^\alpha u(x)|<\infty \text{ для любого } \alpha\right\}.$$

В частности, мы можем брать композиции операторов этого класса, не заботясь о собственности какого-либо из перемножаемых операторов. При этом, теорема о композиции 1.2 сохраняет силу в этом классе, как и формулы (1.30), (1.31), задающие символы транспонированного и сопряженного операторов (асимптотические разложения надо понимать с точностью до символов из классов $S_u^{-N}(\mathbf{R}^n)$, где $N\to\infty$). Можно использовать и амплитуды $a(x, y, \xi)$, удовлетворяющие оценкам

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^{\beta_1}\partial_y^{\beta_2}a(x, y, \xi)|\leqslant C_{\alpha\beta_1\beta_2}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},\quad x, y, \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.77}$$

Операторы с такими амплитудами можно задать и символом $\sigma_A\in S_u^m(\mathbf{R}^n)$, причем сохраняет силу теорема 1.1. Если оператор $A=a(x, D_x)$ с символом $a\in S_u^m(\mathbf{R}^n)$, является *равномерно эллиптическим*, т. е. существуют такие $\varepsilon>0$ и $R>0$, что

$$|a(x, \xi)|\geqslant\varepsilon|\xi|^m,\quad x\in\mathbf{R}^n,\ |\xi|\geqslant R, \tag{1.78}$$

то можно найти параметрикс оператора A — такой оператор $B=b(x, D_x)$ с символом $b\in S_u^{-m}(\mathbf{R}^n)$, что $BA-I$, $AB-I$ имеют символы из $S_u^{-\infty}(\mathbf{R}^n)=\bigcap_m S_u^m(\mathbf{R}^n)$. Отметим, впрочем, что отсюда вовсе не следует фредгольмовость оператора A, поскольку операторы с символами из $S_u^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ не обязаны быть компактными в $L_2(\mathbf{R}^n)$ (например, среди них содержатся все операторы $a(D)$ с постоянными символами $a=a(\xi)\in S(\mathbf{R}^n)$, которые после преобразования Фурье переходят в операторы умножения на функцию). Равномерно эллиптический оператор A в $\mathbf{R}^n$ может иметь бесконечномерное ядро: таков, например, оператор $a(D)$ с эллиптическим символом $a=a(\xi)$, равным 0 при $|\xi|\leqslant 1$.

Важным обстоятельством, упрощающим работу с п. д. о. в $\mathbf{R}^n$, является то, что здесь соответствие между операторами и символами является взаимно однозначным: символ σ_A восстанавливается по оператору A формулой

$$\sigma_A(x, \xi)=e^{-ix\cdot\xi}A(e^{ix\cdot\xi}), \tag{1.79}$$

где оператор A применяется по x, а ξ является параметром. Кроме того, существуют другие способы установить взаимно однозначное соответствие между операторами и символами в $\mathbf{R}^n$. Один из них, уже упоминавшийся в п. 1.3, состоит в использовании амплитуд вида $a(y, \xi)$. Этот способ двойственен к только что описанному и обладает полностью аналогичными свойствами, которые проще всего устанавливать с помощью перехода к транспонированному или сопряженному операторам. Более интересно использование *символов Вейля*, т. е. амплитуд вида $a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)$. А именно, через $a^w(x, D_x)$ будем обозначать оператор, задаваемый амплитудой $a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)$, т. е.

$$a^w(x, D_x)u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)u(y)\,dy\,d\xi. \tag{1.80}$$

Тогда функция $a=a(x, \xi)$ называется *символом Вейля* оператора $a^w(x, D_x)$.

Важным свойством символа Вейля, отличающим его от обычного символа, является простота перехода к сопряженному оператору: если оператор A имеет символ Вейля $a(x, \xi)$, то оператор A^*, формально сопряженный к A в $L^2(\mathbf{R}^n)$, задается символом Вейля $\overline{a(x, \xi)}$, комплексно сопряженным к a. В частности, если символ a вещественнозначен, то соответствующий оператор $A=a^w(x, D_x)$ формально самосопряжен.

Формула композиции для символов Вейля имеет следующий вид: если $A=a^w(x, D_x)$, $B=b^w(x, D_x)$, где $a\in S_u^{m_1}(\mathbf{R}^n)$, $b\in S_u^{m_2}(\mathbf{R}^n)$, то $A\circ B=C=c^w(x, Dx)$, где функция $c(x, \xi)$ допускает асимптотическое разложение

$$c(x, \xi)\sim\sum_{\alpha,\beta}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!}2^{-|\alpha+\beta|}(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a)(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha b). \tag{1.81}$$

Отметим, что главные члены этой формулы, отвечающие парам (α, β) с $|\alpha+\beta|\leqslant 1$, имеют вид

$$a\cdot b-\frac{i}{2}\{a, b\},$$

где

$$\{a, b\}(x, \xi)=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial a}{\partial\xi_j}\frac{\partial b}{\partial x_j}-\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial b}{\partial\xi_j}\right)$$

— *скобка Пуассона* функций a и b.

Связь между символом Вейля и обычным символом одного и того же оператора легко получается из теоремы 1.1: обычный символ σ_A выражается через символ Вейля σ_A^w по формуле

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} 2^{-|\alpha|} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \sigma_A^w(x, \xi), \tag{1.82}$$

а обратное соответствие, получаемое отсюда, имеет вид

$$\sigma_A^w(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} 2^{-|\alpha|} \partial_\xi^\alpha (-D_x)^\alpha \sigma_A(x, \xi). \tag{1.83}$$

Символ Вейля часто называют также *симметричным символом*. Легко понять смысл этого названия: оператор с символом Вейля $a = x_j\xi_j$ равен $\frac{1}{2}(x_jD_j + D_jx_j)$, в то время как оператор с обычным символом $x_j\xi_j$ есть x_jD_j, а оператор с амплитудой $y_j\xi_j$ есть D_jx_j.

Задача об установлении соответствия между функциями на фазовом пространстве $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$ и операторами естественным образом возникает в квантовой механике, где такое соответствие называется *квантованием*. Наличие различных типов символов отражает принципиальную неоднозначность квантования. В частности, соответствие $a \longleftrightarrow a^w(x, D_x)$ между операторами и их символами Вейля часто называют *вейлевским квантованием*.

В задаче квантования при рассмотрении предельного перехода от квантовой механики к классической принимают во внимание наличие малого параметра h — постоянной Планка. Этот параметр обычно входит и в рассматриваемое квантование, при котором функции ξ_j должен соответствовать оператор импульса $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. В соответствии с этим, функции $a(x, \xi)$ можно сопоставить оператор $a(x, hD_x)$ или $a^w(x, hD_x)$ в зависимости от выбранного квантования. Легко видеть, что, например,

$$a^w(x, hD_x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, h\xi\right) u(y)\, dy d\xi =$$
$$= (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy d\xi. \tag{1.84}$$

Функция $a(x, \xi)$ называется *вейлевским h-символом* оператора $a^w(x, hD_x)$. Различные формулы операторного исчисления для h-символов обычно имеют вид асимптотических разложений по степеням h. Например, теорема о композиции приобретает следующий вид: если операторы A и B имеют вейлевские h-символы $a(x, \xi)$ и $b(x, \xi)$, то оператор $C = A \circ B$ имеет такой вейлевский h-символ $c = c(h, x, \xi)$ (зависящий, вообще говоря, явно от параметра h), что

$$c \sim \sum_{\alpha, \beta} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!} \left(\frac{h}{2}\right)^{|\alpha+\beta|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a)(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha b). \tag{1.85}$$

Точный смысл этого разложения, например, таков: если $a \in S_u^{m_1}(\mathbf{R}^n)$, $b \in S_u^{m_2}(\mathbf{R}^n)$, то

$$h^{-N}\left[c - \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant N-1} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!} \left(\frac{h}{2}\right)^{|\alpha+\beta|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a)(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha b)\right] \in$$
$$\in S_u^{m_1+m_2-N/2}$$

равномерно по h при $0 < h \leqslant 1$.

Классы символов $S_u^m(\mathbf{R}^n)$ описываются так, что переменные x и ξ в их описании неравноправны. С точки зрения квантовой механики это неестественно. Устранить этот дефект можно многими способами, простейший из которых состоит в рассмотрении класса символов G_ρ^m, состоящего из функций $a = a(y) = a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, удовлетворяющих оценкам

$$|\partial^\gamma a(y)| \leqslant C_\gamma (1 + |y|)^{m-\rho|\gamma|}, \tag{1.86}$$

где $C_\gamma = C_\gamma(a)$. В этом классе (даже с $\rho = 1$) содержатся все полиномы от $y = (x, \xi)$. Можно рассматривать операторы с обычными или вейлевскими символами (или h-символами) из класса G_ρ^m. В частности, всякий дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами можно записать как оператор с обычным или вейлевским символом (или h-символом) класса G_ρ^m. В описанных классах операторов снова верны основные теоремы исчисления п. д. о., например, теорема о композиции для обычных или вейлевских символов (или h-символов). Заметим, однако, что операторы с символами из G_ρ^m при $m < 0$ являются компактными в $L_2(\mathbf{R}^n)$, что позволяет в этих классах строить теорию так же, как на компактном многообразии. При этом аналогом $C^\infty(M)$ (для компактного многообразия M) здесь служит пространство Шварца $S(\mathbf{R}^n)$. Например, если $a \in G_\rho^m$ и $|a(y)| \geqslant \varepsilon |y|^m$ при $|y| \geqslant R$ (аналог эллиптичности!), то из включения $a(x, D_x)u = f \in S(\mathbf{R}^n)$ (или $a^w(x, D_x)u = f \in S(\mathbf{R}^n)$) и априорного предположения $u \in S'(\mathbf{R}^n)$ вытекает, что $u \in S(\mathbf{R}^n)$. Более того, при этом же условии операторы $a(x, D_x)$ и $a^w(x, D_x)$ фредгольмовы в $S(\mathbf{R}^n)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$. Простейшим примером оператора, удовлетворяющего указанному условию эллиптичности, является квантовомеханический оператор энергии гармонического осциллятора $H = \frac{1}{2}[-\Delta + |x|^2]$ (или $H = -\frac{h^2}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2$).

Таким образом, классы G_ρ^m позволяют учесть, помимо гладкости, еще и поведение функций на бесконечности. Они полезны при рассмотрении задач, в которых основные эффекты локализованы. При рассмотрении же задач, в которых важна трансляционная инвариантность (например, при изучении операторов с почти-периодическими коэффициентами), удобнее классы $S_u^m(\mathbf{R}^n)$.

Подробности об описанных п. д. о. в $\mathbf{R}^n$ и более широких их классах можно найти, например, в монографиях [46], [76], [83].

§ 2. Сингулярные интегральные операторы и их применение. Теоремы Кальдерона. Сведение на границу краевой задачи для эллиптических уравнений

2.1. Определение. Теоремы об ограниченности ([1], [31], [32], [52], [56]). *Сингулярным интегральным оператором* называется оператор

$$A: u(x) \mapsto \int K(x, x-y)\, u(y)\, dy, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad y \in \mathbf{R}^n, \tag{2.1}$$

если функция $K(x, z)$ имеет особенность только при $z=0$, причем

$$K(x, tz) = t^{-n} K(x, z) \text{ при } t>0, \ z \in \mathbf{R}^n \setminus 0, \tag{2.2}$$

$$\int_{|z|=1} K(x, z)\, dS = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{2.3}$$

В этом случае интеграл (2.1) может быть определен в смысле главного значения (v. p.), т. е.

$$Au(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ R \to \infty}} \int_{\varepsilon < |x-y| < R} K(x, x-y)\, u(y)\, dy$$

(существование предела легко доказывается, например, если функция $K(x, z)$ ограничена при $x \in \mathbf{R}^n$, $|z|=1$, а $u \in C_0(\mathbf{R}^n)$).

Пример 2.1. *Преобразование Гильберта*

$$Hu(x) = \frac{1}{\pi i} \text{ v. p.} \int \frac{u(y)}{x-y}\, dy.$$

Ограниченность такого оператора в $L_2(\mathbf{R})$ следует из равенства Парсеваля, поскольку переход к преобразованию Фурье дает $\widetilde{Hu}(\xi) = \operatorname{sgn} \xi \cdot \tilde{u}(\xi)$, так что $\|Hu\|_{L_2} = \|u\|_{L_2}$, т. е. оператор H является даже изометрическим. Можно показать, что этот оператор ограничен в $L_p(\mathbf{R}^n)$ при всех $p>1$.

Теорема 2.1. (Кальдерон, Зигмунд, см. [53], [56]) Оператор A, определяемый формулой (2.1), ограничен в $L_p(\mathbf{R}^n)$ при $p>1$, если

$$\int_{|z|=1} |K(x, z)|^q\, dz < C \text{ для } x \in \mathbf{R}^n,$$

где q — такое число, что $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Теорема 2.2 (Гёльдер, Корн, Лихтенштейн, Жиро, см. [53]). Если $K \in C^1(\mathbf{R}^n \times S^{n-1})$, то оператор A, определяемый формулой (2.1), ограничен в $C^\gamma(\mathbf{R}^n)$ при $\gamma \in (0, 1)$.

2.2. Гладкость решений эллиптических уравнений второго порядка [53]). Пусть вначале Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$

с гладкой границей и $\Delta u = f$ в Ω. Тогда, по формуле (2.9) из § 2 гл. 2 статьи [21], u представляется в виде $u = u_1 + u_2$, где

$$u_1(x) = \int_\Omega E(x-y)\, f(y)\, dy,$$

а u_2 записывается с помощью интеграла по границе $\partial\Omega$. При $x \in \Omega$ функция u_2 всегда бесконечно дифференцируема, так что гладкость u внутри области Ω такая же, как гладкость u_1. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = 2$, то $D^\alpha u_1$ задается сингулярным интегралом

$$D^\alpha u_1(x) = \int_\Omega D^\alpha E(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Применяя теоремы 2.1 и 2.2, получаем, что справедливы следующие утверждения.

1⁰. Если $\Delta u \in L_p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, то $D^\alpha u \in L_p(\Omega')$, где $|\alpha| = 2$, $\Omega' \Subset \Omega$.

2⁰. Если $\Delta u \in C^\gamma(\Omega)$, $\gamma \in (0, 1)$, то $D^\alpha u \in C^\gamma(\Omega')$ при $|\alpha| = 2$, $\Omega' \Subset \Omega$.

Эти утверждения справедливы и доказываются с помощью теорем 2.1, 2.2 и для общих эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами. Именно, если $P(x, D)$ — эллиптический дифференциальный оператор порядка m с гладкими коэффициентами, то верно следующее.

1⁰. Если $P(x, D) u \in L_p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, то $D^\alpha u \in L_p(\Omega')$, где $\Omega' \Subset \Omega$, $|\alpha| = m$.

2⁰. Если $P(x, D) u \in C^\gamma(\Omega)$, $\gamma \in (0, 1)$, то $D^\alpha u \in C^\gamma(\Omega')$, где $|\alpha| = m$, $\Omega' \Subset \Omega$.

2.3. Связь с псевдодифференциальными операторами ([1], [76], [103]). Псевдодифференциальный оператор $P(x, D)$ в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с символом $p(x, \xi)$ может быть представлен в виде интегрального оператора

$$P(x, D)\, u(x) = \int K(x, x-y)\, u(y)\, dy,$$

ядром которого служит распределение

$$K(x, z) = (2\pi)^{-n} \int p(x, \xi)\, e^{i\xi z}\, d\xi.$$

В том случае, когда p является положительно однородной функцией от ξ нулевого порядка такой, что $p \in C^\infty(\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus 0))$, ядро K удовлетворяет условиям:

а) $K(x, z) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus 0))$;

б) $K(x, tz) = t^{-n} K(x, z)$, $t>0$, $x \in \Omega$, $z \in \mathbf{R}^n \setminus 0$

(более точно, это равенство верно при всех x, z, если понимать его в смысле обобщенных функций);

в) $\int_{|z|=1} K(x, z)\, dS_z = 0$, $x \in \Omega$.

Легко видеть, что из этих условий вытекает равенство

$$K(x, z)=K_0(x)\delta(z)+K_1(x, z),$$

где $\int\limits_{|z|=1} K_1(x, z)\,dS_z=0$, так что $P(x, D)u(x)=K_0(x)u(x)+ + K_1 u(x)$, где K_1 — сингулярный интегральный оператор.

Таким образом, из теорем 2.1 и 2.2 вытекает ограниченность псевдодифференциальных операторов нулевого порядка в пространствах L_p при $p\in(1, \infty)$ и C^γ при $\gamma\in(0, 1)$. Отсюда легко получить следующий результат.

Теорема 2.3. Если $P(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор порядка m, для символа которого выполнены оценки (1.7) с постоянными $C_{\alpha,\beta}$, не зависящими от $x\in\mathbf{R}^n$, то он является ограниченным оператором из пространства Соболева $W_p^k(\mathbf{R}^n)$ в пространство $W_p^{k-m}(\mathbf{R}^n)$ при $p\in(1, \infty)$, $k\in\mathbf{Z}$, $k\geqslant m$, а также ограниченным оператором из пространства $C^{k+\gamma}(\mathbf{R}^n)$ в пространство $C^{k-m+\gamma}(\mathbf{R}^n)$ при $\gamma\in(0, 1)$, $k\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$, $k\geqslant m\geqslant 0$.

Отметим, что и в общем случае ядро $K(x, z)$ псевдодифференциального оператора является C^∞-функцией при $z\neq 0$ и имеет при $z=0$ особенность не выше, чем у функции $|z|^{-m-n-1}$, где m — порядок оператора, так как функция $z^\alpha K(x, z)$ непрерывна по x и z при $|\alpha|\geqslant m+n+1$.

2.4. Диагонализация гиперболической системы уравнений ([31]). Пусть

$$L=\frac{\partial}{\partial t}I-\sum_{k=1}^{n} A_k(t, x)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

— строго гиперболическая система из N уравнений с гладкими коэффициентами, так что корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ характеристического уравнения

$$\det\left(\lambda I-\sum_{k=1}^{n} A_k(t, x)\xi_k\right)=0$$

вещественны и различны, когда $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0$. Запишем

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(t, x)\frac{\partial}{\partial x_k}=iH(t)\Lambda,$$

где $H(t)$ — сингулярный интегральный оператор с символом

$$\sigma(H(t))=\sum_{k=1}^{n} A_k(t, x)\frac{\xi_k}{|\xi|},$$

а Λ — оператор с символом $|\xi|$. Матрица $\sigma(H)$ имеет вещественные различные собственные значения. Поэтому соответствующие собственные векторы вещественны и линейно независимы. Пусть $N_1(t)$ — квадратная матрица порядка $N\times N$, строками которой служат эти собственные векторы, имеющие единичную длину. Тогда

$$N_1(t)\sigma(H)=D_1(t)N_1(t),$$

где $D_1(t)$ — диагональная матрица с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ на диагонали. Обозначим через $N(t)$ и $D(t)$ — псевдодифференциальные операторы с символами $N_1(t)$ и $D_1(t)$, соответственно. После замены $v=N(t)u$ система $Lu=f$ переходит в систему уравнений вида

$$\frac{\partial v}{\partial t}-iD(t)\Lambda v+Bv=Nf,$$

где B — оператор, ограниченный в каждом пространстве $\mathring{H}^s(\Omega)$ для любой ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Главная часть этой системы имеет диагональную форму, т. е. система уравнений распадается в главной части на отдельные уравнения. Такая диагонализация позволяет, например, получить энергетические оценки решения задачи Коши, доказать существование и единственность решения этой задачи. Кроме того, с помощью указанной диагонализации существенно облегчается исследование корректности краевых задач для системы $Lu=f$.

2.5. Теорема Кальдерона ([54], [76], [103], [104]). Один из наиболее значительных результатов общей теории дифференциальных уравнений с частными производными — доказательство единственности решения нехарактеристической задачи Коши для систем уравнений общего вида с гладкими, но не обязательно аналитическими, коэффициентами. Этот результат был получен Кальдероном с помощью техники сингулярных интегральных операторов.

Пусть $P=p(t, x, D_t, D_x)$ — дифференциальный оператор порядка m с главным символом $p_0(t, x, \tau, \xi)$ и $p_0(0, 0, 1, 0)\neq 0$, так что плоскость $t=0$ является нехарактеристической в начале координат.

Теорема 2.4. Пусть уравнение $p_0(t, x, \tau, \xi)=0$ при $|\xi|=1$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, $(t, x)\in\omega$, где ω — некоторая окрестность начала координат в $\mathbf{R}^{n+1}$, имеет корни τ кратности не более двух, причем эта кратность не меняется и для корней двойной кратности выполнено условие $|\operatorname{Im}\tau|\geqslant c>0$, а для простых корней τ либо $\operatorname{Im}\tau\geqslant 0$, либо $\operatorname{Im}\tau\leqslant -c<0$. Тогда решение v уравнения $Pv=0$ в ω, равное нулю при $t<0$, обращается в нуль всюду в некоторой окрестности начала координат в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Та же теорема верна и для систем уравнений, удовлетворяющих аналогичным условиям.

Основной момент доказательства состоит в сведении уравнения $Pv=0$ к эквивалентной системе псевдодифференциальных уравнений первого порядка и дальнейшей диагонализации (точнее, приведении к жордановой нормальной форме) этой системы.

Покажем, как осуществляет это сведение. Пусть $Pu=f$. Положим

$$u_j=\Lambda^{m-j}D_t^{j-1}u,\quad j=1,\ldots,m,$$

где Λ — псевдодифференциальный оператор по переменным x с символом $(1+|\xi|^2)^{1/2}$, т. е. $\Lambda=(I-\Delta_x)^{1/2}$. Преобразование Хольмгрена $t\to t-\delta|x|^2$, где $\delta=\text{const}>0$, переводит плоскость $t=0$ в поверхность $t=\delta|x|^2$, поэтому можно считать, что $u(t,x)=0$ при $t<\delta|x|^2$, так что $u(t,x)=0$ вне некоторого шара при каждом малом $t>0$. Тогда

$$D_tu_j-\Lambda u_{j+1}=0 \text{ для } j=0,1,\ldots,m-1,$$

$$D_tu_m+\sum_{j=1}^{m}Q_j(t,x,D_x)\Lambda^{1-j}u_{m-j+1}=f$$

где Q_j — дифференциальный оператор порядка j. Существенно, что характеристическое уравнение этой системы совпадает с уравнением $p_0(t,x,\tau,\xi)=0$. Полученная система уравнений первого порядка приводится к жордановой нормальной форме в главной части тем же методом, что и в п. 2.5. После этого задача сводится к получению априорных оценок для решения задачи

$$D_tu-[A(t)+iB(t)]u=f,\quad u=0 \text{ при } t\leqslant 0,$$

или задачн

$$D_tu-[a(t)+iB(t)]u=f,\quad u=0 \text{ при } t<0,$$

$$D_tv-[A(t)+iB(t)]v+\Lambda u=g,\ v=0 \text{ при } t<0,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — псевдодифференциальные операторы первого порядка с вещественными символами. Нужные оценки получаются довольно просто, с помощью интегрирования по частям (см. [19], [54], [89]).

2.6. Сведение на границу задачи с косой производной ([19], [76], [104]). Используя технику псевдодифференциальных операторов, можно свести краевую задачу для эллиптической системы дифференциальных уравнений к эквивалентной системе псевдодифференциальных уравнений на граничном многообразии.

Начнем с простейшего примера. В полупространстве $R_+^{n+1}=\{(t,x)\in R^{n+1},\ t>0\}$ рассмотрим уравнение Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta_x\right)u=0 \tag{2.4}$$

с краевым условием

$$a_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=f(x)\quad\text{при}\quad t=0, \tag{2.5}$$

предполагая, что $a_j\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ при $j=0,1,\ldots,n$ и что $\sum_{j=0}^{n}|a_j|\neq 0$. Каждое решение уравнения (2.4) из класса $C(\bar{\mathbf{R}}_+, L_2(\mathbf{R}^n))$ представляется в виде интеграла Пуассона

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n}\iint v(y)e^{-t|\xi|+i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi,$$

где $v(y)=u(0,y)$. Отсюда следует

Теорема 2.5. Задача (2.4)—(2.5) эквивалентна псевдодифференциальному уравнению

$$Av=f(x),\quad x\in\mathbf{R}^n, \tag{2.6}$$

где

$$A(x,D)v(x)=(2\pi)^{-n}\int\left[-a_0(x)|\xi|+i\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\xi_j\right]\tilde{v}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

Если $a_0(x)\neq 0$ в $\mathbf{R}^n$, то символ оператора A

$$a(x,\xi)=-a_0(x)|\xi|+i\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\xi_j$$

не обращается в нуль при $|\xi|=1$, так что уравнение (2.6) — эллиптическое. Например, в этом случае имеет место оценка

$$\|v\|_s\leqslant C(\|f\|_{s-1}+\|v\|_{s-1}),\quad v\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),$$

из которой немедленно получаем оценку решения задачи (2.4)—(2.5):

$$\|u\|_{s+1/2}\leqslant C(\|f\|_{s-1}+\|u\|_{s-1/2}),\quad u\in H^s(\mathbf{R}_+^{n+1}).$$

Здесь нормы для функции u — это нормы в пространствах Соболева в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, а норма для f — норма в $H^{s-1}(\mathbf{R}^n)$.

2.7. Сведение на границу краевой задачи для уравнения второго порядка ([19], [76], [104]). Покажем, как проводится сведение на границу краевой задачи в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$Lu=f,$$

где

$$L=\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}D_jD_k+\sum_{j=1}^{n}b_jD_j+c$$

эллиптический оператор с гладкими вещественными коэффициентами. Фиксируем точку P_0 на границе Γ области Ω. Будем предполагать, что эта граница бесконечно дифференцируема. Гладким преобразованием переведем участок границы в окрестности точки P_0 в часть плоскости $x_n=0$ так, чтобы образ области Ω находился при этом в полупространстве $x_n>0$. Пусть $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ и пересечение $\operatorname{supp}u$ с образом Γ лежит в плоскости $x_n=0$. Обозначим через u^0 функцию, совпадающую с u при $x_n \geqslant 0$ и равную нулю при $x_n<0$.

Тогда

$$D_n u^0=(D_n u)^0+\frac{1}{i}\delta(x_n)\otimes u_0(x'),$$

где u_0 — след u при $x_n=0$, а $(D_n u)^0$ — функция, равная $D_n u$ при $x_n \geqslant 0$ и равная нулю при $x_n<0$. Аналогично,

$$D_n^2 u^0=(D_n^2 u)^0+\frac{1}{i}\delta(x_n)\otimes u_1(x')-\delta'(x_n)\otimes u_0(x'),$$

где u_1 — след $D_n u$ при $x_n=0$. Пусть оператор L после указанного преобразования имеет вид

$$L=\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}D_jD_k+\sum_{j=1}^{n} B_jD_j+C.$$

Тогда

$$L(u^0)=(Lu)^0+A_{nn}\left(\frac{1}{i}\delta(x_n)\otimes u_1(x')-\delta'(x_n)\otimes u_0(x')\right)+$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1} A_{jn}\frac{1}{i}\delta(x_n)\otimes D_j u_0(x')+B_n\frac{1}{i}\delta(x_n)\otimes u_0(x').$$

Построим левый параметрикс Q для оператора L в $\mathbf{R}^n$, так что $QL=I+T$, где T — сглаживающий оператор. Тогда

$$u^0+Tu^0=Q(Lu)^0+Q\left[\frac{1}{i}\delta(x_n)\otimes A_{nn}u_1(x')-\delta'(x_n)\otimes A_{nn}u_0(x')+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{i}\sum_{j=1}^{n-1}\delta(x_n)\otimes A_{jn}D_j u_0(x')+\frac{1}{i}\delta(x_n)\otimes B_n u_0(x')\right]. \qquad (2.7)$$

Важную роль при сведении на границу играет следующий результат Хёрмандера [73]:

Теорема 2.6. Пусть Q — псевдодифференциальный оператор в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, причем его символ $q(x,\xi)$ разлагается в асимптотическую сумму $\Sigma q^j(x,\xi)$, в которой каждое слагаемое является рациональной функцией от ξ. Пусть ω — пересечение Ω с плоскостью $x_n=0$. Тогда для каждой функции u из $C_0^\infty(\omega)$ определены продолжение функции $Q(\delta^{(\nu)}(x_n)\otimes u)$ и всех ее производных из области $\Omega^+=\{x: x\in\Omega,\ x_n>0\}$ на $\Omega^+\cup\omega$. Предельные значения

$$Q^{\mu\nu}u=\lim_{x_n\to+0} D_n^\mu Q(\delta^{(\nu)}\otimes u)$$

определяются с помощью псевдодифференциальных операторов $Q^{\mu\nu}$, имеющих символы

$$\sum_j \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\xi'}}(D_n+\xi_n)^\mu q^j(x',0,\xi)(i\xi_n)^\nu d\xi_n,$$

где в качестве $\Gamma_{\xi'}$ можно взять, например, круг в полуплоскости $\operatorname{Im}\xi_n>0$, содержащий внутри себя полюсы q^j из этой полуплоскости.

Главный символ параметрикса Q равен $\left(\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}\xi_j\xi_k\right)^{-1}$. Уравнение

$$\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}\xi_j\xi_k=0$$

относительно ξ_n имеет при каждом $\xi'\neq 0$ два корня α и β, причем $\operatorname{Im}\alpha>0$, $\operatorname{Im}\beta<0$. Поэтому контур $\Gamma_{\xi'}$ должен содержать внутри себя точку $\xi_n=\alpha$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\xi'}}(D_n+\xi_n)^\mu\frac{\xi_n^\nu d\xi_n}{\sum\limits_{j,k=1}^{n} A_{jk}\xi_j\xi_k}=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\xi'}}(D_n+\xi_n)^\mu\frac{\xi_n^\nu d\xi_n}{A_{nn}(\xi_n-\alpha)(\xi_n-\beta)}=$$

$$=\frac{i}{A_{nn}}(D_n+\xi_n)^\mu\left(\frac{\xi_n^\nu}{\xi_n-\beta}\right)\Bigg|_{\xi_n=\alpha}.$$

Таким образом, уравнение (2.7) после сужения на плоскость $x_n=0$ имеет вид

$$Au_0=Bu_1+g, \qquad (2.8)$$

где $g=Q(Lu)^0|_{x_n=0}$, A и B — псевдодифференциальные операторы с главными символами, соответственно

$$A_0=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} A_{jn}\xi_j+A_{nn}\beta}{A_{nn}(\beta-\alpha)},$$

$$B_0=\frac{1}{\alpha-\beta}.$$

Нетрудно видеть, что операторы A и B являются эллиптическими, так что можно, например, записать соотношение (2.8) в виде

$$u_1=C_0u_0+C_1g, \qquad (2.9)$$

где C_0, C_1 — операторы первого порядка, причем главный символ оператора C_0 равен $-\sum\limits_{j=1}^{n-1}\frac{A_{jn}}{A_{nn}}\xi_j-\beta$, так что его мнимая часть положительна при $\xi\neq 0$.

Если рассмотреть граничную задачу с условием

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_ju+a_0(x)u=h(x) \text{ на } \Gamma,$$

то, исключая из него производную u по нормали с помощью равенства (2.9), получим псевдодифференциальное уравнение на Γ относительно u_0. Решив его, можно найти решение u краевой задачи, как решение задачи Дирихле с условием $u=u_0$ на Γ. Можно также использовать равенства (2.9) и (2.7) для того, чтобы выразить u «в явном виде».

2.8. Сведение на границу краевой задачи для эллиптической системы. Аналогично проводится сведение на границу эллиптической краевой задачи для уравнений и систем высших порядков.

Следующая конструкция принадлежит Кальдерону [55]. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей Γ. Пусть $P(x, D_x)$ — система из r дифференциальных уравнений порядка m в окрестности области Ω. Для простоты предполагаем, что коэффициенты этих операторов бесконечно гладкие.

Обозначим I^s оператор с символом $(1+|\xi|^2)^{-s/2}$, действующий на $\mathbf{R}^n$ и J^s — аналогичный оператор, действующий на Γ. Пусть D — гладкое векторное поле, не равное нулю и ортогональное к Γ в точках границы.

Вектору $u=(u_1, \ldots, u_r)$ из класса $H^k(\Omega)$, где $k\geqslant 1$, сопоставим вектор $Bu=(v_1, \ldots, v_m)$ на Γ, полагая $v_j=J^{j-m}D^{j-1}u(y)$, $y\in\Gamma$. Обозначим K класс таких функций v, что $v=Bu$, причем $u\in H^m(\Omega)$ и $P(x, D_x)u=0$ в Ω.

Теорема 2.7. Пространство K совпадает с областью значений матрицы C размеров $rm\times rm$ сингулярных интегральных операторов в Ω, ранг символа которого равен $rm/2$ и для которой $C^2=C$.

Символ $\sigma(C)$ матрицы C может быть выписан явно в терминах символа оператора P. Таким образом, указанная конструкция позволяет свести решение краевой задачи для системы уравнений $Pu=0$ в Ω к решению системы псевдодифференциальных уравнений на граничном многообразии Γ.

§ 3. Волновой фронт обобщенной функции и простейшие теоремы о распространении особенностей

3.1. Определение и примеры ([19], [20], [46], [69], [75], [76], [83], [103], [104]). Хорошо известно, что обобщенная функция u с компактным носителем является гладкой функцией тогда и только тогда, когда преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi)$ быстро убывает на бесконечности. Если же u не является гладкой функцией, то направления, по которым $\tilde{u}(\xi)$ убывает недостаточно быстро, могут служить характеристикой особенностей u.

В классической теории распространения волн, построенной Гюйгенсом, волны распространяются в каждый момент времени в направлении, нормальном к фронту волны. По аналогии с этой теорией, для каждой обобщенной функции u вводится ее *волновой фронт* $\mathrm{WF}(u)$ как подмножество в пространстве кокасательного расслоения. Это подмножество состоит из тех точек (x, ξ), для которых направление вектора ξ является особым для u в точке x. Проекция этого множества на пространство x совпадает с $\operatorname{sing\,supp} u$. Оказывается, что множество $\mathrm{WF}(u)$ не зависит от выбора системы координат и допускает локальное описание.

Понятие волнового фронта было введено в работах Сато [97] и Хёрмандера [75] в 1970 году. Это понятие оказалось чрезвычайно плодотворным для развития теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Определение 3.1. Пусть $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Точка (x_0, ξ_0) из $T^*\Omega\setminus 0$ не принадлежит $\mathrm{WF}(u)$, если существуют такие функции $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus 0)$, что

$$\varphi(x_0)\neq 0,\ \psi(\xi_0)\neq 0,\ \psi(t\xi)=\psi(\xi) \text{ при } t>0,\ \xi\neq 0$$

и

$$\psi(D)\varphi(x)u(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Здесь, как обычно, $\psi(D)$ — псевдодифференциальный оператор с символом $\psi(\xi)$:

$$\psi(D)v(x)=(2\pi)^{-n}\int\psi(\xi)\tilde{v}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Иногда удобнее пользоваться другим, эквивалентным определением.

Теорема 3.1. Точка $(x_0, \xi_0)\in T^*\Omega\setminus 0$ не принадлежит $\mathrm{WF}(u)$ тогда и только тогда, когда существуют такая функция $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ и такой конус $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$, что

$$\varphi(x_0)\neq 0,\quad \xi_0\in\Gamma,\quad |\widetilde{\varphi u}(\xi)|\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N} \text{ для всех } N \text{ и } \xi\in\Gamma.$$

Подмножество K в $T^*\Omega\setminus 0$ называется *коническим*, если оно содержит вместе с каждой своей точкой (x, ξ) все точки $(x, t\xi)$ при $t>0$.

Теорема 3.2. Для каждого распределения $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ его волновой фронт является замкнутым коническим множеством в $T^*\Omega\setminus 0$, проекция которого на Ω совпадает с $\operatorname{sing\,supp} u$. Если $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$\mathrm{WF}(\varphi u)\subset\mathrm{WF}(u).$$

Примеры. 1°. $u=\delta(x)$; $\mathrm{WF}(u)=\{(0, \xi), \xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0\}$.

2°. $u=\delta(x_1)$; $\mathrm{WF}(u)=\{(0, x', \xi_1, 0)\in T^*\mathbf{R}^n\setminus 0, x'\in\mathbf{R}^{n-1}, \xi_1\in\mathbf{R}\setminus 0\}$.

3°. $u=\dfrac{1}{x_2+ix_1^2}$; $\mathrm{WF}(u)=\{(0, 0, x'', \xi_1, 0, 0); x''\in\mathbf{R}^{n-2}, \xi_1\in\mathbf{R}\setminus 0\}$.

4°. Пусть Γ — произвольное замкнутое коническое подмножество в $T^*\Omega\setminus 0$. Тогда функция

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}\varphi(k(x-x_k))e^{ik^3x\theta_k}$$

непрерывна в $\mathbf{R}^n$ и $\mathrm{WF}(u)=\Gamma$, если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\tilde{\varphi}(0)=1$, $|\theta_k|=1$, а последовательность точек (x_k, θ_k) плотна в пересечении Γ с множеством $|\xi|=1$ (см. [76]).

3.2. Свойства волнового фронта. Пусть $X\subset\mathbf{R}^m$, $Y\subset\mathbf{R}^n$ — открытые множества и $f: X\to Y$ — гладкое отображение. Если $\varphi\in C_0^\infty(Y)$, то функция $f^*\varphi(x)=\varphi(f(x))$ является гладкой в X. Важным является вопрос: когда отображение f^* может быть распространено по непрерывности на обобщённые функции? Ответ на него дается следующей теоремой.

Теорема 3.3 ([76]). Обобщенная функция $f^*u\in\mathcal{D}'(X)$ определена для каждого $u\in\mathcal{D}'(Y)$, для которого $N_f\cap\mathrm{WF}(u)=\varnothing$, где

$$N_f=\{(f(x),\ \eta)\in T^*(Y)\setminus 0: {}^tf'(x)\eta=0\}. \tag{3.1}$$

При этом

$$\mathrm{WF}(f^*u)\subset f^*\mathrm{WF}(u)=$$
$$=\{(x, {}^tf'(x)\eta)\in T^*X\setminus 0:\ (f(x),\eta)\in\mathrm{WF}(u)\}.$$

Ясно, что если $m=n$, $\det f'(x)\neq 0$, то $N_f=\varnothing$ и теорема 3.3 применима для любого u.

В частности, эта теорема позволяет определить $\mathrm{WF}(u)$ для $u\in\mathcal{D}'(X)$, где X — гладкое многообразие. При этом $\mathrm{WF}(u)\subset T^*X\setminus 0$ и не зависит от выбора локальных координат.

Пусть X — гладкое многообразие и $Y\subset X$ — гладкое подмногообразие меньшей размерности. Пусть $i: Y\hookrightarrow X$ — вложение Y в X. Множество N_i, введенное в теореме 3.3, совпадает с

$$N(Y)=\{(y,\eta):\ y\in Y,\ \eta \text{ нормально к } Y\}.$$

Поэтому справедлива

Теорема 3.4. Если $u\in\mathcal{D}'(X)$ и $\mathrm{WF}(u)\cap N(Y)=\varnothing$, то определено сужение $u|_Y\in\mathcal{D}'(Y)$. При этом

$$\mathrm{WF}(u|_Y)\subset\{(y,\eta)\in T^*Y\setminus 0:$$
$$\exists\xi\in N(Y),\ (y,\eta+\xi)\in\mathrm{WF}(u)\}.$$

Важным для приложений является вопрос о возможности определения произведения uv двух обобщенных функций. Как известно, такое произведение определено всегда, если $u\in C^\infty(X)$. В общем случае важно, чтобы волновые фронты $\mathrm{WF}(u)$ и $\mathrm{WF}(v)$ были согласованы: в тех точках, которые являются особыми для u, v должно быть гладким и наоборот (см. например [46], [75], [76]).

Пусть $u, v\in\mathcal{D}'(X)$, X — гладкое многообразие $\Delta: X\to X\times X$ — диагональное отображение, так что $\Delta(x)=(x,x)$. Множество N_Δ, определяемое по формуле (3.1), имеет вид

$$N_\Delta=\{(x,x,\xi,\eta)\in T^*(X\times X)\setminus 0:\ \xi+\eta=0\}.$$

Теорема 3.5. Если $\mathrm{WF}(u)+\mathrm{WF}(v)\subset T^*X\setminus 0$, то определено произведение $uv\in\mathcal{D}'(X)$, причем

$$\mathrm{WF}(uv)\subset\{(x,\ \xi+\eta)\in T^*X\setminus 0:\ (x,\ \xi)\in\mathrm{WF}(u) \text{ или } \xi=0,$$
$$(x,\ \eta)\in\mathrm{WF}(v) \text{ или } \eta=0\}.$$

Это утверждение получается из теоремы 3.3 после применения отображения Δ^* к обобщенной функции $u(x)\otimes v(y)\in\mathcal{D}'(X\times X)$.

Теоремы 3.3 и 3.5 позволяют рассмотреть вопрос о возможности применения к обобщенной функции $u\in\mathcal{D}'(Y)$ интегрального оператора вида

$$Au(x)=\int K(x,y)\,u(y)\,dy$$

с ядром K из $\mathcal{D}'(X\times Y)$.

Если $u\in C_0^\infty(Y)$, то $Au\in\mathcal{D}'(X)$ и

$$\mathrm{WF}(Au)\subset\{(x,\ \xi)\in T^*X\setminus 0:\ (x,\ y,\ \xi,\ 0)\in\mathrm{WF}(K) \text{ для некоторого } y\in\operatorname{supp} u\}.$$

Это сразу следует из теоремы 3.5. Для рассмотрения общего случая, когда $u\in\mathcal{E}'(Y)$, введем следующие множества

$$\mathrm{WF}'(K)=\{(x,\ y,\ \xi,\ \eta)\in T^*(X\times Y)\setminus 0:\ (x,\ y,\ \xi,\ -\eta)\in\mathrm{WF}(K)\},$$
$$\mathrm{WF}(K)_X=\{(x,\ \xi)\in T^*(X)\setminus 0:\ \exists y\in Y,\ (x,\ y,\ \xi,\ 0)\in\mathrm{WF}(K)\},$$
$$\mathrm{WF}'(K)_Y=\{(y,\ \eta)\in T^*(Y)\setminus 0:\ \exists x\in X,\ (x,\ y,\ 0,\ -\eta)\in\mathrm{WF}(K)\}.$$

Теорема 3.6. Пусть $u\in\mathcal{E}'(Y)$ и $\mathrm{WF}(u)\cap\mathrm{WF}'(K)_Y=\varnothing$. Тогда определена обобщенная функция

$$Au(x)=\int K(x,\ y)\,u(y)\,dy\in\mathcal{D}'(X).$$

причем

$$\mathrm{WF}(Au)\subset\mathrm{WF}(K)_X\cup\{(x,\ \xi)\in T^*(X)\setminus 0:$$
$$\exists(y,\ \eta)\in\mathrm{WF}(u),\ (x,\ y,\ \xi,\ \eta)\in\mathrm{WF}'(K)\}.$$

В том важном частном случае, когда A является псевдодифференциальным оператором,

$$\mathrm{WF}(K)\subset\{(x,x,\xi,\xi)\in T^*(X\times X)\setminus 0\}$$

и потому $\mathrm{WF}(K)_X=\varnothing$, $\mathrm{WF}'(K_Y)=\varnothing$, так что

$$\mathrm{WF}(Au)\subset WF(u).$$

Таким образом, псевдодифференциальный оператор является псевдолокальным и в терминах волновых фронтов (см. п. 1.1).

3.3. Приложение к теории дифференциальных уравнений. Пусть $P=P(x,D)$ — дифференциальный или псевдодифференциальный оператор порядка m с главным символом $p_0(x,\xi)$. Пусть

$$\operatorname{Char} P=\{(x,\xi)\in T^*X\setminus 0:\ p_0(x,\xi)=0\}.$$

Теорема 3.7 ([76]). Для каждого $u\in\mathcal{D}'(X)$

$$\mathrm{WF}(u)\subset\mathrm{Char}\,P\cup\mathrm{WF}(Pu).$$

Следствие 3.1. Если P — эллиптический оператор (т. е. $\mathrm{Char}\,P=\varnothing$), то $\mathrm{WF}(u)=\mathrm{WF}(Pu)$ для всех $u\in\mathcal{D}'(X)$.

Доказательство теоремы основывается на построении микролокального параметрикса. Если точка (x_0, ξ_0) лежит вне $\mathrm{Char}\,P$, то можно построить такой оператор $Q(x, D)$, что символ оператора $QP-I$ будет равен нулю в конической окрестности точки (x_0, ξ_0). Этот символ строится так же, как это делалось при доказательстве теоремы 1.3. Если теперь $(x_0, \xi_0)\notin\mathrm{WF}(Pu)$, то $(x_0, \xi_0)\notin\mathrm{WF}(QPu)$ и, следовательно, $(x_0, \xi_0)\notin\mathrm{WF}(u)$.

Пример 3.1. Пусть $u\in\mathcal{D}'(X)$, $X\subset\mathbf{R}^n$ и $D_1u\in C^\infty(X)$. Тогда если $(x_0, \xi_0)\in T^*(X)\setminus 0$, $(x_0, \xi_0)\in\mathrm{WF}(u)$, то каждая точка $(x^{(1)}, \xi_0)$ из $T^*(X)\setminus 0$ ие принадлежит $\mathrm{WF}(u)$, если точку $x^{(1)}$ можно соединить с x_0 отрезком прямой, параллельной оси x_1, лежащим в X.

Этот простой пример описывает в действительности ситуацию, типичную для операторов с простыми характеристиками.

Теорема 3.8 ([76]). Пусть $X\subset\mathbf{R}^n$, P — псевдодифференциальный оператор в X с вещественным главным символом p_0 и γ — лежащий в $T^*X\setminus 0$ отрезок интегральной кривой гамильтоновой системы уравнений

$$\dot{x}(t)=\partial p_0(x(t), \xi(t))/\partial\xi,\quad \dot{\xi}(t)=-\partial p_0(x(t), \xi(t))/\partial x.$$

Если $\gamma\cap\mathrm{WF}(Pu)=\varnothing$, то имеет место одно из двух: или $\gamma\subset\mathrm{WF}(u)$ или $\gamma\cap\mathrm{WF}(u)=\varnothing$.

3.4. Некоторые обобщения. В теории дифференциальных уравнений полезны некоторые обобщения понятия волнового фронта: аналитический волновой фронт, волновой фронт Жевре, фронт осцилляций и др. (см. [76]).

Остановимся на одном таком обобщении, связанном с пространствами Соболева $H^s(s\in\mathbf{R})$.

Определение 3.2. Пусть $u\in\mathcal{D}'(X)$ и $(x_0, \xi_0)\in \overset{0}{T^*}(X)\setminus 0$. Будем писать, что $u\in H^s(x_0, \xi_0)$, если $u=u_1+u_2$, где $u_1\in H^s(X)$ и $(x_0, \xi_0)\notin\mathrm{WF}(u_2)$.

Определение 3.3. *Волновым фронтом* $\mathrm{WF}_s(u)$ обобщенной функции $u\in\mathcal{D}'(X)$ называется дополнение в $T^*(X)\setminus 0$ к множеству точек (x, ξ), для которых $u\in H^s(x, \xi)$.

Теорема 3.9 ([76]). Для каждого $u\in\mathcal{D}'(X)$

$$\mathrm{WF}_s(u)\subset\mathrm{Char}\,P\cup\mathrm{WF}_{s-m}(Pu).$$

Теорема 3.10 ([76]). Пусть выполнены условия теоремы 3.8. Если $\gamma\cap\mathrm{WF}_{s-m}(Pu)=\varnothing$, то либо $\gamma\subset\mathrm{WF}_s(u)$, либо $\gamma\cap\mathrm{WF}_s(u)=\varnothing$.

§ 4. Интегральные операторы Фурье

4.1. Определение. Примеры. Теория псевдодифференциальных операторов, рассмотренная в § 1, хорошо приспособлена для изучения различных задач, связанных с эллиптическими дифференциальными уравнениями. Однако при рассмотрении уравнений гиперболического типа эта теория оказывается недостаточной и приходится рассматривать более широкий класс операторов — так называемые интегральные операторы Фурье ([18], [46], [74], [75], [76], [83], [103], [104]).

Определение 4.1. *Интегральным оператором Фурье* (и. о. Ф) называется оператор вида

$$\Phi: u\mapsto\int\int a(x, y, \theta)\,u(y)\,e^{iS(x,y,\theta)}dyd\theta. \tag{4.1}$$

Здесь функция a называется *амплитудой*, $a\in C^\infty(X\times Y\times\mathbf{R}^N)$, где $X\subset\mathbf{R}^{n_1}$, $Y\subset\mathbf{R}^{n_2}$ и выполнены оценки

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma a(x, y, \theta)|\leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\theta|)^{m-|\alpha|},$$
$$x\in X,\quad y\in Y,\quad \theta\in\mathbf{R}^N, \tag{4.2}$$

для любых мультииндексов α, β и γ; функция S называется *фазовой функцией*, $S\in C^\infty(X\times Y\times(\mathbf{R}^N\setminus 0))$, S вещественнозначна и положительно однородна по θ степени 1.

Обычно на фазовую функцию S налагаются еще некоторые условия невырожденности, о которых будет сказано ниже.

Пример 4.1. Если $n_1=n_2=N$, $S(x, y, \theta)=(x-y)\cdot\theta$, то оператор (4.1) является псевдодифференциальным (см. § 1).

Пример 4.2. Решение задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u \text{ при } t>0,\quad u=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\varphi \text{ при } t=0,$$

дается формулой

$$u(t, x)=(2\pi)^{-n}\int\int e^{i(x-y)\xi+it|\xi|}\frac{\varphi(y)}{2i|\xi|}dyd\xi-$$
$$-(2\pi)^{-n}\int\int e^{i(x-y)\xi-it|\xi|}\frac{\varphi(y)}{2i|\xi|}dyd\xi.$$

В этой формуле участвуют два оператора, которые имеют вид и. о. Ф. с фазовыми функциями $(x-y)\xi\pm t|\xi|$, но с амплитудами вида $(2i|\xi|)^{-1}$, имеющими особенность при $\xi=0$. Вырезая эту особенность, т. е. заменяя $(2i|\xi|)^{-1}$ на амплитуду $(1-\chi(\xi))\,(2i|\xi|)^{-1}$, где $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\chi(\xi)=1$ в окрестности точки 0, мы изменим правую часть на оператор с гладким ядром. Таким образом, $u(t, x)$ выражается через $\varphi(x)$ с помощью двух и. о. Ф. и оператора с гладким ядром.

Пример 4.3. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=p(t, x, D_x)u \text{ при } t>0,\quad u(0, x)=\varphi(x),$$

где $p(t, x, D_x)$ — псевдодифференциальный оператор порядка 1 по x, гладко зависящий от t, главный символ которого $p(t, x, \xi)$ — положительно однородная степени 1 функция переменной $\xi \in \mathbf{R}^n$ с вещественными значениями. Тогда параметрикс этой задачи имеет вид

$$T\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int \int a(t, x, \xi)\, \varphi(y)\, e^{i(x-y)\xi + iS(t,x,\xi)} dy d\xi,$$

где фазовая функция S находится как решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} = p\left(t, x, \xi + \frac{\partial S}{\partial x}\right),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$S(0, x, \xi) = 0.$$

Правило для отыскания амплитуды $a(t, x, \xi)$ указано ниже, в п. 4.3.

4.2. Некоторые свойства интегральных операторов Фурье. Обсудим вначале вопрос о сходимости интеграла (4.1). Ясно, что он может не сходиться при $m > -n_2$, даже если $u \in C^\infty(Y)$. Попытаемся определить этот интеграл как предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \int \chi(\varepsilon\theta)\, a(x, y, \theta)\, u(y)\, e^{iS(x,y,\theta)} dy d\theta,$$

где $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\chi(\theta) = 1$ в окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^N$. Предположим, что

$$d_{y,\theta} S(x, y, \theta) \neq 0 \text{ при } \theta \in \mathbf{R}^N \setminus 0, \quad x \in X, \quad y \in Y. \tag{4.3}$$

Пусть

$$L = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{n_2} \frac{\partial S}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{N} |\theta|^2 \frac{\partial S}{\partial \theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k}.$$

Тогда

$$L e^{iS(x,y,\theta)} = \left[\sum_{k=1}^{n_2} \left(\frac{\partial S}{\partial y_k}\right)^2 + |\theta|^2 \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta_j}\right)^2 \right] e^{iS(x,y,\theta)} =$$
$$= \psi(x, y, \theta)\, e^{iS(x,y,\theta)},$$

причем $\psi(x, y, \theta) \neq 0$, $\psi(x, y, t\theta) = t^2 \psi(x, y, \theta)$ при $t > 0$. Если $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $h(\theta) = 1$ при $|\theta| < \frac{1}{2}$; $h(\theta) = 0$ при $|\theta| > 1$, положим

$$L_1 = [1 - h(\theta)]\, \psi^{-1}(x, y, \theta)\, L + h(\theta).$$

Тогда $L_1 e^{iS} = e^{iS}$, причем

$$L_1 = \sum_{k=1}^{n_2} a_k(x, y, \theta) \frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x, y, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + c(x, y, \theta).$$

При этом функции a_k, b_j, c удовлетворяют оценкам вида (4.2), соответственно, при $m = -1$, 0 и -1. Поэтому

$$\int \int \chi(\varepsilon\theta)\, a(x, y, \theta)\, u(y)\, e^{iS(x,y,\theta)} dy d\theta =$$
$$= \int \int \chi(\varepsilon\theta)\, a(x, y, \theta)\, u(y)\, L_1^k e^{iS(x,y,\theta)} dy d\theta =$$
$$= \int \int ({}^tL_1)^k (\chi(\varepsilon\theta)\, a(x, y, \theta)\, u(y))\, e^{iS(x,y,\theta)} dy d\theta,$$

где

$${}^tL_1 v = -\sum_{k=1}^{n_2} \frac{\partial}{\partial y_k}(a_k v) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \theta_j}(b_j v) + cv.$$

Если k настолько велико, что $k > n_2 + m$, то полученный интеграл сходится абсолютно и равномерно по ε при $\varepsilon \in [0, 1]$ для $u \in C_0^\infty(Y)$ и допускает предельный переход при $\varepsilon \to 0$ под знаком интеграла.

Поскольку эта же конструкция применима к интегралам, получающимся из (4.1) после дифференцирования по x, справедлива

Теорема 4.1. Если выполнено условие (4.3), то оператор Φ является ограниченным из $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$.

Так как транспонированный к Φ оператор имеет вид

$${}^tAv(y) = \int \int e^{iS(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)\, v(x)\, dx d\theta,$$

можно, используя двойственность, получить следующее утверждение.

Теорема 4.2. Если выполнено условие

$$d_{x,\theta} S(x, y, \theta) \neq 0 \text{ при } \theta \neq 0, \ x \in X, \ y \in Y, \tag{4.4}$$

то отображение Φ, определяемое интегралом (4.1), может быть продолжено до непрерывного отображения

$$\Phi : \mathscr{E}'(Y) \to \mathscr{D}'(X).$$

Ядром Шварца оператора Φ является обобщенная функция $K(x, y) \in \mathscr{D}'(X \times Y)$, определенная интегралом

$$\langle K, w \rangle = \int \int e^{iS(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)\, w(x, y)\, dx dy d\theta, \quad w \in C_0^\infty(X \times Y).$$

Рассуждение, аналогичное приведенному выше, и теорема 3.6 позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 4.3. Пусть $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ и Φ — оператор вида (4.1), причем выполнены два условия:

1°. Если $d_x S(x, y, \theta) = 0$, $d_\theta S(x, y, \theta) = 0$, то $\left(y, -\frac{\partial S}{\partial y}\right) \notin \mathrm{WF}(u)$;
2°. Если $d_\theta S(x, y, \theta) = 0$, $\theta \neq 0$, то $d_y S(x, y, \theta) \neq 0$.

Тогда определена обобщенная функция $\Phi u \in \mathcal{D}'(X)$ и

$$\mathrm{WF}\,(\Phi u) \subset \Big\{(x,\ \xi):\ \xi = \frac{\partial S(x,\ y,\ \theta)}{\partial x},$$

$$\eta = -\frac{\partial S(x,\ y,\ \theta)}{\partial y},\ \frac{\partial S(x,\ y,\ \theta)}{\partial \theta} = 0,\quad (y,\ \eta) \in \mathrm{WF}\,(u)\Big\}.$$

4.3. Композиция интегральных операторов Фурье с псевдодифференциальными операторами. Пусть A — псевдодифференциальный оператор порядка m в области $X \subset \mathbb{R}^n$ и $a(x,\ \xi)$ — его символ. Рассмотрим вначале поведение функции $A(fe^{i\lambda\psi(x)})$ при $\lambda \to +\infty$, предполагая, что A — собственный, а $\psi(x) \in C^\infty(X)$ и $\psi'(x) \neq 0$ при $x \in X$, $f \in C^\infty(X)$.

Теорема 4.4. Для любого целого $N \geqslant 0$ при $\lambda \geqslant 1$ справедливо равенство

$$e^{-i\lambda\psi} A(fe^{i\lambda\psi}) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha a(x,\ \lambda\psi'(x))\, [D_y^\alpha (f(y)\, e^{i\lambda\varphi_x(y)})]_{y=x} +$$

$$+ \lambda^{m-N/2} R_N(\lambda,\ x), \tag{4.5}$$

где $\varphi_x(y) = \psi(y) - \psi(x) - \psi'(x)(y-x)$, а R_N такова, что

$$|\partial_x^\beta R_N(x,\ \lambda)| \leqslant C_{\beta,N,K} \quad \text{для } x \in K,$$

где K — произвольный компакт в X, а постоянные $C_{\beta,N,K}$ не зависят от λ.

Заметим, что в сумме (4.5) слагаемое, соответствующее индексу α, оценивается через $C\lambda^{m-|\alpha|/2}$, поскольку производные $\frac{\partial}{\partial y_j}\varphi_x(y) = 0$ при $y = x$ и поэтому

$$|[D_y^\alpha (f(y)\, e^{i\lambda\varphi_x(y)})]_{y=x}| = O(\lambda^{|\alpha|/2}).$$

Теорема 4.4 позволяет определить оператор $A \circ \Phi$, где Φ — оператор вида (4.1) порядка m' с амплитудой $b(x,\ y,\ \theta)$, т. е.

$$\Phi u(x) = \iint b(x,\ y,\ \theta)\, u(y)\, e^{iS(x,y,\theta)}\, dy\, d\theta.$$

Теорема 4.5. Композиция $A \circ \Phi$ является оператором вида (4.1) с той же фазовой функцией S и с амплитудой

$$c(x,\ y,\ \theta) = e^{-iS(x,y,\theta)} a(x,\ D_x)\, [b(x,\ y,\ \theta)\, e^{iS(x,y,\theta)}],$$

которая при $|\theta| \to \infty$ разлагается в асимптотический ряд:

$$c(x,\ y,\ \theta) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha a\Big(x,\ \frac{\partial S(x,\ y,\ \theta)}{\partial x}\Big)\, D_z^\alpha (b(z,\ y,\ \theta)\, e^{i\varphi_x(z,y,\theta)})\,|_{z=x},$$

где $\varphi_x(z,\ y,\ \theta) = S(z,\ y,\ \theta) - S(x,\ y,\ \theta) - (z-x)\dfrac{\partial S(x,\ y,\ \theta)}{\partial x}$.

Аналогичный результат верен и для композиции $\Phi \circ A$. Его легко получить из теоремы 4.5, представляя $\Phi \circ A$ как оператор, транспонированный к ${}^tA \cdot {}^t\Phi$.

Теорема 4.6. Оператор $\Phi \circ A$ представляется в виде (4.1) с той же фазовой функцией S и с амплитудой, асимптотически равной

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!\beta!}\, [\partial_\xi^{\alpha+\beta} D_y^\alpha\, a(y,\ \xi)]_{\xi=-\frac{\partial S(x,y,\theta)}{\partial y}}\, [D_z^\beta (b(x,\ z,\ \theta)\, e^{i\varphi_y(x,z,\theta)})]_{z=y},$$

где $\varphi_y(x,\ z,\ \theta) = S(x,\ z,\ \theta) - S(x,\ y,\ \theta) - (z-y)\dfrac{\partial S(x,\ y,\ \theta)}{\partial y}$.

Вернемся теперь к задаче, рассмотренной в примере 4.3 в п. 4.1. Применим теорему 4.5 для вычисления символа оператора $P \circ T$. Согласно этой теореме, символ $a(t,\ x,\ \xi)$ должен удовлетворять асимптотическому равенству

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha p\Big(t,\ x,\ \xi + \frac{\partial S}{\partial x}\Big)\, [D_z^\alpha (a(t,\ z,\ \xi)\, e^{i\varphi_x(t,z,\xi)})]_{z=x},$$

где $\varphi_x(t,\ z,\ \xi) = S(t,\ z,\ \xi) - S(t,\ x,\ \xi) - (z-x)\dfrac{\partial S(t,\ x,\ \xi)}{\partial x}$. Кроме того, $a(0,\ x,\ \xi) = 1$. Если представить a в виде асимптотической суммы

$$a \sim \sum_{j=0}^\infty a_j(t,\ x,\ \xi),\ a_j(t,\ x,\ \lambda\xi) = \lambda^{-j} a_j(t,\ x,\ \xi) \text{ при } \lambda > 0,$$

то получим, что

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=1} \partial_\xi^\alpha\, p\Big(t,\ x,\ \xi + \frac{\partial S}{\partial x}\Big) D_x^\alpha a_0(t,\ x,\ \xi), \quad a_0(0,\ x,\ \xi) = 1;$$

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=1} \partial_\xi^\alpha p\Big(t,\ x,\ \xi + \frac{\partial S}{\partial x}\Big) D_x^\alpha a_j(t,\ x,\ \xi) + F_j(t,\ x,\ \xi),$$

$$a_j(0,\ x,\ \xi) = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots$$

Здесь функции F_j вычисляются, если известны функции a_0, $a_1, \ldots, a_{j-1}$, причем $F_j(t,\ x,\ \lambda\xi) = \lambda^{-j} F_j(t,\ x,\ \xi)$ при $\lambda > 0$. Эти уравнения называются *уравнениями переноса*.

Построенный таким образом параметрикс T позволяет доказать существование единственного решения задачи Коши.

4.4. Канонические преобразования. Рассмотрим интегральный оператор Фурье специального вида:

$$\Phi u(x) = (2\pi)^{-n} \int a(x,\ \xi)\, \tilde{u}(\xi)\, e^{iS(x,\xi)}\, d\xi. \tag{4.6}$$

Предположим, что $\det\Big(\dfrac{\partial^2 S(x,\ \xi)}{\partial x \partial \xi}\Big) \neq 0$. Оператор (4.1) имеет вид (4.6) в том случае, когда a и S не зависят от y и $N = n_1 = n_2 = n$. Ядро Шварца этого оператора имеет вид

$$K(x,\ y) = (2\pi)^{-n} \int e^{iS(x,\xi) - iy\xi}\, a(x,\ \xi)\, d\xi.$$

Используя метод стационарной фазы, (см., например, [40]), можно показать, что

$$\mathrm{WF}(K)\subset\left\{(x, y, \xi, -\eta): y=\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial\eta},\ \xi=\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial x}\right\}.$$

Поэтому из теоремы 3.6 следует, что

$$\mathrm{WF}(\Phi u)\subset\left\{(x,\xi): \exists\eta\in\mathbf{R}^n,\ \xi=\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial x},\ \left(\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial\eta},\ \eta\right)\in\mathrm{WF}(u)\right\}.$$

Соотношения

$$y=\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial\eta},\quad \xi=\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial x}$$

определяют преобразование

$$T:(x,\xi)\mapsto(y,\eta),$$

которое называется в классической механике *каноническим* (см. [5]).

Напомним некоторые понятия, связанные с этим преобразованием.

Пусть M — гладкое многообразие четной размерности $2n$. *Симплектической структурой* на многообразии M называется гладкая внешняя дифференциальная 2-форма

$$\omega^2=\frac{1}{2}\sum\omega_{ij}dx_i\wedge dx_j,\quad \omega_{ij}=-\omega_{ji},$$

если она *замкнута*, т. е. $d\omega^2=0$, и *невырождена*, т. е. $\det\|\omega_{ij}\|\neq\neq0$. Многообразие, на котором задана симплектическая структура ω, называется *симплектическим*.

Если, например, Ω — область в $\mathbf{R}^n$, то многообразие $T^*\Omega$ имеет симплектическую структуру

$$\omega^2=dx\wedge d\xi=\sum_{j=1}^{n}dx_j\wedge d\xi_j,$$

не зависящую от выбора координат в Ω.

Преобразование $T:T^*\Omega\to T^*\Omega$ называется *каноническим*, если оно гладкое и сохраняет симплектическую структуру.

Примеры. 1°. Замена координат $y=F(x)$ порождает каноническое преобразование T:

$$y=F(x),\quad \eta={}^tF'(x)^{-1}\xi.$$

2°. Гладкая вещественнозначная функция $H(x,\xi)$ определяет для каждого $t\in\mathbf{R}$ каноническое преобразование

$$(x,\xi)\mapsto(x(t),\xi(t)),$$

где $x(t)$, $\xi(t)$ — решение системы уравнений

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H(x(t),\xi(t))}{\partial\xi},\quad \dot{\xi}(t)=-\frac{\partial H(x(t),\xi(t))}{\partial x}$$

с начальными условиями:

$$x(0)=x,\quad \xi(0)=\xi$$

(мы считаем, что такое решение определено при всех $t\in\mathbf{R}$).

Преобразование $T:T^*\Omega\to T^*\Omega$ является каноническим тогда и только тогда, когда при индуцированном на функциях преобразовании сохраняется *скобка Пуассона*

$$\{f,g\}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial\xi_j}-\frac{\partial f}{\partial\xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)$$

для любых двух функций f и g из $C^\infty(T^*\Omega)$.

Каждая гладкая функция $S(x_1,\ldots,x_n,\eta_1,\ldots,\eta_k,y_{k+1},\ldots,y_n)$, где $0\leqslant k\leqslant n$, удовлетворяющая условию

$$\det\left\|\frac{\partial^2S}{\partial x\partial\eta},\ \frac{\partial^2S}{\partial x\partial y}\right\|\neq0,$$

определяет каноническое преобразование T по формулам:

$$\xi_j=\frac{\partial S}{\partial x_j},\quad j=1,\ldots,n;$$

$$y_j=\frac{\partial S}{\partial\eta_j},\quad j=1,\ldots,k;\quad \eta_j=-\frac{\partial S}{\partial y_j},\quad j=k+1,\ldots,n$$

Функция S называется *производящей функцией* преобразования T.

4.5. Связь канонических преобразований с интегральными операторами Фурье. Как отмечено выше, волновой фронт обобщенной функции под действием интегрального оператора Фурье преобразуется в соответствии с каноническим преобразованием, производящей функцией которого служит фазовая функция интегрального оператора Фурье.

Оказывается, что аналогичным образом меняется главный символ каждого псевдодифференциального оператора.

Теорема 4.7 ([19]). Пусть P — псевдодифференциальный оператор с символом $p\in S^m(\Omega)$ и Φ — интегральный оператор Фурье (4.6) с фазовой функцией S. Тогда существует такой псевдодифференциальный оператор Q с символом $q\in S^m(\Omega')$, где Ω' — образ Ω при отображении, определяемом производящей функцией S, что оператор $T=P\Phi-\Phi Q$ является сглаживающим, причем $q-q_0\in S^{m-1}(\Omega')$, где $q_0\left(\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial\eta},\eta\right)=p\left(x,\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial x}\right)$.

При изучении различного рода априорных оценок удобным является следующий близкий результат.

Теорема 4.8 ([19]). Пусть P — псевдодифференциальный оператор с символом $p\in S^m(\Omega)$ и Φ — интегральный оператор Фурье вида (4.6) с амплитудой $a\in S^0(\Omega)$ и фазовой функцией S. Тогда оператор $Q=\Phi^*P\Phi$ является псевдодифференциальным с символом $q\in S^m(\Omega')$, причем

$$q(y,\eta)-p(x,\xi)|a(x,\xi)|^2|\det S_{x\xi}|^{-1}\in S^{m-1},$$

где (y, η) — образ точки (x, ξ) при каноническом преобразовании, определяемом производящей функцией S.

Следствие 4.1. Если Φ — интегральный оператор Фурье вида (4.6) с амплитудой $a \in S^0(\Omega\times\mathbf{R}^n)$ и фазовой функцией S, то для любой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ существует такая постоянная C, что

$$\|\Phi u\|_0 \leqslant C\|u\|_0, \quad u \in C_0^\infty(\Omega'),$$

а если $|a(x, \xi)| \geqslant c_0 > 0$ при больших $|\xi|$, то

$$\|u\|_0 \leqslant c(\|\Phi u\|_0 + \|u\|_{-1}), \ u \in C_0^\infty(\Omega').$$

Здесь, как обычно, $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Это утверждение сразу следует из теоремы 4.8, если применить ее в том случае, когда $P=I$, поскольку

$$\|\Phi u\|_0^2 = (\Phi^*\Phi u, u)_0 = (Qu, u)_0 = (Au, u)_0 + (Bu, u)_0,$$

где A — псевдодифференциальный оператор с символом $|a(x, \xi)|^2 |\det S_{x\xi}(x, \xi)|^{-1}$, а B — псевдодифференциальный оператор порядка -1.

Следствие 4.2. Если амплитуда a оператора (4.6) принадлежит $S^m(\Omega\times\mathbf{R}^n)$, то для любой $\Omega' \Subset \Omega$ и любого $s \in \mathbf{R}$ существует такая постоянная $C=C(s, \Omega')$, что

$$\|\Phi u\|_s \leqslant C\|u\|_{s+m}, \ u \in C_0^\infty(\Omega').$$

Определение 4.2. Интегральный оператор Фурье вида (4.6) называется *эллиптическим*, если его фазовая функция S невырождена, т. е. $\det\|\partial^2 S/\partial x_i \partial\xi_j\| \neq 0$, а его амплитуда a такова, что

$$|a(x, \xi)| \geqslant C|\xi|^m - C_1, \ C>0, \ (x, \xi) \in T^*\Omega\setminus 0.$$

Теорема 4.9 ([19]). Пусть Φ — эллиптический интегральный оператор Фурье вида (4.6). Тогда существует такой интегральный оператор Фурье Ψ вида (4.6) с той же фазовой функцией $S(x, \xi)$ и такой амплитудой $b(x, \xi) \in S^{-m}$, что оператор $\Psi^*\Phi - I$ является псевдодифференциальным оператором порядка $-\infty$.

4.6. Лагранжевы многообразия и фазовые функции. Пусть M — симплектическое многообразие размерности $2n$ и ω^2 — его симплектическая форма. Подмногообразие $\Lambda \subset M$ называется *лагранжевым*, если, во-первых, $\omega_x^2(\xi, \eta) = 0$ для любых $x \in \Lambda$ и векторов ξ и η из $T_x\Lambda$ и, во-вторых, $\dim\Lambda = n$.

При изучении интегральных операторов Фурье вида (4.1) важную роль играет множество

$$C_S = \{(x, y, \theta) \in X\times Y\times(\mathbf{R}^N\setminus 0);\ d_\theta S(x, y, \theta) = 0\}.$$

Предположим, что дифференциалы функций $\partial S/\partial\theta_j$, $j=1, \ldots, N$ по (x, y, θ) линейно независимы в каждой точке множества C_S. Тогда C_S является гладким подмногообразием в $X\times Y\times(\mathbf{R}^N\setminus 0)$ коразмерности N.

Предположим, кроме того, что $n_1 = n_2 = n$, $X = Y = \Omega$ и

$$D(S) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\partial\theta} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial\theta\partial y} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}\end{pmatrix} \neq 0. \qquad (4.7)$$

Если эти предположения выполнены, фазовая функция S называется *невырожденной*.

Рассмотрим множество

$$\Lambda_S = \{(x, \xi, y, \eta) \in \Omega\times(\mathbf{R}^n\setminus 0)\times\Omega\times(\mathbf{R}^n\setminus 0):$$
$$\exists\theta,\ \xi = \partial S(x, y, \theta)/\partial x,\ \eta = -\partial S(x, y, \theta)/\partial y,\ (x, y, \theta) \in C_S\}.$$

Условие (4.7) означает, что в качестве локальных координат на C_S можно использовать (x, ξ) или (y, η), где

$$\xi = dS(x, y, \theta)/\partial x, \ \eta = -\partial S(x, y, \theta)/dy.$$

В самом деле,

$$\frac{\partial\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial\theta}\right)}{\partial(x, y, \theta)} = D(S) \neq 0; \quad \frac{\partial\left(y, -\frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial\theta}\right)}{\partial(x, y, \theta)} = D(S) \neq 0,$$

так что отображения $(x, y, \theta) \mapsto \left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial\theta}\right)$ и $(x, y, \theta) \mapsto \left(y, -\frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial\theta}\right)$ определяют локальные координаты в окрестности поверхности C_S. Таким образом, если рассмотреть проекции

$$p: C_S \to \Omega_x\times(\mathbf{R}^n\setminus 0), \quad q: C_S \to \Omega_y\times(\mathbf{R}^n\setminus 0),$$

то при условии (4.7) эти проекции являются локальными диффеоморфизмами. Отображение $r = p\circ q^{-1}$ также является локальным диффеоморфизмом и может быть определено уравнениями:

$$x = x(y, \eta), \ \xi = \xi(y, \eta),$$

где x и ξ положительно однородны по η порядков 0 и 1, соответственно. Множество Λ_S является коническим и совпадает с графиком отображения r. Важно отметить, что на C_S

$$\xi dx - \eta dy = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy = dS(x, y, \theta) = 0,$$

поскольку $S = \theta\cdot\frac{\partial S}{\partial\theta} = 0$ на C_S. Поэтому при отображении r форма ξdx переходит в форму ηdy, т. е. форма $\xi dx - \eta dy$ тождественно равна 0 на векторах, касательных к Λ_S. Следовательно, симплектическая форма

$$d\xi\wedge dx - d\eta\wedge dy,$$

определенная на $\Omega\times(\mathbf{R}^n\setminus 0)\times\Omega\times(\mathbf{R}^n\setminus 0)$, обращается тождественно в 0 на Λ_S, т. е. Λ_S является лагранжевым подмногообразием.

Пусть теперь X — гладкое многообразие размерности n. Пусть L — коническое лагранжево подмногообразие в $T^*X\setminus 0$. Покажем, как сопоставить L *локальные фазовые функции*, т. е. такие гладкие вещественнозначные функции $S(x, \theta)$, что каждая из них положительно однородна по θ первой степени, определена в некотором открытом подмножестве $\Gamma\subset\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^N\setminus 0)$ и $d_{x,\theta}S\neq 0$ на Γ. Пусть S — такая функция, пусть множество

$$C_S=\left\{(x, \theta)\in\Gamma:\ \frac{\partial S(x, \theta)}{\partial\theta}=0\right\}$$

является гладким многообразием и ранг дифференциала отображения

$$\Gamma\ni(x, \theta)\mapsto\left(x, \frac{\partial S(x,\theta)}{\partial x}\right)\in T^*X\setminus 0 \tag{4.8}$$

равен n в каждой точке множества C_S. Зафиксируем точку $(x_0, \theta_0)\in\Gamma$ и пусть $\xi_0=\frac{\partial S}{\partial x}(x_0, \theta_0)$.

Определение 4.3. Фазовая функция S называется *ассоциированной с лагранжевым подмногообразием* L в окрестности точки $(x_0, \theta_0)\in L$, если существуют такие конические окрестности Γ^0 и Γ^1 точек (x_0, θ_0) и (x_0, ξ_0), соответственно, что образом $C_S\cap\Gamma^0$ при отображении (4.8) является $L\cap\Gamma^1$.

Существование таких локальных фазовых функций вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.1. Пусть L — коническое лагранжево подмногообразие в $T^*X\setminus 0$ и $(x^0, \xi^0)\in L$. Можно так выбрать координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ в окрестности точки $x^0\in X$, что в окрестности точки (x^0, ξ^0) многообразие L будет определяться уравнениями $x_j=\partial H(\xi)/\partial\xi_j$, $j=1, \ldots, n$, где $H\in C^\infty$ в конической окрестности точки ξ^0 и $H(t\xi)=tH(\xi)$ при $t>0$. Таким образом, фазовую функцию S, ассоциированную с L в окрестности точки (x^0, ξ^0), можно выбрать в виде

$$S=x\xi-H(\xi).$$

Определение 4.4. Фазовые функции S и $\tilde S$ называются *локально эквивалентными*, если $S(x, \theta)=\tilde S(x, \tilde\theta(x, \theta))$ и отображение $(x, \theta)\mapsto(x, \tilde\theta(x, \theta))$ является локальным диффеоморфизмом, $\tilde\theta(x, t\theta)=t\tilde\theta(x, \theta)$ при $t>0$.

Теорема 4.10 ([75], [76]). Невырожденные фазовые функции $S(x, \theta)$ и $\tilde S(x, \tilde\theta)$, где $\theta\in\mathbf{R}^{N_1}$, $\tilde\theta\in\mathbf{R}^{N_2}$, локально эквивалентны тогда и только тогда, когда

1) $N_1=N_2$;

2) S и $\tilde S$ ассоциированы с одним общим лагранжевым многообразием L;

3) у матриц $\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2}$ и $\frac{\partial^2\tilde S}{\partial\tilde\theta^2}$ совпадают ранг и числа положительных и отрицательных собственных значений.

При изучении интегральных операторов Фурье вида (4.1) важную роль играет коническое лагранжево многообразие Λ_S в $(T^*X\setminus 0)\times(T^*Y\setminus 0)$. Предложение 4.1 в этой ситуации утверждает, что Λ_S может быть локально определено с помощью фазовой функции

$$S=x\xi-y\eta-H(\xi, \eta).$$

Нетрудно видеть, что эта фазовая функция невырождена.

4.7. Лагранжевы многообразия и распределения Фурье. Рассмотрим интеграл

$$I_a(x)=\int e^{iS(x,\theta)}a(x, \theta)\,d\theta, \tag{4.9}$$

где S — невырожденная фазовая функция, $a\in S^m(X\times\mathbf{R}^N)$. Повторяя рассуждение из п. 4.2, можно придать смысл интегралу

$$\iint e^{iS(x,\theta)}a(x, \theta)\,u(x)\,dx\,d\theta,\quad u\in C_0^\infty(X), \tag{4.10}$$

причем этот интеграл непрерывно зависит от u. Таким образом, $I_a\in\mathcal{D}'(X)$.

С помощью метода стационарной фазы нетрудно проверить, что

$$\mathrm{WF}(I_a)\subset\left\{\left(x, \frac{\partial S(x, \theta)}{\partial x}\right)\in T^*X\setminus 0;\ \frac{\partial S(x, \theta)}{\partial\theta}=0\right\}=L.$$

Определение 4.5. *Распределением Фурье* из класса $I^m(X, L)$, называется интеграл вида (4.9), в котором $a\in S^m(X\times\mathbf{R}^N)$, а S — фазовая функция, ассоциированная с лагранжевым многообразием L.

Можно показать, что класс $I^m(X, L)$ действительно зависит лишь от L, а не от выбора фазовой функции S, ассоциированной с L. Если L может быть задано фазовыми функциями лишь локально, то класс $I^m(X, L)$ определяется как состоящий из сумм обобщенных функций, задаваемых интегралами вида (4.9) с различными фазовыми функциями S, ассоциированными с L в окрестностях различных точек из L.

Примерами распределений Фурье являются, например, ядра Шварца любых и. о. Ф.

4.8. Глобальное определение интегрального оператора Фурье. Пусть X и Y — два гладких многообразия одинаковой размерности n. Обобщенная функция $A\in\mathcal{D}'(X\times Y)$ определяет непрерывную билинейную форму на $C_0^\infty(X)\times C_0^\infty(Y)$ и, следовательно, непрерывное отображение $C_0^\infty(Y)\to\mathcal{D}'(X)$.

Если Λ — замкнутое коническое лагранжево подмногообразие в $T^*(X\times Y)\setminus 0$, то пространство распределений Фурье $I^m(X\times Y, \Lambda)$ можно рассматривать как некоторое пространство линейных непрерывных отображений из $C_0^\infty(Y)$ в $\mathcal{D}'(X)$.

Определение 4.6. Замкнутое коническое подмногообразие C в $T^*(X\times Y)\setminus 0$ называется *однородным каноническим отношением* из T^*Y в T^*X, если C содержится в $(T^*X\setminus 0)\times$

$\times(T^*Y\setminus 0)$ и является лагранжевым относительно формы $\sigma_X - \sigma_Y$, где σ_X и σ_Y — симплектические формы на X и Y, соответственно.

Как и в п. 4.6, можно показать, что локально каноническое однородное отношение C может быть определено с помощью невырожденной фазовой функции $S(x, y, \theta)$; так, если положить

$$C_S=\left\{(x, y, \theta): \frac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial\theta}=0\right\},$$

то отображение

$$(x, y, \theta)\mapsto\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, y, -\frac{\partial S}{\partial y}\right)$$

является локально однородным диффеоморфизмом C_S на C.

В силу замкнутости C, можно найти локально конечное покрытие $T^*(X\times Y)\setminus 0$ открытыми коническими множествами Γ_j, $j=1, 2, \ldots$, которые являются координатными окрестностями в $T^*(X\times Y)\setminus 0$ и обладают следующим свойством: для каждого j множество $C\cap\Gamma_j$, определяется невырожденной фазовой функцией $S_j(x, y, \theta)\in C^\infty(\Gamma_j)$. Пусть $\{g_j\}$, $j=1, 2, \ldots$, — гладкое разбиение единицы в $T^*(X\times Y)\setminus 0$, подчиненное этому покрытию, причем функции g_j положительно однородны по θ степени 0.

Оператор

$$\Phi u(x)=\sum_j\int\int g_j(x, y, \theta)e^{iS_j(x,y,\theta)}a_j(x, y, \theta)u(y)\,dyd\theta$$

называется *глобальным интегральным оператором Фурье*, если $a_j\in S^m$, $j=1, 2, \ldots$.

Пример 4.4. Если $X=Y$, $C=\Delta_x^*$ — диагональ в $(T^*X\setminus 0)\times\times(T^*Y\setminus 0)$, то в качестве фазовой функции можно взять $(x-y)\theta$, где $\theta\in\mathbf{R}^n\setminus 0$. В этом случае оператор Φ является псевдодифференциальным.

§ 5. Псевдодифференциальные операторы главного типа

5.1. Определение. Примеры. Пусть $P(D)$ — дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами и с главным символом $p_0(\xi)$.

Определение 5.1. Оператор $P(D)$ называется *оператором главного типа*, если $d_\xi p_0(\xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$, $\xi\in\mathbf{R}^n$.

Это название объясняется следующей теоремой.

Теорема 5.1 (см. [72]). Если $P(D)$ — оператор главного типа, то для каждого оператора $Q(D)$ с постоянными коэффициентами, имеющего порядок $m-1$, существует такая постоянная $C>0$, что

$$\|[P(D)+Q(D)]u\|\leqslant C(\|P(D)u\|+\|u\|), \quad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Эта теорема показывает, что многие свойства оператора P определяются его главным символом и не зависят от младших членов.

Пример 5.1. Операторы Δ и $\Box$ являются операторами главного типа. Операторы $\frac{\partial}{\partial t}\pm\Delta$ и $\frac{\partial}{\partial t}\pm i\Delta$ не являются таковыми.

Определение 5.1 следующим образом обобщается на псевдодифференциальные операторы общего вида.

Определение 5.2. Псевдодифференциальный оператор $P(x, D)$ с главным символом $p_0(x, \xi)$ называется *оператором главного типа* в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, если форма $d_{x,\xi}p_0(x, \xi)$ не коллинеарна форме ξdx при всех $(x, \xi)\in T^*\Omega\setminus 0$.

Отметим, что если для оператора $P(x, D)$ форма $d_{x,\xi}p_0(x, \xi)$ коллинеарна форме ξdx в некоторой точке $(x, \xi)\in T^*\Omega\setminus 0$, то тогда $d_\xi p_0(x, \xi)=0$ и, в силу тождества Эйлера, $p_0(x, \xi)=0$. Среди неэллиптических операторов простейшим оператором главного типа является оператор D_1. Как будет объяснено ниже, каждый оператор главного типа с вещественнозначным главным символом p_0 микролокально эквивалентен этому простейшему оператору.

5.2. Операторы с вещественным главным символом. Пусть $P(x, D)$ — оператор главного типа порядка m с вещественным главным символом $p_0(x, \xi)$ и пусть $p_0(x_0, \xi^0)=0$, $x_0\in\Omega$, $\xi^0\in\mathbf{R}^n\setminus 0$. Поскольку эллиптические операторы микролокально обратимы в алгебре псевдодифференциальных операторов, можно заменить уравнение $P(x, D)u=f$ эквивалентным ему уравнением $QPu=Qf$, где Q — эллиптический оператор порядка $1-m$. Таким образом, можно, не ограничивая общности, считать, что $m=1$.

