



# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
МАТЕМАТИКИ  
Фундаментальные  
направления

том 29



Москва 1988

РГАСНТИ 27.17, 27.21

ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР  
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ  
(ВИНИТИ)

## ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 29

Научный редактор и составитель  
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.



МОСКВА 1988

УДК 514.13+514.132+512.817.7

Главный редактор информационных изданий ВИНТИ  
профессор *П. В. Нестеров*

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

информационных изданий по математике

Главный редактор чл.-корр. АН СССР *Р. В. Гамкрелидзе*

Члены редколлегии: канд. физ.-матем. наук *Д. Л. Келенджеридзе*,  
канд. физ.-матем. наук *М. К. Керимов*, чл.-корр. АН СССР *Л. Д. Кудряцев*,  
профессор *В. Н. Латышев*, академик *Е. Ф. Мищенко*,  
академик *С. М. Никольский*,  
профессор *Н. М. Остиану* (ученый секретарь редколлегии),  
академик *Л. С. Понтрягин*, профессор *В. К. Саульев*,  
профессор *А. Г. Свешников*

### Редакторы-составители серии

к. ф.-м. н. *А. А. Аграчев*, академик *Е. Ф. Мищенко*,  
профессор *Н. М. Остиану*, академик *Л. С. Понтрягин*

Научный редактор серии *В. П. Сахарова*

Литературный редактор серии *З. А. Измайлова*

Научный консультант по вопросам полиграфии  
Заслуженный деятель культуры *М. И. Левштейн*

# ГЕОМЕТРИЯ—2

Консультирующий редактор-составитель тома  
доктор физико-математических наук *Э. Б. Винберг*

Редактор-составитель тома  
*В. В. Рыжков*

Авторы:

*Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников,  
О. В. Шварцман*

## ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

*Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников*

### СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	7
<i>Глава 1. Основные структуры</i>	9
§ 1. Определение пространств постоянной кривизны	9
1.1. Группы Ли преобразований	9
1.2. Группа движений риманова многообразия	10
1.3. Инвариантные римановы метрики на однородных пространствах	11
1.4. Пространства постоянной кривизны	12
1.5. Три пространства	13
1.6. Подпространства пространства $R^{n,1}$	16
§ 2. Теорема классификации	17
2.1. Формулировка теоремы	17
2.2. Редукция к алгебрам Ли	17
2.3. Симметрия	18
2.4. Строение касательной алгебры группы движений	19
2.5. Пространство Римана	21
§ 3. Подпространства и выпуклость	22
3.1. Инволюции	22
3.2. Плоскости	24
3.3. Полупространства и выпуклые множества	25
3.4. Ортогональные плоскости	27
§ 4. Метрика	28
4.1. Общие свойства	28
4.2. Формулы для расстояний в векторной модели	29
4.3. Выпуклость расстояния	30
<i>Глава 2. Модели пространства Лобачевского</i>	32
§ 1. Проективные модели	32
1.1. Однородные области	32
1.2. Проективная модель пространства Лобачевского	33
1.3. Проективно-евклидовы модели. Модель Клейна	34
1.4. «Аффинная» подгруппа группы автоморфизмов квадррики	35
1.5. Риманова метрика и расстояние между точками в проективной модели	36
§ 2. Конформные модели	39
2.1. Конформное пространство	39
2.2. Конформная модель пространства Лобачевского	43
2.3. Конформно-евклидовы модели	45
2.4. Комплексная структура плоскости Лобачевского	49
§ 3. Матричные модели пространств $L^2$ и $L^3$	51
3.1. Матричная модель пространства $L^2$	51

3.2. Матричная модель пространства $L^3$	52
<b>Глава 3. Планиметрия</b>	53
§ 1. Прямые	55
1.1. Расходящиеся и параллельные прямые на плоскости Лобачевского	55
1.2. Расстояние от точек одной прямой до другой прямой	58
§ 2. Многоугольники	60
2.1. Определения. Условия выпуклости	60
2.2. Элементарные свойства треугольников	62
2.3. Полярные треугольники на сфере	64
2.4. Сумма углов треугольника	65
2.5. Существование выпуклого многоугольника с наперед заданными углами	65
2.6. Угловой избыток и площадь многоугольника	67
§ 3. Метрические соотношения	69
3.1. Правило косинусов для треугольника	69
3.2. Другие соотношения в треугольнике	70
3.3. Угол параллельности	73
3.4. Соотношения в четырех-, пяти- и шестиугольниках	73
3.5. Длина окружности и площадь круга	74
§ 4. Движения и однородные линии	75
4.1. Классификация движений двумерных пространств постоянной кривизны	75
4.2. Характеристика движений плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в терминах следов матриц	77
4.3. Однопараметрические группы движений плоскости Лобачевского и их орбиты	78
4.4. Вид метрики в координатах, связанных с пучком	80
<b>Глава 4. Плоскости, сферы, орисферы и эквидистанты</b>	83
§ 1. Взаимное расположение плоскостей	83
1.1. Пары подпространств евклидова векторного пространства	83
1.2. Некоторые общие понятия	85
1.3. Пары плоскостей сферы	85
1.4. Пары плоскостей евклидова пространства	85
1.5. Псевдоортогональные преобразования	86
1.6. Пары гиперболических подпространств пространства $R^{n,1}$	87
1.7. Пары плоскостей пространства Лобачевского	88
1.8. Пары прямых пространства Лобачевского	89
1.9. Пары гиперплоскостей	89
§ 2. Стандартные поверхности	91
2.1. Определения и основные свойства	91
2.2. Стандартные гиперповерхности	92
2.3. Подобие стандартных гиперповерхностей	94
2.4. Пересечение стандартных гиперповерхностей	95
§ 3. Разложения в полупрямое произведение	96
3.1. Сферические, орисферические и эквидистантные разложения	96
3.2. Сферически-эквидистантное разложение	97
<b>Глава 5. Движения</b>	98
§ 1. Общие свойства движений	98
1.1. Задание движений	98
1.2. Продолжение движения с плоскости	99
1.3. Функция смещения	99
§ 2. Классификация движений	101
2.1. Движения сферы	101
2.2. Движения евклидова пространства	102
2.3. Движения пространства Лобачевского	102
2.4. Однопараметрические группы движений	103
§ 3. Группы движений и подобий	105
3.1. Некоторые основные понятия	105
3.2. Критерий существования неподвижной точки	106

3.3. Группы движений сферы	106
3.4. Группы движений евклидова пространства	107
3.5. Группы подобий	108
3.6. Группы движений пространства Лобачевского	108
<b>Глава 6. Остроугольные многогранники</b>	111
§ 1. Основные свойства остроугольных многогранников	111
1.1. Общие сведения о выпуклых многогранниках	111
1.2. Матрица Грама выпуклого многогранника	112
1.3. Остроугольные семейства полупространств и остроугольные многогранники	113
1.4. Остроугольные многогранники на сфере и в евклидовом пространстве	114
1.5. Простота остроугольных многогранников	115
§ 2. Остроугольные многогранники в пространстве Лобачевского	116
2.1. Описание в терминах матриц Грама	116
2.2. Комбинаторное строение	117
2.3. Описание в терминах двугранных углов	118
<b>Глава 7. Объемы</b>	120
§ 1. Объемы секторов и клиньев	121
1.1. Объемы секторов	121
1.2. Объем гиперболического клина	122
1.3. Объем параболического клина	124
1.4. Объем эллиптического клина	124
§ 2. Объемы многомерных многогранников	125
2.1. Объем симплекса как аналитическая функция двугранных углов	125
2.2. Дифференциал объема	127
2.3. Объем четномерного многогранника: формулы Пуанкаре и Шлефли	128
2.4. Объем четномерного многогранника: формула Гаусса—Бонне	130
§ 3. Объемы трехмерных многогранников	131
3.1. Функция Лобачевского	131
3.2. Бипрямоугольные тетраэдры	132
3.3. Объем бипрямоугольного тетраэдра: формула Лобачевского	133
3.4. Объемы тетраэдров с бесконечно удаленными вершинами	135
3.5. Объем пирамиды с бесконечно удаленной вершиной	137
<b>Глава 8. Пространства постоянной кривизны как римановы многообразия</b>	139
1.1. Экспоненциальное отображение	139
1.2. Параллельный перенос	140
1.3. Кривизна	141
1.4. Вполне геодезические подмногообразия	141
1.5. Гиперповерхности	142
1.6. Проективные свойства	143
1.7. Конформные свойства	144
1.8. Псевдоримановы пространства постоянной кривизны	144
<b>Литература</b>	145

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Пространства постоянной кривизны — евклидово пространство, сфера и пространство Лобачевского — занимают особое место в геометрии. Это пространства, максимально доступные нашей геометрической интуиции, благодаря чему в них возможно построение элементарной геометрии в духе школьного курса. В то же время многозначность интерпретации основных

понятий делает возможным применение этой геометрии к объектам, отличным от физического пространства — первоисточника геометрической интуиции.

Евклидова геометрия давно укоренилась в сознании человечества. То же самое можно сказать и о сферической геометрии, так как сфера естественно вкладывается в евклидово пространство. Что же касается геометрии Лобачевского, то первые 50 лет после ее открытия она рассматривалась лишь как логическая возможность в связи с исследованиями оснований геометрии и до сих пор, несмотря на полученные ею разнообразные приложения, сохранила некоторый элемент экзотики и даже романтики. Это объясняется той непреходящей культурной и исторической ценностью, которую представляет доказательство независимости Пятого постулата.

Между тем современные исследования все больше требуют делового владения геометрией Лобачевского. Этому требованию плохо отвечает традиционное изложение, основанное на элементарной аксиоматике типа Евклида—Гильберта, ибо оно не позволяет быстро ввести в действие аналитический аппарат. С другой стороны, определение геометрии Лобачевского с помощью какой-либо выделенной модели также неудобно, так как для разных задач требуются разные модели. Наиболее целесообразным представляется сейчас аксиоматическое определение, использующее, однако, достаточно продвинутую систему понятий. Оно должно позволять при желании пользоваться любой моделью или вообще обходиться без таковой.

Само название пространств постоянной кривизны указывает свойство, выделяющее их среди римановых многообразий. Однако более важным и естественным является другое свойство, также характеризующее пространства постоянной кривизны — свойство максимальной подвижности. Это свойство и положено в основу настоящего изложения.

Следует предупредить читателя, что мы используем термин «пространство постоянной кривизны» не совсем в общепринятом смысле. Обычно под этим понимают любое риманово многообразие постоянной кривизны. При нашем же определении (данном в § 1 главы 1) пространствами постоянной кривизны оказываются лишь три пространства, перечисленные в начале настоящего введения.

Евклидовы пространства включаются в наше изложение как частный случай, но мы, разумеется, не ставим своей целью обучение читателя евклидовой геометрии. Напротив, мы будем свободно пользоваться элементарными теоремами евклидовой геометрии. Мы также предполагаем известными основы линейной алгебры и аффинной геометрии, понятия дифференцируемого многообразия и группы Ли и элементы римановой геометрии.

По поводу истории открытия неевклидовой геометрии и развития ее идей мы отсылаем читателя к соответствующим разделам книг [1], [2], [4], [10].

## Глава 1

### ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ

#### § 1. Определение пространств постоянной кривизны

Эта глава посвящена определению пространств постоянной кривизны вместе с их основными структурами и указанию места, которое они занимают, с одной стороны, среди однородных пространств и, с другой стороны, среди римановых многообразий. Читатель, главной целью которого является изучение геометрии Лобачевского, может без ущерба для себя пропустить теоремы 1.2 и 1.3 и доказательство теоремы 2.1.

**1.1. Группы Ли преобразований.** Наше изложение будет использовать понятия (вещественного) дифференцируемого многообразия и (вещественной) группы Ли. Мы будем предполагать, что читатель знаком с этими понятиями. Дифференцируемость (многообразий, функций, отображений и т. п.) всегда будет означать бесконечную дифференцируемость. Все дифференцируемые многообразия будут предполагаться обладающими счетной базой открытых подмножеств. Через  $T_x(X)$  будет обозначаться касательное пространство многообразия  $X$  в точке  $x$ , через  $d_x g$  — дифференциал отображения  $g$  в точке  $x$ ; в тех случаях, когда указание точки не обязательно, индекс будет опускаться.

Напомним некоторые определения из теории групп Ли. (Более подробно об этом см., например, в [25].)

Группа  $G$  преобразований<sup>1)</sup> дифференцируемого многообразия, наделенная структурой группы Ли, называется *группой Ли преобразований многообразия  $X$* , если отображение

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx,$$

дифференцируемо. Это означает, что (локальные) координаты точки  $gx$  должны быть дифференцируемыми функциями координат элемента  $g$  и точки  $x$ . Стабилизатор

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

любой точки  $x \in X$  является тогда (замкнутой) подгруппой Ли группы  $G$ . Его линейное представление  $g \mapsto d_x g$  в пространстве

<sup>1)</sup> Под группой преобразований мы понимаем эффективную группу преобразований, т. е. считаем, что разным элементам группы отвечают разные преобразования.

$T_x(X)$  называется *представлением изотропии*, а линейная группа  $d_x G_x$  — *группой изотропии* в точке  $x$ .

Стабилизаторы эквивалентных точек  $x$  и  $y = gx$  ( $g \in G$ ) сопряжены в  $G$ , а именно,

$$G_y = g G_x g^{-1}.$$

Соответствующие группы изотропии связаны между собой следующим образом:

$$d_y G_y = (d_x g) (d_x G_x) (d_x g)^{-1}.$$

Иначе говоря, если касательные пространства  $T_x(X)$  и  $T_y(X)$  отождествить посредством изоморфизма  $d_x g$ , то группа  $d_x G_x$  совпадет с группой  $d_y G_y$ .

Если  $G$  — транзитивная группа Ли преобразований многообразия  $X$ , то для любой точки  $x \in X$  отображение

$$G/G_x \rightarrow X, \quad gG_x \mapsto gx,$$

является диффеоморфизмом, перестановочным с действием группы  $G$ . (Считается, что  $G$  действует на многообразии  $G/G_x$  левых смежных классов левыми сдвигами.) Таким образом, в этом случае многообразии  $X$  вместе с действием группы  $G$  восстанавливается по паре  $(G, G_x)$ .

**Определение 1.1.** Дифференцируемое многообразие  $X$  вместе с заданной транзитивной группой Ли  $G$  его преобразований называется *однородным пространством*.

Мы будем обозначать однородное пространство через  $(X, G)$  или просто через  $X$ .

Однородное пространство  $(X, G)$  будем называть связным или односвязным<sup>1)</sup>, если соответствующим свойством обладает многообразие  $X$ .

**1.2. Группа движений риманова многообразия.** Задание римановой метрики на дифференцируемом многообразии  $X$  означает задание евклидовой метрики в каждом касательном пространстве  $T_x(X)$ , причем эта метрика должна дифференцируемым образом зависеть от координат точки  $x$ . Диффеоморфизм  $g$  риманова многообразия  $X$  называется *движением* (или *изометрией*), если для любой точки  $x \in X$  линейное отображение

$$d_x g : T_x(X) \rightarrow T_{gx}(X)$$

является изометрией. Очевидно, что движения образуют группу.

Всякое движение  $g$  переводит геодезические в геодезические и, следовательно, перестановочно с экспоненциальным отображением, т. е.

$$g(\exp \xi) = \exp dg(\xi)$$

при  $\xi \in T(X)$ . Отсюда следует, что если многообразие  $X$  связно,

<sup>1)</sup> Мы считаем, что односвязность предполагает связность.

то движение  $g$  определяется образом  $gx$  какой-либо одной точки  $x \in X$  и своим дифференциалом  $d_x g$  в этой точке. Это позволяет ввести координаты в группе движений, превратив ее в группу Ли. Более точно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.2 ([17]).** Группа движений риманова многообразия  $X$  единственным образом наделяется дифференцируемой структурой, при которой она становится группой Ли преобразований многообразия  $X$ .

Если группа движений риманова многообразия  $X$  транзитивна, то многообразие  $X$  полно. В самом деле, в этом случае существует такое  $\varepsilon > 0$ , не зависящее от точки  $x$ , что из любой точки  $x \in X$  по любому направлению выходит геодезический отрезок длины  $\varepsilon$ ; но тогда любую геодезическую можно неограниченно продолжать в любом направлении.

Говорят, что риманово многообразие  $X$  имеет *постоянную кривизну  $c$* , если его кривизна в любой точке по любому двумерному направлению равна  $c$ .

Односвязные полные римановы многообразия постоянной кривизны допускают удобную характеристику в терминах группы движений.

**Теорема 1.3 ([11]).** Односвязное полное риманово многообразие имеет постоянную кривизну тогда и только тогда, когда для любых точек  $x, y \in X$  и любой изометрии  $\varphi: T_x(X) \rightarrow T_y(X)$  существует (единственное) движение  $g$ , удовлетворяющие условиям  $gx=y$  и  $d_x g = \varphi$ .

◀ Утверждение «тогда» очевидно, поскольку движения сохраняют кривизну и любое заданное двумерное подпространство пространства  $T_x(X)$  с помощью подходящей изометрии  $\varphi$  может быть переведено в любое заданное двумерное подпространство пространства  $T_y(X)$ . Относительно доказательства обратного утверждения см. п. 1.3 главы 8. ▶

**1.3. Инвариантные римановы метрики на однородных пространствах.** Пусть  $(X, G)$  — однородное пространство.

Риманова метрика на  $X$  называется *инвариантной* (относительно  $G$ ), если все преобразования из  $G$  являются движениями в смысле этой метрики. Инвариантная риманова метрика восстанавливается по определяемой ею евклидовой метрике в каком-либо одном касательном пространстве  $T_x(X)$ , причем эта евклидова метрика инвариантна относительно группы изотропии  $d_x G_x$ . Обратно, если в пространстве  $T_x(X)$  задана евклидова метрика, инвариантная относительно группы изотропии, то ее «разнесение» посредством группы  $G$  дает инвариантную риманову метрику на  $X$ . Таким образом, для существования инвариантной римановой метрики на  $X$  необходимо и достаточно, чтобы в касательном пространстве существовала евклидова метрика, инвариантная относительно группы изотропии.

Рассмотрим вопрос о единственности такой метрики.

Линейная группа  $H$ , действующая в векторном пространстве  $V$ , называется неприводимой, если не существует нетривиального подпространства  $U \subset V$ , инвариантного относительно  $H$ .

**Лемма 1.4.** Пусть  $H$  — линейная группа, действующая в вещественном векторном пространстве  $V$ . Если группа  $H$  неприводима, то в пространстве  $V$  существует, с точностью до (положительного) множителя, не более одной евклидовой метрики, инвариантной относительно  $H$ .

◀ Возьмем какую-либо одну инвариантную евклидову метрику (если таковая существует) и с ее помощью превратим  $V$  в евклидово пространство. Тогда любая инвариантная евклидова метрика  $q$  в  $V$  имеет вид  $q(x) = (Ax, x)$ , где  $A$  — положительно определенный симметрический оператор, перестановочный со всеми операторами из  $H$ . Пусть  $c$  — какое-либо собственное значение этого оператора. Соответствующее собственное подпространство инвариантно относительно  $H$  и, следовательно, совпадает с  $V$ . Это означает, что  $A = cE$ , т. е.  $g(x) = c(x, x)$ . ▶

Из этой леммы, ввиду сказанного ранее, вытекает, что если группа изотропии неприводима, то на однородном пространстве существует, с точностью до постоянного (положительного) множителя, не более одной инвариантной римановой метрики.

Если однородное пространство  $X$  связно и на нем существует инвариантная риманова метрика, то представление изотропии в любой точке  $x \in X$  точно, так как всякий элемент стабилизатора точки  $x$ , будучи движением, однозначно определяется своим дифференциалом в этой точке.

#### 1.4. Пространства постоянной кривизны.

**Определение 1.5.** *Пространством постоянной кривизны* называется односвязное однородное пространство, группа изотропии которого (в любой точке) есть группа всех ортогональных преобразований касательного пространства относительно некоторой евклидовой метрики.

Последнее условие называется *аксиомой максимальной подвижности*. О возможности отказа от односвязности см. п. 2.5.

Пусть  $(X, G)$  — пространство постоянной кривизны. Из аксиомы максимальной подвижности сразу следует существование и единственность (с точностью до постоянного множителя) инвариантной римановой метрики на  $X$ . Относительно этой метрики  $X$  является римановым многообразием постоянной кривизны (тривиальная часть теоремы 1.3). Из транзитивности группы  $G$  следует, что  $X$  — полное риманово многообразие. Отметим также, что  $G$  — группа всех его движений. В самом деле, для любого движения  $g$  и точки  $x \in X$  существует такой элемент  $g_1 \in G$ , что  $gx = g_1x$ , т. е.  $(g_1^{-1}g)x = x$ , и такой элемент  $g_2 \in G_x$ , что  $d_x(g_1^{-1}g) = d_x g_2$ ; но тогда  $g_1^{-1}g = g_2$  и  $g = g_1 g_2 \in G$ .

Обратно, всякое односвязное полное риманово многообра-

ние  $X$  постоянной кривизны в силу теоремы 1.3 удовлетворяет условиям определения 1.5, если в качестве  $G$  взять группу всех его движений.

Таким образом, пространства постоянной кривизны в смысле данного выше определения — это то же, что односвязные полные римановы многообразия постоянной кривизны, рассматриваемые с точностью до изменения масштаба. Этим объясняется их название. Однако в последующем изложении геометрии этих пространств факт постоянства римановой кривизны непосредственно использоваться не будет, и читателю достаточно будет знания лишь простейших элементов римановой геометрии (включая понятие геодезической, но без параллельного переноса и кривизны).

Пусть  $(X, G)$  — пространство постоянной кривизны. Так как многообразию  $X$  односвязно, то, во-первых, оно ориентируемо и, во-вторых, каждая связная компонента группы  $G$  содержит ровно одну связную компоненту стабилизатора (любой точки). Так как представление изотропии точно, то стабилизатор изоморфен ортогональной группе. Но известно, что ортогональная группа состоит из двух связных компонент, к одной из которых относятся все ортогональные преобразования с определителем 1, а к другой — все ортогональные преобразования с определителем  $-1$ . Следовательно, группа движений пространства постоянной кривизны состоит из двух связных компонент, к одной из которых относятся все движения, сохраняющие ориентацию (*собственные движения*), а к другой — все движения, обращающие ориентацию (*несобственные движения*).

**1.4. Три пространства.** Для каждого  $n \geq 2$  можно указать по меньшей мере три  $n$ -мерных пространства постоянной кривизны.

1°. Евклидово пространство  $E^n$ .

В пространстве  $R^n$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$  введем скалярное умножение

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

превратив его тем самым в евклидово векторное пространство.

Положим

$$X = R^n, G = T_n \times O_n \text{ (полупрямое произведение),}$$

где  $T_n$  — группа параллельных переносов (изоморфная  $R^n$ ), а  $O_n$  — группа ортогональных преобразований пространства  $R^n$ .

Для параллельного переноса  $t^a$  на вектор  $a \in R^n$  и ортогонального преобразования  $\varphi \in O_n$  справедлива формула

$$\varphi t^a \varphi^{-1} = t_{\varphi(a)},$$

показывающая, что  $G$  действительно является группой. Очевидно, что  $G$  транзитивно действует на  $X$ .

Для любого  $x \in X$  касательное пространство  $T_x(X)$  отождествляется естественным образом с пространством  $\mathbb{R}^n$ . При этом группа изотропии совпадает с группой  $O_n$ .

Таким образом,  $(X, G)$  — пространство постоянной кривизны. Оно называется  $n$ -мерным *евклидовым пространством* и обозначается через  $E^n$ .

Риманова метрика пространства  $E^n$  получается из евклидовой метрики пространства  $\mathbb{R}^n$ , т. е. имеет вид

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Ее кривизна равна 0.

2°. Сфера  $S^n$ .

В пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  с координатами  $x_0, x_1, \dots, x_n$  введем скалярное умножение

$$(x, y) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

превратив его тем самым в евклидово векторное пространство.

Положим

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}, \quad G = O_{n+1}.$$

Для любого  $x \in X$  касательное пространство  $T_x(X)$  отождествляется естественным образом с ортогональным дополнением к вектору  $x$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Если  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — какой-либо ортонормированный базис пространства  $T_x(X)$ , то  $\{x, e_1, \dots, e_n\}$  — ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Так как любой ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  с помощью подходящего ортогонального преобразования может быть переведен в любой другой ортонормированный базис, то группа  $G$  действует на  $X$  транзитивно и группа изотропии в любой точке  $x$  совпадает с группой всех ортогональных преобразований пространства  $T_x(X)$ .

При  $n \geq 2$  многообразие  $X$  односвязно и, значит,  $(X, G)$  — пространство постоянной кривизны. Оно называется  $n$ -мерной *сферой* и обозначается через  $S^n$ .

Риманова метрика пространства  $S^n$  получается из евклидовой метрики пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , т. е. имеет вид

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

(Следует помнить, что  $x_0, x_1, \dots, x_n$  не являются независимыми координатами на  $S^n$ .) Кривизна этой метрики равна 1.

3°. Пространство Лобачевского  $L^n$ .

В пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  с координатами  $x_0, x_1, \dots, x_n$  введем скалярное умножение

$$(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

превратив его тем самым в псевдоевклидово векторное пространство. Это последнее пространство обозначим через  $\mathbb{R}^{n,1}$ .

Всякое псевдоортогональное (сохраняющее определенное выше скалярное умножение) преобразование пространства

$\mathbb{R}^{n,1}$  переводит в себя открытый конус «времениподобных» векторов

$$C = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : (x, x) < 0\},$$

состоящий из двух связных компонент

$$C^+ = \{x \in C : x_0 > 0\}, \quad C^- = \{x \in C : x_0 < 0\}.$$

Обозначим через  $O_{n,1}$  группу всех псевдоортогональных преобразований пространства  $\mathbb{R}^{n,1}$  и через  $O'_{n,1}$  — ее подгруппу индекса 2, состоящую из тех псевдоортогональных преобразований, которые отображают на себя каждую связную компоненту конуса  $C$ . Положим

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1, x_0 > 0\}, \quad G = O'_{n,1}.$$

Базис  $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $\mathbb{R}^{n,1}$  будем называть ортонормированным, если  $(e_0, e_0) = -1$ ,  $(e_i, e_i) = 1$  при  $i \neq 0$  и  $(e_i, e_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Например, таковым является стандартный базис.

Для любого  $x \in X$  касательное пространство  $T_x(X)$  отождествляется естественным образом с ортогональным дополнением к вектору  $x$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n,1}$ , представляющим собой  $n$ -мерное евклидово пространство (относительно того же скалярного умножения). Если  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — какой-либо ортонормированный базис этого пространства, то  $\{x, e_1, \dots, e_n\}$  — ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^{n,1}$ . Так же, как в случае сферы, отсюда следует, что группа  $G$  действует на  $X$  транзитивно и что группа изотропии совпадает с группой всех ортогональных преобразований касательного пространства.

Многообразие  $X$  диффеоморфно проектируется на пространство координат  $x_1, \dots, x_n$  и потому односвязно. Таким образом,  $(X, G)$  — пространство постоянной кривизны. Оно называется  $n$ -мерным пространством Лобачевского (или гиперболическим пространством) и обозначается через  $L^n$ .

Риманова метрика пространства  $L^n$  получается из псевдоевклидовой метрики пространства  $\mathbb{R}^{n,1}$ , т. е. имеет вид

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Ее кривизна равна  $-1$ .

Замечания. 1. Ради единообразия евклидово пространство  $E^n$  также можно вложить в виде гиперповерхности в  $\mathbb{R}^{n+1}$  так, что его движения будут индуцироваться линейными преобразованиями. А именно, пусть  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — координаты в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — подпространство, выделяемое уравнением  $x_0 = 0$ . Тогда пространство  $E^n$  может быть отождествлено с гиперплоскостью  $x_0 = 1$  так, что его движения будут индуцироваться линейными преобразованиями пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , сохраняющими координату  $x_0$  и индуцирующими в  $\mathbb{R}^n$  ортогональное преобразование (относительно стандартной евклидовой метри-

ки). Отметим, что подпространство  $R^n$  в этой модели можно естественным образом рассматривать как касательное пространство пространства  $E^n$  (в любой точке).

2. Все предыдущие построения можно было бы провести в бескоординатной форме. Так, сферу  $S^n$  можно было бы определить как множество векторов с квадратом 1 в  $(n+1)$ -мерном евклидовом векторном пространстве, а ее группу движений — как группу ортогональных преобразований этого пространства. Пространство  $L^n$  можно было бы определить как связную компоненту множества векторов с квадратом  $-1$  в  $(n+1)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры  $(n, 1)$ , а его группу движений — как подгруппу индекса 2 группы псевдоортогональных преобразований этого пространства, состоящую из преобразований, оставляющих на месте каждую связную компоненту конуса времениподобных векторов. Наряду с этим можно было бы пользоваться системой координат, в которой скалярное умножение не записывается в нормальном виде (но обладает должной сигнатурой).

3. При  $n=1$  и 0 описанные выше конструкции приводят к следующим однородным пространствам:

$E^1 \simeq L^1$  — евклидова прямая,

$S^1$  — окружность,

$E^0 \simeq L^0$  — точка,

$S^0$  — двоеточие.

При этом  $E^1 \simeq L^1$  и  $E^0 \simeq L^0$  — также пространства постоянной кривизны;  $S^1$  и  $S^0$ , согласно определению, таковыми не являются, так как не односвязны.

Описанные выше модели пространств  $S^n$  и  $L^n$ , а также модель пространства  $E^n$ , описанную в замечании 1, мы будем называть *векторными моделями*, а модель пространства  $E^n$ , описанную в начале пункта, — *аффинной моделью*. Если будет необходимо указать, что речь идет о модели, привязанной к системе координат именно так, как это было сделано выше, мы будем говорить о *стандартной векторной (аффинной) модели*.

Во всех случаях, когда не будет оговорено противное, мы будем предполагать, что риманова метрика в пространствах  $S^n$  и  $L^n$  нормирована, как в настоящем пункте. При умножении римановой метрики на число  $c > 0$  кривизна делится на  $c$ .

1.6. Подпространства пространства  $R^{n,1}$ . Имея в виду последнее использование векторной модели пространства Лобачевского, приведем здесь классификацию подпространств псевдоевклидова векторного пространства  $R^{n,1}$ . Подпространство  $U \subset R^{n,1}$  называется *эллиптическим* (соответственно *параболическим, гиперболическим*), если ограничение на него скалярного умножения пространства  $R^{n,1}$  положительно определено (соответственно положительно полуопределенно и вырожденно, неопределенно).

Эти три типа подпространств могут быть охарактеризованы своим расположением относительно конуса  $C$  времениподобных векторов (рис. 1).

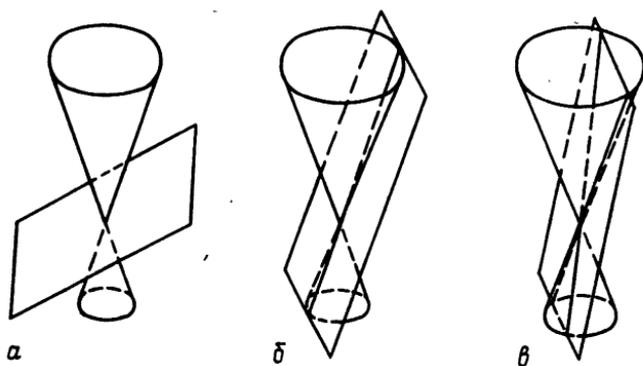


Рис. 1

Любые два подпространства одного типа и одной размерности, согласно теореме Витта (см., например, [7]), могут быть переведены одно в другое псевдоортогональным преобразованием.

Ортогональное дополнение  $U^\perp$  к эллиптическому (соответственно параболическому, гиперболическому) подпространству  $U$  есть гиперболическое (соответственно параболическое, эллиптическое) подпространство.

## § 2. Теорема классификации

**2.1. Формулировка теоремы.** Однородные пространства  $(X_1, G_1)$  и  $(X_2, G_2)$  называются *изоморфными*, если существуют диффеоморфизм  $f: X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$  и изоморфизм (групп Ли)  $\varphi: G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$  такие что

$$f(gx) = \varphi(g)f(x)$$

для любых  $x \in X_1, g \in G_1$ .

**Теорема 2.1.** Всякое пространство постоянной кривизны изоморфно одному из пространств  $E^n, S^n, L^n$ .

(Описание этих пространств было дано в п. 1.5).

Отметим, что при  $n \geq 2$  пространства  $E^n, S^n$  и  $L^n$  не изоморфны между собой, так как различаются знаком кривизны. Впрочем, это вытекает и из многочисленных отличий в их элементарной геометрии, которые будут установлены ниже.

Доказательство теоремы 2.1 будет дано в пп. 2.2—2.4.

**2.2. Редукция к алгебрам Ли.** Однородное пространство  $(X, G)$  с точностью до изоморфизма однозначно определяется

парой  $(G, K)$ , где  $K = G_x$  — стабилизатор точки  $x \in X$  (см. п. 1.1).

Пусть  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{k}$  — касательные алгебры групп Ли  $G$  и  $K$  соответственно. Если группа  $G$  связна, а многообразии  $X$  односвязно, то пара  $(G, K)$  однозначно определяется парой  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$  (см., например, [27]). Это соображение, однако, не может быть непосредственно применено к пространствам постоянной кривизны, так как их группа движений не связна. Тем не менее может быть доказана

**Лемма 2.2.** Пространство  $(X, G)$  постоянной кривизны с точностью до изоморфизма однозначно определяется парой  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ .

◀ В самом деле, поскольку многообразие  $X$  связно, связная компонента  $G_+$ -группы  $G$  транзитивно действует на  $X$ , и мы можем применить приведенное выше соображение к однородному пространству  $(X, G_+)$ . Остается показать, что группа  $G$  (как группа преобразований многообразия  $X$ ) может быть восстановлена по  $G_+$ .

Заметим для этого, что группа изотропии однородного пространства  $(X, G_+)$  в точке  $x \in X$  совпадает со связной компонентой группы  $d_x G_x$  т. е. со специальной ортогональной группой пространства  $T_x(X)$ . Легко видеть, что группа  $SO_n$ , как и вся группа  $O_n$ , действует в  $\mathbb{R}^n$  неприводимо. Ввиду леммы 1.4, отсюда следует, что  $G$ -инвариантная риманова метрика на  $X$  — это единственная (с точностью до постоянного множителя)  $G_+$ -инвариантная риманова метрика. Тем самым она определяется по группе  $G_+$ . После этого группа  $G$  восстанавливается как группа всех движений в смысле этой метрики. ▶

Таким образом, чтобы доказать теорему, нам достаточно установить, что для каждого значения  $n$  имеется не более трех неизоморфных пар  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ , отвечающих  $n$ -мерным пространствам постоянной кривизны.

**2.3. Симметрия.** Пусть  $(X, G)$  — пространство постоянной кривизны.

Согласно аксиоме максимальной подвижности для каждой точки  $x \in X$  существует (единственное) движение  $\sigma_x \in G$ , удовлетворяющее условиям

$$\sigma_x x = x, \quad d_x \sigma_x = -\text{id}.$$

Это движение называется *симметрией* относительно точки  $x$ .

Укажем некоторые следствия, вытекающие из наличия симметрии.

Прежде всего, очевидно, что

$$g \sigma_x g^{-1} = \sigma_{gx}$$

для любого  $g \in G$ . В частности, элементы из  $G_x$  коммутируют с  $\sigma_x$ .

Далее, так как в геодезических координатах в окрестности точки  $x$  симметрия  $\sigma_x$  представляет собой умножение на  $-1$ ,

то  $x$  является единственной ее неподвижной точкой в этой окрестности. Следовательно, в некоторой окрестности единицы группы  $G$  все элементы, коммутирующие с  $\sigma_x$ , принадлежат подгруппе  $G_x$ .

Таким образом, централизатор симметрии  $\sigma_x$  в группе  $G$  содержит подгруппу  $G_x$  в качестве открытой подгруппы, т. е. отличается от нее, быть может, лишь дополнительными связанными компонентами.

Зафиксируем некоторую точку  $x \in X$  и положим  $G_x = K$ ,  $\sigma_x = \sigma$ . Обозначим через  $s$  внутренний автоморфизм группы  $G$ , определяемый элементом  $\sigma$ , и через  $S$  — соответствующий автоморфизм  $d_e s = \text{Ad } \sigma$  (где  $\text{Ad}$  — присоединенное представление группы  $G$ ) касательной алгебры  $\mathfrak{g}$  группы  $G$ .

Подалгебра неподвижных точек автоморфизма  $S$  есть касательная алгебра подгруппы неподвижных точек автоморфизма  $s$  и согласно доказанному выше совпадает с касательной алгеброй  $\mathfrak{k}$  подгруппы  $K$ . Далее, так как  $S^2 = \text{id}$ , то алгебра  $\mathfrak{g}$  как векторное пространство разлагается в прямую сумму собственных подпространств автоморфизма  $S$ , отвечающих собственным значениям  $1$  и  $-1$ .

Первое из них есть  $\mathfrak{k}$ , второе мы обозначим через  $\mathfrak{m}$ . Так как  $S$  — автоморфизм алгебры  $\mathfrak{g}$ , то разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \quad (1)$$

обладает следующими свойствами:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}. \quad (2)$$

Кроме того, так как  $\sigma$  коммутирует со всеми элементами из  $K$ , то  $S = \text{Ad } \sigma$  коммутирует со всеми элементами из  $\text{Ad } K$ . Это означает, что оба члена разложения (1) инвариантны относительно  $\text{Ad } K$ .

**2.4. Строение касательной алгебры группы движений.** Сохраняя предположения и обозначения предыдущего пункта, зафиксируем инвариантную риманову метрику на  $X$ . (Напомним, что она определена с точностью до постоянного множителя.)

Тем самым в пространстве  $V = T_x(X)$  будет задана евклидова метрика. Обозначим через  $O(V)$  группу ортогональных преобразований пространства  $V$  и через  $\mathfrak{so}(V)$  — ее касательную алгебру, состоящую, как известно, из всех кососимметрических преобразований.

Отображение  $k \mapsto d_x k$  согласно определению пространства постоянной кривизны является изоморфизмом группы  $K$  на группу  $O(V)$ . Так как это отображение дифференцируемо, то оно является изоморфизмом групп Ли, а его дифференциал — изоморфизмом алгебры Ли  $\mathfrak{k}$  на алгебру Ли  $\mathfrak{so}(V)$ . Пользуясь этими изоморфизмами, отождествим группу  $K$  с группой  $O(V)$ , а ее касательную алгебру  $\mathfrak{k}$  — с алгеброй  $\mathfrak{so}(V)$ . Тем самым

будет определен первый член разложения (1) вместе с присоединенным действием на нем группы  $K$ .

Второй член разложения (1) естественным образом отождествляется с пространством  $V$ . А именно, рассмотрим отображение

$$\alpha: G \rightarrow X, \quad g \rightarrow gx.$$

Его дифференциал  $d_e \alpha$ , ввиду транзитивности действия группы  $G$  на  $X$ , отображает  $\mathfrak{g}$  на  $V$ , причем ядром этого отображения является касательная алгебра стабилизатора точки  $x$ , т. е. подалгебра  $\mathfrak{k}$  (см., например, [25]). Поэтому  $d_e \alpha$  изоморфно отображает подпространство  $\mathfrak{m}$  на  $V$ . Пользуясь этим изоморфизмом, мы и отождествим  $\mathfrak{m}$  с  $V$ .

Таким образом, имеем:

$$K = O(V), \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(V), \quad \mathfrak{m} = V. \quad (3)$$

Легко убедиться, что отображение  $\alpha$  перестановочно с действием группы  $K$ , если считать, что  $K$  действует на  $G$  внутренними автоморфизмами. Следовательно, его дифференциал  $d_e \alpha$  также перестановочен с действием группы  $K$ , если считать, что  $K$  действует на  $\mathfrak{g}$  дифференциалами внутренних автоморфизмов, т. е. посредством присоединенного представления. Это означает, что при наших отождествлениях присоединенное действие группы  $K$  на  $\mathfrak{m}$  совпадает с естественным действием группы  $O(V)$  на  $V$ :

$$(\text{Ad } C)v = Cv \quad (C \in O(V) = K, \quad v \in V = \mathfrak{m}). \quad (4)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что присоединенное действие алгебры  $\mathfrak{k}$  на  $\mathfrak{m}$  совпадает с естественным действием алгебры  $\mathfrak{so}(V)$  на  $V$ :

$$[A, v] = Av \quad (A \in \mathfrak{so}(V) = \mathfrak{k}, \quad v \in V = \mathfrak{m}). \quad (5)$$

Тем самым определены коммутаторы элементов из  $\mathfrak{k}$  с элементами из  $\mathfrak{m}$ .

Для полного определения алгебры  $\mathfrak{g}$  остается указать правило вычисления коммутатора двух элементов из  $\mathfrak{m}$ . Это правило может быть записано в виде

$$[u, v] = T(u, v) \quad (u, v \in V = \mathfrak{m}, \quad T(u, v) \in \mathfrak{so}(V) = \mathfrak{k}), \quad (6)$$

где  $T: V \times V \rightarrow \mathfrak{so}(V)$  — некоторое кососимметрическое билинейное отображение.

Применим к равенству (6) оператор  $\text{Ad } C$ , где  $C \in O(V) = K$ . Пользуясь тем, что  $\text{Ad } C$  — автоморфизм алгебры  $\mathfrak{g}$  и данным выше описанием его действия на  $\mathfrak{k}$  и на  $\mathfrak{m}$ , мы получим:

$$T(Cu, Cv) = CT(u, v)C^{-1}. \quad (7)$$

Последнее соотношение, справедливое для любого  $C \in O(V)$ , позволяет почти однозначно определить отображение  $T$ . В самом деле, пусть  $w$  — какой-либо вектор, ортогональ-

ный  $u$  и  $v$ . Взяв в качестве  $S$  отражение относительно гиперплоскости, ортогональной  $\omega$ , и применив равенство (7) к  $\omega$ , получим  $T(u, v)\omega = -CT(u, v)\omega$ , т. е.  $T(u, v)\omega = a\omega$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ; но так как  $T(u, v)$  — кососимметрический оператор, то  $a=0$  и, значит,  $T(u, v)\omega = 0$ . Таким образом, оператор  $T(u, v)$  может нетривиально действовать только в подпространстве, натянутом на  $u$  и  $v$ .

Пусть теперь  $u$  и  $v$  — ортогональные единичные векторы. Имеем

$$T(u, v)u = \rho v, \quad T(u, v)v = -\rho u,$$

где  $\rho$  — некоторое число. Из (7) следует, что  $\rho$  не зависит от  $u$  и  $v$ , поскольку любую пару ортогональных единичных векторов с помощью подходящего ортогонального преобразования можно перевести в любую другую такую пару.

При тех же предположениях относительно  $u$  и  $v$  для любого вектора  $\omega$  имеем, согласно доказанному,

$$T(u, v)\omega = \rho[(u, \omega)v - (v, \omega)u]. \quad (8)$$

Так как обе части этого равенства линейны и кососимметричны по  $u$  и  $v$ , то оно выполняется и для любых  $u$  и  $v$ . Формулы (6) и (8) определяют закон коммутирования элементов из  $\mathfrak{h}$ , если известно  $\rho$ .

Итак, пара  $(g, \mathfrak{f})$  полностью определяется числом  $\rho$ .

Если  $\rho \neq 0$ , то с помощью выбора масштаба можно сделать  $\rho = \pm 1$ . Следовательно, имеется не более трех возможностей для пары  $(g, \mathfrak{f})$ , откуда и следует утверждение теоремы.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что значениям  $\rho = 0, 1$  и  $-1$  отвечают пространства  $E^n, S^n$  и  $L^n$  соответственно. При  $n=1$  имеется только одно пространство, так как в этом случае  $\rho$  не определено.

**2.5. Пространство Римана.** Если в определении 1.5 пространств постоянной кривизны отказаться от требования односвязности, ограничившись лишь требованием связности, то появятся новые возможности, которые, однако, нетрудно перечислить. Это, во-первых, окружность  $S^1$  и, во-вторых,  $n$ -мерное пространство Римана (или эллиптическое пространство)  $R^n$ , получаемое из сферы  $S^n$  отождествлением диаметрально противоположных точек. Пространство  $R^n$  представляет собой  $n$ -мерное вещественное проективное пространство, снабженное римановой метрикой, индуцированной метрикой сферы.

◀ Пусть  $(X, G)$  — связное однородное пространство, удовлетворяющее аксиоме максимальной подвижности.

Рассмотрим односвязное накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  многообразия  $X$ . Как известно, для любого диффеоморфизма  $f: X \rightarrow X$  и любой пары точек  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ , удовлетворяющей условию  $f(p(\tilde{x}_1)) = p(\tilde{x}_2)$ , существует единственный диффеоморфизм  $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ , удовлетворяющий условиям  $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  и  $p(\tilde{f}(\tilde{x})) = f(p(\tilde{x}))$  для любого

$x \in \tilde{X}$ . Говорят, что диффеоморфизм  $\tilde{f}$  накрывает диффеоморфизм  $f$ . Все диффеоморфизмы многообразия  $\tilde{X}$ , накрывающие диффеоморфизмы из  $G$ , также образуют группу. Обозначим ее через  $\tilde{G}$ . Отображение  $\varphi: \tilde{G} \rightarrow G$ , сопоставляющее каждому диффеоморфизму из  $\tilde{G}$  накрываемый им диффеоморфизм из  $G$ , является эпиморфизмом групп. Ядро  $\Gamma$  этого эпиморфизма есть не что иное, как группа скольжений накрытия  $p$ .

Группа  $\tilde{G}$  наделяется структурой группы Ли, при которой ее действие на  $\tilde{X}$  и гомоморфизм  $\varphi$  дифференцируемы, а подгруппа  $\Gamma$  дискретна. Как всякая дискретная нормальная подгруппа группы Ли, группа  $\Gamma$  содержится в централизаторе  $Z(\tilde{G}_+)$  связанной компоненты  $\tilde{G}_+$  группы  $\tilde{G}$ .

Легко видеть, что группа  $\tilde{G}$  транзитивно действует на  $\tilde{X}$  и что однородное пространство  $(\tilde{X}, \tilde{G})$  удовлетворяет аксиоме максимальной подвижности. Так как оно по построению одно связно, то оно изоморфно одному из пространств  $E^n, S^n, \mathbb{R}^n$ .

Предположим, что накрытие  $p$  нетривиально, т. е.  $\Gamma \neq \{e\}$ . Анализ групп движений пространств постоянной кривизны пока зывает, что  $Z(\tilde{G}_+) \neq \{e\}$ , только если  $\tilde{X} \simeq E^1$  или  $S^n$ . В первом случае  $Z(\tilde{G}_+) = \tilde{G}_+ \simeq \mathbb{R}$ ,  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$  и  $X = \tilde{X}/\Gamma \simeq S^1$ . Во втором случае  $\Gamma = Z(\tilde{G}^0) = \{\pm \text{id}\}$  и  $X = S^n/\{\pm \text{id}\}$  есть пространство Римана; при этом  $G = O_{n+1}/\{\pm \text{id}\} = PO_{n+1}$ . ▶

### § 3. Подпространства и выпуклость

В оставшейся части этой главы мы будем считать, что действие происходит в фиксированном  $n$ -мерном пространстве постоянной кривизны  $(X, G)$ , так что «точка» будет означать «точка пространства  $X$ », «движение» — «движение пространства  $X$ » и т. п.

**3.1. Инволюции.** Пространства постоянной кривизны замечательны тем, что в них имеется много «подпространств» того же типа (смысл слова «много» точно разъясняется в п. 3.2). С точки зрения римановой геометрии подпространства представляют собой вполне геодезические подмногообразия. Однако удобнее определить их в терминах группы движений, а именно, как множества неподвижных точек инволюций.

Из перестановочности движений с экспоненциальным отображением следует, что для любого движения  $g$  множество  $X^g$  его неподвижных точек является вполне геодезическим подмногообразием и что при  $x \in X^g$  касательное пространство  $T_x(X^g)$  совпадает с подпространством неподвижных векторов линейного оператора  $d_x g$ .

Движение  $\sigma$  называется *инволюцией*, если  $\sigma^2 = \text{id}$ . Дифференциал инволюции  $\sigma$  в точке  $x \in X^\sigma$  представляет собой ортого-

нальное отражение относительно подпространства  $T_x(X^\sigma)$ . Отсюда следует, что инволюция  $\sigma$  однозначно определяется подмногообразием  $X^\sigma$ , если только оно не пусто. Очевидно также, что

$$gX^\sigma = X^{g\sigma g^{-1}} \quad (9)$$

для любого движения  $g$ . В частности, подмногообразие  $X^\sigma$  (если оно не пусто) инвариантно относительно движения  $g$  тогда и только тогда, когда  $g$  перестановочно с  $\sigma$ .

Для любой инволюции  $\sigma$  обозначим через  $G^\sigma$  группу движений многообразия  $X^\sigma$ , индуцированных преобразованиями из группы  $G$ , перестановочными с  $\sigma$ . Эта группа естественно изоморфна факторгруппе централизатора инволюции  $\sigma$  в группе  $G$  по подгруппе, образованной движениями, тождественно действующими на  $X^\sigma$ .

**Теорема 3.1.** Подмногообразие  $X^\sigma$  непусто для любой инволюции  $\sigma \in G$ , за исключением случая  $X = S^n$ ,  $\sigma = -\text{id}$ . Для любого  $k=0, 1, \dots, n$  существует такая инволюция  $\sigma \in G$ , что  $\dim X^\sigma = k$ . При этом

- 1) все такие инволюции сопряжены в группе  $G$ ;
- 2) группа  $G^\sigma$  действует на  $X^\sigma$  транзитивно;
- 3) однородное пространство  $(X^\sigma, G^\sigma)$  является пространством постоянной кривизны того же типа, что и  $(X, G)$ , за исключением случаев, когда  $X = S^n$ , а  $k=1$  или  $0$ ; в этих случаях  $(X^\sigma, G^\sigma)$  есть окружность  $S^1$  и двоеточие  $S^0$  соответственно.

◀ Доказательство этой теоремы удобно получить вместе с явным описанием инволюций в векторной модели пространства  $X$  (см. п. 1.5). Всякая инволюция  $\sigma \in G$  в этой модели индуцируется инволютивным линейным преобразованием пространства  $\mathbf{R}^{n+1}$ ; обозначим его той же буквой  $\sigma$ . Как известно из линейной алгебры,

$$\mathbf{R}^{n+1} = V^+(\sigma) \oplus V^-(\sigma), \quad (10)$$

где  $V^+(\sigma)$  и  $V^-(\sigma)$  — собственные подпространства преобразования  $\sigma$ , отвечающие собственным значениям  $1$  и  $-1$  соответственно.

Условие  $\sigma \in G$  означает следующее:

- 1) в случае  $X = E^n$  —  $V^-(\sigma) \subset \mathbf{R}^n$  и  $V^+(\sigma) \cap \mathbf{R}^n$  ортогонально  $V^-(\sigma)$ ;
- 2) в случае  $X = S^n$  —  $V^+(\sigma)$  и  $V^-(\sigma)$  ортогональны относительно евклидовой метрики пространства  $\mathbf{R}^{n+1}$ ;
- 3) в случае  $X = \mathbb{L}^n$  —  $V^+(\sigma)$  и  $V^-(\sigma)$  ортогональны относительно псевдоевклидовой метрики пространства  $\mathbf{R}^{n+1}$  и  $V^-(\sigma)$  — эллиптическое подпространство.

В этих обозначениях имеем  $X^\sigma = X \cap V^+(\sigma)$ , так что если  $V^+(\sigma) \neq 0$ , то  $X^\sigma \neq \emptyset$ , причем  $\dim X^\sigma = \dim V^+(\sigma) - 1$ . Очевидно, что  $V^+(\sigma) = 0$  только в случае  $X = S^n$ ,  $\sigma = -\text{id}$ .

Из свойств разложения (10) следует, что оно полностью

определяется подпространством  $V^+(\sigma)$ . Если инволюции  $\sigma_1, \sigma_2$  таковы, что  $\dim V^+(\sigma_1) = \dim V^+(\sigma_2)$ , то существует такое линейное преобразование  $g \in G$ , что  $gV^+(\sigma_1) = V^+(\sigma_2)$  и, значит,  $g\sigma_1g^{-1} = \sigma_2$ .

Подпространство  $V^+(\sigma)$  наследует структуру того же типа, что имеется в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а именно:

1) в случае  $X = E^n$  — выделенное подпространство коразмерности единица ( $= V^+(\sigma) \cap \mathbb{R}^n$ ) и евклидову метрику в нем;

2) в случае  $X = S^n$  — евклидову метрику;

3) в случае  $X = \mathbb{L}^n$  — псевдоевклидову метрику и выделенную связную компоненту ( $= V^+(\sigma) \cap C^+$ ) конуса времениподобных векторов.

Эта структура инвариантна относительно всех линейных преобразований  $g \in G$ , перестановочных с  $\sigma$ . Обратное, всякое линейное преобразование пространства  $V^+(\sigma)$ , сохраняющее эту структуру, продолжается до линейного преобразования  $g \in G$ , перестановочного с  $\sigma$ : достаточно положить  $g|_{V^+(\sigma)} = \text{id}$ .

Из сказанного выше вытекают все утверждения теоремы. ▶

**3.2. Плоскости.** Определение 3.2. Непустое множество  $Y \subset X$  называется *плоскостью*, если оно является множеством неподвижных точек некоторой инволюции  $\sigma \in G$ ; однородное пространство  $(Y, G^\sigma)$  называется в этом случае *подпространством* пространства  $(X, G)$ , а инволюция  $\sigma$  — *отражением* относительно плоскости  $Y$ .

Отражение относительно плоскости  $Y$  мы будем обозначать через  $\sigma_Y$ .

В векторной модели  $k$ -мерная плоскость  $Y$  пространства  $X$  — это не что иное, как непустое пересечение с  $X$  некоторого  $(k+1)$ -мерного подпространства  $U$  пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Условие непустоты означает, что подпространство  $U$  в случае  $X = E^n$  не содержится целиком в  $\mathbb{R}^n$ , а в случае  $X = \mathbb{L}^n$  является гиперболическим. Подпространство  $U$  называется *определяющим подпространством* плоскости  $Y$ . Очевидно, что  $U = \langle Y \rangle$ .

Касательное пространство плоскости  $Y$  в точке  $y$  в случаях  $X = S^n$  и  $\mathbb{L}^n$  естественным образом отождествляется с ортогональным дополнением к  $\langle y \rangle$  в  $U$ , а в случае  $X = E^n$  — с  $U \cap \mathbb{R}^n$ . Его ортогональное дополнение в  $T_y(X)$  в случаях  $X = S^n$  и  $\mathbb{L}^n$  естественным образом отождествляется с  $U^\perp$ , а в случае  $X = E^n$  — с ортогональным дополнением к  $U \cap \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ . Это подпространство пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , не зависящее от точки  $y \in Y$ , называется *нормальным пространством* плоскости  $Y$  и обозначается через  $N(Y)$ .

Множество неподвижных точек любого движения, если оно не пусто, является плоскостью; пересечение любого семейства плоскостей, если оно не пусто, также является плоскостью.

Из (9) следует, что движения переводят плоскости в плоскости.

Нульмерные плоскости — это точки в случаях  $X=E^n$  и  $L^n$  и двоеточия (состоящие из диаметрально противоположных точек) в случае  $X=S^n$ . Одномерные плоскости называются *прямыми*,  $(n-1)$ -мерные плоскости — *гиперплоскостями*.

Отметим, что плоскости евклидова пространства в аффинной модели — это то же, что плоскости в смысле аффинной геометрии.

Следующие две теоремы описывают многообразие плоскостей. Для евклидова пространства они хорошо известны из аффинной геометрии.

**Теорема 3.3.** Через любую точку по любому  $k$ -мерному направлению проходит ровно одна  $k$ -мерная плоскость.

◀ Из аксиомы максимальной подвижности следует, что существует (единственная) инволюция, дифференциал которой в данной точке есть отражение относительно данного  $k$ -мерного подпространства касательного пространства. Подмногообразие неподвижных точек этой инволюции и является искомой плоскостью. ▶

**Следствие.** Прямые — это то же, что геодезические в смысле римановой геометрии.

◀ Всякая прямая является геодезической как подмножество неподвижных точек инволюции; но так как через любую точку по любому направлению проходит ровно одна прямая и ровно одна геодезическая, то и, наоборот, всякая геодезическая является прямой. ▶

**Теорема 3.4.** Через любые  $k+1$  точек проходит плоскость размерности  $\leq k$ .

◀ Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_k$  — заданные точки. В векторной модели пространства  $X$  искомой плоскостью будет пересечение с  $X$  подпространства пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , натянутого на  $x_0, x_1, \dots, x_k$ . ▶

Говорят, что точки  $x_0, x_1, \dots, x_k$  находятся в *общем положении*, если они не лежат ни в какой плоскости размерности  $< k$ . Из предыдущей теоремы следует, что через любые  $k+1$  точек, находящиеся в общем положении, проходит ровно одна  $k$ -мерная плоскость. В самом деле, если бы эти точки лежали в двух различных  $k$ -мерных плоскостях, то они лежали бы и в плоскости размерности  $< k$ , являющейся пересечением этих плоскостей.

**3.3. Полупространства и выпуклые множества.** Через любые две различные точки  $x, y$ , не являющиеся в случае  $X=S^n$  диаметрально противоположными, согласно теореме 3.4 проходит единственная прямая  $l$ . Будем называть *отрезком*, соединяющим  $x$  с  $y$ , и обозначать через  $xy$  отрезок прямой  $l$  с концами  $x$  и  $y$ , если  $l \simeq E^1$ , и кратчайшую из двух дуг прямой  $l$  с концами  $x$  и  $y$ , если  $l \simeq S^1$ . С точки зрения римановой геометрии отрезок  $xy$  есть единственная кратчайшая линия, соединяющая

$x$  с  $y$ . Если  $x=y$ , то будем считать отрезком  $xy$  подмножество, состоящее из одной точки  $x$ .

**Определение 3.5.** Множество  $P \subset X$  называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками, не являющимися в случае  $X=S^n$  диаметрально противоположными, оно целиком содержит соединяющий их отрезок.

Очевидно, что пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Всякая плоскость является выпуклым множеством, так как вместе с любыми двумя точками, не являющимися диаметрально противоположными, она содержит не только соединяющий их отрезок, но и всю проходящую через них прямую.

В векторной модели пространства  $X$  множество  $P \subset X$  выпукло тогда и только тогда, когда множество  $R_+P = \{ax : x \in P, a \geq 0\}$  является выпуклым конусом объемлющего векторного пространства  $R^{n+1}$ .

Выпуклые множества евклидова пространства в аффинной модели — это то же, что выпуклые множества в смысле аффинной геометрии.

**Теорема 3.6.** Пусть  $P$  —  $(k-1)$ -мерная плоскость и  $Q$  —  $k$ -мерная плоскость ( $k > 0$ ), содержащая  $P$ . Множество  $Q \setminus P$  состоит из двух связных компонент, причем обе эти компоненты, равно как и их объединения с плоскостью  $P$ , являются выпуклыми множествами.

◀ Пусть  $L$  и  $M$  — определяющие подпространства плоскостей  $P$  и  $Q$  соответственно. Имеем  $L \subset M$ . Существует линейная функция  $f$  на  $R^{n+1}$ , равная нулю на  $L$ , но не равная нулю на  $M$ . Тогда

$$Q \setminus P = \{x \in Q : f(x) > 0\} \cup \{x \in Q : f(x) < 0\}$$

есть разбиение множества  $Q \setminus P$  на два непересекающихся выпуклых множества, которые и являются его связными компонентами. Их объединения с плоскостью  $P$  задаются нестрогим неравенствами  $f(x) \geq 0$  и  $f(x) \leq 0$  соответственно и, очевидно, также выпуклы. ▶

**Определение 3.7.** В обозначениях теоремы 3.6 связные компоненты множества  $Q \setminus P$  (соответственно их объединения с плоскостью  $P$ ) называются *открытыми* (соответственно *замкнутыми*) *полуплоскостями*, на которые плоскость  $Q$  разбивается плоскостью  $P$ .

В дальнейшем, говоря о полуплоскостях, мы будем, если не будет оговорено противное, иметь в виду замкнутые полуплоскости.

В частности, само пространство  $X$  разбивается любой гиперплоскостью  $H$  на два *полупространства*, которые переставляются отражением  $\sigma_H$ . Они называются *полупространствами*, ограничиваемыми гиперплоскостью  $H$ , и обозначаются через  $H^+$  и  $H^-$ . Указание того, какое из них считается «положитель-

ным» (и обозначается через  $H^+$ ), называется *ориентацией гиперплоскости  $H$* .

**Теорема 3.8.** Всякое замкнутое выпуклое множество является пересечением полупространств.

◀ Доказательство этой теоремы для множества  $P$  в векторной модели сводится к применению аналогичной теоремы аффинной геометрии (см., например, [7]) к замыканию выпуклого конуса  $R_+P$  в объемлющем векторном пространстве. ▶

В свете этой теоремы представляется естественным выделение тех выпуклых множеств, которые являются пересечением конечного числа полупространств.

**Определение 3.9.** Пересечение конечного числа полупространств, имеющее непустую внутренность, называется *выпуклым многогранником*.

### 3.4. Ортогональные плоскости.

**Определение 3.10.** Плоскости  $Y$  и  $Z$  называются *ортогональными*, если их пересечение есть нульмерная плоскость и в (любой) точке пересечения их касательные пространства ортогональны.

В векторной модели пространства  $X=S^n$  или  $L^n$  ортогональность плоскостей  $Y$  и  $Z$  означает следующее:

1) их определяющие подпространства  $\langle Y \rangle$  и  $\langle Z \rangle$  пересекаются по одномерному подпространству вида  $\langle y \rangle$ , где  $y \in X$  (т. е. любому — в случае  $X=S^n$  и по гиперболическому — в случае  $X=L^n$ );

2) сечения подпространств  $\langle Y \rangle$  и  $\langle Z \rangle$  ортогональным дополнением к  $\langle y \rangle$  (которое, как мы знаем, отождествляется с касательным пространством  $T_y(X)$ ) ортогональны друг другу.

Для формулировки следующей теоремы введем одно понятие, касающееся плоскостей на сфере. Для любой плоскости  $Y \subset S^n$  совокупность точек, переходящих при отражении  $\sigma_Y$  в диаметрально противоположную точку, в векторной модели представляет собой пересечение сферы с ортогональным дополнением  $\langle Y \rangle^\perp$  к подпространству  $\langle Y \rangle$  и потому является плоскостью размерности  $n-1-\dim Y$ . Эта плоскость называется *полярной* (или *полярной плоскостью*) плоскости  $Y$  и обозначается через  $Y^*$ . Очевидно, что  $(Y^*)^*=Y$ . Полярной точки является гиперплоскость, и наоборот.

**Теорема 3.11.** Пусть  $Y$  — какая-либо  $k$ -мерная плоскость и  $x$  — какая-либо точка. Если (в случае сферы)  $x \notin Y^*$ , то через точку  $x$  проходит единственная  $(n-k)$ -мерная плоскость  $L$ , ортогональная  $Y$ . Если, кроме того,  $x \notin Y$ , то через точку  $x$  проходит единственная прямая  $l$ , ортогональная  $Y$ ; при этом  $l \subset L$ .

◀ Опуская хорошо известный случай  $X=E^n$ , рассмотрим векторную модель пространства  $X=S^n$  или  $L^n$ . Заметим, что  $x \notin \langle Y \rangle^\perp$  (в случае  $X=S^n$  — по условию теоремы, а в случае  $X=L^n$  — потому что подпространство  $\langle Y \rangle^\perp$  является эллиптическим).

Существует единственное разложение

$$x = y' + z' \quad (y' \in \langle Y \rangle, z' \in \langle Y \rangle^\perp, y' \neq 0).$$

Согласно данному выше описанию ортогональных плоскостей в векторной модели, определяющее подпространство всякой плоскости  $Z \subset X$ , проходящей через  $x$  и ортогональной  $Y$ , имеет вид

$$\langle Z \rangle = \langle y' \rangle \oplus U,$$

где  $U \subset \langle Y \rangle^\perp$  — подпространство размерности, равной  $\dim Z$ . Если при этом  $\dim Z = n - k$ , то должно быть  $U = \langle Y \rangle^\perp$ . Если  $\dim Z = 1$  и  $x \notin Y$ , то  $z' \neq 0$  и должно быть  $U = \langle z' \rangle$ . Отсюда вытекают все утверждения теоремы.

Если  $X = S^n$  и  $x \in Y^*$ , то любая прямая, проходящая через  $x$ , ортогональна  $Y$ .

**Определение 3.12.** *Проекцией* (или, точнее, *ортогональной проекцией*) точки  $x$  на плоскость  $Y$  называется точка  $y$  пересечения плоскости  $Y$  с прямой  $l$ , проходящей через  $x$  и ортогональной  $Y$ . При этом в случае  $X = S^n$  из двух точек пересечения выбирается та, которая ближе к  $x$ , а если  $x \in Y^*$ , то считается, что проекция не определена. Если  $x \in Y$ , то проекцией считается сама точка  $x$ .

Отрезок  $xu$  называется *перпендикуляром*, опущенным из точки  $x$  на плоскость  $Y$ .

Из приведенного выше доказательства теоремы 3.10 следует, что в векторной модели пространства  $X = S^n$  или  $L^n$  проекция  $y$  точки  $x$  на плоскость  $Y$  представляется вектором, пропорциональным ортогональной проекции  $y'$  вектора  $x$  на подпространство  $\langle Y \rangle$ . При этом коэффициент пропорциональности положителен. Это следует в случае  $X = S^n$  из неравенств  $(x, y) > 0$  и  $(x, y') = (x, x) > 0$ , а в случае  $X = L^n$  — из неравенств  $(x, y) < 0$  и  $(x, y') = (x, x) < 0$ .

Отображение, сопоставляющее каждой точке ее проекцию на плоскость  $Y$  (если она определена), называется *проектированием* (точнее, *ортогональным проектированием*) на плоскость  $Y$ . Мы будем обозначать его через  $\pi_Y$ .

Из приведенного выше описания проекции на плоскость в векторной модели пространства  $X = S^n$  или  $L^n$  вытекает следующая «теорема о трех перпендикулярах».

**Теорема 3.13.** Если  $Z$  — плоскость, содержащаяся в плоскости  $Y$ , то

$$\pi_Z \pi_Y = \pi_Z.$$

## § 4. Метрика

**4.1. Общие свойства.** Как во всяком полном римановом многообразии, в пространстве постоянной кривизны  $X$  для любых двух точек  $x, y$  существует кратчайшая линия (она автоматически является геодезической), соединяющая эти точки. Ее дли-

на называется *расстоянием* между точками  $x$  и  $y$  обозначается через  $\rho(x, y)$ . В п. 3.3 мы отметили, что если (в случае сферы) точки  $x$  и  $y$  не являются диаметрально противоположными, такая линия единственна и совпадает с отрезком  $xy$  прямой, проходящей через эти точки. Если  $X=S^n$  и точки  $x$  и  $y$  диаметрально противоположны, то такой линией является любая полупрямая, соединяющая эти точки; в этом случае  $\rho(x, y) = \pi$  (максимальное возможное расстояние между точками на сфере).

Пространство  $X$  с расстоянием  $\rho$  является метрическим пространством. В частности, выполняется неравенство треугольника

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда отрезки  $xy$  и  $yz$  лежат на одной прямой таким образом, что каждый из них является продолжением другого и (в случае сферы) они вместе составляют не более половины этой прямой.

Расстояние  $\rho$  согласовано с топологией пространства  $X$  и, в частности, непрерывно по совокупности аргументов. Всякое ограниченное замкнутое множество компактно.

Расстояние  $\rho(A, B)$  между множествами  $A, B \subset X$  определяется как нижняя грань расстояний между их точками. Если множества  $A$  и  $B$  замкнуты и хотя бы одно из них компактно, то  $\rho(A, B) = \rho(x, y)$  для некоторых точек  $x \in A, y \in B$ .

Если  $B$  — подмногообразие и  $\rho(A, B) = \rho(x, y)$  для каких-то точек  $x \in A, y \in B$ , то простые соображения римановой геометрии показывают, что отрезок  $xy$  ортогонален  $B$  (в точке  $y$ ). В частности, отсюда следует, что расстояние от точки  $x$  до плоскости  $Y$  равно длине перпендикуляра, опущенного из  $x$  на  $Y$ , и строго меньше длины любого другого отрезка, соединяющего  $x$  с точкой плоскости  $Y$ , за исключением случая, когда  $X=S^n$  и  $x \in Y^*$ . В этом последнем случае все отрезки, соединяющие  $x$  с точками плоскости  $Y$ , ортогональны  $Y$  и имеют одинаковую длину, равную  $\frac{\pi}{2}$ , так что  $\rho(x, Y) = \frac{\pi}{2}$  (максимальное возможное расстояние от точки до плоскости на сфере).

**4.2. Формулы для расстояний в векторной модели.** В векторной модели пространства  $X=S^n$  или  $L^n$  расстояние между точками и расстояние от точки до гиперплоскости могут быть найдены по следующим простым формулам:

$X=S^n$	$X=L^n$
$\cos \rho(x, y) = (x, y)$	$\operatorname{ch} \rho(x, y) = -(x, y)$
$\sin \rho(x, H_e) =  (x, e) $	$\operatorname{sh} \rho(x, H_e) =  (x, e) $

Здесь  $e$  — вектор, удовлетворяющий условию  $(e, e) = 1$ , а  $H_e$  — определяемая им гиперплоскость:

$$H_e = \{x \in X : (x, e) = 0\}. \quad (11)$$

(Вектор  $e$  определяется гиперплоскостью  $H_e$  с точностью до умножения на  $-1$ .)

◀ Докажем первую из этих формул в случае  $X = \mathbb{L}^n$ . Поскольку обе ее части инвариантны относительно движений, мы можем считать, что в стандартной системе координат пространства  $\mathbb{R}^{n,1}$  прямая, проходящая через точки  $x$  и  $y$ , имеет параметрические уравнения

$$x_0 = \text{ch } t, \quad x_i = \text{sh } t, \quad x_i = 0 \quad (i=2, \dots, n),$$

причем точке  $x$  соответствует значение  $t=0$ , а точке  $y$  — какое-то значение  $t=T>0$ . Тогда, с одной стороны,  $(x, y) = -\text{ch } T$ , а, с другой стороны, вдоль рассматриваемой прямой имеем

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 = (-\text{sh}^2 t + \text{ch}^2 t) dt^2 = dt^2,$$

так что  $ds = dt$  и длина отрезка  $xy$  равна  $T$ .

Объясним теперь, как доказывается вторая формула. Имеем:

$$\rho(x, H_e) = \rho(x, y),$$

где  $y$  — проекция точки  $x$  на гиперплоскость  $H_e$ . Согласно п. 3.4,  $y = cy'$ , где  $y'$  — ортогональная проекция вектора  $x$  на подпространство  $\langle H_e \rangle = \langle e \rangle^\perp$ , а  $c$  — положительное число. Очевидно, что

$$y' = x - (x, e) e.$$

Коэффициент  $c$  определяется из условия  $(y, y) = -1$ . После этого искомое расстояние находится с помощью первой формулы. ▶

Аналогичную формулу для расстояния между расходящимися гиперплоскостями в пространстве Лобачевского см. п. 1.9 главы 4.

**4.3. Выпуклость расстояния.** Напомним, что непрерывная функция  $f$  на вещественной прямой называется выпуклой, если

$$f\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{f(s) + f(t)}{2} \quad (12)$$

для любых  $s, t \in \mathbb{R}$ . Известно, что в этом случае выполняется более общее неравенство

$$f(ps + qt) \leq pf(s) + qf(t) \quad \text{при } p, q \geq 0, p + q = 1. \quad (13)$$

Если функция  $f$  дважды дифференцируема, то ее выпуклость равносильна тому, что  $f''(t) \geq 0$  для любого  $t \in \mathbb{R}$ . Функция  $f$  называется строго выпуклой, если неравенство (12) при  $s \neq t$  выполняется как строгое; в этом случае неравенство (13) при  $s \neq t$  и  $p, q > 0$  также выполняется как строгое.

Определение 4.1. Функция  $f$  на пространстве  $X = E^n$

или  $L^n$  называется *выпуклой*, если ее ограничение на любую прямую пространства  $X$  является выпуклой функцией естественного параметра этой прямой (осуществляющего ее изоморфизм с  $E^1$ ).

**Теорема 4.2.** В пространстве  $X=E^n$  или  $L^n$  при любом  $x \in X$  функция  $f(y)=\rho(x, y)$  выпукла, причем ее ограничение на любую прямую, не проходящую через  $x$ , строго выпукло.

◀ Согласно определению выпуклой функции утверждение теоремы означает, что медиана треугольника меньше полусуммы его боковых сторон. Это доказывается в геометрии Лобачевского так же, как и в евклидовой геометрии. А именно, с помощью симметрии относительно середины основания доказываемое неравенство сводится к неравенству треугольника (рис. 2). ▶

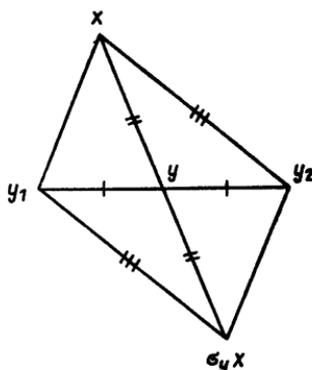


Рис. 2

Более того, можно показать, что в пространстве  $X=E^n$  или  $L^n$  расстояние является выпуклой функцией по совокупности аргументов. Это означает, что если рассматривать расстояние как функцию на  $X \times X$ , то ограничение этой функции на прямое произведение любых двух прямых является выпуклой функцией на этом произведении (как на евклидовой плоскости). Частными случаями этой теоремы являются уже упоминавшаяся теорема о медиане треугольника (равносильная теорема 4.2) и теорема о том, что средняя линия треугольника не превосходит половины основания.

В случае  $X=S^n$  непосредственным вычислением можно получить следующий суррогат теоремы 4.2.

**Теорема 4.3.** Пусть  $x \in S^n$  — точка,  $l \subset S^n$  — прямая, не лежащая в поляре  $x^*$  точки  $x$ , и  $l_+ \subset l$  — полупрямая, середина которой совпадает с проекцией  $x$  на  $l$ . Тогда ограничение функции  $f(y)=\rho(x, y)$  на  $l_+$  выпукло, а если  $l \nsubseteq x^*$  — то строго выпукло.

(Если  $l \subset x^*$ , то функция  $f$  постоянна на  $l$ .)

## МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

## § 1. Проективные модели

1.1. **Однородные области.** Кроме модели, названной в главе 1 *векторной*, существуют и другие модели пространства  $L^n$ . Наиболее интересные из них охватываются общим понятием *однородной области*.

Пусть  $(X, G)$  — однородное пространство. Введем следующие обозначения:

1. Если  $M \subset X$  и  $H \subset G$ , причем  $HM \subset M$ , то через  $H|_M$  будем обозначать совокупность преобразований множества  $M$ , индуцированных преобразованиями из  $H$ .

2. Если  $M \subset X$ , то через  $G_M$  будем обозначать подгруппу группы  $G$ , сохраняющую  $M$ , т. е. состоящую из всех  $g \in G$  таких, что  $gM = M$ . Очевидно, группа  $G_M$  переводит в себя каждое из множеств  $\partial M$  и  $\bar{M}$ .

3. Если  $M \subset X$ , то через  $G(M)$  будем обозначать группу  $G_M|_M$  преобразований множества  $M$ .

Пусть  $M$  открыто в  $X$ . Тогда подгруппа  $G_M$  замкнута в  $G$ : действительно, если бы  $gM \neq M$  для некоторого  $g \in \bar{G}_M$ , то нашлась бы точка  $x \notin M$  такая, что  $gx \in M$  или  $g^{-1}x \in M$ ; но тогда это же было бы верно для некоторого  $g' \in G_M$ . Итак, в случае открытого  $M$  подгруппа  $G_M$  есть *подгруппа Ли*.

Определение 1.1. Если  $M$  есть область в  $X$  и группа  $G(M)$  действует на  $M$  транзитивно, то однородное пространство  $(M, G(M))$  (или сама область  $M$ ) называется *однородной областью* в однородном пространстве  $(X, G)$ .

Пусть  $M$  — однородная область.

Определение 1.2. Пара  $(\partial M, G_M|_{\partial M})$  называется *границей* или *абсолютом*, а пара  $(\bar{M}, G_M|_{\bar{M}})$  — *замыканием* однородной области  $M$ . Те же названия присваиваются и самим множествам  $\partial M$  и  $\bar{M}$ .

Во всех случаях, которые мы будем реально рассматривать,  $G_M|_{\partial M} = G(\partial M)$  и  $G_M|_{\bar{M}} = G(\bar{M})$ .

Представляется естественным строить и изучать модели пространств Лобачевского в виде однородных областей в каких-то других, хорошо изученных однородных пространствах. В качестве «внешнего» пространства  $X$  можно взять, например, вещественное проективное пространство  $P^n$ , точками которого являются одномерные подпространства в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а группой преобразований служит  $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ , т. е. полная линейная группа  $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ , факторизованная по подгруппе  $\{\lambda E | \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ . Модели такого рода принято называть *проективными*.

**1.2. Проективная модель пространства Лобачевского.** Напомним читателю некоторые сведения из проективной геометрии (в удобной для дальнейшего форме).

Пусть  $U$  и  $U'$  — две области в проективном пространстве  $P^n$ ,  $n \geq 2$ . Диффеоморфизм  $f$  области  $U$  на  $U'$  называется *коллинеацией*, если он переводит каждое подмножество вида  $U \cap l$ , где  $l$  — прямая в  $P^n$ , в подмножество  $U' \cap l'$ , где  $l'$  — снова прямая. Любая коллинеация  $U$  на  $U'$  продолжается до коллинеации всего пространства  $P^n$ .

Пусть  $Q_0$  — совокупность образующих конуса

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \quad (1)$$

в  $R^{n+1}$ . Множество  $Q_0$  есть гиперповерхность в  $P^n$ . Очевидно, что  $P^n \setminus Q_0$  распадается на две связные компоненты, причем одна и только одна из них не содержит прямых. Эта компонента представляет собой множество образующих конуса

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 < 0 \quad (2)$$

(точнее, конуса, получаемого из (2) добавлением начала); она называется внутренней областью для  $Q_0$  и обозначается  $\text{int } Q_0$ . Ясно, что коллинеации пространства  $P^n$ , сохраняющие  $Q_0$  переводят  $\text{int } Q_0$  снова в  $\text{int } Q_0$ .

**Определение 1.3.** *Овальной квадрикой* в пространстве  $P^n$  называется любая гиперповерхность  $Q$ , проективно эквивалентная  $Q_0$ .

Согласуя обозначения с п. 1.1, условимся обозначать группу всех проективных преобразований пространства  $P^n$  через  $G$ .

**Теорема 1.4.** Однородное пространство  $(\text{int } Q, G(\text{int } Q))$ , где  $Q$  — овальная квадрика в  $P^n$ , изоморфно пространству Лобачевского  $L^n$ .

◀ Будем исходить из стандартной векторной модели пространства  $L^n$ , т. е. из реализации  $L^n$  в виде гиперповерхности

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1, \quad x_0 > 0, \quad (3)$$

в псевдоевклидовом векторном пространстве  $R^{n,1}$ , снабженном метрикой  $-dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ . Если каждой точке  $x$  модели (3) поставить в соответствие одномерное подпространство  $\{\lambda x \mid \lambda \in R\}$  в  $R^{n,1}$ , то этим будет установлена биекция гиперповерхности (3) на область  $\text{int } Q_0$ . При этом группа движений перейдет в  $G(\text{int } Q_0)$ . В самом деле, движения векторной модели (3) — это преобразования, индуцируемые на этой модели группой  $O'_{n,1}$ . Но последняя, как нетрудно видеть, может быть охарактеризована как группа всех линейных преобразований в  $R^{n,1}$  с определителем  $\pm 1$ , отображающих на себя конус (2) и сохраняющих условие  $x_0 > 0$ . Это означает, что индуцируемая ею группа преобразований в  $P^n$  есть группа всех коллинеаций пространства  $P^n$ , сохраняющих  $Q_0$ . ▶

Отметим, что плоскостями в модели  $\text{int } Q_0$  являются образы плоскостей в векторной модели (3). Так как плоскости в векторной модели — это непустые пересечения гиперповерхности

(3) с подпространствами в  $\mathbb{R}^{n,1}$ , то плоскости в модели  $\text{int } Q_0$  — это непустые пересечения  $\text{int } Q_0$  с плоскостями пространства  $P^n$ . В частности, прямые в модели  $\text{int } Q_0$  — это непустые пересечения  $\text{int } Q_0$  с прямыми в  $P^n$ .

Следствие. Любой диффеоморфизм пространства Лобачевского  $L^n$ , отображающий прямые в прямые, является движением.

**Определение 1.5.** Однородная область  $(\text{int } Q, G(\text{int } Q))$ , где  $Q$  — овальная квадратика в  $P^n$ , называется *проективной моделью* пространства  $L^n$ .

Абсолютот проективной модели служит  $(Q, G(Q))$ . Заметим, что группа  $G(Q)$  действует на  $Q$  транзитивно: например, если  $Q$  есть сфера в евклидовом пространстве, пополнением которого служит  $P^n$ , то  $G(Q)$  содержит все вращения сферы.

**1.3. Проективно-евклидовы модели. Модель Клейна.** Условимся через  $PE^n$  обозначать модель проективного пространства  $P^n$ , получаемую с помощью пополнения евклидова пространства  $E^n$  «несобственными» точками.

Пусть  $Q$  — овальная квадратика в  $PE^n$ . Однородное пространство  $(\text{int } Q, G(\text{int } Q))$  по доказанному, является моделью пространства  $L^n$ . Условимся такие модели называть *проективно-евклидовыми* моделями пространства  $L^n$  (в пространстве  $PE^n$ ). С проективной точки зрения все они, разумеется, эквивалентны. С аффинной же точки зрения эти модели распадаются на три класса, в зависимости от того, что представляет собой множество  $Q \cap E^n$  — эллипсоид, эллиптический параболоид или двуполостный гиперболоид. Различие между этими случаями можно также охарактеризовать положением поверхности  $Q$  по отношению к несобственной гиперплоскости  $H$  пространства  $PE^n$ : в первом случае множество  $Q \cap H$  пусто, во втором случае состоит из единственной точки (точки касания  $H$  с  $Q$ ), в третьем это множество является овальной квадратикой в  $H$ . Представителей этих трех классов будем называть проективными моделями (пространства  $L^n$ ) в эллипсоиде, параболоиде или гиперболоиде.

Отметим некоторые общие свойства таких моделей. Предварительно условимся, что если  $\Gamma$  есть некоторая  $L$ -плоскость (т. е. плоскость в смысле Лобачевского) в модели, то  $\Gamma^*$  обозначает соответствующую плоскость в  $PE^n$  (т. е. такую, что  $\Gamma = \Gamma^* \cap \text{int } Q$ ).

1. Пусть  $\Gamma$  есть  $L$ -гиперплоскость, а  $L$  —  $L$ -прямая на модели. Тогда  $L$  и  $\Gamma$  ортогональны (в смысле Лобачевского) в том и только в том случае, когда  $L^*$  проходит через полюс  $p_{\Gamma^*}$  плоскости  $\Gamma^*$  относительно абсолюта (рис. 3).

◀Рассмотрим коллинеацию  $g$  пространства  $PE^h$ , индуцирующую в модели отражение относительно  $\Gamma$ . Поскольку  $gQ = Q$  и  $g\Gamma = \Gamma$ , то  $gp_{\Gamma^*} = p_{\Gamma^*}$  и тем самым  $gL^* = L^*$ , где  $L^*$  — любая прямая пространства  $PE^h$ , проходящая через  $p_{\Gamma^*}$  ▶

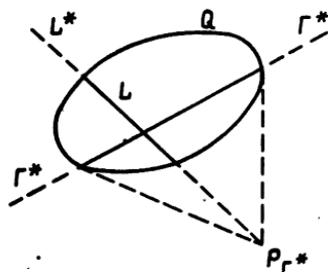


Рис. 3

2. Если  $p_1$  и  $p_2$  — две точки,  $L$ -симметричные относительно гиперплоскости  $\Gamma$ , а  $p$  есть  $L$ -середина отрезка  $p_1, p_2$ , то двойное отношение (упорядоченной) четверки  $p_1, p_2, p_{\Gamma^*}, p$  равно  $-1$ .

◀ Обозначим двойное отношение  $[p_1, p_2; p_{\Gamma^*}, p]$  через  $\lambda$ . Если  $g$  есть коллинеация пространства  $PE^n$ , осуществляющая в модели отражение относительно гиперплоскости, проходящей через  $p$  и перпендикулярной  $p_1 p_2$ , то  $g$  переводит четверку  $p_1, p_2, p_{\Gamma^*}, p$  в четверку  $p_2, p_1, p_{\Gamma^*}, p$ , откуда следует  $[p_1, p_2; p_{\Gamma^*}, p] = [p_2, p_1; p_{\Gamma^*}, p]$  или  $\lambda^2 = 1$ . Но так как, очевидно, пары  $p_1 p_2$  и  $p_{\Gamma^*}, p$  разделяют друг друга ( $p_{\Gamma^*}$  лежит вне  $Q$ ), то  $\lambda = -1$ . ▶

Наиболее удобной является проективная модель в единичном шаре, называемая моделью Клейна. Мы будем обозначать ее  $K^n$ . Итак, модель Клейна  $K^n$  представляет собой шар в евклидовом пространстве  $E^n$ , а движениями в этой модели являются ограничения на шар тех коллинеаций пространства  $PE^n$ , которые переводят шар в себя. Абсолютом модели Клейна является (однородное) пространство  $(S^{n-1}, G(S^{n-1}))$ .

1.4. «Аффинная» подгруппа группы автоморфизмов квадрики. Пусть  $(\text{int } Q, G(\text{int } Q))$  есть проективно-евклидова модель пространства  $L^n$  (в  $PE^n$ ). Рассмотрим коллинеации пространства  $PE^n$ , сохраняющие не только  $Q$ , но и несобственную гиперплоскость  $H$  пространства  $PE^n$ ; или, что то же, сохраняющие  $Q$  и точку  $p_H$  — полюс  $H$  относительно  $Q$ . Они образуют некоторую группу аффинных преобразований в  $PE^n$ . Ограничение этой группы на  $\text{int } Q$  естественно называть «аффинной» подгруппой группы  $G(\text{int } Q)$ . Обозначим эту подгруппу через  $AG(\text{int } Q)$ . Возможны следующие случаи.

1.  $Q$  — эллипсоид. Тогда  $H \subset \text{ext } Q$  (где  $\text{ext } Q$  — внешность  $Q$ ), а  $p_H \in \text{int } Q$ ; а именно,  $p_H$  есть центр  $O$  эллипсоида  $Q$ . Следовательно,  $AG(\text{int } Q)$  есть группа всех движений модели, оставляющих неподвижной точку  $O$ , т. е. группа всех  $L$ -вращений вокруг  $O$ .

Заметим, что если  $Q$  — сфера, то аффинные преобразования, сохраняющие  $Q$ , суть обычные евклидовы вращения вокруг центра  $O$  сферы. Таким образом, в случае модели Клейна Л-вращения вокруг центра  $O$  модели изображаются обычными евклидовыми вращениями вокруг  $O$ . В частности, отсюда следует, что если  $\Gamma$  есть гиперплоскость в модели Клейна, проходящая через центр модели, то Л-отражение относительно  $\Gamma$  есть обычное евклидово отражение.

