ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНОЛОГИЯМ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Том 29

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1964 г.

МОСКВА 1991

1—5450

СОДЕРЖАНИЕ

В. А. **Артамонов. Строение алгебр Хопфа** 3
§ 1. Основные понятяя я конструкция 3
§ 2. Основные примеры 12
§ 3. Антиподы, интегралы, примитивные и групповые элементы . 17
§ 4. Конечиомерные алгебры Хопфа 23
§ 5. Скрещеииые произведения 26
§ 6. Расширения Галуа 30
§ 7. Кокоммутативные алгебры, алгебры разделенных степеией, ко-алгебры Ли н другие специальные классы алгебр Хопфа . . 36
§ 8. Категорин алгебр Хопфа. (Ко) модули и коалгебры . . . 40
§ 9. Квантовые группы 46
Литература 51
А. А. Одинцов, В. В. Федорчук. Теория континуумов. I . . 63
Введение 63
§ 1. Змеевядные бикомпакты 64
§ 2. Древовидные контнннуумы 70
§ 3. Окружностноподобные континуумы 74
§ 4. Однородиые пространства 76
§ 5. Гиперпространства континуумов, абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия 79
§ 6. Отображения Уитни 91
Литература 93
Е. М. Вечтомов. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты 119
Введение 119
Глава 1. Связи между топологическимн пространствами и соответствующими кольцамн непрерывных функций 123
§ 1. Определяемость топологических пространств 123
§ 2. Двойственностн 127
§ 3. Кольцевые характеристики топологических свойств . . . 131
§ 4. Другие взаимосвязи 136
Глава 2. Алгебраические свойства колец непрерывиых функций . 137
§ 5. Общие свойства 137
§ 6. Подкольца 143
§ 7. Теория идеалов 145
§ 8. Характернзация колец непрерывных функций 149
Глава 3. Пучки колец и кольца глобальных сечений 150
§ 9. Функциональные представления колец сечениями 150
§ 10. Кольца сечений $\Gamma(X,\ \Pi)$ 155
Литература 156

Техническнй редактор *Л. Н. Федорова* Корректор *Л. С. Ефимова*

Сдано в набор 12.07.91 Подписано в печать 20.11.91
Формат бумагн 60×90[1]/16 Бум. тип. № 2 Литературнан гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 12,0+1 вклейка Усл. кр.-отт. 12,19 Уч.-изд. л. 14,2
Тираж 465 экз. Заказ 5450 Цена 4 р. 40 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, ул. Усиевича, 20а. Тел. 155-42-29
Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ОПЕЧАТКИ

«ИНТ, Алгебра. Топология. Геометрия» Том 29, 1991 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
27	6 сверху	$h \circ a$ и $h \circ a$	$h \circ a$ и $h \cdot a$
28	5 снизу	$\ldots \simeq \mathrm{End}_{AH} A \ldots$	$\ldots \simeq \mathrm{End}\,_A H A \ldots$
30	6 снизу	$A \notin \mathbf{P}(k)$. Если предположить . . .	$A \notin \mathbf{P}(k)$ [119]. Если предположить . . .
34	25 снизу	морнта-эквн-	Морита-экви-
34	27 снизу	$\mathrm{End}_{AH} A$.	$\mathrm{End}\,_A H A$.
48	3 сверху	$\Sigma_\varphi \Phi_1 bS(\Phi_2) c\Phi_3 = 1$,	$\Sigma_\Phi \Phi_1 bS(\Phi_2) c\Phi_3 = 1$.
48	4 сверху	$\Sigma_{\varphi^{-1}} S(\Phi_1'') \ldots = 1$	$\Sigma_{\Phi^{-1}} S(\Phi_1') \ldots = 1$,
51	10 сверху	$H_1 \vert\times\vert H_2$	$H_1 \rtimes\vert H_2$
55	2 сверху	Algera	Algebra
55	7 сверху	$r^{\varphi(n)+1}$	$n^{\varphi(n)+1}$
55	16 сверху	algebren and coradical	Algebren and Coradical
85	3 сверху	$\exp^c(I^{\omega^1})$	$\exp^c(I^{\omega_1})$
85	6 сверху	$f: X \times I^{\omega^1} \to X$	$f: X \times I^{\omega_1} \to X$

Зак. 5450

УДК 512.667.7+515.12+515.122.3

УДК 512.667.7

СТРОЕНИЕ АЛГЕБР ХОПФА

В. А. Артамонов

Конструкция алгебр Хопфа возникла при изучеиии когомологий групп Ли. Алгебры Хопфа естественно возникают в алгебраической топологии [17]—[20], [35], в теории алгебраических групп [34], [36] и т. д. В последние годы появилось новое направление в изучении алгебр Хопфа — теория квантовых групп. Ее развитие стимулируется связями с физикой. Другим важным импульсом для развития теории алгебр Хопфа в последние годы явилось понимание того факта, что построение некоммутативной геометрии тесно связано с алгебрами Хопфа, а также с квантовыми группами.

Алгебрам Хопфа посвящены две монографии [39], [244]. Отдельные сведения, касающиеся этой темы, излагаются в [2], [4], [34], [36]. Настоящий обзор охватывает период с 1970 года (время выхода монографии Свидлера [244]) по настоящее время. Основное внимание в обзоре уделяется структурной теории алгебр Хопфа. В него не включены материалы по алгебраическим группам. Эта тема уже широко представлена в монографиях и обзорах [25], [26], [34]. Обзор не касается теории (ко)гомологий в алгебрах Хопфа, связей с алгебраической топологией, поскольку эти важные темы являются предметом специальных обзоров.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. П. Соловьеву и А. А. Давыдову за полезные консультации и цснные советы.

§ 1. Основные понятия и конструкции

Пусть k — основное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Всюду далее под $\otimes$ и Hom понимается тензорное произведение над k и множество морфизмов k-модулей. Все рассматриваемые (гомо)морфизмы предполагаются k-линейными. Гомоморфизмы пишутся слева от аргументов и поэтому $(fg)(x)=f(g(x))$. Через $\mathbf{P}(k)$ обозначается категория конечно порожденных проективных k-модулей. Каждую k-алгебру A можно понимать как морфизм $m=m_A : A\otimes A\to A$, где $m(x\otimes y)=$

$=xy$. Ассоциативность умножения m эквивалентна коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes 1_A"] \arrow[d, "1_A\otimes m"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\ A\otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd}$$

Пусть $t: A\otimes A\to A\otimes A$ — морфизм перестановки, $t(a\otimes b)=b\otimes a$. Умножение m в A коммутативно в том и только в том случае, если $mt=m$. Алгебра A с умножением m часто обозначается как пара (A, m).

Единичный элемент алгебры (A, m) можно отождествить с морфизмом $u: k\to A$, для которого коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} k\otimes A \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, "u\otimes 1_A"'] & A \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, "1_A"] & A\otimes k \arrow[d, "1_A\otimes u"] \\ A\otimes A \arrow[r, "m"] & A & A\otimes A \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd}$$

Алгебра с единицей часто обозначается как (A, m, u).

Гомоморфизмом алгебр $f: (A, m)\to(A', m')$ называется такой морфизм $f: A\to A'$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & A'\otimes A' \arrow[d, "m_{A'}"] \\ A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd}$$

Аналогично вводится понятие гомоморфизма алгебр с единицей. Отметим, что морфизм $u: k\to A$, связанный с определением единицы, является гомоморфизм алгебр.

Двойственным образом вводится понятие коалгебры. Под этим понимается k-модуль C с морфизмом коумножения $\Delta: C\to C\otimes C$. Коумножение Δ коассоциативно, если коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "1_C"] \\ C\otimes C \arrow[r, "1_C\otimes\Delta"'] & C\otimes C\otimes C \end{tikzcd}$$

Коумножение Δ *кокоммутативно*, если $t\Delta=\Delta$, где t — морфизм перестановки в $C\otimes C$. Коединицей (пополнением) называется

такой морфизм $\varepsilon: C\to k$, что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} C\otimes C \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1_C"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "1_C"] & C\otimes C \arrow[d, "1_C\otimes\varepsilon"] \\ k\otimes C \arrow[r, dash, "\sim"] & C \arrow[r, dash, "\sim"] & C\otimes k \end{tikzcd}$$

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под алгеброй понимается ассоциативная алгебра с единицей, а под коалгеброй — коассоциативная коалгебра с коединицей. Исключение составляют, в основном, алгебры и коалгебры Ли. Как и для алгебр, с помощью диаграмм определяются гомоморфизмы коалгебр. Коассоциативное коумножение $\Delta: C\to C\otimes C$ индуцирует однозначно определенный морфизм

$$\Delta_n: C\to C^{\otimes n}=\underbrace{C\otimes\ldots\otimes C}_{n}, \quad \Delta_2=\Delta.$$

Результат применения Δ_n к $x\in C$ обозначается [244] как

$$\Delta_n(x)=\Sigma_x x_{(1)}\otimes\ldots\otimes x_{(n)}, \quad x_{(i)}\in C.$$

Разумеется, данное представление неоднозначно.

Если A, B — две алгебры, то $A\otimes B$ наделяется естественной структурой алгебры, где $(a\otimes b)(a'\otimes b')=aa'\otimes bb'$. Единичным элементом в $A\otimes B$ является $1\otimes 1$. Если A, B коммутативны, то и алгебра $A\otimes B$ коммутативна. Предположим, что A, B — коалгебры. Тогда $A\otimes B$ наделяется структурой коалгебры с коумножением

$$\Delta_{A\otimes B}=(1_A\otimes t\otimes 1_B)(\Delta_A\otimes\Delta_B),$$

где $t: A\otimes B\to B\otimes A$ — морфизм перестановки. Коединицей в $A\otimes B$ является морфизм $m_k(\varepsilon_A\otimes\varepsilon_B)$. Если A, B кокоммутативны, то этим свойством обладает и $A\otimes B$.

Если заданы коалгебра C и алгебра A, то $\mathrm{Hom}(C, A)$ наделяется структурой алгебры с умножением $f*g=m_A(f\otimes g)\Delta_C$, где f, $g\in\mathrm{Hom}(C, A)$. Это умножение ассоциативно и оно называется *конволюцией*. Если $x\in C$ и $\Delta(x)=\Sigma_x x_{(1)}\otimes x_{(2)}$, то

$$(f*g)(x)=\Sigma_x f(x_{(1)})g(x_{(2)}).$$

Единицей в алгебре $\mathrm{Hom}(C, A)$ является $u_A\varepsilon_C$. Через $\mathrm{Reg}(C, A)$ обозначается группа обратимых элементов алгебры $\mathrm{Hom}(C, A)$. Если коалгебра C кокоммутативна, алгебра A коммутативна, то $\mathrm{Hom}(C, A)$ — коммутативная алгебра. Важным примером указанной конструкции *конволютивной алгебры* является сопряженный модуль $C^*=\mathrm{Hom}(C, k)$ к коалгебре C.

Двойственная ситуация несколько сложнее. Пусть A — алгебра, являющаяся проективным k-модулем. Рассмотрим подмодуль A^0 в $A^*=\mathrm{Hom}(A,k)$, состоящий из всех таких функций f, ядро которых содержит идеал I_f в A, причем $A/I_f\in\mathbf{P}(k)$. В этом случае естественное вложение $A^*\otimes A^*$ в $(A\otimes A)^*$ индуцирует изоморфизм $A^0\otimes A^0\simeq(A\otimes A)^0$. Поэтому A^0 является коалгеброй с коумножением Δ, где для $f\in A^0$ и $x, y\in A$

$$(\Delta f)(x\otimes y)=f(xy),\qquad \varepsilon(f)=f(1).$$

Алгебра A *собственная*, если A^0 плотно в A^*, т. е. если $f(x)=0$ для всех $f\in A^0$, то $x=0$. Любая аффинная коммутативная алгебра над полем собственная [97]. Отметим, что если $A\in\mathbf{P}(k)$, то $A^0=A^*$.

Если $A=\bigoplus_{n\geqslant 0}A_n$ — градуированная k-алгебра, причем $A_n\in\mathbf{P}(k)$ для всех n, то под A^* в этом случае понимают $\bigoplus_{n\geqslant 0}A_n^*$. Нетрудно видеть, что в этом случае $A^*\otimes A^*=(A\otimes A)^*$, т. е. A^* является коалгеброй.

Естественно вводится понятие *коподалгебры* коалгебры C. *Коидеалом* I в коалгебре C называется подмодуль I в $C^+=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$, причем $\Delta(I)\subseteq I\otimes C+C\otimes I$. Тогда C/I наследует структуру коалгебры.

Если C — коалгебра, то положим $G(C)=(c\in C\mid\Delta(c)=c\otimes c,\ \varepsilon(c)=1)$. Элементы $G(C)$ называются *групповыми* (*группоподобными*). Для элемента 1 из $G(C)$ положим $P_1(C)=(c\in C\mid\Delta(c)=c\otimes 1+1\otimes c)$. Нетрудно видеть, что $P_1(C)$ является подмодулем в C. Если C — биалгебра с единицей 1, то полагаем $P_1(C)=P(C)$. Элементы $P_1(C)$ (соответственно, $P(C)$) называются 1-*примитивными* (*примитивными*).

Коалгебра C *неприводима*, если в ней пересечение любых двух коподалгебр отлично от нуля. Коалгебра C *проста*, если в C нет собственных коподалгебр; C *точечна* (*пунктированна*), если любая простая коподалгебра в C одномерна; C *связна*, если C точечна и неприводима; C является *составной* коалгеброй, если C — линейная оболочка связных коподалгебр. Если $g\in G(C)$, то связной компонентой C^g называется максимальная связная коподалгебра в C, содержащая g. *Корадикалом* C_0 в коалгебре C называется сумма простых коподалгебр; C *кополупроста*, если $C_0=C$.

Корадикал C_0 в коалгебре C включается в *корадикальную фильтрацию* $0=C_{-1}\subset C_0\subset C_1\subset\ldots$, где $C=\bigcup_n C_n$ и $\Delta(C_n)=\sum_{i=0}^{n}C_i\otimes C_{n-i}$ для всех n. Опишем построение этой фильтрации в случае, когда C связно. В этой ситуации $G(C)$ состоит из одного элемента 1. Для $x\in C$ положим $\delta(x)=x-\varepsilon(x)1\in C^+$. Оператор δ индуцирует оператор δ^n в $C^{\otimes n}$ для всех n. Положим $C_n=\mathrm{Ker}(\delta^{n+1}\Delta_{n+1})$. Тогда $C_0=k\cdot 1$, $C^1\cap C^+=P_1(C)$. Следующие условия эквивалентны [97]: 1) $c\in C_n$; 2) $\Delta(c)=(c\otimes 1+1\otimes c)\bmod(C_{n-1}\cap C^+)^{\otimes 2}$. Если D является n-мерной коподалгеброй в C, то $D\subseteq C_{n-1}$.

Модуль M над k называется *правым* C-*комодулем* над коалгеброй C, если имеется такой морфизм $\rho: M\to M\otimes C$, что $(1\otimes\Delta)\rho=(\rho\otimes 1)\rho: M\to M\otimes C\otimes C$ и $(1\otimes\varepsilon)\rho=1: M\to M$. Аналогично определяется левый C-комодуль. Самое C является левым и правым C-*комодулем*. Морфизм ρ называется *структурным*. Если $m\in M$, часто пишут

$$\rho(m)=\Sigma_m m_{(0)}\otimes m_{(1)},$$

где $m_{(0)}\in M$, $m_{(1)}\in C$. Правый C-комодуль M является левым C^*-модулем. Действительно, для $m\in M$ и $f\in C^*$ положим

$$fm=\Sigma_m m_{(0)}f(m_{(1)}).$$

Левый C^*-модуль M называется в этом случае *рациональным*. Дуальным образом вводится понятие правого рационального C^*-модуля.

Предположим, что V — модуль над k. Кокоммутативная k-коалгебра $C(V)$ называется *косвободной* над V, если существует линейное отображение $p: C(V)\to V$, причём для любого морфизма f из кокоммутативной k-коалгебры C в V существует и притом единственный такой морфизм коалгебр $h: C\to C(V)$, что $ph=f$.

Пусть в k-модуле A заданы структура алгебры (A, m, u) и структура коалгебры (A, Δ, ε).

Предложение. Следующие условия эквивалентны:

1) $\Delta: A\to A\otimes A$, $\varepsilon: A\to k$ являются гомоморфизмами k-алгебр;

2) $m: A\otimes A\to A$, $u: k\to A$ являются гомоморфизмами k-коалгебр.

Если выполнены эти условия, то $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ называется *биалгеброй*. Морфизм $S: A\to A$ в биалгебре $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ называется *антиподом*, если коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[dd, "S\otimes 1_A"'] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & A\otimes A \arrow[dd, "1_A\otimes S"] \\
& k \arrow[d, "u"] & \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A & A\otimes A \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

Другими словами,

$$\varepsilon(x)=\Sigma_x x_{(1)}S(x_{(2)})=\Sigma_x S(x_{(1)})x_{(2)}$$

для всех $x\in A$. Антипод является антигомоморфизмом биалгебр, т. е.

$$S(xy)=S(y)S(x),\ \ \Delta S(x)=\Sigma_x S(x_{(2)})\otimes S(x_{(1)}),$$
$$S(1)=1,\ \ \varepsilon S(x)=\varepsilon(x).$$

Биалгебра A с антиподом S называется *алгеброй Хопфа.* Если в этом определении не требовать коассоциативности коумножения, то A называется квазихопфовой алгеброй. Естественно вводятся понятия биподалгебры, подалгебры Хопфа, гомоморфизма биалгебр и алгебр Хопфа. Алгебра Хопфа *инволютивна,* если $S^2=1$. Если A — биалгебра, то A^0 является коподалгеброй в A^*, и поэтому A^0 — биалгебра. Если A — алгебра Хопфа, то A^0 также является алгеброй Хопфа, причем $(Sf)(x)=f(S(x))$ при $f\in A^0$, $x\in A$. Если A — градуированная биалгебра (алгебра Хопфа), то A^* — градуированная биалгебра (алгебра Хопфа). Идеал в биалгебре, являющийся коидеалом, называется *биидеалом.* Если I — биидеал в биалгебре A, то A/I является биалгеброй. Пусть I — биидеал в алгебре Хопфа A, инвариантный относительно антипода. Тогда I называется *идеалом Хопфа,* причем A/I является алгеброй Хопфа.

Косвободная кокоммутативная над V коалгебра $C(V)$ является биалгеброй [173], [259].

В биалгебре A множество $G(A)$ является моноидом. Множество $P(A)$ замкнуто относительно операции коммутирования $[x, y]=xy-yx$. Если k имеет простую характеристику p, то $P(A)$ замкнуто относительно операции возведения в p-ую степень. Таким образом, $P(A)$ — алгебра Ли, причем в случае простой характеристики — ограниченная p-алгебра Ли. Если A — алгебра Хопфа, то $G(A)$ — группа, причем $S(x)=x^{-1}$, $x\in G(A)$. Если $x\in P(A)$, то $S(x)=-x$.

Пусть H — алгебра Хопфа. *Хопфовым правым H-модулем* называется правый H-модуль, являющийся правым H-комодулем со структурным морфизмом $\rho: M\to M\otimes H$, причём для всех $m\in M$, $h\in H$

$$\rho(mh)=\sum_{m,h} m_{(0)}h_{(1)}\otimes m_{(1)}h_{(2)}.$$

Предположим, что задана коалгебра C и алгебра A. Скажем, что задано *слабое (левое) действие* C в A, если задан морфизм $m: C\otimes A\to A$, $m(c\otimes a)=c\cdot a$, причём для любых $a, b\in A$, $c\in C$

$$c\cdot(ab)=\sum_c (c_{(1)}\cdot a)(c_{(2)}\cdot b),\quad c\cdot 1=\varepsilon(c).$$

Аналогично вводится понятие слабого правого действия C в A. Если $c\in G(C)$, то отображение $a\to c\cdot a$ является эндоморфизмом алгебры A. Если $c\in P(C)$, то отображение $a\to c\cdot a$ является дифференцированием алгебры A. Если задано слабое действие C в A, то говорят также, что задано измерение C в A. Слабое действие C в A называется *внутренним,* если в группе $\operatorname{Reg}(C, A)$ существует такой элемент u, что для всех $c\in C$, $a\in A$

$$c\cdot a=\sum_c u(c_{(1)})\,au^{-1}(c_{(2)}).$$

Левое слабое действие биалгебры H в алгебре A называется *действием,* если $m: H\otimes A\to A$ задает в A структуру левого H-модуля. Другими словами, $(hg)\cdot a=h\cdot(g\cdot a)$, $1\cdot a=a$ для всех $a\in A$ и $h, g\in H$. В этом случае A называется *левой H-модульной алгеброй.* Алгебра Хопфа H является H-модульной алгеброй. Действительно H действует в H с помощью *присоединенного представления* ad, где

$$ad(h)\,x=\sum_h h_{(1)}aS(h_{(2)}),\quad h,\ a\in H.$$

Если задано слабое действие коалгебры C в алгебре A, то через A^C обозначается множество всех таких $a\in A$, что $c\cdot a=\varepsilon(c)a$ для всех $c\in C$. Нетрудно видеть, что A^C — подалгебра в A. Элементы из A^C называются инвариантами (относительно слабого действия C).

Слабым (правым) кодействием биалгебры H в алгебре A называется такой морфизм алгебр $\rho: A\to A\otimes H$, что $(1\otimes\varepsilon)\rho(a)=a$. ρ называется *кодействием,* если $(\rho\otimes 1)\rho=(1\otimes\Delta)\rho$. Слабое кодействие называется *внутренним,* если существует такой обратимый элемент x из $A\otimes H$, что $\rho(a)=x(a\otimes 1)x^{-1}$ для всех $a\in A$. Слабое кодействие H в A индуцирует слабое действие H^0 в A, $f\cdot a=\overline{\rho(a)}(f)$, где черта означает морфизм $A\otimes H\to\operatorname{Hom}(H^0, A)$, $\overline{(a\otimes c)}(g)=g(c)a$. Если задано правое кодействие H в A, то A называется *правой H-комодульной алгеброй.* Обозначим в этом случае через A_H множество всех таких $a\in A$, что $\rho(a)=a\otimes 1$. A_H являются подалгеброй и элементы из A_H называются *ковариантами (коинвариантами).*

Пусть C, H — коалгебры. Скажем, что задано слабое левое действие H в C, если имеется такой морфизм $m: H\otimes C\to C$, $m(h\otimes c)=h\cdot c$, что для всех $h\in H$, $c\in C$

$$\Delta(h\cdot c)=\sum_{h,c}(h_{(1)}\cdot c_{(1)})\otimes(h_{(2)}\cdot c_{(2)})$$

$$\varepsilon(h\cdot c)=\varepsilon(h)\,\varepsilon(c).$$

Если H — биалгебра, то C называется *левой H-модульной коалгеброй,* если задано слабое левое действие H в C, причем дополнительно $(gh)\cdot c=g\cdot(h\cdot c)$ для всех g, $h\in H$, $c\in C$.

Пусть C, H — коалгебры. *Слабым левым кодействием* H в C называется такой морфизм $\rho: C\to H\otimes C$, что $(\varepsilon\otimes 1_C)\rho=1_C$, $(\rho\otimes 1_C)\Delta_C=(1_H\otimes\Delta_C)\rho$. Слабое кодействие называется *кодействием,* если $(\Delta_H\otimes 1_C)\rho=(1_H\otimes\rho)\rho$. В этом случае C называется *H-комодульной коалгеброй.*

Предположим, что H — биалгебра, A — левая H-модульная алгебра, B — левая H-комодульная алгебра. В этом случае можно построить *полупрямое произведение* (smash product) $A\#B$. Как k-модуль $A\#B$ совпадает с $A\otimes B$. Умножение в $A\#B$ задается по правилу

$$(a\otimes b)(a'\otimes b')=\sum_b a(b_{(1)}\cdot a')\otimes b_{(0)}b',$$

где $a, a'\in A$ и $b, b'\in B$. Построенная алгебра ассоциативна и $1\otimes 1$ — единичный элемент $A\#B$. При этом A и B являются подалгебрами в $A\#B$.

Сложнее вводится конструкция *скрещенного произведения* (crossed product). Пусть задано слабое левое действие H в A и левая H-комодульная алгебра B. *2-коциклом* в A называется морфизм $t: H\otimes H\to A$, причем для всех $f, g, h\in H$ и $a\in A$

$$t(h\otimes 1)=t(1\otimes h)=\varepsilon(h),$$

$$\sum_{f,g,h}(f_{(1)}\cdot(g_{(1)}\cdot a))(f_{(2)}\cdot t(g_{(2)}\otimes h_{(1)}))\,t(f_{(3)}\otimes g_{(3)}h_{(2)})=$$

$$=\sum_{f,g}t(f_{(1)}\otimes g_{(1)})(f_{(2)}g_{(2)}\cdot a)\,t(f_{(3)}g_{(3)}\otimes h).$$

Кроме того, предполагается, что $t\in\mathrm{Reg}(H\otimes H, A)$. Тогда $A\#_tB$ — алгебра, заданная на $A\otimes B$ с помощью умножения

$$(a\otimes b)(a'\otimes b')=\sum_{b,b'}a(b_{(2)}\cdot a')\,t(b_{(1)}\otimes b'_{(1)})\otimes b_{(0)}b'_{(0)},$$

где

$$(\Delta_H\otimes 1_B)\rho_B(b)=(1_H\otimes\rho_B)\rho_B(b)=\sum_b b_{(2)}\otimes b_{(1)}\otimes b_{(0)}\in H\otimes H\otimes B;$$

$$\rho_B(b')=\sum_{b'}b'_{(1)}\otimes b'_{(0)}\in H\otimes B.$$

Это умножение ассоциативно, причем $1\otimes 1$ — единичный элемент $A\#_tB$. Отображение $a\to a\otimes 1$ является вложением алгебры A в качестве подалгебры в $A\#_tB$. Вообще говоря, B не вкладывается в $A\#_tB$.

Определение 2-коцикла согласуется с определением когомологий в смысле Свидлера [243]. Пусть H — кокоммутативная биалгебра, A — коммутативная H-модульная алгебра. Рассмотрим полусимплициальный комплекс, объектами степени q которого являются тензорные степени $H^{\otimes(q+1)}$. Морфизм

$$\partial_i: H^{\otimes(q+1)}\to H^{\otimes q},\quad s_i: H^{\otimes(q+1)}\to H^{\otimes(q+2)}$$

задается по правилу

$$\partial_i(h_0\otimes\ldots\otimes h_q)=\begin{cases}h_0\otimes\ldots\otimes h_ih_{i+1}\otimes\ldots\otimes h_q, & i=0,\ \ldots,\ q-1;\\ h_0\otimes\ldots\otimes h_{q-1}\varepsilon(h_q), & i=q;\end{cases}$$

$$s_i(h_0\otimes\ldots\otimes h_q)=h_0\otimes\ldots\otimes h_i\otimes 1\otimes h_{i+1}\otimes\ldots\otimes h_q.$$

Получаем комплекс

$$\mathrm{Reg}(H, A)\xrightarrow{d^0}\mathrm{Reg}(H\otimes H, A)\xrightarrow{d^1}\ldots,$$

в котором

$$H^q(H, A)=\mathrm{Ker}\,d^q/\mathrm{Im}\,d^{q-1}.$$

Элементы $\mathrm{Ker}\,d^q$ (соответственно, $\mathrm{Im}\,d^{q-1}$) называются *q-коциклами* (*q-цепями*). Это определение при $q=2$ и $a=1$ согласуется с определением 2-коцикла, изложенного выше.

Если H — биалгебра, то H является левой и правой H^0-модульной алгеброй. Если $f\in H^0$, $h\in H$, то левое действие $f\rightharpoonup h$ и правое действие $h\leftharpoonup f$ задаются по правилу

$$f\rightharpoonup h=\Sigma_h f(h_{(2)})h_{(1)};\qquad h\leftharpoonup f=\Sigma_h f(h_{(1)})h_{(2)}.$$

Элемент t алгебры H с пополнением $\varepsilon: H\to k$ называется *левым* (*правым*) *интегралом*, если $ht=\varepsilon(h)t$ (соответственно, $th=\varepsilon(h)t$). Через $\int_l(H)$ (соответственно, $\int_r(H)$) обозначается множество левых (правых) интегралов. Отметим, что $\int_l(H)$ и $\int_r(H)$ являются идеалами в H. Если H — биалгебра, то H^* — конволютивная алгебра с пополнением $\varepsilon: H^*\to k$, где $\varepsilon(f)=f(1)$. Нетрудно видеть, что $t\in H^*$ является левым интегралом в H^* тогда и только тогда, когда для любого $h\in H^*$

$$h^*t=h(1)t.$$

Это эквивалентно тому, что $t(x\leftharpoonup h)=h(1)t(x)$ для всех $x\in H$, $h\in H^*$.

Пусть задана алгебра Хопфа H над полем k и правая H-комодульная алгебра B со структурным морфизмом

$$\rho: B\to B\otimes H.$$

В этом случае B/B_H называется *правым H-расширением.* Это расширение называется расщепляемым (cleft), если существует морфизм правых H-комодулей $\gamma: H\to B$, являющийся обратимым элементом в конволютивной алгебре $\mathrm{Hom}(H, B)$. Правое H-расширение называется *H-расширением Галуа,* если биективно отображение

$$\beta=\beta_B\colon B\underset{B_H}{\otimes}B\longrightarrow B\otimes H,$$

$$\beta(a\otimes b)=(b\otimes 1)\rho(a),$$

где a, $b\in B$. H-расширение обладает *нормальным базисным свойством*, если существует биективный морфизм левых B_H-модулей и правых H-комодулей

$$B_H\otimes H\to B.$$

Пусть $f: H_1\to H_2$ — гомоморфизм алгебр Хопфа. *Ядром* $\mathrm{Ker}\,f$ называется множество всех таких $x\in H_1$, что

$$(f\otimes 1)\Delta(x)=1\otimes x\in H_2\otimes H_1;\ (1\otimes f)\Delta(x)=x\otimes 1\in H_1\otimes H_2.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Ker} f$ — подалгебра Хопфа в H_1, причем $J=f(\operatorname{Ker}\varepsilon)H_2+H_2f(\operatorname{Ker}\varepsilon)$ — идеал Хопфа. *Коядро* $\operatorname{Coker} f = H_2/J$. Последовательность морфизмов алгебр Хопфа

$$H_1 \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} H_2$$

точна в H, если $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ и $g(H) = \operatorname{Coker} f$.

Если P, Q — подалгебры Хопфа в кокоммутативной алгебре Хопфа H, то через $[P, Q]$ обозначим идеал, порождённый всеми $[x, y] = xy - yx$, где $x \in P$, $y \in Q$. В этом случае $[P, Q]$ является идеалом Хопфа. Положим $H^{(0)} = H$, $H^{(i+1)} = [H^{(i)}, H] + k$. Заметим, что $(\operatorname{ad} h - \varepsilon(h))H^{(i)} \subseteq H^{(i+j-1)}$ для всех $h \in H^{(j)}$. Скажем, что H *нильпотентно класса не выше* n, если $H^{(n+1)} = k$. Это означает, что в $\operatorname{End}_k H$ подалгебра (без единицы), порожденная всеми $\operatorname{ad} h - \varepsilon(h)$, $h \in H$, нильпотентна класса не выше $n+1$. По [113] в этом случае группа $G(H)$ нильпотентна класса не выше $n+1$. Если $\operatorname{char} k = 0$, то алгебра Ли $P(H)$ нильпотентна класса не выше $n+1$.

Последовательность элементов $c_0, c_1, \ldots$ в коалгебре C называется *разделенными степенями*, если $c_0 \neq 0$ и $\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_{n-i}$ для всех n.

Коалгебра L с коумножением (не являющимся коассоциативным) $\Delta : L \to L \otimes L$ называется *коалгеброй Ли*, если $\operatorname{Im}\Delta \subseteq \operatorname{Im}(1-t)$ и $(1+s+s^2)(1\otimes\Delta)\Delta = 0$, где t и s — циклические перестановки в $L\otimes L$ и $L\otimes L\otimes L$. Если L — алгебра Ли, то умножение в L индуцирует коумножение $\Delta : L^* \to (L\otimes L)^*$, причём $L^*\otimes L^*$ — подпространство в $(L\otimes L)^*$. Обозначим L^0 сумму всех таких подпространств V в L^*, что $\Delta(V) \subseteq V\otimes V$. Тогда L^0 является коалгеброй Ли. Если L — конечномерная алгебра Ли, то $L^0 = L^*$.

§ 2. Основные примеры

1. Пусть kG — моноидная алгебра моноида G. Тогда kG является биалгеброй, где $\Delta(g) = g\otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $g \in G$. kG является алгеброй Хопфа тогда и только тогда, когда G — группа. В этом случае $S(g) = g^{-1}$.

2. Пусть H — универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ для алгебры Ли L. Тогда H — алгебра Хопфа, причем $\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$, $\varepsilon(x) = 0$ для всех $x \in L$. Аналогичное утверждение справедливо для универсальной обертывающей ограниченной алгебры для p-алгебры Ли L. В обоих случаях $L \subseteq P(H)$.

3. Пусть N — нормальный делитель группы G. Тогда $kG \simeq kN \#_t k(G/N)$, причём слабое действие задается сопряжением, функция t индуцируется коммутаторами.

4. Пусть I — идеал алгебры Ли L. Тогда

$$U(L) \simeq U(I) \#_t U(L/I).$$

5. Алгебра косых (лорановских) многочленов $A[t;\, a,\, d]$ (соответственно, $A[t^{\pm 1},\, a]$) является скрещенным произведением A и алгебры Хопфа $H = k[t]$ $(H = k[t^{\pm 1}])$.

6. Пусть G — аффинная алгебраическая группа, $k[G]$ — алгебра регулярных функций на G. Тогда $k[G]$ является алгеброй Хопфа, причем

$$\Delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G] = k[G\times G], \quad S : k[G] \to k[G],$$
$$\varepsilon : k[G] \to k$$

задаются по следующему правилу: если $x, y \in G$ и $f \in k[G]$, то $(\Delta f)(x, y) = f(xy)$, $(Sf)(x) = f(x^{-1})$, $\varepsilon(f) = f(1)$.

7. Пусть аффинная алгебраическая группа G действует на аффинном алгебраическом многообразии X. Тогда $k[X]$ является $k[G]$-комодульной алгеброй. Действительно, если $f \in k[G]$, $g \in G$, $x \in X$, то $\rho : k[X] \to k[G] \times k[X] \simeq k[G\times X]$ задается по правилу $(\rho f)(g, x) = f(gx)$.

8. Пусть G — моноид, $H = kG$ — биалгебра из примера 1. Рассмотрим правую H-комольную алгебру $\rho : A \to A\otimes H$. Для $g \in G$ положим $A_g = (a \in A \mid \rho(a) = a\otimes g)$. Тогда на A задана G-градуировка

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g, \quad A_H = A_1.$$

Обратно, задание на A G-градуировки определяет на A структуру H-комодульной алгебры [57].

9. Пусть k — поле нулевой характеристики, $H = k[X]$ — алгебра многочленов от одной переменной X. Рассмотрим H как универсальную обертывающую алгебру одномерной абелевой алгебры Ли. Если $\rho : A \to H\otimes A$ — структура H-комодульной коммутативной алгебры, то в A задано локально нильпотентное дифференцирование D, причем для $f \in A$

$$\rho(f) = \sum_{m\geqslant 0} X^m \otimes \frac{1}{m!} D^m(f).$$

Справедливо и обратное утверждение.

10. Пусть H — групповая алгебра kG группы G. Правая H-модульная алгебра A в силу примера 8 является G-градуированной алгеброй

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g, \quad A_H = A_1.$$

Расширение A/A_1 является правым H-расширением Галуа тогда и только тогда, когда градуировка строгая, т. е. $A_gA_h = A_{gh}$ для всех $g, h \in G$.

11. Пусть G — конечная группа и $H = (kG)^*$. Правая H-комодульная алгебра $\rho : A \to A\otimes H$ — это задание гомоморфизма

групп $G \to \mathrm{Aut}\, A$. Действительно, если $a \in A$, то

$$\rho(a)=\sum_{g \in G} g(a) \otimes p_g,$$

где $p_g \in H$ — характеристическая функция элемента $g \in G$. При этом $A_H=(a \in A \mid g(a)=a)=A^G$. Расширение A/A_H является H-расширением Галуа тогда и только тогда, когда A/A_H — расширение Галуа с группой Галуа G [63], [79].

12. Пусть P — частично упорядоченное множество, в котором каждый интервал $[x, y]$ конечен. Рассмотрим векторное пространство $C(P)$ над полем k, базис которого составляют все интервалы из P. В $C(P)$ вводится структура коассоциативной коалгебры с коединицей, где

$$\Delta[x, y]=\sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [z, y], \quad \varepsilon[x, y]=\delta_{x, y}.$$

Изучению таких алгебр посвящены, например, работы [3], [81], [222]. Отметим, что дуальная алгебра $C(P)^*$ является алгеброй инциндентности.

13. Алгебра разделённых степеней. Пусть U — векторное пространство с базой X. Обозначим $N^{(X)}$ множество всех отображений $f: X \to N$, причём $f(x)=0$ для почти всех $x \in X$. Для $f, g \in \mathrm{N}^{(X)}$ положим

$$\binom{f}{g}=\prod_{x \in X} \binom{f(x)}{g(x)}.$$

Обозначим $B(U)$ векторное пространство, базис которого составляют элементы u_f, $f \in \mathrm{N}^{(X)}$. В $B(U)$ имеется структура биалгебры

$$\Delta(u_f)=\sum_{g+h=f} u_g \otimes u_h, \quad \varepsilon(u_f)=\sum_{x \in X} \delta_{f(x), 0}, \quad u_f u_g=\binom{f+g}{f} u_{f+g}.$$

В $B(U)$ имеется градуировка $B(U)=\bigoplus_{n \geqslant 0} B(U)_n$, где $B(U)_n$ — линейная оболочка элементов u_f, в которых

$$\sum_{x \in X} f(x)=n.$$

Отметим, что $B(U)_0=k$, $B(U)_1=U$. Поэтому задана естественная проекция $p: B(U) \to U$. Если C — кокоммутативная связная коалгебра и $r: \mathrm{Ker}\, \varepsilon_C \to U$ — линейное отображение, то существует и притом единственный такой морфизм коалгебр $t: C \to B(U)$, что $r=pt$ [244]. Таким образом, $B(U)$ — косвободная на U кокоммутативная коалгебра.

14. Пусть

$$H=\bigoplus_{n \geqslant 0} H_n, \quad H_0=k$$

— градуированная квазихопфова алгебра над совершенным полем k, причем H конечнопорождено и $xy=(-1)^{nm} yx$, если $x \in H_n$, $y \in H_m$. Кроме того,

$$\Delta(H_n) \subseteq \sum_{j=0}^{n} H_j \otimes H_{n-j}.$$

Тогда H — тензорное произведение алгебр $A=k[X]$, где X — однородный элемент степени $n=n(X)$ (см. [149]). Пусть характеристика поля k нулевая. Тогда $X^2=0$ при нечетном n, и $X^l \neq 0$ для всех l, если n четно. Пусть характеристика поля k равна $p>2$. Если n нечетно, то либо $X^2=0$, либо $X^l \neq 0$ для всех l. Если n четно, то $X^{p^m}=0$ для некоторого m. Пусть характеристика поля k равна 2. Тогда либо $X^{2^m}=0$ для некоторого m, либо $X^l \neq 0$ для всех l.

15. Пусть $R(S_n)$ — кольцо Гротендика категории конечномерных комплексных представлений группы подстановок S_n. Тогда $R(S)=\bigoplus_n R(S_n)$ является градуированной биалгеброй, где умножение задается индуцированием представлений

$$R(S_n) \otimes R(S_m) \to R(S_{n+m}),$$

а коумножение — ограничением представлений

$$R(S_n) \to \sum_{l=0}^{n} R(S_l) \otimes R(S_{n-l}).$$

Детальное исследование $R(S)$ проводится А. В. Зелевинским [285], см. также [15], [132], [133], [268], [269].

16. С кольцом $R(S)$ из предыдущего примера тесно связана биалгебра Λ симметрических функций от счетного числа переменных $X=(x_1, x_2, \ldots)$. Тогда $\Lambda \otimes \Lambda$ — функции от X и $Y=(y_1, \ldots)$, симметричные по X и Y. Если $f \in \Lambda$, то $(\Delta f)(X, Y)=f(X, Y)$, $\varepsilon(f)=f(0)$. Элементы $p_n=x_1^n+x_2^n+\ldots$ примитивны. Последовательность элементарных симметрических функций s_n, $n \geqslant 1$, и последовательность h_n, $n \geqslant 1$, являются последовательностями разделенных степеней. Здесь h_n — сумма всех произведений $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, где $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n$.

17. Если X — топологическая группа, k — коммутативное кольцо, то

$$H^*(G, k)=\bigoplus_{n \geqslant 0} H^n(G, k), \quad H_*(G, k)=\bigoplus_{n \geqslant 0} H_n(G, k)$$

образуют градуированные коммутативные биалгебры (алгебры Понтрягина). Если k — поле нулевой характеристики, то $H_*(G, k)$ примитивно порождено [109], [149].

18. Алгеброй Стинрода $A(2)$ называется ассоциативная алгебра над полем из двух элементов, порожденная символами

Sq^n, $n\geqslant 0$, и задаваемая определяющими соотношениями

$$Sq^0=1,\quad (Sq^n)(Sq^m)=\sum_{j=0}^{[n/2]}\binom{m-1-j}{n-2j}(Sq^{n+m-j})(Sq^j),\ n<2m.$$

Алгебра $A(2)$ возникает как алгебра естественных преобразований функторов $Sq^i: H^n(X,\mathbf{Z}/2)\to H^{n+i}(X,\mathbf{Z}/2)$, где X — топологическое пространство.

Алгебра $A(2)$ градуирована и является алгеброй Хопфа, причем

$$\Delta(Sq^n)=\sum_{i=0}^{n}Sq^i\otimes Sq^{n-i},\quad S(Sq^1)=Sq^1,\quad S(Sq^2)=Sq^2,$$

$$S(Sq^3)=(Sq^2)(Sq^1),\ \ldots .$$

Отметим, что $A(2)/[A(2),A(2)]$ — алгебра разделенных степеней от одной переменной Sq^1, [20], [35], [267], [268].

19. Пусть $p>2$ — простое число. Алгебра Стинрода $A(p)$ является градуированной алгеброй, порождаемой однородными элементами β, P^k, $k\geqslant 0$, степени соответственно 1 и $2k(p-1)$. Определяющие соотношения в $A(p)$ имеют вид

$$P^0=1,\quad P^nP^m=\sum_{t=0}^{[n/p]}(-1)^{n+t}\binom{(p-1)(m-t)-1}{n-pt}P^{n+m-t}P^t,$$

$$n\leqslant pm,$$

$$P^n\beta P^m=\sum_{t=0}^{[n/p]}(-1)^{n+t}\binom{(p-1)(m-t)}{n-pt}\beta P^{n+m-t}P^t+$$

$$+\sum_{t=0}^{[(n-1)/p]}(-1)^{n+t-1}\binom{(p-1)(m-1)-1}{n-pt-1}P^{n+m-t}\beta P^t,\quad n\leqslant pm;$$

$$\Delta(P^t)=\sum_{i=0}^{t}P^i\otimes P^{t-i},\quad \Delta(\beta)=\beta\otimes 1+1\otimes\beta.$$

При этом

$$P^nP^m\equiv\binom{n+m}{n}P^{n+m}\ \mathrm{mod}[A(p),A(p)].$$

Алгебру Хопфа $A(p)$ можно интерпретировать следующим образом. Пусть $E=\mathbf{Z}/p[y_1,y_2,\ldots]$ — алгебра Грассмана от переменных y_i. Рассмотрим алгебру полиномов $H=E[x_1,x_2,\ldots]$. Введем в H $\mathbf{Z}$-градуировку, считая, что степень x_i равна $2(1-p^i)$, а степень y_i равна $1-2p^i$. Обозначим $\mathrm{Hom}^{\text{четн}}(H,E)$ градуированную алгебру Хопфа четных E-линейных морфизмов. Тогда $A(p)\simeq\mathrm{Hom}^{\text{четн}}(H,E)$ [35].

20. Пусть k — поле нулевой характеристики, A — ассоциативная k-алгебра. Обозначим $\mathrm{gl}(A)$ алгебру Ли бесконечных матриц, $\mathrm{gl}(A)=\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{Mat}(n,A)^{(-)})$. Тогда гомологии $H_*(\mathrm{gl}(A))$ образуют алгебру Хопфа, где умножение индуцировано операцией прямой суммы, коумножение — диагональю Δ. В $A^{\otimes n}$ действует циклическая перестановка t, где $t(a_1\otimes\ldots\oplus a_n)=(-1)^{n-1}(a_n\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1})$. Положим $C_*(A)=(A^{*+1}/(1-t),b)$, где

$$b(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(a_0\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n)+$$

$$+(-1)^n(a_na_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1}).$$

Определим $\lambda:\Lambda^{*+1}\mathrm{gl}(A)\to C_*(\mathrm{Mat}(A))$, полагая

$$\lambda(x_0\wedge\ldots\wedge x_n)=(-1)^n\sum_{s\in S_n}(-1)^s(x_0\otimes x_{s1}\otimes\ldots\otimes x_{sn}).$$

Тогда $Tr_*\lambda_*$ задает изоморфизм между $P(H_*(\mathrm{gl}(A))$ и циклическими гомологиями $HC_{*-1}(A)$ (см. [134]).

§ 3. Антиподы, интегралы, примитивные и групповые элементы

Антипод S в алгебре Хопфа H над кольцом k является эндоморфизмом H как k-модуля. Серия работ посвящена выяснению вопроса, будет ли S инъективным (сюръективным) эндоморфизмом, и если он биективен, то каков его порядок. Отметим [244], что в алгебре Хопфа над полем антипод биективен в следующих случаях: 1) H конечномерно, 2) H коммутативно, 3) H кокоммутативно.

В алгебре Хопфа H над полем k антипод S инъективен тогда и только тогда, когда S инъективен на корадикале [196]. Антипод S биективен, если выполнено одно из условий: 1) H — сумма конечномерных S-инвариантных подпространств; 2) корадикал в H конечномерен [196].

Пренебрегающий функтор из категории алгебр Хопфа в категорию коалгебр имеет сопряженный функтор F. Если C — коалгебра, то $F(C)$ называется алгеброй Хопфа свободно порожденной C. В [86] показано, что в $F(C)$ антипод биективен в том и только в том случае, когда корадикал в C кокоммутативен.

Такеути [254] построил пример алгебры Хопфа, в которой антипод не инъективен. В серии работ Радфорда [191]—[193] показано, что в конечномерной алгебре Хопфа H над полем порядок антипода конечен и либо равен 1, либо четен. Над полем нулевой характеристики для любого натурального n построен пример конечномерной алгебры Хопфа H_n, в которой порядок антипода равен $2n$. Аналогичный пример для любого поля положительной характеристики построен в [248], [252]. Идея доказательства конечности порядка антипода в конечномерной алгебре Хопфа H, как отмечено В. Г. Дринфельдом [7], состоит в следующем. Если $f \in \int_l(H^*) \setminus 0$, то $fg = x(g) f$ для всех $g \in H^*$, где $x \in H^{**} = H$. Это вытекает из одномерности $\int_l(H^*)$. Нетрудно видеть, что $x: H^* \to k$ является гомоморфизмом k-алгебр. Отсюда следует, что $x \in G(H)$. Аналогично существует такой элемент $g \in G(H^*)$, что $Ih = g(h) I$ для всех $h \in H$ и $I \in \int_l(H) \setminus 0$. Рассмотрим присоединенное действие $\mathrm{ad}\, g$ и $(\mathrm{ad}\, g)^*$ в H^* и в $H^{**} = H$. Непосредственная проверка показывает, что $(\mathrm{ad}\, g)^*(x) = x$. Следовательно, $(\mathrm{ad}\, g)^*$ и $\mathrm{ad}\, x$ — перестановочные линейные операторы в пространстве H. Доказывается, что $S^{-4} = (\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, g)^*$. Порядки $\mathrm{ad}\, x$ и $\mathrm{ad}\, g$ ограничиваются порядками $G(H)$ и $G(H^*)$, которые в свою очередь не превосходят размерность H.

Изложенные выше результаты о конечности порядка антипода Уотерхауз [275] перенес на алгебры Хопфа над произвольным коммутативным кольцом k, причем алгебра Хопфа является проективным конечно порожденным модулем, см. также [186]. В статье [88] для любого натурального n строится кольцо Хопфа H, являющееся свободной абелевой группой ранга $n^{1+\varphi(n)}$, $\varphi(n)$ — функция Эйлера, причем порядок антипода в H равен $2n$. Аналогичный пример для произвольного коммутативного кольца k построен в [65], [66]. Близкие вопросы рассмотрены в работах [125], [189], [245], [250], [251].

Ларсон [127] при некоторых ограничениях на характеристику поля доказал, что в конечномерной кополупростой алгебре Хопфа антипод имеет порядок 1 или 2, если все простые коподалгебры имеют размерность не выше 8. Радфорд [209] обобщил этот результат на алгебры Хопфа любой размерности. Если оператор S^2 диагонализируем, H порождается коподалгебрами размерности не выше 8, то порядок S равен 1, 2 или бесконечности.

Ларсон и Радфорд [128] доказали, что если характеристика поля равна нулю или достаточно велика, то в полупростой кополупростой алгебре Хопфа антипод имеет порядок 1 или 2. По [129] над полем нулевой характеристики кополупростая алгебра Хопфа полупроста и порядок антипода в ней равен 1, 2 или 4.

Предположим, что в алгебре Хопфа H над полем $H = H_n$, где H_n из корадикальной фильтрации. Если $\exp G(H) = m$, то $(S^{2m} - 1)^n = 0$ в H [250].

Пусть H — кополупростая алгебра Хопфа над полем. Тогда антипод S в H биективен и каждая простая коподалгебра в H инвариантна относительно S^2 [123]. Действие S^2 на простых коподалгебрах в конечномерной алгебре Хопфа изучается в [192]. Показано, что такое действие на простых коподалгебрах одной размерности может не быть транзитивным. Связи между порядком антипода и размерностью алгебры Хопфа рассмотрены в статье Ларсона [123].

Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа над полем k. Как отмечено в книге Свидлера [244], идеалы $\int_l(H$, $\int_r(H)$ одномерны, алгебра H полупроста в том и только в том случае, если $\varepsilon(\int^l(H)) \neq 0$ (соответственно, $\varepsilon(\int_r(H)) \neq 0$). В [245] показано, что для алгебры Хопфа H над полем следующие условия эквивалентны: 1) $\int_l(H^*) \neq 0$; 2) H^* содержит ненулевой конечномерный левый идеал; 3) H содержит собственный левый коидеал конечной коразмерности; 4) все H-комодули вполне приводимы. H является суммой простых коалгебр в том и только в том случае, если существует такой элемент $f \in \int_l(H^*)$, что $f(1) \neq 0$.

В [242] показано, что для алгебры Хопфа H существование ненулевого левого интеграла в H^* эквивалентно тому, что инъективная оболочка (в категории левых H-комодулей) коподмодуля $k \cdot 1$ конечномерна. Само H инъективно в этой категории и поэтому оболочка содержится в H. При этом $\dim \int_l (H^*) \leqslant 1$. Если алгебра H инволютивна, k — поле нулевой характеристики, то $\int_l (H^*) \neq 0$ тогда и только тогда, когда H кополупроста Есл і $\int_l (H^*) \neq 0$, то $P(H)$ конечномерно.

Такеути [255] показал, что в кокоммутативной алгебре Хопфа H над полем размерность $\int_l(H^*)$ не превосходит 1. Этот результат содержит

Теорема. Пусть алгебра Хопфа H над совершенным полем k градуирована,

$$H = \bigoplus_{g \in G(H)} H^g,$$

где H^g — компонента связности элемента g, причем H^1 кокоммутативно. Если H^1 конечномерно, то $\int_l (H^*)$ одномерно. Если H^1 бесконечномерно, то $\int_l (H^*) = 0$. В обоих случаях

$$\int_l (H^*) = \int_r (H^*) = \int_l (H^{1*}).$$

Ларсон и Свидлер [130] рассматривают биалгебру H на кольцом главных идеалов k, являюш ся свободным конечн порожденным модулем . Пусть $I \in \int (H) \setminus 0$. Введем в H^*

билинейную функцию

$$b_I(f, g)=\sum_I f(I_{(1)})g(I_{(2)})=(f^*g)(I), \quad f, g \in H^*.$$

Показано, что $b_I(f, g^*h)=b_I(f^*g, h)$ для всех f, g, h. Если $p\in H^*$, $x\in H$, то

$$\sum_x b_I(p < x_{(1)}, q < x_{(2)})=\varepsilon(x)\, b_I(p, q),$$

где $(f<y)(z)=f(yz)$ для y, $z\in H$. В H существует такой левый интеграл I, что функция $b_I(f,g)$ индуцирует биекции $b_{I,l}$, $b_{I,r}$: $H\to H^*$. Левый интеграл I с этим свойством называется *несингулярным*. Алгебра Хопфа, являющаяся свободным конечно порожденным модулем над кольцом главных идеалов называется *унимодулярной*, если в ней существует двусторонний несингулярный интеграл. Пусть I — несингулярный левый интеграл. H унимодулярна тогда и только тогда, когда $S(I)=I$. Предположим, что $S^2=1$ в H, $p\in H^*$. Положим $L_p(f)=p^*f$, где $f\in H^*$. Определим в H элемент t из условия $p(t)=\mathrm{Tr}(L_p)=\mathrm{Tr}(R_p)$ для всех p из H^*. Тогда

$$t\in \int_l (H)\cap \int_r (H).$$

Коалгебра C называется *рефлексивной*, если конечномерные правые C^*-модули рациональны. Пусть H — алгебра Хопфа над полем k и $\int_l (H^*)\neq 0$. Тогда следующие условия эквивалентны [197]: 1) корадикал H_0 — рефлексивная коалгебра; 2) H — рефлексивная коалгебра; 3) каждый коконечномерный максимальный идеал в H^* содержит конечно порожденный плотный идеал. В частности, если k бесконечно, H — счетно порождено как алгебра, $\int_l (H^*)\neq 0$, то H рефлексивно. В любой алгебре Хопфа H над полем $S^*\left(\int_l (H^*)\right)=\int_r (H^*)$, где S^* — дуальный к антиподу S оператор в H^*. Если $\int_l (H^*)\neq 0$, то антипод S биективен. Пусть J — инъективное замыкание $k\cdot 1$ (в категории левых H-комодулей) в H. Если $\int_l (H^*)\neq 0$, то $JH_0=H$, где H_0 — корадикал H. Отметим, что если $\int_l (H^*)\neq 0$ и H_0 — подалгебра Хопфа, то радикал в H^* нильпотентен.