Теорема 5.2 ([19]). Пусть $P(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор главного типа первого порядка с вещественным главным символом $p_0(x, \xi)$. Пусть $(x^0, \xi^0)\in T^*\Omega\setminus 0$ и $p_0(x^0, \xi^0)=0$. Тогда существует такой эллиптический интегральный оператор Фурье Φ вида (4.6), что один из операторов $P\Phi-\Phi D_1$ или $\Phi P-D_1\Phi$ имеет амплитуду, равную нулю в конической окрестности точки (x^0, ξ^0).

Рассмотрим вначале тот случай, когда $d_\xi p_0(x^0, \xi^0)\neq 0$. Пусть для определенности $\partial_{\xi_1} p_0(x^0, \xi^0)\neq 0$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши:

$$p_0\left(x, \frac{\partial S(x, \xi)}{\partial x}\right)=\xi_1, \quad S=\sum_{j=2}^n x_j\xi_j \text{ при } x_1=x_1^0. \tag{5.1}$$

Поскольку плоскость $x_1=x_1^0$ — нехарактеристическая в некоторой окрестности точки (x^0, ξ^0), решение этой задачи существует в некоторой конической окрестности этой точки. Нетрудно проверить, что в ω

$$S(x, t\xi)=tS(x, \xi) \text{ при } t>0 \text{ и } \det\|\partial^2 S/\partial x_i\partial\xi_j\|\neq 0.$$

Последнее видно из того, что $\det\|\partial^2 S(x^0,\xi^0)/\partial x_i\partial\xi_j\|=$ $=\partial^2 S(x^0,\xi^0)/\partial x_1\partial\xi_1$ и, в силу уравнения (5.1), имеем

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_0(x,\partial S/\partial x)}{\partial\xi_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial\xi_1}=1.$$

Но при $x_1=x_1^0$, в силу начального условия, $\partial^2 S/\partial x_j\partial\xi_1=0$ при $j=2,\ldots,n$. Поэтому $\partial^2 S(x^0,\ \xi^0)/\partial x_1\partial\xi_1\neq 0$. Следовательно, функция S является производящей для некоторого канонического преобразования. По теореме 4.7, если положить

$$\Phi u(x)=(2\pi)^{-n}\int\tilde{u}(\xi)e^{iS(x,\xi)}d\xi, \tag{5.2}$$

где S определена вне ω произвольно, но так, что $S(x,\ t\xi)=$ $=tS(x,\ \xi)$ при $t>0$ и $\det\|\partial^2 S/\partial x_i\partial\xi_j\|\neq 0$, оператор

$$P\Phi-\Phi D_1$$

имеет в ω нулевой порядок. Таким образом, оператор P эквивалентен в ω оператору вида D_1+A, где A — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. Дальнейшее преобразование можно проделать с помощью следующей леммы.

Лемма 5.1 ([19]). Пусть $P(x,\ D)=D_1+A(x,\ D)$, где A — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. Тогда существует такой эллиптический псевдодифференциальный оператор T нулевого порядка, что

$$SPT=D_1+R,$$

где R — бесконечно сглаживающий оператор, а S — параметрикс для оператора T.

Таким образом, решение уравнения $Pu=f$, где P — псевдодифференциальный оператор главного типа с вещественным главным символом сводится к решению уравнения $D_1 v=g+Rv$, где R имеет в ω порядок — ∞.

Если $d_\xi p_0(x^0,\ \xi^0)=0$, но форма $d_x p_0(x^0,\ \xi^0)$ не пропорциональна форме $\xi^0 dx$, то применима та же конструкция, но уравнение (5.1) придется заменить другим. С помощью поворота в x-пространстве можно всегда добиться того, что $\operatorname{grad}_x p_0(x^0,\ \xi^0)$ будет иметь вид $(a,\ 0,\ldots,\ 0)$, где $a\neq 0$, причем вектор $\xi^0\neq 0$ таков, что $\xi_1^0=0$.

Будем искать производящую функцию в виде $S=S(y,\ \xi)$, так что S — решение задачи Коши

$$p_0\left(\frac{\partial S}{\partial\xi},\ \xi\right)=\frac{\partial S}{\partial y_1},\quad S=\sum_{j=2}^{n}y_j\xi_j+\frac{\xi_1^2}{2|\xi|}\ \text{при}\ y_1=0.$$

Ясно, что решение этой задачи существует в некоторой конической окрестности ω точки $(y^0,\ \xi^0)$, причем $y_1^0=0$, $S(y,\ t\xi)=$ $=tS(y,\ \xi)$ при $t>0$ и

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S(y,\ \xi)}{\partial y_i\partial\xi_j}\right\|\neq 0\ \text{в}\ \omega.$$

Продолжая S на $T^*\Omega$, получим, что порядок оператора

$$\Phi P-D_1\Phi$$

равен 0, если Φ — оператор вида (5.2).

Таким образом, и в этом случае уравнение $Pu=f$ в конической окрестности точки $(x^0,\ \xi^0)$ сводится к уравнению $D_1 v=g+$ $+Rv$, где оператор R имеет символ, равный 0 в этой окрестности.

5.3. Разрешимость уравнений главного типа с вещественным главным символом. Теоремы 3.7—3.10 об особенностях решений уравнения $Pu=f$ и теорема 5.2 позволяют решить вопрос локальной разрешимости этого уравнения.

Определение 5.4. Псевдодифференциальный оператор $P(x,\ D)$ называется *разрешимым в точке* $x^0\in\Omega$, если существуют такие окрестности U и V этой точки в Ω, что $U\Subset V$ и для каждой функции $f\in C^\infty(V)$ найдется такая обобщенная функция $u\in\mathscr{E}'(V)$, что $Pu=f$ в U.

Определение 5.5. Псевдодифференциальный оператор $P(x,\ D)$ называется *полуглобально разрешимым* в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, если для каждого компакта K из Ω и каждой функции f из подпространства S конечной коразмерности в $C^\infty(\Omega)$ найдется $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$, для которого $Pu=f$ в K.

Условия разрешимости оператора P определяются поведением его бихарактеристик.

Пример 5.2. Оператор $x_2D_1-x_1D_2$ не является разрешимым в начале координат, хотя является оператором главного типа.

Следующее условие на оператор P в Ω зависит от выбора компакта $K\Subset\Omega$.

Условие A. Пусть $K\Subset\Omega$. Для каждой точки $(x^0,\ \xi^0)\in$ $\in T^*\Omega\setminus 0$, в которой $p_0(x^0,\ \xi^0)=0$, *бихарактеристика*, т. е. интегральная кривая системы уравнений

$$\dot{x}(t)=\partial p_0(x(t),\ \xi(t))/\partial\xi,\quad \dot{\xi}(t)=-\partial p_0(x(t),\ \xi(t))/\partial x$$

проходящая через точку $(x^0,\ \xi^0)$, содержит точки $(x,\ \xi)\in T^*\Omega\setminus 0$, проекция которых на Ω лежит вне K.

Теорема 5.3 ([63]). Оператор $P(x,\ D)$ разрешим в точке x^0, если найдется такая окрестность K этой точки, в которой выполнено условие A. В частности, оператор P разрешим в точке x^0, если $d_\xi p_0(x^0,\ \xi)\neq 0$ для всех $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0$.

Теорема 5.4 ([63]). Оператор $P(x,\ D)$ полуглобально разрешим в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, если для каждого компакта $K\Subset\Omega$ выполнено условие A. При этом, если $f\in H^s(\Omega)\cap S$, то существует функция $u\in\overset{\circ}{H}{}^{s+m-1}(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Pu=f$ в K и

$$\|u\|_{s+m-1}\leqslant C\|f\|_s,$$

где постоянная $C=C(s,\ K)$ не зависит от f.

5.4. Разрешимость операторов главного типа с комплекснозначным главным символом. Если псевдодифференциальный оператор $P(x, D)$ главного типа имеет комплекснозначный символ $p_0=a+ib$, то уравнение $Pu=f$, где $f\in C^\infty(\Omega)$, может быть решено, вообще говоря, только в том случае, когда f принадлежит подпространству бесконечной коразмерности.

Пример 5.3. Исторически первым был *пример Леви* уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}+2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f(x_1, x_2, x_3),$$

где $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, которое не имеет решений ни в каком открытом множестве $\omega\subset\mathbf{R}^3$ (см. [72]).

Пример 5.4. Еще более простым является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+ix_1\frac{\partial u}{\partial x_2}=f(x_1, x_2).$$

Существует множество второй категории в $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ функций f, для которых это уравнение неразрешимо ни в каком открытом множестве на плоскости, содержащем точки оси ox_2 (см. [72]).

Пример 5.5. Задача с косой производной для эллиптического уравнения второго порядка приводит после сведения на границу к неразрешимому псевдодифференциальному уравнению, если имеются «отталкивающие» подмногообразия размерности n—2. Например, для уравнения Лапласа в полупространстве $x_n>0$ задача с условием

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+ax_1^k\frac{\partial u}{\partial x_n}=f \text{ при } x_n=0$$

может быть сведена к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}-ax_1^k\Lambda v=f,$$

где v — след функции u на границе, Λ — оператор с символом $|\xi|$. Если k — нечетное число и $a>0$, то ни в какой окрестности точки, лежащей на многообразии $x_n=0$, $x_1=0$, не существует решения u краевой задачи.

К настоящему времени теория разрешимости уравнений главного типа довольно далеко продвинута. Приведем несколько результатов.

Теорема 5.5 ([72]). Если $(x^0, \xi^0)\in T^*\Omega\setminus 0$, $p_0(x^0, \xi^0)=0$, $c_1^0(x^0, \xi^0)>0$, где $c_1^0(x, \xi)=\operatorname{Im}\sum_{j=1}^n\frac{\partial p_0(x,\xi)}{\partial\xi_j}\frac{\partial \bar p_0(x,\xi)}{\partial x_j}$, то в каждой окрестности ω точки x_0 найдется такая функция $f\in C_0^\infty(\omega)$, что уравнение $Pu=f$ не имеет решений из $\mathcal{D}'(\omega)$.

Теорема 5.6 ([50]). Пусть P — оператор главного типа, удовлетворяющий условию

($\mathcal{P}$) На каждой бихарактеристике функции $\operatorname{Re} p_0$, вдоль которой $\operatorname{Re} p_0\equiv 0$, функция $\operatorname{Im} p_0$ не меняет знака.

Тогда для каждой точки $x^0\in\Omega$ найдется такая окрестность ω, что для любой функции f из $H^s(\omega)$ существует функция $u\in H^{s+m-1}(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Pu=f$ в Ω. При этом $\|u\|_{s+m-1}\leqslant C\|f\|_s$, где C не зависит от f.

Теорема 5.7 ([18]). Пусть P — оператор главного типа, удовлетворяющий следующим двум условиям:

(Ψ) На каждой бихарактеристике функции $\operatorname{Re} p_0$, вдоль которой $\operatorname{Re} p_0\equiv 0$, функция $\operatorname{Im} p_0$ не меняет знака с — на + при движении в положительном направлении.

(B) Для каждой точки $(x^0, \xi^0)\in T^*\Omega\setminus 0$, где $p_0(x^0, \xi^0)=0$, существует такая функция, полученная из p_0 и $\bar p_0$ с помощью операции взятия скобки Пуассона, т. е. $\{\ldots\{\{p_0, \bar p_0\}, p_1\}\ldots p_j\}$, где каждая из функций $p_1, \ldots, p_j$ равна p_0 или $\bar p_0$, а $j\leqslant k-1$, что ее значение в точке (x^0, ξ^0) отлично от нуля.

Тогда для каждой точки $x^0\in\Omega$ найдется такая окрестность ω, что для любой функции $f\in H^s(\omega)$ существует функция из $H^{s+m-\delta}(\Omega)$, где $\delta=k(k+1)^{-1}$, удовлетворяющая уравнению $Pu=f$ в ω. При этом

$$\|u\|_{s+m-\delta}\leqslant C\|f\|_s$$

и постоянная C не зависит от f.

Операторы P, удовлетворяющие условиям (Ψ) и (B), называются *субэллиптическими*. Например, такие операторы возникают при изучении задачи с косой производной для эллиптического уравнения второго порядка, если порядок касания поля, заданного на границе области, с этой границей, не превышает k.

§ 6. Смешанная задача для гиперболических уравнений

6.1. Постановка задачи. При изучении колебаний ограниченных тел необходимо принимать во внимание их взаимосвязь с внешней средой. Эта связь учитывается обычно с помощью краевых условий, накладываемых на границе тела. В [21 п.п. 4.13, 4.14 гл. 2] говорилось о результатах классической теории для гиперболического уравнения второго порядка, изучавшей краевые условия одного из трех указанных там видов. Даже для сходной по внешнему виду смешанной задачи с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial\alpha}=g$ на границе, где α — гладкое векторное поле, не совпадающее тождественно с полем конормалей, классическая теория не дает никаких рецептов ее решения. Основные результаты в общей теории краевых задач для гиперболических уравнений были получены в семидесятых годах. Эти успехи существенно используют такие достижения общей теории, как аппарат интегральных операторов Фурье и теорию распространения особенностей.

5.4. Разрешимость операторов главного типа с комплекснозначным главным символом. Если псевдодифференциальный оператор $P(x, D)$ главного типа имеет комплекснозначный символ $p_0=a+ib$, то уравнение $Pu=f$, где $f\in C^\infty(\Omega)$, может быть решено, вообще говоря, только в том случае, когда f принадлежит подпространству бесконечной коразмерности.

Пример 5.3. Исторически первым был *пример Леви* уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}+2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f(x_1, x_2, x_3),$$

где $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, которое не имеет решений ни в каком открытом множестве $\omega\subset\mathbf{R}^3$ (см. [72]).

Пример 5.4. Еще более простым является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+ix_1\frac{\partial u}{\partial x_2}=f(x_1, x_2).$$

Существует множество второй категории в $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ функций f, для которых это уравнение неразрешимо ни в каком открытом множестве на плоскости, содержащем точки оси ox_2 (см. [72]).

Пример 5.5. Задача с косой производной для эллиптического уравнения второго порядка приводит после сведения на границу к неразрешимому псевдодифференциальному уравнению, если имеются «отталкивающие» подмногообразия размерности $n-2$. Например, для уравнения Лапласа в полупространстве $x_n>0$ задача с условием

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+ax_1^k\frac{\partial u}{\partial x_n}=f \text{ при } x_n=0$$

может быть сведеиа к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}-ax_1^k\Lambda v=f,$$

где v — след функции u на границе, Λ — оператор с символом $|\xi|$. Если k — нечетное число и $a>0$, то ни в какой окрестности точки, лежащей на многообразии $x_n=0$, $x_1=0$, не существует решения u краевой задачи.

К настоящему времени теория разрешимости уравнений главного типа довольно далеко продвинута. Приведем несколько результатов.

Теорема 5.5 ([72]). Если $(x^0, \xi^0)\in T^*\Omega\setminus 0$, $p_0(x^0, \xi^0)=0$, $c_1^0(x^0, \xi^0)>0$, где $c_1^0(x, \xi)=\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_0(x, \xi)}{\partial \xi_j}\frac{\overline{\partial p_0(x, \xi)}}{\partial x_j}$, то в каждой окрестности ω точки x_0 найдется такая функция $f\in C_0^\infty(\omega)$, что уравнение $Pu=f$ не имеет решений из $\mathcal{D}'(\omega)$.

Теорема 5.6 ([50]). Пусть P — оператор главного типа, удовлетворяющий условию

($\mathcal{P}$) На каждой бихарактеристике функции $\operatorname{Re} p_0$, вдоль которой $\operatorname{Re} p_0\equiv 0$, функция $\operatorname{Im} p_0$ не меняет знака.

Тогда для каждой точки $x^0\in\Omega$ найдется такая окрестность ω, что для любой функции f из $H^s(\omega)$ существует функция $u\in H^{s+m-1}(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Pu=f$ в Ω. При этом $\|u\|_{s+m-1}\leqslant C\|f\|_s$, где C не зависит от f.

Теорема 5.7 ([18]). Пусть P — оператор главного типа, удовлетворяющий следующим двум условиям:

(Ψ) На каждой бихарактеристике функции $\operatorname{Re} p_0$, вдоль которой $\operatorname{Re} p_0\equiv 0$, функция $\operatorname{Im} p_0$ не меняет знака с — на + при движении в положительном направлении.

(B) Для каждой точки $(x^0, \xi^0)\in T^*\Omega\setminus 0$, где $p_0(x^0, \xi^0)=0$, существует такая функция, полученная из p_0 и $\overline{p_0}$ с помощью операции взятия скобки Пуассона, т. е. $\{\ldots\{\{p_0, \overline{p_0}\}, p_1\}\ldots p_j\}$, где каждая из функций $p_1, \ldots, p_j$ равна p_0 или $\overline{p_0}$, а $j\leqslant k-1$, что ее значение в точке (x^0, ξ^0) отлично от нуля.

Тогда для каждой точки $x^0\in\Omega$ найдется такая окрестность ω, что для любой функции $f\in H^s(\omega)$ существует функция из $H^{s+m-\delta}(\Omega)$, где $\delta=k(k+1)^{-1}$, удовлетворяющая уравнению $Pu=f$ в ω. При этом

$$\|u\|_{s+m-\delta}\leqslant C\|f\|_s$$

и постоянная C не зависит от f.

Операторы P, удовлетворяющие условиям (Ψ) и (B), называются *субэллиптическими*. Например, такие операторы возникают при изучении задачи с косой производной для эллиптического уравнения второго порядка, если порядок касания поля, заданного на границе области, с этой границей, не превышает k.

§ 6. Смешанная задача для гиперболических уравнений

6.1. Постановка задачи. При изучении колебаний ограниченных тел необходимо принимать во внимание их взаимосвязь с внешней средой. Эта связь учитывается обычно с помощью краевых условий, накладываемых на границе тела. В [21 п.п. 4.13, 4.14 гл. 2] говорилось о результатах классической теории для гиперболического уравнения второго порядка, изучавшей краевые условия одного из трех указанных там видов. Даже для сходной по внешнему виду смешанной задачи с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial \alpha}=g$ на границе, где α — гладкое векторное поле, не совпадающее тождественно с полем конормалей, классическая теория не дает никаких рецептов ее решения. Основные результаты в общей теории краевых задач для гиперболических уравнений были получены в семидесятых годах. Эти успехи существенно используют такие достижения общей теории, как аппарат интегральных операторов Фурье и теорию распространения особенностей.

6.2. Условие Херша—Крейсса. Рассмотрим систему уравнений первого порядка гиперболического типа с постоянными коэффициентами в четверти пространства:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}B_j\frac{\partial u}{\partial y_j}=0,\quad t>0,\quad x>0,$$

с условиями

$$u=0 \text{ при } t=0,\ x\geqslant 0,$$
$$Mu=g \text{ при } x=0,\ t\geqslant 0,$$

где $u=(u_1,\ldots,u_N)$, A, B_j — матрицы порядка $N\times N$, M — постоянная матрица порядка $k\times N$. Предположим, что собственные значения матрицы A вещественны и различны, причем плоскость $x=0$ не является характеристической, т. е. собственные значения матрицы A не равны 0.

После преобразования Фурье по переменным y получим краевую задачу в четверти плоскости переменных (t,x):

$$\frac{\partial v}{\partial t}+A\frac{\partial v}{\partial x}+Cv=0,\quad C=\sum_{j=1}^{n}i\eta_jB_j,\quad t>0,\quad x>0,$$
$$v=0 \text{ при } t=0,\quad x\geqslant 0,$$
$$Mv=\tilde g \text{ при } x=0,\quad t\geqslant 0.$$

Замена $v=Tw$, где T — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A, приводит дифференциальную часть рассматриваемой системы к диагональному виду, так что вся система приобретает вид

$$\frac{\partial w_j}{\partial t}+\lambda_j\frac{\partial w_j}{\partial x}+\sum_{k=1}^{N}\alpha_{jk}w_k=0,\quad j=1,\ldots,N,$$

где λ_j — собственные значения матрицы A.

Перенумеруем координаты $(w_1,\ldots,w_N)$ так, чтобы первые μ собственных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_\mu$ были >0, а остальные <0. Полученная система эквивалентна системе интегральных уравнений

$$w_j(t,x)+\int_{l_j}\sum_{k=1}^{N}\alpha_{jk}w_k ds=w_{j0},\quad j=1,\ldots,N,\quad t>0,\quad x>0,$$

где l_j — отрезок прямой $x=\lambda_jt+c$, проходящей через точку (t,x), ограниченный этой точкой и точкой пересечения P_j с плоскостью $x=0$ или с плоскостью $t=0$, а w_{j0} — значение w_j в этой точке P_j (см. [21, п. 4.7 гл. 2]). Если w_{j0} известны, то эта система легко решается (например, методом последовательных приближений).

Поскольку $x>0$, с плоскостью $x=0$ могут пересечься только прямые, соответствующие значениям $j=1,\ldots,\mu$. Поэтому рассматриваемая краевая задача поставлена корректно, если выполнены следующие два условия:

1⁰. $\mu=k$;

2⁰ первые k столбцов матрицы MT линейно независимы.

Эти условия можно выразить также в следующей эквивалентной форме. Пусть E — пространство, натянутое на собственные векторы матрицы A, соответствующие положительным собственным значениям. Пусть K — пространство, натянутое на строки матрицы M. Тогда ортогональная проекция K на E имеет размерность k и $L\cap E=\{0\}$, где L — ортогональное дополнение к K в $\mathbf{R}^N$.

Указанные условия были найдены Хершем ([71]). Ранее при некоторых дополнительных предположениях такие условия использовались в работе Балабана [49]. В работе Крейса [82] был сформулирован аналогичный результат для систем уравнений с переменными коэффициентами с указанием, что доказательство может быть перенесено на этот случай. Полные доказательства были опубликованы в работах М. С. Аграновича [3] и Рауха [93]. Приведем соответствующий результат.

Рассмотрим систему уравнений

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}A_j(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+B(t,x)u=f \text{ в } [0,T]\times\Omega, \tag{6.1}$$

где Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей Γ.

Пусть краевые условия имеют вид

$$M(t,x)u=g \text{ в } [0,T]\times\Gamma, \tag{6.2}$$
$$u=h \text{ в } \Omega \text{ при } t=0. \tag{6.3}$$

Здесь $M(t,x)$ — гладкая матрица порядка $k\times N$, причем ранг M равен k, где k — число положительных собственных значений матрицы $\sum_{j=1}^{n}\nu_jA_j$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ — вектор нормали к Γ. Предполагается, что L — строго гиперболический оператор, так что собственные значения матрицы $\sum_{j=1}^{n}\xi_jA_j$ вещественны и различны при любых вещественных $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0$.

Кроме того, предполагается, что граница Γ не имеет характеристических точек, т. е. матрица $\sum_{j=1}^{n}\nu_jA_j$ невырождена всюду на Γ.

Фиксируем точку $x^0\in\Gamma$. В окрестности этой точки можно гладким преобразованием перевести Γ в часть плоскости $x_n=0$, так что образ Ω будет лежать при $x_n>0$. Сделав это преобразование, фиксируем значения аргументов у оператора L и матрицы M, положив $t=t_0>0$, $x=x^0$, и положим $B=0$. Получим краевую задачу в четверти пространства $t>0$, $x_n>0$.

Теорема 6.1. Задача (6.1)—(6.3) имеет решение $u\in C^1([0, T]\times\Omega)$ для любых $f\in C^1([0, T]\times\bar{\Omega})$, $g\in C^1([0, T]\times\Gamma)$, $h\in C^1(\bar{\Omega})$ тогда и только тогда, когда для любых (t_0, x^0) описанная краевая задача с постоянными коэффициентами в четверти пространства удовлетворяет условиям 1^0—2^0. При этом

$$\|u\|\leqslant C(\|f\|+\|g\|+\|h\|),$$

где нормы берутся в пространствах L_2 по соответствующим множествам: для u и f — по $\Omega\times[0, T]$, для g — по $\Gamma\times[0, T]$ и для h — по Ω.

Замечание 6.1. Если $f=0$, $g=0$ и $h\in L_2$, то существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (6.1)—(6.3), которое при каждом $t>0$ также принадлежит L_2.

6.3. Условия Сакамото. Пусть $P(D_t, D_x, D_y)$ — однородный гиперболический оператор порядка m с постоянными коэффициентами. Рассмотрим краевую задачу:

$$Pu=0 \text{ при } t>0,\ x>0,\ y\in\mathbf{R}^n,$$

$$u=0 \text{ при } t\leqslant 0, x>0;$$

$$B_j u=g_j \text{ при } t>0,\ x=0,\ j=1, \dots, k,$$

где $B_j=B_j(D_t, D_x, D_y)$ — однородные дифференциальные операторы порядка m_j.

Как и в случае систем, преобразованием Фурье по переменным y можно свести задачу к краевой задаче на плоскости переменных (t, x). Корни $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ характеристического уравнения

$$P(\lambda, \xi, \eta)=0$$

вещественны при вещественных $(\xi, \eta)\neq 0$, в силу гиперболичности. Предположим, что плоскость $x=0$ является нехарактеристической относительно P, и рассмотрим характеристическое уравнение как уравнение относительно ξ при $\operatorname{Im}\lambda<0$. По условию, это уравнение не может иметь вещественных корней. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ — те корни этого уравнения, у которых $\operatorname{Im}\xi_j>0$ и $\operatorname{Im}\xi_l<0$ для $l=\mu+1, \dots, m$. Пусть $A_+(\xi)=\prod_{j=1}^{\mu}(\xi-\xi_j)$.

Снова применяя технику, описанную в [21, п. 1.7 гл. 2], находим, что для корректности поставленной смешанной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1^0. $\mu=k$;

2^0. полиномы $\xi\mapsto B_j(\tau, \xi, \eta)$, $j=1, \dots, k$ линейно независимы по модулю $A_+(\xi)$ при $(\tau, \eta)\neq 0$, $\operatorname{Im}\tau\leqslant 0$.

Пусть

$$B_j^+(\tau, \xi, \eta)=\sum_{l=0}^{k-1} B_{jl}(\tau, \eta)\,\xi^l$$

— остаток от деления B_j как многочлена от ξ на $A_+(\xi)$ при $j=1, \dots, k$. Матрица $\|B_{jl}(\tau, \eta)\|$ размеров $k\times k$ называется *матрицей Лопатинского*. Ее определитель $R(\tau, \eta)$ называется *определителем Лопатинского*, отвечающим системе $(A_+, B_j, j=1, 2, \dots, k)$.

В работах Сакамото показано, что условия 1^0, 2^0, называемые также *равномерным условием Лопатинского*, необходимы и достаточны для корректности (в смысле, уточняемом ниже в теореме 6.2) краевой задачи

$$P(t, x, y, D_t, D_x, D_y)u=f \text{ при } t>0,\ x>0,$$

$$u=0 \text{ при } t\leqslant 0,\ x>0,$$

$$B_j(t, y, D_t, D_x, D_y)u=g_j,\ j=1, \dots, k \text{ при } x=0,\ t>0.$$

Предполагается, что условия 1^0, 2^0 выполнены для каждой краевой задачи, получаемой из данной отбрасыванием младших членов операторов P и B_j и фиксированием значений коэффициентов в каждой точке $(t, 0, y)$ при $t\geqslant 0$.

При изучении данной краевой задачи удобно использовать функциональные пространства $H_{p,\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+2})$ с нормой, определяемой равенством

$$\|v\|_{p,\gamma}^2=\sum_{i+j+l+|\alpha|=p}\int_{\substack{x>0\\ t>0}}|e^{-\gamma t}\gamma^i D_t^j D_x^l D_y^\alpha v(t, x, y)|^2\,dtdxdy.$$

Введем еще пространство $H_{p,\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+1})$ с нормой, определяемой равенством

$$\langle v\rangle_{p,\gamma}^2=\sum_{i+j+|\alpha|=p}\int_0^\infty dt\int_{\mathbf{R}^n}|e^{-\gamma t}\gamma^i D_t^j D_y^\alpha v(t, y)|^2\,dy.$$

Теорема 6.2 ([96]). Если выполнено равномерное условие Лопатинского, то существуют такие положительные числа c и γ_0, что для $u\in H_{m,\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+2})$ при $\gamma\geqslant\gamma_0$ выполнено неравенство

$$\gamma\|u\|_{m-1,\gamma}^2+\sum_{j=0}^{m-1}\langle D_x^j u\rangle_{m-1-j,\gamma}^2\leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\frac{1}{\gamma}\|Au\|_{0,\gamma}^2+\sum_{j=1}^{k}\langle B_j u\rangle_{m-1-m_j,\gamma}^2\right\}.$$

Если $\gamma\geqslant\gamma_0$, то для любых функций $f\in H_{0,\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+2})$, $g_j\in H_{m-1-m_j,\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+2})$ существует одно и только одно решение краевой задачи из класса $H_{m-1,\gamma}(\mathbf{R}_+^{n+2})$.

Отметим, что и в этом случае справедливо утверждение, аналогичное замечание 6.1. В работе М. С. Аграновича [3] было показано, что рассмотренная выше краевая задача для уравнения высокого порядка может быть сведена к эквивалентной задаче вида (6.1)—(6.3), так что в действительности условия Сакамото эквивалентны условиям Крейса.

6.4. Отражение особенностей на границе. Новый этап в теории смешанной задачи для гиперболических уравнений связан с привлечением техники интегральных операторов Фурье и изучением особенностей решения. Внутри области особенности решения распространяются по бихарактеристикам (см. теоремы 3.8, 3.10). В тот момент, когда бихарактеристика встречается с границей области, происходит отражение по законам геометрической оптики, и если бихарактеристика трансверсальна к границе, то после отражения особенность решения распространяется внутри области по отраженной бихарактеристике.

Впервые этот факт был отмечен в работе А. Я. Повзнера и И. В. Сухаревского [38], где рассматривалось уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

с условиями $u=0$ на $\partial\Omega$, $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}=\delta(x-x_0, y-y_0)$ при $t=0$; $(x_0, y_0)\in\Omega$. Предполагалось, что область Ω выпукла. В этом случае лучи, т. е. проекции нулевых бихарактеристик на (t, x, y)-пространство — это прямые, направленные под углом 45° к оси t. Лучи, проходящие через точку $(0, x_0, y_0)$, образуют конус. Каждая образующая этого конуса, встречаясь с $[0, T]\times\partial\Omega$, переходит в луч, симметричный первоначальному лучу относительно нормали к $[0, T]\times\partial\Omega$ и лежащей в плоскости, порожденной этой нормалью и исходным лучом. Если $T=\infty$, то процесс отражения каждого луча повторяется бесконечное число раз, поскольку условие выпуклости гарантирует, что каждый такой луч всегда трансверсален к границе. Вне множества точек (t, x, y), лежащих на указанных лучах, решение u является бесконечно дифференцируемой функцией.

Этот результат был обобщен в работе Лакса и Ниренберга (см. [89]). Пусть P — дифференциальный оператор порядка m с вещественным главным символом p, имеющим простые характеристические корни. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей S, которая локально определяется уравнением $\varphi(x)=0$ и $\varphi>0$ в Ω. Предполагается, что нормаль к S не имеет характеристического направления, т. е. $p(x, \operatorname{grad}\varphi(x))\neq 0$.

Пусть $x^0\in S$ и $p(x^0, \xi^0)=0$, $\xi^0\neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$p(x^0, \xi^0+\tau\operatorname{grad}\varphi(x_0))=0.$$

Допустим, что это уравнение имеет k вещественных корней $\tau_1, \ldots, \tau_k$ (один из которых, по условию, равен нулю) и эти корни простые, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}p(x^0, \xi^0+\tau_j\operatorname{grad}\varphi(x^0))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p}{\partial\xi_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\neq 0.$$

Обозначим через Γ_j, $j=1, \ldots, k$, лежащую в Ω часть бихарактеристики p, проходящей через точку $(x^0, \xi^0+\tau_j\operatorname{grad}\varphi(x^0))$, т. е. интегральной кривой системы уравнений

$$\dot{x}(s)=\frac{\partial p(x(s), \xi(s))}{\partial\xi},\quad \dot{\xi}(s)=-\frac{\partial p(x(s), \xi(s))}{\partial x}$$

с начальными условиями $x(0)=x^0$, $\xi(0)=\xi^0+\tau_j\operatorname{grad}\varphi(x^0)$. Эти кривые не касаются поверхности S, так как

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\dot{x}_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial\xi_k}\neq 0.$$

Отображение вложения $i: S\to\mathbf{R}^n$ индуцирует отображение $i^*: T^*(\mathbf{R}^n)\to T^*S$, при котором все точки вида $(x^0, \xi+\lambda\operatorname{grad}\varphi(x^0))$ при $x^0\in S$ переходят в $i^*(x^0, \xi)$.

Кривые $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, построенные выше, называются *отраженным семейством полубихарактеристик*, соответствующим точке $i^*(x^0, \xi^0)\in T^*S$.

Теорема 6.3 ([89]). Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k_0}$ не имеет точек из $\operatorname{WF}(u)$, где $0\leqslant k_0\leqslant k$, и $(x^0, \xi^0)\notin\operatorname{WF}\left(\left.\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\right|_{\varphi=0}\right)$, где $0\leqslant j\leqslant\frac{m+k}{2}-k_0-1$, ν — нормаль к S. Тогда $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ не содержат точек из $\operatorname{WF}(u)$ и $(x^0, \xi^0)\notin\operatorname{WF}\left(\left.\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\right|_{\varphi=0}\right)$ для любого $j\geqslant 0$.

Примеры. 1. Если $k=m$, $k_0=0$, получаем теорему о распространении особенностей для решения задачи Коши для гиперболического уравнения.

2. Если $k=0$, получаем теорему о гладкости решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения.

3. Если $k=m>k_0>0$, получаем теорему о гладкости решения краевой задачи для гиперболического уравнения.

6.5. Пример Фридлендера. Изучение краевых задач, в которых допускается касание лучей с границей, начинается с примера, рассмотренного Фридлендером [65].

Рассмотрим краевую задачу

$$Pu\equiv(1+x)\frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-\ldots-\frac{\partial^2 u}{\partial y_{n-1}^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad\text{при}\quad y_n>0,\ x>0,$$

$$u=f(y)\ \text{при}\ x=0;\quad u=0\ \text{при}\ y_n\leqslant 0,$$

причем $f\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{supp} f\subset\{y, y_n>0\}$.

Нетрудно проверить, что y_n возрастает с ростом x вдоль бихарактеристик, касающихся границы $x=0$, или имеющих в точках границы *гиперболическое направление* $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, т. е. такое, что $\eta_n^2>|\eta'|^2$. Оказывается, что особенности решения в этом случае сосредоточены на этих бихарактеристик, проходящих через точки из $\operatorname{WF}(f)$.

Очевидно, что бихарактеристики определяются уравнениями:

$$\dot{x}=-2\xi,\quad \dot{y}_j=-2\eta_j,\quad j=1,\ldots,n-1;\quad \dot{y}_n=2(1+x)\eta_n,$$
$$\dot{\xi}=-\eta_n^2,\quad \dot{\eta}_j=0,\quad j=1,\ldots,n.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$x=a_n^2t^2+2a_0t+b_0,\quad y_j=2a_jt+b_j,\quad j=1,\ldots,n-1,$$
$$y_n=\frac{2}{3}a_n^3t^3+2a_0a_nt^2+2a_n(1+b_0)t+b_n;\quad a_j,\ b_j=\mathrm{const}.$$

Преобразование Фурье $v(x,\eta)$ функции u по y преобразует уравнение к виду

$$\frac{d^2v}{dx^2}+[(1+x)\eta_n^2-\eta_1^2-\ldots-\eta_{n-1}^2]\,v=0.$$

Если положить $z=\eta_n^{-\frac{4}{3}}[\eta_1^2+\ldots+\eta_{n-1}^2-(1+x)\eta_n^2]$, получим уравнение

$$\frac{d^2v}{dz^2}=zv,$$

которое называется *уравнением Эйри* и решениями которого являются функции вида

$$\mathrm{Ai}(z)=\int e^{i(\theta z-\theta^3/3)}d\theta,$$

а также $\mathrm{Ai}(ze^{\pm 2\pi i/3})$. Функция $\mathrm{Ai}(z)$ ограничена для вещественных положительных z, $\mathrm{Ai}(0)=1$.

Изучение краевой задачи сводится, таким образом, к решению уравнения Эйри с граничным условием

$$v=\tilde{f}(\eta)\ \text{при}\ z=\eta_n^{-\frac{4}{3}}(\eta_1^2+\ldots+\eta_{n-1}^2-\eta_n^2),$$

и обратному преобразованию Фурье. Можно показать, что решение u рассматриваемой краевой задачи представляется в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i[S(x,y,\xi)-S(0,z,\xi)]}f(z)\,\sigma(\zeta(0,z,\xi))\times$$
$$\times\frac{a(x,y,z,\xi)\,\mathrm{Ai}(\zeta(x,y,\xi))+b(x,y,z,\xi)\,\mathrm{Ai}'(\zeta(x,y,\xi))}{\mathrm{Ai}(\zeta(0,z,\xi))}\,d\xi dz,$$

где S — невырожденная фазовая функция, однородная степени 1 по ξ, ζ — невырожденная фазовая функция, однородная степени 2/3 по ξ, σ — гладкая функция, причем $\sigma(s)=0$ при $s\geqslant s_0>0$, a и b — стандартные символы.

Можно показать, что и более общая задача следующего вида сводится к вычислению интегралов того же типа.

Пусть Ω — выпуклая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей Γ, у которой кривизна положительна в каждой точке. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u\ \text{при}\ t\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^n\setminus\Omega,$$
$$Bu=f\ \text{при}\ t>0,\ x\in\Gamma;\ u=0\ \text{при}\ t\leqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^n\setminus\Omega.$$

Здесь $Bu=u$ или $Bu=\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+bu.$

В работах Мелроуза построено исчисление интегральных операторов Фурье—Эйри указанного вида [87].

6.6. Применение канонических преобразований. В дальнейшем Мелроузу удалось упростить рассмотрение указанного класса «внешних» задач с помощью следующего результата, который был предложен ранее Сато в качестве гипотезы.

Пусть X — симплектическое многообразие, F и G — две гиперповерхности в X, определяемые уравнениями $f=0$ и $g=0$, и пусть $p\in F\cap G$. Поверхность F и G называются *скользящими* в точке p, если

(1) df_p и dg_p линейно независимы;
(2) $\{f,g\}(p)=0$;
(3) $\{\{f,g\},f\}(p)\neq 0,\quad \{\{f,g\},g\}(p)\neq 0.$

Гипотеза Сато. Если F и G — скользящие поверхности в точке $p\in X$, F' и G' — скользящие поверхности в точке $p'\in X'$ и $\dim X=\dim X'$, то существует росток симплектического диффеоморфизма

$$\Phi:(X,p)\to(X',p'),$$

при котором пара (F,G) переходит в (F',G').

В работе Ошимы [90] было показано, что гипотеза неверна для вещественно аналитических поверхностей, если искать аналитическое отображение Φ. Мелроуз доказал, что она справедлива в случае бесконечно гладких поверхностей.

Теорема 6.4 ([86]). Каждая пара скользящих поверхностей приводится симплектическим преобразованием к виду

$$f=x_1,\quad g=\xi_1^2-x_1-\xi_n,$$

а если рассматривать только однородные по ξ преобразования, то к виду

$$f=x_1,\quad g=\xi_1^2-x_1\xi_{n-1}^2-\xi_n\xi_{n-1}.$$

Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbf{R}^n$, $g(x,D)$ — гиперболический оператор второго порядка в $\mathbf{R}^n$ с символом $g(x,\xi)$. Предположим, что бихарактеристика, проходящая через точку (x,ξ), где $x\in\Omega$, является *скользящей*, т. е. на ней имеется точка, в которой поле $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial\xi_j}(x,\xi)\frac{\partial}{\partial x_j}$ касается Γ. Если Γ определено уравнением $f(x)=0$, то в этой точке $\{f,g\}(x,\xi)=0$. Применяя теорему Мелроуза, можно локально «распределить» границу, т. е. привести ее к виду $x_1=0$, так что главная часть оператора в конической окрестности точки (x, ξ) будет иметь вид $g(x, D)=D_1^2-x_1D_{n-1}^2-D_nD_{n-1}$. Полученная краевая задача решается с помощью интегральных операторов Фурье — Эйри.

6.7. Классификация граничных точек [76]. Остановимся на классификации граничных точек с точки зрения краевых задач для гиперболического уравнения второго порядка.

Пусть P — дифференциальный оператор второго порядка с главным символом p в области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Функция p постоянна вдоль интегральных кривых гамильтонова векторного поля H_p в $T^*\Omega$. Назовем *нулевыми бихарактеристиками* те интегральные кривые поля H_p, вдоль которых $p=0$. Пусть $i:\partial\Omega\to\bar\Omega$ — вложение и $i^*: T^*\Omega|_{\partial\Omega}\to T^*(\partial\Omega)$ — индуцированное сюръективное отображение. Точки в $T^*(\partial\Omega)\setminus 0$ классифицируются в терминах поведения бихарактеристик, проходящих через точку из $T^*\Omega|_{\partial\Omega}$, которые проектируются на них при отображении i^*.

Пусть вначале $z\in T^*(\partial\Omega)\setminus 0$ и поле H_p трансверсально к $\partial T^*\Omega=T^*\Omega|_{\partial\Omega}$ на $i^{*-1}(z)\cap p^{-1}(0)$. Если $p\neq 0$ на $i^{*-1}(z)$, то z называется *эллиптической граничной точкой* для P. Если множество $i^{*-1}(z)\cap p^{-1}(0)$ состоит из двух различных точек, то z называется *гиперболической граничной точкой отражения*. Нетрудно видеть, что в этом случае в одной из указанных характеристических точек поле H_p направлено внутрь Ω, а в другой — наружу.

Для эллиптических точек микролокальный параметрикс можно построить, используя теорию эллиптических краевых задач, для гиперболических точек достаточна локальная теория интегральных операторов Фурье.

Множества эллиптических и гиперболических точек открыты. Обозначим через G — дополнение к их объединению — это множество *точек касания*, замкнутое коническое множество.

Если $z\in G$, то $i^{*-1}(z)\cap p^{-1}(0)$ состоит из одной точки, и если $v\in T^*\Omega|_{\partial\Omega}\setminus 0$ и $p(v)=0$, то $i^*v\in G$ в том и только в том случае, когда $\nu(H_p)=0$ в точке v, где $\nu\in T_v^*(T^*\Omega)$ — конормаль к границе $\partial T^*\Omega$.

Пусть ν — такое гладкое сечение в $T^*(T^*\Omega)$, что $\nu|_{\partial T^*\Omega}$ — ковектор, направленный по нормали к $\partial T^*\Omega$ внутрь Ω в окрестности точки v. Ясно, что $\nu(H_p)=0$ в точке v и, значит, $H_p(\nu(H_p))$ в точке v не зависит от выбора сечения ν. Если $H_p(\nu(H_p))>0$, то точка v называется *точкой дифракции*; если $H_p(\nu(H_p))<0$ *точкой скольжения*; если $H_p\nu(H_p))=0$, то точка v называется *точкой касания высшего порядка*.

Точка $z\in G$ называется *невырожденной*, если производная сужения функции p на слой $T^*\Omega$, содержащий $i^{*-1}(z)$, отлична от нуля в точке v. В окрестности невырожденной точки в $T^*(\partial\Omega)\setminus 0$ имеется коническая гиперповерхность, состоящая из точек дифракции или точек скольжения. Отметим, что если $v\in\partial T^*\Omega\setminus 0$, $p(v)=0$ и $\nu(H_p)(v)=0$, то точка i^*v является точкой дифракции в том и только в том случае, когда бихарактеристика в $T^*\Omega$ касается $\partial T^*\Omega$ в точке v и это касание имеет первый порядок. Эта точка невырождена, если проекция указанной бихарактеристики на Ω не имеет особенности в точке πv (здесь $\pi: T^*\Omega\to\Omega$ — каноническая проекция) и касается там границы $\partial\Omega$.

6.8. Пример Тейлора. Следующий пример, принадлежащий Тейлору [103], показывает, что особенности решения смешанной задачи могут распространяться по границе, не уходя внутрь области.

Пусть Ω — строго выпуклая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей Γ и u — решение волнового уравнения в $\mathbf{R}\times\Omega$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u,$$

причем $u=0$ на $\mathbf{R}\times\Gamma$. Покажем, что существует такое решение, гладкое в $\mathbf{R}\times\Omega$, но не являющееся гладким в $\mathbf{R}\times\bar\Omega$.

Пусть $p_0\in\Gamma$, $p_j\in\Omega$, $p_j\to p_0$ при $j\to\infty$. Пусть γ_j — лучи, проходящие при $t=0$ через p_j в направлении некоторой касательной к Γ в точке p_0 и продолженные после пересечения $\mathbf{R}\times\Gamma$ по правилам геометрической оптики. Пусть Ω_j — такая последовательность областей, что $\Omega_j\Subset\Omega_{j+1}\Subset\Omega$ для всех j, $\bigcup\limits_j\Omega_j=\Omega$ и луч $\gamma_j(t)$ лежит в $\Omega\setminus\Omega_j$ при $|t|\leqslant 1$.

Пусть теперь $\varphi_j\in L_{2,\mathrm{comp}}(\Omega)$, причем $\mathrm{WF}(\varphi_j)$ состоит из одной бихарактеристики, лежащей над лучом γ_j, так что $\varphi_j\in C^\infty(\Omega\setminus\{\gamma_j\})$ и $\varphi_j\in H^1(\Omega)$. Пусть v_j — решение задачи

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}=\Delta v_j \text{ в } \mathbf{R}\times\Omega,\quad v_j=0 \text{ на } \mathbf{R}\times\Gamma,$$

$$v_j=\varphi_j,\quad \frac{\partial v_j}{\partial t}=0 \text{ при } t=0,\ x\in\Omega.$$

Это решение имеет особенность только на луче γ_j внутри Ω, в силу приведенной выше теоремы Лакса — Ниренберга.

Пусть $\operatorname{supp}\varphi_j\subset V_j$, где $V_j\Subset\Omega$, V_j — малая окрестность точки p_j. Положим $u_j=c_j\int\rho_j(\tau)v_j(t-\tau, x)\,d\tau$, где $\rho_j\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ — функция с малым носителем, а c_j — такие постоянные, что

$$\sum_{|\alpha|<j}\int_0^1\int_{\Omega_j}|D^\alpha u_j|^2\,dx\,dt\leqslant 2^{-j},$$

$$\int_{V_j}|\nabla u_j(0, x)|^2dx\geqslant 10^j\Big(1+\sum_{k<j}\int_\Omega|\nabla u_k(0, x)|^2dx\Big),$$

$$\|u_j(0, x)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant 2^{-j}.$$

Пусть, наконец, $u=\sum_{j=1}^{\infty}u_j$. Тогда $u\in C^\infty(\mathbf{R}\times\Omega)$, u — решение волнового уравнения, $u=0$ на $\mathbf{R}\times\Gamma$. Но $u(0, x)\notin H^1(\Omega)$ и поэтому u не может принадлежать $C^\infty(\mathbf{R}\times\bar{\Omega})$. Таким образом, построенное решение имеет особенности только в точках из $\mathbf{R}\times\Gamma$.

6.9. Задача с косой производной. Поскольку гиперболическим уравнениям будет посвящена отдельная статья, мы не приводим здесь исчерпывающего обзора результатов, полученных в последнее время, а ограничимся рассмотрением следующего типичного примера, для изучения которого понадобился мощный арсенал современных средств теории дифференциальных уравнений.

Пусть $A(x, D)$ — гиперболический оператор второго порядка в $\mathbf{R}^{n+1}$, $x=(x_0, x_1, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$, переменная x_0 играет роль времени. Пусть G — область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой компактной границей ∂G, $\Omega=\mathbf{R}\times G$, $\Gamma=\mathbf{R}\times\partial\Omega$. Рассмотрим задачу

$$A(x, D)u=0 \text{ в } \Omega,$$
$$u=0 \text{ при } x_0\leqslant 0,\ x\in\Omega,$$
$$B(x, D)u=h(x) \text{ для } x\in\Gamma,$$

где B — дифференциальный оператор первого порядка.

В том случае, когда G — неограниченная область, предположим, что коэффициенты A не зависят от x при больших $|x|$. Предположим также, что коэффициенты операторов A и B — гладкие функции и граница Γ не имеет характеристических точек для оператора A. Введем в окрестности Γ такие координаты (x', x_n), что x' — координата на Γ, а x_n — расстояние до Γ. Пусть (ξ', ξ_n) — двойственные координаты в $T^*\Omega$, так что $\xi'\in T^*\Gamma$ и $\xi_n\in\mathbf{R}$.

Главный символ оператора $A(x, D)$ в этой системе координат имеет вид $A_0(x, \xi)=(\xi_n-\lambda(x, \xi'))^2-\mu(x, \xi')$ с точностью до множителя $k(x)$, отличного от нуля всюду на Γ. В соответствии с п. 6.7, положим

$$N_0=\{(x', \xi')\in T^*(\Gamma)\setminus 0,\ \mu(x', 0, \xi')=0\},$$
$$N_+=\{(x', \xi')\in T^*(\Gamma)\setminus 0,\ \mu(x', 0, \xi')>0\},$$
$$N_-=\{(x', \xi')\in T^*(\Gamma)\setminus 0,\ \mu(x', 0, \xi')<0\}.$$

Положим $b(x', \zeta')=B_0(x', 0, \zeta', \lambda(x', 0, \zeta')-\sqrt{\mu(x', 0, \zeta')})$, где $B_0(x', x_n, \xi', \xi_n)$ — главный символ оператора $B(x, D)$, $\zeta'=(\xi_0+i\tau, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $\tau>0$ и значения $\sqrt{\mu}$ выбраны так, что $\operatorname{Im}\sqrt{\mu(x', 0, \zeta')}>0$ при $(x', \xi')\in T^*(\Gamma)\setminus 0$, $\tau>0$.

Доказано, что для корректности краевой задачи необходимо, чтобы

(I) $b(x', \xi')\neq 0$ для всех $(x', \xi')\in T^*(\Gamma)\setminus 0$, $\tau>0$

(см. [79]). Далее, можно показать, что решение краевой задачи микролокально на $N_+\cup N_-$ можно свести к решению псевдодифференциального уравнения

$$b(x', D')u_0=h, \text{ где } u_0=u|_\Gamma.$$

Отметим, что функция $b(x', \xi')$ непрерывна на $T^*\Gamma\setminus 0$ и гладкая вне N_0. Предположим, что выполнены условия:

(II) $\dfrac{\partial b(\bar{x}, \bar{\xi})}{\partial\xi_0}\neq 0$, если $b(\bar{x}, \bar{\xi})=0$, $(\bar{x}, \bar{\xi})\in N_+\cup N_-$,

(III) $\dfrac{\partial B_0(\bar{x}, 0, \bar{\xi}, \lambda(\bar{x}, 0, \bar{\xi}))}{\partial\xi_n}\neq 0$, если $b(\bar{x}, \bar{\xi})=0$, $(\bar{x}, \bar{\xi})\in N_0$.

Наконец, предположим, что

(IV) $\{\xi_n-\lambda(x', x_n, \xi'), \mu(x', x_n, \xi')\}>0$ при $x_n=0$, если $\mu(x', 0, \xi')=0$; или

(IVa) $\{\xi_n-\lambda(x', x_n, \xi'), \mu(x', x_n, \xi')\}<0$ при $x_n=0$, если $\mu(x', 0, \xi')=0$.

Теорема 6.5. Если выполнены условия (1)—(IV), то для каждой функции h из $H^{s,\tau}(\Gamma)$, равной нулю при $x_0<0$, существует единственное решение $u\in H^{s,\tau}(\Omega)$, если $\tau>0$ достаточно велико.

Здесь $H^{s,\tau}(\Omega)$ — пространство с нормой $\|u\|_{s,\tau}=\|e^{-x_0\tau}u\|_s$.

Пример 6.1. Условия теоремы выполнены для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial x_0^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}=0 \text{ в } \Omega=\mathbf{R}\times G,$$

где G — внешность компактной строго выпуклой области, с краевыми условиями:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k(x')\frac{\partial u}{\partial x_k}=h(x'),\quad x'\in\Gamma,$$
$$u=0 \text{ при } x_0\leqslant 0,$$

если

1) вектор $(a_0, \ldots, a_n)$ не касается границы Γ ни в одной точке;

2) $a_0(x')<\sum_{k=1}^{n}a_k(x')\nu_k(x')$, где $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичная нормаль к Γ, направленная внутрь G.

Краевая задача при условии (IVa) вместо (IV) оказывается гораздо более трудной для изучения. Из условия (III) следует, что в окрестности каждой точки $(\bar{x}, \bar{\xi})$, принадлежащей N_0 и такой, что $b(\bar{x}, \bar{\xi})=0$, имеет место равенство

$$b(x', \zeta')=b_1(x', \zeta', \sqrt{\mu(x', 0, \zeta')})(\sqrt{\mu(x', 0, \zeta')}+\lambda_1(x', \zeta')),$$

где $b_1(x', \zeta', \sqrt{\mu(x', 0, \zeta')})\neq 0$.

Предположим, что для каждой точки $(\bar{x}, \bar{\xi}) \in (T^*(\Gamma)\setminus 0)\cap N_0$, такой что $b(\bar{x}, \bar{\xi})=0$, существует окрестность $U_0\subset N_0$, в которой

$$(\mathrm{V}) -\operatorname{Re}\lambda_1(x', \xi') \leqslant C_0 (\operatorname{Im}\lambda_1(x', \xi')^2 |\xi'|^{-1} \text{ для } (x', \xi')\in U_0.$$

Теорема 6.6. Пусть выполнены условия (I)—(III), (IVa), (V). Тогда для каждой функции $h\in H^{s,\tau}(\Gamma)$, равной нулю при $x_0<0$, существует единственное решение $u\in H^{s,\tau}(\Omega)$ краевой задачи.

В том случае, когда функция λ_1 вещественнозначна, условие (V) означает, что $\lambda_1(x', \xi')\geqslant 0$ на N_0.

Теорема 6.7. Пусть функция λ_1 вещественнозначна и существует такая точка $(\bar{x}, \bar{\xi})\in N_0$, что $\lambda_1(\bar{x}, \bar{\xi})=0$ и в этой точке выполнено условие (V). Предположим, что найдется последовательность точек $(x^{(k)}, \xi^{(k)})\in N_0$, сходящаяся к $(\bar{x}, \bar{\xi})$ и такая, что $\lambda_1(x^{(k)}, \xi^{(k)})<0$. Пусть, наконец,

$$\{\lambda_1(x', \xi'), \mu(x', 0, \xi')\}=0, \text{ если } (x', \xi')=(\bar{x}, \bar{\xi}).$$

Тогда краевая задача поставлена некорректно. Точнее, найдется такая функция $h\in C_0^\infty(\Gamma)$, что $h=0$ при $x_0<0$ и не существует распределения $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющего уравнению $Au=0$ и краевым условиям при $-\infty<x_0<\bar{x}_0+\varepsilon$ для сколь угодно малого $\varepsilon>0$. Здесь $\bar{x}_0$ — координата точки $\bar{x}$.

Приведенные теоремы 6.5—6.7 принадлежат Г. И. Эскину [64].

Примеры. 1. Пусть A — волновой оператор и

$$B(x, D)=\frac{\partial u}{\partial \nu}+a(x_0)\frac{\partial u}{\partial x_0},$$

функция a вещественнозначна, ν — направление нормали.

Во внешности выпуклой области единственное условие, необходимое и достаточное для корректности, имеет вид

$$a(x_0)>-1.$$

Если же область выпукла и задача решается внутри ее, то, например, для $a=(x_0-\bar{x}_0)^3$ задача поставлена некорректно. Вообще, это верно в каждом случае, когда существует последовательность точек $x_0^{(k)}$, сходящаяся к $\bar{x}_0$ и такая, что $a(x_0^{(k)})<0$, причем $a(\bar{x}_0)=0$, $a'(\bar{x}_0)=0$.

2. Пусть A — волновой оператор, $n=2$, $B=\frac{\partial}{\partial\nu}+b(s)\frac{\partial}{\partial s}$, где $\frac{\partial}{\partial s}$ — производная вдоль граничной кривой.

Во внешности выпуклой области краевая задача всегда корректно поставлена. Внутренняя же краевая задач корректно поставлена в том и только в том случае, когда все нули функции b — простые.

§ 7. Метод стационарной фазы и коротковолновые асимптотики

Метод стационарной фазы является одним из простейших методов нахождения асимптотики интегралов, однако уже он приводит к важным результатам в теории гиперболических уравнений и в различных асимптотических задачах для эллиптических уравнений. С ним тесно связан классический метод ВКБ, названный в честь физиков Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна, которые впервые применили этот метод к задачам квантовой механики. Развитие метода ВКБ приводит к нетривиальным аналитическим и геометрическим конструкциям; среди них одной из важнейших является канонический оператор Маслова, позволяющий решить широкий класс асимптотических задач.

7.1. Метод стационарной фазы ([12], [40], [41], [69], [76]). *Метод стационарной фазы* — это метод нахождения асимптотики интегралов вида

$$I(a, \lambda)=\int e^{i\lambda f(x,a)}g(x, a, \lambda)\,dx, \tag{7.1}$$

где $\lambda\to+\infty$, $x\in\mathbf{R}^n$, $a\in\mathbf{R}^p$, a — параметр, f и g — гладкие функции. Основная идея этого метода состоит в том, что если фаза f вещественнозначна, то экспонента $e^{i\lambda f(x,a)}$ быстро осциллирует в точках x, в которых $f_x'(x, a)=\partial f(x, a)/\partial x\neq 0$. Вклад окрестностей таких точек в интеграл мал ввиду интерференции. Поэтому главный вклад дают *точки стационарной фазы*, т. е. критические (по x) точки фазы f — такие точки x, что $f_x'(x, a)=0$.

Сформулируем точные утверждения. Будем считать, что параметр a пробегает компакт $A\subset\mathbf{R}^p$, а амплитуда g имеет по x компактный носитель равномерно по $a\in A$, т. е. существует такой компакт $K\subset\mathbf{R}^n$, что $g(x, a, \lambda)=0$ при $x\notin K$, $a\in A$, $\lambda\geqslant 1$. Далее, будем для простоты считать, что $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^p)$, $g(\cdot, \cdot, \lambda)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times V)$ при каждом фиксированном λ (здесь V — фиксированная окрестность компакта A в $\mathbf{R}^p$). Предположим, что

$$|\partial_x^\alpha g(x, a, \lambda)|\leqslant c_\alpha\lambda^{m+\delta|\alpha|},\quad x\in K,\quad a\in A,\quad \lambda\geqslant 1, \tag{7.2}$$

где α — произвольный мультииндекс, $\delta<1$ фиксировано. Положим

$$\Sigma_f=\{x: x\in K,\ \partial_x f(x, a)=0 \text{ для некоторого } a\in A\}.$$

Множество Σ_f и должно играть главную роль в асимптотике интеграла (7.1). Легко видеть, например, что если существует такая окрестность U множества Σ_f, что $g(x, a, \lambda)=0$ при $x\in U$, $a\in A$, $\lambda\geqslant 1$ или, более общо, если $g(x, a, \lambda)=O(\lambda^{-N})$ при $\lambda\to+\infty$ для любого фиксированного N равномерно по $(x, a)\in U\times A$, то $I(a, \lambda)=O(\lambda^{-N})$ при $\lambda\to+\infty$ также для любого фиксированного N равномерно по $a\in A$. Для доказательства нужно провести интегрирование по частям, сделав разбиение единицы и пользуясь при $x\in U$ тождеством вида $L^N(e^{i\lambda f})=\lambda^N e^{i\lambda f}$, где $L=\sum_{j=1}^{n} c_j(x, a)D_j$, $c_j=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|^2\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j=1, \ldots, n$. А именно, считая, что $g(x, a, \lambda)=0$ при $x\in U$, $a\in A$, $\lambda\geqslant 1$ мы получим

$$I(a, \lambda)=\lambda^{-N}\int e^{i\lambda f(x,a)}({}^tL)^N g(x, a, \lambda)\,dx,$$

где ${}^tL$ — дифференциальный оператор по x (также первого порядка), транспонированный к L. Отсюда сразу следует, что $I(a, \lambda)=O(\lambda^{-(1-\delta)N})$ равномерно по $a\in A$, что достаточно, т. к. N можно выбрать сколь угодно большим.

Укажем теперь вклад тех точек стационарной фазы, которые являются *невырожденными критическими точками*, т. е. таких точек x, что $f_x'(x, a)=0$, а матрица вторых производных $f_{xx}''(x, a)$ невырождена в рассматриваемой точке. Фиксируем такую точку x_0 и соответствующее значение параметра a_0. По теореме о неявной функции, точка x_0 является изолированной точкой в множестве всех точек стационарной фазы (при данном a_0), а если менять параметр a, то при a, близком к a_0, существует такая гладкая вектор-функция $x=x(a)$, что $x(a_0)=x_0$ и $f_x'(x(a), a)\equiv 0$, т. е. $x(a)$ — гладко зависящая от параметра критическая точка (такая вектор-функция $x(a)$ единственна локально по a). Ограничимся по a рассмотрением малой окрестности данного значения a_0. Делая разбиение единицы по x, можно свести задачу к рассмотрению случая, когда амплитуда g по x сосредоточена в малой окрестности точки x_0. Пользуясь леммой Морса, в этой окрестности можно так выбрать локальные координаты $y=y(x, a)$, гладко зависящие от a, что $y(x, a)=x-x(a)+O(|x-x(a)|^2)$ при $x-x(a)\to 0$ и в новых координатах фаза f примет вид $f(x, a)=f(x(a), a)+\frac{1}{2}\langle Q(a)y, y\rangle$, $Q(a)=f_{xx}''(x(a), a)$. Это означает, что в новых координатах критическая точка есть начало координат и с точностью до аддитивного слагаемого, не зависящего от y, $f(x, a)$ приобретает вид невырожденной квадратичной формы с матрицей $Q(a)=f_{xx}''(x(a), a)$, равной матрице 2-го дифференциала функции f в исходных координатах. Теперь после перехода к новым координатам получим

$$I(a, \lambda)=e^{i\lambda f(x(a),a)}\int e^{i\lambda\langle Q(a)y,y\rangle}g_1(y, a, \lambda)\,dy, \tag{7.3}$$

где g_1 — новая амплитуда, имеющая вид

$$g_1(y, a, \lambda)=g(x(y, a), a, \lambda)\left|\det\frac{\partial x(y, a)}{\partial y}\right|.$$

Предположим теперь, что $\delta<1/2$ (отметим, что в наиболее важном частном случае, когда $g(x, a, \lambda)=g(x, a)$ не зависит от λ, мы имеем $\delta=0$). Тогда справедлива

Теорема 7.1. Асимптотика интеграла (7.3) имеет вид

$$I(a, \lambda)\sim(2\pi)^{n/2}e^{i\lambda f(x(a),a)}\lambda^{-n/2}|\det Q(a)|^{-1/2}\exp\left[\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}Q(a)\right]\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}[R^k g_1(0, a, \lambda)]/k!, \tag{7.4}$$

где $\operatorname{sgn}Q(a)$ — сигнатура невырожденной симметрической матрицы $Q(a)$, равная сигнатуре соответствующей квадратичной формы, т. е. разности между количеством положительных собственных значений матрицы $Q(a)$ (с учетом кратности) и количеством ее отрицательных собственных значений ($\operatorname{sgn}Q(a)$ не зависит от a при a, близких к a_0); $R=\frac{i}{2}\left\langle Q(a)^{-1}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$ — линейный дифференциальный оператор 2-го порядка по y.

Смысл асимптотического ряда (7.4) состоит в том, что обрывая разложение (7.4) достаточно далеко, мы можем получить остаток вида $O(\lambda^{-N})$ (равномерно по a, близким к a_0), где N — произвольное число. Формулу (7.4) можно получить, например, разлагая амплитуду $g_1(y, a, \lambda)$ по формуле Тейлора по y в точке $y=0$, вычисляя возникающие в каждом члене модельные интегралы и оценивая остаток.

Укажем еще другой способ получения асимптотики интеграла вида (7.1), не требующий знания морсовских координат y. По-прежнему считаем, что имеется единственная критическая точка $x(a)$, которая невырождена. Выделим квадратичную часть функции $f(x, a)$ в точке $x(a)$:

$$f(x, a)=f(x(a), a)+\frac{1}{2}\langle Q(a)(x-x(a)), x-x(a)\rangle+r(x, a),$$

где $Q(a)=f''_{xx}(x(a), a)$, а остаток $r(x, a)$ определяется этой формулой и $r(x, a)=O(|x-x(a)|^3)$ при $x\to x(a)$.

Теорема 7.1′. Имеет место асимптотическое разложение

$$I(a, \lambda)\sim(2\pi)^{n/2}e^{i\lambda f(x(a),a)}\lambda^{-n/2}|\det Q(a)|^{-1/2}\exp\left[\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}Q(a)\right]\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{-k}}{k!}[R^k(g(x, a, \lambda)e^{i\lambda r(x,a)}]|_{x=x(a)}, \tag{7.5}$$

Здесь R — тот же оператор, что и в (7.4), и разложение имеет аналогичный смысл. Оно может быть доказано сведением к (7.4), если принять $ge^{i\lambda r}$ за новую амплитуду, предварительно проверив, что можно ограничиться рассмотрением малой окрестности точки $x(a)$ с помощью введения срезающей функции вида $\varphi(\lambda^{\varkappa}(x-x(a)))$, где $0<\varkappa<1/2$, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi=1$ в окрестности точки 0.

Приведем пример возникновения интегралов вида (7.1). Пусть в $\mathbf{R}^3$ дана 2-мерная поверхность S, все точки которой являются источниками установившегося излучения фиксированной частоты k с плотностью $\alpha(y)dy$, где dy — элемент площади на поверхности S. Если считать скорость распространения волны равной 1, то простейшая синусоидальная уходящая волна имеет вид $r^{-1}e^{ik(r-t)}$, где r — расстояние до источника. Таким образом, при точечном источнике в каждой точке пространства возникает синусоидальное колебание с комплексной амплитудой $r^{-1}e^{ikr}$, а все источники, расположенные на поверхности, дают в точке $x\in\mathbf{R}^3$ колебания с комплексной амплитудой

$$I(x, k)=\int_S \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\alpha(y)\,dy. \tag{7.6}$$

Предельному переходу при $k\to+\infty$ соответствует переход от волновой оптики к геометрической оптике лучей, так что естественно попытаться найти асимптотику интеграла (7.6) при $k\to+\infty$. Но этот интеграл имеет вид (7.1) с точностью до обозначений (здесь k — параметр асимптотики, ранее обозначавшийся через λ; точка x в (7.6) играет роль параметра, ранее обозначавшегося a). Фаза $\varphi(y, x)=|y-x|$ имеет критические точки в точности при тех y, где вектор $x-y$ коллинеарен вектору единичной нормали n_y к поверхности S в точке y. При этом, данному x может соответствовать несколько точек y (или даже бесконечно много таких точек, которые могут образовать линию и т. п.). Легко однако указать необходимые и достаточные условия на x, при которых все соответствующие критические точки y невырождены: x не должна быть *фокальной точкой* поверхности S. Это означает, что x не является критическим значением отображения $S\times\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^3$, переводящим пару (y, s) в точку $y+sn_y$. В этом случае асимптотика интеграла (7.6) находится по приведенному выше рецепту.

Нахождение асимптотик интегралов вида (7.1) с вырожденными критическими точками представляет собой уже сложную задачу, не до конца разобранную до настоящего времени (см., например, книгу [6] и имеющиеся в ней ссылки).

7.2. Локальные асимптотические решения гиперболических уравнений. Попробуем понять, каким образом волновая оптика переходит в геометрическую на очень коротких волнах (или, что то же самое, при высоких частотах). Рассмотрим сначала плоскую волну с частотой ω и волновым вектором k:

$$u(t, x)=e^{i(\omega t-kx)}=e^{i\omega(t-x\cdot k/\omega)}.$$

Подставляя ее в волновое уравнение

$$\square u\equiv u_{tt}-a^2\Delta u=0, \tag{7.7}$$

мы видим, что она является решением тогда и только тогда, когда вектор k/ω имеет длину $1/a$, где a — скорость распространения волн. Для обычного волнового уравнения (7.7) величина a постоянна, т. е. не зависит от ω. Таким образом, для любого вектора k_0 длины $1/a$ и для любого ω имеется плоская волна вида

$$u(t, x)=e^{i\omega(t-k_0\cdot x)}. \tag{7.8}$$

Мы можем теперь считать вектор k_0 фиксированным и устремить частоту ω к $+\infty$. Это и будет в данном случае означать предельный переход к геометрической оптике для плоской волны (7.8). Рассмотрим фазу $\varphi=\omega(t-k_0\cdot x)$ этой волны и будем следить за поверхностями постоянной фазы $\varphi=\mathrm{const}$, которые называются *волновыми фронтами* (это понятие волнового фронта отличается от введенного в § 3, хотя между ними есть связь, которая будет указана ниже). При каждом t волновой фронт — это плоскость

$$\{x : k_0\cdot x=t+c\}\subset\mathbf{R}^n,$$

которая с изменением t движется со скоростью a в направлении вектора k_0. Поэтому прямые, идущие в направлении k_0, естественно называть *лучами*.

Рассмотрим теперь общий дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами

$$A=a(x, D)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha, \quad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n,$$

и попробуем найти по аналогии с плоской волной (7.8) решение уравнения $Au=0$ в виде

$$u(x)=u(x, \lambda)=e^{i\lambda S(x)}, \tag{7.9}$$

где λ — большой параметр (играющий роль частоты) $\lambda\to+\infty$, S — вещественнозначная гладкая функция.

Подставляя в уравнение, получаем

$$Au(x)=e^{i\lambda S(x)}[\lambda^m a_m(x, S_x(x))+O(\lambda^{m-1})],$$

где $a_m=a_m(x, \xi)$ — главный символ оператора A, $S_x=\frac{\partial S}{\partial x}=\operatorname{grad} S$. Не будем пока следить за членами, обозначаемыми через $O(\lambda^{m-1})$ (они имеют вид многочлена от λ степени не выше $m-1$ с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$). Предположим здесь и ниже, что главный символ a_m вещественнозначен. Тогда ясно, что если мы хотим добиться выполнения уравнения $Au=0$ с точностью до $O(\lambda^{m-1})$ при больших λ, то фаза $S=S(x)$ должна удовлетворять уравнению Гамильтона—Якоби

$$a_m(x, S_x(x))\equiv 0, \tag{7.10}$$

называемому *уравнением эйконала* (термин *эйконал* заимствован из геометрической оптики, где так называют оптическую длину пути луча света между двумя произвольными точками, одна из которых принадлежит пространству объектов, а другая — пространству изображений). Это уравнение обеспечивает выполнение исходного уравнения $Au=0$ «в первом приближении».

Для более точного решения уравнения будем искать решение в виде формального ряда

$$u(x, \lambda)=e^{i\lambda S(x)} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) \lambda^{-j}. \tag{7.11}$$

Применяя оператор A к каждому члену этого ряда, т. е., к каждой функции вида $e^{i\lambda S(x)} b_j(x) \lambda^{-j}$, мы получим сумму членов аналогичного вида (но, быть может, с положительными степенями λ); поэтому после соответствующей перегруппировки членов мы видим, что ряд Au можно записать в виде

$$Au=e^{i\lambda S(x)} \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x) \lambda^{m-j}, \tag{7.12}$$

Будем называть ряд u *асимптотическим решением* или *быстро осциллирующим асимптотическим решением*, если $Au=0$, т. е. все члены ряда (7.12) обращаются в 0. Если рассмотреть конечную сумму такого ряда

$$u_N(x, \lambda)=e^{i\lambda S(x)} \sum_{j=0}^{N} b_j(x) \lambda^{-j},$$

то мы получим функцию на Ω, зависящую от λ как от параметра и такую, что при $\lambda \to +\infty$

$$Au_N=O(\lambda^{-N-1+m}),$$

т. е. конечные отрезки u_N ряда, являющегося асимптотическим решением, являются «почти решениями» с тем большей точностью, чем больше N.

Разумеется, ввиду линейности уравнения, асимптотическое решение u можно умножать на числовые множители. Например, после умножения его на λ^{-k} мы снова получим асимптотическое решение, так что нумерацию можно начинать не с $j=0$, а с $j=-k$. Далее, мы можем считать, что $b_0 \not\equiv 0$ ни в какой подобласти Ω, иначе в такой подобласти можно начать нумерацию с первого ненулевого члена, вынеся за скобку подходящую степень λ. Поскольку первый член ряда Au имеет вид

$$\lambda^m a_m(x, S_x(x))\, b_0(x)\, e^{i\lambda S(x)},$$

то мы получаем, что фаза S должна удовлетворять уравнению эйконала. Вычисляя следующие члены ряда Au, получим

$$v_j=\sum_{l+k=j} (A_l b_k), \quad j=0, 1, 2, \ldots,$$
$$0 \leqslant l \leqslant m, \quad 0 \leqslant k \leqslant j,$$

где A_l — линейные дифференциальные операторы порядка l, зависящие от S и определяемые формулой

$$e^{-i\lambda S(x)} A\left(e^{i\lambda S(x)} f(x)\right)=\sum_{l=0}^{m} \lambda^{m-l} A_l f.$$

При этом $A_0=0$, если S удовлетворяет уравнению эйконала, а A_1 дается формулой:

$$A_1=\frac{\partial a_m}{\partial \xi}\Big|_{\xi=S_x(x)} \cdot D+\frac{1}{2i} \operatorname{Tr}\left(\frac{\partial^2 a_m}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\Big|_{\xi=S_x(x)}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_m}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi=S_x(x)} \cdot D_j+\frac{1}{2i} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 a_m}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k}\Big|_{\xi=S_x(x)}=$$
$$=i^{-1} L_1+c(x),$$

где L_1 — дифференцирование вдоль векторного поля

$$V(x)=\frac{\partial a_m}{\partial \xi}\Big|_{\xi=S_x(x)}.$$

Векторное поле $V(x)$ имеет прозрачный геометрический смысл: это дифференцирование вдоль лучей, являющихся проекциями на x-пространство тех бихарактеристик функции a_m (т. е. решений гамильтоновой системы с гамильтонианом a_m), которые лежат на графике градиента функции S. Это значит, что траектории поля V — суть такие вектор-функции $x(t)$, что если положить $\xi(t)=S_x(x(t))$, то $(x(t), \xi(t))$ будет решением гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{\partial a_m}{\partial \xi}, \\ \dot{\xi}=-\dfrac{\partial a_m}{\partial x}. \end{cases} \tag{7.13}$$

Уравнение $Au=0$ означает, что $v_j \equiv 0$, $j=0, 1, 2, \ldots$. Заметим, что $v_0 \equiv 0$, в силу уравнения эйконала, а каждое из уравнений $v_{j+1}=0$, $j=0, 1, 2, \ldots$, означает, что

$$A_1 b_j=-\sum_{k=0}^{j-1} A_{j+1-k} b_k=f_j, \quad j=0, 1, 2, \ldots, \tag{7.14}$$

где f_j зависит только от $b_0, b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Уравнения (7.14) называются *уравнениями переноса*. Учитывая смысл поля V, каждое из них можно переписать в виде

$$i^{-1} \frac{d}{dt} b_j(x(t))+c(x(t))\, b_j(x(t))=f_j(x(t)), \tag{7.15}$$

т. е. каждое из них является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка вдоль лучей относительно каждой из функций b_j, если уже известны $b_0, b_1, \ldots, b_{j-1}$. В частности, функция $b_j(x(t))$ полностью определена вдоль всего луча, если известно $b_j(x(0))$.

Мы видим, что асимптотическое решение уравнения $Au=0$ можно построить при данной фазе $S(x)$, являющейся решением уравнения эйконала, если дана гладкая гиперповерхность Г, трансверсальная всем лучам, проходящим через ее точки. При этом решение строится при любых начальных данных

$$b_j|_\Gamma = b_j^0, \quad j=0, 1, 2, \ldots, \tag{7.16}$$

в малой окрестности гиперповерхности Г. Более того, оно существует и единственно в любой окрестности U, в которой определена фаза S и лучи образуют правильное семейство, т. е. через каждую точку $x \in U$ проходит ровно один луч $x(t)$, этот луч пересекает Г ровно в одной точке $x_0=x(0)$, причем эта точка x_0 и соответствующее точке x значение параметра t, для которого $x(t)=x$, гладко зависят от x. Таким образом, по существу, описание асимптотических решений сводится к решению уравнения Гамильтона—Якоби (7.10), которое также решается с помощью бихарактеристик и лучей в соответствии с процедурой, описанной, например, в [5], [21], [30], [46], [76].

Уравнение эйконала (7.10) имеет достаточно много решений, например, в случае, когда оператор A — строго гиперболический относительно какого-либо направления, которое без ущерба для общности можно считать направлением оси x_n. А именно, пусть $\lambda_j=\lambda_j(x, \xi')$, $j=1, 2, \ldots, m$, — все корни уравнения $a_m(x, \xi', \lambda)=0$ относительно λ (здесь $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$), выбранные непрерывно по (x, ξ'); они действительны и различны при всех $\xi' \neq 0$ в соответствии с определением гиперболичности. Тогда фаза S, удовлетворяющая (7.10), на самом деле удовлетворяет одному из уравнений

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x_n} - \lambda_j(x, S_{x'}(x)) = 0, \tag{7.17}$$

где $j=1, \ldots, m$. При этом в достаточно малой окрестности пересечения гиперплоскости $x_n=0$ с рассматриваемой областью Ω существует и единственно такое решение S_j уравнения (7.17), что

$$S_j|_{x_n=0} = S_j^0, \tag{7.18}$$

где $S_j^0 = S_j^0(x')$ — любая достаточно гладкая функция.

7.3. Задача Коши с быстро осциллирующими начальными данными ([26], [30], [84]). Поставим теперь для гиперболического уравнения описанного выше вида задачу Коши

$$\begin{cases} Au=0, \\ u|_{x_n=0} = e^{i\lambda S^0(x')} \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j^{(0)}(x')\lambda^{-j}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = \lambda e^{i\lambda S^0(x')} \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j^{(1)}(x')\lambda^{-j}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}}\right|_{x_n=0} = x^{m-1} e^{i\lambda S^0(x')} \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j^{(m-1)}(x')\lambda^{-j}, \end{cases} \tag{7.19}$$

где S^0 — данная вещественнозначная гладкая функция, для которой $S^0_{x'}(x') \neq 0$ при всех x' из области определения Ω' функции S^0 (здесь $\Omega' = \Omega \cap \{x : x_n=0\}$), $c_j^{(k)} \in C^\infty(\Omega')$. Заметим, что наличие множителей $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^{m-1}$ перед начальными данными не снижает общности, поскольку, ввиду линейности уравнения, всегда можно умножить u на λ^k и, кроме того, считать несколько первых членов в разложениях начальных данных равными 0.

Смысл задачи (7.19) состоит в том, что мы хотим находить сколь угодно точные (при больших λ) решения уравнения с быстро осциллирующими начальными данными, являющимися конечными отрезками рядов, стоящих в правых частях в (7.19).

Решение этой задачи уже, воообще говоря, нельзя найти в виде ряда (7.11). Нужно брать конечную сумму таких рядов (с различными фазами S). Итак, рассмотрим сумму

$$u(x, \lambda) = \sum_{r=1}^{m} u^r(x, \lambda), \tag{7.20}$$

где

$$u^r(x, \lambda) = e^{i\lambda S_r(x)} \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(r)}(x)\lambda^{-j}, \tag{7.21}$$

и ряд u^r является асимптотическим решением уравнения $Au=0$. При этом все фазы S_r будем считать решениями уравнения эйконала (7.10) с одним и тем же начальным условием

$$S_r|_{x_n=0} = S^0(x'). \tag{7.22}$$

Тогда все начальные данные для u^r имеют вид

$$\left.\frac{\partial^k u^r}{\partial x_n^k}\right|_{x_n=0} = \lambda^k e^{i\lambda S^0(x')} \sum_{k=0}^{\infty} d_j^{(k)}(x')\lambda^{-j},$$

так что задача (7.19) действительно имеет смысл и будет пониматься в смысле равенства коэффициентов при всех степенях параметра λ.

В качестве функций S_r мы будем брать m различных фаз, являющихся решениями различных уравнений (7.17) (фаза S_r соответствует корню λ_r характеристического уравнения).

Теорема 7.2 (Лакс [84]). Задача Коши (7.19) при указанных предположениях однозначно разрешима в малой окрестности начальной гиперплоскости Ω'.

Для доказательства нужно заметить, что каждый из рядов u^r, будучи решением уравнения $Au=0$, однозначно определяется начальными данными $u^r|_{x_n=0}$, которые могут быть произвольными. Поэтому необходимо лишь подобрать эти начальные данные таким образом, чтобы выполнялись начальные условия задачи (7.19). Это сводится к соотношениям

$$\sum_{r=1}^{m}\left[\left(i\frac{\partial S_r}{\partial x_n}\right)^k b_j^{(r)}(x)\right]\Big|_{x_n=0}=f_j^{(k)}(x'); \quad k=0, 1, \ldots, m-1; \quad j=0, 1, \ldots, \tag{7.23}$$

где $f_j^{(k)}$ зависит только от $b_0^{(r)}, \ldots, b_{j-1}^{(r)}$; $r=1, \ldots, m$. Но это система линейных уравнений относительно $b_j^{(r)}(x', 0)$, $r=1, \ldots, m$, с определителем, равным определителю Вандермонда, отличному от 0, поскольку все числа

$$\frac{\partial S_r(x', x_n)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}=\lambda_r\left(x', 0, \frac{\partial S^0(x')}{\partial x'}\right), \quad r=1, \ldots, m,$$

различны в силу гиперболичности.

Теорема, аналогичная теореме 7.2, имеет место и для гиперболических систем.

7.4. Локальный параметрикс задачи Коши и распространение особенностей решений [30]. Укажем связь теоремы 7.2 с поведением особенностей решений задачи Коши. Особенности удобно описывать с помощью преобразования Фурье. А именно, рассмотрим решение $u=u(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} Au=0,\\ u|_{x_n=0}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}=0,\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial x_n^{m-1}}\Big|_{x_n=0}=f(x') \end{cases} \tag{7.24}$$

(в общем случае, когда все начальные данные отличны от 0, решение u является суммой m решений, соответствующих тем случаям, когда только одно из начальных данных ненулевое; каждый из этих случаев рассматривается аналогично задаче (7.24)). Пусть $f\in\mathscr{E}'(\Omega')$. Ввиду конечности скорости распространения возмущений, можно считать, что задача (7.24) рассматривается всюду в $\mathbf{R}^n$. Представим f с помощью преобразования Фурье (в обобщенном смысле):

$$f(x')=(2\pi)^{-n+1}\int \tilde f(\xi')\, e^{ix'\cdot\xi'}d\xi'. \tag{7.25}$$

Если $\tilde f(\xi')=O(|\xi'|^{-N})$ при $|\xi'|\to+\infty$, то $f\in C^{N-n-1}(\mathbf{R}^{n-1})$. Аналогично, если мы хотим найти особенности решения u, то достаточно решить задачу (7.24) с точностью до функций, у которых преобразование Фурье по x' достаточно быстро убывает при $|\xi'|\to+\infty$.