2.  $Q \cap E^n$  — двуполостный гиперboloид. Тогда  $H$  пересекает  $\text{int } Q$  по Л-гиперплоскости. Имеем  $p_H \in \text{ext } Q$ ; а именно,  $p_H$  есть вершина асимптотического конуса для  $Q$ . Группа  $AG(\text{int } Q)$  состоит из всех Л-движений, сохраняющих Л-гиперплоскость  $H \cap \text{int } Q$ .

3.  $Q \cap E^n$  — параболоид. Тогда  $H$  касается  $Q$  в точке  $p_H$  (несобственной точке параболоида). Оказывается, что в этом случае (в отличие от предыдущих) группа  $AG(\text{int } Q)$  транзитивна в  $\text{int } Q$ . Более того, она содержит подгруппу, просто транзитивную в  $\text{int } Q$ .

◀ Пусть  $\text{int } Q$  задается неравенством

$$y_1 > y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Рассмотрим совокупность аффинных преобразований  $f_{C, \lambda}$  вида

$$\begin{cases} y'_1 = \lambda^2 y_1 + 2\lambda(C, Y) + (C, C), \\ Y' = \lambda Y + C, \end{cases}$$

где  $Y = (y_2, \dots, y_n)$ ,  $C = (c_2, \dots, c_n)$ ,  $(C, Y) = c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$  и  $\lambda$  — любое не равное нулю действительное число. Нетрудно проверить, что каждое из преобразований  $f_{C, \lambda}$  сохраняет  $\text{int } Q$  и что эти преобразования образуют группу, просто транзитивную в  $\text{int } Q$ . Заметим еще, что при  $\lambda = 1$ ,  $C \neq 0$  преобразование  $f_{C, \lambda}$  имеет в  $PE^n$  только одну неподвижную точку  $p_H$ , а при  $\lambda \neq 1$  — две неподвижные точки ( $p_H$  и еще одна точка на параболоиде). ▶

Транзитивность группы  $AG(\text{int } Q)$  в случае параболоида имеет следующий инвариантный смысл: группа всех коллинеаций проективного пространства  $P^n$ , сохраняющих данную овальную квадрику  $Q$  и оставляющих неподвижной данную точку  $q \in Q$  (или, что то же, сохраняющих  $Q$  и касательную гиперплоскость к  $Q$  в точке  $q$ ), транзитивна в  $\text{int } Q$ .

### 1.5. Риманова метрика и расстояние между точками в проективной модели

Предложение 1.6. Пусть  $\varphi = 0$ , где  $\varphi$  — многочлен второй степени относительно декартовых координат, есть уравнение овальной квадрики  $Q$  в  $PE^n$ . Тогда метрика Лобачевского проективной модели в  $\text{int } Q$  есть

$$ds^2 = -\frac{1}{2\varphi} \left( d^2\varphi - \frac{1}{2\varphi} (d\varphi)^2 \right). \quad (4)$$

◀ Рассмотрим сначала случай модели Клейна.

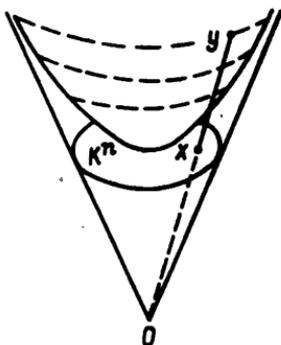


Рис. 4

На рис. 4 изображены: векторная модель (3), соответствующий ей конус (2) и его сечение плоскостью  $E^n : x_0=1$ , т. е. шар

$$K^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1.$$

Из соотношения  $y = \lambda x$  или, в координатах,

$$y_0 = \lambda, \quad y_1 = \lambda x_1, \dots, y_n = \lambda x_n \quad (5)$$

легко вывести, учитывая  $-y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 = -1$ , что  $\lambda = \varphi^{-1/2}$ , где

$$\varphi = 1 - \sum_1^n x_i^2.$$

Если теперь выражения (5) для  $y_0, y_1, \dots, y_n$  подставить в  $ds^2 = -dy_0^2 + dy_1^2 + \dots + dy_n^2$ , то получим метрику, индуцированную в шаре  $K^n$ . Несложное вычисление дает

$$ds^2 = \left(1 - \sum_1^n x_i^2\right)^{-2} \left[ \left(1 - \sum_1^n x_i^2\right) \sum_1^n dx_i^2 + \left(\sum_1^n x_i dx_i\right)^2 \right], \quad (6)$$

что равнозначно (4). Поскольку шар  $K^n$  с группой преобразований, индуцированной в нем группой движений модели (3), есть модель Клейна пространства  $L^n$ , то этим предложение 1.6 доказано для модели Клейна. Заметим, что форма (4) метрики  $ds^2$  инвариантна относительно всевозможных аффинных преобразований, откуда следует справедливость предложения 1.6 для модели в произвольном эллипсоиде.

Рассмотрим теперь любое проективное преобразование в  $PE^n$ , т. е. отображение  $x \mapsto y$ , задаваемое в координатах формулами вида

$$\dots \quad x_i = \frac{\alpha_i}{\beta}, \dots, x_n = \frac{\alpha_n}{\beta}, \quad (7)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  и  $\beta$  — многочлены первой степени относительно  $y_1, \dots, y_n$  и соответствующий определитель  $(n+1)$ -го порядка

равен  $\Delta \neq 0$ . Поверхность  $1 - \sum_1^n x_i^2 = 0$  перейдет при этом отображении в  $\psi = 0$ , где

$$\psi = \beta^2 - \sum_1^n \alpha_i^2. \quad (8)$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение (7) переводит метрику (6) в

$$ds^2 = -\frac{1}{2\psi} \left( d^2\psi - \frac{1}{2\psi} (d\psi)^2 \right). \quad (9)$$

**З а м е ч а н и е.** Определитель метрической формы (6) равен  $\left(1 - \sum_1^n x_i^2\right)^{-n-1}$ ; следовательно, выражение для элемента объема

в модели Клейна имеет вид  $\left(1 - \sum_1^n x_i^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx_1 \dots dx_n$ . В случае метрики (9), где  $\psi$  задается посредством (8), элемент объема выражается в виде  $\psi^{-(n+1)/2} dy_1 \dots dy_n$ .

**Предложение 1.7.** Расстояние между точками  $x$  и  $y$  проективной модели  $(\text{int } Q, G(\text{int } Q))$  выражается формулой

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2} |\ln [x, y; p, q]|, \quad (10)$$

где  $p$  и  $q$  — точки пересечения прямой  $xy$  (в  $PE^n$ ) с абсолютом  $Q$ , а  $[x, y; p, q]$  обозначает двойное отношение четверки точек.

◀ Поскольку правая часть в (10) имеет инвариантный проективный смысл, то можно ограничиться случаем модели Клейна.

Пусть

$$u = (u_0, u_1, 0, \dots, 0), \quad v = (v_0, v_1, 0, \dots, 0) \quad (11)$$

— две точки на векторной модели (3), а  $L$  — соединяющая их  $L$ -прямая, которая задается уравнениями  $x_2 = \dots = x_n = 0$ . Параметрические уравнения линии  $L$  можно записать в виде

$$x_0 = \text{ch } t, \quad x_1 = \text{sh } t, \quad x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Отсюда имеем (вдоль  $L$ )  $ds^2 = dt^2$ , следовательно,

$$\rho(u, v) = |t_u - t_v|.$$

Проектируя точки  $u$  и  $v$  из начала на плоскость  $x_0 = 1$ , получим точки

$$u' = \left(1, \frac{u_1}{u_0}, 0, \dots, 0\right), \quad v' = \left(1, \frac{v_1}{v_0}, 0, \dots, 0\right)$$

на модели Клейна. Точки пересечения прямой  $u'v'$  с абсолютном  $S^{n-1}$  будут

$$p = (1, 1, 0, \dots, 0), \quad q = (1, -1, 0, \dots, 0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} |[u', v'; p, q]| &= \frac{|u'p|}{|u'q|} : \frac{|v'p|}{|v'q|} = \frac{\left| \frac{u_1}{u_0} - 1 \right|}{\left| \frac{u_1}{u_0} + 1 \right|} : \frac{\left| \frac{v_1}{v_0} - 1 \right|}{\left| \frac{v_1}{v_0} + 1 \right|} = \\ &= \frac{|\operatorname{th} t_u - 1|}{|\operatorname{th} t_u + 1|} : \frac{|\operatorname{th} t_v - 1|}{|\operatorname{th} t_v + 1|} = e^{2|t_u - t_v|}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$|t_u - t_v| = \frac{1}{2} |\ln [u', v'; p, q]| \quad \text{или} \quad \rho(u', v') = \frac{1}{2} |\ln [u', v'; p, q]|.$$

Так как любые две точки на векторной модели (3) можно перевести движением в точки  $u$  и  $v$  вида (11), то полученное равенство справедливо для *любых* двух точек  $u'$  и  $v'$  на модели Клейна. ►

## § 2. Конформные модели

### 2.1. Конформное пространство

**Определение 2.1.** Конформным пространством  $S^n$  называется однородное пространство  $(Q, G(Q))$ , где  $Q$  — овальная квадрика в  $P^{n+1}$ .

(Здесь  $G$  обозначает группу всех коллинеаций пространства  $P^{n+1}$ .)

Из данного определения непосредственно следует, что абсолютом проективной модели  $(\operatorname{int} Q, G(\operatorname{int} Q))$  пространства  $L^n$  является конформное пространство  $S^{n-1}$ .

**З а м е ч а н и е.** Пространство  $S^1$  изоморфно  $P^1$ . Одно из объяснений этого факта см. в п. 2.4.

*Сферами* пространства  $S^n$  называются подмножества вида  $Q \cap H$ , где  $H$  — любая плоскость в  $P^{n+1}$ , имеющая непустое пересечение с  $Q$ . В частности, если  $Q$  есть евклидова сфера  $S^n$  в  $PE^{n+1}$ , то сферами в конформном пространстве  $S^n$  являются евклидовы сферы различных размерностей, содержащиеся в  $S^n$ .

Условимся называть *круговым преобразованием* сферы  $S^n$  такой ее диффеоморфизм, который отображает любую окружность (сечение сферы двумерной плоскостью) снова в окружность.

**Теорема 2.2.** Группа  $G(S^n)$  совпадает с группой  $\operatorname{Circ} S^n$  всех круговых преобразований сферы  $S^n$ .

◀ Пусть  $g \in G(S^n)$ . Тогда  $g$  продолжается до коллинеации  $g^*$  пространства  $PE^{n+1}$ , сохраняющей  $S^n$ . Очевидно,  $g^*$  отображает плоские сечения сферы  $S^n$  снова в плоские сечения, откуда следует  $g \in \operatorname{Circ} S^n$ .

Обратно, пусть  $g \in \operatorname{Circ} S^n$ . Сопоставим каждой гиперсфере  $S \subset S^n$  (подсфере размерности  $n-1$ ) ее полюс в  $PE^{n+1}$  (рис. 5).

Преобразование  $g$  отображает подсферы любых размерностей снова в подсферы; в частности, оно отображает  $S$  снова в гиперсферу. Тем самым  $g$  индуцирует некоторое преобразование

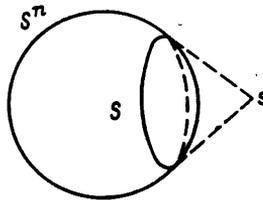


Рис. 5

$g'$  в множестве полюсов, т. е. во внешней области относительно  $S^n$ . Нетрудно показать, что  $g'$  есть коллинеация указанной области. Но в таком случае существует коллинеация  $g^*$  пространства  $PE^{n+1}$ , являющаяся продолжением  $g'$ . Ограничение  $g^*$  на  $S^n$  совпадает с  $g$ . Следовательно,  $g \in G(S^n)$ . ►

Следствие. Пространство  $C^n$  изоморфно  $(S^n, \text{Circ } S^n)$ .

Важная модель пространства  $C^n$  получается с помощью *стереографической проекции*. Будем проектировать сферу  $S^n$ :

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

в пространстве  $E^{n+1}$  из ее «южного полюса»  $p = (-1, 0, \dots, 0)$  на гиперплоскость  $E^n : x_0 = 0$  (рис. 6). Обозначая указанное про-

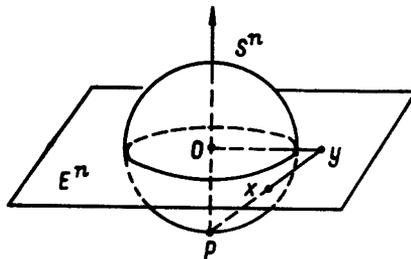


Рис. 6

ектирование через  $\varphi$  и полагая  $\varphi : x_i \mapsto y_i$ , будем иметь

$$y_i = \frac{x_i}{x_0 + 1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пользуясь этими формулами, можно найти метрику в  $E^n$ , индуцированную с помощью  $\varphi$  метрикой  $ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$  сферы  $S^n$ . Для нее получается выражение

$$ds^2 = \left(1 + \sum_1^n y_i^2\right)^{-2} \sum_1^n dy_i^2. \quad (12)$$

Формула (12) показывает, что отображение  $\varphi$  конформно (т. е. сохраняет углы между кривыми). Впрочем, это же самое следует и из того факта, что  $\varphi$  совпадает с ограничением (на  $S^n$ ) некоторой инверсии в пространстве  $E^{n+1}$ : центром этой инверсии является точка  $p$ , а множество  $S$  неподвижных точек есть сфера радиуса  $\sqrt{2}$  с центром  $p$  (см. рис. 7: в прямоугольном треугольнике  $pOy$  имеем  $|Op| = |Ox|$ , откуда следует

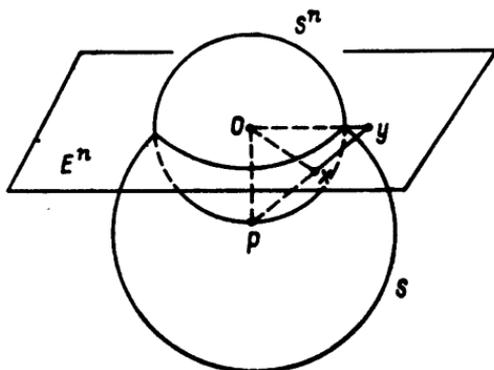


Рис. 7

$|px| \cdot |py| = 2|Op|^2$ ). Отсюда же вытекает и другое свойство  $\varphi$ : это отображение переводит окружности на сфере  $S^n$  в окружности или прямые в  $E^n$ <sup>1)</sup>.

Очевидно,  $\varphi$  отображает биективно  $S^n \setminus \{p\}$  на  $E^n$ . Чтобы распространить  $\varphi$  на всю сферу  $S^n$ , дополним  $E^n$  новой точкой  $\infty$ , которую будем считать образом полюса  $p$  ( $\varphi(p) = \infty$ ). Положим  $\hat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$ . Гладкую структуру на  $\hat{E}^n$  в окрестности точки  $\infty$  индуцируем с помощью отображения  $\varphi$ . В результате  $\hat{E}^n$  становится гладким многообразием,  $\varphi$  — конформным отображением  $S^n$  на  $\hat{E}^n$ , а группа  $\text{Circ } \hat{E}^n$  (результат «перенесения» группы  $\text{Circ } S^n$  в  $\hat{E}^n$  с помощью  $\varphi$ ) — транзитивной группой конформных диффеоморфизмов  $\hat{E}^n$ . Пространство  $(\hat{E}^n, \text{Circ } \hat{E}^n)$  изоморфно  $(S^n, \text{Circ } S^n)$ , т. е. изоморфно  $C^n$ .

**Определение 2.3.** Однородное пространство  $(\hat{E}^n, \text{Circ } \hat{E}^n)$  называется *плоской моделью* конформного пространства  $C^n$ .

Роль сфер в модели  $\hat{E}^n$  играют образы при отображении  $\varphi$  сфер в  $S^n$ , т. е. сферы или плоскости в  $E^n$  (последние пополняются точкой  $\infty$ ). Группа  $\text{Circ } \hat{E}^n$  состоит из всех диффеоморфизмов, отображающих (конформные) сферы снова в сферы.

<sup>1)</sup> Определение инверсии, а также ее свойства сохранять углы между кривыми и отображать окружности и прямые в окружности или прямые, см. в [3].

**Теорема 2.4.** Группа  $G(S^n)$  совпадает с группой  $\text{Conf } S^n$  всех конформных диффеоморфизмов сферы  $S^n$ .

◀ Включение

$$\text{Circ } S^n \subset \text{Conf } S^n \quad (13)$$

легко доказать, используя плоскую модель  $\hat{E}^n$  конформной сферы  $S^n$ . Пусть  $g \in \text{Circ } \hat{E}^n$ . Предположим сначала, что  $g(\infty) = \infty$ . Тогда  $gE^n = E^n$ , причем прямые в  $E^n$  отображаются снова в прямые. Отсюда следует, что  $g|_{E^n}$  является аффинным преобразованием; отсюда, а также из условия, что окружности отображаются в окружности, вытекает, что  $g|_{E^n}$  есть евклидово движение или подобие, а, значит,  $g \in \text{Conf } \hat{E}^n$ . В случае, когда  $g(\infty) = v$ , где  $v \in E^n$ , выбираем любую инверсию  $h$ , для которой  $hv = \infty$ , тогда  $hg(\infty) = \infty$ , следовательно,  $hg \in \text{Conf } \hat{E}^n$ , а тем самым и  $g \in \text{Conf } \hat{E}^n$ .

Обратное включение

$$\text{Conf } S^n \subset \text{Circ } S^n \quad (14)$$

для  $n=2$  есть хорошо известный факт из комплексного анализа (любой конформный диффеоморфизм расширенной комплексной плоскости является дробно-линейным отображением или композицией дробно-линейного отображения с комплексным сопряжением). При  $n>2$  доказательство (14) сложнее. Сошлемся на [7, т. 1, п. 9.5.4], где приводится доказательство следующей теоремы Лиувилля: при  $n>2$  любой диффеоморфизм, гладкости по крайней мере 4, отображающий конформно область  $U \subset E^n$  на область  $U' \subset E^n$ , является произведением нескольких инверсий и отражений (для  $E^2$  это неверно). То, что любой конформный диффеоморфизм  $U \rightarrow U'$  принадлежит классу гладкости 4 — есть весьма тонкий результат (ссылки см. там же). ▶

Заметим, что из двух включений (13), (14) в дальнейшем будет использоваться только (13).

**Следствие.** Пространство  $C^n$  изоморфно  $(S^n, \text{Conf } S^n)$ .

Отсюда и само название «конформное пространство».

Пусть  $M$  — гладкое многообразие и  $g$  — риманова метрика на  $M$ . Ее *конформным классом*  $\{g\}$  назовем совокупность метрик вида  $\varphi g$ , где  $\varphi$  — любая положительная гладкая функция на  $M$ . Будем говорить, что на  $M$  определено *измерение углов*, если фиксирован некоторый конформный класс метрик на  $M$ ; в этом случае каждой паре  $\xi, \eta$ , где  $\xi, \eta \in T_p(M)$  ( $p \in M$ ), однозначно отвечает число  $\cos(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ , определенное (известным способом) любой метрикой из данного класса.

Если  $M$  есть сфера  $S^n$  в  $E^{n+1}$ , то единственным конформным классом, инвариантным относительно группы  $\text{Isom } S^n$ , является  $\{g_0\}$ , где  $g_0$  — риманова метрика, индуцированная вложением  $S^n$  в  $E^{n+1}$ . Этот же класс инвариантен и относительно  $\text{Circ } S^n$ ,

поскольку  $\text{Circ } S^n \subset \text{Conf } S^n$ . Таким образом, для группы  $\text{Circ } S^n$  (для которой, очевидно, не существует инвариантных римановых метрик на  $S^n$ ), существует единственный инвариантный конформный класс на  $S^n$ . Это означает, что в конформном пространстве  $S^n$  единственным образом определено измерение углов.

**2.2. Конформная модель пространства Лобачевского.** Рассмотрим снова конформное пространство  $C^n = (Q, G(Q))$ , где  $Q$  — овальная квадрика в  $P^{n+1}$ . Выберем некоторое подпространство  $P^n \subset P^{n+1}$ , проходящее через внутреннюю по отношению к  $Q$  точку. Пересечение  $Q \cap P^n$  есть гиперповерхность в  $Q$ ; с точки зрения конформной геометрии пространства  $C^n$  оно является гиперсферой.

Очевидно,  $Q \setminus Q \cap P^n$  состоит из двух связных компонент. Обозначим одну из них через  $Q_+$  («полупространство» в  $Q$ ) и рассмотрим группу  $G(Q_+)$ .

**Теорема 2.5.** Группа  $G(Q_+)$  транзитивна на  $Q_+$ . Однородная область  $(Q_+, G(Q_+))$  в пространстве  $C^n$  изоморфна пространству  $L^n$ .

◀ Будем считать, что  $Q$  — сфера  $S^n \subset E^{n+1}$ . Рассмотрим модель Клейна пространства  $L^{n+1}$  в единичном шаре  $K^{n+1}$  с границей  $S^n$ . Зафиксируем одно из сечений шара гиперплоскостью  $E^n \subset E^{n+1}$ , проходящей через центр шара — обозначим это сечение через  $K^n$ . Шар  $K^n$  является моделью Клейна пространства  $L^n$  в  $E^n$ .

Множество  $K^{n+1} \setminus K^n$  распадается на два (открытых) Л-полупространства. Пусть  $K_+^{n+1}$  — одно из них; соответствующую полу-сферу сферы  $\partial K^{n+1}$  обозначим через  $S_+^n$  (рис. 8).

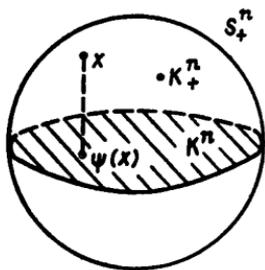


Рис. 8

Пусть  $g$  — любая коллинеация пространства  $PE^{n+1}$ , сохраняющая  $K_+^{n+1}$ ; положим  $g_1 = g|_{S_+^n}$  и  $g_2 = g|_{K^n}$ . Отображение  $g \mapsto g_1$  устанавливает изоморфизм между  $G(K_+^{n+1})$  и  $G(S_+^n)$ , а  $g \mapsto g_2$  — изоморфизм между  $G(K_+^{n+1})$  и  $G(K^n)$ . В результате возникает изоморфизм

$$\varphi: g_1 \mapsto g_2$$

между  $G(S_+^{n+1})$  и  $G(K^n)$ . Если  $\psi$  — ортогональное проектирова-

ние  $S_+^n$  на  $K^n$ , то

$$g_2\psi = \psi g_1,$$

поскольку  $g$  как движение пространства в  $L^{n+1}$  переводит прямые, перпендикулярные  $K^n$  (в смысле Лобачевского, что в данном случае означает и евклидову перпендикулярность), снова в прямые, перпендикулярные  $K^n$ . Наличие изоморфизма  $\varphi: G(S_+^n) \rightarrow G(K^n)$  и биекции  $\psi: S_+^n \rightarrow K^n$  с указанным свойством означает изоморфизм между пространствами  $(S_+^n, G(S_+^n))$  и  $(K^n, G(K^n))$ . ►

З а м е ч а н и я.

1. Однородные области  $(S_+^n, G(S_+^n))$  и  $(K^n, G(K^n))$  (первая — в конформном пространстве  $S_+^n$ , вторая — в проективном пространстве  $PE^n$ ) имеют общий абсолют, а построенный выше изоморфизм  $\psi$  между ними продолжается до изоморфизма их замыканий.

2. В модели  $(S_+^n, G(S_+^n))$  пространства  $L^n$  роль плоскостей играют образы при отображении  $\psi^{-1}$  плоскостей модели Клейна  $K^n$ . Это означает, что плоскостями в модели  $S_+^n$  являются всевозможные евклидовы полусферы, содержащиеся в  $S_+^n$  и ортогональные  $\partial S_+^n$ ; или, по другому, пересечения  $S_+^n$  с плоскостями конформного пространства  $S^n$ , ортогональными  $\partial S_+^n$ . В частности, прямые в модели  $S_+^n$  суть евклидовы полуокружности, лежащие в  $S_+^n$  и ортогональные  $\partial S_+^n$ .

В п. 1.2 было показано, что любая коллинеация пространства  $L^n$  является движением (см. следствие из теоремы 1.4). Подобный же результат справедлив и для конформных преобразований, а именно: группа  $\text{Conf } L^n$  совпадает с группой  $\text{Isom } L^n$ .

◀ Случай  $n=2$  будет разобран позже (см. теорему 2.12 в п. 2.4). Если же  $n>2$ , то воспользуемся реализацией  $L^n$  в виде полусферы  $S_+^n$  из доказательства теоремы 2.5. Любое преобразование  $g$  из  $\text{Conf } S_+^n$  продолжается до некоторого  $g^* \in \text{Conf } S^n$  (см. окончание доказательства теоремы 2.5), откуда следует  $g^* \in G(S^n)$ , а тем самым  $g \in G(S_+^n) = \text{Isom } L^n$ . ►

О п р е д е л е н и е 2.6. Однородная область  $(Q_+, G(Q_+))$  в конформном пространстве  $S^n$  называется *конформной моделью* пространства Лобачевского  $L^n$ .

Отличительной особенностью этой модели, объясняющей ее название, является то, что при реализации пространства  $S^n$  в виде  $(S^n, G(S^n))$  группа движений модели становится подгруппой группы  $\text{Conf } S^n$  и, следовательно, величины углов на модели совпадают с их евклидовыми мерами в  $S^n$  (углы на модели можно «видеть»).

П р е д л о ж е н и е 2.7. Любой изоморфизм между проективной и конформной моделями пространства  $L^n$  продолжается

до изоморфизма их замыканий. В частности, изоморфны абсолюты этих моделей.

◀ Очевидно, любые две конформные модели пространства  $L^n$  изоморфны, и этот изоморфизм продолжается на их замыкания. То же самое верно и для проективных моделей. Учитывая замечание к теореме 2.5, и получаем требуемое. ▶

**Предложение 2.8.** Если  $\Gamma$  — гиперплоскость в  $L^n$ , то  $\partial\Gamma$  есть гиперсфера в конформном пространстве  $\partial L^n$ . Угол между двумя гиперплоскостями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в пространстве  $L^n$  совпадает с углом между гиперсферами  $\partial\Gamma_1$  и  $\partial\Gamma_2$  в пространстве  $\partial L^n$ .

◀ Имеем  $\Gamma = T \cap Q_+$ , где  $T$  — гиперплоскость в  $P^{n+1}$  (рис. 9). Отсюда следует  $\partial\Gamma = T \cap \partial Q_+$ , т. е.  $\partial\Gamma$  — гиперсфера в  $S^{n-1}$ . Вторая часть предложения вытекает из того, что если пара  $\Gamma_1, \Gamma_2$  переводится в пару  $\Gamma'_1, \Gamma'_2$  движением  $g$  пространства  $L^n$ , то

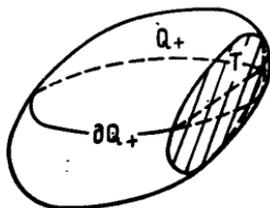


Рис. 9

пара  $\partial\Gamma_1, \partial\Gamma_2$  переводится в пару  $\partial\Gamma'_1, \partial\Gamma'_2$  движением  $g^*$  пространства  $S^{n-1}$ . (Оба движения  $g$  и  $g^*$  являются ограничениями, соответственно на  $Q_+$  и  $\partial Q_+$ , одной и той же коллинеации в  $P^{n+1}$ .) ▶

Доказанное предложение особенно удобно при реализации  $L^n$  в виде модели Клейна, поскольку в этом случае  $\partial L^n$  есть евклидова сфера с обычным измерением углов.

Заметим, что рассмотренная ранее векторная модель пространства  $L^n$  в  $R^{n+1}$  является, по существу, одной из конформных моделей пространства  $L^n$ . Эта модель получается, если в качестве  $P^{n+1}$  взять пространство  $PE^{n+1}$ , за  $Q$  принять поверхность  $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1$  (точнее, ее замыкание в  $PE^{n+1}$ ) и за  $Q_+$  — одну из двух «половин» ( $x_0 > 0$ ), на которые  $Q$  разбивается несобственной гиперплоскостью  $H$  пространства  $PE^{n+1}$  (другая «половина» характеризуется условием  $x_0 < 0$ ). Движениями являются коллинеации, сохраняющие как  $Q$ , так и  $H$ , т. е. преобразования группы  $O_{n,1}$ . Абсолютом модели служит  $Q \cap H$ .

**2.3. Конформно-евклидовы модели.** Рассмотрим плоскую модель ( $E^n, \text{Circ } E^n$ ) конформного пространства  $S^n$ . Любая гиперсфера в этой модели есть или гиперсфера в  $E^n$ , или гипер-

плоскость в  $E^n$ , дополненная точкой  $\infty$ . Поэтому с точностью до евклидова подобия имеются ровно три конформные модели пространства  $L^n$  в  $E^n$ :

1) единичный шар  $B^n \subset E^n$ :

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 < 1 \quad (15)$$

с группой  $C_n(B^n)$ , где  $^1) C_n = \text{Circ } S^n$ ;

2) внешность шара, т. е. область

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 > 1,$$

дополненная точкой  $\infty$ , с аналогичной группой;

3) полупространство  $H^n$ :

$$y_n > 0, \quad (16)$$

с группой  $C_n(H^n)$ .

Модели 1 и 2 переводятся одна в другую инверсией относительно единичной сферы  $\partial B^n$ . Поэтому ограничимся рассмотрением моделей 1 и 3. Модель  $(B^n, C_n(B^n))$  называется *конформной моделью* пространства  $L^n$  в *единичном шаре*, а модель  $(H^n, C_n(H^n))$  — *конформной моделью в полупространстве* или *моделью Пуанкаре*. В дальнейшем мы называем их коротко «модель  $B^n$ » и «модель  $H^n$ »; по аналогии с п. 1.2 их следовало бы называть «конформно-евклидовыми» моделями пространства  $L^n$ .

Найдем вид римановой метрики для каждой из указанных моделей; при этом в качестве координат примем, естественно,  $y_1, \dots, y_n$  — декартовы координаты в  $E^n$ .

Предложение 2.9. Риманова метрика конформной модели  $B^n$  есть

$$ds^2 = 4(1 - |y|^2)^{-2} \sum_1^n dy_i^2, \quad (17)$$

где  $|y| = \left( \sum_1^n y_i^2 \right)^{1/2}$ .

◀ Воспользуемся конформной моделью  $S_+^n$  из доказательства теоремы 2.5, т. е. полусферой в  $E^{n+1}$ . Если подействовать на  $S_+^n$  стереографической проекцией  $\phi$ , описанной в п. 2.1, то модель  $S_+^n$  перейдет в модель  $B^n$ . Каждой точке  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in S_+^n$  отвечают две точки в плоскости  $E^n$  ( $x_0 = 0$ ): точка  $\psi(x)$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$  и точка  $\phi(x)$  с

<sup>1)</sup> В § 1 единичный шар обозначался  $K^n$ . Различные обозначения для шара ( $K^n$  или  $B^n$ ) мы применяем в зависимости от того, какая из двух моделей пространства  $L^n$  имеется в виду (модель Клейна или конформная модель). Напомним также, что  $C_n(B^n)$  обозначает ограничение на  $B^n$  подгруппы  $C_n$ , сохраняющей  $B^n$ .

координатами  $y_1, \dots, y_n$  (рис. 10). Связь между ними, как нетрудно подсчитать, осуществляется с помощью формул

$$x_i = \frac{2y_i}{1 + |y|^2} \quad (i=1, \dots, n), \quad (18)$$

где  $|y| = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$ . Метрика Лобачевского в  $S_+^n$ , записанная в координатах  $x_1, \dots, x_n$ , имеет вид (6). После перехода к координатам  $y_1, \dots, y_n$  по формулам (18) получаем для той же метрики выражение (17). ►

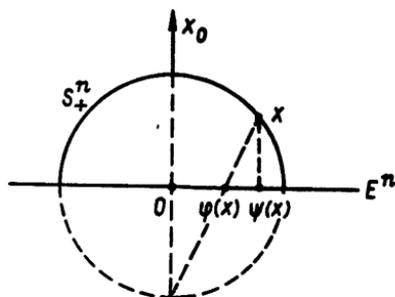


Рис. 10

Отметим следующее очевидное свойство модели  $B^n$ : вращения модели вокруг точки  $O: y_1 = \dots = y_n = 0$  (центр шара  $B^n$ ) суть обычные евклидовы вращения вокруг  $O$ .

Предложение 2.10. Риманова метрика модели  $H^n$  есть

$$ds^2 = y_n^{-2} \sum_1^n dy_i^2. \quad (19)$$

◄Подвергнем модель  $B^n$  (т. е. (15), (17)) инверсии  $\alpha$  относительно гиперсферы  $S \subset E^n$  с центром  $s = (0, \dots, 0, -1)$  и радиусом  $\sqrt{2}$  (рис. 11). При этом преобразовании шар  $B^n$

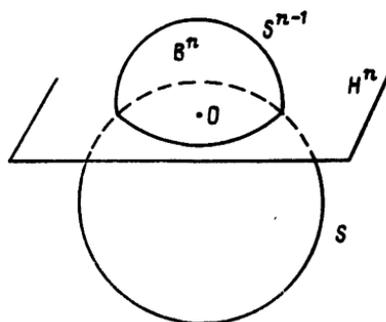


Рис. 11

отобразится в полупространство  $y_n > 0$ . Полагая  $\alpha: y \rightarrow z$ , можем записать

$$z_i = \frac{2y_i}{\rho^2} \quad (i=1, \dots, n-1), \quad z_n + 1 = \frac{2(y_n + 1)}{\rho^2},$$

где  $\rho^2 = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + (y_n + 1)^2$ . Метрика (17) перейдет в метрику

$$ds^2 = z_n^{-2} \sum_1^n dz_i^2$$

определенную на полупространстве  $z_n > 0$ . ►

Для удобства читателя сведем в одну таблицу полученные нами данные о моделях  $B^n$  и  $H^n$ :

Модель	Область в $E^n$	Метрика	Элемент объема
$B^n$	$\sum_1^n y_i^2 < 1$	$ds^2 = 4(1 -  y ^2)^{-2} \sum_1^n dy_i^2$	$dv = 2^n (1 -  y ^2)^{-n} dy_1 \dots dy_n$
$H^n$	$y_n > 0$	$ds^2 = y_n^{-2} \sum_1^n dy_i^2$	$dv = y_n^{-n} dy_1 \dots dy_n$

Отметим ряд других фактов, относящихся к конформно-евклидовым моделям пространства  $L^n$ . В приводимых ниже свойствах 1 и 2 через  $X$  обозначается любая из моделей  $B^n$  и  $H^n$ .

1. Плоскости в модели  $X$  — это непустые пересечения  $X$  со сферами в  $S^n$  (т. е. с евклидовыми сферами или плоскостями), ортогональными  $\partial X$ . Это следует из характеристики плоскостей в модели  $S_+^n$ , данной в замечании 2 к теореме 2.5, а также из того факта, что изоморфизм моделей  $S_+^n$  и  $B^n$  осуществляется посредством отображения  $\varphi$ . В частности, прямые в модели  $B^n$  — это диаметры шара  $B^n$ , а также дуги евклидовых окружностей, ортогональные  $\partial B^n$ ; прямые в  $H^n$  — это евклидовы полуокружности или полупрямые, ортогональные  $\partial H^n$ .

2. Пусть  $\Gamma$  есть гиперплоскость в модели  $X$  и  $\Gamma^*$  — соответствующая евклидова сфера или гиперплоскость ( $\Gamma^*$  есть  $\Gamma^* \cap X$ ). Пусть  $g$  — евклидова инверсия относительно  $\Gamma^*$ , если  $\Gamma^*$  — сфера, и евклидово отражение относительно  $\Gamma^*$ , если  $\Gamma^*$  — гиперплоскость. Тогда  $gX = X$  и  $g|_X$  есть отражение относительно  $\Gamma$  в модели  $X$ .

Поскольку  $L$ -отражения относительно гиперплоскостей порождают всю группу  $\text{Isom } L^n$ , то отсюда получается описание движений модели  $X$  как конечных произведений инверсий относительно евклидовых гиперсфер, ортогональных  $\partial X$ .

Можно указать простую формулу для *расстояний* в любой из конформно-евклидовых моделей. Предварительно отметим, что «двойное отношение» четырех точек  $u, v, p, q$  из  $\hat{E}^n$ :

$$[[u, v; p, q]] = \frac{|up| \cdot |vp|}{|uq| \cdot |vq|} \quad (20)$$

( $|up|$  обозначает евклидово расстояние между  $u$  и  $p$ ) является инвариантом относительно всех инверсий и отражений в  $\hat{E}^n$  (см. [7, т. 2, п. 18.10.7]).

Предложение 2.11. Л-расстояние между точками  $u$  и  $v$  в конформно-евклидовой модели ( $B^n$  или  $H^n$ ) определяется формулой

$$\rho(u, v) = |\ln [[u, v; p, q]]|, \quad (21)$$

где  $p$  и  $q$  — граничные точки Л-прямой  $uv$ .

Пусть  $u$  и  $v$  — две произвольные точки, принадлежащие полусфере  $S^{n+}$  из доказательства теоремы 2.5 (рис. 12), а  $p$  и  $q$  — граничные точки Л-прямой  $uv$ . Положим  $u' = \psi(u)$ ,

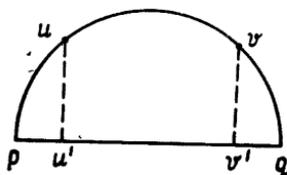


Рис. 12

$v' = \psi(v)$ . Согласно предложению 1.7, имеем  $\rho(u, v) = \frac{1}{2} |\ln [[u, v; p, q]]|$ . Нетрудно проверить, исходя из рис. 12, что

$$[[u', v'; p, q]] = [[u, v; p, q]]^2,$$

поэтому

$$\rho(u, v) = |\ln [[u, v; p, q]]|.$$

Как уже отмечалось, стереографическая проекция  $\psi$ , переводящая  $S^{n+}$  в  $B^n$ , является ограничением (на  $S^{n+}$ ) некоторой инверсии в пространстве  $E^{n+1}$ . Но инверсия, как уже отмечалось, не меняет «двойного отношения» (21). Отсюда следует формула (21) для модели  $B^n$ . Поскольку  $H^n$  получается из  $B^n$  также с помощью инверсии, то тем самым указанная формула верна и для  $H^n$ . ►

Отметим частный случай, когда в модели  $H^n$  точки  $u$  и  $v$  лежат на одном евклидовом перпендикуляре к  $\partial H^n$ . Тогда одна из точек  $p, q$ , скажем,  $q$ , есть  $\infty$ , и формула (21) дает

$$\rho(u, v) = \left| \ln \frac{|up|}{|vp|} \right|.$$

**2.4. Комплексная структура плоскости Лобачевского.** Рассмотрим модель Пуанкаре  $H^2$  плоскости  $\mathbb{L}^2$ . Будем истолковывать  $H^2$  как верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  плоскости

комплексного переменного  $z$ . Как известно,  $\text{Hol } H^2$  (группа всех голоморфных диффеоморфизмов  $H^2$ ) состоит из всех отображений вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc > 0$  ([32, § 11]). При этом для любой пары касательных направлений к  $H^2$  (касательное направление задается точкой  $p \in H^2$  и вектором  $\xi \in T_p(H^2)$ , определенным с точностью до положительного множителя) существует единственное отображение  $g \in \text{Hol } H^2$ , переводящее одно из данных направлений в другое.

Из сказанного следует, что антиголоморфные диффеоморфизмы  $H^2$  суть отображения вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{\overline{cz + d}},$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc < 0$ .

**Теорема 2.12.** Группа движений модели  $H^2$  совпадает с группой всех голоморфных и антиголоморфных диффеоморфизмов полуплоскости  $H^2$ .

◀ Обозначим через  $\text{Isom}_+ H^2$  группу всех собственных (т. е. сохраняющих ориентацию) изометрий модели  $H^2$ . Так как любая изометрия является конформным отображением, то  $\text{Isom}_+ H^2 \subset \text{Hol } H^2$ . Но группа  $\text{Isom}_+ H^2$  тоже является просто транзитивной на множестве касательных направлений. Следовательно,  $\text{Isom}_+ H^2 = \text{Hol } H^2$ . Остается еще заметить, что отображение  $z \mapsto \frac{1}{z}$  является движением  $H^2$ . ▶

Теорема 2.12 позволяет характеризовать плоскость  $L^2$  как риманову поверхность (одномерное комплексное многообразие), конформно эквивалентную полуплоскости, с группой всех ее голоморфных и антиголоморфных диффеоморфизмов в качестве группы движений.

Два других (двумерных) пространства постоянной кривизны  $S^2$  и  $E^2$  также можно рассматривать как римановы поверхности, с реализацией движений в виде голоморфных или антиголоморфных диффеоморфизмов. Однако, в отличие от  $L^2$ , в любом из них группа  $\text{Isom}_+$  уже, чем группа  $\text{Hol}$ . Например, группа  $\text{Hol } E^2$  состоит из диффеоморфизмов вида  $z \mapsto \alpha z + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — любые комплексные числа, причем  $\alpha \neq 0$ ; группа же  $\text{Isom}_+ E^2$  выделяется условием  $|\alpha| = 1$ .

Отметим, что согласно теореме Пуанкаре — Кёбе об униформизации три рассмотренных римановых поверхности ( $L^2$ ,  $S^2$ ,  $E^2$ ) — это все конформно неэквивалентные односвязные римановы поверхности.

**З а м е ч а н и е.** Абсолют модели  $H^2$  есть одномерное многообразие  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}U\{\infty\}$ , а индуцированная на нем группа преобразований состоит из всех преобразований вида

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0).$$

Это означает, что абсолютен изоморфен проективной прямой  $P^1$ . С другой стороны, абсолютен конформной модели для  $L^2$  изоморфен абсолюту проективной модели (предложение 2.7), т. е. одномерному конформному пространству  $C^1$ . Таким образом, пространства  $C^1$  и  $P^1$  изоморфны (как однородные пространства).

### § 3. Матричные модели пространств $L^2$ и $L^3$

Модели двумерного и трехмерного пространств Лобачевского имеют особое значение — благодаря разнообразию их приложений к алгебре, комплексному анализу, дифференциальным уравнениям, теории чисел и т. д. В частности, при решении ряда задач, связанных с квадратичными формами, оказываются полезными модели, которые мы будем называть *матричными*.

**3.1. Матричная модель пространства  $L^2$ .** Пусть  $S^*L_2(\mathbb{R})$  — группа всех вещественных  $2 \times 2$ -матриц с определителем  $\pm 1$ , а  $M_2$  — векторное пространство всех вещественных симметрических  $2 \times 2$ -матриц. В пространстве  $M_2$  можно определить представление группы  $S^*L_2(\mathbb{R})$ , поставив в соответствие каждому  $A \in S^*L_2(\mathbb{R})$  линейное отображение  $\varphi(A) : M_2 \rightarrow M_2$  по формуле

$$\varphi(A)(V) = AVA^T,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \in M_2.$$

Фактически  $\varphi(A)$  представляет собой закон преобразования квадратичной формы

$$px^2 + 2qxy + ry^2,$$

когда переменные  $x$  и  $y$  подвергаются линейному преобразованию с матрицей  $A$ .

Очевидно, все  $\varphi(A)$  сохраняют форму

$$\begin{vmatrix} p & q \\ q & r \end{vmatrix} = pr - q^2. \quad (22)$$

Если ввести в  $M_2$  вместо  $p$  и  $r$  новые координаты  $s$  и  $t$ , положив  $p = s + t$ ,  $r = s - t$ , то форма (22) запишется как

$$s^2 - t^2 - q^2. \quad (23)$$

Таким образом, в векторном пространстве  $M_2$ , отнесенном к координатам  $s, t, q$ , мы построили представление группы  $S^*L_2(\mathbb{R})$ , сохраняющее форму (23), т. е. представление матрицами из  $O_{2,1}$ . Заметим, что для некоторых  $A$  определитель преобразования  $\varphi(A)$  равен  $-1$ , например,

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это показывает, что  $\varphi(S^*L_2(\mathbb{R}))$  состоит (как и сама группа  $S^*L_2(\mathbb{R})$ ) из двух компонент. Обе компоненты принадлежат  $O'_{2,1}$ , так как сохраняют конус положительно определенных матриц.

Поскольку размерность группы  $S^*L_2(\mathbb{R})$  совпадает с размерностью  $O'_{2,1}$ , а ядро отображения  $A \mapsto \varphi(A)$  состоит из матриц  $E$  и  $-E$  приходим к заключению, что  $A \mapsto \varphi(A)$  есть изоморфизм группы  $S^*L_2(\mathbb{R})/\{E, -E\}$  на группу  $O'_{2,1}$ .

Рассмотрим орбиту точки

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2$$

(для этой точки  $p=r=1, q=0$  или  $s=1, t=0, q=0$ ) относительно группы  $\varphi(S^*L_2(\mathbb{R}))$ , т. е. фактически — относительно  $O'_{2,1}$ . Это — «верхняя» полость ( $s > 0$ ) гиперboloида

$$s^2 - t^2 - q^2 = 1,$$

являющаяся моделью  $L^2$ . Мы приходим к следующему заключению:

Однородное пространство вещественных симметрических  $2 \times 2$ -матриц с определителем, равным 1, на котором действует группа  $\varphi(S^*L_2(\mathbb{R}))$ , изоморфно пространству Лобачевского  $L^2$ .

В дополнение найдем стабилизатор точки  $V_0$ . Квадратичная форма, отвечающая  $V_0$ , есть  $x^2 + y^2$ . Поэтому  $\varphi(A)V_0 = V_0$  в том и только в том случае, когда  $A \in O_2$ . Принимая во внимание, что обе матрицы  $E$  и  $-E$  принадлежат  $O_2$ , получаем следующий результат: пространство  $L^2$  изоморфно  $S^*L_2(\mathbb{R})/O_2$ .

**3.2. Матричная модель пространства  $L^3$ .** Построение этой модели аналогично построению матричной модели  $L^2$ . Обозначим через  $T_2$  совокупность всех эрмитовых  $2 \times 2$ -матриц, т. е. матриц вида

$$V = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & r \end{pmatrix},$$

где  $p, r \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{C}$ . Элементы  $T_2$  можно интерпретировать как бинарные эрмитовы формы

$$px\bar{x} + qx\bar{y} + \bar{q}y\bar{x} + ry\bar{y},$$

где  $p, r \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}$ .

В пространстве  $T_2$  можно определить представление  $\psi$  группы  $SL_2(\mathbb{C})$  по формуле

$$\psi(A)V = AV\bar{A}^T,$$

где  $A \in SL_2(\mathbb{C}), V \in T_2$ . Все преобразования  $\psi(A)$ , а также преобразование комплексного сопряжения  $V \mapsto \bar{V}$  сохраняют форму

$$\begin{vmatrix} p & q \\ \bar{q} & r \end{vmatrix} = pr - q\bar{q}. \quad (24)$$

Если ввести в  $T_2$  координаты (вещественные)  $s, t, u, v$ , где  $p = s + t, r = s - t, q = u + iv$ , то форма (24) примет вид

$$s^2 - t^2 - u^2 - v^2.$$

Отсюда так же, как в предыдущем пункте, получается следующий результат.

Однородное пространство эрмитовых  $2 \times 2$ -матриц с определителем, равным 1, на котором действует группа  $\psi(SL_2(\mathbb{C}))$ , расширенная при помощи комплексного сопряжения, изоморфно пространству Лобачевского  $L^3$ . При этом группе  $\psi(SL_2(\mathbb{C}))$  отвечает группа  $\text{Isom}_+ L^3$  собственных движений пространства  $L^3$ .

Рассмотрим, как и ранее, точку

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_2.$$

Соответствующая ей эрмитова форма есть  $x\bar{x} + y\bar{y}$ , поэтому  $\psi(A)(V_0) = V_0$  тогда и только тогда, когда  $A \in U_2$ . Приходим к заключению, что пространство  $(L^3, \text{Isom}_+ L^3)$  изоморфно  $SL_2(\mathbb{C})/\overset{+}{SU}^2$ .

Тот же самый результат можно получить и из других соображений, используя модель Пуанкаре  $H^3$ . Наметим кратко ход рассуждений.

Граница полупространства  $H^3$  есть плоскость  $E^2$ , определяемая уравнением  $y_3 = 0$ . Будем рассматривать ее как плоскость комплексного переменного  $z = y_1 + iy_2$ . Существует естественный изоморфизм  $\phi$  между группами  $\text{Isom } H^3$  и  $\text{Conf } \hat{E}^2$  (в общих терминах  $\phi$  есть естественный изоморфизм между  $G(\text{int } Q)$  и  $G(Q)$ , см. п. 2.1). Итак, имеет изоморфизм  $\phi: \text{Isom}_+ H^3 \simeq SL_2(\mathbb{C})/\{E, -E\}$ . Можно показать, что при этом изоморфизме стабилизатору точки  $(0, 0, 1) \in H^3$  соответствует группа  $SU_2/\{E, -E\}$ .

## Глава 3

### ПЛАНИМЕТРИЯ

В этой главе мы рассмотрим, по возможности с единых позиций, геометрические свойства *двумерных* пространств постоянной кривизны: сферы  $S^2$ , евклидовой плоскости  $E^2$  и плоскости Лобачевского  $L^2$ . Для изучения  $S^2$  и  $E^2$  будем пользоваться соответственно векторной и аффинной моделями. Что касается  $L^2$ , то наряду с векторной моделью, т. е. реализацией  $L^2$  в виде поверхности

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, \quad x_0 > 0, \quad (1)$$

в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbf{R}^{2,1}$  с псевдоримановой метрикой  $-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$ , будем использовать и другие модели, а именно:

1. Модель Пуанкаре

$$H^2 = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (2)$$

— в дальнейшем говорим коротко «модель  $H^2$ ».

2. Конформную модель в единичном круге

$$B^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

с метрикой

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2} \quad (3)$$

— в дальнейшем говорим «модель  $B^2$ ».

3. Модель Клейна, т. е. единичный круг с метрикой

$$ds^2 = \frac{(1 - y^2) dx^2 + 2xy dx dy + (1 - x^2) dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}; \quad (4)$$

в дальнейшем эту модель обозначаем  $K^2$ .

Описание движений, а также прямых в каждой из указанных моделей было дано в главе 2. Подчеркнем, что модели  $H^2$  и  $B^2$  рассматриваются как подмножества конформной плоскости  $E^2 = E^2 \cup \{\infty\}$ , а модель  $K^2$  — как подмножество проективной плоскости  $PE^2$ .

Наибольшее внимание мы уделим плоскости Лобачевского, обладающей по сравнению со сферой и евклидовой плоскостью наиболее «насыщенной» геометрией; следует также учесть, что из трех геометрий  $S^2$ ,  $E^2$  и  $L^2$  последняя наименее известна специалисту.

Изоморфизм между моделями  $H^2$  и  $B^2$  осуществляется с помощью отображения

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i},$$

переводящего верхнюю полуплоскость в единичный круг и метрику (2) в (3); изоморфизм между  $B^2$  и  $K^2$  достигается с помощью отображения

$$z \mapsto \frac{2z}{1 + |z|^2},$$

которое переводит единичный круг в себя и метрику (3) в (4).

Замыкание любой из моделей  $H^2$ ,  $B^2$ ,  $K^2$  (см. п. 1.1, а также предложение 2.7 в главе 2) будем называть *расширенной плоскостью Лобачевского* и обозначать иногда через  $\bar{L}^2$ . С топологической точки зрения  $\bar{L}^2$  есть диск. При реализации  $L^2$  в ви-

де модели Пуанкаре границей этого диска служит действительная ось, дополненная точкой  $\infty$ , в любой из моделей  $B^2$  и  $K^2$  граница есть единичная окружность. Как однородное пространство, граница изоморфна  $S^1$  (или  $P^1$ ) и любые три точки на ней можно с помощью преобразования, индуцированного движением модели, перевести в любые другие три точки.

Для более полного (по сравнению с данной главой) ознакомления с двумерной геометрией Лобачевского отсылаем читателя к [6], гл. 7, а также к указанной в [6] библиографии; сферическая геометрия подробно рассматривается в [7]. Аксиоматическое построение геометрии Лобачевского см., например, в [1].

## § 1. Прямые

**1.1. Расходящиеся и параллельные прямые на плоскости Лобачевского.** На сфере  $S^2$  любые две прямые имеют ровно две общие точки; на евклидовой плоскости  $E^2$  или плоскости Лобачевского  $L^2$  две прямые могут иметь либо одну общую точку, либо ни одной. Это обстоятельство, конечно, не может не создавать резкого различия между геометрией в  $S^2$ , с одной стороны, и геометриями в  $E^2$  и  $L^2$ , с другой. В то же время существуют глубокие различия и между геометриями в  $E^2$  и  $L^2$ .

В пространстве  $E^2$  через любую точку  $p$ , не принадлежащую прямой  $L$ , проходит единственная прямая  $L'$ , не пересекающая (параллельная)  $L$ ; взаимное расположение прямых  $L$  и  $L'$  полностью характеризуется расстоянием от  $p$  до  $L$ .

В пространстве  $L^2$  дело обстоит значительно сложнее (и интереснее). Обозначим через  $\mathcal{P}$  пучок прямых с центром  $p$ . Как видно, например, из рассмотрения модели Клейна, существуют две возможности:

1.  $L'$  не пересекает  $L$ , причем все прямые, близкие к  $L'$  в пучке  $\mathcal{P}$ , также не пересекают  $L$  (рис. 13). В этом случае прямые  $L$  и  $L'$  называются *расходящимися*. Две расходящиеся прямые всегда имеют единственный общий перпендикуляр (см. ниже), длина которого, очевидно, и характеризует взаимное расположение  $L$  и  $L'$ .

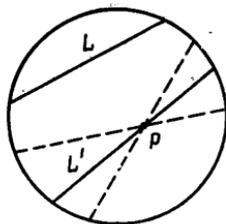


Рис. 13

2.  $L'$  не пересекает  $L$ , но существуют как угодно близкие к  $L$  прямые в пучке  $\mathcal{P}$ , которые пересекают  $L$  (рис. 14). В этом случае  $L$  и  $L'$  называются *параллельными* (в смысле Лобачевского). Если прямые  $L$  и  $L'$  параллельны, то на каждой из них можно определить *направление параллельности* (на рис. 14

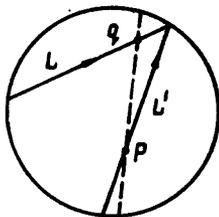


Рис. 14

оно указано стрелкой). Направление параллельности на  $L$  есть то направление, в котором нужно двигать точку  $q \in L$ , чтобы прямая  $pq$  приближалась к предельному положению  $L'$ ; аналогичным образом (с обращением ролей  $L$  и  $L'$ ) определяется направление параллельности на  $L'$ . Таким образом, отношение параллельности есть отношение между *ориентированными* прямыми. Если условиться считать, что каждая ориентированная прямая параллельна самой себе, то можно утверждать, что отношение параллельности является *отношением эквивалентности*.

На рис. 15 изображены параллельные прямые на модели Пуанкаре, на рис. 16 — параллельные прямые на модели  $B^2$ .

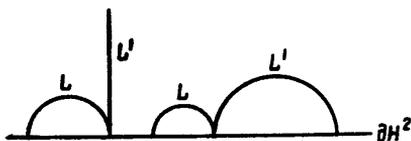


Рис. 15

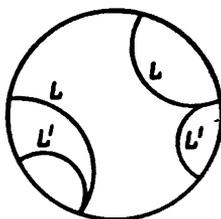


Рис. 16

Определение параллельных прямых можно дать и в терминах *бесконечно удаленных точек*. Пусть  $L$  — прямая. Ее бесконечно удаленными точками условимся называть две точки на абсолюте, являющиеся предельными для  $L$ . Как нетрудно видеть, прямые  $L$  и  $L'$  являются параллельными в том и только в том случае, если они имеют общую бесконечно удаленную точку.

Угол между двумя параллельными прямыми  $L$  и  $L'$  будем считать равным нулю; такое соглашение оправдано тем, что при фиксировании точки  $p \in L'$  и удалении точки  $q \in L$  в бесконечность в направлении параллельности угол  $\phi$  между прямыми  $L$  и  $pq$  стремится к нулю (см. рис. 17), где изображена модель  $B^2$ ).

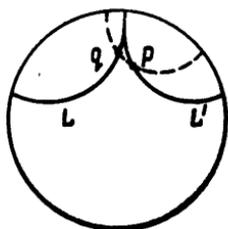


Рис. 17

Предложение 1.1. Если прямая  $L_1$  параллельна  $L_1'$ , а  $L_2$  параллельна  $L_2'$ , причем  $L_1 \neq L_1'$ ,  $L_2 \neq L_2'$ , то существует движение, переводящее  $L_1$  в  $L_2$  и  $L_1'$  в  $L_2'$ .

◀На рис. 18 прямые изображены на модели  $B^2$ . Движение, при котором  $z_1 \mapsto \omega_1$ ,  $z_2 \mapsto \omega_2$ ,  $z_3 \mapsto \omega_3$ , является искомым.▶

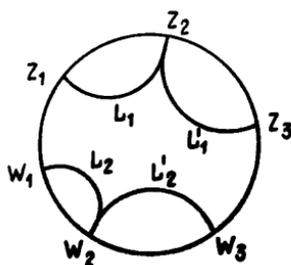


Рис. 18

Предложение 1.2. Прямые  $L$  и  $L'$  являются расходящимися тогда и только тогда, когда существует общий перпендикуляр к  $L$  и  $L'$ . Такой перпендикуляр всегда единствен.

◀Используем модель  $K^2 \subset PE^2$ . Прямые в  $PE^2$ , являющиеся продолжениями хорд  $L$  и  $L'$ , пересекаются в некоторой точке  $u$  (рис. 19); прямые  $uv$  и  $uw$  — касательные к абсолюту. Хорда  $T$ , соединяющая  $v$  и  $w$ , есть общий Л-перпендикуляр к  $L$  и  $L'$

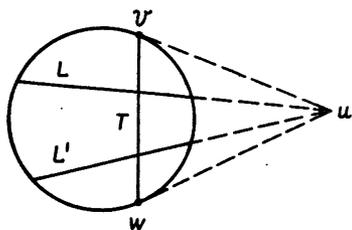


Рис. 19

(см. п. 1.3 главы 2). Единственность общего перпендикуляра следует из того, что любая изображающая его хорда должна обладать тем свойством, что ее продолжение проходит через полюсы прямых  $L$  и  $L'$ . ►

Существование на плоскости Лобачевского двух видов пар непересекающихся прямых — расходящихся и параллельных — обуславливает целый ряд фактов планиметрии Лобачевского, кажущихся парадоксальными. Например: внутри любого угла содержится некоторая прямая (рис. 20), не вокруг всякого треугольника можно описать окружность и т. д. О наиболее

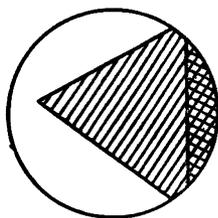


Рис. 20

важных и характерных из этих фактов будет рассказано дальше. Для практического овладения геометрией Лобачевского необходимо привыкнуть к этим фактам, ибо такая привычка позволяет выработать соответствующую интуицию.

**1.2. Расстояние от точек одной прямой до другой прямой.** Пусть  $L$  — прямая, а  $p$  — точка на плоскости Лобачевского. Выведем полезную формулу для  $\rho(p, L)$  в модели  $H^2$ .

Взяв в качестве  $L$  положительную полуось оси ординат, можем записать

$$\rho(p, L) = \rho(p, q),$$

где  $q \in L$ ,  $|Op| = |Oq|$  (рис. 21). Следовательно,

$$\rho(p, L) = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y},$$

где интеграл берется по дуге евклидовой окружности, соединяющей  $p$  с  $q$  и ортогональной  $L$ . Полагая  $\theta = \angle pOq$ , будем иметь

$$\rho(p, L) = \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|Op| d\varphi}{|Op| \sin\varphi} = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}. \quad (5)$$

Мы видим, что  $\rho(p, L)$  определяется только значением угла  $\theta$ , причем с возрастанием  $\theta$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  число  $\rho(p, L)$  растет от 0 до  $\infty$ .

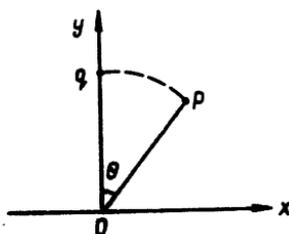


Рис. 21

Следствия.

1. Если  $L_1$  и  $L_2$  — две пересекающиеся прямые, то расстояние от точки  $p \in L_1$  до  $L_2$  монотонно и неограниченно возрастает по мере удаления  $p$  от точки пересечения  $L_1$  и  $L_2$ . Пояснением служит рис. 22.

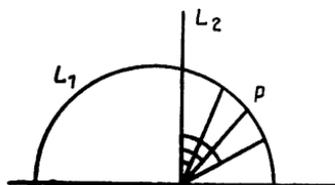


Рис. 22

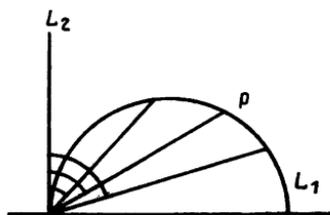


Рис. 23

2. Если  $L_1$  и  $L_2$  — две параллельные прямые, то  $\rho(p, L_2)$  растёт от 0 до  $\infty$ , когда  $p$  пробегает прямую  $L_1$  в направлении, противоположном направлению параллельности. См. рис. 23.

3. Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — две расходящиеся прямые и  $p_1p_2$  — их общий перпендикуляр ( $p_1 \in L_1, p_2 \in L_2$ ). Тогда  $\rho(p, L_2)$  растёт от  $\rho(p_1p_2)$  до  $\infty$ , когда точка  $p$  пробегает любой из двух лучей прямой  $L_1$  с началом в  $p_1$ . См. рис. 24.

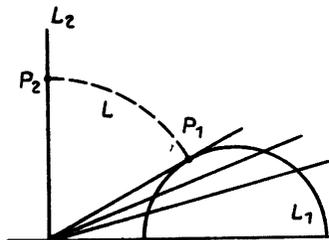


Рис. 24

Остановим внимание еще на одном полезном факте планиметрии Лобачевского. Пусть дан острый угол с вершиной  $O$ . Из переменной точки  $M$  на одной из сторон угла опустим перпендикуляр  $MN$  на другую сторону. Оказывается, что по мере удаления точки  $M$  от вершины  $O$  угол  $OMN$  стремится к нулю. В этом легко убедиться с помощью модели  $B^2$ . Если принять, что вершина угла находится в центре круга  $B^2$  и, следовательно, сторонами угла являются два радиуса, то наше утверждение будет сразу усматриваться из рисунка 25.

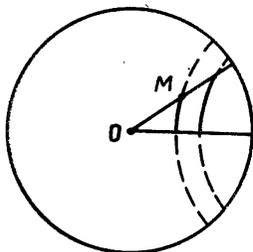


Рис. 25

## § 2. Многоугольники

### 2.1. Определения. Условия выпуклости.

Определение 2.1. *Многоугольником* в двумерном пространстве постоянной кривизны  $X$  называется односвязная замкнутая область<sup>1)</sup>  $M \subset X$  такая, что  $\partial M$  есть объединение конечного числа отрезков, лучей и прямых.

<sup>1)</sup> «Замкнутая область» означает: замыкание некоторой области.

Вершинами многоугольника  $M$  называются точки  $p \in \partial M$ , характеризующиеся тем, что пересечение  $\partial M$  с некоторым кругом с центром  $p$  состоит из двух радиусов, не являющихся продолжениями один другого. Угол многоугольника при вершине  $p$  определяется как обычно.

**Определение 2.2.** Многоугольник  $M$ , являющийся выпуклым множеством в пространстве  $X$ , называется *выпуклым многоугольником*.

Можно дать и другое, эквивалентное

**Определение 2.3.** *Выпуклым многоугольником* называется пересечение конечного числа полуплоскостей, имеющее непустую внутренность.

Эквивалентность определений 2.2 и 2.3 легко проверяется.

Из определения выпуклого многоугольника очевидным образом следует, что любой угол  $\alpha$  такого многоугольника удовлетворяет условию

$$0 < \alpha < \pi. \quad (6)$$

Верно и обратное: если  $M$  есть многоугольник в смысле определения 2.1 и если каждый угол  $\alpha$  этого многоугольника удовлетворяет условию (6), то  $M$  является выпуклым многоугольником.

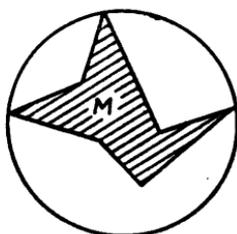
◀ Вообще, любая связная локально выпуклая замкнутая область  $M$  выпукла. В самом деле, для любых внутренних точек  $x, y$  области  $M$ , не являющихся в случае  $X = S^n$  диаметрально противоположными, среди линий, соединяющих их в  $M$ , рассмотрим кратчайшую. Из локальной выпуклости  $M$  следует, что эта линия является геодезической и что некоторая ее окрестность содержится в  $M$ ; но тогда она не может быть ничем иным, как только отрезком  $xy$ . ▶

**Определение 2.4.** Многоугольник называется *собственным*, если он:

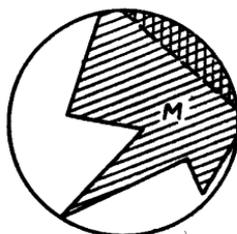
в случае  $X = E^2$  является ограниченным множеством;

в случае  $X = S^2$  не содержит диаметрально противоположных точек;

в случае  $X = L^2$  не содержит ни одной полуплоскости.



Собственный  
многоугольник



Несобственный  
многоугольник

Рис. 26 иллюстрирует различие между собственными и несобственными многоугольниками на плоскости Лобачевского (в модели Клейна). Двойной штриховкой показана полуплоскость, принадлежащая  $M$  в случае, когда  $M$  — несобственный.

Если  $M$  — собственный многоугольник в  $L^2$ , то его замыкание в  $L^2$  может содержать и точки абсолюта  $dL^2$ . Такие точки мы также будем считать вершинами  $M$  и называть *бесконечно удаленными вершинами*. Угол многоугольника при бесконечно удаленной вершине примем, естественно, равным нулю.

Собственный многоугольник, имеющий  $n$  вершин (включая бесконечно удаленные) называется  *$n$ -угольником*.

Пусть снова  $X$  — двумерное пространство постоянной кривизны и  $p_1, \dots, p_k$  — конечный набор точек, принадлежащих либо самому пространству  $X$ , если  $X$  есть  $S^2$  или  $E^2$ , либо его замыканию  $\bar{X}$ , если  $X$  есть  $L^2$ . Под *выпуклой оболочкой* данного набора точек будем понимать:

в случаях  $X=S^2$  или  $X=E^2$  — наименьшее выпуклое множество в  $\bar{X}$ , содержащее точки  $p_1, \dots, p_k$ ;

в случае  $\bar{X}=L^2$  — наименьшее выпуклое множество в  $L^2$ , замыкание которого в  $\bar{L}^2$  содержит точки  $p_1, \dots, p_k$ .

Выпуклую оболочку будем обозначать  $\text{conv}\{p_1, \dots, p_k\}$ .

**Предложение 2.5.** Выпуклый многоугольник тогда и только тогда является собственным, когда он совпадает с выпуклой оболочкой множества его вершин. См. [7, т. 1, п. 12.1.15].

**2.2. Элементарные свойства треугольников.** Пусть  $X$  — одно из пространств  $S^2, E^2, L^2$ . Пусть, далее,  $p_1, p_2, p_3$  — три точки, принадлежащих  $X$  или  $\bar{X}$  (последнее в случае  $X=L^2$ ) и не лежащие на одной прямой (или в замыкании одной прямой). Множество  $\text{conv}\{p_1, p_2, p_3\}$  называется *треугольником с вершинами*  $p_1, p_2, p_3$  и обозначается  $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ . Очевидно,  $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle = T_1 \cap T_2 \cap T_3$ , где  $T_i$  есть замкнутая полуплоскость с граничной прямой  $p_j p_k$  ( $i, j, k$  различны), содержащая  $p_i$ .

Отметим, что в случае плоскости Лобачевского некоторые из точек  $p_1, p_2, p_3$ , или даже все, могут быть бесконечно удаленными, см. рис. 27 (в модели Клейна).

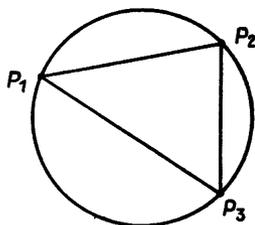


Рис. 27

Углы треугольника  $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$  будем означать  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ( $\alpha_i$  есть угол при вершине  $p_i$ ).

Перечислим некоторые факты из школьного курса геометрии, справедливые не только в случае евклидовой плоскости  $E^2$ , но и в любом двумерном пространстве постоянной кривизны.

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, а высота, опущенная на основание, является одновременно медианой и биссектрисой.

2. Признаки конгруэнтности<sup>1)</sup> треугольников (конечных):

- а) «по двум сторонам и углу между ними»;
- б) «по стороне и двум прилежащим углам»;
- с) «по трем сторонам».

Позднее мы установим еще один признак конгруэнтности, относящийся только к пространствам  $S^2$  и  $L^2$ : «по трем углам». Такой признак, как известно, не имеет места в случае евклидовой геометрии, поскольку существуют подобные, но не конгруэнтные евклидовы треугольники.

3. Против большей стороны в треугольнике лежит и больший угол.

Обычное доказательство этого предложения опирается на теорему о внешнем угле треугольника, которая в случае сферы  $S^2$  неверна. Однако для этой же цели можно использовать и более слабый факт, а именно,

$$\pi - \alpha_1 > \alpha_2 - \alpha_3 \quad (7)$$

(внешний угол больше разности двух внутренних, с ним не смежных); для получения нужного результата это неравенство нужно применить к выделенному треугольнику на рис. 28. Справедливость неравенства (7) для случая сферы будет установлена в следующем пункте.



Рис. 28

4. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других.

Заметим, что следствием этого факта является такое предложение: *сумма сторон сферического треугольника меньше  $2\pi$* . Действительно, для любого треугольника  $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$  на сфере  $S^2$  имеем:

<sup>1)</sup> Как обычно, конгруэнтными мы называем фигуры, переводящиеся одна в другую движением.

$$\rho(p_1, p_2) + \rho(p_2, p_3) + \rho(p_3, p_1) < \rho(p_1, p_2) + \rho(p_2, q) + \\ + \rho(q, p_3) + \rho(p_3, p_1) = 2\pi,$$

где  $q$  есть точка сферы, диаметрально противоположная  $p_1$  (рис. 29).

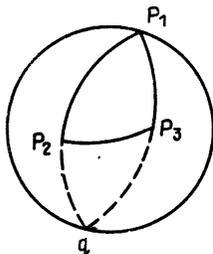


Рис. 29

**2.3. Полярные треугольники на сфере.** Каждому треугольнику  $\Delta$  на сфере  $S^2$  однозначно соответствует треугольник  $\Delta'$ , называемый *полярным* к  $\Delta$ . Если  $\Delta = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ , то  $\Delta'$  определяется как пересечение трех полусфер  $S_1, S_2, S_3$ , где  $S_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) отсекается от сферы плоскостью, проходящей через начало  $O$  перпендикулярно вектору  $\overline{Op_i}$  и, кроме того,  $S_i$  содержит  $p_i$  (рис. 30). Если обозначим вершины треугольника  $\Delta'$  через  $p'_1, p'_2, p'_3$  и положим  $x_i = \overline{Op_i}$ ,  $x'_i = \overline{Op'_i}$ , то определение  $\Delta'$  можно записать с помощью условий:

$$(x_i, x'_i) > 0, \quad (x_i, x'_j) = 0, \quad \text{где } i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

Отсюда сразу же следует, что если  $\Delta'$  полярен  $\Delta$ , то и  $\Delta$  полярен  $\Delta'$ , т. е. отношение полярности между треугольниками на сфере является взаимным.

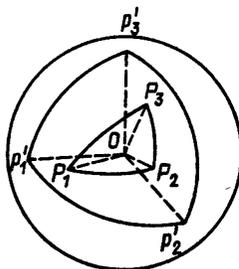


Рис. 30

**Предложение 2.6.** Длины  $a'_1, a'_2, a'_3$  сторон треугольника  $\Delta'$  связаны с величинами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  углов треугольника  $\Delta$  соотношениями

$$a'_i + \alpha_i = \pi \quad (i=1, 2, 3).$$

◀ Сторона  $a'_i$  есть угол между векторами  $\overline{Op'_j}$  и  $\overline{Op'_k}$  ( $i, j, k$  различны), который равен разности между  $\pi$  и углом между плоскостями  $(O, p_i, p_j)$  и  $(O, p_i, p_k)$  (ортогональными этим векторам). Отсюда  $a'_i = \pi - \alpha_i$ . ▶

Следствие. Для углов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  сферического треугольника  $\Delta$  справедливо неравенство (7).

Действительно, записав для полярного треугольника  $\Delta'$  неравенство  $a'_1 + a'_2 > a'_3$  и заменив каждое из чисел  $a'_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) на  $\pi - \alpha_i$ , получим (7).

**2.4. Сумма углов треугольника.** Пусть снова  $X^1$  — двумерное пространство постоянной кривизны. По каким признакам можно определить знак кривизны? Одна из возможностей решить этот вопрос заключается в сравнении двух чисел: суммы углов треугольника и числа  $\pi$ .

**Теорема 2.7.** Сумма углов любого треугольника на сфере больше, на евклидовой плоскости равна, на плоскости Лобачевского меньше  $\pi$ .

◀ Нуждаются в рассмотрении только сфера и плоскость Лобачевского.

Для  $S^2$  утверждение теоремы является следствием предложения 2.6 и того факта, что сумма сторон сферического треугольника меньше  $2\pi$  (см. конец п. 2.2).

В случае  $L^2$  используем конформную модель  $B^2$ . Можно считать, что одна из вершин треугольника находится в центре круга  $B^2$ , следовательно, выходящие из нее стороны треугольника суть отрезки радиусов. Остальное видно из рис. 31. ▶

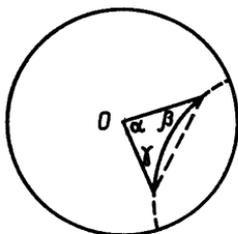


Рис. 31

**2.5. Существование выпуклого многоугольника с наперед заданными углами.** Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что сумма углов выпуклого  $n$ -угольника на плоскости Лобачевского меньше, на евклидовой плоскости равна, а на сфере больше, чем  $(n-2)\pi$ ; для доказательства разбиваем  $n$ -угольник на  $n-2$  треугольников с помощью диагоналей, выходящих из одной вершины.

Теорема 2.8. Для любого набора чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ( $n \geq 3$ ), удовлетворяющих условиям

$$0 < \alpha_i < \pi \quad (i=1, \dots, n), \quad (8)$$

существует (ограниченный) выпуклый  $n$ -угольник в одном из пространств  $L^2, E^2, S^2$ , имеющих углы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

◀ Обозначим сумму  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$  через  $\sigma$ . Возможны три случая:

$$1. \sigma < (n-2)\pi; \quad (9)$$

$$2. \sigma = (n-2)\pi; \quad (10)$$

$$3. \sigma > (n-2)\pi. \quad (11)$$

Разберем сначала случай (9). Искомый многоугольник  $M$  будем строить, естественно, в  $L^2$ . При этом будем искать  $M$  в классе многоугольников, описанных около окружности.

Зафиксируем некоторое положительное число  $d$  и построим для каждого из углов  $\alpha_i$  четырехугольник  $Q_i$ , изображенный на рис. 32. Если нам удастся выбрать  $d$  так, чтобы было

$$\sum_1^n \varphi_i = \pi, \quad (12)$$

то этим поставленная задача будет решена; действительно, прикладывая четырехугольники  $Q_1, \dots, Q_n$  друг к другу в циклическом порядке вдоль равных сторон  $d$ , получим искомый  $n$ -угольник.

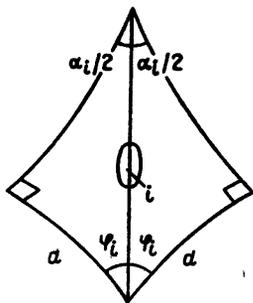


Рис. 32

При малых значениях  $d$  угол  $\varphi_i$  мало отличается от  $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_i}{2}$ , а сумма  $\sum_1^n \varphi_i$  — от

$$\sum_1^n \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_i}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( n\pi - \sum_1^n \alpha_i \right),$$

что ввиду условия (9) больше, чем  $\pi$ . С другой стороны, при  $d \rightarrow \infty$  каждый из углов  $\varphi_i$  стремится к нулю (см. конец § 1) а, значит, стремится к нулю и  $\Sigma \varphi_i$ . Так как функция  $\Sigma \varphi_i$  (от аргумента  $d$ ) непрерывна и принимает как значения, большие  $\pi$ , так и значения, меньшие  $\pi$ , то одно из ее промежуточных значений обязательно равно  $\pi$ .

Если имеет место случай (10), то многоугольник  $M$  ищем в  $E^2$ . В этом случае указанное выше построение при любом значении  $d$  дает (12), что и решает задачу.

Наконец, в случае (11) мы делаем это же построение в  $S^2$ . При значениях  $d$ , близких к нулю, сумма  $\Sigma \varphi_i$  теперь меньше  $\pi$ . С другой стороны, когда  $d$  приближается снизу к значению  $\frac{\pi}{2}$  ( $\frac{1}{4}$  длины большой окружности в  $S^2$ ), каждый из углов  $\varphi_i$  стремится к  $\frac{\pi}{2}$ , а вся сумма  $\Sigma \varphi_i$  — к  $n \cdot \frac{\pi}{2}$ , что больше  $\pi$ . Отсюда следует, что для некоторого  $d$ ,  $0 < d < \frac{\pi}{2}$ , будем иметь  $\Sigma \varphi_i = \pi$ . ►

З а м е ч а н и я.

1. Условие (8) в случае плоскости Лобачевского можно заменить более общим:

$$0 \leq \alpha_i < \pi \quad (i=1, \dots, n). \quad (8')$$

То же самое рассуждение, что и выше, доказывает существование в  $L^2$  выпуклого  $n$ -угольника с углами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  удовлетворяющими (8') (разумеется, если  $\sigma < (n-2)\pi$ ). Вершины многоугольника, для которых  $\alpha_i = 0$ , будут бесконечно удаленными.

2. Можно показать, что  $n$ -угольник с заданными углами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , с точностью до движения, зависит: в случаях  $S^2$  и  $L^2$  — от  $n-3$  параметров, а в случае  $E^2$  — от  $n-2$  параметров.

Следствие теоремы 2.8. На плоскости Лобачевского существует треугольник с наперед заданными углами, сумма которых меньше  $\pi$ , а на сфере — треугольник с наперед заданными углами, сумма которых больше  $\pi$ .

Такой треугольник, как мы дальше увидим, единствен с точностью до движения.

**2.6. Угловой избыток и площадь многоугольника.** Условимся через  $\sigma(M)$  обозначать сумму углов собственного многоугольника  $M$  в двумерном пространстве постоянной кривизны.

Определение 2.9. *Угловым избытком* собственного  $n$ -угольника  $M$  называется число

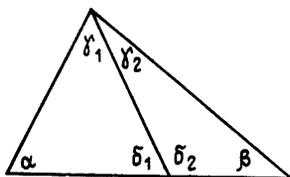
$$\Delta(M) = \sigma(M) - (n-2)\pi.$$

В частности, угловой избыток треугольника равен разности между суммой его углов и  $\pi$ .

Теорема 2.10. В любом из пространств  $S^2$  и  $L^2$  площадь  $S(M)$  собственного многоугольника  $M$  равна абсолютной величине его углового избытка:

$$S(M) = |\Delta(M)|. \quad (13)$$

◀ Функция  $\Delta(M)$  очевидным образом инвариантна относительно движений. Нетрудно также показать ее аддитивность: если  $M = \bigcup_1^n M_i$ , где никакие два многоугольника  $M_i$  и  $M_j$  не имеют общих внутренних точек, то число  $\Delta(M)$  равно сумме чисел  $\Delta(M_1), \dots, \Delta(M_n)$  (пояснением служит рис. 33). Из аддитивности и инвариантности  $\Delta(M)$  вытекает  $S(M) = \lambda |\Delta(M)|$ ,



$$\begin{aligned} \alpha + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) - \pi &= \\ = (\alpha + \gamma_1 + \beta_1 - \pi) + (\beta + \gamma_2 + \beta_2 - \pi) \end{aligned}$$

Рис. 33

где  $\lambda = \text{const}$ . Чтобы показать, что  $\lambda = 1$ , находят площадь некоторого конкретного многоугольника. В случае  $S^2$  берем, например, треугольник с тремя прямыми углами, площадь которого равна  $\frac{1}{8}$  площади всей сферы, а в случае  $L^2$  — треугольник,

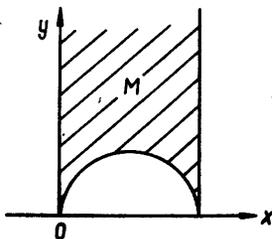


Рис. 34

изображенный в модели  $H^2$  на рис. 34; для него  $|\Delta(M)| = \pi$  и

$$S(M) = \iint_M \frac{dx dy}{y^2} = \pi.$$

Детали см., например, в [7, §§ 18.3, 19.5]. ▶

Из формулы (13), в частности, вытекает, что площадь треугольника на плоскости Лобачевского не превосходит  $\pi$ .

**З а м е ч а н и е.** Формула (13) является частным случаем более общей формулы Гаусса — Бонне

$$\int_M K d\mu = \Delta(M)$$

(см. [13, § 112]), где  $M$  — односвязная замкнутая область в двумерном римановом многообразии, ограниченная дугами геодезических,  $K$  — риманова кривизна (вообще говоря, переменная), а  $d\mu$  — элемент площади.

### § 3. Метрические соотношения

**3.1. Правило косинусов для треугольника.** Случай  $E^2$  мы, естественно, не разбираем. Два остальных случая,  $S^2$  и  $L^2$ , будем рассматривать параллельно, так как метрические соотношения в  $S^2$  и  $L^2$  имеют весьма сходный вид. Это сходство является одним из проявлений аналогии в самих способах задания  $S^2$  и  $L^2$ : и то и другое пространства могут быть определены как поверхности

$$(x, x) = \varepsilon \quad (14)$$

в пространстве  $R^3$  со скалярным умножением

$$(x, y) = \varepsilon x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

где  $\varepsilon = 1$  в случае  $S^2$  и  $\varepsilon = -1$  в случае  $L^2$  (кроме того, в случае  $L^2$  добавляется условие  $x_0 > 0$ ).

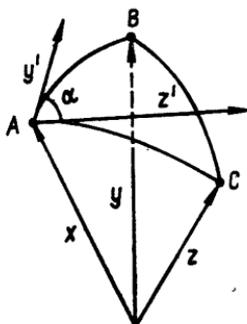


Рис. 35

На рис. 35 изображен треугольник  $ABC$  на поверхности (14):

$$\overline{OA} = x, \quad \overline{OB} = y, \quad \overline{OC} = z.$$

Вектор

$$y' = y - \varepsilon(y, x)x$$

с началом в  $A$  лежит в плоскости векторов  $x$ ,  $y$  и ортогонален

х. Нетрудно видеть, что направление вектора  $y'$  совпадает (в точке  $A$ ) с направлением стороны  $AB$ . Аналогично вектор

$$z' = z - (z, x)x$$

с началом в  $A$  касается стороны  $AC$ . Обозначая угол между сторонами  $AB$  и  $AC$  через  $\alpha$ , можем поэтому записать

$$\cos \alpha = \frac{(y', z')}{\sqrt{(y', y')} \sqrt{(z', z')}}.$$

(в касательных плоскостях к (14) действует «евклидова» формула для косинуса, так как скалярный квадрат вектора в любой из этих плоскостей задается положительно определенной квадратичной формой). Итак,

$$\cos \alpha = \frac{(y, z) - \varepsilon(y, x)(z, x)}{\sqrt{\varepsilon(1 - (y, x)^2)} \sqrt{\varepsilon(1 - (z, x)^2)}}.$$

В случае  $S^2$  имеем

$$(x, y) = \cos c, \quad (x, z) = \cos b, \quad (y, z) = \cos a,$$

где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника  $ABC$  на сфере. Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \quad (15)$$

В случае  $L^2$

$$(x, y) = -\operatorname{ch} c, \quad (x, z) = -\operatorname{ch} b, \quad (y, z) = -\operatorname{ch} a$$

(см. п. 4.2 в главе 1), откуда следует

$$\cos \alpha = \frac{-\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}. \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) выражают так называемое правило косинусов. Запишем его в следующей форме.

*Правило косинусов для  $S^2$ :*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cdot \cos \alpha. \quad (C_+)$$

*Правило косинусов для  $L^2$ :*

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cdot \cos \alpha. \quad (C_-)$$

Следствие. Если в треугольнике угол  $\alpha$  возрастает, в то время как стороны  $b$  и  $c$  остаются неизменными, то возрастает и сторона  $a$ .

Для  $S^2$  и  $L^2$  это следует из  $(C_+)$  и  $(C_-)$ , для  $E^2$  — из обычного (евклидова) правила косинусов.

**3.2. Другие соотношения в треугольнике.** Из  $(C_+)$  и  $(C_-)$  вытекает ряд других формул, связывающих стороны и углы треугольника. Наиболее важными из них являются правило синусов и двойственное правило косинусов.

*Правило синусов для  $S^2$ :*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}. \quad (S_+)$$

Правило синусов для  $\mathbb{L}^2$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} c}. \quad (S_-)$$

Двойственное правило косинусов для  $S^2$ :

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cdot \cos a. \quad (C'_+)$$

Двойственное правило косинусов для  $\mathbb{L}^2$ :

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cdot \operatorname{ch} a. \quad (C'_-)$$

Вывод формулы  $(S_+)$  весьма прост. Из  $(C_+)$  имеем

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a + \cos b \cos c)^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},$$

после чего остается заметить, что выражение в числителе, равное

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c,$$

симметрично относительно  $a, b, c$ . Формула  $(S_-)$  доказывается аналогично.

Формулы  $(C'_+)$  и  $(C'_-)$  тоже могут быть получены из  $(C_+)$  и  $(C_-)$  простыми преобразованиями. Впрочем, что касается  $(C'_+)$ , то эта формула прямо следует из  $(C_+)$  и предложения 2.6.

Обратим внимание на особую роль правил  $(C'_+)$  и  $(C'_-)$ . Они не имеют аналогов в евклидовой геометрии, поскольку из них вытекает, что углы треугольника на сфере или плоскости Лобачевского полностью определяют его стороны! Следствием этих формул является признак конгруэнтности треугольников в  $S^2$  и  $\mathbb{L}^2$  «по трем углам» (см. п. 2.2 в этой главе).

В частном случае прямоугольного треугольника ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ) из правил  $(C_+)$  и  $(C_-)$  следуют формулы:

$$\cos c = \cos a \cos b \quad \text{— для } S^2, \quad (17)$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \quad \text{— для } \mathbb{L}^2. \quad (18)$$

Это — неевклидовы аналоги теоремы Пифагора.