Предположим, что H — конечномерная алгебра Хопфа над полем k. Пусть I — ненулевой левый (правый) интеграл в H,

f — ненулевой правый (левый) интеграл в H^*. Тогда $f(I)\neq 0$ [212]. Более того, следующие условия эквивалентны: 1) H полупросто и кополупросто; 2) $\mathrm{Tr}(S^2)\neq 0$. Близкие результаты получены в [128].

Ларсон [124] изучает k-алгебры Хопфа H, являющиеся конечно порожденными проективными модулями над дедекиндовым кольцом k. Левый интеграл I в H несингулярен, если $\int_l(H)=kI$. Предположим, что H^* — свободный k-модуль с базой $e^1, \ldots, e^n$. Левый интеграл I несингулярен тогда и только тогда, когда матрица $(e^{i*}e^j(I))$ обратима в k. Пусть F — поле дробей k и $F\otimes H$ — полупростая алгебра Хопфа, причем $S^2=1$. Тогда

$$\varepsilon\left(\int_l (H)\right)\varepsilon\left(\int_l (H^*)\right)=k(\dim H).$$

Предположим, что $H\subseteq H'$ — две алгебры Хопфа над k, причем $F\otimes H=F\otimes H'$. Если $\varepsilon\left(\int_l (H)\right)=\varepsilon\left(\int_l (H')\right)$, то $H=H'$. Обозначим R_a оператор правого умножения на элемент a в алгебре Хопфа H. В инволютивной алгебре Хопфа H рассмотрим такой элемент $T^*\in H^*$, что $T^*(a)=\mathrm{Tr}\, R_a$ для всех a. Тогда $T^*\in\int_l (H^*)$. Если $I\in\int_l (H)$, $f\in\int_l (H^*)$ и $f(I)=1$, то $T^*=\varepsilon(I)f$. Следующие условия эквивалентны: 1) H является сепарабельной k-алгеброй; 2) T^* — несингулярный интеграл в H^*; 3) $\left(\int_l (H)\right)=k$.

Парейгиз [186] рассматривает алгебру Хопфа H, являющуюся конечно порожденным проективным k-модулем над коммутативным кольцом k, причем алгебра H фробениусова. Тогда $\int_l(H)$ — свободный циклический k-модуль, являющийся прямым слагаемым в H.

Пусть k — область дискретного нормирования с полем дробей F, H — алгебра Хопфа над k, причем $F\otimes H$ — групповая алгебра циклической группы простого порядка p. Множество классов изоморфных H-модулей, являющихся k-модулями без кручения, образует кольцо ${}_HR$, в котором $[M]+[N]=[M\oplus N]$, $[M]\cdot[N]=[M\otimes N]$, причем действие H в $M\otimes N$ вводится по правилу $h(m\otimes n)=\Sigma_h h_{(1)}m\otimes h_{(2)}n$. Йенсен [110] показывает, что при нечетном p кольцо ${}_HR$ содержит нетривиальный нильпотент тогда и только тогда, когда $\varepsilon(\int_l(H))\subseteq\mathfrak{m}^2$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в k. Порядкам Хопфа в групповых кольцах конечных групп посвящены работы 93], [126].

Пусть k — поле и $G(H)$ — множество групповых элементов. Различные элементы из $G(H)$ независимы над k. Поэтому подалгебра, порожденная $G(H)$, является подалгеброй Хопфа, совпадающей с групповой алгеброй $kG(H)$. В ряде работ исследуется вопрос о строении H как левого модуля над $kG(H)$. Если H конечномерно, то H является свободным $kG(H)$-модулем при условии, что $kG(H)$ полупросто.

Предположим, что B — биподалгебра в H и M,N — левые B-модули. Как и выше, $M\otimes N$ наделяется структурой левого B-модуля. Левый B-модуль M называется *левым (H,B)-хопфовым модулем,* если M является левым H-комодулем, причем структурный морфизм $\rho: M\to H\otimes M$ является гомоморфизмом B-модулей. В работе [182] для бесконечномерной алгебры Хопфа H рассматривается конечная разрешимая подгруппа G в $G(H)$. Если алгебра kG полупроста, то каждый бесконечномерный левый хопфов (H,kG)-модуль (в частности, H) свободен как левый kG-модуль. Приводится пример, показывающий, что для конечномерных модулей это неверно. В [183] показано, что если H — конечномерная алгебра Хопфа, B — подалгебра Хопфа, то любой (H,B)-хопфов модуль свободен как левый B-модуль. В частности, это верно и для H. Близкие вопросы рассмотрены в [181].

Предположим, что B — подалгебра в алгебре Хопфа H, причем B является правым коидеалом, т. е. $\Delta(B)\subseteq B\otimes H$. Каждый правый (H,B)-хопфов модуль является проективным B-модулем в следующих случаях [260]: 1) B лежит в центре H и H — строго плоский B-модуль; 2) B — подалгебра Хопфа, лежащая в центре H, причем корадикал в H кокоммутативен; 3) B — подалгебра Хопфа и H — коммутативно. Каждый правый (H,B)-хопфов модуль является свободным B-модулем, если выполнено одно из условий: 4) $B/\mathrm{Rad}\,B$ — артиново, $H/(\mathrm{Rad}\,B)H$ — коммутативно и выполнено условие (1) (см. выше); 5) B — подалгебра Хопфа, содержащая корадикал H; 6) B — подалгебра Хопфа и H точечна. Предположим, что основное поле совершенно, H — редуцированная коммутативная алгебра Хопфа, B — точечная подалгебра Хопфа. Тогда H — свободный B-модуль. Эти же вопросы затронуты в [74], [113].

Радфорд [203] строит пример алгебры Хопфа H и подалгебры Хопфа B, причем H не является свободным левым B-модулем.

Предположим, что H — коммутативная биалгебра над полем k, причем k — алгебраически замкнуто в H. Каждый обратимый элемент в H имеет вид ag, где $a\in k^*$, $g\in G(H)$. В частности, если H — конечнопорождена как алгебра, то $G(H)$ свободная абелева группа конечного ранга.

Пусть M — модуль над кольцом k, $S(M)$ — симметрическая алгебра модуля M. В $S(M)$ имеется естественная структура алгебры Хопфа. Работа [84] посвящена описанию модуля $P(S(M))$. Показано, что $P(S(M))=M$ тогда и только тогда, когда k — алгебра над $\mathbb{Q}$. Если k имеет простую характеристику p, то $P(S(M))$ состоит из сумм элементов m^{p^n}, $m\in M$, $n\geqslant 0$. В [194] изучаются коммутативные алгебры Хопфа H, порождаемые элементами x, для которых существует такой элемент $a=a(x)\in G(H)$, что $\Delta(x)=x\otimes a+1\otimes a$.

Предположим, что k — коммутативное кольцо и алгебра Хопфа H является конечно порожденным проективным k-модулем. Тогда $P(H^*)$ — конечно порожденный проективный k-модуль ранга 1 [186]. Пусть M — хопфов H-модуль и $P(M)=(m\in M\,|\,\rho(m)=1\otimes m)$. Тогда имеется изоморфизм правых H-модулей $M\simeq P(M)\otimes H$.

§ 4. Конечномерные алгебры Хопфа

Пусть C — коалгебра и M — конечномерный C-комодуль со структурным морфизмом $\rho: M\to C\otimes M$. Если $e_1,\ldots,e_n$ — базис M, $e^1,\ldots,e^n$ — дуальный базис в M^*, то характером $\chi(M)$ называется элемент C, равный

$$\sum_i (1\otimes e^i)\,\rho(e_i).$$

Определение $\chi(M)$ не зависит от выбора базиса в M. Пусть M является простым C-комодулем. В Силу [245] существует минимальная коподалгебра D в C, для которой $\rho(M)\subseteq D\otimes M$. Тогда D конечномерна, причем M является простым точным D^*-модулем. В частности, если k алгебраически замкнуто, то $D^*\simeq\mathrm{Mat}(n,k)$. Пусть a_{ij} — базис D, дуальный к базису $\mathrm{Mat}(n,k)$, состоящему из матричных единиц e_{ij}. Ларсон [123] показывает, что для простого C-комодуля M имеем

$$\chi(M)=a_{11}+\ldots+a_{nn}.$$

Если H — конечномерная инволютивная кополупростая алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем, то $\sum d_\chi\chi$ — несингулярный левый интеграл в H, где сумма берется по всем неприводимым характерам, причем d_χ — размерность характера χ. Выберем $f\in\int_l(H^*)$ с условием $f(1)=1$. Предположим, что M,N — два неизоморфных простых модуля. Тогда

$$f(\chi(M)S(\chi(N)))=0;\ f(\chi(M)S(\chi(M)))=1.$$

Если H инволютивно, k имеет простую характеристику p, то получаем, что p не делит размерность простого H-комодуля M. Если p не делит размерность H, то H полупросто. Если H и H^* полупросты, то p не делит размерность H. Кроме того, инволютивные конечномерные кополупростые алгебры Хопфа унимодулярны. В конечномерной унимодулярной алгебре Хопфа порядок антипода не выше $4(\dim H)$. Если при этом H^* унимодулярно, то порядок антипода 1, 2 или 4.

Предположим, что k — дедекиндова область с полем дробей F, H — алгебра Хопфа, $H\in\mathbf{P}(k)$. Предположим, что H инволютивна и $F\otimes H$ — полупростая расщепляемая алгебра, т. е. все неприводимые модули абсолютно неприводимы. В этом случае для любого неприводимого характера χ идеал kd в k делит $\varepsilon(\int_l(H))$ [124]. Предположим, что k — кольцо целых величин числового поля F. Тогда сепарабельность H влечет кокоммутативность H.

Напомним, что k-алгебра H над коммутативным кольцом k называется *фробениусовой*, если $H\in\mathbf{P}(k)$ и существует изоморфизм правых H-модулей $\Phi: H\to H^*$. Элемент $\psi=\Phi(1)$ называется гомоморфизмом Фробениуса. Если H — алгебра Хопфа, $H\in\mathbf{P}(k)$ и $P(H^*)\simeq k$, то H — фробениусова алгебра, причем для всех $h\in H$ [186]

$$\psi(h)\,1=\sum_h h_{(1)}\psi(h_{(2)}).$$

Кроме того, $\psi\in P(H^*)\cap\int_l(H^*)$. В частности, если $H\in\mathbf{P}(k)$ и $\operatorname{Pic} k=0$, то H — фробениусова алгебра. Близкие вопросы рассматриваются в [107].

В работе [130] изучается присоединенное действие ad в алгебре Хопфа H. Пусть H — свободный модуль конечного ранга над кольцом главных идеалов k, причем $\operatorname{ad} h$ нильпотентно для всех $h\in H^+$. Тогда H унимодулярно. Предположим, что H — конечномерная алгебра Хопфа над полем характеристики p, причём любая коподалгебра в H содержит 1 и $P(H)$ — нильпотентная ограниченная алгебра Ли. Тогда $\operatorname{ad} h$ нильпотентно для всех $h\in H^+$. Напомним, что ограниченная алгебра Ли L нильпотентна, если $L_n=0$ для некоторого n, где $L_1=L$, $L_{i+1}=[L_i, L]+L_i^p$.

Радфорд в статье [192] показывает, что корадикал конечномерной алгебры Хопфа над полем не обязательно является подалгеброй Хопфа. Молнар [151] рассматривает конечномерные кокоммутативные алгебры Хопфа H над алгебраически замкнутым полем, в которых радикал Джекобсона J является идеалом Хопфа. В этом случае естественная проекция $H\to H/J$ расщепляется с помощью некоторого гомоморфизма алгебр Хопфа $H/J\to H$.

Предположим, что A — конечномерная алгебра с радикалом J, причём A/J сепарабельно. Пусть H — биалгебра, порождаемая $G(H)$ и $P(H)$. Пусть A является вполне приводимым H-модулем, причем J инвариантно относительно H. Тогда в A любые две полупростые, изоморфные A/J, инвариантные относительно H подалгебры, сопряжены с помощью $1-x$, где $x\in J$, причем $h/x=\varepsilon(h)x$ для всех $h\in H$ [247].

Молнар в работе [150] отмечает, что коммутативная нётерова алгебра Хопфа над полем является аффинной алгеброй. Как отмечалось выше в [129], показано, что над полем нулевой характеристики конечномерная кополупростая алгебра Хопфа полупроста.

Работа [212] посвящена изучению групп автоморфизмов конечномерных полупростых алгебр Хопфа H над полем k. Предполагается, что если $\operatorname{char} k=p>0$, то $p>\dim H$, H — кополупростая инволютивная алгебра. В этом случае группа автоморфизмов H как алгебры Хопфа конечна. Более того, групповая алгебра kG, $G=Aut\,H$ полупроста. Вместе с тем, для любых натуральных чисел $m, n\geqslant 2$ строится алгебра Хопфа H размерности $m2^{n+1}$, причем группа автоморфизмов H изоморфна $GL(n,k)$.

В [68] рассматривается правая H-комодульная алгебра A, причем A, $H\in\mathbf{P}(k)$ и H коммутативно. Предположим, что $A_H=k$ и для любого $\mathfrak{S}\in\operatorname{Spec} k$ имеется изоморфизм $H^*_{\mathfrak{S}}$-комодульных алгебр $H_{\mathfrak{S}}\simeq A_{\mathfrak{S}}$. Тогда A является точным H^*-модулем, $\int(H^*)A=k$ и

$$\operatorname{rank}_{k_{\mathfrak{S}}} A_{\mathfrak{S}}=\operatorname{rank}_{k_{\mathfrak{S}}} H_{\mathfrak{S}}.$$

Обратное утверждение верно, если выполнено одно из условий: 1) поле дробей F кольца k совершенно; 2) характеристика k не делит $\dim_F(F\otimes H)$.

Рассмотрим конечномерную биалгебру H и коммутативную n-мерную H-простую H-модульную алгебру A, где $A^H=k$. Предположим, что $\dim H\leqslant n$. В этом случае размерности H и A совпадают, причем $A\# H\simeq \operatorname{Mat}(n,k)$.

Серия работ посвящена изучению групп Брауэра H-(ко)модульных алгебр. Пусть H — коммутативная алгебра Хопфа над k. В статье Лонга [135] рассматривается категория левых H-модульных алгебр, являющихся конечно порожденными проективными k-модулями и точными k-алгебрами Адзумая. Скажем, что две такие алгебры A и B эквивалентны, если существуют такие точные конечно порожденные проективные k-модули M,N, являющиеся левыми H-модулями, что имеется изоморфизм левых H-модульных алгебр $A\otimes\operatorname{End} M\simeq B\otimes\operatorname{End} N$. Тензорное произведение индуцирует в множестве классов эквивалентных H-модульных алгебр структуру группы $BM(k,H)$. Если k — поле и простые коподалгебры в H имеют вид kg, $g\in G(H)$, то

$$BM(k,H)\simeq\operatorname{Br}(k)\times H^2(H,k).$$

Аналогичным образом вводится группа $BC(k,H)$ для H-комодульных алгебр. Если $H\in\mathbf{P}(k)$, то $BC(k,H)\simeq BM(k,H^*)$.

Предположим, что H коммутативно и кокоммутативно. *H-димодулем* называется правый H-модуль M, являющийся левым H-комодулем, причем если $\mu: H\otimes M\to M$, $\rho: M\to M\otimes H$ —

структурные морфизмы, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} H\otimes M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1\otimes\rho"'] & M \arrow[d, "\rho"] \\ H\otimes M\otimes H \arrow[r, "\mu\otimes 1"] & M\otimes H \end{tikzcd}.$$

Если $H\in\mathbf{P}(k)$, то H-димодуль — это H—H^*-бимодуль. Естественным образом определяется H-димодульная алгебра. Можно говорить о полупрямых произведениях H-димодульных алгебр. Для H-димодульной алгебры A через $\bar{A}$ обозначим H-(ко)модуль A с умножением $a\circ b=\Sigma_a(a_{(1)}b)a_{(0)}$. Имеются естественные гомоморфизмы H-димодульных алгебр $A\#\bar{A}\to\operatorname{End}A$, $\bar{A}\#A\to(\operatorname{End}A)^{op}$, где

$$(a\otimes\bar{b})(c)=\sum_b a(b_{(1)}\cdot c)\,b_{(0)};$$

$$(\bar{a}\otimes b)(c)=\sum_c (c_{(1)}a)\,c_{(0)}b.$$

Если $A\in\mathbf{P}(k)$ и эти морфизмы биективны, то A называется *H-алгеброй Адзумая*. Две такие алгебры A и B эквивалентны, если существуют такие H-димодули M, N, что имеется изоморфизм H-димодульных алгебр $A\#\operatorname{End}M\simeq B\#\operatorname{End}N$. Классы эквивалентных H-алгебр Адзумая относительно операции полупрямого произведения $\#$ образуют группу $BD(k,H)$, в которой $[A]^{-1}=[\bar{A}]$. Имеется естественное вложение групп $BM(k,H)$ и $BC(k,H)$ в $BD(k,H)$. Дальнейшее изучение этих групп связано с теорией H-расширений Галуа (см. § 6).

§ 5. Скрещенные произведения

Внимание многих исследователей было привлечено к изучению конструкции скрещенного произведения и связанных с этим понятий. Свидлер [243] (см. также [57]), отметил, что $A\#_tH$ является правым H-комодулем со структурным изоморфизмом $\rho: A\#_tH\to(A\#_tH)\otimes H$, где для $a\in A$, $h\in H$

$$\rho(a\otimes h)=\sum_h(a\otimes h_{(1)})\otimes h_{(2)}.$$

При этом $A=(A\#_tH)_H$. Кроме того, отображения $\gamma: H\to A\#_tH$, $\gamma(h)=1\otimes h$ являются гомоморфизмами правых H-комодулей, причем γ обратимо в конволютивной алгебре $\operatorname{Hom}(H,B)$, $B=A\#_tH$. Таким образом, B/A является расщепляемым правым H-расширением, а также правым H-расширением Галуа с нормальным базисным свойством. Справедлива

Теорема ([59], [78]). Для правого H-расширения Галуа B/A следующие условия эквивалентны: 1) $B\simeq A\#_tH$; 2) B/A — расщепляемое расширение; 3) B/A является H-расширением Галуа с нормальным базисным свойством.

Предположим, что в алгебре A заданы два слабых действия $h\cdot a$ и $h\circ a$ алгебры Хопфа H и даны два связанных с ними 2-коцикла t, t'. Скажем, что t и t' эквивалентны, если существует такой элемент $v\in\operatorname{Reg}(H,A)$, что для всех $a\in A$, $g,h\in H$ выполнены следующие условия: 1) $v(1)=1$; 2) $h\circ a=\Sigma_h v(h_{(1)})(h_{(2)}\cdot a)v^{-1}(h_{(3)})$; 3) $t'(h\otimes g)=\Sigma_h v(h_{(1)})(h_{(2)}\cdot v(g_{(1)}))t(h_{(3)}\otimes g_{(3)})v^{-1}\times\times(h_{(4)}g_{(3)})$. Условие 2) означает, что действие $h\circ a$ является композицией действия $h\cdot a$ и внутреннего действия H в A.

Теорема ([77]). Пусть H — алгебра Хопфа, A — алгебра, в которой заданы два слабых действия и связанные с ними 2-коциклы t, t'. Следующие условия эквивалентны: 1) существует изоморфизм H-расширений $A\#_tH/A\simeq A\#_{t'}H/A$; 2) t и t' эквивалентны.

В частности, если A кокоммутативно и действие фиксировано, то эта теорема устанавливает биекцию между расщепляемыми H-расширениями B/A и элементами $H^2(H,Z(A))$ [57], [243].

В работе [145] изучается полупрямое произведение $A\#H$ коммутативной H-модульной алгебры A и точечной кокоммутативной алгебры Хопфа H. Показано, что алгебра $A\#H$ проста в том и только в том случае, если A — точный простой $(A\#H)$-модуль. Если A — простой $(A\#H)$-модуль, то $A\#H/\operatorname{Ann}A$ — простая алгебра. Алгебра $A\#_tH$ проста, если $A\#H$ — простая алгебра. Центр простой алгебры $A\#H$ равен $A^H\#1$ и совпадает с центром $A\#_tH$. Кроме того, центр $A\#H/\operatorname{Ann}A$ совпадает с образом A^H, причем $A^H\cap\operatorname{Ann}A=0$. Предположим дополнительно, что H — неприводимая алгебра Хопфа, $L=P(H)$. Алгебра $A\#H$ действует в A точно, если $A\#P(H)$ действует точно в A. См. также [246].

Пусть H — кокоммутативная алгебра Хопфа, A — алгебра Хопфа, являющаяся H-модульной алгеброй. Тогда [152] $A\#H$ является алгеброй Хопфа с антиподом

$$S(a\otimes h)=\Sigma_h S(h_{(2)})\cdot S(a)\otimes S(h_{(1)}),$$

где $a\in A$, $h\in H$. При этом A и H являются подалгебрами Хопфа в $A\#H$. Предположим, что задана H-комодульная коалгебра C с гомоморфизмом $\rho: C\to C\otimes H$. Полупрямое копроизведение $C\times H$ — это коалгебра с сюръективными эпиморфизмами $p: C\times H\to C$, $q: C\times H\to H$, где p — гомоморфизм H-комодульных коалгебр, причем структура коалгебры в $C\times H$ согласованн с q. Требуется, чтобы система $(C\times H, p, q)$ обладала бы свойством универсальности, близким к свойству универсальности прямых произведений [152]. Показано, что $C\times H$ как k-модуль равен $C\otimes H$, причем если для $c\in C$

$$\rho(c)=\Sigma_c c^{(0)}\otimes c^{(1)}\in C\otimes H,$$

то для $h \in H$

$$\Delta(c\otimes h)=\Sigma c_{(1)}\otimes(c_{(2)})^{(0)}h_{(1)}\otimes(c_{(3)})^{(1)}\otimes h_{(2)};$$
$$p(c\otimes h)=c\varepsilon(h);\ q(c\otimes h)=\varepsilon(c)h.$$

Если H — кокоммутативная алгебра Хопфа, A — алгебра Хопфа, являющаяся H-комодульной биалгеброй, то $A\times H$ является алгеброй Хопфа. При этом p и q являются морфизмами алгебр Хопфа. Если последовательность гомоморфизмов алгебра Хопфа $A\to K\to H$ точна и расщепима справа, то $K\simeq A\# H$.

В работе [58] рассматривается алгебра Хопфа H, причем в H и в H^0 антипод биективен. Пусть U — подалгебра Хопфа в H^0, A — некоторая H-модульная алгебра. При выполнении некоторых условий конечности доказывается, что $(A\# H)\# U\simeq A\otimes(H\# U)$. В частности, если H — конечномерная алгебра Хопфа над полем k, то $(A\# H)\# H^*\simeq A\otimes \mathrm{Mat}(n,k)\simeq \mathrm{Mat}(n,A)$. В [64] этот результат обобщен на алгебры над дедекиндовым кольцом. Предположим, что U — универсальная обертывающая алгебра нильпотентной конечномерной алгебры Ли L над полем k нулевой характеристики. Пусть задано представление L дифференцированиями алгебры B, причем каждый элемент из B аннулируется некоторой степенью $U^+=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$. Тогда $(B\# U)\# U'\simeq B\otimes A_n\simeq A_n(B)$, где A_n — алгебра Вейля, U' — множество всех таких $f\in U^0$, что $f((\mathrm{Ker}\,\varepsilon)^m)=0$ для некоторого $m=m(f)$. Предположим, что G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, k — поле нулевой характеристики, и задано представление G автоморфизмами алгебры B. Пусть каждый элемент B аннулируется некоторой степенью фундаментального идеала $A(G)$ в групповой алгебре kG. Тогда $(B\# kG)\#(kG)'\simeq B\otimes(kG\#(kG)')$, причем $kG\#(kG)'$ — простое плотное кольцо линейных операторов в kG.

Предположим, что G — конечная группа, действующая автоморфизмами в алгебре A. Тогда [154] $(A\# kG)\#(kG)^*\simeq\mathrm{Mat}(n,A)$. Если A — алгебра, градуированная конечной группой G, то $(A\#(kG)^*)\# kG\simeq \mathrm{Mat}(n,A)$. Более того, категория G-градуированных A-модулей эквивалентна категории $(A\#(kG)^*)$-модулей. Радикал Джекобсона $J(A\#(kG)^*)$ равен $J_G\#(kG)^*$, где J_G — градуированный радикал Джекобсона алгебры А. При этом $J(A_1)=J_G(A)\cap A_1$ [73]. В [59] доказано, что если H — алгебра Хопфа размерности n, то $(A\#_t H)\# H^*\simeq\mathrm{Mat}(n,A)$ для любой алгебры A, в которой задано слабое действие H.

Пусть k — поле, H — конечномерная k-алгебра Хопфа, A — левая H-модульная алгебра. Предположим, что алгебра $A\# H$ проста. Тогда $A\in\mathbf{P}(A^H)$, причем $A\# H\simeq\mathrm{End}_{A^H}A$ [52]. Если $A\# H$ — простая артинова алгебра, то A^H классически полупросто, A — свободный A^H-модуль ранга $n=\dim H$. Если $A^H\simeq\mathrm{Mat}(t,D)$, где D — тело, то $A\# H\simeq\mathrm{Mat}(nt,D)$. Предположим, что $A\# H$ полупервично и каждый ненулевой идеал в $A\# H$

имеет ненулевое пересечение с A. В этом случае A^H кольцо Голди тогда и только тогда, когда этим свойством обладает A. Если A^H удовлетворяет полиномиальному тождеству степени d и $A\# H$ первично, то $A\# H$ удовлетворяет полиномиальному тождеству степени не выше $d(\dim H)$.

Отметим в связи с этим следующий результат автора. Пусть задана конечно порожденная PI-алгебра A и алгебра Хопфа H, являющаяся конечно порожденным модулем над своей центральной нётеровой подалгеброй Хопфа U. Предположим, что задано слабое действие H в A и 2-коцикл $t: H\otimes H\to A$, причем $u\cdot a=\varepsilon(u)a$, $t(u\otimes h)=t(h\otimes u)=\varepsilon(u)\varepsilon(h)$ для всех $a\in A$, $u\in U$, $h\in H$. Тогда A является конечно порожденным A^H-модулем. В частности, если A — конечно порожденный модуль над своей центральной аффинной подалгеброй R, инвариантной относительно слабого действия H в A, H — конечно порожденный модуль над подалгеброй U, как и выше, то $A\#_t H$ является конечно порожденным модулем над своим нётеровым центром [46].

Если H — полупростая конечномерная алгебра Хопфа, то свойства артиновости, классической полупростоты и полупервичности алгебры A переносятся на $A\# H$. Алгебра A Морита-эквивалентна $A\# H$, если $A\# H$ просто или A — классически полупросто [71]. Если M — левый $(A\# H)$-модуль, N — подмодуль в M, причем N является прямым слагаемым в M как A-модуль с проекцией $p: M\to N$, то N — прямое слагаемое в M как $(A\# H)$-модуль. В качестве искомой проекции нужно взять морфизм

$$x\to\Sigma_e S(e_{(1)})p(e_{(2)}x),$$

где $e\in\int_l(H)\setminus 0$.

В работе [53] изучается радикал Джекобсона $J(A\# U)$, где A — алгебра над полем нулевой характеристики, U — универсальная обертывающая алгебра для алгебры Ли L. Пусть A является либо PI-алгеброй, либо нётеровой справа алгеброй. Тогда $J(A\# U)=N\# U$, где N — наибольший L-инвариантный нильидеал в A. В частности, $J(A\# U)$ является нильидеалом.

В работе Сольберга [239] изучаются скрещенные произведения $A\#_t H$, где H — конечномерная алгебра Хопфа. Если алгебра H^* полупроста, то A как $(A—A)$-бимодуль выделяется в $A\#_t H$ прямым слагаемым. Если к тому же A конечномерно, то сопряжены функтор забывания из категории $A\# H$-модулей в категорию A-модулей и функтор расширения колец $(A\#_t H)\underset{A}{\otimes}(—)$, действующий в обратную сторону. Предположим, что A артиново, H — полупросто и коммутативно, $H\cdot J(A)\subseteq J(A)$. Тогда $J(A\#_t H)=J(A)(A\#_t H)=(A\#_t H)J(A)$. Если к тому же H кополупросто, то

$$\mathrm{gl.dim}\,A=\mathrm{gl.dim}(A\#_t H).$$

Кроме того, A самоинъективно тогда и только тогда, когда самоинъективно $A\#_t H$. Близкие вопросы рассмотрены в [69].

Отметим работу Г. Г. Ракиашвили [27], посвященную K-теории скрещенных произведений.

Автор изучает конечно порожденные проективные модули над скрещенным произведением $A\#_t H$, где A является конечно порожденным модулем над своим центром, H — коммутативная кокоммутативная алгебра Хопфа. При некоторых ограничениях показывается, что проективный $(A\#_t H)$-модуль P имеет вид

$$P\simeq(A\#_t H)\underset{A}{\otimes}Q,$$

где Q — конечно порожденный проективный A-модуль. В число ограничений входит стабильная расширенность P с A и предположение, что ранг P больше размерности Крулля алгебры A.

Конструкция скрещенного произведения позволяет в ряде важных случаях описывать строение алгебры Хопфа.

Теорема (Костант—Ларсон [122]). Пусть H — кокоммутативная алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Тогда $H\simeq U(P(H))\#kG(H)$.

Из теоремы следует, что если I — идеал Хопфа в H, то точная последовательность $H\to H/I\to 0$ расщепляется как последовательность коалгебр.

Теорема ([97]). Пусть H — биалгебра над полем, H^1 — связная компонента, содержащая 1. *Тогда* H^1 — алгебра Хопфа и естественный гомоморфизм $H^1\#kG(H)\to H$ инъективен. Если H — композиционная алгебра Хопфа, то этот морфизм биективен.

Предположим, что биалгебра H над полем k как алгебра порождается $G(H)$ и $P(H)$. Тогда H — алгебра Хопфа, изоморфная $H^1\#kG(H)$. Если $\operatorname{char} k=0$, то $H^1\simeq U(P(H))$. Если $\operatorname{char} k=p>0$, то H^1 — универсальная ограниченная алгебра для p-алгебры Ли $P(H)$.

Пусть H — кокоммутативная алгебра Хопфа над полем k, причем корадикал H_0 является подалгеброй Хопфа и вложение H_0 в H расщепляемо в категории алгебр Хопфа. Тогда $H\simeq H^1\#\#H_0$ [153]. В частности, это утверждение верно, если либо поле k совершенно, либо H_0 сепарабельно. См. также [177].

§ 6. Расширения Галуа

Основные понятия теории Галуа в алгебрах Хопфа изложены в [63].

Пусть k — коммутативное кольцо и $H\in\mathbf{P}(k)$. Если A/k является H-расширением Галуа, то $A\notin\mathbf{P}(k)$. Если предположить, что H (ко)коммутативно, то $A\in\mathbf{P}(H^*)$.

Теорема. Пусть H коммутативно и кокоммутативно, $H\in\mathbf{P}(k)$ и в топологическом пространстве $\max k$ с топологией Зарисского существует базис из открыто-замкнутых подмножеств. Тогда A и H изоморфны как H^*-модули.

Два H-расширения Галуа B/B_H изоморфны, если они изоморфны как k-алгебры и как H-комодули. Обозначим $\operatorname{Gal}(k,H)$ множество классов изоморфных H-расширений Галуа. Если $A,B\in\operatorname{Gal}(k,H)$, то положим

$$A\circ B=\Big(\sum_i a_i\otimes b_i\in A\otimes B\,\Big|\,\sum_i{}_a(a_i)_{(0)}\otimes b_i\otimes(a_i)_{(1)}=$$
$$=\sum_i{}_b\, a_i\otimes(b_i)_{(0)}\otimes(b_i)_{(1)}\in A\otimes B\otimes H\Big).$$

В [50] отмечается, что $\operatorname{Gal}(k,H)$ относительно указанной операции является абелевой группой. Если H — коммутативная кокоммутативная алгебра Хопфа, $H\in\mathbf{P}(k)$, то имеется точная расщепляемая последовательность абелевых групп

$$1\to\operatorname{Br}(k)\to\operatorname{BM}(k,H)\to\operatorname{Gal}(k,H)\to 1,$$

где $\operatorname{Br}(k)$ — группа Брауэра, $BM(k,H)$ из § 4. Близкие вопросы затронуты в [261].

Йокогава [282], [283] рассматривает три типа H-расширений Галуа A/B, где $A\in\mathbf{P}(k)$, A является H-модульной алгеброй, B — подалгебра в A^H и H кокоммутативно. A/B называется *H-расширением Галуа (в смысле Йокогавы)*, если биективен морфизм $f: A\#H\to\operatorname{End}A_B$, где $f(a\otimes h)(x)=a(h\cdot x)$. A/B — сильное H-расширение Галуа, если оно является H-расширением в смысле Йокогавы и A — правый B-образующий модуль. Если при этом A является левым B-прообразующим, то A/B — очень сильное H-расширение. Из этих условий вытекает, что $B=A^H$, и если $H\in\mathbf{P}(k)$, то A/B является H^*-расширением Галуа (в обычном смысле). При некоторых предположениях показывается, что

$$A\simeq H^*\underset{H}{\otimes}P,\quad P\in\mathbf{P}(H).$$

Если H — коммутативная алгебра Хопфа, то имеется точная последовательность абелевых групп

$$0\to H^1(H,U)\to E(H)\to H^1(H,\operatorname{Pic})\to H^3(H,U),$$

где $H^i(H,*)$ — i-ая группа когомологии Харрисона, U — группа единиц, $E(H)$ — абелева группа H-расширений Галуа A/k в смысле Йокогавы.

В работе Йокогавы [284] вводится операция G—H-скрещенного произведения $A*B$, обобщающая на расширения Галуа конструкцию полупрямого произведения. Пусть H — конечномерная коммутативная, кокоммутативная алгебра Хопфа, и заданы H^*-расширение Галуа A/k, H-расширение Галуа B/k. В $A\otimes B$ вводится новое умножение

$$(a\otimes b)(a'\otimes b')=\sum(aa'_{(0)}\otimes b_{(0)}b')(a'_{(1)}(b_{(1)})).$$

Показано, что $A*B$ является $H^*\otimes H$-расширением Галуа. Если A коммутативно, то $A*B$ является алгеброй Адзумая. Частным примером этой конструкции является скрещенное произведение $A\#_t H$.

Предположим, что H — коммутативная кокоммутативная k-алгебра Хопфа, $H\in\mathbf{P}(k)$. В работах [67], [158] изучается естественный гомоморфизм $\mathrm{Gal}(k, H)\to\mathrm{Pic}\,H^*$.

Пусть $H\in\mathbf{P}(k)$ — коммутативная кокоммутативная алгебра Хопфа. H-димодульная алгебра A называется *алгеброй Галуа*, если $A\in\mathbf{P}(k)$ и биективен морфизм

$$f: A\otimes A\to \mathrm{Hom}(H, A),$$

где $(f(a\otimes b))(h)=a(h\cdot b)$. Предположим, что H является свободным k-модулем. В [159] на множестве $\mathrm{Gal}_{\#}(k, H)$ классов изоморфных H-димодульных алгебр Галуа вводится умножение

$$A*B=\mathrm{Hom}_{H\otimes H}(H, A\#B).$$

Показано, что $\mathrm{Gal}_{\#}(k, H)$ является моноидом, содержащим $\mathrm{Gal}(k, H^*)$. Более того, $\mathrm{Gal}_{\#}(k, H)$ является группой [118].

Не обязательно ассоциативные H-расширения Галуа рассматриваются в [56]. Вводится соответствующая группа $\overline{\mathrm{Gal}(k, H)}$ и строится гомоморфизм этой группы в группу когомологий Харрисона $H^1(H^*, \mathrm{Pic})$. Если B/B_H является H-расширением Галуа и $B\in\mathbf{P}(k)$, то $B\in\mathbf{P}(B_H)$, причем [120]

$$B\#H^*\simeq End_{B_H}B.$$

Ульбрих [271] показал, что если $B_H=k$, то расширение Галуа B/k сепарабельно в том и только в том случае, если морфизм $H\to H^*$, индуцированный β (см. определение в § 1), биективен.

Рассмотрим коммутативное кольцо k простой характеристики p. Зафиксируем элемент $u\in k$ и обозначим $H(u, p^m)$ алгебру Хопфа над k с базисом $1, x, \ldots, x^{p^m-1}$, причем

$$x^{p^m}=0,\quad \Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x+u(x\otimes x),\quad \varepsilon(x)=0,$$

$$S(x)=\sum_{t=1}^{p^m-1}(-1)^t u^t x^t.$$

Изучению коммутативных $H(u, p^m)$-расширений Галуа посвящена работа [163]. Вычислены группы $\mathrm{Gal}(k, H(u, p^m))$ при $m=1$ и при $p=2$, $m=2$. Отметим, что $H(u, p^m)$ — расщепляемые расширения B/C рассмотрены в [77]. Показано, что такие расширения имеют вид $C[X, a, d]/J$, где $C[X, a, d]$ — кольцо косых полиномов, J — идеал, порождаемый центральным элементом X^q-r. В [164] рассматриваются H-расширения Галуа, где H — конечномерная алгебра Хопфа, близкая к $H(0, p^m)$. Вместо условия $x^{p^m}=0$ предполагается, что $P(x)=0$, где $P(t)=t^{p^m}-u_{m-1}t^{p^{m-1}}-\ldots-u_0t$, $u_i\in k$. Строится отображение $k\to\mathrm{Gal}(k, H)$, сопоставляющее каждому элементу r класс H-комодульной алгебры $A_r=k[T]/(P(T)-r)$, причем $\Delta(a)=a\otimes 1+1\otimes x$, где $a=T+(P(T)-r)$. Показано, что это отображение—эпиморфизм групп с ядром $(P(r)\,|\,r\in k)$. См. также [165], [272].

В статье [162] описана группа $\mathrm{Gal}(k, H_u)$, где $H_u=k\cdot 1+kd$ — двумерная алгебра Хопфа над кольцом k характеристики два, причем $d^2=ud$, $\Delta(d)=d\otimes 1+1\otimes d$, $\varepsilon(d)=0$, $S(d)=0$.

Предположим, что задана правая H-комодульная алгебра B с морфизмом $\rho: B\to B\otimes H$. Морфизм $f: H\to B$ называется тотальным интегралом, если f сохраняет единицу и $\rho f=(f\otimes 1)\Delta$. В работе Доя [76] приведены необходимые и достаточные условия существования тотального интеграла. Если конечная группа G действует в алгебре B автоморфизмами, $H=(kG)^*$, то существование тотального интеграла эквивалентно существованию такого элемента $b\in B$, что

$$\sum_{x\in G} x(b)=1.$$

Предположим, что k — поле, A, B — коммутативные алгебры. Следующие условия эквивалентны: 1) B имеет тотальный интеграл и сюръективен морфизм

$$\beta: B\underset{B_H}{\otimes} B\to B\otimes H$$

из определения H-расширений Галуа; 2) категория (H, B)-хопфовых модулей эквивалентна категории правых B_H-модулей; 3) β биективно и B строго плоский B_H-модуль.

Аналог теории Куммера для H-модульных алгебр строится в [108].

Перенос понятия H-расширения Галуа на модули осуществляется в [79]. Пусть B — правая H-комодульная алгебра. Через $M_B{}^H$ обозначим категорию правых H-комодулей, являющихся правыми B-модулями, причем $\rho(mb)=\Sigma m_{(0)}b_{(0)}\otimes m_{(1)}b_{(1)}$, для всех $m\in M$, $b\in B$, где $M\in M_B^H$ и $\rho: M\to M\otimes H$ — структурный морфизм. Если B является плоским левым B_H-модулем, то отображение $m\otimes b\to mb$ задает изоморфизм

$$M_H\underset{B_H}{\otimes} B\to M,\quad M\in M_B^H.$$

Пусть E — алгебра Адзумая, C — подалгебра в E, причем E как правый C-модуль является прообразующим. Существует взаимно однозначное соответствие между H-расширениями Галуа B/B_H, являющимися подалгебрами в $E\otimes H$, и действиями H в $E^{(B_H)}$.

В статье [72] рассматриваются связи между расширениями Галуа и полупрямыми произведениями. Предположим, что H — конечномерная алгебра Хопфа, A — левая H-модульная алгебра. Следующие условия эквивалентны: 1) A/A^H является правым H^*-расширением Галуа; 2) $A\in\mathbf{P}(A^H)$ и

$$A\#H\simeq\mathrm{End}_{A^H}A;$$

3—5450

3) A — левый $(A\# H)$-образующий; 4) если $t\in\int_l(H)\setminus 0$, то отображение

$$A\otimes_{A^H} A\to A\# H,\quad a\otimes b\to(a\otimes t)(b\otimes 1)$$

сюръективно. Если A/A^H — правое H^*-расширение Галуа, то следующие условия эквивалентны: а) $A^H=tA$ для любого $t\in\int_l(H)\setminus 0$; б) A — образующий A^H-модуль; в) $A\in\mathbf{P}(A\# H)$. При выполнении этих трех условий алгебра $A\# H$ проста в том и только в том случае, если A^H просто и A/A^H является H^*-расширением Галуа. Алгебра $A\# H$ первична в том и только в том случае, если A — точный левый и правый $(A\# H)$-модуль и A^H первично. Если A — неприводимый левый $(A\# H)$-модуль конечной размерности Голди, то следующие условия эквивалентны: 1) A — точный левый $(A\# H)$-модуль; 2) $A\# H$ просто; 3) A/A^H — правое H^*-расширение Галуа. Предположим, что $A\# H$ — простая артинова алгебра. Тогда A обладает нормальным базисным свойством, причем $A\simeq A^H\#_t H^*$. Пусть $A\# H$ классически полупросто. Тогда A^H классически полупросто, A — конечно порожденный прообразующий как правый A^H-модуль, причем A^H Морита-эквивалентно $\mathrm{End}_{A^H}A$. При этом A/A^H — правое H^*-расширение Галуа в том и только в том случае, если A — точный $(A\# H)$-модуль. Кроме того, A^H морита-эквивалентно $A\# H$.

Переносу теоремы Сколем—Нётер на H-расширения Галуа посвящена статья [51]. Пусть k — коммутативное кольцо. Скажем, что B/C является *H-бирасширением Галуа*, если B/C — левое и правое H-расширения Галуа со структурными морфизмами ρ_l, ρ_r и $(\rho_l\otimes 1)\rho_r=(1\otimes\rho_r)\rho_l$. Пусть A является H-модульной k-алгеброй Адзумая. Действие H в A внутреннее в том и только в том случае, если правое H-расширение Галуа $(A\# Z)^A/k$ как правый H-комодуль изоморфно Z для любого H-бирасширения Галуа Z/k. Отсюда вытекает, что если $H\in\mathbf{P}(k)$, причем в каждой левой H-модульной алгебре Адзумая A задано внутреннее H-действие, то любое правое H-расширение Галуа B/k обладает нормальным базисным свойством.

Другой вариант теоремы Сколем—Нётер изложен в [143]. Пусть C — коалгебра. Любое слабое действие C в любой алгебре Адзумая A внутреннее, если выполнено одно из следующих условий: 1) C кокоммутативно, $\mathrm{Pic}\, C^*$ тривиально; 2) основное кольцо k артиново и $C\in\mathbf{P}(k)$; 3) k — поле.

Пусть A, B — две k-алгебры, C — коалгебра. Скажем, что задано слабое действие C на A со значением в B, если задан морфизм $f: C\otimes A\to B$, причем $f(c\otimes 1)=\varepsilon(c)$, $f(c\otimes ab)=\Sigma_c f(c_{(1)}\otimes a)f(c_{(2)}\otimes b)$. В работе Такеути [259] строится кокоммутативная k-алгебра $M(A,B)$ со слабым действием g на A со значением в B, причем для любого C со слабым действием f

существует и притом единственный такой морфизм коалгебр $h: C\to M(A,B)$, что $gh=f$. Если $A=B$, то $M(A)=M(A,A)$ является биалгеброй. Для любой подалгебры F в A существует единственная максимальная коподалгебра C в $M(A)$ с условием $F\subseteq A^C$. C является биподалгеброй и обозначается $M(A/F)$. Предположим, что k — поле положительной характеристики, C — коммутативная k-коалгебра. Положим

$$C_{pt}=\bigoplus_{g\in G(C)} C^g.$$

Тогда C_{pt} — единственная максимальная точечная коподалгебра в C. Если $K\supseteq F\supseteq k$ — расширение полей, то положим $H_k(K)=M(K)_{pt}$, $H_k(K/F)=M(K/F)_{pt}$. В работах [243], [259] исследуются соответствия $F\to H_k(K/F)$, $H\to K^H$ между биподалгебрами $H_k(K)$ и промежуточными полями F, $K\geqslant F\geqslant k$. Описаны образы этих отображений, в предположении, что расширение K/k конечно.

Статья [266] посвящена изучению алгебры Хопфа $H\in\mathbf{P}(k)$, где k — коммутативное кольцо, причем $k/\mathfrak{S}$ имеет простую характеристику для любого $\mathfrak{S}\in\mathrm{Spec}\, k$. Предположим, что задана H-модульная алгебра $C\in\mathbf{P}(k)$ и ядро морфизма умножения $C\otimes C\to C$ нильпотентно. Изучается соответствие Галуа между биподалгебрами в H и специальными подкольцами в C.

Обобщение понятия H-расширения Галуа рассмотрено А. А. Давыдовым. Действие алгебры Хопфа H в алгебре R называется *свободным*, если биективно отображение

$$\beta: R\otimes_{R^H} R\to \mathrm{Hom}\,(H,R),\quad \beta(r\otimes r')(h)=h(rr').$$

Правое кодействие H в алгебре B свободное, если биективен морфизм

$$\beta: B\otimes_{B_H} B\to B\otimes H,\quad \beta(r\otimes s)=\sum_r r_{(0)}s\otimes r_{(1)}.$$

Если задано левое действие H в алгебре R, то R-модуль M называется *H-эквивалентным*, если M является левым H-модулем, причем для $h\in H$, $r\in R$, $m\in M$

$$h(rm)=\sum_h (h_{(1)}r)(h_{(2)}m).$$

Пусть задано правое кодействие $\rho_R: R\to R\otimes H$. R-модуль M, являющийся правым H-комодулем со структурным морфизмом $\rho_M: M\to M\otimes H$, называется *коэквивариантным*, если $\rho_M(rm)=\rho_R(r)\rho_M(m)$ для всех $r\in R$, $m\in M$. Алгебра Хопфа H *редуктивна*, если существует такой интеграл $t\in\int_l(H^0)$, что $t(1)=1$. Если задано кодействие H в R, то функтор коинвариантов задает эквивалентность категории H-коэквивариантных конечно порожденных R-модулей и категории конечно порожденных R_H-модулей. Категория H-эквивариантных конечно порожденных R-модулей эквивалентна категории R — конечно порожденных модулей над $R\#H$. Пусть H — конечномерная кокоммутативная алгебра Хопфа, причем H^* редуктивна. Тогда категория H-эквивариантных конечно порожденных проективных R-модулей эквивалентна категории конечно порожденных проективных $(R\#H)$-модулей. Отсюда для K-теории Квиллена $K.'(R, H)$ категории H-эквивариантных конечно порожденных R-модулей получаем $K_*'(R, H)\simeq K_*'(R\#H)$. Аналогичный результат получен для свободного кодействия. Для свободных кодействий когомологии Свидлера совпадают с когомологиями Амицуры. Если R — коммутативная алгебра, то точна последовательность

$$0\to H^1(H, U(R))\to \mathrm{Pic}^{H}(R)\to \mathrm{Pic}(R)^{H}\to H^2(H, U(R)),$$

где $\mathrm{Pic}^H(R)$ — группа классов обратимых H-эквивариантных R-модулей, $\mathrm{Pic}(R)^{H}$ — подгруппа в $\mathrm{Pic}\,R$, порожденная классами R-модулей, обладающих H-инвариантной структурой.

§ 7. Кокоммутативные алгебры, алгебры разделенных степеней, коалгебры Ли и другие специальные классы алгебр Хопфа

Пусть H — кокоммутативная связная биалгебра над полем k. Если характеристика k нулевая, то имеется изоморфизм коалгебр $H\simeq B(P(H))$ [98]. Найдены условия, при которых имеется указанный изоморфизм, в случае поля положительной характеристики. Отметим, что точечная неприводимая кокоммутативная биалгебра B над полем нулевой характеристики изоморфна $U(P(B))$ [244].

В работе Андрэ [44] под *алгеброй разделенных степеней* понимается градуированная коммутативная алгебра $A=\bigoplus_{n\geqslant 0} A_n$, в которой заданы отображения $\gamma^m: A_{2n}\to A_{2mn}$, $m\geqslant 0$, причем 1) $\gamma^0(x)=1$, $\gamma^1(x)=x$; 2) $\gamma^n(x)\gamma^m(x)=(n+m)!(n!m!)^{-1}\gamma^{n+m}(x)$; 3) $\gamma^m(x+y)=\sum_{i=0}^{m}\gamma^i(x)\gamma^{m-i}(y)$; 4) $\gamma^m(xy)=0$, если x, y — однородные элементы нечетной степени, $m\geqslant 2$; 5) $\gamma^m(xy)=x^m\gamma^m(y)$, если x, y — однородные элементы четной степени, причем степень y положительна. Это определение близко понятию λ-кольца Атьи. Класс алгебр с разделенными степенями образует категорию с тензорными произведениями. В этой категории можно говорить об алгебре Хопфа. Они называются *Г-алгебрами Хопфа*. Рассмотрим категорию Г-алгебр Хопфа H, в которых $H_0=k$. Показано, что эта категория двойственна к категории градуированных k-коалгебр Ли $L=\bigoplus_{n\geqslant 1} L_n$. Для таких коалгебр Ли L доказан аналог теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта. В тензорной алгебре $T(L)$ для любого $n\geqslant 0$ имеем

$$T(L)=\bigoplus_{n\geqslant 0}T_n(L),\quad T_n(L)=\bigoplus_{t\geqslant 0}T_n(L)_t,$$

где

$$T_n(L)_t=\bigoplus_{s_1+\ldots+s_n=t}(L_{s_1}\otimes\ldots\otimes L_{s_n}).$$

В частности, если $x\in T(L)_t=T_0(L)_t\oplus\ldots\oplus T_t(L_t$, то $x=x_0+\ldots+x_t$, $x_i\in T_i(L)_t$. Скажем, что x удовлетворяет *лиевскому условию*, если при коумножении $\Delta: L\to L\otimes L$ справедливо равенство $\Delta(x_1)=(1-t)x_2$, где t — перестановка в $L\otimes L$.

Теорема ([44]). В множестве элементов с лиевским условием существует единственная максимальная коподалгебра $U_c(L)$. Она обладает следующим универсальным свойством: а) имеется эпиморфизм векторных пространств $p: U_c(L)\to L$, $p(x)=x_1$; б) если A — коалгебра с эпиморфизмом векторных пространств $h: A\to L$, то существует и притом единственный такой гомоморфизм коалгебр $g: A\to U_c(L)$, *что* $pg=h$.

Коалгебра $U_c(L)$ обладает естественной структурой Г-алгебры Хопфа. Соответствие $L\to U_c(L)$ задает указанную выше двойственность между категориями. Отметим, что если A является Г-алгеброй Хопфа конечного типа, то A^* — универсальная обертывающая алгебра градуированной алгебры Ли. Верно и обратное утверждение. Явное описание элементов $U_c(L)$ получено Блоком [60] (см. § 8). Другое доказательство приведенных результатов получено в [12], [231].

Отметим ряд приложений указанных результатов в коммутативной алгебре. Пусть $(R, \mathfrak{m})$ — локальное нётерово кольцо с полем вычетов k. Тогда $\mathrm{Ext}_R(k, k)=(\mathrm{Tor}_R(k, k))^*$, т. е. $\mathrm{Ext}_R(k, k)$ дуальная алгебра к алгебре Хопфа с разделенными степенями. Таким образом, $\mathrm{Ext}_R(k, k)=U(L)$, где $L=\bigoplus_{n\geqslant 1} L_n$ — градуированная алгебра Ли конечного типа. Алгебра $\mathrm{Ext}_R(k, k)$ конечно порождена как алгебра и нильпотентна как алгебра Хопфа в том и только в том случае, если R — локально полное пересечение [1], [45], [47], [230].

Предположим, что k — поле положительной характеристики p, $H_n=k\langle X_0, \ldots, X_n\rangle$ — свободная ассоциативная k-алгебра. Тогда H_n — универсальная обертывающая алгебра для свободной k-алгебры Ли ранга $n+1$ и потому H_n — кокоммутативная неприводимая алгебра Хопфа. Ньюмен [171] показывает, что в H_n существует последовательность разделенных степеней длины $p^{n+1}-1$, причем каждое X_i является p^i-ым членом этой последовательности. Доказательство вытекает из проверки аналогичного утверждения для алгебры $\mathbf{Z}_p\langle X_0, \ldots, X_n\rangle$, где $\mathbf{Z}_p$ — локализация $\mathbf{Z}$ по степеням простого числа p.