Формулу (7.25) можно рассматривать как представление f в виде линейной комбинации экспонент $x'\mapsto e^{ix'\cdot\xi'}$. Поскольку исходная задача является линейной, для нахождения решения достаточно рассмотреть решение задачи (7.24), в котором вместо $f(x')$ стоит $e^{ix'\cdot\xi'}$. Точнее, пусть $\varphi\in C_0^\infty(\Omega')$, $\varphi=1$ в окрестности $\operatorname{supp} f$. Тогда (7.25) можно переписать в виде

$$f(x')=(2\pi)^{-n+1}\int \tilde f(\xi')\,\varphi(x')\, e^{ix'\cdot\xi'}d\xi',$$

так что достаточно решить задачу (7.24) с заменой $f(x')$ на $\varphi(x')e^{ix'\cdot\xi'}$. Положим теперь $\lambda=|\xi'|$, $\eta=\xi'/|\xi'|$; так что получается, что

$$\varphi(x')\, e^{ix'\cdot\xi'}=e^{i\lambda S(x', \eta)}\varphi(x'),$$

где $S(x', \eta)=\eta\cdot x'$. Обозначим через $v(x, \eta, \lambda)$ достаточно длинный отрезок асимптотического ряда, задающего асимптотическое решение задачи Коши (7.24), в которой вместо $f(x')$ стоит $e^{i\lambda S(x', \eta)}\varphi(x')$ (здесь η рассматривается как параметр, а λ — большой параметр, имеющий тот же смысл, что и выше). Введем срезающую функцию $\psi=\psi(\xi')$, $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, $\psi=1$ в окрестности нуля. Тогда функция

$$u_1(x)=(2\pi)^{-n+1}\int (1-\psi(\xi'))\,\tilde f(\xi')\, v(x, \xi'/|\xi'|, |\xi'|)\, d\xi' \tag{7.26}$$

будет решением задачи, отличающейся от (7.24) тем, что в правых частях всюду добавлены достаточно гладкие функции. Но тогда, в силу известных теорем существования и единственности решения задачи Коши для гиперболических уравнений, $u-u_1$ также является достаточно гладкой функцией. Это означает, что формула (7.26) задает параметрикс для задачи Коши (7.24). Вспоминая вид асимптотических решений, описанный выше, мы видим, что формулу (7.26) можно переписать в виде

$$u_1(x)=\sum_{j=1}^{m}(\Phi_j f)(x), \tag{7.27}$$

где Φ_j — интегральный оператор Фурье вида

$$\Phi_j f(x)=(2\pi)^{-n+1}\int e^{iS_j(x, \xi')}a(x, \xi')\,\tilde f(\xi')\, d\xi'=$$

$$=(2\pi)^{-n+1}\int e^{i[S_j(x,\xi')-y'\cdot\xi']}a(x,\xi')f(y')\,dy'd\xi', \qquad (7.28)$$

где фазовая функция S_j является решением уравнения эйконала (7.17) с начальным условием $S_j|_{x_n=0}=x'\cdot\xi'$, а $a=a(x,\xi')$ — некоторый классический символ (сумма нескольких гладких функций, положительно однородных при $|\xi'|\geqslant 1$) порядка $-m+1$.

Далее, процедура построения асимптотических решений дает возможность описать особенности решения u_1. Пусть для простоты $f(x')=\delta(x')$, так что $\tilde f(\xi')=1$ (соответствующее решение $u(x)=\mathscr{E}(x)$ называется фундаментальным решением задачи Коши для уравнения $Au=0$). Рассмотрим соответствующее решение $u_1=\mathscr{E}_1$ вида (7.26), отличающееся от $\mathscr{E}$ на достаточно гладкую функцию. Решение $v(x,\eta,\lambda)$, входящее в эту формулу, можно определить как решение с начальным данным $f(x')=e^{i\lambda x'\cdot\eta}\varphi(x')$, где $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ и $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в сколь угодно малом шаре с центром в точке 0. Но тогда v задается конечной суммой членов вида $e^{i\lambda S_j(x,\eta)}\psi(x)$, где S_j — описанная выше фазовая функция, а ψ получается решением уравнений переноса вдоль лучей, соответствующих фазовой функции S_j. Таким образом, уже носитель функции v будет лежать на объединении m конусов лучей (с криволинейными образующими), выходящих из начала координат. Легко проверить, что все эти лучи можно описать также как проекции на x-пространство всевозможных нулевых бихарактеристик главного символа a_m, начинающихся над точкой $x=0$, т. е. в точках вида $(0;\ \xi',\ \lambda_j(0,\xi'))$.

Более детальное описание особенностей на языке волновых фронтов легко получить, анализируя интеграл (7.28) методом стационарной фазы (с $\lambda=|\xi'|$). А именно, умножая $\Phi_j f(x)$ на срезающую функцию $\varphi=\varphi(x)$ с достаточно малым носителем, мы получим распределение, преобразование Фурье которого задается интегралом

$$\widetilde{\varphi\Phi_j f}(\eta)=(2\pi)^{-n+1}\int e^{i[S_j(x,\xi')-y'\cdot\xi'-x\cdot\eta]}a(x,\xi')\varphi(x)f(y')\,dy'd\xi'dx,$$

при $f(y')=\delta(y')$ приобретающим вид

$$(2\pi)^{-n+1}\int e^{i[S_j(x,\xi')-x\cdot\eta]}a(x,\xi')\varphi(x)\,d\xi'dx=$$

$$=(2\pi)^{-n+1}\lambda^{n-1}\int e^{i\lambda[S_j(x,\xi')-x\cdot\zeta]}a(x,\lambda\xi')\varphi(x)\,d\xi'dx,$$

где $\lambda=|\eta|$, $\zeta=\eta/|\eta|$. Последний интеграл быстро убывает по λ вне точек стационарной фазы, т. е. там, где

$$\left|\frac{\partial S_j(x,\xi')}{\partial\xi'}\right|+\left|\frac{\partial S_j(x,\xi')}{\partial x}-\zeta\right|\neq 0.$$

Мы видим, что $\mathrm{WF}(\Phi_j f)$ должен быть расположен в таких точках (x,η), что $\eta=\frac{\partial S_j(x,\xi')}{\partial x}$ при некотором ξ', для которого $\frac{\partial S_j(x,\xi')}{\partial\xi'}=0$. Но это в точности те точки (x,η), которые лежат на бихарактеристиках, начинающихся в точках вида $(0,\eta_0)$ (т. е. над точкой $x=0$), поскольку соотношение $\partial S_j/\partial\xi'$ сохранится при движении вдоль бихарактеристики (ξ' — параметр!), а $S_j|_{x_n=0}=x'\cdot\xi'$. Точно также сохранится вдоль бихарактеристики соотношение $\eta=\frac{\partial S_j(x,\xi')}{\partial x}$ (график градиента функции S_j, являющийся решением уравнения Гамильтона—Якоби, инвариантен относительно гамильтонова потока — см. описание процедуры решения уравнения Гамильтона—Якоби в [21, § 3 гл. 1]). Мы можем при этом ограничиться рассмотрением лишь нулевых бихарактеристик, ввиду общего соотношения

$$\mathrm{WF}(u)\subset\{(x,\xi):a_m(x,\xi)=0\},$$

верного для любых решений уравнения $Au=0$.

Отсюда нетрудно получить глобальное утверждение о том, что особенности любых решений распространяются вдоль бихарактеристик (этот факт достаточно доказывать для сколь угодно малых отрезков бихарактеристик!), поскольку всякое продвижение по t можно рассматривать как решение задачи Коши с подходящими начальными данными.

7.5. Канонический оператор Маслова и глобальные асимптотические решения задачи Коши ([12], [26], [27], [30]). Асимптотическое решение задачи Коши (7.19) в большинстве случаев может быть найдено лишь в малой окрестности начальной поверхности из-за того, что задача Коши (7.17)—(7.18) для уравнения эйконала может быть решена только в малой окрестности начальной поверхности, даже если уравнение и начальные данные определены глобально (например, в случае, когда переменная x' меняется на компактном многообразии, а $x_n\in\mathbf{R}$). Причиной этому является наличие *каустик*, т. е. огибающих семейств лучей, возникающих в общем положении из решения уравнений, определяющих лучи. Для того, чтобы обойти эту трудность, применяется *метод канонического оператора В. П. Маслова*, который мы сейчас кратко опишем. С аналитической точки зрения он состоит в том, что вблизи каустик вместо асимптотических решений вида (7.11) используются интегралы от них, точнее, преобразования Фурье по всем переменным или по части переменных, от асимптотических решений такого же вида (7.11), но заданных в переменных ξ, двойственных к x, или в переменных $(x^{(1)},\xi^{(2)})$, где $x=(x^{(1)},x^{(2)})$, т. е. $(x^{(1)},x^{(2)})$ — разбиение переменных x на две группы, $\xi^{(2)}$ — переменные, двойственные к $x^{(2)}$. Оказывается, что если бихарактеристики рассматриваемого уравнения определены глобально, то при выполнении некоторых топологических условий можно построить асимптотические решения описанной структуры и склеить их так, чтобы они давали глобальное асимптотическое решение. В частности, так удается построить глобальное асимптотическое решение задачи Коши (7.19) для строго гиперболического уравнения с быстро осциллирующими начальными данными. По указанной в п. 7.4 схеме, это приводит к построению глобального параметрикса задачи Коши для такого уравнения.

Прежде всего введем геометрический объект, заменяющий решение уравнения Гамильтона—Якоби

$$H\left(x, \frac{\partial S(x)}{\partial x}\right)=0, \tag{7.29}$$

где H — вещественнозначная гладкая функция на $\mathbf{R}^{2n}$. Для этого заметим, что график градиента функции S, т. е. множество точек $(x, S_x(x))$ является *лагранжевым многообразием* в $\mathbf{R}^{2n}$, т. е. таким n-мерным подмногообразием, что ограничение симплектической 2-формы

$$\omega=\sum_{j=1}^{n} dx_j\wedge d\xi_j$$

(здесь $(x_1,\ldots,x_n, \xi_1,\ldots,\xi_n)$ — координаты в $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{R}^n_x\times\mathbf{R}^n_\xi$) на это подмногообразие равно 0. Обратно, пусть дано лагранжево многообразие $\Lambda\subset\mathbf{R}^{2n}$ и точка $p\in\Lambda$ такова, что в окрестности этой точки Λ диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}_x{}^n$ (для этого, по теореме о неявной функции, необходимо и достаточно, чтобы дифференциал проекции $\pi:\Lambda\to\mathbf{R}_x{}^n$ был инъективен в точке p). Тогда в окрестности U этой точки Λ представляется как график градиента некоторой функции S, однозначно определенной с точностью до аддитивной постоянной. А именно, S находится по формуле

$$S(x)=S(x^0)+\int_{x^0}^{x}\xi(x)\,dx, \tag{7.30}$$

где $(x, \xi(x))$ — точка рассматриваемой окрестности $U\subset\Lambda$, лежащая над точкой x, интеграл от 1-формы $\xi dx=\xi_1dx_1+\ldots+\xi_ndx_n$ берется по любому пути в $\pi(U)$, соединяющему x^0 и x (интеграл не зависит от пути, поскольку форма ξdx замкнута на Λ в силу лагранжевости многообразия Λ). Поэтому всякое лагранжево многообразие Λ, содержащееся в гиперповерхности $\Gamma=\{(x,\xi): H(x,\xi)=0\}$, является, по сути дела, многозначным решением уравнения Гамильтона—Якоби (7.29). Пусть теперь дана начальная функция $S^0=S^0(x')$, которая рассматривается как функция на гиперплоскости $x_n=0$, и пусть выполнено условие

А. Уравнение $H\left(x', 0, \frac{\partial S^0(x')}{\partial x'}, \xi_n\right)=0$ имеет такое гладкое решение $\xi_n=\xi_n(x')$, что

$$H'_{\xi_n}\left(x', 0, \frac{\partial S^0(x')}{\partial x'}, \xi_n(x')\right)\neq 0.$$

Отметим, что это условие автоматически выполняется для уравнений вида (7.17), причем в этом случае решение $\xi_n(x')$ единственно.

При выполнении условия *А* мы можем провести все бихарактеристики функции H через точки $\left(x', 0, \frac{\partial S^0(x')}{\partial x'}, \xi_n(x')\right)$ и их точки составят лагранжево многообразие Λ. В ряде важных случаев оно лежит над всем пространством $\mathbf{R}^n_x$ (т. е. проекция $\pi:\Lambda\to\mathbf{R}^n_x$ является сюръективной). Так обстоит дело, например, для уравнений Гамильтона—Якоби, разрешенных относительно $\partial S/\partial x_n$, при некоторых условиях роста гамильтониана; в частности, для уравнений вида (7.17), возникающих из равномерно строго гиперболических уравнений с коэффициентами, имеющими ограниченные производные.

Обобщая формулу (7.30), мы можем ввести в малой окрестности U любой точки r^0 на лагранжевом многообразии Λ функцию

$$S(r)=S(r^0)+\int_{r^0}^{r}\xi dx, \tag{7.31}$$

где интеграл берется по любому пути, соединяющему r^0 и r и лежащему в U (и не зависит от этого пути, в силу лагранжевости многообразия Λ). Построенная выше функция $S=S(x)$ была образом функции (7.31) при проектировании $\pi:\Lambda\to\mathbf{R}_x{}^n$. По известной лемме В. И. Арнольда [5], в окрестности каждой своей точки p^0 лагранжево многообразие диффеоморфно проектируется на одну из координатных лагранжевых плоскостей в $\mathbf{R}^{2n}$, т. е. на одну из плоскостей $(x^{(1)}, \xi^{(2)})$, где $(x^{(1)}, \xi^{(2)})$ — таковы, как описано выше. Образ функции S из (7.31) при этой проекции представляет собой функцию $S(x^{(1)}, \xi^{(2)})$. Построим по ней новую функцию

$$S_U(x^{(1)}, \xi^{(2)})=S(x^{(1)}, \xi^{(2)})-\xi^{(2)}\cdot x^{(2)}(x^{(1)}, \xi^{(2)}),$$

где функция $x^{(2)}(x^{(1)}, \xi^{(2)})$ выбрана так, что имеется точка $(x^{(1)}, x^{(2)}(x^{(1)}, \xi^{(2)}), \xi^{(1)}(x^{(1)}, \xi^{(2)}), \xi^{(2)})\in U\subset\Lambda$. Функция S_U называется *производящей функцией* лагранжева многообразия Λ в окрестности точки p^0; Λ локально восстанавливается по такой производящей функции $S_U(x^{(1)}, \xi^{(2)})$ как множество точек в $\mathbf{R}^{2n}$, для которых

$$x^{(2)}=-\frac{\partial S_U(x^{(1)}, \xi^{(2)})}{\partial\xi^{(2)}},\quad \xi^{(1)}=\frac{\partial S_U(x^{(1)}, \xi^{(2)})}{\partial x^{(1)}}.$$

Предположим теперь для простоты, что функция $H=H(x,\xi)$ однородна по ξ порядка m. Будем искать асимптотические решения задачи с быстро осциллирующими начальными данными

$$\begin{cases} H(x, D_x)\,u=0, \\ u|_{x_n=0}=e^{i\lambda S^0(x')}c(x'), \end{cases} \tag{7.32}$$

где $c\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$. Как и выше, считаем, что выполнено условие A, благодаря которому можно построить такое лагранжево многообразие Λ из бихарактеристик, что его часть, лежащая над гиперплоскостью $x_n=0$, имеет вид $\left(x', 0, \frac{\partial S^0(x')}{\partial x'}, \xi_n(x')\right)$, где функция $\xi_n(x')$ взята из условия A. На многообразии Λ мы можем выбрать в качестве координат какой-либо точки r переменные (t, y), где t — параметр вдоль бихарактеристики, проходящей в момент t через точку r и начинающейся (при $t=0$) над точкой $(0, y)$, $y\in\mathbf{R}^{n-1}$. Обычные координаты x проекции точки r на $\mathbf{R}_x^n$ будут функциями от (t, y), т. е. $x=x(t, y)$ и можно рассмотреть якобиан $J(t, y)=\det\frac{\partial x(t, y)}{\partial(t, y)}$. Он отличен от 0 при $t=0$ и обращается в 0 в точности в тех точках, в которых вырождается дифференциал канонической проекции $\pi:\Lambda\to\mathbf{R}_x^n$, т. е. над каустиками.

Пусть теперь многообразие Λ покрыто такими координатными окрестностями U_j, что в каждой такой окрестности можно выбрать какой-то набор $(x^{(1)}, \xi^{(2)})$ в качестве локальных координат. Для функции $\varphi\in C_0^\infty(U_j)$ положим

$$\begin{aligned} K(U_j)\varphi &= u(x, \lambda) = \\ &= \left(-\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^k \int\left|\frac{\partial(x^{(1)}, \xi^{(2)})}{\partial(t, y)}\right|^{-1/2} \exp\{i\lambda[S_{U_j}(x^{(1)}, \xi^{(2)}) + \\ &\quad + x^{(2)}\cdot\xi^{(2)}]\}\,\varphi(r(x^{(1)}, \xi^{(2)}))\,d\xi^{(2)} = \\ &= \left(-\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^k \int\left|\frac{\partial(x^{(1)}, \xi^{(2)})}{\partial(t, y)}\right|^{-1/2} e^{i\lambda S(r(x^{(1)}, \xi^{(2)}))}\times \\ &\quad \times\varphi(r(x^{(1)}, \xi^{(2)}))\,d\xi^{(2)}, \end{aligned} \tag{7.33}$$

где S_{U_j} — производящая функция лагранжева многообразия Λ в координатах $(x^{(1)}, \xi^{(2)})$, S — функция (7.31) на Λ, k — число переменных $\xi^{(2)}$. Оператор $K(U_j): C_0^\infty(U_j)\to C^\infty(\mathbf{R}_x^n\times\mathbf{R}_+)$ называется *предканоническим оператором* на U_j, ассоциированным с координатами $(x^{(1)}, \xi^{(2)})$. В случае $k=0$, т. е. когда переменные $\xi^{(2)}$ отсутствуют и U_j диффеоморфно проектируется в $\mathbf{R}_x^n$, мы получаем, что, с точностью до несущественного числового множителя, $K(U_j)\varphi$ совпадает с функцией

$$e^{i\lambda S(r(x))}J(x)^{-1/2}\varphi(r(x)). \tag{7.34}$$

Здесь якобиан возник по той причине, что первое уравнение переноса (уравнение (7.14) с $j=0$ при $a_m=H$) можно, пользуясь известной формулой Лиувилля, переписать в виде

$$J^{-1/2}\frac{d}{dt}(J^{1/2}b_0)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial\xi_j}b_0=0 \tag{7.35}$$

(здесь надо значения всех функций брать вдоль данной бихарактеристики). Это приводит к тому, что главный член u_0 асимптотического решения (7.11) имеет вид

$$\begin{aligned} u_0(x, \lambda) &= b_0^0(y)\sqrt{\frac{J(0, y)}{J(t, y)}}\times \\ &\times\exp\left[i\lambda S(r(x))-\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial\xi_j}dt\right], \end{aligned} \tag{7.36}$$

где $t=t(x)$, $y=y(x)$, $\xi=\xi(x)$, $r(x)$ — выражения через x всех координат на лагранжевом многообразии Λ в рассматриваемой координатной окрестности (где x можно выбрать за координаты).

Если теперь предположить, что в окрестности U_j можно по разному выбрать набор $(x^{(1)}, \xi^{(2)})$, задающий локальные координаты на Λ, а именно, если $(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{\xi}^{(2)})$ — другой такой набор и $\tilde{K}(U_j)$ — соответствующий предканонический оператор, то применение метода стационарной фазы дает следующий результат о связи $K(U_j)$ и $\tilde{K}(U_j)$:

$$\tilde{K}(U_j)\varphi=e^{\gamma i\pi/2}K(U_j)\varphi+O(\lambda^{-1}), \tag{7.37}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma = &\left[\operatorname{inerdex}\frac{\partial x^{(2)}(x^{(1)}, \xi^{(2)})}{\partial\xi^{(2)}} - \right. \\ &\left. -\operatorname{inerdex}\frac{\partial\tilde{x}^{(2)}(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{\xi}^{(2)})}{\partial\tilde{\xi}^2}\right]\bmod 4 \end{aligned} \tag{7.38}$$

($\operatorname{inerdex} A$ для симметрической матрицы A означает отрицательный индекс инерции — число отрицательных собственных значений матрицы соответствующей квадратичной формы; в данном случае по модулю 4 он не зависит от выбора рассматриваемой точки).

Попробуем теперь склеить из предканонических операторов $K(U_j)$ *канонический оператор*

$$K_\Lambda: C_0^\infty(\Lambda)\to C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+)\bmod O(\lambda^{-1}), \tag{7.39}$$

Для этого нужно положить

$$(K_\Lambda\varphi)(x, \lambda)=\sum_j c_jK(U_j)(e_j(r)\varphi(r))(x), \tag{7.40}$$

где $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ — разбиение единицы на Λ, подчиненное покрытию U_j, c_j — постоянные, которые подбираются так, чтобы это определение не зависело от произвола в выборе покрытия U_j и координат в каждой окрестности U_j. Оказывается, что это всегда можно сделать для так называемых *квантованных лагранжевых многообразий* — таких многообразий Λ, что для любого замкнутого пути l на Λ, во-первых, $\int_l \xi dx = 0$, а во-вторых, $\operatorname{ind} l = 0$, где $\operatorname{ind} l$ — *индекс Маслова* этого пути. Индекс Маслова любого пути l (не обязательно замкнутого) на Λ можно определить, например, покрыв этот путь цепочкой таких $U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_s}$ (координатных окрестностей описанного вида), что $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \varnothing$, $k = 0, 1, \ldots, s-1$; теперь для каждой пары $U_{i_k}, U_{i_{k+1}}$ надо на пересечении $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}}$ ввести число $\gamma(U_{i_k}, U_{i_{k+1}})$ по формуле (7.38), в которой $(x^{(1)}, \xi^{(2)})$ — координаты на U_{i_k}, а $(\tilde{x}^{(1)}, \tilde{\xi}^{(2)})$ — координаты на $U_{i_{k+1}}$ и, наконец, положить

$$\operatorname{ind} l = \sum_{k=0}^{s-1} \gamma(U_{i_k}, U_{i_{k+1}}) \bmod 4 \tag{7.41}$$

(результат не зависит от выбора произвольных элементов).

Отметим, что квантованным является, в частности, всякое односвязное лагранжево многообразие.

В случае квантованного многообразия Λ в качестве чисел c_j в определении K_Λ по формуле (7.40) можно взять, например, $c_j = \exp(-i\pi\gamma_j/2)$, где γ_j — индекс Маслова любого пути, соединяющего фиксированную точку $r_0 \in \Lambda$ с какой-либо точкой $r \in U_j$. Мы получим тогда, что если $\varphi \in C_0^\infty(U_i \cap U_j)$, то

$$c_i K(U_i)\varphi = c_j K(U_j)\varphi + O(\lambda^{-1}),$$

что обеспечивает корректность определения канонического оператора K_Λ.

Вернемся к задаче Коши (7.32). Оказывается, что всюду, где определено только что построенное лагранжево многообразие Λ (при условии, что оно является квантованным), существует асимптотическое решение этой задачи, имеющее вид

$$u(x, \lambda) = K_\Lambda \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} b_j(r) \right)(x, \lambda), \tag{7.42}$$

где $b_j \in C^\infty(\Lambda)$. Функции b_j здесь находятся решением уравнений переноса на Λ. Эти уравнения (получаемые подстановкой ряда $u(x, \lambda)$ в уравнение $H(x, D_x)u = 0$ и приравниванием нулю коэффициентов при всех степенях λ) имеют вид

$$R_1 b_j = f_j, \tag{7.43}$$

где

$$R_1 = \frac{d}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H(x, \xi)}{\partial x_j \partial \xi_j} \tag{7.44}$$

— дифференциальный оператор 1-го порядка на Λ, в котором $\frac{d}{dt}$ — дифференцирование вдоль бихарактеристик, а точка (x, ξ) берется на Λ; f_j — функция, выражающаяся через $b_0, \ldots, b_{j-1}$. Задавая подходящие начальные условия для b_j на гиперплоскости $x_n = 0$, гарантирующие выполнение начального условия задачи (7.32), мы можем последовательно решить уравнения переноса (7.43) (явно, коль скоро известно Λ!) и найти требуемое асимптотическое решение.

Рассмотрим теперь задачу Коши (7.19) для равномерно строго гиперболического уравнения порядка m в $\mathbf{R}^n$, коэффициенты которого имеют ограниченные производные всех порядков. Тогда имеется m уравнений Гамильтона—Якоби (7.17), которые определяют m лагранжевых многообразий $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$. Наличие выделенной переменной x_n и простая структура начальных данных обеспечивают их односвязность и, тем самым, квантованность, так что определены m канонических операторов Маслова $K_{\Lambda_1}, \ldots, K_{\Lambda_m}$.

Теорема 7.3 (В. П. Маслов, см. [12], [30]). *При описанных предположениях существует глобальное асимптотическое решение задачи Коши (7.19), имеющее вид*

$$u = \sum_{j=1}^{m} K_{\Lambda_j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} b_{k,j} \right), \tag{7.45}$$

где функции $b_{k,j} \in C^\infty(\Lambda_j)$ находятся решением уравнений переноса на Λ_j с подходящими начальными условиями.

С помощью процедуры, описанной в п. 7.4, эта теорема дает возможность строить глобальный параметрикс задачи Коши для рассматриваемого уравнения.

Имеется прямая связь между каноническим оператором Маслова и возникшими хронологически позже интегральными операторами Фурье. Эта связь описана в [33], [34].

Описанная методика и ее усовершенствованные варианты дают возможность строить асимптотические решения весьма разнообразных задач математической физики, в частности, квазиклассических приближений в ряде важных квантовомеханических задач в асимптотических задачах спектральной теории. Подробности об этом можно найти, например, в монографиях [7], [12], [26], [27], [28], [29], [30] [33], [41], [46], [69], [76], [78], [85], [103], [104]. В этих же монографиях и цитированной в них литературе можно найти детали описанных здесь конструкций и необходимые доказательства.

§ 8. Асимптотика собственных значений самосопряженных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов

В этом параграфе обсуждаются простейшие задачи об асимптотике собственных значений самосопряженных операторов, возникающих в анализе, геометрии и математической физике.

8.1. **Вариационные принципы и оценки собственных значений** ([8], [16], [46], [60]). В [21, § 3 гл. 2] уже рассматривались задачи на собственные значения для эллиптических краевых задач. Простейшей из них является задача об отыскании собственных значений и собственных функций для оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ с граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases}-\Delta\psi=\lambda\psi \text{ в } \Omega,\\ \psi|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{8.1}$$

Обобщенная постановка этой задачи состоит в исследовании собственных значений оператора, порожденного квадратичной формой

$$[u, u]=\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx, \tag{8.2}$$

на функциях $u\in\mathring{H}^1(\Omega)$. Это значит, что ψ называется собственной функцией задачи (8.1) с собственным значением λ, если $\psi\in\mathring{H}^1(\Omega)$, $\psi\neq 0$, и для любой функции $v\in\mathring{H}^1(\Omega)$

$$[\psi, v]=\lambda(\psi, v), \tag{8.3}$$

где полуторалинейные формы $[\cdot,\cdot]$ и $(\cdot,\cdot)$ задают скалярные произведения в пространствах $\mathring{H}^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, соответственно:

$$[u, v]=\int_\Omega \nabla u\cdot\overline{\nabla v}\,dx,\quad (u, v)=\int_\Omega u\bar{v}\,dx.$$

Достаточно, впрочем, требовать выполнения тождества (8.3) на функциях $v\in C_0^\infty(\Omega)$. В случае областей Ω с гладкой границей (класса C^∞) обобщенная постановка задачи равносильна классической постановке (8.1) и, более того, автоматически оказывается, что $\psi\in C^\infty(\bar\Omega)$.

Рассмотрим собственные значения задачи (8.1), упорядоченные по возрастанию:

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots$$

(здесь каждое из собственных значений повторено столько раз, какова его кратность; можно доказать, что λ_1 однократно, так что на самом деле $\lambda_1<\lambda_2$, но это не будет играть роли в наших рассмотрениях).

Имеется вариационный принцип — *минимаксный принцип Куранта*, дающий выражение собственных чисел λ_j через квадратичную форму (8.2):

$$\lambda_j=\max_{\substack{L\subset H_1\\ \dim L=j-1}}\ \min_{u\in L^\perp\setminus\{0\}}\frac{[u, u]}{(u, u)},\quad j=1, 2, \ldots, \tag{8.4}$$

где $H_1=\mathring{H}^1(\Omega)$, L — линейное подпространство в H_1 (в правой части берется максимум по всем таким подпространствам размерности $j-1$), $L^\perp$ — его ортогональное дополнение в $L_2(\Omega)$ (разумеется, при взятии минимума надо рассматривать только функции $u\in L^\perp\cap H_1$). При $j=1$ эту формулу надо понимать без первого максимума, т. е.

$$\lambda_1=\min_{u\in H_1\setminus\{0\}}\frac{[u, u]}{(u, u)}. \tag{8.4$_1$}$$

Учитывая, что $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\mathring{H}^1(\Omega)$, легко преобразовать (8.4) к виду

$$\lambda_j=\sup_{\substack{L\subset D_0\\ \dim L=j-1}}\ \inf_{u\in L^\perp\setminus\{0\}}\frac{(Au, u)}{(u, u)},\quad j=1, 2, \ldots, \tag{8.5}$$

где $D_0=C_0^\infty(\Omega)$, $A=-\Delta$ и минимум берется по всем $u\in L^\perp\cap D_0$ (ортогональное дополнение, как и выше, берется в $L_2(\Omega)$).

Введем еще *функцию распределения собственных значений*

$$N(\lambda)=\#\{j:\lambda_j\leqslant\lambda\}=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}1=\max\{j:\lambda_j\leqslant\lambda\}$$

(в первых двух вариантах записи неважно, что собственные значения упорядочены по возрастанию). Она непрерывна справа, т. е. $N(\lambda+0)=N(\lambda)$. Тогда для $N(\lambda)$ также можно написать вариационный принцип, называемый *леммой Глазмана*:

$$N(\lambda)=\max_{\substack{L\subset H_1\\ [u,u]\leqslant\lambda(u,u),\, u\in L}}\dim L. \tag{8.6}$$

Аналог (8.5) имеет вид

$$N(\lambda-0)=\max_{\substack{L\subset D_0\\ (Au,u)<\lambda(u,u),\, u\in L\setminus\{0\}}}\dim L. \tag{8.7}$$

Вариационные принципы (8.4)—(8.7) лежат в основе стандартных методов численного нахождения собственных значений λ_j. Они могут также эффективно использоваться для качественного исследования поведения собственных значений и, в частности, для нахождения их асимптотики.

Пусть, например, даны две области Ω, Ω' в $\mathbf{R}^n$, причем $\Omega\subset\Omega'$. Обозначим собственные значения задачи Дирихле в Ω и

Ω' через $\lambda_j(\Omega)$ и $\lambda_j(\Omega')$ соответственно, а через $N_\Omega(\lambda)$ и $N_{\Omega'}(\lambda)$ обозначим соответствующие функции распределения. Поскольку $C_0^\infty(\Omega)\subset C_0^\infty(\Omega')$, то из (8.7) очевидным образом следует, что

$$N_\Omega(\lambda)\leqslant N_{\Omega'}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbf{R}, \tag{8.8}$$

или, что равносильно,

$$\lambda_j(\Omega)\geqslant\lambda_j(\Omega'),\quad j=1,2,\ldots, \tag{8.9}$$

т. е. при расширении области собственные значения задачи с условиями Дирихле уменьшаются.

Этим можно воспользоваться, например, сравнив собственные значения для Ω с собственными значениями для какого-либо куба

$$K_l=\{x:0\leqslant x_j\leqslant l,\ j=1,\ldots,n\},$$

имеющими вид

$$\lambda_{k_1\ldots k_n}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2(k_1^2+\ldots+k_n^2),\quad k_j\in\mathbf{N},$$

соответствующие собственные функции

$$\psi_{k_1\ldots k_n}=\sin\frac{\pi k_1x_1}{l}\ldots\sin\frac{\pi k_nx_n}{l}$$

находятся разделением переменных. Легко видеть, что

$$N_{K_l}(\lambda)=(2\pi)^{-n}l^n\omega_n\lambda^{n/2}+O(\lambda^{(n-1)/2}), \tag{8.10}$$

где ω_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$. Помещая произвольную ограниченную область Ω в достаточно большой куб и, наоборот, рассматривая достаточно малый куб, лежащий в Ω, мы получаем, в силу (8.8), что существует такая постоянная $C>0$, что

$$C^{-1}\lambda^{n/2}\leqslant N_\Omega(\lambda)\leqslant C\lambda^{n/2}. \tag{8.11}$$

Далее, рассмотрим задачу на собственные значения с краевым условием Неймана

$$\begin{cases}-\Delta\psi=\lambda\psi\ \text{в}\ \Omega,\\ \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{8.12}$$

Её обобщенная постановка строится аналогично рассмотрениям [21, § 6 гл. 2]. А именно, ψ надо называть собственной функцией с собственным значением λ, если $\psi\in H^1(\Omega)$, $\psi\neq0$ и равенство (8.3) верно для любой функции $v\in H^1(\Omega)$. Вариационные принципы (8.4) и (8.6) сохраняют силу, но в них следует брать $H_1=H^1(\Omega)$ (а не $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ как в случае условия Дирихле). Формулировки (8.5) и (8.7) можно использовать для областей с гладкой границей, беря в них $D_0=\left\{u:u\in C^\infty(\bar\Omega),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\right\}$.

Будем обозначать собственные значения задачи (8.12) через $'\lambda_j={}'\lambda_j(\Omega)$, $j=1,2,\ldots$. Как и для задачи Дирихле, предполагается, что

$$'\lambda_1\leqslant{}'\lambda_2\leqslant{}'\lambda_3\leqslant\ldots$$

Отметим, что $'\lambda_1=0$, причем это собственное значение однократно, т. е. $'\lambda_2>0$. Наконец, пусть $'N(\lambda)={}'N_\Omega(\lambda)$ — функция распределения собственных значений $'\lambda_j$. В случае куба K_l собственные значения задачи (8.12) имеют вид

$$'\lambda_{k_1\ldots k_n}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2(k_1^2+\ldots+k_n^2),\quad k_j\in\mathbf{Z}_+,$$

соответствующие собственные функции суть $\psi_{k_1\ldots k_n}(x)=\cos\dfrac{\pi k_1x_1}{l}\ldots\cos\dfrac{\pi k_nx_n}{l}$. Поэтому формула (8.10) и, вслед за ней, оценка (8.11) сохраняют систему для задачи (8.12). Далее, поскольку $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$, то из сравнения двух вариантов (8.6) получается неравенство

$$N_\Omega(\lambda)\leqslant{}'N_\Omega(\lambda), \tag{8.13}$$

или

$$\lambda_j(\Omega)\geqslant{}'\lambda_j(\Omega),\quad j=1,2,\ldots. \tag{8.14}$$

8.2. Асимптотика собственных значений оператора Лапласа в области евклидова пространства. Вместо оценки (8.11) при минимальных дополнительных предположениях на область Ω можно написать асимптотику

$$N_\Omega(\lambda)=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\Omega\cdot\omega_n\cdot\lambda^{n/2}(1+o(1)), \tag{8.15}$$

где $\operatorname{mes}\Omega$ означает n-мерную меру Лебега области Ω. Впервые такая асимптотика была установлена Вейлем в 1912 г. Один из возможных способов доказательства состоит в том, чтобы аппроксимировать область Ω объединением кубов с вершинами в точках подходящим образом сжатой целочисленной решетки. Оценка снизу получится, если взять эти кубы открытыми, непересекающимися и лежащими внутри Ω. Для оценки сверху надо взять аналогичное объединение кубов, содержащее область Ω, но теперь рассмотреть условия Неймана на границе каждого из них. В итоге (8.15) получается, по крайней мере, для всех таких ограниченных областей Ω, у которых $\operatorname{mes}(\partial\Omega)=0$.

Некоторое уточнение описанных вариационных рассуждений позволило Куранту (см. [60]) получить более точную оценку остаточного члена

$$N_\Omega(\lambda)=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\Omega\cdot\omega_n\lambda^{n/2}(1+O(\lambda^{-1/2}\ln\lambda)), \tag{8.16}$$

верную, например, всегда, когда граница $\partial\Omega$ обладает следующим свойством: если $(\partial\Omega)_\varepsilon$ — ε-окрестность $\partial\Omega$ в $\mathbf{R}^n$, то $\operatorname{mes}(\partial\Omega)_\varepsilon=O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to+0$. Наконец, неулучшаемую оценку остатка дает

Теорема 8.1 (Сили [101]). Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей. Тогда при $\lambda\to+\infty$

$$N_\Omega(\lambda)=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\Omega\cdot\omega_n\lambda^{n/2}(1+O(\lambda^{-1/2})). \tag{8.17}$$

Эта теорема уже не получается вариационными методами, а требует применения метода гиперболического уравнения, который является наиболее точным из известных тауберовых методов (о нем еще будет идти речь ниже).

Теорема 8.1 верна (без изменений) и для собственных значений задачи Неймана.

Еще в 1912 г. Вейль сформулировал гипотезу о том, что можно написать 2-й член асимптотики функции распределения собственных значений, содержащий $(n-1)$-мерную меру («площадь») границы $\partial\Omega$. Ответ на вопрос о 2-м члене асимптотики впервые получен в 1980 г. В. Я. Иврием для областей Ω с гладкой границей при следующем предположении на бильярдные траектории области Ω (траектории бильярда в Ω с обычными отражениями от границы):

(A) Множество периодических точек бильярда в Ω имеет меру 0.

Это означает, что множество касательных векторов к Ω, которые являются начальными условиями для периодических бильярдных траекторий, имеет меру 0 в $\Omega\times\mathbf{R}^n$ (т. е. нулевую $2n$-мерную меру Лебега). Иначе можно сказать, что множество периодических точек геодезического потока на Ω имеет меру 0 (геодезический поток задается на единичных касательных векторах к Ω).

Теорема 8.2 (В. Я. Иврий [22], [78]). Пусть область Ω с гладкой границей удовлетворяет условию (А). Тогда для собственных значений задачи Дирихле при $\lambda\to+\infty$

$$N(\lambda)=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\Omega\cdot\omega_n\cdot\lambda^{n/2}-\frac{1}{4}(2\pi)^{-n+1}\operatorname{mes}_{n-1}(\partial\Omega)\,\lambda^{(n-1)/2}+$$
$$+o\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right), \tag{8.18}$$

где $\operatorname{mes}_{n-1}(\partial\Omega)$ означает объем границы относительно римановой метрики, индуцированной стандартной евклидовой метрикой в $\mathbf{R}^n$. Для собственных значений задачи Неймана при тех же условиях

$$'N(\lambda)=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\Omega\cdot\omega_n\cdot\lambda^{n/2}+$$
$$+\frac{1}{4}(2\pi)^{-n+1}\operatorname{mes}_{n-1}(\partial\Omega)\,\lambda^{(n-1)/2}+o(\lambda^{(n-1)/2}). \tag{8.19}$$

Д. Г. Васильев [14] доказал, что условие (A) выполняется для всех строго выпуклых областей с аналитической границей, а Петков и Стоянов [92] установили, что оно выполняется для областей общего положения, так что в обоих этих случаях для Ω верно утверждение теоремы 8.2.

Обзор различных вариантов и обобщений теорем 8.1 и 8.2 можно найти в книге В. Я. Иврия [78].

Отметим здесь, что Д. Г. Васильев [14] доказал аналоги теорем 8.1 и 8.2 для самосопряженных эллиптических краевых задач для операторов произвольного порядка m ([21, см. § 3 гл. 2]). Соответствующие асимптотические формулы имеют вид

$$N(\lambda)=c_1\lambda^{n/m}+O(\lambda^{(n-1)/m}), \tag{8.20}$$

$$N(\lambda)=c_1\lambda^{n/m}+c_2\lambda^{(n-1)/m}+o(\lambda^{(n-1)/m}), \tag{8.21}$$

где постоянные c_1 и c_2 выписываются через коэффициенты оператора и граничных условий (последняя формула верна при выполнения аналога условия (A) для гамильтонова потока, задаваемого главным символом рассматриваемого оператора, с подходящими отражениями на границе, в частности, она верна при выполнении некоторого условия выпуклости, которое Д. Г. Васильев называет выпуклостью по Гамильтону).

Упомянем еще результаты В. Я. Иврия и С. И. Федоровой (см. [23]), которые комбинируя метод гиперболического уравнения с методами теории возмущений, распространили действие теорем 8.1 и 8.2 на ряд нерегулярных ситуаций, где нерегулярность может состоять в неограниченности области, негладкости границы или наличии каких-то вырождений. Наконец, Т. Е. Гуреев и Ю. Г. Сафаров (см. [70]) в некоторых случаях избавились от условия (A) и его аналогов, модифицировав второй член в (8.21) добавлением слагаемого, имеющего вид $Q(\lambda)\lambda^{(n-1)/m}$, где Q — почти-периодическая функция.

Отметим еще, что асимптотические формулы для $N(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ всегда можно переписать в виде асимптотических формул для λ_j при $j\to+\infty$. А именно, формула

$$N(\lambda)\sim c\lambda^\alpha \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty$$

(здесь $c>0$, $\alpha>0$) равносильна формуле

$$\lambda_j\sim c^{-1/\alpha}j^{1/\alpha} \quad \text{при} \quad j\to+\infty.$$

В частности, в силу (8.15), для собственных значений задачи Дирихле в ограниченной области Ω, у которой $\operatorname{mes}(\partial\Omega)=0$, имеет место асимптотика

$$\lambda_j\sim(2\pi)^2(\operatorname{mes}\Omega)^{-2/n}\omega_n^{-2/n}j^{2/n}, \quad j\to+\infty. \tag{8.22}$$

Формула

$$N(\lambda)=c\lambda^\alpha(1+O(\lambda^{-\delta})) \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty,$$

где $c>0$, $\alpha>0$, $\delta>0$ равносильна формуле

$$\lambda_j=c^{-1/\alpha}j^{1/\alpha}(1+O(j^{-\delta/\alpha})).$$

Это позволяет переформулировать теорему 8.1 в виде асимптотики

$$\lambda_j=(2\pi)^2(\operatorname{mes}\Omega)^{-2/n}\omega_n^{-2/n}j^{2/n}(1+O(j^{-1/n})), \quad j\to+\infty. \tag{8.23}$$

Аналогично, теорема 8.2 при указанных в ней условиях на область дает два члена асимптотики λ_j при $j\to+\infty$.

8.3. Общая формула вейлевской асимптотики и метод приближенного спектрального проектора. Опишем неформально идею, заимствованную по-существу из квантовой механики и позволяющую в большинстве случаев правильно написать главный член асимптотики собственных значений.

Пусть задано некоторое соответствие между операторами A из некоторого рассматриваемого класса $\mathfrak{A}$ и функциями $a=a(\nu)$ на некотором фиксированном пространстве M с мерой $d\nu$; эти функции будут называться *символами*. Символ оператора A будем обозначать через $\sigma(A)$. Соответствие $A\to\sigma(A)$ должно быть линейным и таким, что $\sigma(A_1A_2)$ с точностью до каких-то младших членов совпадает с $\sigma(A_1)\sigma(A_2)$. Это обстоятельство мы будем записывать в виде

$$\sigma(A_1A_2)\sim\sigma(A_1)\sigma(A_2). \tag{8.24}$$

Эвристически тогда можно ожидать, что если оператор A самосопряжен, то для достаточно хорошей функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$\sigma(f(A))\sim f(\sigma(A)) \tag{8.25}$$

(если f — многочлен, то это «следует» из (8.24)). В частности, возьмем в качестве f функцию χ_λ:

$$\chi_\lambda(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при } x>\lambda.\end{cases}$$

Тогда $\chi_\lambda(A)=E_\lambda$ — спектральный проектор оператора A (в случае полуограниченного снизу оператора A с дискретным спектром — это оператор проектирования на подпространство, натянутое на собственные функции с собственными значениями $\lambda_j\leqslant\lambda$). Ясно, что

$$N(\lambda)=\operatorname{Tr}E_\lambda. \tag{8.26}$$

В соответствии с вышеизложенным, можно ожидать, что

$$\sigma(E_\lambda)\sim\chi_\lambda(\sigma(A)). \tag{8.27}$$

Отметим, что для любой функции $a:M\to\mathbf{R}$

$$\chi_\lambda(a)(\nu)=\begin{cases}1 & \text{при } a(\nu)\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при } a(\nu)>\lambda.\end{cases} \tag{8.28}$$

Предположим, наконец, что если оператор P имеет след, то

$$\operatorname{Tr}P\sim\int_M\sigma(P)(\nu)\,d\nu, \tag{8.29}$$

где знак $\sim$ надо понимать как асимптотическую эквивалентность при наличии какого-либо большого или малого параметра.

Формулы (8.26)—(8.29) приводят для самосопряженного оператора A с символом $\sigma(A)=a$ к соотношению

$$N(\lambda)\sim\operatorname{mes}\{\nu:a(\nu)\leqslant\lambda\}=\int_M\chi_\lambda(a(\nu))\,d\nu. \tag{8.30}$$

Эта формула является прообразом всех асимптотических формул для $N(\lambda)$ (по параметру λ при $\lambda\to\infty$ или по какому-либо другому параметру, например, по малому параметру h в задачах квазиклассики). Приведем примеры соответствующих ситуаций.

Пример 8.1. Пусть $X=\mathbf{R}^n$. Рассмотрим на $\mathbf{R}^n$ псевдодифференциальные операторы $A=a^w(x, D_x)$, задаваемые символами Вейля (см. § 1). Точный смысл условия (8.24) состоит в теореме о композиции. След оператора P с обычным или вейлевским символом $p(x, \xi)=p(y)$ записывается (в случае достаточно гладкого и достаточно быстро убывающего символа p) по формуле

$$\operatorname{Tr}P=(2\pi)^{-n}\int p(y)\,dy=(2\pi)^{-n}\int p(x, \xi)\,dx\,d\xi. \tag{8.31}$$

Поэтому, задавая меру $d\nu=d\nu(y)$ формулой $d\nu(y)=(2\pi)^{-n}dy$, мы получим соответствие с изложенной выше схемой и ожидаемая асимптотика функции $N(\lambda)$ для самосопряженного оператора A с вейлевским символом $a(x, \xi)$ имеет вид

$$N(\lambda)\sim(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\{(x, \xi):a(x, \xi)\leqslant\lambda\}=(2\pi)^{-n}\int\limits_{a(x,\xi)\leqslant\lambda}dx\,d\xi, \tag{8.32}$$

где mes означает меру Лебега на $\mathbf{R}^{2n}$. Вместо вейлевского символа можно рассматривать обычный символ, но тогда вместо $a(x, \xi)$ в (8.32) надо писать $\operatorname{Re}a(x, \xi)$; это можно включить в описанную схему, если символом $\sigma(A)$ считать главную в каком-нибудь естественном смысле (например, старшую однородную) часть символа $a(x, \xi)$; она уже автоматически будет вещественной. В частности, для оператора Шрёдингера $A=-\Delta+q(x)$, где $a(x, \xi)=\xi^2+q(x)$, формула (8.32) после интегрирования по ξ записывается в виде

$$N(\lambda)\sim(2\pi)^{-n}\omega_n\int_{\mathbf{R}^n}(\lambda-q(x))_+^{n/2}\,dx, \tag{8.33}$$

где $(\lambda-q(x))_+=\max(0, \lambda-q(x))$.

Пример 8.2. Пусть X — компактное n-мерное многообразие без края. Рассмотрим тогда алгебру всех классических п. д. о. на X и под $\sigma(A)$ будем понимать главный символ оператора A. Тогда надо считать, что $M=T^*X$, $d\nu=(2\pi)^{-n}dx\,d\xi$, где $dx\,d\xi$ — каноническая мера на T^*X, определяемая в каждой координатной окрестности локальными координатами x и соответствующими двойственными координатами ξ. Соотношение (8.24) обращается в равенство, а формула (8.31) показывает, что верно что-то вроде (8.29), т. к. мы можем разбить наш п. д. о. на X в сумму операторов, у которых ядра сосредоточены в прямом произведении пары координатных окрестностей. Отсюда получается ожидаемая формула (8.30), в которой a — главный символ оператора A.

Пример 8.3. Если X — многообразие с краем (например, область в $\mathbf{R}^n$), то можно ожидать, что край не влияет на главный член асимптотики функции $N(\lambda)$. В этом контексте становится понятной формула (8.15), поскольку главный символ оператора Лапласа равен $-|\xi|^2$ и

$$(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\{(x, \xi) : x\in\Omega, \quad |\xi|^2<\lambda\}=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\Omega\cdot\omega_n\cdot\lambda^{n/2}.$$

Укажем еще некоторое простое, но важное обобщение формулы типа (8.30) и описанной идеи. Пусть значения символа $a(\nu)$ сами являются не числовыми, а операторными функциями (например, матричными) со значениями в пространстве операторов в каком-либо более простом пространстве, чем исходное (быть может, зависящем от ν). Обозначим след оператора $\sigma(P)(\nu)$ через $\operatorname{tr}\sigma(P)(\nu)$, чтобы отличать его от следа Tr изучаемых операторов. Вместо (8.29) надо считать выполненным соотношение

$$\operatorname{Tr}P\sim\int_M \operatorname{tr}\sigma(P)(\nu)\,d\nu \tag{8.29'}$$

и тогда надо ожидать, что вместо (8.30) имеет место асимптотика

$$N(\lambda)\sim\int_M \operatorname{tr}E_\lambda(a(\nu))\,d\nu=\sum_j \operatorname{mes}\{\nu:\lambda_j(a(\nu))<\lambda\}, \tag{8.30'}$$

где $E_\lambda(a(\nu))$ — спектральный проектор оператора $a(\nu)$ (надо считать, что $a(\nu)$ самосопряжен), а $\lambda_j(a(\nu))$ — собственные значения оператора $a(\nu)$. В случае, когда все пространства, в которых действуют операторы $a(\nu)$, одномерны, формула (8.30′) переходит в (8.30). Простейший пример применения (8.30′) — матричные операторы примеров 8.1—8.3 или операторы в сечениях векторных расслоений в примере 8.2. Более сложный случай: при рассмотрении операторов на многообразии X с краем Y, вырождающихся на Y, в качестве $a(\nu)$ полезно, наряду с обычным символом, рассматривать операторный символ, заданный при $\nu\in T^*Y\diagdown 0$ (кокасательное расслоение к Y без нулевого сечения), действующий в пространстве $L_2(\mathbf{R}^+)$ как п. д. о., символ которого получается из символа исходного оператора фиксированием точки $x'\in Y$ и двойственной переменной $\xi'=\nu$.

Хотя априори изложенные соображения, приводящие к формулам (8.30), (8.30′), являются лишь эвристическими, оказалось, что во многих случаях их можно сделать строгими. Впервые это было сделано в ситуации примера 8.1 (т. е. для операторов в $\mathbf{R}^n$) для операторов с символами Вейля классов G_ρ^m (см. § 1)

в работе В. Н. Туловского и М. А. Шубина (см. изложение этой работы в книге [46, гл. IV]). Основная идея состоит в том, что если вместо характеристической функции χ_λ взять подходящим образом сглаженную функцию $\tilde\chi_\lambda$, то оператор $\mathscr{E}_\lambda$ с символом $\tilde\chi_\lambda(a(x, \xi))$ будет обладать свойствами, близкими к свойствам спектрального проектора E_λ. Например, можно считать, что $\mathscr{E}_\lambda^*=\mathscr{E}_\lambda$, а оператор $\mathscr{E}_\lambda^2-\mathscr{E}_\lambda$ при $\lambda\to+\infty$ мал по ядерной норме по сравнению с функцией

$$V(\lambda)=(2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\{(x, \xi):a(x, \xi)<\lambda\},$$

задающей предполагаемую асимптотику. Отсюда следует, что асимптотически при $\lambda\to+\infty$ собственные значения оператора $\mathscr{E}_\lambda$ группируются вблизи точек 0 и 1. Подпространство, натянутое на собственные векторы оператора $\mathscr{E}_\lambda$ с собственными значениями, близкими к 1, надо использовать как пробное подпространство L в вариационном принципе (8.6) или (8.7), предварительно доказав оценку типа

$$\mathscr{E}_\lambda(A-\lambda I)\mathscr{E}_\lambda\leqslant C\lambda^{1-\varepsilon} \tag{8.34}$$

с какими-нибудь $\varepsilon>0$ и $C>0$, не зависящими от λ. Это дает оценку снизу для $N(\lambda)$ через величину порядка $\operatorname{Tr}\mathscr{E}_\lambda\sim V(\lambda)$. Аналогично, рассматривая ортогональное дополнение к этому подпространству L и используя оценку типа

$$(I-\mathscr{E}_\lambda)(A-\lambda I)(I-\mathscr{E}_\lambda)\geqslant -C\lambda^{1-\varepsilon}, \tag{8.35}$$

можно получить оценку сверху для $N(\lambda)$. Обе эти оценки вместе дают нужную асимптотику. Оператор $\mathscr{E}_\lambda$, имитирующий свойства проектора E_λ, естественно называть *приближенным спектральным проектором.* Метод нахождения асимптотики с помощью приближенного спектрального проектора разрабатывался рядом авторов, но наиболее существенным образом он был развит в работах С. З. Левендорского (см. например, [24] и имеющиеся там ссылки), применившего его к широкому классу задач, в частности, к неэллиптическим и вырождающимся операторам, системам, различным задачам с малым параметром (например, задачам квазиклассики и задачам теории оболочек). Этот метод позволяет дать и оценку остатка в асимптотике, хотя и не такую точную, как метод гиперболического уравнения.

Отметим еще, что в задаче об асимптотике собственных значений оператора с h-символом Вейля $a(x, \xi)$ (т. е. оператора с символом Вейля $a(x, h\xi)$) асимптотика функции распределения $N_h(\lambda)$ при $h\to+0$ и при фиксированном λ должна иметь вид (в соответствии с формулами § 1 и изложенной выше идеологией):

$$N_h(\lambda)\sim(2\pi h)^{-n}\operatorname{mes}\{(x, \xi) : a(x, \xi)<\lambda\}. \tag{8.36}$$

Эта формула также может быть обоснована (при надлежащих предположениях) методом приближенного спектрального проектора (см. [46, добавление 2]) или другими методами.

8.4. Тауберовы методы. Тауберовы методы основаны на изучении поведения некоторых функций от собственных значений, после чего применение так называемых тауберовых теорем позволяет сделать вывод об асимптотическом поведении самих собственных значений. Приведем пример такой ситуации.

Рассмотрим *ζ-функцию* $\zeta_A(z)$ положительного самосопряженного оператора A с такими собственными значениями $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots$, что $\lambda_j\geqslant cj^\varepsilon$ при каких-нибудь $c>0$ и $\varepsilon>0$ (или, что то же самое, $N(\lambda)\leqslant c_1\lambda^\alpha$ при каких-нибудь $c_1>0$, $\alpha>0$):

$$\zeta_A(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^z=\int_0^\infty \lambda^z dN(\lambda). \tag{8.37}$$

Интеграл здесь заведомо сходится для z, лежащих в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z<-\mu_0$, и определяет голоморфную функцию от z в этой полуплоскости.

Предположим, что функция $N(\lambda)$ допускает следующее асимптотическое разложение при $\lambda\to+\infty$:

$$N(\lambda)=\sum_{k=0}^{r-1} c_k\lambda^{\alpha_k}+O(\lambda^{\alpha_r}), \tag{8.38}$$

где $\alpha_0>\alpha_1>\ldots>\alpha_{r-1}>\alpha_r$. Подставляя это разложение в интеграл и заменяя интеграл на такой же интеграл в пределах от 1 до $+\infty$, мы получим, что

$$\zeta_A(z)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{c_k\alpha_k}{z-\alpha_k}+\rho_r(z), \tag{8.39}$$

где функция $\rho_r(z)$ голоморфна при $\operatorname{Re} z>\alpha_r$. Таким образом, если $N(\lambda)$ имеет разложение (8.38), то функция ζ_A имеет мероморфное продолжение в полуплоскость $\{z:\operatorname{Re} z>\alpha_r\}$ с простыми полюсами в точках α_k, причем вычеты этих полюсов равны $c_k\alpha_k$, так что по полюсам и вычетам функции ζ_A можно восстановить все члены асимптотического разложения (8.38), соответствующие показателям $\alpha_k>0$.

Гипотетическое разложение (8.38) в реальной аналитической ситуации почти никогда не встречается. Для эллиптического оператора на замкнутом многообразии X размерности $n\geqslant2$, вообще говоря, можно написать только один член такого разложения, например, для оператора Лапласа — Бельтрами Δ на единичной сфере $S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$ собственные значения $\mu_k=-k(k+n-1)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, имеют столь высокую кратность $N_k=\binom{n+k}{k}-\binom{n+k-2}{n}$, что второй член асимптотики (8.38) для функции распределения $N(\lambda)$, соответствующей оператору $A=-\Delta$, уже не может существовать. Тем удивительнее, что мероморфность ζ-функции все же имеет место в самом общем случае.

Теорема 8.3 (Сили [98]). *Пусть A — классический самосопряженный псевдодифференциальный оператор порядка $m>0$ на замкнутом n-мерном многообразии X. Тогда его ζ-функция $\zeta_A=\zeta_A(z)$ допускает мероморфное продолжение во всю комплексную z-плоскость с возможными простыми полюсами в точках арифметической прогрессии $z_j=(j-n)/m$, $j=0, 1, 2, \ldots$. В точке $z=0$ полюса на самом деле нет, а если A — дифференциальный оператор, то полюсов нет и во всех точках $z=0, 1, 2, \ldots$.*

Вычеты всех полюсов и значение в точке 0 (значения в точках 0, 1, 2, ... в случае дифференциального оператора A) могут быть записаны в виде некоторых интегралов по S^*X (расслоению кокасательных сфер) от выражений, рекуррентным образом выписываемых через однородные компоненты символа. Например, вычет r_0 первого полюса $z_0=-n/m$ выражается через главный символ a_m формулой, записываемой в любых локальных координатах (с последующим применением разбиения единицы) в виде

$$r_0=-(2\pi)^{-n}m^{-1}\int_X dx\int_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x,\xi)\,dS_\xi, \tag{8.40}$$

где dS_ξ — стандартная мера на единичной сфере $\{\xi:|\xi|=1\}$.

Возвращаясь к связи (8.38) и (8.39), мы получим, что коэффициент c_0 в главном члене асимптотики (8.38) имеет вид $c_0=r_0/\alpha_0=r_0/z_0=-r_0m/n$. Легко проверить, что это согласуется с формулой Вейля примера 8.2.

Доказательство теоремы 8.3 основано на описании структуры комплексных степеней оператора A, данном на языке псевдодифференциальных операторов в § 1. Вычисляя $\zeta_A(z)=\operatorname{Tr} A^z$ с помощью разбиения единицы, использования локальных координат на X, перехода к однородным компонентам аппроксимации символа оператора A^z и затем к полярным координатам в множестве $\{(x,\xi):|\xi|\geqslant1\}$, мы увидим, что дело сводится к мероморфному продолжению интегралов

$$\int_1^{+\infty} r^{mz-j+n-1}dr=-\frac{m^{-1}}{z-z_j}.$$

Теорема 8.3 верна и для несамосопряженных операторов A в случае, если имеется луч в $\mathbf{C}$, проходящий через 0 и свободный от значений главного символа a_m (в этом случае надо считать $\zeta_A(z)=\operatorname{Tr} A^z$ или определять $\zeta_A(z)$ с помощью первого из равенств (8.37)). Теорема типа теоремы 8.3 верна и в случае оператора на компактном многообразии с краем, если под A понимать самосопряженный оператор, определяемый дифференциальным эллиптическим формально самосопряженным оператором L с однородными эллиптическими краевыми условиями, удовлетворяющими (вместе с $L-\lambda I$) условию эллиптичности с параметром, когда параметр λ меняется на $(-\infty, 0]$ (Сили [99], [100]). Случай псевдодифференциальных краевых задач значительно сложнее ([68], [95]).

Вместо ζ-функции можно рассмотреть ядра $K_z=K_z(x, y)$ комплексных степеней A^z оператора A, как функции от z при фиксированных $x, y\in X$. Если $\operatorname{Re} z<-n/m$, то такое ядро является непрерывной функцией по x, y на $X\times X$, голоморфной по z. При этом для значения на диагонали $K_z(x, x)$ верно утверждение, аналогичное теореме 8.3, т. е. функция $z\mapsto K_z(x, x)$ мероморфно продолжается во всю плоскость $\mathbf{C}$ с возможными полюсами в точках той же арифметической прогрессии $z_j=(j-n)/m$, $j=0, 1, 2, \ldots$, исключая точку $z=0$, где полюса нет (и все целые $z\geqslant 0$ в случае дифференциального оператора A). Вычеты полюсов и значение при $z=0$ могут быть заданы формулами того же типа, как описано выше. Например, вычет первого полюса в точке $z_0=-n/m$ получается, если в формуле (8.40) опустить интегрирование по x. При $x\neq y$ функция $z\mapsto K_z(x, y)$ продолжается до целой функции от z, обращающейся в 0 при $z=0$ (и при всех целых $z\geqslant 0$ в случае дифференциального оператора).

Введем теперь *спектральную функцию оператора* A — ядро $e(\lambda, x, y)$ спектрального проектора E_λ. Она имеет смысл для любого самосопряженного оператора A в $L_2(X)$, но если оператор A имеет дискретный спектр и полуограничен снизу, то она выражается через его собственные значения λ_j и нормированные собственные функции по формуле

$$e(\lambda, x, y)=\sum_{\lambda_j<\lambda}\psi_j(x)\overline{\psi_j(y)}.$$

В частности, в условиях теоремы 8.3 отсюда следует, что $e(\lambda, \cdot, \cdot)\in C^\infty(X\times X)$ при каждом фиксированном λ. Функция $\lambda\mapsto e(\lambda, x, x)$ монотонна по λ при каждом фиксированном x. Более того, ядро $e(\lambda', \lambda'', x, y)=e(\lambda', x, y)-e(\lambda'', x, y)$ при $\lambda'>\lambda''$ неотрицательно определено, т. е. для любого набора точек $x_1, \ldots, x_N\in X$ матрица $\| e(\lambda', \lambda'', x_i, x_j)\|_{i,j=1}^N$ неотрицательна. Используя этот факт с $N=2$, легко доказать, что функция $\lambda\mapsto e(\lambda, x, y)$ имеет ограниченную вариацию на каждом ограниченном интервале λ-оси.

Заметим теперь, что ввиду формулы

$$A^z=\int\lambda^z dE_\lambda,$$

между ядрами $K_z(x, y)$ и $e(\lambda, x, y)$ имеется следующая связь:

$$K_z(x, y)=\int\lambda^z de(\lambda, x, y), \tag{8.41}$$

где дифференциал d берется по λ. Здесь интеграл можно понимать в слабом смысле, однако при $\operatorname{Re} z<-n/m$ этот интеграл сходится как интеграл Стилтьеса при любых фиксированных x, y. Формула (8.41) может быть использована для получения информации о спектральной функции на основе изучения ядра K_z по указанной схеме с учетом уточнений, даваемых ниже.

Теорему 8.3 можно применить для изучения и вычисления индекса благодаря *формуле Атьи—Ботта*

$$\operatorname{ind} A=\zeta_{I+A^*A}(z)-\zeta_{I+AA^*}(z),$$

вытекающей из того, что все ненулевые собственные значения операторов A^*A и AA^* совпадают (и имеют одинаковую кратность). Удобнее всего взять в правой части $z=0$, поскольку значение правой части при $z=0$ выражается через символ оператора A. Таким образом, получается выражение индекса через интегралы от выражений, содержащих символ и его производные. Одно из доказательств знаменитой теоремы Атьи—Зингера об индексе основано на упрощении полученной таким образом сложной формулы (содержащей, в частности, младшие члены символа) с помощью теории инвариантов (см. Атья, Ботт, Патоди [48]).

Перейдем, наконец, к вопросу о том, какую информацию об асимптотике $N(\lambda)$ можно получить из теоремы 8.3. Здесь основную роль играет следующая теорема (см. например, [46]):

Теорема 8.4 (*тауберова теорема Икехара*). Пусть функция $\zeta_A(z)$ выражается через неубывающую функцию $N(\lambda)$, равную 0 при $\lambda<0$, по формуле (8.37), интеграл в (8.37) сходится при $\operatorname{Re} z<-k_0$, где $k_0>0$, причем функция $\zeta_A(z)+\frac{r_0}{z+k_0}$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z\leqslant -k_0$. Тогда при $\lambda\to+\infty$

$$N(\lambda)=r_0k_0^{-1}\lambda^{k_0}(1+o(1)).$$

Таким образом, из теоремы 8.3 получается вейлевская асимптотика

$$N(\lambda)=c_0\lambda^{n/m}(1+o(1)) \tag{8.42}$$

в случае самосопряженного полуограниченного снизу эллиптического оператора A порядка m на n-мерном замкнутом многообразии X (условия $A>0$ можно добиться, заменив A на $A+cI$, где $c>0$ достаточно велико). Вся информация о ζ-функции, кроме информации о первом полюсе, пропадает и ее не удается использовать для улучшения асимптотики (8.42). Точно также в несамосопряженном случае, если главный символ комплекснозначен, не удается использовать информацию о ζ-функции (и другие известные методы) для получения хотя бы главного члена асимптотики собственных значений.

Используя мероморфное продолжение функции $z \to K_z(x, x)$, легко вывести из теоремы 8.4 асимптотику спектральной функции $e(\lambda, x, x)$. А именно, в условиях теоремы 8.3 получаем при $\lambda \to +\infty$

$$e(\lambda, x, x) = c_0(x)\lambda^{n/m}(1+o(1)), \tag{8.43}$$

где $c_0(x)$ в локальных координатах записывается в виде

$$c_0(x) = (2\pi)^{-n}\operatorname{mes}\{\xi : a_m(x, \xi) < 1\}. \tag{8.44}$$

Асимптотика (8.43) равномерна по x и ее интегрированием можно получить асимптотику (8.42) для $N(\lambda)$. Никакой асимптотики и даже оценки $e(\lambda, x, y)$ голоморфность функции $z \mapsto K_z(x, y)$ при $x \neq y$ не дает, ввиду отсутствия монотонности функции $\lambda \mapsto e(\lambda, x, y)$ по λ.

Вместо ζ-функции $\zeta_A(z)$ можно прямо использовать след резольвенты $\operatorname{Tr}(A-zI)^{-1}$ (этот след имеет смысл при $m>n$, в противном случае надо заменить A на A^k при достаточно большом k) и извлекать информацию о поведении $N(\lambda)$ из информации о поведении ее *преобразования Стилтьеса*

$$\operatorname{Tr}(A-zI)^{-1} = \int (\lambda - z)^{-1} dN(\lambda).$$

Другой вариант тауберовой техники — использование функции

$$\theta_A(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} = \operatorname{Tr} e^{-tA} = \int e^{-\lambda t} dN(\lambda).$$

При этом оператор e^{-tA} обычно изучают как разрешающий оператор задачи Коши для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

Ядро $K = K(t, x, y)$ оператора e^{-tA}, представляющее собой фундаментальное решение задачи Коши, обычно строится методом Леви, описанным в [21, § 5 гл. 2]. В предположениях теоремы 8.3 функция $\theta_A(t)$ допускает при $t \to +0$ асимптотическое разложение, из которого также можно извлечь асимптотику (8.42). Именно этот метод был исторически первым тауберовым методом, с помощью которого Карлеман [57] впервые установил асимптотическую формулу (8.43) для спектральной функции оператора Лапласа в области. Подробности о методе параболического уравнения и о резольвентном методе можно найти в статье Г. В. Розенблюма, М. З. Соломяка и М. А. Шубина о спектральной теории дифференциальных операторов в одном из следующих томов этой серии.

8.5. Метод гиперболического уравнения. Метод гиперболического уравнения, предложенный Б. М. Левитаном [25], является тауберовым методом, основанным на использовании преобразования Фурье и его аналогов. Он позволяет получить наиболее точную информацию об асимптотическом распределении спектра, хотя и в узком классе задач. Опишем этот метод в его простейшем варианте.

Пусть A — классический эллиптический самосопряженный псевдодифференциальный оператор порядка $m>0$ на замкнутом n-мерном многообразии X с главным символом $a_m = a_m(x, \xi) \geqslant 0$. Заменяя, в случае необходимости A на $A+CI$, где $C>0$ достаточно велико, можно считать, что $A>0$. Перейдем от A к оператору $B = A^{1/m}$, который также является классическим псевдодифференциальным оператором порядка 1 с главным символом $b_1 = a_m^{1/m}$. Функции распределения спектра $N_A(\lambda)$ и $N_B(\lambda)$ операторов A и B связаны очевидным соотношением $N_A(\lambda^m) = N_B(\lambda)$, так что достаточно изучить асимптотику функции $N_B(\lambda)$. Рассмотрим преобразование Фурье соответствующей меры

$$\sigma(t) = \int e^{-i\lambda t} dN_B(\lambda) = \sum_j e^{-i\mu_j t}, \tag{8.45}$$

где μ_j — собственные значения оператора B, сумма и интеграл понимаются в обобщенном смысле. Введем теперь оператор $U(t) = e^{-iBt}$, являющийся разрешающим оператором задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -iBu, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{8.46}$$

где $u = u(t, x)$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in X$; $u_0 = u_0(x)$, $x \in X$. Эта задача является простейшей гиперболической псевдодифференциальной задачей Коши и ее разрешающий оператор $U(t)$ является гладко зависящим от t интегральным оператором Фурье (см. § 4). Структура этого оператора дает возможность описать особенности его ядра $U(t, x, y)$. В частности, легко доказать, что если

$$\mathrm{WF}'(U) = \{((x, \xi), y(\eta)) \mid (x, y, \xi, -\eta) \in \mathrm{WF}(U)\},$$

то

$$\mathrm{WF}'(U(t, \cdot, \cdot)) \subset \{((x, \xi), \Phi^t(x, \xi)) \mid (x, \xi) \in T^*X \setminus 0\}, \tag{8.47}$$

где Φ^t — гамильтонов поток, определяемый на T^*X гамильтонианом $b_1 = a_m^{1/m}$. Отсюда, в частности, следует, что если $u = u(t, x)$ — решение задачи Коши (8.46), то

$$\mathrm{WF}(u(t, \cdot))\Phi^t(\mathrm{WF}(u_0)), \tag{8.48}$$

что дает существенную информацию о распространении особенностей. Заметим, что формально

$$\sigma(t) = \operatorname{Tr} U(t) = \int_X U(t, x, x)\, dx \tag{8.49}$$

(эта формула на самом деле приобретает точный смысл после умножения на произвольную функцию $\varphi = \varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ и интегрирования по t и в таком регуляризованном виде она легко доказывается). Поскольку $U(t, x, y)$ является гладкой функцией от t со значениями в $\mathcal{D}'(X \times X)$, функция σ будет гладкой при таких t_0, что для близких значений t ограничение $U(t, x, x)$ на диагональ $\Delta=\{(x, x)\}\subset X\times X$ непрерывно зависит от обобщенной функции $U(t, \cdot, \cdot)$ (при этом это ограничение $U(t, x, x)$ надо понимать как элемент $\mathscr{D}'(X)$, зависящий от t). Но это заведомо так, если выполнено микролокальное условие существования ограничения на диагональ (см. § 3):

$$\mathrm{WF}(U(t, \cdot, \cdot))\cap N^*\Delta=\varnothing, \tag{8.50}$$

где $N^*\Delta$ — конормальное расслоение к диагонали, т. е.

$$N^*\Delta=\{(x, x, \xi, -\xi)\,|\,x\in X\}\subset T^*(X\times X).$$

С учетом (8.47) невыполнение условия (8.50) означает, что существует такая точка $(x, \xi)\subset T^*X\setminus 0$, что $\Phi^{t_0}(x, \xi)=(x, \xi)$, т. е. t_0 — период гамильтонова потока Φ^t (в этом случае (x, ξ) называется *периодической точкой потока* Φ^t). Таким образом,

$$\operatorname{sing\,supp}\sigma\subset\{t : \exists\,(x, \xi)\in T^*X\setminus 0,\ \Phi^t(x, \xi)=(x, \xi)\}. \tag{8.51}$$

Это соотношение, впервые обнаружено независимо Шэзареном и Колен-де-Вердье (см. [104]). Оно называется *соотношением Пуассона*, поскольку в простейшем случае оператора $A=-d^2/dx^2$ на окружности $S^1=\mathbf{R}/T\mathbf{Z}$ (здесь $T>0$); оно вытекает из формулы суммирования Пуассона

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}e^{-2\pi i\xi T/n}=T\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta(\xi-Tn). \tag{8.52}$$

Из соотношения Пуассона (8.51) ясно, что для изучения асимптотики $N(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ наиболее важно знать поведение $\sigma(t)$ вблизи периодов гамильтонова потока. Наиболее важной является здесь точка $t=0$. Особенность σ при $t\to 0$ называется *большой сингулярностью*. Уже из ее изучения можно получить существенную информацию об асимптотике функции $N_B(\lambda)$. Отметим, что эта особенность является изолированной и в этом важная черта метода гиперболического уравнения. Выберем функцию $\rho\in S(\mathbf{R})$ такую, что $\tilde\rho\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\tilde\rho(0)=1$, $\rho(\lambda)\geqslant 0$, $\rho(0)>0$. Тогда функция $\tilde\rho\sigma$ является преобразованием Фурье функции

$$(\rho*dN_B)(\lambda)=\int\rho(\lambda-\mu)\,dN_B(\mu).$$

Анализируя особенность функции $\tilde\rho\sigma$ (если $\operatorname{supp}\tilde\rho$ достаточно мал, то можно считать, что функция $\tilde\rho\sigma$ имеет особенность только в точке 0), легко получить, что имеется полное асимптотическое разложение

$$(\rho*dN_B)(\lambda)=c_0\lambda^{n-1}+c_1\lambda^{n-2}+c_2\lambda^{n-3}+\ \ldots. \tag{8.53}$$

Тауберова теорема Б. М. Левитана дает возможность вывести отсюда асимптотику

$$N_B(\lambda)=c_0n^{-1}\lambda^n+O(\lambda^{n-1}), \tag{8.54}$$

равносильную асимптотике

$$N(\lambda)=c_0n^{-1}\lambda^{n/m}+O(\lambda^{(n-1)/m}). \tag{8.55}$$

Эта асимптотика в указанном контексте получена Хёрмандером [74], впервые применившим интегральные операторы Фурье в спектральной теории. Оценка остатка в (8.55) в общем случае неулучшаема, как показывает рассмотрение оператора Лапласа — Бельтрами на стандартной единичной сфере. При дополнительных предположениях геометрического характера можно получить и второй член асимптотики. Это было впервые сделано Дюйстермаатом и Гийемином [62]. Первый шаг их метода состоит в замене $\tilde\rho$ на $\tilde\rho_T$, где $\tilde\rho_T(t)=\tilde\rho(t/T)$ и $T\to+\infty$. Теперь уже при установлении асимптотики для $\rho_T*dN_B(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ надо знать особенности функции $\tilde\rho_T\sigma$, для чего нужна информация об особенностях σ на отрезке длины порядка T. Нужная информация получается, если множество периодических точек потока Φ^t имеет меру 0. Более того, вместо периодических точек достаточно рассматривать *абсолютно периодические точки*, т. е. такие точки $(x, \xi)\in T^*X\setminus 0$, что график отображения Φ^t в точке $((x, \xi), \Phi^t(x, \xi))$ имеет бесконечный порядок касания с диагональю. При этом предположении для любого $T>0$ оказывается справедливой формула

$$\rho_T*dN_B(\lambda)=c_0\lambda^{n-1}+c_1\lambda^{n-2}+o(\lambda^{n-2}), \tag{8.56}$$

из которой с помощью некоторого уточнения тауберовой теоремы Левитана можно получить, что

$$N_B(\lambda)=c_0n^{-1}\lambda^n+c_1(n-1)^{-1}\lambda^{n-1}+o(\lambda^{n-1}) \tag{8.57}$$

или

$$N(\lambda)=c_0n^{-1}\lambda^{n/m}+c_1(n-1)^{-1}\lambda^{(n-1)/m}+o(\lambda^{(n-1)/m}). \tag{8.58}$$

Здесь коэффициент c_1 выражается через субглавный символ оператора A и равен 0 в случае, когда оператор A является дифференциальным.

Асимптотические формулы (8.55) и (8.58) были распространены на случай многообразий с краем X В. И. Иврием и Д. Г. Васильевым (их результаты уже формулировались выше в п. 8.2). Здесь также применяются некоторые аналоги только что описанного метода гиперболического уравнения, однако, с очень существенными модификациями.

Оценка остатка $o(\lambda^{(n-1)/m})$ в (8.58) в некоторых случаях может быть улучшена. А именно, для оператора Лапласа—Бельтрами на замкнутых многообразиях отрицательной кривизны Берар [51] доказал возможность заменить $o(\lambda^{(n-1)/2})$ на $O(\lambda^{(n-1)/2}/\log\lambda)$. А. В. Воловой [15] распространил этот результат (возможность заменить $o(\lambda^{(n-1)/m})$ на $O(\lambda^{(n-1)/m}/\log\lambda)$) на некоторый класс операторов произвольного порядка $m>0$ (на замкнутом многообразии), а также при некоторых предположениях доказал асимптотику с оценкой остатка $O(\lambda^{(n-1)/m-\varepsilon})$, где $\varepsilon>0$. Эти результаты требуют более точного учета зависимости от T в асимптотиках типа (8.56); это делается на основе изучения поведения $U(t)$ при $|t|\to+\infty$. Для спектральной функции $e(\lambda, x, y)$ операторов 2-го порядка в $\mathbf{R}^n$ с коэффициентами, постоянными в окрестности бесконечности, а также *оператора Хилла* (оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом на $\mathbf{R}^1$) удается получить даже полное асимптотическое разложение по степеням λ (см. [13], [39], [45]).

ЛИТЕРАТУРА

Теория псевдодифференциальных операторов в ее современной форме возникла в середине 60-х годов. Ее возникновению предшествовало длительное развитие и совершенствование теории сингулярных интегральных и интегродифференциальных операторов (см. [1], [32], [54], [56], [102]), но лишь формулировка основных элементов на языке преобразования Фурье в работе Кона и Ниренберга [80] позволила дать теории окончательное оформление, а в дальнейшем широту и размах, позволившие ей охватить практически все области линейной теории уравнений с частными производными. В дальнейшем в ходе естественного развития теории псевдодифференциальных операторов, соединив ее идеи с концепциями, возникшими в теории асимптотических методов ([26]), появилась теория интегральных операторов Фурье, прямым предшественником которой является теория канонического оператора Маслова (см. [12], [26], [30], [33], [34], [85]). В сочетании с широким использованием введенного Сато и Хёрмандером ([75], [97]) понятием волнового фронта, эти идеи образовали одно из основных направлений современного развития теории линейных уравнений в частных производных, называемое *микролокальным анализом.*

Различные аспекты микролокального анализа и его приложений обсуждаются в [2], [3], [18], [19], [20], [33], [34], [35], [37], [40], [46], [47], [48], [50], [63], [66], [68], [69], [73], [76], [83], [87], [88], [89], [94], [98], [103], [104]. В [5] и в обзоре В. И. Арнольда и А. Б. Гивенталя в т. 4 этой серии можно найти изложение симплектической геометрии, а в [6] и [61] — обсуждение метода стационарной фазы с вырожденными критическими точками.

Возникновение теории псевдодифференциальных операторов было стимулировано потребностями теории индекса (см. [43], [91], [95]).

В [7], [11], [12], [26], [27], [28], [29], [30], [33], [34], [41], [42], [78], [85] обсуждаются асимптотические методы и различные их применения.

В [9], [10] можно найти обзор классических вопросов, связанных с асимптотикой спектра (по поводу дальнейшего прогресса в этой области см. [78] и готовящийся обзор Г. В. Розенблюма, М. З. Соломяка и М. А. Шубина в этой серии). По поводу геометрии спектра см. книгу Берара [52].

Отметим еще, что комментарии к работам И. Г. Петровского в [36] содержат обзор весьма разнообразных вопросов современной теории линейных уравнений с частными производными, которая столь многим обязана И. Г. Петровскому.

1. *Агранович М. С.*, Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы. Успехи мат. наук, 1965, *20*, № 5, 3—120
2. —, Граничные задачи для систем псевдодифференциальных операторов 1-го порядка. Успехи мат. наук, 1969, *24*, № 1, 61—125
3. —, Граничные задачи для систем с параметром. Мат. сб., 1971, *84*, № 1, 27—65
4. —, *Вишик М. И.*, Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи мат. наук, 1964, *19*, № 3, 53—161

5. *Арнольд В. И.*, Математические методы классической механики. 2-е изд. М.: Наука, 1979, 431 с.
6. —, *Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.*, Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984, 335 с.
7. *Бабич В. М., Булдырев В. С.*, Асимптотические методы в задаче дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972, 456 с.
8. *Березин Ф. А., Шубин М. А.*, Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во МГУ, 1983, 392 с.
9. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.*, Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории. В кн.: Десятая мат. школа, Киев, 1974, 5—189
10. —, —, Асимптотика спектра дифференциальных уравнений. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ, 1971, *14*, 5—58
11. *Вайнберг Б. Р.*, О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при $t\to\infty$ решений нестационарных задач. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 2, 3—55
12. —, Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982, 294 с.
13. —, Полное асимптотическое разложение спектральной функции эллиптических операторов в $\mathbf{R}^n$. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1983, № 4, 29—36
14. *Васильев Д. Г.*, Асимптотика спектра краевой задачи. Тр. Моск. мат. об-ва, 1986, *49*, 167—237
15. *Воловой А. В.*, Уточнение оценки остатка в двучленной асимптотике функции распределения собственных значений эллиптического оператора на компактном многообразии. Успехи мат. наук, 1986, *41*, № 4, 185
16. *Глазман И. М.*, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963, 340 с.
17. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.*, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965, 448 с.
18. *Егоров Ю. В.*, О субэллиптических операторах. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 3, 57—104
19. —, Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984, 360 с.
20. —, Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1985, 164 с.
21. —, *Шубин М. А.*, Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления, 1987, *30* (в печати)
22. *Иврий В. Я.*, О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа — Бельтрами на многообразиях с краем. Функц. анализ и его прил., 1980, *14*, № 2, 25—34
23. —, *Федорова С. И.*, Дилатации и асимптотики собственных значений спектральных задач с сингулярностями. Функц. анализ и его прил., 1986, *20*, № 4, 29—34
24. *Левендорский С. З.*, Метод приближенного спектрального проектора. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1985, *49*, № 6, 1177—1228
25. *Левитан Б. М.*, Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, *16*, № 4, 325—352
26. *Маслов В. П.*, Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965, 549 с.
27. —, Операторные методы. М.: Наука, 1973, 543 с.
28. —, Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977, 384 с.
29. —, Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987, 408 с.
30. —, *Федорюк М. В.*, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976, 296 с.