Вообще, из приведенных выше правил можно получить все зависимости между сторонами и углами треугольника. Приведем для случая прямоугольного треугольника сводку формул, позволяющих по любым двум из элементов  $\alpha, \beta, a, b, c$  ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ) находить третий:

для $S^2$	для $\mathbb{L}^2$
$\cos c = \cos a \cos b$	$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$
$\sin b = \sin c \sin \beta$	$\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \sin \beta$
$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos \beta$	$\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cos \beta$
$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$	$\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$
$\cos \alpha = \cos a \sin \beta$	$\cos \alpha = \operatorname{ch} a \sin \beta$
$\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha$

В дополнение к сказанному приведем формулы, выражающие площадь  $S$  треугольника на сфере и на плоскости Лобачевского через стороны треугольника (выражение  $S$  через углы дается теоремой 2.10):

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2} \quad \text{в случае } S^2,$$

$$\operatorname{th}^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \frac{p}{2} \operatorname{th} \frac{p-a}{2} \operatorname{th} \frac{p-b}{2} \operatorname{th} \frac{p-c}{2} \quad \text{в случае } L^2,$$

где  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ . Как известно, в случае  $E^2$  имеет место формула Герона:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

### З а м е ч а н и я

1. Бросается в глаза следующее обстоятельство: соотношения между сторонами и углами треугольника на сфере переходят в соотношения на плоскости Лобачевского после замены величин  $a, b, c$  на  $ia, ib, ic$  (поскольку  $\cos iz = \operatorname{ch} z$ ,  $\sin iz = i \operatorname{sh} z$ ). Это не удивительно, если учесть аналогию в способах задания  $S^2$  и  $L^2$  (см. начало параграфа). Тот факт, что формулы тригонометрии в  $L^2$  выглядят как формулы сферической тригонометрии, в которых каждая линейная величина  $x$  заменена на  $ix$  (т. е. являются как бы формулами тригонометрии на сфере мнимого радиуса), был замечен уже Лобачевским (мнимая сфера упомянута еще в XVIII веке Ламбертом) и рассматривался им как некоторый аргумент — к сожалению, недостаточно доказательный — в пользу непротиворечивости его геометрии.

2. Все указанные выше формулы относились к «каноническим» метрикам в  $S^2$  и  $L^2$ , т. е. таким инвариантным римановым метрикам, кривизна которых равна соответственно 1 и  $-1$ . Если умножить «каноническую» метрику на произвольное число  $k^{-1} > 0$ , то получим инвариантные метрики с кривизнами  $k$  и  $-k$ . В каждую из написанных выше формул придется тогда внести изменения — все линейные величины умножить на  $k$ . Например, (18) перейдет в

$$\operatorname{ch} kc = \operatorname{ch} ka \operatorname{ch} kb. \quad (19)$$

Предположим, что  $k \rightarrow 0$ , а величины  $a, b, c$  меняются как функции от  $k$ , приближаясь к некоторым постоянным значениям:

$$\lim a = a_0, \quad \lim b = b_0, \quad \lim c = c_0$$

Из соотношения (19) следует

$$1 + \frac{1}{2!} (kc)^2 + \dots = \left(1 + \frac{1}{2!} (ka)^2 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2!} (kb)^2 + \dots\right)$$

или

$$k^2 c^2 + \dots = k^2 (a^2 + b^2) + \dots,$$

где многоточие обозначает сумму членов степени выше 2 относительно  $k$ . После деления на  $k^2$  и перехода к пределу при  $k \rightarrow 0$  получаем

$$c_0^2 = a_0^2 + b_0^2$$

— соотношение, выражающее обычную теорему Пифагора.

Аналогичное рассуждение можно провести по отношению к любой из формул геометрии Лобачевского или сферической геометрии. Общий вывод состоит в том, что евклидова геометрия получается как предел геометрии Лобачевского или сферической, когда кривизна стремится к нулю.

**3.3. Угол параллельности.** Рассмотрим в  $L^2$  треугольник, один из углов которого равен  $\frac{\pi}{2}$ , а другой 0. Такой треугольник, с точностью до движения, определяется катетом  $x$ , противоположащим углу 0 (рис. 36). В частности, третий угол есть не-



Рис. 36

которая функция от  $x$ . Она обозначается  $\Pi(x)$  и называется *углом параллельности* (отвечающим отрезку  $x$ ).

Из указанной ранее формулы  $\cos \alpha = \operatorname{ch} a \sin \beta$  следует

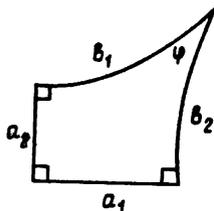
$$1 = \operatorname{ch} x \sin \Pi(x),$$

откуда несложными вычислениями можно получить

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-x}.$$

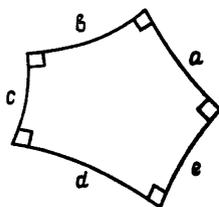
При возрастании  $x$  от нуля до бесконечности  $\Pi(x)$  убывает от  $\frac{\pi}{2}$  до 0.

**3.4. Соотношения в четырех-, пяти- и шестиугольниках.** На рис. 37 изображен четырехугольник в  $L^2$  с максимально возможным числом (три) прямых углов. Рядом выписаны независимые соотношения между величинами  $a_1, a_2, b_1, \varphi$ . Рисунки 38 и 39 относятся к пяти- и шестиугольникам, все углы которых — прямые. Вывод написанных соотношений см. в [6, §§ 7.17—7.19]. Заметим, что эти соотношения можно рассматривать как аналитическое продолжение метрических соотношений в треугольнике, когда одна, две или все три его вершины уходят за абсолют. В этом случае роль косинуса угла между соответствующими сторонами играет гиперболический косинус расстояния между ними.



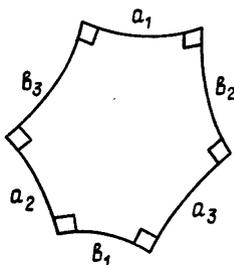
$$\begin{aligned} \operatorname{sha}_1 \operatorname{sh} a_2 &= \cos \psi \\ \operatorname{cha}_1 &= \operatorname{ch} b_1 \sin \psi \end{aligned}$$

Рис. 37



$$\begin{aligned} \operatorname{th} a \operatorname{ch} b \operatorname{th} c &= 1 \\ \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b &= \operatorname{ch} d \end{aligned}$$

Рис. 38



$$\frac{\operatorname{sh} a_1}{\operatorname{sh} b_1} = \frac{\operatorname{sh} a_2}{\operatorname{sh} b_2} = \frac{\operatorname{sh} a_3}{\operatorname{sh} b_3}$$

$$\operatorname{ch} b_1 \operatorname{sh} a_2 \operatorname{sh} a_3 = \operatorname{cha}_1 + \operatorname{cha}_2 \operatorname{cha}_3$$

Рис. 39

3.5. Длина окружности и площадь круга. Рассмотрим на модели  $B^2$  евклидову окружность  $C$  с центром в начале и (евклидовым) радиусом  $r$ . Линия  $C$  одновременно является и Л-окружностью, причем радиус этой окружности равен

$$\rho = \int_0^r \frac{2dx}{1-x^2} = \ln \frac{1+r}{1-r}. \quad (20)$$

Обозначим  $L$ -длину линии  $C$  через  $L(\rho)$ . Как следует из выражения для  $L$ -метрики в  $B^2$ ,  $L(\rho)$  равно евклидовой длине  $C$ , умноженной на  $\frac{2}{1-r^2}$ :

$$L(\rho) = \frac{4\pi r}{1-r^2}.$$

Остается выразить правую часть через  $\rho$ . Имеем из (20)

$$r = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1} = \operatorname{th} \frac{\rho}{2}$$

и тем самым  $L(\rho) = 4\pi \frac{\operatorname{th} \frac{\rho}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\rho}{2}} = 2\pi \operatorname{sh} \rho$ . Итак, длина окружности радиуса  $\rho$  на плоскости Лобачевского равна  $2\pi \operatorname{sh} \rho$ .

Отсюда находим и выражение для площади  $S(\rho)$  круга радиуса  $\rho$ :

$$S(\rho) = \int_0^\rho L(\sigma) d\sigma = 2\pi (\operatorname{ch} \rho - 1) = 4\pi \operatorname{sh}^2 \frac{\rho}{2}.$$

На сфере  $S^2$  длина окружности и площадь круга выражаются соответственно формулами

$$L(\rho) = 2\pi \sin \rho, \quad S(\rho) = 4\pi \sin^2 \frac{\rho}{2}.$$

## § 4. Движения и однородные линии

**4.1. Классификация движений двумерных пространств постоянной кривизны.** Собственное (т. е. сохраняющее ориентацию) движение  $g$  будем называть:

- а) *поворотом вокруг точки  $p$  на угол  $\alpha$* , если  $gp = p$  и угол между прямыми  $pq$  и  $p(gq)$  (где  $q$  — любая точка) равен  $\alpha$ ;
- в) *сдвигом вдоль прямой  $L$  на величину  $d$* , если  $gL = L$  и  $\rho(p, gp) = d$  для всех  $p \in L$ .

Существование (и единственность) поворота на любой угол  $\alpha$  и сдвига на любую величину  $d > 0$  вытекает из самого определения пространства постоянной кривизны.

Нетрудно видеть, что в случае сферы  $S^2$  сдвиг вдоль любой прямой  $L$  является одновременно поворотом вокруг некоторой точки  $p$  (любого из «полюсов» прямой  $L$  в  $S^2$ ).

Из элементарной геометрии известно, что в случае сферы или евклидовой плоскости любое собственное движение является или поворотом, или сдвигом. В плоскости Лобачевского, напротив, существуют собственные движения, не имеющие ни неподвижных точек, ни инвариантных прямых.

Чтобы убедиться в существовании таких движений, воспользуемся моделью Пуанкаре  $H^2$ . Любое собственное движение  $g$  в этом случае имеет вид

$$gz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (21)$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc = 1$ . Рассмотрим неподвижные точки преобразования  $g$  на расширенной комплексной плоскости  $\hat{E}^2 = E^2 \cup \{\infty\}$ . Таких точек может быть не более двух, причем, если  $gz = z$ , то и  $g\bar{z} = \bar{z}$ . Поэтому возможны только три случая:

1.  $g$  имеет неподвижные точки  $u + iv$ ,  $u - iv$ , где  $v \neq 0$ . Будем считать  $v > 0$ . Тогда  $g$  есть  $L$ -поворот вокруг точки  $u + iv$ .

2.  $g$  имеет неподвижные точки  $u_1, u_2$ , где  $u_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $u_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $u_1 \neq u_2$ . Обозначим через  $L$   $L$ -прямую с бесконечно удаленными точками  $u_1$  и  $u_2$ . Ясно, что  $gL = L$ , так что  $g$  есть сдвиг вдоль  $L$ -прямой  $L$ . Заметим, что других инвариантных прямых  $g$  не имеет.

3.  $g$  имеет единственную неподвижную точку  $u$ , где  $u \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Заменяя, если нужно,  $g$  на сопряженное преобразование (в группе всех движений), можно считать  $u = \infty$ . Тогда

$$g(z) = z + b, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Очевидно,  $g$  не имеет в  $H^2$  ни неподвижных точек, ни инвариантных прямых.

Условимся называть движение  $g$ , имеющее в  $\hat{E}^2$  единственную неподвижную точку  $u$  (принадлежащую  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ), поворотом вокруг бесконечно удаленной точки  $u$  или параболическим поворотом. Для движения (22) имеем  $u = \infty$ .

Евклидовы полупрямые вида  $\{x_0 + iy \mid y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ , ориентированные в направлении возрастания  $y$ , образуют в модели  $H^2$  пучок  $\mathcal{P}$  параллельных прямых. При движении (22) этот пучок отображается в себя. При этом: 1) для любых двух прямых  $L_1$  и  $L_2$  из  $\mathcal{P}$  существует единственное движение вида (22), переводящее  $L_1$  в  $L_2$ ; 2) если  $p_1 \in L_1$ ,  $p_2 \in L_2$  и  $g(p_1) = p_2$ , то отрезок  $p_1 p_2$  образует с прямыми  $L_1$  и  $L_2$  равные «односторонние» углы (рис. 40) или, как говорят, является *секущей равного наклона* к (параллельным) прямым  $L_1$  и  $L_2$ .

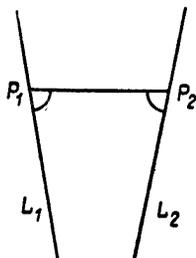


Рис. 40

Из сказанного выше вытекает

**Теорема 4.1.** Любое собственное движение  $g$  плоскости Лобачевского есть либо поворот вокруг точки, либо сдвиг вдоль прямой, либо параболический поворот. При этом для любых двух ориентированных параллельных прямых  $L_1$  и  $L_2$  существует единственный параболический поворот, переводящий  $L_1$  в  $L_2$ .

Пусть теперь  $g$  — движение, не являющееся собственным. Если  $g$  оставляет инвариантной некоторую прямую  $L$ , то  $g$  есть композиция двух преобразований: отражения относительно  $L$  и некоторого сдвига вдоль  $L$ . Условимся называть такое движение *скользящим отражением* относительно  $L$ . Частным случаем скользящего отражения является обычное отражение относительно прямой.

**Теорема 4.2.** В двумерном пространстве постоянной кривизны любое движение  $g$ , не являющееся собственным, есть скользящее отражение.

◀ Для случаев сферы и евклидовой плоскости утверждение теоремы есть известный факт из элементарной геометрии. В случае плоскости Лобачевского используем снова модель Пуанкаре. Имеем

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  и  $ad - bc = -1$ . Уравнение  $g(z) = z$  определяет: при  $a + d \neq 0$  — две различные точки из  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , при  $a + d = 0$  — окружность или полупрямую, ортогональную  $\partial H^2$ . В первом случае  $g$  есть скользящее, а втором случае — обычное отражение относительно некоторой прямой. ▶

**4.2. Характеристика движений плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в терминах следов матриц.** Любое собственное движение  $g$  модели  $H^2$  имеет вид (21) и, следовательно, задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

**Теорема 4.3.** Матрице  $A \in SL_2(\mathbb{R})$ ,  $A \neq \pm E$ , отвечает в модели  $H^2$ :

поворот вокруг точки, если  $|\operatorname{tr} A| < 2$ ;

сдвиг вдоль прямой, если  $|\operatorname{tr} A| > 2$ ;

параболический поворот, если  $|\operatorname{tr} A| = 2$ .

Любой поворот  $g$  сопряжен повороту вокруг точки  $i$ . Последнему отвечает пара матриц

$$\pm \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

со следами  $2 \cos \varphi$  и  $-2 \cos \varphi$ . В этом случае имеем (если  $g \neq \operatorname{id}$ )  $|\operatorname{tr} A| < 2$ .

Сдвиг вдоль любой прямой сопряжен сдвигу вдоль прямой  $x = 0$ ,  $y > 0$ , т. е. преобразованию  $z \rightarrow a^2 z$  ( $a > 0$ ). Соответствующим

щие (две) матрицы имеют следы  $a + \frac{1}{a}$  и  $-(a + \frac{1}{a})$ . Отсюда (если  $g \neq \text{id}$ )  $|\text{tr } A| > 2$ .

Наконец, параболический поворот сопряжен преобразованию вида  $z \mapsto z + b$ , которому отвечают (две) матрицы со следами 2 и  $-2$ . ►

**4.3. Однопараметрические группы движений плоскости Лобачевского и их орбиты.** Пусть  $G$  — однопараметрическая группа движений в  $\mathbb{L}^2$ . Рассмотрим какое-либо движение  $g_0 \in G$ , отличное от  $\text{id}$ . Для любого  $g \in G$  имеем  $g_0 g = g g_0$ . Возможны три случая.

1.  $g_0$  есть поворот вокруг некоторой точки  $p$ . Тогда  $g p = g_0 g p$ , и так как  $p$  — единственная неподвижная точка для  $g_0$ , то  $g p = p$ . Таким образом,  $G$  есть группа поворотов вокруг  $p$ . Ее орбитами являются окружности с центром  $p$ , а ортогональные траектории к орбитам образуют пучок прямых с центром  $p$ . Совокупность прямых в  $\mathbb{L}^2$ , имеющих общую точку  $p$ , называют *эллиптическим пучком* с центром  $p$ .

На рис. 41 с помощью пунктирных линий изображен эллиптический пучок прямых в модели  $H^2$ . Сплошные линии изображают ортогональные траектории пучка, т. е.  $\mathbb{L}$ -окружности с

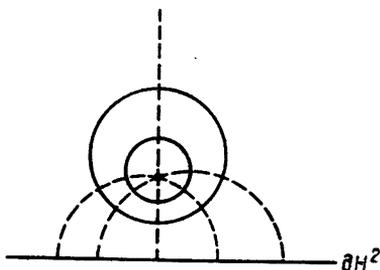


Рис. 41

общим центром  $p$ . Последние являются окружностями и в евклидовом смысле, что легко следует из конформности модели  $H^2$ .

2.  $g_0$  есть сдвиг относительно некоторой прямой  $L$ . Тогда  $g L = g_0 g L$ , и так как  $L$  — единственная инвариантная прямая для  $g_0$ , то  $g L = L$ . Следовательно,  $G$  есть группа сдвигов вдоль  $L$ . Ее орбитами являются линии, характеризующиеся тем, что для всех точек любой из этих линий расстояние до  $L$  постоянно. Эти линии называются *эквидистантами* прямой  $L$  (линиями равных расстояний до  $L$ ). К числу эквидистант относится, очевидно, и сама прямая  $L$ . Ортогональными траекториями к орбитам являются  $\mathbb{L}$ -прямые, перпендикулярные  $L$ . Совокупность прямых в  $\mathbb{L}^2$ , перпендикулярных данной прямой  $L$ , называют *гиперболическим пучком*.

На рис. 42 показаны эквидистанты на модели  $H^2$ . Левая часть рисунка относится к случаю, когда изображением  $L$  служит евклидов луч, ортогональный  $\partial H^2$ , а правая — к случаю, когда  $L$  изображается евклидовой полуокружностью, ортогональной  $\partial H^2$ . В первом случае эквидистанты изображаются



Рис. 42

(см. (5) в п. 2.2) евклидовыми лучами, лежащими в  $H^2$  и имеющими общее начало с лучом  $L$ ; во втором случае эквидистанты являются дугами евклидовых окружностей, имеющими общие концы с  $L$ . Соответствующий гиперболический пучок показан пунктиром.

3.  $g_0$  есть параболический поворот. Из отсутствия у  $g_0$  неподвижных точек и инвариантных прямых вытекает то же самое для любого  $g \in G$ ; следовательно, каждое  $g \in G$  есть параболический поворот. Так как при этом неподвижная точка (бесконечно удаленная) движения  $g_0$  сохраняется любым  $g \in G$ , то  $G$  есть группа параболических поворотов вокруг общей бесконечно удаленной точки.

В левой части рис. 43 показаны орбиты (сплошными линиями) и их ортогональные траектории (пунктиром) для однопараметрической группы

$$g_t z = z + t \quad (t \in \mathbb{R})$$

движений модели  $H^2$ . Изображениями орбит служат евклидовы прямые, параллельные  $\partial H^2$ , а ортогональные траектории к орбитам образуют пучок Л-параллельных прямых с центром  $\infty$ .

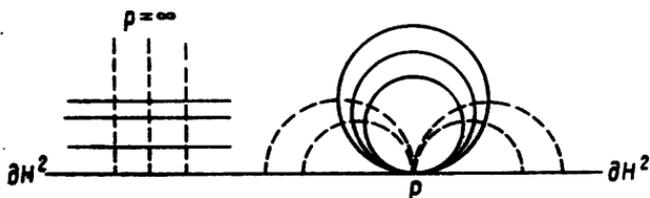


Рис. 43

В правой части рисунка орбиты и их ортогональные траектории показаны для группы поворотов вокруг бесконечно удаленной точки  $p$ , лежащей на  $\partial H^2$ .

Совокупность всех ориентированных прямых в  $L^2$ , параллельных данной ориентированной прямой, называют *параболической*

ческим пучком; ортогональные траектории параболического пучка называют *орициклами*. На модели Пуанкаре орициклы изображаются евклидовыми прямыми, параллельными  $\partial H^2$ , а также евклидовыми окружностями, касающимися  $\partial H^2$ .

Заметим, что орицикл часто называют  $L$ -окружностью с бесконечно удаленным центром. Если на плоскости  $L^2$  фиксировать некоторую прямую  $L$  и точку  $p_0 \in L$ , а затем рассмотреть окружность с центром  $p \in L$ , проходящую через  $p_0$  (рис. 44), то по мере удаления точки  $p$  в бесконечность в одном из двух направлений на  $L$  (на рисунке это направление отмечено стрелкой) окружность будет приближаться к некоторой предельной линии  $Q$  — орициклу с «центром» в одной из двух бесконечно удаленных точек прямой  $L$ .

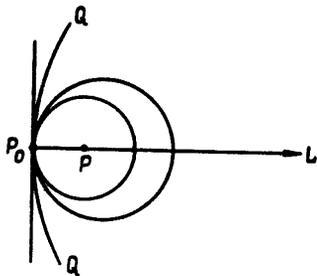


Рис. 44

Условимся для краткости называть орбиты однопараметрических групп *однородными линиями*. Сказанное выше относительно окружностей, эквидистант и орициклов на модели Пуанкаре позволяет дать единую характеристику этих линий в конформной модели как линий вида  $H^2 \cap \mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L}$  — любая евклидова прямая или окружность, имеющая непустое пересечение с  $H^2$ . Отсюда, между прочим, следует, что любые три различные точки на плоскости Лобачевского принадлежат единственной однородной линии.

В векторной модели (1) инвариантные линии изображаются плоскими сечениями поверхности (1). При этом сечение будет окружностью, эквидистантой или орициклом в зависимости от того, каким является направляющее подпространство секущей плоскости: эллиптическим, гиперболическим или параболическим.

**4.4. Вид метрики в координатах, связанных с пучком.** Пусть  $X$  — двумерное пространство постоянной кривизны и  $\mathcal{P}$  — эллиптический пучок прямых с центром  $p_0$ . В соответствующих полярных координатах  $r, \varphi$  метрика пространства  $X$  имеет вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \text{ — если } X = E^2, \quad (23)$$

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2 \text{ — если } X = S^2, \quad (24)$$

$$ds^2 = dr^2 + \text{sh}^2 r d\varphi^2 \text{ — если } X = \mathbb{L}^2. \quad (25)$$

Написанные формулы являются следствием того факта, что длина окружности радиуса  $r$  в указанных пространствах равна соответственно  $2\pi$ ,  $2\pi \sin r$ ,  $2\pi \text{sh } r$ .

Пусть теперь  $\mathcal{P}$  — гиперболический пучок, т. е. совокупность прямых, перпендикулярных данной прямой  $L$ . Введем на  $L$  линейную координату  $t$ , равную расстоянию до фиксированной точки  $p_0 \in L$ , взятому с соответствующим знаком. Отметим далее одну из полуплоскостей, определяемых  $L$ , знаком  $+$ , а другую знаком  $-$ , введем координаты  $r, t$  во всем пространстве  $X$ , полагая (рис. 45):  $r$  — расстояние от точки  $p \in X$  до  $L$ ,

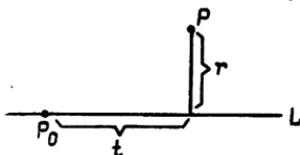


Рис. 45

взятое с соответствующим знаком,  $t$  — линейная координата проекции  $p$  на  $L$ <sup>1)</sup>.

В случае евклидовой плоскости, очевидно, имеем

$$ds^2 = dr^2 + dt^2.$$

В случае сферы

$$ds^2 = dr^2 + \cos^2 r dt^2, \quad (26)$$

поскольку длина окружности, эквидистантной  $L$  и проходящей через  $p$  (рис. 46), равна  $2\pi \cos r$ .

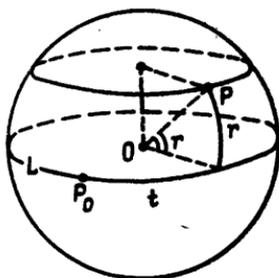


Рис. 46

<sup>1)</sup> В случае, когда  $X = S^2$ , областью действия координат  $r, t$  следует считать  $S^2 \setminus T$ , где  $T$  — полупрямая  $t = \pm\pi$ ; в указанной области  $-\frac{\pi}{2} < r < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\pi < t < \pi$ .

Формальной заменой  $s \rightarrow is$ ,  $r \rightarrow ir$ ,  $t \rightarrow it$  (см. замечание 1 в конце п. 3.2) получаем метрику плоскости Лобачевского в координатах  $r$ ,  $t$ :

$$ds^2 = dr^2 + ch^2 r dt^2. \quad (27)$$

(Отсюда, между прочим, видно, что длина дуги эквидистанты с «базой»  $a$  (рис. 47) равна  $a \operatorname{ch} r$ , где  $r$  — расстояние до «базы».)

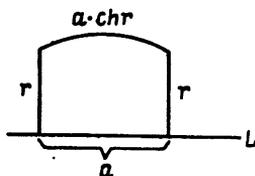


Рис. 47

Наконец, пусть  $\mathcal{P}$  есть параболический пучок на плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}^2$ . Выберем один из орициклов, отвечающих пучку  $\mathcal{P}$ ; обозначим этот орицикл через  $Q$ . Введем на  $Q$  линейную координату  $t$ , равную, с точностью до знака, расстоянию от фиксированной точки  $p_0 \in Q$ , измеренному вдоль  $Q$ . Кривая  $Q$  разбивает всю плоскость на две области; отметим одну из них знаком «+», другую знаком «-». Координатами произвольной точки  $p \in \mathbb{L}^2$  будем считать (рис. 48):  $r$  — расстояние (взятое со

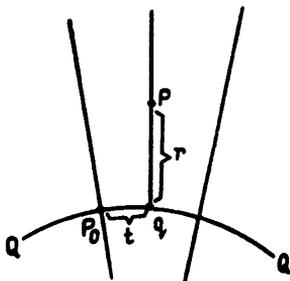


Рис. 48

знаком) от  $p$  до  $Q$ , т. е.  $r = \pm \rho(p, q)$ , где  $q$  есть точка пересечения  $Q$  с прямой пучка, проходящей через  $p$ ;  $t$  — линейную координату точки  $q$  в  $Q$ . Очевидно,

$$ds^2 = dr^2 + \varphi(r) dt^2.$$

Для нахождения функции  $\varphi$  рассмотрим на модели Пуанкаре  $H^2$  параболический пучок с центром  $\infty$  (рис. 48). В качестве  $Q$  возьмем линию  $y=1$ . Из вида метрики  $H^2$ :

$$ds^2 = y^{-2} (dx^2 + dy^2)$$

следует, что  $dt = dx$ , откуда  $x = t$ , а также  $dr = \frac{dy}{y}$ , откуда  $y = e^r$ . Итак,

$$ds^2 = dr^2 + e^{-2r} dt^2. \quad (28)$$

Из соображений инвариантности ясно, что формула (28) должна иметь место для любого параболического пучка  $\mathcal{P}$ .

## Глава 4

### ПЛОСКОСТИ, СФЕРЫ, ОРИСФЕРЫ И ЭКВИДИСТАНТЫ

#### § 1. Взаимное расположение плоскостей

**1.1. Пары подпространств евклидова векторного пространства.** Пусть  $V$  — евклидово векторное пространство,  $O(V)$  — группа его ортогональных преобразований. Всякое подпространство  $U$  пространства  $V$  является множеством неподвижных точек некоторой инволюции  $\sigma_U \in O(V)$  — ортогонального отражения относительно  $U$ , и соответствие  $U \leftrightarrow \sigma_U$  между подпространствами и инволюциями биективно.

Пусть  $\sigma, \tau \in O(V)$  — две инволюции. Положим  $\alpha = \tau\sigma$ . Тогда выполнены соотношения

$$\sigma^2 = \text{id}, \quad \sigma\alpha\sigma^{-1} = \alpha^{-1},$$

так что отображение  $R: a \rightarrow \alpha a, b \rightarrow \sigma b$  задает ортогональное представление бесконечной диэдральной группы

$$\mathcal{D} = \langle a, b \mid b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Обратно, всякое такое представление  $R$  определяет пару инволюций  $\sigma = R(b), \tau = R(ab)$ . Таким образом, классификация пар подпространств пространства  $V$  равносильна классификации ортогональных представлений группы  $\mathcal{D}$  в пространстве  $V$ .

Всякое ортогональное представление (любой группы) разлагается в ортогональную сумму неприводимых представлений. Всякое неприводимое ортогональное представление группы  $\mathcal{D}$  одномерно или двумерно. В последнем случае оно имеет вид:

$$R_\varphi(a) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad R_\varphi(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

и отвечает паре прямых евклидовой плоскости, образующих между собой угол  $\varphi$ .

Ортогональное разложение  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$  называется *согласованным с подпространством  $U$* , если  $U = (U \cap V_1) \oplus \dots \oplus (U \cap V_k)$ . Это, очевидно, равносильно тому, что все слагаемые  $V_i$  инвариантны относительно инволюции  $\sigma_U$ . Следовательно, если  $R$  — ортогональное представление группы  $\mathcal{D}$ , отвечающее паре подпространств  $U, W \subset V$ , то ортогональное разло-

жение пространства  $V$  в сумму  $R(\mathcal{D})$ -инвариантных подпространств — это то же, что ортогональное разложение, согласованное с подпространствами  $U$  и  $W$ .

Таким образом, для любой пары подпространств существует согласованное с ними ортогональное разложение пространства  $V$  в сумму одномерных и двумерных подпространств. Это приводит к классификации пар подпространств, которая излагается ниже.

**Определение 1.1.** Подпространства  $U$  и  $W$  называются *перпендикулярными*, если выполняется любое из следующих эквивалентных условий:

- 1) инволюции  $\sigma_U$  и  $\sigma_W$  перестановочны;
- 2) пространство  $V$  допускает такое ортогональное разложение

$$V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_{21} \oplus V_{22}, \text{ что } U = V_{11} \oplus V_{12}, \quad W = V_{11} \oplus V_{21}.$$

(Заметим, что перпендикулярность в таком понимании — более слабое свойство, чем ортогональность: перпендикулярные подпространства ортогональны только тогда, когда их пересечение равно 0).

**Определение 1.2.** Подпространства  $U$  и  $W$  называются *изоклинными*, а угол  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) — *углом* между ними, если выполняется любое из следующих эквивалентных условий:

- 1) угол между любым ненулевым вектором одного из этих подпространств и другим подпространством равен  $\varphi$ ;
- 2) пространство  $V$  допускает такое согласованное с  $U$  и  $W$  ортогональное разложение  $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ , что  $U \cap V_0 = W \cap V_0 = 0$ ,  $\dim V_i = 2$ ,  $\dim(U \cap V_i) = \dim(W \cap V_i) = 1$  и угол между прямыми  $U \cap V_i$  и  $W \cap V_i$  равен  $\varphi$  при всех  $i = 1, \dots, k$ .

Если  $U + W = V$ , то это условие равносильно существованию в пространстве  $V$  такой комплексной структуры, что

1) оператор  $I$  комплексной структуры ортогонален (и одновременно кососимметричен);

$$2) (U, IU) = 0,$$

$$3) W = (E \cos \varphi + I \sin \varphi) U.$$

**Теорема 1.3.** Для любых подпространств  $U$  и  $W$  евклидова векторного пространства  $V$  существует единственное согласованное с ними ортогональное разложение

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

со следующими свойствами:

1) подпространства  $U_0 = U \cap V_0$  и  $W_0 = W \cap V_0$  перпендикулярны;

2) при  $i = 1, \dots, k$  подпространства  $U_i = U \cap V_i$  и  $W_i = W \cap V_i$  изоклинны, порождают пространство  $V_i$  и образуют между собой угол  $\varphi_i$ ;

3) углы  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  различны.

Углы  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  называются *стационарными*, *углами* пары  $\{U, W\}$ .

Число  $\dim U_i = \dim W_i$  называется кратностью стационарного угла  $\varphi_i$ . Углы  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  являются критическими значениями угловой функции  $\varphi_{U,W}: U \times W \rightarrow \mathbb{R}$ , сопоставляющей каждой паре ненулевых векторов  $u \in U, w \in W$  угол между ними. (Критическими значениями этой функции являются, кроме того,  $\pi - \varphi_1, \dots, \pi - \varphi_k$ , а также 0, если  $U \cap W \neq 0$ , и  $\frac{\pi}{2}$ , если  $U_0, W_0 \neq U \cap W$ .)

Практический способ нахождения стационарных углов состоит в следующем. Пусть  $\{e_1, \dots, e_r\}$  и  $\{f_1, \dots, f_s\}$  — ортонормированные базисы пространств  $U$  и  $W$  соответственно и  $G = ((e_i, f_j))$  — их совместная матрица Грама. Тогда числа  $\cos^2 \varphi_1, \dots, \cos^2 \varphi_k$ , взятые с соответствующими кратностями, и 1 с кратностью, равной  $\dim U \cap W$ , — это в точности ненулевые собственные значения симметричной матрицы  $GG^T$  (или  $G^T G$ ).

**1.2. Некоторые общие понятия.** Введем некоторые общие понятия, относящиеся к взаимному расположению плоскостей пространства постоянной кривизны.

**Определение 1.4.** Плоскости  $Y$  и  $Z$  называются *перпендикулярными*, если отражения  $\sigma_Y$  и  $\sigma_Z$  относительно этих плоскостей перестановочны. (Это свойство является более слабым, чем ортогональность.)

В евклидовом пространстве и в пространстве Лобачевского перпендикулярные плоскости  $Y$  и  $Z$  пересекаются: в самом деле, середина отрезка, соединяющего любую точку  $z \in Z$  с точкой  $\sigma_Y(z)$ , принадлежит  $Y \cap Z$ . Пересекающиеся плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их касательные пространства в (любой) точке пересечения перпендикулярны.

**Определение 1.5.** Множества (в частности, плоскости)  $Y$  и  $Z$  называются *взаимно эквидистантными*, если расстояние от точки любого из этих множеств до другого множества постоянно (и равно  $\rho(Y, Z)$ ).

**1.3. Пары плоскостей сферы.** Описание взаимного расположения двух плоскостей  $Y, Z$  сферы  $S^n$  сводится к описанию взаимного расположения их определяющих подпространств  $\langle Y \rangle, \langle Z \rangle$  в евклидовом векторном пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Плоскости  $Y$  и  $Z$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда подпространства  $\langle Y \rangle$  и  $\langle Z \rangle$  перпендикулярны, и взаимно эквидистантны тогда и только тогда, когда подпространства  $\langle Y \rangle$  и  $\langle Z \rangle$  изоклинны или ортогональны. В частности, взаимно эквидистантные плоскости, расстояние между которыми меньше  $\pi/2$ , имеют одинаковую размерность.

**1.4. Пары плоскостей евклидова пространства.** Плоскость  $Y \subset E^n$  определяется любой своей точкой и направляющим (или касательным, что то же самое) подпространством  $U$ , содержа-

щимся в ассоциированном с  $E^n$  евклидовом векторном пространстве  $V$ .

Любые две плоскости  $Y, Z \subset E^n$  с направляющими подпространствами  $U, W$  имеют общий перпендикуляр, определенный однозначно с точностью до параллельного переноса на вектор из  $U \cap W$ . (Если плоскости  $Y$  и  $Z$  пересекаются, то их общим перпендикуляром считается отрезок  $xx$ , где  $x$  — любая точка пересечения.) Длина общего перпендикуляра равна расстоянию  $\rho(Y, Z)$  между плоскостями  $Y$  и  $Z$ . Взаимное расположение плоскостей  $Y$  и  $Z$  характеризуется расстоянием между ними и взаимным расположением направляющих подпространств  $U$  и  $W$ .

Плоскости  $Y$  и  $Z$  взаимно эквидистантны тогда и только тогда, когда  $U=W$ .

**1.5. Псевдоортогональные преобразования.** Для классификации пар плоскостей (а также движений) пространства Лобачевского необходимо иметь описание псевдоортогональных преобразований псевдоевклидова векторного пространства  $V$  сигнатуры  $(n, 1)$ .

Если  $A$  — псевдоортогональное преобразование и  $H$  — инвариантное относительно него гиперболическое подпространство, то  $H^\perp$  — инвариантное эллиптическое подпространство и  $V = H \oplus H^\perp$ . Ограничение преобразования  $A$  на  $H^\perp$  является обычным ортогональным преобразованием. Поэтому для описания псевдоортогональных преобразований достаточно указать, какими могут быть их ограничения на минимальное инвариантное гиперболическое подпространство.

**Теорема 1.6.** Для всякого псевдоортогонального преобразования  $A$  псевдоевклидова векторного пространства  $V$  сигнатуры  $(n, 1)$  минимальное инвариантное гиперболическое подпространство  $H$  имеет размерность  $\leq 3$ . Оно определено однозначно с точностью до псевдоортогонального преобразования, перестановочного с  $A$ .

Ограничение  $A$  на  $H$  в зависимости от  $\dim H$  имеет вид, указанный в следующей таблице. (Знак «+» соответствует

$\dim H$	Базис $H$	Матрица Грама этого базиса	Матрица $A H$
1	$\{h\}$	$(-1)$	$\pm(1)$
2	$\{u, v\}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\pm \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}, \lambda > 0$
3	$\{u, e, v\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

преобразованиям, оставляющим на месте связные компоненты конуса времениподобных векторов, знак «—» — преобразованиям, меняющим их местами).

► Для доказательства следует воспользоваться следующими соображениями:

1) собственные векторы (в том числе мнимые) преобразования  $A$ , отвечающие собственным значениям  $\lambda$  и  $\mu$ , при  $\lambda\mu \neq 1$  ортогональны;

2)  $(\text{Im}(A-E))^h, \text{Ker}(A-E)^h = 0$ ;

3) пространство  $V$  не содержит двумерных вполне изотропных подпространств.

**1.6. Пары гиперболических подпространств пространства  $\mathbb{R}^{n,1}$ .** Пусть  $V$  — псевдоевклидово векторное пространство сигнатуры  $(n, 1)$ ,  $O(V)$  — группа его псевдоортогональных преобразований. Инволюцию  $\sigma \in O(V)$  будем называть гиперболической, если множество ее неподвижных векторов является гиперболическим подпространством пространства  $V$ . Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 1.1, показывают, что классификация пар гиперболических подпространств пространства  $V$  равносильна классификации псевдоортогональных представлений  $R: \mathcal{D} \rightarrow O(V)$  бесконечной диэдральной группы  $\mathcal{D} = \langle a, b \rangle$ , при которых элементы  $b$  и  $ab$  переходят в гиперболические инволюции.

Нетрудно видеть, что минимальное гиперболическое подпространство  $H$ , инвариантное относительно псевдоортогонального преобразования  $R(a)$  (см. теорему 1.6), может быть выбрано инвариантным и относительно  $R(b)$ . При этом можно считать, что матрица ограничения  $R(b)$  на  $H$  имеет вид, указанный в следующей таблице.

$\dim H$	Матрица $R(a) _H$	Матрица $R(b) _H$	$U \cap H$	$W \cap H$
1	(1)	(1)	$\langle h \rangle$	$\langle h \rangle$
2	$\begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}, \lambda > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\langle u+v \rangle$	$\langle e^\lambda u + v \rangle$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle u, v \rangle$	$\langle u, e+2v \rangle$

Находя подпространства неподвижных векторов инволюций  $R(b)|_H$  и  $R(ab)|_H$ , мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 1.7.** Для любых гиперболических пространств  $U$  и  $W$  псевдоевклидова векторного пространства  $V$  сигнатуры  $(n, 1)$  существует такое перпендикулярное им гиперболическое подпространство  $H$  размерности  $\leq 3$ , что пересечения  $U \cap H$  и  $W \cap H$  имеют вид, указанный в предыдущей таблице. (Обозначения см. в таблице теоремы 1.6.) Подпространство  $H$  определено однозначно с точностью до псевдоортогонального преобразования, сохраняющего  $U$  и  $W$ . Перпендикулярность  $H$  подпространствам  $U$  и  $W$  означает, что разложение  $V = H \oplus H^\perp$  согласовано с этими подпространствами. Их пересечения с эллиптическим подпространством  $H^\perp$  описываются теоремой 1.3. Заметим, что подпространство  $U \cap W$  в случае  $\dim H = 1$  является гиперболическим, в случае  $\dim H = 2$  — эллиптическим, в случае  $\dim H = 3$  — параболическим. Во втором случае подпространство  $H$  есть сумма собственных подпространств оператора  $\sigma_W \sigma_U$  и поэтому определено однозначно.

**1.7. Пары плоскостей пространства Лобачевского.** Классификация пар плоскостей пространства  $L^n$  равносильна классификации пар гиперболических подпространств пространства  $R^{n-1}$ , описанной в предыдущем пункте. Однако в контексте геометрии Лобачевского ей можно придать более ясный геометрический смысл, что мы сейчас и сделаем.

**Определение 1.8.** *Перпендикулярной секущей* плоскостей  $Y$  и  $Z$  называется минимальная плоскость  $\Pi$ , перпендикулярная  $Y$  и  $Z$ .

Из результатов предыдущего пункта следует, что  $\dim \Pi \leq 2$  и что плоскость  $\Pi$  определена однозначно с точностью до движения, оставляющего на месте  $Y$  и  $Z$ , а если  $\dim \Pi = 1$ , — то однозначно.

Рассмотрим отдельно три случая, которые могут представиться.

Условие  $\dim \Pi = 0$  означает, что плоскости  $Y$  и  $Z$  пересекаются.

Условие  $\dim \Pi = 1$  означает, что плоскости  $Y$  и  $Z$  имеют (единственный) общий перпендикуляр  $y_0 z_0$  ( $y_0 \in Y$ ,  $z_0 \in Z$ ,  $y_0 \neq z_0$ ); в этом случае они называются *расходящимися*. Длина общего перпендикуляра равна расстоянию  $\rho(Y, Z)$  между плоскостями  $Y$  и  $Z$ . В обозначениях таблицы п. 1.6

$$\rho(Y, Z) = \frac{\lambda}{2}.$$

Условие  $\dim \Pi = 2$  означает, что плоскости  $Y$  и  $Z$  не пересекаются, но имеют общую бесконечно удаленную точку  $p$ , в этом случае они называются *параллельными (по Лобачевскому)*. Плоскость  $\Pi$  пересекается с  $Y$  и  $Z$  по параллельным прямым, проходящим через точку  $p$ .

Во всех трех случаях в нормальном пространстве  $N(\Pi)$  плоскости  $\Pi$  (см. п. 3.2, гл. 1) рассмотрим подпространства

$$N_Y(\Pi) = \langle Y \rangle \cap N(\Pi) = T_Y(Y) \cap N(\Pi) \quad (y \in Y \cap \Pi),$$

$$N_Z(\Pi) = \langle Z \rangle \cap N(\Pi) = T_Z(Z) \cap N(\Pi) \quad (z \in Z \cap \Pi).$$

Взаимное расположение плоскостей  $Y$  и  $Z$  характеризуется числом  $\dim \Pi$ , т. е. тем, пересекаются, расходятся или параллельны эти плоскости, расстоянием  $\rho(Y, Z)$ , если они расходятся, и взаимным расположением подпространств  $N_Y(\Pi)$  и  $N_Z(\Pi)$  евклидова векторного пространства  $N(\Pi)$ .

**1.8. Пары прямых пространства Лобачевского.** Прямая  $l$  в пространстве  $L^n$  определяется своими бесконечно удаленными точками  $p, q$ . Пусть  $u, v \in dC^+$  — изотропные векторы, представляющие эти точки. При условии  $(u, v) = -2$  формула

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^t u + e^{-t} v) \quad (1)$$

задает прямую  $l$ , параметризованную длиной дуги. Векторы  $u$  и  $v$  определены с точностью до преобразования  $u \rightarrow \lambda u, v \rightarrow \lambda^{-1} v$  ( $\lambda > 0$ ).

Ортогональная проекция точки  $x$  на прямую  $l$  равна  $x(\lambda)$ , где

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{(x, v)}{(x, u)},$$

а расстояние  $\rho(x, l)$  находится по формуле

$$\operatorname{ch} \rho(x, l) = \sqrt{(x, u)(x, v)}.$$

Охарактеризуем в этих терминах взаимное расположение двух прямых. Пусть  $l'$  — другая прямая и  $u', v'$  — соответствующие ей изотропные векторы. Неотрицательные числа

$$\alpha = (u, u')(v, v'), \quad \beta = (u, v')(v, u'), \quad (2)$$

определенные с точностью до перестановки, являются инвариантами пары прямых  $l, l'$ . Они удовлетворяют неравенствам

$$2 - \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \leq 2 + \sqrt{\alpha\beta}, \quad (3)$$

причем левое равенство соответствует случаю пересекающихся (а значит, компланарных) прямых, а правое — случаю расходящихся компланарных прямых.

Расстояние  $\rho$  между прямыми  $l$  и  $l'$  находится по формуле

$$2 \operatorname{ch}^2 \rho = \frac{\alpha + \beta}{2} + \sqrt{\alpha\beta}, \quad (4)$$

а угол  $\varphi$  между ними — по формуле

$$2 \cos^2 \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} - \sqrt{\alpha\beta}. \quad (5)$$

**1.9. Пары гиперплоскостей.** Всякая гиперплоскость  $H$  пространства  $X = S^n$  или  $L^n$  в векторной модели имеет вид:

$$H_e = \{x \in X : (x, e) = 0\}, \quad (6)$$

где  $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(e, e) = 1$ . Вектор  $e$  определяется гиперплоскостью  $H$  с точностью до умножения на  $-1$ . Выбор его направления равнозначен ориентации гиперплоскости  $H$ , т. е. указанию того, какое из ограничиваемых ею полупространств является «положительным». А именно, мы будем считать, что

$$H_e^+ = \{x \in X : (x, e) > 0\}, \quad H_e^- = \{x \in X : (x, e) < 0\}. \quad (7)$$

Охарактеризуем взаимное расположение двух ориентированных гиперплоскостей  $H_e$  и  $H_f$  в терминах векторов  $e$  и  $f$ .

Гиперплоскости  $H_e$  и  $H_f$  пересекаются, если  $|(e, f)| < 1$  (что всегда имеет место в случае  $X = S^n$ ). При этом величина двугранного угла  $H_e^- \cap H_f^-$  может быть найдена по формуле

$$\cos \widehat{H_e^- H_f^-} = -(e, f). \quad (8)$$

Гиперплоскости  $H_e$  и  $H_f$  параллельны, если  $|(e, f)| = 1$ .

Гиперплоскости  $H_e$  и  $H_f$  расходятся, если  $|(e, f)| > 1$ . При этом расстояние между ними может быть найдено по формуле

$$\operatorname{ch} \rho(H_e, H_f) = |(e, f)|. \quad (9)$$

В двух последних случаях условие  $(e, f) < 0$  означает, что  $H_e^- \cap H_f^- \neq \emptyset$  или  $H_e^+ \cap H_f^+ = \emptyset$  (см. рис. 49).

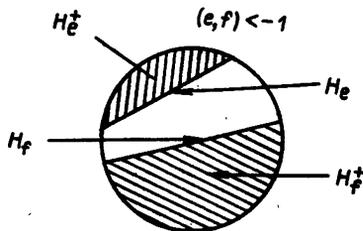


Рис. 49

◀ Докажем, например, формулу (9). Для этого заметим, что в рассматриваемом случае подпространство  $\langle e, f \rangle$  является гиперболическим. Соответствующая прямая пространства  $L^n$  ортогональна гиперплоскостям  $H_e$  и  $H_f$ . Ее точки пересечения с  $H_e$  и  $H_f$  представляются векторами, пропорциональными векторам

$$x = f - (e, f)e, \quad y = e - (e, f)f.$$

Поэтому (см. п. 4.2, гл. 1)

$$\operatorname{ch} \rho(H_e, H_f) = \frac{|(x, y)|}{\sqrt{(x, x)(y, y)}} = |(e, f)|. \quad \blacktriangleright$$

## § 2. Стандартные поверхности

**2.1. Определения и основные свойства.** В группе движений пространства  $X = S^n$  или  $L^n$  выделим некоторые подгруппы. А именно, рассматривая пространство  $X$  в векторной модели, для всякого ненулевого подпространства  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  обозначим через  $G(U)$  группу движений, происходящих из (псевдо)ортогональных преобразований пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , тождественных на  $U^\perp$  (и, следовательно, сохраняющих  $U$ ).

Предложение 2.1. Орбиты группы  $G(U)$  представляют собой пересечения с  $X$  линейных многообразий вида  $x+U$ ,  $x \in X$ . Если  $x \notin U^\perp$ , то касательное пространство орбиты  $G(U)x$  в точке  $x$  есть

$$U_x = \{u \in U : (u, x) = 0\} = U \cap T_x(X)$$

и однородное пространство  $(G(U)x, G(U))$  удовлетворяет аксиоме максимальной подвижности (см. п. 1.4, гл. 1) относительно индуцированной римановой метрики. (Если  $x \in U^\perp$ , то орбита  $G(U)x$  состоит из одной точки.)

◀ Очевидно, что  $G(U)x \subset x+U$ . Обратно, если  $u \in U$  и  $y = x+u \in X$ , то линейное отображение  $\langle x, U^\perp \rangle \rightarrow \langle y, U^\perp \rangle$ , переводящее  $x$  в  $y$  и тождественное на  $U^\perp$ , изометрично. По теореме Витта оно продолжается до (псевдо)ортогонального преобразования пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Следовательно,  $y \in G(U)x$ .

Далее, имеем

$$G(U)x = (x+U) \cap X = x+Q,$$

где  $Q \subset U$  — подмногообразие, выделяемое уравнением

$$(u, u) + 2(u, x) = 0 \quad (10)$$

и — в случае  $X = L^n$  — условием  $x+u \in C^+$ . Если  $x \notin U^\perp$ , то уравнение (10) задает квадрику, имеющую в точке 0 касательное пространство  $U_x$ .

Для проверки аксиомы максимальной подвижности заметим, что всякое ортогональное преобразование пространства  $U_x$  продолжается до (псевдо)ортогонального преобразования пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , тождественного на  $U_x^\perp = \langle x, U^\perp \rangle$ . Это последнее преобразование определяет движение, принадлежащее группе  $G(U)$  и оставляющее на месте точку  $x$ . ▶

**Определение 2.2.** Подгруппы вида  $G(U)$  называются *стандартными подгруппами* группы движений пространства  $X$ . Орбиты группы  $G(U)$ , не лежащие в  $U^\perp$ , называются *стандартными поверхностями*, ассоциированными с подпространством  $U$ .

Подпространство  $U$  однозначно определяется любой ассоциированной с ним стандартной поверхностью как направляющее подпространство ее аффинной оболочки в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Пересечение (любых) стандартных поверхностей, ассоциированных с

подпространствами  $U_1, \dots, U_k$ , если оно не пусто и не сводится к точке, является стандартной поверхностью, ассоциированной с подпространством  $U_1 \cap \dots \cap U_k$ .

Стандартная поверхность  $(x+U) \cap X$  при  $x \in U$  совпадает с плоскостью  $U \cap X$ , а при  $x \notin U$  является *стандартной гиперповерхностью* (подмногообразием коразмерности 1) в плоскости  $\langle x, U \rangle \cap X$ . Поэтому изучение стандартных поверхностей может быть сведено к изучению стандартных гиперповерхностей.

Если  $Y = U \cap X \neq \emptyset$ , то стандартная подгруппа  $G(U)$  может быть описана во внутренних терминах как группа движений, сохраняющих плоскость  $Y$  и тривиально действующих на ее нормальном пространстве. Одной из ее орбит в этом случае является плоскость  $Y$ . Если  $Z = U^\perp \cap X \neq \emptyset$ , то  $G(U)$  состоит из движений, тождественных на плоскости  $Z$ . В этом случае ее орбиты, не лежащие в  $Z$ , с точки зрения внутренней геометрии пространства  $X$  представляют собой сферы (с центрами на  $Z$ ) в ортогональных  $Z$  плоскостях дополнительной размерности.

При  $X = S^n$  имеем всегда  $Y \neq \emptyset$  и, если только  $U \neq \mathbb{R}^{n+1}$ , то  $Z \neq \emptyset$ . При  $X = L^n$  подпространство  $U$  может быть гиперболическим, эллиптическим или параболическим. В первом случае  $Y \neq \emptyset$ ,  $Z = \emptyset$ , во втором —  $Y = \emptyset$ ,  $Z \neq \emptyset$ , в третьем —  $Y = Z = \emptyset$ .

При  $X = E^n$  естественно определить два типа *стандартных подгрупп*. Первые состоят из движений, сохраняющих некоторую плоскость  $Y$  и тривиально действующих на ее нормальном пространстве, вторые — из движений, тождественных на некоторой плоскости  $Z$ . Орбитами стандартных подгрупп первого типа являются плоскости, параллельные  $Y$ , второго — сферы в ортогональных  $Z$  плоскостях дополнительной размерности. Эти поверхности естественно называть *стандартными поверхностями в евклидовом пространстве*.

**2.2. Стандартные гиперповерхности.** Стандартные гиперповерхности в пространстве  $X = S^n$  или  $L^n$  ассоциированы с  $n$ -мерными подпространствами пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  и представляют собой сечения пространства  $X$  гиперплоскостями пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Всякое  $n$ -мерное подпространство  $U$  пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  определяется ортогональным к нему ненулевым вектором  $e$ . Ассоциированные с  $U$  стандартные гиперповерхности имеют вид

$$H_e^c = \{x \in X : (x, e) = c\}. \quad (11)$$

Вектор  $e$  выбирается с точностью до пропорциональности.

Очевидно, что  $H_e^c = H_{\lambda e}^{\lambda c}$ .

Из соображений однородности следует, что гиперповерхности  $H_e^c$  при фиксированном  $e$  и различных  $c$  взаимно эквидистантны (см. определение 1.5). Расстояния между ними можно измерять вдоль любой ортогональной им линии. Эти линии оказываются прямыми. В самом деле, гиперповерхность  $H_e^c$

ортогональна всем прямым, определяющие подпространства которых содержат вектор  $e$ . Через любую точку пространства  $X$ , не принадлежащую  $\langle e \rangle$  (т. е. за исключением не более чем двух точек), проходит ровно одна такая прямая. Совокупность всех этих прямых называется *пучком прямых*, ассоциированным с вектором  $e$ , и обозначается в дальнейшем через  $B_e$ .

Пучки прямых и, тем самым, стандартные гиперповерхности могут быть описаны в терминах геометрии пространства  $X$ .

А именно, если пересечение  $\langle e \rangle \cap X$  содержит хотя бы одну точку  $x$ , то пучок  $B_e$  называется *эллиптическим* с центром  $x$  и представляет собой просто совокупность всех прямых, проходящих через точку  $x$ . Гиперповерхности  $H_e^c$  в этом случае — это сферы с центром  $x$ .

Если пересечение  $\langle e \rangle \cap X$  непусто, то оно является гиперплоскостью  $H$  пространства  $X$ . Пучок  $B_e$  называется тогда *гиперболическим с базой  $H$*  и представляет собой совокупность всех прямых, ортогональных  $H$ . Гиперповерхности  $H_e^c$  в этом случае называются *эквидистантами с базой  $H$* . Каждая из них есть связная компонента множества всех точек, находящихся на определенном (зависящем от  $c$ ) расстоянии от  $H$ . (Все это множество есть объединение  $H_e^c$  и  $H_{e^{-c}}$ ).

При  $X=S^n$  всякий пучок  $B_e$  является одновременно эллиптическим и гиперболическим, а всякая гиперповерхность  $H_e^c$  — одновременно сферой и эквидистантой.

При  $X=L^n$  пучок  $B_e$  эллиптический, если  $(e, e) < 0$ , и гиперболический, если  $(e, e) > 0$ . Если же  $(e, e) = 0$ , то пучок  $B_e$  называется *параболическим с центром в бесконечно удаленной точке  $p = \langle e \rangle$*  и представляет собой совокупность всех прямых, проходящих через эту точку. Гиперповерхности  $H_e^c$  называются в этом случае *орисферами с центром  $p$* .

**Теорема 2.3.** Всякая стандартная гиперповерхность сферы  $S^n$  как однородное пространство изоморфна  $S^{n-1}$ . В пространстве Лобачевского  $L^n$  всякая сфера изоморфна  $S^{n-1}$ , всякая орисфера —  $E^{n-1}$ , а всякая эквидистанта —  $L^{n-1}$ .

Таким образом, все стандартные гиперповерхности, а значит, и все стандартные поверхности в пространствах постоянной кривизны также являются пространствами постоянной кривизны, за тривиальными исключениями, когда они представляют собой окружность  $S^1$  или двоеточие  $S^0$ .

Тот факт, что орисфера в пространстве Лобачевского изоморфна евклидову пространству, по праву считается одним из замечательнейших фактов геометрии Лобачевского. Он был установлен независимо Н. И. Лобачевским и Бойаи.

◀ Для сферы с центром  $x$  требуемый изоморфизм устанавливается сопоставлением каждой ее точке  $y$  единичного касательного вектора отрезка  $xy$  в точке  $x$ , для эквидистанты с базой  $H$  — проектированием на гиперплоскость  $H$ .

Для орисферы  $H_e^c \subset L^n$  с центром в бесконечно удаленной точке  $p = \langle e \rangle$  изоморфизм с пространством  $E^{n-1}$  устанавливается следующим образом. Положим  $U = \langle e \rangle^\perp$ ,  $R^n = R^{n+1} / \langle e \rangle$ ,  $R^{n-1} = U / \langle e \rangle$ . Группа  $G(U)$ , действуя естественным образом в пространстве  $R^n$ , сохраняет подпространство  $R^{n-1}$  и индуцированную в нем евклидову метрику. Орисфера же  $H_e^c$  диффеоморфно проектируется на гиперплоскость пространства  $R^n$ , параллельную  $R^{n-1}$ , которую можно рассматривать как векторную модель евклидова пространства  $E^{n-1}$ . ►

В конформной модели пространства  $L^n$  сферы, орисферы и эквидистанты представляются пересечениями с  $L^n$  сфер конформного пространства.

◀ В самом деле, векторную модель пространства  $L^n$  можно рассматривать как его конформную модель на гиперboloиде (п. 2.2, гл. 2), и пересечения гиперboloида с гиперплоскостями — это и есть сферы конформного пространства. ►

**2.3. Подобие стандартных гиперповерхностей.** Пусть  $e \in R^{n+1}$  ( $e \neq 0$ ),  $U = \langle e \rangle^\perp$ ,  $G_e = G(U)$ . Проектирование вдоль прямых пучка  $B_e$  устанавливает диффеоморфизмы

$$f_e^a : H_e^a \rightarrow H_e^b, \quad (12)$$

перестановочные с действием группы  $G_e$ . Эти диффеоморфизмы не сохраняют, однако, римановой метрики, а умножают ее на некоторый постоянный коэффициент, т. е. являются подобиями. (Иного не может быть в силу п. 1.3, гл. 1.) Для того, чтобы найти коэффициенты подобия, дадим аналитическое описание пучка  $B_e$  в векторной модели.

Прежде всего, параметризуем пучок  $B_e$  точками  $(n-1)$ -мерного многообразия  $Y_e$ . А именно, если  $B_e$  — эллиптический пучок с центром  $x$ , то в качестве  $Y_e$  возьмем единичную сферу в пространстве  $U = T_x(X)$  и каждой ориентированной прямой пучка сопоставим ее касательный вектор в точке  $x$ . (В этом случае элементами пучка удобно считать ориентированные прямые таким образом, что каждая прямая встречается дважды с противоположными ориентациями.) Если  $B_e$  — параболический пучок, то в качестве  $Y_e$  возьмем орисферу  $H_e^1$  и каждой прямой пучка сопоставим точку ее пересечения с этой орисферой. (Выбор орисферы  $H_e^1$ , в сущности, произволен, так как он зависит от нормировки вектора  $e$ .) Наконец, если  $B_e$  — гиперболический пучок с базой  $H$ , то в качестве  $Y_e$  возьмем гиперплоскость  $H$  и каждой прямой пучка сопоставим точку ее пересечения с этой гиперплоскостью.

Параметрическое уравнение прямой пучка  $B_e$ , отвечающей точке  $y \in Y_e$ , будет тогда иметь вид

$$f(t, y) = y\varphi(t) + e\psi(t), \quad (13)$$

где функция  $f$  явно указана в следующей таблице. В качестве параметра  $t$  при этом взята длина дуги, а начало отсчета вы-

брано в центре пучка  $B_e$ , если он эллиптический, на его базе, если он гиперболический, и на орисфере  $H_e^1$ , если он параболический. В случае  $X=S^n$  один и тот же пучок в первой строке рассматривается как эллиптический, а во второй — как гиперболический. В случае  $X=L^n$  и  $(e, e) \leq 0$  считается, что  $e \in C^-$ .

$X$	$(e, e)$	$(y, e)$	$(y, y)$	$f(t, y)$	$c$	$I$	$\kappa$
$S^n$	1	0	1	$y \sin t + e \cos t$	$\cos t$	$(0, \pi)$	$(1-c^2)^{-1}$
	1	0	1	$y \cos t + e \sin t$	$\sin t$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(1-c^2)^{-1}$
$L^n$	-1	0	1	$y \operatorname{sh} t - e \operatorname{ch} t$	$\operatorname{ch} t$	$\mathbb{R}_+$	$(c^2-1)^{-1}$
	0	1	-1	$ye^t + e \operatorname{sh} t$	$e^t$	$\mathbb{R}$	0
	1	0	-1	$y \operatorname{ch} t + e \operatorname{sh} t$	$\operatorname{sh} t$	$\mathbb{R}$	$(c^2+1)^{-1}$

При  $t \in I$ , где  $I$  — интервал, указанный в таблице,  $y \mapsto f(t, y)$  задает диффеоморфизм

$$Y_e \rightarrow H_e^c, \quad (14)$$

перестановочный с действием группы  $G_e$ .

Зависимость  $c$  от  $t$  также указана в таблице. Из (13) получаем, что

$$df_c(y) = \varphi(t) dy.$$

Следовательно,  $f_c$  — подобие с коэффициентом  $\varphi(t)$ . Коэффициент подобия диффеоморфизма  $f_b^a$  находится из соотношения  $f_b^a = f_b f_a^{-1}$ .

Кривизна  $\kappa$  гиперповерхности  $H_e^c$  равна  $\varphi(t)^{-2} \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \pm 1$  или 0 — кривизна многообразия  $Y_e$ . Ее выражение через  $t$  указано в последнем столбце таблицы.

**2.4. Пересечение стандартных гиперповерхностей.** Пусть  $H_{e_1}^{c_1}, \dots, H_{e_k}^{c_k}$  — стандартные гиперповерхности в пространстве  $X=S^n$  или  $L^n$ . Предположим, что векторы  $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^{n+1}$  линейно независимы. Пусть  $G = (g_{ij})$  — их матрица Грама,  $G^{-1} = (g^{ij})$  — обратная матрица (если она существует) и

$$\sigma = \sum_{i,j} g^{ij} c_i c_j.$$

Взаимное расположение гиперповерхностей  $H_{e_1}^{c_1}, \dots, H_{e_k}^{c_k}$

в какой-то мере определяется их пересечением, которое либо пусто, либо состоит из одной точки, либо является  $(n-k)$ -мерной стандартной поверхностью.

Необходимое и достаточное условие непустоты пересечения и его кривизна приводятся в следующей таблице. (Если указанное неравенство для  $\sigma$  выполняется как равенство, то пересечение состоит из одной точки.)

$X$	$\det G$	Условие непустоты	Кривизна
$S^n$	$> 0$	$\sigma \leq 1$	$(1-\sigma)^{-1}$
$L^n$	$> 0$		$-(1+\sigma)^{-1}$
	$= 0$		0
	$< 0$	$\sigma \leq -1$	$-(1+\sigma)^{-1}$

◀ Пусть  $\det G \neq 0$  и  $\{e_1^*, \dots, e_k^*\}$  — базис подпространства  $W = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ , сопряженный базису  $\{e_1, \dots, e_k\}$ . Положим  $f = \sum c_j e_j^*$ . Тогда  $(f, e_i) = c_i$  при  $i = 1, \dots, k$ . Следовательно,

$$\bigcap_{i=1}^k H_{e_i}^{c_i} = (f + W^\perp) \cap X.$$

Легко видеть, что  $(f, f) = \sigma$ . Отсюда получается условие непустоты пересечения, приведенное в таблице. Далее, если пересечение не пусто и не сводится к точке, то оно является стандартной гиперповерхностью  $(n-k+1)$ -мерной плоскости  $Y = \langle f, W^\perp \rangle \cap X$  и задается в ней уравнением  $(y, f) = \sigma$ . Его кривизна находится с помощью таблицы предыдущего пункта. ▶

### § 3. Разложения в полупрямое произведение

Рассматривая орбиты стандартных подгрупп групп движений и их прямых произведений, можно получить различные разложения пространств постоянной кривизны в полупрямое произведение римановых многообразий меньшей размерности (также являющихся пространствами постоянной кривизны).

**3.1. Сферические, орисферические и эквидистантные разложения.** Ортогональная сетка, образованная прямыми пучка  $B_s$  и гиперповерхностями  $H_s^c$ , определяет разложение риманова многообразия  $X = S^n$  или  $L^n$  в полупрямое произведение  $I \times Y$  (см. обозначения в п. 2.3).

Более точно, отображение

$$(t, y) \mapsto f(t, y)$$

является диффеоморфизмом прямого произведения  $I \times Y_e$  на  $X \setminus (\langle e \rangle \cap X)$ , а риманова метрика многообразия  $X$  выражается через римановы метрики многообразия  $I$  и  $Y_e$ , как указано в следующей таблице

$X$	Название разложения	Вид разложения	Риманова метрика	Элемент объема
$S^n$	Сферическое	$(0, \pi) \times S^{n-1}$	$dt^2 + \sin^2 t dy^2$	$\sin^{n-1} t dt dy$
	Эквидистантное	$(-\pi/2, \pi/2) \times S^{n-1}$	$dt^2 + \cos^2 t dy^2$	$\cos^{n-1} t dt dy$
$\mathbb{L}^n$	Сферическое	$\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$	$dt^2 + \text{sh}^2 t dy^2$	$\text{sh}^{n-1} t dt dy$
	Орисферическое	$\mathbb{R} \times E^{n-1}$	$dt^2 + e^{2t} dy^2$	$e^{(n-1)t} dt dy$
	Эквидистантное	$\mathbb{R} \times \mathbb{L}^{n-1}$	$dt^2 + \text{ch}^2 t dy^2$	$\text{ch}^{n-1} t dt dy$

(В последнем столбце через  $dy$  обозначается элемент объема многообразия  $Y_e$ .)

**3.2. Сферически-эквидистантное разложение.** Следующая конструкция является комбинацией сферического и эквидистантного разложений.

Пусть  $Y \subset X$  — плоскость произвольной размерности  $k$  и  $Z$  — единичная сфера в ее нормальном пространстве. Точка  $x \in X$  определяется расстоянием  $t$  до плоскости  $Y$ , проекцией  $y$  на эту плоскость и касательным вектором  $z$  отрезка  $yx$  в точке  $y$  (см. рис. 50). Соответствие  $x \leftrightarrow (t, y, z)$  определяет диффеоморфизм многообразий  $X \setminus Y$  и  $I \times Y \times Z$ , где  $I = (0, \frac{\pi}{2})$  в случае  $X = S^n$  и  $I = \mathbb{R}_+$  в случае  $X = \mathbb{L}^n$ .

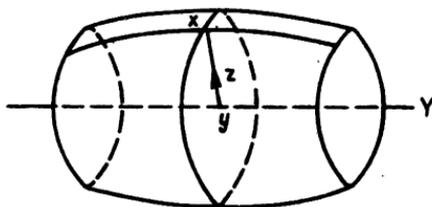


Рис. 50

Прямые, ортогональные плоскости  $Y$ , и подмногообразия  $t = \text{const}$  образуют ортогональную сетку. Далее, каждое из последних подмногообразий является орбитой группы  $G(U) \times G(U^\perp)$ , где  $U = \langle Y \rangle$  — определяющее подпространство плоскости  $Y$ , и разлагается как риманово многообразие в прямое произведение орбит групп  $G(U)$  и  $G(U^\perp)$ , подобных  $Y$  и  $Z$  соответственно. Коэффициенты подобия находятся из таблицы п. 2.3. Тем самым определяется разложение риманова многообразия  $X \setminus Y$  в полупрямое произведение  $I \times (Y \times Z)$ .

При  $X = S^n$  таким образом получается разложение

$$S^n \setminus S^k = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times S^k \times S^{n-k-1}. \quad (15)$$

Риманова метрика имеет вид

$$dx^2 = dt^2 + \cos^2 t dy^2 + \sin^2 t dz^2, \quad (16)$$

а элемент объема —

$$dx = \cos^k t \sin^{n-k-1} t dt dy dz. \quad (17)$$

При  $X = L^n$  получается разложение

$$L^n \setminus L^k = R_+ \times L^k \times S^{n-k-1}. \quad (18)$$

Риманова метрика имеет вид

$$dx^2 = dt^2 + \text{ch}^2 t dy^2 + \text{sh}^2 t dz^2, \quad (19)$$

а элемент объема —

$$dx = \text{ch}^k t \text{sh}^{n-k-1} t dt dy dz. \quad (20)$$

## Глава 5

### ДВИЖЕНИЯ

В этой главе устанавливаются основные свойства движений в пространствах постоянной кривизны, приводится классификация движений и описывается структура групп движений.

Буквой  $G$  обозначается полная группа движений пространства постоянной кривизны  $X$ , а символом  $G_+$  — ее связная компонента единицы.

#### § 1. Общие свойства движений

**1.1. Задание движений.** Пусть  $x, y$  — две точки, а  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $f = \{f_1, \dots, f_n\}$  — базисы касательных пространств в этих точках, имеющие одинаковые матрицы Грама:  $(e_i, e_j) = (f_i, f_j)$ . Из определения пространства постоянной кривизны вытекает существование, и притом единственного, движения  $g \in G$ , переводящего точку  $x$  в точку  $y$ , а базис  $e$  — в базис  $f$ . Следующее предложение является аналогом этого утверждения для «реперов», составленных из направленных отрезков пространства  $X$ .

Предложение 1.1. Пусть  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  — два набора точек общего положения (см. п. 3.2, гл. 1). Если  $\rho(x_i, x_j) = \rho(y_i, y_j)$  для  $i, j = 0, 1, \dots, n$ , то существует единственное движение, переводящее первый набор во второй.

◀ Ограничимся рассмотрением случаев, когда  $X = S^n$  или  $L^n$ . В терминах векторной модели указанные наборы можно рассматривать как два базиса объемлющего пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  с одинаковыми матрицами Грама. Такие базисы, очевидно, переводятся друг в друга (псевдо)ортогональным преобразованием. ▶

Отметим, что положение точки  $x \in X$  однозначно определяется расстояниями до  $n+1$  точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  общего положения.

Действительно, в терминах векторной модели пространства  $X = S^n$  или  $L^n$  эти расстояния определяют скалярные произведения вектора  $x \in X \subset \mathbb{R}^{n+1}$  с векторами  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , образующими базис пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

1.2. Продолжение движения с плоскости. Пусть  $Y$  —  $k$ -мерная плоскость, а  $N(Y)$  — ее нормальное пространство.

Определение 1.2. Скольжением вдоль плоскости  $Y$  называется движение  $g \in G$ , оставляющее плоскость  $Y$  инвариантной и тождественно действующее на ее нормальном пространстве  $N(Y)$ .

Группу всех скольжений вдоль плоскости  $Y$  будем обозначать через  $G(Y)$ , а ее связную компоненту единицы — через  $G_+(Y)$ .

Поскольку  $\mathbb{R}^{n+1} = \langle Y \rangle \oplus N(Y)$ , любое движение  $g$  плоскости  $Y$  однозначно продолжается до скольжения  $\hat{g}$  вдоль  $Y$ . Это скольжение называется каноническим продолжением движения  $g$ . Скольжение  $\hat{g}$  оставляет инвариантной любую плоскость, содержащую  $Y$ , и переводит произвольную точку  $x \in X$  в точку  $\hat{g}x$ , которая характеризуется условиями:

1) точка  $\hat{g}x$  лежит в  $(k+1)$ -мерной плоскости, натянутой на  $x$  и  $Y$ , по ту же сторону от  $Y$ , что и точка  $x$ ;

2) проекция точки  $\hat{g}x$  на  $Y$  совпадает с  $gy$ , где  $y$  — проекция точки  $x$  на  $Y$ .

Определение 1.3. Движение, оставляющее неподвижными все точки плоскости  $Y$ , называется вращением вокруг плоскости  $Y$ .

Группу всех вращений вокруг  $Y$  будем обозначать через  $G^Y$ . Очевидно, что  $G^Y \simeq O(N(Y))$ .

Предложение 1.4. Группа  $G_Y$  всех движений пространства  $X$ , сохраняющих плоскость  $Y$ , разлагается в прямое произведение

$$G_Y = G(Y) \times G^Y.$$

### 1.3. Функция смещения

Определение 1.5. Функция  $\rho_g(x) = \rho(x, gx)$  на  $X$  называется функцией смещения движения  $g$ .

Из формулы для расстояния между точками следует, что функция смещения дифференцируема в любой точке  $x$ , для которой  $gx \neq x$  и, в случае сферы,  $gx \neq -x$ , где  $-x$  — точка, диаметрально противоположная точке  $x$ .

Обозначим через  $M_s^\lambda$  множество критических точек функции смещения с критическим значением  $\lambda$ . (Напомним, что критической точкой функции называется точка, в которой дифференциал этой функции равен нулю или не существует.)

В частности,  $M_g^0$  есть множество неподвижных точек движения  $g$ , а  $M_g^\pi$  — в случае сферы — есть множество точек, отображаемых в диаметрально противоположные.

**Теорема 1.6.** Пусть  $g$  — движение пространства  $X$ .

1) Всякое непустое критическое множество  $M_s^\lambda$  является  $g$ -инвариантной плоскостью. При  $\lambda > 0$  и — в случае сферы —  $\lambda < \pi$  через любую точку  $x \in M_s^\lambda$  проходит  $g$ -инвариантная прямая, лежащая в  $M_s^\lambda$ .

2) В случае  $X = E^n$  функция смещения  $\rho_g$  имеет ровно одно критическое значение  $\lambda$  — абсолютный минимум. Движение  $g$  индуцирует в  $M_s^\lambda$  параллельный перенос.

3) В случае  $X = L^n$  функция смещения  $\rho_g$  имеет не более одного критического значения  $\lambda$ , которое необходимо является абсолютным минимумом. При  $\lambda > 0$  соответствующее критическое множество  $M_s^\lambda$  есть прямая.

◀ В терминах векторной модели пространства  $X = S^n$  или  $L^n$  критическое множество  $M_s^\lambda$  является множеством критических точек квадратичной формы  $F(x) = (x, gx)$  на поверхности  $(x, x) = \text{const} = \pm 1$ . Оно задается уравнением

$$(dx, gx) + (x, gdx) = 2\mu(x, dx),$$

т. е. является пересечением с  $X$  собственного подпространства симметрического линейного преобразования  $g + g^{-1}$ . Отсюда следует, что  $M_s^\lambda$  есть плоскость в случае, когда  $X = S^n$  или  $L^n$ . Случай  $X = E^n$  разбирается аналогично. Если  $x \in M_g^\lambda$ , то подпространство  $\langle x, gx \rangle$  инвариантно относительно  $g$ , поскольку  $g^2x = -2\mu gx - x$ . Это доказывает утверждение 1. Для доказательства утверждений 2 и 3 достаточно заметить, что расстояние между двумя  $g$ -инвариантными прямыми ограничено. Но в пространстве Лобачевского такие прямые отсутствуют, а в евклидовом пространстве такие прямые параллельны. ▶

**Определение 1.7.** Непустое критическое множество  $M_g^\lambda$  функции смещения  $\rho_g$  называется *осью движения*  $g$ .

Из предыдущего вытекает

**Следствие 1.8.** 1) Любое движение евклидова пространства обладает единственной осью.

2) Любое движение сферы  $S^n$  обладает осью и число осей не превосходит  $[n/2]$ .

3) Любое движение пространства Лобачевского обладает не более чем одной осью. Если движение не имеет неподвижных точек и обладает осью, то его ось есть прямая.

Определение 1.9. Движение  $g$  с постоянной функцией смещения  $\rho_g(x) = \lambda = \text{const}$  называется *переносом Клиффорда*. Число  $\lambda$  называется *величиной смещения*.

Из теоремы 1.6 следует, что переносы Клиффорда в  $E^n$  суть параллельные переносы, а нетождественные переносы Клиффорда в  $L^n$  отсутствуют. Переносы Клиффорда на сфере описываются в п. 2.1.

## § 2. Классификация движений

2.1. Движение сферы. Из линейной алгебры известно, что любое ортогональное преобразование  $g$  евклидова пространства  $R^{n+1}$  в подходящем ортонормированном базисе записывается в виде

$$g = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, R(\varphi_1), \dots, R(\varphi_s)),$$

где  $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  — матрица поворота на угол  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ .

Обозначим через  $V_\varepsilon$  собственное подпространство преобразования  $g$  с собственным значением  $\varepsilon = 1, -1$ , а через  $V(\varphi)$  — прямую сумму подпространств, отвечающим диагональным блокам  $R(\varphi_i)$  с  $\varphi_i = \varphi$ . Преобразование  $g$  индуцирует в каждом подпространстве  $V(\varphi)$  комплексную структуру  $I$ , которая действует в каждом  $g$ -инвариантном двумерном подпространстве  $U \subset V(\varphi)$  как поворот на угол  $\pi/2$  в том же направлении, что и  $g|_U$ . Ограничение преобразования  $g$  на подпространство  $V(\varphi)$  имеет вид

$$g|_{V(\varphi)} = E \cos \varphi + I \sin \varphi$$

и индуцирует в плоскости  $V(\varphi) \cap S^n$  сферы перенос Клиффорда с величиной смещения  $\varphi$ . Подпространства  $V_\varepsilon, V(\varphi_i)$  определены однозначно и задают ортогональное разложение

$$R^{n+1} = V_1 \oplus V_{-1} \oplus V(\varphi_1) \oplus \dots \oplus V(\varphi_k).$$

Плоскости  $V_\varepsilon \cap S^n, V(\varphi_i) \cap S^n$  сферы суть оси движения  $g$ , причем соответствующие критические значения функций смещения равны 0, если  $\varepsilon = 1$ ;  $\pi$ , если  $\varepsilon = -1$  и, соответственно,  $\varphi_i$ . Это приводит к следующему результату.

Теорема 2.1. Пусть  $g$  — движение сферы и  $M_1, \dots, M_l$  — его оси.

1) Движение  $g$  индуцирует на каждой оси перенос Клиффорда  $g_i = g|_{M_i}$  и разлагается в произведение коммутирующих скольжений вдоль осей  $M_i$ , индуцированных этими переносами.

2) С точностью до сопряженности в группе движений движение однозначно определяется критическими значениями функции смещения и размерностями осей.

Следствие 2.2. Переносы Клиффорда с величиной смещения  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < \pi$ , на сфере  $S^n$  биективно соответствуют ортогональным комплексным структурам объемлющего пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Комплексной структуре  $I$  отвечает перенос Клиффорда  $g_\lambda^I = E \cos \lambda + I \sin \lambda$ . В частности, на четномерной сфере все переносы Клиффорда исчерпываются преобразованиями  $\pm \text{id}$ .

Поскольку любой перенос Клиффорда  $g_\lambda^I$ ,  $\lambda < \pi$ , включается в однопараметрическую группу переносов Клиффорда  $g_t^I$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , траекториями которой являются  $g_t^I$ -инвариантные прямые, получаем

Следствие 2.3. Перенос Клиффорда  $g_\lambda^I$ ,  $0 < \lambda < \pi$ , определяет расслоение сферы на попарно взаимно эквидистантные  $g_\lambda^I$ -инвариантные прямые  $\{g_\lambda^I x\}$ .

## 2.2. Движения евклидова пространства.

Теорема 2.4. Любое движение  $g$  евклидова пространства имеет единственную ось  $M$  (соответствующую абсолютному минимуму функции смещения) и представляет собой произведение вращения вокруг  $M$  и параллельного переноса на вектор, лежащий в  $M$ .

Заметим, что параллельные переносы характеризуются как движения, ось которых совпадает со всем пространством (или как переносы Клиффорда), а вращения — как движения, для которых критическое значение функции смещения равно нулю.

## 2.3. Движения пространства Лобачевского.

Определение 2.5. Движение пространства Лобачевского  $\mathbb{L}^n$  называется *эллиптическим* (или вращением), если оно имеет неподвижную точку в  $\mathbb{L}^n$ , *гиперболическим*, если оно не имеет неподвижных точек в  $\mathbb{L}^n$ , но имеет инвариантную прямую, и *параболическим*, если оно не имеет неподвижных точек и инвариантных прямых в  $\mathbb{L}^n$ , но имеет неподвижную точку на абсолюте.

Примером гиперболического движения является *сдвиг вдоль прямой*  $l$  — каноническое продолжение собственного движения прямой. Примером параболического движения служит *параболический сдвиг* вдоль двумерной плоскости — каноническое продолжение параболического поворота двумерной плоскости.

В векторной модели эти движения описываются следующим образом:

Пусть  $l$  — ориентированная прямая с определяющим подпространством  $U = \langle u, v \rangle$ , где  $u, v$  — изотропные векторы, представляющие бесконечно удаленные точки прямой  $l$  и нормированные условием  $(u, v) = -1$ . Относительно прямого разло-

жения  $R^{n-1} = Ru + Rv + U^\perp$  сдвиг вдоль прямой  $l$  задается диагональным преобразованием

$$\text{diag}(e^{-\mu}, e^\mu, \text{id}).$$

Прямая  $l$  является осью этого сдвига, причем соответствующее критическое значение функции смещения равно  $\mu$ .

Пусть  $Y$  — двумерная плоскость и  $\{u, e, v\}$  — базис ее определяющего подпространства  $U$  с матрицей Грама

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот базис определяет параболический сдвиг  $S$  вдоль плоскости  $Y$ , ограничение которого на  $U$  в базисе  $\{u, e, v\}$  задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изотропный вектор  $u$  является единственным с точностью до пропорциональности неподвижным изотропным вектором линейного преобразования  $S$ . Соответствующая ему  $S$ -инвариантная точка абсолюта  $p = \langle u \rangle$  называется *центром параболического сдвига*  $S$ . Функция смещения параболического сдвига не имеет критических точек.

**Теорема 2.6.** 1) Любое движение пространства Лобачевского является либо эллиптическим, либо гиперболическим, либо параболическим.

2) Любое гиперболическое движение  $g$  разлагается в произведение сдвига вдоль некоторой прямой  $l$  и вращения вокруг этой прямой. Прямая  $l$  является единственной осью движения  $g$ .

3) Любое параболическое движение  $g$  однозначно разлагается в произведение параболического сдвига  $S$  вдоль некоторой двумерной плоскости  $Y$  и вращения  $R$  вокруг этой плоскости. Параболическое движение не имеет осей.

**З а м е ч а н и е.** В последнем случае, если ось вращения  $R$  не совпадает с  $Y$ , то плоскость  $Y$  определена не однозначно.

◀ Доказательство вытекает из теоремы 1.6 гл. 4, в которой описан канонический вид псевдоортогонального преобразования в пространстве  $R^{n-1}$ . Псевдоортогональное преобразование  $g$  индуцирует эллиптическое, гиперболическое или параболическое движение, если размерность минимального  $g$ -инвариантного гиперболического подпространства  $H$  равна 1, 2 или 3 соответственно. ▶

**2.4. Однопараметрические группы движений.** Из приведенной классификации движений следует, что любое собственное движение пространства постоянной кривизны включается в однопараметрическую группу движений.

Укажем вид однопараметрических групп сдвигов вдоль прямой и параболических сдвигов в пространстве Лобачевского.

Обозначим через  $a \wedge b$  кососимметрическое преобразование пространства  $\mathbb{R}^{n,1}$ , задаваемое формулой  $x \mapsto (b, x)a - (a, x)b$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^{n,1}$ . Преобразование  $a \wedge b$  порождает однопараметрическую группу  $\exp t(a \wedge b)$  псевдоортогональных преобразований и, тем самым, движений пространства  $L^n$ . В обозначениях п. 2.3 однопараметрическая группа сдвигов вдоль прямой  $L$  с определяющим подпространством  $U = \langle u, v \rangle$  имеет вид  $\exp t(u \wedge v)$ . Ее ограничение на  $U$  в базисе  $\{u, v\}$  задается матрицей

$$\text{diag}(e^{-t}, e^t).$$

Однопараметрическая группа параболических сдвигов вдоль плоскости  $Y$  с направляющим подпространством  $U = \langle u, e, v \rangle$  имеет вид  $\exp t(u \wedge e)$ . Ее ограничение на  $U$  в базисе  $\{u, e, v\}$  задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\{g_t\}$ ,  $\{h_t\}$  — две поэлементно коммутирующие между собой однопараметрические группы движений. Тогда их произведение  $\{g_t h_t\}$  также является однопараметрической группой движений.

Из результатов п. 2.1 следует, что любая однопараметрическая группа движений сферы разлагается в произведение коммутирующих однопараметрических групп, являющихся каноническими продолжениями однопараметрических групп  $E \cos t + I \sin t$  переносов Клиффорда некоторых взаимно полярных плоскостей. Это дает также описание однопараметрических групп вращений в любом пространстве постоянной кривизны.

Структуру однопараметрических групп, не имеющих общих неподвижных точек, в  $S^n$  и  $L^n$  описывает следующая

**Теорема 2.7.** 1) Любая однопараметрическая группа движений евклидова пространства  $E^n$ , не имеющая общих неподвижных точек, есть либо группа параллельных переносов на векторы  $tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , либо произведение такой группы на однопараметрическую группу вращений вокруг прямой с направляющим вектором  $v$ .

2) Любая однопараметрическая группа гиперболических движений пространства Лобачевского есть либо группа сдвигов вдоль некоторой прямой  $L$ , либо произведение такой группы на однопараметрическую группу вращений вокруг прямой  $L$ .

3) Любая однопараметрическая группа параболических движений пространства Лобачевского есть либо однопараметрическая группа параболических сдвигов вдоль двумерной плоскости  $Y$ , либо произведение такой группы на однопараметрическую группу вращений вокруг плоскости  $Y$ .

### § 3. Группы движений и подобий

В этом параграфе под группой движений понимается замкнутая подгруппа полной группы движений  $G$  пространства постоянной кривизны  $X$ . Группу  $G$  мы рассматриваем как линейную группу, имея в виду векторную модель.

#### 3.1. Некоторые основные понятия.

**Определение 3.1.** Группа движений  $H$  называется *приводимой*, если она оставляет инвариантной некоторую плоскость  $Y$ . В противном случае группа  $H$  называется *неприводимой*.

Отметим, что это определение не согласуется с обычным определением неприводимой линейной группы.

Согласно определению, приводимая группа содержится в группе  $G_Y$ , которая представляет собой прямое произведение группы  $G(Y)$  скольжений вдоль плоскости  $Y$  и группы  $G^Y \simeq O(N(Y))$  вращений вокруг  $Y$ .

Линейная группа  $H$  называется *алгебраической*, если она выделяется в полной линейной группе системой полиномиальных уравнений. Подгруппу конечного индекса алгебраической группы будем называть *квазиалгебраической*.

Группы всех движений сферы и евклидова пространства алгебраичны, а группа всех движений пространства Лобачевского квазиалгебраична. (Она является подгруппой индекса 2 алгебраической группы  $O_{n,1}$ .)

Линейная группа  $H$  называется *редуктивной (диагональной, унипотентной)*, если она вполне приводима (соответственно, записывается в некотором базисе диагональными, унитарными матрицами).

**Определение 3.2.** Разложение  $G = K \cdot A \cdot N$  линейной группы Ли  $G$  в произведение подгрупп Ли  $K, A, N$  называется *разложением Ивасава*, если

- 1) как многообразии  $G = K \times A \times N$ ;
- 2)  $K$  — компактная подгруппа,  $N$  — унипотентная подгруппа, а  $A$  — связная диагональная подгруппа, нормализующая  $N$ .

При этом автоматически  $K, A, N$  — максимальные компактная, связная диагональная и унипотентная подгруппы соответственно.