Случай поля нулевой характеристики рассматривается в [55]. Показано, что если $1, x_1, x_2, \ldots$ — последовательность разделенных степеней в кокоммутативной неприводимой алгебре Хопфа H, то коэффициент при T^j в ряду $\ln(1+x_1T+x_2T^2+\ldots)$ является примитивным элементом. К этой работе примыкает [174], где рассматривается коммутативная кокоммутативная неприводимая $\mathbf{Q}$-алгебра Хопфа с последовательностью разделенных степеней X_i, причем существует такое простое число p, что p^k-ые члены алгебраически независимы, а остальные зависимы от предыдущих. Вопросы существования последовательностей разделенных степеней над полем положительной характеристики исследуются в [103], [263], [264].

Зиплес [286]—[289] изучает функтор $\hat{\Gamma}$, сопоставляющий k-алгебре A ее алгебру разделенных степеней $\hat{\Gamma}(A)$. Если A — свободный k-модуль, то в $\hat{\Gamma}(A)$ найдется такая система образующих, что мономы от них составляют базу $\hat{\Gamma}(A)$. Если A — алгебра Ли, то найдено описание $\hat{\Gamma}(A)$ в терминах $U(A)$. Построение $\hat{\Gamma}(A)$ осуществляется с помощью модуля разделенных степеней $\Gamma(M)$. Если M — некоторый k-модуль, то $\Gamma(M)$ — коммутативная k-алгебра с образующими $m^{[n]}$, $m\in M$, $n\in\mathbf{Z}$, причем $m^{[i]}=0$ при $i<0$; $m^{[0]}=1$; $(rm)^{[i]}=r^i m^{[i]}$, $i\geqslant 0$;

$$(m+n)^{[i]}=\sum_{p+q=i} m^{[p]}n^{[q]};\quad m^{[i]}m^{[j]}=(i+j)!\,(i!\,j!)^{-1}m^{[i+j]}.$$

Алгебра $\Gamma(M)$ градуирована. Близкие вопросы затронуты в [219], [220].

В силу теоремы Андрэ изучение алгебр разделенных степеней связано с изучением коалгебр Ли. С биалгеброй B свяжем k-модуль $Q(B)=B^+/(B^+)^2$. Имеется естественный эпиморфизм

$$q: B\to Q(B),\ q(b)=b-\varepsilon(b)+(B^+)^2.$$

Тогда $Q(B)$ является коалгеброй Ли с коумножением

$$q(b)\to(q\otimes q)\Delta(b),\ b\in B.$$

Как и в работе Андрэ [44], для любой коалгебры Ли Q существует, и притом единственная, универсальная точечная неприводимая коалгебра $U_1{}^c(Q)$ с морфизмом коалгебр $j: U_1{}^c(Q)\to Q$, причем для любой точечной неприводимой коалгебры C и любого морфизма коалгебр $h: C\to Q$, отображающего 1 в 0, существует, и притом единственный, такой морфизм коалгебр $g: C\to U_1{}^c(Q)$, что $jg=h$. Указано построение $U_1{}^c(Q)$ как подалгебры в тензорной коалгебре $T^c(Q)$. $U_1{}^c(Q)$ как алгебра изоморфна симметрической алгебре $S(Q)$. Пусть B — точечная неприводимая коммутативная биалгебра над полем нулевой характеристики. Естественный морфизм коалгебр $B\to U_1{}^c(Q)$ является изоморфизмом биалгебр. Если Q — коалгебра Ли над полем нулевой характеристики, то следующие условия эквивалентны: 1) $Q\simeq Q(B)$, где B — точечная неприводимая коммутативная биалгебра; 2) Q локально нильпотентно, т. е. в Q любая конечномерная коподалгебра нильпотентна.

Напомним, что коалгебра Ли нильпотентна, если в ней $\Delta_n=0$, где $\Delta_2=\Delta$ — коумножение, $\Delta_n=(1\otimes\Delta_{n-1})\Delta$.

Категорные свойства $U_c(L)$ изучаются в [146]. Если L — алгебра Ли, то $U_c(L^0)=U(L)^0$. Отсюда вытекает, что $U_c(M)$ —

алгебра Хопфа. В $U_c(M)$ пересечение идеалов конечной коразмерности равно нулю. Кроме того,

$$U_c(M)=U_c(\mathrm{Loc}\,M),$$

где $\mathrm{Loc}\,M$ — сумма конечномерных коподалгебр Ли в M.

Пусть M — коалгебра Ли над полем. Тогда $U_c(M)$ и симметрическая коалгебра $S_c(M)$ снабжены естественной фильтрацией и естественным морфизмом ассоциированных градуированных коммутативных алгебр Хопфа

$$g: gr\,U_c(M)\to gr\,S_c(M)$$

([60], см. ниже). Пусть k — поле нулевой характеристики. Тогда g является изоморфизмом в том и только в том случае, если M локально конечномерно, т. е. каждый элемент из M содержится в конечномерной коподалгебре [147].

Работы [148], [178] посвящены изучению коалгебр Ли $W_1{}^0$, где W_1 — алгебра Витта над полем k. Над алгебраически замкнутым полем k в [178] дано описание $W_1{}^0$ как подпространства в $W_1{}^*$. В [148] показано, что если поле k имеет нулевую характеристику, то $\mathrm{Loc}\,W_1{}^0=0$.

Пусть k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Для коммутативной k-алгебры Хопфа H в [216] найдены необходимые и достаточные условия, при которых $H\simeq U(L)^0$ для некоторой конечномерной алгебры Ли L.

Серия работ связана с изучением кокоммутативных коммутативных биалгебр $B(U)$. Пусть k — поле положительной характеристики p, $k^{1/p}=(x\in\bar{k},\ x^p\in k)$. Для любого векторного пространства V через $S(n, V)$ обозначим подпространство симметрических тензоров в $T_n(V)$, а через $S^n(V)$ — n-ую компоненту симметрической алгебры $S(V)$. Имеется естественный морфизм $F: V\otimes k^{1/p}\to S^p(V)$, $F(v)=v^p$. Тогда существует и притом единственный такой морфизм

$$\nu: S(p, V)\to V\otimes k^{1/p},$$

что $F\nu(y)=\pi(y)$, где $\pi: T_n(V)\to S^n(V)$ — естественная проекция. Пусть $\Delta_n: C\to C^n$ — итерированное коумножение в кокоммутативной коалгебре C. Тогда $\Delta_n(C)\subseteq S(n, C)$. Обозначим ν_C композицию $\nu\Delta_p$.

Теорема ([98]). Пусть H — кокоммутативная связная биалгебра, $L=P(H)$. Если $\mathrm{char}\,k=0$, то $H\simeq B(L)$. *Если* $\mathrm{char}\,k=p>0$, *то* $H\simeq B(L)$ *тогда и только тогда, когда* $\nu_H: H\to H\otimes k^{1/p}$ *сюръективно.*

Такеути ([264]) отмечает, что $\mathrm{Ker}(\nu_H)=HP(H)=P(H)H$. Пусть C — кокоммутативная коалгебра, содержащая H в качестве коподалгебры, причем ν_H сюръективно. Тогда существует морфизм коалгебр $f: C\to H$, тождественный на H. Рассмотрен дуальный аналог этого результата и его приложения к автоморфизму Фробениуса в алгебраических группах. В работе

Ньюмена [171] для счетномерных локально конечномерных неприводимых кокоммутативных алгебр Хопфа H без бесконечных последовательностей разделенных степеней над совершенным полем положительной характеристики строятся инварианты Ульма—Капланского, определяющие H в этом классе однозначно.

§ 8. Категории алгебр Хопфа. (Ко) модули и коалгебры

В работах Такеути [256] и Ньюмена [169] изучается соответствие между идеалами Хопфа и ядрами гомоморфизмов алгебр Хопфа. Если I — идеал Хопфа в алгебре Хопфа H, то H/I — алгебра Хопфа. Пусть A — ядро естественного гомоморфизма H на H/I. Тогда $I=H(H^+\cap A)$. В кокоммутативной алгебре Хопфа H получается взаимно однозначное соответствие между идеалами Хопфа и ядрами гомоморфизмов. Таким образом (см. [169]), категория коммутативных кокоммутативных алгебр Хопфа над полем является абелевой. Нулевым объектом в этой категории является поле k, прямой суммой и произведением — тензорное произведение.

Свойства категории $\mathscr{H}$ коммутативных кокоммутативных связных градуированных алгебр Хопфа над совершенным полем положительной характеристики рассмотрены в [227]. Доказано, что в $\mathscr{H}$ каждый нётеров объект имеет проективное накрытие. Любой плоский объект имеет проективную размерность не выше 1. Примитивно порожденная алгебра Хопфа из $\mathscr{H}$ является копроизведением алгебр Хопфа вида $k[X]/(X^{p^n})$.

Категория K точечных алгебр Хопфа над полем k исследуется в [113]. В работе Шеллера [223] рассматривается категория K *абелевых* (т. е. градуированных точечных, коммутативных, кокоммутативных) алгебр Хопфа над полем характеристики $p>0$. Показано, что $K=K^-\times K^+$, где K^- — полупростая категория, K^+ — счетное произведение экземпляров категории K_1, состоящей из алгебр Хопфа, порождаемых элементом степени $2p^i$, $i\geqslant 0$. Пусть L_1 — категория примитивно порожденных алгебр Хопфа из K_1. В [232] описаны инъективные и проективные объекты в L_1 и K_1. В [237] рассмотрена категория L примитивно порожденных алгебр из K. Показано, что $\mathrm{gl.dim}\, L=1$, и $\mathrm{gl.dim}\, K=2$. В [236] описаны объекты из K, порождаемые нильпотентными элементами малой степени. Предположим, что $H\in K$, причем в H существует такая подалгебра M, что любая другая подалгебра в H либо содержит M, либо содержится в M. Описанию таких объектов посвящена статья [233].

Сингер [229] изучает расширения градуированных точечных алгебр Хопфа. Алгебра C называется расширением B с помощью A, если $A\otimes B\simeq C$, причем это является изоморфизмом левых A-модулей и правых B-комодулей. Указанное расширение задает связь между действием σ_A алгебры B в A, кодействием

$\rho_B: B\to B\otimes A$, 2-коциклом $t: B\otimes B\to A$ и 2-циклом $\varphi_B: B\to A\otimes A$. В множестве классов изоморфных расширений C вводится структура абелевой группы $\mathrm{Opext}(B, A)$. Доказывается, что эта группа изоморфна $H^3(B, A)$. Обобщение этих результатов получено В. А. Пачуашвили [21].

В ряде работ исследуется вопрос о расщепляемости точных последовательностей алгебр Хопфа [238]. Абе и Дой [40] показали, что если K — подалгебра Хопфа в H, причем существует проекция H на K, тождественная на K, то $H\simeq K\#L$. Предположим, что H — коммутативная алгебра Хопфа над полем нулевой характеристики, H_0 — корадикал в H. Тогда существует расщепление $H\to H_0$ [257] (см. также [91]).

Если C — коалгебра, то C^* является алгеброй. Обратно, если задана алгебра A, то ей соответствует коалгебра A^0. Таким образом, имеются функторы

$$\mathrm{Coal}\to\mathrm{Alg},\quad C\to C^*;$$
$$\mathrm{Alg}\to\mathrm{Coal},\quad A\to A^0.$$

Они индуцируют естественные морфизмы алгебр и коалгебр

$$i_C: C\to C^{*0},\ i_A: A\to A^{0*}.$$

Свойства этих морфизмов изучаются в [249]. Коалгебра C *корефлексивна,* если $i_C: C\to C^{*0}$ является изоморфизмом. Дуально определяются *рефлексивные алгебры.* Нетрудно видеть, что C корефлексивно в том и только в том случае, если $C\simeq A^0$, где A — рефлексивная алгебра. Алгебра A рефлексивна тогда и только тогда, когда $A=C^*$, где C корефлексивна [190]. Если D — коподалгебра конечной коразмерности в коалгебре C, то C и D корефлексивны одновременно. Если I — конечномерный коидеал в C, то C и C/I корефлексивны одновременно. Найдены достаточные условия, при которых корадикал C_0 в C корефлексивен. Указаны достаточные условия, при которых тензорное произведение двух корефлексивных коалгебр корефлексивно.

Для коалгебры C через $C^\Box$ и $^\Box C$ обозначаются максимальный левый и правый рациональные идеалы в C^*. *Коалгебра C кособственная слева (справа)*, если $C^\Box$ (соответственно, $^\Box C$) плотен в C^*. Нетрудно видеть, что $C^\Box$ ($^\Box C$) является суммой всех конечномерных левых (правых) идеалов в C^*. Прямая сумма кособственных слева (справа) коалгебр кособственна и наоборот. Кополупростая коалгебра кособственна. Для кособственной коалгебры C конечномерный рациональный левый C^*-модуль проективен тогда и только тогда, когда он проективен как $C^\Box$-модуль. Кроме того, для любого конечномерного инъективного рационального левого C^*-модуля M модуль M^* над C^* проективен. Описан радикал $C^\Box$ и коалгебра C^{*0}.

Коалгебра C *фробениусова,* если существует мономорфизм левых C^*-модулей $C\rightarrowtail C^*$ с плотным образом. Изучению фробениусовых коалгебр посвящена статья [42]. Доказано, что конечномерный рациональный C^*-модуль M проективен в том и только в том случае, если он инъективен. В конечномерной фробениусовой биалгебре A пространство левых (правых) интегралов одномерно. Изучены свойства характеров комодулей (см. § 4). Предположим, что H — кополупростая инволютивная алгебра Хопфа, M — абсолютно неприводимый рациональный H^*-модуль, $f \in \int_l(H) \setminus 0$. Тогда $(\dim M, \operatorname{char} k) = 1$ и

$$f \rightharpoonup \rho(h) = (\dim M)^{-1} \chi_M(h), \quad h \in H^*,$$

где $\rho: H^* \to \operatorname{End} M$. Над фробениусовой коалгеброй в терминах простых комодулей найдены условия изоморфности комодулей, условия проективности комодуля. Доказаны соотношения ортогональности.

В важной работе Милнора и Мура [149] определено понятие котензорного произведения $M \square_C N$. Пусть C — коалгебра над полем k, M и N, соответственно, правый и левый C-комодули со структурными морфизмами ρ_M, ρ_N. Через $M \square_C N$ обозначим множество всех таких $x \in M \otimes N$, что $(\rho_M \otimes 1)x = (1 \otimes \rho_N)x$. Доказана точность слева функторов $M \square_C (-)$, $(-) \square_C N$. Отметим, что $P(C) = k \square_C (\operatorname{Ker} \varepsilon)$, где k снабжено очевидной C-комодульной структурой. Если $f: H_1 \to H_2$ — морфизм алгебр Хопфа, то $\operatorname{Ker} f = k \square_{H_1} H_2 = H_1 \square_{H_2} k$. Приведем полезный факт, отмеченный в [98], [149].

Предложение. Пусть $f: C \to D$ — морфизм коалгебр, причем C связно. f инъективен тогда и только тогда, когда ограничение f на $P(C)$ инъективно, т. е. $P(C) \cap \operatorname{Ker} f = 0$.

В статье [160] рассматривается кополупростое слева над полем k расширение $\varphi: C \to D$. Это означает, что в любом комодуле любой C-коподмодуль, являющийся D-прямым слагаемым, выделяется C-прямым слагаемым. Это свойство транзитивно. Морфизм коалгебр $\varphi: C \to D$ *косепарабелен*, если

$$\Delta: C \to C \square_D C$$

расщепляемо как морфизм C—C-бикомодулей. В этом случае C над D кополупросто. Если C над D и E над F косепарабельны, то $C \otimes E$ над $D \otimes F$ косепарабельно.

Пусть C — коалгебра и M является C—C-кобимодулем. Обозначим $\rho_l: M \to C \otimes M$ и $\rho_r: M \to M \otimes C$ соответствующие структурные морфизмы. Тогда

$$(\Delta \otimes 1)\rho_l = (1 \otimes \rho_l)\rho_l; \quad (1 \otimes \Delta)\rho_r = (\rho_r \otimes 1)\rho_r;$$

$$(1 \otimes \rho_r)\rho_l = (\rho_l \otimes 1)\rho_r.$$

Кодифференцированием $\delta: M \to C$ называется такой морфизм δ, что $\Delta\delta = (\delta \otimes 1)\rho_l + (1 \otimes \delta)\rho_r$. *Кодифференцирование* $\delta: M \to C$ *внутреннее*, если существует такой элемент $f \in M^*$, что $\delta = (f \otimes 1)\rho_r - (1 \otimes f)\rho_l$. Пусть $\omega: C \otimes C \to L$ — коядро коумножения в C. Морфизм $d: L \to C$ с условием $d\omega(a \otimes b) = a\varepsilon(b) - \varepsilon(a)b$ называется универсальным кодифференцированием. Следующие условия эквивалентны (см. [161]): 1) C косепарабельно над k; 2) $H^n(N, C) = 0$ для всех $n \geqslant 1$ и всех C—C-кобимодулей N; 3) любое кодифференцирование из C—C-кобимодуля в C внутреннее; 4) универсальное кодифференцирование d внутреннее.

Если f и g — кодифференцирования в кокоммутативной коалгебре C, то $[f, g]$ также является кодифференцированием. Таким образом, множество $\operatorname{Coder} C$ всех кодифференцирований в C является алгеброй Ли. Если $\operatorname{char} k = p > 0$, то $\operatorname{Coder} C$ — ограниченная алгебра Ли. Пусть

$$E_C \in \operatorname{End}(\operatorname{End} C)$$

— левая трансляция с помощью 1_C в конволютивной алгебре $\operatorname{End} C$. Тогда [211]

$$E_C(\operatorname{Hom}(C, P(C))) = \operatorname{Coder} C.$$

Шудо [226] в категории *гиперaлгебр*, т. е. кокоммутативных неприводимых алгебр Хопфа, рассматривает вопросы расщепимости эпиморфизмов алгебр Хопфа. Пусть G — подалгебра Хопфа в алгебре H. Положим $J = H/H(G \cap H^+)$. Следующие условия эквивалентны: 1) отображение морфизмов коалгебр

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{coal}}(C, H) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{coal}}(C, J)$$

сюръективно 2) существует расщепляющий морфизм коалгебр $J \to H$; 3) существует ретракция коалгебр $H \to G$; 4) имеется изоморфизм коалгебр $H \simeq J \otimes G$.

Если эти условия выполнены, то G называется *относительно гладкой подгипералгеброй*. Связь этого понятия с разделенными степенями и гладкостью исследуется в [257]. Близкие вопросы рассматриваются в [40], [280].

Серия работ посвящена изучению свойств косвободной коалгебры $C(V)$ и *косвободной алгебры Хопфа* $F(C)$. Пусть k — поле и $C(V)$ — косвободная точечная неприводимая коалгебра над векторным пространством V. Как векторное пространство она совпадает с тензорной алгеброй $T(V)$ [173]. Структура коалгебры в $C(V)$ задается коумножением

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = (1) \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) +$$
$$+ (v_1) \otimes (v_2 \otimes \ldots \otimes v_n) + (v_1 \otimes v_2) \otimes (v_3 \otimes \ldots \otimes v_n) + \ldots +$$
$$+ (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \otimes (1),$$

где скобки означают компоненты в $C(V) \otimes C(V)$. Кроме того, $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = 0$. Пусть $\pi: C(V) \to V$ — естественная проекция. Предположим, что U — алгебра над k и $m: (C(U) \otimes$

$\otimes C(U))^+ \to U$ — морфизм, причем для $h, h' \in C(U)^+$

$$m(1\otimes h) = m(h\otimes 1) = \varepsilon(h), \quad m(h\otimes h') = \pi(h)\pi(h').$$

Отображение m в силу косвободности задает умножение $\mu: C(U)\otimes C(U) \to C(U)$, где $\pi\mu = m$. В этом случае $C(U) = CH(U)$ называется *косвободной алгеброй Хопфа над алгеброй U.*

Теорема ([173]). Пусть U — алгебра и H — неприводимая алгебра Хопфа, причем задан морфизм алгебр $f: H^+ \to U$. Тогда существует такой морфизм алгебр Хопфа $F: H \to CH(U)$, что $\pi F = f$.

Алгебра $CH(U)$ коммутативна тогда и только тогда, когда U коммутативна. В частности, если U — алгебра с нулевым умножением, то $CH(U)$ обозначается как $Sh(U)$. Алгебру $Sh(U)$ можно определить для любой алгебры U, вводя в U нулевое умножение.

Теорема ([173]). Пусть U — коммутативная алгебра над полем нулевой характеристики. Рассмотрим морфизм $\tau: Sh(U) \to U$, где $1 \to 1$ и

$$u_1\otimes \ldots \otimes u_n \to (n!)^{-1} u_1 \ldots u_n, \quad u_i \in U.$$

Тогда $Sh(U)$ — косвободная неприводимая алгебра Хопфа над U. Таким образом, если U — коммутативная алгебра над полем нулевой характеристики, то $CH(U) \simeq Sh(U)$.

Эта теорема позволяет построить базис алгебры $CH(U)$. Аналогичное построение осуществляется и в случае положительной характеристики. Если H — неприводимая алгебра Хопфа, то существует такая алгебра U, что H вкладывается в $CH(U)$. Вопрос об изоморфности алгебр $CH(U)$ и $CH(U')$ сводится к вопросу об изоморфности алгебр Ли $U^{(-)}$ и $U'^{(-)}$. Эти вопросы отражены в работах [201], [205].

Блок [60], [61] рассматривает пополнение $\overline{T(V)}$ тензорной алгебры $T(V)$ векторного пространства V относительно фильтрации

$$F^n(T(V)) = \bigoplus_{i\geqslant n} T_i(V).$$

Свободная коалгебра $T^c(V)$ над V состоит из всех таких $a = \sum_{i\geqslant 0} a_i \in \overline{T(V)}$, что существует

$$\sum b_i\otimes c_i \in \overline{T(V)}\otimes\overline{T(V)},$$

причем $a_{m+n} = \sum_i b_i^m \otimes c_i^n$ для всех $m, n \geqslant 0$. При этом

$$\Delta(a) = \sum_i b_i\otimes c_i \in T^c(V)\otimes T^c(V).$$

Неприводимая компонента $T^c(V)^1$ элемента $1+0+\ldots$ равна $Sh(V)$. $T^c(V)$ и $Sh(V)$ являются Г-алгебрами. Предположим, что L — коалгебра Ли. Тогда $U_c(L)$ — подалгебра в $T^c(L)$, состоящая из всех элементов со свойством Ли. В $U_c(L)$ рассмотрим естественную фильтрацию $U_c(L)\cap F^n(T^c(L))$. Тогда $\operatorname{gr} U_c(L) \simeq B(L)$, причем $B(L)$ — симметрические элементы из $\mathrm{Sh}(L)$.

Дуальная ситуация рассматривается Ньюменом в [168]. Пусть C — точечная неприводимая кокоммутативная коалгебра. Алгебра Хопфа $F(C)$ называется *свободной точечной неприводимой и кокоммутативной алгеброй Хопфа над C,* если существует морфизм коалгебр $i: C \to F(C)$, причем если B — произвольная точечная неприводимая кокоммутативная коалгебра и $f: C \to B$ — морфизм коалгебр, то существует и притом единственный такой морфизм алгебр Хопфа $g: F(C) \to B$, что $gi = f$. Построен базис $F(C)$, изучено $P(F(C))$ и последовательности разделенных степеней в $F(C)$. Если C — алгебра Хопфа, то описано ядро естественного эпиморфизма $F(C) \to C$.

Отметим две работы Ю. И. Манина [14], [141]. В биалгебре E рассмотрим матрицу $Z = (z_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, E)$ с условием $\Delta(Z) = Z\otimes Z$, $\varepsilon(z_{ij}) = \delta_{ij}$. Предположим, что E порождается элементами z_{ij}. Строится алгебра Хопфа H с вложением биалгебр $E \subset H$, причем любой морфизм биалгебры E в любую алгебру Хопфа H' продолжается до морфизма алгебр Хопфа $H \to H'$. Супервариант этой теоремы доказан в [14].

Пусть задана некоторая k-коалгебра C над полем k и V — правый C-комодуль. Тогда V является левым C^*-модулем, где для $c^* \in C^*$, $v \in V$

$$c^*\cdot v = \Sigma_v c^*(v_{(0)})v_{(1)}.$$

Рассмотрим в V подпространство W, обладающее следующим свойством [104]: для любого $f \in C^*$ существует такое конечномерное подпространство $E_f \subseteq V$, что $fW \subseteq W + E_f$. Тогда C^*W/W имеет конечную размерность.

Для коммутативной k-алгебры Хопфа H рассмотрим такую левую H-модульную алгебру A, что $A, H \in \mathbf{P}(k)$ и они имеют одинаковый ранг. В этом случае [277] A является обратимым H-модулем в том и только в том случае, если A — точный H-модуль и $1 \in (\int_l(H))A$.

Ульбрих [273] рассматривает категорию D левых H-комодулей (H — алгебра Хопфа, являющаяся плоским k-модулем) и категорию k-модулей C. Пусть $\mathrm{Fib}\, D$ — категория моноидальных точных строгих k-линейных функторов $w: D \to C$, перестановочных с копределами. Строится функтор

$$F: \mathrm{Gal}(k, H) \to \mathrm{Fib}\, D,$$

при котором $Z \to F_Z$, где

$$F_Z(V) = \mathrm{Ker}(\rho_Z\otimes 1 - 1\otimes\rho_V).$$

Здесь ρ_Z, ρ_V — комодульные структурные морфизмы на $Z\in \mathrm{Gal}(k, H)$, $V\in D$. Показано, что F задает эквивалентность категорий. Если k — поле и D_f — категория конечномерных левых H-комодулей, то функтор ограничения

$$\mathrm{Fib}\, D \to \mathrm{Fib}\, D_f$$

является эквивалентностью категорий.

Обобщение алгебр Хопфа рассмотрено в [87]. Биалгебра называется левой алгеброй Хопфа, если существует левый антипод S, т. е. $\Sigma_x S(x_{(1)})(x_{(2)}) = \varepsilon(x)$ для всех x. Отмечается, что если c — элемент коалгебры C, то c содержится в конечномерной коподалгебре из C. Левая алгебра Хопфа является алгеброй Хопфа H в каждом из следующих случаев: 1) H — конечномерно; 2) H — коммутативно; 3) H точечно; 4) корадикал H_0 в H кокоммутативен. Построены примеры левых алгебр Хопфа, не являющихся алгебрами Хопфа.

А. В. Сидоров [30], [31] рассматривает радикалы в категории конечномерных H-модульных алгебр. Исследуется вопрос об инвариантности нильпотентного радикала при действии алгебры Хопфа, об отщеплении его с помощью инвариантной подалгебры. В [31] рассматривается свойство Андерсона—Дивинского—Сулинского (радикал идеала является идеалом) для радикалов в категории H-модульных алгебр. Для конечномерной полупростой неодномерной алгебры Хопфа H это свойство, вообще говоря, не выполняется. Изучаются свойства радикалов джекобсоновского типа.

§ 9. Квантовые группы

Во второй половине восьмидесятых годов появился новый импульс в развитии теории алгебр Хопфа. Он связан с рассмотрением ряда задач математической физики — уравнениями Янга—Бакстера и др. Построению алгебраического формализма, связанного с этими задачами, посвящены работы В. Г. Дринфельда, Ю. И. Манина, Л. Д. Фаддеева, Н. Ю. Решетихина, М. А. Семенова-Тянь-Шаньского, Е. К. Склянина, Л. А. Тахтаджяна, В. В. Любашенко и др.

Одним из основных объектов изучения в этой теории являются почти кокоммутативные, (квази) треугольные, кограничные алгебры Хопфа и их обобщения. Это алгебры Хопфа H с биективным антиподом, причем в $H\otimes H$ выделен обратимый элемент R. Алгебра H *почти кокоммутативна*, что для любого $x\in H$

$$t\Delta(x) = R\Delta(x)R^{-1},$$

где t — циклическая перестановка в $H\otimes H$. Почти кокоммутативная алгебра Хопфа H *квазитреугольна*, если дополнительно,

$$(\Delta\otimes 1)R = R_{13}R_{23},\ (1\otimes\Delta)R = R_{13}R_{12},$$

где для $1\leqslant p<q\leqslant 3$

$$R_{pq} = \sum_i 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes \underset{p}{r_i}\otimes 1\ldots\otimes 1\otimes \underset{q}{r'_i}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1,$$

$$R = \sum_i r_i\otimes r'_i \in H\otimes H.$$

В квазитреугольной алгебре Хопфа справедливы следующие соотношения

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \qquad \text{(уравнение Янга—Бакстера)}$$

$$(S\otimes 1)R = R^{-1} = (1\otimes S)R,\ (S\otimes S)R = R,$$

$$(\varepsilon\otimes 1)R = 1 = (1\otimes\varepsilon)R.$$

Предложение ([7]). Пусть $R = \sum r_i\otimes r'_i$ и $u = \sum S(r_i)r'_i \in H$. Тогда u — обратимый элемент почти кокоммутативной алгебры Хопфа H, причем $S^2(x) = uxu^{-1}$ для всех $x\in H$.

В квазитреугольной алгебре Хопфа H [7] элементы u и $S(u)$ перестановочны, причем $z = uS(u)$ лежит в центре H, $g = uS(u)^{-1}\in G(H)$. Кроме того, $S^4(x) = gxg^{-1}$ для всех $x\in H$. В терминах R вычисляются $\Delta(u)$, $\Delta(z)$. Если $b = (tR)R$, то $\Delta(x)b = b\Delta(x)$ для всех $x\in H$. С помощью b строятся центральные элементы $(1\otimes f)b$ в H, где $f\in H^*$, причем $f(xy) = f(yS^2(x))$. Если H — конечномерно, то обозначим a и f такие элементы из H и H^*, что для $g^*\in \int_l(H^*)$, $I\in\int_l(H)$ и любых $x\in H$, $h\in H^*$

$$g^* * h = h(a)g^*,\ Ix = f(x)I.$$

Тогда $g = a^{-1}(f\otimes 1)R = (f\otimes 1)Ra^{-1}$.

Алгебра Хопфа H *кограничнa*, если в $H\otimes H$ существует такой обратимый элемент R, что $tR = R^{-1}$, $(\varepsilon\otimes\varepsilon)R = 1$, $R_{12}(\Delta\otimes 1)R = R_{23}(1\otimes\Delta)R$. В качестве примеров таких алгебр Хопфа выступают деформации $U_h(L)$ универсальных обертывающих для алгебр Каца—Муди L.

В работе В. Г. Дринфельда [8] рассматриваются обобщения алгебр Хопфа — *квазихопфовы алгебры*. k-алгебра A с пополнением ε называется квазибиалгеброй, если задан морфизм алгебр $\Delta: A\to A\otimes A$ и обратимый элемент Φ в $A\otimes A\otimes A$, причем для любого $a\in A$

$$(1\otimes\Delta)\Delta(a) = \Phi(\Delta\otimes 1)\Delta(a)\Phi^{-1};$$

$$(1\otimes 1\otimes\Delta)\Phi(\Delta\otimes 1\otimes 1)\Phi = (1\otimes\Phi)(1\otimes\Delta\otimes 1)\Phi(\Phi\otimes 1);$$

$$(1\otimes\varepsilon\otimes 1)\Phi = 1.$$

Квазибиалгебра называется квазиалгеброй Хопфа, если существует такой антиавтоморфизм S в A, элементы b, c из A, что для всех $a\in A$

$$\Sigma S(a_{(1)})ba_{(2)}=\varepsilon(a)b;\ \ \Sigma a_{(1)}cS(a_{(2)})=\varepsilon(a)c;$$
$$\Sigma_{\varphi}\ \Phi_1 bS(\Phi_2)c\Phi_3=1,\ \ \Phi=\Sigma\Phi_1\otimes\Phi_2\otimes\Phi_3;$$
$$\Sigma_{\varphi^{-1}}S(\Phi'_1)b\Phi'_2 cS(\Phi'_3)=1\ \ \Phi^{-1}=\Sigma\Phi'_1\otimes\Phi'_2\otimes\Phi'_3.$$

Важным примером квазихопфовых алгебр являются QUE-алгебры Хопфа H или деформации универсальных обертывающих алгебр. Это топологические алгебры над $k[[h]]$, имеющие как топологические $k[[h]]$-модуль вид $V[[h]]$, где V — векториое пространство над k. При этом $H/hH\simeq U(L)$ для некоторой алгебры Ли L. Коумножение в H индуцирует коумножение $\delta(x)=h^{-1}(\Delta(x)-t\Delta(x))$ в L. Тем самым L превращается в *биалгебру Ли*, т. е.

$$\delta[x,y]=[x\otimes1+1\otimes x,\ \delta(y)]-[y\otimes1+1\otimes y,\ \delta(x)]$$

для всех $x,y\in L$. Отмечается, что кокоммутативные QUE-алгебры Хопфа имеют вид $U(L)$, где L — алгебра Ли над $k[[h]]$. Вводится понятие квазилиевой коалгебры и понятие скручивания квазихоповых алгебр, связанного с изменением элемента Φ.

Объекты, связаные с построением некоммутативной геометрии, рассматриваются в работе Н. Ю. Решетихина, Л. А. Тахтаджяна и Л. Д. Фаддеева [29]. Пусть $C\langle t_{11},\ldots,t_{nn}\rangle$ — свободная ассоциативная аглебра от n^2 неизвестных t_{ij}. Зафиксируем невырожденную матрицу $R\in\mathrm{Mat}(n^2,C)$. Пусть $T=(t_{ij})\in\in\mathrm{Mat}(n,C\langle t_{11},\ldots,t_{nn}\rangle)$ и I_R — идеал в $C\langle t_{ij}\rangle$, порождаемый соотношениями, вытекающими из матричного равенства $R(T\otimes1)(1\otimes T)=(1\otimes T)(T\otimes1)R$. Алгебра $A_R=C\langle t_{ij}\rangle/I_R$ называется *алгеброй функций на квантовой матричной алгебре ранга n*, ассоциированной с R. В A_R имеется естественная градуировка, причем степень t_{ij} равна 1. Если R — единичная матрица, то A_R — алгебра полиномов $C[t_{ij}]$. В общем случае A_R является биалгеброй, где

$$\Delta(t_{ij})=\sum_r t_{ir}\otimes t_{rj},\ \ \Delta(1)=1\otimes1.$$

Другими словами, $\Delta(T)=T\otimes T$, $\varepsilon(t_{ij})=\delta_{ij}$. Рассмотрим матрицу $P\in\mathrm{Mat}(n^2,C)$, задающую оператор перестановки t в $C^n\times C^n$. Если $f\in C[X]$, то обозначим $I_{f,R}$ идеал в $C\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$, порожденный координатами

$$f(PR)(x\otimes x),\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\bigoplus_{i=1}^{n}C\langle x_1,\ldots,x_n\rangle.$$

Положим $C^n_{f,R}=C\langle x_1,\ldots,x_n\rangle/I_{f,R}$. Это алгебра функций на квантовом n-мерном пространстве, ассоциированном с f и R.

Отображение

$$\rho: C^n_{f,R}\to A_R\otimes C^n_{f,R},\ \ \rho(x_i)=\sum_r t_{ir}\otimes x_r,$$

задает на $C^n_{f,R}$ структуру левой A_R-комодульной алгебры. Примером этой ситуации является алгебра C^n_q с образующими $x_1,\ldots,x_n$ и определяющими соотношениями $x_ix_j=qx_jx_i$, $i>j$, алгебра $A_q=A_{R_q}$, где

$$R_q=q\sum_{i=1}^{n}e_{ii}\otimes e_{ii}+\sum_{i\neq j}e_{ii}\otimes e_{jj}+$$
$$+(q-q^{-1})\sum_{i>j}e_{ij}\otimes e_{ji}.$$

Если $q^l\neq1$ для всех $l\geqslant1$, то центр A_q порождается 1 и

$$\det_q T=\sum_{s\in S_n}(-q)^s t_{1,s1}\ldots t_{n,sn}.$$

При этом $\Delta(\det_q T)=\det_q T\otimes\det_q T$. Алгебра

$$A_q/(\det_q T-1)$$

называется *алгеброй функций на квантовой группе $SL_q(n,C)$*. Это алгебра Хопфа с антиподом

$$S(t_{ij})=(-q)^{i-j}\bar t_{ji},$$

где

$$\bar t_{ij}=\sum_{s\in S_{n-1}}(-q)^s t_{1,s1}\ldots t_{i-1,s(i-1)}t_{i+1,s(i+1)}\ldots t_{n,sn},$$

причем $(s1,\ldots,s(i-1),\ s(i+1),\ldots,sn)=(1,\ldots,j-1,\ j+1,\ldots,n)$. Показывается, что $TS(T)=S(T)T=1$, $S^2(T)=DTD^{-1}$, где D — диагональная матрица с коэффициентами $1,q^2,\ldots,q^{2(n-1)}$. Алгебра $A_q/(\det_q T-1)$ действует в C^n_q по правилу $x_i\to\sum_r t_{ir}\otimes x_r$. В этом же ключе определяется алгебра опфа функций на $GL_q(n,\ C)$ как

$$A_q\langle t\rangle/([t,t_{ij}]=[t,\ \det_q T]),$$
$$S(t)=\det_q T,\ s(t_{ij})=t(-q)^{i-j}\bar t_{ij}.$$

Аналогично определяется алгебра функций на квантовых группах SU_q, $SL_q(n,R)$.

Важной конструкцией в теории квантовых групп является построение *квантового дубля* $D(H)$ алгебры Хопфа H, предложенного В. Г. Дринфельдом [6], [218]. Предположим, что H — конечномерная алгебра Хопфа с базой e_i и e^i — дуальный базис в H^*.

Положим

$$R=\sum e^i\otimes e_i\in H^*\otimes H.$$

Тогда

$$(\Delta\otimes 1)R=R_{23}R_{13},\quad (1\otimes\Delta)R=R_{12}R_{13},$$
$$(1\otimes S)R=R^{-1},\quad (S\otimes S)R=R.$$

Первые два условия означают, что R задает морфизм алгебр Хопфа $(H^*)^{op}\to H$, где $(H^*)^{op}$ — алгебра Хопфа с коумножением $\Delta^* t$ и антиподом S', где Δ^* — коумножение в H^*, $(S'f)(x)=f(S^{-1}x)$ для $f\in H^*$, $x\in H$. Рассмотрим коалгебру

$$D(H)=H\otimes (H^*)^{op},$$

где H — произвольная конечномерная алгебра Хопфа. Выберем в H базис e_i и выберем в H^* дуальный базис e^i. Положим как и выше

$$R=\sum_i (e_i\otimes 1)\otimes(1\otimes e^i)\in D(H)\otimes D(H);$$

$$S(h\otimes f)=(Sh\otimes 1)(1\otimes Sf),$$

$$(h\otimes f)(p\otimes g)=\sum h_{(2)}p\otimes(f*g^h),$$

где $g^h(x)=\sum g(S(h_{(3)})xh_{(1)})$. Тогда $(D(H), R)$ является квазитреугольной алгеброй Хопфа [137]—[139], [217]. Алгебра $D(H)$ *факторизуема*, т. е. отображение

$$D(H)^{*op}\to D(H),\quad f\to(f\otimes 1)(R\cdot tR),$$

где $f\in D(H)^*$ является биективным [218]. Если H факторизуема, то $D(H)=H\otimes H$ как алгебра и

$$(h\otimes h')=R_{23}^{-1}\Delta_{13}(h)\,\Delta_{24}(h')R_{23}.$$

Категория конечномерных представлений квазитреугольной алгебры Хопфа H является квазитензорной, т. е. она когерентна, обладает внутренним Hom и $\otimes$, однако квадрат морфизма коммутативности тензорного произведения не обязательно тривиален [28]. В таких категориях [139] естественный морфизм $\mathrm{Hom}(V, V)\to 1$ индуцирует морфизм следа

$$\mathrm{Tr}:\mathrm{Mor}(V, V)\to\mathrm{Mor}(1, 1).$$

Положим $\mathrm{rank}\, V=\mathrm{Tr}(1_V)$. Если H — конечномерная алгебра Хопфа, то $\mathrm{rank}\, H=\varepsilon(I)$ [139], где I — такой левый интеграл в H, что для всех $a\in H^*$

$$a(I)=\mathrm{Tr}_{H^*}(L_aL_u^*),$$

где L_a — оператор левого умножения на a в H^*, $u=\sum S(r_i)r_i'\in H$ (см. выше). В частности, если H не является полупростой алгеброй, то $\mathrm{rank}\, H=0$. Кроме того,

$$\mathrm{rank}\, D(H)=\mathrm{Tr}_H L_J=\varepsilon(J)=\mathrm{Tr}(S^{-2}),$$

где J — правый интеграл в H, $a(J)=\mathrm{Tr}_{H^*}(L_aS^{-2})$ для всех $a\in H^*$. В частности, если H — конечномерная полупростая алгебра Хопфа над полем нулевой характеристики, то эти свойства наследует и $D(H)$.

Отметим, что в [139] конструкция $D(H)$ обобщается на бискрещенные произведения $H_1\bowtie H_2$ двух алгебр Хопфа. См. также [5], [6], [11]—[13], [32], [33], [121], [140], [141], [281].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аврамов Л. Л.* Об алгебре Хопфа локального кольца // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— *38*, № 2.— С. 253—277 (РЖМат, 1974, 7А521)
2. *Бахтурин Ю. А.* Основные структуры современной алгебры.— М.: Наука, 1990.— 318 с. (РЖМат, 1991, 1А144К)
3. *Большаков В. М.* О комбинаторных коалгебрах. МГУ М., 1980. 14 с., Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 19 мая 1980 г., № 1909—80 (Деп.)) (РЖМат, 1980, 8А370ДЕП)
4. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Главы I—III.— М.: Мир, 1976 (РЖМат, 1976, 9А308К)
5. *Гуревич Д. И.* След и детерминант в алгебрах, ассоциированых с уравнением Янга-Бакстера // Функц. анал. и его прил.— 1987.— *21*, № 3.— С. 79—80 (РЖМат, 1988, 2А387)
6. *Дринфельд В. Г.* Квантовые группы // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1986.— *155*.— С. 18—49 (РЖМат, 1987, 3А423)
7. — О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа // Алгебра и анализ— 1989.— *1*, № 2.— С. 30—46 (РЖМат, 1989, 11А324)
8. — Квазихопфовы алгебры // Алгебра и анализ.— 1989.— *1*, № 6.— С. 114—148 (РЖМат, 1990, 5А337)
9. *Кадеишвили Т. В.* О категории дифференциальных коалгебр и категории $A(\infty)$-алгебр // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР.— 1985.— *77*.— С. 50—70 (РЖМат, 1986. 5А398)
10. *Кузнецов М. И.* Изоморфизмы и примитивные элементы универсальных обертывающих биалгебр // Горьк. ун-т, Горький, 1988. 9 с. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11.08.88, № 6517—В88) (РЖМат, 1988, 12А261ДЕП)
11. *Любашенко В. В.* Алгебры Хопфа и симметрии. Киев. политехн. ин-т. Киев, 1985, 33 с. Библиогр. 10 назв. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 18 февр. 1985 г., № 364Ук—85 Деп.) (РЖМат, 1985, 8А447ДЕП)
12. — Березиниан в некоторых моноидальных категориях // Укр. мат. ж.— 1986.— *38*, № 5.— С. 588—592 (РЖМат, 1987, 2А378)
13. — Алгебры Хопфа и вектор-симметрии // Успехи мат, наук.— 1986.— *41*, № 5.— С. 185—186 (РЖМат, 1987, 1А377)
14. *Манин Ю. И.* Мультипликативные матрицы в супералгебрах Хопфа // Вестн. МГУ, сер. 1.— 1989.— № 2.— С. 13—17 (РЖМат, 1989, 7А321)
15. *Нгуен Суан Туен.* Когомологические по модулю 2 алгебры знакопеременных групп // Сообщ. АН ГССР.— 1988.— *130*, № 1.— С. 21—23 (РЖМат, 1989, 1А337)
16. — О когомологии моноида отображений // Ред. Сиб. мат. ж.— Новоси-

4*

бирск, 1989.— 20 с.— Библиогр. 8 назв.— Деп. в ВИНИТИ 10.03.89, № 1582—В89 (РЖМат, 1989, 7А309ДЕП)
17. *Новиков С. П.* О когомологиях алгебры Стинрода // Докл. АН СССР.— 1959.— *128*, № 5.— С. 893—895 (РЖМат, 1960, 6303)
18. — Теорема Картана — Серра и внутренние гомологии // Успехи мат. наук.— 1966.— *21*, № 5.— С. 217—232 (РЖМат, 1967, 3А275)
19. — Кольца операций и спектральные последовательности типа Адамса в экстраординарных теориях когомологий. U-кобордизмы и K-теория // Докл. АН СССР.— 1967.— *172*, № 1.— С. 33—36.— (РЖМат, 1967, 5А427)
20. — Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР.— Сер. мат.— 1967.— *31*, № 4.— С. 855—951 (РЖМат, 1968, 12А401)
21. *Пачуашвили В. А.* О расширениях связных алгебр Хопфа // Сообщ. АН ГССР.— 1981.— *102*, № 1.— С. 21—24 (РЖМат, 1982, 1А481)
22. — О когомологиях абелевых отмеченных пар связных алгебр Хопфа // Сообщ. АН ГССР.— 1981.— *104*, № 2.— С. 273—276 (РЖМат, 1982, 9А333)
23. — Когомологии в моноидальной категории // Сообщ. АН ГССР.— 1982. — *106*, № 3.— С. 485—488 (РЖМат, 1983, 5А337)
24. — Спектральная последовательность для когомологий в моноидальной категории // Сообщ. АН ГССР.— 1982.— *107*, № 1.— С. 25—28 (РЖМат, 1983, 5А338)
25. *Платонов В. П.* Алгебраические группы // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНИТИ.— 1974.— *11*.— С. 5—36 (РЖМат, 1974, 10А362)
26. —, *Рапинчук А. С.* Алгебраические группы // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНИТИ.— 1983.— *21*.— С. 80—134 (РЖМат, 1984, 2А416)
27. *Ракиашвили Г. Г.* О K-теории скрещенного произведения коммутативной алгебры и алгебры Хопфа // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР.— 1986.— *78*.— С. 79—95 (РЖМат, 1986, 10А349)
28. *Решетихин Н. Ю.* Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок // Алгебра и анализ.— 1989.— *1*, № 2.— С. 169—188 (РЖМат, 1989, 11А325)
29. — *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантование групп и алгебры Ли // Алгебра и анализ.— 1989.— *1*, № 1.— С. 178—206 (РЖМат, 1989, 11А464)
30. *Сидоров А. В.* Об отщеплении радикала в конечномерных H-модульных алгебрах // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1989.— *28*, № 3.— С. 324—336 (РЖМат, 1990, 5А338)
31. — Радикалы H-модульных алгебр // Алгебра и логика.— 1989.— *28*, № 6.— С. 705—721 (РЖМат, 1990, 10А362)
32. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга—Бакстера // Функц. анализ и его прил.— 1982.— *16*, № 4.— С. 27—34 (РЖМат, 1983, 2Б973)
33. —, Об одной алгебре, порождаемой квадратичными соотношениями // Успехи мат. наук.— 1985.— *40*, № 2.— С. 214
34. *Спрингер Т. А.* Линейные алгебраические группы // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления / ВИНИТИ.— 1989.— *55*.— С. 5—136 (РЖМат, 1990, 3А395)
35. *Стинрод Н., Эпстейн Д.* Когомологические операции. Прикл. работы Дж. Мэя. Общий алгебраический подход к операциям Стинрода. Пер. с англ.— М.: Наука.— 1983 (РЖМат, 1983, 6А544К)
36. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. Пер. с англ.— М.: Наука.— 1980, 399 с. (РЖМат, 1981, 2А433К)
37. *Яковлев А. В.* Алгебры Хопфа с инволюцией над некоммутативными кольцами и их гомологии I // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1973.— *31*.— С. 140—164 (РЖМат, 1973, 8А342)

38. — Алгебры Хопфа с инволюцией над некоммутативными кольцами и их гомологии. II // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1974.— *46*.— С. 110—139 (РЖМат, 1975, 4А449)
39. *Abe Eiichi.* Hopf algebras. Transl. from Jap.— Cambridge, Univ. Press 1977, xii, 284 c. (РЖМат, 1981, 6А258К)
40. —. *Doi Yukio.* Decomposition theorems for Hopf algebras and pro-affine algebraic groups // J. Math. Soc. Jap.— 1972.— *24*, № 3.— С. 433—447 (РЖМат, 1973, 3А407)
41. *Allen H. P., Trushin D.* Coproper coalgebras // J. Algebra.— 1978.— *54*, № 1.— С. 203—215
42. —, — A generalized Frobenius structure for coalgebras with applications to character theory // J. Algebra.— 1980.— *62*, № 2.— С. 430—449 (РЖМат, 1980, 9А372)
43. —, *Sweedler M. E.* A theory of linear descent based upon Hopf algebraic techniques // J. Algebra.— 1969.— *12*, № 2.— С. 242—294 (РЖМат, 1970, 4А372)
44. *André M.* Hopf algebras with divided powers // J. Algebra.— 1971.— *18*, № 1.— С. 19—50 (РЖМат, 1972, 5А379)
45. *Anick D. J.* On monomial algebras of finite global dimension // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— *291*, № 1.— С. 291—310 (РЖМат, 1986, 7А394)
46. *Artamonov V. A.* Projective modules and groups of invertible matrices over crossed products.— Proceedings of International algebraic conference, Novosibirsk, Aug., 1989.— Amer. Math. Soc.— Providence R. I., 1991.
47. *Avramov L.* Small Homomorphisms of local rings // J. Algebra.— 1978.— *50*, № 2.— С. 400—453 (РЖМат, 1978, 10А295)
48. *Baker A.* A decomposition theorem for certain bipolynomial Hopf algebras // Can. Math. Bull.— 1984.— *27*, № 4.— С. 444—447 (РЖМат, 1985, 11А407)
49. *Barr M.* Coalgebras over commutative ring // J. Algebra.— 1974.— *32*, № 3.— С. 600—610 (РЖМат, 1975, 5А399)
50. *Beattie M.* A direct sum decompositon for the Brauer group of H-module algebras // J. Algebra.— 1976.— *43*, № 2.— С. 686—693 (РЖМат, 1977, 8А418)
51. —, *Ulbrich K.-H.* A Skolem-Noether theorem for Hopf Algebra actions // Commun. Algebra.— 1990.— *18*, № 11.— С. 3713—3724 (РЖМат, 1991, 4А477)
52. *Bergen J., Montgomery S.* Smash Products and outer derivations // Isr. J. Math.— 1986.— *53*, № 3.— С. 321—345 (РЖМат, 1987, 4А259)
53. —, —, *Passman D. S.* Radicals of crossed products of enveloping algebras // Isr. J. Math.— 1987.— *59*, № 2.— С. 167—184
54. *Bergman G. M.* Everybody knows what a Hopf algebra is // Contemp. Math.— 1985.— *43*.— С. 25—48 (РЖМат, 1986, 4А497)
55. *Berkson A. J., Newman K.* Constructing sequences of divided powers. II // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978.— *72*, № 1.— С. 11—15 (РЖМат, 1979, 7А440)
56. *Blanco-Ferro A. A., Lopez L. M. A.* The group of Galois H-dimodule algebras // Math. J. Okayama Univ.— 1986.— *28*.— С. 21—27 (РЖМат, 1987, 9А455)
57. *Blattner R. J., Cohen M., Montgomery S.* Crossed products and inner actions of Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1986.— *298*, № 2. — С. 671—711 (РЖМат, 1987, 7А376)
58. —, *Montgomery S.* A duality theorem for Hopf module algebras // J. Algebra.— 1985.— *95*, № 1.— С. 153—172 (РЖМат, 1986, 1А504)
59. —, — Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras // Pacif. J. Math.— 1989.— *137*, № 1.— С. 37—54 (РЖМат, 1989, 10А407)
60. *Block R. E.* Commutative Hopf algebras, Lie coalgebras and divided powers // J. Algebra.— 1985.— *96*, № 1.— С. 275—306 (РЖМат, 1986, 4А494)