31. *Мизохата С.*, Теория уравнений с частными производными. Пер. с яп. М.: Мир, 1977, 504 с.
32. *Михлин С. Г.*, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962, 254 с.
33. *Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.*, Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.: Наука, 1978, 352 с.
34. *Назайкинский В. Е., Ошмян В. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.*, Интегральные операторы Фурье и канонический оператор. Успехи мат. наук, 1981, *36*, № 2, 81—140
35. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.*, Уравнения второго порядка с неотрицательной квадратичной формой. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ, 1969, 252 с.
36. *Петровский И. Г.*, Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986, 500 с.
37. *Пламеневский Б. А.*, Алгебры псевдодифференциальных операторов. М.: Наука, 1986, 256 с.
38. *Повзнер А. Я., Сухаревский И. В.*, Разрывы функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения. Мат. сб., 1960, *51*, № 1, 3—26
39. *Попов Г. С., Шубин М. А.*, Асимптотическое разложение спектральной функции для эллиптических операторов второго порядка в $\mathbf{R}^n$. Функц. анализ и его прил., 1983, *17*, № 3, 37—45
40. *Федорюк М. В.*, Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы. Успехи мат. наук, 1971, *26*, № 1, 67—112
41. —, Метод перевала. М.: Наука, 1977, 368 с.
42. —, Асимптотические методы в анализе. Итоги науки и техн. ВИНИТИ Совр. пробл. мат. Фунд. направления, 1986, *13*, 93—210
43. *Федосов Б. В.*, Аналитические формулы индекса эллиптических операторов. Тр. Моск. мат. об-ва, 1974, *30*, 159—242
44. —, Аналитическая формула для индекса эллиптической граничной задачи. I, II, III. Мат. сб., 1974, *93*, № 1, 62—89; *95*, № 4, 525—550; 1976, *101*, № 3, 380—401
45. *Шенк Д., Шубин М. А.*, Асимптотическое разложение плотности состояний и спектральной функции оператора Хилла. Мат. сб., 1985, *128*, № 4, 474—491
46. Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978, 279 с.
47. *Эскин Г. И.*, Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973, 232 с.
48. *Atiyah M., Bott R., Patodi V. K.*, On the heat equation and the index theorem. Invent. Math., 1973, *19*, 279—330; Errata ibid. 1975, *28*, 277—280
49. *Balaban T.*, On the mixed problem for a hyperbolic equation. Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astr. Phys., 1969, *17*, № 4, 231—235
50. *Beals R., Fefferman C.*, On local solvability of linear partial differential equations. Ann. Math., 1973, *97*, 482—498
51. *Berard P. H.*, On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points. Math. Z., 1977, *155*, 249—276
52. —, Spectral geometry: direct and inverse problems. Lect. Notes Math., 1986, *1207*, 272 pp.
53. *Bers L., John F., Schechter M.*, Partial differential equations. New York: Interscience, 1964, 342 pp. (Пер. на рус. яз.: *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.*, Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966, 351 с.)
54. *Calderon A.*, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. Amer. J. Math., 1958, *80*, 16—36
55. —, Boundary value problems for elliptic equations. Outlines of the joint Soviet-American symposium on partial differential equations. Новосибирск, 1963, 303—304
56. —, *Zygmund A.*, On the existence of certain singular integrals. Acta Math., 1952, *88*, № 1—2, 85—139

57. *Carleman T.*, Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. C. R. 8-eme Congr. des Math. Scand., Stockholm, 1934, Lund 1935, 34—44
58. *Cordes H. O.*, Elliptic pseudo-differential operators. An abstract theory. Lect. Notes Math., 1979, 756, 331 pp.
59. *Courant R.*, Partial differential equations. New York-London: 1962, 830 pp. (Пер. на рус. яз.: *Курант Р.*, Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964, 830 с.)
60. —, *Hilbert D.*, Methoden der mathematischen Physik. 1, 2. Berlin: Springer, 1931; 1937 (Пер. на рус. яз.: *Курант Р., Гильберт Д.*, Методы математической физики. 1, 2. М.: ГТТИ, 1933, 525 с.; М., Гостехиздат, 1945, 620 с.)
61. *Duistermaat J. J.*, Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities. Commun. Pure Appl. and Math., 1974, *27*, № 2, 207—281
62. —, *Guillemin V.*, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Invent. Math., 1975, *29*, № 1, 39—79
63. —, *Hörmander L.*, Fourier integral operators II. Acta Math., 1972, *128*, № 3—4, 183—269
64. *Eskin G. I.*, Initial-boundary value problem for hyperbolic equations. Proc. of the Intern. Congress of Math., Warszawa, 1983, 1165—1173
65. *Friedlander F. G.*, The wave front set of a single initial-boundary value problem with glancing rays. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1976, *79*, 145—149
66. *Friedrichs K. O.*, Pseudo-differential operators, an introduction. New York; New York Univ. Press, 1968, 117 pp.
67. —, *Lax P. D.*, Boundary value problems for first order operators. Commun. Pure and Appl. Math., 1965, *18*, 365—388
68. *Grubb G.*, Functional calculus of pseudo-differential boundary problems. Boston: Birkhäuser, 1986, 511 pp.
69. *Guillemin V., Sternberg S.*, Geometric asymptotics. Providence, R. I., AMS, 1977 (Пер. на рус. яз.: *Гийемин В., Стернберг С.*, Геометрические асимптотики. М., Мир, 1981, 500 с.)
70. *Gurejev T. E., Safarov Yu. G.*, Precise asymptotics of the spectrum for the Laplace operator on manifolds with periodic geodesics. Preprint LOMI E-1-86, 1986, 33 pp.
71. *Hersch R.*, Mixed problems in several variables. J. Math. Mech., 1963, *12*, 317—334
72. *Hörmander L.*, Linear partial differential operators. Berlin: Springer, 1963, 287 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965, 379 с.)
73. —, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. Ann. Math., 1966, *83*, 129—209 (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи. В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967, 166—296)
74. —, The spectral function of an elliptic operator. Acta Math., 1968, *121*, 193—218 (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Спектральная функция эллиптического оператора, сб. Математика, 1969, *13*, № 6, 114—137)
75. —, Fourier integral operators, I. Acta Math., 1971, *127*, № 1—2, 79—183 (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Интегральные операторы Фурье. I. Математика, 1972, *16*, № 1, 17—61; № 2, 67—136)
76. —, The analysis of linear partial differential operators, I, II, III, IV. Berlin: Springer, 1983, 391 pp.; 391 pp., 525 pp.; 1985, 352 pp. (Пер. на рус. яз..: *Хёрмандер Л.*, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, I, II. М.: Мир, 1986, 462 с.; 455 с.)
77. *Ikava M.*, A mixed problem for hyperbolic equation of second order with a first order derivative boundary condition. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1969, *5*, № 2, 119—147
78. *Ivrii V.*, Precise spectral asymptotics for elliptic operators. Lect. Notes Math., 1984, *1100*, 237 pp.

79. *Kajitani K.*, A necessary condition for the well-posedness of hyperbolic mixed problem with variable coefficients. J. Math. Kyoto Univ., 1974, *14*, 231—242
80. *Kohn J. J.*, *Nirenberg L.*, An algebra of pseudo-differential operators. Commun. Pure and Appl. Math., 1965, *18*, № 1-2, 269—305 (Пер. на рус. яз.: *Кон Дж. Дж.*, *Ниренберг Л.*, Алгебра псевдодифференциальных операторов. В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967, 9—62)
81. *Kreiss H.-O.*, Über Sachgemässe Cauchyprobleme für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, Kungliga Tekniska Högakolans Handlingar, Stockholm, 1958, № 127, 1—31 (Пер. на рус. яз.: *Крейсс Г.*, О корректности задачи Коши для систем линейных уравнений с частными производными. Математика, 1963, *7*, № 2, 39—55)
82. —, Initial boundary value problem for hyperbolic systems, Commun. Pure and Appl. Math., 1970, *23*, 277—298 (Пер. на рус. яз.: *Крейсс Г.*, Смешанные краевые задачи для гиперболических систем. Математика, 1970, *14*, № 4, 98—117)
83. *Kumano-go H.*, Pseudo-differential operators. Cambridge Mass.: MIT Press, 1981, 455 pp.
84. *Lax P. D.*, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. Duke Math. J., 1957, *24*, № 4, 627—646
85. *Leray J.*, Analyse Lagrangienne et mécanique quantique; une structure mathématique apparentée aux developpements asymptotiques et á l'indice de Maslov. Strasbourg, I. R. M. A., 1978 (Пер. на рус. яз.: *Лере Ж.*, Лагранжев анализ и квантовая механика. Математическая структура, связанная с асимптотическими разложениями и индексом Маслова. М.: Мир, 1981, 260 с.)
86. *Melrose R. B.*, Equivalence of glancing hypesurfaces. Invent. Math., 1976, *37*, 165—191
87. —, Airy operators. Commun. Part. Differ. Equat., 1978, *3*, № 1, 1—76
88. *Nirenberg L.*, Pseudo-differential operators. Proc. Symposium Pure Math., AMS, 1970, *16*, 149—167
89. —, Lectures on linear partial differential equations. American Math. Soc., Regional Conference Series, 1973, № 17, 1—58 (Пер. на рус. яз.: *Ниренберг Л.*, Лекции о линейных дифференциальных уравнениях с частными производными. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 4, 147—204)
90. *Oshima T.*, On analytic equivalence of glancing hypersurfaces. Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo, 1978, *28*, 51—57
91. *Palais R. S.*, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem. Princeton: Princeton Univ. Press, 1965 (Пер. на рус. яз.: *Пале Р.*, Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. М.: Мир, 1970, 359 с.)
92. *Petkov V. M.*, *Stojanov L. N.*, Propriétés génériques de l'application de Poincaré et des géodésiques périodiques généralisées. Seminaire equations aux derivees partielles, 1985—1986, Ecole Polytechniques, Centre de Mathematiques, Paris, N XI, 12 pp.
93. *Rauch J.*, L_2 is a continuable initial conditions for Kreiss' mixed problems. Commun. Pure and Appl. Math., 1972, *25*, № 3, 265—285
94. *Reed M.*, *Simon B.*, Methods of modern mathematical physics, 1, 2, 3, 4. New York, Acad. Press, 1972—78 (Пер. на рус. яз.: *Рид М.*, *Саймон Б.*, Методы современной математической физики, 1, 2, 3, 4. М.: Мир, 1977, 357 с.; 1978, 395 с.; 1982, 443 с.; 1982, 428 с.)
95. *Rempel S.*, *Schulze B.-W.*, Index theory of elliptic boundary problems. Berlin: Akad.-Verl., 1982, 393 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ремпель С.*, *Шульце Б.-В.*, Теория индекса эллиптических краевых задач. М.:Мир, 1986, 575 с.)
96. *Sakamoto R.*, Mixed problems for hyperbolic equations. J. Math. Kyoto Univ. 1970, *10*, 349—373; 403—417 (Пер. на рус. яз.: *Сакамото Р.*, Смешанная задача для гиперболических уравнений. Математика, 1971, *16*, № 1, 62—99)
97. *Sato M.*, Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Actes Congr. Intern. Math., Nice, 1970, *2*, 785—794

98. *Seeley R. T.*, Complex powers of an elliptic operator. Proc. Symp. Pure Math., AMS, 1967, *10*, 288—307 (Пер. на рус. яз.: *Сили Р.*, Степени эллиптического оператора. Математика, 1968, *12*, № 1, 96—112)
99. —, The resolvent of an elliptic boundary problem, Amer. J. Math., 1969, *91*, № 4, 889—920
100. —, Analytic extension of the trace associated with elliptic boundary problems. Amer. J. Math., 1969, *91*, № 4, 963—983
101. —, A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbf{R}^3$. Adv. Math. 1978, *29*, № 2, 244—269
102. *Stein E. M.*, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970, 387 pp. (пер. на рус. яз.: *Стейн И. М.*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342 с.)
103. *Taylor M. E.*, Pseudodifferential operators. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981, 449 pp. (Пер. на рус. яз.: *Тейлор М.*, Псевдодифференциальные операторы, М.: Мир, 1985, 469 с.)
104. *Treves F.*, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, 1, 2. New York: Plenum Press, 1980, 338 p.; 374 pp. (Пер. на рус. яз.: *Трев Ф.*, Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, 1, 2. М.: Мир, 1984, 359 с., 398 с.)

УДК 517.951+517.956

II. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. И. Комеч

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный обзор посвящен методам решения и исследования уравнений вида

$$Pu(x)\equiv P(\partial_x)u(x)\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant m}p_\alpha\partial_x^\alpha u(x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \qquad (0.1)$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндексы, $\alpha_k=0, 1, 2, \ldots$ при $k=1,\ldots,n$; $p_\alpha\in\mathbb{C}$, и

$$\partial_x^\alpha u(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n.$$

Основные методы исследования таких уравнений — преобразование Фурье и теория обобщенных функций.

Уравнения вида (0.1) используются в математической физике для описания различных явлений в теории упругости, акустике, электродинамике, квантовой механике. Исследованием свойств решений этих уравнений и нахождением формул для их решений занимались еще в XVIII—XIX вв. Эйлер, Даламбер, Лаплас, Фурье, Бессель, Пуассон, Кирхгоф, Хевисайд, Грин. С начала XX века вплоть до 40-х годов существенные результаты в этой области были получены в работах Адамара, Рисса, Герглотца, И. Г. Петровского, Гординга, Лере. В последующие десятилетия в работах Шварца, И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова, Мальгранжа, Эренпрайса, Хёрмандера и других была создана достаточно общая теория таких уравнений. Это оказалось возможным на основе теории обобщенных функций, возникновение и развитие которой было тесно связано с изучением уравнений математической физики.

Основной метод исследования уравнений (0.1) — разложение $f(x)$ и $u(x)$ в интегралы Фурье, т. е. разложение по гармоникам вида

$$u(x)=\int e^{-ix\xi}\tilde{u}(\xi)\,d\xi, \quad f(x)=\int e^{-ix\xi}\tilde{f}(\xi)\,d\xi; \tag{0.2}$$
$$x\xi=x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n \quad \text{для} \quad x,\ \xi\in\mathbf{R}^n.$$

Дело в том, что экспоненты $e^{-ix\xi}$ являются собственными функциями оператора P вида (0.1):

$$Pe^{-ix\xi}=\tilde{P}(\xi)\,e^{-ix\xi},$$

где

$$\tilde{P}(\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m} p_\alpha(-i\xi)^\alpha=P(-i\xi); \tag{0.3}$$

$\tilde{P}(\xi)$ — символ оператора P — это собственное число, соответствующее собственной функции $e^{-ix\xi}$. Следовательно, представление Фурье (0.2) есть разложение по собственным функциям оператора P и, стало быть, приводит оператор P к диагональному виду, после чего уравнение (0.1) легко решается. Например, если $f(x)=\tilde{f}(\xi)\,e^{-ix\xi}$, т. е. $f(x)$ содержит только одну гармонику, то $u(x)$ также можно искать в виде $\tilde{u}(\xi)\,e^{-ix\xi}$. Подставляя функцию $u(x)$ такого вида в (0.1), мы получаем ввиду (0.3):

$$\tilde{P}(\xi)\,\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}(\xi). \tag{0.4}$$

Отсюда $\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}(\xi)/\tilde{P}(\xi)$, если $\tilde{P}(\xi)\neq 0$. Если же $\tilde{P}(\xi)=0$, то $\tilde{u}(\xi)$ — произвольное число при $\tilde{f}(\xi)=0$ и $\tilde{u}(\xi)$ не существует при $\tilde{f}(\xi)\neq 0$. Подобный анализ оказывается возможным и в общем случае произвольной функции $f(x)$ с использованием разложений (0.2). При этом также получается тождество (0.4), которое выполняется для всех ξ, откуда формально

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{\tilde{f}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \quad \text{при всех } \xi. \tag{0.5}$$

Подставляя в (0.2), находим формально

$$u(x)=\int e^{-ix\xi}\frac{\tilde{f}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)}\,d\xi. \tag{0.6}$$

Главная трудность в реализации этой программы состоит в том, чтобы придать смысл формальным выкладкам (0.2), (0.4) — (0.6) и обосновать возможность деления в (0.5). Эти проблемы возникают из-за того, что оператор P, определенный на функциях во всем пространстве $\mathbf{R}^n$, имеет непрерывный спектр, и его собственные функции $e^{-ix\xi}$ не принадлежат пространству $L_2(\mathbf{R}^n)$,

т. е. являются «обобщенными» собственными функциями в смысле Гельфанда — Костюченко — Левитана [20]. Соответственно, и «коэффициенты» $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{f}(\xi)$ разложений (0.2) оказываются обобщенными функциями. В связи с этим, теория обобщенных функций является основным инструментом исследования уравнений вида (0.1) и поэтому мы начинаем данный обзор с ее конспективного изложения в главе 1.

В главе 1 напоминаются основные правила действий с обобщенными функциями. Строятся решения уравнения (0.1) с произвольной правой частью $f(x)$ в виде свертки f с фундаментальным решением уравнения (0.1).

В главе 2 вводится преобразование Фурье обобщенных функций при помощи замыкания по непрерывности. Излагается теория Пэли—Винера преобразования Фурье в комплексной области и связь свертки с преобразованием Фурье. Эта теория находит важные применения, например, при обосновании дисперсионных соотношений в квантовой теории поля [6] и при построении операционного исчисления (см. § 3 гл. 3).

Глава 3 посвящена существованию и гладкости решений уравнения (0.1). Излагается схема решения проблемы деления (0.5), теория разрешимости уравнений вида (0.1) в конусе, операционное исчисление, вводятся основные понятия теории уравнений в частных производных: понятия характеристики, бихарактеристики, волнового фронта. Подробно разъясняется смысл этих понятий. Излагаются результаты о распространении особенностей для вещественных уравнений главного типа, классическая «лемма Вейля» о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений.

В главе 4 при помощи единого метода, обобщающего метод комплексных степеней Рисса [63] вычисляются в явном виде фундаментальные решения всех вещественных уравнений второго порядка с невырожденной квадратичной формой. Для однородных операторов вида $P=\sum_{i=1}^{n}\pm\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ при $n\neq 2$ фундаментальные решения получаются в виде аналитического продолжения функции $C\rho^\lambda$ $\left(\text{где } \rho=\left(\sum_i \pm x_i^2\right)^{1/2}\right)$ по λ в точку $\lambda=-(n-2)$, а для неоднородных операторов вида $P=\sum_{i=1}^{n}\pm\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+q$, где $q\neq 0$ (в частности, для оператора Клейна — Гордона) — в виде аналитического продолжения бесселевой функции $C\rho^\nu J_\nu(\rho)$ в точку $\nu=-\frac{n-2}{2}$ (при $n\neq 2$). Эти фундаментальные решения на языке несобственных интегралов («виселиц Адамара») построены им еще в монографии [51]. Однако на современном языке теории распределений эти фундаментальные решения были впервые вычислены в случае $q=0$ в [56] и [63], а для $q \neq 0$ — в данной статье. Эти фундаментальные решения играют важную роль в задачах современной математической физики (см. [6]). Поэтому мы уделяем большое внимание методам их вычисления и технике работы с ними.

В главе 5 излагается теория краевых задач в полупространстве. Указаны достаточные условия на краевую задачу, близкие к необходимым, при которых она имеет единственное решение для любых граничных данных, и необходимые условия на дифференциальный оператор, при которых для него могут существовать такие краевые задачи. При этом естественно возникает классическое разделение уравнений на уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов, играющее фундаментальную роль в современной теории уравнений в частных производных, хотя это разделение и не является всеобъемлющим. Указаны «правильные» постановки краевых задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов.

Глава 6, написанная В. А. Васильевым, посвящена обзору теории лакун для гиперболических уравнений, развитой в работах И. Г. Петровского, Атьи, Ботта и Гординга.

Через $x_k \xrightarrow{X} x$ мы обозначаем последовательность элементов линейного топологического пространства X, сходящуюся к $x \in X$; под непрерывными отображениями таких пространств мы для простоты подразумеваем секвенциально непрерывные отображения, хотя и не всегда это оговариваем.

Глава 1

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Обобщенные функции и действия над ними

1.1. Дифференцирование обобщенных функций. Через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) = C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ обозначается *пространство пробных* или *основных комплекснозначных функций* $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, равных нулю при $|x| > R$, где R может зависеть от φ. Сходимость в $\mathcal{D}$ определяется так: по определению, последовательность $\varphi_k \to \varphi$ в $\mathcal{D}$, если

1) Производные $\varphi_k^{(\alpha)}$ любого порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ равномерно на $\mathbf{R}^n$ сходятся к $\varphi^{(\alpha)}(x)$: $\forall \alpha$

$$\varphi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(\alpha)}(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

2) Для некоторого R, не зависящего от k,

$$\varphi_k(x) = 0 \text{ при } |x| > R.$$

Через $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ обозначается множество всех линейных функционалов на $\mathcal{D}$, непрерывных относительно введенной сходимости в $\mathcal{D}$. В $\mathcal{D}'$ вводится *слабая сходимость*: по определению, последовательность $u_k(x) \in \mathcal{D}'$ слабо сходится к $u(x) \in \mathcal{D}'$ при $k \to \infty$ ($u_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$), если

$$\langle u_k, \varphi \rangle \underset{k\to\infty}{\to} \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.1}$$

Пример 1.1. Если $u(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, то функционал от $\varphi \in \mathcal{D}$ вида

$$u: \varphi \mapsto u(\varphi) = \langle u(x), \varphi(x) \rangle \equiv \int_{\mathbf{R}^n} u(x) \varphi(x)\, dx \tag{1.2}$$

является элементом из $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Определение 1.1. Функционалы $u \in \mathcal{D}'$ называются *обобщенными функциями* или *распределениями*.

Определим для $u \in \mathcal{D}'$ по аналогии с (1.2) «скалярное произведение»

$$\langle u(x), \varphi(x) \rangle \equiv u(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.3}$$

Отметим, что здесь $u(x)$ — это просто символ, не обозначающий значения какой-либо функции u в точках x. Грубо говоря, для обобщенной функции u «наблюдаемыми» величинами являются значения $u(\varphi)$ при $\varphi \in \mathcal{D}$, а не $u(x)$ при $x \in \mathbf{R}^n$. Часто обобщенные функции будем называть просто функциями.

Пример 1.2. Знаменитая обобщенная *δ-функция Дирака* [44] определяется тождеством

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n). \tag{1.4}$$

Иногда такая функция $\delta(x)$ обозначается через $\delta_n(x)$.

Пример 1.1 показывает, что пространство «классических» функций $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ естественно отображается в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Оказывается, разным функциям $u(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ соответствуют (по формуле (1.2)) разные функционалы $u \in \mathcal{D}'$. Поэтому отображение $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, определяемое (1.2), является *вложением*, т. е. $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ можно отождествить с подмножеством в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и считать, что

$$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n).$$

С другой стороны, оказывается [18], [37], что $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ не совпадает с $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, поскольку $\delta \in \mathcal{D}'$, но $\delta \notin L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ — более широкое пространство, чем $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$.

Замечательно, что такое расширение пространства $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ является замкнутым относительно операции дифференцирования:

Определение 1.2. Для любой обобщенной функции $u(x)$ и любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *производная* $\partial_x^\alpha u(x)=u^{(\alpha)}(x)$ определяется тождеством

$$\langle u^{(\alpha)}(x), \varphi(x)\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle u(x), \varphi^{(\alpha)}(x)\rangle, \quad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{1.5}$$

Оказывается [18], [37], $u^{(\alpha)}(x)\in\mathcal{D}'$ при всех $u\in\mathcal{D}'$ и всех мультииндексах $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, и оператор $\partial^\alpha: u\mapsto u^{(\alpha)}$ (секвенциально) непрерывен в $\mathcal{D}'$ относительно слабой сходимости (1.1). Для $u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ производные $\partial_x^\alpha u(x)$ совпадают с обычными производными в смысле классического анализа. Ввиду плотности $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, такое непрерывное продолжение оператора ∂_x^α на $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ единственно.

Пример 1.3. Пусть $\theta(x)$ — *функция Хевисайда* («ступенька»):

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{1.6}$$

Тогда $\langle\theta'(x), \varphi(x)\rangle=-\langle\theta, \varphi'\rangle=-\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx=\varphi(0)$, т. е.

$$\theta'(x)=\delta(x). \tag{1.7}$$

Пример 1.4. Производные от $\delta(x)$: для $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$

$$\langle\delta'(x), \varphi(x)\rangle=-\varphi'(0); \quad \langle\delta''(x), \varphi(x)\rangle=\varphi''(0). \tag{1.8}$$

Чрезвычайно важную роль в приложениях играет следующая простая

Формула дифференцирования кусочно-гладких функций.

Пусть $u(x)\in C^1(\mathbf{R}\setminus\{a\})$, где $a\in\mathbf{R}$; обозначим

$$\{u'(x)\}=u'(x), \quad x\neq a \tag{1.9}$$

— функцию, равную обычной производной от $u(x)$ в тех точках $x\in\mathbf{R}$, где она существует. Предположим, что существуют пределы $u(a\pm 0)$ и (хотя это и не обязательно) существуют пределы $u'(a\pm 0)$.

Лемма 1.1. В смысле дифференцирования обобщенных функций

$$u'(x)=\{u'(x)\}+h\delta(x-a), \tag{1.10}$$

где

$$h=u(a+0)-u(a-0)$$

— скачок функции $u(x)$ в точке $x=a$.

Доказательство. Для $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$

$$\langle u', \varphi\rangle=-\langle u, \varphi'\rangle=-\int_{-\infty}^{\infty} u\varphi'\,dx=-\int_{-\infty}^{a} u\varphi'\,dx-\int_a^\infty u\varphi'\,dx=$$

$$=-u\varphi\,\Big|_{-\infty}^{a}-u\varphi\,\Big|_a^\infty+\int_{x\neq a} u'\varphi\,dx=h\varphi(a)+\langle\{u'\}, \varphi\rangle.$$

Пример 1.5. Из (1.10) легко вывести, что $\theta'(x)=\delta(x)$ — это соответствует (1.7); $|x|''=2\delta(x)$;

$$\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)(\theta(x)e^{-\lambda x})=\delta(x); \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2}+m_0^2\right)\frac{e^{-m_0|x|}}{2m_0}=\delta(x), \quad m_0\neq 0;$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)\frac{\sin\omega|x|}{2\omega}=\delta(x), \quad \omega\neq 0. \tag{1.11}$$

1.2. Замена переменных в обобщенных функциях. Пусть $m\geqslant n$ и $h:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ — гладкое отображение ранга n в каждой точке $y\in\mathbf{R}^m$. Тогда прообраз каждой точки $x\in\mathbf{R}^n$ есть гладкое подмногообразие $\Gamma_x=h^{-1}(x)$ в $\mathbf{R}^m$ размерности $\nu=m-n$. На Γ_x имеется гладкая мера $\omega_x(dy)$, которая обладает таким свойством: для любой функции $f(y)\in C(\mathbf{R}^m)$, равной нулю вне какого-то (своего) ограниченного множества в $\mathbf{R}^m$,

$$\int f(y)\,d^m y=\int\left(\int_{\Gamma_x} f(y)\,\omega_x(dy)\right)d^n x, \tag{1.12}$$

где $d^n x$ и $d^m y$ — формы элемента объема на $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно. Такая мера легко строится [55]. Можно показать, что

$$\omega_x(dy)=\frac{\sigma_\nu(dy)}{G(y)}, \tag{1.13}$$

где $\sigma_\nu(dy)$ — евклидова ν-мерная мера на Γ_x, а $G(y)$ — n-мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\operatorname{grad} h_1(y),\ldots,\operatorname{grad} h_n(y)$ $(h(y)=(h_1(y),\ldots,h_n(y)))$:

$$G(y)=\left(\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_n\leqslant m}\left|\frac{\partial(h_1,\ldots,h_n)}{\partial(y_{k_1},\ldots,y_{k_n})}\right|^2\right)^{1/2}. \tag{1.14}$$

Поскольку h имеет ранг n в каждой точке $y\in\mathbf{R}^m$, то $G(y)\neq 0$.

Пример 1.6. Если $m=n$, то $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — диффеоморфизм, $\Gamma_x=h^{-1}(x)$ — одна точка, $\sigma_0(\Gamma_x)=1$, а

$$G(y)=\left|\frac{\partial(h_1,\ldots,h_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\right| \tag{1.15}$$

— якобиан h в точке y.

Пример 1.7. Если $n=1$, то $h=h_1(y)$, и $\operatorname{grad} h(y)\neq 0$ при $y\in\mathbf{R}^m$. Тогда

$$G(y)=|\operatorname{grad} h(y)|. \tag{1.16}$$

Пример 1.8. Если $m=3$ и $n=2$, то $G(y)=|[\operatorname{grad} h_1(y), \operatorname{grad} h_2(y)]|$ — модуль «векторного» произведения.

Предложение 1.1. Пусть $\operatorname{rank}\frac{\partial h(y)}{\partial y}=n$ при $\forall y\in\mathbf{R}^m$. Тогда отображение $u(x)\mapsto u(h(y))$ непрерывно действует из $C(\mathbf{R}^n)$ в $C(\mathbf{R}^m)$ и продолжается до (секвенциально) непрерывного оператора из $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ относительно сходимости (1.1).

Доказательство. Возьмем $u(x)\in C(\mathbf{R}^n)$; тогда из (1.12) получаем, что для $\varphi(y)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$

$$\langle u(h(y)), \varphi(y) \rangle = \int u(x) \left(\int_{\Gamma_x} \varphi(y)\, \omega_x(dy) \right) d^n x =$$
$$= \langle u(x), \bar{\varphi}(x) \rangle. \qquad (1.17)$$

Здесь

$$\bar{\varphi}(x) = \int_{\Gamma_x} \varphi(y)\, \omega_x(dy). \qquad (1.18)$$

Легко показать, что

$$\bar{\varphi}(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n). \qquad (1.19)$$

Например, можно разбить $\varphi(y)$ в сумму функций с достаточно малыми носителями и в каждом носителе выбрать координаты $y_1, \ldots, y_m$ так, чтобы $y_k(x) = h_k(x)$ при $k = 1, \ldots, n$. Поэтому отображение $u(x) \to u(h(y))$ непрерывно на $C(\mathbf{R}^n)$ относительности сходимости (1.1) и допускает замыкание по (секвенциальной) непрерывности на $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Из (1.17) замыканием по непрерывности получаем

Определение 1.4. Для $u(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$

$$\langle u(h(y)), \varphi(y) \rangle = \langle u(x), \bar{\varphi}(x) \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^m). \qquad (1.20)$$

Пример 1.9. Если $h: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — диффеоморфизм, как в примере 1.6, то $\bar{\varphi}(x) = \varphi(h^{-1}(x)) / G(h^{-1}(x))$, и

$$\langle u(h(y)), \varphi(y) \rangle = \langle u(x), \frac{\varphi(h^{-1}(x))}{G(h^{-1}(x))} \rangle. \qquad (1.21)$$

Замечание 1.1. Условие, что $h(y)$ имеет ранг n в каждой точке $y \in \mathbf{R}^m$, не является необходимым для того, чтобы суперпозиция $u(h(y))$ имела смысл. Условие $\bar{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ из (1.19) может выполняться для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^m)$ при некоторых $h(y)$, не всюду имеющих ранг n. Кроме того, условие $\bar{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ также не является обязательным. Грубо говоря, функция $\bar{\varphi}(x)$ должна быть гладкой лишь в тех точках x_0, где $u(x)$ имеет особенности, и отображение $h(y)$ должно иметь ранг n лишь в точках $y_0 = h^{-1}(x_0)$.

Пример 1.10. Если $h(y) \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ и $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $y \in \mathbf{R}^m$, то, по определению (1.17) и ввиду (1.16), для $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^m)$

$$\langle \delta_1(h(y)), \varphi(y) \rangle = \langle \delta_1(x), \bar{\varphi}(x) \rangle = \bar{\varphi}(0) = \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(y)\, \sigma_{m-1}(dy)}{|\operatorname{grad} h(y)|}, \qquad (1.22)$$

где $\Gamma_0 = h^{-1}(0) = \{y \in \mathbf{R}^m : h(y) = 0\}$.

Например, для $h(y) = |y|^2 - \omega^2$, $\omega \in \mathbf{R} \setminus 0$,

$$\langle \delta_1(|y|^2 - \omega^2), \varphi(y) \rangle = \int_{|y| = |\omega|} \frac{\varphi(y)\, \sigma_{m-1}(dy)}{2|\omega|}. \qquad (1.23)$$

Заметим, что правая часть формулы (1.22) имеет смысл для любых $\varphi \in C(\Gamma_0)$, если выполняется $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $y \neq 0$, $m \geq 2$, и

$$\int_{\Gamma_0^R \setminus 0} \frac{\sigma_{m-1}(dy)}{|\operatorname{grad} h(y)|} < \infty \quad \forall R > 0; \quad \Gamma_0^R = \{y \in \Gamma_0 : |y| \leq R\}, \qquad (1.24)$$

Определение 1.4. При условии (1.24) определим $\delta_1(h(y))$ по формуле (1.22) считая, что $\sigma_{m-1}(\{0\}) = 0$, если $0 \in \Gamma_0$.

Пример 1.11. Если $h(y) = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_m^2$ — невырожденная квадратичная форма, то $\operatorname{grad} h(y) = 0$ при $y = 0 \in \Gamma_0$. Однако условие (1.24) выполняется при $m \geq 3$.

Отметим, что из определения (1.22) вытекает формула

$$\delta(a(y)\, h(y)) = \frac{1}{a(y)}\, \delta(h(y)), \qquad (1.25)$$

если $a(y) \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ и $a(y) \neq 0$ при $y \in \mathbf{R}^m$.

Замечание 1.2. Условие (1.24) дает возможность определить $\delta_1(h(y))$, но не пригодно для определения $u(h(y))$ с произвольной функцией $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Для каждой конкретной функции $u \in \mathscr{D}'$ можно найти свои условия типа (1.24) на $h(y)$, при которых $u(h(y))$ имеет смысл и в каком-либо смысле непрерывно зависит от отображения h из рассматриваемого класса. Например, обобщенная функция $\delta_1(h(y))$, определяемая формулой (1.22), непрерывно зависит от $h(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}^m)$ в классе функций $h(y)$, для которых $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $y \in \Gamma_0$.

Отметим, что выражение (1.22) совпадает с результатом «обычного» формального интегрирования с δ-функцией как интегрирования по мере $\delta(h)\, dh = \delta_{(0)}(dh)$, сосредоточенной в точке $h = 0$. А именно, выберем в окрестности поверхности Γ_0 координаты $(h(y), y')$, где y' — локальные координаты на Γ_0. Это возможно, если $\operatorname{grad} h(y) \neq 0$ при $y \in \Gamma_0$, и $h(y) \in C^1(\Gamma_0)$. Тогда $d^m y = \frac{dh\, \sigma_{m-1}(dy')}{|\operatorname{grad} h(y)|}$, и поэтому формально

$$\int \delta(h(y))\, \varphi(y)\, dy = \int_{\Gamma_0} \left(\int_{\mathbf{R}} \delta(h)\, \varphi(h, y')\, dh \right) \frac{\sigma_{m-1}(dy')}{|\operatorname{grad} h(y)|} =$$
$$= \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(0, y')\, \sigma_{m-1}(dy')}{|\operatorname{grad} h(y)|}. \qquad (1.26)$$

Пример 1.12. Пусть отображение $h: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ — проекция: $h(y_1, y_2) = y_1$. Тогда для $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$

$$\langle \delta_1(y_1), \varphi(y) \rangle = \langle \delta_1(x), \bar{\varphi}(x) \rangle = \bar{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, y_2)\, dy_2. \qquad (1.27)$$

Аналогично,

$$\langle \delta_1(y_2), \varphi(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_1, 0)\, dy_1. \qquad (1.28)$$

Пример 1.13. Пусть $m=n$, и $x=h(y)=y-z$ — сдвиг на вектор $z\in\mathbf{R}^n$. Тогда, согласно (1.21),

$$\langle u(y-z), \varphi(y)\rangle = \langle u(x), \varphi(x+z)\rangle. \qquad (1.29)$$

В частности,

$$\langle \delta(y-z), \varphi(y)\rangle = \varphi(z), \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n). \qquad (1.30)$$

Замечание 1.3. Из (1.30) видно, что $\delta(y-z)$ формально есть интегральное ядро единичного оператора в $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Именно поэтому Дирак в 1927 г. обозначил такую «функцию» буквой δ, по аналогии с δ-символом Кронекера δ_{ij}, который является матрицей единичного оператора в $\mathbf{R}^N$: $\sum\limits_j \delta_{ij}\varphi_j=\varphi_i$ для $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)\in\mathbf{R}^N$, аналогично (1.30) (см. [44]).

Пример 1.14. Если $x=h(y)=ay$, где $a\in\mathbf{R}\setminus 0$, то для $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$

$$\langle u(ay), \varphi(y)\rangle = \frac{1}{|a|^n}\langle u(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\rangle. \qquad (1.31)$$

В частности,

$$\langle \delta_n(ay), \varphi(y)\rangle = \frac{1}{|a|^n}\varphi(0) \Rightarrow \delta_n(ay) = \frac{1}{|a|^n}\delta_n(y). \qquad (1.32)$$

Таким образом, $\delta_n(y)$ — положительно однородная обобщенная функция порядка — n и $\delta_n(y)$ — четная функция.

Пример 1.15. Если $x=h(y)=Cy$, где $C\in \mathrm{GL}_{\mathbf{R}}(n)$ — невырожденная вещественная матрица, то обозначим $u_C(y)=u(Cy)$:

$$\langle u_C(y), \varphi(y)\rangle = \langle u(Cy), \varphi(y)\rangle = \frac{1}{|\det C|}\langle u(x), \varphi(C^{-1}x)\rangle. \qquad (1.33)$$

В частности, если $|\det C|=1$, то

$$\langle \delta_n(Cy), \varphi(y)\rangle = \varphi(0) \Rightarrow \delta_n(Cy)=\delta_n(y). \qquad (1.34)$$

Следовательно, например, $\delta_n(y)$ инварианта относительно вращений $C\in O(n)$ и относительно *преобразований Лоренца* (сохраняющих квадратичную форму $y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2$).

1.3. Носитель обобщенной функции. Для функции $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ее *носителем* называется замыкание множества тех $x\in\mathbf{R}^n$, где $\varphi(x)\neq 0$:

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x\in\mathbf{R}^n : \varphi(x)\neq 0\}}. \qquad (1.35)$$

Очевидно, $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт. Для открытой области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ обозначим $\mathcal{D}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)=\{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) : \operatorname{supp}\varphi\subset\Omega\}$. По определению, $\varphi_k\xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)}\varphi$, если $\varphi_k\xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}\varphi$ и $\operatorname{supp}\varphi_k\subset K$, где K — компакт в Ω, не зависящий от k. Вложение $\mathcal{D}(\Omega)\subset\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ непрерывно, а двойственное отображение $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)\to\mathcal{D}'(\Omega)$ по определению есть операция ограничения обобщенных функций $u(x)$ на открытое множество $\Omega: u\mapsto u|_\Omega$. Подробнее,

$$\langle u|_\Omega, \varphi\rangle_\Omega = \langle u, \varphi\rangle, \quad \varphi\in\mathcal{D}(\Omega), \qquad (1.36)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ — двойственность между $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $\mathcal{D}(\Omega)$.

Определение 1.5. Для $u, v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ скажем, что $u(x)=v(x)$ при $x\in\Omega$, если $u|_\Omega=v|_\Omega$, т. е.

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle, \quad \varphi\in\mathcal{D}(\Omega). \qquad (1.37)$$

Предложение 1.2. ([18], [37], [65]). Если $\{\Omega_i\}$ — любое семейство открытых множеств $\Omega_i\subset\mathbf{R}^n$ и $u|_{\Omega_i}=0\ \forall i$, то $u|_\Omega=0$, где $\Omega=\bigcup\limits_i\Omega_i$.

Следовательно, существует максимальная область $\Omega(u)\subset\mathbf{R}^n$, на которой $u(x)=0$. А именно,

$$\Omega(u)=\bigcup_{\Omega: u|_\Omega=0}\Omega.$$

Определение 1.6. Для $u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ ***носителем*** называется множество

$$\operatorname{supp} u=\mathbf{R}^n\setminus\Omega(u). \qquad (1.38)$$

Если $\operatorname{supp} u\subset K$, где K — множество в $\mathbf{R}^n$, то говорят, что *и сосредоточена* на K. Обозначим $\mathcal{D}'_K=\{u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : \operatorname{supp} u\subset K\}$. Если K замкнуто в $\mathbf{R}^n$, то $\mathcal{D}'_K$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{D}'$ и сходимость в $\mathcal{D}'_K$ по определению совпадает со сходимостью в $\mathcal{D}'$.

Пример 1.16. $\operatorname{supp}\theta(x)=\overline{\mathbf{R}}_+$, где $\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R} : x>0\}$,

$$\operatorname{supp}\delta(x-a)=\operatorname{supp}\delta^{(\alpha)}(x-a)=\{a\}, \quad a\in\mathbf{R}^n. \qquad (1.39)$$

Очевидно, $\operatorname{supp} u$ — замкнутое множество. Для $u\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ носители (1.35) и (1.38) совпадают.

Определение 1.7. Через $\mathcal{E}'=\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ обозначается пространство распределений $u(x)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, имеющих компактный носитель (см. [18], [37]). По определению, $u_k\xrightarrow{\mathcal{E}'}u$, если $u_k\xrightarrow{\mathcal{D}'}u$ и $\operatorname{supp} u_k\subset K$, где K — компакт в $\mathbf{R}^n$, не зависящий от k. Распределения $u(x)\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ называются *финитными*.

Для $u(x)\in\mathcal{E}'$ скалярное произведение (1.3) можно определить при всех $\varphi(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и даже при $\varphi(x)\in C^\infty(\Omega)$, гладких в какой-либо окрестности Ω множества $\operatorname{supp} u$. А именно, нужно взять «срезающую» функцию $\psi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$, равную 1 в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp} u$, и положить

$$\langle u(x), \varphi(x)\rangle = \langle u(x), \psi(x)\varphi(x)\rangle, \qquad (1.40)$$

где $\psi(x)\varphi(x)\equiv 0$ при $x\in\mathbf{R}^n\setminus\Omega$. Здесь $\psi(x)\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и определение (1.40) не зависит от выбора функции $\psi(x)$ с указанными свойствами. Легко показать, что $\mathcal{E}'$ — двойственное пространство к $\mathcal{E}\equiv C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Лемма 1.2 ([18], [72]). Если $u \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp} u = K$, то для $\forall \varepsilon > 0$ при некотором целом m справедлива оценка

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{C^{(m)}(K_\varepsilon)}, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \tag{1.41}$$

где через K_ε обозначается ε-окрестность множества K.

Число m (наименьшее) называется (точным) *порядком обобщенной функции* u. Например, для $\delta(x)$ порядок $m=0$, для $\delta^{(\alpha)}(x)$ порядок $m=|\alpha|$.

Пример 1.17. Ряд $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^{(j)}(x-j)$, $x \in \mathbf{R}$, сходится в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, но $\operatorname{supp} u$ — не компакт, и порядок u равен ∞ (т. е. не является конечным).

Из леммы 1.2 легко выводится

Следствие 1.1. ([18], [37]). Если $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp} u = \{a\}$ — одна точка $a \in \mathbf{R}^n$, то

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(x-a)$$

при некоторых $m < \infty$ и $C_\alpha \in \mathbf{C}$ (ср. (1.39)).

Обобщим определение (1.40).

Определение 1.8. Если $u(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi(x) \in \mathscr{E} \equiv C^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем $K \equiv \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi$ — ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, то положим

$$\langle u(x), \varphi(x) \rangle = \langle u(x), \psi(x)\varphi(x) \rangle, \tag{1.42}$$

где $\psi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\psi(x)=1$ в некоторой окрестности множества K.

Определение (1.42) очевидно не зависит от выбора функции $\psi(x)$ с указанными свойствами.

1.4. Сингулярный носитель обобщенных функций. Аналогично $\operatorname{supp} u$ определяется *сингулярный носитель обобщенной функции* $u(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$:

$$\operatorname{sing\,supp} u = \mathbf{R}^n \setminus \Omega^\infty(u),$$
$$\text{где } \Omega^\infty(u) = \bigcup_{\Omega: u|_\Omega \in C^\infty(\Omega)} \Omega \tag{1.43}$$

— максимальная область, на которой $u \in C^\infty$.

Для замкнутого множества $K \subset \mathbf{R}^n$ обозначим $\mathscr{D}'S_K = \{u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n) : \operatorname{sing\,supp} u \subset K\}$ или иными словами $\mathscr{D}'S_K = \{u \in \mathscr{D}' : u|_{\mathbf{R}^n \setminus K} \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus K)\}$. По определению $u_m \xrightarrow{\mathscr{D}'S_K} u$, если $u_m \xrightarrow{\mathscr{D}'} u$ и

$$u_m|_{\mathbf{R}^n \setminus K} \xrightarrow{C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus K)} u|_{\mathbf{R}^n \setminus K}.$$

Замечание 1.4. Если $\operatorname{sing\,supp} u \subset K$, где $K \subset \mathbf{R}^n$, то подстановка $u(h(y))$ имеет смысл при меньших ограничениях на h, чем выше. А именно, при определении $u(h(y))$ достаточно потребовать, чтобы отображение $h \in C(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n) \cap C^\infty(h^{-1}(\Omega), \Omega)$ и $\operatorname{rank} \frac{\partial h(y)}{\partial y} = n$ лишь в точках $y \in h^{-1}(\Omega)$, где Ω — какая-либо окрестность множества K. При этом отображение $u(x) \mapsto u(h(y))$ непрерывно как отображение $\mathscr{D}'S_K \to \mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$. Поэтому если $u_\lambda(x)$ — непрерывная функция от параметра $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'S_K$, то $u_\lambda(h(y))$ также непрерывная функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$. То же относится к дифференцируемым, голоморфным, мероморфным функциям от параметра (см. [18]).

Пример. 1.18. Пусть $u(x) = \delta_1(x)$, $h(y) = |y|^2 - R^2$ при $y \in \mathbf{R}^m$, $R \in \mathbf{R}$, $R \neq 0$. Тогда из (1.20), (1.18), (1.16) и (1.13) получаем, что

$$\langle \delta_1(|y|^2 - R^2), \varphi(y) \rangle = \frac{1}{2R} \int_{|y|=R} \varphi(y)\, dy. \tag{1.44}$$

Отметим, что $\operatorname{grad}(|y|^2 - R^2) = 0$ при $y=0$, поэтому $u(|y|^2 - R^2)$ имеет смысл не при всех $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

1.5. Свертка обобщенных функций. Для функций $u, v \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ их *сверткой* называется функция

$$(u*v)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} u(x-y)v(y)\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} u(z)v(x-z)\,dz, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.45}$$

Свойства свертки основных функций.

1) Из (1.45) следует, что свертка коммутативна, билинейна и ассоциативна: для $u, v, w \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$

$$u*(\alpha v + \beta w) = \alpha u*v + \beta u*w, \quad u*v = v*u, \quad (u*v)*w = u*(v*w). \tag{1.46}$$

2) Главные свойства свертки — это формулы сдвига и дифференцирования: для $u, v \in \mathscr{D}$

$$T_a(u*v) = (T_a u)*v = u*T_a v,$$

где $T_a u(x) \equiv u(x+a)$, $a \in \mathbf{R}^n$,

$$\partial_x^\alpha(u*v) = (\partial_x^\alpha u)*v = u*\partial_x^\alpha v, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{1.47}$$

3) Носитель свертки содержится в алгебраической сумме носителей:

$$\operatorname{supp}(u*v) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v \equiv \{x = z + y \in \mathbf{R}^n : z \in \operatorname{supp} u,\ y \in \operatorname{supp} v\}. \tag{1.48}$$

4) Отображение $(u, v) \mapsto u*v$ непрерывно как отображение $\mathscr{D} \times \mathscr{D} \to \mathscr{D}$.

Свертка обобщенных функций определяется замыканием по непрерывности свертки основных функций.

Напомним [65], что *прямое произведение обобщенных функций* $u(z) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $v(y) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$ определяется как функционал $u \times v$, который на основные функции вида $\varphi(z)\psi(y)$ действует по формуле

$$\langle u\times v,\ \varphi(z)\psi(y)\rangle=\langle u,\ \varphi\rangle\langle v,\ \psi\rangle,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n),\ \psi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^m). \qquad (1.49)$$

Предложение 1.3 ([65]). Для $\forall u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\forall v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ существует единственное распределение $u\times v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$, удовлетворяющее тождеству (1.49). Отображение $(u,\ v)\mapsto u\times v$ непрерывно как отображение $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)\times\mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)\to\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$. При этом

$$\operatorname{supp} u\times v=\operatorname{supp} u\times\operatorname{supp} v. \qquad (1.50)$$

Чтобы замкнуть операцию свертки на распределения, заметим, что из (1.45) вытекает тождество: для $u,\ v\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$\langle u*v,\ \varphi\rangle=\int\int u(x-y)\,v(y)\,\varphi(x)\,dx\,dy=$$
$$=\langle u(z)\times v(y),\ \varphi(y+z)\rangle. \qquad (1.51)$$

Последнему выражению можно придать смысл при $u,\ v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ для $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ с помощью определения 1.8, если

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\ \text{множество}\ B_\varphi\equiv\operatorname{supp}(u\times v)\cap\operatorname{supp}(\varphi(y+z))$$
$$\text{ограничено в}\ \mathbf{R}^{2n}. \qquad (1.52)$$

В силу (1.50) это условие эквивалентно следующему условию на множества $U=\operatorname{supp} u$ и $V=\operatorname{supp} v$:

$$\forall R>0\ \text{множество}\ B_R\equiv(U\times V)\cap\{(z,\ y)\in\mathbf{R}^{2n}:|y+z|<R\}$$
$$\text{ограничено в}\ \mathbf{R}^{2n}. \qquad (1.52')$$

Определение 1.9 ([65]). Если $u,\ v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и множества $U=\operatorname{supp} u$ и $V=\operatorname{supp} v$ удовлетворяют условию (1.52′), то свертка $u*v$ определяется тождеством

$$\langle u*v,\ \varphi\rangle=\langle u(z)\times v(y),\ \varphi(z+y)\rangle,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n), \qquad (1.53)$$

где правая часть определена согласно (1.42).

Пример 1.19. $\operatorname{supp}\delta(x)=\{0\}$, так что свертка $\delta*u$ определена для $\forall u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, и

$$\langle\delta*u,\ \varphi\rangle=\langle\delta(z)\times u(y),\ \varphi(z+y)\rangle=\langle u(y),\ \varphi(y)\rangle\Rightarrow\delta*u=u. \quad (1.54)$$

Условие (1.52) эквивалентно следующему, более наглядному геометрически:

$$\text{для}\ \forall R>0,\ (x-U)\cap V\subset D_R\ \text{при}\ |x|<R, \qquad (1.52'')$$

где D_R — некоторое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$.

Условия (1.52″), (1.52′) выполняются, в частности, в следующих практически важных случаях:

1) Если U или V — ограниченное множество

2) Если $U\subset K$ и $V\subset K$, где K — (выпуклый) конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых. Под *конусом* здесь (и всюду ниже) понимается множество $K\subset\mathbf{R}^n$, для которого $K+K\subset K$ и $tK\subset K$ при $\forall t>0$.

3) Если $U\subset K_R$ и $V\subset K_R$ при некотором $R>0$, где K_R обозначает R-окрестность конуса K, не содержащего прямых.

4) Если U — *асимптотически времениподобное* множество, т. е. для некоторого (большого) $R>0$ справедливо неравенство $|x_1|>\gamma|x'|$ при $x\in U$, $|x|>R$, где $\gamma>1$, $x'\equiv(x_2,\ldots,x_n)$, а V — *асимптотически пространственноподобное* множество, т. е. $|x_1|\leqslant|x'|$ при $x\in V$, $|x|>R$. (Например, если $U=\{(t,\ x)\in\mathbf{R}^4:x=x(t)\}$, где $|\dot{x}(t)|<1$, т. е. $(t,\ x(t))$ — времениподобная кривая, а V — *световой конус* $t^2=|x|^2$.)

Замечание 1.5. Если множества U, V удовлетворяют условию (1.52′), то их R-окрестности U_R, V_R при $\forall R>0$ и их сдвиги $U+a_1$ и $V+a_2$ при $\forall a_1,\ a_2\in\mathbf{R}^n$ очевидно, также удовлетворяют этому условию.

Лемма 1.3 ([65]). Пусть множества $U,V\subset\mathbf{R}^n$ удовлетворяют условию (1.52′), (1.52″). Тогда для $u,\ v\in\mathcal{D}'_U\times\mathcal{D}'_V$ свертка $u*v\in\mathcal{D}'_{U+V}$ и отображение $(u,\ v)\mapsto u*v$ непрерывно в этих пространствах. Для этой свертки справедливы все формулы (1.47) и (1.48); формулы (1.46) также справедливы, если все входящие в них свертки определены.

Пример 1.20. Из (1.54) и (1.47) вытекает, что для $u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$

$$\delta^{(\alpha)}*u=\partial_x^\alpha(\delta*u)=\partial_x^\alpha u(x),\quad\forall\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n). \qquad (1.55)$$

Поэтому оператор $P(\partial_x)$ из (0.1) является оператором свертки с ядром

$$P_c\equiv P\delta=\sum_{|\alpha|\leqslant m}p_\alpha\partial_x^\alpha\delta(x):$$
$$P_c*u=(P\delta)*u=P(\delta*u)=Pu,\quad u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n). \qquad (1.56)$$

Определение 1.10 ([12]). Если K — конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых, то $\mathcal{D}'_{(K)}$ обозначает множество распределений $u(x)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, у которых $\operatorname{supp} u\subset K_R$ при некотором $R>0$ (K_R — это R-окрестность множества K); $u_k\xrightarrow{\mathcal{D}'_{(K)}}u$, если $u_k\xrightarrow{\mathcal{D}'}u$ и и $\operatorname{supp} u_k\subset K_R$ для $\forall k$ при некотором $R>0$, не зависящем от k.

Как отмечалось выше, для $u,\ v\in\mathcal{D}'_{K_R}$ свертка определена, поэтому из леммы 1.3 вытекает

Следствие 1.2. Пространства $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{D}'_{(K)}$ являются алгебрами с единицей $\delta(x)$ (см. (1.54)) относительно свертки, коммутативными и ассоциативными, если K — конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых. Свертка (секвенциально) непрерывна на $\mathcal{E}'\times\mathcal{E}'$ и на $\mathcal{D}'_{(K)}\times\mathcal{D}'_{(K)}$.

Лемма 1.4. Если $u(x)\in\mathcal{D}'$ (или $\mathcal{E}'$), а $v\in\mathcal{D}$ (или $\mathcal{E}$), то $u*v\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем

$$(u*v)(x)=\langle u(x-y),\ v(y)\rangle=\langle u(y),\ v(x-y)\rangle. \qquad (1.57)$$

Это равенство вытекает из (1.45) в силу непрерывности свертки. Из него легко получить, что $u*v\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Покажем, что когда свертка определена, т. е. при условии (1.52), справедливо включение

$$\operatorname{sing\,supp} u*v \subset \operatorname{sing\,supp} u + \operatorname{sing\,supp} v. \tag{1.58}$$

Действительно, для $\forall\varepsilon>0$ существует разбиение $u=u_\varepsilon+u'_\varepsilon$ и $v=v_\varepsilon+v'_\varepsilon$, где $\operatorname{supp} u_\varepsilon$ и $\operatorname{supp} v_\varepsilon$ лежат в ε-окрестностях $\operatorname{sing\,supp} u$ и $\operatorname{sing\,supp} v$ соответственно, а $u'_\varepsilon, v'_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда $u*v=u_\varepsilon*v_\varepsilon+u'_\varepsilon*v_\varepsilon+u_\varepsilon*v'_\varepsilon+u'_\varepsilon*v'_\varepsilon$. По лемме 1.4, здесь все слагаемые, кроме первого, принадлежат $C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Остается учесть, что $\operatorname{supp} u_\varepsilon*v_\varepsilon \subset \operatorname{supp} u_\varepsilon + \operatorname{supp} v_\varepsilon$ согласно (1.48), т. е. $\operatorname{supp} u_\varepsilon*v_\varepsilon$ лежит в 2ε-окрестности множества $\operatorname{sing\,supp} u + \operatorname{sing\,supp} v$, а $\varepsilon>0$ произвольно.

Отметим, что в правой части (1.48) и (1.58) сумма множеств является пустым множеством, если одно из слагаемых пусто. При этом левая часть — также пустое множество.

1.6. Граничные значения аналитических функций. Пусть Ω — выпуклое открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и пусть $f(x+iy)$ аналитична по $z=x+iy$ в «трубчатой» области $T_\Omega \equiv \mathbf{R}^n+i\Omega$. Рассмотрим распределения

$$f_y(x)=f(x+iy)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}_x^n) \text{ при } \forall y\in\Omega. \tag{1.59}$$

Предположим, что для каждого открытого конуса $K\subset\mathbf{R}^n$ такого что $K^\delta=\{y\in K: |y|<\delta\}\subset\Omega$ при некотором $\delta>0$,

$$|f(x+iy)|\leqslant\frac{c(x)}{|y|^\nu} \text{ при } y\in K^\delta, \text{ где } c(x)\in C(\mathbf{R}^n), \tag{1.60}$$

$\nu\in\mathbf{R}$, и $c(x)$ могут зависеть от выбора конуса K и $\delta>0$.

Лемма 1.5 (ср. [12], [62]). При условии (1.60) распределения (1.59) имеют предел при $y\to0$, $y\in\Omega$, в смысле слабой сходимости в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$: для $\forall y\in\Omega$

$$f_{\varepsilon y}(x)\equiv f(x+i\varepsilon y)\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow} f(x+i0y)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n), \tag{1.61}$$

причем предельная (обобщенная) функция $f_0(x)\equiv f(x+i0y)$ не зависит от $y\in\Omega$.

Пример 1.21. Функция $f(z)=\frac{1}{z}$, $z\in\mathbf{C}\setminus0$, имеет пределы на $\mathbf{R}$ сверху и снизу:

$$\frac{1}{x+i\varepsilon}\underset{\varepsilon\to0\pm}{\longrightarrow}\frac{1}{x\pm i0}=\text{v. p. }\frac{1}{x}\pm\pi i\delta(x), \tag{1.62}$$

где v. p. $\frac{1}{x}$ — *главное значение по Коши* (см. [18], [37] и формулу (2.5′) главы 3).

Пример. 1.22. Функция $f(\xi_0,\xi)=\dfrac{1}{-\xi_0^2+|\xi|^2}$, $\xi_0\in\mathbf{C}$, $\xi\in\mathbf{C}^k$, аналитична при $|\operatorname{Im}\xi|<|\operatorname{Im}\xi_0|$ и

$$\frac{1}{-(\xi_0\pm i\varepsilon)^2+|\xi|^2}\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow}\frac{1}{-(\xi_0\pm i0)^2+|\xi|^2},\quad \xi_0\in\mathbf{R},\quad \xi\in\mathbf{R}^k. \tag{1.63}$$

Аналогично,

$$\frac{1}{-i(\xi_0+i\varepsilon)+|\xi|^2}\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow}\frac{1}{-i(\xi_0+i0)+|\xi|^2},$$

$$\frac{1}{\xi_0\pm i\varepsilon+|\xi|^2}\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow}\frac{1}{\xi_0\pm i0+|\xi|^2}. \tag{1.64}$$

В одномерном случае, когда $n=1$ и $\Omega=\mathbf{R}^+$, лемма доказывается так: первообразная $f^{(-m)}(z)$ от $f(z)$ порядка $m=[\nu]+1$ будет непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant0$. Поэтому $f^{(-m)}(x+i\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0+}{\longrightarrow}f^{(-m)}(x)$ в $C(\mathbf{R})$ и тем более в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Но оператор $\frac{d^m}{dx^m}$ (секвенциально) непрерывен в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Поэтому

$$f(x+i\varepsilon)=\frac{d^m}{dx^m}f^{(-m)}(x+i\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0+]{\mathscr{D}'(\mathbf{R})}\frac{d^m}{dx^m}f^{(-m)}(x)\equiv$$

$$\equiv f(x+i0)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}). \tag{1.65}$$

В общем случае произвольного $n\geqslant1$ можно сделать в $\mathbf{R}^n$ линейную замену переменных так, чтобы в новых координатах $y=(1,0,\ldots,0)$, область $x_1\geqslant0,\ldots,x_n\geqslant0$ содержалась в конусе K. Тогда $f(z)$ аналитична по z при $\operatorname{Im} z_1>0,\ldots,\operatorname{Im} z_n>0$, $|z|<\delta_1$. Для доказательства остается провести рассуждение (1.65) по переменной x_1 вместо x при фиксированных остальных переменных $x_2,\ldots,x_n$. При этом первообразные можно выбирать из условия $f^{(-m)}(i\delta_1/2,x_2,\ldots,x_n)=0$.

Определение 1.11. При условиях леммы 1.5, функция $f_0(x)$ называется *граничным значением аналитической функции* $f(x+iy)$ в T_Ω, а $f(x+iy)$ — *аналитическим продолжением обобщенной функции* $f(x)$ в область T_Ω. Введем обозначение

$$f(z)|_{\mathbf{R}^n}\equiv f_0(x). \tag{1.66}$$

1.7. Пространство умеренных распределений. Введем новые классы основных и обобщенных функций.

Определение 1.12. *Пространство Шварца* быстро убывающих функций $S=S(\mathbf{R}^n)$ состоит из комплекснозначных функций $\varphi(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, для которых при $\forall\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\forall N>0$

$$|\varphi|_{\alpha,N}\equiv\sup_{x\in\mathbf{R}^n}(1+|x|)^N|\partial_x^\alpha\varphi(x)|<\infty. \tag{1.67}$$

Последовательность $\varphi_k\in S$ сходится к $\varphi\in S$ в пространстве S $(\varphi_k\xrightarrow{S}\varphi)$, если для $\forall\alpha$, N выполняется условие

$$|\varphi_k-\varphi|_{\alpha,N}\to0 \text{ при } k\to\infty.$$

Через $S'(\mathbf{R}^n)$ обозначается, как обычно, пространство линейных непрерывных функционалов на $S(\mathbf{R}^n)$. Функционалы $u\in S'(\mathbf{R}^n)$ называются *умеренно растущими* или просто *умеренными обобщенными функциями* (*или распределениями*).

Очевидно, $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\subset S(\mathbf{R}^n)$ — непрерывное вложение, и $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ всюду плотно в $S(\mathbf{R}^n)$. Поэтому двойственное отображение $S'(\mathbf{R}^n)\subset\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ также является непрерывным вложением (относительно слабой сходимости). Легко показать также, что $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)\subset S'(\mathbf{R}^n)$. Итак, $S'=S'(\mathbf{R}^n)$ — подмножество в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Легко показать, что $S(\mathbf{R}^n)$ всюду плотно в $S'(\mathbf{R}^n)$.

Очевидно, $\delta(x)\in S'$ и $\delta^\alpha(x)\in S'$ при $\forall\alpha$; $e^x\notin S'$, но $e^x\cos e^x=(\sin e^x)'\in S'$.

Поскольку в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ имеются операции дифференцирования, свертки и т. п., они определены и на $S'(\mathbf{R}^n)\subset\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. При некоторых условиях они не выводят за рамки $S'(\mathbf{R}^n)$.

Например $\partial_x^\alpha : S'(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)$ — непрерывный оператор при $\forall\alpha$, поскольку он является сопряженным к непрерывному оператору $(-\partial_x)^\alpha : S(\mathbf{R}^n)\to S(\mathbf{R}^n)$.

Оператор $u(x)\mapsto g(x)u(x)$ непрерывен в $S'(\mathbf{R}^n)$, если для $\forall\alpha$

$$|g^{(\alpha)}(x)|\leqslant c_\alpha(1+|x|)^{p_\alpha},\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{1.68}$$

при некоторых c_α, $p_\alpha\in\mathbf{R}$. Это выводится из непрерывности оператора $\varphi\mapsto g\varphi$ в $S(\mathbf{R}^n)$ при условии (1.68). Оказывается [15] условие (1.68) также необходимо для непрерывности оператора умножения на $g(x)$ в $S'(\mathbf{R}^n)$ (и в $S(\mathbf{R}^n)$).

Условие (1.68) выполняется например, для любого многочлена $g(x)$. Поэтому умножение на произвольный многочлен — непрерывная операция в $S'(\mathbf{R}^n)$ и в $S(\mathbf{R}^n)$.

Обозначим для $\forall k$, $N=0, 1, 2, \ldots$

$$\|\varphi\|_{k,N}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}|\varphi|_{\alpha,N}. \tag{1.69}$$

Аналогично лемме 1.2, доказывается

Лемма 1.6. Для $\forall u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$ при некоторых C, μ, $N<\infty$ выполняется оценка

$$|\langle u,\varphi\rangle|\leqslant C\|\varphi\|_{\mu,N},\quad \varphi\in S(\mathbf{R}^n). \tag{1.70}$$

Примеры 1.22. 1) Если $u(x)\in C(\mathbf{R}^n)$ или $u(x)\in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, и при некоторых C и p

$$|u(x)|\leqslant C(1+|x|)^p,\quad x\in\mathbf{R}^n, \tag{1.71}$$

то $u\in S'(\mathbf{R}^n)$, где u — функционал вида (1.2).

2) Если $u(x)\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ и при некотором $N>0$

$$\int\frac{|u(x)|}{(1+|x|)^N}dx<\infty, \tag{1.72}$$

то $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$.

Замечание 1.6. Предположим, что функция $c(x)$ в (1.60) допускает оценку вида

$$|c(x)|\leqslant C(1+|x|)^p,\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{1.73}$$

Тогда, как видно из доказательства леммы 1.5, предельная функция в (1.61) принадлежит $S'(\mathbf{R}^n)$, и сходимость в (1.61) — это слабая сходимость в $S'(\mathbf{R}^n)$.

§ 2. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений

2.1. Фундаментальные решения.

Определение 2.1. *Фундаментальным решением дифференциального оператора* $P(\partial_x)$ *и уравнения* (0.1) называется распределение $\mathcal{E}(x)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, для которого

$$P(\partial_x)\mathcal{E}(x)=\delta(x),\quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{2.1}$$

Примеры фундаментальных решений для обыкновенных уравнений приведены в (1.11). Решения уравнения (0.1) с произвольной правой частью $f(x)$ выражаются при помощи свертки с фундаментальными решениями оператора $P(\partial_x)$.

Предложение 2.1. 1) Если решение $u(x)$ уравнения (0.1) принадлежит $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, то также $f(x)\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, и

$$u(x)=\mathcal{E}*f(x). \tag{2.2}$$

2) Если правая часть $f(x)$ уравнения (0.1) принадлежит $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, то функция (2.2) является его (частным) решением.

Доказательство. 1) Если $u\in\mathcal{E}'$, то из (0.1) вытекает, что

$$\mathcal{E}*Pu=\mathcal{E}*f. \tag{2.3}$$

Но $\mathcal{E}*Pu=P\mathcal{E}*u=\delta*u=u$ согласно (1.47). Поэтому из (2.3) вытекает (2.2). 2) Если $f\in\mathcal{E}$, то для функции (2.2), ввиду (2.1), получаем

$$Pu=p\mathcal{E}*f=\delta*f=f. \tag{2.4}$$

Предложение 2.1 означает, что оператор $\mathcal{E}* : f\mapsto\mathcal{E}*f$ является левым обратным к оператору P на области определения $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ и правым обратным к P на области определения $P^{-1}\mathcal{E}'=\{u\in\mathcal{D}' : Pu\in\mathcal{E}'\}$.

Построение и изучение свойств различных фундаментальных решений дифференциальных операторов является одной из главных задач теории дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В § 1 главы 3 будет доказана

Теорема 2.1 ([18], [37], [46], [58]). Любой дифференциальный оператор $P(\partial_x)$ имеет фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, если только $P\neq0$.

Существенно труднее доказывается

Теорема 2.2 ([4], [5], [52], [57]). Любой оператор $P(\partial_x)\neq 0$ имеет умеренное фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$, т. е. $\mathscr{E}(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$.

Фундаментальное решение неединственно, т. к. к нему можно прибавить любое решение однородного уравнения. Эту неединственность иногда удается использовать для того, чтобы получать решения по формуле (2.2) при различных условиях на носитель правой части $f(x)$. Нужно лишь подобрать $\mathscr{E}(x)$ так, чтобы множества $U=\operatorname{supp}\mathscr{E}$ и $V=\operatorname{supp}f$ удовлетворяли условию (1.52′).

Тогда свертка $\mathscr{E}*f$ определена, и функция $u=\mathscr{E}*f$ является решением уравнения (0.1), что вытекает из (2.4). Таким образом, мы получаем следующее обобщение предложения 2.1:

Предложение 2.2. 1) Пусть $u(x)$ — решение уравнения (0.1), а $\mathscr{E}(x)$ — некоторое фундаментальное решение оператора $P(\partial_x)$, и множества $U=\operatorname{supp}\mathscr{E}$ и $V=\operatorname{supp}u$ удовлетворяют условию (1.52′). Тогда данное решение u выражается формулой (2.2). 2) Если $U=\operatorname{supp}\mathscr{E}$ и $V=\operatorname{supp}f$ удовлетворяют условию (1.52′), то $U=\mathscr{E}*f$ является частным решением уравнения (0.1).

2.2. Примеры фундаментальных решений.

Пример 2.1. Для нахождения решения уравнения

$$\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)u(t)=f(t),\quad t\in\mathbf{R}, \tag{2.5}$$

по формуле (2.2) в случае, когда $f(t)=0$ при $t\leqslant 0$, нужно брать фундаментальное решение

$$\mathscr{E}^{\pm}(t)=\pm\theta(\pm t)e^{-\lambda t},\quad t\in\mathbf{R}. \tag{2.5′}$$

Эти фундаментальные решения называются *запаздывающим* ($\mathscr{E}^{+}$) и *опережающим* ($\mathscr{E}^{-}$). Это связано с тем, что в случае $f\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ свертка $\mathscr{E}^{+}*f=u^{+}$, согласно (1.57), выражается формулой

$$u^{+}(t)=\mathscr{E}^{+}*f(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\mathscr{E}^{+}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad t\in\mathbf{R}, \tag{2.5″}$$

зависит лишь от $f(\tau)$ при $\tau<t$, а

$$u^{-}(t)=\mathscr{E}^{-}*f(t)=\int\limits_{t}^{\infty}\mathscr{E}^{-}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad t\in\mathbf{R}, \tag{2.5‴}$$

зависит лишь от $f(\tau)$ при $\tau>t$. Соответственно, решения (2.5″) и (2.5‴) называются *запаздывающим* и *опережающим потенциалом*.

Пример 2.2. Аналогично, для *волнового уравнения в* $\mathbf{R}^k$, $k\geqslant 1$,

$$\Box u=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta\right)u(x,t)=f(x,t),\quad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^k;\ a>0, \tag{2.6}$$

запаздывающие и опережающие фундаментальные решения [12] соответственно имеют вид ([14]):

$$\mathscr{E}_1^{\pm}=\frac{1}{2a}\,\theta(\pm at-|x|);\quad \mathscr{E}_2^{\pm}=\frac{\theta(\pm at-|x|)}{2\pi a\sqrt{(at)^2-|x|^2}};\tag{2.6′}$$

$$\mathscr{E}_3^{\pm}=\frac{\theta(\pm t)}{2\pi a}\,\delta((at)^2-|x|^2)=\frac{\theta(\pm t)}{4\pi a^2|t|}\,\delta(a|t|-|x|).$$

Эти фундаментальные решения Даламбера ($k=1$), Пуассона ($k=2$) и Кирхгофа ($k=3$) будут получены в главе 4; они позволяют находить решения уравнения $\Box u=f(x,t)$ по формуле (2.2) в случаях, когда $f=0$ при $t\leqslant 0$ соответственно.

Пример 2.3. Для *уравнения Клейна—Гордона* в $\mathbf{R}^k$

$$(\Box+m_0^2)u(x,t)=f(x,t),\quad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^k;\ m_0>0, \tag{2.7}$$

запаздывающие и опережающие фундаментальные решения при $k=1, 2, 3$ соответственно имеют вид [6], [14], [62] (переходящий в (2.6′) при $m_0\to 0$):

$$\mathscr{E}_1^{\pm}=\frac{\theta(\pm at-|x|)}{2a}\,J_0\left(m_0\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right), \tag{2.7′}$$

$$\mathscr{E}_2^{\pm}=\sqrt{\frac{m_0}{8\pi a^3}}\,\theta(\pm at-|x|)\,\frac{J_{-1/2}\left(m_0\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)}{((at)^2-x^2)^{1/4}}=$$

$$=\frac{\theta(\pm at-|x|)}{2\pi a}\,\frac{\operatorname{Cos} m_0\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\sqrt{(at)^2-x^2}},$$

$$\mathscr{E}_3^{\pm}=\frac{\theta(\pm t)}{2\pi a}\,\delta((at)^2-|x|^2)-\frac{m_0\theta(\pm at-|x|)}{4\pi a^2}\,\frac{J_1\left(m_0\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)}{\sqrt{(at)^2-x^2}}.$$

Пример 2.4. Для *уравнения теплопроводности* (*диффузии*)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)u(x,t)=f(x,t),\quad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^k;\ a>0, \tag{2.8}$$

запаздывающее фундаментальное решение имеет вид гауссовского распределения [15], [55]

$$\mathscr{E}_k^{+}(x,t)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^k}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \tag{2.8′}$$

с дисперсией $\sim a\sqrt{t}$ в момент времени $t>0$.

Пример 2.5. *Уравнение Шрёдингера*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-ia^2\Delta\right)\psi(x,t)=f(x,t),\quad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^k;\ a>0, \tag{2.9}$$

имеет запаздывающее и опережающее фундаментальные решения вида, аналогичного (2.8′) [55]:

$$\mathscr{E}_k^{\pm}(x,t)=\frac{\pm\theta(\pm t)}{(2a\sqrt{\pi i t})^k}e^{\frac{ix^2}{4a^2t}};\quad \left(\sqrt{\pm i}\equiv\frac{1\pm i\sqrt{2}}{2}\right). \tag{2.9'}$$

Пример 2.6. *Уравнение Лапласа* в $\mathbb{R}^n$

$$\Delta u(x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

имеет фундаментальные решения [14]

$$\mathscr{E}_n(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(n-2)\Omega_n}\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n\neq 2,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|}, & n=2,\end{cases} \tag{2.10'}$$

где Ω_n — площадь сферы $|x|=1$ в $\mathbb{R}^n$. В частности, $\mathscr{E}_1(x)=\frac{|x|}{2}$.

Пример 2.7. *Уравнение Гельмгольца*

$$(\Delta+\omega^2)u(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}^k,\ \omega>0, \tag{2.11}$$

получается из волнового уравнения (2.6) при подстановке $u(x,t)=u(x)e^{i\omega t}$ и $f(x,t)=f(x)e^{i\omega t}$. Его фундаментальные решения при $k=1, 2, 3$ соответственно имеют вид

$$\mathscr{E}_1^{\pm}=\frac{e^{\pm i\omega|x|}}{\pm 2i\omega},\quad \mathscr{E}_2^{\pm}=\begin{cases}-\dfrac{i}{4}H_0^{(1)}(\omega|x|)\\ \dfrac{i}{4}\overline{H_0^{(1)}(\omega|x|)}\end{cases},\quad \mathscr{E}_3^{\pm}=-\frac{e^{\pm i\omega|x|}}{4\pi|x|}, \tag{2.11'}$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля [41], [71].

Эти фундаментальные решения позволяют находить по формуле (2.2) предельную амплитуду $u(x)$ решения $u(x,t)$ по амплитуде $f(x)$ внешних источников $f(x,t)$ (сил, давления, токов и пр.). При этом свертка с $\mathscr{E}_k^+$ дает предельную амплитуду $u^+(x)$ расходящейся волны, а с $\mathscr{E}_k^-$ — амплитуду $u^-(x)$ сходящейся волны. Дело в том, что решение уравнения (2.11) неединственно, и для однозначного определения решения требуется задание «краевых условий» при $|x|\to\infty$. Амплитуда $u^+(x)$ удовлетворяет условию Зоммерфельда отсутствия излучения (из бесконечности) и соответствует волне, излучаемой источником с плотностью $f(x)$. Напротив, $u^-(x)$ соответствует волне, приходящей из бесконечности и поглощаемой средой с интенсивностью поглотителей $f(x)$. Подробности читатель найдет в [8], [22], [36].

Все фундаментальные решения (2.6′), (2.7′), (2.10′), (2.11′) будут получены единым методом в главе 4 (относительно фундаментальных решений (2.8′) и (2.9′) см. [14], [55]).

2.3. Распространение волн. По формуле (2.2) можно найти частное решение уравнения (2.6) при $f(x,t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$. А именно, из (2.6′) и (2.2) получаем частное решение уравнения (2.6) в виде (1.57):

$$u_k^{\pm}(x,t)=\langle\mathscr{E}_k^{\pm}(x-y,t-\tau), f(y,\tau)\rangle. \tag{2.12}$$

Отсюда при $k=1$

$$u_1^+(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{|y-x|\leqslant a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\right)d\tau; \tag{2.12'}$$

аналогично, при $k=2$

$$u_2^+(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{|y-x|\leqslant a(t-\tau)}\frac{f(y,\tau)\,dy}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}}\right)d\tau; \tag{2.12''}$$

и при $k=3$

$$u_3^+(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\right)d\tau. \tag{2.12'''}$$

Замечание 2.1. 1) Обозначим $Q^+=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{k+1}:|x|\leqslant at\}$, и $\mathscr{D}=\operatorname{supp} f(x,t)$. Тогда, согласно (1.48), для решений (2.12′) — (2.12‴), очевидно, $\operatorname{supp} u_k^+\subset\mathscr{D}+Q^+$, поскольку $\operatorname{supp}\mathscr{E}_k^+\subset Q^+$. Но $\mathscr{D}+Q^+$ пересекается с каждой плоскостью $t=t_0$ в $\mathbb{R}^{k+1}$ по множеству диаметра $\leqslant d+at_0$, где d — диаметр области $\mathscr{D}$. Следовательно, $u_k^+(x,t_0)=0$ при $|x|>\mathrm{const}+at_0$, т. е. «волна» $u_k^+(x,t)$ имеет резкий передний фронт и распространяется со скоростью $\leqslant a$.

С другой стороны, при $k=3$ на самом деле $\operatorname{supp}\mathscr{E}_k^+\subset Q^+\equiv\equiv\partial Q^+$, так что $\operatorname{supp} u_3^+\subset\mathscr{D}+Q^+$. Но $\mathscr{D}+Q^+$ представляет собой «раздутый» конус Q^+ толщины $\approx d$. Следовательно, $u_3^+(x,t_0)=0$ при $|x|\leqslant at_0-\mathrm{const}$, т. е. волна u_3^+ имеет также резкий и задний фронт. Оказывается (см. гл. 4, следствие 4.1), при всех нечетных $k\geqslant 3$, аналогично, для волнового уравнения (2.6) в $\mathbb{R}^k$ существует (и единственно по предложению 6.2 главы 5) запаздывающее фундаментальное решение $\mathscr{E}_k^+$, сосредоточенное на конусе Q^+. Следовательно, при этом «запаздывающие» решения $u_k^+\equiv\mathscr{E}_k * f$ уравнения (2.6) при $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{k+1})$ имеют резкий передний и задний фронт. Напротив, при всех четных $k\geqslant 2$ и при $k=1$ $\operatorname{supp}\mathscr{E}_k^+$ совпадает с Q^+, и решения u_k^+ резкого заднего фронта, вообще говоря, не имеют (как говорят, имеет место «диффузия» волн). 2) Для уравнения Клейна — Гордона (2.7) при всех $k=1, 2, 3,\ldots$ запаздывающее фундаментальное решение $\mathscr{E}_k^+$ сосредоточено в Q^+, но не в Q^+ (см. формулу (5.12) главы 4). Следовательно, «запаздывающие» решения $u_k^+\equiv f*\mathscr{E}_k^+$ уравнения (2.7) при всех k имеют резкий передний фронт и распространяются со скоростью $\leqslant a$, а резкого заднего фронта, вообще говоря, не имеют.

3) Для уравнений теплопроводности (2.8) и Шрёдингера (2.9) при всех $k=1, 2, 3,\ldots$ носители запаздывающих фундаментальных решений $\mathscr{E}_j^+$ совпадают со всем полупространством $t>0$.

Поэтому запаздывающие решения $u \equiv \mathscr{E}_k * f$ не имеют переднего фронта (как и заднего), т. е. скорость их распространения бесконечна.

2.4. Построение фундаментальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. При $n=1$ фундаментальные решения легко строятся для любого оператора $P \neq 0$. А именно, если $p_m \neq 0$, то обозначим через $\mathscr{E}_+(x)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} P\mathscr{E}_+(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k \mathscr{E}_+^{(k)}(x) = 0, \quad x > 0, \\ \mathscr{E}_+(0+) = 0, \dots, \mathscr{E}_+^{(m-2)}(0+) = 0, \quad \mathscr{E}_+^{(m-1)}(0+) = 1/p_m. \end{cases} \tag{2.14}$$

Лемма 2.1. Продолжим $\mathscr{E}_+(x)$ нулем для $x<0$: положим

$$\mathscr{E}(x) = \begin{cases} \mathscr{E}_+(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Тогда $\mathscr{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора

$$P = \sum_{k=0}^{m} p_k \frac{d^k}{dx^k}.$$

Доказательство. По формуле (1.10), последовательно получаем для $k=0, \dots, m-1$:

$$\mathscr{E}^{(k)}(x) = \{\mathscr{E}^{(k)}(x)\}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.16}$$

Поскольку $h_k = \mathscr{E}^{(k-1)}(0+) - \mathscr{E}^{(k-1)}(0-) = 0$ при $k = 1, \dots, m-1$, ввиду (2.14), (2.15), а для $k=m$

$$\mathscr{E}^{(m)}(x) = \{\mathscr{E}^{(m)}(x)\} + \frac{1}{p_m} \delta(x). \tag{2.17}$$

Умножая (2.16), (2.17) на p_k и p_m и суммируя, получаем (2.1), поскольку $\mathscr{E}(x)$ при $x \neq 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$P\mathscr{E}(x) = 0.$$

2.5. Теорема о среднем. Основой для изучения гладкости решений уравнений (0.1) является следующая *теорема о среднем* [18], [37].

Пусть точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и $\varphi(x)$, $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\hat{\varphi}}(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, причем $x_0 \in \omega$, где ω — открытая область в $\mathbf{R}^n$ и, кроме того,

$$\begin{gathered} \varphi(x) \equiv 1 \text{ при } x \in \omega, \quad \hat{\varphi}(x) \equiv 1 \text{ при } x \in \operatorname{supp} \varphi, \\ \hat{\hat{\varphi}}(x) \equiv 1 \text{ при } x \in \operatorname{supp} \hat{\varphi}. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Пусть $u(x)$ — произвольное решение уравнения (0.1) в некоторой области $\Omega \supset \operatorname{supp} \hat{\hat{\varphi}} \supset \omega$. Обозначим

$$w(x) = \hat{\hat{\varphi}}(x)(1 - \varphi(x)) u(x). \tag{2.19}$$

Очевидно

$$\operatorname{supp} w \subset \operatorname{supp} \hat{\hat{\varphi}} \setminus \omega. \tag{2.20}$$

Лемма 2.2. Пусть $\mathscr{E}(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ — произвольное фундаментальное решение оператора $P(\partial_x)$. Тогда $u(x)$ при $x \in \omega$ выражается через f и w следующим образом:

$$u(x) = \mathscr{E} * (\hat{\varphi} f - Pw)(x), \quad x \in \omega. \tag{2.21}$$

Доказательство. Из (0.1) следует, что

$$\begin{aligned} P(\varphi u) &= f - P((1-\varphi)u) = \varphi(f - P((1-\varphi)u)) = \\ &= \hat{\varphi} f - P(\hat{\hat{\varphi}}(1-\varphi)u). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Отсюда, поскольку $\varphi u \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, то

$$\varphi u = \mathscr{E} * (\hat{\varphi} f - Pw). \tag{2.23}$$

Отметим, что формула (2.21) выражает решение $u(x)$ при $x \in \omega$ через правую часть уравнения (0.1) и «значения» решения $u(x)$ в области $\operatorname{supp} \hat{\hat{\varphi}} \setminus \omega$. Таким образом, (2.21) является аналогом формулы Пуассона для гармонических функций.

Следствие 2.1. Если $f(x) \in C^\infty(\Omega)$, а решение $u(x)$ уравнения (0.1) — гладкое в окрестности $\partial\Omega$, то $u(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем область $\omega \subset \Omega$ так, чтобы $u \in C^\infty(\Omega \setminus \omega)$, и функции φ, $\hat{\varphi}$, $\hat{\hat{\varphi}} \in C_0^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие условиям (2.18). Тогда $\hat{\varphi} f \in C_0^\infty(\Omega)$ и $w \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому из (2.21) следует, что $u \in C^\infty(\omega)$.

Формула (2.21) позволяет также получать гораздо более тонкие результаты о гладкости решений уравнений вида (0.1) (см. [23]).

Глава 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе строятся разложения вида (0.2) для любых обобщенных функций и изучаются свойства этих разложений.

§ 1. Преобразование Фурье основных функций

1.1. Преобразование Фурье быстроубывающих функций. Любую функцию $\varphi(x) \in S(\mathbf{R}^n)$, в частности $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, можно разложить в *интеграл Фурье*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\xi} \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi \equiv F^{-1}\varphi; \quad x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n, \tag{1.1}$$

где «коэффициенты Фурье» $\tilde{\varphi}(\xi)$ находятся по формуле

$$\tilde{\varphi}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}\varphi(x)\,dx\equiv F\varphi,\quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.2}$$

Через F мы обозначили оператор преобразования $\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$, а через F^{-1} — обратный оператор $\tilde{\varphi}\mapsto\varphi$.

1.2. Свойства преобразования Фурье.

1) Формулы дифференцирования. Из (1.1) и (1.2) вытекает, что $\partial_x^\alpha\varphi(x)=(2\pi)^{-n}\int(-i\xi)^\alpha e^{-ix\xi}\tilde{\varphi}(\xi)\,d\xi$ и $\partial_\xi^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)=\int(ix)^\alpha e^{ix\xi}\varphi(x)\,dx$ для $\forall\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Поэтому для $\varphi\in S$

$$F\partial_x^\alpha\varphi=(-i\xi)^\alpha\tilde{\varphi}(\xi),\quad F(x^\alpha\varphi(x))=(-i\partial_\xi)^\alpha\ \forall\alpha. \tag{1.3}$$

2) Формулы сдвига. Из (1.1) вытекает, что для $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$

$$F(\varphi(x+a))=e^{-ia\xi}\tilde{\varphi}(\xi),\quad F(e^{iax}\varphi(x))=\tilde{\varphi}(\xi+a)\ \forall a\in\mathbf{R}^n. \tag{1.4}$$

3) Предложение 1.1 ([18], [37]). Оператор F является изоморфизмом $S(\mathbf{R}^n)$ на $S(\mathbf{R}^n)$.