Известно, что любая квазиалгебраическая линейная группа допускает разложение Ивасава и любые два такие разложения сопряжены внутренними автоморфизмами. Любая квазиалгебраическая подгруппа  $G_1$  квазиалгебраической группы  $G$  допускает разложение Ивасава  $G_1 = K_1 \cdot A_1 \cdot N_1$ , согласованное с некоторым разложением Ивасава  $G = K \cdot A \cdot N$  группы  $G$  в том смысле, что

$$K_1 = K \cap G_1, \quad A_1 = A \cap G_1, \quad N_1 = N \cap G_1.$$

### 3.2. Критерий существования неподвижной точки.

**Теорема 3.3.** Пусть группа движений  $H$  пространства  $X$  имеет компактную орбиту  $K$ . В случае сферы предположим дополнительно, что орбита  $K$  лежит в некотором открытом полупространстве. Тогда группа  $H$  имеет неподвижную точку (и, следовательно, компактна).

**Следствие 1.** Любая компактная группа движений пространства  $X = E^n$  или  $L^n$  имеет неподвижную точку и, следовательно, приводима.

**Следствие 2.** Все максимальные компактные подгруппы полной группы движений сопряжены.

Теорема вытекает из следующей леммы.

**Лемма 3.4.** Пусть  $K \subset X$  — компактное множество, содержащееся в некотором открытом полупространстве. Тогда существует единственный замкнутый шар минимального радиуса, содержащий  $K$ .

Центр такого минимального шара, содержащего компактную орбиту  $K$  группы  $H$ , очевидно, является неподвижной точкой группы  $H$ .

◀ Для доказательства леммы достаточно проверить, что пересечение двух шаров радиуса  $r$  с центрами в точках  $A, B \in X$  содержится в шаре радиуса  $r' < r$  с центром в точке  $O$ , где  $O$  — середина отрезка  $AB$ . При этом в случае сферы можно считать, что  $r < \pi/2$ . Пусть точка  $C$  принадлежит пересечению таких шаров. Тогда в треугольнике  $ABC$  стороны  $AC$  и  $BC$  не больше  $r$ . Отсюда следует (теоремы 4.2 и 4.3 гл. 1), что медиана  $CO$  меньше  $r$ . ▶

**З а м е ч а н и е.** Теорема 3.3 и лемма 3.4 обобщаются на случай, когда  $X$  есть произвольное полное риманово многообразие, если в их формулировках заменить открытое полупространство на геодезически выпуклую область.

**3.3. Группы движений сферы.** Полная группа  $G = O_{n+1}$  движений сферы  $S^n$  компактна. Это определяет ряд особенностей групп движений сферы по сравнению с группами движений других пространств постоянной кривизны. Отметим, что существует много неприводимых групп движений сферы: любое неприводимое ортогональное представление  $\varphi: H \rightarrow O_{n+1}$  произвольной компактной группы  $H$  определяет неприводимую группу  $\varphi(H)$  движений сферы  $S^n$ . С другой стороны, существует, с точностью до сопряженности в группе  $G$ , только конечное число связных транзитивных групп  $H$  движений сферы  $S^n$  [27]. Все они перечислены в следующей таблице, где указан также стабилизатор  $H_x$  точки сферы в группе  $H$  и разложение его представления изотропии на неприводимые компоненты. Символом  $U^k$  обозначается тривиальный  $H_x$ -модуль размерности  $k$ , а символом  $V^k$  — неприводимый  $H_x$ -модуль размерности  $k$ .

$n$	$H$	Стабилизатор	Представление изотропии
$m-1$	$SO_m$	$SO_{m-1}$	$V^{m-1}$
$2m-1$	$U_m$	$U_{m-1}$	$U^1 \oplus V^{2(m-2)}$
$2m-1$	$SU_m$	$SU_{m-1}$	$U^1 \oplus V^{2(m-2)}$
$4m-1$	$Sp_1 \cdot Sp_m$	$Sp_1 \cdot Sp_{m-1}$	$V^2 \oplus V^{4(m-1)}$
$4m-1$	$SO_2 \cdot Sp_m$	$SO_2 \cdot Sp_{m-1}$	$U^1 \oplus V^2 \oplus V^{4(m-1)}$
$4m-1$	$Sp_m$	$Sp_{m-1}$	$U^2 \oplus V^{4(m-1)}$
15	$Spin_9$	$Spin_7$	$V^7 \oplus V^8$
7	$Spin_7$	$G_2$	$V^7$
6	$G_2$	$SU_3$	$V^6$

Следствие. 1) Группы  $SO_m$ ,  $Spin_7$ ,  $G_2$  являются единственными транзитивными группами движений сферы с неприводимым представлением изотропии.

2) Группа  $SO_2$  движений сферы  $S^1$  и группа  $SU_2$  движений сферы  $S^3$  являются единственными просто транзитивными группами движений сфер.

**3.4. Группы движений евклидова пространства.** Полная группа движений  $G$  евклидова пространства  $E^n$  обладает нормальной подгруппой параллельных переносов, которую можно рассматривать как векторную группу ассоциированного с  $E^n$  евклидова векторного пространства  $V$ . Всякая точка  $x \in E^n$  определяет изоморфизм  $\varphi_x: O(V) \rightarrow G_x$  ортогональной группы  $O(V)$  на стабилизатор  $G_x$  точки  $x$ , при котором  $\varphi_x(A)$  есть движение с линейной частью  $A$ . Группа  $G_x$  является максимальной компактной подгруппой группы  $G$ , а  $V$  — (единственной) максимальной унипотентной подгруппой. Разложение Иваса́вы группы  $G$  имеет вид  $G = G_x V$ . Отсюда следует (см. п. 3.1), что любая связная алгебраическая подгруппа  $H$  группы  $G$  имеет вид  $H = K \cdot U$ , где  $K$  — подгруппа некоторого стабилизатора  $G_x$ , а  $U \subset V$  —  $K$ -инвариантное подпространство. Для неалгебраических подгрупп это может быть не так, но переход к алгебраическому замыканию позволяет получить следующие результаты;

Теорема 3.5 (см., например, [19]). Пусть  $H$  — связная группа движений евклидова пространства  $E^n$ .

1) Если группа  $H$  неприводима, то она действует в  $E^n$  транзитивно, а в общем случае имеет орбиту, являющуюся плоскостью.

2) Если группа  $H$  редуцируема, то она сохраняет некоторую точку и, следовательно, компактна.

3) Группа  $H$  допускает разложение  $H = K \cdot F$ , где  $K$  — компактная подгруппа, а  $F$  — свободно действующая метабелева нормальная подгруппа. В частности, если  $H$  транзитивна, то  $F$  просто транзитивна.

Структура просто транзитивных групп движений описывается следующим образом. Пусть  $V = U \oplus W$  — ортогональное разложение пространства  $V$ . Произвольный гомоморфизм  $\psi: U \rightarrow O(W)$  определяет коммутативную группу  $U^\psi = \{\varphi_x(\psi(u))u : u \in U\}$  винтовых движений и просто транзитивную группу  $F = U^\psi W$ . Любая просто транзитивная группа получается такой конструкцией. Аналогичным образом описываются произвольные свободно действующие группы движений.

**3.5. Группы подобий.** Особенностью евклидова пространства, выделяющей его не только среди других пространств постоянной кривизны, но и среди всех полных римановых многообразий, является наличие в нем существенных подобий — преобразований, изменяющих расстояние между точками в  $\lambda$  раз, где  $\lambda = \text{const} \neq 1$ . Любое существенное подобие  $g$  евклидова пространства имеет единственную неподвижную точку  $x$  и разлагается в произведение гомотетии с центром в точке  $x$  и вращения вокруг  $x$ .

Группа подобий, не являющаяся группой движений, называется *существенной*. Связная существенная группа подобий  $P$  допускает разложение  $P = A \cdot H$ , где  $A$  — однопараметрическая группа существенных подобий, а  $H$  — нормальная подгруппа, состоящая из движений.

**Теорема 3.6.** Связная существенная группа подобий  $P$  евклидова пространства допускает разложение

$$P = A \cdot K \cdot F,$$

где  $A$  — однопараметрическая группа существенных подобий, сохраняющая некоторую точку  $x$ ,  $K$  — коммутирующая с  $A$  группа вращений вокруг точки  $x$ ,  $F$  — свободно действующая нормальная подгруппа. При этом нормальная подгруппа  $H = K \cdot F$  состоит из всех движений группы  $P$ , а орбитой  $Px$  точки  $x$  является плоскость, на которой группа  $F$  действует просто транзитивно.

◀ Искомое разложение строится из указанного выше разложения  $P = A \cdot H$  группы  $P$  и разложения  $H = K \cdot F$  группы движений, описанного в теореме 3.5. Возможность выбора группы  $A$  так, чтобы она коммутировала с  $K$ , следует из полной приводимости компактной группы  $K$ . ▶

**3.6. Группы движений пространства Лобачевского.** Пусть  $G \simeq O_{n,1}$  — группа движений пространства Лобачевского  $L^n$ , рассматриваемого в векторной модели, а  $G_a$  — стабилизатор произвольного вектора  $a \neq 0$  пространства  $R^{n,1}$ . Группа  $G_a$  изоморфна  $O_n$ ,  $O_{n-1} \cdot R^n$  или  $O'_{n-1,1}$ , если  $(a, a) > 0$ ,  $(a, a) = 0$  или  $(a, a) < 0$ , соответственно, а орбиты группы  $G_a$  в пространстве  $L^n$ , отличные от точек, суть стандартные гиперповерхности — плоскости, сферы, орисферы и эквидистанты (см. гл. 4). Группа  $G_a^+ = G_a \cap \text{Isom}_+ L^n$  является максимальной связной подгруппой группы  $G$ , если вектор  $a$  неизотропен. Для изотропного вектора

$u$  группа  $G_u^+$  содержится в единственной максимальной связной подгруппе группы  $G$ . Эта подгруппа имеет вид  $G_p^+ = G_p \cap \text{Isom}_+ \mathbb{L}^n$ , где группа  $G_p$  состоит из всех движений  $g \in G$ , сохраняющих бесконечно удаленную точку  $p = \langle u \rangle \in \partial \mathbb{L}^n$ .

Группа  $G_p$ ,  $p = \langle u \rangle \in \partial \mathbb{L}^n$ , действует транзитивно в пространстве  $\mathbb{L}^n$ , а орбитами ее нормальной подгруппы  $G_u$  являются орисферы  $H_u^c$ , причем группа  $G_u$  действует на них как полная группа движений (относительно индуцированной евклидовой метрики). Обозначим через  $N_p$  нормальную подгруппу группы  $G_p$ , действующую на орисферах как группа параллельных переносов. Группа  $N_p$  называется *орисферической подгруппой* группы  $G$ , ассоциированной с точкой абсолюта  $p$ .

Разложение Ивасава группы  $G$  определяется выбором ориентированной прямой  $l$  и точки  $x \in l$  и имеет вид

$$G = G_x \cdot A_l \cdot N_p,$$

где  $p \in \partial \mathbb{L}^n$  — бесконечно удаленная точка прямой  $l$ , а  $A_l$  — однопараметрическая группа сдвигов вдоль прямой  $l$ .

Это разложение индуцирует разложение Ивасава максимальной подгруппы  $G_p$ :

$$G_p^+ = G^l \cdot A_l \cdot N_p,$$

где  $G^l \simeq O_{n-1}$  — группа вращений вокруг прямой  $l$ . Группа  $G^l$  совпадает с централизатором группы  $A_l$  в группе  $G_x$ , а орисферическая подгруппа  $N_p \simeq \mathbb{R}^{n-1}$  является нормальной подгруппой группы  $G_p$ .

Касательные алгебры Ли  $L(H)$  определенных выше групп Ли  $H$  описываются следующим образом:

Пусть  $u, v$  — изотропные векторы, представляющие бесконечно удаленные точки прямой  $l$ , причем  $(u, v) = -1$  и  $U = \langle u, v \rangle^\perp$ . Тогда в обозначениях п. 2.4

$$L(N_p) = u \wedge U, \quad L(A_l) = \langle u \wedge v \rangle,$$

$$L(G^l) = \mathfrak{so}(U), \quad L(G_p) = L(G^l) + L(A_l) + L(N_p).$$

Опишем действие группы  $G$  и ее максимальных подгрупп на абсолюте. Напомним (см. гл. 2), что на абсолюте определена конформная структура (т. е. конформный класс римановых метрик) и группа  $G$  действует на нем как полная группа конформных преобразований. Поскольку стабилизатором точки  $p \in \partial \mathbb{L}^n$  является группа  $G_p$ , абсолют отождествляется с факторпространством  $G/G_p$ . Дополнение  $E_p$  точки  $p$  в  $\partial \mathbb{L}^n$  можно рассматривать как евклидово пространство. Евклидова метрика в  $E_p$  (определенная с точностью до пропорциональности) индуцируется метрикой орисферы  $H_u^1$ ,  $p = \langle u \rangle$ , при проектировании  $\hat{f}: H_u^- \rightarrow E_p$  вдоль прямых параболического пучка  $B_u$  (см. рис. 43). Группа  $G_p$  (соответственно  $G_u$ ) действует в евклидовом пространстве  $E_p$  транзитивно как полная группа подобий (соответственно движений), а орисферическая подгруппа  $N_p$  — как группа параллельных переносов.

Рассмотрим теперь группу  $G_e$ , сохраняющую вектор  $e$  с

$(e, e) = 1$ . Она имеет на абсолюте  $\partial L^n$  три орбиты: замкнутую орбиту  $S$  коразмерности один и открытые орбиты  $M^+$ ,  $M^-$ . Орбита  $S$  является гиперсферой конформного пространства  $\partial L^n$  и состоит из всех бесконечно удаленных точек любой из эквидистант  $H_e^c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Группа  $G_e$  действует на  $S$  как полная группа конформных преобразований. Орбиты  $M^+$ ,  $M^-$  являются полусферами с границей  $S$ . Проектирование гиперплоскости  $H_e$  вдоль прямых гиперболического пучка  $B_e$  задает диффеоморфизмы  $f_{\pm} : H_e \rightarrow M^{\pm}$ , перестановочные с действием группы  $G_e$ . Поэтому эти орбиты (как однородные пространства группы  $G_e$ ) являются пространствами постоянной отрицательной кривизны.

Наконец, стабилизатор  $G_x$  точки  $x \in L^n$  действует на абсолюте  $\partial L^n$  транзитивно. Центральное проектирование  $f$  сферы с центром в точке  $x$  на абсолюте  $\partial L^n$  вдоль прямых пучка  $B_x$  перестановочно с действием группы  $G_x$ . Поэтому как однородное пространство группы  $G_x$  абсолюте является пространством постоянной положительной кривизны.

**З а м е ч а н и е.** Обозначим через  $\eta(x)$   $G_x$ -инвариантную метрику постоянной кривизны 1 на абсолюте, индуцированную метрикой сферы  $H_x^{Y^2}$  при диффеоморфизме  $f$ . отображение  $x \mapsto \eta(x)$  устанавливает биекцию между точками пространства Лобачевского и римановыми метриками постоянной кривизны 1 на абсолюте, подчиненными конформной структуре.

Опишем структуру произвольных связанных групп движений пространства Лобачевского  $L^n$ .

**Т е о р е м а 3.7. 1)** Любая связная редуцируемая группа движений  $H$  пространства  $L^n$  имеет вид  $H = G_+(Y) \times K$ , где  $G_+(Y)$  — группа собственных скольжений вдоль некоторой плоскости  $Y$ , а  $K$  — некоторая связная группа вращений вокруг  $Y$ .

**2)** Любая нередуцируемая группа  $H$  движений пространства  $L^n$  сохраняет некоторую точку  $p$  абсолюта и, следовательно, содержится в группе  $G_p$ , изоморфной группе подобий евклидова пространства  $E^{n-1}$ .

**С л е д с т в и е.** Пусть  $H$  — собственная связная подгруппа группы  $G$ .

**1)** Группа  $H$  неприводима тогда и только тогда, когда она сохраняет некоторую точку  $p$  абсолюта и действует в евклидовом пространстве  $E_p = \partial L^n \setminus \{p\}$  транзитивно.

**2)** Группа  $H$  транзитивна тогда и только тогда, когда она сохраняет точку  $p$  абсолюта и действует в евклидовом пространстве  $E_p$  как транзитивная существенная группа подобий. В частности, всякая транзитивная группа движений неприводима.

◀ **Утверждение 1)** теоремы следует из одной общей теоремы Карпелевича [28]. Пусть  $H$  — нередуцируемая группа. Группа  $H$  оставляет инвариантным некоторое параболическое подпространство в  $\mathbb{R}^{n,1}$ , а тем самым и его ядро, являющееся одномерным изотропным подпространством  $p = \langle u \rangle$ . Это доказывает 2). ▶

## ОСТРОУГОЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Остроугольные многогранники изучались в связи с дискретными группами, порожденными отражениями (см. главу 6 второй статьи настоящего тома). Однако законченность полученных результатов позволяет выделить их в самостоятельную теорию, в которой очень ярко проявляется своеобразие геометрии Лобачевского.

## § 1. Основные свойства остроугольных многогранников

1.1. Общие сведения о выпуклых многогранниках. Согласно определению (см. определение 3.8 главы 1), всякий выпуклый многогранник  $P$  является пересечением конечного числа полупространств:

$$P = \bigcap_{i=1}^s H_i^- \quad (1)$$

(Здесь  $H_i^-$  — полупространство, ограничиваемое гиперплоскостью  $H_i$ .) Всегда можно считать, что ни одно из полупространств  $H_i^-$  не содержит пересечения остальных. В дальнейшем мы будем предполагать это без специальных оговорок. При этом условия полупространства  $H_i^-$  определяют многогранником  $P$  однозначно. Про каждую из гиперплоскостей  $H_i$  говорят, что она ограничивает многогранник  $P$ .

В модели Клейна  $K^n$  пространства Лобачевского  $L^n$  всякий выпуклый многогранник  $P \subset L^n$  представляет собой пересечение с шаром  $K^n$  некоторого выпуклого многогранника  $\hat{P}$ , ограниченного тем же числом гиперплоскостей, в объемлющем евклидовом пространстве. Многогранник  $P$  ограничен (соответственно имеет конечный объем) в пространстве  $L^n$  тогда и только тогда, когда  $\hat{P} \subset K^n$  (соответственно  $\hat{P} \subset \bar{K}^n$ ). Эти соображения позволяют механически переносить некоторые теоремы о выпуклых многогранниках в евклидовом пространстве на выпуклые многогранники в пространстве Лобачевского.

В частности, согласно теореме Вейля — Минковского, ограниченные выпуклые многогранники в евклидовом пространстве — это в точности выпуклые оболочки конечного числа точек. Отсюда следует, что ограниченные выпуклые многогранники (соотв. выпуклые многогранники конечного объема) в пространстве Лобачевского — это выпуклые оболочки конечного числа точек (соответственно конечного числа обычных или бесконечно удаленных точек).

Выпуклый многогранник называется *вырожденным*, если он является конусом с вершиной в обычной или (в случае  $X = L^n$ ) бесконечно удаленной точке, или если ограничивающие его

гиперплоскости перпендикулярны одной гиперплоскости. невырожденность сферического многогранника означает, что он не содержит диаметрально противоположных точек. Всякий выпуклый многогранник конечного объема в пространстве Евклида или Лобачевского невырожден.

**1.2. Матрица Грама** выпуклого многогранника. Каждому выпуклому многограннику  $P$  в  $n$ -мерном пространстве постоянной кривизны  $X$  можно сопоставить некоторую матрицу, которая в случаях  $X=S^n$  или  $L^n$ , как правило, однозначно характеризует многогранник  $P$  с точностью до движения. Этим достигается полезная алгебраизация в изучении выпуклых многогранников.

Обозначим через  $V$  одно из следующих векторных пространств:

в случае  $X=E^n$  — евклидово пространство  $R^n$  в аффинной модели пространства  $E^n$ ,

в случае  $X=S^n$  — евклидово пространство  $R^{n+1}$  в векторной модели пространства  $S^n$ ,

в случае  $X=L^n$  — псевдоевклидово пространство  $R^{n,1}$  в векторной модели пространства  $L^n$ .

Будем считать, что многогранник  $P$  представлен в виде (1), и для каждого  $i$  рассмотрим единичный вектор  $e_i$  пространства  $V$ , ортогональный гиперплоскости  $H_i$  и направленный от  $P$ . В случаях  $X=S^n$  или  $L^n$  это означает, что многогранник  $P$  есть пересечение с  $X$  выпуклого многогранного конуса

$$K(P) = \{x \in V : (x, e_i) \leq 0, i = 1, \dots, s\} \quad (2)$$

в пространстве  $V$ .

**Определение 1.1.** Матрица Грама системы векторов  $\{e_1, \dots, e_s\}$  называется *матрицей Грама многогранника  $P$*  и обозначается через  $G(P)$ .

Диагональные элементы матрицы  $G(P)$  равны 1, а недиагональные элементы определяются попарным взаимным расположением полупространств  $H_1^-, \dots, H_s^-$  в соответствии с п. 1.9 главы 4.

В случае  $X=E^n$  матрица  $G(P)$  — положительно полуопределенная ранга  $\leq n$ . Многогранник  $P$  невырожден тогда и только тогда, когда  $\text{rk } G(P) = n$ . Матрица  $G(P)$  определяет систему векторов  $\{e_1, \dots, e_s\}$  с точностью до ортогонального преобразования и, тем самым, многогранник  $P$  — с точностью до движения и до параллельного переноса ограничивающих его гиперплоскостей.

В случае  $X=S^n$  матрица  $G(P)$  — положительно полуопределенная ранга  $\leq n+1$ . Многогранник  $P$  невырожден тогда и только тогда, когда  $\text{rk } G(P) = n+1$ . Матрица  $G(P)$  определяет систему векторов  $\{e_1, \dots, e_s\}$  с точностью до ортогонального преобразования и, тем самым, многогранник  $P$  — с точностью до движения.

В случае  $X = L^n$  матрица  $G(P)$  — либо неопределенная ранга  $\leq n+1$  (с отрицательным индексом инерции 1), либо положительно полуопределенная ранга  $\leq n$ . Многогранник  $P$  невырожден тогда и только тогда, когда  $\text{rk } G(P) = n+1$ . За исключением случая, когда матрица  $G(P)$  положительно полуопределенна и вырожденна, она определяет систему векторов  $\{e_1, \dots, e_s\}$  с точностью до псевдоортогонального преобразования и, тем самым, многогранник  $P$  — с точностью до движения и до перехода к многограннику, ограниченному теми же гиперплоскостями, но содержащемуся в пересечении противоположных полупространств, если таковой существует. (Последняя возможность происходит от того, что группа движений пространства  $L^n$  не совпадает с группой всех псевдоортогональных преобразований пространства  $V$ , а является ее подгруппой индекса 2.) В частности, если многогранник  $P$  имеет конечный объем, то матрица Грама определяет его (среди всех выпуклых многогранников) однозначно с точностью до движения.

### 1.3. Остроугольные семейства полупространств и остроугольные многогранники

Определение 1.2. Семейство полупространств  $\{H_1^-, \dots, H_s^-\}$  называется *остроугольным*, если для любых различных  $i, j$  либо гиперплоскости  $H_i$  и  $H_j$  пересекаются и двугранный угол  $H_i^- \cap H_j^-$  не превосходит  $\frac{\pi}{2}$ , либо  $H_i^+ \cap H_j^+ = \emptyset$ . Выпуклый многогранник (1) называется *остроугольным*, если  $\{H_1^-, \dots, H_s^-\}$  — остроугольное семейство полупространств.

Имеют место следующие свойства наследственности.

Теорема 1.3. Если  $\{H_1^-, \dots, H_s^-\}$  — остроугольное семейство полупространств, то для любых  $i_1, \dots, i_t$  пересечения полупространств  $H_{i_1}^-, \dots, H_{i_t}^-$  с плоскостью  $Y = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_t}$ , отличные от  $Y$ , образуют остроугольное семейство полупространств в пространстве  $Y$ , причем угол между любыми двумя пересекающимися гиперплоскостями  $H_j \cap Y$  и  $H_k \cap Y$  пространства  $Y$  не превосходит угла между  $H_j$  и  $H_k$ . Если  $P = \bigcap_{i=1}^s H_i^-$  имеет непустую внутренность в  $X$ , то  $P \cap Y$  имеет непустую внутренность в  $Y$ .

◀ Индуктивное рассуждение позволяет свести доказательство к случаю  $t=1$ . Пусть  $Y = H_i$  и пусть  $H_j \cap H_i$  и  $H_k \cap H_i$  — пересекающиеся гиперплоскости пространства  $H_i$ . Докажем, что угол между ними (в пространстве  $H_i$ ) не превосходит угла между  $H_j$  и  $H_k$ . Для этого сделаем сечение трехмерной плоскостью, ортогональной  $H_i \cap H_j \cap H_k$ . Доказываемое утверждение сведется тогда к утверждению о том, что плоский угол остроугольного трехгранного угла в трехмерном пространстве не превосходит противолежащего ему двугранного угла, а это легко следует, например, из формул сферической тригонометрии.

Последнее утверждение теоремы в случае  $Y=H_i$  вытекает из того очевидного соображения, что проекция  $P$  на  $H_i$  содержится в  $P$  (достаточно проверить это при  $s=2$ ). ►

Согласно определению, выпуклый многогранник (1) является остроугольным, если для любых различных  $i, j$ , таких, что гиперплоскости  $H_i$  и  $H_j$  пересекаются, двугранный угол  $H_i^- \cap H_j^-$  не превосходит  $\frac{\pi}{2}$ . При этом речь идет априори не только о двугранных углах при  $(n-2)$ -мерных гранях многогранника  $P$ , так как априори не исключена ситуация, когда гиперплоскости  $H_i$  и  $H_j$  пересекаются, но  $(n-1)$ -мерные грани  $F_i = H_i \cap P$  и  $F_j = H_j \cap P$  не являются смежными. Однако предыдущая теорема показывает, что в действительности для остроугольных многогранников такая ситуация невозможна.

Возникает вопрос, нельзя ли уже в определении остроугольных многогранников ограничиться двугранными углами при  $(n-2)$ -мерных гранях. Положительный ответ на этот вопрос дается следующей теоремой, которую, однако, читатель может игнорировать, так как она несущественна для всего дальнейшего изложения.

**Теорема 1.4** (Е. М. Андреев, [23]). Если двугранные углы при всех  $(n-2)$ -мерных гранях выпуклого многогранника  $P$  не превосходят  $\frac{\pi}{2}$ , то гиперплоскости его несмежных  $(n-1)$ -мерных граней не пересекаются и, следовательно, многогранник  $P$  является остроугольным.

Теорема 1.3 показывает, что каждая грань остроугольного многогранника  $P$  также является остроугольным многогранником, причем ее двугранные углы не превосходят соответствующих двугранных углов многогранника  $P$ .

#### 1.4. Остроугольные многогранники на сфере и в евклидовом пространстве.

**Теорема 1.5.** Всякий невырожденный остроугольный многогранник  $P$  на сфере  $S^n$  (соответственно в евклидовом пространстве  $E^n$ ) является симплексом (соответственно прямым произведением некоторого числа симплексов и симплициального конуса).

Последнее означает, что пространство  $E^n$  может быть разложено в прямое произведение  $E^{n_0} \times E^{n_1} \times \dots \times E^{n_k}$  ( $n_0 \geq 0$ ,  $n_1, \dots, n_k > 0$ ,  $n_0 + n_1 + \dots + n_k = n$ ) таким образом, что  $P = P_0 \times P_1 \times \dots \times P_k$ , где  $P_0$  — симплициальный конус в пространстве  $E^{n_0}$ , а  $P_1, \dots, P_k$  — симплексы в пространствах  $E^{n_1}, \dots, E^{n_k}$  соответственно.

Эта теорема вытекает из следующей простой леммы (доказательство которой см., например, в [35]).

**Лемма 1.6.** Всякая система векторов  $\{e_1, \dots, e_s\}$  евклидова векторного пространства, удовлетворяющая условию

$$(e_i, e_j) \leq 0 \text{ при } i \neq j,$$

является объединением некоторого числа попарно ортогональных подсистем, каждая из которых либо линейно независима, либо связана единственной (с точностью до пропорциональности) линейной зависимостью, имеющей положительные коэффициенты.

Поскольку симплицальный конус в  $E^n$  отсекает на сфере  $S^{n-1}$  (с центром в вершине конуса) симплекс с такими же двугранными углами, для описания всех остроугольных многогранников на сфере и в евклидовом пространстве остается описать остроугольные симплексы. Это удобно сделать в терминах их матриц Грама.

Квадратная матрица  $A$  называется *разложимой*, если путем некоторой перестановки строк и такой же перестановки столбцов она может быть приведена к виду  $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — квадратные матрицы. Легко видеть, что матрица Грама евклидова симплекса неразложима.

**Теорема 1.7.** Всякая положительно определенная (соответственно вырожденная неразложимая положительно полуопределенная) симметричная матрица с единицами на диагонали и неположительными элементами вне диагонали является матрицей Грама некоторого сферического (соответственно евклидова) симплекса, определенного однозначно с точностью до движения (соответственно с точностью до подобия).

◀ Доказательство этой теоремы немедленно вытекает из леммы 1.6 и того факта, что всякая положительно полуопределенная симметричная матрица является матрицей Грама некоторой системы векторов евклидова пространства. ▶

**1.5. Простота остроугольных многогранников.** Из того, что всякий невырожденный остроугольный сферический многогранник является симплексом, вытекает одно ограничение на комбинаторное строение остроугольного многогранника в любом пространстве постоянной кривизны.

Выпуклый многогранник  $P$  называется *простым в своей  $(n-k)$ -мерной грани  $F$* , если эта грань содержится ровно в  $k$  (т. е. в наименьшем возможном числе)  $(n-1)$ -мерных граней. В этом случае он прост также в любой грани, содержащей  $F$ . Многогранник  $P$  называется *простым*, если он прост в каждой своей грани. Очевидно, что для ограниченных многогранников достаточно требовать простоты в вершинах.

**Теорема 1.8.** Всякий остроугольный многогранник  $P$  является простым.

◀ Пусть, например,  $p$  — вершина многогранника  $P$ . Рассмотрим пересечение  $P$  с достаточно малой сферой с центром в точке  $p$ . Это будет невырожденный остроугольный сферический многогранник и, следовательно, — симплекс. Последнее как раз и означает, что многогранник  $P$  прост в вершине  $p$ . ▶

## § 2. Остроугольные многогранники в пространстве Лобачевского

**2.1. Описание в терминах матриц Грама.** Ввиду того, что комбинаторное строение остроугольных многогранников в пространствах Лобачевского может быть сложным, их описание в терминах матриц Грама требует исследования специальных систем линейных неравенств.

Назовем семейство гиперплоскостей *неразложимым*, если оно не может быть разбито на два непустых перпендикулярных друг другу подсемейства, и *невыврожденным*, если входящие в него гиперплоскости не имеют общей обычной или бесконечно удаленной точки и не перпендикулярны одной гиперплоскости.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\{H_1^-, \dots, H_s^-\}$  — остроугольное семейство полупространств пространства  $L^n$ , причём семейство гиперплоскостей  $\{H_1, \dots, H_s\}$  неразложимо и невырожденно. Положим

$$P^- = \bigcap_{i=1}^s H_i^-, \quad P^+ = \bigcap_{i=1}^s H_i^+.$$

Тогда имеет место один из следующих двух случаев:

- 1)  $P^-$  имеет непустую внутренность, а  $P^+$  пусто;
- 2)  $P^+$  имеет непустую внутренность, а  $P^-$  пусто.

◀ Пользуясь векторной моделью, рассмотрим такие единичные векторы  $e_1, \dots, e_s \in \mathbb{R}^{n,1}$ , что

$$H_i^- = \{x \in L^n : (x, e_i) \leq 0\}.$$

Пусть  $G = (g_{ij})$  — их матрица Грама. По условию она неразложима и имеет ранг  $n+1$  и, следовательно, сигнатуру  $(n, 1)$ . Пусть  $\lambda < 0$  — ее наименьшее собственное значение. Тогда  $1 - \lambda$  есть наибольшее собственное значение матрицы  $E - G$ , имеющей неотрицательные элементы. По теореме Перрона—Фробениуса (см., например, [26]), ему отвечает собственный вектор  $c = (c_1, \dots, c_s)$  с положительными координатами. Рассмотрим вектор

$$v = \sum_{j=1}^s c_j e_j \in \mathbb{R}^{n,1}.$$

Имеем

$$(v, e_i) = \sum_{j=1}^s g_{ij} c_j = \lambda c_i < 0 \text{ при всех } i,$$

$$(v, v) = \sum_{j=1}^s c_j (v, e_j) < 0,$$

откуда следует, что либо  $v \in C^+$  и  $v_0 = \frac{v}{\sqrt{|(v, v)|}}$  — внутренняя

точка множества  $P^-$ , либо  $v \in C^-$  и  $v_0$  — внутренняя точка множества  $P^+$ . Пусть для определенности имеет место первый случай и пусть  $x \in P^+$ . Тогда

$$(v, x) = \sum_{j=1}^s c_j (e_j, x) > 0,$$

что невозможно, так как  $v, x \in C^+$ . Следовательно,  $P^+ = \emptyset$ . ►

Выпуклый многогранник в пространстве  $L^n$  назовем *неразложимым*, если семейство ограничивающих его гиперплоскостей неразложимо или, что то же самое, если его матрица Грама неразложима. Для невырожденного многогранника это равносильно отсутствию грани, перпендикулярной всем не содержащим ее  $(n-1)$ -мерным граням. Всякий выпуклый многогранник конечного объема неразложим.

Из теоремы 2.1 вытекает (см. п. 1.2)

**Теорема 2.2.** Всякая неразложимая симметричная матрица сигнатуры  $(n, 1)$  с единицами на диагонали и неположительными элементами вне диагонали является матрицей Грама некоторого выпуклого многогранника в пространстве  $L^n$ , определенного однозначно с точностью до движения.

**2.2. Комбинаторное строение.** Пусть  $P \subset L^n$  — выпуклый многогранник. Каждой его грани  $F$  сопоставим главную подматрицу  $G^F$  матрицы  $G(P)$ , образованную строками и столбцами, соответствующими тем  $(n-1)$ -мерным граням многогранника  $P$ , которые содержат  $F$ . Из последнего утверждения теоремы 1.3 следует

**Теорема 2.3.** Если  $P$  — остроугольный многогранник, то отображение  $F \rightarrow G^F$  устанавливает биекцию между множеством всех граней многогранника  $P$  и множеством всех положительно определенных главных подматриц матрицы  $G(P)$ .

Таким образом, главные подматрицы матрицы  $G(P)$ , отвечающие граням многогранника  $P$ , характеризуются своими внутренними свойствами. Аналогичная характеристика может быть получена для главных подматриц, отвечающих (в аналогичном смысле) бесконечно удаленным вершинам.

**Определение 2.4.** Бесконечно удаленная точка  $p \in \partial L^n$  называется *бесконечно удаленной вершиной* выпуклого многогранника  $P \subset L^n$ , если  $p \in P$  и пересечение  $P$  с любой достаточно малой орисферой  $S_p$  с центром в точке  $p$  является ограниченным подмножеством этой орисферы как  $(n-1)$ -мерного евклидова пространства.

Очевидно, что  $P \cap S_p$  — выпуклый многогранник, двугранные углы которого равны соответствующим двугранным углам многогранника  $P$ . В частности, если  $P$  — остроугольный многогранник, то  $P \cap S_p$  — также остроугольный многогранник и, следовательно, — прямое произведение симплексов. Таким образом, остроугольный многогранник в окрестности любой своей

бесконечно удаленной вершины имеет комбинаторное строение конуса над прямым произведением симплексов.

Симметричную матрицу с неположительными элементами вне диагонали назовем *параболической*, если путем некоторой перестановки строк и такой же перестановки столбцов она может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & A_k \end{pmatrix}$$

где  $A_1, \dots, A_k$  — вырожденные неразложимые положительно полуопределенные матрицы.

Из предыдущего следует, что если  $P$  — остроугольный многогранник и  $p$  — его бесконечно удаленная вершина, то матрица  $G^p$  является параболической.

**Теорема 2.5.** Если  $P$  — остроугольный многогранник, то отображение  $p \rightarrow G^p$  устанавливает биекцию между множеством всех бесконечно удаленных вершин многогранника  $P$  и множеством всех параболических главных подматриц ранга  $n-1$  матрицы  $G(P)$ .

Доказательство см., например, в [24].

**2.3. Описание в терминах двугранных углов.** Выпуклый (в частности, остроугольный)  $k$ -угольник на плоскости Лобачевского с углами  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  существует тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k < \pi(k-2).$$

(см. п. 2.5 главы 3); при этом он зависит (с точностью до движения) от  $k-3$  параметров. Совершенно иная ситуация имеет место в больших размерностях.

Назовем *комбинаторным типом* выпуклых многогранников конечного объема в пространстве  $L^n$  совокупность всех таких многогранников, замыкания которых в  $\bar{L}^n$  комбинаторно изоморфны какому-либо заданному ограниченному выпуклому многограннику  $Q$  в пространстве  $E^n$ . Комбинаторный тип назовем *простым*, если многогранник  $Q$  прост, и *почти простым*, если многогранник  $Q$  в окрестности любой своей вершины имеет комбинаторное строение конуса над прямым произведением симплексов.

**Теорема 2.6** (Е. М. Андреев, [21]). Ограниченный остроугольный многогранник в пространстве  $L^n$  при  $n \geq 3$  однозначно с точностью до движения определяется своим комбинаторным типом и двугранными углами.

Доказательство этой теоремы легко сводится к трехмерному случаю. В этом случае она доказывается аналогично теореме Коши о единственности ограниченного евклидова многогранника с данной разверткой. Более того, теорема 2.6 может

рассматриваться как двойственная (для случая остроугольных многогранников) к гиперболическому аналогу теоремы Коши. Примечательно, что евклидов аналог теоремы 2.6 неверен.

По-видимому, теорема 2.6 верна и для неограниченных многогранников конечного объема.

Перейдем теперь к вопросу о существовании остроугольного многогранника с заданными двугранными углами. Удовлетворительное решение этого вопроса имеется только в двумерном и трехмерном случаях, где условия существования выражаются простыми неравенствами.

**Теорема 2.7** (Е. М. Андреев, [21]). Для существования в пространстве  $L^3$  ограниченного остроугольного многогранника заданного простого комбинаторного типа, отличного от тетраэдра и треугольной призмы, с заданными двугранными углами необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) если какие-либо три грани сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними больше  $\pi$ ;

2) если какие-либо три грани попарно смежны, но не сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними меньше  $\pi$ ;

3) если какие-либо четыре грани смежны «по кругу» (как боковые грани четырехугольной призмы), то не все углы между ними равны  $\frac{\pi}{2}$ .

В случае треугольной призмы нужно дополнительно потребовать, чтобы не все углы, образуемые основаниями с боковыми гранями, были равны  $\frac{\pi}{2}$ , а в случае тетраэдра — чтобы определитель матрицы Грама (которая в этом случае полностью определяется двугранными углами) был отрицателен.

◀ Необходимость указанных условий почти очевидна. Если искомым многогранник существует, то двугранные углы, о которых идет речь в первом (соответственно во втором) условии, равны углам треугольника, высекаемого плоскостями рассматриваемых трех граней на ортогональной им всем сфере (соответственно плоскости) и потому сумма этих углов больше  $\pi$  (соответственно меньше  $\pi$ ). Если все двугранные углы, о которых идет речь в третьем условии, равны  $\frac{\pi}{2}$ , то главная подматрица матрицы Грама, соответствующая рассматриваемым четырем граням, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & -b & 1 \end{pmatrix}, a, b > 1,$$

и ее отрицательный индекс инерции равен двум, что невозможно. ▶

Достаточность указанных условий может рассматриваться как теорема, двойственная (для случая остроугольных много-

гранников) гиперболическому аналогу теоремы А. Д. Александрова [18] о существовании ограниченного евклидова многогранника с данной разверткой. Ее доказательство использует основные идеи доказательства теоремы А. Д. Александрова и некоторые дополнительные соображения.

Теорема 2.8 (Е. М. Андреев, [22]). Для существования в пространстве  $L^3$  остроугольного многогранника конечного объема заданного почти простого комбинаторного типа, отличного от тетраэдра и треугольной призмы, с заданными двугранными углами необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) если в какой-либо вершине сходятся три грани, то сумма углов между ними больше или равна  $\pi$ ;

2) если в какой-либо вершине сходятся четыре грани, то все углы между ними равны  $\frac{\pi}{2}$ ;

3) если какие-либо три грани попарно смежны, но не сходятся в одной вершине, то сумма углов между ними меньше  $\pi$ ;

4) если какая-либо грань  $F_i$  смежна с гранями  $F_j$  и  $F_k$ , а грани  $F_j$  и  $F_k$  не смежны, но имеют общую вершину, не принадлежащую  $F_i$ , то хотя бы один из углов, образуемых гранью  $F_i$  с гранями  $F_j$  и  $F_k$ , не равен  $\frac{\pi}{2}$ ;

5) если какие-либо четыре грани смежны по кругу, но не сходятся в одной вершине, то не все углы между ними равны  $\frac{\pi}{2}$ .

Дополнительные условия в случаях тетраэдра и треугольной призмы — такие же, как для ограниченных многогранников.

## Глава 7

### ОБЪЕМЫ

Все известные в настоящее время результаты об объемах тел на сфере и в пространстве Лобачевского либо содержались в классических работах Н. И. Лобачевского [29], [30] и Шлефли [43], либо основываются на идеях этих работ. (Из более современных работ на эту тему отметим работы Кокстера [38] и Милнора [42].)

Мы попытались привести здесь эти результаты в наиболее законченной форме и указать наиболее ясные в идейном отношении их доказательства.

Как и в предыдущих главах, предполагается, если не оговорено противное, что все события разворачиваются в  $n$ -мерном пространстве постоянной кривизны, которое обозначается бук-

вой  $X$ . В некоторых формулах используется величина  $\varepsilon$ , которая по определению равна 1, если  $X=S^n$ , и  $-1$ , если  $X=L^n$ .

*Направляющим конусом* множества  $M$  в точке  $p$  в этой главе называется конус  $C_p(M) \subset T_p(X)$ , образуемый касательными лучами отрезков  $px$ ,  $x \in M$ .

*Угловой мерой* конуса в евклидовом векторном пространстве  $V$  называется объем множества, высекаемого им на единичной сфере. Угловая мера конуса  $C$  обозначается через  $\sigma(C)$ . В частности,  $\sigma(V)$  — это объем единичной сферы в пространстве  $V$ . Напомним, что объем единичной сферы в  $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве равен

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!}, & n=2k, \\ \frac{2\pi^{k+1}}{k!}, & n=2k+1. \end{cases} \quad (1)$$

Если  $C \subset V$  — выпуклый конус, то через  $C^*$  обозначается *сопряженный* ему выпуклый конус

$$C^* = \{x \in V : (x, y) \geq 0 \text{ при всех } y \in C\}.$$

## § 1. Объемы секторов и клиньев

**1.1. Объемы секторов.** *Сферическим (шаровым) сектором* радиуса  $r$  называется часть шара  $B$  радиуса  $r$ , содержащая вместе с каждой точкой проходящий через нее радиус этого шара. Центральным углом сферического сектора  $Q$  называется конус  $C(Q) = C_p(Q) \subset T_p(X)$ , где  $p$  — центр шара  $B$  (см. обозначения в предисловии к этой главе).

Используя сферическое разложение пространства  $X$  (п. 3.1, гл. 4), легко получить следующую формулу для объема сферического сектора:

$$\text{vol } Q = \varphi(r) \sigma(C(Q)), \quad (2)$$

где

$$\varphi(r) = \begin{cases} \int_0^r \sin^{n-1} \xi d\xi, & X = S^n, \\ \frac{1}{n} r^n, & X = E^n, \\ \int_0^r \text{sh}^{n-1} \xi d\xi, & X = L^n. \end{cases}$$

Аналогично, в пространстве  $L^n$  *орисферическим сектором* будем называть часть оришара  $B$ , содержащую вместе с каждой точкой проходящий через нее радиус этого оришара. Пусть  $P(Q)$  — множество, высекаемое орисферическим сектором  $Q$  на орисфере  $S = \partial B$ . С помощью орисферического разложения пространства  $X$  получается формула

$$\text{vol } Q = \frac{1}{n-1} \text{vol } P(Q). \quad (3)$$

Наконец, *эквилистантным сектором* высоты  $h$  будем называть тело  $Q$ , образуемое перпендикулярами длины  $h$  к гиперплоскости  $H$ , восставленными (в одну сторону) в точках некоторого множества  $B(Q) \subset H$ , называемого основанием сектора  $Q$ . С помощью эквидистантного разложения пространства  $X$  получается формула

$$\text{vol } Q = \psi(h) \text{vol } B(Q), \quad (4)$$

где

$$\psi(h) = \begin{cases} \int_0^h \cos^{n-1} \xi d\xi, & X = S^n, \\ h, & X = E^n, \\ \int_0^h \text{ch}^{n-1} \xi d\xi, & X = \mathbb{L}^n. \end{cases}$$

**1.2. Объем гиперболического клина.** Пусть в некоторой гиперплоскости  $H$  выбрана точка  $p$  и  $(n-2)$ -мерная плоскость  $P$ , не содержащая  $p$ . Пусть  $F \subset P$  — некоторое множество<sup>1)</sup> и  $M \subset H$  — множество, образованное отрезками, соединяющими точку  $p$  с точками множества  $F$ . Обозначим через  $g_t$  гиперболический сдвиг на расстоянии  $t$  вдоль прямой  $l$ , проходящей через точку  $p$  и ортогональной гиперплоскости  $H$ . Тело  $W$ , заметаемое множеством  $M$  при движениях  $g_t$ ,  $0 \leq t \leq a$ , будем называть *гиперболическим клином* толщины  $a$ , множество  $F$  — его *кромкой*, а точку  $p$  — его *вершиной* (рис. 51).

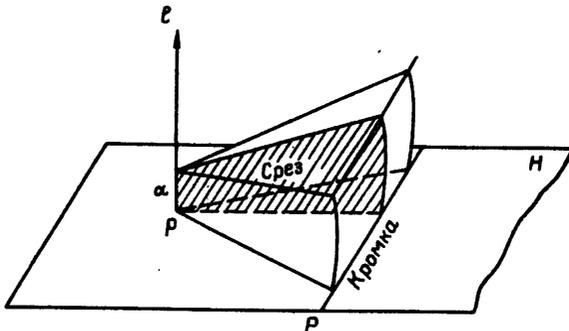


Рис. 51

Пусть  $\Pi$  — двумерная плоскость, проходящая через точку  $p$  и ортогональная плоскости  $P$ . Назовем *срезом* клина  $W$  часть плоскости  $\Pi$ , заметаемую при движениях  $g_t$ ,  $0 \leq t \leq a$ , перпен-

<sup>1)</sup> В случае  $X = S^n$  потребуем, чтобы  $\rho(p, x) \leq \frac{\pi}{2}$  при всех  $x \in F$ .

дикуляром  $pq$ , опущенным из точки  $p$  на плоскость  $P$ . (Отметим, что срез может лежать вне клина.)

Теорема 1.1. Объем гиперболического клина равен  $\frac{1}{n-1}$  (объем кромки, площадь среза).

(Эта формулировка принадлежит Э. Б. Винбергу, но весьма близкое утверждение в случае  $X=S^n$  было доказано Шлефли [43].)

Достаточно доказать утверждение для клина бесконечно малой толщины  $dt$ , кромка которого является бесконечно малым элементом  $dP$  плоскости  $P$  (рис. 52). Воспользуемся разложением пространства  $X$ , связанным с прямой  $l$ . В случае  $X=L^n$  это разложение имеет вид  $L^n = R_+ \times S^{n-2} \times L^1$  и объем клина равен

$$dV = \left( \int_0^r \text{sh}^{n-2} \xi \text{ch} \xi d\xi \right) \sigma(dC) dt = \frac{1}{n-1} \text{sh}^{n-1} r \cdot \sigma(dC) dt,$$

где  $r$  — расстояние от точки  $p$  до кромки  $dP$ , а  $dC = C_p(dP) \subset T_p(H)$  — направляющий конус множества  $dP$ . Однако  $\text{sh}^{n-2} r \cdot \sigma(dC)$  есть не что иное, как объем проекции кромки  $dP$  на сферу гиперплоскости  $H$  радиуса  $r$  с центром в точке  $p$ . Этот объем равен  $\sin \alpha \text{vol } dP$ , где  $\alpha$  — угол между плоскостью  $P$  и отрезком  $px$ ,  $x \in dP$  (см. рис. 52). Следовательно,

$$dV = \frac{1}{n-1} \text{sh } r \sin \alpha \text{vol } dP dt = \frac{1}{n-1} \text{sh } a \text{vol } dP dt,$$

где  $a$  — длина перпендикуляра  $pq$ . Остается заметить, что  $\text{sh } a dt$  — это площадь среза, представляющего собой эквидистантный сектор (заштрихованный на рис. 52) плоскости  $\Pi$ .

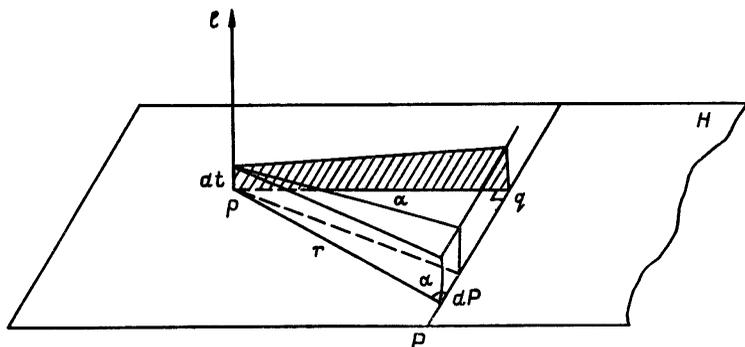


Рис. 52

В случае  $X=S^n$  все вычисления аналогичны, только гиперболические функции заменяются тригонометрическими. В случае  $X=E^n$  клин представляет собой прямую призму, и утверждение теоремы легко проверяется непосредственно. ►

1.3. Объем параболического клина. В случае  $X=L^n$  можно видоизменить определение гиперболического клина, взяв в качестве  $p$  бесконечно удаленную точку, а в качестве  $\{g_t\}$  — однопараметрическую группу параболических поворотов вокруг этой точки вдоль плоскости  $\Pi$ . Полученное таким образом тело  $W$  (рис. 53) естественно назвать *параболическим клином*.

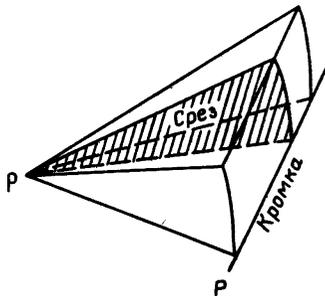


Рис. 53

Теорема 1.1 справедлива и для параболического клина, что можно установить, например, с помощью предельного перехода. В этом случае срез представляет собой орисферический сектор, и его площадь, согласно (3), равна длине его граничной дуги.

1.4. Объем эллиптического клина. Пусть в гиперплоскости  $H$  выбраны  $(n-2)$ -мерные плоскости  $P_0$  и  $P^1$ . Пусть  $F \subset P$  — некоторое множество, лежащее на  $H$  по одну сторону от  $P_0$ , и  $M \subset H$  — множество, образованное перпендикулярами, опущенными на  $P_0$  из точек множества  $F$ . Обозначим через  $g_t$  поворот вокруг плоскости  $P_0$  на угол  $t$ . Тело  $W$ , заштрихованное множеством  $M$  при движениях  $g_t$ ,  $0 \leq t \leq \alpha$ , будем называть *эллиптическим клином* с углом раствора  $\alpha$  (рис. 54). Обозначим

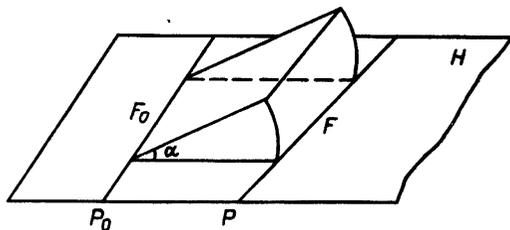


Рис. 54

<sup>1)</sup> В случае  $X=S^n$  потребуем, чтобы плоскость  $P$  не проходила через полярную плоскость  $P_0$  на  $H$ .

через  $F_0$  проекцию множества  $F$  на  $P_0$ . Пользуясь разложением, связанным с плоскостью  $P_0$ , и рассуждая примерно так же, как при доказательстве теоремы 1.1, можно получить следующую формулу для объема эллиптического клина в пространстве  $X=S^n$  или  $L^n$ :

$$\varepsilon \operatorname{vol} W = \frac{1}{n-1} \alpha (\operatorname{vol} F_0 - c \operatorname{vol} F), \quad (5)$$

где  $c$  есть косинус угла между плоскостями  $P$  и  $P_0$ , если они пересекаются, единица, если они параллельны, и гиперболический косинус расстояния между ними, если они расходятся.

В частности, для объема прямого кругового конуса  $K$  в пространстве  $X=S^3$  или  $L^3$  получаем:

$$\varepsilon \operatorname{vol} K = \pi (h - l \cos \theta),$$

где  $h$  — высота конуса,  $l$  — его образующая, а  $\theta$  — угол между ними. (В случае  $X=L^3$  эта формула была найдена Н. И. Лобачевским [29].)

Из формулы (5) может быть выведено также правило вычисления объема эллиптического клина, аналогичное теореме 1.1, однако его формулировка будет зависеть от типа пространства  $X$  и от взаимного расположения плоскостей  $P$  и  $P_0$ .

## § 2. Объемы многомерных многогранников

**2.1. Объем симплекса как аналитическая функция двугранных углов.** Симплекс в пространстве  $X=S^n$  или  $L^n$  определяется с точностью до движения своей матрицей Грама (п. 1.2, гл. 6), которая, в свою очередь, определяется двугранными углами симплекса. Поэтому объем симплекса может рассматриваться как функция двугранных углов.

Положим  $N = \frac{n(n+1)}{2}$  и условимся нумеровать координаты векторов пространства  $S^N$  неупорядоченными парами  $\{i, j\}$ , где  $i, j = 0, 1, \dots, n, i \neq j$ . Для каждого вектора  $\alpha \in (0, \pi)^N$  будем обозначать через  $G(\alpha)$  симметричную матрицу порядка  $n+1$  с единицами на диагонали и элементами  $-\cos \alpha_{ij}$  вне диагонали. Таким образом, если  $\alpha$  — набор двугранных углов некоторого симплекса, то  $G(\alpha)$  есть матрица Грама этого симплекса.

Обозначим через  $M_+$  (соответственно  $M_0, M_-$ ) совокупность наборов двугранных углов симплексов в пространстве  $S^n$  (соответственно  $E^n, L^n$ ). Нетрудно видеть, что вектор  $\alpha \in (0, \pi)^N$  принадлежит одному из множеств  $M_+, M_0$  и  $M_-$  тогда и только тогда, когда матрица  $G(\alpha)$  имеет нужную сигнатуру и, кроме

того, — в случаях  $M_0$  и  $M_-$  — все алгебраические дополнения всех ее элементов положительны.

Положим  $M = M_+ \cup M_0 \cup M_-$ . При  $\alpha \in M$  будем обозначать через  $T(\alpha)$  симплекс, набором двугранных углов которого является вектор  $\alpha$ .

Теорема 2.1 (ср. [38], [34]). При четном  $n$  существует аналитическая функция  $v$ , определенная на открытом подмножестве пространства  $S^N$ , содержащем множество  $M$ , и принимающая на  $M$  следующие значения:

$$v(\alpha) = \begin{cases} \text{vol } T(\alpha), & \alpha \in M_+, \\ 0, & \alpha \in M_0, \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \text{vol } T(\alpha), & \alpha \in M_-. \end{cases}$$

При нечетном  $n$  существует двузначная аналитическая функция  $v$ , определенная на открытом подмножестве пространства  $S^N$ , содержащем множество  $M$ , ветвящаяся на множестве  $\det G(\alpha) = 0$  и принимающая на  $M$  следующие значения:

$$v(\alpha) = \begin{cases} \pm \text{vol } T(\alpha), & \alpha \in M_+, \\ 0, & \alpha \in M_0, \\ \pm i \text{vol } T(\alpha), & \alpha \in M_-, \end{cases}$$

◀ При  $\alpha \in M_+ \cup M_-$  вычислим объем симплекса  $T(\alpha)$ , пользуясь векторной моделью пространства  $X = S^n$  или  $L^n$ . Пусть  $K(\alpha)$  — симплицальный конус в объемлющем (псевдо)евклидовом векторном пространстве  $R^{n+1}$ , отвечающий симплексу  $T(\alpha)$ , и  $\mu$  — каноническая мера в пространстве  $R^{n+1}$ . Тогда

$$\int_{K(\alpha)} e^{-|(x,x)|} \mu(dx) = c \text{vol } T(\alpha), \quad (6)$$

где

$$c = \int_0^\infty e^{-t^2} t^n dt \left( = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right).$$

Пусть  $e_0, e_1, \dots, e_n$  — единичные векторы, ортогональные  $n$ -мерным граням конуса  $K(\alpha)$  и направленные от него. Их матрица Грама есть  $G(\alpha)$ . Направляющими векторами ребер конуса  $K(\alpha)$  служат векторы  $e_0^*, e_1^*, \dots, e_n^*$ , определяемые условиями  $(e_i, e_j^*) = -\delta_{ij}$ . Их матрица Грама обратна матрице  $G(\alpha)$ . Пусть  $g_{ij}^*(\alpha)$  — алгебраические дополнения к элементам матрицы  $G(\alpha)$ . В системе координат  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ , связанной с базисом  $e_0^*, e_1^*, \dots, e_n^*$ , интеграл (6) принимает вид

$$\int_{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n > 0} e^{-|\det G(\alpha)|^{-1} \sum_{i,j} g_{ij}^*(\alpha) \xi_i \xi_j} |\det G(\alpha)|^{-\frac{1}{2}} d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_n =$$

$$= |\det G(\alpha)|^{\frac{n}{2}} \int_{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n > 0} e^{-\sum g_{ij}^*(\alpha) \xi_i \xi_j} d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

В качестве искомой аналитической функции  $v$  может быть взята функция

$$v(\alpha) = c^{-1} (\det G(\alpha))^{\frac{n}{2}} \int_{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n > 0} e^{-\sum g_{ij}^*(\alpha) \xi_i \xi_j} d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_n. \blacktriangleright$$

**2.2. Дифференциал объема.** Пусть выпуклый многогранник  $P$  в пространстве  $X = S^n$  или  $L^n$  деформируется таким образом, что его комбинаторное строение не изменяется, а двугранные углы изменяются дифференцируемым образом. Тогда его объем также изменяется дифференцируемым образом, причем дифференциал объема может быть найден по следующей формуле Шлефли:

$$\varepsilon d \text{vol } P = \frac{1}{n-1} \sum_{\text{dim } F = n-2} \text{vol } F d\alpha_F, \quad (7)$$

где суммирование происходит по всем  $(n-2)$ -мерным граням  $F$  многогранника  $P$ , а  $\alpha_F$  обозначает двугранный угол при грани  $F$ . (В работе Шлефли [43] эта формула была доказана для сферических многогранников.)

◀ Пусть многогранник  $P$  триангулирован и триангуляция деформируется вместе с многогранником. Выражение, стоящее в правой части формулы (7), будет тогда равно сумме аналогичных выражений для симплексов триангуляции. Поэтому достаточно доказать эту формулу для симплекса.

Пусть симплекс  $T$  ограничен гиперплоскостями  $H_0, H_1, \dots, H_n$ . Рассмотрим его деформацию, состоящую в том,

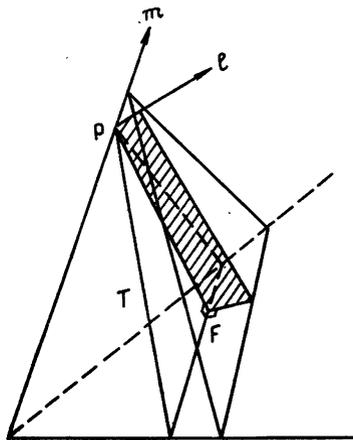


Рис. 55

что гиперплоскость  $H_0$  параллельно сдвигается вдоль линии  $m$  пересечения гиперплоскостей  $H_2, \dots, H_n$ . При такой деформации будет изменяться только двугранный угол  $\alpha$  при  $(n-2)$ -мерной грани  $F = T \cap H_0 \cap H_1$ .

Пусть  $p$  — вершина симплекса  $T$ , не принадлежащая  $H_1$ , и  $l$  — проходящая через нее прямая, ортогональная  $H_0$  (см. рис. 55). При бесконечно малом сдвиге вдоль прямой  $m$  гиперплоскость  $H_0$  займет такое же положение, как при подходящем (бесконечно малом) сдвиге вдоль прямой  $l$ . Поэтому дифференциал объема симплекса  $T$  равен объему бесконечно тонкого гиперболического клина с кромкой  $F$  и вершиной  $p$ , заключенного между гиперплоскостью  $H_0$  и ее новым положением. Площадь среза этого клина равна площади четырехугольника  $Q$ , заштрихованного на рис. 55 и изображенного отдельно на рис. 56. (Этот четырехугольник лежит в двумерной плоскости, проходящей через точку  $p$  и ортогональной

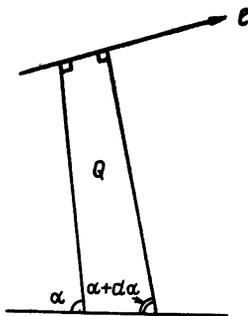


Рис. 56

плоскости грани  $F$ .) Как видно из рис. 56, угловой избыток четырехугольника  $Q$  равен  $d\alpha$ , так что его площадь равна  $\epsilon d\alpha$  и, согласно теореме 1.1, получаем

$$\epsilon d \operatorname{vol} T = \frac{1}{n-1} \operatorname{vol} F d\alpha. \blacktriangleright$$

**2.3. Объем четномерного многогранника: формулы Пуанкаре и Шлефли.** При четном  $n$  объем многогранника в пространстве  $X = S^n$  или  $L^n$  может быть выражен через объемы многогранников меньшей размерности.

Введем некоторые обозначения.

Назовем *относительной угловой мерой* конуса  $C$  в евклидовом векторном пространстве  $V$  и обозначим через  $\mu(C)$  его угловую меру «в долях полного угла», т. е. отношение

$$\mu(C) = \frac{\sigma(C)}{\sigma_{n-1}} \quad (n = \dim V \geq 2).$$

При  $n=1$  или  $0$  примем следующие соглашения: относительная

угловая мера полного пространства равна 1, как и при  $n \geq 2$ ; относительная угловая мера луча в одномерном пространстве равна  $\frac{1}{2}$ .

Пусть теперь  $P$  — выпуклый многогранник. Определим угол многогранника  $P$  при  $k$ -мерной грани  $F$ . Пусть  $x$  — какая-либо внутренняя точка грани  $F$  и пусть  $\Pi$  — проходящая через нее  $(n-k)$ -мерная плоскость, ортогональная плоскости  $Y$  грани  $F$ . Напомним, что касательное пространство  $T_x(\Pi)$  — это не что иное, как нормальное пространство  $N(Y)$  плоскости  $Y$  (см. п. 3.2, гл. 1). Углом многогранника  $P$  при грани  $F$  называется направляющий конус сечения  $P \cap \Pi$  в точке  $x$ . Это выпуклый многогранный конус в пространстве  $N(Y)$ , не зависящий от выбора точки  $x$ . Мы будем обозначать его через  $P/F$ .

В этих обозначениях, объем (ограниченного) выпуклого многогранника  $P$  в пространстве  $X = S^n$  или  $L^n$  при четном  $n$  может быть вычислен по формуле

$$\varepsilon^{\frac{n}{2}} \text{vol } P = \frac{1}{2} \sigma_n \sum_F (-1)^{\text{dim } F} \mu(P/F), \quad (8)$$

где суммирование происходит по всем граням  $F$  многогранника  $P$  (включая сам многогранник). Эту формулу иногда называют формулой Пуанкаре.

◀ Нетрудно видеть, что если многогранник  $P$  триангулирован, то выражение, стоящее в правой части формулы (8), равно сумме аналогичных выражений для симплексов триангуляции. Поэтому достаточно доказать эту формулу для симплекса. Далее, так как симплекс определяется своими двугранными углами, а его угол при любой грани в силу теоремы 2.1 есть аналитическая функция двугранных углов, то в силу той же теоремы достаточно доказать формулу (8) для сферического симплекса.

Пусть симплекс  $T \subset S^n$  есть пересечение полупространств  $H_0^-, H_1^-, \dots, H_n^-$ , и пусть  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  — характеристические функции этих полупространств. Имеем

$$\text{vol } T = I(\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n),$$

где  $I(\varphi)$  обозначает интеграл от функции  $\varphi$  на сфере  $S^n$ . Так как пересечение полупространств  $H_0^+, H_1^+, \dots, H_n^+$  есть симплекс, диаметрально противоположный  $T$ , то имеем также

$$\text{vol } T = I((1 - \varphi_0)(1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_n)) =$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} I(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}) - I(\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n)$$

и, следовательно,

$$\text{vol } T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} I(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}).$$

Остается заметить, что

$$I(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}) = \text{vol}(H_{i_1}^- \cap \dots \cap H_{i_k}^-) = \sigma_n \mu(T/F_{i_1 \dots i_k}),$$

где  $F_{i_1 \dots i_k}$  —  $(n-k)$ -мерная грань симплекса  $T$ , высекаемая гиперплоскостями  $H_{i_1}, \dots, H_{i_k}$ . ▶

Применение теоремы 2.1 дает также, что для евклидова многогранника

$$\sum_F (-1)^{\dim F} \mu(P/F) = 0. \quad (9)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что при нечетном  $n$  формула (9) имеет место во всех трех пространствах.

Слагаемые формулы (8), отвечающие граням нечетных размерностей, выражаются через объемы четномерных сферических многогранников и могут быть исключены с помощью аналогичных формул. В результате получится формула вида

$$\frac{n}{\varepsilon^2} \text{vol } P = \frac{1}{2} \sigma_n \sum_{F: \dim F \text{ четна}} \kappa(F) \mu(P/F), \quad (10)$$

где  $\kappa(F)$  — рациональный коэффициент, зависящий только от комбинаторного строения грани  $F$ . (Для сферических многогранников эта формула была обнаружена и исследована в работе Шлефли [43].)

Укажем значение комбинаторного инварианта  $\kappa$  для некоторых четномерных многогранников. Для  $n$ -мерного симплекса  $T_n$

$$\kappa(T_n) = A_n = \frac{4(2^{n+2}-1)}{n+2} B_{n+2},$$

где  $B_2, B_4, \dots$  — числа Бернулли. В частности,

$$A_0 = 1, \quad A_2 = -\frac{1}{2}, \quad A_4 = 1, \quad A_6 = -\frac{17}{4}, \quad A_8 = 31.$$

Для  $n$ -мерного простого многогранника  $P$  (см. п. 1.5, гл. 6)

$$\kappa(P) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} A_{2k} a_{n-2k}(P),$$

где  $a_i(P)$  — число  $i$ -мерных граней многогранника  $P$ . (В частности, для  $m$ -угольника  $\kappa = 1 - \frac{m}{2}$ .)

**2.4. Объем четномерного многогранника: формула Гаусса—Бонне.** Другой подход к вычислению объемов четномерных многогранников состоит в использовании обобщенной формулы

Гаусса—Бонне, полученной для произвольных криволинейных многогранников в римановых многообразиях Аллендорфером и А. Вейлем [33] (см. также [36]). Для выпуклого многогранника  $P$  в пространстве  $X=S^n$  или  $L^n$  эта формула принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \varepsilon^k \sum_{F: \dim F=2k} \frac{2 \operatorname{vol} F}{\sigma_{2k}} \mu((P/F)^*) = 1, \quad (11)$$

где суммирование происходит по всем граням  $F$  четной размерности. При четном  $n$  в нее входит объем самого многогранника  $P$ , что и позволяет выразить его через объемы многогранников меньших размерностей. Конус  $(P/F)^*$ , сопряженный к углу  $P/F$  многогранника  $P$  при грани  $F$ , можно рассматривать как аналог внешнего угла многоугольника.

Для многогранника  $P$  в евклидовом пространстве формула (11) вырождается в равенство

$$\sum_{F: \dim F=0} \mu((P/F)^*) = 1, \quad (12)$$

являющееся обобщением утверждения о том, что сумма внешних углов евклидова многоугольника равна  $2\pi$ .

### § 3. Объемы трехмерных многогранников

**3.1. Функция Лобачевского.** Объемы некоторых многогранников в пространстве  $L^3$  как функции двугранных углов выражаются через элементарные функции и так называемую функцию Лобачевского.

Следуя Милнору [42], назовем *функцией Лобачевского* и обозначим через  $L$  функцию

$$L(x) = - \int_0^x \ln |2 \sin \xi| d\xi. \quad (13)$$

Эта функция связана с функцией

$$L(x) = - \int_0^x \ln \cos \xi d\xi,$$

традиционно называемой функцией Лобачевского, соотношением

$$L(x) = L\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + x \ln 2.$$

Функция  $L$  нечетна, периодична с периодом  $\pi$ , обращается в нуль в точках  $\frac{n\pi}{2}$ , достигает максимума, равного

$$M=0,5074703 \dots,$$

в точках  $n\pi + \frac{\pi}{6}$ , и минимума, равного  $-M$ , в точках  $n\pi - \frac{\pi}{6}$ .

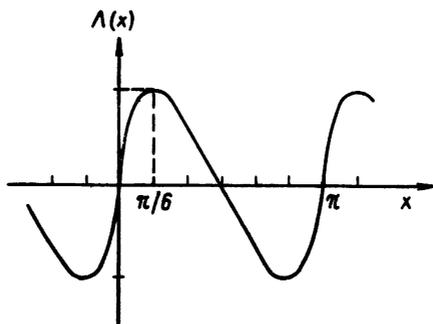


Рис. 57

Она аналитична всюду, кроме точек  $n\pi$ , где ее производная обращается в  $+\infty$  (см. рис. 57). Для любого натурального  $n$  имеет место тождество

$$\mathcal{L}(nx) = n \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}\left(x + \frac{k\pi}{n}\right). \quad (14)$$

В частности,

$$\mathcal{L}(2x) = 2\mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \quad (15)$$

Доказательство тождества (14) и некоторые другие свойства функции  $\mathcal{L}$  см. в [42]. Метод ее вычисления см. в [44].

**3.2. Бипрямоугольные тетраэдры.** Тетраэдр  $ABCD$  называется *бипрямоугольным*, если ребро  $AB$  ортогонально плоскости  $B'CD$ , а ребро  $CD$  ортогонально плоскости  $DAB$  (рис. 58).

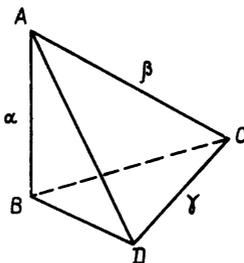


Рис. 58

Такие тетраэдры особенно интересны в связи с тем, что всякий тетраэдр можно разбить на бипрямоугольные, опустив из какой-либо его вершины перпендикуляры на плоскость проти-

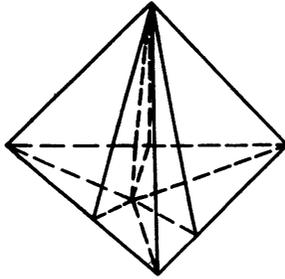


Рис. 59

воположной грани и на прямые, ограничивающие эту грань (рис. 59)<sup>1)</sup>.

Из шести двугранных углов бипрямоугольного тетраэдра  $T$  три — прямые. Остальные три обозначим буквами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , как на рис. 58. Матрица Грама тетраэдра  $T$  будет тогда иметь вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & 1 & -\cos \beta & 0 \\ 0 & -\cos \beta & 1 & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & -\cos \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен

$$\Delta = \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma - \cos^2 \beta.$$

В случаях  $X = S^3$  или  $L^3$ , бипрямоугольный тетраэдр  $T$  определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  с точностью до движения. Его вершинам в векторной модели отвечают одномерные подпространства, матрица Грама базисных векторов которых обратна матрице  $G$  (см. доказательство теоремы 2.1). Таким образом можно найти ребра тетраэдра  $T$ . В частности, обозначим через  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ребра, двугранные углы при которых суть  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  соответственно. Тогда в случае  $X = S^3$

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \operatorname{tg} c \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{\Delta}}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad (16)$$

а в случае  $X = L^3$

$$\operatorname{th} a \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{th} b \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \operatorname{th} c \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\cos \alpha \cos \gamma}. \quad (17)$$

**3.3. Объем бипрямоугольного тетраэдра: формула Лобачевского.** Сохраняя предыдущие обозначения, в случае  $X = L^3$  определим (острый) угол  $\delta$  из уравнения

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\cos \alpha \cos \gamma}. \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Ради простоты, мы говорим о разбиении, но, если некоторые из указанных перпендикуляров будут лежать вне тетраэдра, мы получим не разбиение, а «алгебраическую сумму», в которую некоторые слагаемые входят со знаком минус. Это замечание относится и к дальнейшему употреблению термина «разбиение» в этом параграфе.

Тогда объем тетраэдра  $T$  может быть найден по следующей формуле Лобачевского, выведенной им в работе [30]:

$$\text{vol } T = \frac{1}{4} \left[ \mathcal{L}(\alpha + \delta) - \mathcal{L}(\alpha - \delta) - \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta\right) + \right. \\ \left. + \mathcal{L}(\gamma + \delta) - \mathcal{L}(\gamma - \delta) + 2\mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right]. \quad (19)$$

(В работе Н. И. Лобачевского угол  $\beta$  выражался через другие элементы тетраэдра; то, что он в действительности является двугранным углом тетраэдра, заметил Кокстер [38].)

◀ Из (17) и (18) нетрудно получить

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\alpha - \delta)}, \quad c = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\gamma - \delta)}, \\ b = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta\right)}. \quad (20)$$

Будем стягивать тетраэдр  $T$  в точку таким образом, чтобы он оставался бипрямоугольным и величина  $\delta$  не изменялась. Как видно из (17), углы  $\alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} - \beta$  и  $\gamma$  при этом будут стремиться к  $\frac{\pi}{2}$ . Согласно (7),

$$d \text{ vol } T = -\frac{1}{2} (a d\alpha + b d\beta + c d\gamma).$$

Подставляя сюда выражения (20) и интегрируя, после несложных преобразований (использующих формулу (15)) получаем (19). ▶

Достоинно удивления, что Н. И. Лобачевский нашел эту замечательную формулу, в одиночестве продвигаясь от самых азов неевклидовой геометрии!

Метод аналитического продолжения позволяет применить формулу Лобачевского и к вычислению объемов сферических бипрямоугольных тетраэдров. Для этого продолжим функцию Лобачевского с интервала  $(0, \pi)$  на полосу  $0 < \text{Re } z < \pi$  комплексной плоскости по формуле

$$\mathcal{L}(z) = -\int_0^z \ln(2 \sin \zeta) d\zeta, \quad (21)$$

где путь интегрирования выбирается произвольным образом в этой полосе. Если  $T$  — «настолько малый» сферический бипрямоугольный тетраэдр, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma > 1,$$

то существует чисто мнимая величина  $\delta$ , удовлетворяющая уравнению (18). Тем самым приобретает смысл правая часть формулы (19). В силу теоремы 2.1, она равна  $\pm i \text{ vol } T$ .

3.4. Объемы тетраэдров с бесконечно удаленными вершинами. Для тетраэдров в  $\mathbb{L}^3$ , имеющих одну или несколько бесконечно удаленных вершин, формула объема значительно упрощается.

Заметим для дальнейшего, что сумма двугранных углов тетраэдра при любой бесконечно удаленной вершине равна  $\pi$  (как сумма углов евклидова треугольника, высекаемого тетраэдром на орисфере с центром в этой вершине).

Если бипрямоугольный тетраэдр  $T=ABCD$  (рис. 58) имеет две бесконечно удаленные вершины  $A$  и  $C$ , то  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \gamma$ . Объем такого тетраэдра легко вычисляется интегрированием в модели Пуанкаре [42] и оказывается равным

$$\text{vol } T = \frac{1}{2} \mathcal{L}(\alpha). \quad (22)$$

Это дает прямую геометрическую интерпретацию функции Лобачевского. (Конечно, эта формула может быть получена и из формулы Лобачевского.)

Если у тетраэдра  $T$  все вершины — бесконечно удаленные, то из описанных выше соотношений между двугранными углами следует, что его двугранные углы при любой паре противоположных ребер равны между собой. Кроме того, если  $\alpha, \beta, \gamma$  — различные двугранные углы такого тетраэдра (рис. 60), то

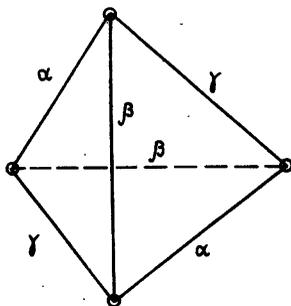


Рис. 60

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Объем такого тетраэдра легко вычисляется с помощью разбиения на шесть бипрямоугольных тетраэдров (как на рис. 59), каждый из которых имеет две бесконечно удаленные вершины [42]. Он оказывается равным

$$\text{vol } T = \mathcal{L}(\alpha) + \mathcal{L}(\beta) + \mathcal{L}(\gamma). \quad (23)$$

Это выражение достигает наибольшего значения при  $\alpha = \beta = \gamma (= \frac{\pi}{3})$ , т. е. когда тетраэдр  $T$  — правильный [42]. (Обобщение этого утверждения на  $n$ -мерный случай см. в [40].)

Наконец, если тетраэдр  $T$  имеет три бесконечно удаленные вершины, то все его двугранные углы выражаются через дву-

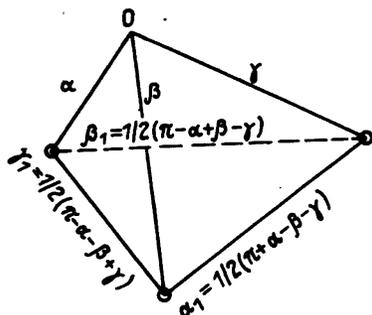


Рис. 61

гранные углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  при обычной вершине  $O$ , как указано на рис. 61 (на котором бесконечно удаленные вершины обведены кружками). Объем такого тетраэдра равен

$$\text{vol } T = \frac{1}{2} [\text{Л}(\alpha) + \text{Л}(\beta) + \text{Л}(\gamma) + \text{Л}(\alpha_1) + \text{Л}(\beta_1) + \text{Л}(\gamma_1) - \text{Л}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \pi)\right)]. \quad (24)$$

◀ В самом деле, продолжив до бесконечности ребра тетраэдра  $T$ , мы получим в общей сложности 6 бесконечно удаленных точек, которые служат вершинами некоторого октаэдра. Продолжения граней тетраэдра  $T$  разбивают этот октаэдр на 8 тетраэдров, попарно симметричных относительно их общей обычной вершины  $O$  (рис. 62), одним из которых является  $T$  (на рис. 62 это может быть, например, тетраэдр  $OABC$ ). Каждый из них имеет три бесконечно удаленные вершины, а их двугранные углы при вершине  $O$  либо совпадают с двугранными углами тетраэдра  $T$ , либо смежны с ними. Таким образом, все

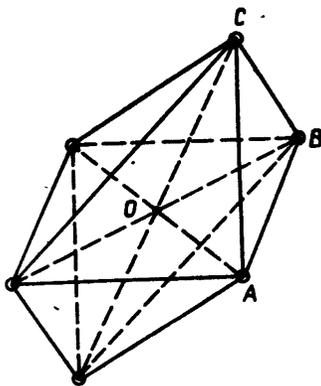


Рис. 62

их двугранные углы могут быть выражены через двугранные углы тетраэдра  $T$ .

Любые два смежных тетраэдра разбиения составляют тетраэдр, все вершины которого — бесконечно удаленные. Объемы таких тетраэдров могут быть вычислены по формуле (23). С другой стороны, нетрудно найти их линейную комбинацию, равную тетраэдру  $T$ . Например, пусть  $T_1$  и  $T_2$  — какие-либо тетраэдра разбиения, смежные с  $T$ , и  $T_2'$  — тетраэдр, симметричный  $T_2$ . Тогда

$$2 \text{ vol } T = \text{vol}(T \cup T_1) + \text{vol}(T \cup T_2) - \text{vol}(T_1 \cup T_2'). \blacktriangleright$$

**3.5. Объем пирамиды с бесконечно удаленной вершиной.** Все формулы предыдущего пункта являются частными случаями формулы для объема пирамиды с бесконечно удаленной вершиной.

Рассмотрим вначале четырехугольную пирамиду  $P$  с бесконечно удаленной вершиной  $C$ , боковое ребро  $CD$  которой ортогонально основанию, а стороны основания, выходящие из  $D$ , образуют прямые углы с двумя другими сторонами основания. Ее двугранные углы при вершине  $O$  основания, противоположной  $D$ , обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , как на рис. 63. Рассматривая

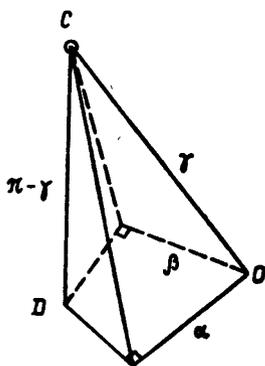


Рис. 63

евклидов четырехугольник, высекаемый пирамидой  $P$  на орисфере с центром в точке  $C$ , находим, что двугранный угол при ребре  $CD$  равен  $\pi - \gamma$ ; все прочие двугранные углы — прямые. Объем пирамиды  $P$  равен

$$\text{vol } P = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{L}(\gamma) + \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\pi + \alpha + \beta - \gamma)\right) + \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\pi + \alpha - \beta - \gamma)\right) + \right. \\ \left. + \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta - \gamma)\right) - \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \pi)\right) \right]. \quad (25)$$

◀ Продолжив до бесконечности две стороны основания пирамиды  $P$ , выходящие из вершины  $O$ , включим её в тетраэдр  $T$  с тремя бесконечно удаленными вершинами  $A, B, C$  (рис. 64).

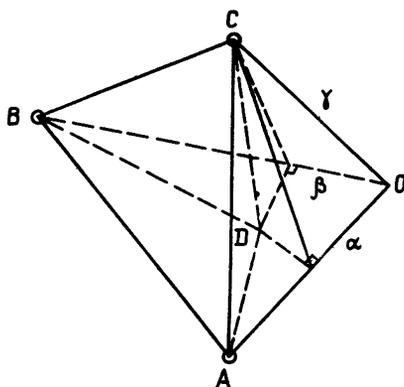


Рис. 64

Дополнение к  $P$  в этом тетраэдре естественным образом разбивается на два смежных с  $P$  бипрямоугольных тетраэдра  $T_1$  и  $T_2$ , имеющих по две бесконечно удаленные вершины, и тетраэдр  $T_0 = ABCD$ . Имеем

$$\text{vol } P = \text{vol } T - \text{vol } T_0 - \text{vol } T_1 - \text{vol } T_2.$$

Двугранные углы тетраэдров  $T_1$  и  $T_2$  при ребре  $CD$  равны их двугранным углам при противоположных ребрах, т. е.  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. По формуле (22)

$$\text{vol } T_1 = \frac{1}{2} \mathcal{L}(\alpha), \quad \text{vol } T_2 = \frac{1}{2} \mathcal{L}(\beta).$$

Объемы тетраэдров  $T$  и  $T_0$  могут быть найдены по формуле (24), если будут известны двугранные углы при их обычных вершинах. Но двугранные углы тетраэдра  $T$  при вершине  $O$  — те же, что у пирамиды  $P$ , т. е.  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Что же касается двугранных углов тетраэдра  $T_0$  при вершине  $D$ , то два из них — прямые, а третий находится из условия, что сумма двугранных углов при ребре  $CD$  тетраэдров  $T_0, T_1, T_2$  и пирамиды  $P$  равна  $2\pi$ , и оказывается равным  $\pi - \alpha - \beta + \gamma$ . ▶

Произвольную  $n$ -угольную пирамиду  $P$  с бесконечно удаленной вершиной можно разбить на  $n$  четырехугольных пирамид рассмотренного выше типа, опустив перпендикуляры из ее вершины на плоскость основания и на прямые, ограничивающие основание (рис. 65). Поэтому объем такой пирамиды равен

$$\text{vol } P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \mathcal{L}(\gamma_i) + \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\pi + \alpha_i + \alpha_{i+1} - \gamma_i)\right) + \right.$$

$$+ \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\pi + \alpha_i - \alpha_{i+1} - \gamma_i)\right) + \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\pi - \alpha_i + \alpha_{i+1} - \gamma_i)\right) - \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \gamma_i - \pi)\right), \quad (26)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — двугранные углы при основании,  $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ , а  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  — двугранные углы при боковых ребрах.

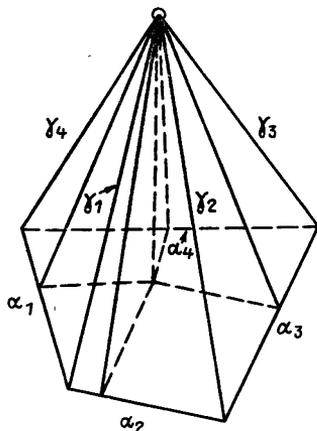


Рис. 65

(Формулы (24), (25) и (26) и приведенные выше их доказательства принадлежат Э. Б. Винбергу. Частный случай формулы (25) при  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  имеется у Н. И. Лобачевского [30]).

## Глава 8

### ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ КАК РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

В этой главе мы предполагаем, что читатель свободно владеет основами римановой геометрии.

1.1. Экспоненциальное отображение. В векторной модели пространства  $X = S^n$  или  $L^n$  экспоненциальное отображение  $\exp_x: T_x(X) \rightarrow X$  в точке  $x \in X$  задается формулой

$$\exp_x \xi = xc(|\xi|) + \xi s(|\xi|), \quad (1)$$

где функции  $c$  и  $s$  указаны в следующей таблице:

$X$	$c(t)$	$s(t)$
$S^n$	$\cos t$	$\frac{\sin t}{t}$
$L^n$	$\text{ch } t$	$\frac{\text{sh } t}{t}$

В случае  $X = \mathbb{J}^n$  отображение  $\exp_x$  является диффеоморфизмом касательного пространства  $T_x(\mathbb{J}^n)$  на пространство  $\mathbb{J}^n$ , а в случае  $X = S^n$  оно диффеоморфно отображает шар радиуса  $\pi$  в  $T_x(S^n)$  на проколотую сферу  $S^n \setminus \{-x\}$ .

Дифференциал экспоненциального отображения на ортогональном дополнении к  $\xi$  задается формулой

$$(d_{\xi} \exp_x)(\eta) = s(|\xi|)\eta \text{ при } (\xi, \eta) = 0. \quad (2)$$

Поскольку  $\frac{\sin t}{t} < 1$  (соответственно  $\frac{\sin t}{t} > 1$ ) при всех  $t$ , экспоненциальное отображение в  $S^n$  (соответственно в  $\mathbb{J}^n$ ) не увеличивает (соответственно не уменьшает) длин касательных векторов и, следовательно, не увеличивает (соответственно не уменьшает) расстояния между точками. Отсюда следует, например, что при заданных длинах двух сторон и углу между ними длина третьей стороны у сферического треугольника меньше, а у гиперболического — больше, чем у евклидова. Впрочем, эти свойства экспоненциального отображения связаны не с постоянством самой секционной кривизны, а лишь с постоянством ее знака: они имеют место в любых римановых многообразиях неотрицательной (соответственно неположительной) кривизны.