61. — Determination of the irreducible divided power Hopf algebras // J. Algebra.— 1985.— *96,* № 1.— С. 307—317 (РЖМат, 1986, 4A495)
62. *Buium A., Takeuchi M.* Rigidity of maps from Hopf algebras to group algebras // J. Algebra.— 1988.— *118,* № 1.— С. 14—19 (РЖМат, 1989, 4A316)
63. *Chase S. U., Sweedler M. E.* Hopf algebras and Galois theory.— Berlin, Springer.— 1969.— 133 с. (РЖМат, 1971, 10A181K)
64. *Chen Cao-yu, Nichols W. D.* A duality theorem for Hopf-module algebras over Dedekind rings // Commun. Algebra.— 1990.— *18,* № 10.— С. 3209—3221 (РЖМат, 1991, 4A475)
65. *Cheng Yung-chen.* Hopf algebras over number rings // J. Algebra.— 1987. — *111,* № 2.— С. 431—452 (РЖМат, 1988, 6A377)
66. — Hopf algebras over commutative rings with arbitrary antipodal orders // Commun. Algebra.— 1989.— *17,* № 5.— С. 1157—1160 (РЖМат, 1989, 11A323)
67. *Childs L. N.* Products of Galois and the Picard invariant map // Math. J. Okayama Univ.— 1986.— *28.*— С. 29—36 (РЖМат, 1987, 9A456)
68. —, *Hurley S.* Tameness and local normal bases for objects of finite Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1986.— *298,* № 2.— С. 763—778 (РЖМат, 1987, 7A377)
69. *Cohen M.* Hopf algebras acting on semiprime algebras // Contemp. Math.— 1985.— *43.*— С. 49—61 (РЖМат, 1986, 3A524)
70. — *H*-simple *H*-module algebras // Can. Math. Bull.— 1987.— *30,* № 3.— С. 363—366 (РЖМат, 1988, 3A508)
71. —, *Fishman D.* Hopf algebra actions // J. Algebra.— 1986.— *100,* № 2.— С. 363—379 (РЖМат, 1986, 11A493)
72. —, —, *Montgomery S.* Hopf Galois extensions, smash products and Morita equivalence // J. Algebra.— 1990.— *133,* № 2.— С. 351—372 (РЖМат, 1991, 1A417)
73. —, *Montgomery S.* Group-graded rings, smash products and Galois actions // Trans. Amer. Math.Soc.— 1984.— *282,* № 1.— С. 237—258 (РЖМат, 1985, 1A355)
74. *Doi Yuko.* On the stricture of relative Hopf modules // Commun. Algebra.— 1983.— *11,* № 3.— С. 243—255 (РЖМат, 1983, 9A360)
75. — Cleft comodule algebras and Hopf modules // Commun. Algebra.— 1984.— *12,* № 9—10.— С. 1155—1169 (РЖМат, 1984, 11A344)
76.— Algebras with total integrals // Commun. Algebra.— 1985.— *13,* № 10. — С. 2137—2159 (РЖМат, 1986, 4A492)
77. — Equivalent crossed products for a Hopf algebra // Commun. Algebra. — 1989.— *17,* № 13.— С. 3053—3085 (РЖМат, 1990, 7A365)
78. —, *Takeuchi Mitsuhiro.* Cleft comodule algebras for a bialgebra // Commun. Algebra.— 1986.— *14,* № 5.— С. 801—817 (РЖМат, 1986, 11A494)
79. —, — Hopf-Galois extentions of algebras, the Miyashita—Ulbrich actions and Azumaya algebras // J. Algebra.— 1989.— *121,* № 2.— С. 488—516 (РЖМат, 1990, 2A401)
80. *Donkin St.* On the Hopf algebra dual of an enveloping algebra // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1982.— *91,* № 2.— С. 215—224 (РЖМат, 1982, 10A229)
81. *Doubilet P. A.* Hopf algebra arising from the lattice of partitions of a set // J. Algebra.— 1974.— *28,* № 1.— С. 127—132 (РЖМат, 1974, 10A344)
82. *Douglas R.* The uniqueness of coproduct decomposition for algebras over a field // Lect. Notes Math.— 1978.— *673.*— С. 1—6 (РЖМат, 1979, 6A358)
83. *Duflot J.* A Hopf algebra associated to the cohomology of the symmetric groups // Arcata Conf. Represent. Finite Groups: Proc. Summer Res. Inst., Arcata. Calif., July 7—25, 1986. Pt 2. Providence R. I., 1987.— С. 171—186 (РЖМат, 1988, 11A413)
84. *Edwards G.* Primitive elements in symmetric algebras // Can. J. Math.— 1974.— *26,* № 2.— С. 355—364 (РЖМат, 1974, 12A284)

85. *Felix Y., Halperin St., Thomas J.-C.* Hopf algebras of polynomial growth // J. Algera.— 1989.— *125,* № 2.— С. 408—417 (РЖМат, 1990.— 4A476)
86. *Filser G.* A note on the antipode of free Hopf algebras // Communs Algebra.— 1977.— *5,* № 3.— С. 289—292 (РЖМат, 1978, 2A379)
87. *Green J. A., Nichols W. D., Taft E. J.* Left Hopf algebras // J. Algebra. — 1980.— *65,* № 2.— С. 399—411 (РЖМат, 1981, 3A401)
88. *Gereither C.* Construction of a Hopf algebra of **Z**-rank $r^{\varphi(n)+1}$ whose antipode has order $2n$ // Commun. Algebra.— 1989.— *17,* № 5.— С. 1147—1155 (РЖМат, 1989, 11A322)
89. *Grosshans F. D., Rota G.-C., Stein J. A.* Invariant theory and superalgebras: Expos. Lec. CBMS Reg. Conf., West Chester Univ., Aug. 19—23, 1985: Providence R. I.: Amer. Math. Soc., 1987, xxii, 80 с. (Reg. Conf. Ser. Math., № 69) (РЖМат, 1988, 11A451K)
90. *Grossman R., Larson R. G.* Hopf-algebraic structure of families of trees // J. Algebra.— 1989.— *126,* № 1.— С. 184—210 (РЖМат, 1990, 4A477)
91. *Grünenfelder L. A.* Hopf-algebren and coradical // Math. Z.— 1970.— *116,* № 2.— С. 166—182 (РЖМат, 1971, 1A322)
92. —, *Paré R.* Families parametrized by coalgebras // J. Algebra.— 1987.— *107,* № 2.— С. 316—375 (РЖМат, 1987, 9A454)
93. *Haggenmüller R., Pareigis B.* Hopf algebra forms of the multiplicative group and other groups // Manuscr. math.— 1986.— *55,* № 2.— С. 121—136 (РЖМат, 1986, 11A496)
94. *Handel D.* Thom modules // J. Pure and Appl. Algebra.— 1985.— *36,* № 3.— С. 237—252 (РЖМат, 1986, 4A496)
95. — Bordism of algebras over Hopf algebras // J. Pure and Appl. Algebra. — 1987.— *47,* № 3.— С. 243—252 (РЖМат, 1988, 3A509)
96. *Heller A.* Principal Bundles and group extensions with applications to Hopf algebras // J. Pure and Appl. Algebra.— 1973.— *3,* № 3.— С. 219—250 (РЖМат, 1974, 3A304)
97. *Heyneman R. G., Sweedler M. E.* Affine Hopf algebras. I // J. Algebra.— 1969.— *13,* № 2.— С. 192—241 (РЖМат, 1970, 2A358)
98. —, — Affine Hopf algebras. II // J. Algebras.— 1970.— *16,* № 2.— С. 271—297 (РЖМат, 1971, 5A456)
99. *Hikari Michitaka.* On simple components of cocommutative Hopf algebras // J. Algebra.— 1977.— *49,* № 2.— С. 330—341 (РЖМат, 1978, 8A422)
100. *Hiromori Katsuhisa.* Construction of certain Hopf algebras // Math. jap.— 1974.— *19,* № 1.— С. 1—32 (РЖМат, 1975, 10A365)
101. *Hochsild G.* Algebraic groups and Hopf algebras // Ill. J. Math.— 1970. — *14,* № 1.— С. 52—65 (РЖМат, 1970, 12A344)
102. —, *Mostow G. D.* Pro-affine algebraic groups // Amer. J. Math.— 1969. — *91,* № 4.— С. 1127—1140 (РЖМат, 1970, 12A343)
10. *Hoffmann P.* Hopf algebras from branching rules // Can. J. Math.— 1983.— *35,* № 1.— С. 177—192 (РЖМат, 1983, 8A578)
104. *Hoffmann K.* A new property of comodule answering a question of Sweedler // Commun. Algebra.— 1988.— *16,* № 4.— С. 667—680 (РЖМат, 1988, 11A443)
105. *Hubbuck J. R.* A Hopf algebra decomposition thorem // Bull. London Math. Soc.— 1981.— *13,* № 2.— С. 125—128 (РЖМат, 1981, 9A315)
106. — Decomposing Hopf algebras over a field of non-zero characteristic // J. Pure and Appl. Algebra.— 1982.— *25,* № 3.— С. 251—253 (РЖМат, 1983, 5A354)
107. *Humphreys J. E.* Symmetry for finite dimensional Hopf algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978.— *68,* № 2.— С. 143—146 (РЖМат, 1978, 12A681)
108. *Hurley S.* Galois objects with normal bases for free Hopf algebras of prime degree. // J. Algebra.— 1987.— *109,* № 2.— С. 292—318 (РЖМат, 1988, 2A386)
109. *Husemoller D.* The structure of the Hopf algebra $H_*(BU)$ over a $Z_{(p)}$-al-

gebra // Amer. J. Math.— 1971.— *93*, № 2.— С. 329—349 (РЖМат, 1972, 3A502)
110. *Jensen A. L.* Nilpotent elements in integral representaion rings of Hopf-algebra orders in group algebras of prime order // J. Algebra.— 1983.— *85*, № 2.— С. 410—423 (РЖМат, 1984, 5A243)
111. —, *Larson R. G.* An isomorphism for the Grothendieck ring of a Hopf algebra order // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *97*, № 2.— С. 197—200 (РЖМат, 1986, 12A442)
112. *Joni S. A., Rota G.-C.* Coalgebras and bialgebras in combinatorics // Stud. Appl. Math.— 1979.— *61*, № 2.— С. 93—139 (РЖМат, 1980, 9B472)
113. *Jordan B. W.* A lower central series for split Hopf algebras with involution // Trans. Amer. Math. Soc.— 1980.— *257*, № 2.— С. 427—454 (РЖМат, 1980, 8A369)
114. *Kielpiński R.* On homological dimensions of cocommutative Hopf algebras // Colloq. math.— 1978.— *39*, № 2.— С. 229—231 (РЖМат, 1979, 9A369)
115. — Polynomial type Hopf algebras // Tsukuba J. Math.— 1983.— *7*, № 1. — С. 191—202 (РЖМат, 1984, 5A360)
116. *Koppinen M.* Decomposing and lifting hyperalgebras // Turun yliopiston julk.— 1983.— Ser. *A1*, № 184.— 97 pp. (РЖМат, 1984, 6A354)
117. —, *Neuvonen T.* An imprimitivity theorem for Hopf algebras // Math. Scand.— 1977.— *41*, № 2.— С. 193—198 (РЖМат, 1979, 4A451)
118. *Kreimer H. F.* Quadratic Hopf algebras and Galois extensions // Contemp. Math.— 1982.— *13*.— С. 353—361 (РЖМат, 1983, 7A378)
119. —, *Cook P. M. II.* Galois theories and normal bases // J. Algebra.— 1976.— *43*, № 1.— С. 115—121 (РЖМат, 1977, 7A354)
120. —, *Takeuchi M.* Hopf algebras and Galois extensions of an algebra // Indiana Univ. Math. J.— 1981.— *30*, № 5.— С. 675—692 (РЖМат, 1982, 5A348)
121. *Kulish P., Reshetikhin N. Yu.* Universal *R*-matrix of the quantum superalgebras osp(2/1) // Lett. Math. Phys.— 1989.— *18*, № 2.— С. 143—149 (РЖМат, 1990, 4A629)
122. *Larson R. G.* Cocommutative Hopf algebras // Canad. J. Math.— 1967.— *19*, № 2.— С. 350—360 (РЖМат, 1968, 9A271)
123. — Characters of Hopf algebras // J. Algebra.— 1971.— *17*, № 3.— С. 352—368 (РЖМат, 1972, 5A380)
124. — Orders in Hopf algebras // J. Algebra.— 1972.— *22*, № 2.— С. 201—210 (РЖМат, 1973, 1A386)
125. — Coseparabel Hopf algebras // J. Pure and Appl. Algebra.— 1973.— *3*, № 3.— С. 261—267 (РЖМат, 1974, 3A312)
126. — Hopf algebra orders determined by group valuations // J. Algebra.— 1976.— *38*, № 2.— С. 414—452 (РЖМат, 1976, 12A479)
127. — Cosemisimple Hopf algebras with small simple subcoalgebras are involutary // Coomun. Algebra.— 1983.— *11*, № 11.— С. 1175—1186 (РЖМат, 1984, 1A370)
128. —, *Radford D. E.* Semisimple cosemisimple Hopf algebras // Amer. J. Math.— 1988.— 110, № 1.— С. 187—195 (РЖМат, 1988, 11A444)
129. —, — Finite dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple // J. Albebra.— 1988.— *117*, № 2.— С. 267—289 (РЖМат, 1989, 2A334)
130. —, *Sweedler M. E.* An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras // Amer. J. Math.— 1969.— *91*, № 1.— С. 75—94 (РЖМат, 1970, 1A354)
131. *Lin Bertrand I-peng.* Crossed coproducts of Hopf algebras // Commun. Algebra.— 1982.— *10*, № 1.— С. 1—17. (РЖМат, 1982, 8A416)
132. *Liulevicius A.* Representation rings of the symmetric groups — a Hopf algebra approach // Prepr. Ser. Mat. inst. Aarchus univ.— 1975—1976, № 29, 27 pp. (РЖМат, 1977, 5A283)
133. — Arrows, symmetries and representation rings // J. Pure and Appl. Algebra.— 1980.— *19*.— С. 259—273 (РЖМат, 1981, 3A392)

134. *Loday J.-L., Quillen D.* Cyclic homology and the Lie homology of matrices // Comment. Math. Helv.— 1984.— *59*, № 4.— С. 565—591 (РЖМат, 1985, 4A424)
135. *Long F. W.* The Brauer group of dimodule algebras // J. Algebra.— 1974.— *30*, № 1—3.— С. 599—601 (РЖМат, 1975, 3A448)
136. *Lyubashenko V. V.* Vectorsymmetries // Repts. Dep. Math. Univ. Stockholm.— 1987.— № 19.— С. 1—77 (РЖМат, 1988, 4A349)
137. *Majid Sh.* Quasitriangular Hopf algebras and Yang—Baxter equations // Int. J. Mod. Phys. A.— 1990.— *5*, № 1.— С. 1—91 (РЖМат, 1990, 7A427)
138. — Representation-theoretic rank and double Hopf algebras // Commun. Algera.— 1990.— *18*, № 11.— С. 3705—3712 (РЖМат, 1991, 4A476)
139. — Physics for algebraists:non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct constructions // J. Algebra.— 1990.— *130*, № 1.— С. 17—64 (РЖМат, 1990, 9A313)
140. *Manin Yu. I.* Some remarks on Koszul algebras and quantum groups // Ann. Inst. Fourier.— 1987.— *37*, № 4.— С. 191—205 (РЖМат, 1988, 9A411)
141. — Quantum groups and non-commutative geometry // Prepr. Univ. de Montreal.— 1988
142. *Marlowe Th.* The diagonal of pointed coalgebra and incidence-like structures // J. Pure and Appl. Algebra.— 1985.— *35*, № 2.— С. 157—169 (РЖМат,1986, 3A522)
143. *Masuoka Akira.* Coalgebra actions on Azumaya algebras // Tsukuba J. Math.— 1990.— *14*, № 1.— С. 107—112 (РЖМат, 1991, 4A478)
144. *May J. P.* Some remarks on the structure of Hopf algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *23*, № 3.— С. 708—713 (РЖМат, 1970, 7A376)
145. *McConnell J. C., Sweedler M. E.* Simplicity of smash products // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *23*, № 2.— С. 251—266 (РЖМат, 1972, 3A365)
146. *Michaelis W.* Lie coalgebras // Adv. Math.— 1980.— 38, № 1.— С. 1—54 (РЖМат, 1981, 6A256)
147. — The dual Poincaré-Birkhoff-Witt theorem // Adv. Math.— 1985.— *57*, № 2.— С. 93—162 (РЖМат, 1986, 4A493)
148. — An example of a non-zero Lie coalgebra *M* for which Loc $M=0$ // J. Pure and Appl. Algebra.j 1990.— *68*.— С. 341—348 (РЖМат, 1991, 6A383)
149. *Milnor J. W., Moore J. C.* On the structure of Hopf algebras // Ann. Math.— 1965.— *81*, № 2.— С. 211—264 (РЖМат, 1965, 11A257)
150. *Molnar R. K.* A commutative Noetherian Hopf algebra over a field is finitely generated // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *51*, № 2.— С. 501—502 (РЖМат, 1977, 1A376)
151. — A semidirect product decomposition for certain Hopf algebras over an algebraically closed field // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *59*, № 1.— С. 29—32 (РЖМат, 1977, 8A427)
152. — Semi-direct products of Hopf algebras // J. Algebra.— 1977.— *47*, № 1.— С. 29—51 (РЖМат, 1978, 3A284)
153. — Coradical splittings and a generalization of Kostant's theorem // J. Pure and Appl. Algebra.j 1990.— *68*.— С. 349—357 (РЖМат, 1991, 6A384)
154. *Montgomery S.* Duality for actions and coactions of groups // Contemp. Math.— 1985.— *43*.— С. 191—207 (РЖМат, 1986, 3A525)
155. — Crossed products of Hopf algebras and enveloping algebras // Perspect. Ring theory: Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Antwerp., July 19—29, 1987.— Dordrecht etc.— 1988.— С. 253—268 (РЖМат, 1990, 5A335)
156. —, *Passman D. S.* *X*-inner automorphisms of crossed products and semi-invariants of Hopf algebras // Isr. J. Math.— 1986.— *55*, № 1.— С. 33—57 (РЖМат, 1987, 4A260)
157. *Morris R. A.* Representing co-semisimple Hopf algebras // Houston J.

Math.— 1977.— *3,* № 1.— С. 83—87 (РЖМат, 1977, 8А428)
158. *Nakajima Atsushi.* Galois objects as modules over a Hopf algebra // Math. J. Okayama Univ.— 1976.— *18,* № 2.— С. 159—169 (РЖМат, 1977, 7А390)
159. — The monoid structure of Galois *H*-dimodule algebras induced by the smash product // Math. J. Okayama Univ.— 1978.— *20,* № 2.— С. 165—177 (РЖМат, 1979, 8А411)
160. — Cosemisimple coalgebras and coseparable coalgebras over coalgebras // Math. J. Okayama Univ.— 1979.— *21,* № 2.— С. 125—140 (РЖМат, 1980, 7А377)
161. — Coseparable coalgebras and coextenions of coderivaions // Math. J. Okayama Univ.— 1980.— *22,* № 2.— С. 145—149 (РЖМат, 1981, 5А343)
162. — Free algebras and Galois objects of rank 2 // Math. J. Okayama Univ.— 1981.— *23,* № 2.— С. 181—187 (РЖМат, 1982, 6А369)
163. — A certain type of commutative Hopf Galois extensions and their groups // Math. J. Okayama Univ.— 1982.— *24,* № 2.— С. 137—152 (РЖМат, 1983, 7А379)
164. — *P*-polynomials and *H*-Galois extensions // J. Albebra.— 1987.— *110,* № 1.— С. 124—133 (РЖМат, 1988, 4А348)
165. —, *Yokogawa Kenji.* Hopf Galois extensions with Hopf algebras of derivation type // Math. J. Okayama Univ.— 1983.— *25,* № 1.— С. 49—55 (РЖМат, 1984, 1А371)
166. *Newman K.* Sequences of divided powers in irreducible, cocommutative Hopf algebra // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— *163,* Jan.— С. 25—34 (РЖМат, 1972, 8А468)
167. — Constructing sequences of divided powers // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *31,* № 1.— С. 32—38 (РЖМат, 1972, 9А315)
168. — The structure of a free irreducible cocommutative Hopf algebras // J. Algebra.— 1974.— *29,* № 1.— С. 1—26 (РЖМат, 1974, 11А464)
169. — A correspondence between bi-ideals and sub-Hopf algebras in cocommutative Hopf algebras // J. Algebra.— 1975.— *36,* № 1.— С. 1—15 (РЖМат, 1976, 2А498)
170. — Tensor products of Witt Hopf algebras // Commun. Algebra.— 1976.— *4,* № 8.— С. 761—773 (РЖМат,, 1977, 5А293)
171. — The coalgebra structure of Hopf algebras // J. Algebra.— 1978.— *50,* № 2.— С. 245—264 (РЖМат, 1978, 8А423)
172. — Sequences of divided powers in characteristic *p* // J. Algebra.— 1982. *78,* № .— С. 25—35 (РЖМат, 1983, 4А442)
173. —, *Radford D. E.* The cofree irreducible Hopf algebra on an algebra // Amer. J. Math.— 1978.— *101,* № 5.— С. 1025—1045 (РЖМат, 1980, 6А437)
174. —, *Sweedler M. E.* A realization of the additive With group // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *76,* № 1.— С. 39—42 (РЖМат, 1980, 4А408)
175. *Nichols W. D.* Quotients of hopf algebras // Commun. Algebra.— 1978.— *6,* № 17.— С. 1978—1800 (РЖМат, 1979, 5А317)
176. — Pointed irreducible bialgebras // J. Albebra.— 1979.— *57,* № 1.— С. 64—76 (РЖМат, 1979, 12А449)
177. — The Kostant structure theorems for *K/k*-Hopf algebras // J. Algebra.— 1985.— *97,* № 2.— С. 313—328 (РЖМат 1986, 7А417)
178. — The structure of the dual Lie coalgebra of the Witt algebra // J. Pure and Appl. Algera.— 1990.— *68.*— С. 359—364 (РЖМат 1991, 6А385)
179. —, *Taft E. J.* The left antipodes of a left Hopf algebras // Contemp. Math.— 1982.— *13.*— С. 363—368 (РЖМат, 1983, 6А398)
180. —, *Weisfeiler B.* Differential formal groups of J. F. Ritt // Amer. J. Math.— 1982.— *104,* № 5.— С. 943—1003 (РЖМат, 1983, 7А397)
181. —, *Zoeller M. B.* Finite-dimensional Hopf algebras are free over grouplike subalgebras // J. Pure and Appl. Algebra.— 1989.— *56,* № 1.— С. 51—57 (РЖМат, 1989, 7А320)
182. —, — Freeness of infinite dimensional Hopf algebras over grouplike subalgebras // Commun. Algebra.— 1989.— *17,* № 2.— С. 413—424 (РЖМат, 1989, 8А414)

183. —, — A Hopf algebra freness theorem // Amer. J. Math.— 1989.— *111,* № 2.— С. 381—385 (РЖМат, 1989, 10А408)
184. *Oberst U., Schneider H.-J.* Untergruppen formeller Gruppen von endlichem Index // J. Algera.— 1974.— *31,* № 1.— С. 10—44 (РЖМат, 1975, 5А439)
185. *Papastavridis St.* An identity on algebras over a Hopf algebra // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978.— *70,* № 1.— С. 87—88 (РЖМат, 1979, 3А368)
186. *Pareigis B.* When Hopf algebras are Frobenius algebras // J. Algebra.— 1971.— *18,* № 4.— С. 588—596 (РЖМат, 1972, 5А382)
187. — On the cohomology of modules over Hopf algebras // J. Algebra.— 1972.— *22,* № 1.— С. 161—182 (РЖМат, 1972, 12А328)
188. — A non-commutative non-cocommutative Hopf algebra in «nature» // J. Algebra.— 1981.— *70,* № 2.— S. 356—327 (РЖМат, 1982, 1А499)
189. *Radford D. E.* A free rank 4 Hopf algebra with antipode of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *30,* № 1.— С. 55—58 (РЖМат, 1973, 10А329)
190. — Coreflexive coalgebras // J. Algebra.— 1973.— *26,* № 3.— С. 512—535 (РЖМат, 1974, 3А311)
191. — The antipode of a finite-dimensional Hopf algebra over a field has finite order // Bull. Amer. Math. Soc.— 1975.— *81,* № 6.— С. 1103—1105 (РЖМат, 1976, 8А529)
192. — On the coradical of a finite-dimensional Hopf algebra // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *53,* № 1.— С. 9—15 (РЖМат, 1976, 10А234)
193. — The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra is finite // Amer. J. Math.— 1976.— *98,* № 2.— С. 333—335 (РЖМат, 1977, 2А448)
194. — Commutative nearly primitively generated Hopf algebras // Commun. Algebra.— 1976.— *4,* № 9.— С. 823—872 (РЖМат, 1977, 7А391)
195. — Pointed Hopf algebras are free over Hopf subalgebras // J. Algebra— 1977.— *45,* № 2.— С. 266—273 (РЖМат, 1977, 12А427)
196. — Operators on Hopf algebras // Amer. J. Math.— 1977.— *99,* № 1.— С. 139—158 (РЖМат, 1978, 1А378)
197. — Finiteness conditions for a Hopf algebra with a nonzero integral // J. Algebra.— 1977.— *46,* № 1.— С. 189—195 (РЖМат, 1978, 2А380)
198. — On the structure of commutative pointed Hopf algebras // J. Algebra. — 1978.— *50,* № 2.— С. 284—296 (РЖМат, 1978, 8А424)
199. — Freeness (projectivity) criteria for Hopf algebras over Hopf subalgebras // J. Pure and Appl. Algebra.— 1977.— *11,* № 1—3.— С.15—28 (РЖМат, 1978, 9А394)
200. — When proaffine monoid schemes are group schemes // J. Algebra.— 1979.— *57,* № 2.— С. 497—501 (РЖМат, 1979, 10А487)
201. — A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes // J. Algebra.— 1979.— *58,* № 2.— С. 432—454 (РЖМат, 1980, 1А491)
202. — Embedding commutative irreducible Hopf algebras into cofree irreducible Hopf algebras // Commun. Algebra.— 1979.— *7,* № 12.— С. 1211—1243 (РЖМат, 1980, 3А326)
203. — On an analog of Lagrange's theorem for commutative Hopf algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1980.— *79,* № 2.— С. 164—166 (РЖМат, 1981, 2А394)
204. — On bialgebras which are simple Hopf modules // Proc. Amer. Math. Soc.— 1980.— *80,* № 4.— С. 563—568 (РЖМат, 1981, 7А388)
205. — The cofree irreducible Hopf algebras on a separable field extension // J. Algebra.— 1981.— 70, № 2.— С. 527—547 (РЖМат, 1982, 1А501)
206. — On the structure of pointed coalgebras // J. Algebra.— 1982.— *77,* № 1.— С. 1—14 (РЖМат, 1983, 3А386)
207. — On when a separable field extension in characteristic $p>0$ is determined by its Frobenius structure // J. Algebra.— 1982.— *79,* № 1.— С. 127—150 (РЖМат, 1983, 4А356)

208. — A Hopf module characterization of Hopf algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *88*, № 1.— С. 8—10 (РЖМат, 1983, 11A483)
209. — On the antipode of a cosemisimple Hopf algebra // J. Algebra.— 1984.— *88*, № 1.— С. 68—88 (РЖМат, 1984, 9A350)
210. — The structure of Hopf algebras with a projection // J. Algebra.— 1985. — *92*, № 2.— С. 322—327 (РЖМат, 1985, 10A379)
211. — Divided power structures on Hopf algebras and embedding Lie algebras into special-derivation algebras // J. Algebra.— 1986.— *98*, № 1.— С. 143—170 (РЖМат, 1986, 9A379)
212. — The group of automorphisms of a semisimple Hopf algebra over a field of characteristic 0 is finite // Amer. J. Math.— 1990.— *112*, № 2.— С. 331—357 (РЖМат, 1990, 12A371)
213. —, *Taft E. J.*, *Wilson R. L.* Forms of certain Hopf algebras // Manuscr. math.— 1975.— 17, № 4.— С. 333—338 (РЖМат, 1976, 7A484)
214. *Ravenel D. C.*, *Wilson W. S.* Bipolynomial Hopf algebra // J. Pure and Appl. Algebra.— 1974.— *4*, № 1.— С. 41—45 (РЖМат, 1975, 1A441)
215. *Ray N.* Extensions of umbral calculs: penumbral coalgebras and generalised Bernoulli numbers // Adv. Math.— 1986.— *61*, № 1.— С. 49—100. (РЖМат, 1987, 3A422)
216. *Reinoehl J. H.* Lie algebras and Hopf algebras // Pacific J. Math.— 1981. —*93*, № 1.— С. 181—192 (РЖМат, 1982, 1A502)
217. *Reshetikhin N.* Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebra // Lett Math. Phys.— 1990.— *20*, № 4.— С. 331—335 (РЖМат, 1991, 4A479)
218. —, *Semenov-Tian-Shansky M. A.* Quantum *R*-matrices and factorization problems // J. Geom. and Phys.— 1988.— *5*, № 4.— С. 533—550 (РЖМат, 1991, 6A386)
219. *Roby N.* Sur un foncteur Lié aux puissance diviseés du degré 3 // Zesz. nauk WSP Bydgoszczy. Probl. mat.— 1986.— № 5-6.— С. 5—14 (РЖМат, 1987, 5A383)
220. — Sur un foncteur lié puissances divisées de degré 4 // Zesz. nauk WSP Bydgoszczy Probl. mat.— 1986.— № 5-6.— С. 15—27 (РЖМат, 1987, 5A384)
221. *Ruchti R.* Twisted Hopf algebras // Comment. Math. Helv.— 1979.— *54*, № 4.— С. 659—682. (РЖМат, 1980, 6A438)
222. *Schmitt W.* Hopf algebras and identities in free partially commutative monoids // Theor. Comput. Sci.— 1990.— *73*.— С. 335—340 (РЖМат, 1990, 12A372)
222. *Schmitt W.* Hopf algebras and identities in free partially commutative connexes sur un corps // Manuscr. math.— 1970.— *3*, № 2.— С. 133—155 (РЖМат, 1971, 3A337)
224. *Shay P. B.* Represetatives for *P*-typical curves // J. Algebra.— 1978.— *51*, № 1.— С. 327—334 (РЖМат, 1978, 10A312)
225. *Shigano Hiroshi.* On observable and stringly observable Hopf ideals // Tsukuba J. Math.— 1982.— *6*, № 1.— С. 127—150 (РЖМат, 1983, 3A388)
226. *Shudo Takefumi.* On relatively smooth subhyperalgebras of hyperalgebras // Hiroshima Math. J.— 1983.— *13*, № 3.— С. 627—646 (РЖМат, 1984, 7A346)
227. *Simson D.*, *Skowronski A.* On the category of commutative connected graded Hopf algebras over a perfect field // Fund. math.— 1978.— *101*, № 2.— С. 137—149 (РЖМат, 1979, 6A373)
228. *Singer W. M.* Extension theory for connected Hopf algebras // Bull. Amer. Math. Soc.— 1970.— *76*, № 5.— С. 1095—1099 (РЖМат, 1971, 5A421)
229. — Extension theory for connected Hopf algebras // J. Algebra.— 1972.— *21*, № 1.— С. 1—16 (РЖМат, 1972, 9A317)
230. *Sjödin G.* A characterization of local complete intersections in terms of the Ext-algebra // J. Algebra.— 1980.— *64*, № 1.— С. 214—217 (РЖМат, 1980, 11A398)

231. — Hopf algebras and derivations // J. Algebra.— 1980.— *64*, № 1.— С. 218—229 (РЖМат, 1980, 11A399)
232. *Skowroński A.* On the category of abelian Hopf algebras over a non-perfect field // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 9.— С. 675—682 (РЖМат, 1977, 7A392)
233. — Abelian Hopf algebras with waists // J. Algebra.— 1978.— *52*, № 2.— С. 315—321 (РЖМат, 1978, 12A680)
234. — On a connection between abelian Hopf algebras and modules over Artinian rings // Bull. Acad. Pol. sci. Sér. sci. math.— 1981.— *29*, № 1—2.— С. 29—37 (РЖМат, 1982, 1A503)
235. — Projective abelian Hopf algebras over a field // Rospr. mat.— 1983.— *205*.— 46 pp. (РЖМат, 1983, 12A460)
236. — An application of Auslander—Reiten sequences to Abelian Hopf algebras // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. sci. Math.— 1983.— *31*, № 5—8.— С. 235—243 (РЖМат, 1984, 11A345)
237. — Indecomposable primitively generated Abelian Hopf algebras over a field // Rocz. PTM.— 1984.— Ser. 1, *24*, № 1.— С. 115—131 (РЖМат, 1985, 2A407)
238. *Smith L.* Split extensions of Hopf algebras and semi-tensor products // Math. scand.— 1970.— *26*, № 1.— С. 17—41 (РЖМат, 1971, 5A420)
239. *Solberg Ø.* Hopf algebra constructions and representation theory. // Commun. Algebra.— 1989.— *17*, № 7.— С. 1775—1786 (РЖМат, 1990, 2A402)
240. *Steiner R.* Decompositions of Hopf algebras // Bull. London Math. Soc.— 1982.— *14*, № 5.— С. 392—396 (РЖМат, 1983, 3A387)
241. *Sugano Kozo.* A characterization of Azumaya coalgebras over a commutative ring // J. Math. Soc. Japan.— 1982.— *34*, № 4.— С. 719—726 (РЖМат, 1983, 6A411)
242. *Sullivan J. B.* the uniqueness of integrals for Hopf algebras and some existence theorems of integrals for commutative Hopf algebras // J. Algebra.— 1971.— *19*, № 3.— С. 426—440 (РЖМат, 1972, 4A456)
243. *Sweedler M. E.* Cohomology of algebras over Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1968.— *133*, № 1.— С. 205—239 (РЖМат, 1971, 7A442)
244. — Hopf algebras.— New York: Benjamin.— 1969
245. — Integrals for Hopf algebras // Ann. Math.— 1970.— *89*, № 2.— С. 323—335 (РЖМат, 1971, 2A335)
246. — Weakening a theorem on divided powers // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— *154*.— С. 427—428 (РЖМат, 1972, 1A666)
247. *Taft E. J.* On the splitting of Hopf algebra modules // J. Algebra— 1971. — *18*, № 3.— С. 461—467 (РЖМат, 1972, 5A262)
248. — The order of the antipode of finite-dimensional Hopf algebra // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1971.— *68*, № 11.— С. 2631—2633 (РЖМат, 1972, 4A457)
249. — Reflexivity of algebras and coalgebras // Amer. J. Math.— 1972.— *94*, № 4.— С. 1111—1130. (РЖМат, 1973, 12A384)
250. —, *Wilson R. L.* On antipodes in pointed Hopf algebras // J. Algebra.— 1974.— *29*, № 1.— С. 27—32
251. —, — Hopf algebras with nonsemisimple antipode // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *49*, № 2.— С. 269—276 (РЖМат, 1976, 2A499)
252. —, — There exist finite-dimensional Hopf algebras with antipodes of arbitrary even order // J. Algebra.— 1980.— *62*, № 2.— С. 283—291 (РЖМат, 1980, 8A368)
253. *Takeuchi Mitsuhiro.* Free Hopf algebras generated by coalgebras // J. Math. Soc. Jap.— 1971.— *23*, № 4.— С. 561—582 (РЖМат, 1972, 6A404)
254. — There exists a Hopf algebra whose antipode is not injective // Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo.— 1971.— *21*, № 2.— С. 127—130 (РЖМат, 1972, 7A331)
255. — On the dimension of the space of integrals of Hopf algebras // J. Algebra.— 1972.— *21*, № 2.— С. 174—177 (РЖМат, 1972, 9A316)

256. — A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras // Manuscr. math.— 1972.— *7*, № 3.— С. 251—270 (РЖМат, 1973, 3А408).
257. — On a semi-direct product decomposition of affine groups over a field of characteristic 0 // Tohoku Math. J.— 1972.— *24*, № 3.— С. 453—456 (РЖМат, 1973, 3А409)
258. — A note on geometrically reductive groups // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1973.— Sec 1A.— *20*, № 3.— С. 387—396 (РЖМат, 1974, 7А600)
259. — A characterization of the Galois subbialgebras $H_k(K/F)$ // J. Algebra.— 1976.— *42*, № 2.— С. 315—362 (РЖМат, 1977, 6А244)
260. — Relatie Hopf modules — equivalence abd freeness criteria // J. Algebra.— 1979.— *60*, № 2.— С. 452—471
261. — $\mathrm{Ext}_{ad}(\mathrm{Sp}\,R,\ \mu^A)\approx \mathrm{Br}(A/k)$ // J. Algebra.— 1980.— *67*, № 2.— С. 436—475 (РЖМат, 1981, 7А387)
262. — Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras // Commun. Algebra.— 1981.— *9*, № 8.— С. 841—842 (РЖМат, 1981, 10А340)
263. — A simple proof of the extension theorem of sequences of divided powers in characteristic *p* // Proc. Amer. Math. Soc.— 1982.— *84*, № 2.— С. 175—178 (РЖМат, 1982, 9А347)
264. — Commutative Hopf algebras and cocommutative Hopf algebras in positive characteristic // J. Algebra.— 1982.— *79*, № 2.— С. 375—392 (РЖМат, 1983, 5А353)
265. — A Hopf algebraic approach to the Piccard-Vessiot theory // J. Algebra.— 1989.— *122*, № 2.— С. 481—509 (РЖМат, 1990, 3А307)
266. *Takeuchi Yasuji.* On Galois objects which are strongly radical over its basic ring // Osaka J. Math.— 1975.— *12*, № 1.— С. 23—31 (РЖМат, 1976, 2А497)
267. *Uehara Hiroshi.* Algebraic Steenrod operations in the spectral sequences associated with a pair of Hopf algebras // Osaka J. Math.— 1972.— *9*, № 1.— С. 131—141 (РЖМат, 1973, 3А388)
268. —, *Abotteen E., Lee M.-W.* Outer plethysms and λ-rings // Arch. Math.— 1986.— *46*, № 3.— С. 216—224 (РЖМат, 1986, 11А495)
269. —, *Al-Hashimi B., Brenneman F. S., Herz G.* Steenrod operations in Cotor // Manuscr. math.— 1974.— *13*, № 3.— С. 275—296 (РЖМат, 1975, 3А443)
270. —, *DiVall R. A.* Hopf algebra of class functions and inner plethysms // Hiroshima Math. J.— 1982.— *12*, № 2.— С. 225—244 (РЖМат, 1983, 2А217)
271. *Ulbrich K.-H.* Über nicht-kommutative abelsche Galoisalgebren // Commun. Algebra.— 1981.— *9*, № 5.— С. 553—559 (РЖМат, 1981, 9А316)
272. — Galois extensions as functors of comodules // Manuscr. math.— 1987.— *59*, № 4.— С. 391—397 (РЖМат, 1988, 4А350)
273. — Fibre functors of finite dimensional comodules // Manuscr. math.— 1989.— *65*, № 1.— С. 39—46 (РЖМат, 1990, 2А403)
274. *Van den Bergh M.* A duality theorem for Hopf algebras // Meth. Ring Theory.— Dordrecht e. a.— 1984.— С. 517—522 (РЖМат, 1985, 6А330)
275. *Waterhouse W. C.* Antipodes and group-likes in finite Hopf algebras // J. Algebra.— 1975.— *37*, № 2.— С. 290—295 (РЖМат, 1976, 5А400)
276. — The module structure of certain algebra extensions // Commun. Algebra.— 1982.— *10*, № 2.— С. 115—120 (РЖМат, 1982, 7А485)
277. — Tame objects for finite commutative Hopf algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *103*, № 2.— С. 354—356 (РЖМат, 1989, 4А318)
278. *Yanagihara Hiroshi.* On isomorphism theorems of formal groups // J. Algebra.— 1978.— *55*, № 2.— С. 341—347 (РЖМат, 1979, 9А419)
279. — On group theoretic properties of cocommutative Hopf algebras // Hiroshima Math. J.— 1979.— *9*, № 1.— С. 179—200 (РЖМат, 1979, 9А420)
280. — On homomorphisms of cocommutative coalgebras and Hopf algebras // Hiroshima Math. J.— 1987.— *17*, № 2.— С. 433—446 (РЖМат, 1988, 5А510)
281. *Yetter D. N.* Quantum groups and representations of monoidal categories // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.— 1990.— 108.— С. 261—290 (РЖМат, 1990, 11А335)

282. *Yokogawa Kenji.* Noncommutative Hopf Galois extensions // Osaka J. Math.— 1981.— *18*, № 1.— С. 63—73
283. — The cohomological aspects of Hopf Galois extensions over a commutative ring // Osaka J. Math.— 1981.— *18*, № 1.— С. 75—93
284. — Hopf-Galois extensions and smash products // J. Algebra.— 1987.— 107, № 1.— С. 138—152 (РЖМат, 1987, 11А427)
285. *Zelevinsky A. V.* Representations of finite classical groups // Lect. Notes Math.— 1981.— *869*, IV, 184 p. (РЖМат, 1982, 3А239)
286. *Ziplies D.* Divided powers and multiplicative polynomial laws // Commun. Algebra.— 1986.— *14*, № 1.— С. 49—108 (РЖМат, 1986, 9А380)
287. — A characterization of the norm of an Azumaya algebra of constant rank through the divided powers algebra of an algebra // Wiss. Beitr. M-Luther-Univ. Halle—Wittenberg.— 1986.— *M*, № 42.— С. 53—70 (РЖМат, 1987, 5А388)
288. — Generators for the divided power algebra of an algebra and trace identities // Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle—Wittenberg.— 1987.— *M*, № 46.— С. 9—27 (РЖМат, 1987, 11А428)
289. — Abelianizing the divided powers algebra of an algebra // J. Algebra.— 1989.— *122*, № 2.— С. 261—274 (РЖМат, 1990, 3А342)
290. *Zoeller M. B.* Freeness of Hopf algebras over semisimple grouplike subalgebras // J. Algebra.— 1988.— *118*, № 1.— С. 102—108 (РЖМат, 1989, 4А317)

УДК 515.12

ТЕОРИЯ КОНТИНУУМОВ. I.

А. А. Одинцов, В. В. Федорчук

ВВЕДЕНИЕ

Понятие связности является одним из основных понятий топологии, а теория континуумов — старейшим ее разделом. Многочисленные попытки дать топологическое определение линии, с одной стороны, поставили вопросы о топологической инвариантности внутренних точек подмножеств евклидовых пространств, о топологической инвариантности числа измерений евклидовых пространств, решение которых послужило началом построения теории размерности, а с другой стороны, привлекло пристальное внимание к свойствам связных множеств. С том, что понятие континуума играло важную роль уже в начале XX века говорит следующий факт. Именно на понятии континуума было основано данное в 1913 г. Брауэром определение индуктивного размерностного инварианта Dg (Dimensiongrad). Для непустого пространства X по определению $\mathrm{Dg}\,X=0$ тогда и только тогда, когда все его подконтинуумы одноточечны. Далее $\mathrm{Dg}\,X\leqslant n$, если для двух замкнутых непересекающихся подмножеств A_1, A_2 существует замкнутое множество $C\subset X-(A_1\cup A_2)$ размерности $\mathrm{Dg}\,C\leqslant n-1$, которое р а з р е з а е т пространство X между A_1 и A_2, т. е. всякий континуум K, соединяющий множества A_1 и A_2, обязательно пересекается с C. Доказав равенство $\mathrm{Dg}\,\mathbf{R}^n=n$,

256. — A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras // Manuscr. math.— 1972.— 7, № 3.— С. 251—270 (РЖМат, 1973, 3А408)
257. — On a semi-direct product decomposition of affine groups over a field of characteristic 0 // Tohoku Math. J.— 1972.— *24,* № 3.— С. 453—456 (РЖМат, 1973, 3А409)
258. — A note on geometrically reductive groups // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1973.— Sec 1A.— *20,* № 3.— С. 387—396 (РЖМат, 1974, 7А600)
259. — A characterization of the Galois subbialgebras $H_k(K/F)$ // J. Algebra. — 1976.— *42,* № 2.— С. 315—362 (РЖМат, 1977, 6А244)
260. — Relatie Hopf modules — equivalence abd freeness criteria // J. Algebra.— 1979.— *60,* № 2.— С. 452—471
261. — $\mathrm{Ext}_{ad}(\mathrm{Sp}\,R,\ \mu^A)\approx\mathrm{Br}(A/k)$ // J. Algebra.— 1980.— *67,* № 2.— С. 436—475 (РЖМат, 1981, 7А387)
262. — Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras // Commun. Algebra.— 1981.— *9,* № 8.— С. 841—842 (РЖМат, 1981, 10А340)
263. — A simple proof of the extension theorem of sequences of divided powers in characteristic *p* // Proc. Amer. Math. Soc.— 1982.— *84,* № 2.— С. 175—178 (РЖМат, 1982, 9А347)
264. — Commutative Hopf algebras and cocommutative Hopf algebras in positive characteristic // J. Algebra.— 1982.— *79,* № 2.— С. 375—392 (РЖМат, 1983, 5А353)
265. — A Hopf algebraic approach to the Piccard-Vessiot theory // J. Algebra. — 1989.— *122,* № 2.— С. 481—509 (РЖМат, 1990, 3А307)
266. *Takeuchi Yasuji.* On Galois objects which are strongly radical over its basic ring // Osaka J. Math.— 1975.— *12,* № 1.— С. 23—31 (РЖМат, 1976, 2А497)
267. *Uehara Hiroshi.* Algebraic Steenrod operations in the spectral sequences associated with a pair of Hopf algebras // Osaka J. Math.— 1972.— *9,* № 1.— С. 131—141 (РЖМат, 1973, 3А388)
268. —, *Abotteen E., Lee M.-W.* Outer plethysms and λ-rings // Arch. Math.— 1986.— *46,* № 3.— С. 216—224 (РЖМат, 1986, 11А495)
269. —, *Al-Hashimi B., Brenneman F. S., Herz G.* Steenrod operations in Cotor // Manuscr. math.— 1974.— *13,* № 3.— С. 275—296 (РЖМат, 1975, 3А443)
270. —, *DiVall R. A.* Hopf algebra of class functions and inner plethysms // Hiroshima Math. J.— 1982.— *12,* № 2.— С. 225—244 (РЖМат, 1983, 2А217)
271. *Ulbrich K.-H.* Über nicht-kommutative abelsche Galoisalgebren // Commun. Algebra.— 1981.— *9,* № 5.— С. 553—559 (РЖМат, 1981, 9А316)
272. — Galois extensions as functors of comodules // Manuscr. math.— 1987. — *59,* № 4.— С. 391—397 (РЖМат, 1988, 4А350)
273. — Fibre functors of finite dimensional comodules // Manuscr. math.— 1989.— *65,* № 1.— С. 39—46 (РЖМат, 1990, 2А403)
274. *Van den Bergh M.* A duality theorem for Hopf algebras // Meth. Ring Theory.— Dordrecht e. a.— 1984.— С. 517—522 (РЖМат, 1985, 6А330)
275. *Waterhouse W. C.* Antipodes and group-likes in finite Hopf algebras // J. Algebra.— 1975.— *37,* № 2.— С. 290—295 (РЖМат, 1976, 5А400)
276. — The module structure of certain algebra extensions // Commun. Algebra.— 1982.— *10,* № 2.— С. 115—120 (РЖМат, 1982, 7А485)
277. — Tame objects for finite commutative Hopf algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *103,* № 2.— С. 354—356 (РЖМат, 1989, 4А318)
278. *Yanagihara Hiroshi.* On isomorphism theorems of formal groups // J. Algebra.— 1978.— *55,* № 2.— С. 341—347 (РЖМат, 1979, 9А419)
279. — On group theoretic properties of cocommutative Hopf algebras // Hiroshima Math. J.— 1979.— *9,* № 1.— С. 179—200 (РЖМат, 1979, 9А420)
280. — On homomorphisms of cocommutative coalgebras and Hopf algebras // Hiroshima Math. J.— 1987.— *17,* № 2.— С. 433—446 (РЖМат, 1988, 5А510)
281. *Yetter D. N.* Quantum groups and representations of monoidal categories

// Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.— 1990.— 108.— С. 261—290 (РЖМат, 1990, 11А335)
282. *Yokogawa Kenji.* Noncommutative Hopf Galois extensions // Osaka J. Math.— 1981.— *18,* № 1.— С. 63—73
283. — The cohomological aspects of Hopf Galois extensions over a commutative ring // Osaka J. Math.— 1981.— *18,* № 1.— С. 75—93
284. — Hopf-Galois extensions and smash products // J. Algebra.— 1987.— 107, № 1.— С. 138—152 (РЖМат, 1987, 11А427)
285. *Zelevinsky A. V.* Representations of finite classical groups // Lect. Notes Math.— 1981.— *869,* IV, 184 p. (РЖМат, 1982, 3А239)
286. *Ziplies D.* Divided powers and multiplicative polynomial laws // Commun. Algebra.— 1986.— *14,* № 1.— С. 49—108 (РЖМат, 1986, 9А380)
287. — A characterization of the norm of an Azumaya algebra of constant rank through the divided powers algebra of an algebra // Wiss. Beitr. M-Luther-Univ. Halle—Wittenberg.— 1986.— *M,* № 42.— С. 53—70 (РЖМат, 1987, 5А388)
288. — Generators for the divided power algebra of an algebra and trace identities // Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle—Wittenberg.— 1987.— *M,* № 46.— С. 9—27 (РЖМат, 1987, 11А428)
289. — Abelianizing the divided powers algebra of an algebra // J. Algebra.— 1989.— *122,* № 2.— С. 261—274 (РЖМат, 1990, 3А342)
290. *Zoeller M. B.* Freeness of Hopf algebras over semisimple grouplike subalgebras // J. Algebra.— 1988.— *118,* № 1.— С. 102—108 (РЖМат, 1989, 4А317)

УДК 515.12

ТЕОРИЯ КОНТИНУУМОВ. I.

А. А. Одинцов, В. В. Федорчук

ВВЕДЕНИЕ

Понятие связности является одним из основных понятий топологии, а теория континуумов — старейшим ее разделом. Многочисленные попытки дать топологическое определение линии, с одной стороны, поставили вопросы о топологической инвариантности внутренних точек подмножеств евклидовых пространств, о топологической инвариантности числа измерений евклидовых пространств, решение которых послужило началом построения теории размерности, а с другой стороны, привлекло пристальное внимание к свойствам связных множеств. С том, что понятие континуума играло важную роль уже в начале XX века говорит следующий факт. Именно на понятии континуума было основано данное в 1913 г. Брауэром определение индуктивного размерностного инварианта Dg (Dimensiongrad). Для непустого пространства X по определению $\mathrm{Dg}\,X=0$ тогда и только тогда, когда все его подконтинуумы одноточечны. Далее $\mathrm{Dg}\,X\leqslant n$, если для двух замкнутых непересекающихся подмножеств A_1, A_2 существует замкнутое множество $C\subset X-(A_1\cup A_2)$ размерности $\mathrm{Dg}\,C\leqslant n-1$, которое р а з р е з а е т пространство X между A_1 и A_2, т. е. всякий континуум K, соединяющий множества A_1 и A_2, обязательно пересекается с C. Доказав равенство $\mathrm{Dg}\,\mathbf{R}^n=n$, Брауэр тем самым получил топологическую инвариантность числа измерений евклидовых пространств.

В рамках теории континуумов получен целый ряд блестящих результатов. Упомянем лишь некоторые из них: 1) теорему Хана—Мазуркевича (1914) о том, что локально связные метрические континуумы являются пеановскими континуумами, т. е. непрерывными образами отрезка; 2) теоремы Бинга о выпуклых метриках на пеановских континуумах и о псевдодуге (1949—1951); 3) результаты Андерсона о менгеровской кривой (1958). В процессе решения знаменитой проблемы гиперпространства пеановского континуума (см. § 5) возникли методы, позволившие заложить основы теории бесконечномерных локально компактных многообразий.

В данный обзор вошли результаты по теории континуумов, прореферированные в РЖ «Математика», начиная с 1953 г. и касающиеся змеевидных бикомпактов, древовидных и окружностноподобных континуумов, однородных пространств, гиперпространств континуумов, абсолютных ретрактов и бесконечномерных многообразий, отображений Уитни. Другие вопросы, относящиеся к теории континуумов, авторы намереваются осветить во второй части обзора, который вскоре появится в этой же серии «Итоги науки и техники».

Для удобства читателей авторы стремились приводить определения встречающихся в обзоре понятий. Но ограниченные размерами мы не расшифровывали общеизвестные понятия (такие, как гиперпространство) или, наоборот, слишком специальные и редко употребимые, а также не удалось достаточно подробно осветить все работы, относящиеся к данной тематике, хотя упомянуть мы старались все. Поэтому данную работу можно рассматривать скорее не как полный обзор, а как путеводитель в большом лабиринте литературы, посвященной теории континуумов.

§ 1. Змеевидные бикомпакты

Змеевидным называется всякий бикомпакт, для каждого открытого конечного покрытия ω которого имеется ω-отображение на отрезок. Другое, и как легко видеть, эквивалентное определение таково: если для всякого открытого покрытия ω бикомпакта X существует вписанное в него конечное покрытие $\omega'=\{U_1, \ldots, U_n\}$, называемое цепью, такое, что $U_i \cap U_j \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |i-j| \leqslant 1$, $i=1, \ldots, n$.

Уже из этих определений видно, что простейшим змеевидным бикомпактом является отрезок. Менее тривиальным примером змеевидного бикомпакта является континуум, называемый «$\sin 1/x$». Непосредственно из определения змеевидных бикомпактов можно легко вывести следующие свойства:

(1) все змеевидные бикомпакты связны и, значит, являются континуумами;

(2) всякий подконтинуум змеевидного бикомпакта является снова змеевидным;

(3) всякий змеевидный континуум уникогерентен, т. е. если континуум представим в виде объединения двух подконтинуумов, то их пересечение связно, а значит, ввиду (2) является наследственно уникогерентным;

(4) змеевидные континуумы атриодичны, т. е. не содержат триодов, где под триодом понимается такой континуум T, для которого существует подконтинуум $T_0 \subset T$ такой, что $T-T_0$ состоит не менее чем из трех компонент;

(5) всякий змеевидный бикомпакт неприводим, т. е. существует в нем пара таких точек, что единственным континуумом, содержащим эти точки, является сам бикомпакт;

(6) всякий метрический змеевидный бикомпакт может быть вложен в плоскость;

(7) змеевидные бикомпакты обладают свойством неподвижной точки [287]. Имеется даже более сильное свойство, а именно: пусть X — змеевидный континуум и $f, g: X \to X$ — два непрерывных отображения «на», тогда существует точка $x \in X$ такая, что $f(x)=g(x)$.

Змеевидные континуумы в основном не локально связны. Более того, всякий локально связный змеевидный континуум является упорядоченным (в случае наличия счетной базы — это отрезок). Аккуратное применение известной теоремы Фрейденталя позволяет доказать, что всякий метрический змеевидный континуум представим в виде предела счетного обратного спектра из отрезков [313] (см. также [23]). На неметризуемые змеевидные континуумы этот результат не распространяется: имеется теорема Пасынкова о том, что предел обратного спектра из полиэдров — это бикомпакт с совпадающими размерностями dim и ind, с другой стороны, существуют многочисленные примеры змеевидных континуумов с несовпадающими размерностями [2], [21], [23], [34], [465]. Тем не менее, всякий змеевидный бикомпакт можно представить в виде предела обратного спектра из метрических змеевидных бикомпактов [23], [465].