4) Определим свертку $\varphi*\psi$ для $\varphi,\psi\in S(\mathbf{R}^n)$ по формуле (1.45) главы 1. Тогда, по теореме Фубини, для $\xi\in\mathbf{R}^n$

$$F(\varphi*\psi)(\xi)=\int e^{ix\xi}\left(\int\varphi(x-y)\psi(y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int e^{i\xi y}\left(\int e^{i\xi(x-y)}\varphi(x-y)\,dx\right)\psi(y)\,dy=\tilde{\varphi}(\xi)\tilde{\psi}(\xi),$$

$$F(\varphi\psi)(\xi)=\int e^{ix\xi}\varphi(x)\left((2\pi)^{-n}\int e^{-ix\eta}\tilde{\psi}(\eta)\,d\eta\right)dx=(2\pi)^{-n}(\tilde{\varphi}*\tilde{\psi})(\xi).$$

Итак, для $\varphi,\psi\in S(\mathbf{R}^n)$

$$F(\varphi*\psi)(\xi)=\tilde{\varphi}(\xi)\tilde{\psi}(\xi),\quad F(\varphi\psi)(\xi)=(2\pi)^{-n}(\tilde{\varphi}*\tilde{\psi})(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.5}$$

1.3. Преобразование Фурье финитных функций. Если $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, то из (1.2) видно, что $\tilde{\varphi}(\xi)$ — целая функция на $\mathbf{C}^n$. При этом

$$|\tilde{\varphi}(\xi)|\leqslant Ce^{A|\mathrm{Im}\,\xi|},\quad \xi\in\mathbf{C}^n, \tag{1.6}$$

если $\varphi(x)\equiv0$ при $|x|>A$. Обозначим $\mathscr{D}_A\equiv\{\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n):\varphi(x)\equiv0$ при $|x|>A\}$. Если $\varphi\in\mathscr{D}_A$, то $x^\alpha\varphi(x)\in\mathscr{D}_A$, и $\partial_x^\alpha\varphi(x)\in\mathscr{D}_A$. Поэтому, ввиду (1.3), функции $\partial_\xi^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)$ и $\xi^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)$ также удовлетворяют оценкам вида (1.6).

Теорема 1.1 (Пэли — Винер, [12], [18], [37]). Если $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, то $\tilde{\varphi}(\xi)$ — целая функция на $\mathbf{C}^n$ и для любых α и $N>0$

$$(1+|\xi|)^N|\partial_\xi^\alpha\tilde{\varphi}(\xi)|\leqslant C_{\alpha,N}e^{A|\mathrm{Im}\,\xi|},\quad \xi\in\mathbf{C}^n \tag{1.7}$$

при некоторых $A, C_{\alpha,N}\geqslant0$, зависящих от φ. Обратно, если $\tilde{\varphi}(\xi)$ — произвольная целая функция на $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющая оценкам вида (1.7) для любых α, N, то $\varphi(x)\equiv F^{-1}\tilde{\varphi}\in\mathscr{D}_A(\mathbf{R}^n)$.

Определение 1.1. Через $Z=Z(\mathbf{C}^n)$ обозначается пространство целых функций $\tilde{\varphi}$ в $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющих оценкам вида (1.7) при $\forall\alpha, N$. По определению, последовательность $\psi_k\in Z$ сходится к $0\in Z$ ($\psi_k\xrightarrow{Z}0$), если при некотором $A>0$

$$|\psi_k|_{\alpha,N}\equiv\sup_{\xi\in\mathbf{C}^n}e^{-A|\mathrm{Im}\,\xi|}(1+|\xi|)^N|\partial_\xi^\alpha\psi_k(\xi)|\underset{k\to\infty}{\to}0\ \forall\alpha,N. \tag{1.8}$$

Теорема 1.1′ ([18], [37]). Оператор $F:\mathscr{D}\to Z$ непрерывен, и обратный $F^{-1}:Z\to\mathscr{D}$ — также.

Для $\varphi\in\mathscr{D}$ справедливы все свойства преобразования Фурье (1.3), (1.4), причем второе равенство в (1.4) справедливо при всех $a\in\mathbf{C}^n$.

§ 2. Преобразование Фурье умеренных обобщенных функций

2.1. Замыкание преобразования Фурье по непрерывности. Преобразование Фурье $F:S\to S$ оказывается возможно продолжить по непрерывности на $S'(\mathbf{R}^n)$. Для этого нужно заметить, что при любых $u\in S(\mathbf{R}^n)$ справедливо *равенство Парсеваля*

$$\langle\tilde{u}(\xi),\varphi(\xi)\rangle=\langle u(x),\tilde{\varphi}(x)\rangle\quad\forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n), \tag{2.1}$$

которое получается непосредственно из (1.2). Отсюда замыканием по непрерывности получаем

Определение 2.1. Для $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$ функционал $Fu=\tilde{u}(\xi)$ определяется тождеством (2.1).

Предложение 2.1. Оператор $F:u\mapsto\tilde{u}$ непрерывно действует из $S'(\mathbf{R}^n)$ в $S'(\mathbf{R}^n)$. Аналогично, оператор $F^{-1}:\tilde{u}\mapsto u$ является непрерывным отображением $S'(\mathbf{R}^n)$ на $S'(\mathbf{R}^n)$.

Пример 2.1. 1) Для $u(x)=\delta(x)$ при $\forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$, в силу (1.2),

$$\langle\tilde{\delta},\varphi\rangle=\langle\delta,\tilde{\varphi}\rangle=\tilde{\varphi}(0)=\int\varphi(\xi)\,d\xi=\langle1,\varphi\rangle\Rightarrow\tilde{\delta}(\xi)\equiv1,\quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{2.2}$$

2) Обратно, для $u(x)\equiv1$ имеем, в виду (1.1),

$$\langle\tilde{1},\varphi\rangle=\langle1,\tilde{\varphi}\rangle=\int\tilde{\varphi}(x)\,dx=(2\pi)^n\varphi(0)\Rightarrow\tilde{1}=(2\pi)^n\delta(x). \tag{2.3}$$

2.2. Свойства преобразования Фурье.

1) Из (1.3) замыканием по непрерывности получаем для $\forall u\in S'(\mathbf{R}^n)$

$$F(\partial_x^\alpha u(x))=(-i\xi)^\alpha\tilde{u}(\xi),\quad F(x^\alpha u(x))=(-i\partial_\xi)^\alpha\tilde{u}(\xi)\ \forall\alpha. \tag{2.4}$$

Следствие 2.1. Для любого оператора $P(\partial_x)$ вида (0.1)

$$F(P(\partial_x)u(x))=P(-i\xi)\tilde{u}(\xi)=\tilde{P}(\xi)\tilde{u}(\xi),\quad u\in S'(\mathbf{R}^n), \tag{2.5}$$

где $P(-i\xi)=\tilde{P}(\xi)$ — многочлен:

$$P(-i\xi)\equiv\tilde{P}(\xi)=\sum_{|\alpha|<m}p_\alpha(-i\xi)^\alpha,\quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{2.6}$$

Определение 2.2. Многочлен $\widetilde{P}(\xi)\equiv P(-i\xi)$ называется *символом оператора* $P(\partial_x)$.

Из (2.2), (2.3), ввиду (2.4), получаются формулы

$$F(\delta^{(\alpha)}(x))=(-i\xi)^{\alpha}, \quad Fx^{\alpha}=(2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}\delta^{(\alpha)}(\xi) \ \forall\alpha. \qquad (2.7)$$

2) Из (1.4) замыканием по непрерывности, получаем

$$F(u(x+a))=e^{-ia\xi}\widetilde{u}(\xi), \quad F(e^{iax}u(x))=\widetilde{u}(\xi+a), \quad a\in\mathbf{R}^n, \quad u\in S'(\mathbf{R}^n). \qquad (2.8)$$

Например, отсюда, ввиду (2.2), (2.3), получаются формулы

$$F(\delta(x+a))=e^{-ia\xi}, \quad F(e^{iax})=(2\pi)^n\delta(\xi+a), \quad a\in\mathbf{R}^n. \qquad (2.9)$$

3) Из (1.5) замыканием по непрерывности, нетрудно вывести, что

$$F(u*v)=\widetilde{u}(\xi)\widetilde{v}(\xi) \text{ для } (u,v)\in S\times S' \text{ (или } S'\times S). \qquad (2.10)$$

Аналогично, из (1.5) можно вывести, что

$$F(uv)=\widetilde{u}*\widetilde{v} \text{ для } u\in S'(\mathbf{R}^n), \quad v\in S(\mathbf{R}^n). \qquad (2.11)$$

Свертку $\widetilde{u}*\widetilde{v}$ здесь можно определить, например, по формуле (1.57) главы 1.

4) Теория Парсеваля. Заметим, что $F: S'(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)$ изоморфизм, согласно предложению 2.1. В частности, $F: L_2(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 2.1. (Парсеваль, [18], [37], [68]). Оператор F является изоморфизмом $L_2(\mathbf{R}^n)$ на $L_2(\mathbf{R}^n)$, причем

$$\int|\widetilde{u}(\xi)|^2d\xi=(2\pi)^n\int|u(x)|^2dx. \qquad (2.12)$$

5) Линейные замены переменных. Если $C\in GL_{\mathbf{R}}(n)$, то для $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$ обозначим $u_C(y)=u(Cy)$, $y\in\mathbf{R}^n$ (см. формулу (1.33) главы 1). Тогда

$$\widetilde{u}_C(\eta)=\frac{1}{|\det C|}\widetilde{u}((C^{-1})^t\eta), \quad \eta\in\mathbf{R}^n. \qquad (2.13)$$

В частности, если $C\in O(n)$, то

$$\widetilde{u}_C(\eta)=\widetilde{u}(C\eta)=(\widetilde{u})_C(\eta), \quad \eta\in\mathbf{R}^n. \qquad (2.14)$$

Действительно, для $u(x)\in S$ формула (2.13) вытекает из (1.2):

$$\widetilde{u}_C(\eta)=\int e^{iy\eta}u(Cy)\,dy=$$

$$=\int e^{i(C^{-1}x)\eta}u(x)\frac{dx}{|\det C|}=\frac{1}{|\det C|}\widetilde{u}((C^{-1})^t\eta), \quad \eta\in\mathbf{R}^n,$$

а для $u\in S'$ она получается замыканием по непрерывности.

Следствие 2.2. Из (2.14) вытекает, что при ортогональных замеиах координат в $\mathbf{R}^n$ преобразование Фурье $\widetilde{u}(\xi)$ обобщенной функции $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$ преобразуется как (инвариантно определенная) обобщенная функция на $\mathbf{R}^n$. Поэтому, в силу (2.5) символ $\widetilde{P}(\xi)$ дифференциального оператора $P(\partial_x)$ при ортогональных заменах переменных также преобразуется как инвариантно определенная функция на $\mathbf{R}^n$.

С другой стороны, при общих заменах переменных $C\in GL_{\mathbf{R}}(n)$ (2.13) и (2.5) получаем, что символ $\widetilde{P}_C$ оператора $P(\partial_x)$ в координатах $y=C^{-1}x$ имеет вид

$$\widetilde{P}_C(\eta)=\widetilde{P}((C^{-1})^t\eta), \quad \eta\in\mathbf{R}^n. \qquad (2.15)$$

Следствие 2.3. Символ P оператора P является инвариантно определенной функцией на $\mathbf{R}^{n*}$ — двойственном к $\mathbf{R}^n$ пространстве, состоящем из линейных (непрерывных) функционалов на $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Пусть $l:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ — линейный функционал, задаваемый в координатах $(x_1,\ldots,x_n)$ строкой $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$, т. е. $l(x)=\xi x=\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n$. Тогда в координатах $y=C^{-1}x$ тот же функционал l имеет вид

$$l_c(y)=l(x)=\xi\cdot Cy=C^t\xi\cdot y=\eta\cdot y, \qquad (2.16)$$

т. е. он задается строкой $\eta=C^t\xi$. Но тогда из (2.15) вытекает, что

$$\widetilde{P}_C(\eta)=\widetilde{P}_C(C^t\xi)=\widetilde{P}(\xi), \quad \xi\in\mathbf{R}^n, \qquad (2.17)$$

т. е. значения $\widetilde{P}_C$ и $\widetilde{P}$ совпадают на одном и том же функционале $l\in\mathbf{R}^{n*}$.

2.3. Методы вычисления преобразования Фурье. Формула (1.2) пригодна для вычисления преобразования Фурье широкого класса обобщенных функций, а не только для $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$.

Лемма 2.1. Если $u(x)\in L_1(\mathbf{R}^n)$, то $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$ и $\widetilde{u}(\xi)\in C_b(\mathbf{R}^n)$, причем (ср. с (1.2))

$$(Fu)(\xi)=\widetilde{u}(\xi)=\int e^{ix\xi}u(x)\,dx, \quad \xi\in\mathbf{R}^n;$$
$$\max_{\xi\in\mathbf{R}^n}|\widetilde{u}(\xi)|\leqslant\int|u(x)|\,dx. \qquad (2.18)$$

Доказательство. Из определения 2.1 и (1.2), для $\forall\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$, по теореме Фубини,

$$\langle\widetilde{u},\varphi\rangle=\int u(x)\Big(\int e^{ix\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\Big)dx=\int\Big(\int e^{ix\xi}u(x)\,dx\Big)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда получаем (2.18) и, следовательно, $\widetilde{u}\in C_b(\mathbf{R}^n)$.

Следствие 2.4. Если $u(x)\in L_1^{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, и при некотором $N=1,2,\ldots$ удовлетворяет оценке

$$\int\frac{|u(x)|}{(1+|x|^2)^N}dx<\infty. \qquad (2.18')$$

то $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$, и

$$Fu=\tilde{u}(\xi)=(1-\Delta_\xi)^N\int e^{ix\xi}\frac{u(x)}{(1+|x|^2)^N}\,dx, \qquad (2.18'')$$

как вытекает из второй формулы в (2.4), причем производные понимаются в смысле обобщенных функций.

Пример 2.2. Если $u(x)\in L_2(\mathbf{R})$, то $\frac{u(x)}{x+i}\in L_1(\mathbf{R})$ по неравенству Коши — Буняковского. Поэтому, аналогично (2.18″),

$$\tilde{u}(\xi)=\left(-i\frac{d}{d\xi}+i\right)\int e^{ix\xi}\frac{u(x)}{x+i}\,dx, \quad \xi\in\mathbf{R}, \qquad (2.18'')$$

(ср. [68]).

Лемма 2.2 ([55]). Если $u(x)\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, то $\tilde{u}(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем

$$\tilde{u}(\xi)=\langle u(x),\ e^{ix\xi}\rangle, \quad \xi\in\mathbf{R}^n, \qquad (2.19)$$

где скалярное произведение понимается в смысле формулы (1.40) главы 1.

Пример 2.3.

$$F(\delta^{(\alpha)}(x))(\xi)=\langle\delta^{(\alpha)}(x),\ e^{ix\xi}\rangle=(-i\xi)^\alpha;$$
$$F(\delta(x-h))(\xi)=\langle\delta(x-h),\ e^{ix\xi}\rangle=e^{ih\xi}. \qquad (2.19')$$

2.4. Примеры вычисления преобразований Фурье.

1) Для гауссова одномерного распределения с дисперсией $\sigma>0$

$$F\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}=\int\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}+ix\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma}}\,dx=\int\frac{e^{-\frac{(x-i\sigma\xi)^2}{2\sigma}-\frac{\sigma\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}\,dx=e^{-\frac{\sigma\xi^2}{2}}. \qquad (2.20)$$

2) Замыкая контур интегрирования вверх (в область $\operatorname{Im}x>0$) при $\xi>0$ и вниз (в область $\operatorname{Im}x<0$) при $\xi<0$, по теореме Коши о вычетах, получаем для $a\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$, как в (2.18″),

$$F\frac{1}{x-a}=\begin{cases}2\pi i\theta(\xi)e^{ia\xi} & \text{при } \operatorname{Im}\xi>0,\\ -2\pi i\theta(-\xi)e^{ia\xi} & \text{при } \operatorname{Im}\xi<0.\end{cases} \qquad (2.21)$$

3) Отсюда для распределения Коши $\frac{1}{1+x^2}$

$$F\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}F\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)=$$
$$=\pi\theta(\xi)e^{-\xi}+\pi\theta(-\xi)e^{\xi}=\pi e^{-|\xi|}. \qquad (2.22)$$

4) Для $\operatorname{Re}\lambda>0$

$$F(\theta(x)e^{-\lambda x})=\int_0^\infty e^{-(\lambda-i\xi)x}\,dx=i\frac{1}{\xi+i\lambda}. \qquad (2.23)$$

и, аналогично,

$$F(\theta(-x)e^{\lambda x})=-i\frac{1}{\xi-i\lambda}. \qquad (2.23')$$

5) Отсюда, в силу непрерывности преобразования Фурье, получаем при $\lambda\to0+$:

$$F(\theta(x))(\xi)=i\frac{1}{\xi+i0},$$

и аналогично,

$$F(\theta(-x))(\xi)=-i\frac{1}{\xi-i0}. \qquad (2.24)$$

6) Складывая эти равенства, получаем *формулу* «скачка» *Сохоцкого — Племеля*:

$$F(1)(\xi)=2\pi\delta(x)=i\left(\frac{1}{\xi+i0}-\frac{1}{\xi-i0}\right). \qquad (2.25)$$

7) Из (2.23), в силу (2.4), получаем для $\operatorname{Re}\lambda>0$, $k=0, 1, \ldots$

$$F(\theta(x)x^ke^{-\lambda x})(\xi)=\left(-i\frac{d}{d\xi}\right)^k\frac{1}{i}\frac{1}{\xi+i\lambda}=\frac{i^{k-1}k!}{(\xi+i\lambda)^{k+1}} \qquad (2.26)$$

и, аналогично, из (2.23′) получаем

$$F(\theta(-x)x^ke^{\lambda x})(\xi)=-\frac{i^{k+1}k!}{(\xi-i\lambda)^{k+1}}. \qquad (2.27)$$

§ 3. Соболевские пространства функций

Определение 3.1 ([2], [15], [55], [67]). Для $s\in\mathbf{R}$ через $H_s=H_s(\mathbf{R}^n)$ обозначается пространство обобщенных функций $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$, у которых $\tilde{u}(\xi)\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ и

$$\|u\|_s^2=\int(1+|\xi|)^{2s}|\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi<\infty. \qquad (3.1)$$

Пример 3.1. $\delta(x)\in H_s(\mathbf{R}^n)$ при $<-n/2$, поскольку $\tilde{\delta}(\xi)\equiv1$.

Пространство H_s — полное гильбертово пространство, поскольку отображение $u(x)\mapsto(1+|\xi|)^s\tilde{u}(\xi)$ является изометрией $H_s(\mathbf{R}^n)$ на $L_2(\mathbf{R}^n)$. Очевидно, $H_{s_1}(\mathbf{R}^n)\subset H_{s_2}(\mathbf{R}^n)$ — непрерывное вложение при $s_1\geqslant s_2$. Если $s=l=0, 1, 2, \ldots$, то $(u(x)\in H_s)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\partial_x^\alpha u(x)\in L_2(\mathbf{R}^n)$ при $|\alpha|\leqslant m)$, и метрика (3.1) эквивалентна метрике (см. [2], [15])

$$|||u|||_l^2=\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int_{\mathbf{R}^n}|\partial_x^\alpha u(x)|^2\,dx. \qquad (3.2)$$

Это вытекает из теоремы 2.1, ввиду (2.4). Легко показать, что $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ всюду плотно в $H_s(\mathbf{R}^n)$ при $s\in\mathbf{R}$ (см. [55]).

Предложение 3.1. При $s\in\mathbf{R}$ оператор P вида (0.1) непрерывно действует из $H_s(\mathbf{R}^n)$ в $H_{s-m}(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Для $u\in H_s(\mathbf{R}^n)$, ввиду (2.5),

$$\|Pu\|_{s-m}^2=\int(1+|\xi|)^{2(s-m)}|\widetilde{Pu}(\xi)|^2\,d\xi=$$
$$=\int(1+|\xi|)^{2(s-m)}|\tilde{P}(\xi)|^2|\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant C\int(1+|\xi|)^{2s}|\tilde{u}(\xi)|^2=C\|u\|_s^2.$$

§ 4. Преобразование Фурье быстрорастущих обобщенных функций

4.1. Функционалы на пространстве $Z(\mathbf{C}^n)$.

Определение 4.1. Через $Z'=Z'(\mathbf{C}^n)$ обозначается пространство линейных непрерывных функционалов на $Z(\mathbf{C}^n)$ (см. определение 1.1).

Например, если $w(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$, то скалярное произведение $\langle w(\xi), \varphi|_{\mathbf{R}^n}\rangle$ определено при $\varphi\in Z(\mathbf{C}^n)$, поскольку $\varphi|_{\mathbf{R}^n}\in S(\mathbf{R}^n)$, ввиду оценок (1.7). Положим

$$\langle v(z), \varphi(z)\rangle = \langle w(\xi), \varphi|_{\mathbf{R}^n}\rangle, \quad \varphi\in Z(\mathbf{C}^n). \tag{4.1}$$

Тогда $v(z)\in Z'(\mathbf{C}^n)$, поскольку отображение $\varphi\mapsto\varphi|\mathbf{R}^n$ является непрерывным вложением $Z(\mathbf{C}^n)\subset S(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, $Z(\mathbf{C}^n)$ всюду плотно в $S(\mathbf{R}^n)$, поскольку $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ всюду плотно в $S(\mathbf{R}^n)$, а $F: S(\mathbf{R}^n)\to S(\mathbf{R}^n)$ — изоморфизм, согласно предложению 1.1, и $F:\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\to Z(\mathbf{C}^n)$ — изоморфизм по теореме 1.1′. Следовательно, двойственное отображение $S'(\mathbf{R}^n)\to Z'(\mathbf{C}^n)$, переводящее w в v по формуле (4.1), также является вложением. Итак, $S'(\mathbf{R}^n)$ является подмножеством в $Z'(\mathbf{C}^n)$.

Построим примеры более общих функционалов из $Z'(\mathbf{C}^n)$. Возьмем $w(\xi,\eta)\in S'(\mathbf{R}^{2n})$, где $\mathbf{R}^{2n}$ — овеществление комплексного пространства $\mathbf{C}^n$. Предположим, что при некотором $B\geqslant 0$

$$\operatorname{supp} w\subset T_B,$$

где

$$T_B=\{z=\xi+i\eta\in\mathbf{C}^n: |\eta|\leqslant B\},\ \xi,\ \eta\in\mathbf{R}^n. \tag{4.2}$$

Возьмем срезающую функцию

$$\zeta_B(\eta)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),\ \zeta_B(\eta)=1 \text{ при } |\eta|\leqslant B,\ \zeta_B(\eta)=0 \text{ при } |\eta|\geqslant B+1. \tag{4.3}$$

Тогда из оценок (1.7) вытекает, что $\zeta_B(\eta)\varphi(\xi+i\eta)\in S(\mathbf{R}^{2n})$ при $\varphi\in Z(\mathbf{C}^n)$. Определим скалярное произведение

$$\langle w(\xi,\eta), \varphi(\xi+i\eta)\rangle=\langle w(\xi,\eta), \zeta_B(\eta)\varphi(\xi+i\eta)\rangle, \ \varphi\in Z(\mathbf{C}^n), \tag{4.4}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в правой части — двойственность между $S'(\mathbf{R}^{2n})$ и $S(\mathbf{R}^{2n})$.

Функционал (4.4) не зависит от выбора функции ζ_B со свойствами (4.3) и, ввиду определения 1.1, он непрерывен на пространстве $Z(\mathbf{C}^n)$.

Определение 4.2. Функционал $v(z)\in Z'(\mathbf{C}^n)$ имеет локальную плотность $w(\xi,\eta)$ на множестве T_B, если он допускает представление

$$\langle v(z), \varphi(z)\rangle=\langle w(\xi,\eta), \varphi(\xi+i\eta)\rangle, \ \varphi\in Z(\mathbf{C}^n), \tag{4.5}$$

где $w(\xi,\eta)\in S'(\mathbf{R}^{2n})$ и $\operatorname{supp} w\subset T_B$.

Пример 4.1. $\langle\delta_{2n}(\xi,\eta), \varphi(\xi+i\eta)\rangle=\varphi(0)$, $\langle\delta_n(\eta), \varphi(\xi+i\eta)\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(\xi)d\xi$.

Отметим, что функционал (4.1) также имеет локальную плотность $w(\xi,\eta)=w(\xi)\times\delta_n(\eta)$.

4.2. Преобразование Фурье на пространстве $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Предложение 4.1. Оператор $F: S'(\mathbf{R}^n)\to S'(\mathbf{R}^n)$, определенный тождеством (2.1), допускает продолжение до непрерывного отображения $F:\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\to Z'(\mathbf{C}^n)$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S'(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{F} & S'(\mathbf{R}^n)\\ \cap & & \cap\\ \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow{F} & Z'(\mathbf{R}^n)\end{array}$$

становится коммутативной. Здесь вложение $S'\subset Z'$ определяется по формуле (4.1).

Доказательство. Из определения (2.1) следует, что для $u\in S'$

$$\langle\tilde u(\xi), \varphi(\xi)\rangle=\langle u(x), \tilde\varphi(x)\rangle, \quad \varphi\in Z(\mathbf{C}^n). \tag{4.6}$$

Отсюда, замыканием по непрерывности, получаем

Определение 4.3. Для $u\in\mathscr{D}'$ определим $\tilde u$ тождеством (4.6).

Остается заметить, что отображение $F:\varphi\mapsto\tilde\varphi$ непрерывно действует из $Z(\mathbf{C}^n)$ в $\mathscr{D}(\mathbf{C}^n)$, также как и оператор F^{-1} (см. теорему 1.1′).

Из определения (4.6) вытекает, в силу теоремы 1.1′

Предложение 4.1′. Оператор $F:\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\to Z'(\mathbf{C}^n)$ непрерывен и $F^{-1}: Z'(\mathbf{C}^n)\to\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ — также непрерывен.

4.3. Операции на пространстве $Z'(\mathbf{C}^n)$. Поскольку $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ плотно в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, а $F:\mathscr{D}'\to Z'$ — изоморфизм, то $Z=F(\mathscr{D})$ плотно в Z'. На Z определены операции дифференцирования, умножения на многочлен и на экспоненту e^{iaz}, где $a\in\mathbf{R}^n$, линейные вещественные замены координат и сдвиг на любой комплексный вектор. Все эти операции продолжаются по непрерывности на $v\in Z'$ следующими тождествами: для $\varphi\in Z(\mathbf{C}^n)$

$$\begin{gathered}\langle\partial_z^\alpha v(z), \varphi(z)\rangle=\langle v(z), (-\partial_z)^\alpha\varphi(z)\rangle\quad\forall\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\\ \langle z^\alpha v(z), \varphi(z)\rangle=\langle v(z), z^\alpha\varphi(z)\rangle,\\ \langle e^{iaz}v(z), \varphi(z)\rangle=\langle v(z), e^{iaz}\varphi(z)\rangle,\quad a\in\mathbf{R}^n,\\ \langle v(z+a), \varphi(z)\rangle=\langle v(\zeta), \varphi(\zeta-a)\rangle,\quad a\in\mathbf{C}^n,\\ \langle v(Cz), \varphi(z)\rangle=\langle v(\zeta), \frac{1}{|\det C|}\varphi(C^{-1}\zeta)\rangle,\quad C\in GL_{\mathbf{R}}(n).\end{gathered} \tag{4.7}$$

4.4. Свойства преобразования Фурье. Для $u\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, замыканием по непрерывности, получаем из (2.4), (2.5), (2.8) тождества

$$F(\partial_x^\alpha u)=(-iz)^\alpha\tilde u(z),\quad F(x^\alpha u)=(-i\partial_z)^\alpha\tilde u(z)\ \forall\alpha,$$

$$F(P(\partial_x)u)=\tilde{P}(z)\tilde{u}(z),$$
$$F(u(x+a))=e^{-iaz}\tilde{u}(z),\quad a\in\mathbf{R}^n, \tag{4.8}$$
$$F(e^{iax}u(x))=\tilde{u}(z+a),\quad a\in\mathbf{C}^n.$$

Отметим, что последнее тождество справедливо при всех $a\in\mathbf{C}^n$ для $u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ (как и для $u\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$), в отличие от второй формулы в (2.8).

4.5. Аналитические функционалы. Так называются функционалы $v(z)\in Z'$, имеющие аналитическую локальную плотность [18]. Точнее, пусть $f(z)$ — голоморфная функция от $z\in T_\Omega$, где Ω — связная область в $\mathbf{R}^n$, а

$$T_\Omega=\{z=\xi+i\eta\in\mathbf{C}^n:\eta=\operatorname{Im}z\in\Omega\} \tag{4.9}$$

— трубчатая область в $\mathbf{C}^n$ с основанием Ω. Предположим, что при $\forall B>0$ при некоторых $C=C_B$ и $\mu=\mu_B$

$$|f(z)|\leqslant C(1+|z|)^\mu \text{ при } z\in T_\Omega,\ |\operatorname{Im}z|\leqslant B. \tag{4.10}$$

Тогда можно определить *аналитический функционал* (см. [18])

$$\langle f|_{T_\Omega},\varphi\rangle=\int\limits_{\operatorname{Im}z=\eta}f(z)\varphi(z)\,dz,\quad \varphi\in Z;\ \eta\in\Omega. \tag{4.11}$$

Этот функционал не зависит от выбора $\eta\in\Omega$, что легко выводится из теоремы Коши, связности области Ω и оценок (4.10), (1.7). Отметим, что область Ω и (T_Ω) можно считать выпуклой по теореме Бохнера ([12], [50], [53]).

Пример 4.2. Пусть $n=1$, $f(z)=\frac{1}{z}$, $T_\Omega=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im}z>0\}$. Тогда

$$\left\langle \frac{1}{z}\Big|_{\operatorname{Im}z>0},\varphi\right\rangle=\int\limits_{\operatorname{Im}z=\varepsilon}\frac{\varphi(z)}{z}\,dz,\quad \varepsilon>0. \tag{4.11'}$$

В области $\operatorname{Im}z<0$ функция $\frac{1}{z}$ задает другой функционал, причем, по теореме Коши (ср. с (2.25)),

$$\frac{1}{z}\Big|_{\operatorname{Im}z<0}-\frac{1}{z}\Big|_{\operatorname{Im}z>0}=2\pi i\delta(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}. \tag{4.11''}$$

Предложение 4.2. Если $v\in Z'(\mathbf{C}^n)$ является аналитическим функционалом: $v=f|_{T_\Omega}$, то функция $f(z)$ при $z\in T_\Omega$ определяется по v однозначно.

Это вытекает из плотности пространства функций $\{\tilde{\varphi}(\xi+i\eta):\tilde{\varphi}\in Z\}$ в $S(\mathbf{R}^n)$ при $\eta\in\mathbf{R}^n$.

Предложение 4.3. Любой функционал вида (4.5) (т. е. имеющий локальную плотность) представим в виде конечной суммы (не более, чем 2^n) аналитических функционалов вида (4.11).

Доказательство. В одномерном случае для любой непрерывной функции $w(\xi)$, удовлетворяющей оценке $|w(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^\mu$ при $\xi\in\mathbf{R}$,

$$\langle w(\xi)\times\delta(\eta),\varphi(\xi+i\eta)\rangle=\int\limits_{\mathbf{R}}w(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\operatorname{Im}z=-1}f(z)\varphi(z)\,dz-\int\limits_{\operatorname{Im}z=1}f(z)\varphi(z)\,dz\right), \tag{4.12}$$

где

$$f(z)=\int\limits_{\mathbf{R}}\frac{w(\xi)(2i)^{\mu+1}d\xi}{(z-\xi)(z-\xi+2i)^{\mu+1}}. \tag{4.13}$$

Действительно, (4.12), (4.13) вытекают из представления

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\operatorname{Im}z=-1}\frac{\varphi(z)(2i)^{\mu+1}dz}{(z-\xi)(z-\xi+2i)^{\mu+1}}-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\operatorname{Im}z=1}\frac{\varphi(z)(2i)^{\mu+1}dz}{(z-\xi)(z-\xi+2i)^{\mu+1}}\right). \tag{4.14}$$

Аналогичная конструкция годится и для общего n-мерного случая и любого функционала вида (4.5).

§ 5. Теория Пэли — Винера

5.1. Преобразование Фурье финитных обобщенных функций. Заметим, что преобразование Фурье от (финитных) обобщенных функций $\delta(x)$, $\delta^{(\alpha)}(x)\in\mathcal{E}'$ является многочленами (см. (2.2), (2.19')). Оказывается, что, аналогично, для любого распределения $u(x)\in\mathcal{E}'$ его преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi)$ — целая функция на $\mathbf{C}^n$. Следующая теорема уточняет лемму 2.2.

Теорема 5.1 ([12], [55], [65]). Если $u(x)\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, то $\tilde{u}(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и продолжается с $\mathbf{R}^n$ до целой функции от $z\in\mathbf{C}^n$, равной (ср. с (2.19))

$$\tilde{u}(z)=\langle u(x),e^{ixz}\rangle,\quad z\in\mathbf{C}^n. \tag{5.1}$$

При некоторых C, A, $\mu\geqslant0$ выполняется оценка

$$|\tilde{u}(z)|\leqslant Ce^{A|\operatorname{Im}z|}(1+|z|)^\mu,\quad z\in\mathbf{C}^n. \tag{5.1'}$$

Обратно, если $\tilde{u}(z)$ — произвольная целая функция в $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющая оценке (5.1') при некоторых C, A и μ, то $\tilde{u}(z)|_{\mathbf{R}^n}=\tilde{u}(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$ и $u\equiv F^{-1}\tilde{u}\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, причем $u(x)=0$ при $|x|>A$.

Следствие 5.1. $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)\subset H_{-\infty}(\mathbf{R}^n)=\cup_{s\in\mathbf{R}}H_s(\mathbf{R}^n)$, т. к. из (5.1') при $\operatorname{Im}z=0$ видно, что $|\tilde{u}(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^\mu$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, откуда $u(x)\in H_s(\mathbf{R}^n)$ при $s<-\mu-n/2$.

5.2. Умеренные распределения с носителем в конусе. Пусть K — замкнутый конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле, не содержащий прямых. По определению, $K+K\subset K$ и $tK\subset K$ при $t>0$, так что K — выпуклое множество. Например, $K=\overline{\mathbf{R}}_+=\{x\in\mathbf{R}:x\geqslant 0\}$. Обозначим через K^* — *двойственный конус*:

$$K^*=\{\eta\in\mathbf{R}^n:\eta x>0 \text{ при } x\in K\setminus 0\}. \tag{5.2}$$

Очевидно, K^* — открытое множество, и $K^*\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда K не содержит прямых.

Выберем срезающую функцию $\psi(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ так, чтобы

$$\psi(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\in K,\\ 0 \text{ при } \rho(x,K)\geqslant 1;\end{cases}\quad \sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\psi^{(\alpha)}(x)|<\infty\quad\forall\alpha. \tag{5.3}$$

Тогда, очевидно,

$$\psi(x)\,e^{ixz}\in S(\mathbf{R}^n) \text{ при } \operatorname{Im} z\in K^*. \tag{5.4}$$

Для $u\in S'_K\equiv\{u\in S'(\mathbf{R}^n):\operatorname{supp} u\subset K\}$ определим скалярное произведение

$$\langle u, e^{ixz}\rangle=\langle u, \psi(x)\,e^{ixz}\rangle,\quad \operatorname{Im} z\in K^*. \tag{5.5}$$

Это произведение не зависит от выбора функции $\psi(x)$ со свойствами (5.3).

Теорема 5.2 ([12], [28], [55], [62]). Если $u\in S'_K$, то $\tilde u(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$ продолжается в смысле определения 1.12 главы 1 до аналитической функции $\tilde u(z)$ в трубчатой области $T_{K^*}=\{z\in\mathbf{C}^n:\operatorname{Im} z\in K^*\}$ (см. 4.9)), причем

$$u(z)=\langle u(x), e^{ixz}\rangle,\quad z\in T_{K^*}, \tag{5.6}$$

где скалярное произведение понимается как в (5.5).

Выполняется оценка: при некоторых C, μ, ν (ср. с формулами (1.60), (1.73) главы 1):

$$|\tilde u(z)|\leqslant C\frac{(1+|z|)^\mu}{\rho^\nu},\ \text{где } \rho=\rho(z,\partial T_{K^*})=\rho(\operatorname{Im} z,\partial K^*). \tag{5.6$'$}$$

Обратно, если $\tilde u(z)$ — произвольная голоморфная функция в T_{K^*}, удовлетворяющая оценкам (5.6′), то $\tilde u|_{\mathbf{R}^n}\in S'$ и $\tilde u$ допускает единственное представление вида (5.6), где $u=F^{-1}(\tilde u|_{\mathbf{R}^n})\in S'_K$.

Определение 5.1 ([12], [55]) (ср. с определением 1.10). Через $S'_{(K)}$ обозначим пространство $u(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$, для которых $\operatorname{supp} u(x+a)\subset K$ при некотором $a\in\mathbf{R}^n$.

Из теоремы 5.2 очевидно, следует, ввиду первой формулы в (2.8):

Теорема 5.2′. Если $u(x)\in S'_{(K)}$, то $\tilde u(\xi)$ аналитически продолжается в область T_{K^*}. Если $\operatorname{supp} u(x+a)\subset K$, где $a\in\mathbf{R}^n$, то

$$\tilde u(z)=\langle u(x), \psi(x-a)\,e^{ixz}\rangle,\quad z\in T_{K^*}. \tag{5.7}$$

Выполняется оценка: при некоторых C, μ, ν, $A>0$

$$|\tilde u(z)|\leqslant C\frac{(1+|z|)^\mu}{\rho^\nu}\,e^{A|\operatorname{Im} z|},\quad z\in T_{K^*}. \tag{5.7$'$}$$

Обратно, если $\tilde u(z)$ — произвольная голоморфная функция в T_{K^*}, удовлетворяющая оценке (5.7′), то $\tilde u(z)|_{\mathbf{R}^n}\in S'$, и $\tilde u(z)$ допускает единственное представление вида (5.7), где $u=F^{-1}(\tilde u(z)|_{\mathbf{R}^n})\in S'_{(K)}$.

5.3. Экспоненциально растущие распределения с носителем в конусе. Пусть K — выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^n$, как и выше, не содержащий прямых.

Распределение $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ назовем *экспоненциально растущим*, если при некотором $B>0$

$$e^{-B\cdot M(x)}u(x)\in S'(\mathbf{R}^n),$$

где

$$M(x)=\sqrt{1+|x|^2}. \tag{5.8}$$

Определение 5.2. $\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$ — множество всех экспоненциально растущих распределений $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{D}'E_K=\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)\cap\mathscr{D}_K'$.

Обозначим для $R>0$

$$K_R^*=\{\eta\in K^*:\rho(\eta,\partial K^*)>R\}. \tag{5.9}$$

Очевидно, для достаточно большого $R=R(B)>0$

$$\psi(x)\,e^{ixz}e^{B\cdot M(x)}\in S(\mathbf{R}^n) \text{ при } \operatorname{Im} z\in K_R^*. \tag{5.9$'$}$$

Поэтому для такого R при $\operatorname{Im} z\in K_R^*$ имеет смысл скалярное произведение

$$\begin{aligned} f(z)&=\langle u(x), \psi(x)\,e^{ixz}\rangle\equiv\\ &\equiv\langle e^{-B\cdot M(x)}u(x), \psi(x)\,e^{ixz}e^{B\cdot M(x)}\rangle. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Теорема 5.3. Если экспоненциально растущее распределение $u\in\mathscr{D}'_K$, то $\tilde u=Fu\in Z'$ является аналитическим функционалом вида (4.11) в области $\Omega=T_{K_R^*}$ для достаточно большого $R>0$, где $f(z)$ голоморфна в $T_{K_R^*}$ и определяется формулой (5.10). Выполняется оценка вида (5.6′): при некоторых C, μ

$$|f(z)|\leqslant C(1+|z|)^\mu,\quad \operatorname{Im} z\in K_R^*. \tag{5.11}$$

Обратно, если $f(z)$ — произвольная голоморфная функция в $T_{K_R^*}$, удовлетворяющая оценке (5.11) при некоторых C, μ, то аналитический функционал $f|_{T_{K_R^*}}$ является преобразованием

Фурье от некоторого экспоненциально растущего распределения $u \in \mathcal{D}'E_K$.

Эта теорема доказывается почти дословно так же, как теорема 5.2. Более того, ее можно вывести из теоремы 5.2, поскольку $u_\eta(x) \equiv e^{-x\eta}u(x) \in S'_K$ при $\eta \in K^*_R$ ввиду (5.9′) и $\tilde{u}_\eta(z) = \tilde{f}(z+i\eta)$ — голоморфная функция в T_{K^*}, непрерывная в $\bar{T}_{K^*}$.

Следствие 5.2. Преобразование Фурье любого экспоненциально растущего распределения имеет локальную плотность в смысле определения 4.2 и обратное также верно.

Прямое утверждение выводится из теоремы 5.3 при помощи разбиения экспоненциально растущего распределения в сумму слагаемых с носителями в выпуклых конусах, не содержащих прямых. Обратное утверждение очевидно для аналитических функционалов вида (4.11), поскольку они являются преобразованиями Фурье от произведения экспоненты вида $e^{\eta x}$ на умеренное распределение из $S'(\mathbf{R}^n)$. Остается заметить, что, в силу предложения 4.3, любой функционал, имеющий локальную плотность, равен конечной сумме аналитических функционалов вида (4.11).

Определение 5.3. Через $\mathcal{D}'E_{(K)}$ обозначим пространство $u(x) \in \mathcal{D}'E(\mathbf{R}^n)$, для которых $\operatorname{supp} u(x+a) \subset K$ при некотором $a \in \mathbf{R}^n$. Последовательность $u_k \xrightarrow{\mathcal{D}'E(K)} u$, если $e^{-B\cdot M(x)}u_k(x-a) \xrightarrow{S'_K} e^{-B\cdot M(x)}u(x-a)$ при некоторых $B>0$ и $a \in \mathbf{R}^n$, не зависящих от k (сходимость в S'_K по определению совпадает со слабой сходимостью в $S'(\mathbf{R}^n)$).

Из теоремы 5.3 очевидно следует, ввиду первой формулы в (2.8):

Теорема 5.3′. Если $u(x) \in \mathcal{D}'E_{(K)}$, то $\tilde{u} \equiv Fu$ — аналитический функционал в области $T_{K^*_R}$ для достаточно большого $R>0$ с локальной плотностью вида (5.10), удовлетворяющей оценке

$$|f(z)| \leqslant C(1+|z|)^{\mu} e^{A|\mathrm{Im}\, z|}, \quad z \in T_{K^*_R} \tag{5.12}$$

при некоторых $C, \mu, A>0$. Обратное также верно.

Например, для $u(x) = \theta(x+a)e^{3x}$, согласно (5.10), локальная плотность равна

$$f(z) = \int_{-a}^{\infty} e^{izx}e^{3x}dx = -\frac{e^{-a(iz+3)}}{iz+3} \quad \text{при } \mathrm{Im}\, z > 3. \tag{5.13}$$

§ 6. Свертка и преобразование Фурье

Согласно (1.5), для $u, v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$F(u*v)(\xi) = \tilde{u}(\xi)\tilde{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. Если $u(x) \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, а $v(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, то

$$F(u*v) = \tilde{u}(z)\tilde{v}, \tag{6.2}$$

где $\tilde{u}(z)$ — голоморфная функция (5.1), а $\tilde{v} \equiv Fv \in Z'(\mathbf{C}^n)$.

Для доказательства нужно аппроксимировать u и v функциями из $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, использовать (6.1) и непрерывность всех операций в (6.2) (свертки на $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}'$, преобразования Фурье и умножения в правой части).

Пусть K — замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых, как и выше.

Теорема 6.2. Если $u, v \in \mathcal{D}'E_{(K)}$, то при достаточно большом $R>0$

$$F(u*v)(z) = \tilde{u}(z)\tilde{v}(z), \quad z \in T_{K^*_R}. \tag{6.3}$$

Здесь $\tilde{u}(z)$ и $\tilde{v}(z)$ — аналитические функции, задающие функционалы $\tilde{u}, \tilde{v} \in Z'$ в области $T_{K^*_R}$ по формуле вида (4.11), и левая часть (6.3) — аналитическая локальная плотность функционала $F(u*v) \in Z'$ в области $T_{K^*_R}$.

Для доказательства можно аппроксимировать u и v функциями из $\mathcal{E}'$ вида $u_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)u(x)$, $v_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)v(x)$, где $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\psi(x) = 1$ при $|x| < 1$. Тогда при $\varepsilon \to 0$, очевидно,

$$\left(u_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'E(K)} u, \quad v_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'E(K)} v\right) \Rightarrow \left(u_\varepsilon * v_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'_K} u*v\right) \tag{6.4}$$

и, кроме того, из (5.10) видно, что при $\varepsilon \to 0$

$$\tilde{u}_\varepsilon(z) \to \tilde{u}(z), \quad \tilde{v}_\varepsilon(z) \to \tilde{v}(z) \quad \text{при} \quad z \in T_{K^*_R} \tag{6.5}$$

для достаточно большого $R>0$. Наконец, функции $\tilde{u}_\varepsilon(z)$, $\tilde{v}_\varepsilon(z)$ допускают равномерные по ε оценки вида (5.12). Поэтому, применяя к u_ε, v_ε формулу (6.2), мы при $\varepsilon \to 0$ получаем (6.3).

Глава 3

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Проблема деления

1.1. Проблема деления в классах быстрорастущих распределений. Рассмотрим уравнение (0.1) при $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Решение $u(x)$ также будем искать в классе $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Применим к обеим частям (0.1) преобразование Фурье. Тогда, в силу формулы (4.8) главы 2, получаем «алгебраическое» уравнение

$$\tilde{P}(z)\tilde{u}(z)=\tilde{f}(z), \tag{1.1}$$

где равенство понимается как равенство Функционалов из $Z'(\mathbf{C}^n)$.

Теорема 1.1 ([46], [58]). Уравнение (1.1) имеет решение $\tilde{u}\in Z'(\mathbf{C}^n)$ при $\forall f\in Z'(\mathbf{C}^n)$, если $\tilde{P}(\xi)\not\equiv 0$.

Следствие 1.1. Уравнение (1.1) имеет решение $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ при всех $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, если $P\neq 0$.

Отсюда при $f=\delta(x)$ вытекает теорема 2.1 главы 1.

Для доказательства теоремы 1.1 можно применить теорему Хана—Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов в локально выпуклых пространствах [72]. А именно, (1.1) эквивалентно тому, что

$$\langle\tilde{u}(\xi), \tilde{P}(\xi)\psi(\xi)\rangle=\langle\tilde{f}(\xi), \psi(\xi)\rangle, \quad \psi\in Z(\mathbf{C}^n). \tag{1.2}$$

Таким образом, искомый функционал $\tilde{u}$ известен на пространстве основных функций вида $\tilde{P}(\xi)\psi(\xi)$, где $\psi\in Z(\mathbf{C}^n)$. Обозначим это пространство через $\tilde{P}Z$. Для окончания доказательства теоремы 1.1 остается лишь проверить, что $\tilde{u}$ продолжается с $\tilde{P}Z$ до линейного непрерывного функционала на Z. Выведем это из теоремы Хана—Банаха. Для этого нужно лишь доказать непрерывность функционала $\tilde{u}$ на пространстве $\tilde{P}Z$ с топологией, индуцированной вложением $\tilde{P}Z\subset Z$.

Лемма 1.1. Если $\varphi(z)=\tilde{P}(z)\psi(z)$, где $\psi\in Z(\mathbf{C}^n)$, и

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{C_N(\varphi)}{(1+|z|)^N}e^{A|\operatorname{Im} z|} \quad \text{при} \quad z\in\mathbf{C}^n, \tag{1.3}$$

то также

$$|\psi(z)|\leqslant\frac{\tilde{C}_N(\psi)}{(1+|z|)^N}e^{A|\operatorname{Im} z|} \quad \text{при} \quad z\in\mathbf{C}^n, \tag{1.4}$$

причем

$$\tilde{C}_N(\psi)\leqslant B_N C_N(\varphi), \tag{1.5}$$

где B_N не зависит от φ (и от A).

Эта лемма доказывается методом [12], [28], [46]. А именно, по теореме Коши,

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_z}\frac{\psi(z+\lambda e)\,d\lambda}{\lambda}, \tag{1.6}$$

где γ_z — любой положительно ориентированный контур в комплексной плоскости, охватывающий точку $\lambda=0$, а $e\in\mathbf{C}^n\setminus 0$. Выберем вектор $e\in\mathbf{R}^n$ так, чтобы

$$a\equiv\tilde{P}_m(e)\neq 0, \quad \text{где} \quad \tilde{P}_m(z)\equiv\sum_{|\alpha|=m}p_\alpha(-iz)^\alpha. \tag{1.7}$$

Тогда $\tilde{P}(z+\lambda e)=a\lambda^m+Q_{m-1}(z,\lambda)$, где Q_{m-1} — многочлен от λ степени $\leqslant m-1$. Поэтому $\tilde{P}(z+\lambda e)=a(\lambda-\lambda_1(z))\dots(\lambda-\lambda_m(z))$. Отсюда видно, что контур γ_z при $\forall z\in\mathbf{C}^n$ можно выбрать так, чтобы

$$\frac{1}{2}\leqslant\sup_{\lambda\in\gamma_z}|\lambda|\leqslant 1, \quad |\gamma_z|\leqslant c(m), \quad \inf_{\lambda\in\gamma_z}|\tilde{P}(z+\lambda e)|\geqslant c(m)\cdot a, \tag{1.8}$$

где $c(m)>0$ не зависит от $z\in\mathbf{C}^n$; $|\gamma_z|$ — длина контура γ_z. Тогда подставляя $\varphi/\tilde{P}$ вместо ψ в интеграл (1.6), из (1.3) и (1.8) немедленно получаем (1.4), (1.5).

Следствие 1.2. Из леммы 1.1 вытекает, что отображение $\varphi(\xi)=\tilde{P}\psi\mapsto\psi(\xi)=\varphi/\tilde{P}$ непрерывно как отображение $\tilde{P}Z$ в $Z(\mathbf{C}^n)$. Поэтому функционал $\tilde{u}$, определенный по формуле (1.2) на $\tilde{P}Z$, непрерывен на $\tilde{P}Z$, т. к. функционал $\tilde{u}$ непрерывен на Z. Но тогда, по теореме Хана—Банаха, $\tilde{f}$ продолжается до непрерывного функционала на $Z(\mathbf{C}^n)$ и теорема 1.1 доказана.

1.2. Проблема деления в классах экспоненциально растущих обобщенных функций. Лестница Хёрмандера.

Теорема 1.2. Пусть $f\in\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$. Тогда уравнение (0.1) имеет решение $u\in\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$, если только $P\neq 0$.

Доказательство. Согласно предложению 4.3 главы 2, можно считать, что $\tilde{f}$ является аналитическим функционалом вида (4.11) (глава 2), где Ω — некоторая открытая область в $\mathbf{R}^n$: $\forall\psi\in Z$

$$\langle\tilde{f}(z), \psi(z)\rangle=\int_{\operatorname{Im} z=\eta}\tilde{f}(z)\psi(z)\,dz \quad \forall\eta\in\Omega. \tag{1.9}$$

При этом, искомый функционал $\tilde{u}$ на основные функции $\varphi=\tilde{P}\psi\in\tilde{P}Z$ действует по формуле

$$\langle\tilde{u},\varphi\rangle=\left\langle\tilde{f},\frac{\varphi}{\tilde{P}}\right\rangle=\int_{\operatorname{Im} z=\eta}\tilde{f}(z)\frac{\varphi(z)}{\tilde{P}(z)}\,dz \quad \forall\varphi\in\tilde{P}Z. \tag{1.10}$$

Можно заменить $\psi=\varphi/\tilde{P}$ в последнем интеграле выражением (1.6) и получить таким образом продолжение $\tilde{u}$ на $\varphi\in Z$, поскольку $\tilde{P}(\zeta)\neq 0$ на γz при всех $z\in\mathbf{C}^n$. Существует однако более наглядная конструкция, известная под названием *лестницы Хёрмандера*. А именно, сделаем в $\mathbf{R}^n$ линейную замену координат ξ так, чтобы вектор e из (1.7) стал 1-м базисным вектором. Для простоты изложения будем считать, что сами координаты $\xi_1,\dots,\xi_n$ обладают этим свойством, т. е. $e=(1,0,\dots,0)$. Тогда (1.10) для случая $\varphi\in\tilde{P}Z$ можно, по теореме Коши, преобразовать к виду

$$\langle\tilde{u},\varphi\rangle=\int_{\operatorname{Im} z'=\eta'}\left(\int_{\operatorname{Im} z_1=k(z')}\frac{f(z)\varphi(z)}{\tilde{P}(z)}\,dz_1\right)dz', \tag{1.11}$$

где $z'=(z_2, \ldots, z_n)$, $\eta'=(\eta_2, \ldots, \eta_n)$, причем $(h, \eta')\in\Omega$. Отметим что, по теореме Бохнера [12], [53], область Ω можно считать выпуклой, так что $(h, \eta')\in\Omega$ при $h\in]\alpha(\eta'), \beta(\eta')[$, где $\alpha(\eta')<<\beta(\eta')$. Остается выбрать $h(z')$ для $\forall z'$ так, чтобы на прямой $\operatorname{Im} z_1=h(z')$ в комплексной плоскости $z_1\in\mathbf{C}$ не было корней многочлена $\tilde P(z_1, z')$ от z_1. Это возможно, поскольку $\tilde P(z)==a(z_1-\lambda_1(z'))\ldots(z_1-\lambda_m(z'))$, причем корни $\lambda_1(z'), \ldots, \lambda_m(z')$ непрерывно зависят от z', поскольку, ввиду (1.7), $a=\tilde P_m(1, 0, \ldots, 0)\neq 0$. Поэтому можно выбрать $h(z')$ кусочно непрерывно зависящим от z' при $\operatorname{Im} z'=\eta'$ так, чтобы

$$h(z')\in]\alpha(\eta'), \beta(\eta')[\text{ и } |\tilde P(z)|\geqslant\delta>0 \text{ при } \operatorname{Im} z_1=\gamma(z'),$$
$$\operatorname{Im} z'=\eta'. \tag{1.12}$$

Множество $H\equiv\{z\in\mathbf{C}^n: \operatorname{Im} z'=\eta',\ \operatorname{Im} z_1=h(z')\}$ называется *лестницей Хёрмандера*. Из (1.12) вытекает, ввиду оценки (4.10), главы 2, что функционал $\tilde u$ из (1.11) непрерывен на пространстве Z.

Следствие 1.3. Уравнение (2.1) главы 1 имеет решение $\mathscr{E}(x)\in\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$, если $P(\partial_x)\neq 0$, т. к. $\delta(x)\in\mathscr{D}'E(\mathbf{R}^n)$.

1.3. Проблема деления в классах умеренных распределений. Рассмотрим уравнение (0.1) при $f(x)\in S'(\mathbf{R}^n)$. Решение $u(x)$ также будет искать в классе $S'(\mathbf{R}^n)$. Применим к обеим частям (0.1) преобразование Фурье. Тогда, в силу формулы (2.5) главы 2, получим «алгебраическое уравнение»

$$\tilde P(\xi)\tilde u(\xi)=\tilde f(\xi), \quad \xi\in\mathbf{R}^n, \tag{1.13}$$

которое, в отличие от (1.1), является равенством в $S'(\mathbf{R}^n)$. Эта проблема деления была решена в работах [4], [5], [52], [57].

Теорема 1.3. Уравнение (1.13) имеет решение $\tilde u(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$ при любой правой части $\tilde f(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$, если только $\tilde P(\xi)\not\equiv 0$.

Следствие 1.2. Уравнение (0.1) имеет решение $u\in S'$ при $\forall f\in S'$, если $P\neq 0$.

При $f=\delta(x)$ отсюда вытекает теорема 2.2 главы 1.

Уравнение (1.1) легко решается в случае, когда при некотором $c>0$

$$|\tilde P(\xi)|\geqslant c\,(1+|\xi|)^m \text{ при } \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.14}$$

Такие операторы P называются *строго эллиптическими*. Например, оператор $K\equiv\Delta-m_0^2$ при $m_0\in\mathbf{R}\setminus 0$ строго эллиптичен, поскольку для него символ $\tilde K$ имеет вид

$$\tilde K(\xi)=-|\xi|^2-m_0^2\Rightarrow|\tilde K(\xi)|\geqslant c\,(1+|\xi|)^2, \quad \xi\in\mathbf{R}^n.$$

Напротив, *оператор Гельмгольца* $H\equiv\Delta+\omega^2$ при $\omega\in\mathbf{R}\setminus 0$ не является строго-эллиптическим, поскольку его символ $\tilde H$ равен

$$\tilde H(\xi)=-|\xi|^2+\omega^2\Rightarrow\tilde H(\xi)=0 \text{ на сфере } |\xi|=|\omega|.$$

Если оператор P строго эллиптический, то уравнение (1.18) легко решается:

$$\tilde u(\xi)=\frac{\tilde f(\xi)}{\tilde P(\xi)}\equiv\frac{1}{\tilde P(\xi)}\cdot\tilde f(\xi), \quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{1.15}$$

Отметим, что оператор умножения на $\frac{1}{\tilde P(\xi)}$ непрерывен в $S'(\mathbf{R}^n)$, поскольку $g(\xi)\equiv\frac{1}{\tilde P(\xi)}$, в силу условия (1.14), удовлетворяет оценкам (1.68) главы 1.

Например, уравнение $\left(\frac{d^2}{dx^2}-m_0^2\right)\mathscr{E}(x)=\delta(x)$, $x\in\mathbf{R}$, после преобразования Фурье принимает вид $(-|\xi|^2-m_0^2)\tilde{\mathscr{E}}(\xi)=1$, откуда $\mathscr{E}(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ix\xi}\frac{1}{-\xi^2-m_0^2}d\xi=-\frac{e^{-m_0|x|}}{2m_0}$ (ср. с формулами (2.22) и (1.11) глав 2 и 1 соответственно).

Почти также просто проблема деления решается в случае, когда $\tilde P(\xi)\neq 0$ при $\xi\in\mathbf{R}^n$. Действительно, тогда из (1.15) можно определить $\tilde u(\xi)$ как элемент пространства $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Однако, требуется еще доказать, что $\tilde u(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$. Но последнее утверждение вытекает из оценки типа (1.14):

Лемма 1.2. Если $\tilde P(\xi)\neq 0$ при $\xi\in\mathbf{R}^n$, то

$$|\tilde P(\xi)|\geqslant C\,(1+|\xi|)^p, \quad \xi\in\mathbf{R}^n, \tag{1.16}$$

где p может быть как положительным, так и отрицательным.

Эта лемма доказывается с помощью принципа Зайденберга — Тарского ([21], [55], [69]).

Из (1.16) легко выводится, как и выше, что функция $g(\xi)\equiv\equiv\frac{1}{\tilde P(\xi)}$ удовлетворяет оценкам (1.68) главы 1. Поэтому из (1.15) следует, что $\tilde u(\xi)\in S'$, поскольку $\tilde f\in S'(\mathbf{R}^n)$.

В общем случае, символ $\tilde P(\xi)$ может обращаться в нуль в точках $\xi\in\mathbf{R}^n$. Обозначим

$$\mathscr{S}=\{\xi\in\mathbf{R}^n: \tilde P(\xi)=0\}, \quad \mathscr{R}=\mathbf{R}^n\setminus\mathscr{S}. \tag{1.17}$$

Тогда уравнение (1.1) однозначно определяет сужение $\tilde u(\xi)$ на область $\mathscr{R}$ (см. определение 1.5 главы 1):

$$\tilde u(\xi)|_{\mathscr{R}}=\frac{1}{\tilde P(\xi)}(\tilde f(\xi)|_{\mathscr{R}})\Leftrightarrow\langle\tilde u(\xi), \varphi(\xi)\rangle=$$
$$=\left\langle\tilde f(\xi), \frac{\varphi(\xi)}{\tilde P(\xi)}\right\rangle, \quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathscr{R}). \tag{1.18}$$

Здесь по определению $\frac{\varphi(\xi)}{\tilde{P}(\xi)}=0$ при $\xi\notin\operatorname{supp}\varphi$, а значит и при всех $\xi\in\mathscr{S}$.

Таким образом, чтобы решить проблему деления, нужно продолжить функционал (1.18), заданный в области $\mathscr{R}$, до распределения $\tilde{u}(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$.

Эта задача, в свою очередь, называется *проблемой регуляризации*. Согласно теореме 1.3, она всегда имеет решение, если $\tilde{P}(\xi)\not\equiv 0$.

Замечание 1.1. Если $\mathscr{S}\neq\varnothing$, то решение проблемы регуляризации заведомо неединственно. Например, к $\tilde{u}(\xi)$ всегда можно добавить $c\delta(\xi-\xi_0)$, где $\xi_0\in\mathscr{S}$, т. к. $\tilde{P}(\xi)\delta(\xi-\xi_0)=0$, $\xi\in\mathbf{R}^n$. Если же функция $h(\xi)\equiv\tilde{P}(\xi)$ удовлетворяет условию (1.24) главы 1, то и $\tilde{P}(\xi)\delta(\tilde{P}(\xi))=0$, так что к $\tilde{u}$ можно в этом случае добавить $c\delta(\tilde{P}(\xi))$, если $\delta(\tilde{P}(\xi))\in S'(\mathbf{R}^n)$. Например, для символа $-|\xi|^2+\omega^2$ оператора Гельмгольца $H=\Delta+\omega^2$ при $\omega\in\mathbf{R}\setminus 0$ условие (1.24) главы 1 выполняется и $\delta(-|\xi|^2+\omega^2)\in S'(\mathbf{R}^n)$ (см. (1.23) из главы 1).

§ 2. Регуляризация. Методы «вычитаний», выхода в комплексную область, метод степеней Рисса

Проблему регуляризации достаточно решить для случая, когда

$$\tilde{f}(\xi)\in C(\mathbf{R}^n) \text{ и } |\tilde{f}(\xi)|\leqslant c(1+|\xi|)^N,\quad \xi\in\mathbf{R}^n, \tag{2.1}$$

поскольку любое распределение $\tilde{f}\in S'(\mathbf{R}^n)$ можно представить в виде конечной суммы производных от функций со свойствами (2.1). Итак, пусть $\tilde{f}(\xi)$ удовлетворяет условиям (2.1). Обозначим $R(\xi)=\frac{\tilde{f}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)}$, $\xi\in\mathscr{R}$. Вообще говоря, $R(\xi)\notin L_1^{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, так что по $R(\xi)$ нельзя (вообще говоря) построить обобщенную функцию R при помощи формулы (1.2) главы 1. Поэтому будем называть $R(\xi)$ *формальной функцией*.

Определение 2.1. Обобщенная функция $\hat{R}(\xi)\in S'(\mathbf{R}^n)$ называется *регуляризацией формальной функции* $R(\xi)\in C(\mathbf{R}^n\setminus\mathscr{S})$, если

$$\langle\hat{R},\varphi\rangle=\langle R,\varphi\rangle\equiv\int\limits_{\mathscr{R}}R(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n\setminus\mathscr{S}). \tag{2.2}$$

Если $\hat{R}^1$ и $\hat{R}^2$ — две различные регуляризации $R(\xi)$, то из (2.2) вытекает, что $\operatorname{supp}(\hat{R}^1-\hat{R}^2)\subset\mathscr{S}$.

Сложность проблемы регуляризации зависит от устройства множества $\mathscr{S}$ и от характера роста $R(\xi)$ вблизи $\mathscr{S}$. В доказательстве теоремы 1.3 решающую роль играют два обстоятельства:

1) алгебраическое многообразие $\mathscr{S}$ из (1.16) является объединением конечного множества аналитических подмногообразий в $\mathbf{R}^n$ разной размерности:

$$\mathscr{S}=\bigcup_{k=0}^{n-1}\mathscr{S}^k,\quad \dim\mathscr{S}^k=k, \tag{2.3}$$

где $\mathscr{S}^k$ — аналитическое подмногообразие в $\mathbf{R}^n$;

2) $\frac{1}{\tilde{P}(\xi)}$ растет при приближении к $\mathscr{S}$ не быстрее некоторой (отрицательной) степени расстояния до $\mathscr{S}$ (*неравенство Лоясевича* [62]): при некоторых N и ν

$$\frac{1}{|\tilde{P}(\xi)|}\leqslant\frac{c(1+|\xi|)^N}{\rho^\nu(\xi)},\quad \rho(\xi)\equiv\rho(\xi,\mathscr{S}),\quad \xi\in\mathbf{R}^n\setminus\mathscr{S}. \tag{2.4}$$

Оценка (2.4) доказывается при помощи принципа Зайденберга—Тарского [21], [55], как и (1.16)

2.1. Метод вычитания [46]. Для простоты изложения ограничимся случаем, когда $\mathscr{S}$ — гладкое подмногообразие в $\mathbf{R}^n$, т. е. разложение (2.3) состоит из одного слагаемого $\mathscr{S}^k$, где $0\leqslant k\leqslant n-1$.

Пусть сначала $k=0$, так что $\mathscr{S}=\mathscr{S}^0$ — дискретное множество точек (если $\mathscr{S}^0$ не дискретно, то оценка (2.4) не может выполняться). Итак $\mathscr{S}=\{a_j\in\mathbf{R}^n,\ j=1,\dots\}$ и ε_j-окрестность точки a_j не содержит других точек a_i, $\varepsilon_j>0$. Тогда регуляризацию можно построить вычитанием из $\varphi(x)$ конечных отрезков ряда Тейлора:

$$\langle\hat{R},\varphi\rangle\equiv\sum_j\int\limits_{|\xi-a_j|<\varepsilon_j/2}R(\xi)\Big[\varphi(\xi)-\varphi(a_j)-\dots$$

$$\dots-\sum_{|\alpha|=[\nu]-n}\frac{\varphi^{(\alpha)}(a_j)}{\alpha!}(\xi-a_j)^\alpha\Big]d\xi+\int\limits_{\mathscr{R}_{(\varepsilon)}}R(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{2.5}$$

где

$$\mathscr{R}_{(\varepsilon)}\equiv\{\xi\in\mathscr{R}:|\xi-a_j|>\varepsilon_j/2\ \forall j\},\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n),$$

очевидно, $\hat{R}\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\langle\hat{R},\varphi\rangle=\int R(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$, если $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathscr{R}$, так что $\hat{R}\in\mathscr{D}'$ является регуляризацией функции $R(\xi)$ в смысле (2.2). Однако, еще нужно доказывать, что существует $\hat{R}\in S'$.

Пример 2.1. Для $n=1$ и $R(\xi)=\frac{1}{\xi}$ можно определить регуляризацию $\hat{R}$ как главное значение по Коши: для $\varphi(\xi)\in S(\mathbf{R})$

$$\langle \hat{R}, \varphi \rangle = \langle \text{v. p.} \frac{1}{\xi}, \varphi(\xi) \rangle \equiv \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|\xi|>\varepsilon} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{\xi} d\xi + \int_{|\xi|>1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi. \tag{2.5'}$$

Пример 2.2. Для оператора Гельмгольца $H = \Delta + \omega^2$, $\omega \in \mathbf{R} \setminus 0$ в $\mathbf{R}^n$ символ $\tilde{H}(\xi) = -|\xi|^2 + \omega^2$ и $\operatorname{grad} H(\xi) = -2\xi \neq 0$ при $\tilde{H}(\xi) = 0$. Поэтому регуляризацию $R \equiv \frac{1}{\tilde{H}(\xi)}$ можно определить по формуле $\hat{R}(\xi) = \text{v. p.} \frac{1}{-|\xi|^2 + \omega^2}$. Рассмотрим теперь более общий случай, когда $\mathcal{S} = \mathcal{S}^k$ и $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Пусть для простоты $\mathcal{S}^k$ компактное многообразие. Для $\varepsilon > 0$ обозначим ε-окрестность $\mathcal{S}^k$ через $\mathcal{S}^k_\varepsilon$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ существует диффеоморфизм h: $\mathcal{S}^k_\varepsilon \to \mathcal{S}^k \times D^{n-k}$, где D^{n-k} — шар в $\mathbf{R}^{n-k}$ радиуса 1 (или ε, все равно), переводящий $\xi \in \mathcal{S}^k_\varepsilon$ в $h(\xi) = (\xi^s, \xi^D)$, где $\xi^s \in \mathcal{S}^k$, $\xi^D \in D^{n-k}$, $h(\mathcal{S}^k) = \mathcal{S}^k \times \{0\}$. Тогда регуляризацию $\hat{R}$ можно построить в виде, аналогичном (2.5): для $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$

$$\langle \hat{R}, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{S}^k_\varepsilon} R(\xi) \Big[\varphi_h(\xi^s, 0) - \varphi_h(\xi^s, 0) - \ldots$$

$$\ldots - \sum_{|\alpha| = [\nu] - k} \frac{\partial^\alpha_{\xi^D} \varphi_h(\xi^s, 0)(\xi^D)^\alpha}{\alpha!} \Big] d\xi + \int_{\mathcal{R}_{(\varepsilon)}} R(\xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

где

$$\mathcal{R}_{(\varepsilon)} \equiv \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{S}_\varepsilon, \quad \varphi_h(\xi^s, \xi^D) \equiv \varphi(h^{-1}(\xi^s, \xi^D)) = \varphi(\xi).$$

Отметим, что здесь $\partial^\alpha_{\xi^D} \varphi_h(\xi^s, 0)$ — это производная от $\varphi_h(\xi^s, \xi^D)$, взятая в точке $\xi^D = 0$, и $(\xi^s, 0) \in h(\mathcal{S}^k)$.

Поскольку $\mathcal{S}^k$ — компактное многообразие, то $\hat{R} \in S'(\mathbf{R}^n)$.

В общем случае для многообразия $\mathcal{S}$ вида (2.3) регуляризация $\hat{R} \in S'(\mathbf{R}^n)$ строится аналогично, с использованием оценки (2.4). При этом в окрестности каждой «страты» $\mathcal{S}^k$ множества $\mathcal{S}$ подходящие координаты строятся при помощи т. н. *σ-процесса* (иначе — *разрешения особенности*) [52], [57].

Таким образом решается проблема регуляризации, и по этой же схеме доказывается теорема 1.3 ([52], [57]).

2.2. Метод выхода в комплексную область. Такой метод регуляризации применим в тех случаях, когда $R(\xi)$ при $\xi \in \mathcal{R}$ является сужением в смысле определения 1.11 главы 1 на $\mathcal{R}$ функции $R(z)$, голоморфной в некоторой трубчатой области в $\mathbf{C}^n$. При этом существование регуляризации выводится из леммы 1.5 главы 1.

Не приводя общих формулировок, ограничимся рассмотрением конкретных примеров.

1) Для функции $R(\xi) = \frac{1}{\xi}$, $\xi \in \mathbf{R} \setminus 0$, можно определить регуляризацию формулами $\hat{R}_+(\xi) = \frac{1}{\xi + i0}$ или $\hat{R}_-(\xi) = \frac{1}{\xi - i0}$. При этом $F^{-1}\hat{R}_\pm(\xi) \equiv \mp i\theta(\pm x) = 0$ при $x \leqslant 0$, в соответствии с теоремой 5.2 главы 2, поскольку $\hat{R}_\pm(\xi)$ аналитически продолжается в область $\operatorname{Im} \xi \geqslant 0$.

Следствие 2.1. Для оператора Гельмгольца из примера 2.2 регуляризацию функции $R(\xi) \equiv \frac{1}{\tilde{H}(\xi)}$ можно определить как суперпозицию $\frac{1}{\zeta \pm i0}$ с $\zeta \equiv \tilde{H}(\xi) = -|\xi|^2 + \omega^2$, поскольку $\operatorname{grad} \tilde{H}(\xi) = -2\xi \neq 0$ при $\tilde{H}(\xi) = 0$: $\hat{R}_\pm(\xi) \equiv \frac{1}{-|\xi|^2 + \omega^2 \pm i0}$.

Замечание 2.1. Регуляризация $\hat{R}_+(\xi)$ используется для нахождения предельной амплитуды расходящейся волны. Эта амплитуда соответствует предельному поглощению и удовлетворяет условию отсутствия излучения Зоммерфельда (см. [8], [22], [36]) при $\omega > 0$.

2) Для *волнового оператора*

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta, \quad a > 0, \tag{2.6}$$

символ равен $\tilde{\square}(\tau, \xi) = -\tau^2 + a^2 |\xi|^2$, $\tau \in \mathbf{R}$, $\xi \in \mathbf{R}^k$. Легко проверить, что $\tilde{\square}(\tau, \xi) \neq 0$ в трубчатой области T_{K^*} с основанием $K^* = \{(s, \eta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k : |s| > a|\eta|\}$. Эта область имеет две связные компоненты $K^*_\pm$, в которых $s > 0$ или $s < 0$ соответственно. Поэтому можно определить две различные регуляризации

$$\left(\frac{1}{\tilde{\square}(\tau, \xi)}\right)_\pm \equiv \frac{1}{-(\tau \pm i0)^2 + a^2 |\xi|^2}, \quad (\tau, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k.$$

Из теоремы 5.2 главы 2 следует, что

$$\mathcal{E}_\pm(t, x) \equiv F^{-1}\left(\left(\frac{1}{\tilde{\square}(\tau, \xi)}\right)_\pm\right) = 0 \text{ при } \pm at < |x|.$$

Действительно, обозначим $K_\pm = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k : \pm at > |x|\}$. Тогда $K^*_\pm$ — двойственные к $K_\pm$ конусы, и $\tilde{\mathcal{E}}_\pm(\tau, \xi)$ аналитически продолжается в $T_{K^*_\pm}$.

3) Аналогично, для *оператора Клейна—Гордона* $\mathcal{K} \equiv \square + m^2$, $m > 0$, символ $\tilde{\mathcal{K}}(\tau, \xi) = \tilde{\square}(\tau, \xi) + m^2 \neq 0$ в T_{K^*}. Поэтому имеются две различные регуляризации

$$\left(\frac{1}{\tilde{\mathcal{K}}(\tau, \xi)}\right)_\pm \equiv \frac{1}{-(\tau \pm i0)^2 + a^2 |\xi|^2 + m^2}, \quad (\tau, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k,$$

и из теоремы 5.2 главы 2 следует, что

$$\mathscr{E}_\pm(t, x) \equiv F^{-1}\left(\frac{1}{\widetilde{\mathscr{K}}(\tau, \xi)}\right)_\pm = 0 \text{ при } \pm at < |x|.$$

2.3. Метод комплексных степеней Рисса. Грубо говоря, идея *метода Рисса* заключается в том, что $\widetilde{P}^\lambda(\xi)$ — аналитическая функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $S'(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и поэтому возникает гипотеза, что функция $\widetilde{P}^\lambda(\xi)$ аналитически продолжается в область $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ и $\widetilde{P}^{-1}(\xi)$ (значение продолжения функции $\widetilde{P}^\lambda$ при $\lambda = -1$) является регуляризацией формальной функции $\frac{1}{\widetilde{P}(\xi)}$.

Оказывается, эта гипотеза справедлива с некоторыми уточнениями. А именно,

1) $\widetilde{P}^\lambda(\xi)$ продолжается до мероморфной функции от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $S'(\mathbf{R}^n)$ и

2) регуляризацией $\frac{1}{\widetilde{P}(\xi)}$ является регулярная часть мероморфной функции $\widetilde{P}^\lambda$ при $\lambda = -1$.

Сформулируем точно имеющиеся в этой области результаты ([4], [5], [18]).

Пусть $\widetilde{P}(\xi)$ — вещественный многочлен от $\xi \in \mathbf{R}^n$. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ определим

$$\widetilde{P}^\lambda(\xi) = \begin{cases} \widetilde{P}^\lambda(\xi) \text{ при } \widetilde{P}(\xi) \geqslant 0, \\ (-1)^\lambda |\widetilde{P}(\xi)|^\lambda \text{ при } \widetilde{P}(\xi) < 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $(-1)^\lambda$ — произвольная ветвь, например $(-1)^\lambda = e^{\lambda\pi i}$; подразумевается, что $a^\lambda = e^{\lambda \ln a}$ при $a > 0$. Отметим, что при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\widetilde{P}^{\lambda+k}(\xi) = \widetilde{P}^k(\xi) \cdot \widetilde{P}^\lambda(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{2.8}$$

При $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ функция $\widetilde{P}^\lambda(\xi)$ непрерывна и по ней можно построить распределение $\in S'(\mathbf{R}^n)$. Отметим, что

$$\widetilde{P}^\lambda(\xi) \to 1 \text{ при } \lambda \to 0, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{2.9}$$

Через $\widetilde{P}_+$ обозначается функция

$$\widetilde{P}_+(\xi) = \begin{cases} \widetilde{P}(\xi), \ \widetilde{P}(\xi) \geqslant 0, \\ 0, \ \widetilde{P}(\xi) < 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

В [4], [5] доказана

Теорема 2.1. 1) Функция $\widetilde{P}_+^\lambda$ (и $|\widetilde{P}|^\lambda$) из области $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ продолжается до мероморфной функции от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $S'(\mathbf{R}^n)$.

2) Множество полюсов Π функции $\widetilde{P}_+^\lambda$ (и $|\widetilde{P}|^\lambda$) от λ является объединением конечного множества арифметических прогрессий.

Доказательство этой теоремы использует σ-процесс для разрешения особенностей алгебраического многообразия $\mathscr{P}$ (см. (1.17)). В [4] имеется упрощенное доказательство, не использующее σ-процесса.

Из теоремы 2.1 вытекает также мероморфность аналитического продолжения функции $\widetilde{P}^\lambda$, поскольку, ввиду (2.7), (2.10),

$$\widetilde{P}^\lambda = \widetilde{P}_+^\lambda + (-1)^\lambda (-\widetilde{P})_+^\lambda \text{ при } \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0.$$

Таким образом, $\widetilde{P}^\lambda$ при аналитическом продолжении из области $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ имеет в точке $\lambda = -1$ изолированный полюс конечного порядка N или регулярна (тогда $N = 0$):

$$\widetilde{P}^\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k(\xi)}{(\lambda+1)^k} + \hat{R}_\lambda(\xi), \tag{2.11}$$

где $r_k \in S'(\mathbf{R}^n)$, а $\hat{R}_\lambda(\xi)$ — аналитическая функция от λ в некоторой окрестности точки $\lambda = -1$ со значениями в $S'(\mathbf{R}^n)$.

Предложение 5.1. Функция $\hat{R}_{-1}(\xi) \in S'(\mathbf{R}^n)$ является регуляризацией формальной функции $\frac{1}{\widetilde{P}(\xi)}$ и

$$\widetilde{P}(\xi) \cdot \hat{R}_{-1}(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \tag{2.12}$$

где равенство понимается в смысле обобщенных функций.

Доказательство. Из (2.9) и (2.8) следует, что

$$\widetilde{P}(\xi) \cdot \widetilde{P}^\lambda(\xi) = \widetilde{P}^{\lambda+1}(\xi) \to 1 \text{ при } \lambda \to -1, \ \operatorname{Re}\lambda > -1. \tag{2.13}$$

Отметим, что это равенство справедливо в смысле $S'(\mathbf{R}^n)$ при всех $\lambda \in \mathbf{C}$, кроме $\lambda \in \Pi$, в силу единственности аналитического продолжения. Но из (2.13) и (2.11) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\widetilde{P}(\xi) \cdot r_k(\xi)}{(\lambda+1)^k} + \widetilde{P}(\xi) \widetilde{R}_\lambda(\xi) \to 1 \text{ при } \lambda \to -1, \ \operatorname{Re}\lambda > -1.$$

Это возможно лишь если

$$\widetilde{P}(\xi) \cdot r_k(\xi) = 0, \ \xi \in \mathbf{R}^n \ \forall k = 1, \ldots, N \text{ и } \widetilde{P}(\xi) \cdot \hat{R}_{-1}(\xi) = 1.$$

§ 3. Уравнения в выпуклом конусе. Операционное исчисление

3.1. Уравнения в конусе. Пусть K — (выпуклый) замкнутый конус в $\mathbf{R}^n$, т. е. $K + K \subset K$ и $tK \subset K$ $\forall t \geqslant 0$, и пусть K не содержит прямых. Рассмотрим дифференциальное уравнение (0.1) в K. Точнее, в классе функций с носителем в K:

$$P(\partial_x) u(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.1}$$

где

$$f \in S'_K(\mathbf{R}^n) \equiv \{f \in S' : \operatorname{supp} f \subset K\}.$$

Решение u также будем искать в S'_K. Тогда, по теореме 5.2 главы 2, функции $\tilde{u}(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ аналитически продолжаются в T_{K^*} и тождество (1.13) также справедливо в T_{K^*}:

$$\tilde{P}(z)\tilde{u}(z)=\tilde{f}(z), \quad z\in T_{K^*}. \tag{3.2}$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.1) в классах $S'_K(\mathbf{R}^n)$. Обозначим

$$V=\{z\in\mathbf{C}^n:\tilde{P}(z)=0\} \quad \text{и} \quad V_{K^*}\equiv V\cap T_{K^*}. \tag{3.3}$$

Также обозначим через $\mathcal{J}_{K^*}(\tilde{P})$ идеал в кольце голоморфных функций в T_{K^*}, порожденный многочленом $\tilde{P}(z)$.

Главное наблюдение состоит в том, что, в силу (3.2),

$$\tilde{f}(z)=0 \quad \text{при} \quad z\in V_{K^*}. \tag{3.4}$$

Более того, из (3.2) вытекает, что

$$\tilde{f}(z)\in\mathcal{J}_{K^*}(\tilde{P}). \tag{3.5}$$

При помощи теоремы 5.2 главы 2 и метода доказательства леммы 1.1, доказывается

Теорема 3.1 ([12], [28]). 1) Для того чтобы уравнение (3.1) имело решение $u\in S'_K$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.5), т. е. чтобы функция $\tilde{f}(z)/\tilde{P}(z)$ была голоморфной в T_{K^*}.

2) Если $\operatorname{grad}\tilde{P}(z)\neq 0$ при всех $z\in V_{K^*}$, кроме аналитического подмногообразия в T_{K^*} коразмерности $\geqslant 2$, то условие (3.5) эквивалентно (3.4).

Пример 3.1. Пусть $n=2$ и $K=\{x\in\mathbf{R}^2: x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\}$ — первый квадрант плоскости. Тогда для разрешимости уравнения

$$\Delta u(x)-u(x)=f(x), \quad x\in\mathbf{R}^2, \tag{3.6}$$

в классе $u\in S'_K$ при $f\in S'_K$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{f}(z_1, z_2)=0 \text{ при } z_1^2+z_2^2+1=0, \ \operatorname{Im} z_1>0, \ \operatorname{Im} z_2>0. \tag{3.7}$$

Далее, рассмотрим уравнение (3.1) в классах экспоненциально растущих распределений u, $f\in\mathcal{D}'E_K=\mathcal{D}'E(\mathbf{R}^n)\cap\mathcal{D}'_K$ (см. определение 5.2 главы 2). Тогда, по теореме 5.3 главы 2, функционалы $\tilde{u}$, $\tilde{f}\in Z'$ являются голоморфными функционалами в области $T_{K_R^*}$ при некотором достаточно большом $R>0$ (см. формулу (5.9) главы 2). Обозначая голоморфные локальные плотности функционалов $\tilde{u}$ и $\tilde{f}$ также через $\tilde{u}(z)$ и $\tilde{f}(z)$, мы из (3.1), в силу предложения 4.2 главы 2, получаем тождество (3.2) в области $T_{K_R^*}$ вместо T_{K^*}:

$$\tilde{P}(z)\tilde{u}(z)=\tilde{f}(z), \quad z\in T_{K_R^*}. \tag{3.8}$$

Поэтому условия (3.4) и (3.5) также выполняются при замене K^* на K_R^* при достаточно большом $R>0$.

Аналогично теореме 3.1, при помощи теоремы 5.3 главы 2 и метода доказательства леммы 1.1, доказывается

Теорема 3.1′ 1) Для того чтобы уравнение (3.1) при $f\in\mathcal{D}'E_K$ имело решение $u\in\mathcal{D}'E_K$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\tilde{f}(z)\in\mathcal{J}_{K_R^*}(\tilde{P}) \text{ при некотором } R>0. \tag{3.9}$$

2) Если $\operatorname{grad}\tilde{P}(z)\neq 0$ при всех $z\in V_{K_R^*}\equiv V\cap T_{K_R^*}$, кроме подмногообразия в $T_{K_R^*}$ коразмерности $\geqslant 2$, то условие (3.9) эквивалентно условию

$$\tilde{f}(z)=0 \quad \text{при} \quad z\in V_{K_R^*}. \tag{3.10}$$

Здесь $\mathcal{J}_{K_R^*}(\tilde{P})$ — идеал в кольце голоморфных функций в $T_{K_R^*}$, порожденный многочленом $\tilde{P}(z)$.

3.2. Операционное исчисление. Возьмем $n=1$ и $K=\overline{\mathbf{R}}_+\equiv\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant 0\}$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (0.1) на полуоси

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)u(x)=\sum_{k=0}^{m} p_k\left(\frac{d}{dx}\right)^k u(x)=f(x), \quad x>0, \tag{3.11}$$

где $f(x)\in\mathcal{D}'E(\overline{\mathbf{R}}_+)$.