Перенос с помощью отображения  $\exp_x$  декартовы координаты пространства  $T_x(X)$  в пространство  $X$ , мы получаем так называемые *нормальные* (или *геодезические*) координаты в  $X$ . В этих координатах риманова метрика имеет вид

$$ds^2 = s(r)^2 \sum_i dx_i^2 + \frac{1-s(r)^2}{r^2} \left( \sum_i x_i dx_i \right)^2, \quad (3)$$

где  $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ . Элемент объема в этих координатах имеет вид

$$dx = s(r)^{n-1} dx_1 \dots dx_n. \quad (4)$$

**1.2. Параллельный перенос.** Параллельный перенос вдоль прямой (геодезической)  $l$  пространства постоянной кривизны  $X$  есть дифференциал движения вдоль  $l$  (см. п. 1.2, гл. 5). Это означает, что при каноническом отождествлении ортогонального дополнения к  $T_x(l)$  в  $T_x(X)$  при  $x \in l$  с нормальным пространством  $N(l)$  прямой  $l$  (п. 3.2, гл. 1) параллельный перенос вдоль  $l$  индуцирует тождественное преобразование пространства  $N(l)$ . Отсюда следует, что параллельный перенос вдоль любой кривой, лежащей в какой-либо плоскости  $Y$ , индуцирует тождественное преобразование пространства  $N(Y)$ . Тем самым в нормальном расслоении любой плоскости  $Y$  определяется абсолютный параллелизм.

Группы голономии пространств  $S^n$  и  $\mathbb{J}^n$  совпадают с  $SO_n$ . Отсюда и из теории инвариантов группы  $SO_n$  следует, что все параллельные тензорные поля в этих пространствах получаются из метрического и обратного к нему тензоров и дискрими-

нантного тензора с помощью операций тензорного умножения и свертки.

**1.3. Кривизна.** Известно, что если риманово многообразие  $X$  в некоторой точке имеет постоянную секционную кривизну  $\chi$ , то его тензор кривизны  $R$  в этой точке имеет вид

$$R_{ij,kl} = \chi (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (5)$$

Иначе говоря, если рассматривать тензор кривизны как линейный оператор в пространстве бивекторов, то это будет гомотетия с коэффициентом  $\chi$ .

Наметим доказательство того, что всякое односвязное полное риманово многообразие  $X$  постоянной кривизны изометрично одному из пространств  $E^n$ ,  $S^n$ ,  $L^n$  (ср. теорему 1.3, гл. 1).

Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — нормальные координаты с центром в точке  $x \in X$ . Рассмотрим ограничения компонент метрического тензора  $g = (g_{ij})$  на геодезическую  $x^i = t\xi^i$ , где  $\xi = (\xi^i)$  — единичный вектор пространства  $T_x(X)$ . Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям Герглота [39]:

$$g''_{ij} + 2t^{-1}g'_{ij} - \frac{1}{2}g^{kl}g'_{ik}g'_{jl} + 2R_{ik,jl}\xi_k\xi_l = 0, \quad (6)$$

где  $(g^{ij})$  — тензор, обратный к метрическому, а штрих обозначает дифференцирование по  $t$ . Если многообразие  $X$  имеет постоянную кривизну  $\chi$ , то, подставив в (6) выражение (5) для компонент тензора кривизны, мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $g_{ij}$  переменной  $t$ . С учетом начальных условий

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g'_{ij} = 0 \text{ при } t = 0,$$

эта система однозначно определяет метрический тензор.

Так как все значения кривизны  $\chi$  реализуются в пространствах  $E^n$ ,  $S^n$ ,  $L^n$ , то из предыдущего рассуждения следует, что всякое риманово многообразие постоянной кривизны локально изометрично одному из этих пространств; если же оно полно и односвязно, то локальная изометрия продолжается до глобальной.

**1.4. Вполне геодезические подмногообразия.** Поскольку плоскости пространства постоянной кривизны  $X$  являются вполне геодезическими подмногообразиями, через каждую точку пространства  $X$  по каждому  $k$ -мерному направлению проходит  $k$ -мерное вполне геодезическое подмногообразие. Следующая теорема показывает, что это свойство характеризует пространство постоянной кривизны.

**Теорема 1.1 ([14]).** Пусть  $X$  — полное риманово многообразие размерности  $n \geq 3$  и  $x \in X$ . Следующие условия эквивалентны:

1) для некоторого  $k$ ,  $2 \leq k < n$ , через точку  $x$  по любому  $k$ -мерному направлению проходит вполне геодезическое подмногообразие;

2) для любого  $k \geq 2$  через точку  $x$  по любому  $k$ -мерному направлению проходит вполне геодезическое подмногообразие;  
 3) любое ортогональное преобразование касательного пространства  $T_x(X)$  является дифференциалом некоторого движения, оставляющего на месте точку  $x$ .

**С л е д с т в и е.** Пусть  $X$  — односвязное полное риманово многообразие размерности  $n \geq 3$  и  $k$  — фиксированное число,  $2 \leq k < n$ . Если через каждую точку пространства  $X$  по любому  $k$ -мерному направлению проходит вполне геодезическое подмногообразие, то  $X$  — пространство постоянной кривизны.

В действительности достаточно потребовать, чтобы указанное свойство имело место для каких-либо двух несопряженных точек многообразия  $X$  [14].

**1.5. Гиперповерхности.** Пусть  $Y$  — гиперповерхность в пространстве постоянной кривизны  $X$ . Вторая квадратичная форма гиперповерхности  $Y$ , описывающая главную часть ее отклонения от касательного пространства в точке  $y \in Y$ , определяет симметрической оператор  $A$  в пространстве  $T_y(Y)$ , называемый *оператором Петерсона*. Тензор кривизны  $S$  гиперповерхности  $Y$ , рассматриваемый как линейный оператор в пространстве бивекторов, выражается через оператор Петерсона по формуле Гаусса [17]

$$S = \Lambda^2 A + \kappa \text{id}, \quad (7)$$

где  $\kappa$  — кривизна пространства  $X$ .

Отсюда следует, что кривизна  $\kappa(\xi, \eta)$  — гиперповерхности  $Y$  по двумерному направлению, определяемому ортогональными единичными векторами  $\xi, \eta$ , равна

$$\kappa(\xi, \eta) = \kappa + (A\xi, \xi)(A\eta, \eta) - (A\xi, \eta)^2$$

В частности, если гиперповерхность  $Y$  выпукла, то оператор  $A$  знакоопределен и, следовательно,  $\kappa(\xi, \eta) \geq \kappa$ .

Гиперповерхности, оператор Петерсона которых в каждой точке скалярен, называются *омбилическими*. Из соображений изотропности следует, что всякая стандартная гиперповерхность является омбилической.

**Теорема 1.2 ([17]).** В пространстве постоянной кривизны размерности  $n \geq 3$  всякая связная омбилическая гиперповерхность является открытым подмножеством стандартной гиперповерхности.

Как следует из формулы (8), всякая омбилическая гиперповерхность имеет постоянную кривизну. Если  $\dim X = n \geq 4$  и  $\text{гк} A > 1$ , то верно и обратное. Всякая гиперповерхность постоянной кривизны, для которой  $\text{гк} A = 1$ , при любом  $n \geq 3$  является разворачивающейся, т. е. получается изгибанием области  $D$  некоторой гиперплоскости  $Y$  вдоль однопараметрического семейства  $(n-2)$ -мерных плоскостей  $Z_t \subset Y$ , попарно не пересекаю-

щихся в пределах данной области  $D$ . Всякая полная развертывающаяся гиперповерхность в пространстве  $S^n$  есть гиперплоскость [45], а в пространстве  $E^n$  — цилиндр [17]. Полные развертывающиеся гиперповерхности пространства  $L^n$  в модели Клейна  $K^n$  получаются как пересечения с  $K^n$  развертывающихся гиперповерхностей объемлющего пространства  $E^n$ , имеющих особенности вне  $K^n$ .

В трехмерном пространстве постоянной кривизны существуют неразвертывающиеся неомбилические поверхности постоянной кривизны. Примерами таких поверхностей служат псевдосферы в  $E^3$  и аналогичные поверхности в  $L^3$ , а также поверхности Клиффорда (орбиты максимального тора группы движений) в  $S^3$ . Классификация связных полных поверхностей постоянной кривизны в трехмерных пространствах постоянной кривизны — это сложная проблема геометрии в целом. Известно (см., например, [17]), что в евклидовом пространстве всякая такая поверхность есть либо сфера, либо цилиндр (в частности, отсутствуют полные поверхности постоянной отрицательной кривизны). Всякая полная неомбилическая поверхность постоянной кривизны в  $S^3$  есть поверхность Клиффорда [46]. В пространстве  $L^3$  нет полных неомбилических поверхностей постоянной положительной или нулевой кривизны [47].

**1.6. Проективные свойства.** Риманово многообразие называется проективно плоским, если у любой его точки имеется окрестность, проективно изоморфная области евклидова пространства. Как показывают модель Клейна пространства Лобачевского и центральная проекция полусферы на касательное пространство, пространства постоянной кривизны являются проективно плоскими. Верно и обратное.

**Теорема 1.3 ([13]).** Всякое односвязное полное проективно плоское риманово многообразие является пространством постоянной кривизны.

Поскольку всякий проективный изоморфизм областей проективного пространства продолжается до глобального проективного преобразования (см. п. 1.2, гл. 2), всякий проективный автоморфизм пространства Лобачевского является движением. Проективные автоморфизмы евклидова пространства — это аффинные преобразования. Наконец, сфера с проективной точки зрения есть не что иное, как двулистное накрытие проективного пространства, а группа ее проективных автоморфизмов есть двулистное накрытие проективной группы. Таким образом, пространства  $E^n$  и  $S^n$  обладают проективными автоморфизмами, не являющимися движениями. Следующая теорема показывает исключительность этого свойства.

**Теорема 1.4 ([31]).** Если односвязное полное аналитическое риманово многообразие  $X$  допускает однопараметрическую группу  $H$  проективных автоморфизмов, не содержащуюся

в группе движений, то либо  $X = S^n$ , либо  $X = E^n \times Y$ , где  $Y$  — некоторое риманово многообразие. В последнем случае группа  $H$  состоит из аффинных автоморфизмов.

**1.7. Конформные свойства.** Риманово многообразие называется конформно плоским, если у любой его точки имеется окрестность, конформная области евклидова пространства. Все пространства постоянной кривизны являются конформно плоскими. Существует много других односвязных полных конформно плоских римановых многообразий, однако справедлива

**Теорема 1.5 ([41]).** Всякое односвязное компактное конформно плоское риманово многообразие конформно сфере.

Все конформные автоморфизмы пространства Лобачевского являются движениями (п. 2.2, гл. 2). Это, однако, неверно для евклидова пространства и сферы. Группа конформных автоморфизмов пространства  $E^n$  — это группа подобий, а группа конформных автоморфизмов сферы  $S^n$  — это конформная группа, изоморфная  $O'_{n+1,1}$  (п. 2.1, гл. 2).

**Теорема 1.6. ([20]).** Если связное риманово многообразие  $X$  допускает конформный автоморфизм, не являющийся движением никакого конформного  $X$  риманова многообразия, то  $X$  конформно евклидову пространству или сфере.

**1.8. Псевдоримановы пространства постоянной кривизны.** Понятие пространства постоянной кривизны может быть перенесено на псевдориманов случай. Псевдориманово пространство постоянной кривизны определяется в групповых терминах как односвязное однородное пространство с группой изотропии  $O_{k,l}$ , а в рамках псевдоримановой геометрии — как односвязное полное псевдориманово многообразие сигнатуры  $(k, l)$ , имеющее постоянную секционную кривизну. Эквивалентность этих определений доказывается так же, как в римановом случае.

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 2 гл. 1, позволяют получить классификацию псевдоримановых пространств постоянной кривизны произвольной сигнатуры  $(k, l)$ . При  $k \geq l > 0$  ими оказываются пространства  $R^{k+l} \times O_{k,l}/O_{k,l}$ ,  $O_{k+1,l}/O_{k,l}$ ,  $O_{k,l+1}/O_{k,l}$ , кривизна которых равна 0, 1 и  $-1$  соответственно, с той оговоркой, что вместо пространства  $O_{k,2}/O_{k,1}$ , фундаментальная группа которого изоморфна  $Z$ , следует взять его одно-

связное накрытие  $O_{k,2}/O_{k,1}$  (остальные указанные пространства односвязны).

В частности, псевдоримановы пространства постоянной кривизны сигнатуры  $(3, 1)$  — это плоское пространство Минковского, являющееся геометрической основой специальной теории отно-

сительности, и пространства де Ситтера  $O_{4,1}/O_{3,1}$  и  $O_{3,2}/O_{3,1}$ , рассматриваемые как космологические модели в общей теории относительности.

## ЛИТЕРАТУРА

### I. Монографии и учебные пособия по геометрии

#### А. Пространства постоянной кривизны.

1. *Ефимов Н. В.*, Высшая геометрия. М.: Наука, 1978
2. *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Ч. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1949, 492 с.; Ч. 2. М.: Гостехиздат, 1956, 344 с.
3. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966, 647 с.
4. —, —, —, Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969, 547 с.
5. *Широков П. А.*, Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М.: Наука, 1983, 80 с.
6. *Berdon A. F.*, The geometry of discrete groups. Springer—Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1983, (Пер. на рус. яз.: *Бердон А.*, Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986, 304 с.)
7. *Berger M.*, Géométrie, v. I—V, CEDIC / Fernand Nathan, Paris, 1978, (Пер. на рус. яз.: *Берже М.*, Геометрия. т. 1, 2. М.: Мир, 1984, 559 с., 336 с.)
8. *Busemann H., Kelly P. J.*, Projective geometry and projective metrics, New York, Academic Press Inc. Publishers, 1953, 381 pp. (Пер. на рус. яз.: *Буземан Г., Келли П.*, Проективная геометрия и проективные метрики. М.: Ин. лит., 1957, 410 с.)
9. *Coxeter H. S. M.*, Non-Euclidean geometry, Toronto, 1957
10. *Klein F.*, Vorlesungen über nicht-Euclidische Geometrie. Berlin, Verlag von J. Springer, 1928, (Пер. на рус. яз. *Клейн Ф.*, Неевклидова геометрия. М.—Л.: 1936, 335 с.)
11. *Wolf J. A.*, Spaces of constant curvature. Univ. of California, Berkley, 1972, 408 pp. (Пер. на рус. яз.: *Вольф Дж. А.*, Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982, 480 с.)

#### Б. Риманова геометрия.

12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.*, Современная геометрия. М.: Наука, 1979, 760 с.
13. *Рашевский П. К.*, Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
14. *Cartan E.*, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris: Gauthier—Villars, 1928, (Пер. на рус. яз.: *Картан Э.*, Геометрия римановых пространств. М.—Л. ОНТИ, 1936, 244 с.)
15. *Cheeger J., Ebin D. G.*, Comparison theorems in Riemannian geometry. Amsterdam, North Holland, 1975.
16. *Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W.*, Riemannsche Geometrie im grossen, Berlin—Heidelberg—New York, Springer Verlag, 1968, 321 p. (Пер. на рус. яз.: *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.*, Риманова геометрия в целом, М.: Мир, 1971, 343 с.)
17. *Kobayashi Sh., Nomizu K.*, Foundations of differential geometry. V. 1, 2, New York—London—Sydney, Interscience publishers 1963, 1969 (Пер. на рус. яз.: *Кобаяси Ш., Номидзу К.*, Основы дифференциальной геометрии. т. 1, 2, М.: Наука, 1981, 344 с., 414 с.)

### II. Цитированная литература

18. *Александров А. Д.*, Выпуклые многогранники. М.: Гостехиздат, 1950.
19. *Алексеевский Д. В.*, Однородные римановы пространства отрицательной кривизны. Мат. сб., 1975, 96, № 1, 93—117
20. —,  $S^n$  и  $E^n$  — единственные римановы пространства, допускающие существенное конформное преобразование. Успехи мат. наук, 1973, 28, вып. 5, 225—226
21. *Андреев Е. М.*, О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского. Мат. сб., 1970, 81, № 3, 445—478

22. —, О выпуклых многогранниках конечного объема в пространствах Лобачевского. *Мат. сб.*, 1970, 83, № 2, 256—260
23. —, О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами. *Мат. заметки*, 1970, 8, № 4, 521—527
24. *Винберг Э. Б.*, Гиперболические группы отражений. *Успехи мат. наук*, 1985, 40, вып. 1, 29—66
25. —, *Онищик А. Л.*, Основы теории групп Ли. *Итоги науки и техн. ВИНТИ*, *Соврем. пробл. матем. Фундам. направления*, 1988, 20, 7—102
26. *Гантмахер Ф. Р.*, Теория матриц. М.: Наука, 1967, 575 с.
27. *Горбачевич В. В.*, *Онищик А. Л.*, Группы Ли преобразований. *Итоги науки и техн. ВИНТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления*. 1988, 20, 103—240
28. *Карпелевич Ф. И.*, Поверхности транзитивности полупростой подгруппы группы движений симметрического пространства. *Докл. АН СССР*, 1953, 93, 401—404
29. *Лобачевский Н. И.*, Воображаемая геометрия. Полное собр. соч. Т. 3. М.—Л., 1949, 16—70
30. —, Применения воображаемой геометрии к некоторым интегралам. Полн. собр. соч. Т. 3, М.—Л., 1949, 181—294
31. *Солодовников А. С.*, Группа проективных преобразований в полном аналитическом римановом пространстве. *Докл. АН СССР*, 1969, 186, № 6, 1262—1266
32. *Шабат Б. В.*, Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985, 336 с.
33. *Allendoerfer C. B.*, *Weil A.*, The Gauss—Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1943, 53, 101—129
34. *Aomoto K.*, Analytic structure of Schläfli function. *Nagoya Math. J.*, 1977, 68, 1—16
35. *Bourbaki N.*, Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4—6, Hermann, Paris, 1968 (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.*, Группы и алгебры Ли, гл. 4—6. М.: Мир, 1972, 334 с.)
36. *Chern S.*, A simple intrinsic proof of the Gauss—Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Ann. Math.*, 1944, 45, № 4, 747—752
37. *Coxeter H. S. M.*, Discrete groups generated by reflections. *Ann. Math.*, 1934, 35, 588—621
38. —, The functions of Schläfli and Lobatschevsky. *Quart. J. Math.*, 1935, 6, 13—29
39. *Günther P.*, Einige Satze über Volumelement eines Riemannschen Raumes. *Publ. Math. Debrecen*, 1960, 7, 78—93
40. *Haagerup U.*, *Munkholm H. D.*, Simplices of maximal volume in hyperbolic n-space. *Acta Math.*, 1981, 147, 1—11
41. *Kuiper N. H.*, On compact conformally flat spaces in the large. *Ann. Math.*, 1949, 50, 916—924
42. *Milnor J.*, Hyperbolic geometry: the first 150 years. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1982, 6, № 1, 9—24
43. *Schläfli L.*, On the multiple integral  $\iint \dots \int dx dy \dots dz$  whose limits are  $p_1 = a_1 x + b_1 y + \dots + h_1 z > 0$ ,  $p_2 > 0$ , ...,  $p_n > 0$  and  $x^2 + y^2 + \dots + z^2 < 1$ . *Quart. J. Math.*, 1858, 2, 269—300; 1860, 3, 54—68; 97—108
44. *Zagier D.*, Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta-functions. *Invent. math.*, 1986, 83, № 2, 285—301

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

45. *Борисенко А. А.*, О поверхностях неположительной внешней кривизны в пространствах постоянной кривизны. *Мат. сб.*, 1981, 114, № 3, 339—354
46. —, О полных поверхностях в пространствах постоянной кривизны. *Укр. геом. сб.*, 1974, вып. 15, 8—15
47. *Волков Ю. А.*, *Владимирова С. М.* Изометрические погружения евклидовой плоскости в пространство Лобачевского. *Мат. заметки*, 1971, 10, № 3, 327—332

# ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	149
<i>Глава 1.</i> Введение	150
§ 1. Основные понятия	150
1.1. Определение дискретных групп движений	150
1.2. Факторпространство	151
1.3. Фундаментальная область	152
1.4. Область Дирихле	155
1.5. Соизмеримые группы	158
§ 2. Источники дискретных групп движений	159
2.1. Группы симметрии	159
2.2. Арифметические группы	163
2.3. Фундаментальные группы пространственных форм	164
<i>Глава 2.</i> Фундаментальные области	166
§ 1. Задание дискретной группы через фундаментальную область	166
1.1. Нормализация фундаментального многогранника	166
1.2. Образующие	167
1.3. Определяющие соотношения	168
1.4. Бесконечно удаленные точки фундаментальной области	170
1.5. Существование дискретной группы с заданным фундаментальным многогранником	171
1.6. Границы применимости метода Пуанкаре	175
1.7. Однородные разбиения	175
§ 2. Геометрически конечные группы движений пространства Лобачевского	176
2.1. Предельное множество дискретной группы движений	177
2.2. Формулировка основных результатов	177
2.3. Некоторые общие свойства дискретных групп движений пространства Лобачевского	178
2.4. Компактификация факторпространства кристаллографической группы	179
2.5. Критерий геометрической конечности	180
<i>Глава 3.</i> Кристаллографические группы	182
§ 1. Теорема Шёнфлиса—Бибераха	182
1.1. Формулировка основной теоремы	182
1.2. Коммутаторы ортогональных преобразований и движений	183
1.3. Доказательство основной теоремы	183
1.4. Произвольные дискретные группы движений евклидова пространства	184
§ 2. Классификация кристаллографических групп	185

2.1. Когомологическое описание	185
2.2. Абстрактное строение	186
2.3. Этапы классификации	187
2.4. Теорема конечности	188
2.5. Типы Браве	189
2.6. Некоторые результаты классификации	190
2.7. Евклидовы пространственные формы	190
§ 3. Однородные разбиения евклидова пространства	191
3.1. Теорема конечности	191
3.2. Параллелоэдры	192
<i>Глава 4. Фуксовы группы</i>	192
§ 1. Фуксовы группы с топологической точки зрения	193
1.1. Разветвленные накрытия	193
1.2. Сигнатура и униформизация поверхности с сигнатурой. Плоские группы	194
1.3. Плоские группы конечного типа	196
1.4. Алгебраическое строение плоских групп	196
§ 2. Геометрия фуксовых групп	198
2.1. Введение метрики	198
2.2. Область Нильсена фуксовой группы	200
§ 3. Пространство Тейхмюллера фуксовой группы	200
3.1. Пространство Тейхмюллера и пространство модулей абстрактной группы	201
3.2. Пространство Тейхмюллера фундаментальной группы замкнутой поверхности	202
3.3. Фуксовы группы и римановы поверхности	206
3.4. Расширения фуксовых групп. Максимальные фуксовы группы	206
<i>Глава 5. Группы отражений</i>	207
§ 1. Основные понятия и теоремы	208
1.1. Многогранники Кокстера	208
1.2. Дискретные группы отражений	209
1.3. Схемы Кокстера	210
1.4. Группы отражений на сфере и в евклидовом пространстве	211
§ 2. Группы отражений в пространстве Лобачевского	213
2.1. Общие свойства	213
2.2. Кристаллографические группы отражений на плоскости и в трехмерном пространстве Лобачевского	214
2.3. Ланнеровские и квазиланнеровские группы	215
2.4. Некоторые другие примеры	218
2.5. Ограничения на размерность	221
§ 3. Правильные многогранники и разбиения на равные правильные многогранники	221
3.1. Группа симметрии и символ Шлефли правильного многогранника	221
3.2. Классификация правильных многогранников	223
3.3. Разбиения на равные правильные многогранники	225
<i>Глава 6. Арифметические группы</i>	229
§ 1. Описание арифметических групп движений пространства Лобачевского	229
1.1. Арифметические группы простейшего типа	229
1.2. Алгебры кватернионов	230
1.3. Арифметические фуксовы группы	231
1.4. Арифметические группы движений пространства $L^3$	232
1.5. Арифметические группы движений пространства $L^n$ при $n \geq 4$	232
§ 2. Рефлективные арифметические группы	234
2.1. Применение групп отражений к исследованию арифметических групп	234
2.2. Проблема классификации рефлективных квадратичных модулей	237
§ 3. Существование неарифметических групп	237
3.1. Критерий арифметичности группы отражений	238

3.2. Существование неарифметических групп отражений . . . . .	240
3.3. Существование неарифметических кристаллографических групп в любой размерности . . . . .	240
<i>Глава 7. Социология дискретных групп в пространстве Лобачевского</i>	243
§ 1. Жесткость и деформации . . . . .	244
1.1. Теорема о сильной жесткости . . . . .	244
1.2. Деформации . . . . .	244
1.3. Хирургия Дена—Тёрстона . . . . .	248
§ 2. Соизмеримые группы . . . . .	251
2.1. Группа соизмеримости . . . . .	251
2.2. Свойство Милсона . . . . .	251
§ 3. Кообъемы . . . . .	252
3.1. Множество кообъемов . . . . .	252
3.2. Дискретные группы минимального кообъема . . . . .	253
Литература . . . . .	254

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Дискретные группы движений* пространств постоянной кривизны или группы, которые могут рассматриваться как таковые, хотя и заданы другим образом, появляются в различных областях математики и ее приложений. Это группы симметрии правильных многогранников, орнаментов и кристаллических структур, дискретные группы голоморфных преобразований, возникающие в теории униформизации римановых поверхностей, фундаментальные группы пространственных форм, группы целочисленных преобразований Лоренца и пр. (см. главу 1). Изучение этих групп составляет яркую страницу геометрии.

Теория дискретных групп движений пространств постоянной кривизны формально является частью общей теории дискретных подгрупп групп Ли, сложившейся в 50-е—60-е гг. XX в. Последней посвящена статья [23] в одном из томов настоящей серии. На эту статью мы будем часто ссылаться по общим вопросам. Однако дискретные группы движений пространств постоянной кривизны по ряду причин заслуживают отдельного изложения.

Во-первых, их геометрическое изучение удастся продвинуть наиболее далеко; в частности, в пространствах постоянной кривизны имеется уникальная геометрическая конструкция дискретных групп, порожденных отражениями (см. главу 5). Во-вторых, группа движений евклидова пространства обладает транзитивной коммутативной нормальной подгруппой (состоящей из параллельных переносов), что создает особые возможности для изучения ее дискретных подгрупп (см. главу 3). В-третьих, имеется аргумент противоположного свойства: дискретные группы движений пространств Лобачевского (как и других симметрических пространств ранга 1) составляют исключение в теореме об арифметичности решеток в полупростых группах Ли, что делает невозможным арифметическое решение пробле-

мы их классификации (см. главу 6). Наконец, в-четвертых, для дискретных групп движений плоскости Лобачевского, несмотря на только что упомянутую трудность, имеется уникальная теория, достаточно исчерпывающим образом решающая проблему их классификации (см. главу 4).

По вопросам геометрии пространств постоянной кривизны мы будем ссылаться на статью «Геометрия пространств постоянной кривизны» (ГПК), помещенную в настоящем томе.

## Глава 1

### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1. Основные понятия

**1.1. Определение дискретных групп движений.** Пусть  $X$ — $n$ -мерное пространство постоянной кривизны, т. е. евклидово пространство  $E^n$ , сфера  $S^n$  или пространство Лобачевского  $L^n$ , и пусть  $\text{Isom } X$  — группа всех его движений.

**Определение 1.1.** Семейство  $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$  подмножеств пространства  $X$ , занумерованных элементами некоторого множества  $A$ , называется *локально конечным*, если у каждой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом подмножеств из этого семейства.

Это эквивалентно тому, что каждый компакт пересекается лишь с конечным числом подмножеств из данного семейства. (Подчеркнем, что некоторые из подмножеств  $M_\alpha$  могут совпадать, но при этом они считаются различными элементами семейства.)

**Определение 1.2.** Подгруппа  $\Gamma \subset \text{Isom } X$  называется *дискретной группой движений*, если для любой точки  $x \in X$  семейство  $\{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$  локально конечно.

Семейство  $\{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$  содержит каждую точку с кратностью, равной порядку стабилизатора  $\Gamma_x$  точки  $x$ . Поэтому его локальная конечность равносильна дискретности орбиты  $\Gamma_x$  и конечности стабилизатора  $\Gamma_x$ . (На самом деле можно показать, что дискретность группы следует уже из дискретности орбит.)

Данное определение согласуется с общим определением дискретной группы гомеоморфизмов топологического пространства [23]. С другой стороны, оно эквивалентно тому, что  $\Gamma$  является дискретной подгруппой группы Ли  $\text{Isom } X$  (см. более общую теорему в [23]).

Любая конечная группа движений дискретна. Любая конечная группа движений пространства  $E^n$  или  $L^n$  имеет неподвижную точку (ГПК, теорема 3.3 главы 5) и может рассматриваться как дискретная группа движений сферы с центром в этой точке.

Так как сфера компактна, то любая дискретная группа движений сферы конечна. Приведем теперь примеры бесконечных дискретных групп движений.

Примеры. 1. Группа параллельных переносов пространства  $E^n$  на векторы с целыми координатами в каком-либо фиксированном базисе является дискретной группой движений.

2. Группа преобразований вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

является дискретной группой движений плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре. Это так называемая *модулярная группа Клейна*, возникающая при описании пространства модулей эллиптических кривых (см. [23], пример 2.6, гл. 1).

**1.2. Факторпространство.** Пусть  $\Gamma$  — дискретная группа движений  $n$ -мерного пространства постоянной кривизны  $X$ .

Обозначим через  $X/\Gamma$  фактормножество пространства  $X$  по отношению эквивалентности, определяемому действием группы  $\Gamma$ , и через  $p$  — каноническое отображение  $X \rightarrow X/\Gamma$ , сопоставляющее каждой точке  $x \in X$  содержащий ее класс эквивалентности, т. е. орбиту  $\Gamma x$ .

Множество  $X/\Gamma$  снабжается фактортопологией: подмножество  $U \subset X/\Gamma$  считается открытым тогда и только тогда, когда подмножество  $p^{-1}(U)$  открыто в  $X$ . Эта топология хаусдорфова. Отображение  $p$  непрерывно и открыто ([64, глава 1]).

Говорят, что *группа  $\Gamma$  действует свободно* (или без неподвижных точек), если стабилизаторы всех точек тривиальны, т. е.  $\gamma x = x$  ( $\gamma \in \Gamma$ ,  $x \in X$ ) влечет  $\gamma = e$ . В этом случае отображение  $p$  является накрытием и, в частности, локальным гомеоморфизмом. Так как дифференцируемая структура и риманова метрика пространства  $X$  инвариантны относительно группы  $\Gamma$ , то с помощью отображения  $p$  они переносятся на факторпространство  $X/\Gamma$ .

В общем случае отображение  $p$  является накрытием лишь над некоторым плотным открытым подмножеством факторпространства  $X/\Gamma$ .

А именно, для каждого движения  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma \neq e$ , рассмотрим подмножество  $X^\gamma$  его неподвижных точек. Это либо пустое подмножество, либо плоскость, отличная от  $X$ . Если  $X^\gamma \neq \emptyset$ , то движение  $\gamma$  сохраняет проекцию любой точки  $x$  на плоскость  $X^\gamma$  и ее расстояние до этой плоскости; в частности,

$$\rho(x, \gamma x) \leq \rho(x, X^\gamma) + \rho(\gamma x, X^\gamma) = 2\rho(x, X^\gamma).$$

Отсюда (и из определения дискретной группы движений) следует, что семейство  $\{X^\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  локально конечно.

Положим  $X' = X \setminus \left( \bigcup_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq e} X^\gamma \right)$ . В силу предыдущего это плотное открытое подмножество пространства  $X$ . Оно инвариантно

относительно  $\Gamma$ . Факторпространство  $X'/\Gamma$  отождествляется естественным образом с плотным открытым подмножеством  $p(X')$  пространства  $X/\Gamma$ . Так как  $\Gamma$  действует на  $X'$  уже свободно, то отображение  $p: X' \rightarrow X'/\Gamma$  является накрытием. С его помощью дифференцируемая структура и риманова метрика могут быть перенесены с  $X'$  на  $X'/\Gamma$ , но, вообще говоря, они не продолжают на все пространство  $X/\Gamma$ .

Тем не менее, предыдущая конструкция позволяет определить естественным образом борелевскую меру на факторпространстве  $X/\Gamma$ . А именно, на  $X'/\Gamma$  мера определяется римановой метрикой, а объем дополнения считается равным нулю. В дальнейшем, говоря о мере на  $X/\Gamma$ , мы будем иметь в виду эту меру.

Для любого измеримого подмножества  $M \subset X$  подмножество  $p(M) \subset X/\Gamma$  также измеримо и  $\text{vol } p(M) \leq \text{vol } M$ ; если же отображение  $p$  инъективно на  $M$ , то  $\text{vol } p(M) = \text{vol } M$ .

**Определение 1.3.** Дискретная группа  $\Gamma$  движений пространства  $X$ , для которой  $\text{vol } X/\Gamma < \infty$  (соответственно пространство  $X/\Gamma$  компактно), называется *кристаллографической группой движений* (соответственно *равномерной дискретной группой движений*).

С точки зрения теории дискретных подгрупп групп Ли, кристаллографические группы движений (соответственно равномерные дискретные группы движений) пространства  $X$  — это не что иное, как решетки (соответственно равномерные дискретные подгруппы) в группе Ли  $\text{Isom } X$  [23].

Метод нахождения факторпространства  $X/\Gamma$  будет описан в следующем пункте.

Отметим, что если  $\Gamma$  — дискретная (и, тем самым, конечная) группа движений сферы  $S^n$ , то

$$\text{vol } S^n/\Gamma = \frac{\text{vol } S^n}{|\Gamma|}. \quad (1)$$

**1.3. Фундаментальная область.** Мы сохраняем предположения и обозначения предыдущего пункта.

**Определение 1.4.** *Разбиением* пространства  $X$  называется его локально конечное покрытие замкнутыми областями<sup>1)</sup>, не имеющими попарно общих внутренних точек.

**Определение 1.5.** *Фундаментальной областью* группы  $\Gamma$  называется такая замкнутая область  $D \subset X$ , что подмножества  $\gamma D$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , составляют разбиение пространства  $X$ .

Смысл понятия фундаментальной области состоит, грубо говоря, в том, что это достаточно хорошее в топологическом отношении подмножество, содержащее представителей всех орбит группы  $\Gamma$ , причем почти из всех орбит — ровно по одному представителю.

<sup>1)</sup> Замкнутой областью называется замыкание области (непустого открытого подмножества)

Фундаментальная область данной дискретной группы движений, в отличие от факторпространства, не является однозначно определенным объектом. В ее выборе, как правило, имеется функциональный произвол (см. пример 2 ниже).

Факторпространство  $X/\Gamma$  получается из фундаментальной области группы  $\Gamma$  путем «склейки» друг с другом некоторых кусков ее границы. Опишем эту процедуру более точно.

Отношение эквивалентности на  $X$ , определяемое действием группы  $\Gamma$ , индуцирует отношение эквивалентности на любом (не обязательно инвариантном) подмножестве  $D \subset X$ . Фактормножество множества  $D$  по этому отношению эквивалентности мы будем обозначать через  $D/\Gamma$ . Оно наделяется фактортопологией. Отображение

$$j: D/\Gamma \rightarrow X/\Gamma, \quad (2)$$

сопоставляющее каждому классу эквивалентности в  $D$  содержащую его орбиту группы  $\Gamma$ , является непрерывным вложением.

Предложение 1.6. Если  $D$  — фундаментальная область группы  $\Gamma$ , то отображение (2) является гомеоморфизмом. Факторпространство  $X/\Gamma$  компактно тогда и только тогда, когда область  $D$  компактна.

Доказательство см. например в [64].

Отметим, что эквивалентными точками фундаментальной области могут быть только какие-то ее граничные точки; после их склейки и получается факторпространство  $X/\Gamma$ .

Рассматриваемые обычно фундаментальные области ограничены кусочно-дифференцируемыми гиперповерхностями. Для таких областей выполняется условие

$$\text{vol } D = \text{vol } D^0, \quad (3)$$

где  $D^0$  обозначает открытое ядро области  $D$ .

Предложение 1.7. Если  $D$  — фундаментальная область группы  $\Gamma$ , удовлетворяющая условию (3), то

$$\text{vol } X/\Gamma = \text{vol } D.$$

В частности,  $\text{vol } X/\Gamma < \infty$  тогда и только тогда, когда  $\text{vol } D < \infty$ .

◀ Рассмотрим каноническое отображение  $p: X \rightarrow X/\Gamma$ . Так как  $p(D) = X/\Gamma$ , то  $\text{vol } X/\Gamma \leq \text{vol } D$ , но так как отображение  $p$  инъективно на  $D^0$ , то  $\text{vol } X/\Gamma \geq \text{vol } D^0 = \text{vol } D$ . ▶

Следствие. Объемы всех фундаментальных областей группы  $\Gamma$ , удовлетворяющих условию (3), равны между собой.

Примеры. 1. Пусть  $\Gamma = S_n$  — симметрическая группа, действующая в евклидовом пространстве  $E^n$  перестановками декартовых координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В качестве фундаментальной области группы  $\Gamma$  можно взять конус  $C$ , выделяемый линейными неравенствами

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n. \quad (4)$$

Никакие две различные точки этого конуса не эквивалентны относительно  $\Gamma$ ; поэтому факторпространство  $E^n/\Gamma$  может быть отождествлено с  $C$ . Если рассматривать ту же группу как группу движений сферы  $S^{n-1}$  с центром в начале координат, то в качестве ее фундаментальной области можно взять область  $D = C \cap S^{n-1}$ . Следовательно,

$$\text{vol } D = \frac{\text{vol } S^{n-1}}{n!}.$$

2. Пусть  $\Gamma$  — группа параллельных переносов евклидова пространства  $E^n$  на векторы с целыми координатами в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Очевидно, что параллелепипед  $D$  со сторонами  $e_1, \dots, e_n$  (и вершиной в любой точке) является фундаментальной областью группы  $\Gamma$ . Факторпространство  $E^n/\Gamma$  получается из него склейкой противоположных граней и представляет собой  $n$ -мерный тор. Имеем:

$$\text{vol } E^n/\Gamma = \text{vol } D = |\det \{e_1, \dots, e_n\}|, \quad (5)$$

где через  $\det \{e_1, \dots, e_n\}$  обозначен определитель матрицы, составленной из координат векторов  $e_1, \dots, e_n$  в каком-либо ортонормированном базисе.

При  $n=2$  разбиение, соответствующее указанной выше фундаментальной области, изображено на рис. 1а. На рис. 1б и 1в изображены разбиения, соответствующие другим фундаментальным областям той же группы. Первая из них в системе координат, связанной с базисом  $\{e_1, e_2\}$ , задается неравенствами

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad \varphi(x_1) \leq x_2 \leq \varphi(x_1) + 1,$$

где  $\varphi$  — некоторая непрерывная функция. В качестве  $\varphi$  могла бы быть взята любая непрерывная функция на отрезке  $[0, 1]$ .

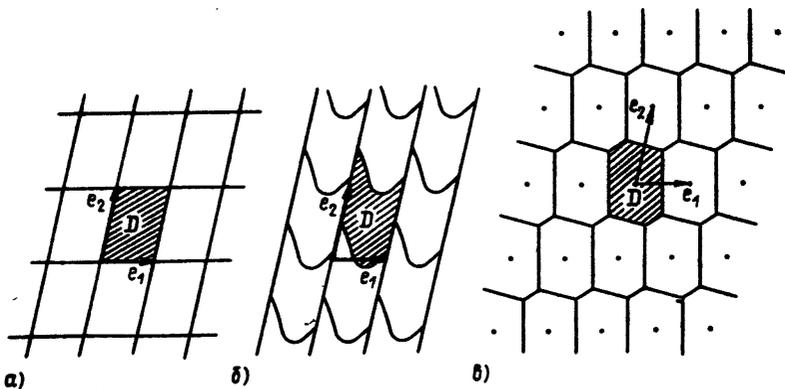


Рис. 1

3. Пусть  $\Gamma$  — модулярная группа Клейна (пример 2, п. 1.1), действующая на плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}^2$ . В главе 2 (пример п. 1.5) будет показано, что фундаментальной областью этой группы может служить треугольник  $D$  с одной бесконечно удаленной вершиной, задаваемый в модели Пуанкаре неравенствами

$$|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \geq 1. \quad (6)$$

Соответствующее разбиение изображено на рис. 2, где через  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  обозначены движения

$$\gamma_1: z \mapsto z + 1, \quad \gamma_2: z \mapsto -\frac{1}{z}, \quad (7)$$

принадлежащие группе  $\Gamma$ . Первое из них представляет собой параболический поворот вокруг бесконечно удаленной вершины треугольника  $D$ , а второе — поворот на  $\pi$  вокруг середины противоположной стороны. Движения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  осуществляют эквивалентности граничных точек треугольника  $D$ . Факторпространство  $\mathbb{L}^2/\Gamma$  получается склеиванием двух сторон треугольника  $D$ , примыкающих к бесконечно удаленной вершине, и складыванием вдвое третьей стороны. Оно гомеоморфно плоскости  $\mathbb{R}^2$  и, в частности, некомпактно. Однако его объем, равный площади треугольника  $D$ , конечен. Более точно, так как углы при обычных вершинах треугольника  $D$  равны  $\frac{\pi}{3}$ , имеем:

$$\operatorname{vol} \mathbb{L}^2/\Gamma = \operatorname{vol} D = \pi - \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 0 \right) = \frac{\pi}{3}.$$

**1.4. Область Дирихле.** Существование фундаментальной области для любой дискретной группы  $\Gamma$  движений может быть доказано при помощи следующей конструкции.

Определение 1.8. *Областью Дирихле* группы  $\Gamma$  с центром в точке  $x_0$  называется область

$$D(\Gamma, x_0) = D(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq \rho(x, \gamma x_0) \text{ при всех } \gamma \in \Gamma\}. \quad (8)$$

Область  $D(x_0)$  может быть описана следующим образом. Пусть  $\Gamma_0$  — стабилизатор точки  $x_0$  в группе  $\Gamma$ . Для каждого  $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$  обозначим через  $H_\gamma$  гиперплоскость, проходящую через середину отрезка, соединяющего точки  $x_0$  и  $\gamma x_0$ , и ортогональную этому отрезку. Это геометрическое место точек, равноудаленных от  $x_0$  и  $\gamma x_0$ . Неравенство  $\rho(x, x_0) \leq \rho(x, \gamma x_0)$  задает полупространство, ограничиваемое гиперплоскостью  $H_\gamma$  (содержащее точку  $x_0$ ). Обозначим это полупространство через  $H_\gamma^-$ . Согласно определению

$$D(x_0) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0} H_\gamma^-,$$

откуда следует, что  $D(x_0)$  — замкнутое выпуклое подмножество. На самом деле это обобщенный выпуклый многогранник.

Напомним, что выпуклым многогранником в пространстве  $X$  называется пересечение конечного числа (замкнутых) полупространств, имеющее непустую внутренность.

**Определение 1.9.** *Обобщенным выпуклым многогранником* называется замкнутая область, пересечение которой с любым ограниченным выпуклым многогранником, содержащим хотя бы одну ее внутреннюю точку, является выпуклым многогранником.

Легко видеть, что всякое разбиение пространства на выпуклые подмножества является разбиением на обобщенные выпуклые многогранники. В частности, всякая выпуклая фундаментальная область дискретной группы движений является обобщенным выпуклым многогранником.

**Предложение 1.10.** Область Дирихле  $D(x_0)$  группы  $\Gamma$  является обобщенным выпуклым многогранником, инвариантным относительно стабилизатора  $\Gamma_0$  точки  $x_0$ . Подмножества  $\gamma D(x_0)$ , где  $\gamma$  пробегает набор представителей левых смежных классов группы  $\Gamma$  по подгруппе  $\Gamma_0$ , образуют разбиение пространства  $X$ ; в частности, если  $\Gamma_0 = \{e\}$ , то  $D(x_0)$  — фундаментальная область группы  $\Gamma$ .

◀ Так как  $\rho(x_0, \gamma x_0) = 2\rho(x_0, H_\gamma)$  при  $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$  и орбита  $\Gamma x_0$  дискретна, то любой шар с центром в точке  $x_0$  пересекается лишь с конечным числом гиперплоскостей  $H_\gamma$ , т. е. семейство  $\{H_\gamma : \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0\}$  локально конечно. Отсюда следует, что  $D(x_0)$  — обобщенный выпуклый многогранник и что

$$D(x_0)^0 = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \rho(x, \gamma x_0) \text{ при всех } \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0\}. \quad (9)$$

Далее, очевидно, что

$$\gamma D(x_0) = D(\gamma x_0) \quad (10)$$

и, стало быть,  $\gamma D(x_0)$  (соответственно  $\gamma D(x_0)^0$ ) состоит из тех точек  $x$ , для которых  $\gamma x_0$  является одной из ближайших к  $x$  точек (соответственно единственной ближайшей к  $x$  точкой) орбиты  $\Gamma x_0$ . Отсюда следует, что подмножества  $\gamma D(x_0)$ , где  $\gamma$  пробегает набор представителей левых смежных классов  $\Gamma$  по  $\Gamma_0$ , покрывают пространство  $X$  и не имеют попарно общих внутренних точек и что каждая точка содержится лишь в конечном числе этих подмножеств. Локальная конечность этого покрытия вытекает из локальной конечности семейства  $\{H_\gamma : \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0\}$ . ▶

Иногда бывает полезно переписать определение области Дирихле следующим образом:

$$D(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq \rho(\gamma x, x_0) \text{ при всех } \gamma \in \Gamma\}. \quad (11)$$

Если  $\Gamma$  — конечная группа ортогональных преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$  (рассматриваемого как евклидово пространство), то простое вычисление показывает, что

$$D(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, x_0) \geq (x, \gamma x_0) \text{ при всех } \gamma \in \Gamma\}. \quad (12)$$

**Примеры.** 1. Пусть  $\Gamma = S^n$  — группа перестановок координат в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Для точки  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$  обозначим через  $S(x_0)$  множество таких упорядоченных пар  $(i, j)$ , что  $x_{0i} > x_{0j}$ . Тогда

$$D(x_0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \geq x_j \text{ при всех } (i, j) \in S(x_0)\}.$$

В частности, если  $x_{01} > x_{02} > \dots > x_{0n}$ , то область  $D(x_0)$  совпадает с фундаментальной областью группы  $\Gamma$ , указанной в примере 1 п. 1.3.

2. Пусть  $\Gamma$  — группа параллельных переносов евклидовой плоскости  $E^2$  на векторы с целыми координатами в базисе  $\{e_1, e_2\}$ . При переходе к другому базису группа  $\Gamma$  не изменится, если матрица перехода будет обратимой целочисленной матрицей. Пользуясь этим, можно добиться, чтобы базис  $\{e_1, e_2\}$  был приведенным, т. е. чтобы

$$0 \leq 2(e_1, e_2) \leq (e_1, e_1) \leq (e_2, e_2)$$

(см. [23, § 2 главы 3]). При этих условиях система неравенств (8), задающая область Дирихле  $D(x_0)$  группы  $\Gamma$ , эквивалентна подсистеме из 6 неравенств, соответствующих параллельным переносам на векторы  $\pm e_1, \pm e_2$  и  $\pm(e_1 - e_2)$ . Область  $D(x_0)$  представляет собой либо шестиугольник, либо, если  $(e_1, e_2) = 0$ , — прямоугольник; точка  $x_0$  является ее центром симметрии. Так как группа  $\Gamma$  действует свободно, то  $D(x_0)$  является фундаментальной областью группы  $\Gamma$  при любом выборе точки  $x_0$ . Именно такая фундаментальная область изображена на рис. 1 в.

Исключив из предложения 1.10 конструктивную часть (роль которой не особенно велика), мы приходим к следующему принципиальному выводу.

**Теорема 1.11.** Всякая дискретная группа движений пространства постоянной кривизны обладает выпуклой фундаментальной областью.

**Следствие.** Всякая кристаллографическая группа движений евклидова пространства равномерна.

◀ В самом деле, любая выпуклая фундаментальная область такой группы должна быть ограниченной, ибо всякое неограниченное выпуклое тело в евклидовом пространстве имеет бесконечный объем. ▶

### 1.5. Соизмеримые группы.

Определение 1.12. Две подгруппы какой-либо группы называются *соизмеримыми*, если их пересечение имеет конечный индекс в каждой из них.

Отношение соизмеримости является отношением эквивалентности на множестве всех подгрупп данной группы.

Пусть  $X$  — пространство постоянной кривизны.

Предложение 1.13. Если одна из двух соизмеримых подгрупп группы  $\text{Isom } X$  является дискретной (соотв. равномерной дискретной, кристаллографической) группой движений, то и другая обладает этим же свойством.

Доказательство (в более общей ситуации) см. в ([23, § 1 главы 1]). Основное соображение состоит в том, что если  $\Delta$  — подгруппа конечного индекса дискретной группы  $\Gamma$  движений и  $D$  — фундаментальная область группы  $\Gamma$ , то в качестве фундаментальной области группы  $\Delta$  можно взять  $\bigcup_{i=1}^s \gamma_i D$ , где  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  — представители правых смежных классов  $\Gamma$  по  $\Delta$ . Отсюда, в частности, вытекает формула

$$\text{vol } X/\Delta = [\Gamma : \Delta] \cdot \text{vol } X/\Gamma. \quad (13)$$

Переход к соизмеримой группе часто приводит к упрощениям. Например, согласно теореме Шёнфлиса — Бибербаха (см. § 1 главы 3), всякая кристаллографическая группа движений евклидова пространства содержит (коммутативную) подгруппу конечного индекса, состоящую из параллельных переносов.

В случае отрицательной кривизны имеется следующее слабое подобие теоремы Бибербаха.

Теорема 1.14. Всякая кристаллографическая группа движений пространства Лобачевского содержит подгруппу конечного индекса, не имеющую кручения и, следовательно, действующую свободно.

Эта теорема является весьма частным случаем леммы Сельберга о том, что всякая конечно порожденная линейная группа над полем нулевой характеристики содержит подгруппу конечного индекса, не имеющую кручения (см. [23], теорема 3.2 главы 1]). Конечная порождаемость кристаллографических групп будет доказана в главе 2 (теорема 2.5).

С другой стороны, часто бывает удобно не уменьшать кристаллографическую группу, а увеличивать ее, включая в нее движения, имеющие много неподвижных точек. Например, расширив модулярную группу Клейна  $PSL_2(\mathbf{Z})$  (пример 2 п. 1.1) до группы  $PGL_2(\mathbf{Z})$ <sup>1)</sup>, порождаемой отражениями, легко установить, что ее фундаментальная область имеет указанный на рис. 2 вид.

<sup>1)</sup> Если  $G$  — какая-либо линейная группа, то через  $PG$  обозначают определяемую ею проективную группу, изоморфную факторгруппе группы  $G$  по подгруппе всех содержащихся в ней скалярных преобразований.

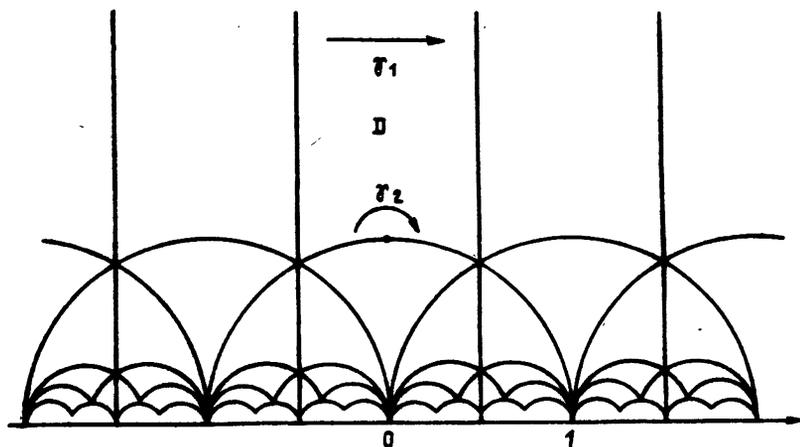


Рис. 2

## § 2. Источники дискретных групп движений

**2.1. Группы симметрии.** Симметрия геометрической фигуры  $F$  определяется группой движений, совмещающих эту фигуру с собой. Эта группа называется *группой симметрии фигуры  $F$*  и обозначается через  $\text{Sym } F$ . Ее подгруппа (индекса 1 или 2), состоящая из собственных движений, совмещающих фигуру  $F$  с собой, называется группой собственной симметрии фигуры  $F$  и обозначается через  $\text{Sym}_+ F$ .

Под фигурой в предыдущем тексте можно понимать либо просто подмножество, либо семейство подмножеств, которые разрешается переставлять между собой, либо, наконец, «раскрашенное» семейство, т. е. семейство, разбитое на подсемейства таким образом, что разрешается переставлять между собой только подмножества, принадлежащие одному подсемейству («закрашенные одним цветом»). Каждая из этих концепций включает в себя предыдущие как частные случаи.

При некоторых условиях можно заранее утверждать, что группа симметрии дискретна или даже конечна.

**Предложение 2.1.** Пусть  $F \subset X$  — конечное (соответственно дискретное) подмножество, не лежащее целиком ни в какой гиперплоскости. Тогда  $\text{Sym } F$  — конечная (соответственно дискретная) группа движений.

Классическими примерами фигур, имеющих нетривиальную дискретную группу симметрии, являются правильные многоугольники и многогранники, орнаменты и кристаллические структуры.

Группа симметрии любого ограниченного  $n$ -мерного выпуклого многогранника (при  $n=2$  — многоугольника) в евклидо-

вом пространстве совпадает с группой симметрии множества его вершин и, согласно предложению 2.1, конечна. Почти всегда она тривиальна, но имеются многогранники, обладающие значительной симметрией. Наиболее симметричны правильные многогранники (см. точное определение в §3 главы 5). Правильные

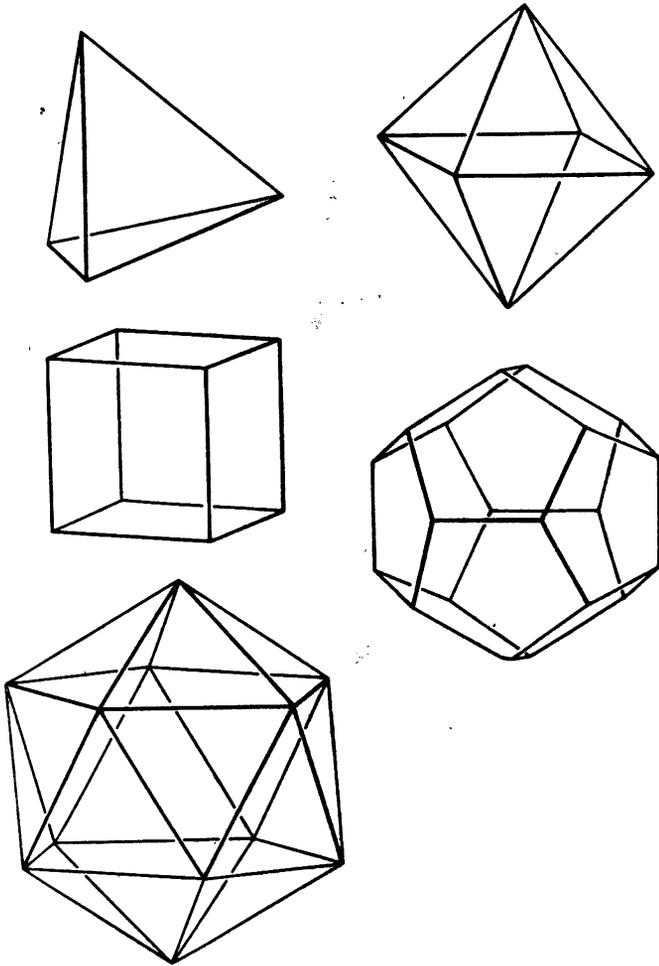
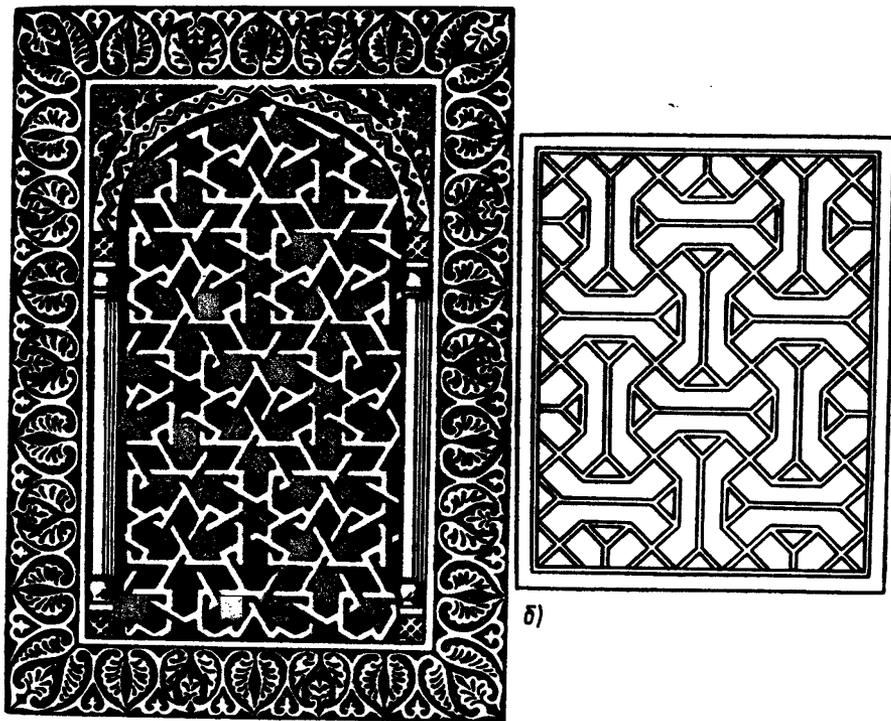


Рис. 3

многоугольники и трехмерные правильные многогранники («платоновы тела»: см. рис. 3) были известны еще в древности. Многомерные правильные многогранники были перечислены Шлефли в 1850 г.

Орнамент — это узор на поверхности, обладающий некоторой дискретной симметрией. Наибольший математический интерес представляют плоские орнаменты, группа симметрии которых является равномерной дискретной группой движений. Реальные примеры таких орнаментов, заимствованные из книги [133], приведены на рис. 4. Первый из них представляет собой решетку окна мавританской мечети, второй — каркас китайского бумажного окна.



а)

б)

Рис. 4

Своего рода трехмерными орнаментами являются *кристаллические структуры* — расположения атомов в идеальных кристаллах. Например, кристаллическая структура поваренной соли (рис. 5) состоит из атомов натрия и хлора, чередующихся в узлах кубической решетки. На рис. 6 изображены кристаллические структуры графита и алмаза, состоящие только из атомов углерода.

Группы симметрии кристаллических структур (кристаллографические группы в узком смысле слова) являются равномерны-

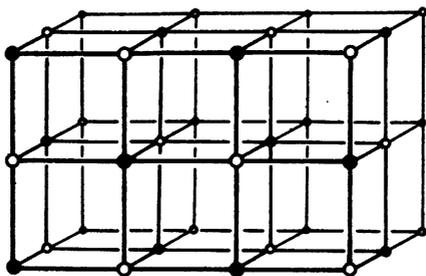


Рис. 5

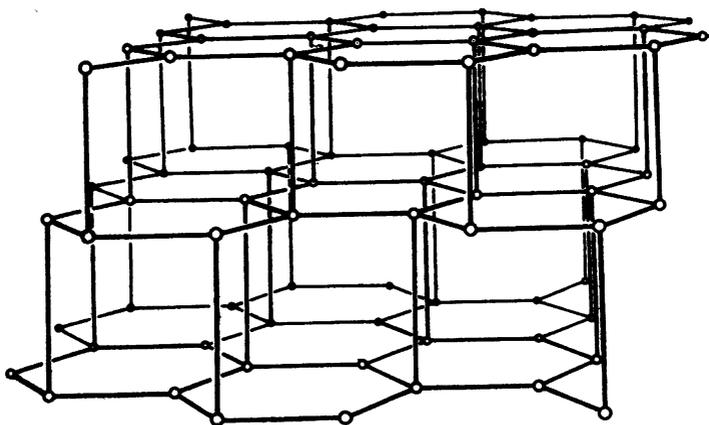
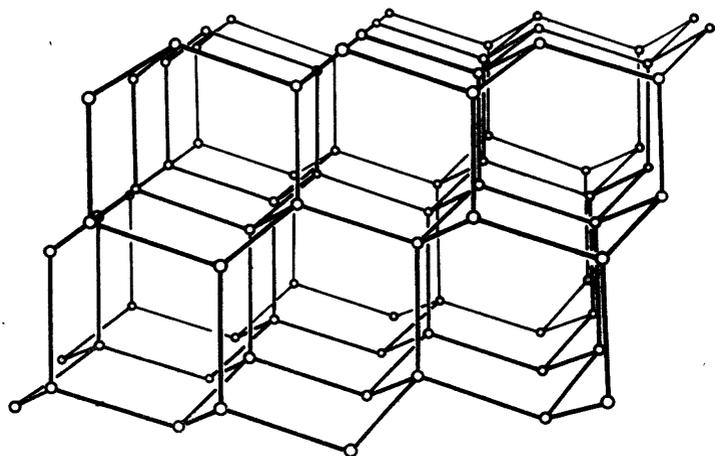


Рис. 6

ми дискретными группами движений трехмерного евклидова пространства. Отсюда ведет происхождение общий термин «кристаллографическая группа», относящийся к группам движений любых пространств постоянной кривизны. (Напомним, что согласно следствию теоремы 1.11 кристаллографические группы движений евклидова пространства — это то же, что равномерные дискретные группы движений).

Все кристаллографические группы движений евклидовой плоскости и трехмерного евклидова пространства были найдены около 1890 г. Е. С. Федоровым (отсюда термин «федоровская группа», употребляющийся наряду с термином «кристаллографическая группа»). С точностью до сопряженности в группе всех аффинных преобразований, первых оказалось 17, вторых — 219. Независимо от Е. С. Федорова, но чуть позже, кристаллографические группы движений трехмерного евклидова пространства были перечислены Шёнфлисом. Примечательно, что все они являются группами симметрии реальных кристаллических структур. Более подробно об этих группах см. главу 3.

**2.2. Арифметические группы.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) с координатами  $x_0, x_1, \dots, x_n$  задана рациональная квадратичная форма

$$f(x) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{Q})$$

сигнатуры  $(n, 1)$ . Обозначим через  $O(f)$  (соответственно через  $O(f, \mathbb{Z})$ ) группу линейных преобразований (соответственно целочисленных линейных преобразований) пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , сохраняющих форму  $f$ , и через  $O'(f)$  (соответственно через  $O'(f, \mathbb{Z})$ ) — ее подгруппу индекса 2, состоящую из преобразований, оставляющих на месте каждую из двух связанных компонент конуса  $f(x) < 0$ . Группа  $O'(f)$  является группой всех движений пространства Лобачевского  $\mathbb{L}^n$  в векторной модели (см. ГПК, глава 1), а группа  $O'(f, \mathbb{Z})$  — ее дискретной подгруппой, т. е. дискретной группой движений пространства  $\mathbb{L}^n$ .

При  $n=2$  группы такого типа исследовал Фрике в 1891 г. Для нескольких конкретных групп ему удалось явно найти фундаментальную область и, в частности, показать, что ее площадь конечна, т. е. что соответствующая группа является кристаллографической. Эти исследования вошли в монографию [86]. В 1937 г. Б. А. Венков [11] доказал, что группа  $O'(f, \mathbb{Z})$  всегда является кристаллографической группой движений пространства  $\mathbb{L}^n$ ; при этом она равномерна тогда и только тогда, когда форма  $f$  не представляет нуля над  $\mathbb{Q}$ .

Нетрудно показать, что группы  $O'(f_1, \mathbb{Z})$  и  $O'(f_2, \mathbb{Z})$  соизмеримы (при подходящем изоморфизме моделей пространства  $\mathbb{L}^n$ , соответствующих формам  $f_1$  и  $f_2$ ) тогда и только тогда, когда

формы  $f_1$  и  $f_2$  подобны (т. е. эквивалентны с точностью до пропорциональности) над  $\mathbb{Q}$ . Поэтому описанная конструкция позволяет получить бесконечно много несопряженных друг другу классов неизмеримых кристаллографических групп движений пространства  $L^n$  при любом  $n$ .

Возможно обобщение предыдущей конструкции, в котором роль поля  $\mathbb{Q}$  играет вполне вещественное поле алгебраических чисел (см. главу 6). Все получаемые таким образом дискретные группы движений пространств Лобачевского также являются кристаллографическими.

К числу арифметически определяемых дискретных групп движений относится и модулярная группа Клейна  $PSL_2(\mathbb{Z})$  (пример 2, п. 1.1), хотя ее определение и не укладывается в описанную выше схему. Впрочем, при надлежащем изоморфизме моделей плоскости Лобачевского эта группа оказывается подгруппой индекса 2 группы  $O'(x_0x_1+x_2^2, \mathbb{Z})$ .

**2.3. Фундаментальные группы пространственных форм.** В 1980 г. Клейн, вдохновленный некоторыми примерами Клиффорда, поставил проблему описания всех связанных компактных римановых многообразий постоянной кривизны. Тогда же Киллинг показал, что эти многообразия суть не что иное как римановы многообразия вида  $X/\Gamma$ , где  $X$  — одно из пространств постоянной кривизны, а  $\Gamma$  — свободно действующая равномерная дискретная группа его движений. Он назвал их *пространственными формами Клиффорда — Клейна*. В настоящее время этот термин распространяют на любые полные связанные римановы многообразия постоянной кривизны. Они описываются аналогичным образом с той разницей, что группа  $\Gamma$  не обязана быть равномерной. В зависимости от знака кривизны, говорят о *евклидовых, сферических и гиперболических* пространственных формах.

Примеры 1. Тор (снабженный плоской метрикой) есть евклидова пространственная форма. Он получается факторизацией евклидова пространства по дискретной группе, состоящей из параллельных переносов на векторы с целыми координатами в каком-либо фиксированном базисе. За счет выбора этого базиса можно получать континуум неизометричных торов.

2. Трехмерная сфера  $S^3$  может рассматриваться как группа кватернионов с нормой единица таким образом, что левые и правые сдвиги на элементах этой группы будут движениями сферы. Для любой конечной подгруппы  $\Gamma \subset S^3$  многообразие смежных классов  $S^3/\Gamma$  является сферической пространственной формой. В частности, если в качестве  $\Gamma$  взять бинарную группу икосаэдра — полный прообраз группы собственной симметрии икосаэдра при эпиморфизме  $S^3 \rightarrow SO_3$  (склеивающем диаметрально противоположные точки), то получится так называемое

*сферическое пространство додекаэдра*<sup>1)</sup>. Это пространство было открыто Пуанкаре в 1904 г. Оно замечательно тем, что имеет такие же гомотопии, как трехмерная сфера.

3. Согласно теореме униформизации, всякая риманова поверхность (связное одномерное комплексное многообразие) получается из сферы Римана, комплексной плоскости или верхней полуплоскости факторизацией по свободно действующей дискретной группе голоморфных преобразований. Но указанные три комплексных многообразия могут рассматриваться как двумерные пространства постоянной кривизны (см. ГПК, глава 2). При этом все их голоморфные преобразования, не имеющие неподвижных точек, будут (собственными) движениями. Следовательно, римановы поверхности — это то же самое, что ориентируемые двумерные пространственные формы. В частности, компактные римановы поверхности рода  $\geq 2$  представляют собой примеры гиперболических пространственных форм.

Проблема классификации сферических пространственных форм есть проблема теории конечных групп. Она полностью решена Вольфом в 1972 г. [135]. Проблема классификации компактных евклидовых пространственных форм благодаря теории Бибераха также сводится к вопросам, относящимся к конечным группам (см. гл. 3, п. 2.7).

Проблема классификации компактных гиперболических пространственных форм ввиду теоремы 1.14 мало отличается от проблемы классификации всех равномерных дискретных групп движений пространств Лобачевского. В настоящее время кажется невероятным, чтобы эти проблемы могли быть решены в какой-либо размерности, большей трех. Что касается двумерного и трехмерного случаев, то каждый из них является предметом самостоятельной теории. Двумерная теория по существу завершена (см. главу 4). Ее особенностью является тесная связь с теорией римановых поверхностей (см. пример 3 выше). Основное достижение трехмерной теории пока состоит в установлении связи между классификацией трехмерных гиперболических пространственных форм и классификацией трехмерных топологических многообразий.

Известно, что компактные гиперболические пространственные формы размерности  $\geq 3$  изометричны тогда и только тогда, когда они гомотоморфны (см. главу 7). Поэтому проблема классификации трехмерных компактных гиперболических пространственных форм может быть переформулирована следующим образом: какие компактные трехмерные многообразия до-

---

<sup>1)</sup> Название «пространство додекаэдра» объясняется не тем, что соответствующая группа  $\Gamma$  происходит из группы симметрии додекаэдра (которая такая же, как у икосаэдра), а тем, что фундаментальная область действия группы  $\Gamma$  на сфере  $S^3$  может быть выбрана в виде сферического додекаэдра, при склейке противоположных граней которого и получается данное пространство.

пускают «гиперболическую структуру» — риманову метрику постоянной отрицательной кривизны? Имеется гипотеза Тёрстона [126], характеризующая эти многообразия в топологических терминах. Эта гипотеза доказана им во многих (в некотором смысле почти во всех) частных случаях. Ее справедливость означала бы, что всякое компактное трехмерное многообразие в определенном смысле составлено из многообразий, допускающих гиперболическую структуру, и некоторых многообразий другого типа, которые легко могут быть перечислены.

Отметим, что первый пример трехмерного компактного гиперболического многообразия был построен Лёбеллом [142]. Интересные обобщения этого примера имеются в [43], [139].

## Глава 2

### ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

#### § 1. Задание дискретной группы через фундаментальную область

Фундаментальные области и связанные с ними комбинаторные структуры составляют основу комбинаторно-геометрического метода изучения дискретных групп движений, восходящего к мемуарам Пуанкаре о фуксовых [114] и клейновых [115] группах. В многочисленных последующих работах метод Пуанкаре переоткрывался, строго обосновывался и обобщался в различных направлениях: см., например, А. Д. Александров [2], Абельс [57], Маскит [103], Зейферт [119]. В настоящем изложении мы ограничиваемся пространствами постоянной кривизны и фундаментальными областями, являющимися выпуклыми многогранниками. Однако следует иметь в виду, что основные теоремы без особого труда могут быть перенесены на произвольные односвязные римановы многообразия и криволинейные фундаментальные области.

В последующем тексте считается, что действие происходит в  $n$ -мерном пространстве постоянной кривизны  $X$ . В пп. 1.1—1.3 под выпуклым многогранником можно понимать обобщенный выпуклый многогранник (см. определение 1.9 гл. 1).

1.1. **Нормализация фундаментального многогранника.** В некоторых случаях бывает удобно считать гранями выпуклого многогранника некоторые подмножества его истинных граней. Будем называть *фиктивной огранкой* локально конечное покрытие границы выпуклого многогранника замкнутыми выпуклыми множествами, называемыми (фиктивными) гранями, обладающие следующими свойствами:

(F 1) никакая грань не содержит другой грани той же размерности;

( $F_2$ ) пересечение любых двух граней является объединением граней.

Из свойств ( $F_1$ ) и ( $F_2$ ) следует, что граница любой грани является объединением граней.

Разбиение пространства на выпуклые многогранники называется *нормальным*, если пересечение любых двух смежных многогранников разбиения является гранью каждого из них. Примером не нормального разбиения является «кирпичная кладка» (рис. 7).

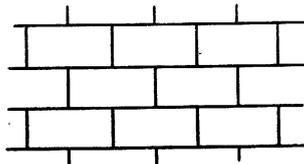


Рис. 7

Всякое разбиение на выпуклые многогранники можно каноническим образом нормализовать путем введения фиктивных граней. А именно, следует объявить гранями всевозможные непустые пересечения многогранников разбиения, не содержащие других таких пересечений той же размерности. Так, «кирпичная кладка» нормализуется, если составляющие ее прямоугольники считать шестиугольниками.

Выпуклый фундаментальный многогранник  $P$  дискретной группы движений  $\Gamma$  называется нормальным, если определяемое им разбиение  $\{\gamma P : \gamma \in \Gamma\}$  нормально. Согласно сказанному выше, всякий выпуклый фундаментальный многогранник можно каноническим образом нормализовать путем введения фиктивных граней. Примером могут служить прямоугольники той же «кирпичной кладки».

**1.2. Образующие.** Пусть  $P$  — выпуклый фундаментальный многогранник дискретной группы  $\Gamma$ , нормализованный, если необходимо, как было описано в п. 1.1.

Многогранники  $\gamma P$ ,  $\gamma \in \Gamma$  будем называть *камерами*. Последовательность камер  $P_0, P_1, \dots, P_k$ , в которой  $P_0 = P$  и камера  $P_i$  смежна с  $P_{i-1}$  при  $i = 1, \dots, k$ , будем называть *цепью камер*.

Для каждой  $(n-1)$ -мерной грани  $F$  многогранника  $P$  обозначим через  $s(F)$  движение из группы  $\Gamma$ , переводящее многогранник  $P$  в многогранник, смежный с ним по грани  $F$ , и через  $F'$  — прообраз грани  $F$  при этом движении. Очевидно, что

$$s(F) \cdot s(F') = e. \quad (1)$$

Движения вида  $s(F)$  называются *преобразованиями смежности*. Совокупность всех преобразований смежности обозначим через  $S$ . Имеется взаимно однозначное соответствие между ко-

нечными последовательностями элементов множества  $S$  и цепями камер. А именно, каждой последовательности  $(s_1, \dots, s_k)$ , где  $s_i = s(F_i)$  соответствует цепь камер

$$P_0 = P, P_1 = s_1 P, P_2 = s_1 s_2 P, \dots, P_k = s_1 s_2 \dots s_k P, \quad (2)$$

в которой камеры  $P_i$  и  $P_{i-1}$  смежны по грани  $s_1 s_2 \dots s_{i-1} F_i$  (рис. 8).

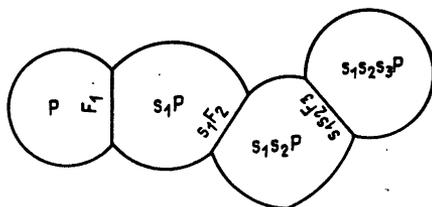


Рис. 8

Очевидно, что любую камеру можно соединить с  $P$  цепью. Отсюда вытекает

**Теорема 1.1.** Преобразования смежности порождают группу  $\Gamma$ .

**Следствие.** Всякая равномерная дискретная группа движений обладает конечной системой образующих.

Аналогично, из того, что любую камеру, содержащую точку  $x \in P$ , можно соединить с  $P$  цепью камер, содержащих эту точку, вытекает следующая теорема, дающая описание  $\Gamma$ -эквивалентности точек многогранника  $P$  во внутренних терминах.

**Теорема 1.2.** Если  $x, y \in P$  и  $x = \gamma y$  для некоторого  $\gamma \in \Gamma$ , то существуют такие преобразования смежности  $s_i = s(F_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ), что  $\gamma = s_1 s_2 \dots s_k$  и  $s_{i+1} \dots s_k y \in F_i'$  при  $i = 1, \dots, k$ .

**1.3. Определяющие соотношения.** Соотношениям между образующими системы  $S$ , т. е. равенствам вида

$$s_1 s_2 \dots s_k = e \quad (s_1, \dots, s_k \in S) \quad (3)$$

соответствуют цепи камер (2), в которых  $P_k = P$ . Такие цепи будут называть *циклами камер*.

С каждой  $(n-1)$ -мерной гранью  $F$  многогранника  $P$  связан цикл камер  $(P, s(F)P, P)$ . Ему соответствует соотношение (1). С каждой  $(n-2)$ -мерной гранью связан цикл, состоящий из всех камер, содержащих эту грань, в том порядке, в каком они встречаются при обходе вокруг нее. Соответствующее соотношение называется *соотношением Пуанкаре*.

**Теорема 1.3.** Соотношения Пуанкаре вместе с соотношениями (1) являются определяющими соотношениями группы  $\Gamma$ .

◀ Ввиду односвязности пространства  $X$  всякий цикл камер может быть преобразован в тривиальный цикл, состоящий из

одной камеры  $P$ , с помощью последовательности преобразований следующих двух типов:

1) замена отрезка вида  $(P_0, P_1, P_0)$  на отрезок  $(P_0)$ , или наоборот;

2) замена отрезка вида  $(P_0, P_1, P_2, \dots, P_{k-1}, P_0)$ , где  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$  — камеры, окружающие какую-либо  $(n-2)$ -мерную грань камеры  $P_0$ , на отрезок  $(P_0)$ , или наоборот.

Преобразования первого типа соответствует применение соотношений (1), преобразованиям второго типа — применение соотношений Пуанкаре. ►

Рассмотрим соотношения Пуанкаре несколько подробнее. Пусть обходу вокруг  $(n-2)$ -мерной грани  $f$  многогранника  $P$  отвечает соотношение (3). Тогда

$$f_0 = f, f_1 = s_1^{-1}f, f_2 = (s_1 s_2)^{-1}f, \dots, f_{k-1} = (s_1 s_2 \dots s_{k-1})^{-1}f \quad (4)$$

— это все  $(n-2)$ -мерные грани многогранника  $P$ , эквивалентные  $f$  относительно действия группы  $\Gamma$  (быть может, с повторениями). Двугранный угол многогранника  $P$  при грани  $f_i$  равен двугранному углу многогранника  $s_1 s_2 \dots s_i P$  при грани  $f$ . Следовательно, сумма двугранных углов многогранника  $P$  при гранях  $f_0 (=f), f_1, \dots, f_{k-1}$  равна  $2\pi$ .

Обходу вокруг грани  $f$  в противоположном направлении отвечает (с учетом (1)) соотношение  $s_k^{-1} \dots s_2^{-1} s_1^{-1} = e$ , а обходу вокруг грани  $f_i$  — соотношение  $s_{i+1} s_{i+2} \dots s_k s_1 s_2 \dots s_{i-1} = e$ . Все эти соотношения эквивалентны (3).

Примеры 1. Рассмотрим действие группы  $S_n$  в пространстве  $E^n$  перестановками координат (пример 1, п. 1.3, гл. 1). Ее фундаментальный многогранник  $C$  ограничен гиперплоскостями  $x_i = x_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Преобразования смежности суть отражения относительно этих гиперплоскостей, соответствующие транспозициям  $s_i = (i, i+1)$ . Соотношения (1) имеют вид  $s_i^2 = e$ .

Соотношения Пуанкаре имеют вид  $(s_i s_j)^{m_{ij}} = e$ , где  $m_{ij}$  — половина числа камер, содержащих  $(n-2)$ -мерную грань, высекаемую в  $C$  уравнениями  $x_i = x_{i+1}, x_j = x_{j+1}$ . Нетрудно видеть, что  $m_{ij} = 2$  при  $|i-j| > 1$  и  $m_{ij} = 3$  при  $|i-j| = 1$ . Таким образом,

$$S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid s_i^2 = e, s_i s_j = s_j s_i$$

$$\text{при } |i-j| > 1, (s_i s_{i+1})^3 = e \rangle.$$

2. Рассмотрим группу  $\Gamma$  параллельных переносов пространства  $E^n$  на векторы с целыми координатами (пример 2, п. 1.3, гл. 1). Ее фундаментальный параллелепипед  $D$  может быть задан в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  неравенствами  $0 \leq x_i \leq 1$ . Преобразования смежности суть параллельные переносы  $s_1, \dots, s_n$  на базисные векторы  $e_1, \dots, e_n$  и обратные им переносы; они образуют друг в друга противоположные  $(n-1)$ -мерные грани. Соотношения Пуанкаре имеют вид  $s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1} = e$ . Теорема 1.3

выражает тот факт, что  $\Gamma$  — свободная абелева группа с образующими  $s_1, s_2, \dots, s_n$ .

**1.4. Бесконечно удаленные точки фундаментальной области.** Изучение неравномерных дискретных групп движений пространства Лобачевского требует рассмотрения поведения их фундаментальных областей на бесконечности.

Пусть  $P$  — выпуклая фундаментальная область дискретной группы  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$ .

**Предложение 1.4.** Никакая бесконечно удаленная точка области  $P$  не может быть неподвижной точкой гиперболического движения из группы  $\Gamma$ .

◀ Предположим, что бесконечно удаленная точка  $q$  области  $P$  является неподвижной точкой гиперболического движения  $\gamma \in \Gamma$  с осью  $l$ . Без ограничения общности можно считать, что  $q$  — отталкивающая точка. Пусть  $p$  — обычная точка области  $P$ . Тогда луч  $pq$  целиком лежит в  $P$ . В то же время существует такая последовательность точек  $x_m \in pq$ , что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma^m x_m = x_0 \in l$ . Это противоречит локальной конечности семейства  $\{\gamma^m P : m \in \mathbb{Z}\}$ . ▶

**Следствие.** Каждой бесконечно удаленной точке  $x$  области  $P$  можно сопоставить орисферу  $S(x)$  с центром в этой точке таким образом, что если  $x_2 = \gamma x_1$  для некоторого  $\gamma \in \Gamma$ , то  $S(x_2) = \gamma S(x_1)$ .

Рассмотрим теперь неподвижные точки параболических движений.

**Определение 1.5.** Бесконечно удаленная точка  $q$  называется *квазипараболической*, если ее стабилизатор  $\Gamma_q$  содержит параболические движения.

Поскольку всякая бесконечная дискретная группа движений евклидова пространства содержит движения без неподвижных точек (см. теорему 1.3 гл. 3), бесконечно удаленная точка  $q$  фундаментальной области  $P$  является квазипараболической тогда и только тогда, когда  $|\Gamma_q| = \infty$ .

Отметим, что стабилизатор квазипараболической точки не может содержать гиперболических движений. В самом деле, если  $\alpha \in \Gamma_q$  — параболическое движение, а  $\gamma \in \Gamma_q$  — гиперболическое движение, для которого точка  $q$  является отталкивающей, то  $\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma^m \alpha \gamma^{-m}$  — эллиптическое движение, что противоречит дискретности группы  $\Gamma$ .

**Определение 1.6.** Квазипараболическая точка  $q$  называется *параболической*, если группа  $\Gamma_q$  действует на (любой) орисфере с центром в  $q$  как кристаллографическая группа.

Предположим, что  $P$  — нормальный выпуклый фундаментальный многогранник с конечным числом (быть может, фиктивных) граней. Его бесконечно удаленную точку  $x$  назовем изолированной, если содержащие ее  $(n-1)$ -мерные грани не имеют общих точек в конечной части пространства (и, следо-

вательно, не имеют общих бесконечно удаленных точек, отличных от  $x$ ). Очевидно, что таких точек может быть лишь конечное число.

Далее, для всякой бесконечно удаленной точки  $x$  многогранника  $P$  обозначим через  $P(x)$  пересечение  $P$  с достаточно малой орисферой с центром в  $x$ . Это выпуклый евклидов многогранник, определенный однозначно с точностью до подобия. Если точка  $x$  не является изолированной, то  $P(x)$  — конус, зависящий лишь от совокупности  $(n-1)$ -мерных граней, содержащих  $x$ . В частности, таких конусов имеется с точностью до конгруэнтности лишь конечное число.

Предложение 1.7. Каждая бесконечно удаленная точка  $x$  фундаментального многогранника  $P$  эквивалентна лишь конечному числу его бесконечно удаленных точек, причем для этих точек имеет место аналог теоремы 1.2. Пусть  $x_1, \dots, x_r$  — эти точки. Точка  $x$  является квазипараболической (соответственно параболической) тогда и только тогда, когда ни один из многогранников  $P(x_i)$  не содержит открытого выпуклого конуса (соответственно все эти многогранники ограничены).

◀ Пусть  $x_i = \gamma_i x$  ( $i=1, \dots, r$ ) — бесконечно удаленные точки многогранника  $P$ , эквивалентные  $x$  (быть может, не все). Пусть  $S(x)$  — достаточно малая орисфера с центром в  $x$  и  $S(x_i) = \gamma_i S(x)$ . Тогда  $P_i = \gamma_i^{-1} P(x_i)$  — выпуклые многогранники на орисфере  $S(x)$ , не имеющие попарно общих внутренних точек. Среди них может быть лишь заранее известное конечное число многогранников, не являющихся конусами, и некоторое число конусов, конгруэнтных одному из конечного числа заранее известных конусов. Так как в евклидовом пространстве можно разместить лишь конечное число конгруэнтных друг другу попарно не пересекающихся открытых выпуклых конусов, то число  $r$  ограничено некоторым числом, которое может быть заранее определено. Тем самым доказано первое утверждение теоремы.

Если теперь предположить, что  $x_1, \dots, x_r$  — это все бесконечно удаленные точки многогранника  $P$ , эквивалентные  $x$ , то  $P_1 \cup \dots \cup P_r$  будет фундаментальной областью для группы  $\Gamma_x$ , действующей на орисфере  $S(x)$ . Отсюда вытекают все остальные утверждения теоремы. ▶

Следствие. Среди бесконечно удаленных точек фундаментального многогранника  $P$  может быть лишь конечное число квазипараболических.

Дальнейшие сведения о квазипараболических точках см. в § 2.

1.5. Существование дискретной группы с заданным фундаментальным многогранником. До сих пор мы имели дело с ситуацией, когда дискретная группа предполагается заданной с самого начала. Однако метод Пуанкаре позволяет также по-

строить дискретную группу с заданной фундаментальной областью.

Пусть  $P$  — выпуклый многогранник с конечным числом (быть может, фиктивных) граней и пусть на множестве его  $(n-1)$ -мерных граней задана инволютивная подстановка  $F \mapsto F'$  и для каждой такой грани  $F$  задано преобразование смежности — движение  $s(F)$ , переводящее грань  $F'$  в грань  $F$ , а сам многогранник  $P$  — в многогранник, лежащий по другую сторону гиперплоскости грани  $F$  (фактически достаточно задать ограничение  $s(F)$  на  $F'$ ). Предположим, что при этом  $s(F)s(F') = \text{id}$ .

Предположим, далее, что для каждой  $(n-2)$ -мерной грани  $f$  многогранника  $P$  существуют такие (однозначно определенные) преобразования смежности  $s_1 s_2 \dots s_k$ , что  $s_1 s_2 \dots s_k = \text{id}$  (тождественное движение) и многогранники (2) образуют «обход» грани  $f$ . При правильно построенной последовательности  $s_1, s_2, \dots$  эти условия, в обозначениях (4), равносильны следующим трем условиям:

(R1) движение  $s_1 s_2, \dots, s_k$  сохраняет ориентацию;

(R2) сумма двугранных углов при гранях  $f_0 (= f), f_1, \dots, f_{k-1}$  равна  $2\pi$ ;

(R3) композиция отображений

$$f = f_k \xrightarrow{s_k} f_{k-1} \xrightarrow{s_{k-1}} \dots \xrightarrow{s_2} f_1 \xrightarrow{s_1} f_0 = f$$

есть тождественное отображение грани  $f$  на себя.

(Отметим, что при  $n=2$  и, вообще, когда грань  $f$  не обладает нетривиальной симметрией, последнее условие не нуждается в проверке.)