Континуум называется разложимым, если его можно представить в виде объединения двух собственных подконтинуумов. Если этого сделать нельзя, то континуум — неразложим. Континуум наследственно (не) разложим, если всякий его подконтинуум (не) разложим. Разложимые, а точнее наследственно разложимые змеевидные континуумы по своим свойствам наиболее близки к отрезку.

Бинг [71] доказал, что всякий наследственно разложимый змеевидный континуум допускает монотонное отображение на отрезок. Мы видели, что из змеевидности следуют атриодичность и наследственная уникогерентность. В обратную сторону это включение неверно. Однако если континуум наследственно разложим, то в сочетании с наследственной уникогерентностью и атриодичностью он является змеевидным. Этот результат Бинга обобщается следующей теоремой Фугейта [207]: континуум X — змеевидный тогда и только тогда, когда X — атриодичный, наследственно уникогерентный континуум, всякий наследственно неразложимый подконтинуум которого змеевиден. Вышеуказанную теорему Бинга на неметризуемый случай распространил Мохлер [496].

Для разложимых змеевидных континуумов имеет место теорема Шарковского о периодических точках [482]. Исследование точек периодичности змеевидных континуумов, получаемых в виде предела обратного спектра с только одной проекцией, было проведено в [44].

Тем не менее, наследственно разложимые змеевидные континуумы могут иметь довольно экзотические свойства:

(1) Барретт [45] построил примеры наследственно разложимых змеевидных континуумов, которые не содержат дуг и не содержат разрезающих точек;

(2) Мачковяк построил *жесткий* (без нетривиальных гомеоморфизмов) наследственно разложимый змеевидный континуум и даже наследственно разложимый змеевидный континуум, два различных подконтинуума которого несравнимы относительно непрерывных отображений [453], [454].

Разложимые змеевидные континуумы рассматривались также в работах [204], [206].

Первый неразложимый континуум был построен Брауэром в 1910 г. [82]. Среди неразложимых континуумов змеевидные имеют самую простую структуру. Важность исследования неразложимых континуумов подкрепляется еще и тем, что по теореме Мазуркевича [472] всякий неодномерный континуум содержит неразложимый континуум. Среди неразложимых змеевидных континуумов наиболее простым и исторически первым является так называемый континуум Кнастера [345]. Его можно определить в виде предела счетного обратного спектра из отрезков, все соседние проекции которого одинаковы и представляют собой открытое отображение с ровно одним максимумом. Вообще, нетрудно установить, что всякий предел счетного обратного спектра из отрезков с открытыми соседними проекциями либо отрезок, либо неразложимый континуум. Такие континуумы называются *континуумами Кнастера*. Уоткинсу удалось классифицировать некоторые из континуумов Кнастера. А именно, обозначим континуум через D_n, если он представим в виде предела счетного обратного спектра из отрезков, все соседние проекции которого одинаковы и представляют собой открытое отображение с $n-1$ экстремумом (иначе это n-ая степень простейшего открытого негомеоморфного отображения отрезка на отрезок). Оказывается, элегантная теорема Уоткинса утверждает [625], что D_n гомеоморфно D_m тогда и только тогда, когда числа n и m имеют одинаковые простые делители.

Среди неразложимых змеевидных континуумов имеется в некотором смысле эталонный континуум — это континуум, на который можно непрерывно отобразить всякий неразложимый континуум [551]. Аналогичный результат доказан Беллами и для наследственно неразложимых змеевидных континуумов [53]. Неразложимость змеевидных континуумов рассматривалась еще в [87].

Однако наиболее экстравагантными змеевидными континуумами являются наследственно неразложимые континуумы, которые называют *псевдодугами*. Дадим определение метризуемой псевдодуги в терминах цепных покрытий.

Пусть $D=[d_1, \ldots, d_n]$ — цепь, тогда через $D(i,j)$ будем обозначать подцепь $[d_i, \ldots, d_j]$. Цепь $E=[e_1, \ldots, e_n]$ *изгибается* в цепи $D=[d_1, \ldots, d_m]$, если цепь D содержит цепь E и E имеет такое свойство: если $E(i,j)$ — такая подцепь, что e_i и e_j пересекают соответственно элементы d_h и d_k, и $|h-k|>2$, тогда $E(i,j)$ может быть представлена в виде суммы трех цепей $E(i,r)$, $E(r,s)$, $E(s,j)$ таких, что $(s-r)(j-i)>0$, а e_r и e_s — подмножества звеньев подцепи $D(h,k)$, которые являются соседними с d_h и d_k, соответственно.

Пусть P и Q — две различные точки компактного метрического пространства. Пусть $D_1, D_2, \ldots$ — последовательность цепей от P до Q такая, что для каждого положительного i цепь D_{i+1} изгибается в D_i, диаметр каждого звена в цепи D_i не превосходит $1/i$, цепь D_{i+1} вписана с замыканием в цепь D_i. Тогда псевдодуга P определяется как $P=\bigcap\bigcup D_i$.

Основные свойства псевдодуг таковы:

(1) метризуемая псевдодуга единственна [74];

(2) псевдодуга однородна [74];

(3) всякий подконтинуум псевдодуги является ее ретрактом [159];

(4) змеевидный континуум X — псевдодуга $\Leftrightarrow$ X однороден относительно открытых отображений [115];

(5) змеевидный континуум X — псевдодуга $\Leftrightarrow$ X однороден относительно конфлюэнтных отображений [117];

(6) змеевидный континуум X — псевдодуга $\Leftrightarrow$ X однороден относительно непрерывных отображений [117];

(7) всякое непрерывное отображение на псевдодугу, определенное на подконтинууме наследственно неразложимого континуума, может быть продолжено на весь континуум [449];

(8) псевдодуга непрерывно n-однородна [450];

(9) большинство отображений псевдодуги гомеоморфизмы [412];

(10) каждое отображение псевдодуги на себя является почти гомеоморфизмом [589].

Любопытное отображение с использованием псевдодуги построил Андерсон [38] — открытое отображение плоскости на себя такое, что прообраз каждой точки является псевдодугой. Описание построения этого замечательного отображения можно найти в [415]. В связи с этим отображением, следует упомянуть следующий результат Льюиса: для всякого одномерного континуума M существует одномерный континуум X и открытое отображение $f: X \to M$, все слои которого — псевдодуги [413]. При этом континуум X называется *континуумом M псевдодуг*. Для отображения Андерсона прообраз каждого континуума M из плоскости как раз и является континуумом M псевдодуг. Льюис также показал, что псевдодуга псевдодуг — это псевдодуга [411]. Интересно, что Смит использовал это открытое отображение псевдодуги на себя, все слои которого псевдодуги для построения неметризуемого однородного змеевидного наследственно неразложимого континуума — это предел обратного спектра из псевдодуг с упомянутыми открытыми проекциями длины ω_1.

Интенсивно изучались группы гомеоморфизмов змеевидных бикомпактов и, в частности, псевдодуги. Так, Льюис доказал, что пространство гомеоморфизмов псевдодуги не содержит неодноточечных континуумов [408]. Различные типы гомеоморфизмов (периодические, точечно периодические, стабильные, с положительной энтропией) змеевидных континуумов исследовались в [81], [169], [342], [343], [403], [590]. Действие компактных групп на псевдодуге изучали Льюис [414] и Роджерс [574].

Рядом авторов исследовались различные способы вложения змеевидных континуумов в плоскость. Например, Смит [588] построил псевдодугу в плоскости таким образом, что никакая ее *композанта* (т. е. такое множество, две различные точки которого можно соединить собственным подконтинуумом) не содержит более одной достижимой из дополнения точки. А Льюис [406] указал такое вложение псевдодуги в плоскость, что различные достижимые из дополнения точки лежат в различных композантах. Другие результаты можно найти в работах [80], [280], [470], [585], [592].

Беллами [50] в плоскости построил несчетное семейство змеевидных континуумов, никакие два различных элемента которого не могут быть отображены друг на друга.

Общий результат о вложении был доказан Беннеттом [69]: произведение n штук змеевидных континуумов может быть вложено в $(n+1)$-мерное евклидово пространство. В [192] доказан еще более общий результат: произведение n штук *k-кубовидных континуумов* (т. е. для всякого покрытия ω допускающих ω-отображение на I^k: змеевидные континуумы в этом случае 1-кубовидные континуумы) может быть вложено в $k(n+1)$-мерное евклидово пространство.

Интересные результаты связаны с исследованием гиперпространств змеевидных континуумов. В [512] показано, что континуальная экспонента псевдодуги представляет собой двумерное канторово многообразие. Континуальная экспонента всякого змеевидного континуума обладает свойством неподвижной точки [587]. Гиперпространства змеевидных континуумов рассматривались также в [557].

Мы уже отмечали, что всякий змеевидный метрический континуум может быть представлен в виде предела обратного спектра из отрезков. Многими авторами исследовался вопрос о возможно более простом спектральном представлении змеевидных континуумов. Махавиер [459] показал, что не всякий змеевидный метрический континуум можно представить в виде предела обратного спектра из отрезков только с одной соседней проекцией. Остроумная идея доказательства состоит в том, что у таких континуумов существует нетривиальный «сдвигающий» гомеоморфизм, а в то же время есть змеевидные континуумы с тривиальной группой гомеоморфизмов, например [41]. Более простой пример привела Марш [467]. Тем не менее, всякий змеевидный континуум можно представить в виде предела спектра из отрезков с четырьмя соседними проекциями [317] или даже с двумя [631]. Хендерсон [290] построил спектральное представление для псевдодуги только с одной соседней проекцией. А Проктор [537] построил такое представление для псевдодуги, где все соседние проекции просты (отображение отрезка $[0, 1]$ на себя называется простым, если оно тождественно вне некоторого $[r, s] \subset [0, 1]$, на котором его график представляет собой букву «N»). Харатоник [125] показал, что в определении континуумов Кнастера (см. выше), а также соленоидов (см. ниже) открытые отображения в спектральном разложении могут быть заменены на конфлюэнтные. Очень интересные исследования, связанные со спектральным представлением змеевидных континуумов, были проведены в [483], [485]. Однако для многих приложений удобнее рассматривать спектры не из «хороших» пространств — отрезков — с «плохими» проекциями, а из полиэдров, делая упор на наличие «хороших» соседних проекций. Такие представления рассматривал, например, Роджерс — из графов с монотонными проекциями [556] и из полиэдров [562].

Очень интенсивно исследовались непрерывные отображения змеевидных континуумов. В [483] и [385] показано, что всякий змеевидный метрический континуум является непрерывным образом псевдодуги. Таким образом, непрерывные образы змеевидных метрических бикомпактов — это в точности непрерывные образы псевдодуги. Такие континуумы называются *слабозмеевидными*. Слабозмеевидные континуумы исследовались в работах Фернли [189], [190], [191]. Им, в частности, показано, что слабозмеевидные континуумы не могут быть охарактеризованы никаким локальным свойством. Слабая змеевидность изучалась также в работах [54], [202], [304], [389], [481], [487], [526], [527], [547], [548].

Бинг показал, что монотонные отображения сохраняют змеевидные бикомпакты [71]. Действие открытых отображений не выводит за пределы класса метрических змеевидных континуумов, как показала Розенхольц [584] (этот результат верен и в общем случае [22]). Лелек поставил вопрос — сохраняют ли конфлюэнтные отображения змеевидные бикомпакты. Надлер [501] описал образы «$\sin 1/x$» (это «$\sin 1/x$» или точка). Грейс и Вут [235] доказали, что конфлюэнтные отображения сохраняют наследственно разложимые змеевидные континуумы. Однако в целом эта проблема — одна из ключевых в теории змеевидных бикомпактов — все еще остается нерешенной. Дуда и Бартик [172] описали конечнократные открытые образы наследственно разложимых змеевидных континуумов — такие отображения по свойствам напоминают открытые отображения отрезков.

Другие вопросы, имеющие отношение к теории змеевидных пространств, рассматривались в работах [89], [114], [141], [161], [163], [170], [171], [205], [241], [256], [257], [272], [274], [297], [338], [339], [348], [391], [398], [401], [409], [460], [476], [484], [528], [544], [546], [579], [580], [583].

§ 2. Древовидные континуумы

Отображение $f: X \to Y$ двух бикомпактов называется (1) монотонным, (2) конфлюэнтным [100], (3) полуконфлюэнтным [424], (4) слабоконфлюэнтным [160] и (5) псевдоконфлюэнтным [402], если для каждого континуума C в Y

(1) $f^{-1}(C)$ связно;

(2) каждая компонента $f^{-1}(C)$ отображается на C;

(3) для каждой пары компонент связности K и L множества $f^{-1}(C)$ имеет место одно из включений $f(K) \subset f(L)$ или $f(L) \subset f(K)$;

(4) некоторая компонента $f^{-1}(C)$ отображается на C;

(5) некоторая компонента $f^{-1}(C)$ отображается на C, если C — неприводимый континуум;

Отображение $f: X \to Y$ двух бикомпактов называется универсальным [296], если для каждого отображения $g: X \to Y$ существует точка $x \in X$ такая, что $f(x) = g(x)$.

Если S и T — конечные деревья, т. е. локально связные континуумы, состоящие из конечного числа дуг и не содержащие окружностей, то отображение $f: S \to T$ называется сохраняющим дуги, если образ каждой дуги либо дуга, либо точка. Отображение $f: S \to T$ называется слабо сохраняющим дуги, если существует подконтинуум S' в S такой, что сужение отображения f на этот континуум $f|_S$ является сохраняющим дуги.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Обозначим через $\pi_i: X \times X \to X$ проекцию на i-ый сомножитель, $i = 1, 2$. Лелек [390], [397] определил сюрьективный спэн $\sigma^*(X)$ пространства X как наименьшую верхнюю грань действительных чисел $\alpha \geqslant 0$ со свойством: существует связное множество $C_\alpha \subset X \times X$ такое, что $\rho(x, y) \geqslant \alpha$ для всякой точки $(x, y) \in C_\alpha$ и $\pi_1(C_\alpha) = X = \pi_2(C_\alpha)$. Тогда спэн пространства X $\sigma(X) = \sup\{\sigma^*(A) \mid A \subset X, A$ связно и непусто$\}$. Лелек доказал, что из равенства спэна континуума нулю следуют его атриодичность и древовидность.

Метрический компакт X имеет свойство Келли в точке $x \in X$, если для всякого континуума $Y \subset X$: $x \in Y$ и всякой последовательности точек $x_n \in X$, сходящейся к точке x, существует последовательность подконтинуумов $Y_n \subset X$, сходящаяся к Y такая, что $x_n \in Y_n$ [624].

Континуум X называется наследственно уникогерентным в точке p, если пересечение любых двух его подконтинуумов, содержащих точку p, связно [222]. Континуум X — гладкий в точке p, если он наследственно уникогерентен в этой точке и если x_n — сеть в X, сходящаяся к точке X, то сеть px_n сходится к px в гиперпространстве подконтинуумов X в топологии Вьеториса (здесь через px обозначается подконтинуум X, который неприводим между p и x). Континуум X называется гладким, если он гладок в каждой своей точке. Определение гладкости дано в [133], локальный вариант — в [222].

Континуум X называется древовидным, если для всякого его открытого покрытия ω имеется ω-отображение на конечное дерево, т. е. континуум, состоящий из конечного числа дуг и не содержащий окружностей. Локально связный древовидный континуум называется дендроном. Метрический дендрон называется дендритом. Основные свойства древовидных континуумов:

(1) каждый подконтинуум древовидного континуума древовиден;

(2) всякий древовидный континуум уникогерентен, а значит и наследственно уникогерентен;

(3) древовидные континуумы ацикличны.

Древовидные континуумы, в отличие от змеевидных, могут не вкладываться в плоскость. Вложение их в $\mathbf{R}^3$ исследовались в [37], [39].

Топологическое пространство X стягиваемо относительно пространства Y, если всякое отображение X в Y гомотопно нулю. Кейс и Чемберлен следующим образом охарактеризовали древовидные континуумы [93]: одномерный континуум X древовиден тогда и только тогда, когда X стягиваем относительно всякого графа (т. е. одномерного связного полиэдра).

Континуум называется дендроидом, если он дугообразно связен и наследственно уникогерентен. Континуум называется λ-дендроидом, если в определении дендроидов заменить дугообразную связность на наследственную разложимость. Кук доказал древовидность дендроидов и λ-дендроидов [155], а также наследственно эквивалентных континуумов [156] (континуум X наследственно эквивалентен, если каждый его подконтинуум гомеоморфен X). Беллами доказал [52], что всякий дендроид наследственно разложим и, значит, класс λ-дендроидов шире класса дендроидов.

Класс дендроидов и λ-дендроидов изучался очень интенсивно, в особенности польскими математиками. Так, концевые точки и точки ветвления дендроидов и λ-дендроидов рассматривались в работах [58], [121], [388], [508], [509], [510], [511], [629], [630]. С особым интересом изучались гладкость, точечная гладкость и близкие к ним понятия дендроидов и λ-дендроидов [95], [96], [118], [121], [133], [136], [145], [150], [175], [180], [209], [217], [242], [254], [416], [417], [421], [425], [426], [495], [596], [599], [600], [601], [602]. Например, в [242] доказано существование универсального гладкого дендроида; в [600] доказано, что открытые отображения сохраняют точечно гладкие дендроиды, а в [121] построен гладкий дендроид, состоящий только из точек ветвления континуального порядка и концевых точек.

Среди дендроидов выделяются континуумы с одной только точкой ветвления — так называемые веер ы. Вееры рассматривались в работах [101], [131], [132], [208], [239], [436], [516], [517], [519]. Упомянем некоторые результаты: в [516] построено несчетное семейство нестягиваемых вееров, которые не вкладываются друг в друга, а в [517] показано, что всякий локально связный в вершине веер можно вложить в плоскость (в общем случае это не так).

Другие вопросы, касающиеся дендроидов и λ-дендроидов, рассматривались в [103], [104], [105], [107], [111], [112], [113], [134], [135], [140], [166], [351], [364], [427], [428], [431], [443], [445], [452], [488], [489], [518], [597]. К примеру в [428] исследовались ровно n-кратные образы λ-дендроидов. В [445] показано, что всякий древовидный континуум вкладывается в предел обратного спектра из дендроидов с открытыми проекциями, а в [488] рассмотрены борелевские классы компонент линейной связности λ-дендроидов.

Также, как и змеевидные континуумы, свойством неподвижной точки обладают дендриты. Бинг поставил вопрос [77], обладает ли свойством неподвижной точки всякий древовидный континуум. Были получены некоторые положительные результаты в этом направлении. Так, λ-дендроиды обладают свойством неподвижной точки [5], [102], [106], [438]. Неподвижные точки многозначных отображений λ-дендроидов рассматривались в [447], [462], [463]. МакКорд [475] доказал, что свойством неподвижной точки обладают древовидные континуумы, представимые в виде

предела обратного спектра из дендритов с открытыми соседними проекциями. Эберхарт и Фугейт [179] значительно усилили этот результат, показав, что в теореме МакКорда открытые отображения можно заменить на слабо сохраняющие дуги. При этом они значительно использовали важную для теории неподвижных точек теорему Гольштынского [296]: если континуум можно представить в виде предела счетного обратного спектра из полиэдров с универсальными проекциями, то он обладает свойством неподвижной точки. Теорему Гольштынского следует рассматривать в ряду классических теорем о неподвижных точках — теоремы Брауэра и теоремы Локуциевского [15]. Тем, кого интересует тема неподвижных точек, следует обратиться к обзору [251], где в, частности, указывается на связь между универсальными и существенными в смысле П. С. Александрова отображениями. Частичные результаты, дающие положительный ответ на упомянутый вопрос Бинга, были получены также в работах [212], [285], [468], [523]. Однако Беллами построил, используя континуум Кнастера D_6, пример древовидного континуума без свойства неподвижной точки [56], [57]. Позже аналогичный древовидный континуум был построен Оверстигеном и Роджерсом [521], [522].

Если для змеевидных континуумов проблема сохранения их конфлюэнтными отображениями все еще остается открытой, то для древовидных континуумов она оказалась значительно проще. МакЛин [477] доказал, что конфлюэнтные отображения сохраняют древовидность, а Грейс и Вут усилили этот результат, доказав [235], что древовидность сохраняется полуконфлюэнтными отображениями. Свойства отображений древовидных континуумов изучались также в работах [178], [289], [358], [437], [591], [610], в частности в [610] описаны слабоконфлюэнтные образы дендритов.

Мы уже видели, что змеевидные континуумы атриодичны. Однако не всякий древовидный атриодичный континуум является змеевидным. Более того, Инграмом [306] был построен пример незмеевидного, древовидного, атриодичного континуума с положительным спэном, у которого всякий собственный подконтинуум — дуга. Известно, что на плоскости не существует несчетного семейства попарно непересекающихся триодов. Тем не менее, Инграм построил на плоскости несчетное семейство попарно непересекающихся атриодичных древовидных континуумов с положительным спэном [307]. Инграмом рассматривались также наследственно иеразложимые древовидные континуумы. Он показал, что не всякий такой континуум слабозмеевиден, т. е. является непрерывным образом псевдодуги [309], а также, что существует [310] такой континуум, всякий невырожденный подконтинуум которого имеет положительный спэн (заметим, что дуга имеет нулевой спэн, см. также [490]). Наследственно неразложимые континуумы с тривиальным шейпом — а они древовидны — рассматривались в [368]. Проблемы, связанные с однородностью древовидных континуумов (пока не известно ни одного такого континуума, отличного от псевдодуги!) и их группами гомеоморфизмов, изучались в [281], [369], [370], [377], [405], [545], [605]. В частности, Роджерс [545] доказал древовидность всякого однородного ацикличного одномерного континуума, используя для этой цели ... гиперболическую плоскость.

Древовидные континуумы и близкие вопросы рассматривались также в работах [42], [48], [51], [55], [65], [66], [83], [86], [94], [99], [109], [120], [124], [126], [128], [129], [130], [138], [143], [152], [162], [164], [165], [167], [181], [221], [223], [224], [226], [233], [241], [243], [244], [246], [249], [255], [260], [261], [262], [263], [264], [265], [266], [267], [268], [269], [270], [275], [282], [288], [308], [311], [316], [341], [350], [352], [353], [354], [355], [356], [357], [361], [363], [365], [378], [395], [399], [404], [422], [423], [432], [434], [441], [444], [446], [448], [451], [461], [464], [478], [487], [491], [492], [494], [520], [529], [530], [534], [540], [573], [582], [593], [598], [613]. [614], [619], [621], [623], [627], [628], [632].

§ 3. Окружностноподобные континуумы

Континуум X называется *окружностноподобным* или *циклически змеевидным*, если для всякого его открытого покрытия ω имеется ω-отображение на окружность.

Активное изучение циклически змеевидных континуумов началось после того, как Бинг и Джонс [79] построили плоский однородный окружностноподобный континуум, отличный от простой замкнутой кривой — так называемую окружность псевдодуг.

В отличие от змеевидных континуумов, циклически змеевидные континуумы не обязаны вкладываться в плоскость. Плоские циклически змеевидные коитинуумы исследовал Бинг [76]. Как показал Инграм [303, 304], циклически змеевидный континуум, являющийся непрерывным образом плоского континумма, является плоским. Обобщение этой теоремы для P-образных континуумов, где P — фиксированный полиэдр, доказаио в [111]. В [304] показано также, что разложимый окружностноподобный континуум слабозмеевиден, т. е. является непрерывным образом псевдодуги. Слабозмеевидные циклически змеевидные континуумы рассматривались в [202], а разложимые циклически змеевидные континуумы рассматривались в [305].

По аналогии с псевдодугой была построена и *псевдоокружность* [72] — наследственно неразложимый циклически змеевидный незмеевидный плоский континуум. Была доказана единственность псевдоокружности [196] и ее неоднородность [195], [198], [549]. Роджерс показал, что псевдоокружность не является непрерывным образом псевдодуги [548]. Хотя псевдо-

окружность не однородна, в ней много различных гомеоморфизмов. Орбиты псевдоокружности исследовались в [344].

Исторически первыми циклически змеевидными континуумами были соленоиды ван Данцига [160] — окружностноподобный аналог континуумов Кнастера. *Соленоид* — это предел счетного обратного спектра из окружностей с открытыми проекциями. Харатоник кстати показал [125], что открытые проекции в определении соленоидов могут быть заменены на конфлюэнтные. Было получено несколько результатов, характеризующих соленоиды:

(1) Хагопиан [277]: континуум X — соленоид$\Leftrightarrow X$ однороден и каждый собственный подконтинуум — дуга;

(2) Роджерс [565]: однородный одномерный континуум X — соленоид$\Leftrightarrow X$ атриодичен и содержит дугу;

(3) Крупский [373]: континуум X — соленоид$\Leftrightarrow X$ — циклически змеевидный континуум со свойством Келли и такой, что всякая его точка принадлежит внутренности некоторой дуги (в одну сторону «$\Rightarrow$» это утверждение было доказано в [253]);

(4) Крупский [372]: континуум X — соленоид$\Leftrightarrow X$ — циклически змеевидный континуум, локально гомеоморфный произведению канторова совершенного множества на открытый интервал.

Последний результат позволяет составить представление о локальной структуре соленоидов. По аналогии с окружностью псевдодуг Роджерс [563] построил соленоиды псевдодуг. Кук показал [153], что если для двух соленоидов каждый можно непрерывно отобразить на другой, то эти соленоиды гомеоморфны. Соленоиды и их непрерывные образы изучались также в работах [76], [278], [552].

Фернли доказал [193], что произведение n штук циклически змеевидных континуумов вкладывается в $(n+2)$-мерное евклидово пространство. Этот результат усилил И. К. Лифанов, показав [14], что такое произведение можно вложить в $(n+1)$-мерный полиэдр, лежащий в $\mathbf{R}^{n+2}$. Различные типы вложений циклически змеевидных континуумов, а также их гиперпространств изучались в работах [43], [70], [197], [553], [557].

Активно исследовалась тема «различные виды непрерывных отображений и циклически змеевидные континуумы». Так, Фернли [194] описал непрерывные образы псевдоокружности. А Роджерс рассмотрел вопрос о циклически змеевидных континуумах, на которые можно отобразить пседодугу [547], [548]. Бартик и Дуда [46] описали конечнократные открытые образы наследственно разложимых циклически змеевидных континуумов — такие отображения ведут себя также, как и открытые отображения окружности. Крупский [378] показал, что открытый образ соленоида — это соленоид, либо континуум Кнастера. Проблему открытых образов циклически змеевидных континуумов рассматривали Дуда и Келл [173] — они доказали, что открытый разложимый образ метризуемого циклически змеевидного континуума либо змеевиден, либо циклически змеевиден. Наиболее полный результат получен в [22], где доказано аналогичное утверждение без дополнительных требований метризуемости и разложимости.

Другие результаты, относящиеся к циклически змеевидным континуумам, были получены в работах [90], [199], [340], [374], [410], [543], [558], [577].

§ 4. Однородные пространства

Пространство X называется **однородным**, если для любых двух точек $p, q \in X$ существует гомеоморфизм $h: X \to X$ такой, что $h(p) = q$.

Пространство X называется **n-однородным**, если для любых двух множеств $P, Q \subset X$, каждое из которых состоит из n различных точек, существует гомеоморфизм $h: X \to X$ такой, что $h(P) = Q$.

Исторически первым однородным одномерным континуумом была простая замкнутая кривая. В 1920 году Кнастер и Куратовский [346] поставили вопрос о существовании других плоских однородных континуумов. Долгое время считалось, что других плоских однородных континуумов нет. Более того, появились работы, в которых доказывалось, что единственным однородным континуумом на плоскости является окружность. Тем неожиданнее был результат Бинга [73] (см. также заметку Моиза [497] — без доказательства. Вообще, стоит сказать, что рождение этого удивительного континуума — псевдодуги — произошло в остром научном соперничестве в хорошем смысле этих двух авторов. Обратившись к статьям 40-х—50-х этих двух авторов, читатель получит увлекательную и поучительную картину научного соревнования) о том, что псевдодуга является однородным плоским континуумом. Этот удивительный результат открыл дорогу для изучения и поиска других однородных одномерных континуумов на плоскости. В 1955 г. Джонс [320] доказал свою знаменитую теорему: каждый разложимый однородный плоский континуум можно открыто отобразить на окружность, причем слои этого отображения одинаковы и представляют собой однородный неразделяющий плоскости континуум. Прямым следствием этого результата было построение Бингом и Джонсом в совместной работе [79] окружности пседодуг — еще одного однородного плоского континуума. Эти же авторы показали, что построенный ими континуум единственен. Других однородных плоских континуумов до сих пор не найдено. Более того, многие результаты указывают на то, что других однородных континуумов на плоскости не существует. Так, после того, как независимо друг от друга Фернли [195] и Роджерс [549] доказали неоднородность псевдоокружности — циклически змеевидного наследственно неразложимого незмеевидного плоского континуума. Берджесс показал [90], что псевдодуга является единственным однородным змеевидным континуумом на плоскости, а окружность и окружность псевдодуг — суть единственные однородные циклически змеевидные плоские континуумы.

Хагопиан [276] и Джонс [321] доказали, что всякий неразложимый однородный плоский континуум наследственно неразложим, а Роджерс показал [566], что такой континуум не может разделять плоскости. Таким образом, если существуют другие плоские однородные континуумы, кроме названных, то эти гипотетические континуумы могут иметь следующую структуру [90]:

(а) древовидный незмеевидный континуум;

(б) окружность континуумов (а).

Известно, что гипотетический континуум (а) должен быть древовидным, наследственно неразложимым [276], [321], иметь нулевой спэн [524], быть слабозмеевидным [527], не содержать змеевидных подконтинуумов и удовлетворять определенным условиям на древовидные покрытия [407].

Если континуум (а) содержит невырожденный змеевидный подконтинуум, то тогда этот континуум — псевдодуга [72].

Практически все последние результаты, касающиеся исследования однородности, используют теорему о группах преобразований, доказанную Эффросом [185], а точнее следующее ее следствие, полученное Хагопианом [273]:

если M — однородный континуум и $\varepsilon > 0$, то существует положительное число δ такое, что если $p, q \in M$ и $\rho(p, q) > \delta$, то существует некоторый гомеоморфизм M на себя, который переводит точку p в точку q и не сдвигает точки более чем на ε.

Отметим, что Унгар [612] первым обратил внимание на значение теоремы Эффроса для теории однородных континуумов при доказательстве им локальной связности всякого 2-однородного континуума.

Как мы уже отмечали, Андерсон [38] аннонсировал существование открытого отображения плоскости на себя, при котором все слои являются пседодугами (построение этого отображения описано в [415]). Для этого отображения прообраз каждого из известных нам однородных континуумов снова однородный континуум.

Среди неплоских одномерных однородных континуумов следует прежде всего выделить соленоиды ван Данцига [160]. Роджерс, используя конструкцию Бинга—Джонса [79], построил соленоиды псевдодуг [563], являющиеся однородными континуумами. Хагопиан и Роджерс [286] продолжили упомянутую классификацию Берджесса [90] и показали, что каждый однородный циклически змеевидный континуум либо соленоид, либо соленоид псевдодуг. При этом Льюис [410] показал, что пространство — соленоид псевдодуг — единственно и однородно. Таким образом, в настоящее время полностью завершена классификация однородных циклически змеевидных континуумов. Однако существуют и другие однородные кривые. Андерсон [40] показал, что менгеровская кривая однородна и даже n-однородна для всякого натурального n. Затем Кейс [92], используя обратные последовательности из менгеровских кривых с соседними проекциями, являющимися накрытиями (все точно также, как при определении соленоидов, за исключением базового пространства — вместо окружности берется менгеровская кривая!), построил целое семейство однородных кривых, называемых соленоидами из универсальной кривой или континуумами Кейса. И теперь, ввиду важного и уже упомянутого результата Льюиса [413], к однородным кривым добавляются также следующие группы пространств: менгеровские кривые псевдодуг и континуумы Кейса псевдодуг (другое название — «соленоиды из универсальной кривой псевдодуг» — более информативно, но трудно произносимо).

Заметим, что исследование однородных континуумов высших размерностей — задача принципиального значения. Так Бинг и Борсук [78] поставили вопрос, существует ли однородный ANR-компакт размерности больше 2, который не является многообразием. Из положительного ответа на этот вопрос следует [314] отрицательное решение знаменитой проблемы Пуанкаре о гомеоморфности гомотопической 3-мерной сферы обычной сфере S^3.

Другие результаты, касающиеся однородности, а также разложений, играющих большую роль в теории однородных пространств, можно найти в следующем довольно большом, хотя и неполном перечне работ — [25], [39], [47], [49], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [67], [68], [75], [84], [85], [86], [87], [88], [91], [97], [98], [108], [110], [116], [119], [123], [137], [139], [154], [157], [158], [186], [187], [188], [203], [210], [211], [222], [227], [229], [230] [231], [232], [234], [236], [237], [238], [245], [248], [258], [259], [271], [279], [281], [283], [284], [293], [294], [295], [312], [315], [318], [319], [322], [323], [326], [362], [366], [369], [370], [375], [384], [386], [387], [392], [393], [394], [396], [400], [410], [429], [430], [433], [435], [439], [440], [442], [456], [457], [458], [469], [471], [473], [474], [485], [493], [525], [535], [538], [539], [545], [550], [564], [565], [568], [566], [567], [569], [570], [571], [572], [575], [576], [578], [581], [586], [594], [595], [603], [604], [608], [611], [615], [616], [617], [618], [620], [633].

В последнее время много внимания уделяется различным обобщениям понятия однородности. Континуум X однороден относительно класса отображений $\mathcal{M}$, если для любых точек $p, q \in X$ существует отображение $h \in \mathcal{M}$ такое, что $h(p)=q$. Так уже знакомая нам однородность — это однородность относительно гомеоморфизмов. Иногда, когда класс $\mathcal{M}$

имеет определенное и простое название, слова «однородность относительно класса отображений $\mathcal{M}$» заменяются на «$\mathcal{M}$ однородность», например, непрерывная однородность, конфлюэнтная однородность, открытая однородность и т. д. Возможность замены в определении однородных континуумов гомеоморфизмов на непрерывные отображения, т. е. рассмотрение непрерывной однородности, была высказана в беседе с Янушем Харатоником, Дэвидом Беллами. Понятие однородности относительно класса отображений во всей его общности было введено и исследовано затем Харатоником [115]. Легко видеть, что не всякий континуум непрерывно однороден — например, не таков континуум «sin $1/x$». Однако, как показал Крупский [371], всякий локально связный континуум является непрерывно однородным. Харатоник доказал для псевдодуги [117] эквивалентность открытой, конфлюэнтной и непрерывной однородностей и поставил вопрос [122] о существовании открыто однородных континуумов, которые не однородны, а также открыто однородных, но не конфлюэнтно однородных. Като [328] получил отрицательный ответ на первый из этих вопросов, построив неоднородный континуум, который тем не менее однороден относительно открытых отображений. В этой же работе им на примере показано, что из открытой однородности не следует свойство Келли. Харатоник, отвечая на вопрос Като, показал [127], что не существует дендроида однородного относительно открытых отображений. Другие вопросы обобщенной однородности рассматривались в статьях [151], [377], [455], [533].

§ 5. Гиперпространства континуумов, абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия

Большую роль в теории континуумов и во всей геометрической топологии сыграла так называемая проблема гиперпространства. Еще в начале 20-х годов Важевский и Вьеторис независимо друг от друга доказали, что для метризуемого континуума X равносильны следующие условия:

1) континуум X локально связен;

2) гиперпространство $\exp X$ замкнутых множеств локально связно;

3) гиперпространство $\exp^c X$ континуумов локально связно;

Дальнейшие исследования гиперпространств континуумов привели к постановке польскими топологами в конце 20-х годов вопроса о том, будет ли гиперпространство замкнутых множеств отрезка гомеоморфно гильбертову кирпичу. В 1931 г. Мазуркевич доказал, что гиперпространство $\exp X$ всякого невырожденного метризуемого континуума X содержит гильбертов кирпич. В 1939 г. Войдыславский в полной общности сформулировал проблему гиперпространства:

гомеоморфно ли гильбертову кирпичу гиперпространство любого невырожденного пеановского континуума?

Аналогичный вопрос (при необходимом условии отсутствия в X дуг с непустой внутренностью) возник и по отношению к гиперпространству $\exp^c X$ всех подконтинуумов континуума X. Войдыславский, впервые в полной общности сформулировавший проблему гиперпространства, сделал и существенный шаг на пути ее решения. Он доказал, что гиперпространство замкнутых множеств и гиперпространство подконтинуумов пеановского континуума являются абсолютными ретрактами.

Проблема гиперпространства была решена лишь в 70-х годах в работах американских топологов Вэста, Кертиса и Шори сначала для отрезка, затем для одномерного полиэдра (графа), потом для произвольного полиэдра и, наконец, для всякого пеановского континуума. Отметим, также результат Вэста [626], показавшего, что подконтинуумы дендрита образуют Q-фактор, т. е. множество, являющееся делителем (или сомножителем) гильбертова кирпича Q. Эта теорема предварила теорему Эдвардса о том, что произведение абсолютного ретракта на гильбертов куб гомеоморфно гильбертову кубу.

Теоремы Войдыславского и Вэста—Кертиса—Шори, с одной стороны, распространяются на другие функторы экспоненциального типа, а с другой стороны, получены аналоги этих теорем для отображений. Чтобы сформулировать полученные в этом направлении результаты, напомним определения некоторых функторов. При этом для функтора $\mathscr{F}$ мы будем определять только пространства вида $\mathscr{F}(X)$, где X — бикомпакт, поскольку отображения вида $\mathscr{F}(f)$ определяются после этого довольно естественным образом. Итак:

$\exp_n^c X$ — подпространство $\exp X$, состоящее из всех непустых замкнутых подмножеств X, имеющих не более n компонент связности;

суперрасширение λX — подпространство $\exp(\exp X)$, состоящее из максимальных сцепленнных систем, т. е. систем, любые два элемента каждой из которых пересекаются;

пространство $N_k X$ состоит из всех полных k-сцепленных систем, т. е. таких $\mathscr{A} \in \exp(\exp X)$, что любые k элементов из $\mathscr{A}$ пересекаются и $B \in \mathscr{A}$ для всякого $B \in \exp X$, содержащего некоторое $A \in \mathscr{A}$. $N_2 X$ обозначается через NX.

Множество $\mathscr{A} \subset \exp X$, обладающее лишь свойством полноты (т. е. $\mathscr{A}$ замкнуто и $B \in \mathscr{A}$ для всякого $B \in \exp X$, содержащего некоторое $A \in \mathscr{A}$), называется гиперпространством включения. Множество всех гиперпространств включения пространства X обозначается через GX. Через $\operatorname{Gr} X$ обозначается множество всех гиперпространств роста, т. е. таких $\mathscr{A} \in \exp(\exp X)$, что если $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \exp X$, $A \subset B$ и всякая компонента связности множеств B пересекает A, то $B \in A$.

Через ΓX (соответственно $\Gamma^c X$) обозначается множество всех порядковых дуг $\gamma \subset \exp X$ (соответственно $\gamma \subset \exp^c X$), т. е. таких замкнутых связных множеств γ, что как только $A, B \in \gamma$, то либо $A \subset B$, либо $B \subset A$.

Для этих функторов и компакта X справедливы следующие варианты теоремы Войдыславского: 1) X — континуум тогда и только тогда, когда абсолютным ретрактом являются λX [479], $N_k X$ [11], GX [20]. 2) X — пеановский континуум тогда и только тогда, когда абсолютными ретрактами являются ΓX, $\Gamma^c X$ (см. [184]). 3) Для любого пеановского континуума X абсолютным ретрактом является $\exp_n^c X$ [26], $\operatorname{Gr} X$ [20].

С появлением критерия Торунчика о характеризации гильбертова куба [606], позволившего значительно упростить первоначальные доказательства теоремы Вэста—Кертиса—Шори, почти все упомянутые выше варианты теоремы Войдыславского превращены в аналоги теоремы Вэста—Кертиса—Шори. Для функтора λ это сделал ван Милл [480] (после нескольких промежуточных результатов) и независимо от него А. В. Иванов [8]. Для остальных функторов (за исключением функтора Γ^c и с требованием отсутствия свободных дуг в континууме X для функтора $\exp_n^c$) это сделано в тех же работах, в которых доказано, что континуумы под воздействием соответствующих функторов превращаются в абсолютные ретракты.

Отметим еще один вариант теоремы Войдыславского. Н. Л. Коваль доказала [13], что пространство $\exp^p X$ пеановских подконтинуумов континуума X является (естественно, некомпактным) абсолютным ретрактом в классе метрических пространств.

Теорему Войдыславского на неметризуемый случай распространить нельзя. Л. Б. Шапиро доказал [35], что для неметризуемого бикомпакта X его гиперпространство $\exp X$ не только не является абсолютным ретрактом (в классе бикомпактов), но оно даже не может быть непрерывным образом тихоновского куба. В то же время для функторов типа суперрасширения аналоги теорем Войдыславского и Вэста—Кертиса—Шори имеются и в неметризуемом случае. Напомним, что бикомпакт называется открыто порожденным, если он является пределом счетно-направленного обратного спектра из компактов и открытых отображений. В частности, всякий компакт открыто порожден. Обобщая теорему ван Милла и решая его задачу, А. В. Иванов доказал [9], что λX является AR-бикомпактом тогда и только тогда, когда X — открыто порожденный связный бикомпакт. Такой же результат получен им и для функторов N полный сцепленных систем [11]. Если же бикомпакт X, кроме того, однороден по характеру, т. е. характер всякой точки бикомпакта X равен одному и тому же кардинальному числу τ, то пространства λX и NX гомеоморфны тихоновскому кубу I^τ. Е. В. Моисеев перенес эти результаты А. В. Иванова на функторы G и Gr [20]. При этом в случае функтора Gr от бикомпакта X предполагается неметризуемый аналог локальной связности, а именно то, что X является абсолютным экстензором в размерности 1. Напомним, что бикомпакт X называется абсолютным экстензором в размерности n (или $AE(n)$-бикомпактом), если для всякого бикомпакта Y размерности $\dim Y\leqslant n$ и всякого его замкнутого подмножества A произвольное непрерывное отображение $f:A\to X$ может быть продолжено на весь бикомпакт Y. В этой терминологии AR-бикомпакты это в точности $AE(\infty)$-бикомпакты. Аналогом понятия абсолютного экстензора в размерности n является понятие n-мягкого отображения. Напомним, что непрерывное отображение $f:X\to Y$ называется n-мягким ($n=0, 1, 2, \ldots$), если для всякого паракомпакта Z размерности $\dim Z\leqslant n$, всякого его замкнутого подмножества Z_0 и любой пары непрерывных отображений $g:Z\to Y$ и $h_0:Z_0\to X$, удовлетворяющих условию $g|_{Z_0}=f\cdot h_0$, существует такое положение $h:Z\to X$ отображения h_0, что $g=f\cdot h$. Если в этом определении X и Y — бикомпакты (компакты), то Z также можно считать бикомпактом (компактом). Отображения, которые ∞-мягки, называются мягкими.

Теперь о распространении теорем Войдыславского и Вэста—Кертиса—Шори на отображения.

Теорема 1 ([28]). Если $f:X\to Y$ — такое отображение компакта X на континуум Y, что прообраз $f^{-1}(Y)$ по крайней мере одной *точки* $y\in Y$ локально связен, то $(\exp^c f)^{-1}\{Y\}$ является ANR-компактом.

Из теоремы Войдыславского вытекает, что для локально связного компакта X гиперпространства $\exp X$ и $\exp^c X$ являются конечными дизъюнктными суммами абсолютных ретрактов и, значит, абсолютными окрестностными ретрактами. Поэтому теорема 1 является обобщением теоремы Войдыславского, которая получается из теоремы 1 в случае постоянного отображения f.

Следствие 1 ([28]). Для отображения $f:X\to Y$ компакта X на континуум Y все слои отображения $\exp^c f$ являются ANR-компактами тогда и только тогда, когда все слои отображения f локально связны.

Кроме того, можно отметить, что слои отображения $\exp^c f$, будучи ANR-компактами, являются конечными суммами абсолютных окрестностных ретрактов. Это вытекает из того, что они являются гиперпространствами роста соответствующих компактов и из следующего утверждения.

Теорема 2 ([30]). Если гиперпространство роста $G\subset\exp X$ произвольного компакта X является связным ANR-компактом, то оно — абсолютный ретракт.

Еще одним вариантом теоремы Войдыславского для отображений является

Теорема 3 ([30]). Пусть $f:X\to Y$ — такое отображение компакта X на континуум Y, что прообраз $f^{-1}(Y)$ по крайней мере одной точки $Y\in Y$ локально связен. Тогда непустое множество $(\exp^c f)^{-1}\{Y\}$ является абсолютным ретрактом в каждом из следующих двух случаев:

а) X — континуум;

б) некоторый слой отображения f является континуумом.

Следствие 2 ([28]). Для отображения $f:X\to Y$ компакта X на континуум Y все слои отображения $\exp^c f$ являются абсолютными ретрактами в том и только том случае, если все слои отображения f являются пеановскими континуумами.

Теорема 4 ([28]). Если $f:X\to Y$ — эпиморфизм локально связных компактов (пеановских континуумов), то пространство $(\exp f)^{-1}\{Y\}$ $((\exp^c f)^{-1}\{Y\})$ является абсолютными окрестностным ретрактом (абсолютным ретрактом).

Из этой теоремы вытекает, что если $f:X\to Y$ — эпиморфизм локально связных компактов и пространство $(\exp f)^{-1}\{Y\}$ связно (а это, как легко, видеть равносильно равенству числа компонент связности компактов X и Y), то оно является абсолютным ретрактом. Условие локальной связности X в теореме 4 существенно, как показывает теорема 5. Скажем, что точка $x\in X$ является точкой приводимости отображения $f:X\to Y$, если существует замкнутое множество $A\subset X$, не содержащее точки x и отображающееся на Y.

Теорема 5 ([30]). Если точка $x\in X$ является точкой приводимости отображения $f:X\to Y$ компактов, то из локальной связности пространства $(\exp f)^{-1}\{Y\}$ вытекает локальная связность компакта X в точке x.

Следствие 3 ([28]). Если эпиморфизм $f:X\to Y$ компактов открыт, то из локальной связности пространства $(\exp f)^{-1}\{Y\}$ вытекает локальная связность компакта X во всякой точке x, не являющейся точкой взаимной однозначности отображения f.

По теореме Куратовского—Дугунджи о продолжении отображений пеановские континуумы — это в точности $AE(1)$-компакты. Поэтому следующая теорема 6 является параметрической версией теоремы Важевского—Веториса и Войдыславского в части, касающейся континуальной экспоненты.

Теорема 6 ([29], [200], [201]). Для отображения $f:X\to Y$ пеановских континуумов следующие условия эквивалентны:

1) f 1-мягко и $\exp^c f$-открыто;

2) $\exp^c f$ 1-мягко;

3) $\exp^c f$ мягко.

Согласно теореме 5, никакой параметрической версии теоремы Важевского—Веториса и Войдыславского типа теоремы 6 для функтора exp не может быть в принципе, поскольку хорошие глобальные свойства отображений включают в себя хорошие свойства слоев, а слои отображения $\exp f$ в общем случае могут быть локально связными только над локально связными множествами.

Но теорема Войдыславского может быть сформулирована и по другому. Пусть $\mathcal{F}$ — ковариантный функтор в категории бикомпактов, естественным подфунктором которого является тождественный функтор Id. Скажем, что бикомпакт X является абсолютным $\mathcal{F}$-значным ретрактом (кратко $X \in A(\mathcal{F})R$), если при вложении X в любой другой бикомпакт Y существует $\mathcal{F}$-значная ретракция Y на X, т. е. отображение $r: Y \to \mathcal{F}(X)$, являющееся тождественным на X (здесь мы отождествляем X с $\mathrm{Id}(X) \subset \mathcal{F}(X)$). Очевидно, что теорему Войдыславского можно переформулировать следующим образом:

Теорема 7 (теорема Войдыславского). Для компакта X следующие условия равносильны:

1) X — пеановский континуум;
2) X — абсолютный $\exp^c$-значный ретракт;
3) X — абсолютный exp-значный ретракт.

Прежде всего отметим, что эта теорема распространяется и на неметризуемый случай.

Теорема 8 ([30]). Для произвольного бикомпакта X следующие условия равносильны:

1) X — абсолютный экстензор в размерности 1;
2) X — абсолютный $\exp^c$-значный ретракт;
3) X — абсолютный exp-значный ретракт.

Далее, верна и параметрическая версия этой теоремы.

Теорема 9 ([31]). Для произвольного отображения $f: X \to Y$ бикомпактов следующие условия равносильны:

1) f 1-мягко;
2) f — абсолютный $\exp^c$-значный ретракт;
3) f — абсолютный exp-значный ретракт.

При этом, отображение $f: X \to Y$ называется абсолютным $\mathcal{F}$-значным ретрактом (где $\mathcal{F}$ — ковариантный функтор), если при любом вложении отображения f в другое отображение $g: Z \to Y$ существует такая $\mathcal{F}$-значная ретракция $r: Z \to X$, что $g = \mathcal{F}(f) \cdot r$.

По поводу теоремы 6 возникает естественный вопрос: когда отображение $\exp^c f$ открыто? Частичный ответ на него дает

Теорема 10 ([30]). Пусть X и Y — невырожденные пеановские континуумы и $f: X \times Y \to X$ — проектирование. Тогда отображение $\exp^c f$ открыто в том и только том случае, если X является дендритом.

Эта теорема может быть усилена.

Теорема 11 (В. В. Федорчук). Если $f: X \to Y$ — 1-мягкое отображение между пеановскими континуумами, не имеющее точек однократности, то отображение $\exp^c f$ открыто тогда и только тогда, когда Y — дендрит.

Возвращаясь к теореме 6, стоит отметить, что она, вообще

говоря, не может быть распространена на случай отображения f с неметризуемыми слоями. В самом деле, бикомпакт $\exp^c(I^{\omega_1})$ не является абсолютным экстензором в размерности нуль [200], тем более он не является абсолютным экстензором в размерности 1. Следовательно, для проектирования $f: X \times I^{\omega_1} \to X$ отображение $\exp^c f$ не может быть 1-мягким. В то же время для функторов типа суперрасширения аналог теоремы 6 имеет место вне зависимости от метризуемости объектов. Так, функторы λ, N и G переводят открытые отображения между открыто-порожденными континуумами в мягкие отображения (см. соответственно [10], [11] и [19]), а для функтора Gr верно то же самое при условии, что рассматриваются отображения между $AE(1)$-бикомпактами [19].

Что касается аналога теоремы Вэста—Кертиса—Шори для отображений, то фактически полное решение вопроса здесь получено А. В. Ивановым и Е. В. Моисеевым для функторов типа суперрасширения. В только что перечисленных результатах о переводе этими функторами открытых отображений $f: X \to Y$ в мягкие эти мягкие отображения автоматически являются I^τ-расслоениями (Q-расслоениями в метризуемом случае), если отображения f не имеют точек однократности, а бикомпакты X и Y однородны по характеру.

В случае гиперпространств ситуация представляется более сложной. Скажем, что отображение $f: X \to Y$ имеет участок тривиальности со слоем F, если существует такое непустое открытое множество $U \subset Y$ и такой гомеоморфизм $h: U \times F \to f^{-1}U$, что $fh(y, a) = y$ для всех $y \in U$ и $a \in F$.

Теорема 12 ([28]). Если $f: X \to Y$ — отображение компакта X на континуум Y, имеющее участок тривиальности с локально связным компактом без свободных дуг и изолированных точек в качестве слоя, то пространство $(\exp^c f)^{-1}\{Y\}$ гомеоморфно Q-многообразию.

Из теоремы 2 вытекает, что если в условиях теоремы 12 слой над участком тривиальности еще и связен, то $(\exp^c f)^{-1}\{Y\}$ гомеоморфно гильбертову кирпичу.

Теорема 13 ([28]). Если $f: X \to Y$ — отображение локально связных компактов (пеановских континуумов), имеющее участок тривиальности с локально связным компактом без изолированных точек в качестве слоя, то пространства $(\exp f)^{-1}\{Y\}$ и $(\exp^c f)^{-1}\{Y\}$ (в этом случае надо еще потребовать отсутствие свободных дуг в слое) гомеоморфны Q-многообразиям.

Следствие 4 ([28]). Если $f: X \to Y$ — локально тривиальное расслоение над компактом Y с локально связным компактом (пеановским континуумом) без свободных дуг и изолированных точек в качестве слоя, то все слои отображения $\exp^c f$ гомеоморфны Q-многообразиям (гильбертову кирпичу).

Следствие 5 ([28]). Если $f: X \to Y$ — локально тривиальное расслоение над компактом Y с локально связным компактом (пеановским континуумом) без изолированных точек в качестве слоя, то все слои отображения $\exp f$ над локально связными компактами гомеоморфны Q-многоообразиям (гильбертову кирпичу).

В части, касающейся континуальной экспоненты, теорема 13 была усилена И. Е. Прохоровой. Существенным продвижением оказалось освобождение от условия отсутствия свободных дуг в слоях отображения.

Теорема 14 ([24]). Пусть $f: X \to Y$ — отображение невырожденных пеановских континуумов, которое открыто в некоторой точке $y \in Y$ и имеет локально связные слои без изолированных. Тогда пространство $(\exp^c f)^{-1}\{Y\}$ гомеоморфно гильбертову кирпичу.

При этом, отображение $f: X \to Y$ называется открытым в точке $y \in Y$, если для некоторой ее окрестности O_y отображение $f|f^{-1}(O_y)$ открыто. Отказаться от отсутствия изолированных точек в слоях в теореме 14, вообще говоря, нельзя.

Усилением теоремы 10 является следующая параметрическая версия теоремы Вэста—Кертиса—Шори.

Теорема 15 ([201]). Пусть X и Y — невырожденные пеановские континуумы и $f: X \times Y \to X$ — проектирование. Тогда отображение $\exp^c f$ является тривиальным Q-расслоением, если и только если X — дендрит, а Y не содержит свободных дуг.

В. И. Голов распространил упомянутые выше результаты Эберхарта, Надлера и Ноувелла о гиперпространствах упорядоченных дуг пеановских континуумов, с одной стороны, на некомпактный случай [3], а с другой стороны, — на отображения [4]. Приведем его результаты, относящиеся к отображениям.