Для простоты изложения предположим, что $f(x)\in C(\overline{\mathbf{R}}_+)$ и $u(x)\in C^m(\overline{\mathbf{R}}_+)$. Чтобы однозначно определить решение $u(x)$, зададим начальные условия

$$u(0+)=u^0,\ldots,u^{(m-1)}(0+)=u^{m-1}. \tag{3.12}$$

Решим задачу Коши (3.11), (3.12) при помощи преобразования Фурье. Преобразование Фурье для функций с носителем в $\overline{\mathbf{R}}^+$ иногда называют *преобразованием Фурье — Лапласа*. Чтобы применить преобразование Фурье к уравнению (3.11), продолжим его на всю ось $x\in\mathbf{R}$:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)u_0(x)=lf(x)\equiv f_0(x)+\sum_{k=0}^{m-1} b_k(U_{(0)})\,\delta^{(k)}(x), \quad x\in\mathbf{R}. \tag{3.13}$$

Здесь приняты обозначения

$$u_0(x)\equiv\begin{cases}u(x), & x>0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$$

$$f_0(x) \equiv \begin{cases} f(x), & x>0, \\ 0, & x<0; \end{cases} \quad U_{(0)} \equiv (u^0, \ldots, u^{m-1}), \tag{3.14}$$

а $b_k(U_{(0)})$ — константы: из формулы (1.10) главы 1 вытекает, что

$$b_{m-1}(U_{(0)}) = p_m u^0, \quad b_{m-2}(U_{(0)}) = p_m u^1 + p_{m-1} u^0, \ldots$$

Уравнение (3.13) представляет собой задачу вида (3.1).

Предположим, что $u(x)$ и $f(x)$ при $x \to +\infty$ имеют рост не выше экспоненциального:

$$|u(x)| \leqslant C_1 e^{Bx}, \quad |f(x)| \leqslant C_2 e^{Bx}, \quad x>0. \tag{3.15}$$

Тогда, по теореме 5.3 главы 2 (формула (5.10) глава 2),

$$\tilde{u}_0(z) = \int_0^\infty e^{izx} u(x)\,dx,$$

$$\tilde{f}_0(z) = \int_0^\infty e^{izx} f(x)\,dx \text{ при } \operatorname{Im} z > B. \tag{3.16}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $K^* = \mathbf{R}_+ = \{s \in \mathbf{R} : s > 0\}$, так что $T_{K^*} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $K_R^* = \{s \in \mathbf{R} : s > R\}$, $T_{K_R^*} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > R\}$. Поэтому из (3.13) вытекает, согласно (3.8), что

$$\tilde{P}(z)\tilde{u}_0(z) = \tilde{l}f(z) \equiv \tilde{f}_0(z) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k(-iz)^k \text{ при } \operatorname{Im} z > B. \tag{3.17}$$

Отсюда находим локальную плотность $\tilde{u}_0(z)$ функционала $\tilde{u}_0 \equiv \equiv F u_0$:

$$\tilde{u}_0(z) = \frac{\tilde{l}f(z)}{\tilde{P}(z)} \text{ при } \operatorname{Im} z > B. \tag{3.18}$$

Однако функционал $\tilde{u}_0 \in Z'(\mathbf{C})$, определяемый этой плотностью в области $\operatorname{Im} z > R$ является, по теореме 3.1′, преобразованием Фурье от распределения $u \in \mathscr{D}' E_{\overline{\mathbf{R}+}}$ в том и только в том случае, когда $\tilde{u}_0(z)$ голоморфна при $\operatorname{Im} z > R$, т. е. выполняется условие (3.9).

Многочлен $\tilde{P}(z)$ имеет m нулей (считая с кратностью)

$$\tilde{P}(z_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad z_k \in \mathbf{C}. \tag{3.19}$$

Поэтому $\tilde{P}(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z > M \equiv \max_k \operatorname{Im} z_k$, так что условие (3.9) выполняется при $R > \max(M, B)$.

Итак, по теореме 3.1′, уравнение (3.13) имеет решение $u_0(x) \in \mathscr{D}' E_{\overline{\mathbf{R}+}}$,

$$u_0 = F^{-1}(\tilde{u}_0(z)\,|\,_{\operatorname{Im} z > \max(M,B)}), \tag{3.20}$$

где $\tilde{u}_0(z)$ находится по формуле (3.18), и $\tilde{u}_0(z)$ единственна при условиях (3.15). Проще всего выглядит решение u_0 в случае,

когда $f(x) \equiv 0$, а корни z_j — простые, т. е. $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$. А именно, тогда формулу (3.18) можно преобразовать к виду

$$\tilde{u}_0(z) = i \sum_{k=1}^{m} \frac{d_k(U_{(0)})}{z - z_k}. \tag{3.21}$$

Отсюда получаем, аналогично формуле (5.13) главы 2, что

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{m} d_k(U_{(0)})\,\theta(x)\,e^{-iz_k x} \Rightarrow u(x) = \sum_{k=1}^{m} d_k(U_{(0)})\,e^{-iz_k x}, \quad x > 0. \tag{3.22}$$

В общем случае находят $u_0(x)$ из (3.18) при помощи таблиц для *преобразования Лапласа* ([25], [45]), которое отличается от преобразования Фурье — Лапласа заменой $z \mapsto s = -iz$.

Отметим, что если мы хотим найти решение u, для которого $|u(x)| \leqslant Ce^{Dx}$, $x > 0$, то плотность $\tilde{u}_0(z)$ должна быть аналитична при $\operatorname{Im} z > D$. Поэтому, из (3.17) вытекает необходимость условия

$$\tilde{l}f(z_k) = 0 \text{ при } \operatorname{Im} z_k > D. \tag{3.23}$$

Это условие также и достаточно, если корни z_k простые $\operatorname{Im} z_k \neq D$ $\forall k$, и $f = 0$. Если же корень z_k имеет кратность ν_k, то условие (3.23) нужно заменить на

$$\tilde{l}f^{(j)}(z_k) = 0 \text{ при } \operatorname{Im} z_k > D, \quad j = 0, \ldots, \nu_k - 1.$$

Это условие на $u^0, \ldots, u^{m-1}$ при $f = 0$ необходимо и достаточно для существования решения $u(x)$, для которого $|u(x)| \leqslant ce^{Dx}$ при $x > 0$, если $\operatorname{Im} z_k \neq D$ $\forall k$.

Пример 3.2. Рассмотрим задачу

$$u''(x) - 3u'(x) = 0, \quad x > 0; \quad u(0+) = 1, \quad u'(0+) = 2.$$

Тогда уравнение (3.17) принимает вид

$$(-z^2 + 3iz)\tilde{u}_0(z) = -iz - 1, \quad \operatorname{Im} z > 3.$$

Отсюда находим

$$\tilde{u}_0(z) = \frac{iz+1}{z^2 - 3iz} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 3i}, \quad \operatorname{Im} z > 3;$$

$A = \frac{i}{3}$, $B = \frac{2i}{3}$ и, согласно (3.22),

$$u_0(x) = \frac{1}{3}\theta(x) + \frac{2}{3}\theta(x)e^{3x} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3x} \text{ при } x > 0.$$

3.3. Дифференциально-разностные уравнения на полуоси [25], [45]. Рассмотрим *уравнение с запаздывающим аргументом* на полуоси $x > 0$:

$$\sum_{k=0}^{m} p_k u^{(k)}(x-h_k)=f(x), \quad x>0, \tag{3.24}$$

где $p_m \neq 0$ и $h_k > h_m = 0$ при $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Предположим, что $f(x)$ удовлетворяет условию (3.15). В качестве начальных условий можно наложить требование

$$u(x)=0 \text{ при } x<0, \quad u \in \mathscr{D}'E_{\overline{\mathbf{R}_+}} \cap C^m(\mathbf{R}).$$

Заметим, что (3.24) является *уравнением в свертках*

$$(P * u)(x)=f_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

где (3.25)

$$P(x) \equiv \sum_{k=0}^{m} p_k \delta^{(k)}(x-h_k).$$

Поэтому, из (3.15), по теореме 6.2 главы 2, следует, что, аналогично (3.8),

$$\tilde{P}(z) \cdot \tilde{u}(z)=\tilde{f}(z), \quad \operatorname{Im} z>B.$$

Здесь

$$\tilde{P}(z)=\sum_{k=0}^{m} p_k(-iz)^k e^{ih_k z}, \quad z \in \mathbf{C},$$

— *символ оператора свертки* (3.25), равный преобразованию Фурье от «сверточного» ядра» $P(x)$. Поскольку $p_m \neq 0$, $h_k > h_m = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant m-1$, и $|e^{ih_k z}|=e^{-h_k \operatorname{Im} z}$, то

$$|\tilde{P}(z)| \geqslant c|z|^m \text{ при } \operatorname{Im} z>M$$

при некотором $c>0$ для достаточно большого $M>0$. Отсюда вытекает, что частное

$$\tilde{u}(z) \equiv \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{P}(z)} \text{ при } \operatorname{Im} z>R=\max(M, B)$$

удовлетворяет оценкам вида (5.11) главы 2. Следовательно, по теореме 5.3 главы 2, аналитический функционал $\tilde{u}(z)|_{\operatorname{Im} z>R}$ является преобразованием Фурье от распределения $u \in \mathscr{D}'E_{\overline{\mathbf{R}_+}}$, и удовлетворяет уравнениям (3.24) и (3.25).

§ 4. Распространение особенностей и гладкость решений

4.1. Характеристики дифференциальных операторов. Обозначим через P_m *главную однородную часть оператора* P из (0.1):

$$P_m(\partial_x) \equiv \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha \partial_x^\alpha. \tag{4.1}$$

Рассмотрим сначала уравнение (0.1) с таким однородным оператором P_m в случае $f=0$:

$$P_m(\partial_x) u(x)=0, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{4.2}$$

Найдем решения этого уравнения, имеющие вид плоских волн:

$$u(x)=w(\xi \cdot x), \quad x \in \mathbf{R}^n; \quad \xi \in \mathbf{R}^{n*} \setminus 0; \quad \xi \cdot x \equiv \xi_1 x_1+\ldots+\xi_n x_n, \tag{4.3}$$

где $w \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Для этого подставим (4.3) в (4.2):

$$P_m(\partial_x) w(\xi x)=w^{(m)}(\xi x) \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha \xi^\alpha=0. \tag{4.4}$$

Отметим, что $P_m(\xi) \equiv \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha \xi^\alpha=i^m \tilde{P}_m(\xi)$. Из (4.4) вытекает

Предложение 4.1. Функция (4.3) удовлетворяет уравнению (4.2) при $\forall w \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$, если ковектор $\xi \in \mathbf{R}^{n*} \setminus 0$ удовлетворяет *характеристическому уравнению*

$$P_m(\xi) \equiv \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha \xi^\alpha=0 \Leftrightarrow \tilde{P}_m(\xi)=0. \tag{4.5}$$

Определение 4.1. 1) Ковектор $\xi \in \mathbf{R}^{n*} \setminus 0$, удовлетворяющий уравнению (4.5), называется *характеристической (ко)нормалью уравнения* (0.1) (или *оператора* $P(\partial_x)$ из (0.1)).

2) Множество K всех характеристических нормалей $\xi \in \mathbf{R}^{n*} \setminus 0$ называется *характеристическим конусом оператора* P:

$$K=\{\xi \in \mathbf{R}^{n*} \setminus 0: \ P_m(\xi)=0\}. \tag{4.6}$$

3) Гиперплоскость $\xi_{x_0}^{\perp} \equiv \{v \in T_{x_0}\mathbf{R}^n: \ \langle \xi, v \rangle=0\}$ в $T_{x_0}\mathbf{R}^n$, называется *характеристической плоскостью уравнения* (0.1) в точке x_0, если ковектор $\xi \in \mathbf{R}^{n*} \setminus 0$ является характеристической конормалью уравнения (0.1).

4) *Гиперповерхность* $\mathscr{S}$ класса C^1 в $\mathbf{R}^n$ называется *характеристической* в точке x_0, если ее касательная плоскость в точке x_0 является характеристической, и *характеристикой уравнения* (0.1), если $\mathscr{S}$ характеристическая в каждой своей точке.

Пример 4.1. Плоскость $\{x \in \mathbf{R}^n: (x-x_0) \cdot \xi=0\}$ в $\mathbf{R}^n$ — характеристика, если $\xi \in K$.

Следствие 4.1. Для любой характеристики вида $\{x \in \mathbf{R}^n: (x-x_0) \cdot \xi=0\}$ уравнения (4.2) существуют решения $u(x)$ уравнения (4.2), разрывные на этой плоскости.

Например, $u(x)=\theta((x-x_0) \cdot \xi)$ является функцией вида (4.3), удовлетворяющей (поэтому) уравнению (4.2).

Замечание 4.1. Сделаем в $\mathbf{R}_x^n$ линейную замену координат $x=Cy$. Пусть плоскость $y_n=0$ является при этом характеристикой уравнения (4.2), т. е. ковектор $\xi_0=(C^{-1})^t(0, \ldots, 0, 1)$ является характеристическим. Тогда в новых координатах y символ оператора P_m согласно формуле (2.15) главы 2, равен

$(\tilde{P}_m)_C(\eta)=\tilde{P}_m((C^{-1})^t\eta)$ при $\eta\in\mathbf{R}^n$. Поэтому

$$(\tilde{P}_m)_C(0,\ \ldots,\ 0,\ 1)=\tilde{P}_m(\xi_0)=0. \qquad (4.7)$$

Но $(\tilde{P}_m)_C(0,\ldots,0,1)$ — это коэффициент в операторе $(P_m)_C(\partial_y)$ при $\partial^m_{y_n}u(y)$. Поэтому из (4.7) вытекает, что в новых координатах y уравнение (4.2) имеет вид

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_n<m}} q_\alpha\partial^\alpha_y u_C(y)=0,\quad y\in\mathbf{R}^n. \qquad (4.8)$$

Отсюда хорошо видно, почему решения уравнения (4.2) могут иметь разрывы вдоль характеристических гиперплоскостей $y_n=\mathrm{const}$. Действительно, уравнение (4.8) не содержит старшую производную $\partial^m_{y_n}$ в направлении, трансверсальном к этим плоскостям, зато каждое слагаемое в (4.8) содержит хотя бы одну производную по касательным переменным $y_1,\ldots,y_{n-1}$. Поэтому уравнению (4.8) удовлетворяет любая функция, постоянная на гиперплоскостях $y_n=\mathrm{const}$, в частности, любая такая разрывная функция.

Пример 4.2. Для волнового оператора (2.6) характеристическое уравнение (4.5) имеет вид

$$\tau^2=a_2|\xi|^2,\quad (\tau,\ \xi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k. \qquad (4.9)$$

Оно определяет коническую поверхность K в $\mathbf{R}^{k+1}$. Плоская волна

$$(u(t,\ x)=\theta(at-x_1)=\theta(a,\ -1,\ 0,\ldots,\ 0)\cdot(t,\ x)), \qquad (4.10)$$

где

$$(a,\ -1,\ 0,\ldots,\ 0)\in K,$$

бежит в направлении оси x_1 со скоростью a и ее фронт находится на плоскости

$$F\equiv\{x_1=at\}=(a,\ -1,\ 0,\ \ldots,0)^\perp_0. \qquad (4.10')$$

Определение 4.2. Оператор $P(\partial_x)$ называется *строго гиперболическим по Петровскому* по переменной x_n, если характеристическое уравнение (4.5) при $\forall\xi'=(\xi_1,\ldots,\ \xi_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus 0$ имеет m различных вещественных корней $\xi_n=\tau_j(\xi')$:

$$P_m(-i\xi)=p_{0,\ldots,0,m)}(-i)^m(\xi_n-\tau_1(\xi'))\ldots(\xi_n-\tau_m(\xi')),\quad \xi\in\mathbf{R}^n, \qquad (4.11)$$

Например, волновое уравнение (2.6) и уравнение (2.7) главы 1 являются гиперболическими по t.

4.2. Волновые фронты, бихарактеристики и распространение особенностей.

Определение 4.3. Через Char P обозначается множество всех характеристических конормалей оператора P, «выходящих» из всевозможных точек $x\in\mathbf{R}^n$:

$$\mathrm{Char}P=\{(x,\ \xi)\in T^*\mathbf{R}^n\setminus 0^*:\ x\in\mathbf{R}^n,\ \tilde{P}_m(\xi)=0\}. \qquad (4.12)$$

Здесь $T^*\mathbf{R}^n$ — кокасательное расслоение к $\mathbf{R}^n$, а 0^* — его нулевое сечение. Очевидно, $\mathrm{Char}\,P\approx\mathbf{R}^n\times K$ (см. 4.6)). Например, для волнового оператора (2.6)

$$\mathrm{Char}\,\Box=\mathbf{R}^{k+1}\times K,\ \text{где}\ K=\{(\tau,\ \xi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^k:\ \tau^2=a^2|\xi|^2\}. \qquad (4.12')$$

Центральную роль в современных исследованиях особенностей решений дифференциальных уравнений играет понятие волнового фронта обобщенной функции. Для $u(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ *волновой фронт* $\mathrm{WF}(u)$ в точке $x\in\mathbf{R}^n$ это, грубо говоря, множество всех направлений $\xi\in T_x{}^*\mathbf{R}^n$, по которым $u(x)$ не является гладкой.

Определение 4.3. Точка $(x_0,\ \xi_0)\in T^*\mathbf{R}^n\setminus 0^*$ не принадлежит $\mathrm{WF}(u)$, если существует такая функция $\chi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\chi(x_0)\neq 0$, и для $\forall N$

$$|\widetilde{\chi u}(\xi)|\leqslant\frac{C_N}{(1+|\xi|)^N}\ \text{при}\ \xi\in\Gamma_N(\xi_0), \qquad (4.13)$$

где $\Gamma_N(\xi_0)$ — некоторая коническая окрестность точки ξ_0 в $\mathbf{R}^n$. Соответственно, $\mathrm{WF}(u)$ состоит из всех остальных точек $(x_0,\ \xi_0)\in T^*\mathbf{R}^n\setminus 0^*$, для которых таких χ и $\Gamma_N(\xi_0)$ нет.

Очевидно, $\mathrm{WF}(u)$ — замкнутое множество в $T^*\mathbf{R}^n\setminus 0$ и

$$\mathrm{sing\,supp}\,u=\pi\mathrm{WF}(u), \qquad (4.14)$$

где π — проекция $T^*\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$.

Смысл понятия волнового фронта раскрывает следующая лемма. Пусть $u\in S'$ — вещественная обобщенная функция, т. е. $\langle u,\ \bar\varphi\rangle=\langle u,\ \varphi\rangle\,\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Тогда справедлива

Лемма 4.1. Если $(x_0;\ (1,\ 0,\ldots,\ 0))\notin\mathrm{WF}(u)$, то существует функция $\chi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, для которой $\chi(x_0)\neq 0$, и

$$\chi(x)u(x)=v(x_1;\ x')\in C^\infty\left(\mathbf{R}_{x_1};\ \mathscr{D}'\left(\mathbf{R}^{n-1}_{x'}\right)\right),\quad x'\equiv(x_2,\ldots,x_n), \qquad (4.15)$$

т. е. $v(x_1;\ \cdot)$ — гладкая функция от параметра $x_1\in\mathbf{R}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n-1})$, и

$$\langle\chi(x)u(x),\ \varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle v(x_1;\ \cdot),\ \varphi(x_1,\ \cdot)\rangle\,dx_1\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n). \qquad (4.16)$$

Пример 4.3. Волна u из (4.10) разрывна на фронте F (см. (4.10')) и $\mathrm{WF}(u)$ совпадает с расслоением NF нормалей к F:

$$\mathrm{WF}(u)=NF\equiv\{((x,\ t),\ (\xi,\ \tau))\in\mathbf{R}^{k+1}\times\mathbf{R}^{k+1}:(x,\ t)\in F,\ (\xi,\ \tau)\perp F\}. \qquad (4.17)$$

Отметим, что $\mathrm{WF}(u)\subset NF$ очевидно, по определению 4.3, а включение $NF\subset\mathrm{WF}(u)$ вытекает из леммы 4.1.

Пример 4.4. Поскольку $\chi(x)\delta(x-x_0)=\chi(x_0)\delta(x-x_0)$ и $F(\delta(x-x_0))=e^{ix_0\xi}$, то

$$\mathrm{WF}(\delta(x-x_0))=x_0\times(\mathbf{R}^n\setminus 0). \qquad (4.18)$$

Теорема 4.1. ([38], [55]). Если $u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ — решение уравнения (2.1), то

$$\mathrm{WF}(u)\subset(\mathrm{Char}\,P\cup\mathrm{WF}(f)). \tag{4.19}$$

Грубо говоря, решение $u(x)$ не является гладким в точке x по направлению $\xi\in T_x{}^*\mathbf{R}^n$ только тогда, когда либо $f(x)$ не гладкая в направлении ξ, либо оператор P «характеристический» в этом направлении.

Пример 4.5. Для волны (4.10)

$$\mathrm{WF}(u)=\mathrm{NF}\subset\mathrm{Char}\,\Box=\mathbf{R}^{k+1}\times K. \tag{4.20}$$

Включение здесь вытекает из того, что нормаль к F можно вычислить по формуле $(\tau,\ \xi)=\mathrm{grad}(at-x_1)=(1,\ 0,\dots,\ 0,\ -a)$, т. е. $\tau=-a$, $\xi=(1,\ 0,\dots,0)$, откуда следует (4.9). Таким образом, включение (4.19) для волны (4.10) действительно справедливо. Отметим также, что здесь $\mathrm{WF}(f)=\varnothing$, т. к. $f=0$.

Для более тонкой характеризации особенностей решения u уравнения (0.1) служит понятие бихарактеристики уравнения (0.1).

Предположим, что старшая часть P_m уравнения (0.1) имеет вещественные коэффициенты. Рассмотрим *гамильтонову систему* в $T^*\mathbf{R}^n$ с гамильтоннаном $H(x,\ \xi)\equiv P_m(\xi)=\tilde{P}_m(i\xi)$:

$$\begin{cases}\dot{x}(s)=H'_\xi=\mathrm{grad}\,P_m(\xi),\\ \dot{\xi}(s)=-H'_x=0,\ s\in\mathbf{R}.\end{cases} \tag{4.21}$$

Очевидно, решения этой системы — прямые

$$\begin{pmatrix}x(s)\\ \xi(s)\end{pmatrix}=\Phi_s\begin{pmatrix}x_0\\ \xi_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)\cdot s\\ \xi_0\end{pmatrix},\quad s\in\mathbf{R};\quad \begin{cases}x_0=x(0)\\ \xi_0=\xi(0).\end{cases} \tag{4.22}$$

Как известно (и хорошо видно из (4.22)), гамильтониан $H(x,\ \xi)=P_m(\xi)$ сохраняется вдоль траекторий (4.22). В частности, множество $\mathrm{Char}\,P$ инвариантно относительно гамильтонова потока Φ_s, $s\in\mathbf{R}$, системы (4.21).

Определение 4.4. *Бихарактеристиками* (или *бихарактеристическими полосками* [43], [49]) уравнения (0.1) называются кривые в $T^*\mathbf{R}^n$ — траектории гамильтоновой системы (4.21), лежащие в $\mathrm{Char}\,P$ (т .е. на которых символ $\tilde{P}_m(\xi)$ обращается в нуль). *Лучи* уравнения (0.1) — это проекции его бихарактеристик при отображении $\pi: T^*\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$.

Теорема 4.2 ([38], [55]). Пусть старшая часть P_m уравнения (0.1) имеет вещественные коэффициенты и пусть P_m является *оператором главного типа*, т. е.

$$\mathrm{grad}\,P_m(\xi)\neq0 \text{ при } P_m(\xi)=0,\ \xi\in\mathbf{R}^n\setminus0. \tag{4.23}$$

Тогда, если $f(x)C^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $\mathrm{WF}(u)$ — подмножество в $\mathrm{Char}\,P$, инвариантное относительно гамильтонова потока Φ_s, $s\in\mathbf{R}$, системы (4.21). Иными словами, если $(x_0,\ \xi_0)\in\mathrm{WF}\,(u)$, то $(x_0,\ \xi_0)\in$

$\in\mathrm{Char}\,P$ и вся бихарактеристика (4.22) также содержится в $\mathrm{WF}(u)$.

Грубо говоря, особенности решения $u(x)$ уравнения (0.1) распространяются по бихарактеристикам. Отметим, что условиям теоремы 4.2 удовлетворяют, например, уравнения (2.6), (2.7), (2.10) и (2.11) из главы 1.

Замечание 4.2. При условии (4.23) проекции на $\mathbf{R}^n_x$ бихарактеристик (4.22) уравнения (0.1), т. е. его лучи, являются грубо говоря, пересечениями всех «бесконечно-близких» друг к другу характеристических плоскостей $\xi^\perp_{x_0}$ с характеристическими нормалями ξ, близкими к ξ_0. Действительно, если $P_m(\xi_0)=0$ и $\xi_0\neq0$, то плоскость $(\xi_0)^\perp_{x_0}$ в $\mathbf{R}^n_x$, проходящая через x_0 и ортогональная ξ_0, является, по определению 4.1, характеристической для уравнения (0.1). Поверхность $K\equiv\{\xi\in\mathbf{R}^n: P_m(\xi)=0\}$ является гладкой в точке ξ_0, ввиду (4.23), и вектор $\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)$ ортогонален к $T_{\xi_0}K$. Но K — коническая поверхность, поскольку $P_m(\xi)$ — однородный многочлен. Следовательно, $\xi_0\in T_{\xi_0}K$, так что $\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)\perp\xi_0$. Это вытекает также из формулы Эйлера: $\xi_0\cdot\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)=mP_m(\xi_0)=0$. Поэтому

$$\xi\cdot\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)=(\xi-\xi_0)\cdot\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)=O(|\xi-\xi_0|^2)$$
$$\text{при } \xi\in K \text{ и } \xi\to\xi_0. \tag{4.24}$$

Отсюда вытекает, что

$$\widehat{(\xi^\perp_{x_0},\ \mathrm{grad}\,P_m(\xi_0))}=O(|\xi-\xi_0|^2) \text{ при } \xi\in K,\ \xi\to\xi_0, \tag{4.24'}$$

где в левой части стоит угол между характеристической гиперплоскостью $\xi^\perp_{x_0}$ с нормалью ξ, близкой к ξ_0, и вектором $\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)$. Остается заметить, что $\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)$ является направляющим вектором проекции бихарактеристики (4.22) на $\mathbf{R}^n_x$, а (4.24′) означает, что вектор $\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)$ «лежит в $\xi^\perp_{x_0}$ с точностью до $O(|\xi-\xi_0|^2)$» при $\xi\in K$, $\xi\to\xi_0$.

Определение 4.5. Коническая поверхность

$$K_{x_0}=\mathrm{Char}\,P\cap T^*_{x_0}\mathbf{R}^n \tag{4.25}$$

в $T^*_{x_0}\mathbf{R}^n$ называется *характеристическим конусом уравнения* (0.1), в точке x_0; коническая поверхность Q_{x_0} в $T_{x_0}\mathbf{R}^n$, определяемая формулой

$$Q_{x_0}\equiv\{v\in T_{x_0}\mathbf{R}^n: v=s\,\mathrm{grad}\,P_m(\xi),\ \xi\in K_{x_0},\ s\in\mathbf{R}\}, \tag{4.26}$$

называется *характеристическим коноидом* [43], [49] уравнения (0.1) в точке x_0.

Замечание 4.3. Поверхность Q_{x_0} при условии (4.33) образована норма лями к касательным плоскостям поверхности K_{x_0}. Коноид Q_{x_0} явл яется грубо говоря огибающей поверхностью для семейства характеристических гиперплоскостей $\xi^\perp_{x_0}$, проходящих через точку x_0. Действительно, из (4.24) вытекает, что $\xi\cdot(\mathrm{grad}\,P_m(\xi_0)-$

$-\operatorname{grad} P_m(\xi))=O(|\xi-\xi_0|^2)$ при ξ_0, $\xi\in K$ и $\xi_0\to\xi$, т. е. грубо говоря, $\xi^{\perp}_{x_0}$ касается поверхности Q_{x_0} по прямой $\{s \operatorname{grad} P_m(\xi),\ s\in\mathbf{R}\}\subset Q_{x_0}$, если $\det \dfrac{\partial^2 P_m(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\neq 0$.

Теорема 4.2 допускает обобщение на случай негладких функций $f(x)$.

Теорема 4.2′ ([38], [55]). Если оператор P удовлетворяет условиям теоремы 4.2, то

$$(\mathrm{WF}(u)\setminus \mathrm{WF}(f))\subset \operatorname{Char} P \tag{4.27}$$

и если $(x_0, \xi_0)\in \mathrm{WF}(u)\setminus\mathrm{WF}(f)$, то $\mathrm{WF}(u)$ содержит также пересечение бихарактеристики (4.22) с компонентой связности открытого множества $T^*\mathbf{R}^n\setminus \mathrm{WF}(f)$ содержащей точку (x_0, ξ_0).

Например, $\mathrm{WF}(\delta)=0\times(\mathbf{R}^{n*}\setminus 0)$ согласно (4.18). Поэтому из теоремы 4.2′ для $f(x)=\delta(x)$ вытекает

Следствие 4.2. Пусть оператор P удовлетворяет условиям теоремы 4.2 и $\mathscr{E}(x)$ — любое фундаментальное решение оператора P. Тогда если $(x_0, \xi_0)\in\mathrm{WF}(\mathscr{E})\setminus[0\times\mathbf{R}^{n*}\setminus 0)]$ и прямая $\{x_0+\operatorname{grad} P(\xi_0)\circ s,\ s\in\mathbf{R}\}$ в $\mathbf{R}^n$ не проходит через точку $x=0$, то она вся содержится в $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}$. Если же эта прямая проходит через точку $x=0$, то в $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}$ содержится, по крайней мере, луч, содержащий точку x_0. Таким образом, sing, $\operatorname{supp}\mathscr{E}$ является проекцией на $\mathbf{R}^n$ некоторого семейства бихарактеристик и половин бихарактеристик оператора P.

§ 5. Гладкость решений эллиптических уравнений. Гипоэллиптичность

5.1. Гладкость обобщенных решений эллиптических уравнений.

Определение 5.1. Оператор $P(\partial_x)$ называется *эллиптическим*, если

$$\tilde{P}_m(\xi)\neq 0 \quad\text{при}\quad \xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0, \tag{5.1}$$

т. е. оператор $P(\partial_x)$ не имеет (вещественных) характеристик:

$$\operatorname{Char} P=\varnothing. \tag{5.1′}$$

Пример 5.1. *Оператор Лапласа* в $\mathbf{R}^n$ — эллиптический, поскольку $\tilde{\Delta}(\xi)=-|\xi|^2\neq 0$ при $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0$. Аналогично, оператор Гельмгольца $H=\Delta+\omega^2$ — эллиптический, поскольку $\tilde{H}_2(\xi)=-|\xi|^2\neq 0$ при $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0$.

Оператор Коши—Римана $\dfrac{\partial}{\partial\bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ — эллиптический, т. к. его символ $+\frac{1}{2}(-i\xi+\eta)\neq 0$ при $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2\setminus 0$.

Предложение 5.1 ([11], [55]). Порядок m эллиптического оператора $P(\partial_x)$ — четное число, если $n\geqslant 3$.

Отметим, что для операторов $P(\partial_x)$ с вещественными коэффициентами это предложение очевидно при всех $n\geqslant 2$.

Замечание 5.1. При $n=1$ все уравнения вида (0.1) — эллиптические, если только $P(\partial_x)\neq 0$.

Теорема 5.1. *Лемма Вейля*, [38], [70]). Если в уравнении (0.1) оператор $P(\partial_x)$ эллиптический, а $f(x)\in C^\infty(\Omega)$, где Ω — некоторая область в $\mathbf{R}^n$, то также $u(x)\in {}^\infty C(\Omega)$.

Отметим, что $\operatorname{sing\,supp} f=\operatorname{sing\,supp} Pu\subset\operatorname{sing\,supp} u$, а из теоремы 5.1 вытекает обратное включение. Поэтому теорема 5.1 эквивалентна равенству

$$\operatorname{sing\,supp} u=\operatorname{sing\,supp} f \tag{5.2}$$

для эллиптического оператора $P(\partial_x)$.

Замечание 5.2. Если оператор P не эллиптический и, например, однородный, т. е. $P=P_m(\partial_x)$, то равенство (5.2), вообще говоря, не выполняется. Действительно, если $P_m(\xi_0)=0$ для некоторого $\xi_0\in\mathbf{R}^n\setminus 0$, то однородное уравнение $P_m(\partial_x)u(x)=0$, $x\in\mathbf{R}^n$, имеет разрывные решения согласно следствию 4.1.

Замечание 5.3. Теорема 5.1 является частным случаем теоремы 4.1. Действительно, если оператор P эллиптический, то $\operatorname{Char} P=\varnothing$ поэтому из (4.19) вытекает, что

$$\mathrm{WF}(u)=\mathrm{WF}(f). \tag{5.3}$$

Отсюда, ввиду (4.14), получаем (5.2).

5.2. Гипоэллиптические операторы. Оказывается, равенство (5.2) выполняется не только для эллиптических операторов.

Определение 5.2. Оператор $P(\partial_x)$ называется *гипоэллиптическим*, если для любого решения $u(x)$ уравнения (0.1) справедливо равенство (5.2). Иначе: из гладкости $f(x)$ в некоторой области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ следует гладкость решения уравнения (0.1) в той же области.

Гипоэллиптичность оператора $P(\partial_x)$ оказывается связана с достаточной удаленностью комплексных нулей символа $\tilde{P}(z)$ от вещественного пространства. А именно, обозначим

$$K_{\mathbf{C}}(P)\equiv\{z\in\mathbf{C}^n : \tilde{P}(z)=0\}. \tag{5.4}$$

Теорема 5.2 ([37], [69]). Оператор $P(\partial_x)$ гипоэллиптический тогда и только тогда, когда на алгебраическом многообразии (5.4)

$$|\operatorname{Im} z|\geqslant A|\operatorname{Re} z|^{\varkappa}-B \text{ при некоторых } A>0,\ B,\ \varkappa\in\mathbf{R}, \tag{5.5}$$

или, что эквивалентно,

$$|\operatorname{Im} z|\to\infty \text{ при } z\in K_c(P) \text{ и } |\operatorname{Re} z|\to\infty. \tag{5.5′}$$

Оказывается, возможно охарактеризовать гипоэллиптические операторы также по поведению их символа в вещественной области:

Теорема 5.3 ([37], [69]). Гипоэллиптичность оператора $P(\partial_x)$ эквивалентна каждому из следующих двух условий:

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\frac{\widetilde{P}(\xi+\theta)}{\widetilde{P}(\xi)}=1 \quad \text{при } \forall\theta\in\mathbf{R}^n; \tag{5.6}$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\frac{\partial_{\xi_j}\widetilde{P}(\xi)}{\widetilde{P}(\xi)}=0 \text{ при } \forall j=1,\ldots,n. \tag{5.6'}$$

Гипоэллиптичность также просто связана с гладкостью фундаментальных решений.

Если оператор P гипоэллиптичен, то, по определению 5.2, любое его фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$ — гладкое при $x\neq 0$, т. к. $\delta(x)$ — гладкая при $x\neq 0$: $\delta(x)=0$ при $x\neq 0$.

Из леммы 2.2 главы 1 следует, что верно и обратное.

Теорема 5.4. Если уравнение (0.1) имеет хотя бы одно фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$, гладкое при $x\neq 0$, то оператор $P(\partial_x)$ гипоэллиптичен.

Доказательство. Пусть $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $f|_\Omega\in C^\infty(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Возьмем любую точку $x_0\in\Omega$ и функции φ, $\hat{\varphi}$ и $\hat{\hat{\varphi}}$ такие, как в формуле (2.18) главы 1, и $\omega\subset\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\Omega$. Тогда из формулы (2.21) главы 1 следует, что

$$u(x)=(\mathscr{E}*\hat{\varphi}f)(x)-(\mathscr{E}*Pw)(x) \quad \text{при } x\in\omega.$$

Отсюда вытекает, что $u(x)\in C^\infty$ при $x\in\omega$. Действительно, $\hat{\varphi}f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и, согласно формуле (1.58) главы 1,

$$\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}*Pw\subset\{0\}+\operatorname{supp}w=\operatorname{supp}w,$$

а $\operatorname{supp}w$ не пересекается с ω.

Следствие 5.1. При $n=1$ все операторы $P\neq 0$ вида (0.1) являются гипоэллиптическими, поскольку все фундаментальные решения (2.15) главы 1 — гладкие при $x\neq 0$.

Глава 4

ФУНКЦИЯ P_+^λ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В этой главе мы сначала в §§ 1, 2 изучим аналитическое продолжение функции P_+^λ для многочленов $P(x)$ второго (и первого) порядка. Затем при помощи этого аналитического продолжения мы построим в §§ 3—5 фундаментальные решения для уравнений второго порядка с невырожденной квадратичной формой произвольной сигнатуры с любым числом независимых переменных.

В частности, будут получены все фундаментальные решения (2.6′), (2.7′), (2.10′) и (2.11′) главы 1. Построенные в §§ 3—5 фундаментальные решения являются инвариантными относительно группы ортогональных преобразований, сохраняющих главную часть уравнения: они являются функциями от «радиуса» в (вообще говоря) индефинитной метрике, связанной с уравнением. В частности, фундаментальные решения (2.7′) главы 1 уравнения Клейна—Гордона (2.7) главы 1 оказываются аналитическим продолжением бесселевых функций от интервала Лоренца по номеру бесселевой функции.

§ 1. Функция P_+^λ в случае, когда P — вещественная линейная функция

1.1. Аналитическое продолжение по λ. Если $P(x)=p_1x_1+\ldots+p_nx_n+p_0$ и $P(x)\not\equiv\mathrm{const}$, то, произведя аффинную замену переменных, можно считать, что $P(x)=x_1$. Поэтому остается рассмотреть одномерный случай, когда $n=1$, и (см. формулу (2.10) главы 1)

$$\langle P_+^\lambda(x),\varphi(x)\rangle=\langle x_+^\lambda,\varphi(x)\rangle\equiv$$
$$\equiv\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}),\quad \operatorname{Re}\lambda>-1, \tag{1.1}$$

Этот интеграл сходится и аналитически зависит от λ при $\operatorname{Re}\lambda>-1$.

Теорема 1.1. Функция $\lambda\to x_+^\lambda$, голоморфная как отображение области $\operatorname{Re}\lambda>-1$ в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, продолжается до мероморфной в смысле [18] функции от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Она имеет простые полюса в точках $\lambda=-1,-2,\ldots$ и вычеты

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k}x_+^\lambda=\frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!},\quad k=1,2,\ldots. \tag{1.2}$$

Доказательство. Вычитая из $\varphi(x)$ ряд Тейлора с центром в $x=0$ получаем при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ для $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$

$$\langle x_+^\lambda,\varphi(x)\rangle=\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx=\int_0^1 x^\lambda\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-\ldots$$
$$\ldots-\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1}\Big]dx+\int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx+\varphi(0)\int_0^1 x^\lambda\,dx+\ldots$$
$$\ldots+\varphi^{(k-1)}(0)\int_0^1\frac{x^{\lambda+k-1}}{(k-1)!}dx. \tag{1.3}$$

Интегралы $\int_0^1\ldots$ легко вычисляются:

Теорема 5.3 ([37], [69]). Гипоэллиптичность оператора $P(\partial_x)$ эквивалентна каждому из следующих двух условий:

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{\tilde{P}(\xi+\theta)}{\tilde{P}(\xi)} = 1 \quad \text{при } \forall\theta\in\mathbf{R}^n; \tag{5.6}$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{\partial_{\xi_j}\tilde{P}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} = 0 \text{ при } \forall j = 1, \ldots, n. \tag{5.6'}$$

Гипоэллиптичность также просто связана с гладкостью фундаментальных решений.

Если оператор P гипоэллиптичен, то, по определению 5.2, любое его фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$ — гладкое при $x\neq 0$, т. к. $\delta(x)$ — гладкая при $x\neq 0$: $\delta(x)=0$ при $x\neq 0$.

Из леммы 2.2 главы 1 следует, что верно и обратное.

Теорема 5.4. Если уравнение (0.1) имеет хотя бы одно фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$, гладкое при $x\neq 0$, то оператор $P(\partial_x)$ гипоэллиптичен.

Доказательство. Пусть $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $f|_\Omega\in C^\infty(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Возьмем любую точку $x_0\in\Omega$ и функции φ, $\hat{\varphi}$ и $\hat{\hat{\varphi}}$ такие, как в формуле (2.18) главы 1, и $\omega\subset\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\Omega$.

Тогда из формулы (2.21) главы 1 следует, что

$$u(x) = (\mathscr{E}*\hat{\varphi}f)(x) - (\mathscr{E}*Pw)(x) \quad \text{при } x\in\omega.$$

Отсюда вытекает, что $u(x)\in C^\infty$ при $x\in\omega$. Действительно, $\hat{\varphi}f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и, согласно формуле (1.58) главы 1,

$$\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}*Pw\subset\{0\}+\operatorname{supp} w=\operatorname{supp} w,$$

а $\operatorname{supp} w$ не пересекается с ω.

Следствие 5.1. При $n=1$ все операторы $P\neq 0$ вида (0.1) являются гипоэллиптическими, поскольку все фундаментальные решения (2.15) главы 1 — гладкие при $x\neq 0$.

Глава 4

ФУНКЦИЯ P_+^λ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В этой главе мы сначала в §§ 1, 2 изучим аналитическое продолжение функции P_+^λ для многочленов $P(x)$ второго (и первого) порядка. Затем при помощи этого аналитического продолжения мы построим в §§ 3—5 фундаментальные решения для уравнений второго порядка с невырожденной квадратичной формой произвольной сигнатуры с любым числом независимых переменных.

В частности, будут получены все фундаментальные решения (2.6′), (2.7′), (2.10′) и (2.11′) главы 1. Построенные в §§ 3—5 фундаментальные решения являются инвариантными относительно группы ортогональных преобразований, сохраняющих главную часть уравнения: они являются функциями от «радиуса» в (вообще говоря) индефинитной метрике, связанной с уравнением. В частности, фундаментальные решения (2.7′) главы 1 уравнения Клейна—Гордона (2.7) главы 1 оказываются аналитическим продолжением бесселевых функций от интервала Лоренца по номеру бесселевой функции.

§ 1. Функция P_+^λ в случае, когда P — вещественная линейная функция

1.1. Аналитическое продолжение по λ. Если $P(x)=p_1x_1+\ldots+p_nx_n+p_0$ и $P(x)\not\equiv\text{const}$, то, произведя аффинную замену переменных, можно считать, что $P(x)=x_1$. Поэтому остается рассмотреть одномерный случай, когда $n=1$, и (см. формулу (2.10) главы 1)

$$\langle P_+^\lambda(x), \varphi(x)\rangle = \langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle \equiv$$

$$\equiv\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}), \quad \operatorname{Re}\lambda > -1, \tag{1.1}$$

Этот интеграл сходится и аналитически зависит от λ при $\operatorname{Re}\lambda > -1$.

Теорема 1.1. Функция $\lambda\to x_+^\lambda$, голоморфная как отображение области $\operatorname{Re}\lambda>-1$ в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, продолжается до мероморфной в смысле [18] функции от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Она имеет простые полюса в точках $\lambda=-1, -2, \ldots$ и вычеты

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k} x_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}, \quad k=1, 2, \ldots. \tag{1.2}$$

Доказательство. Вычитая из $\varphi(x)$ ряд Тейлора с центром в $x=0$ получаем при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ для $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$

$$\langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-\ldots$$

$$\ldots-\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1}\Big]dx + \int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\int_0^1 x^\lambda\,dx + \ldots$$

$$\ldots+\varphi^{(k-1)}(0)\int_0^1\frac{x^{\lambda+k-1}}{(k-1)!}\,dx. \tag{1.3}$$

Интегралы $\int_0^1\ldots$ легко вычисляются:

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda+k-1}}{(k-1)!}\,dx=\frac{1}{(\lambda+k)(k-1)!},\quad \operatorname{Re}\lambda>-k. \tag{1.4}$$

Очевидно, первый интеграл в правой части (1.3) — голоморфная функция при $\operatorname{Re}\lambda>-k-1$, второй интеграл — при всех $\lambda\in\mathbf{C}$, а сумма остальных имеет простые полюсы в точках $\lambda=-k$ с вычетами $\varphi^{(k-1)}(0)/(k-1)!$.

Другое доказательство: при $\operatorname{Re}\lambda>-1$

$$\langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle=\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx=-\int_0^\infty \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\varphi'(x)\,dx=\dots$$

$$\dots=(-1)^k\int_0^\infty \frac{x^{\lambda+k}}{(\lambda+1)\dots(\lambda+k)}\varphi^{(k)}(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Следовательно, функция

$$\langle(\lambda+1)\dots(\lambda+k)\,x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle=(-1)^k\int_0^\infty x^{\lambda+k}\varphi^{(k)}(x)\,dx \tag{1.6}$$

голоморфна по λ при $\operatorname{Re}\lambda>-k-1$, и

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k}\langle x_+^\lambda, \varphi(x)\rangle=\frac{(-k)^k\int_0^\infty \varphi^{(k)}(x)\,dx}{(-k+1)\dots(-1)}=\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}. \tag{1.7}$$

Следствие 1.1. Сделаем в x_+^λ подстановку $x=h(y)=|y|^2-\omega^2$, где $y\in\mathbf{R}^n$, $\omega\in\mathbf{R}\setminus 0$. Поскольку $\operatorname{sing\,supp} x_+^\lambda=\{0\}$, а $\operatorname{grad} h(y)\neq 0$ при $|y|^2=\omega^2$, то $(h(y))_+^\lambda=(|y|^2-\omega^2)_+^\lambda\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ в силу замечания 1.4 главы 1. Кроме того, отображение $u(x)\mapsto u(h(y))$ непрерывно по u в классе функций $u(x)$ с $\operatorname{sing\,supp} u\not\ni 0$ в соответствующей сходимости. Поэтому $(|y|^2-\omega^2)_+^\lambda$ — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ с простыми полюсами в $\lambda=-1,-2,\dots$ и вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k}(|y|^2-\omega^2)_+^\lambda=\frac{(-1)^k\delta^{(k-1)}(|y|^2-\omega^2)}{(k-1)!},\quad y\in\mathbf{R}^n. \tag{1.8}$$

1.2. Применение к бесселевым функциям. По определению [47], [70] при $\nu\in\mathbf{C}$

$$J_\nu(z)=\sum_0^\infty(-1)^r\frac{z^{2r+\nu}}{2^{2r+\nu}r!\Gamma(\nu+r+1)},\quad \arg z\in]-\pi,\pi[, \tag{1.9}$$

определим как аналитическое продолжение из области $\operatorname{Re}\nu>0$

$$J_\nu(x_+)=\sum(-1)^r\frac{x_+^{2r+\nu}}{2^{2r+\nu}r!\Gamma(\nu+r+1)},\quad x\in\mathbf{R}. \tag{1.10}$$

Каждое слагаемое $\frac{x_+^{2r+\nu}}{\Gamma(\nu+r+1)}$ при $r=0,1,\dots$ — голоморфная функция от $\nu\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ по теореме 1.1. При целых $\nu=-1,-2,\dots$

$$\frac{x_+^{2r+\nu}}{\Gamma(\nu+r+1)}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^r\delta^{(x-1)}(x)}{(k-1)!} & \text{при } 2r+\nu=-k=-1,-2,\dots;\\ 0 \text{ при } 2r+\nu\geqslant 0,\ \nu+r+1=0,-1,-2,\dots, & \\ \text{т. е. при } -2r\leqslant\nu\leqslant -r-1. & \end{cases}$$

Поэтому при $l=1,2,\dots$ для $\nu=-l$

$$J_{-l}(x_+)=2^l\sum_{0\leqslant 2r<l}\frac{(-1)^{l-r-1}\delta^{(l-2r-1)}(x)}{2^{2r}r!(l-2r-1)!}+(-1)^lJ_l(x_+). \tag{1.12}$$

§ 2. Функция P_+^λ для случая, когда $P(x)$ — квадратичная форма типа $(m, n-m)$ с вещественными коэффициентами

Пусть $P(x)=B(x)$ — невырожденная квадратичная форма в $\mathbf{R}^n$ с вещественными коэффициентами. Линейной заменой координат она приводится к виду

$$B(x)=x_1^2+\dots+x_m^2-x_{m+1}^2-\dots-x_n^2, \tag{2.1}$$

где $0\leqslant m\leqslant n$. Покажем, что $P_+^\lambda(x)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и продолжается до мероморфной функции от $\lambda\in\mathbf{C}$. Если $m=0$, то $B_+^\lambda(x)\equiv 0$. При $m\neq 0$ нужно различать два случая: $m=n$ и $1\leqslant m\leqslant n-1$. Дело в том, что при $m=n$ множество $B(x)=0$ состоит из одной точки $x=0$, а при $1\leqslant m\leqslant n-1$ это множество является конической поверхностью $Q\subset\mathbf{R}^n$, гладкой вне вершины $x=0$.

Замечание 2.1. При $m=n$ функция $B_+^\lambda(x)=|x|$ в области $x\neq 0$ — голоморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениям в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$. В случае $1\leqslant m\leqslant n$ при $x\neq 0$ очевидно $\operatorname{grad} B(x)\neq 0$, поэтому B_+^λ можно представить как суперпозицию $(\cdot)_+^\lambda$ и $B(x)$:

$$B_+^\lambda(x)=(Б(x))_+^\lambda,\quad x\neq 0. \tag{2.2}$$

Следовательно, $B_+^\lambda(x)|_{x\neq 0}$, по теореме 1.1,—мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ и вычетами (см. (1.2))

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-k}B_+^\lambda(x)=\frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(B(x))}{(k-1)!},\quad x\neq 0,\quad k=1,2,\dots \tag{2.3}$$

2.1. Случай, когда $m=n$. В этом случае $B_+(x)=|x|^2$ и $B_+^\lambda(x)=|x|^{2\lambda}$. Мы изучим $|x|^\lambda$, а для $|x|^{2\lambda}$ все результаты получаются простым пересчетом. В сферических координатах $x=r\omega$, где $|\omega|=1$, $r=|x|>0$. Для $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\lambda>-n$ сходится интеграл

$$\langle |x|^\lambda, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1}\bar\varphi(r)\,dr = \langle r_+^{\lambda+n-1}, \bar\varphi(r)\rangle, \qquad (2.4)$$

где

$$\bar\varphi(r) = \int_{|\omega|=1} \varphi(r\omega)\,d\omega.$$

Разлагая $\varphi(x)$ в ряд Тейлора в точке $x=0$, мы видим, что $\bar\varphi(r)$ при $r\to 0$ разлагается в ряд только по четным степеням r: $r^0, r^2, \ldots$. Следовательно, по теореме 1.1, интеграл (2.4) имеет полюса лишь при $\lambda+n-1=-1, -3, \ldots, -1-2k, \ldots$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) с вычетами (см. [18])

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n-2k} \langle |x|^\lambda, \varphi\rangle = \frac{\bar\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \Omega_n \frac{\Delta^k\varphi(0)}{2^k k!\, n\ldots(n+2k-2)}, \qquad (2.5)$$

где Ω_n — площадь сферы $|x|=1$ в $\mathbf{R}^n$.

Отметим, что последнее равенство очевидно для $k=0$.

Из (2.5) вытекает, что $|x|^\lambda$ — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ с простыми полюсами при $\lambda=-n-2k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ и вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n-2k} |x|^\lambda = \Omega_n \frac{\Delta^k\delta(x)}{2^k k!\, n\ldots(n+2k-2)}. \qquad (2.6)$$

В частности, при $k=0$

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n} |x|^\lambda = \Omega_n\delta(x). \qquad (2.7)$$

Таким образом, все вычеты функции $|x|^\lambda$ сосредоточены в точке $x=0$. Отметим важный для дальнейшего случай $n=1$:

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-1-2k} |x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2k)}(x)}{2^k k!\,(2k-1)!}, \quad k=0, 1, 2, \ldots. \qquad (2.8)$$

Из доказанного следует

Теорема 2.1. При $m=n$ обобщенная функция $B^\lambda=|x|^{2\lambda}$ — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ с простыми полюсами в точках $\lambda=\frac{n}{2}-k$ и вычетом в точке $\lambda=-\frac{n}{2}$, равным

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n}{2}} B^\lambda = \frac{\Omega_n}{2}\,\delta(x). \qquad (2.7')$$

2.2. Применение к разложению δ-функции на плоские волны. Возьмем $a(x)=|\omega\cdot x|$, где $\omega\in\mathbf{R}^n\setminus 0$, и $\omega\cdot x=\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n$ — «плоская волна». Тогда

$$a_+^\lambda(x)=|\omega\cdot x|^\lambda \qquad (2.9)$$

при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ есть результат подстановки $y=\omega\cdot x$ в функцию $|y|^\lambda$, $y\in\mathbf{R}$. Поскольку $\operatorname{grad} y\equiv\omega\neq 0$, то из (2.8) следует, что $|\omega\cdot x|^\lambda$ из области $\operatorname{Re}\lambda>-1$ продолжается до мероморфной функции от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ с простыми полюсами в точках $\lambda=-1-2k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ и вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-1-2k} |\omega\cdot x|^\lambda = 2\frac{\delta^{(2k)}(\omega\cdot x)}{2^k k!\,(2k-1)!}, \qquad (2.10)$$

сосредоточенными на гиперплоскости $\omega\cdot x=0$.

Осредним (2.9) по сфере $|\omega|=1$: при $\operatorname{Re}\lambda>-1$

$$\int_{|\omega|=1} |\omega\cdot x|^\lambda d\omega = C(\lambda, n)\, r^\lambda,$$

где

$$C(\lambda, n) = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} \qquad (2.11)$$

(см. [18]). Отсюда

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \int_{|\omega|=1} \frac{|\omega\cdot x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\,d\omega = \frac{2|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}. \qquad (2.12)$$

Обе части равенства (2.12), ввиду (2.6) и (2.10), продолжаются до аналитических функций от $\lambda\in\mathbf{C}$. Поэтому из их совпадения при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ следует, что они совпадают и при всех $\lambda\in\mathbf{C}$. При этом левую часть нужно понимать как интеграл от функции параметра ω со значениями в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

При $\lambda=-n$ из (2.12) и (2.6) получаем

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \int_{|\omega|=1} \left(\frac{|\omega\cdot x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\right)\Bigg|_{\lambda=-n} d\omega = \Omega_n\delta(x). \qquad (2.13)$$

Это есть разложение δ-функции на плоские волны, имеющее важные приложения (см. [18]).

2.3. Случай $1\leqslant m\leqslant n-1$. В биполярных координатах $(x_1, \ldots, x_m)=r\omega_m$, $(x_{m+1}, \ldots, x_n)=\rho\theta_{n-m}$, где $r, \rho>0$, $|\omega_m|=|\theta_{n-m}|=1$, получаем $B(x)=r^2-\rho^2$. Поэтому при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ для $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$\langle B_+^\lambda(x), \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty\left(\int_0^r (r^2-\rho^2)^\lambda\bar\varphi(r,\rho)\,\rho^{n-m-1}d\rho\right) r^{m-1}dr, \quad (2.14)$$

где
$$\bar\varphi(r,\rho)=\int\limits_{|\omega_m|=|\theta_{n-m}|=1}\varphi(r\omega_m,\rho\theta_{n-m})\,d\omega_m d\theta_{n-m}. \qquad (2.15)$$
Как и выше, $\bar\varphi(r,\rho)$ при $r\to0$ или $\rho\to0$ разлагается в ряд лишь по четным степеням r и ρ.

После замены $\rho=\tau r$, $1-\tau=s$, получаем
$$\langle B_+^\lambda,\varphi\rangle=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^1(1-\tau^2)^\lambda r^{2\lambda}\bar\varphi(r,\tau r)\,r^{n-1}\tau^{n-m-1}d\tau\right)dr=$$
$$=\int\limits_0^1 s^\lambda\left[(2-s)^\lambda\int\limits_0^\infty r^{2\lambda+n-1}\bar\varphi(r,(1-s)r)(1-s)^{n-m-1}dr\right]ds=$$
$$=\int\limits_0^1 s^\lambda\left[\int\limits_0^\infty r^{2\lambda+n-1}I(r,s,\lambda)\,dr\right]ds=$$
$$=\langle s_+^\lambda,\ \langle r_+^{2\lambda+n-1},I(r,s,\lambda)\rangle\rangle, \qquad (2.16)$$
где
$$I(r,s,\lambda)=(r-s)^\nu\bar\varphi(r,(1-s)r)(1-s)_+^{n-m-1}. \qquad (2.16')$$
Из теоремы 1.1 вытекает, что здесь внутренний интеграл (по r) — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ с простыми полюсами при $2\lambda+n-1=-1,\ -3,\ \ldots,\ -1-2j,\ \ldots$ ($j=0,1,\ldots$), т. е. при $\lambda=\lambda_j^0=-\frac{n}{2}-j$, поскольку $I(r,s,\lambda)$ при $r\to0$ разлагается в ряд Тейлора лишь по четным степеням r. Поэтому обозначая $\mathscr{P}^0=\left\{-\frac{n}{2}-j:j=0,1,\ldots\right\}$, получаем:
$$\langle B_+^\lambda,\varphi\rangle=\langle s_+^\lambda,\sum_{\substack{\lambda_j^0\in\mathscr{P}^0\\ \lambda_j^0>-N}}\frac{\partial_r^{2j}I(0+,s,\lambda)}{(2j)!\,2\left(\lambda-\lambda_j^0\right)}+R_N(s,\lambda)\rangle, \qquad (2.17)$$
где $\partial_r^{2j}I(0+,s,\lambda)$ и $R_N(s,\lambda)$ — гладкие функции от $s\in[0,1]$, голоморфные по λ при $\operatorname{Re}\lambda>-N$. Применяя к (2.17) повторно теорему 1.1 (точнее, метод доказательства этой теоремы), получаем, что
$$\langle B_+^\lambda,\varphi\rangle=\sum_{\substack{\lambda_i^Q\in\mathscr{P}^Q\\ \lambda_i^Q>-N}}\left(\sum_{\substack{\lambda_j^0\in\mathscr{P}^0\\ \lambda_j^0>-N}}\frac{\partial_s^{i-1}\partial_r^{2j}I(0+,0,\lambda)}{2(i-1)!\,(2j)!\left(\lambda-\lambda_i^Q\right)\left(\lambda-\lambda_j^0\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial_s^{i-1}R_N(0+,\lambda)}{(i-1)!\left(\lambda-\lambda_i^Q\right)}\right)+R_{NN}(\lambda), \qquad (2.18)$$
где $\lambda_i^Q=-i$, $\mathscr{P}^Q=\{-1,-2,\ldots\}$, а $R_{NN}(\lambda)$ — голоморфная функция при $\operatorname{Re}\lambda>-N$.

Отсюда видно, что B_+^λ — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ с полюсами в точках $\lambda\in\mathscr{P}^Q\cup\mathscr{P}^0$, простыми при $\lambda\notin\mathscr{P}^Q\cap\mathscr{P}^0$. Вычеты функции B_+^λ в полюсах $\lambda\in\mathscr{P}^Q\setminus\mathscr{P}^0$ сосредоточены при $s=0$, т. е. при $\rho=r$, или иначе — на «конусе» $Q=\{x\in\mathbf{R}^n:B(x)=0\}$, а вычеты в $\lambda\in\mathscr{P}^0\setminus\mathscr{P}^Q$ — при $r=0$, т. е. при $\rho=0$ и $\tau=1-s\in[0,1]$, или иначе — в вершине $x=0$ «на всех угловых направлениях $\tau\in[0,1]$» (на которых $B(x)>0$). В точках $\lambda_n\in\mathscr{P}^Q\cap\mathscr{P}^0$ полюсы, вообще говоря, имеют второй порядок: первый вычет сосредоточен на конусе Q (в том числе и в вершине $x=0$), а второй вычет $\left(\text{т. е. коэффициент при }\frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2}\right)$ сосредоточен в вершине $x=0$ конуса Q. Из сказанного выводится (см. [18])

Теорема 2.2. 1) При $1\leqslant m\leqslant n-1$, $n\geqslant2$ функция $\frac{B_+^\lambda(x)}{\Gamma(\lambda+1)}$ — голоморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\setminus0)$ и мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

2) Она имеет лишь простые полюса, расположенные в точках
$$\lambda\in\mathscr{P}^0=\left\{-\frac{n}{2}-j:j=0,1,2,\ldots\right\}. \qquad (2.19)$$
Вычеты сосредоточены в вершине $x=0$; вычет в «первом» полюсе $\lambda=-\frac{n}{2}$ пропорционален $\delta(x)$:
$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n}{2}}\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}=\Omega_{m,n-m}\delta(x),\quad 1\leqslant m\leqslant n-1,\quad n\geqslant2; \qquad (2.20)$$
$$\Omega_{m,n-m}=$$
$$=\frac12\Omega_m\cdot\Omega_{n-m}\ \langle\frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\ (2-s)^\lambda(1-s)_+^{n-m-1}\rangle\Big|_{\lambda=-\frac{n}{2}}. \qquad (2.21)$$

3) Значения $\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ при $\lambda\in\mathscr{P}^Q=\{-1,-2,\ldots\}$ — обобщенные функции, сосредоточенные на конусе Q:
$$\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-k}=\frac{\delta^{(k-1)}(B(x))}{(k-1)!},\quad x\neq0,\quad k=1,2,\ldots. \qquad (2.22)$$
Действительно, (2.22) вытекает из (2.3). Формула (2.20) вытекает из (2.17), (2.16):
$$\langle\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n}{2}}\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\varphi\rangle=\langle\frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\ \frac{I(0+,s,\lambda)}{2}\rangle\Big|_{\lambda=-\frac{n}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle \frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\ (2-s)^\lambda\bar{\varphi}(0,0)(1-s)_+^{n-m-1}\right\rangle\Big|_{\lambda=-\frac{n}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\Omega_m\Omega_{n-m}\varphi(0)\left\langle \frac{s_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},\ (2-s)^\lambda(1-s)_+^{n-m-1}\right\rangle\Big|_{\lambda=-\frac{n}{2}}. \quad (2.23)$$

Пример 2.1. Для случая, когда $n=4$, $m=1$ и $B(x)=x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2$ — интервал Лоренца, из (2.21) и (1.2) получаем

$$\Omega_{1,3}=4\pi(-[(2-s)^{-2}(1-s)_+^2]')|_{s=0}=\pi. \quad (2.24)$$

Аналогично, для $n=2$, $m=1$ и $B(x)=x_1^2-x_2^2$

$$\Omega_{1,1}=\frac{1}{2}2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1. \quad (2.24')$$

2.4. Применение к бесселевым функциям. Аналогично (1.10), для квадратичной формы $B(x)$ из (2.1) и функции $H_\nu(z)\equiv z^\nu J_\nu(z)$, $\arg z\in]-\pi,\pi[$, определим суперпозицию с $\sqrt{B_+(x)}$ для $\mathrm{Re}\,\nu>0$ как функцию

$$H_\nu(\sqrt{B_+(x)})=B_+^{\nu/2}J_\nu(\sqrt{B_+})\equiv\sum_0^\infty\frac{(-1)^r B_+^{r+\nu}(x)}{2^{2r+\nu}r!\,\Gamma(\nu+r+1)},\ x\in\mathbf{R}^n. \quad (2.25)$$

При $\mathrm{Re}\,\nu>0$ — это непрерывная функция от $x\in\mathbf{R}^n$. При $\mathrm{Re}\,\nu\leqslant 0$ определим ее аналитическим продолжением по ν как функцию от ν со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Согласно теореме 2.2, здесь каждое слагаемое $\frac{B_+^{r+\nu}(x)}{\Gamma(\nu+r+1)}$ — голоморфная функция от $\nu\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$, и мероморфная функция от $\nu\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ с простыми полюсами при $r+\nu\in\mathscr{P}^0=\left\{-\frac{n}{2}-j: j=0,1,2,\dots\right\}$. Ее вычет в точке $\nu=-r-\frac{n}{2}$ равен (2.20):

$$\operatorname*{res}_{\nu=-r-\frac{n}{2}}\frac{B_+^{r+\nu}}{\Gamma(\nu+r+1)}=\Omega_{m,n-m}\delta(x),\ 1\leqslant m\leqslant n-1,\ n\geqslant 2. \quad (2.26)$$

Отсюда вытекает

Теорема 2.3. $H_\nu(\sqrt{B_+(x)})$ — мероморфная функция от $\nu\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, с простыми полюсами при $\nu\in\mathscr{P}^0$.

Формулы (2.26) будут использованы в следующих §§ 4, 5 при вычислении фундаментальных решений дифференциальных уравнений (0.1) второго порядка. В частности, для волнового уравнения и уравнения Клейна—Гордона в $\mathbf{R}^k$ (при этом $n=k+1$, $m=1$).

Отметим, что, аналогично (1.12), при $l=1,2,\dots$ для $\nu=-l$

$$H_{-l}(\sqrt{B_+(x)})=2^l\sum_{0\leqslant r\leqslant l-1}\frac{(-1)^{lr}\delta^{(l-r-1)}(B(x))}{2^{2r}r!(l-r-1)!}+$$

$$+(-1)^l B_+^{-\frac{l}{2}}J_l(\sqrt{B_+}),\quad x\neq 0, \quad (2.27)$$

Замечание 2.1. Формулы (2.22) и (2.27) справедливы лишь при $x\neq 0$. Чтобы формула (2.22) была справедливой при «всех» $x\in\mathbf{R}$, нужно правильным образом регуляризовать $\delta^{(k-1)}(B(x))$ в точке $x=0$. Такая регуляризация возможна в (2.22) лишь в тех случаях, когда $\lambda=-k\notin\mathscr{P}^0=\{-\frac{n}{2}-j: j=0,1,2,\dots\}$, т. е. когда левая часть (2.22) имеет смысл. Тогда правую часть (2.22), по определению, нужно считать равной левой части. Равенство (2.27) при такой регуляризации $\delta^{(l-r-1)}(B(x))$ также будет справедливым, как видно из вывода формулы (2.27), если

$$-l+r\notin\mathscr{P}^0 \text{ при } r=0,1,2,\dots,l-1. \quad (2.28)$$

Это условие выполняется, если, например, n — нечетное или

$$1\leqslant l<\frac{n}{2}. \quad (2.29)$$

Итак, для $k\neq\frac{n}{2}+j$, $j=0,1,\dots$, нужно задать регуляризацию $\delta^{(k-1)}(B(x))$, используя формулу (2.22): ввиду (2.16), для $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$

$$\left\langle\frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(B(x))}{(k-1)!},\varphi(x)\right\rangle\equiv\left\langle\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-k},\varphi\right\rangle=$$

$$=\left\langle\operatorname*{res}_{\lambda=-k}B_+^\lambda,\varphi\right\rangle=\frac{1}{(k-1)!}\left(\left(\frac{d}{ds}\right)^{k-1}\left\langle r_+^{-2k+n-1}, I(r,s,\lambda)\right\rangle\right)\Big|_{s=0}. \quad (2.30)$$

Отметим, что при таких k

$$\left\langle r_+^{-2k+n-1}, I(r,s,\lambda)\right\rangle=$$

$$=(2-s)^{-k}\int_0^\infty r^{-2k+n-1}\bar{\varphi}(r,(1-s)r)(1-s)^{n-k-1}\,dr \quad (2.31)$$

— сходящийся интеграл, поскольку $-2k+n>0$.

В частности, для $k=1$ и $n\geqslant 3$ формула (2.22) справедлива, если положить, в соответствии с (2.30) и (2.31),

$$\langle\delta(B(x),\varphi(x)\rangle=\frac{1}{2}\int_0^\infty r^{n-3}\bar{\varphi}(r,r)\,dr. \quad (2.32)$$

Отметим, что при $n\geqslant 3$ и $k=1$ выполняется условие (1.24) главы 1 и выражение (2.32) соответствует формуле (1.22) главы 1, т. е. согласуется с «обычной» практикой вычислений с δ-функцией как с единичной мерой. А именно, пользуясь формулой (1.25) главы 1 получаем, как в формуле (1.26) главы 1

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(B(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} r^{n-2}\delta(r^2-\rho^2)\,\varphi(x)\,\frac{d^n x}{r^{m-1}\rho^{n-m-1}} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty r^{n-2}\,\frac{1}{2r}\,\delta(r-\rho)\,\overline{\varphi}(r,\rho)\,dr\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^{n-3}\overline{\varphi}(r,r)\,dr. \quad (2.33)$$

Отметим, что для $k=1$ такое совпадение с «обычными» методами имеет место лишь при $n \geqslant 3$ (как в примере 1.11 главы 1). При $n=2$ интеграл (2.32) расходится и формула (2.22) не может быть справедливой, поскольку ее левая часть не существует. Отметим также, что при условии (2.29) формула (2.22) также справедлива при «обычной» методике вычислений с производными δ-функции, поскольку все возникающие при этом интегралы сходятся. Например, для $l=2$ условие (2.29) выполняется при $n \geqslant 4$ и т. д. Мы воспользуемся ниже формулами (2.22) и (2.27) в случае $m=1$, $n=4$ и $k=1$, $l=1$, когда условие (2.29) выполнено:

$$\left.\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-1} = \delta(B(x)), \quad x \in \mathbf{R}^4, \quad (2.34)$$

$$H_{-1}(\sqrt{B_+(x)}) = -\delta(B(x)) - B_+^{-1/2}(x)\,J_1(\sqrt{B_+(x)}), \quad x \in \mathbf{R}^4. \quad (2.35)$$

Отметим также, что в этом случае $B(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ — интервал Лоренца, и из (2.20) и (2.24), (2.25) вытекают формулы

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-2} \frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \pi\delta(x) \Rightarrow \operatorname*{res}_{\nu=-2} H_\nu(\sqrt{B_+(x)}) = \pi\delta(x). \quad (2.36)$$

Аналогично, для $n=2$ и $B=x_1^2-x_2^2$, ввиду (2.20), (2.24′) и (2.25), получаем

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-1} \frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \delta(x) \Rightarrow \operatorname*{res}_{\nu=-1} H_\nu(\sqrt{B_+(x)}) = \delta(x). \quad (2.37)$$

§ 3. Инвариантные фундаментальные решения уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами

В этом параграфе мы построим фундаментальные решения для уравнений (0.1) *второго порядка*, т. е. когда $m=2$, с вещественными коэффициентами. Такие уравнения можно записать в виде

$$Pu(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (3.1)$$

Предположим также, что это уравнение имеет невырожденную квадратичную форму, т. е.

$$\det A \neq 0, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}, \quad a_{ij} = a_{ji}. \quad (3.2)$$

Замена $u(x) = v(x)e^{b\cdot x}$, $b \in \mathbf{R}^n$, приводит уравнение (3.1) к виду

$$P_1 v \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n (2(Ab)_i + a_i)\frac{\partial v}{\partial x_i} + $$
$$+ (a_0 + (Ab, b) + (a, b))\,v = fe^{-bx}. \quad (3.3)$$

Определим вектор b так, чтобы $2Ab + a = 0$, т. е. $b = -\frac{1}{2}A^{-1}a$. Тогда (3.3) принимает вид

$$P_1 v = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + qv = f(x)e^{-bx} \equiv g(x);$$

$$q = a_0 - \frac{1}{4}(a, A^{-1}a). \quad (3.4)$$

Таким образом, уравнения (3.1) и (3.4) эквивалентны. Более того, они имеют одни и те же фундаментальные решения, поскольку $\delta(x)e^{-b\cdot x} = \delta(x)$.

Приведем (3.4) к каноническому виду линейной заменой переменных $x = Cy$. При этом матрица A преобразуется в матрицу

$$B = C^{-1}A(C^{-1})^t \quad (3.5)$$

точно так же, как при преобразовании квадратичной формы под действием $(C^{-1})^t$. Поэтому можно выбрать C так, чтобы B была диагональной:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}; \quad b_{ii} = \pm 1, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (3.6)$$

Тогда уравнение (3.4) примет вид

$$P_1 v = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial y_m^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y_{m+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2} + qv =$$
$$= g(Cy), \quad y \in \mathbf{R}^n. \quad (3.7)$$

Построим для (3.7) фундаментальное решение:

$$P_1\mathscr{E}(y) = \frac{\partial^2 \mathscr{E}(y)}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathscr{E}(y)}{\partial y_m^2} - \frac{\partial^2 \mathscr{E}(y)}{\partial y_{m+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2 \mathscr{E}(y)}{\partial y_n^2} +$$
$$+ q\mathscr{E}(y) = \delta(y), \quad y \in \mathbf{R}^n. \quad (3.8)$$

Замечание 3.1. Если $g(x) = \delta(x)$, то $g(Cy) = \frac{1}{|C|}\delta(y)$ при $C \in \mathrm{GL}(n)$. Поэтому если $\mathscr{E}(y)$ фундаментальное решение уравнения (3.8), то функция

$$\frac{\mathscr{E}(C^{-1}x)}{|C|} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n) \quad (3.8')$$

является фундаментальным решением уравнения (3.4) (и (3.1)).

3.1. Анализ свойств инвариантности уравнения. Рассмотрим квадратичную форму уравнения (3.8)

$$B(y)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2=y_1^2+\ldots+y_m^2-y_{m+1}^2-\ldots-y_n^2,\quad y\in\mathbf{R}^n. \tag{3.9}$$

Эта форма инвариантна относительно «ортогональных» преобразований $C\in O(n,m)$ (для которых $C^tBC=B$, т. е. $B(Cy)=B(y)$, $y\in\mathbf{R}^n$). Само уравнение (3.8) инвариантно относительно замен $y\mapsto C^ty$, поскольку $C^tB(C^t)^t=B$ (ср. с (3.5)). Поэтому если $\mathscr{E}(y)$ — решение уравнения (3.8), то $\mathscr{E}(C^ty)$ также решение этого уравнения. Это видно также непосредственно:

$$\sum_k b_{kk}\frac{\partial^2(\mathscr{E}(C^ty))}{\partial y_k^2}=\sum_{k,l,j} b_{kk}\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y_l\partial y_j}\right)(C^ty)\,C^t_{lk}C^t_{jk}=$$

$$=\sum_{l,j}(C^tBC)_{lj}\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y_l\partial y_j}\right)(C^ty)=\sum b_{ll}\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y_l^2}=\delta(y),\quad y\in\mathbf{R}^n. \tag{3.10}$$

Кроме того, поскольку $B^{-1}=B$, то также $C^{-1}B(C^t)^{-1}=B$, т. е. C^t также сохраняет форму (3.9) и $\mathscr{E}(Cy)$ — решение уравнения (3.8).

Эти соображения инвариантности наводят на мысль о существовании *инвариантного фундаментального решения*, т. е. для которого $\mathscr{E}(Cx)=\mathscr{E}(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, при $\forall C\in O(n,m)$. Такие распределения в каждой компоненте связности множества $\{x\in\mathbf{R}^n:B(x)\neq 0\}$ имеют вид

$$\mathscr{E}(y)=E(\rho),\quad \rho\equiv\sqrt{B(y)}, \tag{3.11}$$

где $E(\rho)$ — обобщенная функция от одной переменной. Ветвь $\sqrt{B(y)}$ здесь можно считать пока произвольной.

Можно выбрать $\rho=\sqrt{B(y)}\in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus Q)$, где Q — «конус» $B(y)=0$.

Область значений функции $\rho(y)=\sqrt{B(y)}$ при $y\in\mathbf{R}^n\setminus Q$ в дальнейшем для краткости будем обозначать через $\mathscr{R}$. Очевидно, $0\notin\mathscr{R}$.

3.2. Нахождение регулярной части инвариантного фундаментального решения. Найдем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $E(\rho)$, предполагая, что функция (3.11) является фундаментальным решением, т. е. выполняется (3.8).

Подставляя (3.11) в (3.8), получаем при $y\in\mathbf{R}^n\setminus Q$

$$\frac{\partial\mathscr{E}(y)}{\partial y_k}=E'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y_k},\quad \frac{\partial^2\mathscr{E}(y)}{\partial y_k^2}=E''(\rho)\left(\frac{\partial\rho}{\partial y_k}\right)^2+E'(\rho)\frac{\partial^2\rho}{\partial y_k^2}. \tag{3.12}$$

Но

$$\frac{\partial\rho}{\partial y_k}=\pm\frac{y_k}{\rho},\quad \frac{\partial^2\rho}{\partial y_k^2}=\pm\frac{1}{\rho}-\frac{y_k^2}{\rho^3},$$

где знак $+$ выбирается при $1\leqslant k\leqslant m$ и $-$ при $m+1\leqslant k\leqslant n$. Поэтому

$$\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y_k^2}=E''(\rho)\frac{y_k^2}{\rho^2}+E'(\rho)\left(\pm\frac{1}{\rho}-\frac{y_k^2}{\rho^3}\right),\quad \rho\in\mathscr{R}. \tag{3.13}$$

Складывая эти равенства для $k=1,\ldots,n$, получаем

$$P_1\mathscr{E}(y)=E''(\rho)+\frac{n-1}{\rho}E'(\rho)+qE(\rho),\quad y\in\mathbf{R}^n\setminus Q. \tag{3.14}$$

Поэтому, в силу (3.8),

$$P_1\mathscr{E}(y)=E''(\rho)+\frac{n-1}{\rho}E'(\rho)+qE(\rho)=0 \text{ при } \rho\in\mathscr{R}, \tag{3.14′}$$

поскольку $\delta(y)=0$ при $y\neq 0$, а значит, и при $\rho\in\mathscr{R}$.

Далее, надо различать случаи $q=0$ и $q\neq 0$.

В случае $q=0$ уравнение (3.14′) легко решается (ср. с [63]):

$$E(\rho)=\begin{cases} c_1\dfrac{1}{\rho^{n-2}}+c_2, & \rho\in\mathscr{R},\ n\neq 2,\\ c_1+c_2\ln\rho, & \rho\in\mathscr{R},\ n=2.\end{cases} \tag{3.15}$$

При $q\neq 0$ уравнение (3.14′) приводится к случаю $q=1$ подстановкой $z=\sqrt{q}\,\rho$:

$$P_1\mathscr{E}(y)=q\left(\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{n-1}{z}\frac{dE}{dz}+E(z)\right)=0,\quad z\in Z\equiv\sqrt{q}\,\mathscr{R}, \tag{3.16}$$

которое, в свою очередь, приводится к уравнению Бесселя заменой $E(z)=z^{p_0}w(z)$.

Действительно,

$$\begin{gathered}\frac{dE(z)}{dz}=z^{p_0}\frac{dw(z)}{dz}+p_0z^{p_0-1}w,\quad z\in Z,\\ \frac{d^2E(z)}{dz^2}=z^{p_0}\frac{d^2w(z)}{dz^2}+2p_0z^{p_0-1}\frac{dw}{dz}+p_0(p_0-1)z^{p_0-2}w(z).\end{gathered} \tag{3.17}$$

Подставляя (3.17) в (3.16), получаем

$$P_1\mathscr{E}(y)=q\left[z^{p_0}\frac{d^2w(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}z^{p_0}\frac{dw}{dz}(n-1+2p_0)+\right.$$
$$\left.+w\left[z^{p_0}+z^{p_0-2}((n-1)p_0+p_0(p_0-1))\right]\right]=0,\quad z\in Z. \tag{3.18}$$

Отсюда

$$P_1\mathscr{E}(y)=qz^{p_0}\left[\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}(n-1+2p_0)\frac{dw}{dz}+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{(n-1)p_0+p_0(p_0-1)}{z^2}\right)w(z)\right]=0,\quad z\in Z. \tag{3.19}$$

Это уравнение совпадает со стандартным уравнением Бесселя порядка ν_0 ([41], [76]), если $n-1+2p_0=1$, $\nu_0^2=-((n-1)p_0+p_0(p_0-1))=-p_0(n-2+p_0)$. Отсюда находим p_0 и ν_0:

$$p_0=-\frac{n-2}{2},\quad \nu_0^2=\left(\frac{n-2}{2}\right)^2. \tag{3.20}$$

При таких p_0 и ν_0 уравнение (3.19) принимает вид [41], [71]:

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu_0^2}{z^2}\right)w(z)=0, \quad z\in Z. \tag{3.21}$$

Можно положить $\nu_0\equiv p_0=-\frac{n-2}{2}$. Общее решение уравнения (3.21) имеет вид [41], [71]

$$w(z)=c_1J_{\nu_0}(z)+c_2Y_{\nu_0}(z), \quad \nu_0=-\frac{n-2}{2}. \tag{3.22}$$

Следовательно в области, где $B(y)\neq 0$ (ср. с. [51], [56])

$$\mathscr{E}(y)=\mathscr{E}_{\nu_0}(y)\equiv E_{\nu_0}(\rho)\equiv z^{\nu_0}w(z)=$$
$$=(\sqrt{q}\,\rho)^{\nu_0}[C_1J_{\nu_0}(\sqrt{q}\,\rho)+C_2Y_{\nu_0}(\sqrt{q}\,\rho)], \quad y\in\mathbf{R}^n\setminus Q. \tag{3.23}$$

Здесь $\sqrt{q}\,\rho=\sqrt{qB(x)}$ — действительная функция в области, где $qB(x)>0$ и чисто мнимая в области, где $qB(x)<0$; C_1 и C_2 постоянны в каждой компоненте связности области $\mathbf{R}^n\setminus Q$ (в которой $B(y)\neq 0$).

Итак, мы нашли явный вид (3.23) и (3.15) искомого инвариантного фундаментального решения в области, где $B(y)\neq 0$. Построенные функции (3.23) и (3.15) являются гладкими в $\mathbf{R}^n\setminus Q$, но при $y\to Q$ в случае $1\leqslant m\leqslant n-1$ и $n\geqslant 4$ они не являются локально суммируемыми в окрестности поверхности Q, где $B(y)=0$. Поэтому искомые фундаментальные решения являются некоторыми регуляризациями этих функций (при подходящем выборе констант C_1 и C_2). Для краткости будем называть функции (3.23) и (3.15) *формальными фундаментальными решениями.*

§ 4. Регуляризация формального фундаментального решения в случае $q=0$

В случае $q=0$ фомальное фундаментальное решение выражается формулами (3.15). Покажем, как их нужно регуляризовать, чтобы получить настоящие фундаментальные решения. При этом нужно различать два случая: $m=0$ или $m=n$, с одной стороны, и $1\leqslant m\leqslant n-1$, — с другой.

4.1. Случай $m=0$ или $m=n$. Фундаментальные решения уравнения (3.8) с $q=0$ при $m=0$ и $m=n$ отличаются только знаком. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $m=n$. Тогда $P_1(\partial_y)=\Delta$ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^n$, и $B(y)>0$ при $y\neq 0$. Покажем, что при $n\neq 2$ искомую регуляризацию функции (3.15) можно построить как аналитическое продолжение функции

$$\hat{\mathscr{E}}_\lambda(y)=C_1B^\lambda(y)+C_2=C_1|y|^{2\lambda}+C_2 \tag{4.1}$$

из области $\operatorname{Re}\lambda>0$ в точку $\lambda=\lambda_0\equiv-\frac{n-2}{2}$. Возьмем $C_2=0$. Если $\operatorname{Re}\lambda>1$, то $\hat{\mathscr{E}}_\lambda(y)\in C^2(\mathbf{R}^n)$, и (3.14) для $\hat{\mathscr{E}}_\lambda$ вместо $\mathscr{E}$ выполняется при всех $y\in\mathbf{R}^n$, а не только при $y\in\mathbf{R}^n\setminus Q$. Следовательно, при $\operatorname{Re}\lambda>1$

$$P_1\hat{\mathscr{E}}_\lambda(y)=C_12\lambda(2\lambda+n-2)B^{\lambda-1}(y), \quad y\in\mathbf{R}^n. \tag{4.2}$$

Здесь правая часть — мероморфная функция от $\lambda\in\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, в силу теоремы 2.1, и левая — также. Поэтому, ввиду единственности аналитического продолжения, равенство (4.2) справедливо при всех $\lambda\in\mathbf{C}$, кроме дискретного множества полюсов функций $\hat{\mathscr{E}}_\lambda$ и $B^{\lambda-1}$.

Замечание 4.1. Подобным образом для обобщенных функций, определенных при помощи аналитического продолжения по параметру (или параметрам) удается доказать справедливость различных замечательных формул классического анализа. Это обстоятельство является главным преимуществом регуляризации при помощи аналитического продолжения по параметру.