Наконец, если  $X = \mathbb{L}^n$  и многогранник  $P$  неограничен, сделаем некоторые дополнительные предположения. Для их формулировки введем понятие  $S$ -эквивалентности (обычных или бесконечно удаленных) точек многогранника  $P$ . А именно, точки  $x$  и  $y$  назовем  $S$ -эквивалентными, если существуют такие преобразования смежности  $s_i = s(F_i)$  ( $i=1, \dots, k$ ), что  $x = s_1 s_2 \dots s_k y$  и  $s_{i+1} \dots s_k y \in F_i'$  при  $i=1, \dots, k$  (ср. теорему 1.2). Далее, определим, как в п. 1.4, изолированные бесконечно удаленные точки многогранника  $P$  и потребуем выполнения следующих условий:

(P1) класс  $S$ -эквивалентности любой изолированной бесконечно удаленной точки многогранника  $P$  конечен;

(P2) для каждого такого класса составляющие его точки  $x_1, \dots, x_r$  можно окружить орисферами  $S_1, \dots, S_r$  так, что если для какой-либо  $(n-1)$ -мерной грани  $F$  многогранника  $P$  имеем  $x_i \in F'$  и  $s(F)x_i = x_j$ , то  $s(F)S_i = S_j$ .

Отметим, что для многогранника конечного объема изолированные бесконечно удаленные точки — это его бесконечно удаленные вершины. Условие (P1) выполняется в этом случае автоматически.

Теорема 1.8. При сделанных выше предположениях группа  $\Gamma$ , порожденная преобразованиями смежности, дискретна и многогранник  $P$  является ее фундаментальной областью.

◀ Схема доказательства этой теоремы такова:

1) из копий многогранника  $P$  склеивается вспомогательное метрическое пространство  $\tilde{X}$  и определяется группа  $\tilde{\Gamma}$  его изометрий таким образом, что пара  $(\tilde{X}, \tilde{\Gamma})$  удовлетворяет заключению теоремы; одновременно определяются непрерывное отображение  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  и эпиморфизм  $\pi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  таким образом, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \tilde{X} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\pi(\tilde{\gamma})} & X \end{array} \quad (5)$$

коммутативна для любого  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ ;

2) доказывается, что существует такое  $\varepsilon > 0$ , что  $\varepsilon$ -окрестность любой точки  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  при отображении  $p$  изометрически отображается на  $\varepsilon$ -окрестность точки  $p(\tilde{x})$ ; отсюда делается вывод, что  $p$  — накрытие, а так как пространство  $X$  односвязно, то  $p$  — изометрия и  $\pi$  — изоморфизм.

Приведем точные определения. Каждой  $(n-1)$ -мерной грани  $F$  многогранника  $P$  сопоставим символ  $\tilde{s}(F)$  и обозначим через  $\tilde{\Gamma}$  группу, порожденную этими символами, с определяющими соотношениями вида  $\tilde{s}(F) \cdot \tilde{s}(F') = e$  и  $\tilde{s}(F_1) \dots \tilde{s}(F_n) = e$ , где  $(s(F_1), \dots, s(F_n))$  — последовательность преобразований смежности, отвечающая обходу вокруг  $(n-2)$ -мерной грани. Обозначим через  $\pi$  эпиморфизм  $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ , отображающий  $\tilde{s}(F)$  в  $s(F)$ .

Далее, в прямом произведении  $\tilde{\Gamma} \times P$  рассмотрим отношение эквивалентности  $R$ , порожденное эквивалентностями вида

$$(\tilde{\gamma} \tilde{s}(F), x) \sim (\tilde{\gamma}, s(F)x) \quad (x \in F').$$

Положим  $\tilde{X} = (\tilde{\Gamma} \times P)/R$ ; для каждой пары  $(\tilde{\gamma}, x)$  обозначим через  $[\tilde{\gamma}, x]$  ее класс эквивалентности. Обозначим через  $p$  отображение  $\tilde{X} \rightarrow X$ , при котором  $[\tilde{\gamma}, x]$  переходит в  $\pi(\tilde{\gamma})x$ . Определим действие  $\tilde{\Gamma}: \tilde{X}$ , индуцированное действием  $\tilde{\Gamma}: \tilde{\Gamma} \times P$  левыми сдвигами на первом множителе. Тогда диаграмма (5) будет коммутативна.

Каждый из «многогранников»  $[\tilde{\gamma}, P]$ , из которых склеено пространство  $\tilde{X}$ , биективно отображается на многогранник  $\pi(\tilde{\gamma})P$  в пространстве  $X$ . Определим метрику на  $[\tilde{\gamma}, P]$  так, чтобы это отображение было изометрией, и затем определим расстояние между любыми двумя точками пространства  $\tilde{X}$  как

длину кратчайшей «ломаной», соединяющей эти точки, каждое звено которой лежит в одном из многогранников  $[\tilde{\gamma}, P]$ . Тогда отображение  $p$  не будет увеличивать расстояний и, следовательно, будет непрерывно.

Главная трудность состоит в доказательстве утверждения 2). Его достаточно доказать для точек вида  $x = [e, x]$ ,  $x \in P$ . Вначале рассматриваются точки  $x$ , лежащие внутри многогранника  $P$  не слишком близко к его границе, затем точки, лежащие внутри какой-либо  $(n-1)$ -мерной грани не слишком близко к ее границе и т. д. Если  $X = L^n$  и многогранник  $P$  неограничен, то предварительно с помощью условий  $(P1)$  и  $(P2)$  удаляются достаточно малые согласованные орисферические окрестности изолированных и эквивалентных им бесконечно удаленных точек. В ходе доказательства используется индукция по  $n$ . ►

Пример. На плоскости Лобачевского рассмотрим треугольник  $ABC$  с бесконечно удаленной вершиной  $C$  и углами, равными  $\frac{\pi}{m}$ , при вершинах  $A$  и  $B$  (рис. 9). В качестве преобразований смежности возьмем параболический поворот  $s_1$  вокруг точки  $C$ , переводящий сторону  $BC$  в сторону  $AC$ , и симметрию  $s_2$  относительно середины  $O$  стороны  $AB$ . Очевидно,

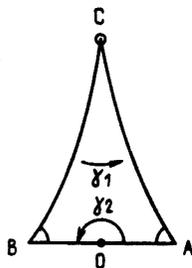


Рис. 9

что при этом выполняется условие  $(P2)$ . Обходу вокруг вершины  $A$  отвечает последовательность  $(s_1, s_2, \dots, s_1, s_2)$  длины  $2m$ ; условия  $(R1)$  и  $(R2)$  выполняются. Следовательно, движения  $s_1$  и  $s_2$  порождают дискретную группу  $\Gamma_m$  с определяющими соотношениями  $s_1^2 = s_2^2 = e$ ,  $(s_1 s_2)^m = e$ , и треугольник  $ABC$  является ее фундаментальной областью.

В частности, при  $m=3$  мы получаем в модели Пуанкаре треугольник  $D$  из примера 3 п. 1.3 гл. 1, причем

$$s_1 = \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где квадратными скобками обозначены матрицы, рассматривае-

мые с точностью до умножения на  $-1$ . Поскольку всякую уни-  
модулярную целочисленную матрицу можно представить в виде  
произведения элементарных целочисленных матриц,  $\Gamma_3 =$   
 $= \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = PSL_2(\mathbb{Z})$  — модулярная группа Клейна. Тем самым  
доказано, что треугольник  $D$  является фундаментальной обла-  
стью модулярной группы Клейна.

**1.6. Границы применимости метода Пуанкаре.** Практическое  
применение метода Пуанкаре, вообще говоря, наталкивается на  
непреодолимые комбинаторные и геометрические трудности.  
Однако для некоторых специальных классов групп он оказы-  
вается вполне эффективным. Это, прежде всего, дискретные  
группы в двумерных пространствах постоянной кривизны (см.  
гл. 4), ради которых он и был придуман, и дискретные груп-  
пы, порожденные отражениями относительно гиперплоскостей  
(см. гл. 5).

Кроме того, этим методом были построены некоторые под-  
группы конечного индекса в группах, порожденных отражения-  
ми (см., например, [20], [25], [41]). И. К. Жук [33] нашел все  
тетраэдры конечного объема, являющиеся фундаментальными  
областями дискретных групп в трехмерных пространствах по-  
стоянной кривизны. Отдельные примеры фундаментальных мно-  
гогранников в  $L^3$  были построены с помощью ЭВМ [88], [126].

Трудности применения метода Пуанкаре в размерности  $\geq 3$   
связаны, прежде всего, со сложностью комбинаторного строе-  
ния фундаментальных многогранников. Поэтому представляет  
интерес следующий результат Йоргенсена и Мардена [96] о  
существовании «превосходных» фундаментальных многогран-  
ников.

Пусть  $\Gamma$  — равномерная дискретная группа движений про-  
странства  $L^3$ . Тогда существует простой (см. ГПК, п. 1.5,  
гл. 6) выпуклый фундаментальный многогранник группы  $\Gamma$ , для  
которого все соотношения Пуанкаре имеют длину 3. Более  
того, таковым является область Дирихле  $D(x_0)$  для любой  
точки  $x_0$  из некоторого плотного открытого подмножества. Ана-  
логичный, но более сложный результат получен в той же рабо-  
те и для неравномерных кристаллографических групп.

**1.7. Однородные разбиения.** Метод Пуанкаре применим и в  
несколько более общей ситуации, когда многогранник  $P$  не  
обязательно является фундаментальной областью группы  $\Gamma$ .

Определение 1.9. *Однородным разбиением пространства*  
называется пара  $(\mathcal{T}, \Gamma)$ , где  $\mathcal{T}$  — некоторое разбиение, а  $\Gamma$  —  
подгруппа группы  $\text{Sym } \mathcal{T}$ , транзитивно действующая на раз-  
биении  $\mathcal{T}$ .

Часто под однородным разбиением понимают первый эле-  
мент пары  $(\mathcal{T}, \Gamma)$ , подразумевая, что  $\Gamma = \text{Sym } \mathcal{T}$ . Однородные  
разбиения называют также правильными, хотя последний тер-  
мин употребляется и в других смыслах.

Если  $P$  — фундаментальная область дискретной группы  $\Gamma$ , то  $\{\gamma P: \gamma \in \Gamma\}$  есть однородное разбиение с группой  $\Gamma$  (хотя его группа симметрии может быть и больше). В этом случае стабилизатор элемента разбиения в группе  $\Gamma$  тривиален. Примерами однородных разбиений с нетривиальными стабилизаторами могут служить разбиения на равные правильные многогранники (см. § 3, гл. 5).

Для однородных разбиений имеют место аналоги теорем 1.1, 1.3 и 1.8.

Пусть  $\{\mathcal{T}, \Gamma\}$  — однородное разбиение на выпуклые многогранники,  $P$  — один из многогранников разбиения,  $\Delta$  — его стабилизатор в группе  $\Gamma$ . Как и в п. 1.2, можно определить, хотя и не однозначно, преобразования смежности. Вместе с группой  $\Delta$  они порождают группу  $\Gamma$ . Соотношения (1) и соотношения Пуанкаре заменяются на соотношения, в правых частях которых стоят какие-то элементы группы  $\Delta$ . Вместе с соотношениями в группе  $\Delta$  и соотношениями вида  $\delta s(F) = s(\delta F)\delta'$  они являются определяющими соотношениями группы  $\Gamma$ . Соответствующим образом видоизменяется и теорема 1.8.

Выпуклый многогранник, являющийся элементом какого-либо однородного разбиения, называется *стереоэдром*. В работах [27], [31] предлагается алгоритм, позволяющий выяснить, является ли данный ограниченный выпуклый многогранник стереоэдром.

## § 2. Геометрически конечные группы движений пространства Лобачевского

Дискретная группа движений пространства  $L^n$  называется *геометрически конечной*, если она допускает нормальный выпуклый фундаментальный многогранник  $P$  с конечным числом (быть может, фиктивных) граней.

Из сказанного в § 1 следует, в частности, что геометрически конечная дискретная группа конечно порождена. Отметим также, что геометрическая конечность — это свойство класса неизмеримых дискретных групп движений. Поэтому при ее исследовании можно всегда при необходимости рассматривать дискретные группы, действующие без неподвижных точек.

Любая конечнопорожденная дискретная подгруппа  $\Gamma \subset \text{Isom } L^2$  геометрически конечна (§ 2, гл. 4), но уже в  $L^3$  имеются примеры конечнопорожденных, но не геометрически конечных дискретных групп [89]. Класс геометрически конечных дискретных групп наиболее изучен.

Для формулировки основных имеющихся здесь результатов нам потребуются некоторые новые понятия. Не оговаривая этого специально, будем считать, что действие происходит в пространстве  $L^n$ . Для всякого множества  $M \subset L^n$  через  $\bar{M}$  будем обозначать его замыкание в  $L^n$ .

**2.1. Предельное множество дискретной группы движений.** Пусть  $\Gamma$  — дискретная группа движений. Если она бесконечна, то ее действие в  $\bar{L}^n$  уже не может быть дискретным.

Множество  $\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma x} \cap \partial L^n$ ,  $x \in L^n$ , называется *предельным множеством* группы  $\Gamma$ .

Множество  $\Lambda(\Gamma)$  не зависит от выбора точки  $x$ ; оно, очевидно, замкнуто и  $\Gamma$ -инвариантно и, если только не состоит из двух точек, является наименьшим подмножеством абсолюта, обладающим этими двумя свойствами. Кроме того, если группы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соизмеримы, то  $\Lambda(\Gamma_1) = \Lambda(\Gamma_2)$ .

Множество  $\Lambda(\Gamma)$  либо конечно, и тогда  $|\Lambda(\Gamma)| \leq 2$ , либо совершенно [61]. В первом случае группа  $\Gamma$  называется *элементарной*. Элементарные группы можно охарактеризовать алгебраически.

Предложение 2.1. Дискретная группа движений тогда и только тогда элементарна, когда она содержит абелеву нормальную подгруппу конечного индекса.

Как следует из сказанного в п. 1.4 и теоремы 1.1 главы 3, стабилизатор квазипараболической точки элементарен. Очевидно, что группа  $\Gamma$  дискретно действует на  $\bar{L}^n - \Lambda(\Gamma)$ . Факторпространство  $(\bar{L}^n - \Lambda(\Gamma))/\Gamma$  обозначим через  $S_\Gamma$ . Назовем группу  $\Gamma$  группой *компактного типа*, если пространство  $S_\Gamma$  компактно.

Например, на плоскости Лобачевского дискретные группы компактного типа — это в точности все конечнопорожденные дискретные группы, которые не содержат параболических элементов (см. п. 2.2, гл. 4).

Отметим также, что если стабилизатор  $\Gamma_x$  точки  $x \in \partial L^n$  бесконечен, то  $x \in \Lambda(\Gamma)$ . В частности, квазипараболические точки (см. п. 1.4) — предельные точки группы  $\Gamma$ .

## 2.2. Формулировка основных результатов.

**Теорема 2.2** ([6], [128]). Всякая дискретная группа компактного типа геометрически конечна.

Не всякая геометрически конечная дискретная группа движений является группой компактного типа. Однако справедлива

**Теорема 2.3** ([6], [8], [128]). Пусть  $\Gamma$  — геометрически конечная дискретная группа движений. Тогда факторпространство  $S_\Gamma = (\bar{L}^n - \Lambda(\Gamma))/\Gamma$  можно компактифицировать, добавив к нему конечное число классов эквивалентных квазипараболических точек.

В доказательстве этой теоремы есть один принципиально важный шаг, который мы выделим.

**Теорема 2.4** ([8]). Пусть  $\Gamma$  — геометрически конечная дискретная группа движений и  $P$  — ее нормальный выпуклый фундаментальный многогранник. Тогда любая квазипараболическая точка группы  $\Gamma$  эквивалентна точке множества  $\bar{P} \cap \partial L^n$ .

Геометрическая конечность равномерных дискретных групп движений сомнений не вызывает. Что можно сказать о кристаллографических группах?

**Теорема 2.5** ([87], [134]). Всякая кристаллографическая группа движений пространства  $L^n$  геометрически конечна.

Теперь мы сформулируем результат, из которого во всех известных нам доказательствах тем или иным способом выводится теорема 2.5.

**Теорема 2.6** (Д. А. Каждан и Г. А. Маргулис, [34]). Всякая квазипараболическая точка кристаллографической группы движений является параболической.

Это частный случай фундаментального результата в теории дискретных подгрупп групп Ли ([23, § 6, гл. 3]), принадлежащего этим авторам. При выводе теоремы 2.5 из теоремы 2.6 используется набор общих фактов (ставших сегодня уже стандартными), многие из которых представляют значительный самостоятельный интерес и заслуживают того, чтобы на них остановиться.

**2.3. Некоторые общие свойства дискретных групп движений пространства Лобачевского.** Ключом ко многим вопросам теории дискретных групп движений пространства  $L^n$  служит

**Теорема 2.7** (Лемма Маргулиса [7], [101]). Для любой дискретной группы  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$ , точки  $x$  и любого  $\epsilon > 0$  обозначим через  $\Gamma_\epsilon(x)$  подгруппу в  $\Gamma$ , порожденную множеством  $\{\gamma \in \Gamma \mid \rho(\gamma x, x) \leq \epsilon\}$ .

Тогда существует такая константа  $\epsilon$  (зависящая только от размерности), что группа  $\Gamma_\epsilon(x)$  содержит абелеву нормальную подгруппу, индекс которой не превосходит некоторой константы  $N$ , зависящей только от размерности.

Доказательство теоремы 2.7 аналогично доказательству теоремы Шёнфлиса—Бибераха (см. § 1, гл. 3).

Рассмотрим два элемента  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  из дискретной группы  $\Gamma$  и обозначим через  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$  подгруппу, ими порожденную. Тогда, как это вытекает из теоремы 2.7, если  $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$  — неэлементарная подгруппа, то  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не могут быть оба «слишком близки» к тождественному преобразованию. Для дискретной группы движений пространства  $L^3$  удастся заменить слова «слишком близки» точной оценкой.

**Теорема 2.8** (Неравенство Йоргенсена, [95]). Если два элемента  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  дискретной группы  $\Gamma$  собственных движений пространства  $L^3$  порождают неэлементарную подгруппу, то

$$|tr^2 \gamma_1 - 4| + |tr(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1}) - 2| \geq 1$$

(здесь  $\Gamma$  рассматривается как подгруппа в  $PSL_2(\mathbb{C})$ ).

Остановимся теперь на одном полезном следствии теоремы 2.7.

**Лемма 2.9** ([89]). Пусть  $\Gamma$  — дискретная группа движений пространства  $L^n$ . Если стабилизатор  $\Gamma_x$  точки  $x$  абсолюта

содержит параболический сдвиг  $t$ , то существует такой оришар  $B_x$  с центром в точке  $x$ , что  $B_x \cap \gamma(B_x) = \emptyset$  для любого  $\gamma \in \Gamma - \Gamma_x$  (оришар, обладающий этим свойством, назовем независимым).

◀ Пусть  $B_x = \{y \in L^n \mid \rho(ty, y) \leq \varepsilon\}$ , где  $\varepsilon$  — константа из теоремы 2.7. Предположим, что найдется такое  $\gamma \in \Gamma - \Gamma_x$ , что  $\gamma(B_x) \cap B_x \neq \emptyset$ , т. е.  $\gamma y \in B_x$  для некоторой точки  $y \in B_x$ . Тогда  $\rho(\gamma^{-1}t\gamma y, y) = \rho(t\gamma y, \gamma y) \leq \varepsilon$ , и по теореме 2.7 некоторые степени параболических сдвигов  $\gamma^{-1}t\gamma$  и  $t$  коммутируют. Следовательно, элементы  $\gamma^{-1}t\gamma$  и  $t$  имеют общую неподвижную точку, т. е.  $\gamma x = x$ , вопреки предположению. ▶

Утверждение предыдущей леммы можно уточнить.

Лемма 2.10 ([7]). Если стабилизатор  $\Gamma_x$  точки  $x \in \partial L^n$  содержит параболический сдвиг  $t$ , то оришар  $B_x = \{y \in L^n \mid \rho(ty, y) \leq 1\}$  является независимым.

Мы закончим этот пункт, указав еще два полезных результата, первый из которых следует из общей теории дискретных подгрупп групп Ли ([23, теорема 1.3, гл. 1]) и важен для доказательств теоремы 2.6.

Предложение 2.11 ([117]). Пусть  $\Gamma$  — дискретная группа движений пространства  $L^n$ . Пусть  $\pi$  — естественная проекция  $L^n \rightarrow L^n/\Gamma$  и  $\{x_m\}$  — последовательность точек, сходящаяся к бесконечности. Для дискретности последовательности  $\pi(x_m)$  достаточно, а в случае кристаллографической группы  $\Gamma$  и необходимо, чтобы в  $\Gamma$  существовали такие отличные от  $e$  элементы  $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \dots$ , что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\gamma_m x_m, x_m) = 0.$$

Лемма 2.12. Точка  $x \in \partial L^n$  не может быть неподвижной для двух гиперболических движений  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ , имеющих разные оси.

◀ Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — оси движений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $x$  — отталкивающая точка для  $\gamma_1$ . Тогда  $\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_1^m l_2 = l_1$  и, значит, некоторая подпоследовательность последовательности  $\{\gamma_1^m \gamma_2 \gamma_1^{-m}\}$  сходится к гиперболическому движению с осью  $l_1$ . При  $l_1 \neq l_2$  это противоречит дискретности группы  $\Gamma$ . ▶

**2.4. Компактификация факторпространства кристаллографической группы.** Пусть  $\Gamma$  — дискретная группа собственных движений пространства  $L^n$ . Для простоты будем предполагать, что  $\Gamma$  действует без неподвижных точек. Если группа  $\Gamma$  равномерна, то факторпространство  $S_\Gamma = L^n/\Gamma$  компактно. В случае, когда факторпространство не компактно, но имеет конечный объем, можно построить естественную компактификацию  $S_\Gamma$  факторпространства  $S_\Gamma$  (это та самая компактификация, о которой идет речь в теореме 2.3), которая является частным случаем компактификации *Сатаке* (см. [23, гл. 3]). Для этого рассмотрим действие группы  $\Gamma$  на объединении  $L^n \cup \Pi_\Gamma$ , где  $\Pi_\Gamma$  — множество параболических

точек группы  $\Gamma$ , и на множестве  $S_\Gamma^* = \mathbb{L}^n / \Gamma \cup \Pi / \Gamma = S_\Gamma \cup \{\dot{Z}_1, \dots, \dot{Z}_s\}$  (по теореме 2.11) имеется лишь конечное число классов  $\Gamma$ -эквивалентных параболических точек) введем топологию, сохранив топологию на  $S_\Gamma$  и объявив фундаментальной системой окрестностей точки  $\dot{Z}_i$  систему окрестностей вида  $U_{\dot{Z}_i} = B_{z_i} / \Gamma_{z_i}$ , где  $B_{z_i}$  пробегает множество независимых оришаров с центром в точке  $z_i \in \dot{Z}_i$  (любом представителе класса  $\dot{Z}_i$ ). Можно проверить, что введенная так топология превращает  $S_\Gamma^*$  в топологическое пространство, которое, вообще говоря, не является многообразием, но является компактным ориентируемым псевдомногообразием в смысле Зейферта—Трельфалла [120].

Топологи предпочитают иметь дело с компактным многообразием с краем, гомотопически эквивалентным факторпространству  $S$ . Чтобы построить такое многообразие, заметим, что каждой параболической точке  $z$  кристаллографической группы  $\Gamma$  можно сопоставить независимый оришар  $B_z$  таким образом, что

- а)  $B_{z_1} \cap B_{z_2} = \emptyset$ , если  $z_1 \neq z_2$ ;
- б)  $B_{\gamma z} = \gamma B_z$  для любой параболической точки  $z$  и любого  $\gamma \in \Gamma$ .

Это сразу следует из конечности числа классов  $\Gamma$ -эквивалентных параболических точек.

Обозначим через  $\mathbb{L}_\Gamma^n$  дополнение к так выбранному семейству оришаров. Легко понять, что факторпространство  $S_\Gamma^* = \mathbb{L}_\Gamma^n / \Gamma$  является компактным многообразием с краем и что оно гомотопически эквивалентно факторпространству  $S_\Gamma = \mathbb{L}^n / \Gamma$ . Край многообразия  $S_\Gamma^*$  является объединением конечного числа плоских римановых многообразий.

**2.5. Критерий геометрической конечности.** При  $n \leq 3$  имеется критерий геометрической конечности дискретной группы  $\Gamma$ , формулируемый исключительно в терминах множества  $\Lambda(\Gamma)$ .

Предварительно введем в рассмотрение новый тип предельных точек дискретной группы  $\Gamma$ .

**Определение 2.13.** Бесконечно удаленная точка  $q$  называется *конической предельной точкой* (в старой математической литературе был принят термин «точка аппроксимации»), если существует такая последовательность элементов  $\{\gamma_m\}$  из  $\Gamma$ , что для любой точки  $x \in \mathbb{L}^n$  и прямой  $l$ , проходящей через точку  $q$ , найдется такая положительная константа  $M$ , что  $\lim \gamma_m x = q$  и  $\rho(\gamma_m x, l) < M$  для всех  $m$ .

**Замечание.** Легко проверить, что если сформулированные в определении условия выполняются для каждой точки  $x$  и прямой  $l$ , то они выполняются и для всех точек  $x$  и прямых  $l$  (возможно с другими значениями константы  $M$ ). На рис. 10 в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского изображена пре-

дельная коническая точка 0 (заштрихованный конус — геометрическое место точек, удаленных от прямой  $l$  на расстояние, меньшее, чем  $M$ )

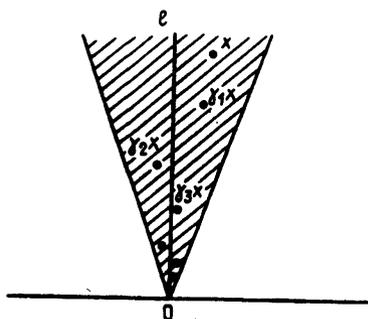


Рис. 10

**Лемма 2.14.** Неподвижная точка гиперболического движения является конической предельной точкой.

◀ Если  $\gamma \in \Gamma$  — гиперболическое движение, то в качестве  $x$  в определении конической точки можно взять любую точку на его оси, а в качестве последовательности  $\{\gamma_m\}$  — одну из двух последовательностей  $\langle \gamma^m \rangle$  или  $\langle \gamma^{-m} \rangle$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . ▶

**Пример.** Пусть  $\Gamma$  — модулярная группа Клейна, действующая на верхней полуплоскости  $H^2$ . Тогда  $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , причем все иррациональные числа — это конические точки, а все рациональные (включая  $\infty$ ) — параболические точки.

**Определение 2.15.** Квазипараболическая точка  $x$  дискретной группы  $\Gamma$  называется *касpidальной*, если существует  $\Gamma_x$ -инвариантное подмножество  $M \subset \partial L^n \setminus \{x\}$ , замкнутое в  $\partial L^n \setminus \{x\}$  и такое, что а) факторпространство  $M/\Gamma_x$  компактно; б)  $\gamma(\partial L^n - M) \subset M$  для любого  $\gamma \in \Gamma_x$ .

Очевидно, что всякая параболическая точка является касpidальной — в этом случае  $M = \partial L^n - \{x\}$ . Таким образом, при  $n=2$  всякая квазипараболическая точка касpidальна.

**Теорема 2.16** ([65]). Дискретная группа  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$ ,  $n=2, 3$ , геометрическая конечна тогда и только тогда, когда все ее предельные точки — либо конические, либо касpidальные квазипараболические, и в этом случае любой выпуклый фундаментальный многогранник группы  $\Gamma$  имеет конечное число граней.

При любом  $n$ , во всяком случае, верно, что предельное множество геометрически конечной дискретной группы движений состоит только из конических и касpidальных квазипараболических точек [7], [128].

Но, как показывает простой пример Б. Н. Апанасова [6], при  $n \geq 4$  существуют геометрически конечные дискретные группы движений пространства  $L^n$ , не все выпуклые фундаментальные многогранники которых имеют конечное число граней. Этот пример имеет евклидово происхождение. А именно, если  $\Gamma$  — циклическая дискретная группа движений пространства  $E^3$ , порожденная винтовым движением  $\gamma$  с углом поворота, несоизмеримым с  $\pi$ , то область Дирихле группы  $\Gamma$  будет иметь конечное число граней, если ее центр находится на оси движения  $\gamma$ , и бесконечное — в противном случае. Аналогичная конструкция в пространстве  $L^3$  не приводит к желаемому результату (все области Дирихле будут иметь конечное число граней), но нужный пример в пространстве  $L^4$  (а также в пространстве  $L^n$ ,  $n > 4$ ) получается, если продолжить на  $L^4$  действие описанной выше группы  $\Gamma$ , считая, что пространство  $E^3$  вложено в  $L^4$  в виде орисферы.

## Глава 3

### КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В этой главе термин «кристаллографическая группа» понимается в узком смысле как «равномерная дискретная группа движений евклидова пространства» (см. по этому поводу следствие теоремы 1.11 гл. 1).

#### § 1. Теорема Шёнфлиса — Бибераха

**1.1. Формулировка основной теоремы.** Основой теории кристаллографических групп служит следующая теорема, доказанная впервые Шёнфлисом (1891) в 3-мерном случае и Биберахом (1911) — в  $n$ -мерном. (Современные изложения доказательства этой теоремы см. в [18], [58], [63], [71], [135].)

**Т е о р е м а 1.1.** Всякая кристаллографическая группа содержит подгруппу конечного индекса, состоящую из параллельных переносов.

Группа всех параллельных переносов, содержащихся в кристаллографической группе  $\Gamma$ , есть не что иное, как ядро гомеоморфизма группы  $\Gamma$  в ортогональную группу, сопоставляющего каждому движению  $\gamma \in \Gamma$  его дифференциал (линейную часть)  $d\gamma$ . Поэтому утверждение теоремы равносильно тому, что группа  $d\Gamma$  конечна.

Всякая дискретная группа параллельных переносов пространства  $E^n$  есть свободная абелева группа ранга  $k \leq n$ , порожденная параллельными переносами на какие-то  $k$  линейно независимых векторов. Группа всех параллельных переносов, содержащихся в кристаллографической группе  $\Gamma$ , согласно теореме также является кристаллографической группой (см. пред-

ложение 1.13 гл. 1) и, следовательно, порождается параллельными переносами на векторы какого-то базиса пространства  $\mathbb{R}^n$ . В этом базисе преобразования из группы  $d\Gamma$  записываются целочисленными матрицами. Отсюда следует, что не всякая конечная линейная группа может выступать в роли  $d\Gamma$ . (Более подробно об этом см. п. 2.3).

В пп. 1.2 и 1.3 мы приведем набросок доказательства теоремы 1.1.

**1.2. Коммутаторы ортогональных преобразований и движений.** В алгебре  $L_n(\mathbb{R})$  всех линейных преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$  введем, как обычно, норму по формуле

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|,$$

где  $|x|$  обозначает длину вектора  $x$ . Простое вычисление дает следующую оценку близости к единице коммутатора  $(A, B) = =ABA^{-1}B^{-1}$  двух ортогональных преобразований:

$$\|(A, B) - E\| \leq 2\|A - E\| \|B - E\| \quad (A, B \in O_n). \quad (1)$$

В частности, если  $\|A - E\|, \|B - E\| < 1/2$ , то и  $\|(A, B) - E\| < 1/2$ .

**Лемма 1.2.** Если  $A, B \in O_n$ , причем  $\|B - E\| < \sqrt{2}$ , то из  $(A, (A, B)) = E$  следует, что  $(A, B) = E$ .

◀ Будем рассматривать  $A$  и  $B$  как унитарные преобразования пространства  $\mathbb{C}^n$  и пусть  $V_1, \dots, V_k$  — собственные подпространства преобразования  $A$ . Если  $(A, (A, B)) = E$ , то преобразование  $BAB^{-1}$  коммутирует с  $A$  и, значит, его собственные подпространства  $BV_1, \dots, BV_k$  суть суммы каких-то подпространств, содержащихся в  $V_1, \dots, V_k$ . Если при этом  $BV_i \neq V_i$  для некоторого  $i$ , то существует такой единичный вектор  $x \in V_i$ , что  $Bx \in V_j, j \neq i$ ; но тогда  $|Bx - x| = \sqrt{2}$ , что противоречит условию леммы. ▶

**Следствие.** Если  $A, B \in O_n$ , причем  $\|A - E\|, \|B - E\| < 1/2$ , то из  $(A, \dots, (A, B) \dots) = E$   $k$  раз следует, что  $(A, B) = E$ .

Всякое движение  $\alpha$  пространства  $E^n$  имеет вид

$$\alpha(x) = Ax + a \quad (A \in O_n, a \in \mathbb{R}^n), \quad (2)$$

где  $A = d\alpha$  — его линейная часть, а  $a$  — «переносная» часть (зависящая, конечно, от выбора начала координат). Будем писать  $\alpha = (A, a)$ .

Пусть  $\alpha = (A, a)$  и  $\beta = (B, b)$  — два движения и  $\gamma = (C, c)$  — их коммутатор. Нетрудно видеть, что

$$|c| \leq \|B - E\| |a| + \|A - E\| |b|. \quad (3)$$

В частности, если  $\|A - E\|, \|B - E\| < 1/2$ , то  $|c| < \frac{1}{2}(|a| + |b|)$ .

**1.3. Доказательство основной теоремы.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — линейная оболочка всех векторов, переносы на которые принадле-

жат данной кристаллографической группе  $\Gamma$ . Тогда группа  $\Gamma$  действует в факторпространстве  $E^n/U$  как кристаллографическая группа, не содержащая параллельных переносов. Поэтому мы можем в дальнейшем считать, что уже сама группа  $\Gamma$  не содержит параллельных переносов.

Далее, из компактности группы  $O_n$  следует, что в любой группе  $G \subset O_n$  подгруппа, порожденная всеми преобразованиями  $A \in G$ , для которых  $\|A - E\| < 1/2$ , имеет конечный индекс. В частности, взяв  $G = d\Gamma$ , мы получаем, что подгруппа группы  $\Gamma$ , порожденная всеми движениями  $\alpha \in \Gamma$ , для которых  $\|d\alpha - E\| < \frac{1}{2}$  имеет конечный индекс в  $\Gamma$ . Поэтому в дальнейшем можно считать, что сама группа  $\Gamma$  порождается такими движениями.

Пусть  $\alpha = (A, a)$ ,  $\beta = (B, b)$  — два движения из группы  $\Gamma$ , для которых  $\|A - E\|, \|B - E\| < 1/2$ . Рассмотрим их кратный коммутатор  $\gamma_k = (\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_k, \beta) \dots$ . Его дифференциал равен  $C_k = (A, \dots, (A, B) \dots)$ . Из формулы (1) следует, что  $C_k \rightarrow E$  при  $k \rightarrow \infty$ . В то же время из формулы (3) следует, что переносная часть движений  $\gamma_k$  сходится к параллельному переносу; но так как параллельных переносов в группе  $\Gamma$  нет, то она сходится к  $e$ , и так как группа  $\Gamma$  дискретна, то  $\gamma_k = e$  для некоторого  $k$ . Ввиду следствия леммы 1.2 получаем отсюда, что уже  $\gamma_1 = (\alpha, \beta) = e$ . Таким образом, образующие группы  $\Gamma$  коммутируют друг с другом и, значит, сама группа  $\Gamma$  коммутативна.

Возьмем теперь любое нетождественное движение  $\gamma_0 \in \Gamma$ . Его ось (ГПК, § 2, гл. 5) инвариантна относительно всех коммутирующих с ним движений и, значит, инвариантна относительно группы  $\Gamma$ , что противоречит кристаллографичности. Следовательно,  $\Gamma = \{e\}$  и  $n = 0$ . ►

**1.4. Произвольные дискретные группы движений евклидова пространства.** Предыдущие рассуждения несложно дополнить таким образом, чтобы получить следующее описание произвольных (не обязательно равномерных) дискретных групп движений. (Ср. описание связных групп движений в ГПК, § 3, гл. 5.)

**Теорема 1.3.** Всякая дискретная группа  $\Gamma$  движений евклидова пространства обладает инвариантной плоскостью  $\Pi$ , на которой она действует как кристаллографическая группа. В группе  $\Gamma$  имеется абелева подгруппа конечного индекса, ограничение действия которой на  $\Pi$  является ее изоморфизмом на некоторую (кристаллографическую) группу параллельных переносов плоскости  $\Pi$ .

В качестве  $\Pi$  может быть взята любая минимальная инвариантная плоскость. Она определена однозначно с точностью до параллельного переноса на ортогональный ей вектор, инвариантный относительно группы  $d\Gamma$ .

## § 2. Классификация кристаллографических групп

**2.1. Когомологическое описание.** Согласно теореме 1.1, всякая кристаллографическая группа  $\Gamma$  является расширением группы содержащихся в ней параллельных переносов при помощи конечной группы  $G = d\Gamma \subset O_n$ . Обозначим через  $L$  решетку в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , состоящую из всех векторов, параллельные переносы на которые принадлежат  $\Gamma$ . Ввиду равенства  $\gamma t_a \gamma^{-1} = t_{\gamma(a)}$ , эта решетка инвариантна относительно группы  $G$ . Для каждого  $g \in G$  существует движение  $\gamma \in \Gamma$  вида

$$\gamma(x) = gx + a(g), \quad (4)$$

где вектор  $a(g) \in \mathbb{R}^n$  определен с точностью до прибавления вектора из  $L$ . Тем самым определено отображение

$$\bar{a} : G \rightarrow \mathbb{R}^n/L, \quad g \mapsto a(g) + L. \quad (5)$$

Из того, что произведение двух движений из  $\Gamma$  также принадлежит  $\Gamma$ , следует, что

$$\bar{a}(g_1 g_2) = \bar{a}(g_1) + g_1 \bar{a}(g_2). \quad (6)$$

Это означает, что  $\bar{a}$  — *одномерный коцикл* на группе  $G$  со значениями в группе  $\mathbb{R}^n/L$ .

Обратно, для всякой конечной группы  $G \subset O_n$ , инвариантной относительно нее решетки  $L \subset \mathbb{R}^n$  и одномерного коцикла  $\bar{a}$  на  $G$  со значениями в  $\mathbb{R}^n/L$  движения вида (4) образуют кристаллографическую группу.

При переносе начала координат на вектор  $b$  коцикл  $\bar{a}$  заменяется на коцикл

$$\bar{a}'(g) = \bar{a}(g) + g\bar{b} - \bar{b}, \quad (7)$$

где  $\bar{b} = b + L$ . Такие коциклы называются *когомологичными коциклу  $\bar{a}$* .

Одномерные коциклы на  $G$  со значениями в  $\mathbb{R}^n/L$  образуют абелеву группу (относительно операции сложения значений). Ее факторгруппа по отношению когомологичности называется *группой одномерных когомологий* группы  $G$  со значениями в  $\mathbb{R}^n/L$  и обозначается через  $H^1(G, \mathbb{R}^n/L)$ .

Пусть  $\alpha \in H^1(G, \mathbb{R}^n/L)$  — класс когомологий, содержащий коцикл  $\bar{a}$ . Тройка  $(G, L, \alpha)$  однозначно определяет группу  $\Gamma$ .

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между кристаллографическими группами  $\Gamma$  и тройками  $(G, L, \alpha)$ . В частности, тройкам с  $\alpha = 0$  соответствуют *расщепляемые* (или *симморфные*) кристаллографические группы, которые, при подходящем выборе начала координат, вместе с каждым движением содержат в чистом виде его линейную и переносную части.

Задача классификации всех кристаллографических групп включает в себя задачу классификации кристаллографических групп параллельных переносов, т. е. по существу, решеток в евклидовом векторном пространстве. Этой последней, далеко не тривиальной задачей занимается теория приведения [23], [72]. Однако если игнорировать метрическую структуру, то она станет тривиальной: все решетки в векторном пространстве одинаковы. Поэтому естественно в первую очередь классифицировать кристаллографические группы с точностью до аффинной эквивалентности, т. е. сопряженности в группе всех аффинных преобразований. При такой постановке вопроса кристаллографические группы также можно описывать тройками  $(G, L, \alpha)$ , но пространство  $\mathbb{R}^n$  следует рассматривать просто как векторное пространство (без метрики).

**2.2. Абстрактное строение.** Если рассматривать кристаллографическую группу как абстрактную, то ее подгруппу параллельных переносов можно охарактеризовать как наибольшую абелеву нормальную подгруппу. Поэтому абстрактное описание кристаллографической группы  $\Gamma$  сводится к заданию конечной группы  $G$  автоморфизмов решетки  $L$  и отображения

$$b: G \times G \rightarrow L,$$

$$(g_1, g_2) \mapsto a(g_1 g_2) - a(g_1) - g_1 a(g_2), \quad (8)$$

определяющего правило умножения элементов (4) группы  $\Gamma$ .

Отображение  $b$  представляет собой двумерный коцикл на группе  $G$  со значениями в решетке  $L$ . При добавлении к векторам  $a(g)$  векторов  $c(g) \in L$  коцикл  $b$  заменяется на когомологичный коцикл

$$b'(g_1, g_2) = b(g_1, g_2) + c(g_1, g_2) - c(g_1) - g_1 c(g_2). \quad (9)$$

Таким образом, корректно определен класс когомологий  $\beta \in H^2(G, L)$ . Тройка  $(G, L, \beta)$  и описывает абстрактное строение группы  $\Gamma$ .

Переход от коцикла  $\alpha \in H^1(G, \mathbb{R}^n/L)$  к коциклу  $\beta \in H^2(G, L)$  есть не что иное, как связывающий гомоморфизм  $\delta$  точной последовательности когомологий

$$\rightarrow H^1(G, \mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(G, \mathbb{R}^n/L) \xrightarrow{\delta} H^2(G, L) \rightarrow H^2(G, \mathbb{R}^n) \rightarrow. \quad (10)$$

Поскольку все когомологии конечной группы со значениями в векторном пространстве, за исключением нульмерных, тривиальны, из представленного выше отрезка точной последовательности следует, что  $\delta$  — изоморфизм. Первая из формулируемых ниже теорем является интерпретацией инъективности гомоморфизма  $\delta$ , вторая — интерпретацией его сюръективности.

**Теорема 2.1** (Бибербах, 1911). Две кристаллографические группы изоморфны тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.

**Теорема 2.2** (Цассенхауз, 1948). Для всякого расширения

$\Gamma$  свободной абелевой группы  $L$  ранга  $n$  при помощи конечной группы  $G$ , точно действующей на  $L$ , существует кристаллографическая группа, изоморфная  $\Gamma$ .

**2.3. Этапы классификации.** Согласно предыдущему, классификацию кристаллографических групп можно в принципе провести следующим образом:

1) найти все конечные линейные группы  $G \subset O_n$ , допускающие инвариантную решетку;

2) для каждой такой группы  $G$  найти все инвариантные решетки  $L$ ;

3) для каждой пары  $(G, L)$  вычислить группу когомологий  $H^1(G, \mathbb{R}^n/L)$ ;

4) выяснить, каким классам когомологий отвечают аффинно-эквивалентные кристаллографические группы. (Кристаллографические группы, определяемые тройками  $(G, L, \alpha)$  и  $(G, L, \beta)$  аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда классы  $\alpha$  и  $\beta$  эквивалентны относительно естественного действия в  $H^1(G, \mathbb{R}^n/L)$  нормализатора группы  $G$  в группе автоморфизмов решетки  $L$ .)

Если  $\Gamma$  — кристаллографическая группа, определяемая тройкой  $(G, L, \alpha)$ , то линейная группа  $G$  называется классом группы  $\Gamma$ , а пара  $(G, L)$  — ее арифметическим классом. С матричной точки зрения класс — это группа  $G$ , рассматриваемая с точностью до сопряженности в  $GL_n(\mathbb{R})$  (или в  $O_n$ , что то же самое), а *арифметический класс* — это та же группа, рассматриваемая с точностью до сопряженности в  $GL_n(\mathbb{Z})$  (Вложение  $G \subset GL_n(\mathbb{Z})$  осуществляется путем записи группы  $G$  в базисе решетки  $L$ .)

Термин «арифметический» класс» понимают также как «совокупность всех кристаллографических групп данного (арифметического) класса».

Для нахождения классов кристаллографических групп полезно иметь в виду следующее соображение. Если линейное преобразование сохраняет некоторую решетку, то коэффициенты его характеристического многочлена являются целыми числами. Если при этом оно, например, имеет простой порядок  $p$ , то его характеристический многочлен должен делиться на круговой многочлен  $\Phi_p(t) = t^{p-1} + t^{p-2} + \dots + t + 1$  и, следовательно,  $p \leq n+1$ .

Продемонстрируем сказанное в случае  $n=2$ . Известно, что всякая конечная группа ортогональных преобразований плоскости есть либо циклическая группа  $C_m$ , состоящая из поворотов на углы, кратные  $2\pi/m$ , либо диэдральная группа  $D_m$ , представляющая собой расширение группы  $C_m$  при помощи отражения. Приведенное выше соображение показывает, что группа  $C_m$  или  $D_m$  сохраняет решетку только при  $m=1, 2, 3, 4$  или  $6$ . Таким образом, мы имеем в данном случае 10 классов кристаллографических групп.

Для каждой из найденных групп  $G$ , кроме  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ , имеется единственная, с точностью до действия нормализатора группы  $G$  в  $GL_n(\mathbb{R})$ , инвариантная решетка. Для групп  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  имеется по две такие решетки; их базисные векторы, вместе с осями отражений, входящих в группу, изображены на рис. 11. Таким образом, мы получаем 13 арифметических классов.

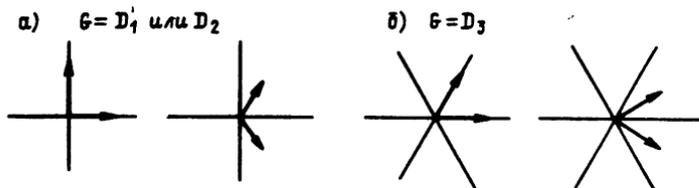


Рис. 11

Всякая кристаллографическая группа  $\Gamma$  класса  $C_m$  расщепляется: достаточно принять за начало координат неподвижную точку движения из  $\Gamma$ , линейная часть которого порождает группу  $G = C_m$ . Из остальных групп могут не расщепляться только группы арифметических классов  $(D_m, L)$ , где  $m=1, 2$  или  $4$ , а  $L$  — прямоугольная решетка, причем при  $m=1$  и  $4$  имеется по одной нерасщепляемой группе, а при  $m=2$  — две.

Рассмотрим, например, случай  $m=2$ . Пусть  $s_1$  и  $s_2$  — отражения относительно ортогональных прямых, порождающие группу  $G = D_2$ , а  $a_1$  и  $a_2$  — лежащие на этих прямых векторы, порождающие решетку  $L$ . Коцикл  $\bar{a}$  на  $G$  со значениями в  $\mathbb{R}^2/L$  задается векторами  $a(s_1)$  и  $a(s_2)$  которые должны удовлетворять условиям

$$a(s_1) + s_1 a(s_1) \in L, \quad a(s_2) + s_2 a(s_2) \in L, \quad (11)$$

вытекающим из соотношений  $s_1^2 = s_2^2 = e$ . С помощью преобразований (7) можно добиться, чтобы  $a(s_1) = \lambda_1 a_1$ ,  $a(s_2) = \lambda_2 a_2$ . Из (11) получаем, что тогда  $2\lambda_1, 2\lambda_2 \in \mathbb{Z}$ . Следовательно,  $H_1(G, \mathbb{R}^2/L) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Учитывая, что при перестановке векторов  $a_1$  и  $a_2$ , которая нормализует группу  $\Gamma$ , переставляются и соответствующие классы когомологий, мы приходим к выводу, что в данном арифметическом классе содержатся 3 неэквивалентные кристаллографические группы. Итак, имеется всего 17 кристаллографических групп движений плоскости.

**2.4. Теорема конечности.** Наиболее трудными из указанных в предыдущем пункте этапов классификации кристаллографических групп являются первые два. Их можно объединить в один — классификацию с точностью до сопряженности конеч-

ных подгрупп группы  $GL_n(\mathbf{Z})$ . Среди таких подгрупп можно выделить группы симметрии решеток в евклидовом векторном пространстве (записанные в базисах этих решеток). Они называются *подгруппами Браве*, по имени кристаллографа, который в 1848 г. перечислил все возможные группы симметрии трехмерных решеток.

Подгруппы Браве можно интерпретировать также как стабилизаторы для естественного действия группы  $GL_n(\mathbf{Z})$  на множестве положительно определенных квадратичных форм от  $n$  переменных. Поэтому для их нахождения может быть использована теория приведения, из которой, в частности, следует, что при любом  $n$  в  $GL_n(\mathbf{Z})$  с точностью до сопряженности имеется лишь конечное число подгрупп Браве [23], [72]. Всякая конечная подгруппа  $GL_n(\mathbf{Z})$ , очевидно, содержится в некоторой подгруппе Браве. Следовательно, и всех конечных подгрупп с точностью до сопряженности имеется лишь конечное число. Это означает, что при фиксированном  $n$  имеется лишь конечное число арифметических классов кристаллографических групп.

С другой стороны, для любого арифметического класса  $(G, L)$  группа  $H^1(G, \mathbf{R}^n/L) \simeq H^2(G, L)$  компактна (как следует из ее первого представления) и дискретна (как следует из второго представления) и, значит, конечна. Отсюда вытекает

**Теорема 2.3** (Биберах, 1911). В любой размерности имеется лишь конечное число кристаллографических групп, рассматриваемых с точностью до аффинной эквивалентности.

Доказательство этой теоремы явилось решением первой части 18-й проблемы Гильберта.

**2.5. Типы Браве.** Из интерпретации подгрупп Браве как стабилизаторов квадратичных форм следует, что пересечение подгрупп Браве также является подгруппой Браве. Поэтому для всякой конечной подгруппы  $G \subset GL_n(\mathbf{Z})$  существует наименьшая содержащая ее подгруппа Браве. Обозначим ее через  $\hat{G}$ .

Если  $\Gamma$  — кристаллографическая группа, определяемая тройкой  $(G, L, -\alpha)$ , то линейная группа  $\hat{G}$  называется *сингонией* (или *голоэдрией*) группы  $\Gamma$ , а пара  $(\hat{G}, L)$  — ее *типом Браве* (или *арифметической голоэдрией*). С матричной точки зрения сингония — это группа  $\hat{G}$ , рассматриваемая с точностью до сопряженности в  $\hat{G}L_n(\mathbf{R})$ , а тип Браве — это та же группа, рассматриваемая с точностью до сопряженности в  $GL_n(\mathbf{Z})$ . При метрической реализации «общего положения» группы  $\Gamma$ , когда группа  $\text{Sym } L$  минимальна, группа  $\hat{G}$  совпадает с  $\text{Sym } L$ .

Термин «сингония (тип Браве)» понимают также как «совокупность всех кристаллографических групп данной сингонии (данного типа Браве)».

Пример. При  $n=2$  имеется 4 сингонии —  $C_2$ ,  $D_2$ ,  $D_4$  и  $D_8$ . Из-за того, что группа  $D_2$  допускает две существенно различные инвариантные решетки (см. рис. 11), сингония  $D_2$  распадается на два типа Браве. Остальные сингонии состоят из одного типа Браве. Таким образом, имеется всего 5 типов Браве.

**2.6. Некоторые результаты классификации.** Кристаллографические группы в  $E^3$  были классифицированы в конце прошлого века Е. С. Федоровым и Шёнфлисом. Подробное описание этих групп см., например, в [37], [56]. Недавно были классифицированы кристаллографические группы в  $E^4$  [70]. Не имея возможности привести здесь эти классификации, приведем лишь некоторый «статистический материал».

В следующей таблице при каждом  $n$  в первых трех строках указывается число подгрупп группы  $GL_n(\mathbf{Z})$ , слева — с точностью до сопряженности в  $GL_n(\mathbf{R})$ , справа — с точностью до сопряженности в  $GL_n(\mathbf{Z})$ . Таким образом, во второй строке находятся число сингоний и число типов Браве, в третьей — число классов и число арифметических классов.

	$n=2$		$n=3$		$n=4$	
Число максимальных конечных подгрупп		2		4		9
Число подгрупп Браве	4	5	7	14	33	64
Число всех конечных подгрупп	10	13	32	73	227	710
Число кристаллографических подгрупп	17		219		4783	

Кроме того, найдены все максимальные конечные подгруппы группы  $GL_n(\mathbf{Z})$  при  $5 \leq n \leq 10$  [51], [52], [144].

**2.7. Евклидовы пространственные формы.** *Евклидовы пространственные формы*, или полные связанные локально плоские римановы многообразия — это многообразия вида  $E^n/\Gamma$ , где  $\Gamma$  — свободно действующая дискретная группа движений. В дальнейшем ради краткости будем называть их плоскими многообразиями.

Ввиду теоремы 1.3, всякое плоское многообразие является векторным расслоением (с плоскими слоями) над компактным плоским многообразием, а из теоремы 1.1 следует, что всякое компактное плоское многообразие может быть накрыто некоторым (плоским) тором.

Отсутствие неподвижных точек у дискретной группы  $\Gamma$  налагает ограничения на группу  $G$  ее линейных частей. В частности, она не должна содержать линейных преобразований не имеющих неподвижных векторов.

Пример. При  $n=2$  группа  $G$  либо тривиальна, либо порождается одним отражением. Следовательно, группа  $\Gamma$  либо тривиальна, либо порождается одним переносом или скользящим отражением, либо порождается двумя переносами или одним переносом и одним скользящим отражением. Таким образом, имеется, с точностью до аффинного изоморфизма, всего 5 двумерных плоских многообразий. Топологически они представляют собой плоскость, цилиндр, лист Мёбиуса, тор и бутылку Клейна соответственно.

Известны все трехмерные плоские многообразия [135], а также все четырехмерные компактные плоские многообразия [73]. С точностью до аффинного изоморфизма имеется 10 трехмерных компактных плоских многообразий и 75 четырехмерных.

Имеется следующая очевидная кохомологическая интерпретация отсутствия неподвижных точек у кристаллографической группы.

Предложение 2.4. Кристаллографическая группа  $\Gamma$ , определяемая тройкой  $(G, L, \alpha)$  не имеет неподвижных точек тогда и только тогда, когда ограничение класса кохомологий  $\alpha$  на любую циклическую подгруппу простого порядка группы  $G$  не равно нулю.

Чарлап [73] получил классификацию свободно действующих кристаллографических групп (в любой размерности), группа линейных частей которых является циклической группой простого порядка.

### § 3. Однородные разбиения евклидова пространства

**3.1. Теорема конечности.** Основная теорема об однородных разбиениях евклидова пространства состоит в том, что таких разбиений (при фиксированной размерности) имеется в некотором смысле лишь конечное число.

Для точной формулировки этого результата дадим одно определение. Пусть  $(\mathcal{F}_1, \Gamma_1)$  и  $(\mathcal{F}_2, \Gamma_2)$  — однородные разбиения пространства на выпуклые многогранники, нормализованные, если нужно, путем введения фиктивных граней,  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  — множества их граней (т. е. граней всех составляющих их многогранников). Назовем разбиения  $(\mathcal{F}_1, \Gamma_1)$  и  $(\mathcal{F}_2, \Gamma_2)$  *комбинаторно эквивалентными*, если существуют такая биекция  $\alpha: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ , сохраняющая отношение инцидентности, и такой изоморфизм  $\varphi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ , что  $\alpha(\gamma F) = \varphi(\gamma)\alpha(F)$  для любых  $F \in \mathcal{F}_1$ ,  $\gamma \in \Gamma_1$ .

Теорема 3.1 (Б. Н. Делоне и Н. Н. Сандакова, [30]). При любом  $n$  имеется лишь конечное число комбинаторно не эквивалентных нормальных однородных разбиений пространства  $E^n$  на ограниченные выпуклые многогранники.

Фактически в [30] доказана ограниченность чисел граней многогранников, участвующих в однородных разбиениях; но отсюда уже легко следует утверждение теоремы.

Получена полная классификация однородных разбиений евклидовой плоскости на ограниченные выпуклые многоугольники [26], [29], [31]. Имеется 97 комбинаторных типов таких разбиений, в том числе 47 нормальных.

**3.2. Параллелоэдры.** Нормализованные фундаментальные многогранники кристаллографических групп параллельных переносов пространства  $E^n$  называются *параллелоэдрами*. Они составляют однородные разбиения, все элементы которых получаются друг из друга параллельными переносами. Имеется следующее описание параллелоэдров [1], [12], [82]

Теорема 3.2. Ограниченный выпуклый многогранник (быть может, с фиктивной гранкой) является параллелоэдром тогда и только тогда, когда

- 1) он центрально-симметричен;
- 2) каждая его  $(n-1)$ -мерная грань центрально-симметрична;

3) его проекция на плоскость параллельно любой  $(n-2)$ -мерной грани  $f$  является либо четырехугольником, либо шестиугольником, причем каждая вершина этой проекции является проекцией некоторой  $(n-2)$ -мерной грани (параллельной  $f$ ).

Каждой четверке параллельных  $(n-2)$ -мерных граней параллелоэдра отвечает соотношение Пуанкаре вида  $s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} = e$ , а каждой шестерке — пара соотношений Пуанкаре вида  $s_1 s_2 s_3 = e$ ,  $s_1 s_3 s_2 = e$ .

## Глава 4

### ФУКСОВЫ ГРУППЫ

Дискретная группа движений плоскости Лобачевского называется *фуксовой*, если она состоит из движений, сохраняющих ориентацию. Для любой дискретной группы  $\Gamma$  движений плоскости Лобачевского ее подгруппа  $\Gamma^+$  индекса  $\leq 2$ , состоящая из движений, сохраняющих ориентацию, является фуксовой группой. Тем самым изучение произвольных дискретных групп движений плоскости Лобачевского в значительной степени сводится к изучению фуксовых групп.

## § 1. Фуксовы группы с топологической точки зрения

**1.1. Разветвленные накрытия.** Будем называть (топологической) *поверхностью* связанное двумерное ориентируемое топологическое многообразие. Известно, что односвязная поверхность гомеоморфна либо сфере, либо плоскости. Любая поверхность  $S$  может быть накрыта односвязной поверхностью  $X$  (универсальное накрытие), гомеоморфной плоскости, если поверхность  $S$  отлична от сферы. Если  $p: X \rightarrow S$  — универсальное накрытие, то группа накрытия  $\Gamma$ , изоморфная фундаментальной группе поверхности  $S$ , действует на  $X$  дискретно и без неподвижных точек. Поверхность  $S$  гомеоморфна  $X/\Gamma$ .

Рассмотрим на комплексной плоскости единичный диск  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ , верхнюю полуокружность  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  и отображение  $\varphi_k: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $\varphi_k(z) = z^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) (соответственно  $\varphi_\infty: \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $\varphi_\infty(z) = e^{2\pi iz}$ ).

Непрерывное отображение  $p$  поверхности  $X$  в поверхность  $S$  называется (*обобщенным*) *разветвленным накрытием*, если

- а) дополнение  $S - p(X)$  дискретно;
- б) для каждой точки  $s \in S$  существует такая окрестность  $\mathcal{O}$ , что  $p^{-1}(\mathcal{O})$  есть объединение попарно не пересекающихся открытых множеств  $U_i$ , для каждого из которых отображение  $p: U_i \rightarrow \mathcal{O}$  топологически изоморфно одному из стандартных отображений  $\varphi_{k_i}$  ( $k_i \in \mathbb{N}$  или  $k_i = \infty$ ), если считать, что  $s$  соответствует нулю диска  $\mathcal{D}$ . Числа  $k_i$  называют *индексами ветвления* отображения  $p$  над точкой  $s$ .

Если  $\Gamma$  — дискретная группа гомеоморфизмов поверхности  $X$ , то отображение  $\pi: X \rightarrow X/\Gamma$  является разветвленным накрытием [24].

**Примеры.** 1. Отображение  $z \mapsto z^k$  сферы Римана  $\hat{\mathbb{C}}$  в себя является топологическим разветвленным накрытием  $p: S^2 \rightarrow S^2$  с точками ветвления  $0, \infty$  и индексом ветвления  $k$  над каждой из них.

2. Отображение  $z \mapsto e^z$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  в сферу Римана  $\hat{\mathbb{C}}$  дает пример топологического разветвленного накрытия сферы плоскостью с точками ветвления  $0, \infty$  и индексом ветвления  $\infty$  над каждой из них.

3. Пусть  $X$  — одно из трех пространств  $S^2, E^2$  или  $\mathbb{L}^2$ . Рассмотрим в  $X$  треугольник с углами  $\pi/k_1, \pi/k_2, \pi/k_3$  ( $k_i$  — натуральное число или символ  $\infty$ ) (см. ГПК) и обозначим через  $\Gamma$  группу, порожденную отражениями в сторонах этого треугольника, а через  $\Gamma^+$  — ее подгруппу индекса 2, состоящую из собственных движений. Тогда  $p: X \rightarrow X/\Gamma^+ \simeq S^2$  — разветвленное накрытие сферы, у которого три точки ветвления с индексами ветвления  $k_1, k_2, k_3$  соответственно.

4. Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{L}^2$  четырехугольник с углами  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2k}$  и группу, порожденную отражениями  $R_1, R_2, R_3, R_4$  в сторонах этого четырехугольника (образующие перечислены в порядке их следования по часовой стрелке). Тогда если  $\Gamma$  — подгруппа, порожденная движениями  $R_1R_3$  и  $R_2R_4$ , то, как легко проверить, отображение  $p: \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2/\Gamma \simeq T^2$  является разветвленным накрытием тора, с единственной точкой ветвления индекса  $k$ .

Разветвленное накрытие  $p: X \rightarrow S$  называется *накрытием Галуа*, если отображение  $p: X \rightarrow p(X)$  изоморфно отображению факторизации  $X$  по некоторой дискретной группе  $\Gamma$  гомеоморфизмов, называемой *группой Галуа накрытия*  $p$ .

Индексы ветвления накрытия Галуа над точкой  $s \in S$  все одинаковы. Если  $s = p(x)$ , то они равны порядку стабилизатора  $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma: \gamma x = x\}$ ; если  $s \notin p(X)$ , то они равны  $\infty$ .

**1.2. Сигнатура и униформизация поверхности с сигнатурой. Плоские группы.** *Сигнатурой* на поверхности  $S$  называется такое отображение  $\tau: S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , что множество  $\text{Supp } \tau = \{s \in S | \tau(s) \neq 1\}$ , называемое *носителем сигнатуры*  $\tau$ , дискретно. Точки носителя называются отмеченными. Сигнатура называется конечной, если множество  $\text{Supp } \tau$  конечно. Сигнатура компактной поверхности автоматически конечна. Поверхность без сигнатуры бывает удобно рассматривать как поверхность с тривиальной сигнатурой

$$(\text{Supp } \tau = \emptyset).$$

*Униформизацией поверхности  $S$  с сигнатурой  $\tau$*  называется пара  $(X, p)$ , где  $X$  — односвязная поверхность, а  $p: X \rightarrow S$  — разветвленное накрытие Галуа, индексы ветвления которого над любой точкой  $s \in S$  равны  $\tau(s)$ . Группа Галуа накрытия  $p$  называется *группой униформизации* поверхности  $S$ .

Теорема 1.1 (теорема о топологической униформизации [136], [138]). Для любой поверхности  $S$  с сигнатурой, за исключением указанных ниже случаев, униформизация существует и единственна с точностью до изоморфизма. Исключительные случаи, для которых униформизации не существует, таковы:

- 1) сфера с одной отмеченной точкой,
- 2) сфера с двумя отмеченными точками, индексы которых различны.

◀ Обозначим через  $S'$  поверхность  $S - \text{Supp } \tau$ , и пусть  $p': R \rightarrow S'$  — универсальное накрытие с группой Галуа  $\Gamma'$ . Тогда  $p': R \rightarrow S$  является разветвленным накрытием Галуа с группой  $\Gamma'$ , причем все индексы ветвления равны  $\infty$ , если только  $S$  не есть сфера с одной отмеченной точкой. Для всякой точки  $s \in \text{Supp } \tau$  рассмотрим такую ее окрестность  $\mathcal{O}$ , что если  $U_s$  — связная компонента прообраза  $(p')^{-1}(\mathcal{O})$ , то отображение  $p': U_s \rightarrow \mathcal{O}$  топологически изоморфно стандартному отображению

$\delta_\infty : \mathbf{H} \rightarrow \mathcal{D}$  и, значит, является отображением факторизации по бесконечной циклической группе  $\Gamma'(U_s)$ .

Далее, обозначим через  $\bar{R}$  частичную компактификацию пространства  $R$ , которая получается, если для всех таких  $s \in \text{Supp } \tau$ , что  $\tau(s) \neq \infty$ , к каждой компоненте  $U_s$  добавить «бесконечно удаленную» точку таким образом, чтобы при гомеоморфизме  $U_s \rightarrow \mathbf{H}$  проколотым окрестностям этой точки соответствовали полуплоскости  $\text{Im } z > c$ . Ясно, что пространство  $R$  односвязно, действие группы  $\Gamma'$  естественно продолжается на  $\bar{R}$ ; при этом стабилизатор бесконечно удаленной точки компоненты  $U_s$  равен  $\Gamma'(U_s)$ .

Пусть  $\gamma'_s$  — образующая группы  $\Gamma'(U_s)$  и  $N$  — нормальная подгруппа группы  $\Gamma'$ , порожденная элементами  $(\gamma'_s)^{\tau(s)}$  для всех точек  $s \in \text{Supp } \tau$  таких, что  $\tau(s) \neq \infty$ . Тогда  $X = \bar{R}/N$  — односвязное пространство (пространство  $\bar{R}$  односвязно, а группа  $N$  порождается элементами, действующими на  $\bar{R}$  с неподвижными точками) [62] и естественное отображение  $p : X \rightarrow X/(\Gamma'/N)$  является искомым накрытием с группой Галуа  $\Gamma = \Gamma'/N$ . Чтобы это доказать, нужно только проверить, что образ  $\gamma_s$  в группе  $\Gamma$  элемента  $\gamma'_s$  имеет порядок  $\tau(s)$  (а priori он мог бы иметь меньший порядок, делящий  $\tau(s)$ ). В силу условий теоремы имеет место один из случаев:

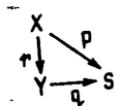
1) точку  $s$  можно включить в топологический диск, содержащий либо еще одну точку ветвления с таким же индексом, либо еще две точки ветвления;

2) точку  $s$  можно включить в «ручку», не содержащую других точек ветвления.

Стягивая дополнение к диску или к «ручке» в точку, получим поверхность  $S''$  с сигнатурой, униформизация которой была построена в примерах пункта 1.1. Группа  $\Gamma$  эпиморфно отображается на группу униформизации  $\Gamma''$  поверхности  $S''$ . Но в группе  $\Gamma''$  образ элемента  $\gamma_s$  имеет порядок  $\tau(s)$ . Следовательно, такой же порядок и у элемента  $\gamma_s$  в группе  $\Gamma$ . ►

Униформизация  $p : X \rightarrow S$  поверхности  $S$  с сигнатурой обладает следующим свойством универсальности.

Теорема 1.2. Для любого разветвленного накрытия  $q : Y \rightarrow S$ , индексы ветвления которого над любой точкой  $s \in S$  делят  $\tau(s)$  (считается, что символ  $\infty$  делится на все числа), существует такое разветвленное накрытие Галуа  $r : X \rightarrow Y$ , что диаграмма



коммутативна.

Группы униформизации поверхностей с сигнатурой, рассматриваемые как дискретные группы гомеоморфизмов односвязных поверхностей, называются *плоскими группами*.

**1.3. Плоские группы конечного типа.** Будем так называть плоские группы, отвечающие компактным поверхностям с сигнатурой. Рассмотрим группу  $\Gamma$  униформизации компактной поверхности  $S$  рода  $g$  с сигнатурой  $\tau$ ,  $\text{Supp } \tau = \{s_1, \dots, s_r\}$ ,  $\tau(s_i) = k_i$ . Набор  $(g; k_1, \dots, k_r)$  назовем сигнатурой группы  $\Gamma$  и будем писать  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$ . Сигнатура полностью описывает группу  $\Gamma$  как дискретную группу гомеоморфизмов.

Следуя схеме доказательства теоремы 1.1 и используя теорему Ван Кампена [104], можно получить задание группы  $\Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  образующими и соотношениями.

**Теорема 1.3** ([138]). Плоская группа  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  допускает задание образующими и соотношениями

$$\Gamma = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_r \mid \prod_{i=1}^g (\alpha_i, \beta_i) \prod_{k=1}^r \gamma_j = 1,$$

$\gamma_j^{k_j} = 1$ , если  $k_j \neq \infty$   $\rangle$  (как обычно,  $(\alpha\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ ).

Систему образующих, указанную в теореме 1.3, назовем *канонической системой образующих* плоской группы  $\Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$ .

Следующий результат указывает на существование «хорошей» фундаментальной области для действия плоской группы  $\Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  на односвязной поверхности  $X$ .

**Теорема 1.4** ([138]). Фундаментальная область действия группы  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  на  $X$  может быть выбрана в виде топологического многоугольника  $P$  со сторонами  $a_1', b_1, a_1, b_1', \dots, a_g', b_g, a_g, b_g', c_1, c_1', \dots, c_r, c_r'$  (стороны перечислены в порядке их следования при обходе границы  $P$ , скажем, против часовой стрелки; если  $k_i = \infty$ , то вершина, общая сторонам  $c_i$  и  $c_i'$ , отсутствует). При этом  $a_i = \alpha_i(a_i')$ ,  $b_i = \beta_i(b_i')$ ,  $c_i = \gamma_i(c_i')$ , где  $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_r)$  — каноническая система образующих группы  $\Gamma$ , и стороны отождествляются с изменением ориентации, индуцируемой обходом  $P$  (см. рис. 12).

Фундаментальный многоугольник, выбранный в теореме 1.4, называется *каноническим фундаментальным многоугольником* плоской группы  $\Gamma$ .

Элементы, сопряженные степеням образующих  $\gamma_j$ , где  $k_j = \infty$ , называются *граничными элементами* группы  $\Gamma$ .

**1.4. Алгебраическое строение плоских групп.** В дальнейшем под плоской группой мы будем понимать плоскую группу конечного типа.

Плоскую группу  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  назовем группой *компактного типа*, если все  $k_i$  конечны, и *некомпактного типа* в противном случае.

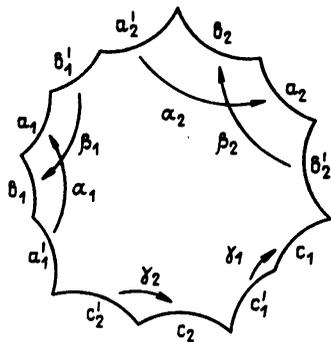


Рис. 12

Из теоремы 1.3 легко следует, что плоская группа некомпактного типа является свободным произведением циклических подгрупп. Группа компактного типа таковой не является, за исключением группы  $\Gamma(0; k, k)$ , которая сама циклическая.

Назовем число  $\chi(\Gamma) = -2g + 2 - \sum_{i=1}^r (1 - 1/k_i)$  (обобщенной) эйлеровой характеристикой группы  $\Gamma$ .

Теорема 1.5 ([123]). Пусть  $\Gamma'$  — подгруппа конечного индекса плоской группы  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$ . Тогда

а)  $\Gamma'$  — плоская группа, причем если  $\Gamma$  — группа некомпактного (компактного) типа, то и  $\Gamma'$  — группа некомпактного (соответственно, компактного) типа;

б) если  $[\Gamma : \Gamma'] = n$ , то сигнатура  $(g'; k'_1, \dots, k'_p)$  группы  $\Gamma'$  определяется по следующему правилу: пусть подстановка множества  $\Gamma/\Gamma'$ , осуществляемая левым сдвигом на канонический образующий элемент  $\gamma_i$  группы  $\Gamma$ , разлагается в произведение независимых циклов длин  $l_{i1}, \dots, l_{iq_i}$  ( $\sum_j l_{ij} = n$ ). Тогда показатели  $k'_i$  группы  $\Gamma'$  — это в точности числа  $k_i/l_{ij}$ , отличные от единицы;

в)  $\chi(\Gamma') = n\chi(\Gamma)$  (формула Римана — Гурвица).

◀ Для доказательства нужно рассмотреть каноническое разветвленное накрытие  $p: X/\Gamma' \rightarrow X/\Gamma$ . Тогда  $q_i$  — это число образов  $i$ -той отмеченной точки поверхности  $S = X/\Gamma$ , а  $l_{i1}, \dots, l_{iq_i}$  — индексы ветвления отображения  $p$  над этой точкой.

Пункт в) следует из стандартных комбинаторных соображений, связанных с подсчетом эйлеровой характеристики поверхности  $S' = X/\Gamma'$  (детали см. в [123]). ▶

**З а м е ч а н и е.** Пересечение всех подгрупп конечного индекса в плоской группе равно  $\{1\}$ . Кроме того, всякая подгруппа бесконечного индекса в плоской группе является свободным произведением циклических подгрупп [94].

Любая плоская группа содержит подгруппу конечного индекса без кручения (следует из теоремы 1.14 гл. 1 и теоремы 2.1). Тип и сигнатура подгруппы конечного индекса в плоской группе удовлетворяют необходимым условиям а) и в) теоремы 1.5. На первый взгляд эти условия довольно грубы. Тем удивительнее следующая

**Теорема 1.6** ([84]). Пусть  $\Gamma'$  — бесконечная плоская группа без кручения. Группа  $\Gamma'$  тогда и только тогда вкладывается в данную плоскую группу  $\Gamma$  в качестве подгруппы индекса  $n$ , когда  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  являются одновременно группами компактного или некомпактного типа и  $\chi(\Gamma') = n\chi(\Gamma)$ .

**Следствие 1.7** ([84]). Пусть  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  — бесконечная плоская группа и  $r \geq 3$ . Тогда минимальный индекс содержащейся в ней подгруппы без кручения равен  $n = 2^l$ , где  $l$  — наименьшее общее кратное конечных показателей  $k_1, \dots, k_s$  группы  $\Gamma$ ;  $\varepsilon = 1$ , если  $l$  четно и числа  $l/k_q$  нечетные для нечетного числа индексов  $q$ ,  $1 \leq q \leq s$ , и  $\varepsilon = 0$  в противном случае.

**Пример.** Минимальный индекс подгруппы без кручения в группе  $\Gamma(0; 2, 3, 7)$  равен 84.

## § 2. Геометрия фуксовых групп

### 2.1. Введение метрики.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  — плоская группа конечного типа. Тогда  $\Gamma$  изоморфна (как группа гомеоморфизмов) дискретной группе движений одного из трех пространств постоянной кривизны:  $S^2$ ,  $E^2$  или  $L^2$ . Знак кривизны пространства  $X$  совпадает со знаком  $\chi(\Gamma)$ . В частности, если  $\chi(\Gamma) < 0$ , то  $\Gamma$  изоморфна фуковой группе. Сигнатуры плоских групп, для которых  $\chi(\Gamma) \geq 0$ , указаны в следующей таблице.

$\chi(\Gamma) > 0$	$\chi(\Gamma) = 0$
$(0; k, k)$ ( $k < \infty$ ) $(0; 2, 2, k)$ ( $k < \infty$ ) $(0; 2, 3, 3)$ $(0; 2, 3, 4)$ $(0; 2, 3, 5)$	$(0; \infty, \infty)$ $(0; 2, 2, \infty)$ $(0; 2, 3, 6)$ $(0; 2, 4, 4)$ $(0; 3, 3, 3)$ $(0; 2, 2, 2, 2)$ $(1)$

◀ Покажем, что каноническую фундаментальную область, о которой идет речь в теореме 1.4, можно выбрать в виде выпуклого многоугольника в одном из пространств постоянной кривизны. Сначала рассмотрим случай, когда  $\chi(\Gamma) < 0$ . В этом случае (ГПК, § 2, гл. 3) на плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}^2$  существует выпуклый описанный  $(4g+2r)$ -угольник со сторонами  $a'_1, b_1, a_1, b'_1, \dots, a'_g, b_g, a_g, b'_g, c_1, c_1, \dots, c_r, c'_r$ , все углы которого равны  $\frac{2\pi}{4g+r}$ , кроме углов между сторонами  $c_j, c'_j$ , которые равны соответственно  $\frac{2\pi}{k_j}$  ( $j=1, \dots, r$ ). Заметим, что у такого многоугольника все стороны  $a_i, q_i, a'_i, q'_i$  ( $i=1, \dots, g$ ) равны между собой по признаку равенства прямоугольных гиперболических треугольников. По той же причине попарно равны стороны  $c_j$  и  $c'_j$  ( $j=1, \dots, r$ ). Следовательно, в качестве гомеоморфизмов  $\alpha_i, \beta_j$  и  $\gamma_j$  из канонической системы образующих можно выбрать движения плоскости  $\mathbb{L}^2$ . Отметим, что построенный фундаментальный многоугольник является многоугольником Дирихле  $D(x_0)$ , где  $x_0$  — центр вписанной окружности. Во всех остальных случаях для сигнатур, указанных в таблице, несложно предъявить канонический выпуклый фундаментальный многоугольник на сфере  $S^2$  или на евклидовой плоскости  $E^2$ . ▶

Так как любая конечная группа движений имеет в  $\mathbb{L}^2$  неподвижную точку (ГПК, § 3, гл. 5), то из теоремы 2.1 следует, в частности, что циклические подгруппы  $\langle \gamma_j \rangle$ ,  $k_j < \infty$ , образуют полную систему представителей классов сопряженных максимальных конечных циклических подгрупп в плоской группе  $\Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$ .

Из теоремы 1.3 следует, что любая плоская группа конечного типа конечнопорождена. Верно и обратное утверждение.

**Теорема 2.2 ([89]).** Пусть  $\Gamma$  — конечнопорожденная дискретная группа движений одного из трех пространств  $X=S^2, E^2$  или  $\mathbb{L}^2$ . Тогда  $\Gamma$  — плоская группа конечного типа.

Утверждение этой теоремы очевидно для  $X=S^2$ , почти очевидно для  $X=E^2$  и весьма неочевидно для  $X=\mathbb{L}^2$ . В последнем случае оно вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 2.3 ([89]).** Любая конечнопорожденная фуксова группа геометрически конечна.

Заметим, что в теореме 2.1 речь идет о реализации допустимой сигнатуры некоторой фуксовой группой. Справедливо более сильное утверждение.

**Теорема 2.4 ([138]).** Пусть  $\Gamma$  — фуксова группа с сигнатурой  $\tau=(g; k_1, \dots, k_r)$ . Тогда у группы  $\Gamma$  существует канонический выпуклый фундаментальный многоугольник.

В заключение отметим, что аналогичная теория (включающая понятия сигнатуры, канонической системы образующих

и т. д.) развита и для дискретных групп, содержащих несобственные движения [98], [138].

**2.2. Область Нильсена фуксовой группы.** Эйлерова характеристика  $\chi(\Gamma)$  плоской группы  $\Gamma$  имеет интересный геометрический смысл. Чтобы это объяснить, мы введем важное понятие *области Нильсена*  $K(\Gamma)$  дискретной группы  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$ . По определению,  $K(\Gamma)$  — выпуклая оболочка множества предельных точек группы  $\Gamma$  (см. § 2, гл. 2).

Для фуксовой группы  $\Gamma$  область  $K(\Gamma)$  устроена просто. А именно, дополнение  $\partial L^2 - \Lambda(\Gamma)$  есть объединение счетного числа непересекающихся дуг — компонент связности. Соединим концы каждой такой дуги с прямой линией в  $L^2$  и рассмотрим ограничиваемую ею замкнутую полуплоскость в  $L^2$ , граница которой есть дуга абсолюта, дополнительная к  $s$ . Пересечение всех таких полуплоскостей и есть область Нильсена  $K(\Gamma)$ . Если  $\Gamma$  — неэлементарная фуксова группа (см. § 2, гл. 2), то открытое ядро  $K(\Gamma)^0$  области Нильсена является открытым выпуклым  $\Gamma$ -инвариантным множеством. Оно может быть охарактеризовано как наименьшее из таких множеств.

Фуксова группа  $\Gamma$  называется *группой первого рода*, если множество  $\Lambda(\Gamma)$  ее предельных точек совпадает с  $\partial L^2$ . В противном случае она называется *группой второго рода*. Для фуксовой группы первого рода  $K(\Gamma) = L^2$ .

**Теорема 2.5 ([89]).** Пусть  $\Gamma$  — неэлементарная фуксова группа с сигнатурой  $\tau = (g; k_1, \dots, k_r)$ . Тогда объем факторпространства  $K(\Gamma)/\Gamma$  конечен и равен  $-2\pi\chi(\Gamma)$ .

◀ В проективной модели  $L^2$  рассмотрим канонический выпуклый фундаментальный многоугольник  $P$  группы  $\Gamma$ , и для каждой пары его сторон, пересекающихся в точке, лежащей за абсолютом, построим их общий перпендикуляр. Этот перпендикуляр является инвариантной прямой гиперболического граничного элемента, который отождествляет рассматриваемые стороны многоугольника  $P$ . Полученный таким образом из  $P$  «усеченный» выпуклый многоугольник служит фундаментальной областью для действия  $\Gamma$  в  $K(\Gamma)$ . Его площадь конечна и равна  $-2\pi\chi(\Gamma)$  (см. ГПК, § 2, гл. 3). ▶

Верно и обратное утверждение.

**Теорема 2.6 ([89]).** Если объем факторпространства  $K(\Gamma)/\Gamma$  конечен, то фуксова группа  $\Gamma$  геометрически конечна, или, что эквивалентно, конечнопорождена.

### § 3. Пространство Тейхмюллера фуксовой группы

Сигнатура различает фуксовы группы топологически, но, вообще говоря, не метрически, т. е. две фуксовы группы с одинаковой сигнатурой не обязаны быть сопряженными в группе движений плоскости Лобачевского. В связи с этим возникает

задача описания классов эквивалентных реализаций плоской группы данной сигнатуры в виде дискретной группы движений.

**3.1. Пространство Тейхмюллера и пространство модулей абстрактной группы.** Пусть  $G$  — связная группа Ли, а  $\Gamma$  — абстрактная группа. Обозначим через  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  множество гомоморфизмов группы  $\Gamma$  в группу  $G$  с топологией поточечной сходимости: последовательность  $h_n \in \text{Hom}(\Gamma, G)$  сходится к гомоморфизму  $h$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\gamma) = h(\gamma)$  для каждого  $\gamma \in \Gamma$ .

Рассмотрим в  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  подмножество  $\mathcal{W}(\Gamma, G)$  таких гомоморфизмов  $h$ , что

- 1)  $h$  является мономорфизмом;
- 2) группа  $h(\Gamma)$  дискретна в  $G$ ;
- 3) факторпространство  $G/h(\Gamma)$  компактно.

Фундаментальный результат А. Вейля гласит, что это подмножество, открыто в  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  (см. [23, § 6, гл. 1]). С другой стороны, рассмотрим множество  $S(G)$  всех дискретных подгрупп в группе Ли  $G$ , снабженное топологией Шаботи: если  $\Gamma_n$  — последовательность групп, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n = \Gamma$  означает, что:

а) каждый элемент  $\gamma \in \Gamma$  есть предел последовательности элементов  $\gamma_n \in \Gamma_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;

б) если  $\gamma_n \in \Gamma_n$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$ , то  $\gamma \in \Gamma$  (условия а) и б) означают что две дискретные группы близки, если их пересечения с любым компактом  $K \subset G$  близки).

В пространстве  $S(G)$  рассмотрим подмножество  $S(\Gamma, G)$ , состоящее из равномерных дискретных подгрупп, изоморфных группе  $\Gamma$ . Имеется естественное отображение  $\tau: \mathcal{W}(\Gamma, G) \rightarrow S(\Gamma, G)$ , ставящее в соответствие эпиморфизму  $h \in \mathcal{W}(\Gamma, G)$  равномерную дискретную подгруппу  $h(\Gamma) \in S(\Gamma, G)$ .

На пространствах  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  и  $\mathcal{W}(\Gamma, G)$  естественно действует группа  $\text{Aut } G$  по правилу:  $\sigma(h) = \sigma \circ h$  для любого  $\sigma \in \text{Aut } G$ , а также группа  $\text{Aut } \Gamma$  по правилу  $\varphi(h) = h \circ \varphi^{-1}$ , для любого  $\varphi \in \text{Aut } \Gamma$ . При этом сама группа  $G$  действует сопряжениями:  $g(h)(\gamma) = gh(\gamma)g^{-1}$ ,  $h \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . Кроме того, действие группы  $\text{Aut } G$  перестановочно с действием группы  $\text{Aut } \Gamma$ .

**Теорема 3.1** ([100]). Группа  $\text{Aut } \Gamma$  действует как дискретная группа гомеоморфизмов пространства  $\mathcal{W}(\Gamma, G)$ , причем это действие свободно. Естественное отображение  $\tau$  индуцирует гомеоморфизм факторпространства  $\mathcal{W}(\Gamma, G)/\text{Aut } \Gamma$  и пространства  $S(\Gamma, G)$  (первое пространство снабжается фактортопологией, а второе — топологией Шаботи).

Факторпространство  $T(\Gamma, G)$  (или просто  $T(\Gamma)$ , если ясно, о какой группе Ли идет речь)  $= \mathcal{W}(\Gamma, G)/\text{Aut } G$  называется *пространством Тейхмюллера* группы  $\Gamma$ .

Факторпространство  $M(\Gamma, G)$  (или просто  $M(\Gamma)$ )  $= S(\Gamma, G)/\text{Aut } G$  называется *пространством модулей* группы  $\Gamma$ .

Представленная ниже коммутативная диаграмма фиксирует взаимоотношения введенных пространств и групп, на них действующих

$$\begin{array}{ccc}
 W(\Gamma, G) & \xrightarrow{\text{Aut } \Gamma} & S(\Gamma, G) \\
 \text{Aut } G \downarrow & \searrow \text{Aut } G \times \text{Aut } \Gamma & \downarrow \text{Aut } G \\
 T(\Gamma) = T(\Gamma, G) & \longrightarrow & M(\Gamma, G) = M(\Gamma)
 \end{array}$$

(стрелки — факторизации по указанным группам).

Из коммутативности представленной диаграммы следует, что  $M(\Gamma) = T(\Gamma)/\text{Aut } \Gamma$ . Группа  $\text{Aut } \Gamma$  действует на  $T(\Gamma)$  неэффективно: ядро неэффективности заведомо содержит группу  $\text{Int } \Gamma$  внутренних автоморфизмов. Факторгруппа  $\text{Mod } \Gamma = \text{Aut } \Gamma / \text{Int } \Gamma$  является дискретной группой преобразований пространства  $T(\Gamma)$  и называется *модулярной группой*.

Наконец, отметим, что если группа  $\Gamma$  конечно представима, а  $G$  — вещественная алгебраическая группа, то топологическое пространство  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  можно снабдить структурой вещественного алгебраического многообразия (см. [23, § 6, гл. 1]).

**3.2. Пространство Тейхмюллера фундаментальной группы замкнутой поверхности.** Пусть  $\Gamma$  — фундаментальная группа замкнутой поверхности рода  $g$ . Тогда плоская группа  $\Gamma = \Gamma(g)$  может быть реализована как дискретная группа движений одного из трех пространств:  $S^2$  — если  $g=0$ ,  $E^2$  — если  $g=1$  и  $\mathbb{L}^2$  — если  $g>1$ . Пусть  $G$  — группа собственных движений соответствующего пространства. В первом случае группа  $\Gamma$  тривиальна, а пространство  $T(\Gamma)$ , очевидно, состоит из одной точки.

Во втором случае  $\Gamma$  — свободная абелева группа с двумя образующими, а пространство  $T(\Gamma)$  естественно отождествляется с верхней полуплоскостью.

◀ Гомоморфизм  $h \in W(\Gamma)$  определяется упорядоченной парой линейно независимых векторов плоскости, т. е. такой парой комплексных чисел  $(p, q)$ , что  $p/q = \tau$ ,  $\text{Im } \tau \neq 0$ . Группа  $\text{Aut } G$  изоморфна группе подобий плоскости, не обязательно сохраняющих ориентацию. Поэтому пары  $(p, q)$  и  $(p', q')$  определяют одну и ту же точку пространства Тейхмюллера тогда и только тогда, когда  $\tau = \tau'$  или  $\tau = \overline{\tau'}$ , что и позволяет отождествить пространство  $T(\Gamma)$  с верхней полуплоскостью. ▶

**Теорема 3.2.** Если  $\Gamma = \Gamma(g)$ ,  $g > 1$ ,  $(G = \text{Isom}_+ \mathbb{L}^2 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{R}))$ , то

а) пространство  $W(\Gamma)$  является вещественным аналитическим многообразием размерности  $6g-3$ ;

б) пространство  $T(\Gamma)$  является вещественным аналитическим многообразием размерности  $-\text{З}\chi(\Gamma) = 6g-6$ .