Теорема 16 ([4]). Пусть X и Y — метрические континуумы, $\gamma \in \Gamma^c Y$, $\cup\gamma = Y$, $f: X \to Y$ — эпиморфизм пеановских континуумов, для которого прообраз хотя бы одной точки $y \in Y$ является локально связным компактом (пеановским континуумом). Тогда пространство $(\Gamma^c f)^{-1}(\gamma)$ является ANR (AR)-компактом.

Следствие 6 ([4]). Если все слои отображения f являются локально связными компактами (пеановскими континуумами), то все слои отображения $\Gamma^c f$ являются ANR (AR)-компактами.

Теорема 17 ([4]). Пусть $f: X \to Y$ — эпиморфизм метрических континуумов, $\gamma \in \Gamma Y$, $\cup\gamma = Y$, $\cap\gamma$ и $f^{-1}(\cap\gamma)$ — локально связные компакты (пеановские континуумы). Тогда пространство $(\Gamma f)^{-1}(\gamma)$ является ANR (AR)-компактом.

Теорема 18 ([4]). Пусть $f: X \to Y$ — эпиморфизм метрических континуумов, имеющий участок тривиальности с невырожденным локально связным компактом (пеановским континуумом) в качестве слоя, не содержащего свободных дуг. Пусть $\gamma \in \Gamma^c Y$, $\cup\gamma = Y$, и прообраз хотя бы одной точки $y \in \cap\gamma$ является локально связным компактом (пеановским континуумом). Тогда пространство $(\Gamma^c f)^{-1}(\gamma)$ гомеоморфно Q-многообразию (гильбертову кирпичу).

Теорема 19 ([4]). Пусть $f: X \to Y$ — эпиморфизм метрических континуумов, имеющий участок тривиальности с невырожденным локально связным компактом (пеановским континуумом) в качестве слоя, не содержащего свободных дуг. Пусть $\gamma \in \Gamma Y$, $\cup\gamma = Y$, $\cap\gamma$ и $f^{-1}(\cap\gamma)$ — локально связные компакты (пеановские континуумы). Тогда пространство $(\Gamma f)^{-1}(\gamma)$ гомеоморфно Q-многообразию (гильбертову кирпичу).

Исследовались и вопросы, связанные с применениями к континуумам бесконечных итераций функторов экспоненциального типа. Вэст и Торунчик рассмотрели [607] следующую конструкцию. Пусть (X, ρ) — компакт с фиксированной метрикой. Обозначив через $\eta_1^0: X \to \exp X$ естественное вложение, мы получаем аналогичное вложение $\eta_{n+1}^n: \exp^n X \to \exp^{n+1} X$, где $\exp^n X$ — функтор, являющийся n-кратной итерацией функтора гиперпространства $\exp$. Компакты $\exp^n X$ по индукции наделяются метриками Хаусдорфа ρ_H^n. При этом вложения η_{n+1}^n являются изометрическими относительно метрик ρ_H^n и ρ_H^{n+1}. Через $\exp^+ X$ обозначается предел прямой последовательности $\{\exp^n X, \eta_{n+1}^n: n \in \omega\}$ в категории метрических пространств и изометрических вложений. Метрики ρ_H^n естественным образом порождают некоторую метрику ρ^+ на предельном пространстве $\exp^+ X$. Через $\exp^{++} X$ обозначается пополнение пространства $\exp^+ X$ по метрике ρ^+. Вэст и Торунчик доказали [607], что для невырожденного пеановского континуума X пара $(\exp^{++} X, \exp^+ X)$ гомеоморфна паре $(s, \operatorname{rint} Q)$, где для гильбертова куба $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ через s обозначается его псевдовнутренность, т. е. $s = \prod_{i=1}^{\infty} (-1, 1)_i$, а через $\operatorname{rint} Q$ обозначается радиальная псевдовнутренность Q, т. е.

$$\operatorname{rint} Q = \cup \left(\prod_{i=1}^{\infty} \left[-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right]_i \right).$$

Операции $\exp^+$ и $\exp^{++}$ являются функторами из категории компактов в категорию метрических пространств и равномерно непрерывных отображений. Для функтора $\exp$ можно определить еще одну бесконечную итерацию $\exp^{\omega}$. Функтор $\exp^{\omega}$ определяется как предел обратной последовательности функторов $\exp^n$ и естественных преобразований $\psi_n^{n+1}: \exp^{n+1} \to \exp^n$, где компонентой $(\psi_n^{n+1})_X: \exp^{n+1} X \to \exp^n X$ естественного преобразования ψ_n^{n+1} служит ретракция объединения. Существует естественное вложение функтора $\exp^{++}$ в функтор $\exp^{\omega}$, так что можно говорить о тройке функторов ($\exp^{\omega}$, $\exp^{++}$, $\exp^{+}$). Но функтор $\exp^{\omega}$ является «плохим» в том смысле, что, как показал Марьянович [466], ни для какого неодноточечного компакта X, даже пеановского континуума, пространство $\exp^{\omega}X$ не является локально связным.

М. М. Заричный аналогичным образом определил тройку бесконечных итераций функтора суперрасширения λ и доказал [7], что для невырожденного метрического континуума X пары ($\lambda^{\omega}X$, $\lambda^{++}X$) и ($\lambda^{++}X$, $\lambda^{+}X$) соответственно гомеоморфны парам (Q, s) и (s, rint Q).

В. В. Федорчук ввел понятие совершенно метризуемого функтора [32], показал, что для таких функторов $\mathcal{F}$ естественно возникают тройки ($\mathcal{F}^{\omega}$, $\mathcal{F}^{++}$, $\mathcal{F}^{+}$) бесконечных итераций, нашел условия, которые достаточно наложить на компакт X и функтор $\mathcal{F}$ для того, чтобы тройка ($\mathcal{F}^{\omega}X$, $\mathcal{F}^{++}X$, $\mathcal{F}^{+}X$) была гомеоморфна тройке (Q, s, rint Q) [33]. Совершенно метризуемыми оказались функторы exp, $\exp^{c}$, λ, N, G, Gr, P. Тройке (Q, s, rint Q) оказались гомеоморфны тройки (($\exp^{c})^{\omega}X$, $(\exp^{c})^{++}X$, $(\exp^{c})^{+}X$) [33] и ($\mathrm{Gr}^{\omega}X$, $\mathrm{Gr}^{++}X$, $\mathrm{Gr}^{+}X$) ([17], [18]) для невырожденных пеановских континуумов и ($G^{\omega}X$, $G^{++}X$, $G^{+}X$) для невырожденных метрических континуумов [17], [18]. Кроме того, Р. Э. Мирзаханян [16] получила тройки (Q, s, rint Q)-расслоений как результат воздействия бесконечных итераций функторов гиперпространств включения и роста на отображения между метрическими континуумами.

Отметим также относящиеся к этой тематике теорему Т. О. Банаха и М. М. Заричного [1] о том, что не существует никакой компактификации $\mathcal{F}$ функтора $\exp^{++}$, для которой пара ($\mathcal{F}X$, $\exp^{++}X$) гомеоморфна паре (Q, s) для невырожденного пеановского континуума X.

Исследовались различные типы связности и стягиваемости гиперпространств континуумов. В. Харатоник доказал [150], что для точечно-гладкого дендроида X гиперпространства exp X и $\exp^{c}X$ стягиваемы. Достаточные условия стягиваемости $\exp^{c}X$ дали также Нишиура и Ри [513], [514], [542]. Вопросы связности дугами гиперпространств exp X и $\exp^{c}X$ изучались в [382], [486]. Ганя доказал [213], что гиперсимметрическая степень $\exp_n$ сохраняет свойство уникогерентности для локально связных бикомпактов. А. Г. Савченко [25] распространил этот результат на довольно широкий класс функторов конечной степени. Илланес [298] доказал, что для любого связного и локально линейно связного пространства X гиперпространство $\exp_n X$ уникогерентно.

Высшей формой стягиваемости пространства является его гомеоморфность конусу над каким-нибудь пространством. Надлер доказал [502], что существует ровно 8 различных топологических типов континуумов, континуальные экспоненты ко-

торых гомеоморфны конусам. Исследовались и другие дополнительные структуры на гиперпространствах. Так, Надлер описал [506] континуумы, континуальная экспонента которых разлагается в нетривиальное произведение. Надлер и Квинн доказали [507], что простая дуга является единственным континуумом, континуальная экспонента которого гомеоморфна надстройке.

Гудикунц [215], [216] рассмотрел вопрос о сохранении свойства дуго-гладкости функторами exp и $\exp^{c}$. Грисполакис, Надлер и Тимчатин [240], [247], [250] исследовали вложимость гладких дендроидов в гиперпространства, достижимость дугами в гиперпространствах неприводимых континуумов и близкие вопросы. Проктор [536] охарактеризовал свойство абсолютной C^*-гладкости.

С. А. Богатый заметил [30], что гиперпространства $\exp X$ и $\exp^{c}X$ произвольного метрического континуума X имеют тривиальный шейп. В случае континуальной экспоненты И. Е. Прохорова усилила этот результат. Она доказала [24], что для отображения $f: X\to Y$ компакта на континуум, имеющего по крайней мере один связный слой, шейп непустого пространства $(\exp^{c}f)^{-1}\{Y\}$ тривиален. Эту теорему можно рассматривать также как обобщение упомянутой выше теоремы 3 на случай не локально связных пространств. В качестве следствия получается, что функтор континуальной экспоненты переводит монотонные отображения пеановских континуумов без свободных дуг в почти-гомеоморфизмы.

Изучались вопросы о существовании ретракций $\exp^{c}X\to X$, $\exp X\to X$, $\exp X\to\exp^{c}X$. В общем случае таких ретракций нет. Из теоремы Войдыславского вытекает, что первых двух ретракций нет и в локально связном случае. Гудикунц [217] построил не локально связный континуум X, гиперпространство $\exp X$ которого ретрагируется как на X, так и на $\exp^{c}X$. В то же время Илланес [301] построил континуум X, являющийся ретрактом своей континуальной экспоненты, не являющейся ретрактом $\exp^{c}X$. Имеется пример дендрита X, гиперпространство $\exp X$ которого не допускает деформационной ретракции ни на X, ни на $\exp^{c}X$ [218]. Первый пример континуума X, для которого $\exp^{c}X$ не является ретрактом $\exp X$ построил Гудикунц [214]. В то же время Надлер показал [500], что $\exp X$ всегда непрерывно отображается $\exp^{c}X$. Лоусон [383] привел необходимые условия для того, чтобы $\exp^{c}X$ было ретрактом $\exp X$.

Из теоремы Войдыславского вытекает, что в локально связном случае всегда существует ретракция $\exp X$ на $\exp^{c}X$. Надлер [503] уточнил этот результат, доказав, что

1) если X — пеановский континуум, то существует такая ретракция $r:\exp X\to\exp^{c}X$, что $A\subset r(A)$ для любого $A\in\exp X$;

2) если для континуума X существует такая ретракция

$r: \exp X \to \exp^c X$, что $r(A) \supseteq A$ или $A \subset r(A)$ для любого $A \in \exp X$, то X — пеановский континуум.

В. Харатоник [144] построил такой плоский континуум X со свойством Келли, у континуальной экспоненты $\exp^c X$ которого свойство Келли есть, а у экспоненты $\exp X$ — нет.

Завершим этот параграф размерностными свойствами гиперпространств континуумов. Еще в 1931 г. Мазуркевич доказал, что экспонента всякого невырожденного метризуемого континуума содержит гильбертов кирпич и, следовательно, сильно бесконечномерна. В 1942 г. Келли доказал, что континуальная экспонента $\exp^c X$ пеановского континуума X конечномерна тогда и только тогда, когда X — граф. Эберхарт и Надлер [182] доказали, что для наследственно неразложимого континуума X его континуальная экспонента $\exp^c X$ либо двумерна, либо бесконечномерна. Роджерс [555] доказал бесконечномерность континуальной экспоненты метризуемого континуума X в каждом из следующих трех случаев:

1) $\dim X \geqslant 3$;

2) X содержит произведение двух невырожденных континуумов;

3) $\dim X = 2$ и континуум X линейно связен.

Красинкевич [359] доказал, что если X — наследственно неразложимый континуум, то континуум $\exp^c X$ двумерен и вкладывается в $\mathbf{R}^4$. Для любого невырожденного подконтинуума X псевдоокружности гиперпространство $\exp^c X$ является двумерным канторовым многообразием [541]. Гиперпространство $\exp^c X$ вкладывается в $\mathbf{R}^3$ для любого змеевидного континуума X [292] и для любого наследственно неразложимого плоского континуума [609]. При $n \geqslant 3$ полиэдры $\exp_n(I^2)$ и $\exp_n(I^n)$ не вкладываются в $\mathbf{R}^{2n}$ [498]. Условия, достаточные для вложимости гиперпространства $\exp^c X$ в $\mathbf{R}^n$, дал Надлер [500].

Лау доказал [379] существование клеток в п о л у р е ш е т к а х П е а н о (пеановских континуумах с непрерывным, ассоциативным, коммутативным и идемпотентным умножением), когомологическая размерность которых над некоторым нетривиальным модулем коэффициентов равна n. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство $\exp^c X$ содержало n-мерную клетку или гильбертов куб, получил Илланес [302].

Грисполакис и Тимчатин показали [252], что если X — атриодичный континуум, одномерная группа когомологий Александрова—Чеха которого конечна порождена, то $\dim(\exp^c X) = 2$. Если же континуум X двумерен и имеет такие же гомологические свойства, то его гиперпространство $\exp^c X$ бесконечномерно (Като [336]). В частности, бесконечномерным является гиперпространство $\exp^c X$ всякого двумерного континуума, являющегося фундаментальным ANR-ом. Наконец, Лау [381] доказал, что для монотонного отображения $f: X \to Y$ континуумов имеет место неравенство $c\text{-}\dim(\exp^c X) \geqslant c\text{-}\dim(\exp^c Y)$, где через $c\text{-}\dim Z$ обозначена когомологическая размерность компакта Z по группе целых чисел.

§ 6. Отображения Уитни

Для метрического континуума X непрерывное отображение $\mu: \exp X \to [0, +\infty)$ (соответственно $\mu: \exp^c X \to [0, +\infty)$) называется о т о б р а ж е н и е м У и т н и для гиперпространства $\exp X$ (соответственно $\exp^c X$), если

1) $\mu(\{x\}) = 0$ для любой точки $x \in X$;

2) $\mu(A) < \mu(B)$ для любой пары A, $B \in \exp X$ (соответственно $\exp^c X$) такой, что $A \subset B$, $A \neq B$.

Ниже под отображением Уитни будем понимать отображение Уитни для гиперпространства континуумов. Другой случай будет оговариваться особо. Существование отображений Уитни для любого метрического континуума доказал сам Уитни еще в 1932 г. Эберхарт и Надлер [182] доказали, что слои $\mu^{-1}(t)$ отображения Уитни являются континуумами. Они называются у р о в н я м и У и т н и или к о н т и н у у м а м и У и т н и.

Топологическое свойство $\mathcal{P}$ называется с в о й с т в о м У и т н и, если для любого континуума $X \in \mathcal{P}$ и любого его отображения Уитни μ свойством $\mathcal{P}$ обладает каждый уровень Уитни $\mu^{-1}(t)$ при $t \in (0, \mu(X))$. Красинкевич и Надлер [367] показали, что разложимость, гомеоморфность соленоиду являются свойствами Уитни, а свойство неподвижной точки — нет. В. Харатоник [146] доказал, что однородность не является свойством Уитни. Более того, он построил такое отображение Уитни μ для сферы S^2 и такие два ее подконтинуума, принадлежащие одному уровню Уитни $\mu^{-1}(t)$, что $\mu^{-1}(t)$ локально стягиваем в одном из них и не локально стягиваем в другом. Като показал, что свойствами Уитни являются пунктированная 1-подвижность [327] и (почти) 1-подвижность [337], а 2-подвижность не является свойством Уитни даже для кривой [329]. Для кривых свойствами Уитни являются свойство быть абсолютным (окрестностным) ретрактом, свойство иметь тривиальный шейп [418], свойство быть фундаментальным окрестностным ретрактом [327]. Оледский доказал [515], что для дендритов свойством Уитни является стягиваемость, в то время как в общем случае стягиваемость, локальная стягиваемость, локальная связность, свойство быть абсолютным (окрестностным) ретрактом свойствами Уитни не являются.

Континуум X имеет с в о й с т в о п о к р ы т и я, если для любого отображения Уитни μ и любого $t \in (0, \mu(X))$ никакой подконтинуум континуума $\mu^{-1}(t)$ не покрывает X. Дилкс и Роджерс [168] доказали, что если континуум X имеет свойство

Келли, свойство покрытия, и вещественная прямая уплотняется на некоторую дуговую компоненту, оба конца которой плотны в X, то для любого отображения Уитни μ существует гомеоморфизм конуса над X на гиперпространство $\exp^c X$, переводящий каждый слой $X\times\{t\}$ на уровень Уитни $\mu^{-1}(t)$. В частности, такие континуумы Уитни стабильны, все их невырожденные уровни Уитни гомеоморфны между собой. К числу таких континуумов относятся соленоиды. Но среди них есть и не окружностно-подобные и не змеевидные.

Надлер [504] доказал, что для произвольного континуума X каждое отображение Уитни открыто и, как уже отмечено выше, монотонно, а отображение Уитни для $\exp X$ слабо конфлюэнтно. В то же время существуют континуумы (даже рациональные и плоские), не имеющие конфлюэнтных отображений Уитни для $\exp X$ [147]. В частности, никакое отображение Уитни для $\exp X$ такого континуума не может быть ни открытым, ни монотонным. Но для пеановских континуумов, как доказал Илланес [299], существуют монотонные открытые отображения Уитни для $\exp X$. Харатоник [146] доказал, что каждое конфлюэнтное отображение Уитни монотонно.

Связь между свойствами неприводимости континуума X и его уровней Уитни была исследована в [183] и [300]. Гудикунц и Надлер ввели понятие допустимого отображения Уитни [220] и доказали, что если μ — допустимое отображение Уитни, то оно открыто, а его слои являются фундаментальными абсолютными ретрактами (FAR). Они доказали также, что если X — пеановский континуум, μ — допустимое отображение Уитни для $\exp X$ или $\exp^c X$ (в этом случае предполагается, что X не содержит свободных дуг), то для любого $t\in(0,\mu(X))$ множества $\mu^{-1}(t)$, $\mu^{-1}([0,t])$ и $\mu^{-1}([t,\mu(X)])$ гомеоморфны гильбертову кубу Q. Като [325] усилил этот результат, показав, что в этих же предположениях отображение $\mu|_{\mu^{-1}((0,\mu(X)))}$ является тривиальным Q-расслоением. Эта теорема применима к гильбертову кубу Q, для которого существуют даже строго допустимые отображения Уитни. Кроме того, для $X=S^n$ $(n=1, 2, \ldots)$ Като построил отображения Уитни μ для $\exp X$ или $\exp^c X$ (в этом случае $n\geqslant 2$), для которых при некотором $t\in(0,\mu(X))$ отображения $\mu|_{\mu^{-1}((0,t])}$ являются тривиальными $X\times Q$-расслоениями.

В дальнейшем Като [334] доказал, что строго допустимые отображения Уитни (в силу вышесказанного являющиеся Q-расслоениями) допускают конечные коллапсируемые полиэдры, а утверждение про отображения Уитни, являющиеся $X\times Q$-расслоениями, распространяется с $X=S^n$ на $X=P$, где P — тело кубического локально регулярно коллапсируемого комплекса.

Красинкевич [360] доказал, что для любого окружностноподобного континуума X и любого отображения Уитни μ его слои $\mu^{-1}(t)$ при $t<\mu(X)$ шейпово эквивалентны X. Исследование

шейповых свойств слоев отображений Уитни продолжил Като. Для произвольного континуума X отображения Уитни μ и $t\in(0,\mu(X))$ он построил [327], [330] шейповый морфизм $f_{0t}: X\to\mu^{-1}(t)$, который оказался шейповый эквивалентностью в случаях

1) X — сильно извивающая кривая;

2) X—$\theta(m)$-кривая $(m<\omega)$ и каждый собственный подконтинуум X древовиден.

Затем он усилил этот результат [331], показав, что морфизм f_{0t} является шейповой эквивалентностью тогда и только тогда, когда каждый элемент из $\mu^{-1}(t)$ является древовидным континуумом. В частности, спокойная кривая и, следовательно, и кривая, являющаяся $FANR$-ом, шейпово эквивалентна своим уровням Уитни $\mu^{-1}(t)$ при всех достаточно малых t. Условие малости t здесь существенно, поскольку тот же Като доказал [332], что континуумы Уитни графов допускают все гомотопические типы ANR-ов, а для связного полиэдра P размерности $\geqslant 2$ и любого $n\leqslant 2$ существует отображение Уитни μ, некоторый уровень которого гомотопически доминирует сферу S^n, в частности $\mathrm{Fd}\,\mu^{-1}(t)\geqslant n$ [335].

Топологическое свойство $\mathcal{P}$ называется сильно Уитни — обратимым, если континуум X обладает этим свойством, как только для него существует отображение Уитни μ, все слои которого $\mu^{-1}(t)$, $0<t<\mu(X)$, обладают свойством $\mathcal{P}$. К числу сильно Уитни—обратимых свойств относятся змеевидность, древовидность, ацикличность, $\leqslant n$-мерность, атриодичность, нулевой спэн (см. [327], [347], [349], [499], [504]).

Другие вопросы, связанные со строением уровней Уитни, с построением специальных отображений Уитни, с продолжением отображением Уитни, со свойствами Уитни и т. д. исследовались также в [142], [148], [149], [176], [177], [209], [219], [324], [327], [333], [367], [380], [418], [419], [420], [505], [531], [532], [554], [559], [560], [561], [622].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Банах Т. О., Заричный М. М.* О компактификации функтора итерированного гиперпространства // Изв. вузов мат.— 1987.— № 10.— С. 3—6 (РЖМат, 1988, 3А644)
2. *Бобков Л. Ю.* Змеевидный бикомпакт с 1-й аксиомой счетности и с несовпадающими размерностями // Геометрия погруженных многообразий. М.— 1979.— С. 110—113 (РЖМат, 1980, 9А477)
3. *Голов В. И.* Гильбертово пространство как гиперпространство упорядоченных дуг // В кн.: Функ. анализ и его прил. в мех. и теории вероятностей.— М., 1984.— С. 13—18 (РЖМат, 1985, 6А431)
4. — Упорядоченные дуги пеановских континуумов. Послойный вариант // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1984.— № 3.— С. 77—79 (РЖМат, 1984, 9А498)
5. *Гуревич Р. Г.* Общая точка зрения на λ-дендроиды и теоремы о неподвижных точках // Fundam. math.— 1978.— *100*, № 2.— С. 109—118 (РЖМат, 1979, 4А539)

6. *Дранишников А. Н.* Универсальные менгеровские компакты и универсальные отображения // Мат. сб.— 1986.— *129,* № 1.— С. 121—139 (РЖМат, 1986, 6А737)
7. — Итерированные суперрасширения // В кн.: Общая топология. Отображения топологических пространств.— М., МГУ, 1986.— С. 45—59 (РЖМат, 1986, 6А737)
8. *Иванов А. В.* Суперрасширения метризуемых континуумов и обобщенного канторова дисконтинуума // Докл. АН СССР.— 1980.— *254,* № 2.— С. 279—281 (РЖМат, 1981, 1А510)
9. — Решение проблемы Ван Милла о характеризации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // Докл. АН СССР.— 1982.— *262,* № 3.— С. 526—528 (РЖМат, 1982, 4А447)
10. — Функторы типа суперрасширения и мягкие отображения // Мат. заметки.— 1984.— *36,* № 1.— С. 103—108 (РЖМат, 1984, 12А547)
11. — О пространствах полных сцепленных систем // Сиб. мат. ж.— 1986.— *27,* № 6.— С. 95—110 (РЖМат, 1987, 4А636)
12. *Качан Н. Д.* Пример нульмерного открытого отображения кривой Серпинского на отрезок // Функц. анализ (Ульяновск).— 1978.— № 11.— С. 64—68 (РЖМат, 1981, 6А507)
13. *Коваль Н. Л.* О пеановскозначных абсолютных ретрактах // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1987.— № 1.— С. 3—5 (РЖМат, 1987, 5А551)
14. *Лифанов И. К.* Вложение топологического произведения окружностноподобных континуумов // Докл. АН СССР.— 1971.— *201,* № 1.— С. 32—35 (РЖМат, 1972, 3А472)
15. *Локуциевский О. В.* Одна теорема о неподвижной точке // Успехи мат. наук.— 1957.— *12,* вып. 3.— С. 171—172 (РЖМат, 1958, 1912)
16. *Мирзаханян Р. Э.* Тройка бесконечных итераций функтора гиперпространств включения — послойная версия // Общ. топол. Пространства и отображения.— М., МГУ, 1989.— С. 84—89 (РЖМат, 1990, 9А419)
17. — О бесконечной итерации функтора гиперпространств включения // Вестн. МГУ. Мат., Мех.— 1988.— № 6.— С. 14—17 (РЖМат, 1989, 3А476)
18. — О функторе пополненного итерированного гиперпространства включения // Вестн. МГУ. Мат., Мех.— 1989.— № 2.— С. 75—77 (РЖМат, 1989, 8А617)
19. *Моисеев Е. В.* О функторах замкнутых гиперпространств роста и включения // Деп. в ВИНИТИ 29.05.1989, № 3516—В89
20. *Моисеев Е. В.* О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1988.— № 3.— С. 54—57 (РЖМат, 1988, 11А618)
21. *Одинцов А. А.* Змеевидные бикомпакты и некоторые вопросы теории размерности // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1986.— № 1.— С. 59—62 (РЖМат, 1986, 6А784)
22. — Открытые образы циклически змеевидных континуумов // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1989.— № 5.— С. 76—78 (РЖМат, 1990, 2А497)
23. *Пасынков Б. А.* О змеевидных бикомпактах // Chechoslovak Math. J.— 1963.— *13,* № 3.— С. 473—476 (РЖМат, 1965, 10А300)
24. *Прохорова И. Е.* О гиперотображениях континуумов // Мат. заметки.— 1987.— *42,* № 4.— С. 572—580 (РЖМат, 1988, 2А575)
25. *Савченко А. Г.* О достаточных условиях уникогерентности компактов вида $F(X)$ // В кн.: V Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев.— 1985.— С. 214—215 (РЖМат, 1986, 1А649К)
26. — О свойствах отображения $\exp f$ // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1986.— № 1.— С. 19—25 (РЖМат, 1985, 5А483)
27. *Устинов Ю. И.* Непрерывные отображения одномерных соленоидов // Успехи мат. наук. 1980.— *35,* № 3.— С. 233—237 (РЖМат, 1980, 11А544)
28. *Федорчук В. В.* Экспоненты пеановских континуумов — послойный вариант // Докл. АН СССР.— 1982.— *262,* № 1.— С. 41—44 (РЖМат, 1982, 4А553)
29. — Об открытых отображениях // Успехи мат. наук.— 1982.— *37,* № 4.— С. 187—188 (РЖМат, 1983, 1А529)
30. — О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи мат. наук.— 1984.— *39,* № 5.— С. 169—208 (РЖМат, 1985, 2А535)
31. — Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // Успехи мат. наук.— 1986.— *41,* № 6.— С. 121—159 (РЖМат, 1987, 4А642)
32. — Расслоения пространств вероятностных мер и геометрия бесконечных итераций некоторых монадичных функторов // Докл. АН СССР.— 1988.— *301,* № 1.— С. 41—45 (РЖМат, 1988, 12А517)
33. — Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.— *54,* № 2.— С. 396—417 (РЖМат, 1990, 9А427)
34. *Чатырко В. А.* О змеевидных бикомпактах // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1984.— № 4.— С. 15—18 (РЖМат, 1984, 12А579)
35. *Шапиро Л. Б.* О пространствах замкнутых подмножеств бикомпактов // Докл. АН СССР.— 1976.— *231,* № 2.— С. 295—298 (РЖМат, 1977, 4А495)
36. *Штанько М. А.* Вложение древовидных компактов в E^3 // Докл. АН СССР.— 1966.— *19,* № 2.— С. 292—294 (РЖМат, 1966, 12А391)
37. — Вложение древовидных компактов в E^3 // Мат. сб. 1968.— *75,* № 2.— С. 211—224 (РЖМат, 1968, 9А348)
38. *Anderson R. D.* On collections of pseudo-arcs. Abstract 337t // Bull. Amer. Math. Soc.— 1950.— *56.*— С. 350
39. — Atomic decompositions // Duke Math. J.— 1956.— *23,* № 4.— С. 507—514 (РЖМат, 1958, 3607)
40. — A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity // Ann. Math.— 1958.— *67.*— С. 313—324 (РЖМат, 1959, 2466)
41. *Andrews J. J. A.* A chainable continuum no two of whose nondegenerate subcontinua are homeomorphic // Proc. Amer. Math. Soc.— 1961.— *12,* № 2.— С. 333—334 (РЖМат, 1961, 11А273)
42. *Bacon P.* An acyclic continuum that admits no mean // Fundam. math.— 1970.— *67,* № 1.— С. 11—13 (РЖМат, 1970, 11А351)
43. *Ball B. J., Sher R. B.* Embedding circle-like continua in E^3 // Can. J. Math.— 1973.— *25,* № 4.— С. 791—805 (РЖМат, 1974, 4А373)
44. *Barge M., Martin J.* Chaos, periodicity and snake-like continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— *289,* № 1.— С. 355—365 (РЖМат, 1986, 4А702)
45. *Barrett L. K.* The structure of decomposable snake-like continua // Duke Math. J.— 1961.— *28,* № 4.— С. 515—522 (РЖМат, 1962, 7А271)
46. *Bartick P., Duda E.* Finite-to-one open mappings on circularly chainable continua // Pacif. J. Math.— 1983.— *106,* № 1.— С. 17—21 (РЖМат, 1983, 12А639)
47. *Bell H., Dickman R. F., Jr.* The end of a conjecture of A. H. Stone // Topol. and Appl.— 1985.— *19,* № 3.— С. 245—250 (РЖМат, 1986, 3А697)
48. *Bellamy D. P.* Mapping continua onto the cone over the Cantor set // In: Stud. Topol., New York, e. a., 1975.— С. 43—45 (РЖМат, 1976, 8А664)
49. — Continua for which the set function T is continuous // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— *151,* № 2.— С. 581—587 (РЖМат, 1971, 8А367)
50. — An uncountable collection of chainable continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— *160.*— С. 297—304 (РЖМат, 1972, 5А511)
51. — Mappings of indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *30,* № 1.—С. 179—180 (РЖМат, 1973, 9А453)
52. — Composants of Hausdorff indecomposable continua; a mapping approach // Pacif. J. Math.— 1973.— *47,* № 2.— С. 303—309 (РЖМат, 1974. 5А543)

53. — Mapping hereditarily indecomposable continua onto a pseudo-arc // Lect. Notes Math.— 1974.— *375.*— C. 6—14 (РЖМат, 1974, 9А566)
54. — Weak chainability of pseudocones // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *48,* № 2.— C. 476—478 (РЖМат, 1976, 2А603)
55. — Indecomposable continua with one and two composants // Fundam. math.— 1978.— *101,* № 2.— C. 129—134 (РЖМат, 1979, 8А488)
56. — Tree-likeness and the fixed point property // Appl. Anal.— 1978.— *8,* № 1.— C. 97—98 (РЖМат, 1979, 8А494)
57. — A tree-like continuum without fixed point property // Houston J. Math.— 1980.— *6,* № 1.— C. 1—13 (РЖМат, 1980, 12А535)
58. — An interesting plane dendroid // Fundam. Math.— 1980.— *110,* № 3.— C. 191—208 (РЖМат, 1981, 7А507)
59. — Set functions and continuous maps // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— C. 31—38 (РЖМат, 1983, 5А447)
60. — Cyclic connectedness theorems // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— C. 143—145 (РЖМат, 1983, 5А450)
61. — Arcwise connected homogeneous metrric continua are colocally arcwise connected // Houston J. Math.— 1985.— *11,* № 3.— C. 277—281 (РЖМат, 1986, 6А767)
62. — Short paths in homogeneous continua // Topol. and Appl.— 1987.— *26,* № 3.— C. 287—291 (РЖМат, 1988, 1А618)
63. —, *Charatonik J. J.* The set function T and contractibility of continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1977.— *25,* № 1.— C. 47—49 (РЖМат, 1977, 12А578)
64. —, *Hagopian C. L.* Mapping continua onto their cones // Colloq. math.— 1979.— *41,* № 1.— C. 53—56 (РЖМат, 1980, 5А492)
65. *Bennett D. E.* Strongly unicoherent continua // Abstr. «Topology», New York—Basel, 1976.— C. 127— (РЖМат, 1977, 9А593)
66. — Aposyndetic properties of unicoherent continua // Pacif. J. Math.— 1971.— *37,* № 3.— C. 585—589 (РЖМат, 1972, 2А648)
67. — Aposyndesis and inicoherence // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— C. 38—42 (РЖМат, 1983, 7А504)
68. —, *Fugate J. B.* Continua and their non-separating subcontinua // Roczpr. mat.— 1977.— 149 (РЖМат, 1978, 2А494)
69. *Bennet R.* Embedding products of chainable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1965.— *15,* № 5.— C. 1026—1027 (РЖМат, 1966, 7А370)
70. — *Transue W. R. R.* On embeddings of cones over circularly chainable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *21,* № 2.— C. 275—276 (РЖМат, 1970, 3А541)
71. *Bing R. H.* Snakelike continua // Duke Math. J.— 1951.— *18.*— C. 653—663
72. — Concerning hereditarily indecomposable continua // Pacif. J. Math.— 1951.— *1.*— C. 43—51
73. — A homogeneous indecomposable plane continuum // Duke Math. J.— 1958.— *15.*— C. 729—742
74. — Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo arc // Proc. Amer. Math. Soc.— 1959.— *10,* № 3.— C. 345—346 (РЖМат, 1960, 8730)
75. — A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc // Can. J. Math.— 1960.— *12,* № 2.— C. 209—230 (РЖМат, 1961, 3А335)
76. — Embedding circle-like continua in the plane // Can. J. Math.— 1962.— *14,* № 1.— C. 113—128 (РЖМат, 1964, 6А298)
77. — The elusive fixed point property // Amer. Math. Mon.— 1969.— *76,* № 2.— C. 119—132 (РЖМат, 1969, 12А616)
78. —, *Borsuk K.* Some remarks concerning topologically homogeneous spaces // Ann. Math.— 1965.— *81,* № 1.— C. 100—111 (РЖМат, 1965, 9А314)
79. —, *Jones F. B.* Another homogeneous plane continuum // Trans. Amer. Math. Soc.— 1959.— *90,* № 1.— C. 171—192 (РЖМат, 1961, 2А196)
80. *Brechner B., Mayer J. C.* The prime end structure of indecomposable continua and the fixed point property // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981. — C. 151—168 (РЖМат, 1983, 4А603)
81. *Brechner B. L.* Periodic homeomorphisms on chainable continua // Fundam. math.— 1969.— *64,* № 2.— C. 197—202 (РЖМат, 1969, 9А354)
82. *Brouwer L. E. J.* // Math. Ann.— 1910.— *68.*— C. 426
83. *Burgess C. E.* Continua which are the sum of a finite member of indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1953.— *4,* № 2.— C. 234—239 (РЖМат, 1955, 127)
84. — Some theorems on *n*-homogeneous continua // Proc. Amer. Math. Soc. 1954.— *5,* № 1.— C. 136—143 (РЖМат, 1955, 2593)
85. — Certain types of homogeneous continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1955.— *6,* № 3.— C. 348—350 (РЖМат, 1956, 4394)
86. — Separation properties and *n*-indecomposable continua // Duke Math. J.— 1956.— *23,* № 4.— C. 595—599 (РЖМат, 1957, 888)
87. — Chainable continua and indecomposibility // Pacif. J. Math.— 1959.— *9,* № 3.— C. 653—659 (РЖМат, 1960, 8731)
88. — Homogeneous continua which are almost chainable // Can. J. Math.— 1961.— *13,* № 3.— C. 519—528 (РЖМат, 1963, 8А250)
89. — Continua which have width zero // Proc. Amer. Math. Soc.— 1962.— *13.*— C. 477—481 (РЖМат, 1964, 6А303)
90. — A characterization of homogeneous plane continua that are circularly chainable // Bull. Amer. Math. Soc.— 1969.— *75,* № 6.— C. 1354—1358 (РЖМат, 1970, 8А373)
91. — Homogenous 1-dimensional continua // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— C. 169—175 (РЖМат, 1983, 5А458)
92. *Case J.* Another 1-dimensional homogeneous continuum which contains an arc // Pacif. J. Math.— 1981.— *11,* № 2.— C. 455—469 (РЖМат, 1962, 3А311)
93. —, *Chamberlin R. E.* Characterizations of tree-like continua // Pacif. J. Math.— 1960.— *10,* № 1.— C. 73—84 (РЖМат, 1961, 3А334)
94. *Chamberlin R. E.* Tree-like continua and quasi-complexes // Duke Math. J.— 1958.— *28,* № 3.— S. 511—517 (РЖМат, 1960, 8732)
95. *Charatonik J. J.* On irreducible smooth continua // In: Proc. Intern. Symp, Topology and Applic., Budva, 1972, Beograd, 1973.— C. 45—50 (РЖМат, 1974, 9А564)
96. — Problems // In: Proc. Intern. Symp, Topology and Appl., Budva, 1972, Beograd, 1973.— C. 51 (РЖМат, 1974, 9А565)
97. — Some problems concerning monotone decompositions of continua // In: Topics Topology, Amsterdam—London, 1974.— C. 145—154 (РЖМат, 1975, 12А490)
98. — Problems and remarks on contractibility of curves // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra IV Proc. 4th Prague Sym., 1976, Part B, 1977.— C. 72—76 (РЖМат, 1978, 7А657)
99. — Some problems of selections and contractibility // Rend. Circ. mat. Palermo, 1988, [37], Suppl.— № 18.— C. 27—30 (РЖМат, 1988, 12А526)
100. — Confluent mappings and unicoherence of continua // Fundam. math.— 1964.— *56,* № 2.— C. 213—220 (РЖМат, 1965, 9А316)
101. — On fans // Roczpr. mat.— 1967.— № 54 (РЖМат, 1968, 5А454)
102. — Fixed point property for monotone mappings of hereditarily stratified λ-dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1968.— *16,* № 12.— C. 931—936 (РЖМат, 1969, 6А334)
103. — On decompositions of λ-dendroids // Fundam. math.— 1970.— *67,* № 1.— C. 15—30 (РЖМат, 1970, 12А416)

104. — An example of monostratiform λ-dendroid // Fundam. math.— 1970.— *67*, № 1.— С. 75—87 (РЖМат, 1970, 12А417)
105. — Remarks on some class of continuous mappings of λ-dendroids // Fundam. math.— 1970.— *67*, № 3.— С. 337—344 (РЖМат, 1970, 12А418)
106. — Concerning the fixed point property for λ-dendroids // Fundam. math.— 1970.— *69*, № 1.— С. 55—62 (РЖМат, 1971, 3А394)
107. — Irreducible continua in monostratiform λ-dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys.— 1971.— *19*, № 5.— С. 365—367 (РЖМат, 1971, 11А451)
108. — Monotone decompositions of continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. surves // Colloq. math.— 1972.— *26*.— С. 331—338 (РЖМат, 1973, 2А422)
109. — The fixed point property for set-valued mappings of some acyclic curves // Colloq. math.— 1972.— *26*.— С. 331—338 (РЖМат, 1973, 6А546)
110. — On decompositions of continua // Fundam. math.— 1973.— *79*, № 2.— С. 113—130 (РЖМат, 1974, 1А491)
111. — A theorem on non-planar dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 3.— С. 173—176 (РЖМат, 1976, 12А598)
112. — Accessibility and mapping of dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 4.— С. 239—243 (РЖМат, 1976, 12А600)
113. — A theorem on monotone mappings of planar λ-dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 3.— С. 171—172 (РЖМат, 1976, 12А608)
114. — The set function T and homotopies // Colloq. math.— 1978.— *39*, № 2.— С. 271—274 (РЖМат, 1979, 8А492)
115. — A characterization of the pseudo-arc // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1978.— *26*, № 11.— С. 901—903 (РЖМат, 1979, 9А494)
116. — On chaotic curves // Colloq. math.— 1979.— *41*, № 2.— С. 219—236 (РЖМат, 1981, 4А510)
117. — Generalized homogeneity and some characterizations of the pseudo-arc // In: Topology, 4th Colloq., Budapest, 1978, vol. 1, Amsterdam, e. a.— 1980.— С. 269—272 (РЖМат, 1981, 2А513)
118. — Several problems on universal smooth dendroids // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 5, Berlin.— 1983.— С 73—75 (РЖМат, 1983, 10А500)
119. — Local homeomorphisms onto cyclic continua // Period. math. hung.— 1983.— *14*, № 3-4.— С. 245—249 (РЖЕат, 1984, 5А554)
120. — The property of Kelley and confluent mappings // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1983.— *31*, № 9-12.— С. 375—380 (РЖМат, 1984, 12А568)
121. — Smooth dendroids without ordinary points // Fundam. math.— 1984.— *122*, № 1.— С. 61—70 (РЖМат, 1984, 12А566)
122. — Some problems on generalized homogeneity of continua // Lect. Notes Math.— 1984.— *1060*.— С. 1—6 (РЖМат, 1985, 1А694)
123. — Mappings on the Sierpinski curve onto itself // Proc. Amer. Math. Soc. — 1984.— *92*, № 1.— S. 125—132 (РЖМат, 1985, 10А524)
124. — Remarks on arc-preserving and dendrite-preserving mappings onto curves // Bull. Malays. Math. Soc.— 1985.— *8*, № 1.— С. 9—13 (РЖМат, 1986, 3А694)
125. — Inverse limits of arcs and of simple closed curves with confluent bonding mappings // Period. math. hung.— 1985.— *16*, № 4.— С. 219—236 (РЖМат, 1986, 9А513)
126. — Mapping properties of hereditary classes of acyclic curves // Period. math. hung.— 1987.— *18*, № 2.— С. 143—149 (РЖМат, 1988, 1А617)
127. — Generalized homogeneity of curves and a question of Kato // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1988.— *36*, № 7—8.— С. 409—411 (РЖМат, 1990, 9А432)
128. — Monotone mappings and unicoherence of at subcontinua // Topol. and Appl.— 1989.— *33*, № 2.— С. 209—215 (РЖМат, 1990, 5А496)
129. —, *Charatonik W. J.* Inverse limits and smoothness of continua // Acta math. hung.— 1984.— *43*, № 1-2.— С. 7—12 (РЖМат, 1984, 6А509)
130. —, *Charatonik W. J.* Monotoneity relative to a point and inverse limits of continua // Glas. mat.— 1985.— *20*, № 1.— С. 139—151 (РЖМат, 1986, 5А640)
131. —, — The property of Kelley for fans // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys.— 1989.— *36*, № 3—4.— С. 169—173 (РЖМат, 1990, 2А496)
132. —, — Images of the cantor fan // Topol. and Appl.— 1989.— *33*, № 2.— С. 163—172 (РЖМат, 1990, 5А495)
133. —, *Eberhart C.* On smooth dendroids // Fundam. math.— 1970.— *68*, № 3.— С. 297—322 (РЖМат, 1971, 1А409)
134. —, — On contractible dendroids // Colloq. math.— 1972.— *25*, № 1.— С. 89—98 (РЖМат, 1973, 2А423)
135. —, *Grabowski Z.* Homotopically fixed arcs and the contractibility of dendroids // Fundam. math.— 1978.— *100*, № 3.— С. 229—237 (РЖМат, 1979, 5А436)
136. —, *Januszkiewicz L. T.* An uncountable collection of nonplanable smooth dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1977. — *25*, № 2.— С. 147—149 (РЖМат, 1978, 1А490)
137. —, *Mackowiak T.* Around Effros's theorem // Trans. Amer. Math. Soc.— 1986.— *298*, № 2.— С. 579—602 (РЖМат, 1987, 6А580)
138. —, *Miklos S.* A fixed point property for locally one-to-one mappings // Rocz. PTM.— 1985.— *25*, № 1.— С. 21—26 (РЖМат, 1986, 1А674)
139. —, — Local expansions on graphs and order of a point // Acta math. hung.— 1986.— *47*, № 3—4.— С. 287—297 (РЖМат, 1987, 5А575)
140. —, *Rudy Z.* Remarks on non-planable dendroids // Colloq. math.— 1977.— *37*, № 2.— С. 205—216 (РЖМат, 1978, 7А663)
141. *Charatonik W. J.* Continua homeomorphic to all their confluent images // Rend. Circ. and Paledmo, 1988, [*37*], Suppl.— № 18.— С. 249—253 (РЖМат, 1988, 11А629)
142. — An open Whitney map for the hyperspace of a circle // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 6. Proc. 6th Prague Topol. Symp. 25—29, 1986, Berlin, 1988.— С. 91—94
143. — Inverse limits of smooth continua // Comment. Math. Univ. carol.— 1982.— *23*, № 1.— С. 183—191 (РЖМат, 1982, 8А550)
144. — Hyperspaces and the property of Kelley // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1982.— *30*, № 9-10.— С. 457—459 (РЖМат, 1983, 10А473)
145. — Smooth dendroids as inverse limits of dendrites // Fundam. math.— 1984.— *124*, № 2.— С. 163—168 (РЖМат, 1985, 7А620)
146. — Homogeneity is not a Whitney property // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *92*, № 2.— С. 311—312 (РЖМат, 1985, 9А400)
147. — A continuum X which has no confluent Whitney map for 2^x // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *92*, № 2.— С. 314—314 (РЖМат, 1985, 9А401)
148. — On the property of Kelley in hyperspaces // Lect. Notes Math.— 1984.— *1060*.— С. 7—10 (РЖМат, 1985, 1А668)
149. — A metric on hyperspaces defined by Whitney maps // Proc. Amer. Math. Soc.— 1985.— *94*, № 3.— С. 535—538 (РЖМат, 1986, 2А568)
150. — Pointwise smooth dendroids have contactible hyperspaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1985.— *33*, № 7—8.— С. 409—412 (РЖМат, 1986, 5А643)
151. —, *Garncarek Z.* Some remarks on continuously homogeneous continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1984.— *32*, № 5—6.— С. 339—342 (РЖМат, 1985, 8А613)

152. *Collins W. D.* A property of atriodic continua // Ill. J. Math.— 1984.— *28,* № 3.— С. 480—486 (РЖМат, 1985, 10А528)
153. *Cook H.* Upper semi-continuous continuum-valued mappings onto circle-like continua // Fundam. math.— 1967.— *60,* № 3.— С. 233—239 (РЖМат, 1968, 6А464)
154. — Concerning three questions of Burgess about homogeneous continua // Colloq. math.— 1968.— *19,* № 2.— С. 241—244 (РЖМат, 1969, 1А478)
155. — Tree-likeness of dendroids and λ-dendroids // Fundam. math.— 1970. — *68,* № 1.— С. 19—22 (РЖМат, 1971, 1А407)
156. — Tree-likeness of hereditarily equivalent continua // Fundam. math.— 1970.— *68,* № 2.— С. 203—205 (РЖМат, 1971, 1А408)
157. —, *Lelek A.* On the topology of curves. IV // Fundam. math.— 1972.— *76,* № 2.— С. 167—179 (РЖМат, 1973, 4А622)
158. —, — Weakly confluent mappings and atriodic Suslinian curves // Can. J. Math.— 1978.— *30,* № 1.— С. 32—44 (РЖМат, 1978, 9А475)
159. *Cornette J. L.* Retracts of the pseudo-arc // Colloq. math.— 1968.— *19,* № 2.— С. 235—239 (РЖМат, 1969, 1А479)
160. *Dantzig D.* van Ueber topologisch homogene Kontinua // Fundam. math. — 1930.— *15.*— С. 102—125
161. *Davis J. F.* The span of almost chainable homogeneous continua // Ill. J. Math.— 1981.— *25,* № 4.— С. 622—625 (РЖМат, 1982, 11А428)
162. — Atriodic acyclic continua and class W // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984. — *90,* № 3.— С. 477—482 (РЖМат, 1984, 12А565)
163. — The equivalence of zero span and zero semispan // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *90,* 1.— С. 133—138 (РЖМат, 1985, 1А690)
164. — The preservation of atriodicity by semiconfluent mappings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100,* № 3.— С. 579—584 (РЖМат, 1988, 2А595)
165. — An atriodic tree-like continuum with positive span which admits a monotone mapping to a chainable continuum // Fundam. math.— 1988.— *131,* № 1.— С. 13—24 (РЖМат, 1989, 6А451)
166. *Debski W.* A non-cotractible dendroid // Pr. nauk. USl. Katowicach.— 1982. — № 425.— С. 87—89 (РЖМат, 1983, 6А523)
167. — On topologicaal types of the simplest indecomposable continua // Colloq. math. (PRL).— 1985.— *49,* № 2.— С. 203—211 (РЖМат, 1986, 2А586)
168. *Dilks A. M., Rogers J. T., Jr.* Whitney stability and contractible hyperspaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *83,* № 3.— С. 633—640 (РЖМат, 1982, 4А548)
169. *Duda E.* Pointwise periodic homeomorphisms on chainable continua // Pacif. J. Math.— 1981.— *96,* № 1.— С. 77—80 (РЖМат, 1982, 5А494)
170. — A sum theorem for semispan of continua // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 5, Berlin.— 1983.— С. 162—165 (РЖМат, 1984, 3А663)
171. — A characterization of semispan of continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *96,* № 1.— С. 171—174 (РЖМат, 1986, 10А578)
172. —, *Bartick P.* Finite-to-one open mappings on chainable continua // Proc. Intern. Conf. on Geometric Topology, Warszawa, 1978, Warszawa, 1980.— С. 103—108
173. —, *Kell J.* Monotone and open mappings on circularly chainable continua // In: Proc. Intern. Conf. on Geometric Topology, Warszawa, 1978, Warszawa, 1980.— С. 109—111
174. —, — Two sum theorems for semispan // Houston J. Math.— 1982.— *8,* № 3.— С. 317—321 (РЖМат, 1984, 3А664)
175. *Eberhart C. A.* A note of smothness // Colloq. math.— 1969.— *20,* № 1.— С. 89—90 (РЖМат, 1969, 10А301)
176. — Continua with locally connected Whitney continua // Houston J. Math. — 1978.— *4.*— С. 165—173 (РЖМат, 1979, 3А448)
177. — Intervals of continua which are Hilbert cubes // Proc. Amer. Math. Soc. — 1978.— *88,* № 2.— С. 220—224 (РЖМат, 1978, 11А532)

178. — Weakly confluent maps on trees // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 209—215 (РЖМат, 1983, 8А522)
179. —, *Fugate J. B.* Weakly confluent maps on trees // Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 209—215 (РЖМат, 1983, 6А552)
180. —, — Approximating continua from within // Fundam. math.— 1971.— *72,* № 3.— С. 223—231 (РЖМат, 1972, 4А563)
181. —, —, *Gordth G. R., Jr.* Branchpoint covering theorems for confluent and weakly confluent mappings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *55,* № 2. — С. 409—415 (РЖМат, 1977, 3А451)
182. —, *Nadler S. B., Jr.* The dimension of certain hyperspaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1971.— *19.*— С. 1027—1034 (РЖМат, 1972, 4А553)
183. —, — Irreducible Whitney levels // Houston J. Math.— 1980.— *6.* С. 355—363 (РЖМат, 1981, 7А505)
184. —, —, *Nowell W. O., Jr.* Spaces of order arcs in hyperspaces // Fundam. math.— 1981.— *112,* № 2.— С. 111—120 (РЖМат, 1981, 11А519)
185. *Effros E. G.* Transformation groups and C^*-algebras // Ann. Math.— 1965.— *81.*— С. 38—55 (РЖМат, 1966, 1Б475)
186. *Emeryk A.* An atomic maps onoto an arbitrary metric continua // Fundam. math.— 1972.— *77,* № 2.— С. 145—149 (РЖМат, 1973, 6А527)
187. —, *Horbanowicz Z.* On atomic mappings // Colloq. math.— 1973.— *27,* № 1.— С. 49—55 (РЖМат, 1973, 10А434)
188. *Epps B. B.* A classification of continua and weakly confluent mappings // Colloq. math.— 1976.— *36,* № 2.— С. 217—227 (РЖМат, 1978, 1А488)
189. *Fearnley L.* Continuous images of the pseudo-arc // Doct. diss. Univ. Utah, 1959, Ref. «Bull. Univ. Utah», 1961, *52,* № 27, 112.— (РЖМат, 1963, 10А268)
190. — Characterizations of the continuous images of the pseudo-arc // Trans. Amer. Math. Soc.— 1964.— *111,* № 3.— С. 380—399 (РЖМат, 1965, 2А441)
191. — Topological operations on the class of continuous images of all snake-like continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1965.— *15,* № 2.— С. 289—300 (РЖМат, 1966, 1А506)
192. — Embeddings of topological products of *K*-cell-like continua // Amer. J. Math.— 1966.— *88,* № 2.— С. 347—356 (РЖМат, 1967, 12А431)
193. — Embeddings of topological products of circularly chainable continua // Can. J. Math.— 1966.— *18,* № 4.— С. 715—723 (РЖМат, 1968, 2А396)
194. — Characterization of the continuous images of all pseudo-circles // Pacif. J. Math.— 1967.— *23,* № 3.— С. 491—513 (РЖМат, 1968, 10А343)
195. — The pseudo-circle is not homogeneous // Bull. Amer. Math. Soc.— 1969.— *75,* № 3.— С. 554—558 (РЖМат, 1969, 11А425)
196. — The pseudo-circle is unique // Bull. Amer. Math. Soc.— 1969.— *75,* № 2.— С. 398—401 (РЖМат, 1970, 3А539)
197. — Embeddings of topological products of sphere-like continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *19,* № 4.— С. 586—600 (РЖМат, 1970, 3А540)
198. — Pseudo-circle is unique // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— *149,* № 1. — С. 45—64 (РЖМат, 1971, 2А433)
199. — Classification of all heredarily indecomposable circularly chainable continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— *168,* № 6.— С. 387—401 (РЖМат, 1973, 3А522)
200. *Fedorchuk V. V.* Absolute retracts and some functors // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 5, Berlin.— 1983.— С. 174—182 (РЖМат, 1983, 11А673)
201. — On hypermaps which are trivial bundles // Lect. Notes Math.— 1984.— *1060.*— С. 26—36 (РЖМат, 1985, 1А667)
202. *Feuerbacher Gary A.* Weakly chainable circle-like continua // Fundam. math.— 1980.— *106,* № 1.— С. 1—12 (РЖМат, 1980, 12А536)