В точке $\lambda=\lambda_0=-\frac{n}{2}+1$, по теореме 2.1, функция $B^\lambda(y)$ голоморфна, а $B^{\lambda-1}(y)=|y|^{2(\lambda-1)}$ имеет простой полюс с вычетом $\frac{\Omega_n}{2}\delta(y)$. (см. (2.7′)). Кроме того, $2\lambda+n-2=0$ при $\lambda=\lambda_0$. Поэтому, из (4.2) вытекает при $\lambda\to\lambda_0$, что

$$P_1\hat{\mathscr{E}}_{\lambda_0}(y)=C_14\lambda_0\cdot\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_0}B^{\lambda-1}=C_12\lambda_0\Omega_n\delta(y)=-C_1(n-2)\Omega_n\delta(y). \tag{4.3}$$

Отсюда, при $n\neq 2$ находим C_1 и, по формуле (4.1), получаем искомые фундаментальные решения (2.10′) главы 1.

Описанная процедура не проходит при $n=2$. Это связано с тем, что множитель в правой части (4.2) при $\lambda=\lambda_0$ имеет нуль второго порядка, а $B^{\lambda-1}$ — полюс первого порядка. Поэтому для нахождения фундаментального решения при $n=2$ нужно продифференцировать тождество (4.2) по λ при $\lambda=\lambda_0=0$; при этом получаем

$$P_1\frac{d\hat{\mathscr{E}}_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}=C_1\Big[(2(2\lambda+n-2)+2\lambda\cdot 2)B^{\lambda-1}+$$
$$+2\lambda(2\lambda+n-2)\frac{dB^{\lambda-1}}{d\lambda}\Big]\Big|_{\lambda=0}=C_1\Big[8\operatorname*{res}_{\lambda=0}B^{\lambda-1}+4\operatorname*{res_2}_{\lambda=0}\frac{dB^{\lambda-1}}{d\lambda}\Big]=$$
$$=C_1\Big[8\frac{\Omega_2}{2}\delta(y)-4\frac{\Omega_2}{2}\delta(y)\Big]=C_14\pi\delta(y), \tag{4.4}$$

где $\operatorname*{res_2}_{\lambda=0}\frac{dB^{\lambda-1}}{d\lambda}=\operatorname*{res}_{\lambda=0}B^{\lambda-1}$ — «второй» вычет функции $\frac{dB^{\lambda-1}}{d\lambda}$, в точке $\lambda=0$, т. е. коэффициент при $\frac{1}{\lambda^2}$. Отсюда получается формула (2.10') главы 1 в случае $n=2$.

4.2. Случай $1\leqslant m\leqslant n-1$. В этом случае функции (3.15) — гладкие вне поверхности Q, на которой $B(y)=0$. Покажем, что можно, как и выше, взять $C_2=0$ и, кроме того, $C_1=0$ в области, где $B(y)<0$. А именно, построим регуляризацию функции (3.15) как аналитическое продолжение функции

$$\mathscr{E}_\lambda(y)=C_1\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}=C_1\frac{\rho_+^{2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)},\quad \rho_+(y)\equiv\sqrt{B_+(y)},\tag{4.5}$$

в точку $\lambda=\lambda^0\equiv-\frac{n-2}{2}$.

Замечание 4.2. Множитель $\Gamma(\lambda+1)$ в знаменателе в (4.5) необходимо ввести из-за наличия полюсов B_+^λ при $\lambda=-1$, $-2,\ldots$ Эти полюса связаны с особенностями B_+^λ на поверхности Q, и может оказаться, что в точке λ_0 функция B_+^λ имеет полюс (при четном $n\geqslant 4$). В рассмотренном ранее случае $m=0$ или $m=n$ функция B_+^λ имела полюса лишь при $\lambda=-\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-1,\ldots$, и точка $\lambda=\lambda_0$ была неособой, поскольку Q состояла из одной точки: $Q=\{0\}$.

Очевидно, $\mathscr{E}_\lambda(y)\in C^2(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\lambda>2$. Поэтому из (3.14) получаем, аналогично (4.2),

$$P_1\mathscr{E}_\lambda(y)=C_1\left[2\lambda(2\lambda-1)\frac{\rho_+^{2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda+1)}+\frac{(n-1)2\lambda\rho_+^{2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda+1)}\right]=$$
$$=C_1\frac{2(2\lambda+n-2)}{\Gamma(\lambda)}B_+^{\lambda-1}(y),\quad y\in\mathbf{R}^n.\tag{4.6}$$

Как и выше, это равенство верно при всех λ, кроме дискретного множества полюсов. Поэтому, аналогично (4.3), при $\lambda\to\lambda_0=-\frac{n}{2}+1$ получаем, ввиду (2.20),

$$P_1\mathscr{E}_{\lambda_0}(y)=C_14\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_0}\frac{B_+^{\lambda-1}(y)}{\Gamma(\lambda)}=c_14\Omega_{m,n-m}\delta(y).\tag{4.7}$$

Отсюда находим $c_1=\frac{1}{4\Omega_{m,n-m}}$ и искомое фундаментальное решение

$$\mathscr{E}_{\lambda_0}(y)=\frac{1}{4\Omega_{m,n-m}}\left.\frac{B_+^\lambda(y)}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-\frac{n-2}{2}}.\tag{4.8}$$

Пример 4.1. Волновое уравнение (2.6) главы 1 в $\mathbf{R}^k$ при $a=1$ имеет фундаментальное решение

$$\mathscr{E}_k(t,x)=\frac{1}{4\Omega_{1,k}}\left.\frac{(t^2-|x|^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-\frac{k-1}{2}},\tag{4.9}$$

поскольку $n=k+1$ и $-\frac{n-2}{2}=-\frac{k-1}{2}$.

Замечание 4.3. При $a>0$, ввиду замечания 3.1, фундаментальным решением уравнения (2.6) главы 1 является функция

$$\mathscr{E}_k(t,x)=\frac{1}{4\Omega_{1,k}\cdot a^k}\left.\frac{\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-\frac{k-1}{2}}=$$
$$=\frac{1}{4\Omega_{1,k}a}\left.\frac{(a^2t^2-|x|^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-\frac{k-1}{2}},\tag{4.9'}$$

(ср. [63]) поскольку замена $(t,x)\mapsto C^{-1}(t,x)=(t,x/a)$ приводит уравнение (2.6) главы 1 к случаю $a=1$, и $\det C=a^k$.

Замечание 4.4. Для волнового уравнения (2.6) главы 1 при $a=1$ инвариантным фундаментальным решением является также функция

$$\mathscr{E}_k^\pm(t,x)=\frac{\theta(\pm t)}{2\Omega_{1,k}}\left.\frac{(t^2-|x|^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=-\frac{k-1}{2}},\tag{4.10}$$

полученная, по определению, аналитическим продолжением функции $\frac{\theta(\pm t)}{2\Omega_{1,k}}\frac{B_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ в точку $\lambda=-\frac{k-1}{2}$. Действительно, уравнение (4.6) для этой функции также справедливо при $\operatorname{Re}\lambda>2$. Кроме того, эта функция также продолжается до мероморфной функции от $\lambda\in\mathbf{C}$, что доказывается дословно так же, как теорема 2.2. Однако полюса теперь расположены в точках $\lambda=-\frac{n}{2}$, $-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\ldots$ Это связано с тем, что теперь при определении $\bar\varphi$ в (2.15) нужно интегрирование по $|\omega_m|=1$ заменить просто подстановкой $\omega_m\equiv t=\pm1$, и поэтому $\bar\varphi(r,\rho)$ при $r\to0$ содержит все целые неотрицательные степени t. Кроме того, теперь $\bar\varphi(0,0)=\frac{\Omega_1}{2}\Omega_k\varphi(0)$, так что вычет (2.20) для $\theta(\pm t)\frac{B_\lambda^+}{\Gamma(\lambda+1)}$ в 2 раза меньше. Поэтому в (4.10) знаменатель также в 2 раза меньше, чем в (4.9).

Следствие 4.1. Из (4.9), (4.10) в силу (2.22), получаем, что при нечетных $k=2l+1\geqslant3$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_k(t,x)&=\frac{1}{4\Omega_{1,k}}\frac{\delta^{(l-1)}(t^2-|x|^2)}{(l-1)!},\quad (t,x)\neq0;\\ \mathscr{E}_k^\pm(t,x)&=\frac{\theta(\pm t)}{2\Omega_{1,k}}\frac{\delta^{(l-1)}(t^2-|x|^2)}{(l-1)!},\quad (t,x)\neq0.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Это означает, что при нечетных $k\geqslant 3$ фундаментальное решение $\mathscr{E}_k$ волнового уравнения в $\mathbf{R}^k$ сосредоточено на *«световом конусе»*. $t^2=|x|^2$, а $\mathscr{E}_k^{\pm}$ — на *«световом конусе будущего»* (где $t\geqslant 0$) или *«прошлого»* (где $t\leqslant 0$) соответственно. Отсюда вытекает, что при нечетных $k\geqslant 3$ решения волнового уравнения в $\mathbf{R}^k$ имеют резкий передний и задний фронт (см. § 2, гл. 1). При четных $k\geqslant 2$ и при $k=1$ фундаментальные решения $\mathscr{E}_k$ и $(\mathscr{E}_k^{\pm})$ сосредоточены внутри светового конуса, т. е. в области $t^2-|x|^2\geqslant$ $\geqslant 0$ (и $t \gtrless 0$) и соответственно, решения волнового уравнения имеют резкий передний фронт, но не имеют резкого заднего фронта, т. е. имеет место *«диффузия волн»*.

Замечание 4.5. Из формул (4.11) при $k=3$ вытекает формула (2.6′) главы 1 для $\mathscr{E}_3^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,3}=\pi$, согласно (2.24). Кроме того, из (4.10) при $k=1$ получается формула (2.6′) главы 1 для $\mathscr{E}_1^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,1}=1$, согласно (2.24′). Наконец, формулу (2.6″) главы 1 для $\mathscr{E}_2^{\pm}$ также можно получить из (4.10), если вычислить $\Omega_{1,2}$. Однако проще найти $\mathscr{E}_2^{\pm}$ *методом спуска* [14], [34]: формально

$$\mathscr{E}_2^{\pm}(t, x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{E}_3^{\pm}(t, x_1, x_2, x_3)\,dx_3. \tag{4.12}$$

Такая же формула связывает $\mathscr{E}_k^{\pm}$ с $\mathscr{E}_{k+1}^{\pm}$ при любом $k\geqslant 1$. Отметим, что $\Omega_{1,k}$ при нечетных k легко вычисляются при помощи дифференцирования, как в (2.24) и (2.24′). Поэтому $\mathscr{E}_k^{\pm}$ при нечетных k получаются из (4.11), а при четных k — методом спуска, как в (4.12). При этом в качестве следствия получаем, что $\Omega_{1,2}=\sqrt{\pi}$.

§ 5. Регуляризация фундаментального решения в случае $q\neq 0$

Если $q\neq 0$, то $\mathscr{E}(y)$ в области, где $B(y)\neq 0$, выражается формулой (3.23). Покажем, что фундаментальное решение $\mathscr{E}(y)$ можно построить как регуляризацию функции (3.23). При этом можно взять $C_2=0$, по крайней мере при $n\neq 2$. Итак, будем искать фундаментальное решение как регуляризацию функции (см. (2.25))

$$\mathscr{E}_{\nu_0}(y)=C_1\left(\sqrt{qB}\right)^{\nu_0}J_{\nu_0}\left(\sqrt{qB}\right)=C_1H_{\nu_0}\left(\sqrt{qB(y)}\right),\quad y\in\mathbf{R}^n\setminus Q, \tag{5.1}$$

где C_1 постоянна в компонентах связности области $\mathbf{R}^n\setminus Q$. При этом, как и выше, при $q\neq 0$, нужно различать 2 случая: когда $m=0$ или n, и когда $1\leqslant m\leqslant n-1$. За счет умножения уравнения (3.8) на -1 можно свести все к случаю $q>0$.

5.1. Случай $1\leqslant m\leqslant n-1$. Будем считать, что $C_1=0$ в области, где $B(y)<0$ и C_1 постоянна в области, где $B(y)>0$, хотя эта область может иметь не одну компоненту связности

(как для интервала Лоренца $B(y)=y_1^2-y_2^2-\ldots-y_n^2$). Тогда (5.1 принимает вид ($q>0$):

$$\mathscr{E}_{\nu_0}(y)=C_1H_{\nu_0}\left(\sqrt{qB_+(y)}\right),\quad y\in\mathbf{R}^n\setminus Q. \tag{5.2}$$

Покажем, что искомую регуляризацию функции (5.2) можно построить как аналитическое продолжение функции

$$\mathscr{E}_{\nu}(y)=C_1H_{\nu}\left(\sqrt{qB_+(y)}\right),\quad y\in\mathbf{R}^n, \tag{5.3}$$

по параметру ν из области $\operatorname{Re}\nu>0$ в точку $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}$. Из (2.25) видно, что $\left|H_\nu\left(\sqrt{qB_+(y)}\right)\right|\sim|B_+(y)|^{\operatorname{Re}\nu}$ при $y\to Q$. Поэтому $\mathscr{E}_\nu(y)\in C^2(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\nu>2$, и для функции $\mathscr{E}_\nu$ вместо $\mathscr{E}$ все формулы (3.16)—(3.19) справедливы с ν и J_ν вместо p_0 и w не только при $y\in\mathbf{R}^n\setminus Q$, но и при всех $y\in\mathbf{R}^n$.

Поэтому из (3.19) (с $p_0=\nu$) вытекает, что при $\operatorname{Re}\nu>2$

$$P_1\mathscr{E}_\nu(y)=C_1qz^\nu\left[\frac{d^2J_\nu}{dz^2}+\frac{1}{z}(n-1+2\nu)\frac{dJ_\nu}{dz}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{\nu(n-2+\nu)}{z^2}\right)J_\nu(z)\right]=C_1q(n-2+2\nu)\left[z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}J_\nu\right],$$

$$y\in\mathbf{R}^n;\quad z=z(y)\equiv\sqrt{qB_+(y)}. \tag{5.4}$$

Как и выше, это равенство справедливо при всех $\nu\in\mathbf{C}$, кроме дискретного множества полюсов, если в правой части функции $z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}$ и $z^{\nu-2}J_\nu$ в области $\operatorname{Re}\nu<2$ определять как аналитические продолжения по ν со значениями $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Существование таких продолжений, очевидно, вытекает из теоремы 2.2 и формулы (1.9), аналогично теореме 2.3.

Из теоремы 2.3, в частности, вытекает аналитичность левой части (5.4) по ν в точке $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}$. Найдем предел правой части (5.4) при $\nu\to\nu_0$.

Для этого заметим, что слагаемые $z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}$ и $z^{\nu-2}J_\nu$ в правой части (5.4) имеют простые полюса в точке $\nu=\nu_0$, а множитель $n-2+2\nu$ обращается в этой точке в нуль. Поэтому правая часть (5.4) при $\nu\to\nu_0$ имеет предел и выражается через вычеты функций $z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}$ и $z^{\nu-2}J_\nu$ в точке $\nu=\nu_0$. Эти вычеты легко найти, используя формулы (2.20) и (1.9): поскольку $\nu_0=-\frac{n}{2}+1$, то

$$\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}=\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\left(\sqrt{qB_+}\right)^{\nu-1}2^{-\nu}\frac{\nu\left(\sqrt{qB_+}\right)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)}=$$

$$=2^{-\nu_0}q^{\nu_0-1}\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\frac{B_+^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\operatorname*{res}_{\mu=-\frac{n}{2}}\frac{B_+^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\Omega_{m,n-m}\delta(y). \tag{5.5}$$

Аналогично,

$$\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\nu z^{\nu-2}J_\nu=\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\left(\sqrt{qB_+}\right)^{\nu-2}2^{-\nu}\frac{\nu\left(\sqrt{qB_+}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\Omega_{m,n-m}\delta(y). \tag{5.6}$$

Устремляя $\nu\to\nu_0$ в (5.4), получаем, ввиду (5.5) и (5.6):

$$P_1\mathscr{E}_{\nu_0}(y)=C_1q\,2\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\left(z^{\nu-1}\frac{dJ_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}J_\nu\right)=$$

$$=C_1 2q\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\Omega_{m,n-m}\delta(y)=C_1q^{\nu_0}2^{\frac{n}{2}+1}\Omega_{m,n-m}\delta(y). \tag{5.7}$$

Отсюда находим C_1 и искомое фундаментальное решение (см. (2.25)):

$$\mathscr{E}_{\nu_0}(y)=C_1H_{\nu_0}\left(\sqrt{qB_+}\right)=$$

$$=\frac{q^{-\nu_0}}{2^{\frac{n}{2}+1}\Omega_{m,n-m}}\left[(qB_+(y))^{\nu/2}J_\nu\left(\sqrt{qB_+(y)}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{n-2}{2}}=$$

$$=\frac{q^{\frac{n-2}{4}}}{2^{(n/2)+1}\Omega_{m,n-m}}\left[B_+^{\nu/2}(y)\,J_\nu\left(\sqrt{qB_+(y)}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{n-2}{2}}. \tag{5.8}$$

При $q_0\to 0$ эта формула, как легко проверить, переходит в (4.8). Эта формула получена нами в предположении, что $q>0$. Если $q<0$, то, умножая уравнение (3.8) на -1, сводим задачу к предыдущему случаю. При этом формула (5.8) дает фундаментальное решение, если в ней заменить C_1 на $-C_1$, q на $-q$, B на $-B$, а m и $n-m$ поменять местами:

$$\mathscr{E}(x)=-\frac{|q|^{\frac{n-2}{4}}}{2^{(n/2)+1}\Omega_{n-m,m}}\left[(-B)_+^{\nu/2}J_\nu\left(\sqrt{(qB)_+}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{n-2}{2}},\quad q<0. \tag{5.9}$$

Следствие 5.1. Уравнение Клейна — Гордона (уравнение (2.7) главы 1) в $\mathbf{R}^k$ при $a=1$ имеет фундаментальное решение

$$\mathscr{E}_k(t,x)=$$

$$=\frac{m_0^{\frac{k-1}{2}}}{2^{(k+3)/2}\Omega_{1,k}}\left[(t^2-|x|^2)_+^{\nu/2}J_\nu\left(m_0\sqrt{(t^2-|x|^2)_+}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{k-1}{2}}. \tag{5.10}$$

Случай $a>0$ сводится к $a=1$, как в замечании 4.3. Поэтому для $a\neq 1$ фундаментальным решением уравнения Клейна—Гордона является (ср. (4.9′)) функция (ср. с [51], [56])

$$\mathscr{E}_k(t,x)=\frac{m_0^{\frac{k-1}{2}}}{2^{(k+3)/2}\Omega_{1,k}a^k}\times$$

$$\times\left[\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+^{\nu/2}J_\nu\left(m_0\sqrt{\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{k-1}{2}}, \tag{5.11}$$

и, аналогично (4.10), функции

$$\mathscr{E}_k^{\pm}(t,x)=\frac{\theta(\pm t)\,m_0^{\frac{k-1}{2}}}{2^{(k+1)/2}\Omega_{1,k}a^k}\times$$

$$\times\left[\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+^{\nu/2}J_\nu\left(m_0\sqrt{\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+}\right)\right]\Big|_{\nu=-\frac{k-1}{2}}, \tag{5.12}$$

которые определяются как аналитические продолжения по ν из области $\operatorname{Re}\nu>0$ в точку $\nu=\nu_0\equiv-\frac{k-1}{2}$; $\mathscr{E}_k^{\pm}(t,x)$ — это так называемые «запаздывающее» и «опережающее» фундаментальные решения уравнения Клейна — Гордона [6].

Пример 5.1. В случае $k=1$ из (5.12) получаем формулу (2.7′) главы 1 для $\mathscr{E}_1^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,1}=1$, согласно (2.24′), и $\nu_0=0$. В случае $k=2$ также из (5.12) вытекает формула (2.7′) главы 1 для $\mathscr{E}_2^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,2}=\sqrt{\pi}$ (см. замечание 4.5) и $\nu_0=-\frac{1}{2}$. Наконец, в случае $k=3$ из (5.12), ввиду (2.35) получаем

$$\mathscr{E}_3^{\pm}(t,x)=\frac{\theta(\pm t)\,m_0^2}{4\Omega_{1,3}a^3}\left(\delta\left(m_0^2\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(m_0^2\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}J_1\left(m_0\sqrt{\left(t^2-\left|\frac{x}{a}\right|^2\right)_+}\right)\right), \tag{5.13}$$

что совпадает с формулой (2.7′) главы 1 для $\mathscr{E}_3^{\pm}$, поскольку $\Omega_{1,3}=\pi$ согласно (2.24).

Отметим, что $\delta(a^2t^2-|x|^2)$ в формуле (2.7′) главы 1, согласно замечанию 2.1, понимается в смысле определения 1.22 главы 1, поскольку условие (2.29) в этом случае выполняется ($l=1$ и $n=4$).

5.2. Случай $m=0$ или $m=n$. Как и выше, достаточно разобрать случай $q>0$.

Сначала разберем случай, когда $m=n$, $q>0$. Тогда $P_1=$ $=\Delta+q$ — оператор Гельмгольца. Покажем, что фундаментальное решение оператора P_1 при $n\neq 2$ можно построить как регуляризацию функции вида (5.3). Однако вычисления (5.5)—(5.7) при $m=n$ неверны, поскольку они основаны на формуле (2.20), справедливой лишь в случае $1\leqslant m\leqslant n-1$. Действительно, при $m=n$ функция B_+^ν не имеет полюсов при $\nu=-1, -2, \ldots$, если $\nu\notin\mathcal{P}^0$. Поэтому множитель $\Gamma(\nu+1)$, входящий в «знаменатель» бесселевой функции J_ν (см. (2.25), нужно убрать. Совершенно аналогичную ситуацию мы имели в § 4 при рассмотрении случая $q=0$. Это видно из сравнения формул (4.5) и (4.1) (см. также замечание 4.2). Итак, будем строить фундаментальное решение как аналитическое продолжение по ν функции

$$\hat{\mathscr{E}}_\nu(y)\equiv C_1\Gamma(\nu+1)H_\nu\left(\sqrt{qB}\right)=$$
$$=C_1\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(qB(y))^{r+\nu}}{2^{2r+\nu}r!(\nu+r)\ldots(\nu+1)} \tag{5.14}$$

в точку $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}$. Здесь мы использовали (2.25) и тождество $\Gamma(\nu+r+1)=(\nu+r)\ldots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$; очевидно, сейчас $B(y)\equiv B_+(y)$.

Из (5.14) видно, что $\hat{\mathscr{E}}_\nu(y)\in C^2(\mathbf{R}^n)$ при $\operatorname{Re}\nu>2$, а из теоремы 2.1 вытекает, что $\hat{\mathscr{E}}_\nu(y)$ из области $\operatorname{Re}\nu>0$ продолжается до мероморфной функции от $\nu\in\mathbf{C}$ с простыми полюсами в точках $\nu\in\mathcal{P}^0$. При $\operatorname{Re}\nu>2$ функция (5.14) отличается от (5.3) лишь ненулевым множителем $\Gamma(\nu+1)$. Поэтому формула вида (5.4) остается справедливой и для функции (5.14), если вместо функции J_ν подставить

$$\mathscr{J}_\nu(z)\equiv\Gamma(\nu+1)J_\nu(z)=\sum(-1)^r\frac{z^{2r+\nu}}{2^{2r+\nu}r!(\nu+r)\ldots(\nu+1)}. \tag{5.15}$$

Итак, при $\operatorname{Re}\nu>2$

$$P_1\hat{\mathscr{E}}_\nu(y)=C_1q(n-2+2\nu)\left[z^{\nu-1}\frac{d\mathscr{J}_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}\mathscr{J}_\nu(z)\right],$$
$$y\in\mathbf{R}^n;\quad z\equiv\sqrt{qB(y)}. \tag{5.16}$$

Как и выше, эта формула справедлива также при всех $\nu\in\mathbf{C}$, кроме дискретного множества полюсов обеих частей. При $\nu=$ $=\nu_0$ левая часть голоморфна. Найдем предел правой части при $\nu\to\nu_0$. Это делается точно так же, как в (5.7). А именно, из (2.7′), аналогично (5.5), вытекает, что

$$\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}z^{\nu-1}\frac{d\mathscr{J}_\nu}{dz}=2^{-\nu_0}q^{\nu_0-1}\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\nu B_+^{\nu-1}=2^{-\nu_0}q^{\nu_0-1}\nu_0\operatorname*{res}_{\mu=-\frac{n}{2}}B^\mu=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2}\nu_0\Omega_n\delta(y) \tag{5.17}$$

и, аналогично (5.6),

$$\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\nu z^{\nu-2}\mathscr{J}_\nu=2^{-\nu_0}q^{\nu_0-1}\operatorname*{res}_{\nu=\nu_0}\nu B^{\nu-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2}\nu_0\Omega_n\delta(y). \tag{5.18}$$

Устремляя $\nu\to\nu_0$ в (5.16), получаем, ввиду (5.17) и (5.18):

$$P_1\hat{\mathscr{E}}_{\nu_0}(y)=C_1q\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2}\nu_0\Omega_n\delta(y)=-C_1(n-2)\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2-1}\Omega_n\delta(y). \tag{5.19}$$

Отсюда при $n\neq 2$ находим C_1 и искомое фундаментальное решение оператора $\Delta+q$, $q>0$

$$\hat{\mathscr{E}}_{\nu_0}(y)=C_1[\Gamma(\nu+1)H_\nu(\sqrt{qB(y)})]|_{\nu=\nu_0}=$$
$$=-\frac{q^{n/2-1}}{(n-2)\Omega_n2^{n/2-1}}[\Gamma(\nu+1)(\sqrt{qB})^\nu J_\nu(\sqrt{qB})]|_{\nu=\nu_0}. \tag{5.20}$$

Для того, чтобы найти фундаментальное решение в случае $n=$ $=2$, достаточно продифференцировать тождество (5.16) по ν при $\nu=\nu_0$. Тогда, аналогично (4.4), получаем при $\operatorname{Re}\nu>2$:

$$P_1\frac{d\hat{\mathscr{E}}_\nu}{d\nu}=C_1q\left\{2\left[z^{\nu-1}\frac{d\mathscr{J}_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}\mathscr{J}_\nu\right]+\right.$$
$$\left.+(n-2+2\nu)\frac{d}{d\nu}\left[z^{\nu-1}\frac{d\mathscr{J}_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}\mathscr{J}_\nu\right]\right\}. \tag{5.21}$$

В силу единственности аналитического продолжения, это тождество справедливо также и при всех $\nu\in\mathbf{C}$, кроме дискретного множества полюсов. В точке $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}=0$ левая часть (5.21) голоморфна. Поэтому, аналогично (5.19), из (5.21) при $\nu\to\nu_0=0$ получаем, аналогично (5.17) и (5.18):

$$P_1\frac{d\hat{\mathscr{E}}_\nu}{d\nu}\bigg|_{\nu=0}=C_1q\left\{2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2}\Omega_2\delta(y)\right]+\right.$$
$$\left.+2\operatorname*{res}_{\nu=0}\left[z^{\nu-1}\frac{d\mathscr{J}_\nu}{dz}+\nu z^{\nu-2}\mathscr{J}_\nu\right]\right\}=$$
$$=C_1q2\left(\frac{2}{q}\right)^{n/2}\Omega_2\delta(y)=C_18\pi\delta(y), \tag{5.22}$$

т. к. $n=2$ и $\Omega_2=2\pi$. Отсюда находим C_1 и фундаментальное решение оператора $\Delta+q$ при $n=2$, $q>0$:

$$\hat{\mathscr{E}}(y)=\frac{1}{8\pi}\frac{d\hat{\mathscr{E}}_\nu(y)}{d\nu}\bigg|_{\nu=0}. \tag{5.23}$$

Это фундаментальное решение соответствует, как и должно быть, формуле (3.23), но теперь оказывается $C_1=0$, а $C_2\neq 0$ (в отличие от (5.1) и (5.14)). А именно, пользуясь соотношениями между бесселевыми функциями [41], можно (5.23) представить в виде

$$\mathscr{E}(y)=\frac{1}{4}Y_0(\sqrt{qB(y)})=$$

$$=-\frac{i}{8}\left(H_0^{(1)}(\sqrt{qB(y)})-H_0^{(2)}(\sqrt{qB(y)})\right), \qquad (5.24)$$

где $H_0^{(1)}(z)\equiv J_0(z)+iY_0(z)$ — первая функция Ханкеля нулевого порядка, а $H_0^{(2)}(z)\equiv J_0(z)-iY_0(z)$ — вторая функция Ханкеля. Поскольку $J_0(\sqrt{qB})=\frac{1}{2}\left(H_0^{(1)}(\sqrt{qB})+H_0^{(2)}(\sqrt{qB})\right)$ — целая функция от B, согласно (1.9), то из (3.14′) и (3.23) вытекает, что $(\Delta+q)J_0(\sqrt{qB(y)})=0$, $y\in\mathbf{R}^n$. Поэтому, наряду с функцией (5.24), фундаментальными решениями оператора $\Delta+q$ являются также функции [14]

$$\mathscr{E}(y)-\frac{i}{4}J_0(\sqrt{qB})=-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{qB(y)})$$

и

$$\mathscr{E}(y)+\frac{i}{4}J_0(\sqrt{qB})=\frac{i}{4}H_0^{(2)}(\sqrt{qB(y)}), \qquad (5.25)$$

комплексно сопряженные друг к другу. Из (5.25) при $q=\omega^2$ получаются формулы (2.11′) главы 1 для $\mathscr{E}_2^{\pm}$.

Пример 5.2. 1) Для одномерного оператора Гельмгольца $\frac{d^2}{dy^2}+\omega^2$ из общей формулы (5.20) получаем фундаментальное решение

$$\mathscr{E}(y)=\frac{\sqrt{2}}{2\omega}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\omega|y|}\,J_{1/2}(\omega|y|)=\frac{\sin\omega|y|}{2\omega}, \quad y\in\mathbf{R} \qquad (5.26)$$

(см. формулу (1.11) главы 1), поскольку $\nu_0=\frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а $J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$ [71]. С другой стороны, $\frac{\cos\omega|y|}{2\omega}$ — целая функция от y и, следовательно, она удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (при $n=1$). Поэтому наряду с (5.26), фундаментальными решениями оператора $\frac{d^2}{dy^2}+\omega^2$ являются также функции

$$\mathscr{E}_1^{\pm}(y)=\frac{\sin\omega|y|}{2\omega}\mp i\frac{\cos\omega|y|}{2\omega}=\pm\frac{e^{\pm i\omega|y|}}{2i\omega}, \qquad (5.27)$$

что совпадает с формулой (2.11′) главы 1 при $k=1$.

2) Аналогично, при $n=3$ из (5.20) получаем $\left(\nu_0=-\frac{1}{2}\right)$

$$\mathscr{E}(y)=-\frac{\omega}{4\pi\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(\omega|y|)^{-1/2}J_{-1/2}(\omega|y|)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi|y|}\cos\omega|y|, \qquad (5.28)$$

и поскольку $\frac{\sin\omega|y|}{|y|}$ — целая функция от y, то она удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (при $k=3$) и мы получаем также фундаментальные решения для $\Delta+\omega^2$ в $\mathbf{R}^3$ вида $\mathscr{E}_3^{\pm}=-\frac{e^{\pm i\omega|y|}}{4\pi|y|}$, что совпадает с формулой (2.11′) главы 1.

Теперь рассмотрим случай, когда $m=0$, $q>0$, и $Q=-\Delta+q$. Тогда $qB(y)<0$ при $y\in\mathbf{R}^n\setminus 0$ и $\sqrt{qB(y)}$ — мнимая величина при $y\neq 0$. Поэтому фундаментальное решение (3.23) содержит бесселевы функции от мнимого аргумента. Покажем, что при $n\neq 2$ фундаментальное решение можно по-прежнему построить в виде (5.14). Нужно лишь уточнить какую ветвь $(qB)^{r+\nu}$ брать в (5.14) для $qB<0$ и $\nu\in\mathbf{C}$. Положим для конкретности

$$(qB)^{r+\nu}=(-q)^{r+\nu}|B|^{r+\nu},$$

где

$$(-q)^{r+\nu}\equiv e^{\pi i(r+\nu)}|q|^{r+\nu}, \qquad (5.29)$$

т. е. разрез степенной функции $z^{r+\nu}$ выберем по отрицательной части мнимой оси: от $-i\infty$ до 0. Тогда все вычисления (5.16)—(5.25) с точностью до знака остаются справедливыми при замене q на $-q$, и B на $|B|$.

Следовательно, учитывая, что $J_\nu(iz)=e^{\frac{\pi i\nu}{2}}I_\nu(z)$, получаем из (5.20) для оператора $-\Delta+q$ при $n\neq 2$ фундаментальное решение вида

$$\hat{\mathscr{E}}_{\nu_0}(y)=\frac{q^{n/2-1}}{(n-2)\,\Omega_n 2^{n/2-1}}\times$$

$$\times\left[\Gamma(\nu+1)(\sqrt{q|B|})^{\nu}I_\nu(\sqrt{q|B(y)|})\right]\Big|_{\nu=\nu_0}, \qquad (5.30)$$

где правая часть определяется в точке $\nu=\nu_0\equiv-\frac{n-2}{2}$ как аналитическое продолжение из области $\operatorname{Re}\nu>0$.

При $n=2$ из (5.24) и (5.25) заменой q на $-q$ и B на $|B|$ получаем фундаментальные решения оператора $\Delta-q$ на плоскости (см. [41]):

$$\mathscr{E}(y)=\frac{1}{4}Y_0(i\sqrt{q|B(y)|}), \quad -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(i\sqrt{q|B|})=-\frac{1}{2\pi}K_0(\sqrt{q|B|}),$$

$$\frac{i}{4}H_0^{(2)}(i\sqrt{q|B|})=-\frac{1}{2\pi}K_0(-\sqrt{q|B|}). \qquad (5.31)$$

Пример 5.3. Аналогично, при $n=1$ из (5.26) и (5.27) получаем заменой $\omega=im_0$ фундаментальные решения для $\frac{d^2}{dy^2}-m_0^2$, $m_0>0$:

$$\mathscr{E}(y)=\frac{\sin im_0|y|}{2im_0}=\frac{\operatorname{sh} m_0|y|}{2m_0},\quad \mathscr{E}_1^{\pm}(y)=\mp\frac{e^{\mp m_0|y|}}{2m_0}. \tag{5.32}$$

Наконец, при $n=3$ и из (5.28) из формулы (2.11′) главы 1 (при $k=3$) получаем фундаментальные решения для оператора $\triangle-m_0^2$ в $\mathbf{R}^3$:

$$\mathscr{E}(y)=-\frac{1}{4\pi|y|}\operatorname{ch} m_0|y|,\quad \mathscr{E}_3^{\pm}(y)=-\frac{1}{4\pi|y|}e^{\mp m_0|y|}. \tag{5.33}$$

§ 6. Об особенностях фундаментальных решений уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами и невырожденной квадратичной формой

Проанализируем особенности фундаментальных решений уравнения (3.1) с невырожденной квадратичной формой, построенные в §§ 4, 5. Оператор P из (3.1) при условии (3.2) удовлетворяет условиям теоремы 4.2′ главы 3. Поэтому для фундаментальных решений оператора P справедливо утверждение следствия 4.2 главы 3. Проверим, что для фундаментальных решений $\mathscr{E}$, построенных нами в §§ 4, 5, это действительно так. Для этого найдем сингулярный носитель построенных функций $\mathscr{E}(x)$.

Из формул §§ 4, 5 видно, что $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}$ в координатах y содержится в множестве

$$Q=\{y\in\mathbf{R}^n: B(y)\equiv(By,y)=0\}. \tag{6.1}$$

Если $m=0$ или $m=n$, то уравнение (3.8) (и (3.1)) — эллиптическое, и фундаментальное решение $\mathscr{E}(y)$ — гладкое при $y\neq0$, что соответствует теореме 5.1 главы 3. Пусть теперь $1\leqslant m\leqslant \leqslant n-1$. Тогда Q — коническая поверхность в $\mathbf{R}^n$.

В исходных координатах $x=Cy$ уравнение для Q записывается в виде

$$Q=\{x\in\mathbf{R}^n: B(C^{-1}x)\equiv((C^{-1})^tBC^{-1}x,\ x)=0\}. \tag{6.2}$$

Но $B=B^{-1}$, ввиду (3.6). Поэтому из (3.5) вытекает, что $(C^{-1})^tBC^{-1}=A^{-1}$ и (6.2) можно записать в виде

$$Q=\{x\in\mathbf{R}^n: (A^{-1}x,\ x)=0\}. \tag{6.2′}$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. Множество Q является проекцией на $\mathbf{R}^n$ множества всех бихарактеристик уравнения (3.1), выходящих из точек слоя $T_0{}^*\mathbf{R}^n$ над точкой $x=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (4.5) главы 3 для характеристического конуса K оператора P имеет вид

$$P_2(\xi)\equiv(A\xi,\ \xi)=0. \tag{6.3}$$

Ввиду замечания 4.3 главы 3, нужно доказать, что векторы $x\in Q$ являются перпендикулярами к касательным плоскостям «конуса» (6.3). Но если $\xi\in K\setminus 0$, то перпендикуляр к $T_\xi K$ пропорционален $\operatorname{grad}(A\xi,\ \xi)=2A\xi$. Остается доказать, что вектор $x=A\xi$ удовлетворяет уравнению (6.2′), если ξ удовлетворяет (6.3). Но это очевидно, поскольку

$$(A^{-1}x,\ x)=(\xi,\ A\xi)=0. \tag{6.4}$$

Итак, $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}\subset Q$ и Q является проекцией на $\mathbf{R}^n$ семейства бихарактеристик. Это соответствует следствию 4.2 главы 3. Отметим также, что фундаментальные решения (4.10) и (5.12) имеют особенности лишь на половинках проекций бихарактеристик. Это также соответствует следствию 4.2 главы 3. Наконец, построенные в §§ 4, 5 фундаментальные решения $\mathscr{E}(y)$ являются наиболее регулярными в следующем смысле. В $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}$ не входят проекции бихарактеристик, не проходящие через точку $y=0$. Оказывается, это есть проявление общей закономерности.

Т е о р е м а 6.1 ([23], [55]). Для любого однородного оператора P, удовлетворяющего условиям теоремы 4.2′ главы 3, всегда существует фундаментальное решение $\mathscr{E}$, у которого $\mathrm{WF}(\mathscr{E})$ состоит из объединения половин бихарактеристик, выходящих из $0\times\mathbf{R}^{n*}$, и никакая бихарактеристика не лежит целиком в $\mathrm{WF}(\mathscr{E})$. Соответственно, при этом $\operatorname{sing\,supp}\mathscr{E}$ состоит из объединения проекций этих половин бихарактеристик.

Глава 5

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Краевые задачи в полупространстве $\mathbf{R}_+{}^n\equiv\{x\in\mathbf{R}^n: x_n>0\}$ являются «модельными» для общих краевых задач в областях с гладкой границей. Для уравнений с постоянными коэффициентами они допускают явное решение. Анализ этого решения позволяет понять основные закономерности теории краевых задач. В частности, можно определить, какое число краевых условий нужно задавать на границе $x_n=0$, чтобы краевая задача имела решение, и притом единственное, при любых граничных данных из заданного класса функций на границе. Это число, грубо говоря, равно количеству корректных по Петровскому корней соответствующего характеристического уравнения. Например, задача Коши, в которой число краевых условий равно порядку уравнения по $\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, корректна лишь если все корни корректны по Петровскому. Такие уравнения называются *корректными по Петровскому*. К этому типу принадлежат все гиперболические и параболические уравнения, и уравнение Шрёдингера. С другой стороны, эллиптические уравнения порядка m в $\mathbf{R}^n$ при $n\geqslant3$ имеют ровно $\dfrac{m}{2}$ корректных по Петровскому корней (m — четное при $n \geqslant 3$ согласно предложению 5.1 главы 3), и поэтому для них нужно задавать $\frac{m}{2}$ краевых условий.

Основной метод исследования краевых задач в полупространстве — *касательное преобразование Фурье*, т. е. частичное преобразование Фурье по переменным $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv x'$ в граничной плоскости $x_n = 0$ к $\mathbf{R}_+{}^n$.

§ 1. Уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве

1.1. Общее решение уравнения (0.1) в полупространстве. Рассмотрим уравнение (0.1) в полупространстве $\mathbf{R}_+{}^n$ в случае $f(x) \equiv 0$:

$$P(\partial_x) u(x) = 0, \quad x_n > 0. \tag{1.1}$$

Решение u будем искать в классах функций (см. (3.1), глава 2)

$$U^{(r)} = \bigcup_{s \in \mathbf{R}} C^{(r)}(0, \infty; H_s(\mathbf{R}^{n-1})) \subset \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n_+),$$

$$U^{(r)}_\alpha = \bigcup_{s \in \mathbf{R}} C^{(r)}_\alpha(0, \infty; H_s(\mathbf{R}^{n-1})) \subset \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n_+), \tag{1.2}$$

где $r = 0, 1, 2, \ldots, \alpha \in \mathbf{R}$, а

$$C^{(r)}_\alpha = \{u \in C^{(r)}(0, \infty; H_s(\mathbf{R}^{n-1})) \colon \sup_{x_n > 0} e^{-\alpha x_n} \| u(\cdot, x_n) \|_s < \infty\}. \tag{1.3}$$

Грубо говоря, функции $u \in U^{(r)}_0$ ограничены по x_n, а $u \in U^{(r)}_\alpha$ растут (или убывают) как $e^{\alpha x_n}$ при $x_n \to \infty$.

Найдем общее решеиие уравнения (1.1) в классах $U^{(r)}$. Для этого применим к (1.1) обобщенное преобразование Фурье $F_{x' \to \xi'}$ по «касательным» переменным $x' \equiv (x_1, \ldots, x_{n-1})$ при $x_n > 0$. Например, для $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\tilde{u}(\xi', x_n) \equiv F_{x' \to \xi'} u(x', x_n) \equiv \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i\xi' \cdot x'} u(x', x_n)\, dx', \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad x_n > 0. \tag{1.4}$$

При этом уравнение (1.1) переходит в

$$P(-i\xi', \partial_{x_n}) \tilde{u}(\xi', x_n) = 0 \text{ п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad x_n > 0. \tag{1.5}$$

Это уравнение выполняется при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ в смысле обобщенных функций от $x_n > 0$. Таким образом, (1.5) — это обыкновенное дифференциальное уравнение на полуоси $x_n > 0$, зависящее от параметра $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Это основной технический прием решения уравнений в полупространстве.

Запишем характеристическое уравнение для (1.5) в виде

$$P(-i\xi', \lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} p_{(j)}(\xi') \lambda^j = 0, \quad \text{где } \nu \leqslant m \text{ и } p_{(\nu)}(\xi') \not\equiv 0. \tag{1.6}$$

Это значит, что ν — порядок оператора $P(\partial_x)$ по ∂_{x_n}.

Равенство $\nu = m$ эквивалентно тому, что $P_m(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$, т. е. граница $\partial\mathbf{R}^n_+$ полупространства $\mathbf{R}^n$ не является характеристической для оператора $P(\partial_x)$ (см. определение 4.1 главы 3).

Уравнение (1.6) при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ (при которых $p_{(\nu)}(\xi') \neq 0$) имеет ν корней

$$\lambda = \lambda_1(\xi'), \ldots, \lambda_\nu(\xi'), \tag{1.7}$$

считая с кратностью.

Для простоты в дальнейшем мы всюду предполагаем, что корни $\lambda_k(\xi')$ при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ являются простыми:

$$\lambda_k(\xi') \neq \lambda_j(\xi') \text{ при } k \neq j, \text{ п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{1.8}$$

Иногда будем также требовать это для всех $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$:

$$\lambda_k(\xi') \neq \lambda_j(\xi') \text{ при } k \neq j, \ \forall \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{1.8'}$$

Тогда общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = \sum_{k=1}^{\lambda} C_k(\xi') e^{\lambda_k(\xi') x_n}, \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad x_n > 0. \tag{1.9}$$

Общий случай кратных корней исследуется аналогично.

Упорядочим $\lambda_k(\xi')$ по возрастанию вещественной части:

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\xi') \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_\nu(\xi'), \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{C}^{n-1}. \tag{1.10}$$

Известно [53], что $\lambda_k(\xi')$ можно выбрать непрерывными функциями от $\xi' \in \mathbf{C}^{n-1}$ в области, где $p_\nu(\xi') \neq 0$.

Заметим, что модуль k-го слагаемого в (1.9) ограничен при $x_n > 0$, если $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi') \leqslant 0$ и экспоненциально растет при $x_n \to +\infty$, если $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi') > 0$.

Для $\alpha \in \mathbf{R}$ обозначим через $\nu_\alpha = \nu_\alpha(\xi')$ количество корней $\lambda_k(\xi')$, у которых $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi') \leqslant \alpha$:

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\xi') \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_{\nu_\alpha}(\xi') \leqslant \alpha < \operatorname{Re}\lambda_{\nu_\alpha+1}(\xi') \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_\nu(\xi'),$$
$$\text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{1.11}$$

Тогда для того, чтобы $u \in U^{(r)}_\alpha$, где u — функция из (1.9), необходимо, чтобы

$$C_k(\xi') = 0 \text{ при } k > \nu_\alpha(\xi'), \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \tag{1.12}$$

и, соответственно, для общего решения уравнения (1.1) из класса $U^{(r)}_\alpha$

$$\tilde{u}(\xi', x_n) = \sum_{k=1}^{\nu_\alpha(\xi')} C_k(\xi') e^{\lambda_k(\xi') x_n}, \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad x_n > 0, \tag{1.12'}$$

при некоторых $C_k(\xi')$.

Определение 1.1. 1) *Корень* $\lambda_k(\xi')$ уравнения (1.6) называется *корректным по Петровскому*, если

$$\bar{\alpha}_k \equiv \sup_{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}} \operatorname{Re} \lambda_k(\xi') < \infty, \tag{1.13}$$

и *α-корректным*, если $\bar{\alpha}_k \leqslant \alpha$; *устойчивым*, если $\bar{\alpha}_k \leqslant 0$ и *неустойчивым*, если $\bar{\alpha}_k > 0$.

2) *Уравнение* (1.1) и *оператор* $P(\partial_x)$ называются *корректными по Петровскому*, если все корни $\lambda_k(\xi')$, $k=1,\ldots,\nu$ являются корректными по Петровскому, и *α-регулярным*, если число $\nu_\alpha(\xi')$ не зависит от ξ' при п. в. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$

$$\nu_\alpha(\xi') \equiv \nu_\alpha, \quad \text{п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{1.14}$$

Если уравнение корректно по Петровскому, то оно α-регулярно при всех $\alpha \geqslant \bar{\alpha}_\nu$. Отметим, что $\bar{\alpha}_1 \leqslant \ldots \leqslant \bar{\alpha}_\nu$.

1.2. Классификация уравнений в полупространстве.

Определение 1.2. *Оператор* $P(\partial_x)$ называется *гиперболическим* (*по Гордингу*) в $\mathbf{R}^n_+$, если он корректен по Петровскому и граница $x_n=0$ не является характеристической для оператора P (т. е. $\nu=m$).

Предложение 1.1 ([55]). Если P — гиперболический оператор в $\mathbf{R}^n_+$, то его главная часть P_m — также гиперболический оператор в $\mathbf{R}^n_+$.

Действительно, $P_m(-i\xi, \lambda) = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-m} P(-it\xi, t\lambda)$. Поскольку все корни $t\lambda$ многочлена $t^{-m}P(-it\xi, t\lambda)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \bar{\alpha}_m$, то все корни λ многочлена $P_m(-i\xi, \lambda)$ лежат в полуплоскости, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

Предложение 1.2 ([55]). Если $P = P_m$ — однородный гиперболический оператор, то его корни $\lambda_k^0(\xi')$ — чисто мнимые при $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$.

Действительно, для однородного многочлена

$$P_m(-it\xi', t\lambda) = t^m P_m(-i\xi', \lambda) \quad \forall t \in C, \ (\xi', \lambda) \in \mathbf{C}^n. \tag{1.15}$$

Следовательно, если λ_k^0 — корни многочлена $P_m(-i\xi', \cdot)$, то $t\lambda_k^0$ — корень многочлена $P_m(-it\xi', \cdot)$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Но $\operatorname{Re} t\lambda_k^0$ не может быть ограниченной при $t \in \mathbf{R}$, если $\operatorname{Re}\lambda_k^0 \neq 0$.

Следствие 1.1. При любых $\alpha \geqslant 0$ все корни однородного гиперболического оператора P являются α-корректными, а P является α-регулярным при любых $\alpha \in \mathbf{R}$.

Отметим, что из (1.15) и (1.10) вытекает

$$\lambda_k^0(t\xi') = t\lambda_k^0(\xi') \ \forall t > 0, \ \xi' \in \mathbf{C}^{n-1} \setminus 0. \tag{1.15'}$$

Определение 4.2 строгой гиперболичности из главы 3 очевидно, эквивалентно следующему.

Определение 1.3 ([34], [55]). Оператор $P(\partial_x)$ называется *строго гиперболическим по Петровскому*, если корни $\lambda_k^0(\xi')$, $k=1,\ldots,m$, соответствующие его старшей части $P_m(\partial_x)$, различные и чисто мнимые при $\forall \xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus 0$.

Предложение 1.3. ([55]). Для того чтобы любой оператор $P(\partial_x)$ с заданной главной частью $P_m(\partial_x)$ был гиперболическим, необходимо и достаточно, чтобы P_m был строго гиперболическим.

Примеры строго гиперболических уравнений.

1) Волновое уравнение

$$\Box u \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - a^2 \Delta u(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^k, \tag{1.16}$$

имеет вид (1.1) с $n=k+1$, $x_n \equiv t$. Поэтому для него характеристическое уравнение (1.6) имеет вид $\lambda^2 + a^2|\xi|^2 = 0$, $\xi \in \mathbf{R}^k$ (мы пишем ξ вместо ξ') и $\lambda_{1,2}(\xi) = \pm ia|\xi|$, и для общего решения $u \in V_0^{(r)}$, согласно (1.12'), получаем

$$\tilde{u}(\xi, t) = C_1(\xi) e^{ia|\xi|t} + C_2(\xi) e^{-ia|\xi|t} = A(\xi)\cos a|\xi|t + B(\xi)\sin a|\xi|t. \tag{1.16'}$$

2) Аналогично, для уравнения Клейна—Гордона

$$(\Box + m_0^2) u(x, t) = 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbf{R}^k, \tag{1.17}$$

корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega(\xi)$, где $\omega(\xi) = \sqrt{a^2|\xi|^2 + m_0^2}$ и для общего решения $u \in U_0^{(r)}$ имеем

$$\tilde{u}(\xi, t) = A(\xi)\cos\omega(\xi)t + B(\xi)\sin\omega(\xi)t. \tag{1.17'}$$

3) Для *волнового уравнения с трением*

$$\left(\Box + K\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbf{R}^k; \quad K > 0, \tag{1.18}$$

характеристическое уравнение $\lambda^2 + a^2|\xi|^2 + K\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - a^2|\xi|^2}$. Поэтому для общего решения $u \in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi, t) = \begin{cases} C_1(\xi) e^{\left(-\frac{K}{2} - \mu(\xi)\right)t} + C_2(\xi) e^{\left(-\frac{K}{2} + \mu(\xi)\right)t} & \text{при } a|\xi| < \frac{K}{2}; \\ e^{-\frac{K}{2}t} \left(A(\xi)\cos\omega(\xi)t + B(\xi)\sin\omega(\xi)t\right) & \text{при } a|\xi| > \frac{K}{2}, \end{cases} \tag{1.18'}$$

где $\mu(\xi) = \sqrt{\frac{K^2}{4} - a^2|\xi|^2}$, $\omega(\xi) = \sqrt{a^2|\xi|^2 - \frac{K^2}{4}}$.

4) При другом варианте введения трения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + K\right)^2 u(x, t) = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \ x \in \mathbf{R}^k, \tag{1.19}$$

корни $\lambda_{1,2}=-K\pm ia|\xi|$ и для общего решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi,t)=e^{-Kt}(C_1(\xi)e^{ia|\xi|t}+C_2(\xi)e^{-ia|\xi|t}). \tag{1.19'}$$

Отметим, что все уравнения (1.16)—(1.19) α-регулярны при $\alpha\geqslant 0$ и для них $\nu_\alpha=2$ при $\alpha\geqslant 0$. Уравнение (1.18) не является α-регулярным при $\alpha\in]-K,0[$.

Определение 5.1 главы 3 эллиптического оператора, очевидно, эквивалентно следующему:

Определение 1.4. Оператор $P(\partial_x)$ называется *эллиптическим*, если граница $x_n=0$ не является характеристической, т. е. $\nu=m$ и

$$\operatorname{Re}\lambda_k^0(\xi')\neq 0,\quad k=1,\ldots,m \quad \text{при } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\diagdown 0, \tag{1.20}$$

где $\lambda_k^0(\xi')$ — корни, соответствующие старшей части $P(\partial_x)$ оператора P.

Предложение 1.4 ([11], [55]). Если $P(\partial_x)$ — эллиптический оператор и $n\geqslant 3$, то $m=2l$ — четное число и количество $\nu_-(\xi')$ корректных по Петровскому корней λ_k равно l.

Четность m при $n\geqslant 3$ вытекает из предложения 5.1 главы 3.

Для однородного оператора $P_m(\partial_x)$, ввиду (1.15'), все корни λ_k^0 с $\lambda_k^0<0$ — корректны по Петровскому, а с $\operatorname{Re}\lambda_k^0(\xi')>0$ — не корректны по Петровскому. Отсюда легко вывести предложение 1.4 в случае $P=P_m$. Общий случай, когда $P\neq P_m$, сводится к рассмотренному при помощи следующей леммы.

Лемма 1.1. Если граница $x_n=0$ для оператора $P(\partial_x)$ нехарактеристическая, то корни $\lambda_k(\xi')$, соответствующие оператору $P(\partial_x)$, и $\lambda_k^0(\xi')$, соответствующие $P_m(\partial_x)$, имеют «одинаковую» асимптотику при $|\xi'|\to\infty$:

$$\lambda_k(\xi')=\lambda_k^0(\xi')+o(|\xi'|),\quad |\xi'|\to\infty\quad \xi'\in\mathbf{C}^{n-1}. \tag{1.21}$$

Доказательство. Возьмем $\xi'\in\mathbf{C}^{n-1}$. Тогда для $\lambda_k^0(\xi')$ и отношений $\lambda_k(t\xi')/t$ уравнения имеют асимптотически одинаковый вид (см. (1.6)):

$$\begin{cases} 0=\dfrac{P(-it\xi',\lambda_k(t\xi'))}{t^m}=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\frac{p_{(j)}(t\xi')}{t^{m-j}}\left(\frac{\lambda_k(t\xi')}{t}\right)^j,\\ 0=P_m(-i\xi',\lambda_k^0(\xi'))=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}p_{(j)}^0(\xi')(\lambda_k^0(\xi'))^j. \end{cases} \tag{1.22}$$

Но при $t\to\infty$

$$\frac{p_{(j)}(t\xi')}{t^{m-j}}\to p_{(j)}^0(\xi') \text{ и } p_{(m)}(\xi')=p_{(m)}^0(\xi')=P_m(0,\ldots 0,1)\neq 0. \tag{1.23}$$

Следовательно, при $t\to+\infty$

$$\lambda_k(t\xi')/t\to\lambda_k^0(\xi'). \tag{1.24}$$

Следствие 1.2. Из (1.21) вытекает, что для эллиптического оператора $P(\partial_x)$ при $n\geqslant 3$ в соответствии с нумерацией (1.10)

$$\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')\to\begin{cases}-\infty, & \text{при } k\leqslant l\\ +\infty, & \text{при } k>l,\end{cases} \tag{1.25}$$

поскольку то же верно для корней $\lambda_k^0(\xi')$.

Предложение 1.4 доказано.

Примеры эллиптических уравнений.

1) Для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x)=0,\ x_n>0,\ x'\equiv(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1} \tag{1.26}$$

характеристическое уравнение $-|\xi'|^2+\lambda^2=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\mp|\xi'|$ и для общего вида решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi',x_n)=C_1(\xi')e^{-|\xi'|x_n}. \tag{1.26'}$$

2) Аналогично, для уравнения

$$\Delta u-qu(x)=0,\quad x_n>0,\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1};\quad q>0, \tag{1.27}$$

корни $\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{|\xi'|^2+q}$ и для общего решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi',x_n)=C_1(\xi')e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}. \tag{1.27'}$$

3) Для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u+\omega_0^2u(x)=0,\quad x_n>0,\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1},\quad \omega_0\in\mathbf{R}\diagdown 0, \tag{1.28}$$

корни $\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{|\xi'|^2-\omega_0^2}$. Поэтому для общего решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем $(\omega\equiv\sqrt{\omega_0^2-|\xi'|^2})$

$$\tilde{u}(\xi',x_n)=\begin{cases}C_1(\xi')e^{i\omega x_n}+C_2(\xi')e^{-i\omega x_n} & \text{при } |\xi'|<|\omega_0|,\\ C_1(\xi')e^{-\sqrt{|\xi'|^2-\omega_0^2}\,x_n} & \text{при } |\xi'|>|\omega_0|.\end{cases} \tag{1.28'}$$

4) Для *уравнения Коши—Римана*

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}u(x_1,x_2)\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{i\partial u}{\partial x_2}\right)=0,\quad x_2>0,\quad x_1\in R, \tag{1.29}$$

корень $\lambda=\xi_1$ и для общего решения $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi_1,x_2)=\begin{cases}C_1(\xi_1)e^{\xi_1x_2} & \text{при } \xi_1\leqslant 0,\\ 0 & \text{при } \xi_1>0.\end{cases} \tag{1.29'}$$

Уравнение (1.26) является α-регулярным только при $\alpha=0$, (1.27) — при $\alpha\in[-\sqrt{q},\sqrt{q}]$; уравнения (1.28) и (1.29) не являются α-регулярными ни при каком $\alpha\in\mathbf{R}$.

Из следствия 1.2 вытекает

Предложение 1.5. Эллиптический оператор $P(\partial_x)$ при $n\geqslant 3$ является α-регулярным лишь при $\alpha\in[\overline{\alpha}_l, \underline{\alpha}_{l+1}]$, если $\overline{\alpha}_l\leqslant\underline{\alpha}_{l+1}\equiv \inf\limits_{\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}} \operatorname{Re}\lambda_{l+1}(\xi')$; при этом $\nu_\alpha=\frac{m}{2}$.

Определение 1.5. Уравнение (1.1) называется *h-параболическим по Шилову* ($h\in\mathbf{R}$), если при некоторых $C_1>0$, $C_2\in\mathbf{R}$

$$\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')\leqslant -C_1|\xi'|^h+C_2 \quad\text{при } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1},\ \forall k=1,\ldots,\nu. \qquad (1.30)$$

Очевидно, любое параболическое по Шилову уравнение является корректным по Петровскому и является α-регулярным при $\forall\alpha\geqslant\overline{\alpha}_\nu$.

Примеры параболических уравнений.

1) Уравнение теплопроводности (или диффузии)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u(x,t),\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^k;\quad a>0, \qquad (1.31)$$

имеет вид (1.1) с $n=k+1$ и $x_n\equiv t$. Оно является 2-параболическим по Шилову, $\lambda_1=-a^2|\xi|^2$, и для $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi,t)=c_k(\xi)\,e^{-a^2|\xi|^2t}. \qquad (1.31')$$

2) *Уравнение теплопроводности с поглощением* (или *рождением*, если $q<0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u(x,t)-qu,\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^k;\quad a>0,\quad q\in\mathbf{R}, \qquad (1.32)$$

также 2-параболическое по Шилову, $\lambda_1=-a^2|\xi|^2-q$ и для $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi,t)=\begin{cases} C_1(\xi)\,e^{-(a^2|\xi|^2+q)t}, & a^2|\xi|^2\geqslant -q,\\ 0, & a^2|\xi|^2<-q.\end{cases} \qquad (1.32')$$

Уравнение (1.32) является α-регулярным при $\alpha\geqslant -q$ и тогда $\nu_\alpha=1$, и оно не является α-регулярным при $\alpha<-q$.

Определение 1.6. Уравнение (1.1) называется *β-параболическим по Петровскому* ($\beta=1,2,\ldots$), если

$$p_\alpha=0 \text{ при } |\alpha'|+\beta\alpha_n>\beta\nu, \qquad (1.33)$$

а все корни уравнения

$$P_{m,\beta}(\xi',\lambda^0)\equiv\sum_{|\alpha'|+\beta\alpha_n=\nu\beta} p_\alpha(-i\xi')^{\alpha'}(\lambda^0)^{\alpha_n}=0 \qquad (1.34)$$

являются *строго устойчивыми* в следующем смысле:

$$\operatorname{Re}\lambda^0(\xi')<0,\quad |\xi'|=1,\quad \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \qquad (1.35)$$

Например, уравнения (1.31) и (1.32) являются 2-параболическими по Петровскому.

Отметим, что (1.35) возможно лишь при четных $\beta=2b$, где $b=1,2,\ldots$. Действительно, если λ^0 — корень уравнения (1.34) для $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus 0$, то $t^\beta\lambda^0$ — корень того же уравнения для $t\xi'$. При $t=-1$ и нечетном β это противоречит (1.35).

Предложение 1.6. Если уравнение (1.1) является $2b$-параболическим по Петровскому, то оно также $2b$-параболично по Шилову.

Доказательство. Обозначим корни уравнения (1.34) через $\lambda_k^0(\xi')$. Аналогично (1.15′),

$$\lambda_k^0(t\xi')=t^{2b}\lambda_k^0(\xi'),\quad t>0,\quad \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus 0. \qquad (1.36)$$

Поэтому корни $\lambda_k^0(\xi')$, ввиду (1.35), удовлетворяют нужной оценке (1.30). Остается заметить, что, согласно (1.6) и (1.33),

$$p_{(\nu)}(\xi')\equiv\sum_{\alpha_n=\nu} p_\alpha(-i\xi')^{\alpha'}=p_{(0,\ldots,0,\nu)}\neq 0. \qquad (1.37)$$

Поэтому корни $\lambda_k(\xi')$ и $\lambda_k^0(\xi')$ при $|\xi'|\to\infty$ имеют одинаковую асимптотику:

$$\lambda_k(\xi')=\lambda_k^0(\xi')+o(|\xi'|^{2b}). \qquad (1.37')$$

Это следует из леммы 1.1, примененной к оператору $P(\partial_{x'},\partial_s^{2b})$, поскольку для него плоскость $s=0$ не является характеристической ввиду (1.37).

Замечание 1.1. Классификация уравнений (1.1) в полупространстве на гиперболические, эллиптические и параболические не является полной. Например, для уравнения Шрёдингера

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=ia^2\Delta\psi(x,t),\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^k;\quad a>0, \qquad (1.38)$$

характеристическое уравнение имеет корень $\lambda_1=-ia^2|\xi|^2$. Поэтому, для $\psi\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{\psi}(\xi,t)=c_1(\xi)\,e^{-ia^2|\xi|^2t}. \qquad (1.38')$$

Уравнение Шрёдингера не гиперболическое, не эллиптическое и не параболическое по Шилову. Однако оно является α-регулярным при $\forall\alpha\in\mathbf{R}$.

Аналогично, для волнового уравнения с сильным трением

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\Delta u(x,t)+K\frac{\partial}{\partial t}\Delta u,\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^k;\quad a>0,\quad K>0, \qquad (1.39)$$

характеристическое уравнение $\lambda^2=-a^2|\xi|^2-K\lambda|\xi|^2$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-\frac{K|\xi|^2}{2}\pm\sqrt{\frac{K^2|\xi|^4}{4}-a^2|\xi|^2}$. Поэтому для $u\in U_0^{(r)}$ получаем

$$\tilde{u}(\xi,t)=C_1(\xi)\,e^{\lambda_1 t}+C_2(\xi)\,e^{\lambda_2 t}. \qquad (1.39')$$

Уравнение (1.39) не принадлежит к типу гиперболических, эллиптических или параболических по Шилову. Однако оно является α-регулярным при $\forall\alpha\geqslant 0$ (и не является α-регулярным при $\alpha<0$).

§ 2. Регулярные краевые задачи в полупространстве в классах ограниченных функций

Как видно из (1.9) уравнение (1.1), в полупространстве имеет, вообще говоря, бесконечное число линейно независимых решений. Действительно, если взять, например $C_k(\xi')\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, то функция

$$u(x', x_n)\equiv F^{-1}_{\xi'\to x'}\tilde{u}(\xi', x_n)\in U_\alpha^{(r)} \tag{2.1}$$

при некотором достаточно большом $\alpha\,(\alpha > \max\limits_{\xi'\in \operatorname{supp} C_k} \operatorname{Re}\lambda_k(\xi')$ $\forall k=1,\ldots,\nu)$ и любом $r=1, 2, \ldots,$ и u является решением уравнения (1.1).

Регулярная, т. е. «правильно» поставленная задача для уравнения (1.1) должна иметь единственное решение. Для этого на u нужно наложить дополнительные ограничения, чтобы из всех решений выбрать одно. В задачах математической физики это обычно достигается заданием краевых условий на границе области. В случае уравнения (1.1) граница области есть гиперповерхность $x_n=0$. Зададим на ней краевые условия вида

$$B_j(\partial_x)u(x)|_{x_n=0+}=f_j(x'), \quad x'\in\mathbf{R}^{n-1}; \quad j=1,\ldots,l, \tag{2.2}$$

где

$$B_j(\partial_x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m_j} b_{j\alpha}\partial_x^\alpha. \tag{2.2'}$$

Возьмем $r\geqslant\overline{m}\equiv\max\limits_j m_j$. Тогда для $u\in U^{(r)}$ или $u\in U_\alpha^{(r)}$ условия (2.2) имеют смысл, в силу теоремы 3.1 главы 2, как равенства в пространстве $H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})\equiv\bigcup\limits_{s\in\mathbf{R}} H_s(\mathbf{R}^{n-1})$.

Наша цель — найти условия на операторы $P, B_1,\ldots,B_l$, при которых краевая задача (1.1), (2.2) «правильно» поставлена, в частности, найти число l. Грубо говоря, ответ состоит в том, что в (1.9) нужно отбросить все слагаемые, соответствующие неустойчивым корням (у которых $\operatorname{Re}\lambda_k>0$); l равно числу устойчивых корней (у которых $\operatorname{Re}\lambda_k\leqslant 0$), а значения $(B_j(-i\xi', \lambda_k(\xi')))_{k=1}^l$ символов на устойчивых корнях должны быть линейно независимы.

2.1. Регулярные краевые задачи.

Определение 2.1. Краевая задача (1.1), (2.2) называется *регулярной* в $U_0^{(r)}$, где $r\geqslant\overline{m}$, если для любых $f_j\in H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ она имеет решение $u\in U_0^{(r)}$ и притом единственное.

Найдем необходимые условия для того, чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$.

Предположим, что задача (1.1), (2.2) является регулярной в $U_0^{(r)}$ и пусть $u\in U_0^{(r)}$ является ее решением. Тогда, согласно (1.12′),

$$\tilde{u}(\xi', x_n)=\sum_{k=1}^{\nu_0(\xi')} C_k(\xi')e^{\lambda_k(\xi')x_n}, \quad \text{п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}\setminus 0, \quad x_n>0. \tag{2.3}$$

Функции $C_k(\xi')$ находятся из краевых условий (2.2). Для этого нужно применить к (2.2) касательное преобразование Фурье $F_{x'\to\xi'}$ (см. 1.4)) при $x_n=0$. При этом получим:

$$B_j(-i\xi', \partial_{x_n})\tilde{u}(\xi', 0+)=\tilde{f}_j(\xi'), \text{ п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}, \ j=1,\ldots,l. \tag{2.4}$$

Подставляя сюда (2.3), получаем

$$\sum_1^{\nu_0(\xi')} B_j(-i\xi', \lambda_k(\xi'))C_k(\xi')=\tilde{f}_j(\xi'), \text{ п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}, \tag{2.5}$$

$$j=1,\ldots,l.$$

Поскольку задача (1.1), (2.2) является регулярной в $U_0^{(r)}$, то система (2.5) для любых $\tilde{f}_j(\xi')\in\tilde{H}_{-\infty}\equiv F_{x'\to\xi'}H_{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ при п. в. $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$ имеет решение и притом единственное. Отсюда вытекает

Предложение 2.1. Для того чтобы краевая задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$, $r\geqslant\overline{m}$, необходимо, чтобы

$$\nu_0(\xi')\equiv\nu_0=l \text{ при п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1} \tag{2.6}$$

так, что, в частности, уравнение (1.1) должно быть 0-регулярным; кроме того, матрица $B_{jk}(\xi')\equiv B_j(-i\xi', \lambda_k(\xi'))$ должна быть невырожденной при п. в. $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$:

$$\det(B_{jk}(\xi'))_{j,k=1}^l\neq 0 \text{ при п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{2.6'}$$

Это есть условие типа Шапиро—Лопатинского [27], необходимое для того, чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$. Запишем систему (2.5) в векторном виде

$$B(\xi')C(\xi')=\tilde{F}(\xi'), \text{ п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}, \tag{2.7}$$

где $B(\xi')=(B_{jk}(\xi'))$ — матрица $l\times l$, а $G(\xi')$ и $\tilde{F}(\xi')$ — вектор столбцы с элементами $C_k(\xi')$ и $\tilde{f}_j(\xi')$ соответственно. Тогда, ввиду (2.6′),

$$G(\xi')=B^{-1}(\xi')\tilde{F}(\xi'), \text{ п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{2.8}$$

Пример 2.1. Для любого оператора $P(\partial_x)$, удовлетворяющего нашему предположению (1.8), краевая задача

$$\partial_{x_n}^{j-1}u(x', 0+)=f_j(x'), \quad j=1,\ldots,l, \tag{2.9}$$

удовлетворяет условию (2.6′). Действительно, для нее $B_{jk}(\xi')=$ $=\lambda_k^{j-1}(\xi')$ и, в силу (1.8),

$$\det B(\xi') = \prod_{k>l} (\lambda_k(\xi') - \lambda_l(\xi')) \neq 0 \text{ при п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.10)$$

Теперь укажем достаточные условия регулярности краевой задачи (1.1), (2.2). Пусть необходимое условие (2.6) выполнено.

Предложение 2.2. Для того чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$, достаточно, чтобы условие (2.6′) выполнялось при $\forall \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ (а не при п. в. ξ'):

$$\det B(\xi') \neq 0 \quad \forall \xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \qquad (2.6'')$$

Доказательство. Нужно проверить, что решение u, найденное по формулам (2.1), (2.3), (2.8), принадлежит классу $U_0^{(r)}$, $r \geqslant \bar{m}$. Заметим прежде всего, что из (2.6″) вытекает оценка: при некотором $a \in \mathbf{R}$ и $C > 0$

$$|\det B(\xi')| \geqslant C(1+|\xi'|)^a, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.11)$$

Эта оценка вытекает из теоремы А.2.5 из [55], примененной к полуалгебраической функции от x

$$f(x) \equiv \inf_{|\xi'|=x} |\det B(\xi')|. \qquad (2.12)$$

Полуалгебраичность функции $f(x)$ означает, что множество

$$F \equiv \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leqslant f(x)\} \qquad (2.13)$$

в $\mathbf{R}^2$ является полуалгебраическим. В свою очередь, полуалгебраичность F вытекает из следствия А.2.4 [55], поскольку $f(x)$ допускает представление вида (А.2.2) из [55]:

$$f(x) = \inf (y > 0 : y^2 = |\det (B_j(-i\xi', \lambda_k))_{j,k=1}^{l}|^2, \quad |\xi'| = x,$$
$$P(-i\xi', \lambda_k) = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_1 \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \lambda_l \leqslant 0). \qquad (2.14)$$

Отметим, что все эти результаты из [55] доказываются при помощи принципа Зайденберга—Тарского. Аналогично (2.11) доказывается оценка: при некотором $a_k \in \mathbf{R}$

$$|\lambda_k(\xi')| \leqslant C(1+|\xi'|)^{a_k}, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.15)$$

Отсюда и из (2.11) вытекает, что при некотором $b \in \mathbf{R}$

$$\|B^{-1}(\xi')\| \leqslant C(1+|\xi'|)^b, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.16)$$

Отсюда в силу (2.8) вытекает, поскольку $\tilde{f}_j(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty} \equiv \tilde{H}_\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ что также

$$C_k(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1}). \qquad (2.17)$$

Остается проверить, что при некотором $s \in \mathbf{R}$ для $\forall j = 0, 1, 2, \ldots$ (а не только при $j \leqslant r$)

$$\|\partial_{x_n}^j u(\cdot, x_n)\|_s \leqslant C_{j,s} < \infty \text{ при } x_n > 0. \qquad (2.18)$$

Но это очевидно: из (2.3) получаем, что

$$\partial_{x_n}^j \tilde{u}(\xi', x_n) = \sum_{k=1}^{\nu_0} C_k(\xi') \lambda_k^j(\xi') e^{\lambda_k x_n}. \qquad (2.19)$$

Отсюда, поскольку $\operatorname{Re} \lambda_k(\xi') \leqslant 0$, $k \leqslant \nu_0$, получаем, ввиду (2.15)

$$|\partial_{x_n}^j \tilde{u}(\xi', x_n)|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\nu_0} |C_k(\xi')|^2 (1+|\xi'|)^{2ja_k}. \qquad (2.20)$$

Поэтому, согласно определению 3.1 главы 2, для $\forall s \in \mathbf{R}$

$$\|\partial_{x_n}^j u(\cdot, x_n)\|_s^2 = \int (1+|\xi'|)^{2s} |\partial_{x_n}^j \tilde{u}(\xi', x_n)|^2 d\xi' \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{k=1}^{\nu_0} \int (1+|\xi'|)^{2(s+ja_k)} |C_k(\xi')|^2 d\xi'. \qquad (2.21)$$

Остается учесть, что $C_k \in \tilde{H}_{-\infty}$.

Отметим, что s в оценке (2.18) зависит от j, как видио из (2.20).

Замечание 2.1. Если выполняется предположение (1.8′), то краевая задача (2.9) удовлетворяет условию (2.6″) ввиду (2.10).

Предложение 2.3. Если выполняется предположение (1.8′) для k, $j \leqslant \nu_0$, то условие (2.6″) (вместе с (2.6)) является необходимым и достаточным для того, чтобы краевая задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$ при $r \geqslant \max(\bar{m}, \nu_0 - 1)$.

Доказательство. Достаточность доказана в предложении 2.2. Для доказательства необходимости заметим, что для $u \in U_0^{(r)}$, по определению (1.2), при $r \geqslant \nu_0 - 1$

$$\partial_{x_n}^{j-1} u(x', 0+) \equiv v_j(x') \in H_{-\infty}(\mathbf{R}^n), \quad j = 1, \ldots, \nu_0. \qquad (2.22)$$

Подставляя сюда (2.3) и учитывая, что $\nu_0 = l$ согласно (2.6), получаем для $C_k(\xi')$ систему, аналогичную (2.5):

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_k^{j-1}(\xi') C_k(\xi') = \tilde{v}_j(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty}. \qquad (2.23)$$

Ее определитель (2.10) удовлетворяет условию (2.6″), ввиду (1.8′). Если задача (1.1), (2.2) регулярна в $U_0^{(r)}$, то при $\forall f_j \in H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ она имеет решение $u \in U_0^{(r)}$ и тогда $C_k(\xi') \in \tilde{H}_{-\infty}$ $\forall k$, как показано выше. Но ввиду (2.8),

$$C_k(\xi') = \sum_j B_{kj}^{-1}(\xi') \tilde{f}_j(\xi'), \text{ п. в. } \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}. \qquad (2.24)$$

Поэтому, в силу (2.24) функции $B_{kj}^{-1}(\xi')$ локально ограничены, откуда вытекает (2.6″).

2.2. Примеры регулярных краевых задач.

1) *Гиперболическое уравнение Клейна—Гордона* (1.17) имеет вид (1.1) с $n = k+1$ и $x_n = t$. Для него $\lambda_{1,2}(\xi) =$

$=\pm i\sqrt{|\xi|^2+m_0^2}$, $\xi\in\mathbf{R}^k$, так что $\nu_0=2$ и выполняется условие (1.8′) (мы пишем ξ вместо ξ'). Поэтому для (1.17) регулярной в $U_0^{(r)}$ является задача (2.9) с $l=2$ — так называемая *задача Коши* с «начальным» условием

$$u(x,\,0+)=u_0(x),\quad \partial_t u(x,\,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbf{R}^k. \tag{2.25}$$

Подставляя общее решение (1.17′) в (2.25), находим, аналогично (2.5), (2.8): $A(\xi)=u_0(\xi)$ и $B(\xi)=u_1(\xi)/\omega(\xi)$, откуда

$$\tilde u(\xi,\,t)=\tilde u_0(\xi)\cos\omega(\xi)\,t+\frac{\tilde u_1(\xi)}{\omega(\xi)}\sin\omega(\xi)\,t; \tag{2.26}$$

$$\omega(\xi)\equiv\sqrt{a^2|\xi|^2+m_0^2}.$$

2) Для эллиптического уравнения (1.27) $\nu_0=1$, и регулярными в $U_0^{(r)}$ являются:

а) *задача Дирихле*:

$$u|_{x_n=0+}=u_0(x')\Rightarrow\tilde u(\xi',\,x_n)=\tilde u_0(\xi')\,e^{-\sqrt{|\xi|^2+q}\,x_n}. \tag{2.27}$$

б) *Задача Неймана*:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0+}=u_1(x')\Rightarrow\tilde u(\xi',\,x_n)=-\frac{\tilde u_1(\xi')}{\sqrt{|\xi'|^2+q}}\,e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}. \tag{2.28}$$

в) *Третья краевая задача* (при $\sigma\geqslant0$ или $\operatorname{Im}\sigma\neq0$):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}-\sigma u\right)_{x_n=0+}=f(x')\Rightarrow\tilde u(\xi',\,x_n)=$$
$$=-\frac{\tilde f(\xi')}{\sqrt{|\xi'|^2+q}+\sigma}\,e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}. \tag{2.29}$$

г) *Задача с косой производной* (все $b_k\in\mathbf{R}$ и не все $b_k=0$)

$$\left.\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right|_{x_n=0+}=f(x')\Rightarrow\tilde u(\xi',\,x_n)=$$
$$=-\frac{\tilde f(\xi')\,e^{-\sqrt{|\xi'|^2+q}\,x_n}}{i\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_k\xi_k+b_n\sqrt{|\xi'|^2+q}} \tag{2.30}$$

регулярна в $U_0^{(r)}$, если $b_n\neq0$ или $n=2$.

3) Для уравнения Лапласа (1.26) также $\nu_0=1$, и задача Дирихле регулярна в $U_0^{(r)}$:

$$u|_{x_n=0+}=u_0(x')\Rightarrow\tilde u(\xi',\,x_n)=\tilde u_0(\xi')\,e^{-|\xi'|x_n}. \tag{2.31}$$

Аналогично и для третьей краевой задачи (2.29) при $\sigma>0$ или при $\operatorname{Im}\sigma\neq0$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}-\sigma u\right)_{x_n=0+}=f(x')\Rightarrow\tilde u(\xi',\,x_n)=-\frac{\tilde f(\xi')}{|\xi'|+\sigma}\,e^{-|\xi'|x_n}. \tag{2.32}$$

4) Параболическое уравнение (1.32) имеет вид (1.1) с $n=k+1$ и $x_n=t$. Для него $\nu_0=1$ при $q\geqslant0$, и регулярной в $U_0^{(r)}$ является задача Коши с начальным условием

$$u(x,\,0+)=u_0(x)\Rightarrow\tilde u(\xi,\,t)=\tilde u_0(\xi)\,e^{-(a^2|\xi|^2+q)t}. \tag{2.33}$$

5) Для уравнения Шрёдингера (1.38) также $\nu_0=1$ и для него регулярна в $U_0^{(r)}$ задача Коши с начальным условием

$$\psi(x,\,0+)=\psi_0(x)\Rightarrow\tilde\psi(\xi,\,t)=\tilde\psi_0(\xi)\,e^{-ia^2|\xi|^2t}. \tag{2.34}$$

6) Определение 2.2. *Задачей Коши* для общего уравнения (1.1) называется задача с условиями вида (2.9), где $l=\nu$.

Для регулярности этой задачи в $U_0^{(r)}$, согласно предложению 2.1, необходимо, чтобы $\nu_0(\xi')\equiv\nu$ (условие (2.6) с $l=\nu$) и, согласно замечанию 2.1 и предложению 2.2, достаточно, чтобы, кроме того, выполнялось условие (1.8′).

§ 3. Регулярные краевые задачи в классах экспоненциально растущих функций

3.1. Определение и примеры. Определение 3.1. Краевая задача (1.1), (2.2) называется *регулярной* в классе $U_\alpha^{(r)}$, где $\alpha\in\mathbf{R}$ и $r\geqslant\overline{m}$, если для любых $f_j\in H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ она имеет решение $u\in U_\alpha^{(r)}$ и притом единственное.

Предложение 3.1. Для того чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_\alpha^{(r)}$, $r\geqslant\overline{m}$,

1) Необходимо, чтобы, аналогично (2.6),

$$\nu_\alpha(\xi')\equiv\nu_\alpha=l,\ \text{п. в.}\ \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}, \tag{3.1}$$

в частности, чтобы уравнение (1.1) было α-регулярным, и чтобы выполнялось условие (2.6′).

2) Достаточно, чтобы выполнялись условия (3.1) и (2.6″).

3) условие (2.6″) вместе с (3.1) необходимо и достаточно, если условие (1.8′) выполняется для $k,\,j\leqslant\nu_\alpha$ и $r\geqslant\max(\nu_\alpha-1,\,\overline{m})$.

Это предложение доказывается совершенно аналогично предложениям 2.1—2.3.

Примеры краевых задач, регулярных в $U_\alpha^{(r)}$.

1) Волновое гиперболическое уравнение (1.16) имеет вид (1.1) с $n=k+1$ и $x_n=t$. Для него $\nu_0=2$, но условие (1.8′) выполняется лишь при $\xi\in\mathbf{R}^k\setminus0$. Поэтому для него задача Коши с условиями (2.25) удовлетворяет требованиям (2.6), (2.6′), но не удовлетворяет (2.6″). Подставляя (1.16′) в (2.25), находим $A(\xi)=\tilde u_0(\xi)$ и $B(\xi)=\tilde u_1(\xi)/|\xi|$, откуда

$$\tilde u(\xi,\,t)=\tilde u_0(\xi)\cos a|\xi|\,t+\tilde u_1(\xi)\,\frac{\sin a|\xi|\,t}{|\xi|}. \tag{3.2}$$

Отсюда, аналогично (2.18)—(2.21), выводится, что при $s\in\mathbf{R}$

$$\|\partial_{x_n}^j u(\cdot, t)\|_s^2 \leqslant C\left(\|u_0\|_{s+j}^2 + \|u_1\|_{s+j-1}^2\cdot t\right) \text{ при } t>0, \tag{3.3}$$

если $\|u_0\|_{s+j}<\infty$ и $\|u_1\|_{s+j-1}<\infty$. Из (3.2) следует, что задача Коши (1.16), (2.25) не является регулярной в $U_0^{(r)}$, но (3.3) показывает, что она регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\forall\alpha>0$. Этот пример показывает, что условия предложения 2.2, достаточные для того, чтобы задача (1.1), (2.2) была регулярной в $U_0^{(r)}$, близки к необходимым (в частности, условие (1.8′)).

2) Аналогично, для уравнений (1.18) и (1.39) задача Коши с условиями (2.22) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha>0$, а для (1.19)— при $\alpha>-K$.

3) Уравнения (1.16) и (1.17) в классе $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha<0$ имеют только одно решение $u=0$. Поэтому для них является регулярной задача в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha<0$ без краевых условий. То же верно для уравнений (1.18) и (1.19) при $\alpha<-K$. Уравнение (1.18) не является α-регулярным при $\alpha\in]-K, 0[$, поэтому при этих α для него нет регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач; аналогично обстоит дело в уравнением (1.39) при $\alpha<0$.

4) Для эллиптического уравнения (1.27) все краевые задачи (2.27)—(2.30) регулярны в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha\in[-\sqrt{q}, \sqrt{q}]$. При $\alpha\notin[-\sqrt{q}, \sqrt{q}]$ для уравнения (1.27) нет регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач, поскольку оно при этих α не является α-регулярным; то же верно для уравнения Лапласа при $\alpha\neq 0$ и для уравнений Гельмгольца (1.28) и Коши—Римана (1.29) при всех $\alpha\in\mathbf{R}$.

5) Для параболического уравнения (1.32) задача Коши (2.33) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha\geqslant -q$; а при $\alpha<-q$ для него нет регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач.