◀ Выберем в группе  $\Gamma$  каноническую систему образующих  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ , подчиненных соотношению  $\prod_{i=1}^g (\alpha_i \beta_i) = 1$ . Тем

самым любой элемент  $h \in \text{Hom}(\Gamma, G)$  полностью определяется набором  $\{h(\alpha_i) = A_i, h(\beta_i) = B_i\}$  из  $2g$  элементов группы  $G$ , удовлетворяющих соотношению  $\prod_{i=1}^g (A_i, B_i) = 1$ .

Отметим, что все  $A_i$  и  $B_i$  ( $i=1, \dots, g$ ) — некоммутирующие между собой гиперболические движения из группы  $G$ . Рассмотрим отображение  $\psi: G^{2g} \rightarrow G$ ,  $\psi(X_1, Y_1, \dots, X_g, Y_g) = \prod_{i=1}^g (X_i, Y_i)$ .

Для доказательства а) достаточно проверить, что ранг отображения  $\psi$  в точке  $(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g)$  равен 3. Но это есть следствие такой леммы.

**Лемма 3.3.** Пусть  $A$  и  $B$  — некоммутирующие гиперболические движения группы  $G$ . Тогда ранг отображения  $\psi: G^2 \rightarrow G$ ,  $\psi(X, Y) = XYX^{-1}Y^{-1}$  в точке  $(A, B)$  равен 3.

◀ Отождествим с помощью левых сдвигов касательные пространства во всех точках группы  $G$  с ее касательной алгеброй  $\text{Лиг}$ . Тогда  $d\psi(A, B)(\xi, \eta) = BA[(B^{-1}\xi B - \xi) + (\eta - A^{-1}\eta A)]A^{-1}B^{-1}$ , где  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ . Обозначим через  $\mathcal{L}_A$  ( $\mathcal{L}_B$ ) подпространства в  $\mathfrak{g}$ , натянутые на векторы вида  $A^{-1}\eta A - \eta$  (соответственно  $(B^{-1}\xi B - \xi)$ ). Ясно, что  $\dim \mathcal{L}_A = \dim \mathcal{L}_B = 2$ , и непосредственно проверяется, что если гиперболические движения  $A$  и  $B$  не коммутируют, то  $\mathcal{L}_A \neq \mathcal{L}_B$ . ▶

Далее, группа  $\text{Aut } G \simeq PGL_2(\mathbb{R})$  действует свободно на вещественном аналитическом многообразии  $W(\Gamma)$ . Следовательно,  $T(\Gamma)$  — вещественное аналитическое многообразие размерности  $(6g-3)-3=6g-6$ . ▶

**Теорема 3.4** ([86]). Пусть  $\Gamma = \Gamma(g)$ ,  $g > 1$ . Тогда пространство  $T(\Gamma)$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^{6g-6}$ .

Мы напомним, следуя [83], [122], доказательство этой классической теоремы, которое недавно предложил Тёрстон. Его подход требует знакомства с другой моделью пространства Тейхмюллера (исторически, кстати, более ранней).

Пусть  $S$  — компактная поверхность (возможно, с краем) рода  $g > 1$ . Через  $\text{Diff } S$  обозначим группу диффеоморфизмов поверхности  $S$ , а через  $\text{Diff}^0 S$  — ее связную компоненту, состоящую из диффеоморфизмов, изотопных тождественному. Пусть  $M(S)$  — множество полных гиперболических метрик постоянной отрицательной кривизны ( $-1$ ) на поверхности  $S$ , снабженное естественной топологией. Всякий диффеоморфизм  $q: S \rightarrow S$  индуцирует отображение  $q^*: M(S) \rightarrow M(S)$ , которое определяется требованием, чтобы диффеоморфизм  $q$  был изометрией  $(S, q^*(m)) \rightarrow (S, m)$ ,  $m \in M(S)$ . Таким образом, группа  $\text{Diff}^0 S$  естественно действует на  $M(S)$ . Факторпространство  $T(S) = M(S)/\text{Diff}^0 S$  называется пространством Тейхмюллера поверхности  $S$ .

Далее, заметим, что выбор гиперболической метрики  $m \in M(S)$  на  $S$  определяет гомоморфизм  $h: \Gamma \rightarrow \text{Isom}_+ \mathbb{L}^2$ , с точ-

ностью до движения пространства  $\mathbb{L}^2$ , т. е. определяет элемент  $[h] \in T(\Gamma)$ . Отображение  $[m] \rightarrow [h]$  корректно определено и является гомеоморфизмом пространств  $T(S)$  и  $T(\Gamma)$  (здесь используется такой топологический факт: диффеоморфизм поверхности  $S$ , индуцирующий внутренний автоморфизм фундаментальной группы, изотопен тождественному [59]).

Переходим теперь к доказательству теоремы 3.4.

◀ Основная деталь в конструкции Тёрстона — это «панты». Панты  $\mathcal{P}$  — это компактная поверхность с краем, топологически изоморфная сфере с тремя дырками. Пусть  $m$  — полная гиперболическая метрика на  $\mathcal{P}$ . Обозначим через  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  компоненты края  $\partial\mathcal{P}$ , и через  $l_m(\gamma_j)$  — длину геодезической, гомотопной кривой  $\gamma_j \in \partial\mathcal{P}$ ,  $j=1, 2, 3$  (в каждом гомотопическом классе простых замкнутых кривых на поверхности с полной гиперболической метрикой содержится единственная геодезическая [59]).

Предложение 3.5. Отображение  $l: T(\mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$ ,  $l([m]) = (l_m(\gamma_1), l_m(\gamma_2), l_m(\gamma_3))$  является гомеоморфизмом.

◀ Три попарно расходящиеся прямые в  $\mathbb{L}^2$  образуют идеальный треугольник. Каждый идеальный треугольник определяет панты  $(\mathcal{P}, m)$ , которые получаются как факторпространство  $\mathbb{L}^2/\Gamma^+$ , где  $\Gamma$  — группа, порожденная отражениями в сторонах треугольника. При этом длины  $l_m(\gamma_j)$  равны удвоенным расстояниям между его сторонами. Каждые панты  $(\mathcal{P}, m)$  однозначно (с точностью до собственного движения  $\mathbb{L}^2$ ) определяют идеальный треугольник, которым, в свою очередь, определяются с точностью до изометрии.

◀ Рассмотрим в  $\mathbb{L}^2$  полный прообраз геодезических, гомотопных границе пантов. Он состоит из попарно расходящихся прямых, которые разбивают плоскость на идеальные треугольники [44]. Треугольник, ограниченный общими перпендикулярами к сторонам любого из них, является искомым. ▶

Остается заметить, что идеальный треугольник определяет расстояния между его сторонами, и эти расстояния могут принимать произвольные положительные значения (ГПК, § 3, гл. 3). ▶

Любую поверхность  $S$  рода  $g > 1$  можно разбить на  $(2g-2)$  пантов. Пример такого разбиения для поверхности рода 3 представлен на рис. 13.

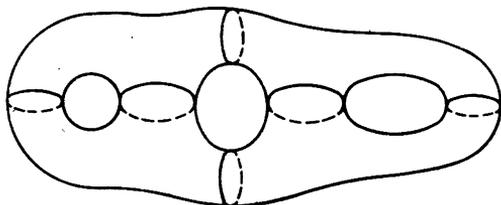


Рис. 13

Фиксируем разбиение поверхности  $S$  на  $(2g-2)$  пантов  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{2g-2}$  и обозначим  $(3g-3)$  граничные кривые этого разбиения через  $\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3}$ . Ясно, что каждый класс  $[m] \in T(S)$  может быть представлен такой гиперболической метрикой, в которой  $\gamma_j$  — геодезическая,  $j=1, \dots, 3g-3$ . Из предложения 3.5 легко следует

**Предложение 3.6.** Отображение  $l: T(S) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$ ,  $[m] \mapsto (l_m(\gamma_1), \dots, l_m(\gamma_{3g-3}))$  корректно определено и сюръективно.

Опишем теперь некоторое естественное действие группы  $\mathbb{R}^{3g-3}$  на пространстве  $T(S)$ . С этой целью ориентируем кривые  $\gamma_j$  и выберем слева от каждой граничной кривой  $\gamma_j$  «воротник»  $\gamma_j \times [0, 1]$ . Можно считать, что построенные воротники не пересекаются. Если  $m \in M(S)$ , то для любого  $t \in \mathbb{R}$  определим диффеоморфизм  $\varphi_j(m, t)$  воротника  $\gamma_j \times [0, 1]$  на себя (скручивание Дена), полагая:

а)  $\varphi_j(m, t) = \text{id}$  в окрестности  $\gamma_j \times \{1\}$ ;

б)  $\varphi_j(m, t)$  — изометрия на  $\gamma_j$ , причем подъем  $\varphi_j(m, t)$  на универсальную накрывающую  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  воротника есть сдвиг на  $tl_m(\gamma_j)$  на  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . Скручивание Дена приводит к новой метрике  $\varphi_j^*(m, t)(m)$  на поверхности, которая совпадает со старой вне воротника  $\gamma_j \times [0, 1]$ .

Для любого набора  $(t_1, \dots, t_{3g-3}) \in \mathbb{R}^{3g-3}$  через  $\Phi(m, t_1, \dots, t_{3g-3})$  обозначим метрику, возникающую на  $S$ , после применения описанной процедуры в окрестности каждой геодезической  $\gamma_j$ ,  $j=1, \dots, 3g-3$ .

**Теорема 3.7** ([122]). Отображение  $l: T(S) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$  есть главное  $\mathbb{R}^{3g-3}$ -расслоение.

В частности, у отображения  $l$  есть непрерывное глобальное сечение  $s: (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \rightarrow T(S)$ , и для каждого  $[m] \in T(S)$  существует единственная точка  $(t_1^{(m)}, \dots, t_{3g-3}^{(m)}) \in \mathbb{R}^{3g-3}$ , такая, что  $[m] = [\Phi(s \circ l[m], t_1^{(m)}, \dots, t_{3g-3}^{(m)})]$ . При этом отображение

$$T(S) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}, [m] \rightarrow (l([m]), t_1^{(m)}, \dots, t_{3g-3}^{(m)})$$

есть гомеоморфизм (зависящий от  $s$ ). Это и доказывает теорему 3.4. ►

Помимо естественной вещественной аналитической структуры пространство Тейхмюллера фундаментальной группы замкнутой поверхности рода  $g \geq 1$  обладает еще целым рядом замечательных структур: комплексной, кэлеровой, симплектической, финслеровой. Каждая из них играет свою роль в аналитической (алгебраической) геометрии и анализе (см. [59], [85], [100]).

Рассмотрим теперь плоскую группу  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  с  $\chi(\Gamma) < 0$ , и отметим в ней некоторое число, скажем  $t$ , классов сопряженных граничных элементов. Обозначим через  $W_t(\Gamma)$  множество таких гомоморфизмов  $h: \Gamma \rightarrow G = PSL_2(\mathbb{R})$ , что

- а)  $h$  — мономорфизм;
- б) группа  $h(\Gamma)$  дискретна;
- в) граничные элементы отмеченных классов переходят при гомоморфизме  $h$  в гиперболические движения, а остальные граничные элементы — в параболические движения.

**Теорема 3.8** ([59]). Пространство Тейхмюллера  $T_t(\Gamma) = W_t(\Gamma)/\text{Aut } G$  является вещественным аналитическим многообразием размерности  $n = 6g - 6 + t + 2r$ .

**3.3. Фуксовы группы и римановы поверхности.** Пусть  $S$  — компактная риманова поверхность с сигнатурой. Забывая ее комплексную структуру и применяя (в неисключительных случаях) теорему 1.1, мы получаем плоскую группу униформизации  $\Gamma$ , действующую на односвязной поверхности  $X$ . Но на  $X$  существует единственная комплексная структура, при которой гомеоморфизм  $p: X \rightarrow X/\Gamma = S$  является голоморфным отображением. По теореме Пуанкаре—Кёбе односвязная риманова поверхность  $X$  изоморфна либо сфере Римана  $\hat{\mathbb{C}}$ , либо комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , либо верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$ . Таким образом, мы приходим к *аналитической теореме униформизации*.

**Теорема 3.9** ([138]). Пусть  $S$  — неисключительная компактная риманова поверхность рода  $g$  с сигнатурой  $\tau$ . Существует такая (единственная с точностью до сопряженности) дискретная группа  $\Gamma = \Gamma(g; k_1, \dots, k_r)$  аналитических автоморфизмов односвязной римановой поверхности  $X$ , что  $X/\Gamma = S$ . При этом  $X = \hat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{H}$ , если  $\chi(\Gamma) > 0, = 0, < 0$  соответственно.

Отметим, что и обратно, если  $\Gamma$  — дискретная группа собственных движений одного из трех пространств  $X = S^2, E^2$  или  $L^2$ , то элементы  $\Gamma$  являются автоморфизмами стандартных комплексных структур на этих пространствах. Поэтому факторпространство  $S = X/\Gamma$  является одномерным комплексным многообразием, т. е. римановой поверхностью (с сигнатурой).

◀ В самом деле, стабилизатор  $\Gamma_x$  любой точки  $x \in X$  — циклическая группа конечного порядка. Поэтому в некоторой окрестности неподвижной точки  $x$  накрытие  $p: X \rightarrow S$  изоморфно отображению  $\phi_x(z) = z^k$ , и, следовательно,  $p(x)$  является неособой точкой на  $S$ . ▶

Если в формулировке теоремы 1.2 объявить все стрелки аналитическими отображениями, то мы получим утверждение об *универсальном свойстве аналитической униформизации* в категории римановых поверхностей и их (разветвленных) аналитических накрытий.

**3.4. Расширения фуксовых групп. Максимальные фуксовы группы.** В 1982 году Керкхофф, опираясь на оригинальные методы, придуманные Тёрстоном для изучения пространств Тейхмюллера, доказал следующую теорему.

**Теорема 3.10** ([97]). Пусть  $\Delta$  — абстрактная группа, содержащая в качестве нормальной подгруппы конечного индек-

са равномерную фуксову группу  $\Gamma$ . Если естественный гомоморфизм  $\Delta \rightarrow \text{Aut } \Gamma$  является мономорфизмом, то группа  $\Delta$  изоморфна некоторой фуксовой группе.

Результат этой теоремы долгое время был известен как *гипотеза Нильсена*. Она была подтверждена во многих частных случаях. Сам Нильсен доказал ее при условии, что  $\Delta/\Gamma$  — циклическая группа (по поводу истории вопроса см. [137]).

Без ограничения общности можно считать, что группа  $\Gamma$  не имеет кручения. Тогда на геометрическом языке теорема 3.10 означает, что любая конечная подгруппа модулярной группы  $\text{Mod } \Gamma$  имеет неподвижную точку в пространстве  $T(\Gamma)$  [137].

Конечно порожденная фуксова группа называется *максимальной*, если она не содержится ни в какой большей фуксовой группе. Допустимую сигнатуру  $\tau$  назовем максимальной, если существует максимальная фуксова группа  $\Gamma$  сигнатуры  $\tau$ . Можно показать, что в этом случае почти все фуксовы группы сигнатуры  $\tau$  максимальны (немаксимальные группы образуют в пространстве  $T(\Gamma)$  подпространство меньшей размерности).

Пример. Так как каждая компактная поверхность рода 2 допускает гиперэллиптическую инволюцию, то сигнатура (2) не максимальна: любая фуксова группа такой сигнатуры содержится в качестве нормальной подгруппы индекса 2 в фуксовой группе сигнатуры  $(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ .

Все немаксимальные сигнатуры фуксовых групп перечислены в [124]. Список получается путем сравнения размерностей пространств Тейхмюллера фуксовой группы  $\Gamma$  и ее допустимого (абстрактного) расширения  $\Gamma'$ .

## Глава 5

### ГРУППЫ ОТРАЖЕНИИ

Дискретные группы отражений выделяются среди дискретных групп движений простотой своего геометрического описания и, как следствие, — простым видом определяющих соотношений. С другой стороны, они естественным образом связаны с различными геометрическими и алгебраическими объектами (правильные многогранники и правильные разбиения на правильные многогранники, полупростые группы Ли, алгебраические поверхности типа КЗ и пр.).

В этой главе мы будем широко пользоваться теорией остроугольных многогранников, изложенной в ГПК, глава 6. Под отражением будет всегда пониматься отражение относительно гиперплоскости. Термин «*группа отражений*» будет означать «группа, порожденная отражениями».

## § 1. Основные понятия и теоремы

**1.1. Многогранники Кокстера.** Наиболее простой тип фундаментального многогранника дискретной группы движений  $\Gamma$  (см. § 1 главы 2) получается в том случае, когда для каждого  $i$  преобразование смежности  $s_i$  есть отражение относительно гиперплоскости грани  $F_i$ . В этом случае слово Пуанкаре, отвечающее обходу вокруг  $(n-2)$ -мерной грани  $F_{ij} = F_i \cap F_j$ , имеет вид  $(s_i s_j)^{m_{ij}}$  (см. рис. 14), причем угол между гранями  $F_i$  и  $F_j$  равен  $\frac{\pi}{m_{ij}}$ , а  $s_i s_j$  есть поворот на  $\frac{2\pi}{m_{ij}}$  вокруг плоскости грани  $F_{ij}$ . Определяющие соотношения группы  $\Gamma$  имеют вид

$$s_i^2 = e, \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = e.$$

Если грани  $F_i$  и  $F_j$  не смежны, то следует считать, что  $m_{ij} = \infty$ ).

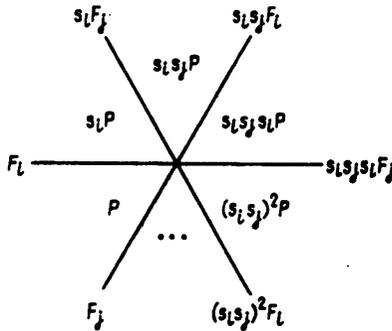


Рис. 14

**Определение 1.1.** (Обобщенный) выпуклый многогранник

$$P = \bigcap_{i \in I} H_i^-$$

называется (обобщенным) многогранником Кокстера, если для любых различных  $i, j$ , таких, что гиперплоскости  $H_i$  и  $H_j$  пересекаются, двугранный угол  $H_i^- \cap H_j^-$  является целой частью  $\pi$ .

Всякий многогранник Кокстера является остроугольным многогранником (см. ГПК, гл. 6); следовательно, гиперплоскости его несмежных граней не пересекаются.

Гиперплоскости  $(n-1)$ -мерных граней выпуклого многогранника будем называть его стенками.

**Теорема 1.2.** Пусть  $P$  — (обобщенный) многогранник Кокстера и  $\Gamma(P)$  — группа, порожденная отражениями относительно его стенок. Тогда  $\Gamma(P)$  — дискретная группа движений и  $P$  — ее фундаментальный многогранник. Стабилизатор в  $\Gamma(P)$  любой точки  $x \in P$  (в том числе бесконечно удаленной,

если  $X = L^n$ ) порождается отражениями относительно тех стенок многогранника  $P$ , которые содержат точку  $x$ .

Если  $P$  — обычный многогранник, то эта теорема представляет собой частный случай теоремы 1.8, теоремы 1.2 и предложения 1.7 главы 2. В общем случае она может быть доказана так же, как соответствующая теорема для линейных групп отражений [15], [69], либо выведена из этой последней с помощью векторной модели. Единственное, что при таком подходе требует отдельного доказательства — это то, что многогранники  $\gamma P$ ,  $\gamma \in \Gamma(P)$ , покрывают пространство  $X$ ; но это вытекает из следующей общей леммы.

**Лемма 1.3.** Пусть  $P$  — произвольный (обобщенный) выпуклый многогранник и  $\Gamma(P)$  — группа, порожденная отражениями относительно его стенок. Тогда многогранники  $\gamma P$ ,  $\gamma \in \Gamma(P)$ , покрывают пространство  $X$ .

◀ Докажем вначале, что  $X' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma(P)} \gamma P$  — открытое множество.

Для этого проверим, что у любой точки  $x_0 \in P$  имеется окрестность, содержащаяся в  $X'$ . Пусть  $\Gamma_0(P)$  — группа, порожденная отражениями относительно стенок многогранника  $P$ , содержащих  $x_0$ , и пусть  $r$  — минимум расстояний от точки  $x_0$  до не содержащих ее граней многогранника  $P$ . Доказывая лемму индукцией по  $\dim X$  и применяя индуктивное предположение к пересечению многогранника  $P$  со сферой радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$ , мы получаем, что эта сфера, а значит, и вся ее внутренность, покрывается многогранниками  $\gamma P$ ,  $\gamma \in \Gamma_0(P)$ , и, тем самым, содержится в  $X'$ .

Предположим теперь, что  $X' \neq X$ . Пусть  $x_0$  — какая-либо внутренняя точка многогранника  $P$  и  $x$  — ближайшая к ней точка замкнутого множества  $X \setminus X'$ . Так как  $x \notin P$ , то существует стенка многогранника  $P$ , разделяющая  $x_0$  и  $x$ . Пусть  $y$  — точка, симметричная  $x$  относительно этой стенки. Очевидно, что  $y \notin X'$  и что  $\rho(x_0, y) < \rho(x_0, x)$ ; но это противоречит выбору точки  $x$ .

**1.2. Дискретные группы отражений.** Пусть  $\Gamma$  — дискретная группа движений, порожденная отражениями (*дискретная группа отражений*). Очевидно, что семейство зеркал всех отражений, принадлежащих группе  $\Gamma$ , локально конечно и инвариантно относительно  $\Gamma$ . Следовательно, оно разбивает пространство на обобщенные выпуклые многогранники, каким-то образом переставляемые группой  $\Gamma$ . Мы будем называть их камерами группы  $\Gamma$ .

Камеры, имеющие общую  $(n-1)$ -мерную грань, будем называть смежными. Смежные камеры переставляются отражением относительно гиперплоскости их общей грани. Отсюда следует, что любую камеру можно перевести в любую другую преобразованием из группы  $\Gamma$ .

Предложение 1.4. Пусть  $\Gamma$  — дискретная группа отражений и  $P$  — какая-либо ее камера. Тогда  $P$  — обобщенный многогранник Кокстера и  $\Gamma = \Gamma(P)$ ; в частности,  $P$  — фундаментальный многогранник группы  $\Gamma$ .

◀ Предположим, что стенки  $H_i$  и  $H_j$  камеры  $P$  имеют непустое пересечение и двугранный угол  $H_i \cap H_j$  (содержащий  $P$ ) не является целой частью  $\pi$ . Тогда существует такое  $k$ , что гиперплоскость  $(s_i s_j)^k H_i$  или  $(s_i s_j)^k H_j$  (являющаяся зеркалом некоторого отражения из группы  $\Gamma$ ) проходит внутри угла  $H_i \cap H_j$  и, следовательно, пересекает  $P^0$ . Это противоречит определению камеры. Значит,  $P$  — многогранник Кокстера. Ясно, что  $\Gamma(P) \subset \Gamma$ .

Если какая-либо камера получается из  $P$  преобразованием  $\gamma \in \Gamma(P)$ , то отражения относительно ее стенок, будучи сопряжены отражениям относительно стенок камеры  $P$  при помощи элемента  $\gamma$ , принадлежат  $\Gamma(P)$ . Отсюда, в свою очередь, следует, что все камеры, смежные с  $\gamma P$ , также получаются из  $P$  преобразованиями из группы  $\Gamma(P)$ . Рассуждая таким образом, можно постепенно установить, что все камеры получаются из  $P$  преобразованиями из группы  $\Gamma(P)$  и все отражения из группы  $\Gamma$  принадлежат  $\Gamma(P)$ . Так как по условию группа  $\Gamma$  порождается отражениями, то  $\Gamma = \Gamma(P)$ . ▶

Таким образом, всякая дискретная группа порождается отражениями относительно стенок некоторого многогранника Кокстера.

Приведенные соображения полезны и для изучения дискретных групп движений, содержащих отражения, но, быть может, ими не порожденных.

Назовем подгруппой отражений дискретной группы движений  $\Gamma$  и обозначим через  $\Gamma_r$  подгруппу, порожденную всеми отражениями, содержащимися в  $\Gamma$ .

Предложение 1.5 ([129]). Пусть  $\Gamma$  — произвольная дискретная группа движений,  $\Gamma_r$  — ее подгруппа отражений и  $P$  — камера группы  $\Gamma_r$ . Тогда  $\Gamma_r$  — нормальная подгруппа группы  $\Gamma$  и

$$\Gamma = \Gamma_r \lambda H,$$

где  $H = \Gamma \cap \text{Sym } P$ .

**1.3. Схемы Кокстера.** Многогранники Кокстера удобно описываются на языке схем Кокстера. Будем называть графом одномерный симплициальный комплекс, а подграфом какого-либо графа — подкомплекс, содержащий вместе с любыми двумя смежными вершинами соединяющее их ребро. Далее, назовем *схемой* граф, каждому ребру которого приписан некоторый положительный вес. *Подсхемой* какой-либо схемы будем называть подграф, каждому ребру которого приписан тот же вес, что и в самой схеме. Число вершин схемы  $S$  будем называть ее *порядком* и обозначать через  $|S|$ .

Схемы могут служить для описания симметричных матриц с единицами на диагонали и неположительными элементами вне диагонали. А именно, будем считать, что схеме  $S$  с вершинами  $v_1, \dots, v_n$  отвечает симметричная матрица  $A = (a_{ij})$ , в которой  $a_{ii} = 1$  при всех  $i$ , а элемент  $a_{ij}$  при  $i \neq j$  равен весу ребра  $v_i v_j$ , взятому со знаком минус, если вершины  $v_i$  и  $v_j$  смежны, и нулю — в противном случае. Матрица  $A$  определена с точностью до одинаковой перестановки строк и столбцов. Подсхемам схемы  $S$  отвечают главные подматрицы матрицы  $A$ . Матрица  $A$  неразложима тогда и только тогда, когда схема  $S$  связна.

*Определителем (рангом, индексами инерции) схемы будем называть определитель (ранг, индексы инерции) соответствующей симметричной матрицы.*

**Определение 1.6.** *Схемой остроугольного многогранника  $P$  называется схема, соответствующая его матрице Грама  $G(P)$ .*

Иными словами, это схема, вершины которой соответствуют стенкам многогранника  $P$ , причем две вершины соединяются ребром тогда и только тогда, когда соответствующие стенки не ортогональны, и вес ребра, взятый со знаком минус, равен косинусу угла между этими стенками, если они пересекаются, единице, если они параллельны, и гиперболическому косинусу расстояния между ними, если они расходятся (в случае пространства Лобачевского).

**Определение 1.7.** *Схемой Кокстера называется схема, в которой вес каждого ребра либо имеет вид  $\cos \frac{\pi}{m}$ , где  $m \geq 3$  — целое число, либо  $\geq 1$ . (Можно считать, что весу 1 соответствует значение  $m = \infty$ ).*

Из данных определений ясно, что остроугольный многогранник является многогранником Кокстера тогда и только тогда, когда его схема является схемой Кокстера.

Графически ребро схемы Кокстера изображается следующим образом:

если вес равен  $\cos \frac{\pi}{m}$  —  $(m-2)$ -кратной линией или простой линией с отметкой  $m$ ;

если вес равен 1 — жирной линией или простой линией с отметкой  $\infty$ ;

если вес больше 1 — пунктирной линией с отметкой, равной весу (обычно эта отметка опускается).

Число  $m-2$  называется кратностью ребра с весом  $\cos \frac{\pi}{m}$ . Кратность ребра с весом  $\geq 1$  считается бесконечной.

**1.4. Группы отражений на сфере и в евклидовом пространстве.** Связная схема Кокстера называется *эллиптической* (соответственно *параболической*), если отвечающая ей сим-

метричная матрица положительно определена (соответственно положительно полуопределена и вырождена). Произвольная схема Кокстера называется эллиптической или параболической, если таковыми являются все ее связные компоненты.

Согласно ГПК, теорема 1.7 главы 6, невырожденные  $n$ -мерные сферические (соотв. евклидовы) многогранники Кокстера описываются схемами Кокстера ранга  $n+1$  (соответственно ранга  $n$ ), все связные компоненты которых — эллиптические (соответственно эллиптические или параболические). При этом невырожденные сферические многогранники Кокстера являются симплексами, а евклидовы — прямыми произведениями симплексов и симплицальных конусов. В частности, ограниченные евклидовы многогранники Кокстера являются прямыми произведениями симплексов и описываются параболическими схемами Кокстера.

Классификация связных эллиптических и параболических схем Кокстера в принципе сводится к подсчету определителей. Она была получена Кокстером в 1934 г. [77]. Список этих схем, вместе с их общепринятыми обозначениями, приведен в таблицах 1 и 2 соответственно. Нижний индекс в обозначении схемы есть ее ранг, который в таблице 1 равен порядку, а в таблице 2 — на единицу меньше порядка. В последнем столбце таблицы 1 указаны порядки соответствующих (конечных) групп отражений.

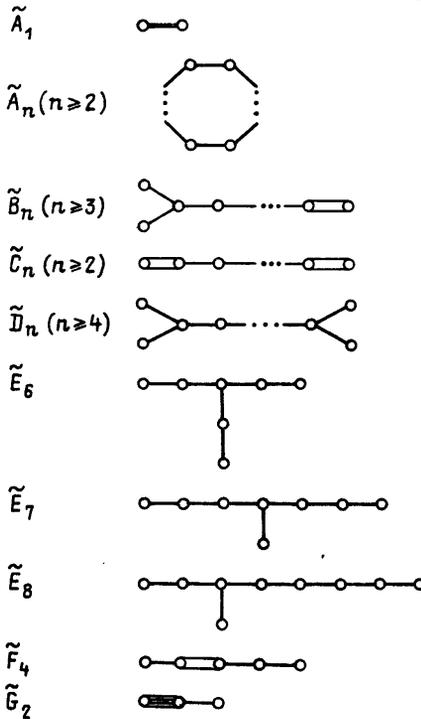
Таблица 1

Связные эллиптические схемы Кокстера

$A_n (n \geq 1)$		$(n+1)!$
$B_n$ или $C_n$ ( $n \geq 2$ )		$2^n \cdot n!$
$D_n (n \geq 4)$		$2^{n-1} \cdot n!$
$E_6$		$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$
$E_7$		$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
$E_8$		$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
$F_4$		1152
$G_2^{(m)}$		$2m$
$H_3$		120
$H_4$		14400

Таблица 2

Связные параболические схемы Кокстера



Группа  $\Gamma$  движений пространства  $E^n$ , соответствующая схеме  $\tilde{L}_n$  из таблицы 2, является полупрямым произведением конечной группы  $\Gamma_0$ , соответствующей схеме  $L_n$  из таблицы 1, и коммутативной группы, порожденной параллельными переносами на некоторые векторы, ортогональные стенкам камеры группы  $\Gamma_0$ .

## § 2. Группы отражений в пространстве Лобачевского

2.1. Общие свойства. Схема Кокстера называется гиперболической, если ее отрицательный индекс инерции равен 1.

Согласно ГПК, теорема 2.2 главы 6, неразложимые невырожденные многогранники Кокстера в пространстве  $L^n$  описываются связными гиперболическими схемами Кокстера ранга  $n+1$ . При этом ввиду ГПК, теоремы 2.3 и 2.5 главы 6, граням такого многогранника соответствуют эллиптические подсхемы его схемы Кокстера (в частности, вершинам — эллипти-

ческие подсхемы ранга  $n$ ), а бесконечно удаленным вершинам — параболические подсхемы ранга  $n-1$ .

Отметим, что многогранники Кокстера, как и вообще все остроугольные многогранники, являются простыми в своих обычных гранях (ГПК, теорема 1.8 гл. 6), а в окрестности любой бесконечно удаленной вершины имеют комбинаторное строение конуса над прямым произведением симплексов (ГПК, п. 2.2, гл. 6).

Ввиду теоремы Андреева (ГПК, теорема 2.6 гл. 5) ограниченный многогранник Кокстера в  $L^n$  при  $n \geq 3$  однозначно (с точностью до движения) определяется своим комбинаторным строением и двугранными углами. Из теоремы о сильной жесткости (см. § 1, гл. 7) аналогичное утверждение может быть получено и для многогранников Кокстера конечного объема. Это означает, что при описании многогранников Кокстера конечного объема в пространстве  $L^n$ ,  $n \geq 3$ , отметки на пунктирных ребрах их схем Кокстера могут опускаться.

Из предыдущего следует, что при любом  $n \geq 3$  в пространстве  $L^n$  имеется не более чем счетное число многогранников Кокстера конечного объема. Их классификация в настоящее время не получена, но кажется возможной. Основные результаты, относящиеся к этой проблеме (равносильной классификации кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского), приведены в п.п. 2.2—2.5.

**2.2. Кристаллографические группы отражений на плоскости и в трехмерном пространстве Лобачевского.** Классификация кристаллографических групп отражений на плоскости Лобачевского была в сущности получена Пуанкаре и Диком в 1882 г. Фундаментальный многоугольник такой группы может иметь любое число  $k \geq 3$  сторон и любые углы  $\frac{\pi}{m_1}, \dots, \frac{\pi}{m_k}$  (где  $m_i$  — целое  $\geq 2$  или  $\infty$ ), лишь бы

$$\frac{1}{m_1} + \dots + \frac{1}{m_k} < k - 2$$

(см. ГПК, теорема 2.8 гл. 3); при этом он зависит еще от  $k-3$  вещественных параметров.

Описание кристаллографических групп отражений в трехмерном пространстве Лобачевского в принципе следует из описания остроугольных многогранников, полученного Е. М. Андреевым (ГПК, теоремы 2.7 и 2.8 гл. 5).

В частности, из этого описания следует, что в  $L^3$  существуют ограниченные многогранники Кокстера, комбинаторное строение которых в некотором смысле сколь угодно сложно. Например, если у многогранников какого-либо простого комбинаторного типа (см. ГПК, п. 2.2, гл. 5) отсутствуют треугольные и четырехугольные грани, а также тройки парно смежных граней, не сходящихся в одной вершине, то в этом комби-

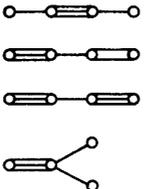
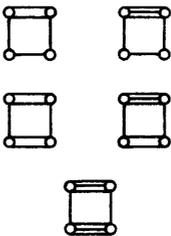
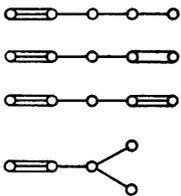
наторном типе существуют ограниченные многогранники, у которых все двугранные углы прямые и которые, тем самым, являются многогранниками Кокстера. (Серию примеров такого рода впервые построил Лёбелл [142] в 1931 г.)

В пространстве  $L^3$  существуют также ограниченные многогранники Кокстера, имеющие сколь угодно малые двугранные углы. Например, при любом  $m \geq 7$  существует треугольная призма, углы между боковыми гранями которой равны  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  и  $\frac{\pi}{m}$ , одно из оснований ортогонально всем боковым граням, а другое ортогонально тем двум из них, которые образуют между собой угол  $\frac{\pi}{m}$ , и образует угол  $\frac{\pi}{3}$  с третьим. (Несколько серий примеров такого рода впервые построил В. С. Макаров в 1965 г.)

2.3. Ланнеровские и квазиланнеровские группы. Нетрудно перечислить ограниченные симплексы Кокстера в пространстве  $L^n$  при любом  $n$ . Они описываются связными гиперболически-

Таблица 3

Ланнеровские схемы

$n$	Схемы
2	 $(2 \leq k, l, m < \infty, 1/k + 1/l + 1/m < 1)$
3	 
4	 

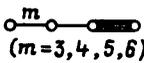
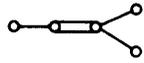
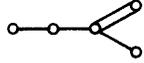
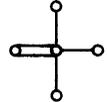
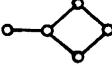
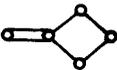
ми схемами Кокстера порядка  $n+1$ , все собственные подсхемы которых являются эллиптическими. Соответствующие группы, в также схемы, мы будем называть *ланнеровскими*, по имени Ланнера, впервые перечислившего их в 1950 г.

Ланнеровские группы существуют в  $L^n$  лишь при  $n \leq 4$ . Их схемы приведены в таблице 3.

Аналогичным образом могут быть перечислены неограниченные симплексы конечного объема в пространствах Лобачевского. Они описываются связными гиперболическими схемами Кокстера, все собственные подсхемы которых — эллиптические

Таблица 4

Квазиланнеровские схемы

$n$	Схемы		
2	 $(2 \leq k, l \leq \infty, 1/k + 1/l < 1)$		
3	 $(m=3, 4, 5, 6)$	 $(m=3, 4, 5, 6)$	 $(m=3, 4, 5, 6)$
	 	  	 
4	    	   	

Продолжение табл. 4  
Схемы

п		
5		
6		
7		

n	Схемы
8	
9	

или связанные параболические. Соответствующие группы, а также схемы, мы будем называть *квазиланнеровскими*.

Квазиланнеровские группы существуют в  $L^n$  лишь при  $n \leq 9$ . Их схемы приведены в таблице 4.

**2.4. Некоторые другие примеры.** Большое число различных многогранников Кокстера конечного объема (в том числе ограниченных) в пространстве  $L^n$  может быть построено с помощью «обрезания идеальных вершин» и «склеивания по конгруэнтным граням». Ниже описываются эти конструкции и приводятся примеры.

Всякий выпуклый многогранник  $P \subset L^n$  в векторной модели является пересечением с  $L^n$  некоторого выпуклого многогранного конуса  $K \subset R^{n+1}$ , ограниченного тем же числом гиперплоскостей, что и  $P$ . Пусть  $P$  — неразложимый (см. ГПК, п. 2.1, гл. 6) невырожденный остроугольный многогранник. Тогда конус  $K$  не содержит прямых и не пересекается с «конусом прошлого»  $C^-$  (см. ГПК, теорема 2.1 главы 6) и, следовательно, лежит строго по одну сторону от некоторого  $n$ -мерного эллиптического подпространства  $U$ . Гиперплоскость  $E^n = x_0 + U$  ( $x_0 \in C^+$ ) пересекает «конус будущего»  $C^+$  по шару  $K^n$ , который может рассматриваться как модель Клейна пространства  $L^n$ . В этой модели имеем

$$P = \hat{P} \cap K^n,$$

где  $\dot{P} = K \cap E^n$  — ограниченный выпуклый многогранник в пространстве  $E^n$ .

Назовем *идеальной вершиной* многогранника  $P$  такую вершину многогранника  $\dot{P}$ , что она сама не принадлежит  $\bar{K}^n$ , но все выходящие из нее ребра многогранника  $\dot{P}$  пересекают  $K^n$ . В векторной модели всякой идеальной вершине многогранника  $P$  отвечает некоторое «пространственноподобное» ребро конуса  $K$ .

Предложение 2.1 ([20]). Пусть  $P \subset L^n$  — неразложимый невырожденный остроугольный многогранник,  $q$  — его идеальная вершина и  $e$  — вектор, лежащий на соответствующем ей ребре конуса  $K$ . Тогда гиперплоскость  $H_e$  пространства  $L^n$  пересекает ортогональным образом все ребра многогранника  $P$ , продолжения которых проходят через  $q$ , и  $P' = P \cap H_e$  — также неразложимый невырожденный остроугольный многогранник.

Переход от многогранника  $P$  к многограннику  $P'$  мы будем называть обрезанием идеальной вершины  $q$ . Многогранник  $P'$  имеет  $(n-1)$ -мерную грань, лежащую в гиперплоскости  $H_e$  и ортогональную всем смежным с нею  $(n-1)$ -мерным граням. Если  $P$  — многогранник Кокстера, то и  $P'$  — многогранник Кокстера.

Назовем *остроугольным симплексом с  $k$  идеальными вершинами* такой неразложимый невырожденный остроугольный  $(n+1)$ -гранник  $P$ , что все ребра многогранника  $\dot{P}$  пересекаются с  $K^n$ , а из вершин многогранника  $\dot{P}$  ровно  $k$  не принадлежат  $\bar{K}^n$  (и тем самым являются идеальными вершинами многогранника  $P$ ). При обрезании всех идеальных вершин такого многогранника получается остроугольный  $(n+k+1)$ -гранник конечного объема, имеющий те же бесконечно удаленные вершины, что и многогранник  $P$ .

*Симплексы Кокстера с идеальными вершинами* в пространстве  $L^n$  существуют лишь при  $n \leq 5$ , ибо при обрезании каждой идеальной вершины на срезе должен получиться  $(n-1)$ -мерный ограниченный симплекс Кокстера. Они описываются связными гиперболическими схемами Кокстера порядка  $n+1$ , у которых все подсхемы порядка  $n-1$  — эллиптические. (Примеры таких схем см. ниже.)

Понятие идеальной вершины можно обобщить, если ограничиться требованием, чтобы выходящие из нее ребра многогранника  $\dot{P}$  пересекали  $\bar{K}^n$ . О классификации симплексов Кокстера с идеальными вершинами в этом обобщенном смысле см. [105]. Они существуют лишь при  $n \leq 10$ .

Если многогранники Кокстера  $P_1$  и  $P_2$  в пространстве  $L^n$  обладают конгруэнтными  $(n-1)$ -мерными гранями  $F_1$  и  $F_2$  соответственно, то при склеивании их по этим граням иногда

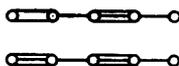
получается также многогранник Кокстера. Это имеет место, например, в следующих двух случаях:

1) грани  $F_1$  и  $F_2$  ортогональны всем смежным с ними  $(n-1)$ -мерным граням;

2) многогранники  $P_1$  и  $P_2$  симметричны относительно гиперплоскости их общей грани  $F(=F_1=F_2)$ , причем эта грань образует со всеми смежными с нею  $(n-1)$ -мерными гранями углы вида  $\frac{\pi}{2m}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  или  $m = \infty$ .

С помощью обрезания и склеивания В. С. Макаров [40] построил бесконечные серии ограниченных многогранников Кокстера в  $L^4$  и  $L^5$ . Эти многогранники можно описать следующим образом.

### Схемы Кокстера

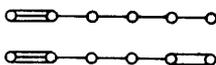


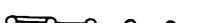
задают симплексы с двумя идеальными вершинами в пространстве  $L^4$ . При обрезании этих вершин получают ограниченные многогранники Кокстера  $P_1$  и  $P_2$ , имеющие по две симплициальные трехмерные грани, ортогональные всем смежным граням.

Схемы этих граней у многогранника  $P_1$  суть  и , а у многогранника  $P_2$  —  и .

Составляя гирлянды из произвольного количества экземпляров многогранников  $P_1$  и  $P_2$ , склеенных по конгруэнтным симплициальным граням, можно получить бесконечно много различных ограниченных многогранников Кокстера в  $L^4$ .

Аналогично, схемы Кокстера



задают симплексы с одной идеальной вершиной в пространстве  $L^5$ . При обрезании этих вершин получают ограниченные симплициальные призмы Кокстера  $P_1$  и  $P_2$ . Их основания, ортогональные боковым граням, имеют схему . Второе основание призмы  $P_2$  образует с одной из боковых граней угол  $\frac{\pi}{4}$  и ортогонально остальным боковым граням. Приклеив к этому основанию зеркально симметричный экземпляр призмы  $P_2$ , мы получим многогранник Кокстера  $P$ , имеющий две симплициальные грани со схемой , ортогональные всем смеж-

ным граням. Составляя гирлянды из произвольного количества экземпляров многогранника  $P$  и, возможно, приклеивая к их концам экземпляра призм  $P_1$  или  $P_2$ , можно получить бесконечно много различных ограниченных многогранников Кокстера в  $L^5$ .

Другие примеры см. в [20], [35], а также в § 2 главы 6 настоящей статьи.

**2.5. Ограничения на размерность.** Несмотря на обилие примеров в малых размерностях, в пространствах Лобачевского достаточно большой размерности вообще не существует многогранников Кокстера конечного объема (и, тем самым, кристаллографических групп отражений).

**Теорема 2.2** (Э. Б. Винберг, [19], [20]). При  $n \geq 30$  в пространстве  $L^n$  не существует ограниченных многогранников Кокстера.

**Теорема 2.3** (М. Н. Прохоров, [50]). При  $n \geq 996$  в пространстве  $L^n$  не существует многогранников Кокстера конечного объема.

Оценки, даваемые этими теоремами, по-видимому, далеки от точных. Во всяком случае, примеры ограниченных многогранников Кокстера в пространстве  $L^n$  известны лишь при  $n \leq 7$ , а примеры многогранников Кокстера конечного объема — лишь при  $n \leq 19$  (см. § 2, гл. 6).

### § 3. Правильные многогранники и разбиения на равные правильные многогранники

#### 3.1. Группа симметрии и символ Шлефли правильного многогранника.

В последующем тексте мы будем понимать под выпуклым многогранником в  $n$ -мерном пространстве постоянной кривизны  $X$  невырожденный выпуклый многогранник конечного объема, присоединяя к нему (в случае пространства Лобачевского) все бесконечно удаленные вершины, если таковые имеются.

Правильные многогранники суть наиболее симметричные из всех многогранников. Для того, чтобы придать этому интуитивному определению точный смысл, удобнее всего воспользоваться понятием флага.

**Определение 3.1.** *Флагом*  $n$ -мерного выпуклого многогранника  $P$  называется набор

$$\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}, \quad (1)$$

где  $F_i$  есть  $i$ -мерная (замкнутая) грань многогранника  $P$ , и  $F_{i-1} \subset F_i$  при  $i=1, 2, \dots, n-1$ .

Флаги, отличающиеся только одним элементом, называются смежными.

Для любых двух флагов  $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{F}''$  многогранника  $P$  существует не более одного движения  $g \in \text{Sym } P$ , переводящего  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$ .

Если флаги  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$  смежны, то движение  $g$  (если оно существует) является отражением.

Определение 3.2. *Выпуклый многогранник  $P$  называется правильным*, если для любых двух его флагов  $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{F}''$  существует (единственное) движение  $g \in \text{Sym } P$ , переводящее  $\mathcal{F}'$  в  $\mathcal{F}''$ .

Таким образом, порядок группы симметрии правильного многогранника равен числу всех его флагов. Из определения также следует, что любая грань правильного многогранника является правильным многогранником. Группа симметрии правильного многогранника имеет единственную неподвижную точку, называемую центром этого многогранника.

Пусть  $P$  — правильный многогранник. Для любого  $i = 0, 1, \dots, n-1$  у флага (1) имеется ровно один смежный флаг вида

$$\mathcal{F}'_i = \{F_0, F_1, \dots, F_{i-1}, F'_i, F_{i+1}, \dots, F_{n-1}\}$$

Движение  $s_i \in \text{Sym } P$ , переводящее  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{F}'_i$ , является отражением относительно гиперплоскости  $H_i$ , проходящей через центр многогранника  $P$  и центры граней  $F_0, F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_{n-1}$ . Обозначим через  $H_i^-$  то из полупространств, ограничиваемых гиперплоскостью  $H_i$ , которое содержит центр грани  $F_i$ .

Симплициальный конус

$$K = \bigcap_{i=0}^{n-1} H_i^- \quad (8)$$

называется фундаментальным конусом многогранника  $P$  (ассоциированным с флагом  $\mathcal{F}$ ). Вершина конуса  $K$  находится в центре  $c_n$  многогранника  $P$ , а его ребра проходят через центры  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  граней  $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ , составляющих флаг  $\mathcal{F}$  (см. рис. 15).

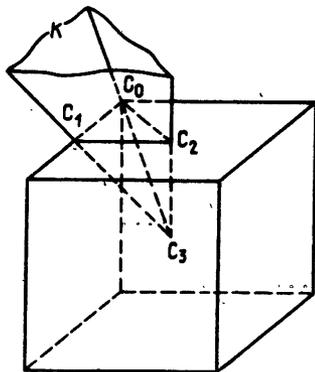


Рис. 15

Легко видеть, что конус  $K$  является фундаментальной областью группы  $\text{Sym } P$ . Отсюда следует, что группа  $\text{Sym } P$  порождается отражениями  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$  относительно его стенок.

Пусть, далее,  $p_i$  ( $i=1, \dots, n-1$ ) — число  $i$ -мерных (или  $(i-1)$ -мерных, что все равно) граней многогранника  $P$ , содержащих грань  $F_{i-2}$  и содержащихся в  $F_{i+1}$ . (если считать, что  $F_{-1}=\emptyset$ , а  $F_n=P$ ). Упорядоченный набор  $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  называется *символом Шлефли многогранника  $P$* .

Число образов конуса  $K$ , содержащих его  $(n-2)$ -мерную грань  $K \cap H_i \cap H_j$ , равно числу флагов многогранника  $P$ , отличающихся от флага  $\mathcal{F}$  только, быть может,  $i$ -ым и  $j$ -ым элементами. Это число равно 4 при  $|i-j| > 1$  и  $2p_i$  при  $|i-j|=1$ . Следовательно, схема Кокстера конуса  $K$  имеет вид

$$\circ \overset{p_1}{\text{---}} \circ \overset{p_2}{\text{---}} \circ \dots \circ \overset{p_{n-1}}{\text{---}} \circ \quad (4)$$

В частности, она полностью определяется символом Шлефли.

Символом Шлефли любой  $k$ -мерной грани  $F$  многогранника  $P$  является начальный отрезок  $\{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$  символа Шлефли самого многогранника. С другой стороны, строение многогранника  $P$  в окрестности любой внутренней точки  $x$  грани  $F$  описывается конечным отрезком символа Шлефли многогранника  $P$ . А именно, пусть  $Y$  —  $(n-k)$ -мерная плоскость, ортогональным образом пересекающая грань  $F$  в точке  $x$ , и  $S$  — достаточно малая сфера пространства  $Y$  с центром в точке  $x$ . Тогда  $P \cap S$  есть правильный сферический многогранник с символом Шлефли  $\{p_{k+2}, \dots, p_{n-1}\}$ . То же верно и в случае, когда  $F=\{x\}$  — бесконечно удаленная вершина, только вместо сферы в этом случае следует брать орисферу пространства  $L^n$ .

**3.2. Классификация правильных многогранников.** Симплекс  $T=K \cap P$  с вершинами в точках  $c_0, c_1, \dots, c_n$  (см. рис. 15) называется фундаментальным симплексом правильного многогранника  $P$ . Он является фундаментальной областью для действия группы  $\text{Sym } P$  на  $P$ . Его  $(n-1)$ -мерная грань, противоположная вершине  $c_n$ , ортогональна ребру  $c_{n-1}c_n$ . Поэтому симплекс  $T$ , а вместе с ними и многогранник  $P$ , однозначно восстанавливается по ориентированной схеме (4) и длине ребра  $c_{n-1}c_n$  (радиусу вписанной в  $P$  сферы). Отсюда следует, что правильный многогранник в евклидовом пространстве определяется своим символом Шлефли с точностью до подобия. Правильный многогранник на сфере или в пространстве Лобачевского с точностью до движения определяется своим символом Шлефли и одним непрерывным параметром, в качестве которого может быть взят, например, радиус вписанной сферы или двугранный угол.

Всякий упорядоченный набор  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$ , для которого схема (4) является эллиптической, служит символом Шлефли некоторого правильного многогранника  $P$ . Для по-

строения этого многогранника следует взять выпуклый многогранный конус Кокстера  $K$  со схемой (4) и обрезать его гиперплоскостью, ортогональной ребру, отвечающему крайней правой вершине схемы и (в случае пространства Лобачевского) достаточно близкой к вершине конуса. При этом получится некоторый симплекс  $T$ . Искомым многогранником будет

$$P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma T,$$

где  $\Gamma$  — группа, порожденная отражениями относительно стенок конуса  $K$ .

Таким образом, классификация правильных многогранников сводится к классификации ориентированных<sup>1)</sup> линейных (т. е. связных и не имеющих циклов и разветвлений) эллиптических схем Кокстера. Она может быть извлечена из таблицы 1.

Обращению ориентации схемы соответствует переход к так называемому двойственному типу правильных многогранников. (Для симметричных схем двойственные типы правильных многогранников совпадают). Правильный многогранник  $P^*$ , двойственный многограннику  $P$ , может быть получен как выпуклая оболочка множества центров  $(n-1)$ -мерных граней многогранника  $P$  (см. рис. 16). При этом каждая  $i$ -мерная грань многогранника  $P^*$  будет выпуклой оболочкой множества центров всех  $(n-1)$ -мерных граней многогранника  $P$ , содержащих не-

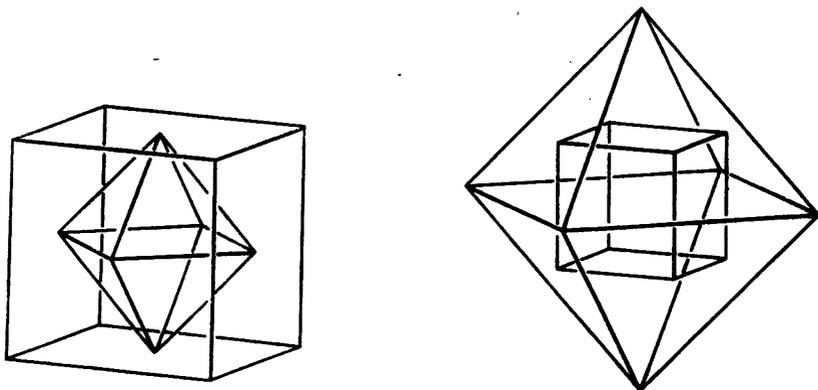


Рис. 16

которую его  $(n-i-1)$ -мерную грань. Группы симметрии многогранников  $P$  и  $P^*$  совпадают.

В таблице 5 перечислены символы Шлефли правильных многогранников. Для каждого символа указан двугранный угол

<sup>1)</sup> Термин «ориентированная» здесь употребляется в смысле ориентации всей схемы (а не каждого ее ребра в отдельности).

## Правильные многогранники

Размерность	Символ Шлефли	Название	Число граней коразмерности 1	$\alpha_{еис}$	$\alpha_{min}$
$n$	$\{3, 3, \dots, 3, 3\}$	правильный симплекс	$n + 1$	$\arccos \frac{1}{n}$	$\arccos \frac{1}{n-1}$
$n$	$\{4, 3, \dots, 3, 3\}$	куб	$2n$	$\frac{\pi}{2}$	$\arccos \frac{1}{n-1}$
$n$	$\{3, 3, \dots, 3, 4\}$	кокуб	$2n$	$2\arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$	$2\arccos \frac{1}{\sqrt{n-1}}$
4	$\{3, 4, 3\}$	правильный 24-гранник	24	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
4	$\{5, 3, 3\}$	правильный 120-гранник	120	$\frac{4\pi}{5}$	$\arccos \frac{1}{3}$
4	$\{3, 3, 5\}$	правильный 600-гранник	600	$\pi - \arccos \frac{3\sqrt{5} + 1}{8}$	$\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$
3	$\{5, 3\}$	додекаэдр	12	$\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\pi}{3}$
3	$\{3, 5\}$	икосаэдр	20	$\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{3\pi}{5}$
2	$\{m\}$	правильный $m$ -угольник	$m$	$\pi \left(1 - \frac{2}{m}\right)$	0

(В трехмерном случае правильный симплекс называют тетраэдром, а кокуб—октаэдром.)

$\alpha_{еис}$  соответствующего правильного евклидова многогранника и минимальный возможный угол  $\alpha_{min}$  соответствующего многогранника в пространстве Лобачевского. (Угол  $\alpha_{min}$  реализуется в многограннике с бесконечно удаленными вершинами.) Двугранным углом правильного сферического многогранника данного типа может быть любой угол  $\alpha$ , удовлетворяющий неравенствам  $\alpha_{еис} < \alpha < \pi$ , а двугранным углом правильного многогранника в пространстве Лобачевского — любой угол  $\alpha$ , удовлетворяющий неравенствам  $\alpha_{min} \leq \alpha < \alpha_{еис}$ .

Классификация правильных многогранников была получена в 1850 г. Шлефли. Доказательства приведенных выше утверждений и другие сведения о правильных многогранниках можно найти в книге [79] (см. также [66]).

**3.3. Разбиения на равные правильные многогранники.** Разбиение пространства на правильные многогранники, конгруэнтные данному правильному многограннику  $P$ , существует тогда и только тогда, когда двугранный угол многогранника  $P$  является целой частью угла  $2\pi$ .

(В случае плоскости Лобачевского возможен нулевой угол.) Пользуясь таблицей 5, легко найти все такие разбиения. Впервые это было сделано для ограниченных многогранников Шлегелем в 1883 г., а для неограниченных — Кокстером [78] в 1954 г.

Возможен и другой подход к описанию разбиений на равные правильные многогранники, связанный с анализом их групп симметрии. А именно, если  $\mathcal{P}$  — такое разбиение, то любое движение, переводящее один из составляющих его многогранников в один из этих же многогранников, переводит в себя все разбиение, т. е. принадлежит группе  $\text{Sym } \mathcal{P}$ . Поэтому фундаментальный симплекс  $T$  любого многогранника  $P \in \mathcal{P}$  является фундаментальной областью группы  $\text{Sym } \mathcal{P}$ , которая порождается отражениями относительно его стенок.

Пусть  $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  — символ Шлефли многогранника  $P$ , и пусть  $p_n$  — число многогранников разбиения  $\mathcal{P}$ , имеющих общую  $(n-2)$ -мерную грань. Тогда двугранный угол многогранника  $P$  равен  $2\pi/p_n$ , и симплекс  $T$  является многогранником Кокстера со схемой

$$\circ \overset{p_1}{\text{---}} \circ \overset{p_2}{\text{---}} \circ \dots \circ \overset{p_{n-1}}{\text{---}} \circ \overset{p_n}{\text{---}} \circ \quad (5)$$

Из всех вершин симплекса  $T$  только одна, а именно та, которая является вершиной многогранника  $P$ , может быть бесконечно удаленной. Поэтому схема (5) удовлетворяет следующему условию:

(F) Подсхема, получаемая при выкидывании любой вершины, кроме, быть может, крайней слева, является эллиптической, а подсхема, получаемая при выкидывании крайней левой вершины, является либо эллиптической, либо параболической.

Упорядоченный набор  $\{p_1, \dots, p_n\}$  называется *символом Шлефли разбиения  $\mathcal{P}$* . Он определяет разбиение однозначно с точностью до подобия в случае евклидова пространства и с точностью до движения — в остальных двух случаях.

Очевидно, что всякий упорядоченный набор  $\{p_1, \dots, p_n\}$  для которого схема (5) удовлетворяет условиям (F), является символом Шлефли некоторого разбиения на равные правильные многогранники.

Таким образом, классификация разбиений на равные правильные многогранники сводится к классификации ориентированных схем Кокстера, удовлетворяющих условию (F). Она может быть извлечена из таблиц 1—4.

Обращению ориентации схемы (5) (если таковая возможна) соответствует переход к так называемому двойственному разбиению. (Для симметричных схем двойственные разбиения конгруэнтны.) В качестве вершин разбиения  $\mathcal{P}^*$ , двойственного

разбиению  $\mathcal{P}$ , могут быть взяты центры многогранников, составляющих разбиение  $\mathcal{P}$ . При этом каждая  $i$ -мерная грань разбиения  $\mathcal{P}^*$  будет выпуклой оболочкой множества центров всех многогранников разбиения  $\mathcal{P}$ , содержащих некоторую  $(n-i)$ -мерную грань многогранника  $P \in \mathcal{P}$ . Группы симметрии разбиений  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}^*$  совпадают.

Так, например, схема  определяет разбиение евклидовой плоскости на правильные шестиугольники (классические соты), и двойственное разбиение на правильные треугольники, вершины которых находятся в центрах этих шестиугольников. Эта пара разбиений изображена на рис. 17; заштрихованный треугольник есть фундаментальный симплекс обоих разбиений.

Разбиения сферы  $S^n$  на равные правильные многогранники определяются линейными эллиптическими схемами Кокстера ранга  $n$  (см. таблицу 1) и находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с правильными многогранниками в  $E^{n+1}$ . Геометрически это соответствие может быть описано следующим образом: выпуклая оболочка в  $E^{n+1}$  вершин всякого такого разбиения есть правильный многогранник, вписанный в  $S^n$ , и, наоборот, если  $P \subset E^{n+1}$  — правильный многогранник, вписанный в  $S^n$ , то центральные проекции на  $S^n$  его  $n$ -мерных граней суть равные правильные многогранники, составляющие разбиение сферы  $S^n$ .

Разбиения евклидова пространства на равные правильные многогранники определяются линейными параболическими схемами Кокстера, т. е. схемами  $\tilde{C}_n$ ,  $\tilde{F}_4$  и  $\tilde{G}_2$  (см. таблицу 2). Схема  $\tilde{C}_n$  определяет тривиальное кубическое разбиение пространства  $E^n$ , схема  $\tilde{F}_4$  — пару двойственных разбиений пространства  $E^4$  на кокубы и правильные 24-гранники соответственно, а схема  $\tilde{G}_2$  — пару двойственных разбиений евклидовой плоскости, изображенную на рис. 17.

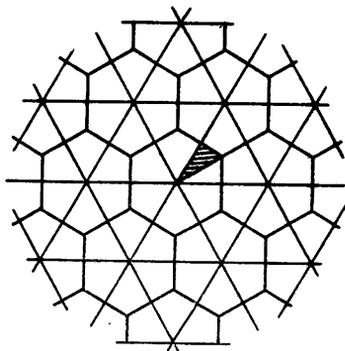


Рис. 17

Наконец, разбиения пространства Лобачевского  $L^n$  на равные правильные многогранники определяются линейными ланнеровскими и квазиланнеровскими схемами (см. таблицы 3 и 4). Из последних, однако, надо выделить те, при выкидывании из которых одной из крайних вершин остается эллиптическая схема. Такие разбиения существуют лишь при  $n \leq 5$ . Их символы Шлефли перечислены в таблице 6, причем символы разбиений на неограниченные многогранники отмечены звездочкой.

Таблица 6

Разбиения пространства Лобачевского на равные правильные многогранники

Размерность	Символы Шлефли	Размерность	Символы Шлефли
2	$\{p, q\} \left( 3 < p, q < \infty, \right.$ $\left. \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} \right)$ $\{p, \infty\}^* \left( 3 < p < \infty \right)$	4	$\{5, 3, 3, 3\}$ $\{3, 3, 3, 5\}$ $\{5, 3, 3, 4\}$ $\{4, 3, 3, 5\}$ $\{5, 3, 3, 5\}$ $\{3, 4, 3, 4\}^*$
3	$\{3, 5, 3\}$ $\{5, 3, 4\}$ $\{4, 3, 5\}$ $\{5, 3, 5\}$ $\{3, 3, 6\}^*$ $\{4, 3, 6\}^*$ $\{5, 3, 6\}^*$ $\{3, 4, 4\}^*$	5	$\{3, 3, 3, 4, 3\}^*$

Напомним, что разбиение  $\mathcal{P}$  с символом Шлефли  $\{p_1, \dots, p_n\}$  согласно определению составлено из правильных многогранников с символом Шлефли  $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  и двугранным углом  $2\pi/p_n$ . Строение такого разбиения в окрестности внутренней точки  $x$  какой-либо его  $k$ -мерной грани  $F$  описывается конечным отрезком символа Шлефли разбиения. А именно, пусть  $Y$  —  $(n-k)$ -мерная плоскость, ортогональным образом пересекающая грань  $F$  в точке  $x$ , и  $S$  — достаточно малая сфера пространства  $Y$  с центром в точке  $x$ . Тогда пересечения с  $S$  многогранников разбиения  $\mathcal{P}$ , содержащих точку  $x$ , являются равными правильными сферическими многогранниками и составляют разбиение сферы  $S$  с символом Шлефли  $\{p_{k+2}, \dots, p_n\}$ . То же верно и в случае, когда  $F = \{x\}$  — бесконечно удаленная вершина, только вместо сферы в этом случае следует брать орисферу (пространство  $L^n$ ).

## АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Общая конструкция арифметических дискретных подгрупп полупростых групп Ли [23] позволяет, в частности, получать кристаллографические группы движений пространства Лобачевского. В первом параграфе мы дадим явное описание этого класса кристаллографических групп, независимое от общей теории.

### § 1. Описание арифметических групп движений пространства Лобачевского

**1.1. Арифметические группы простейшего типа.** Пусть  $K \subset \mathbf{R}$  — вполне вещественное поле алгебраических чисел и  $A$  — кольцо его целых элементов. Невырожденную квадратичную форму

$$f(x) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji} \in K)$$

назовем допустимой, если она имеет отрицательный индекс инерции 1, а для любого нетождественного вложения  $\sigma: K \rightarrow \mathbf{R}$  квадратичная форма

$$f^\sigma(x) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}^\sigma x_i x_j$$

положительно определена. В этом случае группа  $O'(f, A)$  линейных преобразований с коэффициентами из  $A$ , сохраняющих форму  $f$  и отображающих на себя каждую связную компоненту конуса  $C = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : f(x) < 0\}$ , является дискретной группой движений пространства  $\mathbb{L}^n$  (в векторной модели, определяемой формой  $f$ ). Согласно общей теории арифметических дискретных подгрупп [23], если  $K = \mathbf{Q}$  и форма представляет нуль в  $\mathbf{Q}$ , то факторпространство  $\mathbb{L}^n / O'(f, A)$  некомпактно, но имеет конечный объем; во всех остальных случаях оно компактно. При  $K = \mathbf{Q}$  доказательство этих утверждений было впервые дано в работе Б. А. Венкова [11], которую и сейчас можно рекомендовать читателю.

Предыдущая конструкция может быть несколько обобщена. А именно, вместо того, чтобы рассматривать линейные преобразования с коэффициентами из  $A$ , т. е. сохраняющие стандартную решетку  $A^{n+1} \subset K^{n+1}$ , можно рассматривать линейные преобразования, сохраняющие произвольную решетку  $L \subset K^{n+1}$ . (Решеткой в конечномерном векторном пространстве над полем  $K$  называется конечнопорожденный  $A$ -подмодуль, линейная оболочка которого над  $K$  совпадает со всем про-

странством.) Получаемая таким образом группа соизмерима с группой  $O'(f, A)$ . Рассматривая решетку  $L$  как квадратичный  $A$ -модуль, скалярное умножение в котором определяется формой  $f$ <sup>1)</sup>, обозначим эту группу через  $O'(L)$ .

Заметим, однако, что если  $A$  — кольцо главных идеалов, то указанное обобщение не приводит к новым группам. Действительно, в этом случае любая решетка  $L \subset K^{n+1}$  является свободным  $A$ -модулем и  $O'(L) = O'(g, A)$ , где  $g$  — квадратичная форма, получаемая из  $f$  переходом от стандартной системы координат пространства  $K^{n+1}$  к системе координат, связанной с базисом решетки  $L$ .

Все дискретные группы движений пространства  $L^n$ , получаемые описанным выше способом, будем называть *арифметическими дискретными группами движений простейшего типа*. При этом поле  $K$  будем называть *полем определения* соответствующей группы.

Арифметические дискретные группы, определяемые допустимыми квадратичными формами  $f_1$  и  $f_2$ , соизмеримы (при подходящем изоморфизме соответствующих векторных моделей пространства  $L^n$ ) тогда и только тогда, когда они имеют общее поле определения  $K$  и форма  $f_1$  эквивалентна над  $K$  форме вида  $\lambda f_2$  ( $\lambda \in K$ ).

**1.2. Алгебры кватернионов.** В дальнейших конструкциях будут использоваться (обобщенные) алгебры кватернионов. Приведем необходимые сведения о них.

*Алгеброй кватернионов*  $D$  над полем  $K$  характеристики  $\neq 2$  называется простая центральная алгебра размерности 4. Всякая алгебра кватернионов изоморфна алгебре  $D(a, b)$  с базисом  $\{1, i, j, k\}$  и определяющими соотношениями  $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji = k$ , где  $a, b \in K^*$ . В частности, обычная (гамильтонова) алгебра кватернионов  $\mathbf{H}$  над полем  $\mathbf{R}$  изоморфна  $D(-1, -1)$ . Матричная алгебра  $M_2(K)$  изоморфна  $D(1, 1)$ .

Всякая алгебра кватернионов над алгебраически замкнутым полем изоморфна матричной алгебре. Алгебра кватернионов, не изоморфная матричной алгебре, является телом. По теореме Фробениуса всякая алгебра кватернионов над  $R$  изоморфна либо  $\mathbf{H}$ , либо  $M_2(\mathbf{R})$ .

Во всякой алгебре кватернионов  $D$  имеется инволютивный антиавтоморфизм (стандартная инволюция)  $q \rightarrow \bar{q}$ , множество неподвижных элементов которого совпадает с основным полем  $K$ . В матричной алгебре это переход к присоединенной матрице. В алгебре  $D(a, b)$  стандартная инволюция умножает  $i, j, k$  на  $-1$ .

Для любого  $q \in D$  элементы  $\text{Tr}(q) = q + \bar{q}$  и  $N(q) = q\bar{q}$  принадлежат полю  $K$ ; они называются следом и нормой кватер-

<sup>1)</sup> Без ограничения общности можно считать, что  $(x, y) \in A$  при любых  $x, y \in L$ .

ниона  $q$ . В матричной алгебре это след и определитель матрицы соответственно. Кватернионы с нормой 1 образуют группу по умножению, обозначаемую через  $SL_1(D)$ . В частности,

$$SL_1(M_2(K)) = SL_2(K).$$

Кватернионы со следом 0 называются чисто мнимыми. Они образуют трехмерное векторное пространство, обозначаемое через  $D_0$ . В нем обычно определяют скалярное умножение по формуле

$$(x, x) = -N(x) (=x^2). \quad (1)$$

При  $a \notin (K^*)^2$  отображение

$$t + xi + yj + zk \mapsto \begin{pmatrix} t + x\sqrt{a} & y + z\sqrt{a} \\ b(y - z\sqrt{a}) & t - x\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad (2)$$

является изоморфизмом алгебры  $D(a, b)$  на  $K$ -подалгебру алгебры  $M_2(K(\sqrt{a}))$ .

Если  $L$  — какое-либо расширение поля  $K$  и  $D$  — алгебра кватернионов над  $K$ , то  $D \otimes L$  — алгебра кватернионов над  $L$ .

Для любой алгебры кватернионов  $D$  над полем  $K$  и любого гомоморфизма  $\sigma: K \rightarrow F$ ,  $x \mapsto x^\sigma$ , где  $F$  — некоторое другое поле, обозначим через  $D^\sigma$  алгебру кватернионов над полем  $K^\sigma \subset F$ , структурные константы которой получаются из структурных констант алгебры  $D$  применением гомоморфизма  $\sigma$ . В частности,  $D(a, b)^\sigma = D(a^\sigma, b^\sigma)$ .

Пусть  $K$  — поле алгебраических чисел,  $A$  — кольцо его целых элементов,  $D$  — алгебра кватернионов над  $K$ . Порядком алгебры  $D$  называется всякое ее подкольцо, содержащее 1 и являющееся решеткой в векторном пространстве  $D$ .

Примеры. 1. Подкольцо  $M_2(A)$  является порядком алгебры  $M_2(K)$ .

2. Если  $a, b \in A$ , то кватернионы с целыми коэффициентами образуют порядок алгебры  $D(a, b)$ .

Группой единиц порядка  $\mathcal{O} \subset D$  называется группа  $SL_1(\mathcal{O}) = SL_1(D) \cap \mathcal{O}$ . Группы единиц любых двух порядков алгебры  $D$  соизмеримы.

**1.3. Арифметические фуксовы группы.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}$  — вполне вещественное поле алгебраических чисел и  $D$  — такая алгебра кватернионов над  $K$ , что  $D \otimes \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R})$ , а  $D^\sigma \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$  для всех нетождественных вложений  $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда для любого порядка  $\mathcal{O}$  алгебры  $D$  группа  $PSL_1(\mathcal{O}) = SL_1(\mathcal{O}) / \{+1, -1\}$  является дискретной подгруппой группы  $PSL_2(\mathbb{R})$  и, тем самым, — фуксовой группой. Если  $K = \mathbb{Q}$  и  $D \simeq M_2(\mathbb{Q})$ , то факторпространство  $\mathbb{H}^2 / PSL_1(\mathcal{O})$  некомпактно, но имеет конечный объем; во всех остальных случаях оно компактно. Всякая арифметическая фуксова группа соизмерима с группой, получаемой таким образом.

Следует, впрочем, заметить, что эта конструкция не дает

ничего существенно отличного от арифметических групп простейшего типа. А именно, группа  $PSL_1(\mathcal{O})$  при сделанных предположениях вкладывается в виде подгруппы конечного индекса в группу  $\mathcal{O}'(L)$ , где  $L = \mathcal{O} \cap D_0$ .

Пример. Пусть  $p \equiv -1 \pmod{4}$  — простое число. Тогда алгебра  $D(-1, p)$  над полем  $\mathbb{Q}$  является телом. Пусть  $\mathcal{O}$  — ее порядок, состоящий из кватернионов с целыми коэффициентами. Группа  $SL_1(\mathcal{O})$  при изоморфизме (2) представляется матрицами вида

$$\begin{pmatrix} t + x\sqrt{p} & y + z\sqrt{p} \\ -y + z\sqrt{p} & t - x\sqrt{p} \end{pmatrix}, \quad t, x, y, z \in \mathbb{Z},$$

с определителем 1 и тем самым вкладывается в группу  $SL_2(\mathbb{R})$ . Группа  $PSL_1(\mathcal{O}) \subset PSL_2(\mathbb{R})$  является равномерной фуксовой группой. Согласно предыдущему, она вкладывается в виде подгруппы конечного индекса в группу  $\mathcal{O}'(-x^2 + py^2 + pz^2, \mathbb{Z})$ . Фуксовы группы, получаемые таким образом, при различных  $p$  несоизмеримы.

**1.4. Арифметические группы движений пространства  $\mathbb{L}^3$ .** Пусть теперь  $K \subset \mathbb{C}$  — мнимое поле алгебраических чисел, все вложения которого в  $\mathbb{C}$ , кроме тождественного и комплексного сопряжения, вещественны. Пусть  $D$  — такая алгебра кватернионов над  $K$ , что  $D^e \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$  для всех вложений  $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда для любого порядка  $\mathcal{O}$  алгебры  $D$  группа  $PSL_1(\mathcal{O})$  является дискретной подгруппой группы  $PSL_2(\mathbb{C})$  и, тем самым, — дискретной группой движений пространства  $\mathbb{L}^3$ . Если  $K$  — мнимое квадратичное поле и  $D \simeq M_2(K)$ , то факторпространство  $\mathbb{L}^3/PSL_1(\mathcal{O})$  некомпактно, но имеет конечный объем; во всех остальных случаях оно компактно. Всякая арифметическая дискретная группа движений пространства  $\mathbb{L}^3$  соизмерима с группой, получаемой таким образом.

Группа  $PSL_1(\mathcal{O})$  соизмерима с арифметической группой простейшего типа тогда и только тогда, когда  $K$  — мнимое квадратичное расширение вещественного поля алгебраических чисел.

Пример. Пусть  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ , где  $m$  — натуральное число, свободное от квадратов,  $D = M_2(K)$ ,  $\mathcal{O} = M_2(A)$ , где  $A$  — кольцо целых элементов поля  $K$ . Группа

$$Bi(m) = PSL_1(\mathcal{O}) = PSL_2(A) \subset PSL_2(\mathbb{C})$$

является кристаллографической (но не равномерной) группой движений пространства  $\mathbb{L}^3$ . Эти группы называются *группами Бьянки*, по имени математика, который в конце прошлого века нашел фундаментальные области некоторых из них [67] (см. также [125], [21], [53], [54]). Группа  $Bi(m)$  соизмерима с группой  $\mathcal{O}'(x_1x_2 + x_3^2 + mx_4^2, \mathbb{Z})$ .

**1.5. Арифметические группы движений пространства  $\mathbb{L}^n$  при  $n \geq 4$ .** При четном  $n$  всякая арифметическая дискретная

группа движений пространства  $\mathbb{L}^n$  соизмерима с арифметической группой простейшего типа. При нечетном  $n=2m-1$  имеется другая конструкция арифметических дискретных групп, связанная с алгеброй кватернионов.

Пусть  $D$  — алгебра кватернионов над полем  $K$  и пусть

$$F(x, y) = \sum_{i,j} \bar{x}_i a_{ij} y_j \quad (a_{ij} \in D, a_{ji} = -\bar{a}_{ij})$$

— невырожденная косоэрмитова форма на правом  $D$ -модуле  $D^m$ . Обозначим через  $U(F, D)$  группу автоморфизмов этого  $D$ -модуля, сохраняющих форму  $F$ . Если  $K$  — поле алгебраических чисел и  $\mathcal{O}$  — какой-либо порядок алгебры  $D$ , то обозначим через  $U(F, \mathcal{O})$  подгруппу группы  $U(F, D)$ , состоящую из автоморфизмов, сохраняющих «решетку»  $\mathcal{O}^m$ .

Если  $D \simeq M_2(K)$ , то группа  $U(F, D)$  изоморфна ортогональной группе  $2m$ -мерного метрического векторного пространства над  $K$ . В самом деле, рассмотрим  $D^m$  как  $(4m$ -мерное) векторное пространство над  $K$ . Считая, что  $D = D(1, 1)$ , положим

$$D_{\pm}^m = \{x \in D^m : xi = \pm x\}$$

Тогда  $D^m = D_+^m \oplus D_-^m$ , причем  $D_-^m = D_+^m j$ , так что  $\dim D_+^m = \dim D_-^m = 2m$ . Нетрудно видеть, что форма  $F$  на  $D_+^m$  имеет вид  $F(x, y) = f(x, y) (i-1) j (x, y \in D_+^m)$ , где  $f$  — невырожденная симметрическая билинейная форма на  $D_+^m$  (со значениями в  $K$ ). Отображение, сопоставляющее каждому преобразованию  $A \in U(F, D)$  его ограничение на  $D_+^m$ , есть изоморфизм группы  $U(F, D)$  на группу  $O(f, K)$ . Форма  $f$  определяется по  $F$  однозначно с точностью до подобия. В случае  $K = \mathbb{R}$  ее сигнатура, определенная с точностью до перестановки индексов, называется сигнатурой формы  $F$ .

Пусть теперь  $K \subset \mathbb{R}$  — вполне вещественное поле алгебраических чисел и  $D$  — такая алгебра кватернионов над  $K$ , что  $D \not\simeq M_2(K)$ , но  $D^{\sigma} \otimes \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R})$  для всех вложений  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть, далее,  $F$  — невырожденная косоэрмитова форма на  $D^m$ . Предположим, что форма  $F$  имеет сигнатуру  $(2m-1, 1)$ , а для любого нетождественного вложения  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$  форма  $F^{\sigma}$  (на  $(D^{\sigma})^m$ ) имеет сигнатуру  $(2m, 0)$ .

В соответствии со сказанным выше мы можем отождествить группу  $U(F, D \otimes \mathbb{R})$  с группой  $O(f, \mathbb{R})$ , где  $f$  — симметрическая билинейная форма сигнатуры  $(2m-1, 1)$ , и, тем самым, группу  $U(F, D)$  — с подгруппой группы  $O(f, \mathbb{R})$ . Тогда для любого порядка  $\mathcal{O}$  алгебры  $D$  группа  $U'(F, \mathcal{O}) = U(F, \mathcal{O}) \cap O'(f, \mathbb{R})$  будет дискретной группой движений пространства  $\mathbb{L}^{2m-1}$  (в векторной модели, определяемой формой  $f$ ). Если  $K = \mathbb{Q}$  и форма  $F$  представляет нуль в  $D$ , то факторпространство  $\mathbb{L}^{2m-1}/U'(F, \mathcal{O})$  некомпактно, но имеет конечный объем; во всех остальных случаях оно компактно.

При нечетном  $n \neq 3, 7$  всякая арифметическая дискретная группа движений пространства  $L^n$  соизмерима либо с арифметической группой простейшего типа, либо с группой описанного выше типа. При  $n=7$  имеется еще особый тип арифметических дискретных групп движений, связанный с алгеброй октав.

## § 2. Рефлективные арифметические группы

**2.1. Применение групп отражений к исследованию арифметических групп.** Кристаллографическая группа  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$  называется *рефлективной*, если ее подгруппа отражений  $\Gamma_r$  (см. п. 1.2, гл. 5) имеет конечный индекс.

Среди арифметических дискретных групп движений пространства  $L^n$  могут содержать отражения и, тем более, быть рефлективными только арифметические группы простейшего типа и их подгруппы конечного индекса [13], [54]. Для таких групп имеется эффективный алгоритм, позволяющий найти фундаментальный многогранник подгруппы отражений [16], [129]. Это позволяет при желании найти фундаментальный многогранник, образующие и определяющие соотношения и самой арифметической группы.

Приведем некоторые полученные таким способом результаты. Пусть вначале

$$f_n(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

В [16], [22] доказано, что при  $n \leq 19$  группа  $O'(f_n, Z)$  рефлективна. Схемы  $\Sigma_n$  фундаментальных многогранников  $P_n$  подгрупп отражений  $O_r(f_n, Z)$  групп  $O'(f_n, Z)$  при  $n \leq 17$  приведены в следующей таблице.

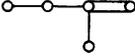
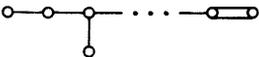
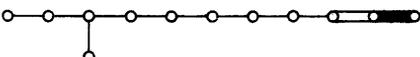
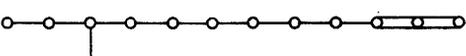
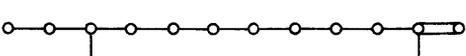
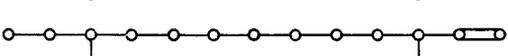
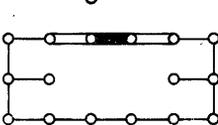
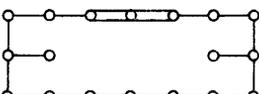
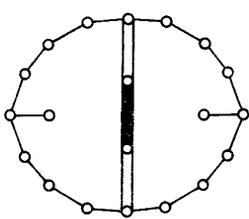
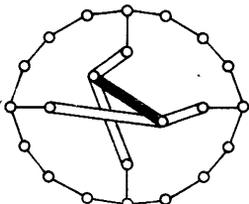
Схемы  $\Sigma_{18}$  и  $\Sigma_{19}$  описаны в [22]. Схема  $\Sigma_{18}$  имеет 37 вершин, а схема  $\Sigma_{19}$  — 50 вершин. Они обладают высокой симметрией: группа симметрии схемы  $\Sigma_{18}$  изоморфна группе  $S_4$ , а группа симметрии схемы  $\Sigma_{19}$  — группе  $S_5$ .

Во всех этих случаях

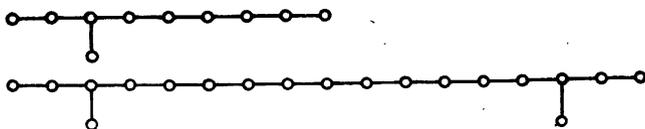
$$O'(f_n, Z) = O_r(f_n, Z) \times \text{Sym } P_n,$$

причем группа  $\text{Sym } P_n$  естественно изоморфна группе симметрии схемы  $\Sigma_n$ .

Известно, что форма  $f_n$  является единственной с точностью до целочисленной эквивалентности нечетной унимодулярной целочисленной квадратичной формой сигнатуры  $(n, 1)$ . При  $n \equiv 1 \pmod{8}$  существует, кроме того, четная унимодулярная целочисленная квадратичная форма  $g_n$  сигнатуры  $(n, 1)$ , также единственная с точностью до целочисленной эквивалентности.

$n$	$\Sigma_n$
2	
3	
4	
5-9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	

При  $n=9$ , 17 группа  $O'(g_n, \mathbf{Z})$  рефлексивна. Схемы фундаментальных многогранников групп  $O_r(g_9, \mathbf{Z})$ ,  $O_r(g_{17}, \mathbf{Z})$  суть



Подгруппа отражений  $O_r(g_{25}, \mathbf{Z})$  в группе  $O'(g_{25}, \mathbf{Z})$  исследована в [76]. Она имеет бесконечный индекс, но в некотором смысле достаточно велика. Ее фундаментальный многогранник  $P$  описан около некоторой орисферы  $S$ , причем точки касания образуют в  $S$  (как в 24-мерном евклидовом пространстве) решетку, изоморфную известной *решетке Лича*, а все бесконечно удаленные точки многогранника  $P$ , за исключением центра орисферы  $S$ , являются его бесконечно удаленными вершинами. Группа  $O'(g_{25}, \mathbf{Z})$  является полупрямым произведением группы  $O_r(g_{25}, \mathbf{Z})$  и группы симметрии многогранника  $P$ , естественно изоморфной группе аффинных автоморфизмов решетки Лича.

Фундаментальные области групп  $O'(f_n, \mathbf{Z})$  и  $O'(g_n, \mathbf{Z})$  (и, тем более, их подгрупп отражений) при любом  $n$  неограниченны. Пусть теперь

$$h_n(x) = -\varphi x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Тогда  $O'(h_n, \mathbf{Z}[\varphi])$  — равномерная дискретная группа движений пространства  $L^n$ . При  $n \leq 7$  она рефлексивна [9]. Схемы  $T_n$  фундаментальных многогранников групп  $O_r(h_n, \mathbf{Z}[\varphi])$  при  $n \leq 7$  приведены в следующей таблице.

$n$	$T_n$
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Другие примеры исследования арифметических групп описанным методом см. в работах [16], [10], [53], [48], [130]. В последних двух работах эти результаты применяются к исследованию алгебраических поверхностей типа  $K3$ .

**2.2. Проблема классификации рефлексивных квадратичных модулей.** В обозначениях п. 1.1, допустимую квадратичную форму  $f$  над полем  $K$  назовем рефлексивной, если группа  $O'(f, A)$  рефлексивна. Аналогично, допустимый<sup>1)</sup> квадратичный  $A$ -модуль  $L$  назовем рефлексивным, если группа  $O'(L)$  рефлексивна. Представляет интерес классификация всех рефлексивных квадратичных форм или, более общо, всех рефлексивных квадратичных модулей. Надежду на возможность такой классификации дают следующие результаты.

**Теорема 2.1** (В. В. Никулин, [46], [47]). При фиксированном  $n \geq 2$  и фиксированной степени поля  $K$  имеется лишь конечное число, с точностью до подобия, рефлексивных квадратичных  $A$ -модулей сигнатуры  $(n, 1)$ .

(Два квадратичных  $A$ -модуля  $L_1$  и  $L_2$  называются подобными, если существует такой изоморфизм модулей  $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$  и такое число  $c \in K$ , что  $(\varphi(x), \varphi(y)) = c(x, y)$  при любых  $x, y \in L_1$ ).

**Теорема 2.2.** (Э. Б. Винберг, [19]). При  $n \geq 30$  и любом поле  $K$  не существует рефлексивных квадратичных  $A$ -модулей сигнатуры  $(n, 1)$ . (При  $K \neq \mathbb{Q}$  это, конечно, вытекает из теоремы 2.2. главы 5.)

Лучшие оценки размерности могут быть получены при подходящих ограничениях на поле  $K$ . Например, в [19] доказано что если  $K \neq \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  и  $\mathbb{Q}\left(\cos \frac{2\pi}{7}\right)$ , то уже при  $n \geq 22$  не существует рефлексивных квадратичных  $A$ -модулей сигнатуры  $(n, 1)$ .