203. *Ford J., Rogers J. T., Jr.* Refinable maps // Colloq. Math.— 1978.— *39,* № 2.— С. 263—269 (РЖМат, 1979, 8А499)
204. *Fugate J. B.* On decomposable chainable continua // Doct. diss. State Univ. Iowa, 1964, 52 pp., «Dissert. Abstrs», 1965, *25,* № 9, 5297 (РЖМат, 1965, 12А428)
205. — Chainable continua // In: Topol. Seminar, Wisconsin, 1965, Princeton, N. J., Univ. Press— 1966.— С. 129—133 (РЖМат, 1967, 12А429)
206. — Decomposable chainable continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1966. — *123,* № 2.— С. 460—468 (РЖМат, 1967, 12А430)
207. — A characterization of chainable continua // Can. J. Math.— 1969.— *21,* № 2.— С. 383—393(РЖМат, 1970, 2А427)
208. — Retracting fans onto finite fans // Fundam. math.— 1971.— *71,* № 2. — С. 113—125 (РЖМат, 1972, 1А800)
209. — Small retractions of smooth dendroids onto trees // Fundam math.— 1971.— *71,* № 3.— С. 255—262 (РЖМат, 1972, 2А652)
210. —, *Mohler L. K.* A note on open mappings of irreducible continua // Colloq. math.— 1973.— *28,* № 2.— С. 225—226 (РЖМат, 1974, 4А376)
211. —, — Quasi-monotone and confluent images of irreducible continua // Colloq. math.— 1973.— *28,* № 2.— С. 221—224 (РЖМат, 1974, 5А545)
212. —, — The fixed point property for tree-like continua with finitely many arc components // Pacif. J. Math.— 1975.— *57,* № 2.— С. 393—402 (РЖМат, 1976, 3А530)
213. *Ganea T.* Symmetrische Potenzen topologischer Raume // Math. Nachr.— 1954.— *11,* № 4-5.— С. 305—316 (РЖМат, 1955, 3109)
214. *Goodykoontz J. T., Jr.* $C(X)$ is not necessarily a retract of 2^X / Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— *67,* № 1.— С. 177—178 (РЖМат, 1978, 9А476)
215. — Hyperspaces of arc-smooth continua // Houston J. Math.— 1981.— *7,* № 1.— С. 33—41 (РЖМат, 1982, 3А562)
216. — Arc-smoothness in hyperspaces // Topol. and Appl.— 1983.— *15,* № 2.— С. 131—150 (РЖМат, 1983, 6А524)
217. — Nonlocally connected continuum X such that $C(X)$ is a retract of 2^X // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *92,* № 2.— С. 319—322(РЖМат, 1985, 1А669)
218. — Some retractions and deformation retractions on 2^X and $C(X)$ // Topol. and Appl.— 1985.— *21,* № 2.— С. 121—133 (РЖМат, 1986, 6А749)
219. — Geometric models of Whitney levels // Houston J. Math.— 1985.— *11,* № 1.— С. 75—89 (РЖМат, 1985, 10А527)
220. —, *Nadler S. B., Jr.* Whitney levels in hyperspaces of certain Peano continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1982.— *274.*— С. 671—694 (РЖМат, 1983, 8А535)
221. *Gordth G. R., Jr.* Every continuum is a retract of some irreducible indecomposable continuum // In: Topics Topology, Amsterdam—London, 1974.— С. 347—350 (РЖМат, 1976, 1А557)
222. — On decompositions of smooth continua // Fundam. math.— 1972.— *75,* № 1.— С. 51—60 (РЖМат, 1973, 2А425)
223. — Concerning closed quasi-orders on hereditarily unicoherent continua // Fundam. math.— 1973.— *78,* № 1.— С. 61—73 (РЖМат, 1973, 8А408)
224. — Terminal subcontinua of hereditarily unicoherent continua // Pacif. J. Math.— 1973.— *47,* № 2.— С. 457—464 (РЖМат, 1974, 5А544)
225. — Aposyndesis and the notion of smootness in continua // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 65—70 (РЖМат, 1983, 5А449)
226. — Aposysndesis in hereditarily unicoherent continua // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 53—63 (РЖМат, 1983, 5А459)
227. —, *Hughes C. B.* On freely decomposable mappings of continua // Glas. mat.— 1979.— *14,* № 1.— С. 137—146 (РЖМат, 1980, 1А584)
228. —, *Lum L.* Radially convex mappings and smoothness in continua // Houston J. Math.— 1978.— *4,* № 3— С. 335—342 (РЖМат, 1979, 8А491)

229. *Grace E. E.* Aposyndesis and weak cutting // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., Maq 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 71—82 (РЖМат, 1983, 5А454)
230. — A bibliography on aposyndesis // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 493—513 (РЖМат, 1983, 5А457)
231. — Monotone decompositions of θ-continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1983.— *275,* № 1.— С. 287—295 (РЖМат, 1983, 8А536)
232. — Generalized refinable maps // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *98,* № 2.— С. 329—335 (РЖМат, 1987, 4А644)
233. —, *Hagopian C. L., Vought E. J.* Almost arcwise connectivity in unicoherent continua // Topol. and Appl.— 1985.— *21,* № 1.— С. 27—33 (РЖМат, 1986, 6А768)
234. —, *Vought E. J.* Quasi-monotone images of certain classes of continua // Topol. and Appl.— 1978.— *9,* № 2.— С. 111—116 (РЖМат, 1979, 2А353)
235. —, — Semi-confluent and weakly confluent images of tree-like and atriodic continua // Fundam. math.— 1978.— *101,* № 2.— С. 151—158 (РЖМат, 1979, 8А490)
236. —, — Monotone decompositions of θ_n-continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1981.— *263,* № 1.— С. 261—270 (РЖМат, 1981, 7А509)
237. —, — Quasi-monotone mappings on θ_n-continua // Topol. and Appl.— 1984.— *17,* № 1.— С. 55—62 (РЖМат, 1984, 8А527)
238. —, — Refinable maps and θ_n-continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1989.— *106,* № 1.— С. 231—239 (РЖМат, 1990, 2А498)
239. *Graham B. G.* On contractible fans // Fundam. math.— 1981.— *111,* № 1.— С. 77—93 (РЖМат, 1981, 7А508)
240. *Grispolakis J., Nadler S. B., Jr., Tymchatyn E. D.* Some properties of hyperspaces with applications to continua theory // Can. J. Math.— 1979.— *31,* № 1.— С. 197—210 (РЖМат, 1979, 9А493)
241. —, *Tymchatyn E. D.* Semi-cofluent mappings and acyclity // Houston J. Math.— 1978.— *4,* № 3.— С. 343—357 (РЖМат, 1979, 8А493)
242. —, — A universal smooth dendroid // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1978.— *26,* № 12.— С. 991—998 (РЖМат, 1979, 9А489)
243. —, — Weakly confluent mappings and the covering property of hyperspaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *74,* № 1.— С. 177—182 (РЖМат, 1980, 2А512)
244. —, — Hereditarily σ-connected continua // Colloq. math.— 1979.— *41,* № 1.— С. 57—65 (РЖМат, 1980, 5А491)
245. —, — Confluent images of rational continua // Houston J. Math.— 1979.— *5,* № 3.— С. 331—337 (РЖМат, 1980, 11А545)
246. —, — Continua which are images of weakly confluent mappings only, I // Houston J. Math.— 1979.— *5,* № 4.— С. 483—502 (РЖМат, 1981, 1А527)
247. —, — Embedding smooth dendroids in hyperspaces // Can. J. Math.— 1979.— *31,* № 1.— С. 130—138 (РЖМат, 1979, 9А492)
248. —, — On existence of arcs in rational curves // Fundam. math.— 1980.— *108,* № 1.— С. 23—26 (РЖМат, 1981, 1А524)
249. —, — Continua which are images of weakly confluent mappings only. II // Houston J. Math.— 1980.— *6,* № 3.— С. 375—387 (РЖМат, 1981, 8А512)
250. —, — Irredicible continua and arcwise accessibility in hyperspaces // Fundam. math.— 1980.— *110,* № 2.— С. 117—130 (РЖМат, 1981, 7А499)
251. —, — On confluent mappings and essential mappings — a survey // Rocky Mount. J. Math.— 1981. *11,* № 1.— С. 131—153 (РЖМат, 1981, 11А536)
252. —, — On a characterization of W-sets and the dimension of hyperspa-

ces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100*, № 3.— С. 557—563 (РЖМат, 1988, 2А596)
253. *Gutek A.* Solenoids and homeomorphisms on the Cantor set // Rocz. Pol. tow: math.— 1979.— *21*, № 2.— С. 299—302 (РЖМат, 1980, 12А534)
254. *Habiniak L. J.* There is no plane dendroid containing all plane smooth dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math. astron. et phys.— 1982.— *30*, № 9—10.— С. 465—470 (РЖМат, 1983, 10А504)
255. *Hagopian C. L.* A fixed point theorem for hyperspaces of λ-connected continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *53*, № 1.— С. 231—234 (РЖМат, 1976, 8А660)
256. — Torus-like products of λ-connected continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *53*, № 1.— С. 227—230 (РЖМат, 1976, 8А661)
257. — The fixed point theorems for disk-like products and hyperspaces // Abstr. «Topology», New York—Basel, 1976.— С. 193—198 (РЖМат, 1977, 9А619)
258. — Mutual aposyndesis // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *23*, № 3.— С. 615—622 (РЖМат, 1970, 8А374)
259. — On generalized forms of aposyndesis // Pacif. J. Math.— 1970.— *34*, № 1.— С. 97—108 (РЖМат, 1971, 4А497)
260. — A fixed point theorem for plane continua // Bull. Amer. Math. Soc.— 1971.— *77*, № 3.— С. 351—354 (РЖМат, 1971, 11А462)
261. — A cut point theorem for plane continua // Duke Math. J.— 1971.— *38*, № 3.— С. 509—512 (РЖМат, 1972, 4А560)
262. — A class of arcwise connected continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *30*, № 1.— С. 164—168 (РЖМат, 1973, 9А456)
263. — Another fixed point theorem for plane continua // Proc. Amer. Soc.— 1972.— *31*, № 2.— С. 627—628 (РЖМат, 1972, 12А416)
264. — Planar images of decomposable continua // Pacif. J. Math.— 1972.— *42*, № 2.— С. 329—331 (РЖМат, 1973, 4А623)
265. — Planar λ-connected continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1973.— *39*, № 1.— С. 190—194 (РЖМат, 1974, 2А433)
266. — Schlais' theorem extends to λ-connected plane continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1973.— *40*, № 1.— С. 265—267 (РЖМат, 1974, 4А374)
267. — Characterizations of λ-connected plane continua // Pacif. J. Math.— 1973.— *49*, № 2.— С. 371—375 (РЖМат, 1974, 10А394)
268. — λ-connected plane continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— *191*, № .— С. 277—287 (РЖМат, 1975, 3А544)
269. — Locally homeomorphic λ-connected plane continua // Pacif. J. Math.— 1974.— *52*, № 2.— С. 403—404 (РЖМат, 1975, 5А522)
270. — λ-connectivity and mappings onto a chainable indecomposable continuum // Proc. Amer. Math. Soc.— 1974.— *45*, № 1.— С. 132—138 (РЖМат, 1975, 6А628)
271. — A fixed point theorem for homogeneous continua // Mich. Math. J.— 1975.— *21*, № 3.— С. 233—234 (РЖМат, 1975, 11А537)
272. — Disk-like products of λ-connected continua, II // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *52*.— С. 479—484 (РЖМат, 1976, 6А507)
273. — Homogeneous plane continua // Houston J. Math.— 1975.— *1*, № 1.— С. 35—41 (РЖМат, 1976, 6А509)
274. — Disk-like products of λ-connected continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *51*, № 2.— С. 448—452 (РЖМат, 1976, 12А601)
275. — The fixed point property and almost chainable homogeneous continua // Ill. J. Math.— 1976.— *20*, № 4.— С. 650—652 (РЖМат, 1977, 9А618)
276. — Indecomposable homogeneous plane continua are hereditarily indecomposable // Trans. Amer. Math. Soc.— 1976.— *224*, № 2.— С. 339—350 (РЖМат, 1977, 12А580)
277. — A characterization of solenoids // Pacif. J. Math.— 1977.— *68*, № 2.— С. 425—435 (РЖМат, 1978, 7А661)

278. — A classification of homogeneous, circle-like continua // Houston J. Math.— 1977.— *3*, № 4.— С. 471—474 (РЖМат, 1978, 11А535)
279. — Aposydensis in the plane // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 83—88 (РЖМат, 1983, 5А451)
280. — Arcwise connectivity of continuum — chainable plane continua // Houston J. Math.— 1982.— *8*, № 1.— С. 69—74 (РЖМат, 1983, 2А421)
281. — No homogeneous tree-like continuum contains and arc // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *88*, № 3.— С. 560—564 (РЖМат, 1983, 12А641)
282. — Products of hereditarily indecomposable continua are λ-connected // Fundam. math.— 1983.— *119*, № 3.— С. 217—226 (РЖМат, 1985, 1А687)
283. — Atriodic homogeneous continua // Pacif. J. Math.— 1984.— *113*, № 2.— С. 333—347 (РЖМат, 1985, 2А556)
284. — Homogeneous continua in 2-manifolds // Topol. Appl.— 1985.— *19*, № 2.— С. 157—163 (РЖМат, 1986, 3А695)
285. — Fixed points of tree-like continua // Contemp. Math.— 1988.— *72*.— С. 131—137 (РЖМат, 1989, 1А568)
286. —, *Rogers J. T., Jr.* A classification of homogeneous circle-like continua // Houston J. Math.— 1977.— *3*, № 4.— С. 471—474 (РЖМат, 1978, 11А535)
287. *Hamilton O. H.* A fixed point theorem for pseudo-arcs and certain other metric continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1951.— *2*.— С. 173—174
288. *Heath J.* On n-odds // Houston J. Math.— 1983.— *9*, № 4.— С. 477—487 (РЖМат, 1985, 1А688)
289. — Tree-like continua and exactly k-to-1 functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1989.— *105*, № 3.— С. 765—772 (РЖМат, 1989, 12А596)
290. *Henderson G. W.* The pseudo-arc as an inverse limit with one binding map // Duke Math. J.— 1964.— *31*, № 3.— С. 421—425 (РЖМат, 1965, 8А299)
291. — Continua which cannot be mapped onto any noplanar circle-like continuum // Colloq. math.— 1971.— *23*, № 2.— С. 241—243 (РЖМат, 1972, 4А562)
292. — On the hyperspace of subcontinua of an arc-like continuum // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *27*, № 2.— С. 416—417 (РЖМат, 1972, 3А461)
293. *Hinrichsen J. W.* Irreducible continua of higher dimension // Colloq. math.— 1973.— *27*, № 2.— С. 251—253 (РЖМат, 1973, 12А459)
294. — Concerning irreducible continua of higher dimension // Colloq. math.— 1973.— *28*, № 2.— С. 227—230 (РЖМат, 1974, 4А375)
295. — On filling an irreducible continuum with chainable continua // Colloq. math.— 1982.— *46*, № 1.— С. 37—40 (РЖМат, 1983, 4А601)
296. *Holsztynski W.* Universal mappings and fixed point theorems // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1965.— *15*, № 7.— С. 433—438 (РЖМат, 1968, 4А414)
297. *Hughes C. B.* Irreducible continua and some characterization of arcs // J. Undergrad. Math.— 1976.— *8*, № 2.— С. 1—9 (РЖМат, 1978, 5А471)
298. *Illanes A.* Multicoherence of symmetric products // An. Inst. Mat. UNAM.— 1985.— *22*.— С. 11—24 (РЖМат, 1986, 12А654)
299. — Monotone and open Whitney maps // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986. — *98*, № 3.— С. 516—518 (РЖМат, 1987, 6А585)
300. — Irreducible Whitney levels with respect to finite and countable subsets // An. Inst. Mat. UNAM.— 1986.— *26*.— С. 59—64 (РЖМат, 1988, 2А597)
301. — A continuum X which is a retract of $C(X)$ but not of 2^X // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100*, № 1.— С. 199—200 (РЖМат, 1987, 12А510)
302. — Cells and cubes in hyperspaces // Fundam. math.— 1988.— *130*, № 1. — С. 57—65 (РЖМат, 1989, 3А489)
303. *Ingram W. T.* Concerning nonplanar circle-like continua // Doct. diss.

Auburn Univ., 1964, 46 pp., «Dissert. Abstrs», 1965.— *25,* № 9, 5299 (РЖМат, 1965, 12А429)
304. — Concerning non-planar circle-like continua // Can. J. Math.— 1967.— *19,* № 2.— С. 242—250 (РЖМат, 1968, 5А455)
305. — Decomposable circle-like continua // Fundam. math.— 1968.— *63,* № 2. — С. 193—198 (РЖМат, 1969, 9А353)
306. — An atriodic tree-like continuum with positive span // Fundam. math.— 1972.— *77,* № 2.— С. 99—107 (РЖМат, 1973, 6А528)
307. — An uncountable collection of mutually exclusive planar atriodic tree-like continua with positive span // Fundam. Math.— 1974.— *85,* № 1.— С. 73—78 (РЖМат, 1974, 11А581)
308. — Concerning atriodic tree-like continua // Fundam. math.— 1978.— *101,* № 3.— С. 189—193 (РЖМат, 1978, 8А489)
309. — Hereditarily indecomposable tree-like continua // Fundam. math.— 1979.— *103,* № 1.— С. 61—64 (РЖМат, 1979, 12А580)
310. — Hereditarily indecomposable tree-like continua II // Fundam. math.— 1981.— *111,* № 2.— С. 95—106 (РЖМат, 1981, 9А381)
311. — Concerning periodic points in mappings of continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *104,* № 2.— С.643—649 (РЖМат, 1989, 7А429)
312. *Isbell J. R.* Homogeneous spaces // Duke Math. J.— 1953.— *20,* № 3.— С. 321—329 (РЖМат, 1954, 2539)
313. — Embedding of inverse limits // Ann. Math.— 1959.— *70,* № 1.— С. 73—84 (РЖМат, 1960, 7359)
314. *Jakobsche W.* The Bing-Borsuk conjecture is stronger than the Poincaré conjecture // Fundam. math.— 1980.— *106,* № 2.— С. 127—134 (РЖМат, 1980, 12А572)
315. *Jankovic D. S.* A note on almost locally connected spaces // Math. jap.— 1985.— *30,* № 3.— С. 393—397 (РЖМат, 1986, 2А556)
316. *Jobe J.* The intersection of indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *23,* № 3.— С. 623—624 (РЖМат, 1970, 6А375)
317. *Jolly R. F., Rogers J. T., Jr.* Inverse limit spaces defined by only finitely many distinct bonding maps // Fundam. math.— 1970.— *68,* № 2.— С. 117—120 (РЖМат, 1971, 1А396)
318. *Jones F. B.* Homogeneous continua // In: Proc. Intern. Symp, Topology and Appl., Budva, 1972, Beograd, 1973.— С. 129—131 (РЖМат, 1974, 9А563)
319. — Aposyndetic continua // In: Topics Topology, Amsterdam—London, 1974.— С. 437—447 (РЖМат, 1975, 12А489)
320. — On certain type of homogeneous plane continuum // Proc. Amer. Math. Soc.— 1955.— *6,* № 5.— С. 735—740 (РЖМат, 1960, 5018)
321. — Homogeneous plane continua // In: Proc. Auburn Topology Conference— 1969.— С. 46—56
322. — Use of a new technique in homogeneous continua // Houston J. Math. — 1975.— *1,* № 1.— С. 57—61 (РЖМат, 1976, 6А511)
323. — Aposyndesis // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 28—31 (РЖМат, 1983, 6А525)
324. *Kato H.* On local 1-connectedness of Whitney continua // Fundam. math.— 1988.— *131,* № 3.— С. 245—253 (РЖМат, 1989, 7А426)
325. — Concerning hyperspaces of certain Peano continua and strong regularity of Whitney maps // Pacif. J. Math.— 1985.— *119,* № 1.— С. 159—167 (РЖМат, 1986, 2А567)
326. — Concerning a property of J. K. Kelley and refinable maps // Math. jap. — 1986.— *31,* № 5.— С. 711—719 (РЖМат, 1987, 4А645)
327. — Shape properties of Whitney maps for hyperspaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1986.— *297,* № 2.— С. 529—546 (РЖМат, 1987, 5А576)
328. — Generalized homogeneity and a question of J. J. Charatonik // Houston J. Math.— 1987.— *13,* № 1.— С. 51—63 (РЖМат, 1988, 7А580)
329. — Movability and homotopy, homology pro-groups of Whitney continua

// J. Math. Soc. Jap.— 1987.— *39,* № 3.— С. 435—446 (РЖМат, 1988, 3А687)
330. — Whitney continua of curves // Trans. Amer. Math. Soc.— 1987.— *300,* № 1.— С. 367—381 (РЖМат, 1987, 10А455)
331. — Shape equivalence of Whitney continua of curves // Can. J. Math.— 1988.— *40,* № 1.— С. 217—227 (РЖМат, 1988, 12А527)
332. — Whitney continua of graphs admit all homotopy types of compact connected ANRs // Fundam. math.— 1988.— *129.*— С. 161—166 (РЖМат, 1989, 3А490)
333. — Limiting subcontinua and Whitney maps of tree-like continua // Compos. math.— 1988.— *66,* № 1.— С. 5—14 (РЖМат, 1988, 9А606)
334. — On admissible Whitney maps // Colloq. math.— 1988.— *56,* № 2.— С. 299—309 (РЖМат, 1989, 3А490)
335. — Various types of Whitney maps on n-dimensional compact connected polyhedra ($n \geq 2$) // Topol. and Appl.— 1988.— *27.*— С. 17—21 (РЖМат, 1988, 8А550)
336. — The dimension of hyperspaces of certain 2-dimensional continua // Topol. and Appl.— 1988.— *28,* № 1.— С. 83—87 (РЖМат, 1988, 8А536)
337. — Movability and strong Whitney-reversible properties // Topol. Appl.— 1989.— *31,* № 2.— С. 125—132 (РЖМат, 1989, 9А431)
338. *Kawamura K.* On some properties on span // J. Math. Soc. Jap.— 1988.— *40,* № 4.— С. 605—613 (РЖМат, 1989, 4А470)
339. — On span and inverse limits // Tsukuba J., Math.— 1988.— *12,* № 2.— С. 333—340 (РЖМат, 1989, 5А405)
340. — Near-homeomorphisms on hereditarily indecomposable circle-like continua // Tsukuba J. Math.— 1989.— *13,* № 1.— С. 165—173 (РЖМат, 1990, 1А546)
341. *Keesling J., Wilson D. C.* Embedding T^n-like continua in Euclidean space // Topol. Appl.— 1985.— *21,* № 3.— С. 241—249 (РЖМат, 1986, 5А605)
342. *Kennedy J.* Stable extensions of homeomorphisms on the pseudoarc // Trans. Amer. Math. Soc.— 1988.— *310,* № 1.— С. 167—178 (РЖМат, 1989, 7А427)
343. — Positive entropy homeomorphisms on the pseudo-arc // Mich. Math. J. — 1989.— *36,* № 2.— С. 181—191 (РЖМат, 1990, 11А459)
344. —, *Rogers J. T., Jr.* Orbits of the pseudocircle // Trans. Amer. Math. Soc. — 1986.— *296.* № 1.— С. 327—340 (РЖМат, 1986, 12А669)
345. *Knaster B.* // Fundam math.— 1922.— *3.*— С. 209
346. —, *Kuratowski C.* Probleme 2 // Fundam. math.— 1920.— *1.*— С. 223
347. *Koyama A.* A note on some strong Whitney-reversible properties // Tsukuba J. Math.— 1980.— *4,* № 2.— С. 313—316 (РЖМат, 1981, 8А511)
348. — A note on span under refinable maps // Tsukuba J. Math.— 1985.— *9,* № 2.— С. 237—240 (РЖМат, 1986, 11А619)
349. — Zero span is sequential strong Whiney-reversible property // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *101,* № 4.— С. 716—720 (РЖМат, 1988, 6А581)
350. — Weakly ARC-smooth continua // Glas. mat.— 1989.— *24,* N 1.— С. 133—138 (РЖМат, 1990, 5А493)
351. *Krasinkiewicz J.* On quasi-embedability of dendroids // Rocz. PTM.— — 1972. Ser. 1.— *16.*— С. 249—252 (РЖМат, 1973, 2А426)
352. — On the composants of indecomposable plane continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1972.— *20,* № 11.— С. 935—940 (РЖМат, 1973, 5А516)
353. — Concerning the boundaries of plane continua and fixed point property // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys.— 1973.— *21,* № 5.— С. 427—431 (РЖМат, 1973, 12А463)
354. — Concerning the accessibility of composants of indecomposable plane continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys.— 1973.— *21,* № 7.— С. 621—628 (РЖМат, 1974, 3А371)
355. — On hyperspaces of hereditarily indecomposable continua // Fundam. math.— 1974.— *84,* № 3.— С. 175—186 (РЖМат, 1974, 10А396)

356. — On internal composants of indecomposable plane continua // Fundam. math.— 1974.— *84*, № 3.— С. 255—263 (РЖМат, 1974, 10А398)
357. — On a class of indecomposable continua // Colloq. math.— 1974.— *32*, № 1.— С. 71—75 (РЖМат, 1975, 7А651)
358. — A mapping theorem for tree-like continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1974.— *22*, № 12.— С. 1235—1238 (РЖМат, 1975, 8А493)
359. — On the hyperspaces of certain plane continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1975.— *23*. № 9.— С. 981—983 (РЖМат, 1976, 6А504)
360. — Shape properties of hyperspaces // Fundam. math.— 1978.— *101*, № 1.— С. 79—91 (РЖМат, 1979, 5А437)
361. — Mapping properties of hereditarily indecomposable continua // Houston J. Math.— 1982.— *8*, № 4.— С. 507—517 (РЖМат, 1983, 9А487)
362. — On two theorems of Dyer // Colloq. math.— 1986.— *50*, № 2.— С. 201—208 (РЖМат, 1987, 1А559)
363. —, *Minc P.* Nonexistence of universal continua for certain classes of curves // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 9.— С. 733—741 (РЖМат, 1977, 6А366)
364. —, — Approximation of continua from within // Bull. Acad. poly. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1977.— *25*, № 3.— С. 283—289 (РЖМат, 1977, 12А579)
365. —, — Mappings onto indecomposable continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1977.— *25*, № 7.— С. 675—680 (РЖМат, 1978, 4А408)
366. —, — Continuous monotone decompositions of planar curves // Fundam. math.— 1980.— *107*, № 2.— С. 113—128 (РЖМат, 1981, 1А532)
367. —, *Nadler S. B., Jr.* Whitney properties // Fundam. math.— 1978.— *98*.— С. 165—180 (РЖМат, 1978, 9А447)
368. —, *Smith M.* Hereditarily indecomposable continua with trivial shape // Fundam. math.— 1983.— *119*, № 2.— С. 133—134 (РЖМат, 1984, 8А525)
369. *Krupski P.* On homogeneous tree-like continua // Rend. Circ. mat. Palermo, 1988, [*37*], Suppl.— № 18.— С. 327—336 (РЖМат, 1988, 11А632)
370. — On homogeneous tree-like continua // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 6. Proc. 6th Prague Topol. Symp. 25—29, 1986, Berlin, 1988.— С. 700—701 (РЖМат, 1989, 1А549)
371. — Continua which are homogeneous with respect to continuity // Houston J. Math.— 1979.— *5*, № 3.— С. 345—356 (РЖМат, 1980, 11А548)
372. — The property of Kelley in circularly chainable and in chainable continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1981.— *29*, № 7—8.— С. 377—381 (РЖМат, 1982, 4А552)
373. — A characterization of solenoids — an application of the property of Kelley // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 5, Berlin.— 1983.— С. 448—449 (РЖМат, 1983, 10А501)
374. — Solenoids and inverse limits of sequences of arcs with open bonding maps // Fundam. math.— 1984.— *120*, № 1.— С. 41—52 (РЖМат, 1984, 11А448)
375. — The property of Kelley, local end-points and homogeneous continua // Houston J. Math.— 1984.— *10*, № 2.— С. 215—225 (РЖМат, 1985, 1А691)
376. — Open images of solenoids // Lect. Notes Math.— 1984.— *1060*.— С. 76—83 (РЖМат, 1985, 2А550)
377. — On tree-like continua which are homogeneous with respect to confluent light mappings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1989.— *106*, № 2.— С. 531—536 (РЖМат, 1990, 9А433)
378. *Kuratowski K.* Development of the research on indecomposable continua // In: Topics Topology, Amsterdam—London, 1974.— С. 459—460 (РЖМат, 1975, 12А491)

379. *Lau A. Y.* Existence of *n*-cells in Peano semilattices // Topology. New York—Basel, 1976.— С. 197—200 (РЖМат, 1977, 9А561)
380. — Whitney continuum in hyperspace // Topol. Proc.— 1976.— *1*.— С. 187—189
381. — A note on monotone maps and hyperspaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 2.— С. 121—123 (РЖМат, 1976, 10А309)
382. —, *Voas C. H.* Connections of the hyperspaces of closed connected subsets // Rocz. Poly. tow. mat.— 1978.— *20*, № 2.— С. 393—396 (РЖМат, 1979, 8А476)
383. *Lawson J. D.* Applications of topological algebra to hyperspace problems // Topology. New York—Basel, 1976.— С. 201—206 (РЖМат, 1977, 9А589)
384. *Lehman B.* Another class of cyclicaly extensible and reducible properties // Can. Math. Bull.— 1985.— *28*, № 1.— С. 103—106 (РЖМат, 1986, 2А587)
385. *Lehner G. R.* Extending homeomorphism on the pseudo-arcs // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— *98*, № 3.— С. 369—394 (РЖМат, 1964, 2А395)
386. *Lelek A.* Report on weakly confluent mappings // In: Proc. Intern. Symp. Topol. and Appl., Budva, 1972, Beograd, 1973.— С. 168—170 (РЖМат, 1974, 9А568)
387. — A several problems of continua theory // In: Stud. Topol., New York, e. a., 1975.— С. 325—329 (РЖМат, 1976, 8А665)
388. — On plane dendroids and their end points in the classical sense // Fundam. math.— 1961.— *49*, № 3.— С. 301—319 (РЖМат, 1962, 3А312)
389. — On weakly chainable continua // Fundam. math.— 1962.— *51*, № 3.— С. 271—283 (РЖМат, 1964, 1А362)
390. — Disjoint maps and the span of spaces // Fundam. math.— 1964.— *55*, № 3.— С. 199—214 (РЖМат, 1966, 1А493)
391. — On confluent mappings // Colloq. math.— 1966.— *15*, № 2.— С. 223—233 (РЖМат, 1967, 12А449)
392. — On the topology of curves. I // Fundam. math.— 1971.— *67*, № 3.— С. 359—367 (РЖМат, 1971, 1А429)
393. — On the topology of curves. II // Fundam. math.— 1971.— *70*, № 2.— С. 131—138 (РЖМат, 1971, 9А412)
394. — Some problems concerning curves // Colloq. math.— 1971.— *23*, № 1. — С. 93—98 (РЖМат, 1972, 4А559)
395. — An example of a simple triod with surjective span smaller than span // Pacif. J. Math.— 1976.— *64*, № 1.— С. 207—215 (РЖМат, 1977, 4А520)
396. — The *OM*-mappings of continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1977.— *25*, № 8.— С. 781—785 (РЖМат, 1978, 5А475)
397. — On the surjective span and semispan of connected metric spaces // Colloq. math.— 1977.— *37*, № 1.— С. 35—45 (РЖМат, 1978, 8А522)
398. — The span and the width of continua // Fundam. math.— 1978.— *98*, № 3.— С. 181—199 (РЖМат, 1978, 11А533)
399. — Continua of constant distances in span theory // Pacif. J. Math.— 1986.— *123*, № 1.— С. 161—171 (РЖМат, 1986, 12А668)
400. —, *Mohler L.* On the topology of curves. III // Fundam. math.— 1971.— *71*, № 2.— С. 147—160 (РЖМат, 1972, 2А647)
401. —, — Real-valued continuous functions and the span of continua // Colloq. math.— 1975.— *32*, № 2.— С. 207—209 (РЖМат, 1976, 3А526)
402. —, *Tymchatyn E. D.* Pseudo-confluent mappings and a classification of continua // Can. J. Math.— 1975.— *27*, № 6.— С. 1336—1348 (РЖМат, 1976, 9А447)
403. *Lewis W.* Stable homeomorphisms of the pseudo-arc // Can. J. Math.— 1979.— *31*, № 2.— С. 363—374 (РЖМат, 1979, 11А447)
404. — Monotone maps of hereditarily indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *75*, № 2.— С. 361—364 (РЖМат, 1980, 2А517)
405. — Homogeneous tree-like continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *82*, № 3.— С. 470—472 (РЖМат, 1982, 1А648)

406. — Embeddings of the pseudo-arcs in E^2 // Pacif. J. Math.— 1981.— *93*, № 1.— С. 115—120 (РЖМат, 1982, 1А649)
407. — Almost chainable homogeneous continua are chainable // Houston. J. Math.— 1981.— 7.— С. 373—377
408. — Pseudo-arc and connectedness in homeomorphism groups // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *87*, № 4.— С. 745—748 (РЖМат, 1983, 10А498)
409. — Periodic homeomorphisms of chainable continua // Fundam. math.— 1983.— *117*, № 1.— С. 81—84 (РЖМат, 1984, 1А516)
410. — Homogeneous circle-like continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *89*, № 1.— С. 163—168 (РЖМат, 1984, 3А662)
411. — The pseudo-arc of pseudo-arcs is unique // Houston J. Math.— 1984.— *10*, № 2.— С. 227—234 (РЖМат, 1985, 1А696)
412. — Most maps of the pseudo-arc are homeomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *91*, № 1.— С. 147—154 (РЖМат, 1985, 3А531)
413. — Continuous curves of pseudo-arcs // Houston J. Math.— 1985.— *11*, № 1.— С. 91—99 (РЖМат, 1985, 10А525)
414. — Compact group actions on chainable continua // Houston J. Math.— 1985.— *11*, № 2.— С. 225—236 (РЖМат, 1986, 1А656)
415. —, *Walsh J. J.* A continuous decomposition of the plane into pseudo-arcs // Houston J. Math.— 1978.— *4*, № 2.— С. 209—222 (РЖМат, 1979, 3А447)
416. *Lum Lewis.* A quasi order characterization of smooth continua // Pacif. J. Math.— 1974.— *53*, № 2.— С. 495—500 (РЖМат, 1975, 8А629)
417. *Lum Lewis.* Weakly smooth continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— 214.— С. 153—167 (РЖМат, 1976, 9А448)
418. *Lum Lewis.* Weakly smooth dendroids // Fundam. math.— 1974.— *83*, № 2.— С. 111—120 (РЖМат, 1976, 9А448)
419. *Lynch M.* Whitney properties for 1-dimensional continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1987.— *35*, № 7.— С. 473—478 (РЖМат, 1988, 7А579)
420. — Whitney levels in $C_p(X)$ are AR's // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *97*, № 4.— С. 748—750 (РЖМат, 1987, 1А557)
421. *Mackowiak T.* Planable and smooth dendroids // In: Gen. Topol. and Rela.t Mod. Anal. and Algebra IV Proc. 4th Prague Sym., 1976, Part B, 1977.— С. 260—267 (РЖМат, 1978, 7А662)
422. — Some classification of smooth continua // Fundam. math.— 1973.— *79*, № 2.— С. 173—186 (РЖМат, 1974, 1А492)
423. — Open mappings and smoothness of continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1973.— *21*, № 6.— С. 531—534 (РЖМат, 1974, 1А495)
424. — Semi-confluent mappings and their invariants // Fundam. math.— 1973.— *79*, № 3.— С. 251—264 (РЖМат, 1974, 2А435)
425. — Confluent mappings and smoothness of dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1973.— *21*, № 8.— С. 719—725 (РЖМат, 1974, 2А436)
426. — On smooth continua // Fundam. math.— 1974.— *85*, № 1.— С. 79—95 (РЖМат, 1975, 1А550)
427. — On some examples of monostratic λ-dendroids // Fundam. math.— 1975.— *87*, № 2.— С. 79—88 (РЖМат, 1976, 1А592)
428. — Mappings of a constant degree // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1975.— *23*, № 3.— С. 285—291 (РЖМат, 1976, 2А602)
429. — Sets of irreducibility and mappings // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 5.— С. 335—339 (РЖМат, 1976, 12А596)
430. — The product of confluent and locally confluent mappings // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 3.— С. 183—185 (РЖМат, 1976, 12А597)
431. On some characterizations of dendroids and weakly monotone mappings // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 3. — С. 177—182 (РЖМат, 1976, 12А599)

432. — Arcwise connected and hereditarily smooth continua // Fundam. math. — 1976.— *92*, № 2.— С. 149—171 (РЖМат, 1977, 4А518)
433. — On sets of confluent and related mappings in the space Y^x // Colloq. math.— 1976.— *36*, № 1.— С. 69—80 (РЖМат, 1977, 9А573)
434. — On decompositions of hereditarily smooth continua // Fundam. math.— 1977.— *94*, № 1.— С. 25—33 (РЖМат, 1977, 9А594)
435. — The hereditary classes of mappings // Fundam. math.— 1977.— *97*, № 2.— С. 123—150 (РЖМат, 1978, 5А472)
436. — A certain collection of nonplanar fans // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1977.— *25*, № 6.— С. 543—548 (РЖМат, 1978, 5А477)
437. — Local homeomorphisms onto tree-like continua // Colloq. Math.— 1977.— *38*, № 1.— С. 63—68 (РЖМат, 1978, 7А660)
438. — Fixed point property for λ-dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1978.— *26*, № 1.— С. 61—64 (РЖМат, 1978, 11А549)
439. — Some examples of irreducibly confluent mappings // Colloq. math.— 1978.— *38*, № 2.— С. 193—196 (РЖМат, 1979, 2А352)
440. — Continua irreducible about a closed set // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1978.— *26*, № 8.— С. 715—718 (РЖМат, 1979, 5А434)
441. — Some kinds of the unicoherence // Rocz. PTM— 1978.— *20*, № 2.— С. 405—408 (РЖМат, 1979, 5А435)
442. — Continuous mappings on continua // Roczp. mat.— 1979.— № 158 (РЖМат, 1979, 9А491)
443. — Monotone retracts of an arcwise connected continuum // Colloq. math. — 1979.— *40*, № 2.— С. 227—233 (РЖМат, 1980, 3А426)
444. — Indecomposable continua and the fixed point property // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1979.— *27*, № 11—12.— С. 903—912 (РЖМат, 1981, 8А508)
445. — An embedding theorem for tree-like continua // In: Topology, 4th Colloq., Budapest, 1978, vol. 1, Amsterdam, e. a.— 1980.— С. 803—813 (РЖМат, 1981, 2А515)
446. — Retracts of hereditary inicoherent continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1980.— *28*, № 3-4.— С. 177—183 (РЖМат, 1981, 10А444)
447. — The fixed point property for set-valued mappings // Colloq. math.— 1981.— *45*, № 2.— С. 227—243 (РЖМат, 1983, 1А530)
448. — Indecomposable continua and the fixed point property // Fundam. math.— 1983.— *118*, № 3.— С. 201—211 (РЖМат, 1984, 8А529)
449. — Extension theorem for a pseudo-arc // Fundam. math.— 1984.— *123*, № 2.— С. 71—79 (РЖМат, 1985, 2А554)
450. — Extension theorem for some classes of continua // Topol. and Appl.— 1984.— *17*, № 3.— С. 257—263 (РЖМат, 1985, 2А555)
451. — A universal hereditarily indecomposable continuum // Proc. Amer. Math. Soc.— 1985.— *94*, № 1.— С. 167—172 (РЖМат, 1986, 2А588)
452. — Contractible and nonselectible dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1985.— *33*, № 5-6.— С. 321—324 (РЖМат, 1986, 3А698)
453. — The condensation of singularities in arc-like continua // Houston J. Math.— 1985.— *11*, № 4.— С. 535—558 (РЖМат, 1986, 12А667)
454. — Singular arc-like continua // Roczpr. mat. 1986.— № 257.— С. 1—40 (РЖМат, 1987, 7А530)
455. — Terminal continua and homogeneity // Fundam. math.— 1987.— *127*, № 3.— С. 177—186 (РЖМат, 1988, 4А595)
456. — A characterization of finitely irreducible continua // Colloq. math.— 1988.— *56*, № 1.— С. 71—83 (РЖМат, 1989, 7А425)
457. —, *Tymchatyn E. D.* Some properties of open and related mappings // Colloq. math. (PRL).— 1985.— *49*, № 2.— С. 175—194 (РЖМат, 1986, 1А673)

458. *Mahavier W. S.* Upper semi-continuous decompositions of irreducible continua // Fundam. math.— 1967.— *60,* № 1.— С. 53—57 (РЖМат, 1968, 1A497)
459. — A chainable continuum not homeomorphic to an inverse limit on [0, 1] with only one bonding map // Proc. Amer. Math. Soc.— 1967.— *18,* № 2.— С. 284—286 (РЖМат, 1968, 5A457)
460. — Arcs in inverse limits on [0, 1] with only one bonding map // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *21,* № 3.— С. 587—590 (РЖМат, 1969, 11A412)
461. *Mańka R.* End continua and fixed points // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1975.— *23,* № 7.— С. 761—766 (РЖМат, 1976, 6A624)
462. — Fixed point theorems for λ-dendroids // Fundam. math.— 1980.— *108,* № 2.— С. 119—128 (РЖМат, 1981, 1A541)
463. — On fixed point theorems for multifunctions in dendroids // Colloq. math.— 1987.— *52,* № 2.— С. 185—192 (РЖМат, 1987, 12A511)
464. — On irreducibility and indecomposibility of continua // Fundam. math.— 1988.— *129,* № 2.— С. 121—131 (РЖМат, 1989, 4A473)
465. *Mardešič S.* Chainable continua and inverse limits // Glasnik mat.-fiz. i astron.— 1959.— *14,* № 3.— С. 219—232 (РЖМат, 1960, 10131)
466. *Marjanovic M. M.* Spaces homeomorphic to their hyperspaces // In: Proc. Intern. Symp, Topology and Appl., Budva, 1972, Beograd, 1973.— С. 167—169 (РЖМат, 1974, 9A552)
467. *Marsh D. S.* A chainable continuum not homeomorphic to an inverse limit on [0, 1] with only one bonding map // Colloq. math.— 1980.— *43,* № 1.— С. 75—80 (РЖМат, 1982, 1A638)
468. *Marsh M. M.* *u*-mappings on trees // Pacif. J. Math.— 1987.— *127,* № 2.— С. 373—387 (РЖМат, 1987, 10A609)
469. *Martin J. R., Oversteegen L. G., Tymchatyn E. D.* Fixed point sets of products and cones // Pacif. J. Math.— 1982.— *101,* № 1.— С. 133—139 (РЖМат, 1983, 5A452)
470. *Mayer J. C.* Embeddings and prime end structure of chainable continua // Houston J. Math.— 1982.— *8,* № 2.— С. 221—253 (РЖМат, 1983, 4A602)
471. —, *Oversteegen L. G., Tymshatyn E. D.* The Menger curve. Characterization and extension of homeomorphisms of non-locally separating closed subsets // Roczp. mat.— 1986.— № 252.— С. 1—50 (РЖМат, 1987, 7A531)
472. *Mazurkiewicz S.* // C. r. Soc. sci. Varsovie.— 1913.— 6.
473. *McAuley L. F.* On decomposition of continua into aposyndetic continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1956.— *81,* № 1.— С. 74—91 (РЖМат, 1957, 1240)
474. — An atomic decomposition of continua into aposyndetic continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1958.— *88,* № 1.— С. 1—11 (РЖМат, 1959, 2469)
475. *McCord M. C.* Inverse limit sequences with covering maps // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— *114.*— С. 197—209 (РЖМат, 1967, 4A335)
476. — Singular homology of n-cell-like continua // Fundam. math.— 1966.— *59,* № 3.— С. 331—341 (РЖМат, 1967, 12A432)
477. *McLean T. B.* Confluent images of tree-like curves are tree-like // Duke Math. J.— 1972.— *39,* № 3.— С. 465—473 (РЖМат, 1973, 5A515)
478. *Miklos S.* Open retractions onto *n*-ods // Topol. and Appl.— 1985.— *20,* № 2.— С. 143—147 (РЖМат, 1986, 8A769)
479. *Mill J. van.* Superextensions and Wallman spaces // Math. Centre Tracts, № 85, Amsterdam, 1977
480. — Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes // Fundam. math.— 1980.— *107,* № 3.— С. 201—224 (РЖМат, 1981, 3A500)
481. *Minc P.* A fixed point theorem for weakly chainable plane continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1989.— *317,* № 1.— С. 303—312 (РЖМат, 1990, 11A479)

482 — Transue W. R. R. Sarkovskii's theorem for hereditarily decomposable chainable continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1989.— *315,* № 1.— С. 173—188 (РЖМат, 1990, 5A504)
483. *Mioduszewski J.* A functional conception of snake-like continua // Fundam. math.— 1962.— *51,* № 2.— С. 179—189 (РЖМат, 1963, 10A267)
484. — Mappings of inverse limits // Colloq. math.— 1963.— *10,* № 1.— С. 39—44 (РЖМат, 1985, 12A388)
485. — Everywhere oscillating functions, extension of uniformization and homogeneity of the pseudo-arc // Fundam. math.— 1984.— *56,* № 2.— С. 131—155 (РЖМат, 1965, 9A315)
486. *Misra A. U.* A note on arcs in hyperspaces // Acta math. hung.— 1985.— *45,* № 3-4.— С. 285—288 (РЖМат, 1986, 2A569)
487. *Moebes T. A.* Weak chainability of tree-like continua and combinatorial properties of mappings // Fundam. math.— 1984.— *120,* № 3.— С. 229—257 (РЖМат, 1985, 2A552)
488. *Mohler L.* Arc components. and density in λ-dendroids // Houston J. Math.— 1982.— *8,* № 1.— С. 109—117 (РЖМат, 1983, 2A415)
489. — The depth of tranches in λ-dendroids // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *96,* № 4.— С. 715—720 (РЖМат, 1986, 11A617)
490. —, *Oversteegen L. G.* A hereditarily indecomposable, hereditarily nonchainable planar tree-like continuum // Fundam. Math.— 1984.— *122,* № 3.— С. 237—246 (РЖМат, 1985, 2A553)
491. —, — Open and monotone fixed point free maps on uniquely arcwise connected continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1985.— *95,* № 3.— С. 476—482 (РЖМат, 1986, 11A631)
492. —, — Reduction and irreducibility for words and tree-words // Fundam. math.— 1986.— *126,* № 2.— С. 107—121 (РЖМат, 1986, 11A618)
493. —, — On the structure of tranches in continuously irreducible continua // Colloq. math.— 1987.— *54,* № 1.— С. 23—28 (РЖМат, 1988, 7A581)
494. — Partial orders and the fixed point property for hereditarily unicoherent continua // Doct. diss. Univ. Ore, 1968, 58 pp., «Dissert. Abstrs», 1969, *B29,* № 10, 3833 (РЖМат, 1970, 4A487)
495. — A characterization of smoothness in dendroids // Fundam. math.— 1970.— *68,* № 3.— С. 369—376 (РЖМат, 1971, 1A410)
496. — A characterization of hereditarily decomposable snake-like continua // Colloq. math.— 1973.— *28,* № 1.— С. 51—58 (РЖМат, 1974, 4A372)
497. *Moise E. E.* A note on the pseudo-arc // Trans. Amer. Math. Soc.— 1949. *64.*— С. 57—58
498. *Molski R.* On symmetric products // Fundam. math.— 1957.— *44.*— С. 165—170 (РЖМат, 1958, 5605)
499. *Madler S. B., Jr.* Some basic connectivity properties of Whitney map inverses in $C(X)$ // Stud. Topol. New York e. a. 1975.— С. 393—410 (РЖМат, 1976, 8A663)
500. — Some problems concerning hyperspaces // Lect. Notes Math.— 1974.— *375.*— С. 190—197 (РЖМат, 1974, 9A553)
501. — Confluent imafes of the sinusoidal curve // Houston J. Math.— 1977. *3,* № 4.— С. 515—519 (РЖМат, 1978, 11A536)
502. — Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic // Trans. Amer. Math. Soc.— 1977.— *320.*— С. 321—345 (РЖМат, 1978, 2A496)
503. — A characterization of locally connected continua by hyperspace retractions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— *67,* № 1.— С. 167—176 (РЖМат, 1978, 9A478)
504. — Hyperspaces of sets. A text with research questions // New York—Basel: Marsel Dekker, 1978.— XIV.— 708 с. (РЖМат, 1979, 2A340)
505. — Whitney-reversibles // Fundam. math.— 1980.— *109,* № 3.— С. 235—248 (РЖМат, 1981, 5A439)
506. — Continua whose hyperspace is product // Fundam. math.— 1980.— *108,* № 1.— С. 49—66 (РЖМат, 1981, 3A492)
507. — Quinn J. Continua whose hyperspace and suspension are homeomor-

phic // Gen. Topol. and Appl.— 1978.— *8,* № 2.— С. 119—125 (РЖМат, 1978, 11А538)
508. *Nikiel J.* A characterization of dendroids with uncountable many end-points in the classical sense // Houston J. Math.— 1983.— *9,* № 3.— С. 421—432 (РЖМат, 1984, 6А511)
509. — On dendroids and their ramification points in the classical sense // Fundam. math.— 1984.— *123,* № 1.— С. 39—46 (РЖМат, 1985, 2А548)
510. — On dendroids and their end-points and ramification points in the classical sense // Fundam. math.— 1984.— *124,* № 2.— С. 89—108 (РЖМат, 1985, 7А619)
511. — On Gehman dendroids // Glas. mat.— 1985.— *20,* № 1.— С. 203—214 (РЖМат, 1986, 5А641)
512. *Nishiura T., Rhee C.-J.* The hyperspace of a pseudoarc is a Cantor manifold // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *31,* № 2.— С. 550—556 (РЖМат, 1972, 11А372)
513. — , — Cut points of X and the hyperspace of subcontinua C(X) // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *82,* № 1.— С. 143—154 (РЖМат, 1981, 12А502)
514. —, — Contractibility of the hyperspaces of subcontinua // Houston J. Math.— 1982.— *8,* № 1.— С. 119—127 (РЖМат, 1983, 2А405)
515. *Oledski J.* On symmetric products // Fundam. math.— 1988.— *131,* № 3. — С. 185—190 (РЖМат, 1989, 7А406)
516. *Oversteegen L. G.* An uncountable collection of non-contractible fans // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1979.— *27,* № 5.— С. 385—389 (РЖМат, 1980, 6А548)
517. — Fans and embeddings in the plane // Pacif J. Math.— 1979.— *83,* № 2.— С. 495—503 (РЖМат, 1980, 7А488)
518. — Open retractions and locally confluent mappings of certain continua // Houston J. Math.— 1980.— *6,* № 1.— С. 113—125 (РЖМат, 1981, 1А525)
519. — Every contractible fan is locally connected at its vertex // Trans. Amer. Math. Soc.— 1980.— 280, № 2.— С. 379—402 (РЖМат, 1981, 2А514)
520. — On products of confluent and weakly confluent mappings related to span // Houston J. Math.— 1986.— *12,* № 1.— С. 109—116 (РЖМат, 1987, 5А588)
521. —, *Rogers J. T., Jr.* An inverse limit description of an atriodic tree-like continuum and an induced map without a fixed point // Houston J. Math.— 1980.— *6,* № 4.— С. 549—564 (РЖМат, 1982, 3А577)
522. —, — Fixed-point-free maps on tree-like continua // Topol. and Appl.— 1982.— *13,* № 1.— С. 85—95 (РЖМат, 1982, 6А466)
523. —, *Tymchatyn E. D.* On atriodic tree-like continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *83,* № 1.— С. 201—204 (РЖМат, 1982, 4А549)
524. —, — Plane strips and the span of continua (I) // Houston J. Math.— 1982.— *8,* № 1.— С. 129—142 (РЖМат, 1983, 2А414)
525. —, — Subcontinua with degenerate tranches in hereditarily decomposable continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1983.— *278,* № 2.— С. 717—724 (РЖМат, 1984, 1А517)
526. —, — On the semispan of weakly chainable continua // Fundam. math.— 1983.— *119,* № 2.— С. 151—156 (РЖМат, 1984, 8А526)
527. —, — On span and weakly chainable continua // Fundam. math.— 1984. — *122,* № 2.— С. 159—174 (РЖМат, 1984, 12А564)
528. —, — On span and chainable continua // Fundam. math.— 1984.— *123,* № 2.— С. 137—149 (РЖМат, 1985, 1А672)
529. —, — Plane strips and the span of continua, II // Houston J. Math.— 1984.— *10,* № 2.— С. 255—266 (РЖМат, 1985, 1А693)
530. —, — On hereditarily indecomposable continua // Banach Cent. Semestr Int. Stefan Banach Math. Cent., spring, 1984, Warszawa.— 1986.— С. 407—417 (РЖМат, 1988, 5А557)
531. *Petrus A.* Whitney maps and Whitney properties in $C(X)$ // Topology Proc.— 1976.— *1.*— С. 147—172