Замечание 3.1. Из рассмотренных примеров видно, что число l краевых условий в регулярных в U_α^r задачах для фиксированного уравнения слабо зависит от α. Например, для рассмотренных гиперболических уравнений $l=0$ или $i=2$, для эллиптических, параболических и Шрёдингера—только $l=1$, для (1.39)—только $l=2$. Это связано с условием (2.6) и тем, что уравнение является α-регулярным как правило лишь для одного (или двух) значений $\alpha\in\mathbf{R}$, если такие α вообще имеются.

Например, для уравнений Гельмгольца (1.28) и Коши—Римана (1.29) таких значений α вообще нет, и соответственно, регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач вида (2.2) для них также нет.

С другой стороны, например, уравнение (ср. (1.19))

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}+K_1\right)^2-a^2\Delta\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}+K_2\right)^2-a^2\Delta\right)u(x, t)=0,$$
$$x\in\mathbf{R}^k,\quad t>0, \tag{3.4}$$

при $K_2<K_1$ имеет корни

$$\lambda_{1,2}=-K_1\pm ia|\xi|,\quad \lambda_{3,4}=-K_2\pm ia|\xi|;\quad \xi\in\mathbf{R}^k.$$

Поэтому для его решения $u\in U^{(r)}$

$$\tilde{u}(\xi, t)=e^{-K_1t}\left(C_1(\xi)e^{ia|\xi|t}+C_2(\xi)e^{-ia|\xi|t}\right)+$$
$$+e^{-K_2t}\left(C_3(\xi)e^{ia|\xi|t}+C_4(\xi)e^{-ia|\xi|t}\right),$$

и для уравнения (3.4)

$$\nu_\alpha(\xi)=\begin{cases}0, & \alpha<-K_1,\\ 2, & -K_1\leqslant\alpha<-K_2,\\ 4, & \alpha\geqslant -K_2.\end{cases}$$

Поэтому для (3.4) регулярная в $U_\alpha^{(r)}$ задача должна при $\alpha\geqslant -K_2$ содержать 4 начальных условия (например, задача Коши), при $\alpha\in[-K_1, -K_2]$—два условия; при $\alpha<-K_1$ не нужно задавать никаких краевых условий.

3.2. Задача Коши. Чтобы задача Коши для общего уравнения (1.1) (см. определение 2.2) была регулярной в $U_\alpha^{(r)}$, необходимо, согласно (3.1), выполнение условия

$$(\nu_\alpha(\xi')=\nu,\ \xi'\in\mathbf{R}^{n-1})\Leftrightarrow \bar{\alpha}_\nu\leqslant\alpha. \tag{3.5}$$

Это означает, в частности, что уравнение (1.1) должно быть корректным по Петровскому.

Предложение 3.2. Пусть уравнение (1.1) корректно по Петровскому и (см. (1.6))

$$p_{(\nu)}(\xi')\equiv\mathrm{const}\neq 0. \tag{3.5′}$$

Тогда задача Коши для уравнения (1.1) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha>\bar{\alpha}_\nu$ (даже если не выполнено условие (1.8)).

Доказательство. При условии (3.5) задачу Коши для уравнения (1.1) можно записать в виде системы (где $t\equiv x_n$)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_0}{\partial t}=u_1(t, x'),\quad t>0,\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1},\\ \vdots\\ \dfrac{\partial u_{\nu-2}}{\partial t}=u_{\nu-1}(t, x'),\\ \dfrac{\partial u_{\nu-1}}{\partial t}=-\dfrac{1}{p^\nu}\displaystyle\sum_{j=0}^{\nu-1}p_{(j)}(i\partial_{x'})u_j;\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_0(x', 0+)=f_1(x'),\\ \vdots\\ u_{\nu-1}(x', 0+)=f_\nu(x').\end{cases} \tag{3.6}$$

В векторном виде эта задача записывается так:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=Q(\partial_{x'})\,U(x',t),\quad t>0,\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1};$$

$$U|_{t=0+}=F\equiv\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_\nu\end{pmatrix};\quad U\equiv\begin{pmatrix}u_0\\ \vdots\\ u_\nu\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Или, после касательного преобразования Фурье,

$$\frac{\partial\tilde U}{\partial t}=Q(-i\xi')\,\tilde U(\xi',t),\quad t>0;\quad \tilde U(\xi',0+)=\tilde F(\xi'),$$

$$\text{п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{3.8}$$

Отсюда

$$\tilde U(\xi',t)=e^{Q(-i\xi')t}\tilde F(\xi'),\quad \text{п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1},\quad t\geqslant 0. \tag{3.9}$$

Заметим теперь, что

$$\det(Q(-i\xi')-\lambda E)=P(-i\xi',\lambda), \tag{3.10}$$

так что собственные числа матрицы $Q(-i\xi')$ равны $\lambda_k(\xi')$, $k=1,\ldots,\nu$. Поэтому, в силу оценки из [20], [37],

$$\|e^{Q(-i\xi')t}\|\leqslant Ce^{\overline{\alpha}_\nu t}(1+t\,\|Q(-i\xi')\|)^{\nu-1}\quad\text{при}\quad t>0,\ \xi'\in\mathbf{C}^{n-1}. \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что $\forall l=0,1,2,\ldots$

$$\|\partial_t^l e^{Q(-i\xi')t}\|\leqslant Ce^{\overline{\alpha}_\nu t}(1+|\xi'|)^{Ml}(1+t)^{\nu-1},\ t>0,\ \xi'\in\mathbf{C}^{n-1}. \tag{3.12}$$

Поэтому, аналогично (3.3), при $\alpha>\overline{\alpha}_\nu$ для $\forall s\in\mathbf{R}$

$$|||\partial_t^l U(\cdot,t)|||_s\leqslant C_\alpha e^{\alpha t}\sum_{j=1}^{\nu}\|f_j\|_{s+Ml},\quad t>0, \tag{3.13}$$

где $|||\cdot|||_s$ — норма в $[H_s(\mathbf{R}^{n-1})]^\nu$.

Например, для уравнения (1.39) задача Коши (2.25) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha>0$.

Следствие 3.1. Задача Коши является регулярной в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha>\overline{\alpha}_\nu$ для уравнений (1.1), гиперболических по Гордингу или параболических по Петровскому. Действительно, для таких уравнений условие (3.5) выполнено, и (3.5′) — также.

3.3. Задача Дирихле для эллиптических уравнений. Пусть $P(\partial_x)$ — эллиптический оператор в $\mathbf{R}^n$ порядка $m=2l$, где l — целое число (это всегда верно при $n\geqslant 3$, согласно предложению 5.1 главы 3).

Определение 3.1. *Задачей Дирихле для оператора* $P(\partial_x)$ называется краевая задача с условиями вида (2.9), где $l=\frac{m}{2}$.

Предложение 3.3. 1) Если $\overline{\alpha}_l\leqslant\underline{\alpha}_{l+1}$ и выполнено условие (1.8′), то для оператора P задача Дирихле регулярна в $U_\alpha^{(r)}$ при $\alpha\in[\overline{\alpha}_l,\underline{\alpha}_{l+1}]$.

2) Если $\overline{\alpha}_l>\underline{\alpha}_{l+1}$, то для оператора $P(\partial_x)$ нет регулярных в $U_\alpha^{(r)}$ краевых задач.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из предложения 1.5 (2.10) в силу п. 2) предложения 3.1. Утверждение 2) следует также из предложения 1.5 в силу п. 1) предложения 3.1. •

§ 4. Регулярные краевые задачи в классе функций произвольного роста

4.1. Рассмотрим краевую задачу (1.1), (2.2) в пространстве функций $u\in U^{(r)}$, $r\geqslant\overline{m}$.

Определение 4.1. Краевая задача (1.1), (2.2) называется *регулярной в классе* $U^{(r)}$, $r\geqslant\overline{m}$, если при всех $f_j\in H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ она имеет решение $u\in U^{(r)}$ и притом единственное.

Найдем необходимые условия на операторы $P, B_1,\ldots,B_l$, при которых задача (1.1), (2.2) регулярна в $U^{(r)}$. Функция u из (1.9) при любых $C_k(\xi')\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ принадлежит $U^{(r)}$ и является решением задачи (1.1), (2.2. Отсюда вытекает

Предложение 4.1. Для регулярности задачи (1.1), (2.2) в $U^{(r)}$

1) необходимо, чтобы $l=\nu$ и выполнялось условие (2.6′);

2) достаточно, чтобы оператор P был корректным по Петровскому, $l=\nu$ и выполнялось условие (2.6″);

3) при условии (1.8′) и $r\geqslant\nu-1$ необходимо и достаточно, чтобы оператор P был корректным по Петровскому, $l=\nu$ и выполнялось условие (2.6″).

Доказательство. Утверждения 1) и 2) доказываются дословно как предложения 2.1 и 2.2 соответственно. Необходимость корректности по Петровскому оператора P в утверждении 3) выводится методом из доказательства предложения 2.3. А именно, если задача (1.1), (2.2) регулярна в $U^{(r)}$, $r\geqslant\nu$, то из (1.8′), как и в доказательстве предложения 2.3, выводится, что функции $C_k(\xi')$ в (1.9) могут быть произвольными элементами из $\tilde H_{-\infty}$. Возьмем $C_j(\xi')\equiv 0$ для $j\neq k$, тогда из (1.9) получаем, что $\forall k$

$$\tilde u(\xi',x_n)=C_k(\xi')\,e^{\lambda_k(\xi')x_n}\in H_{-\infty}\ \text{при}\ \forall C_k(\xi')\in\tilde H_{-\infty}\ \forall x_n>0. \tag{4.1}$$

Но это возможно лишь, если $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')$ ограниченная функция при $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$. Действительно, по упоминавшейся в § 2 теореме А.2.5 из [55], при некоторых C и $a_k\in\mathbf{R}$

$$\max_{|\xi'|=\rho} \operatorname{Re} \lambda_k(\xi') \sim C\rho^{a_k} \quad \text{при} \quad \rho\to\infty. \tag{4.2}$$

Если $a_k>0$, то (4.1) не может выполняться. Следовательно, $a_k\leqslant 0$, так что все корни $\lambda_k(\xi')$ корректны по Петровскому. Необходимость условия (2.6″) выводится так же как в доказательстве предложения 2.3.

Замечание 4.1. Если в (4.2) $a_k>0$ и $C_k(\xi')\in\tilde H_{-\infty}$, то при $x_n>0$ функция $\tilde u(\cdot, x_n)$ будет принадлежать пространству $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, но, вообще говоря, не будет принадлежать $S'(\mathbf{R}^{n-1})$. Соответственно, $u(\cdot, x_n)$ при $x_n>0$ принадлежит $Z'(\mathbf{C}^{n-1})$, но, вообще говоря, не принадлежит $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n-1})$.

Следствие 4.1. Для эллиптических уравнений при $n\geqslant 3$ нет регулярных в $U^{(r)}$ краевых задач, поскольку они не являются корректными по Петровскому.

Пример Адамара. Задача Коши (2.25) с $t\equiv x_n$ для уравнения Лапласа (1.26) не регулярна в $U^{(r)}$. Действительно, для общего решения $u\in U^{(r)}$ уравнения согласно (1.9),

$$\tilde u(\xi', x_n)=C_1(\xi')e^{-|\xi'|x_n}+C_2(\xi')e^{|\xi'|x_n}=$$

$$=A(\xi')\operatorname{ch}|\xi'|x_n+B(\xi')\operatorname{sh}|\xi'|x_n. \tag{4.3}$$

Подставляя в (2.25), находим $A(\xi')=\tilde u_0(\xi')$ и $B(\xi')=\tilde u_1(\xi')/|\xi'|$, откуда

$$\tilde u(\xi', x_n)=\tilde u_0(\xi')\operatorname{ch}|\xi'|x_n+\tilde u_1(\xi')\frac{\operatorname{sh}|\xi'|x_n}{|\xi'|}. \tag{4.4}$$

Если взять $\tilde u_1(\xi')\equiv 0$, то $\tilde u(\cdot, x_n)\notin\tilde H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ при $x_n>0$, например, для $\tilde u_0(\xi')\equiv 1$ или $\tilde u_0(\xi')\equiv(1+|\xi'|^2)^{-N}$ при любом $N>0$. Соответственно задача Коши (2.25) для уравнения Лапласа при $u_1(x')\equiv 0$ не имеет решения $u\in\tilde U^{(r)}$ для $u_0(x')=\delta(x')$ или $u_0(x')=F^{-1}_{\xi'\to x'}(1+|\xi'|^2)^{-N}$.

Отметим, что последняя функция $u_0(x')$ имеет $2N-n$ непрерывных производных при $2N-n>0$ и убывает быстрее любой степени $|x'|$ при $|x'|\to\infty$.

Замечание 4.2. Если задача Коши для оператора P регулярна в $U_\alpha^{(r)}$, $r\geqslant\nu-1$, при некотором $\alpha\in\mathbf{R}$, то из (3.1) вытекает (3.5). Тогда и в $U^{(r)}$ эта задача Коши также регулярна. В частности, задача Коши для оператора P регулярна в $U^{(r)}$, $r\geqslant\nu-1$, при условиях предложения 3.2 (например, для гиперболических по Гордингу или параболических по Петровскому операторов P (см. следствие 3.1)).

Таким образом, рассмотрение пространства решений $U^{(r)}$ вместо $U_\alpha^{(r)}$ не приводит к новым примерам регулярных краевых задач.

§ 5. Корректные и непрерывные краевые задачи в полупространстве

5.1. Корректные краевые задачи. Пусть имеются некоторые нормированные пространства $H\subset U^{(r)}$, $r\geqslant\bar m$ и $H^j\subset H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ при $j=1,\ldots,l$. Обозначим $\mathscr{H}=H^1\oplus\ldots\oplus H^l$.

Определение 5.1. Краевая задача (1.1), (2.2) называется *корректной* в пространствах $H, H^1,\ldots,H^l$, если

1) при всех $f_j\in H^j$ она имеет единственное решение $u\equiv\mathscr{R}(f_1,\ldots,f_l)\in H$.

2) Отображение $\mathscr{R}:\mathscr{H}\to H$ непрерывно, т. е.

$$\|u\|_H\leqslant C\sum_{j=1}^{l}\|f_j\|_{H^j}. \tag{5.1}$$

Введем нормированное пространство

$$C_\alpha(0,\infty; H_s)\equiv\{u\in C(0,\infty; H_s): \|u\|_{s,\alpha}\equiv$$

$$\equiv\sup_{x_n>0}e^{-\alpha x_n}\|u(\cdot, x_n)\|_s<\infty\};\quad H_s\equiv H_s(\mathbf{R}^{n-1}). \tag{5.2}$$

Предложение 5.1. Все рассмотренные в §§ 2, 3 краевые задачи, регулярные в $U_\alpha^{(r)}$, являются корректными в пространствах $H\equiv C_\alpha(0,\infty; H_s)$ и $H^j=H_{s_j}\equiv H_{s_j}(\mathbf{R}^{n-1})$ для любых $s_j\in\mathbf{R}$ при $s\leqslant s_j$.

Доказательство. Для рассмотренных в §§ 2, 3 краевых задач, регулярных в $U_\alpha^{(r)}$, справедлива следующая оценка: для любых $s_j\in\mathbf{R}$ при $s\leqslant s_j$

$$\|u\|_{s,\alpha}\leqslant C\sum_j\|u_j\|_{s_j}. \tag{5.1'}$$

Например, для $\alpha=0$ такая оценка получается рассуждениями (2.15)—(2.21) (при $j=0$). Для $\alpha\neq 0$ оценки вида (5.1′) доказываются точно так же. Например, для задачи Коши при условиях предложения 3.2 оценка вида (5.1′) получена в (3.13).

Оценка (5.2) означает ограниченность оператора $\mathscr{R}$. Поскольку $\mathscr{R}$ — линейный оператор, то он также и непрерывен.

5.2. Непрерывные корректные краевые задачи. Обозначим через $\mathfrak{A}: U^{(r)}\to[H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})]^l$ оператор, соответствующий краевой задаче (1.1), (2.2):

$$\mathfrak{A}u=(\gamma B_1u,\ldots,\gamma B_lu),\quad u\in U^{(r)},\ r\geqslant\bar m;\quad (\gamma u)(x')\equiv u(x', 0+),$$
$$u\in U^{(0)}. \tag{5.3}$$

Особый интерес представляют краевые задачи, которые корректны в некоторых пространствах $H, H^1,\ldots,H^l$ и для которых оператор $\mathfrak{A}: H\to\mathscr{H}\equiv H^1\oplus\ldots\oplus H^l$ непрерывен. Дело в том, что оператор $\mathscr{R}:\mathscr{H}\to H$ является правым обратным к оператору $\mathfrak{A}$, и он непрерывен, ввиду корректности краевой задачи. Поэтому оператор $\mathfrak{A}+\delta$ также имеет непрерывный правый обратный $\mathcal{B}_\delta:\mathcal{H}\to H$, если оператор $\mathfrak{A}$ непрерывен, а $\delta:H\to\mathcal{H}$, имеет достаточно малую норму. Грубо говоря, краевая задача остается корректной при малых возмущениях операторов P, B_j в рассматриваемых функциональных пространствах. Это позволяет строить теорию краевых задач для дифференциальных операторов с переменными мало меняющимися коэффициентами, а затем и с более общими (C^∞ и т. п.). На этом основан метод замораживания коэффициентов [2], [11].

Укажем условия корректности краевых задач (1.1), (2.2), непрерывных в пространствах

$$\begin{cases} H\equiv H^{(r)}_{\alpha,s}\equiv\{u\in U^{(r)}:\|u\|^{(r)}_{\alpha,s}\equiv \sup\limits_{\substack{x_n>0\\ i<r}} e^{-\alpha x_n}\|\partial^i_{x_n}u(\cdot,x_n)\|_{s-i\mu}<\infty\},\\ H^j\equiv H_{s-\mu_j}(\mathbf{R}^{n-1}),\ j=1,\ldots,l. \end{cases} \tag{5.4}$$

Непрерывность оператора $\mathfrak{R}:H\to\mathcal{H}$ при $\forall s\in\mathbf{R}$ в таких пространствах вытекает из теоремы 3.1 главы 2, если $\mu=1$, $\mu_j=m_j$, $r\geqslant\overline{m}$.

Обозначим через $\lambda_k{}^0$ корни характеристического уравнения (1.6), соответствующие старшей части $P_m(\partial_x)$ оператора $P(\partial_x)$, и через

$$B^0_j(\partial_x)=\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}\partial^\alpha_x \tag{5.5}$$

— старшую часть оператора $B_j(\partial_x)$.

Предложение 5.2. Пусть граница $x_n=0$ не является характеристической для оператора P и для краевой задачи (1.1), (2.2) выполняются условия (3.1), (2.6″) и *условие Шапиро—Лопатинского* [27]

$$\det B^0_j(-i\xi',\lambda^0_k(\xi'))^l_{j,k=1}\neq 0 \text{ при } |\xi'|=1,\ \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{5.6}$$

Тогда краевая задача (1.1), (2.2) корректна в пространствах (5.4) при $\mu=1$, $\mu_j=m_j$, $r\geqslant\overline{m}$ и $\forall s\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Из нехарактеристичности границы $x_n=0$, по лемме 1.1, получаем, что

$$B_j(-i\xi',\lambda_k(\xi'))=B^0_j(-i\xi',\lambda^0_k(\xi'))+o(|\xi'|^{m_j}) \text{ при } |\xi'|\to\infty. \tag{5.7}$$

Отсюда, ввиду (1.15′) и в силу (5.6), вытекает, что

$$\det B_{jk}(\xi')|\sim|\det B^0_j(-i\xi',\lambda^0_k(\xi'))|\sim|\xi'|^{m_1+\cdots+m_l},\ |\xi'|\to\infty. \tag{5.8}$$

Следовательно, ввиду (2.6″), для элементов обратной матрицы $B^{-1}(\xi')$ справедлива асимптотика

$$|B^{-1}_{kj}(\xi')|\sim(1+|\xi'|)^{-m_j},\quad |\xi'|\to\infty. \tag{5.9}$$

Поэтому из (2.8) следует, что

$$|C_k(\xi')|\leqslant C\sum_{j=1}^l(1+|\xi'|)^{-m_j}|\tilde f_j(\xi')|. \tag{5.10}$$

Но из (1.12′) вытекает оценка

$$|\tilde u(\xi',x_n)|\leqslant C\sum_{k=1}^l|C_k(\xi')|e^{\alpha x_n}, \tag{5.11}$$

поэтому из (5.10) получаем, что

$$\sup_{x_n>0} e^{-\alpha x_n}\|u(\cdot,x_n)\|_s\leqslant C\sum_{j=1}^l\|f_j\|_{s-m_j}. \tag{5.11′}$$

Аналогично, из (1.12′) вытекает оценка

$$|\partial^i_{x_n}\tilde u(\xi',x_n)|\leqslant C\sum_{k=1}^l|\lambda^i_k(\xi')|\cdot|C_k(\xi')|e^{\alpha x_n}. \tag{5.12}$$

Поэтому из (5.10) получаем, ввиду (1.21) и (1.15′), что

$$\sup_{x_n>0} e^{-\alpha x_n}\|\partial^i_{x_n}u(\cdot,x_n)\|_{s-i}\leqslant C\sum_{j=1}^l\|f_j\|_{s-m_j}. \tag{5.13}$$

Это предложение допускает обобщение также на параболические по Петровскому операторы P. А именно, если оператор P является β-параболическим по Петровскому, то модифицируем (5.5). Предполагая, что $b_{j\alpha}=0$ при $|\alpha'|+\beta\alpha_n>\beta\nu^j$, положим

$$B^0_j(\partial_x)\equiv\sum_{|\alpha'|+\beta\alpha_n=\beta\nu^j} b_{j\alpha}\partial^\alpha_x. \tag{5.14}$$

Тогда из теоремы 3.1 главы 2 вытекает непрерывность оператора $\mathfrak{A}$ в пространствах (5.4), в которых нужно взять $\mu=\beta$ и $\mu_j\beta\nu^j$, $r\geqslant\overline{\nu}=\max\nu^j$.

Предложение 5.2′. Пусть оператор P является β-параболическим по Петровскому, и выполняются условия (2.6″) и (5.6), где $\lambda_k{}^0(\xi')$ — корни уравнения (1.34). Тогда краевая задача (1.1), (2.2) корректна в пространствах (5.4) при $r\geqslant\overline{\nu}$ и $\forall s\in\mathbf{R}$, $\mu=\beta$, $\mu_j=\beta\nu_j$.

Доказательство этого предложения почти совпадает с доказательством предыдущего. Нужно лишь вместо (1.15′) и (1.21) использовать (1.36) и (1.37′) соответственно.

Следствие 5.1. Пусть выполнено условие (1.8′) и аналогично, пусть

$$\lambda^0_k(\xi')\neq\lambda^0_j(\xi') \text{ при } k\neq j,\quad |\xi'|=1,\quad \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{5.15}$$

Тогда задача Коши для гиперболического (или β-параболического) по Петровскому оператора $P(\partial_x)$ является корректной в пространствах (5.4) при $r\geqslant m-1$, $\mu=1$, $\mu_j=j-1$ (или $\mu=\beta$, $\mu_j=\beta(j-1)$). Действительно, условия (2.6″) и (5.6) выполняются, ввиду (2.10).

Аналогично, при условиях (1.8′), (5.15) для эллиптического оператора $P(\partial_x)$ задача Дирихле (определение 3.1) является корректной в пространствах (5.4) при $n\geqslant 3$ и $r\geqslant \frac{m}{2}-1$, $\mu=1$, $\mu_j=j-1$, если $\bar{\alpha}_l\leqslant\alpha_{l+1}$ и $\bar{\alpha}\in[\alpha_l, \alpha_{l+1}]$. Исследованию корректности краевых задач в самых разнообразных пространствах посвящена обширная литература. В [20] имеется подробное изложение результатов по регулярности и корректности задачи Коши для общих дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классах функций растущих как $e^{a|x|^b}$ при различных a и b. В [20] указаны точные границы показателей роста a и b решения $u(x)$ и начальных данных, при которых задача Коши регулярна и корректна.

Основополагающие результаты по корректности задачи Коши в пространствах типа L_2 были получены в [32], [60].

§ 6. Ядро Пуассона краевой задачи в полупространстве

6.1. Ядро Пуассона и фундаментальное решение краевой задачи.

Определение 6.1. *Фундаментальным решением краевой задачи* (1.1), (2.2) называется векторная функция $E(x)=(E_k(x))_{k=1,\ldots,l}$, где $E_k\in U^{(r)}$ — решения краевых задач в $\mathbf{R}^n_+$

$$\begin{cases} P(\partial_x)E_k(x)=0, \ x_n>0, \ x'\equiv(x_1, \ldots, x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}, \\ \gamma B_jE_k(x)=\delta_{jk}\delta(x'), \ j=1, \ldots, l, \end{cases} \tag{6.1}$$

где δ_{jk}—δ-символ Кронекера, а $\delta(x')=\delta_{n-1}(x')$ — δ-функция в $\mathbf{R}^{n-1}$.

Если краевая задача (1.1), (2.2) регулярна в $U^{(r)}_\alpha$, $r\geqslant\bar{m}$, при некотором α, то для каждого $k=1, \ldots, l$ такая функция $E_k\in U^{(r)}_\alpha$ существует $\left(\text{поскольку } \delta(x')\in H_s(\mathbf{R}^{n-1}) \text{ при } s<-\frac{n-1}{2}\right)$ и единственна.

Определение 6.2. *Ядром Пуассона краевой задачи* (1.1), (2.2) называется векторная функция

$$\mathcal{P}(x; y')=E(x'-y'; x_n), \ x_n>0, \ x', y'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{6.2}$$

Отметим, что $\mathcal{P}(x; y')\in U_d^{(r)}\subset\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n_+)$ при $\forall y'\in\mathbf{R}^{n-1}$. Из (6.1) следует, что $\mathcal{P}_k(x, y')\equiv E_k(x'-y'; x_n)$ при $\forall y'\in\mathbf{R}^{n-1}$ есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} P(\partial_x)\mathcal{P}_k(x, y')=0, \ x_n>0, \\ \gamma B_j(\partial_x)\mathcal{P}_k(x, y')=\delta_{jk}\delta(x'-y'), \quad j=1, \ldots, l, \end{cases} \tag{6.3}$$

где y' играет роль параметра.

Предложение 6.1. Пусть краевая задача (1.1), (2.2) регулярна в $U^{(r)}_\alpha$, $r\geqslant\max m, \bar{m})$. Тогда ее решение u при произвольных граничных данных $f_j(x')\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ выражается по формуле (здесь $F=(f_1, \ldots, f_l)$):

$$u(x', x_n)=E(\cdot, x_n)*F\equiv\sum_k E_k(\cdot, x_n)*f_k(\cdot)=$$
$$=\sum_k \langle E_k(x'-y'; x_n), f_k(y')\rangle. \tag{6.4}$$

Доказательство. Для функции (6.4) при $\alpha_n\leqslant m$

$$\partial^{\alpha_n}_{x_n}u(x', x_n)=\sum_k \langle \partial^{\alpha_n}_{x_n}E_k(x'-y', x_n), f_k(y')\rangle=$$
$$=\sum_k\left(\partial^{\alpha_n}_{x_n}E_k(\cdot, x_n)*f_k(\cdot)\right)(x'), \tag{6.5}$$

поскольку $E_k\in C^{(r)}(0, \infty; H_s)$ при некотором $s\in\mathbf{R}$, $r\geqslant m$. Поэтому из свойства (1.47) главы 1 свертки и (6.1) получаем, что

$$P(\partial_x)u(x', x_n)=\sum_k((PE_k)(\cdot, x_n)*f_k(\cdot))(x')=0 \quad \text{при} \quad x_n>0. \tag{6.6}$$

Аналогично,

$$\gamma\bar{B}_ju(x')=\sum_k\gamma B_jE_k*f_k=\delta_{n-1}*f_j=f_j. \tag{6.7}$$

Отметим, что через ядро Пуассона (6.2) формула (6.4) для решения краевой задачи записывается так:

$$u(x', x_n)=\langle\mathcal{P}(x; y'), F(y')\rangle\equiv\sum_k\langle\mathcal{P}_k(x, y'), f_k(y')\rangle. \tag{6.8}$$

6.2. Связь фундаментального решения задачи Коши с запаздывающим фундаментальным решением оператора $P(\partial_x)$.

Пусть для некоторого оператора $P(\partial_x)$ порядка ν по ∂_{x_n} задача Коши регулярна в $U^{(r)}$, $r\geqslant\nu-1$, и $p_{(\nu)}\equiv\text{const}\neq0$ $p_{(j)}=0$ при $1\leqslant j\leqslant\nu-1$, в (1.6). Тогда эта задача Коши имеет фундаментальное решение $E(x)\in[C^{(\nu-1)}(0, \infty; H_s(\mathbf{R}^{n-1}))]^\nu$ при некотором $s\in\mathbf{R}$. Система (6.1) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} p_{(\nu)}\dfrac{\partial^\nu E_x}{\partial x_n^\nu}+p_{(0)}(i\partial_{x'})E_k=0, \quad x_n>0, \ x'\in\mathbf{R}^{n-1}, \\ \gamma\partial^{j-1}_{x_n}E_k=\delta_{jk}\delta(x'), \ j=1, \ldots, \nu. \end{cases} \tag{6.9}$$

Определим обобщенную функцию $\mathcal{E}(x)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ по формуле

$$\mathcal{E}(x', x_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{p_{(\nu)}}E_\nu(x', x_n), \ x_n>0, \\ 0, \ x_n<0,\end{cases}$$

т. е.

$$\langle\mathcal{E}, \varphi\rangle\equiv\int_a^\infty\frac{1}{p_{(\nu)}}\langle E_\nu(\cdot, x_n), \varphi(\cdot, x_n)\rangle, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n). \tag{6.10}$$

Тогда $\mathscr{E}(x)$ является *запаздывающим*, т. е. равным нулю при $x_n<0$, фундаментальным решением оператора P: $P(\partial_x)\mathscr{E}(x)=\delta(x)$. Это вытекает из (6.9), аналогично лемме 1.1 главы 1. Обратно, через функцию $\mathscr{E}(x)$ из (6.10) фундаментальное решение $E(x)$ выражается по формулам

$$E_k(x)=\partial_{x_n}^{\nu-k}E_\nu=p_{(\nu)}\partial_{x_n}^{\nu-k}\mathscr{E}(x),\quad x_n>0;\quad 1\leqslant k\leqslant\nu-1. \qquad (6.11)$$

Действительно, функция

$$\hat{E}_k(x', x_n)=\partial_{x_n}^{\nu-k}t_1,\quad 2\leqslant k\leqslant\nu, \qquad (6.12)$$

принадлежит классу $U^{(r)}$, $r\geqslant\nu-1$, и является решением задачи (6.9), как и E_k. Поэтому $\hat{E}_k=E_k$, в силу регулярности задачи Коши. Отсюда вытекает (6.11).

Итак, фундаментальное решение задачи (6.9) выражается формулами (6.11) через запаздывающие фундаментальное решение (6.10) оператора $P(\partial_x)$. Априори запаздывающее фундаментальное решение оператора $P(\partial_x)$ может быть неединственным. Поэтому возникает вопрос о методах выделения функции (6.10) из множества всех запаздывающих фундаментальных решений. Например, для гиперболических по Гордингу операторов функция (6.10) выделяется следующим образом.

Предложение 6.2. Для гиперболического по Гордингу оператора P запаздывающее фундаментальное решение (6.10) имеет носитель в некотором конусе $|x'|\leqslant Ax_n$ и такое фундаментальное решение единственно.

Доказательство. Из (6.10), (6.9) и (3.9) вытекает, что

$$\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)=\frac{1}{p_{(\nu)}}\tilde{E}_\nu(\xi', x_n)=\frac{1}{p_{(\nu)}}e^{Q(-i\xi')x_n}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad (6.13)$$

$$\xi'\in\mathbf{R}^{n-1},\quad x_n\geqslant 0;\quad \nu=m.$$

Поэтому $\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)$ при $\forall x_n>0$ — целая функция от $\xi'\in\mathbf{C}^{n-1}$. Кроме того, собственные числа матрицы $Q(-i\xi')$, ввиду (3.10), равны $\lambda_k(\xi')$. Наконец, в силу гиперболичности по Гордингу, из леммы 1.1 получаем, что

$$|\operatorname{Re}\lambda_k^0(\xi')|\sim|\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')|\leqslant A(|\operatorname{Im}\xi'|+1)\ \text{при}\ \xi'\in\mathbf{C}^{n-1}.$$

Поэтому из (6.13), в силу оценки из [20], [37], получаем, аналогично (3.11), что при $x_n>0$

$$|\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)|\leqslant C\,\|e^{Q(-i\xi')x_n}\|\leqslant Ce^{A|\operatorname{Im}\xi'|x_n}(1+x_n\,\|Q(-i\xi')\|)^{\nu-1},$$
$$\xi'\in\mathbf{C}^{n-1}. \qquad (6.14)$$

Отсюда, по теореме 5.1 главы 2, $\operatorname{supp}\mathscr{E}(\cdot, x_n)\subset\{x'\in\mathbf{R}^{n-1} : |x'|\leqslant Ax_n\}\Rightarrow\operatorname{supp}\mathscr{E}\subset Q\equiv\{x\in\mathbf{R}^n : |x'|\leqslant Ax_n\}$. Остается доказать единственность фундаментального решения $\mathscr{E}$ с носителем в конусе Q. Но это очевидно: если $P\mathscr{E}_1=\delta(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, и $\operatorname{supp}\mathscr{E}_1\subset Q$, то

$$\mathscr{E}=(P\mathscr{E})*\mathscr{E}_1=\mathscr{E}*(P\mathscr{E}_1)=\mathscr{E}, \qquad (6.15)$$

согласно формуле (1.47) главы 1, поскольку свертка $\mathscr{E}*\mathscr{E}_1$ определена.

Следствие 6.1. Для волнового уравнения (1.6) главы 1 в $\mathbf{R}^k$ фундаментальное решение $E_{(k)}$ задачи Коши (2.21), согласно (6.11), имеет вид

$$E_{(1)}(x, t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\delta(at-|x|)\\ \frac{1}{2a}\theta(at-|x|)\end{pmatrix},\quad E_{(2)}(x, t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_2^+(x, t)\\ \mathscr{E}_2^+(x, t)\end{pmatrix},$$

$$E_{(3)}(x, t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_3^+(x, t)\\ \mathscr{E}_3^+(x, t)\end{pmatrix},$$

где $\mathscr{E}_2^+$ и $\mathscr{E}_3^+$ — функции из (1.6′) главы 1. Соответственно, решение (6.4) такой задачи Коши при $k=1$ выражается *формулой Даламбера*

$$u(x, t)=\frac{1}{2}(u_0(x-at)+u_0(x+at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}u_1(y)\,dy$$

$$\forall u_0,\ u_1\in C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

и аналогично при $k=2, 3$ — это, соответственно, *формулы Пуассона и Кирхгофа*

$$u(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}\langle\,\mathscr{E}_k^+(x-y, t),\ u_0(y)\,\rangle+\langle\,\mathscr{E}_k^+(x-y, t),\ u_1(y)\,\rangle$$

$$\forall u_0,\ u_1\in C_0^\infty(\mathbf{R}^k).$$

Для параболических по Петровскому уравнений функция (6.10) выделяется следующим образом.

Предложение 6.3. ([39]). Для $2b$-параболического по Петровскому оператора $P(\partial_x)$ запаздывающее фундаментальное решение (6.10) является гладкой функцией при $x\neq 0$, удовлетворяющей оценкам: $\forall\alpha$

$$|\partial_x^\alpha\mathscr{E}(x)|\leqslant C_\alpha x_n^{\nu-\alpha_0-1-\frac{n-1+|\alpha|}{2b}}e^{-\left(\frac{|x'|^{2b}}{x_n}\right)^{\frac{1}{2b-1}}},\quad x_n>0. \qquad (6.16)$$

Такое фундаментальное решение единственно.

Оценки (6.16) доказаны в [39], а единственность доказывается как в (6.15).

Следствие 6.2. Для уравнения теплопроводности (1.31) фундаментальное решение задачи Коши совпадает с функцией (2.8′) главы 1 и решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^k}\int e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}u_0(y)\,dy \quad \forall u_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^k), \quad t>0.$$

Для решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера (1.38) из (2.34) получается аналогичная формула:

$$\psi(x, t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi i t})^k}\int e^{\frac{i|x-y|^2}{4a^2t}}\psi_0(y)\,dy,$$

т. е. фундаментальным решением задачи Коши для уравнения Шрёдингера является функция (2.9′) главы 1.

§ 7. Краевые задачи в полупространстве для неоднородных уравнений

7.1. Неоднородные уравнения в полупространстве. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$P(\partial_x)v(x)=f(x), \quad x_n>0, \tag{7.1}$$

где $f\in U_\alpha^{(r-\nu)+}$ при некоторых α, r. Построим частное решение v этого уравнения в классе $U_\alpha^{(r)}$.

Предложение 7.1. Пусть $p_{(\nu)}\equiv\mathrm{const}\neq 0$ в (1.6) и $\bar{\alpha}_\mu<\underline{\alpha}_{\mu+1}$ при некотором $\mu\leqslant\nu$. Тогда для $\alpha\in]\bar{\alpha}_\mu, \underline{\alpha}_{\mu+1}[$ уравнение (7.1) при $f(x)\in U_\alpha^{(r-\nu)+}$ имеет решение $v\in U_\alpha^{(r)}$.

Доказательство. Функцию $f\in U_\alpha^{(r-\nu)+}$ можно продолжить на $x_n<0$ до функции $Lf(x)\in C^{(r-\nu)+}(-\infty, \infty; H_s(\mathbf{R}^{n-1}))$ при некотором $s\in\mathbf{R}$ так, чтобы

$$Lf(\cdot, x_n)=f(\cdot, x_n) \text{ при } x_n>0, \quad Lf(\cdot, x_n)=0 \text{ при } x_n<-1,$$

$$\left\|\partial_{x_n}^j Lf(\cdot, x_n)\right\|_s\leqslant Ce^{\alpha x_n}, \quad x_n\in\mathbf{R}, \quad j\leqslant(r-\nu)_+. \tag{7.2}$$

Для этого можно использовать *оператор продолжения Стейна* [11].

Построим $Lv\in C^{(r)}(0, \infty; H_s(\mathbf{R}^{n-1}))$, решение уравнения

$$P(\partial_x)Lv(x)=Lf(x), \quad x\in\mathbf{R}^n, \tag{7.3}$$

для которого при некоторых $s_j\ll s$

$$\|\partial_{x_n}^j Lv(\cdot, x_n)\|_{s_j}\leqslant Ce^{\alpha x_n}, \quad x_n>0, \quad j\leqslant r. \tag{7.4}$$

Тогда $v\equiv Lv|_{x_n>0}\in U_\alpha^{(r)}$ и является решением уравнения (7.1).

После касательного преобразования Фурье (7.3) переходит в

$$P(-i\xi', \partial_{x_n})\widetilde{Lv}(\xi', x_n)=\widetilde{Lf}(\xi', x_n), \quad x_n\in\mathbf{R} \text{ п. в. } \xi'\in\mathbf{R}^{n-1}. \tag{7.5}$$

При $\forall\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$ оператор $P(-i\xi', \partial_{x_n})$ имеет символ

$$P(-i\xi', -i\xi_n)\neq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\xi_n\in]\bar{\alpha}_\mu, \underline{\alpha}_{\mu+1}[. \tag{7.6}$$

Поэтому функция

$$\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)\equiv F^{-1}_{\xi_n\to x_n}\left(\frac{1}{P(-i\xi', -i\xi_n)}\Big|_{\operatorname{Im}\xi_n=\alpha}\right) \tag{7.7}$$

при $\alpha\in]\bar{\alpha}_\mu, \underline{\alpha}_{\mu+1}[$ является фундаментальным решением оператора $P(-i\xi', \partial_{x_n})$. Из (7.6) следует, что $\forall\varepsilon>0$

$$|\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n)|\leqslant\begin{cases}C_\varepsilon e^{(\underline{\alpha}_{\mu+1}-\varepsilon)x_n}, & x_n<0,\\ C_\varepsilon e^{(\bar{\alpha}_\mu+\varepsilon)x_n}, & x_n>0,\end{cases} \tag{7.8}$$

где C_ε не зависит от ξ'. Эти оценки вытекают из разложения

$$P(-i\xi)=p_{(\nu)}(-i\xi_n-\lambda_1(\xi'))\ldots(-i\xi_n-\lambda_\nu(\xi')), \tag{7.9}$$

поскольку $p_{(\nu)}\neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')<\bar{\alpha}_\mu+\varepsilon$ при $k\leqslant\mu$ и $\operatorname{Re}\lambda_k(\xi')>\underline{\alpha}_{\mu+1}-\varepsilon$ при $k\geqslant\mu+1$. Пусть, для простоты, $\nu\geqslant 1$.

Определим функцию $\widetilde{Lv}(\xi', x_n)$ формулой

$$\widetilde{Lv}(\xi', x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\mathscr{E}}(\xi', x_n-y_n)\widetilde{Lf}(\xi', y_n)\,dy_n=$$

$$=F^{-1}_{\xi_n\to x_n}\left(\frac{F_{x_n\to\xi_n}(\widetilde{Lf})}{P(-i\xi', -i\xi_n)}\Big|_{\operatorname{Im}\xi_n=\alpha}\right). \tag{7.10}$$

Здесь интеграл понимается как интеграл по Бохнеру от функции параметра y_n со значениями в $\tilde{H}_s(\mathbf{R}^{n-1})$. Сходимость этого интеграла Бохнера следует из (7.8) и (7.2):

$$\|\widetilde{Lv}(\cdot, x_n)\|_{\tilde{H}_s}\leqslant\int_{-\infty}^{x_n}C_\varepsilon e^{(\bar{\alpha}_\mu+\varepsilon)(x_n-y_n)}e^{\alpha y_n}dy_n+$$

$$+\int_{x_n}^{+\infty}C_\varepsilon e^{(\underline{\alpha}_{\mu+1}-\varepsilon)(x_n-y_n)}e^{\alpha y_n}dy_n\leqslant C_\varepsilon^1 e^{\alpha x_n}, \tag{7.11}$$

если $\alpha\in]\bar{\alpha}_\mu+\varepsilon, \underline{\alpha}_{\mu+1}-\varepsilon[$. Очевидно, функция

$$Lv(x', x_n)\equiv F^{-1}_{\xi'\to x'}\widetilde{Lv}(\xi', x_n)$$

удовлетворяет уравнению (7.3); оценки (7.4) для нее доказываются аналогично (7.11).

7.2. Краевые задачи для неоднородных уравнений. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} P(\partial_x)\,u(x)=f(x), & x_n>0,\\ \gamma B_j(\partial_x)\,u(x')=f_j(x'), & x'\in\mathbf{R}^{n-1};\ j=1,\ldots,l. \end{cases} \tag{7.12}$$

Предложение 7.2. Пусть α и оператор P удовлетворяют условиям предложения 7.1 и краевая задача (1.1), (2.2) регулярна в $U_\alpha^{(r)}$, $r\geqslant \bar{m}$. Тогда краевая задача (7.12) при любых $f\in U_\alpha^{(r-\nu)+}$ и $f_j\in H_{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ имеет единственное решение $u\in U_\alpha^{(r)}$.

Доказательство. Пусть $u\in U_\alpha^{(r)}$ является решением задачи (7.1) и $v\in U_\alpha^{(r)}$ — решение уравнения (7.1), построенное в предложении 7.1. Тогда $w\equiv u-v\in U_\alpha^{(r)}$ и является решением задачи

$$\begin{cases} Pw=0, & x_n>0\\ \gamma B_jw=g_j\equiv f_j-\gamma B_jw, & j=1,\ldots,l. \end{cases} \tag{7.13}$$

Решение $w\in U_\alpha^{(r)}$ этой задачи существует и единственно в силу регулярности задачи (1.1), (2.2) в $U_\alpha^{(r)}$.

Замечание 7.1. Условиям предложения 7.2 удовлетворяют

а) ввиду следствия 3.1, — задача Коши для гиперболического по Гордингу или параболического по Петровскому оператора P при $\alpha>\bar{\alpha}_\nu$ и $r\geqslant\nu-1$, и

б) ввиду предложения 3.3, — также задача Дирихле для эллиптического оператора $P(\partial_x)$ порядка $m=2l$ при $n\geqslant 3$, если $\bar{\alpha}_l<\alpha<\underline{\alpha}_{l+1}$, $r\geqslant l-1$.

Глава 6

РЕЗКИЕ И ДИФФУЗНЫЕ ФРОНТЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Гиперболические уравнения образуют широкий класс линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Самый известный представитель этого класса — волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k^2\sum\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}=0,$$

описывающее распространение волн со скоростью k; по аналогии с ним решения произвольных гиперболических уравнений также называются волнами. Элементарная волна, возникающая из точечного мгновенного возмущения, имеет особенность на некотором конусе в пространстве-времени — так называемом

[1] Эта глава написана В. А. Васильевым.

волновом фронте — аналитична вне него и равна нулю вне его выпуклой оболочки. Например, фронт волнового уравнения задается условиями $k^2t^2=\Sigma z_i^2$, $t\geqslant 0$. Предмет настоящей главы — качественное поведение волны при приближении к ее фронту.

Уже в случае волновых уравнений видны различные возможности такого качественного поведения. Так, в нашем четырехмерном пространстве-времени (и в любом другом $2l$-мерном, $l\geqslant 2$) сигнал заметен лишь одно мгновение, когда он проходит мимо наблюдателя. Напротив, в нечетномерном случае сигнал

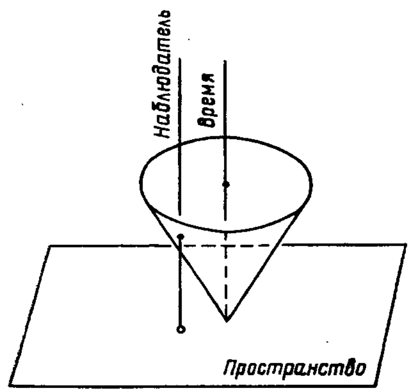

Рис. 1

продолжает звучать все время после момента встречи t_0 (с интенсивностью, пропорциональной $1/\sqrt{t^2-t_0^2}$). Первое обстоятельство позволяет нам общаться с помощью звука, второе обусловливает тот факт, что «акустический слой» в океане, являясь прекрасным проводником отдельных сигналов, непригоден для передачи сколько-нибудь сложной информации. Оба варианта поведения звуковых волн имеют аналоги для произвольных гиперболических уравнений: на языке общей теории говорят, что в первом случае внутренняя компонента дополнения к фронту является лакуной, а во втором имеется диффузия волн со стороны такой компоненты; внешняя компонента является лакуной для любых размерностей (и любых гиперболических уравнений).

§ 1. Основные понятия

1.1. Гиперболические операторы. Пусть дано линейное пространство $\mathbf{R}_x^n$ с координатами x_i, $i=1,\ldots,n$, и P — *дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами* на $\mathbf{R}_x^n$, то есть конечная сумма вида

$$\Sigma P_\alpha (v - i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (v - i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n},$$

где P_α — константы, занумерованные мультииндексами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Такому оператору соответствует его *характеристический полином*

$$P = \Sigma P_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n},$$

от координат ξ_i некоторого n-мерного пространства $\mathbf{R}_\xi^n$. Это пространство $\mathbf{R}_\xi^n$ полезно рассматривать как пространство, двойственное к $\mathbf{R}_x^n$, причем спаривание между этими пространствами производится по формуле $\langle (\xi_1, \ldots, \xi_n), (x_1, \ldots, x_n) \rangle = \Sigma \xi_i x_i$. Порядок оператора P обозначается через $\deg P$.

Для оператора P можно поставить задачу Коши в полупространстве $x_1 \geqslant 0$. Выбор этого полупространства делает координату x_1 важнее остальных (в случае волнового уравнения x_1 — это время); соответственно, в двойственном пространстве $\mathbf{R}_\xi^n$ при этом выделяется орт $\vartheta = (1, 0, \ldots, 0)$.

Пусть $\bar{P}$ — главная (старшей степени) однородная составляющая полинома P. Уравнение $\bar{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ выделяет в $\mathbf{C}_\xi^n$ коническую гиперповерхность $A = A(P)$; ее вещественная часть $A \cap \mathbf{R}_\xi^n$ называется *характеристическим конусом* для P и обозначается через $\operatorname{Re} A$.

Определение 1.1. Оператор P называется *гиперболическим по Петровскому* (или *строго гиперболическим*), если множество $\operatorname{Re} A$ неособо вне точки 0 и любая прямая в $\mathbf{R}_\xi^n$, параллельная орту ϑ и не проходящая через 0, пересекает $\operatorname{Re} A$ ровно в $\deg P$ различных точках.

Пример 1.1. 1) Волновой оператор.

2) Любой оператор в $\mathbf{R}^2$, при условии что $P(\vartheta) \neq 0$.

3) Невырожденная кубическая кривая в $\mathbf{RP}^2$ может иметь две или одну компоненту (и изображается либо обеими линиями на рис. 2 а, либо лишь правой из них). Соответствующий полином третьей степени в $\mathbf{R}_\xi^3$ во втором случае никогда не гиперболичен, а в первом гиперболичен в точности тогда, когда орт ϑ направлен внутрь конусообразной компоненты поверхности $\operatorname{Re} A$. Многочисленные другие примеры гиперболических полиномов см. в [40].

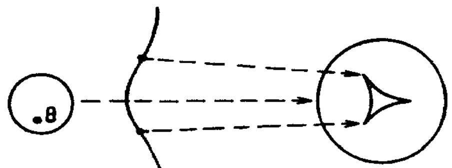

Рис. 2

В пространстве операторов данного порядка, действующих в $\mathbf{R}_x^n$, гиперболические по Петровскому операторы образуют открытую область.

Теорема 1.1 (см. [59]). Для любых натуральных k, n, множество полиномов степени k в $\mathbf{R}_\xi^n$, гиперболических по Петровскому относительно фиксированной системы координат, состоит из двух связных компонент, каждая из которых стягиваема.

1.2. Волновые фронты. Основной геометрический объект, участвующий в качественном описании решений гиперболического уравнения, — это его волновой фронт, который мы сейчас определим. Пусть ξ — произвольная точка конуса $\operatorname{Re} A$, $\xi \neq 0$. Касательную плоскость к $\operatorname{Re} A$ в этой точке будем рассматривать как подпространство в $\mathbf{R}_\xi^n$. Рассмотрим в исходном пространстве $\mathbf{R}_x^n$ множество всех векторов x, ортогональных этой плоскости и имеющих положительную первую координату x_1. Множество таких x для данной точки ξ образует луч в $\mathbf{R}_x^n$.

Определение 1.2. Объединение таких лучей по всем точкам $\xi \in \operatorname{Re} A \setminus \{0\}$ называется *волновым фронтом оператора* P и обозначается $W(P)$.

Волновой фронт может иметь особенности даже вдали от начала координат: они соответствуют точкам уплощения поверхности $\operatorname{Re} A$, то есть точкам, в которых форма кривизны $\operatorname{Re} A$ имеет ранг, меньший $n-2$. Например, проективизация волнового фронта, соответствующего кубической поверхности с рис. 2 а, изображена на рис. 2 б. При этом точки перегиба исходной кривой переходят в острия проективизации фронта (на рис. 2 а третья точка перегиба находится на бесконечности).

1.3. Теорема 1.2. (см. [40], [61]). Если оператор P гиперболичен по Петровскому, то

А) P обладает фундаментальным решением $E(P)$, носитель которого является конусом с вершиной в 0, принадлежащим полупространству $x_1 \geqslant 0$ и пересекающимся с плоскостью $x_1 = 0$ по единственной точке 0;

Б) такое фундаментальное решение $E(P)$ единственно;

В) решение $E(P)$ аналитично вне поверхности $W(P)$ и равно 0 вне выпуклой оболочки $W(P)$.

Замечание 1.1. Утверждение А теоремы 1.2 можно формализовать в виде определения (нестрого) гиперболического оператора: оператор P называется *гиперболическим*, если он обладает фундаментальным решением, носитель которого содержится в некотором конусе, таком как описано в утверждении А. Для общих гиперболических операторов также можно определить волновой фронт (см. [40]) и для них верны все утверждения теоремы 1.2. Такие операторы также имеют явную алгебраическую характеризацию (см. [40]), однако гиперболичность уже не определяется главной частью оператора: нужно знать и младшие члены. В пространстве всех операторов гиперболические, но не строго гиперболические составляют множество положительной коразмерности; оно лежит в замыкании множества строго гиперболических операторов.

1.4. Резкость, диффузия, лакуны. Пусть P — гиперболический оператор, W — его волновой фронт.

Определение 1.3. А. Имеется *голоморфная резкость* в точке y фронта W со стороны локальной (вблизи y) компоненты[1] l дополнения к W, если $E(P)$ продолжается с l до голоморфной функции в некоторой окрестности точки l. Аналогично, имеется *C^∞-резкость*, если $E(\mathbf{P})$ имеет C^∞-продолжение с компоненты l на ее замыкание l. В этих случаях компонента l называется *локальной (голоморфной или C^∞-) лакуной* оператора P вблизи y.

Б. Если со стороны l нет резкости, то говорят, что в l имеется *диффузия волн*.

В. Компонента L дополнения к фронту называется *голоморфной лакуной* (*C^∞-лакуной*), если с ее стороны имеется голоморфная (соответственно, C^∞-) резкость в любой точке ее замыкания (или, что эквивалентно, в единственной точке 0).

Г. Если в L $E(P)\equiv 0$, то L называется *сильной лакуной* (см. [40]) или просто *лакуной* (см. [61]).

Пример 1.2. Вновь рассмотрим волновой оператор

$$P_n=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k^2\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}.$$

Хорошо известно, что соответствующие фундаментальные решения $E(P_n)$ при $n=2, 3, 4$ задаются условиями $E(P_2)=\theta(kt-|z|)/2k$; $E(P_3)=\theta(kt-|z|)/2\pi k\sqrt{k^2t^2-|z|^2}$, $E(P_4)=\theta(t)\,\delta(k^2t^2-|z|^2)/2\pi h$, где θ — функция Хевисайда. Очевидно, внутренняя компонента дополнения к фронту в случае $n=4$ является сильной лакуной, в случае $n=2$ — голоморфной, но не сильной лакуной, а в случае $n=3$ имеется диффузия. Оказывается, что при росте n качественная ситуация будет такая же, как для $n=4$ при n четных, и как для $n=3$ — при n нечетных. Исключительность случая $n=2$ объясняется тем, что при этом n не превосходит порядка волнового оператора.

Для уравнения третьего порядка в $\mathbf{R}_x^2$, проективизация волнового фронта которого изображена на рис. 2б, самая внутренняя компонента является голоморфной, но не сильной лакуной, а промежуточная компонента (в которую торчат «ребра» внутренней) диффузна вблизи любой точки своей границы.

[1] Слово «компонента» всюду здесь означает «компонента линейной связности».

§ 2. Критерий Петровского

И. Г. Петровский в работе [61] связал свойство компоненты L быть лакуной с некоторым топологическим условием, которое теперь называется *критерием Петровского*. Это условие состоит в тривиальности некоторого класса гомологий — *класса Петровского* — который мы сейчас определим. Всюду в этом параграфе P — строго гиперболический оператор в $\mathbf{R}_x{}^n$.

Пусть $x\in\mathbf{R}^n_x$ — произвольная точка исследуемой компоненты L дополнения к фронту W, $X\subset\mathbf{C}^n_\xi$ — ортогональная к x гиперплоскость. Пусть $\mathbf{CP}^{n-1}_\xi$ — множество всех комплексных одномерных подпространств в $\mathbf{C}^n_\xi$. Обозначим через X^* и A^* гиперповерхности в пространстве $\mathbf{CP}^{n-1}_\xi$, получающиеся при проективизации плоскости X и конуса A. *Цикл Петровского*, который мы строим, — это некоторый $(n-2)$-мерный цикл в множестве X^*-A^*. Опишем этот цикл.

Поскольку x не принадлежит фронту, то вблизи множества $\mathbf{RP}^{n-1}_\xi$ гиперповерхности X^* и A^* пересекаются трансверсально и их пересечение гладко. Множество $X^*\cap\mathrm{Re}\,A^*$ вещественных точек этого пересечения является $(n-3)$-мерным подмногообразием в $X^*\cap A^*$. Если n четно, то это многообразие ориентируемо. В [40] определен специальный выбор его ориентации, превращающий его в цикл; цикл Петровского $B(x)\subset X^*-A^*$ определяется как образ этого цикла при трубочном отображении. (Напомним конструкцию этого отображения. Рассмотрим трубчатую окрестность в X^* множества неособых точек многообразия $X^*\cap A^*$ и как-нибудь расслоим эту окрестность на двумерные диски, трансверсальные к множеству $X^*\cap A^*$. Тогда любому циклу ∇, лежащему в гладкой части множества $X^*\cap A^*$, можно сопоставить объединение границ тех дисков, которые пересекаются с $X^*\cap A^*$ по точкам множества ∇; комплексная ориентация множеств X^*, $X^*\cap A^*$ и исходная ориентация цикла ∇ позволяют ориентировать полученную трубку).

При нечетном n цикл $B(x)$ вдали от A^* совпадает с многообразием $\mathrm{Re}\,X^*$, взятым с кратностью 2, а вблизи множества A^* раздваивается на пару контуров, обтекающих A^* в X^* с двух сторон: невещественная часть этого цикла геометрически совпадает с описанной выше трубкой в X^*-A^* вокруг многообразия $X^*\cap\mathrm{Re}\,A^*$, но две половины этой трубки, разделяемые множеством $\mathrm{Re}\,X^*$, имеют рассогласованные ориентации. В случае $n=3$ цикл $B(x)$ изображен на рис. 3, множество $A^*\cap X^*$ на нем обозначено крестиками.

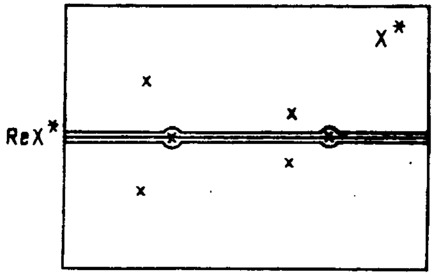

Рис. 3

Определение 2.1. Класс $\beta(x)$, определяемый циклом $B(x)$ в группе $H_{n-2}(X^*-A^*)$ гомологий пространства X^*-A^* с комплексными коэффициентами, называется *классом Петровского*, а условие $\beta(x)=0$ — *критерием Петровского*.

Легко видеть, что при $n=2$ критерий Петровского выполнен всегда, а при $n=3$ эквивалентен тому, что множество $X^*\cap A^*$ не имеет невещественных точек, см. рис. 3.

2.2. Теорема 2.1 (см. [16], [40], [61]). Если $\beta(x)=0$, то содержащая x компонента L дополнения к фронту является голоморфной лакуной для P и для всех операторов с той же главной частью $\bar{P}$ (а если вдобавок $\deg P<n$ и $P=\bar{P}$ — то и сильной лакуной). Если множество A^* гладко, то верно и обратное: если L — C^∞-лакуна, то $\beta(x)=0$ для любого $x\in L$.

Первое утверждение этой теоремы в случае однородного $P=\bar{P}$ вытекает из формулы Герглотца — Петровского — Лере: в точке $x\in L$ все частные производные $D^\nu E$ фундаментального решения $E=E(P)$ при $|\nu|>\deg P-n$ задаются интегралами некоторых дифференциальных $(n-1)$-форм $\Lambda(x,\nu,P)$, регулярных в области $\mathbf{CP}^{n-1}_\xi-X^*-A^*$, по циклу $t\beta(x)$, лежащему в этой области и получаемому из цикла $\beta(x)$ трубочной операцией $t: H_{n-2}(X^*-A^*)\to H_{n-1}(\mathbf{CP}^{n-1}_\xi-X^*-A^*)$. Следовательно, если $\beta(x)=0$, то в ограничении на L, $E(P)$ является полиномом, степень которого не больше, чем $\deg P-n$. Второе утверждение вытекает из того, что а) если L — лакуна, то $E|_L$ — полином; б) в нашем случае трубочное отображение инъективно (в частности, если $t\beta(x)=0$, то и $\beta(x)=0$), и в) для достаточно больших N классы всевозможных дифференциальных форм $\Lambda(x,\nu,P)$ с $|\nu|=N$ порождают всю группу когомологий $H^{n-1}(\mathbf{CP}^{n-1}_\xi-X^*-A^*)$, см. [40]. Случай неоднородного P сводится к однородному, см. [40, п. 4.5].

Сходными методами доказывается следующее уточнение п. В теоремы 1.2.

2.3. Теорема 2.2. (см. [40]). Если оператор P гиперболичен и множество A^* гладко, то любая точка волнового фронта $W(P)$ является особой точкой фундаментального решения $E(P)$. Для почти любого гиперболического оператора P с данной главной частью $\bar{P}$ носитель $E(P)$ совпадает с выпуклой оболочкой волнового фронта. Если $n=3$, то последнее верно для всех гиперболических операторов без исключения. (Например, волновой оператор при четном $n\geqslant 4$ не является «почти любым»).

§ 3. Локальный критерий Петровского

3.1. Одна и та же компонента дополнения к волновому фронту может быть локальной лакуной вблизи одних точек своей границы и носительницей диффузии — вблизи других. Вопрос о том, является ли компонента лакуной, эквивалентен вопросу о том, является ли она локальной лакуной вблизи начала координат. Для исследования резкости вблизи остальных точек фронта Атья, Ботт и Гординг ввели локальный аналог критерия Петровского (см. [40]). Опишем его.

Пусть $y\neq 0$ — точка фронта $W=W(P)$, l — компонента дополнения к W вблизи y, $Y^*\subset\mathbf{CP}^{n-1}_\xi$ — проективизация плоскости $Y\subset\mathbf{C}^n_\xi$, ортогональной к y. Если точка $x\in l$ достаточно близка к y, то проекция $Y\to X$ определяет гомоморфизм

$$p_x: H_{n-2}(Y^*-A^*)\to H_{n-2}(X^*-A^*).$$

Определение 3.1. *Локальным критерием Петровского* называется условие

$$\beta(x)\in p_x(H_{n-2}(Y^*-A^*)).$$

3.2. Теорема 3.1. (см. [40]). Если для точек локальной (вблизи y) компоненты l дополнения к фронту выполнен локальный критерий Петровского, то фундаментальное решение $E(P)$ голоморфно резко в точке y со стороны l.

Оказывается, теорема 3.1 почти всегда обратима:

3.3. Теорема 3.2 (см. [10]). 1. Если поверхность A^* вблизи множества $\mathbf{RP}^{n-1}_\xi$ касается плоскости Y^* лишь в конечном числе точек, то из голоморфной резкости $E(P)$ в точке y со стороны компоненты l следует локальный критерий Петровского для всех $x\in l$.

2. Для почти любого гиперболического оператора предположение п. 1 настоящей теоремы выполнено в любой точке $y\neq 0$ его фронта.

3.4. Контрпример. В самом общем случае теорема 3.1 не обратима. Действительно, пусть $P=\xi_1\cdot(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)$. Фронт $W(P)$

состоит из кругового конуса и луча, натянутого на орт (1, 0, 0). Резкость вблизи этого луча вытекает из теоремы Гартогса об устранимой особенности, а локальное условие Петровского, как легко вычислить, не выполнено.

§ 4. Геометрия лакун вблизи конкретных особенностей фронтов

4.1. Локальный критерий Петровского, а следовательно, и резкость вблизи точек фронта определяются локальной геометрией фронта. Эта геометрия наиболее просто описывается в терминах (проективных) производящих функций, которые мы сейчас определим. Для простоты рассмотрим лишь случай, когда рассматриваемая точка $y \in W$ соответствует единственной точке a множества $\operatorname{Re} A^*$, то есть ортогональная ей плоскость Y касается поверхности $\operatorname{Re} A$ по единственной прямой. Выберем в $\mathbf{RP}_\xi^{n-1}$ аффинную систему координат $z_0, z_1, \ldots, z_{n-2}$ с центром в точке a, такую что плоскость Y^* задается уравнением $z_0=0$. Тогда поверхность A^* вблизи a задается условием $z_0=f(z_1, \ldots, z_{n-2})$. Определенная таким образом функция f называется *проективной производящей функцией поверхности* A^* в точке a; очевидно, $f(0)=\operatorname{grad} f(0)=0$.

4.2. Исследование на резкость вблизи гладких точек фронта. В общей точке фронта особенность f является *морсовской*, то есть ее второй дифференциал — невырожденная квадратичная форма; ее индексы инерции обозначим через $i_\pm(a)$. В этом случае вблизи точки фронт является гладким многообразием и делит ее окрестность на две части. Одна из этих частей содержит такую точку x, что соответствующая плоскость X^* задается условием $z_0 \equiv \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Обозначим эту часть через l^+, а другую — через l^-.

Теорема 4.1 (см. [7], [24]). Пусть a — общая точка A^*. Тогда, если n и $i_\pm \equiv i_\pm(a)$ четны, то обе компоненты $l^\pm$ — локальные лакуны; если n четно, а $i_\pm$ — нет, то вблизи y нет лакун; если n нечетно, то локальной лакуной является только l^- при i_+ четном и только l^+ — при нечетном.

4.3. Исследование на резкость вблизи ребра возврата и ласточкина хвоста. В точках уплощения поверхности $\operatorname{Re} A^*$ (то есть в точках, где вырождается ее форма кривизны) производящая функция уже не будет морсовской, а будет иметь вырожденную особенность. Классификации таких особенностей посвящено много работ, см. например [3]. Вблизи простейших особенностей этой классификации — типов A_2 и A_3 — волновой фронт диффеоморфен произведению линейного пространства на полукубическую параболу, см. рис. 2а (соответственно, на *ласточкин хвост*, то есть поверхность изображенную на рис. 4; точкам типа A_2 на этом рисунке соответствуют ребра возврата). Условие резкости со стороны той или иной компоненты дополнения к фронту вновь зависит от четности n и индекса i_+ квад-

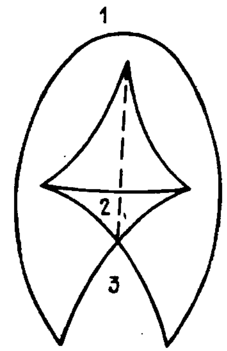

Рис. 4

ратичной части производящей функции; при этом, умножая если надо координату z_0 на -1, мы будем иметь дело лишь с модификацией A_3^+ особенности A_3 (см. таблицу 1 ниже).

Теорема 4.2. (см. [48]). Вблизи точек типа A_2 при нечетных n и четных i_+ имеется резкость со стороны компоненты 2, а при других n и i_+ резкости не бывает. Вблизи особенностей A_3 локальными лакунами являются только: область 3 при нечетном i_+ и любом n; область 2 при четном i_+ и нечетном n.

4.4. В случае более сложных особенностей аналогичное описание всех локальных лакун становится более громоздким, поэтому приведу лишь результаты о количестве этих лакун.

Теорема 4.3. Вблизи любой точки, в которой волновой фронт общего гиперболического оператора имеет особенность одного из типов[1] A_k, D_k, E_k, X_9, X_{10}, J_{10}, число локальных лакун равно указанному в таблице 1 (или удовлетворяет приведенному там неравенству). На общих фронтах в $\mathbf{R}_x^n$ при $n \leqslant 7$ могут встречаться лишь особенности, принадлежащие одному из типов, указанных в таблице 1. (В этой таблице Q означает невырожденную квадратичную форму от дополнительных переменных $z_{r+1}, \ldots, z_n$, где r — это коранг особенности, то есть дефект формы кривизны поверхности A^*: он указан в третьей графе таблицы; i_+ — положительный индекс инерции формы Q. В графе "$n \geqslant$" указывается минимальное из таких n, что соответствующая особенность возникает на фронтах общего положения в $\mathbf{R}_x^n$).

Гипотеза. Во всех клетках этой таблицы, в которых стоит знак вопроса, должен стоять нуль.

Утверждение этой теоремы о A_1 доказано в [24], о A_2, A_3 — в [48], а A_k ($k \geqslant 4$), D_k, E_k — в [10]. Утверждения об остальных особенностях получены с помощью ЭВМ, этот же машинный

[1] Обозначения взяты из классификационных таблиц [3].

Таблица 1

Тип особенности производящей функции	Нормальная форма, к которой производящая функция приводится диффеоморфизмом аргументов	коранг	$n \geqslant$	Число лакун: n четно, + чет.	Число лакун: n четно, + нечет.	Число лакун: n нечет., + нечет.	Число лакун: n нечет., + чет.
A_1	Q	0	2	2	0	1	1
A_{2k}, $k \geqslant 1$	$z_1^{2k+1} + Q$	1	$2k+1$	0	0	1	0
$A_{2k-1}^{\pm}$, $k \geqslant 2$	$\pm(z_1^{2k} + Q)$	1	$2k$	0	1	1	1
D_4^-	$z_1^2 z_2 - z_2^3 + Q$	2	5	0	3	1	1
D_{2k}^+, $k \geqslant 2$	$z_1^2 z_2 + z_2^{2k-1} + Q$	2	$2k+1$	0	0	1	1
D_{2k}^-, $k \geqslant 3$	$z_1^2 z_2 - z_2^{2k-1} + Q$	2	$2k+1$	0	2	1	1
$D_{2k+1}^{\pm}$, $k \geqslant 2$	$\pm(z_1^2 z_2 + z_2^{2k} + Q)$	2	$2k+2$	0	0	1	1
$E_6^{\pm}$	$\pm(z_1^3 + z_2^4 + Q)$	2	7	0	0	1	1
E_7	$z_1^3 + z_1 z_2^3 + Q$	2	8	0	0	1	1
E_8	$z_1^3 + z_2^5 + Q$	2	9	0	0	1	1
$X_9^{\pm}$	$\pm(z_1^4 + \alpha z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + Q)$, $\alpha > -2$	2	9	$\geqslant 1$	0	$\geqslant 2$	$\geqslant 0$
X_9^1	$z_1 z_2 (z_1^2 + \alpha z_1 z_2 + z_2^2) + Q$, $\lvert\alpha\rvert < 2$	2	9	0	0	0	0
X_9^2	$z_1 z_2 (z_1 + z_2)(z_1 + \alpha z_2) + Q$, $\alpha \in (0,1)$	2	9	0	$\geqslant 2$	0	0
$X_{10}^{3\pm}$	$\pm(-z_1^4 + z_1^2 z_2^2 + \alpha z_2^5 + Q)$, $\alpha > 0$	2	10	0	?	?	0
$X_{10}^{1\pm}$	$\pm(z_1^4 + z_1^2 z_2^2 + \alpha z_2^5 + Q)$, $\alpha > 0$	2	10	?	0	?	0
J_{10}^3	$z_1 (z_1 - z_2^2)(z_1 - \alpha z_2^2) + Q$, $\alpha \in (0,1)$	2	10	?	$\geqslant 1$	0	0
J_{10}^1	$z_1 (z_1^2 + \alpha z_1 z_2^2 + z_2^4) + Q$, $\lvert\alpha\rvert < 2$	2	10	?	?	0	0

эксперимент является очень серьезным доводом в пользу последней гипотезы. Основное методологическое замечание при доказательстве этой теоремы (и теоремы 3.2) состоит в том, что задача о локальных лакунах является задачей локальной теории особенностей гладких функций; об этой теории см. [3].

§ 5. Уравнения с переменными коэффициентами

Все результаты предыдущих §§ 3, 4 имеют естественные обобщения на случай гиперболических операторов с переменными коэффициентами:

$$P = \Sigma P_\alpha (x) (\partial / \partial x)^\alpha, \quad P_\alpha \in C^\infty (\mathbf{R}^n_x),$$

(см. [48]). В частности, в этом случае также определено понятие резкости и локальное гомологическое условие Петровского. Не формулируя этих понятий, приведем лишь основной результат этой теории.

Теорема 5.1 (см. [9], [48]). Вблизи точек волнового фронта строго гиперболического уравнения, соответствующих изолированным особенностям производящих функций, из локального критерия Петровского вытекает резкость фундаментального решения.

Эта теорема была доказана в [48] в случае аналитических коэффициентов, а вблизи особенностей типов A_k — и в C^∞-случае. Там же был намечен подход к доказательству теоремы в приведенной общей формулировке, реализованный затем в [9].

ЛИТЕРАТУРА

Теория обобщенных функций достаточно полно изложена в книгах [13], [18], [19], [37], [65], [66], в которых имеется много полезных упражнений и поучительных примеров.

Книги [25], [45] и [68] посвящены широкому кругу вопросов, связанных с теорией и применениями преобразования Фурье, в частности с операционным исчислением.

Наиболее эффективные методы исследования общих уравнений с постоянными коэффициентами, предложенные в работах [4], [5], [30], [31], [42], [52] и [57], основаны на идеях алгебраической геометрии.

В работах [7], [47], [49], [51], [55], [56], [63] получена детальная информация о структуре, особенностях и асимптотике, а в [10], [16], [24], [40], [48], [61] — о лакунах фундаментальных решений гиперболических уравнений.

Работы [32], [33], [60] содержат основополагающие результаты по корректности задачи Коши для гиперболических уравнений, а [20] — по классам единственности и корректности задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами. Исчерпывающую информацию по корректности краевых задач для параболических систем (и уравнений) читатель найдет в [39].

В [2] излагается теория краевых задач в соболевских пространствах функций для уравнений с переменными коэффициентами, почти столь же эффективная, как для уравнений с постоянными коэффициентами, а в [11] — для псевдодифференциальных уравнений.

Теория соболевских пространств и теоремы вложения излагаются в [15], [26], [29], [35] и [38].

В работах [8], [22] излагаются важные вопросы стационарной теории рассеяния, связанные с условием излучения Зоммерфельда, для общих уравнений, а в [36] — на простейшем конкретном примере.

В работе [28] найдены условия разрешимости уравнений в конусе (и, в частности, в угле).

С применением теоремы Зайденберга — Тарковского читатель может ознакомиться в [21], [37], [54], [55], [69].

В [6], [44], [62] можно найти применения уравнений с постоянными коэффициентами в математической физике.

В [41] и [71] имеется обширная информация о специальных функциях и их применениях к уравнениям в частных производных.

Теория аналитических функций многих комплексных переменных достаточно полно изложена в книгах [12], [50] и [53].

Работа [1] представляет собой обзор по теории уравнений с постоянными коэффициентами, а [69] — курс теории таких уравнений.

Наиболее полное изложение современного состояния теории уравнений с постоянными коэффициентами имеется в монографиях [30], [55]. В них излагаются такие важные вопросы, как аппроксимация решений, P-выпуклость и разрешимость уравнений в областях, теория рассеяния, метод ВКБ (переход волновой оптики в геометрическую), системы уравнений и другие, не затронутые в данном обзоре из-за недостатка места.

В [26], [38], [55] подробно излагается современная теория линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

Книги [14], [29], [34], [36] и [43], [54] — общие руководства по уравнениям в частных производных.

1. *Агранович М. С.*, Об уравнениях с частными производными с постоянными коэффициентами. Успехи мат. наук, 1961, *16*, № 2, 27—93
2. —, *Вишик М. И.*, Эллиптические краевые задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи мат. наук, 1964, *19*, № 3, 43—161
3. *Арнольд В. И.*, *Варченко А. Н.*, *Гусейн-Заде С. М.*, Особенности дифференцируемых отображений. 1, 2. М.: Наука, 1982, 304 с.; 1984, 336 с.
4. *Бернштейн И. Н.*, Модули над кольцами дифференциальных операторов. Исследование фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами. Функц. анализ и его прил., 1971, *5*, № 2, 1—16
5. —, *Гельфанд И. М.*, Мероморфность функции P^λ. Функц. анализ и его прил., 1969, *3*, № 1, 84—85
6. *Боголюбов Н. Н.*, *Широков Д. В.*, Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976, 479 с.
7. *Боровиков В. А.*, Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Тр. Моск. мат. об-ва, 1959, *8*, 199—257
8. *Вайнберг Б. Р.*, Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными. Успехи мат. наук, 1966, *21*, № 3, 115—194
9. *Варченко А. Н.*, О нормальных формах негладкости решений гиперболических уравнений. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1986, *51*, № 1, 114—131
10. *Васильев В. А.*, Резкость и локальное условие Петровского для строго гиперболических операторов с постоянными коэффициентами. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1986, *50*, № 2, 242—283
11. *Вишик М. И.*, *Эскин Г. И.*, Уравнения в свёртках в ограниченной области. Успехи мат. наук, 1965, *20*, № 3, 89—152
12. *Владимиров В. С.*, Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964, 411 с.
13. —, Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979, 318 с.
14. —, Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1981, 512 с.
15. *Волевич Л. Р.*, *Панеях Б. П.*, Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. Успехи мат. наук, 1965, *20*, № 1, 3—74
16. *Габриэлов А. М.*, Доказательство теоремы И. Г. Петровского. Приложение к кн.: *Петровский И. Г.*, Избранные труды, 1. М.: Наука, 1986, 504 с.
17. *Гельфанд И. М.*, *Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. Успехи мат. наук, 1953, *8*, № 4, 3—51
18. —, —, Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958, 440 с.
19. —, —, Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958, 308 с.
20. —, —, Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958, 274 с.
21. *Горин Е. А.*, Асимптотические свойства многочленов. Успехи мат. наук, 1961, *16*, № 1, 91—118
22. *Грушин В. В.*, Об условиях типа Зоммерфельда для некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных. Мат. сб., 1963, *63*, № 2, 147—174

23. —, Распространение гладкости решений дифференциальных уравнений главного типа. Докл. АН СССР, 1963, *148*, № 6, 1241—1244
24. *Давыдова А.М.*, Достаточное условие отсутствия лакуны. М.: Изд-во МГУ, 1945, 43 с.
25. *Диткин В. А.*, *Прудников А. П.*, Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966, 404 с.
26. *Егоров Ю. В.*, Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984, 360 с.
27. *Лопатинский Я. Б.*, Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. мат. ж., 1953, *5*, № 2, 123—151
28. *Мерзон А. Е.*, О разрешимости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в конусе. Докл. АН СССР, 1973, *211*, № 2, 285—288
29. *Михлин С. Г.*, Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 430 с.
30. *Паламодов В. П.*, О регуляризации и проблеме деления. Докл. АН СССР, 1960, *132*, № 2, 295—298
31. —, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967, 500 с.
32. *Петровский И. Г.*, О задаче Коши в области неаналитических функций. Успехи мат. наук, 1937, № 3, 234—238
33. —, О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюлл. МГУ. Мат. и мех., 1948, *1*, № 7, 1—72
34. —, Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961, 400 с.
35. *Соболев С. Л.*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950, 256 с.
36. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.*, Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972, 735 с.
37. *Шилов Г. Е.*, Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965, 327 с.
38. *Шубин М. А.*, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978, 279 с.
39. *Эйдельман С. Д.*, Параболические системы. М.: Наука, 1964, 443 с.
40. *Atiyah M. F.*, *Bott R.*, *Gårding L.*, Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients. 1, 2. Acta Math., 1970, *124*, 109—189; 1973, *131*, 145—206 (Пер. на рус. яз.: *Атья М. Ф.*, *Ботт Р.*, *Гординг Л.*, Лакуны для гиперболических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. 1, 2. Успехи мат. наук, 1971, *26*, № 2, 25—100; 1984, *39*, № 3, 171—224)
41. *Bateman H.*, *Erdelyi A.*, Higher trancedential functions. V. 2. New York, 1953 (Пер. на рус. яз.: *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.*, Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966, 295 с.)
42. *Bjork J. E.*, Rings of differential operators. North-Holland Publ. Co. Math. Library Series, 21, 1979
43. *Courant R.*, Partial differential equations. New York—London, 1962, 830 pp. (Пер. на рус. яз.: *Курант Р.*, Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964, 830 с.)
44. *Dirac P.*, The principles of quantum mechanics. Oxford, 1958. (Пер. на рус. яз.: *Дирак П.*, Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960, 434 с.)
45. *Doetch G.*, A Leitung zum praktischen Gebrauch der Laplace — Transformation und z-Transformation. Munchen—Wien: R. Oldenburg, 1967 (Пер. на рус. яз.: *Дёч Г.*, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971, 288 с.)
46. *Ehrenpreis L.*, Solutions of some problems of division, 1. Amer. J. Math., 1954, *76*, 883—903

47. *Gårding L.*, Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. Acta Math., 1950, *85*, 1—62
48. —, Sharp fronts of paired oscillatory integrals. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1977, *12*, 53—68 (Пер. на рус. яз.: *Гординг Л.*, Резкие фронты парных осциллирующих интегралов. Успехи мат. наук, 1983, *38*, № 6, 85—96
49. —, *Kotake T.*, *Leray J.*, Uniformisation et development asimtotique de la solution du probleme de Cauchy lineaire. Bull. Soc. Math., France, 1964, *92*, 263—361 (Пер. на рус. яз.: *Лере Ж.*, *Гординг Л.*, *Котаке Е.*, Задача Коши. М.: Мир, 1967, 152 с.)
50. *Gunning R.*, *Rossi H.*, Analytic functions of several variables. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965, 317 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ганнинг Р.*, *Росси Х.*, Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969, 395 с.)
51. *Hadamard J.*, Le probleme de auchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques. Paris, 1932 (Пер. на рус. яз.: *Адамар Ж.*, Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978, 351 с.)
52. *Hörmander L.*, On the division of distributions by polinomials. Ark. Mat., 1958, *3*, 555—568
53. —, An introduction to complex analysis of several variables. 2 nd ed. Amsterdam-London: Noth. Holl. Publ. Co., 1973, 224 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968, 279 с.)
54. —, Linear partial differential operators. Berlin: Springer, 1963, 287 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965, 379 с.)
55. —, The analysis of linear partial differential operators. 1, 2, 3, 4. Berlin: Springer, 1983, 391 pp., 392 pp.; 1984, 340 pp.; 1985, 352 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1, 2, 3. М.: Мир, 1986, 462 с.; 463 с.; 1987, 694 с.)
56. *Leray J.*, Hyperbolic differential equations. The Institut for Advanced Study, Princeton, 1953, 240 pp. (Пер. на рус. яз.: *Лере Ж.*, Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984, 207 с.)
57. *Lojasiewicz S.*, Sur le probleme de division. Stud. Math., 1959, *18*, 87—136
58. *Malgrange B.*, Equations aux derivees partielles a coefficients constant. 1. Solution elementaire. C. r. Acad. sci., 1953, *237*, n° 25, 1620—1622
59. *Nuij W.*, Anote on hyperbolic polinomials. Math. Scand., 1968, *23*, n° 1, 69—72
60. *Petrowsky I. G.*, Uber das Cauchysche Problem fur Systeme von Differentialgleichungen. Мат. сб., 1937, *2*, n° 5, 815—870 (Пер. на рус. яз.: в кн. *Петровский И. Г.*, Избранные труды. 1. М.: Наука, 1986, 504 с.)
61. —, On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations. Мат. сб., 1945, *17*, n° 2, 289—370 (Пер. на рус. яз.: в кн. *Петровский И. Г.*, Избранные труды. 1. М.: Наука, 1986, 504 с.)
62. *Reed M.*, *Simon B.*, Methods of modern mathematical physics. 2, 3. New York: Acad. Press, 1975, 390 pp., 1979, 440 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рид М.*, *Саймон Б.*, Методы современной математической физики. 2, 3. М.: Мир, 1978, 395 с.; 1982, 443 с.)
63. *Riesz M.*, L'integral de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy. Acta Math., 1949, *81*, 1—223
64. *Rudin W.*, Principles of mathematical analisis. New York: McGraw-Hill, 1964, 280 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рудин У.*, Основы математического анализа. М.: Мир, 1976, 319 с.)
65. *Schwartz L.*, Theorie des distributions. Paris: Hermann, 1966, 420 p.
66. —, Methodes mathematiques pour les science physiques. Paris: Hermann, 1965, 400 p. (Пер. на рус. яз.: *Шварц Л.*, Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965, 412 с.)
67. *Sobolev S. L.*, Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques. Мат. сб., 1936, *1*, № 1, 39—71

68. *Titchmarsh E.*, Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford: clarendon Press, 1937, 390 pp. (Пер. на рус. яз.: *Титчмарш Э.*, Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ИЛ, 1948, 400 с.)
69. *Treves F.*, Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients. Rio de Janeiro, 1961, 290 pp. (Пер. на рус. яз.: *Трев Ж.*, Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965, 296 с.)
70. *Weyl H.*, The method of ortogonal projection in potential theory. Duke Math. J., 1940, *7*, 411—444
71. *Whittaker E. T.*, *Watson G. N.*, A cours of modern analysis. Cambridge: Univ. Press, 1927, 608 pp. (Пер. на рус. яз.: *Уитеккер Э. Т.*, *Ватсон Дж. Н.*, Курс современного анализа. 1, 2. М.: Физматгиз, 1963, 344 с.; 516 с.)
72. *Yosida K.*, Fuctional analysis. Berlin: Springer, 1966, 458 pp. (Пер. на рус. яз.: *Иосида К.*, Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, 624 с.)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