Приведенные оценки, по-видимому, не являются точными. Окончательные результаты в настоящее время получены лишь для унимодулярных квадратичных модулей над некоторыми кольцами. Так, унимодулярный квадратичный  $\mathbb{Z}$ -модуль сигнатуры  $(n, 1)$  рефлексивен тогда и только тогда, когда  $n \leq 19$  [17], [129]. Допустимый унимодулярный квадратичный  $\mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ -модуль сигнатуры  $(n, 1)$  рефлексивен тогда и только тогда, когда  $n \leq 7$  [9].

### § 3. Существование неарифметических групп

Очевидно, что арифметических дискретных групп движений пространства Лобачевского любой размерности имеется лишь счетное число. С другой стороны, кристаллографических

<sup>1)</sup> Т. е. такой, скалярное умножение в котором определяется допустимой квадратичной формой над  $K$ .

(а также равномерных) групп движений плоскости Лобачевского имеется континуум (см. гл. 4). Поэтому почти все они не арифметичны. Однако, как следует из теоремы о сильной жесткости (см. гл. 7), при  $n > 2$  имеется лишь счетное число кристаллографических групп движений пространства  $L^n$ . Возникает вопрос, не являются ли все они арифметическими. Это тем более интересно, что согласно результату Г. А. Маргулиса [101] в симметрических пространствах ранга  $\geq 2$  (а пространство Лобачевского любой размерности — это симметрическое пространство ранга 1) все кристаллографические группы движений являются арифметическими.

**3.1. Критерий арифметичности группы отражений.** Назовем циклическими произведениями квадратной матрицы  $C = (c_{ij})$  произведения вида  $c_{i_1 i_2} c_{i_2 i_3} \dots c_{i_{k-1} i_k} c_{i_k i_1}$ . Циклическое произведение назовем неприводимым, если индексы  $i_1, \dots, i_k$  различны. Очевидно, что всякое циклическое произведение разлагается в произведение неприводимых и что неприводимых циклических произведений имеется лишь конечное число.

**Теорема 3.1** (Э. Б. Винберг, [13]). Пусть  $\Gamma$  — кристаллографическая группа отражений в пространстве Лобачевского,  $G = (g_{ij})$  — матрица Грама ее фундаментального многогранника,  $K$  (соответственно  $\tilde{K}$ ) — поле, порожденное циклическими произведениями (соответственно элементами) матрицы  $G$ . Группа  $\Gamma$  арифметична тогда и только тогда, когда

(A1) поле  $\tilde{K}$  является вполне вещественным полем алгебраических чисел;

(A2) для любого вложения  $\sigma: \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$ , не тождественного на  $K$ , матрица  $G^\sigma = (g_{ij}^\sigma)$  положительно полуопределена;

(A3) циклические произведения матрицы  $2G$  являются целыми элементами поля  $K$ .

Если эти условия выполнены, то полем определения группы  $\Gamma$  является поле  $K$ .

Сделаем некоторые замечания, касающиеся применения этой теоремы.

1. Положительная полуопределенность матрицы  $G^\sigma$  равносильна неотрицательности всех ее главных миноров. Так как главные миноры матрицы  $G$ , будучи алгебраическими суммами ее циклических произведений, принадлежат полю  $K$ , то условие (A2) может быть сформулировано только в терминах поля  $K$ . А именно, при всех нетождественных вложениях  $K \rightarrow \mathbb{R}$  все главные миноры матрицы  $G$  должны становиться неотрицательными. Можно показать, что условие (A1) при этом будет выполняться автоматически.

2. Легко показать, что при всех вложениях  $K \rightarrow \mathbb{R}$  все главные миноры матрицы  $G$ , отвечающие эллиптическим подсхемам схемы Кокстера, остаются положительными. Поэтому для вы-

полнения условия (A2) достаточно, чтобы какой-нибудь один отрицательный минор  $M$  порядка  $(n+1)$  матрицы  $G$  (а такой всегда существует) при всех нетождественных вложениях  $K \rightarrow \mathbb{R}$  становился положительным. В свою очередь, для этого необходимо и достаточно, чтобы число  $M$  порождало поле  $K$  и чтобы все сопряженные к нему числа были положительными.

3. Так как числа вида  $2 \cos \frac{\pi}{m}$  являются целыми алгебраическими, то условие (A3) автоматически выполняется, если схема Кокстера многогранника  $P$  не содержит пунктирных ребер.

4. Если многогранник  $P$  неограничен (но имеет конечный объем), то полем определения группы  $\Gamma$  в случае ее арифметичности может быть только поле  $\mathbb{Q}$ . В этой ситуации критерий арифметичности может быть сформулирован следующим образом: все циклические произведения матрицы  $2G$  должны быть целыми рациональными числами.

Приведем примеры исследования арифметичности групп отражений на плоскости Лобачевского.

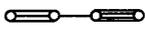
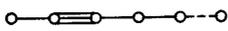
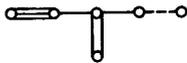
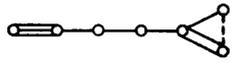
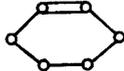
Примеры. 1. Пусть группа  $\Gamma$  порождается отражениями относительно сторон треугольника со схемой  $\circ \text{---} \overset{m}{\circ} \text{---} \circ$ . (Это прямоугольный треугольник с бесконечно удаленной вершиной и углом  $\frac{\pi}{m}$  при обычной вершине.) Имеем  $K = \mathbb{Q} \left( \cos^2 \frac{\pi}{m} \right) = \mathbb{Q} \left( \cos \frac{2\pi}{m} \right)$ . Условие арифметичности сводится к тому, что должно быть  $K = \mathbb{Q}$ , т. е.  $m = 3, 4$  или  $6$ .

2. Пусть группа  $\Gamma$  порождается отражениями относительно сторон треугольника со схемой  $\circ \text{---} \overset{m}{\circ} \text{---} \circ$ . В этом случае также  $K = \mathbb{Q} \left( \cos \frac{2\pi}{m} \right)$ . Условие арифметичности состоит в том, что определитель матрицы Грама, равный  $1/4 \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{m} \right)$ , должен становиться положительным при любом нетождественном вложении  $K \rightarrow \mathbb{R}$ , т. е. должно быть  $\cos \frac{2k\pi}{m} < \frac{1}{2}$  при  $(k, m) = 1, 1 < k < \frac{m}{2}$ . Легко видеть, что это выполняется только при  $m = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24$  и  $30$ .

3. Пусть группа  $\Gamma$  порождается отражениями относительно сторон четырехугольника со схемой  $\circ \text{---} \overset{a}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \overset{b}{\circ} \text{---} \circ$ . (Это четырехугольник, у которого три угла прямые, а четвертый равен  $\frac{\pi}{3}$ .) Из неравенства нулю определителя матрицы Грама следует, что  $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 1/4$  и, значит,  $K = \mathbb{Q}(a^2) = \mathbb{Q}(b^2)$ . Для ариф-

метичности группы  $\Gamma$  необходимо и достаточно, чтобы числа  $A=4a^2$  и  $B=4b^2$ , связанные соотношением  $(A-4)(B-4)=4$ , были вполне вещественными целыми алгебраическими числами и чтобы все их сопряженные были меньше 4. При  $A, B \in \mathbb{Q}$ , например, это имеет место только если  $\{A, B\} = \{8, 5\}$  или  $\{6, 6\}$ .

**3.2. Существование неарифметических групп отражений.** Возможность найти среди групп отражений примеры неарифметических кристаллографических групп движений пространств  $L^n$  при  $n \geq 3$  была обнаружена В. С. Макаровым [39]. С помощью теоремы 3.1 такие примеры легко могут быть найдены уже среди ланнеровских и квазиланнеровских групп (см. таблицы 3 и 4 в § 3 главы 5). В настоящее время известны как равномерные, так и неравномерные неарифметические кристаллографические группы отражений в пространствах  $L^n$  при  $n=3, 4, 5$ . По одному примеру на каждый из этих шести случаев приведено в нижеследующей таблице. В трех из этих примеров фундаментальный многогранник является симплексом, в остальных трех — симплицальной призмой.

$n$	Равномерные группы	Неравномерные группы
3		
4		
5		

**3.3. Существование неарифметических кристаллографических групп в любой размерности.** В 1986 г. Громов и Пятацкий-Шапиро предложили одну общую конструкцию, позволяющую получать (как равномерные, так и неравномерные) неарифметические кристаллографические группы движений пространства  $L^n$  при любом  $n$ . Дадим описание этой конструкции<sup>1)</sup>.

Рассмотрим вначале следующую общую ситуацию. Пусть  $\Gamma \subset \text{Isom}_+ L^n$  — кристаллографическая группа, действующая без неподвижных точек, и  $\sigma$  — нормализующее ее отражение. Группа  $\Gamma$  включается в виде (нормальной) подгруппы индекса 2 в группу  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma\sigma$ , содержащую, наряду с отражением  $\sigma$ , отражения  $\gamma\sigma\gamma^{-1}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ .

<sup>1)</sup> Поскольку в нашем распоряжении не было текста работы Громова и Пятацкого-Шапиро, мы не ручаемся за то, что наши доказательства во всех деталях совпадают с оригинальными.

Пусть  $H$  — зеркало отражения  $\sigma$ . Тогда  $\gamma H$  — зеркало отражения  $\gamma\sigma\gamma^{-1}$ . Так как произведение любых двух таких отражений принадлежит  $\Gamma$  и, значит, не имеет неподвижных точек, то различные гиперплоскости вида  $\gamma H$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , попарно не пересекаются. Они разбивают пространство на выпуклые многогранники, которые мы будем называть камерами. Это разбиение инвариантно относительно группы  $\hat{\Gamma}$ . В частности, любые две смежные камеры симметричны относительно их общей грани.

Любую камеру с помощью преобразования из группы  $\Gamma$  можно перевести в одну из камер  $C^+$  и  $C^- = \sigma(C^+)$ , примыкающих к  $H$ . Пусть  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^- = \sigma\Gamma^+\sigma^{-1}$  — стабилизаторы этих камер в группе  $\Gamma$ .

**Лемма 3.2.** Если группа  $\Gamma_0 = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$  плотна в топологии Зарисского в  $\text{Isom}_+ H$ , то группа  $\Gamma^+$  плотна в топологии Зарисского в  $\text{Isom}_+ L^n$ .

◀ Из описания алгебраических подгрупп группы  $\text{Isom}_+ L^n$  (ГПК, § 3, гл. 5) следует, что если группа  $\Gamma^+$  не плотна в  $\text{Isom}_+ L^n$ , то она сохраняет некоторую собственную плоскость или бесконечно удаленную точку. Предположим, например, что она сохраняет плоскость  $\Pi \neq L^n$ . Легко видеть, что  $\Pi \neq H$ . Если  $\Pi \cap H \neq \emptyset$ , то  $\Gamma_0$  сохраняет плоскость  $\Pi \cap H$ . Если плоскости  $\Pi$  и  $H$  параллельны, то  $\Gamma_0$  сохраняет их общую бесконечно удаленную точку. Если они расходятся, то  $\Gamma_0$  сохраняет конец их общего перпендикуляра, лежащий в  $H$ . В любом из этих трех случаев группа  $\Gamma_0$  не плотна в  $\text{Isom}_+ H$ . Аналогично разбирается случай, когда группа  $\Gamma^+$  сохраняет бесконечно удаленную точку. ▶

Рассмотрим гиперболическое многообразие  $M = L^n / \Gamma$ . Отражение  $\sigma$  индуцирует инволюцию этого многообразия, множество неподвижных точек которой содержит (в качестве связной компоненты) гиперповерхность  $S$ , являющуюся образом гиперплоскости  $H$ .

Предположим, что выполнено условие

(S) в группе  $\Gamma$  нет движений, сохраняющих гиперплоскость  $H$  и меняющих местами камеры  $C^+$  и  $C^-$ .

Тогда  $S = H / \Gamma_0$ . Далее, возможны два случая.

**Первый случай.** Группа  $\Gamma$  имеет на множестве камер две орбиты, содержащие  $C^+$  и  $C^-$  соответственно. Тогда при разрезании многообразия  $M$  вдоль  $S$  получаются два гиперболических многообразия с краем, изометричные  $C^+ / \Gamma^+$  и  $C^- / \Gamma^-$  соответственно (рис. 18а).

**Второй случай.** Группа  $\Gamma$  действует на множестве камер транзитивно. Тогда при разрезании многообразия  $M$  вдоль  $S$  получается связное гиперболическое многообразие с краем, изометричное  $C^+ / \Gamma^+ \simeq C^- / \Gamma^-$  (рис. 18б).

Пусть теперь  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \text{Isom}_+ L^n$  — две кристаллографические группы, действующие без неподвижных точек и нормализуемые одним и тем же отражением  $\sigma$ . Предположим, что группы  $\Gamma_1$  и

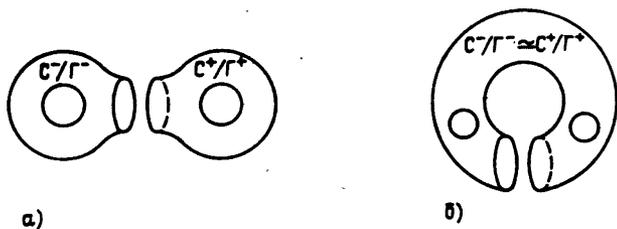


Рис. 18

$\Gamma_2$  удовлетворяют условию (S) и индуцируют на зеркале  $H$  отражения  $\sigma$  одну и ту же группу  $\Gamma_0$ . Тогда при разрезании гиперболических многообразий  $M_1 = \mathbb{L}^n / \Gamma_1$  и  $M_2 = \mathbb{L}^n / \Gamma_2$  вдоль образов гиперплоскости  $H$  получаются гиперболические многообразия с изометричными краями, из которых можно склеить новое гиперболическое многообразие  $M$  конечного объема одним из способов, условно изображенных на рис. 19. Фундаментальная группа  $\Gamma$  этого многообразия содержит группы  $\Gamma_1^-$  и  $\Gamma_2^+$ , пересекающиеся по подгруппе  $\Gamma_0$ .

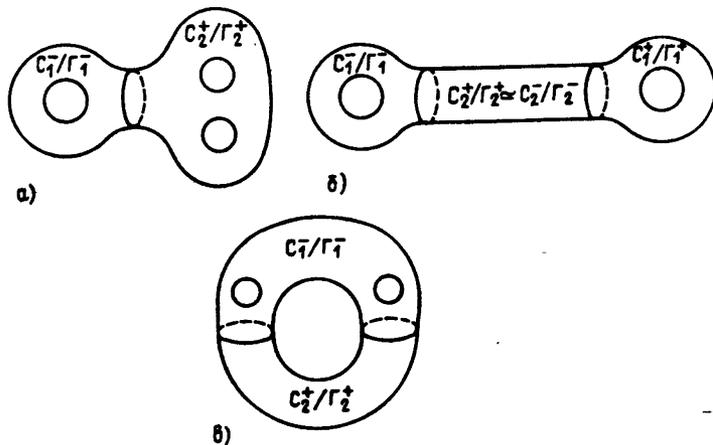


Рис. 19

Перейдем, наконец, непосредственно к построению примеров неарифметических групп. Пусть  $K$  — вполне вещественное поле алгебраических чисел,  $A$  — кольцо его целых элементов и  $L_0$  — какой-либо допустимый квадратичный  $A$ -модуль сигнатуры  $(n-1, 1)$ . Псевдоевклидово пространство  $L_0 \otimes \mathbb{R}$  погрузим в пространство  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Оно будет тогда определять гиперплоскость  $H$  пространства  $\mathbb{L}^n$ . Пусть  $\sigma$  — отражение относительно этой гиперплоскости и  $e$  — единичный вектор, ортогональный  $L_0 \otimes \mathbb{R}$ .

Возьмем такие положительные числа  $a_1, a_2 \in A$ , что все сопряженные им числа также положительны. Тогда квадратичные  $A$ -модули

$$L_1 = L_0 \oplus \sqrt{a_1} Ae, \quad L_2 = L_0 \oplus \sqrt{a_2} Ae$$

(вложенные в  $\mathbb{R}^{n,1}$ ) будут допустимы.

Отметим следующий факт [72]: если  $p$  — нечетное простое число, не разветвленное в поле  $K$ , то в группе  $\text{Aut } L$  автоморфизмов любого  $A$ -модуля  $L$  без кручения конгруэнц-подгруппа

$$\text{Aut}(L, p) = \{\varphi \in \text{Aut } L : \varphi(x) - x \in pL \quad \forall x \in L\}$$

не имеет элементов конечного порядка.

В частности, если  $p$  — такое число, то определяемые им конгруэнц-подгруппы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $\Gamma_0$  групп  $O'(L_1), O'(L_2)$  и  $O'(L_0)$  не имеют элементов конечного порядка и, следовательно, действуют в пространстве Лобачевского без неподвижных точек. Группы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  нормализуются отражением  $\sigma$  и индуцируют на  $H$  группу  $\Gamma_0$ . Кроме того, поскольку  $p \neq 2$ , они сохраняют ориентацию и удовлетворяют условию (S). Группа  $\Gamma_0$ , как всякая арифметическая группа, плотна в топологии Зарисского в  $\text{Isom}_+ H$  [23, § 8, гл. 1]).

Склеим указанным выше способом из гиперболических многообразий  $M_1 = \mathbb{L}^n / \Gamma_1$  и  $M_2 = \mathbb{L}^n / \Gamma_2$  гиперболическое многообразие  $M = \mathbb{L}^n / \Gamma$ . Для выяснения вопроса об арифметичности группы  $\Gamma$  воспользуемся следующим предложением, которое легко выводится из результатов работы [14].

**Предложение 3.3.** Пусть  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — арифметические дискретные подгруппы связной полупростой группы Ли  $G$ , не имеющей компактных множителей. Если пересечение  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  плотно в топологии Зарисского в  $G$ , то подгруппы  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соизмеримы.

Поскольку  $\Gamma \supset \Gamma_1 \cup \Gamma_2^+$ , из этого предложения и леммы 3.2 следует, что если группа  $\Gamma$  арифметична, то группы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соизмеримы; но это имеет место, только если  $KL_1 = KL_2$ , т. е. если  $a_1/a_2 \in (K^*)^2$ . Числа  $a_1, a_2$  можно выбрать так, чтобы последнее условие не выполнялось; тогда группа  $\Gamma$  не будет арифметической.

## Глава 7

### СОЦИОЛОГИЯ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Результаты, излагаемые в этой главе, относятся преимущественно к связям между различными кристаллографическими группами движений пространства Лобачевского, к совокупности таких групп, а не к индивидуальным группам.

## § 1. Жесткость и деформации

**1.1. Теорема о сильной жесткости.** Фундаментальная группа компактной поверхности рода  $g > 1$  допускает континуум геометрически различных реализаций в виде равномерной дискретной группы движений плоскости Лобачевского (§ 3, гл. 4). Иначе говоря, на компактной поверхности рода  $g > 1$  существует континуум неэквивалентных метрик постоянной кривизны, равной  $-1$ .

Начиная с размерности 3, ситуация резко меняется, а именно, имеет место следующее свойство «сильной жесткости».

**Теорема 1.1.** Любой изоморфизм кристаллографических групп движений пространства  $L^n$ ,  $n \geq 3$ , индуцируется сопряжением в группе  $\text{Isom } L^n$ .

**Следствие.** Если какие-либо два полных гиперболических (кривизны  $-1$ ) многообразия конечного объема гомеоморфны, то они изометричны.

Доказательство теоремы 1.1, содержащееся в работах Мостова [109], Г. А. Маргулиса [42] и Прасада [116], опирается на теорему В. А. Ефремовича и Е. С. Тихомировой [32] об эквимоρφизмах пространства Лобачевского. Доказательство, основанное на других идеях, предложено Громовым [110].

Следующая теорема является простым следствием теоремы 1.1. (Ср. п. 3.1, гл. 4)

**Теорема 1.2** ([109]). Для всякой кристаллографической группы  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$ ,  $n \geq 3$ , группа  $\text{Aut } \Gamma$  естественно изоморфна нормализатору  $N(\Gamma)$  группы  $\Gamma$  в группе  $\text{Isom } L^n$ . Группа  $N(\Gamma)$  дискретна и, тем самым, группа  $\text{Aut } \Gamma / \text{Int } \Gamma$  конечна.

Класс дискретных групп, для которых справедлива теорема о сильной жесткости, может быть расширен. Дискретная группа  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$  называется группой *расходящегося типа*, если в конформной модели в единичном шаре  $B^n$  ряд  $\sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |\gamma(x)|)^{n-1}$  расходится хотя бы для одного (а следо-

вательно, и для всех)  $x \in B^n$ . Всякая кристаллографическая группа является группой расходящегося типа.

**Теорема 1.3** ([60], [61]). При  $n \geq 3$  любой изоморфизм дискретных групп расходящегося типа индуцируется сопряжением в группе  $\text{Isom } L^n$ .

**1.2. Деформации.** Пусть  $G = \text{Isom } L^n$  и  $\Gamma \subset G$  — кристаллографическая группа. Обозначим через  $h_0$  тождественное вложение группы  $\Gamma$  в  $G$ . Группа  $\Gamma$  называется *жесткой*, если все деформации гомоморфизма  $h_0$  тривиальны, т. е. всякий гомоморфизм  $h: \Gamma \rightarrow G$ , достаточно близкий к  $h_0$ , имеет вид  $h = \sigma \cdot h_0$ , где  $\sigma$  — (внутренний) автоморфизм группы  $\Gamma$ .

**Теорема 1.4.** Всякая кристаллографическая группа движений пространства  $L^n$ ,  $n > 3$ , а также всякая равномерная

дискретная группа движений пространства  $L^3$ , является жесткой.

Для равномерных дискретных групп эта теорема представляет собой частный случай одной теоремы А. Вейля, относящейся к дискретным подгруппам произвольных полупростых групп Ли, а для неравномерных групп она была доказана Гарландом и Рагунатаном (см. [23, п. 7.1, гл. 3]).

Неравномерные кристаллографические группы движений пространства  $L^3$ , как правило, не являются жесткими. Этот удивительный факт был обнаружен Тёрстоном. Более точно, им доказана следующая теорема.

**Теорема 1.5 ([90]).** Пусть  $\Gamma$  — неравномерная кристаллографическая группа собственных движений пространства  $L^3$ , действующая без неподвижных точек, и пусть  $G = \text{Isom } L^3$ . Тогда размерность вещественного аналитического многообразия  $\text{Def}(\Gamma, G) = \text{Hom}(\Gamma, G)/\text{Aut } G$  в окрестности тождественного вложения  $h_0: \Gamma \rightarrow G$  равна  $2\tau$ , где  $\tau$  — число классов эквивалентных параболических точек группы  $\Gamma$ .

◀ Нижеследующее не доказывает, а скорее объясняет теорему. Продемонстрируем наш подход, объяснив сначала, почему равномерная дискретная группа  $\Gamma$  движений пространства  $L^3$  является жесткой.

Пусть  $P$  — фундаментальный многогранник равномерной дискретной группы  $\Gamma$ . С помощью фиктивной огранки добьемся того, чтобы все его грани были треугольными. Деформацию многогранника  $P$ , сохраняющую его комбинаторное строение, назовем *допустимой*, если для каждого класса эквивалентных ребер при этой деформации не нарушается равенство их длин и сохраняется сумма двугранных углов при них. Всякой допустимой деформации многогранника  $P$  соответствует деформация гомоморфизма  $h_0$  и всякая деформация гомоморфизма  $h_0$  получается таким образом.

Подсчитаем, от скольких параметров зависит допустимая деформация многогранника  $P$ . Пусть  $a_0$  — число его вершин,  $a_1$  — число ребер,  $a_2$  — число граней,  $b_0$  — число классов эквивалентных вершин. Произвольная деформация многогранника  $P$ , сохраняющая его комбинаторное строение, зависит от  $3a_0 - 6$  параметров. Требование допустимости накладывает  $a_1$  условий. Однако между этими условиями есть соотношения. Они обнаруживаются при рассмотрении «обклейки» какой-либо вершины деформированного многогранника  $P$  эквивалентными многогранниками. В результате такой обклейки в силу условий допустимости получается замощение сферы (с центром в рассматриваемой вершине) многоугольниками. Углы сферического многоугольника замощения равны соответствующим двугранным углам деформированного многогранника  $P$ , а длины его сторон — плоским углам соответствующих треугольных граней, причем эти углы (как углы неевклидова треугольника) однозначно

определяются длинами ребер. Теперь заметим, что углы и стороны любого многоугольника замощения однозначно определяются углами и сторонами остальных. Так как между длинами сторон и величинами углов сферического многоугольника имеется 3 соотношения, то каждый класс эквивалентных вершин доставляет 3 соотношения между условиями допустимости. Таким образом, получается всего  $3b_0$  соотношений.

Далее, нужно учесть, что некоторые допустимые деформации приводят к фундаментальному многограннику одной и той же группы. А именно, если имеется фундаментальный многогранник какой-либо группы, то мы можем произвольным образом пошевелить одну его вершину и согласованным образом — эквивалентные ей вершины так, что получится фундаментальный многогранник той же группы. Следовательно, фундаментальный многогранник данной группы зависит от  $3b_0$  параметров.

В итоге получаем, что деформация гомоморфизма  $h_0$  зависит от

$$3a_0 - 6 - a_1 + 3b_0 - 3b_0 = 3a_0 - a_1 - 6 = 0$$

параметров. (Здесь использовано тождество Эйлера  $a_0 - a_1 + a_2 = 2$  и равенство  $2a_1 = 3a_2$ ).

Пусть теперь  $\Gamma$  — неравномерная кристаллографическая группа. Предположим для простоты, что ее фундаментальный многогранник  $P$  имеет только одну бесконечно удаленную вершину  $q$  и что через эту вершину проходят четыре грани (последнего всегда можно добиться). Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — коммутирующие параболические сдвиги, осуществляющие попарную эквивалентность этих граней. Тогда вершины, смежные с  $q$ , получаются из одной из них движениями  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\alpha\beta$  (см. рис. 20).

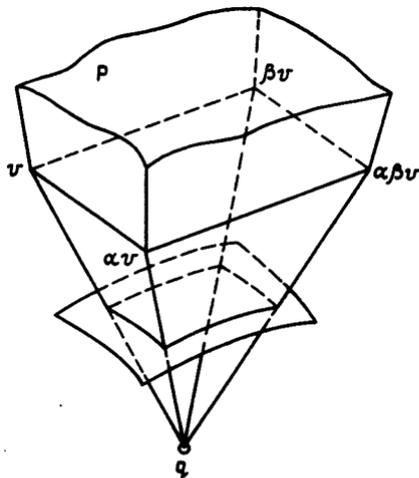


Рис. 20

При деформациях многогранника  $P$  мы не будем следить за гранями, проходящими через бесконечно удаленную вершину  $q$ . Вместо этого мы будем дополнительно задавать два коммутирующих (вообще говоря, винтовых) движения  $h(\alpha)$  и  $h(\beta)$ , в которые должны деформироваться  $\alpha$  и  $\beta$ . Отметим, что такая пара движений зависит от 8 параметров, так как определяется положением общей оси, величинами сдвигов и углами поворотов.

В подсчет числа параметров по прежней схеме необходимо внести следующие изменения:

а) не нужно следить за вершиной  $q$  и проходящими через нее ребрами, а также за двугранными углами при этих ребрах;

б) из четырех вершин, смежных с  $q$ , нужно следить лишь за одной, так как остальные получаются из нее движениями  $h(\alpha)$ ,  $h(\beta)$  и  $h(\alpha)h(\beta)$ ; попарное равенство ребер, соединяющих эти вершины, не нужно включать в условия допустимости, так как оно будет иметь место автоматически.

В результате получается, что деформация гомоморфизма зависит от  $3(a_0-1-3)+8-6-(a_1-4-2)+3(b_0-1)-3(b_0-1) = 3a_0 - a_1 - 4 = 2$  параметров, что и требовалось доказать.  $\blacktriangleright$

Укажем теперь явную параметризацию многообразия  $\text{Def}(\Gamma, G)$  в окрестности точки  $h_0$ .

Пусть  $q$  — какая-либо параболическая точка группы  $\Gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — параболические сдвиги, порождающие группу  $\Gamma_q$ . Рассмотрим гомоморфизм  $h: \Gamma \rightarrow G$ , переводящий  $\alpha$  и  $\beta$  в (коммутирующие) винтовые движения  $h(\alpha)$  и  $h(\beta)$ . Обозначим через  $l$  общую ось этих движений, через  $a$  и  $b$  — величины их сдвигов со знаком и через  $\varphi$  и  $\psi$  — углы поворотов, также со знаком. Нетрудно видеть, что если гомоморфизм  $h$  достаточно близок к тождественному вложению  $h_0$ , то  $\begin{vmatrix} a & b \\ \psi & \varphi \end{vmatrix} \neq 0$ . Поэтому существуют такие однозначно определенные вещественные числа  $r$  и  $s$ , что

$$ra + sb = 0, \quad r\varphi + s\psi = 2\pi. \quad (1)$$

Обозначим через  $\hat{\mathbb{R}}^2$  плоскость  $\mathbb{R}^2$ , компактифицированную точкой  $\infty$ , и сопоставим каждому гомоморфизму  $h: \Gamma \rightarrow G$ , достаточно близкому к  $h_0$ , точку  $(r, s) \in \hat{\mathbb{R}}^2$ , определенную указанным выше образом, если  $h(\alpha)$  и  $h(\beta)$  — винтовые движения, и точку  $\infty$  — если  $h(\alpha)$  и  $h(\beta)$  — параболические сдвиги (другие случаи невозможны). Тем самым в некоторой окрестности точки  $h_0$  будет определено отображение  $f: \text{Def}(\Gamma, G) \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^2$ .

Пусть теперь  $q_1, \dots, q_r$  — представители всех классов эквивалентных параболических точек группы  $\Gamma$  и  $f_i: \text{Def}(\Gamma, G) \rightarrow$

$\rightarrow \mathbb{R}^2$  — отображение, определенное в некоторой окрестности точки  $h_0$  указанным выше образом при  $q = q_i$ .

Теорема 1.6 ([90], [111]). Отображение

$$f: h \rightarrow (f_1(h), \dots, f_\tau(h))$$

задает гомеоморфизм некоторой окрестности точки  $h_0$  многообразия  $\text{Def}(\Gamma, G)$  на некоторую окрестность точки  $(\infty, \dots, \infty)$  многообразия  $\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ .

Смысл этой параметризации будет отчасти прояснен в следующем пункте.

**1.3. Хирургия Дена — Тёрстона.** Деформации, о которых шла речь в предыдущем пункте, не приводят, вообще говоря, к дискретным группам. Однако оказывается, что дискретные группы все же получаются при некоторых исключительных значениях параметров деформации.

Точку  $(u_1, \dots, u_\tau) \in \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$  назовем *исключительной*, если для каждого  $i$  либо  $u_i = \infty$ , либо  $u_i = (r_i, s_i)$ , где  $r_i$  и  $s_i$  — взаимно простые целые числа.

Теорема 1.7 ([90], [111]). Если, в условиях теоремы 1.5, гомоморфизм  $h: \Gamma \rightarrow G$  достаточно близок к  $h_0$  и  $f(h)$  — исключительная точка, то  $h(\Gamma)$  — кристаллографическая группа, действующая без неподвижных точек, причем число классов эквивалентных параболических точек группы  $h(\Gamma)$  равно числу индексов  $i$ , для которых  $f_i(h) = \infty$ .

В частности, если  $\tau = 1$  и  $h \neq \sigma \cdot h_0$ , где  $\sigma$  — автоморфизм группы  $G$ , то  $h(\Gamma)$  — равномерная дискретная группа.

◀ Как и при доказательстве теоремы 1.5, предположим для простоты, что фундаментальный многогранник  $P$  группы  $\Gamma$  имеет единственную бесконечно удаленную вершину  $q$ . Пусть  $h: \Gamma \rightarrow G$  — гомоморфизм, достаточно близкий к  $h_0$ , переводящий  $\alpha$  и  $\beta$  в винтовые движения  $h(\alpha)$  и  $h(\beta)$  с общей осью  $l$ . Рассмотрим какую-либо допустимую деформацию многогранника  $P$ , которой соответствует гомоморфизм  $h$ . Деформированную часть границы многогранника  $P$  без граней, проходящих через  $q$ , построим до замкнутой поверхности четырьмя криволинейными пленками, попарно эквивалентными при помощи движений  $h(\alpha)$  и  $h(\beta)$  (часть границы каждой из этих пленок лежит на прямой  $l$ : см. рис. 21). Пусть  $Q$  — замкнутая область, ограниченная этой поверхностью. Докажем, что она является фундаментальной областью для группы  $h(\Gamma)$ .

В силу наложенных условий допустимости нам достаточно только проверить правильность обклейки той части границы области  $Q$ , которая лежит на прямой  $l$ . Для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что пересечение  $D$  области  $Q$  с достаточно малой эквидистантой  $S$  прямой  $l$  (см. рис. 21) является фундаментальной областью для действия на  $S$  абелевой группы  $h(\Gamma_0) = \langle h(\alpha), h(\beta) \rangle$ .

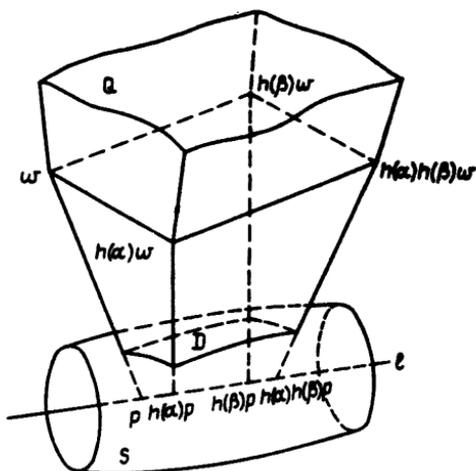


Рис. 21

Заметим, что эквидистанта  $S$  как риманово многообразие представляет собой прямое произведение окружности на прямую (ГПК, п. 3.2, гл. 4), т. е. евклидов цилиндр, а ее универсальная накрывающая  $\tilde{S}$  есть евклидова плоскость. Связный прообраз  $\tilde{D}$  области  $D$  в этой плоскости является фундаментальной областью для группы, порожденной параллельными переносами, накрывающими движения  $h(\alpha)$  и  $h(\beta)$  эквидистанты  $S$ . В обозначениях предыдущего пункта, это будут переносы на векторы  $(a \operatorname{ch} t, \varphi \operatorname{sh} t)$  и  $(b \operatorname{ch} t, \psi \operatorname{sh} t)$ , где  $t$  — расстояние от точек  $S$  до прямой  $l$ . Отсюда следует, во-первых, что образы  $D$  при действии преобразований из  $h(\Gamma_q)$  покрывают  $S$  и, во-вторых, что

$$\operatorname{area} D = \operatorname{area} \tilde{D} = \left\| \begin{vmatrix} a \operatorname{ch} t & b \operatorname{ch} t \\ \varphi \operatorname{sh} t & \psi \operatorname{sh} t \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} a & b \\ \varphi & \psi \end{vmatrix} \right\| \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t.$$

Чтобы доказать, что  $D$  — фундаментальная область группы  $h(\Gamma_q)$ , нам теперь достаточно проверить, что эта группа действует на  $S$  дискретно и что площадь ее фундаментальной области равна площади  $D$ .

Пусть  $f(h) = (r, s)$  — исключительная точка. Из (1) следует, что группа  $h(\Gamma_q)$  не содержит чистых поворотов вокруг  $l$  и что наименьшая по модулю величина сдвига вдоль  $l$  для нетривиальных преобразований из этой группы равна  $c = \frac{a}{s} = -\frac{b}{r}$ . Это означает, что группа  $h(\Gamma_q)$  порождается винтовым движением с величиной сдвига  $c$ . Следовательно, она действует на  $S$  дискретно и в качестве ее фундаментальной области может

быть выбран «пояс» эквидистанты  $S$ , проектирующийся на отрезок длины  $|c|$  прямой  $l$ . Указанный пояс имеет площадь  $2\pi|c|\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t$ , что в силу (1) равно площади  $D$ . ►

Заметим, что гомоморфизм  $h$ , рассматривавшийся в доказательстве теоремы, не инъективен: его ядро содержит элемент  $\alpha^r \beta^s$  (и порождается им как нормальная подгруппа группы  $\Gamma$ ).

С топологической точки зрения переход от многообразия  $L^3/\Gamma$  к многообразию  $L^3/h(\Gamma)$  представляет собой так называемую хирургию Дена с параметрами  $r, s$ . А именно, выбросив из многообразия  $L^3/\Gamma$  образ достаточно малой орисферической окрестности точки  $q$ , мы получим многообразие с краем, гомеоморфным тору, образующие  $A$  и  $B$  фундаментальной группы которого отвечают элементам  $\alpha$  и  $\beta$  группы  $\Gamma$ . При переходе к многообразию  $L^3/h(\Gamma)$  мы заклеиваем этот край полноторием (образом эквидистантной окрестности прямой  $l$ ), в котором элемент  $A^r B^s$  фундаментальной группы края ограничивает диск.

**С л е д с т в и е.** В условиях теоремы 1.5, существует такая последовательность гомоморфизмов  $h_k: \Gamma \rightarrow G$ , сходящаяся к  $h_0$ , что  $h_k(\Gamma)$  при любом  $k$  — кристаллографическая группа, число классов эквивалентных параболических точек которой равно  $\tau - 1$ .

**П р и м е р.** Следующий пример, хотя и относится к группам, имеющим неподвижные точки, хорошо проясняет ситуацию. Пусть  $P$  — многогранник Кокстера конечного объема, имеющий бесконечно удаленную вершину  $q$ , в которой сходятся четыре грани (образующие между собой прямые двугранные углы), и пусть  $\Gamma$  — группа, порожденная отражениями относительно стенок этого многогранника. Для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим выпуклый многогранник  $P_\varepsilon$ , имеющий такое же комбинаторное строение и такие же двугранные углы, что и  $P$ , за исключением того, что четыре грани, ранее сходящиеся в вершине  $q$ , теперь образуют «клин» с двугранным углом  $\varepsilon$  при его острие (рис. 22). Существование такого многогранника при достаточно малом  $\varepsilon$  гарантируется теоремой Андреева (ГПК,

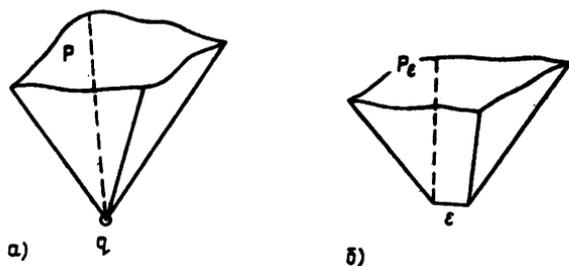


Рис. 22

теорема 2.8, гл. 6). Пусть  $h_\varepsilon: \Gamma \rightarrow G$  — гомоморфизм, переводящий отражение относительно каждой стенки многогранника  $P$  в отражение относительно соответствующей стенки многогранника  $P_\varepsilon$ . Как правило, группа  $h_\varepsilon(\Gamma)$ , порожденная отражениями относительно стенок многогранника  $P_\varepsilon$ , не дискретна. Однако при  $\varepsilon = \frac{\pi}{k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , многогранник  $P_\varepsilon$  является многогранником Кокстера и группа  $h_\varepsilon(\Gamma)$  является дискретной группой отражений. Ее определяющие соотношения, помимо определяющих соотношений группы  $\Gamma$ , включают соотношение  $(r_1 r_2)^k = e$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — отражения относительно плоскостей граней, образующих острие клина.

## § 2. Соизмеримые группы

**2.1. Группа соизмеримости.** Для произвольной подгруппы  $\Gamma$  произвольной группы  $G$  множество  $\text{Сотт } \Gamma = \{g \in G : g\Gamma g^{-1} \text{ соизмерима с } \Gamma\} \subset G$  является подгруппой. Эта подгруппа называется *группой соизмеримости* группы  $\Gamma$ . Она содержит все подгруппы, соизмеримые с  $\Gamma$ .

Например, если  $G = PGL_n(\mathbb{C})$ ,  $\Gamma = PGL_n(\mathbb{Z})$ , то  $\text{Сотт } \Gamma = PGL_n(\mathbb{Q})$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $\Gamma \subset G = \text{Isom } \mathbb{L}^n$  — кристаллографическая группа. Тогда

- 1) если группа  $\Gamma$  арифметична, то группа  $\text{Сотт } \Gamma$  плотна в  $G$ ;
- 2) если группа  $\Gamma$  не арифметична, то группа  $\text{Сотт } \Gamma$  дискретна (и, значит, соизмерима с  $\Gamma$ ).

◀ Первая часть этой теоремы тривиальна. Например, если  $\Gamma = O'(f, A)$  — арифметическая группа простейшего типа (п. 1.1 гл. 6), то  $\text{Сотт } \Gamma = O'(f, K)$ . Вторая часть представляет собой частный случай результата Г. А. Маргулиса, относящегося к дискретным подгруппам произвольных полупростых групп Ли ([23, п. 6.4, гл. 3]). ▶

Можно поставить вопрос об отыскании максимальных подгрупп в классе  $\mathcal{C}(\Gamma)$  подгрупп, соизмеримых с  $\Gamma$ . Если группа  $\Gamma$  не арифметична, то единственной такой подгруппой в силу теоремы 2.1 будет  $\text{Сотт } \Gamma$ . Если же она арифметична, то в  $\mathcal{C}(\Gamma)$  имеется бесконечно много попарно не сопряженных максимальных подгрупп. Об их описании (в более общей ситуации) см. [23, п. 6.3, гл. 3]).

**2.2. Свойство Милсона.** Будем говорить, что группа  $\Gamma$  обладает свойством Милсона, если в ней имеется подгруппа конечного индекса, факторгруппа которой по коммутанту бесконечна. Легко видеть, что соизмеримые подгруппы какой-либо группы обладают или не обладают свойством Милсона одновременно.

Если  $\Gamma$  — равномерная дискретная группа движений пространства  $\mathbb{L}^n$ , действующая без неподвижных точек, то свойство

Милсона означает, что многообразие  $L^n/\Gamma$  допускает конечное накрытие, первое число Бетти которого отлично от нуля.

В отличие от случая симметрических пространств ранга  $> 1$  (см. [23, п. 7.1, гл. 3]), всякая кристаллографическая группа  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$ , по-видимому, обладает свойством Милсона. Это заведомо имеет место в следующих случаях:

- 1)  $n=2$  (очевидно);
- 2)  $n=3$  и  $\Gamma$  — равномерная дискретная группа отражений [92];
- 3)  $\Gamma$  — арифметическая дискретная группа простейшего типа [107].

### § 3. Кообъемы

**3.1. Множество кообъемов.** Важным числовым инвариантом дискретной группы  $\Gamma$  движений пространства  $L^n$  является ее кообъем

$$v(\Gamma) = \text{vol } L^n/\Gamma.$$

Некоторые представления о многообразии кристаллографических групп дают приводимые ниже результаты о множестве их кообъемов.

Введем обозначения:

$V_n$  — множество кообъемов всех кристаллографических групп в пространстве  $L^n$ ,

$W_n$  — множество кообъемов кристаллографических групп без кручения (т. е. действующих без неподвижных точек),

$AV_n$  — множество кообъемов арифметических дискретных групп.

Каждую точку этих множеств будем рассматривать с кратностью, равной числу несопряженных кристаллографических групп соответствующего типа, имеющих данный кообъем.

**Теорема 3.1.** ([132]). При  $n \geq 4$  множество  $V_n$  дискретно.

**Теорема 3.2.** Множество  $AV_n$  дискретно.

◀ При  $n \geq 4$  это следует из предыдущей теоремы, а при  $n=2, 3$  доказано в [68], [74]. ▶

**Теорема 3.3** ([102]). Множество кообъемов всех кристаллографических групп, соизмеримых с данной, содержится в некоторой циклической группе  $c\mathbb{Z}$ ,  $c > 0$ .

Потеря жесткости в размерности 3 приводит к тому, что множества  $V_3$  и  $W_3$  выглядят необычно.

**Теорема 3.4** ([90], [106]). Множества  $V_3$  и  $W_3$  являются замкнутыми вполне упорядоченными множествами порядкового типа  $\omega^*$ . Каждая их точка имеет конечную кратность.

Предельными точками множества  $W_3$  являются в точности кообъемы неравномерных кристаллографических групп без кручения. Это следует, во-первых, из жесткости равномерных групп и, во-вторых, из следующего предложения.

Предложение 3.5 ([111]). В ситуации теоремы 1.7 функция  $u \mapsto v(f^{-1}(u))$  на множестве исключительных точек  $u \in \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ , достаточно близких к точке  $(\infty, \dots, \infty)$ , непрерывна и (за исключением точки  $(\infty, \dots, \infty)$ ) принимает значения  $< v(\Gamma)$ . (Асимптотику этой функции см. в [111].)

В частности,  $v(\Gamma)$  аппроксимируется снизу кообъемами кристаллографических групп без кручения, имеющих на один класс эквивалентных параболических точек меньше, чем  $\Gamma$ .

Предельные точки множества  $V_3$  также являются кообъемами неравномерных кристаллографических групп, но обратное уже неверно: не для всякой такой группы ее кообъем является предельной точкой множества  $V_3$ , ибо некоторые из этих групп жесткие.

Что касается множеств  $V_2$  и  $W_2$ , то из формулы для площади фундаментального многоугольника (п. 2.2 гл. 4) легко следует, что  $W_2 = 4\pi N$ , а  $V_2$ , как и  $V_3$ , — замкнутое вполне упорядоченное множество порядкового типа  $\omega^\omega$ .

**3.2. Дискретные группы минимального кообъема.** Кообъемы кристаллографических групп в пространстве  $L^n$  ограничены снизу положительной константой, зависящей только от  $n$ . Это вытекает из следующего геометрического факта, который легко доказывается с помощью леммы Маргулиса (теорема 2.7, гл. 2).

**Теорема 3.6 ([34, 7]).** Любая фундаментальная область Дирихле любой кристаллографической группы  $\Gamma \subset \text{Isom } L^n$  содержит шар, радиус которого зависит только от  $n$ .

Из полной упорядоченности множества кообъемов следует, что в любом классе кристаллографических групп в пространстве  $L^n$  имеется группа минимального кообъема. Представляет интерес нахождение этих групп и их кообъемов для некоторых наиболее естественных классов групп. На этот счет к настоящему времени известно следующее.

Среди равномерных дискретных групп движений плоскости Лобачевского минимальный кообъем имеет группа отражений со схемой  $\circ \overset{7}{\circ} \circ$ , а среди неравномерных — группа отражений

со схемой  $\circ \text{---} \circ \text{---} \circ$  ( $= PGL_2(\mathbb{Z})$ ). Обе эти группы арифметические. Их кообъемы равны соответственно  $\frac{1}{42}$  и  $\frac{1}{6}$ .

Среди арифметических дискретных групп движений пространства  $L^3$  минимальный кообъем, равный  $\approx 0,0195$ , имеет нормализатор группы отражений со схемой  $\circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ$ , являющийся ее полупрямым произведением на группу порядка 2 [75]. По-видимому, эта группа имеет минимальный кообъем среди всех вообще дискретных групп движений пространства  $L^3$ .

Среди неравномерных дискретных групп движений пространства  $L^3$  минимальный кообъем, равный  $\approx 0,0423$ , имеет (арифметическая) группа отражений со схемой  $\circ-\circ-\circ-\overset{6}{\circ}$  [106].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д., Вывод четырехмерных ненормальных параллелоэдров. Изв. АН СССР, 1934, № 6, 803—817
2. —, О заполнении пространства многогранниками. Вест. ЛГУ, Сер. мат., физ., 1954, № 2, 33—43
3. Андреев Е. М., О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского. Мат. сб., 1970, 81, № 3, 445—478
4. —, О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского. Мат. сб., 1970, 83, № 2, 256—260
5. —, О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами. Мат. заметки, 1970, 8, № 4, 521—527
6. Апанасов Б. Н., Геометрически конечные группы преобразований пространства. Сиб. мат. ж., 1982, 23, № 6, 16—27
7. —, Дискретные группы преобразований и структуры многообразий. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1983, 242 с.
8. —, Параболические вершины и свойства конечности для клейновых групп в пространстве. Сиб. мат. ж., 1984, 25, № 4, 9—27
9. Бугаенко В. О., О группах автоморфизмов унимодулярных гиперболических квадратичных форм над кольцом  $\mathbb{Z}[(\sqrt{5}+1)/2]$ . Вест. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1984, № 5, 6—12
10. —, О рефлексивных унимодулярных гиперболических квадратичных формах. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1987, 30—39
11. Венков Б. А., Об арифметической группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы. Изв. АН СССР, 1937, № 2, 139—170
12. —, Об одном классе евклидовых многогранников. Вест. ЛГУ. Сер. мат., физ., 1954, № 2, 11—31
13. Винберг Э. Б., Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского. Мат. сб., 1967, 72, № 3, 471—488
14. —, Кольца определения плотных подгрупп полупростых линейных групп. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, 35, № 1, 45—55
15. —, Дискретные линейные группы, порожденные отражениями. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, 35, № 5, 1072—1112
16. —, О группах единиц некоторых квадратичных форм. Мат. сб., 1972, 87, № 1, 18—36
17. —, Об унимодулярных целочисленных квадратичных формах. Функциональный анализ и его прил., 1972, 6, № 2, 24—32
18. —, О теореме Шёнфлиса—Бибераха. Докл. АН СССР, 1975, 221, № 5, 1013—1015
19. —, Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности. Тр. Моск. мат. об-ва, 1984, 47, 68—102
20. —, Гиперболические группы отражений. Успехи мат. наук, 1985, 40, № 1, 29—64
21. —, Подгруппы отражений в группах Бьянки. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1987, 121—126
22. —, Каплинская И. М., О группах  $O_{18,1}(\mathbb{Z})$  и  $O_{19,1}(\mathbb{Z})$ . Докл. АН СССР, 1978, 238, № 6, 1273—1275
23. —, Горбачевич В. В., Шварцман О. В., Дискретные подгруппы групп Ли. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Современ. пробл. матем. Фундам. направления, 1988, 21, 5—120

24. —, *Шварцман О. В.*, Римановы поверхности. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Алгебра. Топология. Геометрия, 1978, 16, 191—245
25. *Гуцул И. С.* О компактных трехмерных многообразиях постоянной отрицательной кривизны. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1980, 152, 89—96
26. *Делоне Б. Н.*, Теория планигонов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, 23, № 3, 365—386
27. —, *Галиулин Р. В.*, *Долбиллин Н. П.*, *Штогрин М. И.*, Локальный критерий правильности системы точек. Докл. АН СССР, 1976, 227, № 1, 28—30
28. —, —, *Штогрин М. И.*, О типах Браве решеток. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Соврем. пробл. матем., 1973, 2, 119—254
29. —, *Долбиллин Н. П.*, *Штогрин М. И.*, Комбинаторная и метрическая теория планигонов. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, 148, 109—140
30. —, *Сандакова Н. Н.*, Теория стереоэдров. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова В. А., 1961, 64, 28—51
31. *Долбиллин Н. П.*, О локальных свойствах дискретных правильных систем. Докл. АН СССР, 1976, 230, № 3, 516—519
32. *Ефремович В. А.*, *Тихомирова Е. С.*, Эквимоρφизмы гиперболических пространств. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, 28, № 16, 1139—1144
33. *Жук И. К.*, Фундаментальные тетраэдры в пространствах Евклида и Лобачевского. Докл. АН СССР, 1983, 270, № 1, 35—37
34. *Каждан Д. А.*, *Маргулис Г. А.*, Доказательство гипотезы Сельберга. Мат. сб., 1968, 75, № 6, 162—168
35. *Каплинская И. М.*, О дискретных группах, порожденных отражениями в гранях симплициальных призм в пространствах Лобачевского. Мат. заметки, 1974, 15, 159—164
36. *Крушкаль С. Л.*, *Апанасов Б. Н.*, *Гусевский Н. А.*, Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1981, 230 с.
37. *Любарский Г. Я.*, Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958, 354 с.
38. *Макаров В. С.*, Об одном классе разбиений пространства Лобачевского. Докл. АН СССР, 1965, 161, № 2, 277—278
39. —, Об одном классе дискретных групп пространства Лобачевского, имеющих бесконечную фундаментальную область конечной меры. Докл. АН СССР, 1966, 167, № 1, 30—33
40. —, О федоровских группах четырехмерного и пятимерного пространств Лобачевского. Исслед. по общей алгебре. Кишинев: 1968, № 1, 120—129
41. —, Геометрические методы построения дискретных групп движений пространства Лобачевского. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1983, 15, 3—59
42. *Маргулис Г. А.* Изометричность замкнутых многообразий постоянной отрицательной кривизны с одинаковой фундаментальной группой. Докл. АН СССР, 1970, 192, № 4, 736—737
43. *Медных А. Д.*, Группы автоморфизмов трехмерных гиперболических многообразий. Докл. АН СССР, 1985, 285, № 1, 40—44
44. *Натанзон С. М.*, Инвариантные прямые фуксовых групп. Успехи мат. наук, 1972, 27, № 4, 145—160
45. —, Пространство модулей вещественных кривых. Тр. Моск. мат. об-ва, 1978, 37, 219—253
46. *Никулин В. В.*, Об арифметических группах, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, 44, № 3, 637—668
47. —, О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, 45, № 1, 113—142

48. —, О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Соврем. пробл. матем., 1981, 18, 3—114
49. —, *Шафаревич И. Р.*, Геометрия и группы. М.: Наука, 1983, 240 с.
50. *Прохоров М. Н.*, Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником конечного объема в пространствах Лобачевского большой размерности. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1986, 50, № 2, 413—424
51. *Рышков С. С.*, Максимальные конечные группы целочисленных матриц и полные группы целочисленных автоморфизмов положительных квадратичных форм (типы Браве). Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1972, 128, 183—211
52. —, *Ломакина З. Д.*, Доказательство теоремы о максимальных конечных группах целочисленных  $(5 \times 5)$ -матриц. Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1980, 152, 204—215
53. *Шайхеев М.*, Подгруппы отражений в группах Бьянки. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1987, 127—134
54. *Шварцман О. В.*, О дискретных арифметических подгруппах комплексных групп Ли. Мат. сб., 1968, 77, № 4, 542—544
55. —, Подгруппы отражений в группах Бьянки. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1987, 134—139
56. *Шубников А. В.*, Атлас кристаллографических групп симметрии. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1946, 57 с.
57. *Abels H.*, Geometrische Erzeugung von diskontinuierlichen Gruppen. Münster: Schr. Math. Inst. Univ. Münster, 1966, 41, 2—32
58. —, *Dress A. W. M.*, Invariant subspaces of affine groups. — An algebraic version of a theorem of Bieberbach. J. Algebra, 1986, 99, № 2, 496—517
59. *Abikoff W.*, The real analytic theory of Teichmüller spaces. Berlin Heidelberg New York: Lect Notes Math., 1980, 144 p. (Пер. на рус. яз.: *Аби-коф У.*, Вещественно аналитическая теория пространств Тейхмюллера. М.: Мир, 1985, 119 с.)
60. *Agard S.*, A geometric proof of Mostow's rigidity theorem for groups of divergence type. Acta math., 1983, 151, № 3-4, 231—252
61. *Ahlfors L. V.*, Möbius transformations in several dimensions. Minnesota: Univ. of Minnesota. Lect. Notes, 1981, 120 pp. (Пер. на рус. яз.: *Альф-форс Л.*, Преобразования Мебиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986, 111 с.)
62. *Armstrong M. A.*, On the fundamental group of an orbit space. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1968, 64, № 2, 299—301
63. *Auslander L.*, Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. Ann. Math., 1960, 71, № 3, 579—590
64. *Berdon A. F.*, The geometry of discrete groups. New-York e. a. Springer, 1983, 337 pp. (Пер. на рус. яз.: *Бердон А.*, Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986, 304 с.)
65. —, *Maskit B.*, Limit points of Kleinian groups and finitesided fundamental polyhedra. Acta math., 1974, 132, № 1, 1—12
66. *Berger M.*, Geometrie. Paris: CEDIC, 1978, v. I—V, 1030 p. (Пер. на рус. яз.: *Берже М.*, Геометрия, тт. I, II. М.: Мир, 1984, 946 с.)
67. *Bianchi L.*, Sui gruppi de sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari. Math. Ann., 1892, 40, 332—412
68. *Borel A.*, Commensurability classes and volumes of hyperbolic 3-manifolds. Ann. scuola. Ecole norm. super ser. IV, 1981, v 8, № 1, 1—33
69. *Bourbaki N.*, Groupes et algèbres de Lie, ch. 4—6, Paris: Hermann, 1968, 288 pp. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.*, Группы и алгебры Ли, гл. 4—6, М.: Мир, 1972, 334 с.)
70. *Brown H., Bülow R., Neubüser J., Wondratschek H., Zassenhaus H.*, Crystallographic groups of four-dimensional space. New York: Wiley, 1978, 240 pp.

71. *Buser P.*, A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups. Enseign. math., 1985, 31, № 1-2, 137—145
72. *Cassels J.*, Rational quadratic forms. London—New-York: Academic Press, 1978, 413 p. (Пер. на рус. яз.: *Касселс Дж.*, Рациональные квадратичные формы. М.: Мир, 1982, 436 с.)
73. *Charlap L. S.*, Bieberbach groups and flat manifolds. New-York e. a.: Springer, 1986, 242 pp.
74. *Chinburg T.*, Volumes of hyperbolic manifolds. J. Different. Geom., 1983, 18, № 4, 783—789
75. —, *Friedman E.*, The smallest arithmetic hyperbolic three-orbifold. Invent. math., 1986, № 3, 507—527
76. *Conway J. H.*, The automorphism group of the 26-dimensional even unimodular Lorentzian lattice. J. Algebra, 1983, 80, № 1, 159—163
77. *Coxeter H. S. M.*, Discrete groups generated by reflections. Ann. Math., 1934, 35, № 3, 588—621
78. —, Regular honeycombs in hyperbolic space. In: Proc. Int. Congr. Math. (Amsterdam, 1954), Amsterdam, 1955, v 3, 155—169
79. —, Regular polytopes. 3 ed. New-York: Chelsea, 1973, 340 pp.
80. —, *Moser W. O. J.*, Generators and relations for discrete groups. Berlin e. a.: Springer, 1965, 161 pp. (Пер. на рус. яз.: *Кокстер Г. С. М.*, *Мозер У. О. Дж.*, Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980, 240 с.)
81. *Davis M.*, A hyperbolic 4-manifold. Proc. Amer. Math. Soc., 1985, 93, № 2, 325—328
82. *Delaunay B.*, Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions. I, II. Изв. АН СССР, 1929, № 1, 70—110; № 2, 147—167
83. *Douady A.*, L'espace de Teichmüller. Astérisque, 1979, 66—67, 127—137
84. *Edmonds A. L.*, *Ewing J. H.*, *Kulkarni R. S.*, Torsion free subgroups of Fuchsian groups and tessellations of surfaces. Invent. math., 1982, 69, № 3, 331—346
85. *Farkas H. M.*, *Kra I.*, Riemann surfaces, New-York e. a.: Springer, 1980, 332 pp.
86. *Fricke R.*, *Klein F.*, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, v. 1. Leipzig: Teubner, 1897, 634 p.
87. *Garland H.*, *Ragunathan M. S.*, Fundamental domains for lattices in rank one semisimple Lie groups. Ann. Math., 1970, 92, № 2, 279—326
88. *Grayson M.*, The orbit space of a Kleinian group: Riley's modest example. Math. Comput., 1983, 40, № 162, 633—646
89. *Greenberg L.*, Finiteness theorems for Fuchsian and Kleinian groups. In: Discrete groups and automorphic functions, ed. Harvey W. J., London: Acad. Press, 1977, 405 pp.: 199—257
90. *Gromov M.*, Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen. N. Y. e. a.: Lect. Notes Math., 1981, 842, 40—53
91. *Grünbaum B.*, *Shephard G. S.*, Tilings and patterns. New-York: W. H. Freeman and Co., 1986, 700 p.
92. *Hempel J.*, Orientation reversing involutions and the first Betti number for finite coverings of 3-manifolds. Invent. math., 1982, 67, № 1, 133—142
93. *Hilbert D.*, *Cohn-Vossen S.*, Anschauliche geometrie. Berlin: Springer, 1932, 310 S. (Пер. на рус. яз. 3-го издания книги: *Гильберт Д.*, *Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия, М.: Наука, 1971, 344 с.)
94. *Hoare A. H.*, *Karrass A.*, *Solitar D.*, Subgroups of infinite index in Fuchsian groups. Math. Z., 1972, 125, № 1, 59—69
95. *Jørgensen T.*, On discrete groups of Möbius transformations. Amer. J. Math., 1976, 98, № 3, 739—749
96. —, *Marden A.*, Generic fundamental polyhedra for Kleinian groups. Berkeley: Reports of Math. Sci. Research Inst., 1986, September, 30 p.
97. *Kerckhoff S. P.*, The Nielsen realization problem. Ann. Math., 1983, 117, № 2, 235—265

98. *Macbeath A. M.*, The classification of non-euclidean plane crystallographic groups. *Can. J. Math.*, 1967, 19, № 6, 1192—1205
99. —, Groups of homeomorphisms of a simply connected space. *Ann. Math.*, 1964, 79, № 3, 473—487
100. —, *Singerman D.*, Spaces of subgroups and Teichmüller space. *Proc. London Math. Soc.*, 1975, 31, № 2, 211—256
101. *Margulis G. A.*, Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature. *Proc. Int. Congr. Math. Vancouver*, 1975, 2, 21—34
102. —, *Rohlf's J.*, On the proportionality of covolumes of discrete subgroups. *Math. Ann.*, 1986, 275, № 2, 197—205
103. *Maskit B.*, On Poincaré's theorem for fundamental polygons. *Adv. Math.*, 1971, 7, № 3, 219—230
104. *Massey W. S.*, Algebraic topology: An introduction New-York, Chicago: Harcourt, Brace & World, Inc., 1967, 261 p. (Пер. на рус. яз.: *Масси У., Столлингс Дж.*, Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977, 278 с.)
105. *Maxwell G.*, Sphere packings and hyperbolic reflection groups. *J. Algebra*, 1982, 79, № 1, 78—97
106. *Meyerhoff R.*, Sphere-packing and volume in hyperbolic 3-space. *Comment. math. helv.*, 1986, 61, № 2, 271—278
107. *Millson J. J.*, On the first Betti number of a constant negative curved manifold. *Ann. Math.*, 1976, 104, № 2, 235—247
108. *Morokuma T.*, A characterization of fundamental domains of discontinuous groups acting on real hyperbolic spaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA*, 1978, 25, № 2, 157—183
109. *Mostow G.*, Quasi-conformal mappings in  $n$ -space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Publ. Math. IHES*, 1968, 34, 53—104 (Пер. на рус. яз.: *Мостов Г.*, Квазиконформные отображения в  $n$ -мерном пространстве и жесткость гиперболических пространственных форм. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1972, 16, № 5, 105—157)
110. *Munkholm H. J.*, Simplices of maximal volume in hyperbolic space, Gromov's norm, and Gromov's proof of Mostow's rigidity Theory (following Thurston). New-York e. a.: *Lect. Notes Math.*, 1980, 788, 109—124
111. *Neumann W. D., Zagier D.*, Volumes of hyperbolic three-manifolds. *Topology*, 1985, 24, № 3, 307—332
112. *Neumeier A., Seidel J.*, Discrete hyperbolic geometry. *Comb. J.*, 1983, 3, № 2, 219—237
113. *Nikulin V. V.*, Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces. In: *Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, August 1986*
114. *Poincaré H.*, Théorie des groupes fuchsienues. *Acta math.*, 1882, 1, 1—62 (Пер. на рус. яз.: *Анри Пуанкаре.* Избранные труды. Т. 3, М.: Наука, 1974, 9—62)
115. —, Mémoire sur les groupes kleinéens. *Acta math.*, 1883, 3, 49—92
116. *Prasad G.*, Strong rigidity of  $Q$ -rank 1 lattices. *Invent. math.*, 1973, 21, № 4, 255—286
117. *Raghunathan M.*, Discrete subgroups of Lie groups. Berlin e. a.: Springer, 1972, 227 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рагунатан М.*, Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977, 316 с.)
118. *Schwarzenberger R. L.*, Crystallography in spaces of arbitrary dimension. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1974, 76, № 1, 23—32
119. *Seifert H.*, Komplexe mit Seitenzuordnung. *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen*, 1975, № 6, 49—80
120. —, *Threlfall W.*, Lehrbuch der Topologie. Teubner, 1934, 353 S. (Пер. на рус. яз.: *Зейферт Г., Трельфалль В.*, Топология. ГОИТИ, 1938, 400 с.)
121. *Selberg A.*, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. In: *Contributions to Function theory, Bombay*, 1960, 147—164 (Пер. на рус. яз.: *Сельберг А.*, О дискретных группах преобразований симметрических пространств большой размерности. Математика. Период. сб. перев., 1962, 6, № 3, 3—15)

122. *Seppälä M., Sorvali T.*, On geometric parametrization of Teichmüller spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. AI Math., 1985, v 10, № 4, 515—526
123. *Singerman D.*, Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups. Bull. London Math. Soc., 1970, 2, № 6, 319—323
124. —, Finitely maximal Fuchsian groups. J. London Math. Soc., 1972, № 1, 29—38
125. *Swan R.*, Generators and relations for certain special linear groups. Adv. Math., 1971, 6, № 1, 1—77
126. *Thurston W. P.*, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, 6, № 3, 357—382
127. *Tukia P.*, Differentiability and rigidity of Möbius groups. Invent. math., 1985, 82, № 3, 557—578
128. —, On isomorphisms of geometrically finite Möbius groups. Publ. Math. IHES, 1985, № 61, 171—214
129. *Vinberg E. B.*, Some arithmetical discrete groups in Lobachevskii spaces. In: Proc. Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie Groups, Oxford: Univ. Press, 1975, 823—348
130. —, The two most algebraic K3 surfaces. Math. Ann., 1983, 265, 1—21
131. —, Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces. In: Proc. Int. Congr. Math. (Warszawa, August 1983). Warszawa, 1984, 585—592
132. *Wang H.-C.*, Topic on totally discontinuous groups. In: Symmetric spaces, Marcel Dekker, 1972, 490 p., 460—485
133. *Weyl H.*, Symmetry. Princeton, New-Jersey: Princeton Univ. Press, 1952, 168 p. (Пер. на рус. яз.: Вейль Г., Симметрия, М.: Наука, 1966, 191 с.)
134. *Wielenberg N. J.*, Discrete Möbius groups: fundamental polyhedra and convergence. Amer. J. Math., 1977, 99, № 4, 861—878
135. *Wolf J.*, Spaces of constant curvature. Berkley: Univ. of California, 1972, 408 pp. (Пер. на рус. яз.: Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982, 480 с.)
136. *Wong C. K.*, A uniformization theorem for arbitrary Riemann surfaces with signature. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 28, № 2, 489—495
137. *Zieschang H.*, Finite groups of mapping classes of surfaces. Lect. Notes Math., 1981, 875, 337 p.
138. —, *Vogt E., Coldewey H.-D.*, Surfaces and planar discontinuous groups. Lect. Notes. Math., 1980, 835, 329 p.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

139. *Веснин А. Ю.*, Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля. Сиб. мат. ж., 1987, т. XXVIII, № 5, 50—53
140. *Медных А. Д.*, О группе изометрий гиперболического пространства додекаэдра Зейферта—Вебера. Сиб. мат. ж., 1987, т. XXVIII, № 5, 134—144
141. *Lee Y. W.*, Abelian rank of normal torsion-free finite index subgroups of polyhedral groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1985, 290, № 2, 735—745
142. *Löbell F.*, Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford—Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. Sachs. Acad. Wiss., 1931, 83, 168—174
143. *Maskit B.*, Kleinian groups. Berlin—New York: Springer, 1987, 340 p.
144. *Plesken W., Pohst M.*, On maximal finite irreducible subgroups of  $GL(n, \mathbb{Z})$ , I, II. Math. Comput. 1977, 31, № 3, 536—573; 1980, 34, № 2, 245—301

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абельс (Abels H.) 166  
 Александров А. Д. 120, 166  
 Аллендёрфер (Allendoerfer C. B.) 131  
 Андреев Е. М. 114, 118, 119, 120, 214, 250  
 Апанасов Б. Н. 181
- Бернулли Я. (Bernoulli J.) 130  
 Бибербах (Bieberbach L.) 158, 178, 182  
 Бойаи (Бойяи) (Bolyai J.) 93  
 Бонне (Bonnet O.) 69, 131  
 Браве (Bravais A.) 189, 190  
 Бианки (Бьянки) (Bianchi L.) 232
- Вейль А. (Weil A.) 201, 245  
 Вейль Г. (Weyl H.) 111  
 Венков Б. А. 163, 229  
 Винберг Э. Б. 123, 139, 221, 237, 238  
 Витт (Witt E.) 17  
 Вольф (Wolf J. A.) 165
- Галуа (Galois E.) 194  
 Гарланд (Garland H.) 245  
 Гаусс (Gauss C. F.) 69, 131  
 Герглотц (Herglotz G.) 141  
 Гильберт (Hilbert D.) 8, 189  
 Грам (Gram J. P.) 85, 112  
 Громов (Gromov M.) 240, 244  
 Гурвиц (Gurvitz A.) 197
- Делоне Б. Н. 191  
 Ден (Dehn M.) 205, 248  
 Дик (Dyck W.) 214  
 Дирихле (Dirichlet P. G. L.) 155, 175
- Евклид (Eukléides) 8  
 Ефремович В. А. 244
- Жук И. К. 175
- Зарисский (Zariski O.) 241  
 Зейферт (Seifert H.) 165, 180
- Ивасава (Iwasawa K.) 105
- Йоргенсен (Jørgensen T.) 175, 178
- Каждан Д. А. 178  
 ван Кампен (van Kampen E. R.) 196  
 Карпелевич Ф. И. 110  
 Керкхофф (Kerckhoff S. P.) 206  
 Кёбе (Koebe P.) 50, 206  
 Киллинг (Killing W.) 164  
 Клейн (Klein F.) 35, 164, 191, 218  
 Клиффорд (Clifford W. K.) 101, 143, 164
- Кокстер (Coxeter H. S. M.) 120, 134, 208, 210, 226  
 Коши (Cauchy A.) 118
- Ламберт (Lambert J. H.) 72  
 Ланнер (Lannér F.) 307  
 Лёбелл (Löbell F.) 166, 215  
 Ли (Lie S.) 9  
 Лиувиль (Liouville J.) 42  
 Лич (Leech J.) 236  
 Лобачевский Н. И. 7, 93, 120, 125, 132, 134, 138, 139
- Макаров В. С. 215, 220, 240  
 Маргулис Г. А. 178, 179, 238, 244, 251, 253  
 Марден (Marden A.) 175  
 Маскит (Maskit B.) 165  
 Мёбиус (Möbius A.) 191  
 Милнор (Milnor J.) 120, 131  
 Милсон (Millsen J. J.) 251  
 Минковский (Minkowski H.) 111, 145  
 Мостов (Mostow G.) 244
- Никулин В. В. 237  
 Нильсен (Nielsen J.) 200, 207
- Перрон (Perron O.) 116  
 Петерсон К. М. 142  
 Прасад (Prasad G.) 244  
 Прохоров М. Н. 225  
 Пуанкаре (Poincaré H.) 46, 50, 128, 129, 165, 168, 206, 214  
 Пятецкий-Шапиро (Pyateckii-Shapiro I. I.) 240
- Рагунатан (Ragunathan M. S.) 245  
 Риман (Riemann B.) 21, 197
- Сандакова Н. Н. 191  
 Сатаке (Satake I.) 179  
 Сельберг (Selberg A.) 158  
 де Ситтер (de Sitter W.) 145
- Тейхмюллер (Teichmüller) 201, 203, 205  
 Тёрстон (Thurston W. P.) 165, 203, 206, 245, 248  
 Тихомирова Е. С. 244  
 Трельфалль (Threlfall W.) 180
- Федоров Е. С. 163, 190  
 Фрике (Fricke R.) 163  
 Фробениус (Frobenius G.) 116, 230
- Цассенхауз (Zassenhaus H.) 186
- Чарлап (Charlap L.) 191

Шаботи (Chabauty C.) 201  
Шёнфлис (Schoenflies A.) 158, 178  
182, 190

Шлегель (Schlegel V.) 226  
Шлефли (Schläfli L.) 120, 123, 127,  
128, 130, 160, 223

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолют 32  
Аксиома максимальной подвижности 12  
Алгебра кватернионов 230  
Вершина многогранника бесконечно удаленная 117  
— —идеальная 219  
— многоугольника 61  
— —бесконечно удаленная 62  
Взаимно эквидистантные множества 85  
Вращение вокруг плоскости 99  
Гиперплоскость 25  
Гиперповерхность стандартная 92  
Гипотеза Нильсена 207  
— Тёрстона 165  
Голоэдриа (сингония) 189  
— арифметическая 189  
Граница однородной области 32  
Группа Брауэра 189  
— Бианки 232  
— Галуа накрытия 194  
— движений 10  
— — арифметическая простейшего типа 230  
— — — пространства  $L^2$  231  
— — — —  $L^3$  232  
— — — —  $L^7$  234  
— — — —  $L^n$  233  
— — дискретная 150  
— — арифметическая 163  
— — геометрическая конечная 177  
— — — компактного типа 178  
— — — кристаллографическая 152  
— — — равномерная 152  
— — — расходящегося типа 244  
— — кристаллографическая пространства  $E^n$  182  
— — — пространства  $L^n$  арифметическая 163  
— — — — неарифметическая 240  
— — — — рефлексивная 234  
— — — — расщепляемая (симфорная) 185  
— дискретная отражений 299  
— — неприводимая 105  
— — приводимая 105  
— — диэдральная бесконечная 83  
— — изотропии 10  
— — квазиланнеровская 218  
— — конечная 187  
— — ланнеровская 213  
— — линейная алгебраическая 105  
— — — диагональная 105  
— — — квазиалгебраическая 105  
— — — редуцируемая 105  
— — — унипотентная 105  
— Ли преобразований 9  
— модулярная 202  
— — Клейна 151  
— одномерных когомологий 185  
— отражений 207  
— плоская 196  
— — компактного типа 197  
— — — конечного типа 196  
— — некомпактного типа 196  
— подобий существенная 108  
— симметрии фигуры 159  
— соизмеримости 251  
— униформизации 194  
— фуксова 192  
— — арифметическая 231  
— — второго рода 200  
— — максимальная 207  
— — первого рода 200  
— элементарная 177  
Движение 10  
— гиперболическое 102  
— несобственное 13  
— параболическое 102  
— собственное 13  
— эллиптическое 102  
Действие группы свободное 151  
Замыкание однородной области 32  
Избыток угловой 67  
Изометрия 10  
Изоморфизм однородных пространств 17  
Инволюция риманова многообразия 22  
Индекс ветвления 193  
— инерции схемы 211  
Квадрика овальная 33  
Класс 187  
— арифметический 187

- метрики конформный 42
- Клин гиперболический 122
- параболический 124
- эллиптический 124
- Коллинеация 33
- Компактификация Сатаке 179
- Конус направляющий 121
- сопряженный 121
- Кообъем дискретной группы 252
- Координаты нормальные 140
- Коцикл одномерный 185
- Критерий арифметичности группы отражений 238
- геометрической конечности 180
- Лемма Маргулиса 178
- Сельберга 158
- Линия однородная 80
- Матрица Грама выпуклого многогранника 112
- неразложимая 115
- параболическая 118
- Мера конуса угловая 121
- — — относительная 128
- Метод Пуанкаре 171
- Метрика риманова инвариантная 11
- Многогранник выпуклый 27
- — невырожденный 111
- — неразложимый 117
- — остроугольный 113
- Кокстера 208
- остроугольный 113
- правильный 222
- фундаментальный 166
- Многообразие риманово плоское 190
- — постоянной кривизны 12
- Многоугольник 60
- выпуклый 61
- собственный 61
- фундаментальный канонический 196
- Множество выпуклое 26
- предельное 177
- Модель аффинная 16
- — стандартная 16
- векторная 16
- — стандартная 16
- Клейна 35
- конформная 44
- конформно-евклидова 46
- матричная 51
- плоская конформного пространства 41
- проективная 32
- проективно-евклидова 34
- Пуанкаре 46
- Накрытие Галуа 194
- разветвленное 193
- Направление параллельности 56
- Неравенство Йоргенсена 178
- Носитель сигнатуры 194
- Область Дирихле 155
- Нильсена 200
- однородная 32
- фундаментальная дискретной группы 152
- Оболочка выпуклая 62
- Огранка фиктивная 166
- Оператор Петерсона 142
- Определитель схемы 211
- Определяющее подпространство плоскости 24
- Ориентация гиперплоскости 27
- Орисфера 93
- Орицикл 80
- Орнамент 161
- Ось движения 100
- Отражение 24
- скользящее 77
- Отрезок 25
- Панты 204
- Параллелоэдр 192
- Перенос Клиффорда 101
- Перпендикуляр 28
- Перпендикулярная секущая пары плоскостей 88
- Плоскости взаимно эквидистантные 85
- ортогональные 26
- параллельные по Лобачевскому 88
- перпендикулярные 85
- полярные 27
- расходящиеся 88
- Плоскость 24
- Лобачевского расширенная 54
- Поверхность 193
- Клиффорда 143
- омбилическая 142
- риманова 206
- с сигнатурой 194
- стандартная 92
- Поворот параболический 76
- Подгруппа орисферическая 109
- стандартная 91, 92
- Подпространства изоклинные 84
- перпендикулярные 84
- Подпространство гиперболическое 16
- параболическое 16
- пространства постоянной кривизны 24
- эллиптическое 16
- Подсхема 210
- Поле определения арифметической группы 230
- Полуплоскость 26
- Полупространство 26

- Поляра 27  
 Правило косинусов 70  
 — — двойственное 71  
 — синусов 70  
 — — двойственное 71  
 Представление изотропии 10  
 Преобразование круговое 39  
 — смежности 167  
 Проблема Гильберта 18-я 189  
 Продолжение движения каноническое 99  
 Проектирование (ортогональное) 28  
 Проекция (ортогональная) 28  
 — стереографическая 40  
 Пространство додекаэдра сферическое 164  
 — евклидово 13  
 — конформное 39  
 — Лобачевского 14  
 — модулей 205  
 — однородное 10  
 — плоскости касательное 24  
 — — нормальное 24  
 — постоянной кривизны 12  
 — Римана (эллиптическое) 21  
 — Тейхмюллера абстрактной группы 201  
 — — компактной поверхности (с краем) 205  
 — — плоской группы 206  
 — — фундаментальной группы замкнутой поверхности 203  
 Прямая 25  
 Прямые, параллельные по Лобачевскому 56  
 — расходящиеся 55  
 Пучок прямых 55, 93  
 — — гиперболический 79, 93  
 — — параболический 79, 93  
 — — эллиптический 78, 79  
  
 Разбиение 152  
 — на правильные многогранники 225  
 — нормальное 167  
 — однородное 175  
 Разложение Ивасава 105  
 —, согласованное с подпространством 83  
 Ранг схемы 211  
 Расстояние 29  
 Решетка Лича 236  
  
 Свойство Милсона 251  
 — универсальное аналитической униформизации 206  
 — — топологической униформизации 195  
 Сдвиг вдоль прямой 75, 102  
 — параболический 102  
  
 Сектор орисферический 121  
 — сферический (шаровой) 121  
 — эквидистантный 122  
 — равного наклона 76  
 Семейство гиперплоскостей невырожденное 116  
 — — неразложимое 116  
 — локально конечное 150  
 — полупространств остроугольное 113  
 Сигнатура 194  
 — максимальная 207  
 Символ Шлефли правильного многогранника 293  
 — — разбиения на правильные многогранники 226  
 Симметрия относительно точки 18  
 Симплекс с идеальными вершинами 219  
 Сингония (голоэдрия) 189  
 Система каноническая образующих плоской группы 196  
 — точек общего положения 25  
 Скольжение вдоль плоскости 99  
 Скручивание Дена 205  
 Соизмеримые группы 158  
 Соотношение Пуанкаре 168  
 Стенка многогранника 208  
 Стереоэдр 176  
 Структура кристаллическая 161  
 Сфера 14  
 — в конформном пространстве 39  
 Схема 210  
 — квазиланнеровская 218  
 — Кокстера 211  
 — — параболическая 211  
 — — ланнеровская 215  
 — — эллиптическая 211  
 — остроугольного многогранника 211  
  
 Теорема А. Д. Александрова 120  
 — об аналитической униформизации 206  
 — — сильной жесткости 244  
 — — топологической униформизации 194  
 — — трех перпендикулярах 28  
 — Шёнфлиса—Бибербаха 158  
 Тетраэдр прямоугольный 132  
 Тип Бравае 189  
 — комбинаторный 118  
 — почти простой 118  
 — простой 118  
 Топология Шаботи 201  
 Точка предельная 177  
 — — каспидальная 181  
 — — квазипараболическая 170  
 — — коническая 180  
 — — параболическая 170

Треугольник 62  
— полярный 64

Углы стационарные пары про-  
странств 85

Угол многогранника при грани 129  
— параллельности 73

Униформизация поверхности с сигна-  
турой аналитическая 206

— — — — топологическая 194

Факторпространство по действию  
дискретной группы 152

Флаг многогранника 221

Форма пространственная 164

— — гиперболическая 164

— — евклидова 164, 190

— — сферическая 164

Формула Гаусса—Бонне 69, 131

— Лобачевского 134

— Пуанкаре 129

— Римана—Гурвица 197

— Шлефли 127, 130

Функция выпуклая 30

— Лобачевского 131

— смещения 100

Характеристика эйлерова плоской  
группы 197

Хирургия Дена 248, 250

Центр параболического сдвига 103

Эквидистанта 79, 93

Элемент граничный плоской группы  
196

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Геометрия пространств постоянной кривизны (Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников) . . . . .	5
Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны (Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман) . . . . .	147
Именной указатель . . . . .	260
Предметный указатель . . . . .	261

---

Технический редактор **Э. А. Прусакова**

Сдано в набор 23.12.87                      Подписано в печать 15.07.88  
Формат бумаги 60×90<sup>1/16</sup>.                      Бум. тип. № 2.                      Литературная гарнитура.  
Высокая печать.    Усл. печ. л. 16,75    Усл. кр.-отт. 16,75    Уч.-изд. л. 15,97  
Тираж 1200 экз.                      Заказ 10928                      Цена 2 р. 70 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, Балтийская ул., 14. Тел. 155-43-29

Производственно-издательский комбинат **ВИНИТИ**  
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ISSN 0233—6723. ИНТ, Современные проблемы математики **Фундаментальные направления**, т. 29, 1988, 1—268

УДК 514.13+514.132

Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников. Геометрия пространств постоянной кривизны. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 29 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1988, 5—146

Систематически излагаются основные факты геометрии пространств постоянной кривизны, в первую очередь пространства Лобачевского. При этом пространства постоянной кривизны определяются как однородные пространства максимальной подвижности. Такой аксиоматический подход позволяет свободно переходить от одной модели пространств постоянной кривизны к другой или, вообще, обходиться без модели, а также быстро ввести в действие аналитический аппарат. Изложение в большей своей части использует только сведения, не выходящие за рамки первых двух курсов математических факультетов университетов. В последней главе пространства постоянной кривизны рассматриваются как римановы многообразия. Здесь используется понятие кривизны и другие сведения из дифференциальной геометрии. Библ. 47.

УДК 512.817.7+514.13

Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 29 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1988, 147—259

Статья посвящена общим вопросам теории дискретных групп движений пространств постоянной кривизны и специальным классам таких групп. К числу общих вопросов относятся описание и построение дискретных групп через их фундаментальные многогранники, граничное поведение (в случае пространства Лобачевского), жесткость и деформации, кообъемы. Отдельные главы посвящены кристаллографическим группам, фуксовым группам, арифметическим группам и группам отражений. В связи с группами отражений приводится классификация правильных многогранников и разбиений на равные правильные многогранники. Приводятся краткие доказательства некоторых основных теорем. Библ. 144

# ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

ВИНИТИ выпускает в 1988 году информационное издание «Итоги науки и техники», серия

## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ.

Фундаментальные направления.

### Том 19. Функциональный анализ-1

Цена 1 р. 80 к.

Том содержит одну обзорную статью: д. ф.-м. н. Ю. И. Любич «Линейный функциональный анализ».

### Том 21. Группы Ли и алгебры Ли-2

Цена 1 р. 80 к.

Том содержит две обзорные статьи: д. ф.-м. н. Э. Б. Винберг, д. ф.-м. н. В. В. Горбацевич, к. ф.-м. н. О. В. Шварцман «Дискретные подгруппы групп Ли»; к. ф.-м. н. Б. Л. Фейгин, к. ф.-м. н. Д. Б. Фукс «Когомологии групп и алгебр Ли».

Тома серии «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления» содержат сводное изложение основных разделов современной математики и ее приложений, рассчитанное для профессионального пользования. Любая статья серии вполне доступна специалистам в смежных областях математики, а также физикам, механикам и другим научным работникам, профессионально пользующимся математикой в своей работе.

Издание в целом может послужить широкой базой для профессоров и преподавателей высших учебных заведений при разработке программ и лекционных курсов по различным разделам математики и ее приложений.

Все издание единое целое. Подбор статей в каждом томе и их содержание будут учитывать содержание других томов с широким использованием взаимных отсылок.

Тома высылаются наложенным платежом из имеющихся в наличии.

Заказы от организаций и индивидуальных подписчиков направлять по адресу: 140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, отдел распространения. Телефон 553-56-29.

# Б Л А Н К - З А К А З

Просим выслать наложенным платежом «            » экз. информационного издания «Итоги науки и техники», серия **Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.** Том            (вписать нужный том, на каждый номер тома просим оформлять отдельный заказ)

Заполняется заказчиком

**Адрес заказчика**

Куда \_\_\_\_\_

Кому \_\_\_\_\_

«            »            198            г.

Ц	№ _____ 140010, Люберцы, 10 Московской обл.
---	---

**ЦЕННАЯ БАНДЕРОЛЬ  
НАЛОЖЕННЫМ ПЛАТЕЖОМ**

Наложенный платеж \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ руб. \_\_\_\_\_ коп.

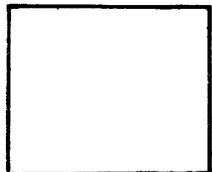
Ценная на \_\_\_\_\_ руб. \_\_\_\_\_ коп.

**Адрес заказчика**

Куда \_\_\_\_\_

Кому \_\_\_\_\_

Заполняется заказчиком



Вес . . . . . кг. \_\_\_\_\_ г. \_\_\_\_\_

Весовой . . . . . р. \_\_\_\_\_ к. \_\_\_\_\_

Страховой . . . . . р. \_\_\_\_\_ к. \_\_\_\_\_

За налож. платеж. р. \_\_\_\_\_ к. \_\_\_\_\_

Итого . . . . . р. \_\_\_\_\_ к. \_\_\_\_\_

140010, г. Люберцы, 10

Московской обл.,

Октябрьский проспект, 403

Производственно-издательский  
комбинат ВИНТИ

## О П Е Ч А Т К И

к ИНТ. «Совр. пробл. мат. Фунд. направления» № 29, 1988 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
46	4 сверху	единый шар	единый шар <sup>1)</sup>
52	6 сверху	$v \in C$ .	$q \in C$ .
108	9 снизу	$G \simeq O'_{n,1}$	$G \simeq O'_{n,1}$
125	12 снизу	пространства $C)^N$	пространства $C^N$
140	20 снизу	координатах	координатах
14	30 снизу	1.	11.
1	15 снизу	подгрупп	групп
	16		
228	13 снизу	Шлёфли	Шлёфли
261	3 снизу	209	200
261	17 снизу	177	176

Заказ 10928