532. — Contractibility of Whitney continua in $C(X)$ // Topol. and Appl.— 1978.— *9.*— С. 275—288 (РЖМат, 1979, 4А540)
533. *Prais J. R.* Openly homogeneous continua having only arcs for proper subcontinua // Topol. and Appl.— 1989.— *31,* № 2.— С. 133—147 (РЖМат, 1989, 9А429)
534. *Proctor C. W.* A characterization of hereditarily indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *34,* № 1.— С. 287—289 (РЖМат, 1973, 2А428)
535. — Upper semicontinuous collections of continua in class *W* // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *88,* № 2.— С. 338—340 (РЖМат, 1983, 12А640)
536. — A characterization of absolutely C^*-smooth continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *92,* № 2.— С. 293—296 (РЖМат, 1985, 9А399)
537. — The pseudo-arc as an inverse limit with simple bonding maps // Colloq. math.— 1986.— *50,* № 2.— С. 209—212 (РЖМат, 1987, 1А558)
538. *Read D. R.* Confluent and related mappings // Colloq. math.— 1974.— *29,* № 2.— С. 233—239 (РЖМат, 1974, 10А411)
539 — Irreducibly confluent mappings // Colloq. math.— 1975.— *34,* № 1.— С. 49—55 (РЖМат, 1978, 11А591)
540. *Read J. H.* Inverse limits of indecomposable continua // Pacif. J. Math. — 1967.— *23,* № 3.— С. 597—600 (РЖМат, 1968, 7А447)
541. *Rhee C.-J.* On dimension of the hyperspace of pseudo-circle // Bull. Soc. roy. sci. Liege.— 1974.— *43,* № 1-2.— С. 5—8 (РЖМат, 1974, 10А381)
542. — *M*-set and contractibility of $C(X)$ // Bull. Soc. roy. sci. Liege.— 1987. *56,* № 7.— С. 55—70 (РЖМат, 1987, 9А604)
543. *Rogers J. T., Jr.* Pseudo-circles and universal circularly chainable continua // Doct. diss. Riverside Univ. Calif.— 1968.— *38 с.* «Dissert. Abstrs», 1969.— *B29,* № 8, 2991 (РЖМат, 1970, 3А542)
544. — Some approximation theorems for inverse limits // In: Stud. Topol., New York, e. a., 1975.— С. 495—508 (РЖМат, 1976, 8А643)
545. — Applications of the hyperbolic plane to continua theory and to shape theory // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 6. Proc. 6th Prague Topol. Symp. 25—29, 1986, Berlin.— 1988.— С. 491—496 (РЖМат, 1989, 1А542)
546. — Decomposable inverse limits with a single bonding map on [0, 1] below the identity // Fundam. math.— 1970.— *66,* № 2.— С. 177—183 (РЖМат, 1970, 6А382)
547. — Mapping the pseudo-arc onto circle-like self-entwined continua // Mich. Math. J.— 1970.— *17,* № 1.— С. 91—96 (РЖМат, 1970, 11А349)
548. — Pseudo-circles and universal chainable continua // Ill. J. Math.— 1970.— *14,* № 2.— С. 222—237 (РЖМат, 1971, 1А412)
549. — Pseudo-circle is not homogeneous // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970. *148,* № 2.— С. 417—428 (РЖМат, 1971, 1А413)
550. — Continua that contain only degenerate continuous images of plane continua // Duke Math. J.— 1970.— *37,* № 3.— С. 479—483 (РЖМат, 1971, 4А498)
551. — On mapping indecomposable continua onto certain chainable indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— *25,* № 2.— С. 449—456 (РЖМат, 1971, 9А411)
552. — Mapping solenoids onto strongly self-entwined circle-like continua // Pacif. J. Math.— 1971.— *37,* № 1.— С. 213—216 (РЖМат, 1972, 1А802)
553. — Embedding the hyperspace of circle-like plane continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *29,* № 1.— С. 165—168 (РЖМат, 1973, 3А523)
554. — The cone-hyperspace property // Can. J. Math.— 1972.— *24,* № 2.— С. 279—285 (РЖМат, 1972, 10А334)
555. — Dimension of hyperspaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1972.— *20,* № 2.— С. 177—179 (РЖМат, 1972, 8А569)
556. — Inverse limits on graphs and monotone mappings // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— *176,* № 2.— С. 215—225 (РЖМат, 1974, 1А494)

557. — Hyperspaces of arc-like and circle-like continua // Lect. Notes Math.— 1974.— *375*.— С. 231—235 (РЖМат, 1974, 10А399)
558. — A cohomological characterization of preimages of nonplanar circle-like continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *49*, № 1.— С. 232—236 (РЖМат, 1976, 6А510)
559. — Whitney continua in the hyperspace $C(X)$ // Pacif. J. Math.— 1975.— *58*, № 2.— С. 569—584 (РЖМат, 1976, 7А614)
560. — The Whitney subcontinua of $C(X)$ // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 2.— С. 125—127 (РЖМат, 1976, 11А583)
561. — Dimension and the Whitney subcontinua of $C(X)$ // Gen. Topol. and Appl.— 1976.— *6*, № 1.— С. 91—100 (РЖМат, 1976, 7А614)
562. — Obtaining inverse sequences for certain continua // Fundam. math.— 1977.— *96*, № 2.— С. 137—148 (РЖМат, 1978, 2А495)
563. — Solenoids of pseudo-arcs // Houston J. Math.— 1977.— *3*, № 4.— С. 531—537 (РЖМат, 1978, 12А854)
564. — Weakly confluent mappings and finitely-generated cohomology // Proc. Math. Soc.— 1980.— *78*, № 3.— С. 436—438 (РЖМат, 1980, 11А543)
565. — Completely regular mappings and homogeneous aposyndetic continua // Can. J. Math.— 1981.— *33*, № 2.— С. 450—453 (РЖМат, 1982, 4А546)
566. — Homogeneous, separating plane continua are decomposable // Mich. Math. J.— 1981.— *28*, № 3.— С. 317—322 (РЖМат, 1982, 11А429)
567. — Aposyndesis and homogeneity // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981. — С. 97—99 (РЖМат, 1983, 5А448)
568. — Decompositions of homogeneous continua // Pacif J. Math.— 1982.— *99*, № 1.— С. 137—144 (РЖМат, 1982, 11А427)
569. — Cell-like decompositions of homogenous continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *87*, № 2.— С. 375—377 (РЖМат, 1983, 9А486)
570. — An aposyndetic homogenous curve that is not locally connected // Houston J. Math.— 1983.— *9*, № 3.— С. 433—440 (РЖМат, 1984, 5А551)
571. — Aposyndetic continua as bundle spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— *283*, № 1.— С. 49—55 (РЖМат, 1985, 1А692)
572. — Homogeneous curves that contain arcs // Topol. and Appl.— 1985.— *21*, № 1.— С. 95—101 (РЖМат, 1986, 5А642)
573. — Orbits of higher-dimensional hereditairily indecomoposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1985.— *95*, № 3.— С. 483—486 (РЖМат, 1986, 11А620)
574. — Small compact actions on chainable continua // Can. J. Math.— 1986. — *38*, № 3.— С. 563—575 (РЖМат, 1987, 2А510)
575. — Atriodic homogeneous nondegenerate continua are one-dimensional // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *102*, № 1.— С. 191—192 (РЖМат, 1988, 9А605)
576. — Decompositions of continua over the hyperbolic plane // Trans. Amer. Math. Soc.— 1988.— *310*, № 1.— С. 277—291 (РЖМат, 1989, 7А428)
577. — Simply cyclic homogeneous non-tree-like curves decompose to solenoids // Proc. Amer. Math. Soc.— 1990— *108*, № 4.— С. 1059—1062 (РЖМат, 1990, 11А468)
578. — Tollefson J. L. Homogeneous inverse limit spaces with nonregular covering maps as bonding maps // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *29*, № 2.— С. 417—420 (РЖМат, 1973, 5А507)
579. *Rogers L. E.* Mutually aposyndetic products of chainable continua // Pacif. J. Math.— 1971.— *37*, № 3.— С. 805—812 (РЖМат, 1972, 2А649)
580. — Concerning n-mutal aposyndesis in products of continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— *162*.— С. 239—251 (РЖМат, 1972, 7А423)
581. — Mon-n-mutually aposyndetic continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1974.— *42*, № 2.— С. 595—601 (РЖМат, 1975, 3А545)

582. *Rosen R. H.* On tree-like continua and irreducibility // Duke Math. J.— 1959.— *26*, № 1.— С. 113—122 (РЖМат, 1959, 10923)
583. — Fixed points for multi-valued functions on snake-like continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1959.— *10*, № 1.— С. 167—173 (РЖМат, 1961, 7А341)
584. *Rosenholtz I.* Open maps of chainable continua // Proc. Amer. Math. Soc. — 1974.— *42*, № 1.— С. 258—264 (РЖМат, 1975, 1А549)
585. — Absolute endpoints of chainable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *103*, № 4.— С. 1305—1314 (РЖМат, 1989, 4А472)
586. *Schlais H. E.* Non-aposyndesis and non-hereditary decomposibility // Pacif. J. Math.— 1973.— *45*, № 2.— С. 643—652 (РЖМат, 1973, 12А462)
587. *Segal J. A.* A fixed point theorem for the hyperspace of snake-like continuum // Fundam. math.— 1962.— *50*, № 3.— С. 237—248 (РЖМат, 1962, 10А212)
588. *Smith M.* Plane indecomposable continua no composant of which is accesible at more than one point // Fundam. math.— 1981.— *111*, № 1.— С. 61—69 (РЖМат, 1981, 7А511)
589. — Every mapping of the pseudo-arc onto itself is a near homeomorphism // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *91*, № 1.— С. 163—166 (РЖМат, 1985, 3А532)
590. — Concerning the homeomorphisms of the pseudo-arc X as a subspace of $C(X \times X)$ // Houston J. Math.— 1986.— *12*, № 3.— С. 431—440 (РЖМат, 1987, 10А456)
591. —, *Young S. W.* Periodic homeomorphisms on T-like continua // Fundam. math.— 1979.— *104*, № 3.— С. 221—224 (РЖМат, 1980, 6А551)
592. *Sobolewski M.* Chainable continua and homeomorphisms of the plane onto itself // Fundam. math.— 1984.— *122*, № 1.— С. 105—106 (РЖМат, 1985, 2А549)
593. — A uniquely arcwise connected continuum without the fixed point property // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1986.— *34*, № 5-8.— С. 307—313 (РЖМат, 1987, 5А577)
594. *Szuba S. T.* The set function T and R-continuum // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1979.— *27*, № 3-4.— С. 303—308 (РЖМат, 1980, 4А539)
595. — A new class of non-contractible continua // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 6. Proc. 6th Prague Topol. Symp. 25—29, 1986, Berlin, 1988.— С. 121—123 (РЖМат, 1989, 1А546)
596. — Понятие точечно гладких дендроидов // Успехи мат. наук.— 1979.— *34*, № 6.— С. 215—217 (РЖМат, 1980, 4А540)
597. — R-continua and contractibility of dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1979.— *27*, № 3-4.— С. 299—302 (РЖМат, 1980, 5А495)
598. — Some properties of unicoherence // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1979.— *27*, № 9.— С. 711—716 (РЖМат, 1981, 5А440)
599. — On pointwise smooth dendroids // Fundam. math.— 1981.— *114*, № 3. — С. 197—207 (РЖМат, 1982, 9А438)
600. — Open functions and pointwise smooth dendroids // In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 5, Berlin.— 1983.— С. 118—121 (РЖМат, 1983, 11А670)
601. — Some other characteristics of pointwise smooth dendroids // Rocz. PTM.— 1984.— *24*, № 2.— С. 195—200 (РЖМат, 1985, 5А594)
602. — On dendroids for which smoothness and hereditarily contractibility are equivalent // Rocz. PTM.— 1985.— *25*, № 1.— С. 27—30 (РЖМат, 1985, 12А562)
603. *Thomas E. S.*, Jr. Monotone decompositions of irreducible continua // Doct. diss. Riverside Univ. Calif., 1965, 141 с., «Dissert. Abstrs», 1966, *26*, № 12, Part I, 7347 (РЖМат, 1967, 8А305)
604. — Monotone decompositions of irreducible continua // Roczpr. mat.— 1966.— № 50 (РЖМат, 1967, 10А371)

605. *Toledo J. A.* Inducible periodic homeomorphism of tree-like continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— *282*, № 1.— С. 77—108 (РЖМат, 1985, 1А689)
606. *Torunczyk H.* On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds // Fundam. math.— 1980.— *106*, № 1.— С. 39—40 (РЖМат, 1980, 12А533)
607. —, *West J.* A Hilbert space limit for the iterated hyperspace functor // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *89*, № 2.— С. 329—335 (РЖМат, 1984, 6А494)
608. *Transue W. R. R., Hinrichsen J. W., Fitzpatrick B., Jr.* Concerning upper semi-continuous decompositions of irreducible continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *30*, № 1.— С. 157—163 (РЖМат, 1973, 9А455)
609. *Tymchatyn E. D.* Hyperspaces of hereditarily indecomposable plane continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *55*, № 2.— С. 300—302 (РЖМат, 1977, 3А455)
610. — Weakly confluent mappings and a classification of continua // Colloq. math.— 1976.— *36*, № 2.— С. 229—233 (РЖМат, 1978, 1А489)
611. — On absolutely essential mappings // Houston J. Math.— 1981.— *7*, № 1.— С. 137—145 (РЖМат, 1982, 5А486)
612. *Ungar G. S.* On all kinds of homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— *212*, № 485.— С. 393—400 (РЖМат, 1976, 8А658)
613. *Vought E. J.* A characterization of hereditarily indecomposable continua // Amer. Math. Monthly— 1968.— *75*, № 5.— С. 502—503 (РЖМат, 1969, 2А490)
614. — A classification scheme and characterization of certain curves // Colloq. math.— 1969.— *20*, № 1.— С. 91—98 (РЖМат, 1969, 10А300)
615. — n-aposyndetic continua and cutting theorems // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— *140*, № 6.— С. 127—135 (РЖМат, 1970, 4А477)
616. — Concerning continua not separated by any nonaposyndetic continua // Pacif. J. Math.— 1969.— *31*, № 1.— С. 257—262 (РЖМат, 1970, 5А399)
617. — Monotone decomposition of continua into generalized arcs and simple closed curves // Fundam. math.— 1973.— *80*, № 3.— С. 213—220 (РЖМат, 1974, 7А670)
618. — Monotone decompositions of continua not separated by any subcontinua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— *192*.— С. 67—78 (РЖМат, 1975, 4А566)
619. — On decompositions of hereditarily unicoherent continua // Fundam. math.— 1979.— *102*, № 1.— С. 73—79 (РЖМат, 1979, 8А486)
620. — Monotone decompositions of continua // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 105—113 (РЖМат, 1983, 5А456)
621. — Semiconfluent maps and continua containing no n-odds // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *104*, № 4.— С. 1311—1314 (РЖМат, 1989, 10А536)
622. *Ward L. E., Jr.* Extending Whitney maps // Pacif. J. Math.— 1981.— *93*, № 2.— С. 465—469 (РЖМат, 1982, 1А615)
623. — Local selections and local dendrites // Topol. and Appl.— 1985.— *20*, № 1.— С. 47—58 (РЖМат, 1986, 3А696)
624. *Wardle R. W.* On property of J. L. Kelley // Houston J. Math.— 1977.— *3*, № 2.— С. 291—299 (РЖМат, 1978, 6А525)
625. *Watkins W. T.* Homeomorphic classification of certain inverse limit spaces with open bonding maps // Pacif. J. Math.— 1982.— *103*, № 2.— С. 589—601 (РЖМат, 1983, 11А668)
626. *West J. E.* The subcontinua of the dendron form a Hilbert cube factor // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *36*, № 2.— С. 603—608 (РЖМат, 1973, 7А489)
627. *West T.* Spans of simple triods // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *102*, № 2.— С. 407—415 (РЖМат, 1988, 11А631)
628. — On spans and width of simple triods // Proc. Amer. Math. Soc.— 1989.— *105*, № 3.— С. 776—786 (РЖМат, 1989, 11А506)

629. *Williams J. F.* On 2-ramification points of dendroid // Colloq. Math.— 1972.— *24*, № 2.— С. 205—211 (РЖМат, 1973, 2А429)
630. — Concerning a closed subset of a dendroid containing 2-ramification points // Colloq. math.— 1973.— *27*, № 2.— С. 255—262 (РЖМат, 1973, 12А458)
631. *Young S. W.* The representation of chainable continua with only two bonding maps // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *23*, № 3.— С. 653—654 (РЖМат, 1970, 7А461)
632. *Zame W. R.* A characterization of hereditarily indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1966.— *17*, № 3.— С. 709—710 (РЖМат, 1967, 1А312)
633. *Zaremba D.* Concerning confluent mappings and quasi-interior mappings // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1981.— *29*, № 5-6.— С. 279—283 (РЖМат, 1982, 4А551)

УДК 515.122.3

КОЛЬЦА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Е. М. Вечтомов

ВВЕДЕНИЕ

Обзор посвящен теории колец непрерывных функций на топологических пространствах: алгебраическим свойствам колец непрерывных функций; взаимосвязям свойств топологических пространств и свойств колец непрерывных функций, определенных на них; кольцам глобальных сечений пучков колец. Теория колец непрерывных функций представляет собой ветвь алгебры на стыке с общей топологией и функциональным анализом. Рассматриваются, главным образом, чисто алгебраические и, отчасти, общетопологические аспекты теории колец непрерывных функций. В работе практически не будут отражены следующие разделы функционального анализа, имеющие отношение к кольцам непрерывных функций: теория векторных решеток (полуупорядоченных пространств или пространств Рисса — в других терминах) — [30], [40], [69], [71], [122] — [124], [577]; кольца операторов — [34], [124], [152], [162], [163], [168], [182], [531]; кольца аналитических функций — [73], [92], [93], [139], [766]; топологические векторные пространства (локально выпуклые пространства, банаховы пространства) — [103], [166], [168], [195]. Не будет рассматриваться топологическая алгебра: топологические кольца и модули — [18], [19], [36] — [38], [164], [247], [589]; топологические полуполя [16]; C_p-теория [21]. Книги [91] и [726] специально посвящены банаховым пространствам функций — аналитических и непрерывных соответственно. Только в необходимых случаях будем касаться теории нормированных колец (банаховых и полинормированных алгебр) — [80], [99], [152], [168], [181], [182], [282], [701].

605. *Toledo J. A.* Inducible periodic homeomorphism of tree-like continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— *282,* № 1.— С. 77—108 (РЖМат, 1985, 1А689)
606. *Torunczyk H.* On CE-images of the Hilbert cube and characterization of *Q*-manifolds // Fundam. math.— 1980.— *106,* № 1.— С. 39—40 (РЖМат, 1980, 12А533)
607. —, *West J.* A Hilbert space limit for the iterated hyperspace functor // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *89,* № 2.— С. 329—335 (РЖМат, 1984, 6А494)
608. *Transue W. R. R., Hinrichsen J. W., Fitzpatrick B., Jr.* Concerning upper semi-continuous decompositions of irreducible continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *30,* № 1.— С. 157—163 (РЖМат, 1973, 9А455)
609. *Tymchatyn E. D.* Hyperspaces of hereditarily indecomposable plane continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *55,* № 2.— С. 300—302 (РЖМат, 1977, 3А455)
610. — Weakly confluent mappings and a classification of continua // Colloq. math.— 1976.— *36,* № 2.— С. 229—233 (РЖМат, 1978, 1А489)
611. — On absolutely essential mappings // Houston J. Math.— 1981.— *7,* № 1.— С. 137—145 (РЖМат, 1982, 5А486)
612. *Ungar G. S.* On all kinds of homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— *212,* № 485.— С. 393—400 (РЖМат, 1976, 8А658)
613. *Vought E. J.* A characterization of hereditarily indecomposable continua // Amer. Math. Monthly— 1968.— *75,* № 5.— С. 502—503 (РЖМат, 1969, 2А490)
614. — A classification scheme and characterization of certain curves // Colloq. math.— 1969.— *20,* № 1.— С. 91—98 (РЖМат, 1969, 10А300)
615. — *n*-aposyndetic continua and cutting theorems // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— *140,* № 6.— С. 127—135 (РЖМат, 1970, 4А477)
616. — Concerning continua not separated by any nonaposyndetic continua // Pacif. J. Math.— 1969.— *31,* № 1.— С. 257—262 (РЖМат, 1970, 5А399)
617. — Monotone decomposition of continua into generalized arcs and simple closed curves // Fundam. math.— 1973.— *80,* № 3.— С. 213—220 (РЖМат, 1974, 7А670)
618. — Monotone decompositions of continua not separated by any subcontinua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— *192.*— С. 67—78 (РЖМат, 1975, 4А566)
619. — On decompositions of hereditarily unicoherent continua // Fundam. math.— 1979.— *102,* № 1.— С. 73—79 (РЖМат, 1979, 8А486)
620. — Monotone decompositions of continua // In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980, New York, e. a.— 1981.— С. 105—113 (РЖМат, 1983, 5А456)
621. — Semiconfluent maps and continua containing no *n*-odds // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *104,* № 4.— С. 1311—1314 (РЖМат, 1989, 10А536)
622. *Ward L. E., Jr.* Extending Whitney maps // Pacif. J. Math.— 1981.— *93,* № 2.— С. 465—469 (РЖМат, 1982, 1А615)
623. — Local selections and local dendrites // Topol. and Appl.— 1985.— *20,* № 1.— С. 47—58 (РЖМат, 1986, 3А696)
624. *Wardle R. W.* On property of J. L. Kelley // Houston J. Math.— 1977.— *3,* № 2.— С. 291—299 (РЖМат, 1978, 6А525)
625. *Watkins W. T.* Homeomorphic classification of certain inverse limit spaces with open bonding maps // Pacif. J. Math.— 1982.— *103,* № 2.— С. 589—601 (РЖМат, 1983, 11А668)
626. *West J. E.* The subcontinua of the dendron form a Hilbert cube factor // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *36,* № 2.— С. 603—608 (РЖМат, 1973, 7А489)
627. *West T.* Spans of simple triods // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *102,* № 2.— С. 407—415 (РЖМат, 1988, 11А631)
628. — On spans and width of simple triods // Proc. Amer. Math. Soc.— 1989.— *105,* № 3.— С. 776—786 (РЖМат, 1989, 11А506)

629. *Williams J. F.* On 2-ramification points of dendroid // Colloq. Math.— 1972.— *24,* № 2.— С. 205—211 (РЖМат, 1973, 2А429)
630. — Concerning a closed subset of a dendroid containing 2-ramification points // Colloq. math.— 1973.— *27,* № 2.— С. 255—262 (РЖМат, 1973, 12А458)
631. *Young S. W.* The representation of chainable continua with only two bonding maps // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *23,* № 3.— С. 653—654 (РЖМат, 1970, 7А461)
632. *Zame W. R.* A characterization of hereditarily indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1966.— *17,* № 3.— С. 709—710 (РЖМат, 1967, 1А312)
633. *Zaremba D.* Concerning confluent mappings and quasi-interior mappings // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1981.— *29,* № 5-6.— С. 279—283 (РЖМат, 1982, 4А551)

УДК 515.122.3

КОЛЬЦА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Е. М. Вечтомов

ВВЕДЕНИЕ

Обзор посвящен теории колец непрерывных функций на топологических пространствах: алгебраическим свойствам колец непрерывных функций; взаимосвязям свойств топологических пространств и свойств колец непрерывных функций, определенных на них; кольцам глобальных сечений пучков колец. Теория колец непрерывных функций представляет собой ветвь алгебры на стыке с общей топологией и функциональным анализом. Рассматриваются, главным образом, чисто алгебраические и, отчасти, общетопологические аспекты теории колец непрерывных функций. В работе практически не будут отражены следующие разделы функционального анализа, имеющие отношение к кольцам непрерывных функций: теория векторных решеток (полуупорядоченных пространств или пространств Рисса — в других терминах) — [30], [40], [69], [71], [122] — [124], [577]; кольца операторов — [34], [124], [152], [162], [163], [168], [182], [531]; кольца аналитических функций — [73], [92], [93], [139], [766]; топологические векторные пространства (локально выпуклые пространства, банаховы пространства) — [103], [166], [168], [195]. Не будет рассматриваться топологическая алгебра: топологические кольца и модули — [18], [19], [36] — [38], [164], [247], [589]; топологические полуполя [16]; C_p-теория [21]. Книги [91] и [726] специально посвящены банаховым пространствам функций — аналитических и непрерывных соответственно. Только в необходимых случаях будем касаться теории нормированных колец (банаховых и полинормированных алгебр) — [80], [99], [152], [168], [181], [182], [282], [701].

Отметим следующие книги и большие статьи, примыкающие к теме нашего обзора: по теории колец и алгебр — [26], [29], [37], [97], [134], [173], [178], [202], [250], [433], [751]; по теории решеток — [30], [40], [69], [94] и упорядоченным алгебрам — [24], [170], [197], [257]; по общей топологии — [23], [36], [38], [126], [138], [196]; по логике, пучкам и топосам — [35], [82], [83], [85], [98], [132], [133], [136], [137], [283], [165]; по функциональным и пучковым представлениям колец — [79], [97], [134], [152], [173], [250], [257], [434], [449], [497], [681], [754]; по кольцам и пространствам функций — [20] — [22], [66], [91], [160], [231], [247], [262], [398], [425], [726], [766].

Истоки теории колец непрерывных функций лежат в теории банаховых пространств функций [231], в теории двойственности М. Стоуна [754], [755], в основах теории нормированных колец, разработанных И. М. Гельфандом, М. А. Наймарком и Г. Е. Шиловым в [76], [77], [79]—[81], [152], в теории расширений (компактификации) топологических пространств — в работах Чеха [312], Воллмэна [797]. Основополагающей работой собственно теории колец непрерывных функций послужила известная статья И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова 1939 г. [78]. Отметим также статью Г. Е. Шилова [189]. Затем последовали большие статьи Капланского 1947 г. [528] и Хьюитта 1948 г. [487]. Окончательно теория колец непрерывных функций оформилась в 50-е годы в работах Гиллмана, Хенриксена, Джерисона, Широты, Колса, Пурселла и других. В 1960 г. развитие теории было подытожено в монографии Гиллмана и Джерисона «Кольца непрерывных функций» [425], остающейся единственной книгой в мировой литературе, посвященной собственно теории колец непрерывных функций (второе издание книги вышло в 1976 г.). В дальнейшем существенный вклад в теорию колец функций внесли также Мрувка, Манделкер, Рудд, Дитрих, Говарц, Брукшер, Гофман, Малвей Джонсон, Бахман, Де Марко, Ле Донне и т. д.

Главный объект обзорной статьи — это кольцо всех непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве X и со значениями в топологическом кольце K, с поточечно определенными операциями — кольцо

$$C(X, K),$$

в основном, кольцо $C(X)=C(X, \mathbf{R})$ или $C(X, \mathbf{C})$.

Во введении уместно остановиться на роли колец непрерывных функций в математике и на связи ее с другими разделами математики. Общематематическое значение колец функций заключается в возможности функционального представления, реализации различных абстрактных и конкретных колец как колец непрерывных функций. При этом возникают кольца функций следующих трех важнейших типов: подкольца колец $C(X, K)$ и их обобщения — кольца сечений окольцованных пространств;

кольца операторов (преобразований) линейных структур с поточечно определенным сложением и умножением — суперпозицией операторов; кольца функций на множестве с поточечным сложением и сверточным умножением (изучаются в гармоническом анализе [152], [183], [184]).

Кольца $C(X)$ и $C(X, \mathbf{C})$ являются основным объектом следующих, ставших уже классическими в современной математике, результатов. Это теорема Банаха—Стоуна [231], [755] об определяемости произвольного компакта X банаховым пространством $C(X)$; теорема Стоуна—Вейерштрасса [755], [196] о плотности разделяющих подалгебр алгебры $C(X)$ с топологией равномерной сходимости для компакта X; теоремы Гельфанда—Колмогорова о максимальных идеалах колец $C(X)$ и определяемости компактов X кольцами $C(X)$ ([78], [425]); теорема Гельфанда—Наймарка [79], [152] о строении коммутативных C^*-алгебр; реализация K-пространств как $C(X)$ [71] (имеются в виду пространства Л. В. Канторовича); теорема Ю. Нагаты [643], [21] об определяемости любого тихоновского пространства X топологическим кольцом $C_p(X)$; результат Суона об эквивалентности категории векторных расслоений над компактом X и категории конечно порожденных проективных $C(X)$-модулей ([770], [26]); теория хьюиттовских и E-компактных пространств [487], [425], [620], [621]; представления упорядоченных колец [30], [257].

Теория колец непрерывных функций тесно связана с теорией колец: использует теоретико-кольцевые понятия и результаты (кольцевые конструкции, теорию идеалов, упорядоченные кольца и т. д.) и применяется в общей теории колец, алгебр и модулей (служит источником примеров колец и модулей с теми или иными свойствами; дает представляющие объекты в структурной теории некоторых классов колец; допускает определенные обобщения своих понятий, идей, методов и результатов на абстрактные кольца, реализуемые, скажем, как кольца глобальных сечений соответствующих пучков колец и т. п.). См. §§ 3, 5 и 7 и главу 3 данного обзора. Теория колец непрерывных функций активно взаимодействует и с общей топологией. Назовем работы М. Стоуна [755], Хьюитта [487], А. В. Зарелуа [106]—[108], А. П. Шостака [190], [191], С. А. Богатого [33], Л. Д. Вайнгортина [41], книгу Гиллмана и Джерисона [425]. Здесь связь также двусторонняя. Компактификации пространств X можно строить посредством подколец в $C(X)$ [107], [400]; в терминах колец $C(X)$ можно определять размерность пространств X [33], [41] и решать конкретные проблемы теории размерности топологических пространств [106], [108]; хьюиттовский дуализм (см. п. 2.1) между X и $C(X)$ позволяет доказывать некоторые свойства топологических пространств (см. § 3) по принципу алгебраической топологии. Наоборот, алгебраические свойства колец непрерывных функций можно пытаться доказать общетопологическими методами. Налицо также функториальная связь между топологическими кольцами K и кольцами $C(X, K)$ для фиксированного пространства X. Связь с топологической алгеброй обеспечивается и различными топологизациями колец $C(X, K)$, например, поточечной сходимости или компактно-открытой. Взаимосвязи колец непрерывных функций с различными областями функционального анализа уже отмечены выше. Интегральное представление линейных функционалов (в том числе и мультипликативных линейных функционалов) на $C(X)$ — различные обобщения теоремы Риссов [488], [621] — указывает связь $C(X)$ с общей теорией меры и интеграла. См. также [227] и § 4 нашего обзора. Гипервещественные поля — фактор-поля $C(X)$, не изоморфные $\mathbf{R}$, — являются нестандартными моделями теории вещественных чисел, неархимедовыми расширениями упорядоченного поля $\mathbf{R}$, что обуславливает применение колец $C(X)$ в нестандартном анализе, логике и теории множеств [213], [425]. Имеют место и обратные приложения [136], [186]. Наконец, некоторые теоретико-множественные предположения (например, предположение о существовании измеримых кардиналов, также связанное с теорией меры) могут быть выражены на языке колец $C(X)$.

Коснемся содержания обзора по главам. Кроме введения и библиографии, обзорная работа состоит из 3-х глав, разбитых на 10 параграфов со сквозной нумерацией. В главе 1 рассматриваются связи между топологическими пространствами и кольцами непрерывных функций, определенных на этих пространствах. Излагаются результаты по определяемости пространств, двойственности (дуальности, эквивалентности) различных топологических и алгебраических категорий, кольцевые характеризации топологических свойств и, наоборот, топологические характеристики соответствующих алгебраических свойств. В главе 2 дан обзор работ по алгебраической теории колец непрерывных функций — перечислены общие кольцевые свойства колец непрерывных функций, рассмотрены их подкольца и идеалы, модули над ними, а также характеризации колец непрерывных функций. Глава 3 относится к общей теории колец и ее материал является распространением дуализма между X и $C(X)$ на отношения между окольцованными пространствами (пучками колец) и их кольцами глобальных сечений. Здесь рассмотрены работы по функциональным представлениям колец и свойствам колец сечений.

Обзорная работа опирается как на оригинальные статьи и монографии, так и на материалы реферативного журнала «Математика» за все годы его существования. Большой объем информации неизбежно диктует выбор: одни результаты лишь упомянуты, другие — подробно сформулированы. Из массы пограничных работ и результатов (скажем, о кольцах дифференцируемых, измеримых или интегрируемых функций) отобрана

лишь малая их часть, дополняющая и окаймляющая тему обзора. Необходимые обозначения и определения будут вводиться по ходу изложения. Отметим только, что основные числовые системы обозначаются, как обычно, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. Параграфы статьи подразделяются на пункты с двойной нумерацией. В тексте выделен ряд теорем. Если в пункте несколько теорем, то они последовательно нумеруются внутри пункта. Ссылка, скажем, на теорему 5.1.3 означает, что имеется в виду теорема 3 из пункта 5.1 — первого пункта пятого параграфа. Работа является продолжением предыдущего обзора автора [66].

Глава 1

СВЯЗИ МЕЖДУ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ И СООТВЕТСТВУЮЩИМИ КОЛЬЦАМИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Определяемость топологических пространств

1.1. Определяемость пространств кольцами непрерывных функций. Хотя исторически первыми теоремами определяемости была теорема Банаха [231] 1932 г. об определяемости любого метризуемого компакта X банаховым пространством $C(X)$ и теорема М. Стоуна [754] 1936 г. об определяемости произвольного нульмерного компакта X булевым кольцом $C(X, \mathbf{Z}_2)$, начнем изложение с колец $C(X)$.

Компакт — это компактное хаусдорфово пространство. Вполне регулярное хаусдорфово пространство называется тихоновским. Если хаусдорфово пространство имеет базу из открыто-замкнутых множеств, то оно называется нульмерным. Хьюиттовским называется $\mathbf{R}$-компактное пространство, т. е. пространство, гомеоморфное замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени $\mathbf{R}$. Определяемость топологического пространства X со свойством P кольцом $C(X)$ означает, что для каждого пространства Y, обладающего свойством P, если кольца $C(Y)$ и $C(X)$ изоморфны, то Y гомеоморфно X.

Теорема 1 (И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров [78]). Произвольный компакт X определяется своим кольцом $C(X)$.

Теорема 2 (Хьюитт [487]). Всякое хьюиттовское пространство X определяется кольцом $C(X)$.

Теорема 3 (Хьюитт [487]). Данное тихоновское пространство X определяется в классе всех тихоновских пространств кольцом $C(X)$ тогда и только тогда, когда оно хьюиттовское и для любой его неизолированной точки x существует в $C(X\setminus\{x\})$ функция, не расширяемая до функции из $C(X)$.

Теорема 4 (Андерсон [208]). Любое тихоновское G_δ-пространство X определяется кольцом (решеткой) $C(X)$.

Напомним, что пространство называется G_δ-пространством, если все его точки суть G_δ-точки, т. е. пересечения счетных семейств открытых множеств этого пространства. Подчеркнем, что для произвольного топологического пространства X существует хьюиттовское пространство Y, у которого кольцо $C(Y)$ изоморфно кольцу $C(X)$ (см. [425]). Теоремы 2 и 3 указывают границы для теорем определяемости. Из теоремы 3 вытекает результат Мисры [610] об определяемости кольцом $C(X)$ любого хьюиттовского G_δ-пространства X в классе тихоновских пространств. Частными случаями теоремы 4 являются результаты об определяемости кольцами $C(X)$ тихоновских пространств X с первой аксиомой счетности и нормальных G_δ-пространств X (соответственно, [78] и [690]), например, метризуемых пространств X.

Рассмотрим теперь определяемость пространств кольцами $C(X, E)$.

Теорема 5 (М. Стоун [755]). Каждое нульмерное локально компактное пространство X определяется булевым кольцом $C_{00}(X, \mathbf{Z}_2)$ характеристических функций всевозможных компактных открыто-замкнутых множеств в X.

Теорема 6 (Капланский [528]). Произвольный нульмерный компакт X определяется кольцом $C(X, E)$, где E — несвязное топологическое тело.

Далее вопросы определяемости пространств исследовались в рамках теории E-компактности, созданной и развитой Мрувкой и его последователями [389], [615]—[626], [278], [295], [315], [316], [443]—[447], [736], [737], [764], [765]. Для топологического пространства E пространство X называется E-регулярным (E-компактным), если X гомеоморфно произвольному (замкнутому) подпространству подходящей тихоновской степени пространства E.

Теорема 7 (Мрувка [618]). Каждое $\mathbf{N}$-компактное пространство X определяется кольцом $C(X, \mathbf{Z})$, где $\mathbf{Z}$ берется с дискретной топологией.

Теорема 8 (Блефко [278]). Каждое $\mathbf{N}$-компактное пространство X определяется кольцом $C(X, \mathbf{Q})$.

В [315] теоремы 7 и 8 распространены на широкий класс топологических колец E, включающий, в частности, все топологические подполя в $\mathbf{R}$; подробнее см. пункты 1.15—1.17 обзора [66]. Для обширных классов топологических тел E определяемость E-компактных пространств X кольцами $C(X, E)$ доказана в работах Бахмана и др. [228] и Е. М. Вечтомова [49] и [60]. Для получения определяемости E-регулярных пространств, как показывают приведенные результаты, необходимо накладывать дополнительные ограничения либо на определяемые пространства, либо на определяющие кольца.

Теорема 9 (Ю. Нагата [643]). Произвольное тихоновское пространство X определяется топологическим кольцом $C_p(X)$ с топологией поточечной сходимости.

Теорема 10 ([784], [733], [49]). Любое тихоновское пространство X определяется топологическим кольцом $C_k(X)$ с компактно-открытой топологией (см. также [528]).

Теорема 11 (Пурселл [691], обобщение — в [49]). Произвольные тихоновские пространства X и Y гомеоморфны в том и только в том случае, когда существует изоморфизм кольца $\mathbf{R}^X$ на кольцо $\mathbf{R}^Y$, отображающий $C(X)$ на $C(Y)$.

Теорема 12 (Е. М. Вечтомов [51]). Пусть E — хаусдорфово топологическое кольцо с $1 \neq 0$, являющееся простым (алгебраически) кольцом. Всякое E-вполне регулярное пространство X определяется правым $C(X, E)$-модулем E^X всех E-значных функций на X.

Хаусдорфово пространство называется E-вполне регулярным, если в этом пространстве любое замкнутое множество E-отделимо от каждой не лежащей в нем точки. Два множества пространства X называются E-отделимыми, если в $C(X, E)$ найдется функция, равная 0 на одном из них и 1 — на другом.

В заключение пункта перечислим еще несколько работ: [156], [158], [187], [189], [454], [470], [473], [491], [584], [585], [599], [644], [645], [692], [693], [783]. Отметим также статьи Гудерла [441] и Джерисона [523] о локальной определяемости пространств кольцами ростков непрерывных функций, Пирса о кольцах $C(X, \mathbf{Z})$ [680], Рудда [710], [712] об изоморфизме идеалов колец $C(X)$.

1.2. Определяемость пространств структурами, ассоциированными с кольцами непрерывных функций. Для полноты изложения перечислим основные результаты. За подробностями отсылаем к §§ 1 и 2 обзорной статьи [66].

Теорема 1 (Банаха—Стоуна, [231] и [755]). Компакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда банаховы пространства $C(X)$ и $C(Y)$ (эквивалентно, $C(X, \mathbf{C})$ и $C(Y, \mathbf{C})$) изометрически изоморфны.

Обобщениям и развитию теоремы Банаха—Стоуна посвящены многочисленные публикации, среди которых выделим монографию Берендса [249] и обзорную статью Яроша [520]. К этой теме примыкает теория А. А. Милютина, также имеющая обширную литературу — отметим книгу Пелчинского [160] и статьи [142] и [321].

Теорема 2 (А. А. Милютин [142], доказана в 1952 г.). Пусть $E = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ и X, Y — произвольные метризуемые компакты несчетной мощности. Тогда банаховы пространства $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ топологически изоморфны как топологические векторные пространства над полем E.

В смысле определяемости пространств теорема 2 носит отрицательный характер. Сюда относятся и следующие замечания: компакты X не обязаны определяться аддитивной группой или мультипликативной группой кольца $C(X)$, хьюиттовские пространства X не определяются, вообще говоря, кольцами $C^*(X)$

всех ограниченных непрерывных отображений $X \to \mathbf{R}$. Все теоремы п. 1.1 справедливы для мультипликативных полугрупп $C(X, E)$ и решеток $C(X)$. Определяемость произвольного компакта X решеточно упорядоченной аддитивной группой $C(X)$ установил Стоун [757] в 1941 г., решеткой $C(X)$ — Капланский [529] в 1947 г., мультипликативной полугруппой $C(X)$ — Милгрэм [609] в 1949 г. . Широта [732], [733] в 1952 г. последовательно доказал определяемость любого хьюиттовского пространства X следующими структурами $C(X)$: решеточно упорядоченной группой, векторной решеткой, решеткой и мультипликативной полугруппой. В работе [733] также была отмечена определяемость любого тихоновского пространства X топологической решеткой $C_p(X)$ и топологической полугруппой $C_p(X)$. Определяемость каждого E-регулярного пространства X парой мультипликативных полугрупп $C(X, E)$ и E^X, а также топологическими полугруппами $C_p(X, E)$ и $C_k(X, E)$ получена в [49]. Е. М. Вечтомовым в [50] и [54] рассмотрена определяемость локально компактного хаусдорфова пространства X мультипликативной полугруппой $C_{00}(X)$ всех непрерывных функций с компактными носителями и $C(X)$-модулем $C_{00}(X)$. В [60] дана определяемость E-компактных пространств X различными упорядоченными множествами идеалов колец $C(X, E)$. Определяемость пространств разнообразными мультипликативными структурами непрерывных функций исследовалась автором обзора [60], Часаром [338]—[341], а также в статьях [242], [501], [745], [816]. Определяемость хьюиттовских пространств X решетками $Z(X)$ их нуль-множеств доказана в [292] (см. также [442] и [60]). В работах [47], [158], [530], [618], [623], [625], [650], [652], [764], [765], [796] имеются результаты по определяемости пространств решетками непрерывных функций. Полукольцам и решеткам функций посвящены статьи [119]—[121], [185], [662], [736], [737].

В завершающей теореме пункта будем рассматривать топологические тела E из некоторого широкого класса тел [60]. E-нуль-множеством на пространстве X называется множество нулей $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ некоторой функции f из $C(X, E)$. Множество всех E-нуль-множеств на X образует решетку $Z(X, E)$ относительно $\subseteq$.

Теорема 3 ([60], [66]). Для любых E-компактных пространств X и Y равносильны следующие утверждения: 1) X и Y гомеоморфны; 2) кольца $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны; 3) кольца $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ Морита-эквивалентны; 4) мультипликативные полугруппы $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны; 5) предупорядоченные множества правой (левой) делимости $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны; 6) решетки всех идеалов (правых идеалов) колец $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны; 7) полурешетки всех конечно порожденных идеалов в $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны; 8) упорядоченные множества всех главных идеалов колец $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны; 9) решетки $Z(X, E)$ и $Z(Y, E)$ изоморфны.

1.3. Добавление к обзору «Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций». Дополним библиографию предыдущей обзорной статьи автора [66]: [32], [65], [72], [74], [75], [96], [104], [119], [121], [140], [141], [146]—[150], [153], [154], [177], [186], [192]—[194], [198]—[200], [242], [246], [248], [285], [296], [297], [310], [317], [320], [321], [363], [374], [385], [401], [406], [410]—[413], [441], [468], [469], [483], [501], [509], [515], [517]—[520], [523], [527], [557], [558], [561], [570], [581], [639], [642], [652], [656], [660], [682], [698], [745], [767], [768], [780], [781], [783], [804], [816], [817], [823], [825], [830], [832].

Небольшой комментарий к данному списку. Основные работы по определяемости пространств указаны в названном обзоре. Большинство результатов только что перечисленных работ имеет дополняющий характер. Имеются публикации последних лет по определяемости пространств полугруппами непрерывных преобразований ([65], [72], [74], [75], [146]—[150], [177], [192]—[194], [198], [199]), дополняющие известный обзор Магилла [586] 1976 г. и добавление к нему [432]. Работа Херрлиха [483] и статьи [509] и [32] посвящены развитию теории E-компактности. В связи со своими исследованиями по топологии непрерывных отображений [153], Б. А. Пасынков в [154] показал определяемость всякого тихоновского отображения порожденным им пучком топологических колец, тем самым распространив теорему Нагаты (теорема 1.1.9) на отображения. Выделим еще следующий результат:

Теорема (Гудерл [441]). Если многообразия X и Y (т. е. локально конечномерные евклидовы пространства) имеют в точках p и q изоморфные кольца ростков непрерывных функций: $C(X)/O_p \cong C(Y)/O_q$, то точки p и q обладают гомеоморфными окрестностями, т. е. размерности X и Y в точках p и q равны.

Здесь $O_p = \{f \in C(X) : Z(f)$ — окрестность точки $p\}$ — идеал кольца $C(X)$. Созвучный результат имеется у Джерисона [523].

§ 2. Двойственности

2.1. Двойственность Хьюитта. Если $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, то отображение $C(\varphi) : C(Y) \to C(X)$, заданное формулой

$$C(\varphi)(f) = f \circ \varphi \text{ для всех } f \in C(Y),$$

является кольцевым гомоморфизмом, сохраняющим единицу 1. Ясно, что $C : X \mapsto C(X)$, $\varphi \mapsto C(\varphi)$ служит контравариантным функтором категории всех топологических пространств и их непрерывных отображений в категорию коммутативных колец с 1 с кольцевыми гомоморфизмами, сохраняющими 1, в качестве морфизмов.

Теорема ([487]; [425, глава 10]). Функтор C осуществляет эквивалентность (двойственность) категории всех хьюиттовских пространств и их непрерывных отображений и категории всевозможных колец вида $C(X)$ и их кольцевых гомоморфизмов, сохраняющих единицу.

Доказательство (набросок). Произвольное хьюиттовское пространство X легко восстанавливается по своему кольцу $C(X)$. Именно, X гомеоморфно пространству всех $\mathbf{R}$-идеалов в $C(X)$ с топологией Стоуна-Зарисского (это характеристическое свойство хьюиттовских пространств X). Максимальный идеал кольца $C(X)$ называется $\mathbf{R}$-идеалом, если факторкольцо по нему изоморфно $\mathbf{R}$ (это в точности ядра характеров кольца $C(X)$). Пусть дан кольцевой гомоморфизм $\alpha: C(Y) \to C(X)$, сохраняющий 1, при хьюиттовских пространствах X и Y. Возьмем точку $x \in X$ и рассмотрим $\mathbf{R}$-идеал $M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ кольца $C(X)$. $\mathbf{R}$-идеал $\alpha^{-1}(M_x)$ кольца $C(Y)$ основывается на единственной точке $y \in Y : \alpha^{-1}(M_x) = M_y$. Полагая $\varphi(x) = y$, получаем отображение $X \to Y$, обладающее свойством

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(M_x) = M_y.$$

Нетрудно показать, что φ непрерывно и индуцирует гомоморфизм α, т. е. $\alpha = C(\varphi)$.

Замечания. 1. В рамках теории E-компактности хьюиттовский дуализм, соответствующий случаю $E = \mathbf{R}$, можно перенести на другие тополого-алгебраические структуры E — см. § 1 работы [66] и данное там определение 1.9 строго определяющей системы. Частным случаем такого подхода является двойственность М. Стоуна, рассматриваемая в следующем пункте 2.2.

2. Если $\varphi: X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновских пространств, то справедливы утверждения:

$$C(\varphi) \text{ — вложение} \Leftrightarrow \varphi(X) \text{ плотно в } Y;$$

$C(\varphi)$ — наложение $\Leftrightarrow \varphi$ — гомеоморфное вложение и любая функция из $C(\varphi(X))$ продолжается до некоторой функции из $C(Y)$.

3. Свойства функторов C и C^* рассматривались в [487], [425], [584], [613], [804].

4. Алгебраические характеризации колец $C(X)$ указаны в § 8.

2.2. Классические двойственности и их обобщения. К классическим двойственностям, помимо антиэквивалентности Хьюитта, относятся: двойственность М. Стоуна, дуализм И. М. Гельфанда и двойственность Л. С. Понтрягина (мы не затрагиваем двойственность Пуанкаре между накрывающими пространствами и фундаментальными группами — см. главу 9 из [164], двойственности на комплексных пространствах [85], различные эквивалентности алгебраической геометрии [178], скажем, между аффинными многообразиями над $\mathbf{C}$ и соответствующими конечно порожденными алгебрами над $\mathbf{C}$, и другие двойственности).

Кольцо с тождеством $x^2 = x$ называется булевым. Будем считать, что булевы кольца имеют $1 \neq 0$, а их гомоморфизмы переводят 1 в 1. Класс булевых колец с 1 совпадает с классом булевых алгебр. Каждому топологическому пространству X поставим в соответствие булево кольцо $B(X)$ всех его открыто-замкнутых множеств с операциями симметрической разности (сложение) и пересечения (умножение). Кольцо $B(X)$ изоморфно кольцу $C(X, \mathbf{Z}_2)$. Обратно, каждому булеву кольцу B сопоставим максимальный спектр $M(B)$ — пространство всех его максимальных идеалов в топологии Стоуна—Зарисского.

Теорема 1 (двойственность Стоуна). Контравариантные функторы B и M устанавливают двойственность между категорией всех нульмерных компактов с непрерывными отображениями и категорией всех булевых колец с 1 с их гомоморфизмами.

Заметим, что в духе теоремы 1.1.5 функторы B и M осуществляют двойственность между всеми нульмерными локально компактными пространствами и всевозможными ненулевыми булевыми кольцами. Однако, в качестве морфизмов топологических объектов следует брать непрерывные отображения, сохраняющие компактность при переходе к прообразам, а кольцевые гомоморфизмы должны быть ненулевыми.

Теория Стоуна булевых колец и булевых пространств разработана им в середине 30-х годов XX века [754], [755]. Изложение этой теории можно найти в книгах [69], [165], [173], [202], [327], а также в [30] и [94]. Отметим статью [373]. Обобщениям стоуновской теории посвящены работы [95], [155]—[157], [159], [197], [323], [414], [459], [507], [537], [560], [677], [820].

Перейдем к теории И. М. Гельфанда нормированных колец, начало которой было положено в работах [76] и [77]. Если X — компакт, то алгебра $C(X, \mathbf{C})$ над полем $\mathbf{C}$ с супремум-нормой и с инволюцией-сопряжением является $\mathbf{C}^*$-алгеброй. Если же A — коммутативная $\mathbf{C}^*$-алгебра с 1, т. е. коммутативная банахова алгебра над $\mathbf{C}$ с 1 и с инволюцией $*$, удовлетворяющей тождеству $\|a \cdot a^*\| = \|a\|^2$, где $\|a\|$ — норма элемента $a \in A$, то пространство $M(A)$ всех максимальных (замкнутых) идеалов в A с топологией Стоуна—Зарисского является компактом и алгебры A и $C(M(A), \mathbf{C})$ изометрически $*$-изоморфны. Причем в роли изоморфизма выступает знаменитое преобразование Гельфанда алгебры A, которое каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие функцию $\hat{a} \in C(M(A), \mathbf{C})$ по правилу: если p — максимальный идеал $\mathbf{C}^*$-алгебры A, то, согласно теореме Гельфанда—Мазура, факторалгебра A/p совпадает с полем $\mathbf{C}$ и тогда $\hat{a}(p) \in \mathbf{C}$ — соответствующий образ элемента a.

Теорема 2 (двойственность Гельфанда). Функторы $C(\ , \mathbf{C})$

и M осуществляют двойственность между категорией всех компактов и их непрерывных отображений и категорией всех коммутативных $\mathbf{C}^*$-алгебр с единицей и их гомоморфизмов.

Двойственность Гельфанда может быть распространена на локально компактные хаусдорфовы пространства и коммутативные $\mathbf{C}^*$-алгебры, не обязательно содержащие единицу [774], [182]. Теория пучков позволяет расширить двойственность Гельфанда на некоммутативные $\mathbf{C}^*$-алгебры и на кольца Гельфанда [496], [635] (см. § 9 нашего обзора). Назовем еще книги [80], [152], [168], [701] и статьи [79], [81], [350], [656], [727], [785], содержащие изложение теории нормированных колец и ее обобщения. Особенно рекомендуем книгу А. Я. Хелемского [182]. Упомянем также обзор [379] по C^*-алгебрам.

Сформулируем центральный результат теории двойственности Понтрягина. Пусть $\Gamma(A)$ — группа характеров локальио компактной абелевой группы A, т. е. мультипликативная группа всевозможных непрерывных гомоморфизмов группы A в компактную мультипликативную группу всех комплексных чисел с модулем 1, наделенная компактно-открытой топологией.

Теорема 3 (двойственность Понтрягина). Контравариантный функтор Γ порождает самодвойственность категории всех локально компактных абелевых групп и их непрерывных гомоморфизмов, т. е. функтор $\Gamma\circ\Gamma$ естественно эквивалентен тождественному функтору.

Таким образом, произвольная локально компактная абелева группа A канонически изоморфна группе $\Gamma(\Gamma(A))$. Этот результат получен Л. С. Понтрягиным в 1934 году. Теория двойственности Понтрягина подробно изложена в книгах [164] и [184]. Распространение двойственности Понтрягина на некоммутативные группы и алгебры дано в [144] и [798]. В [214] теорема 3 перенесена на топологические модули над локально компактным коммутативным кольцом. К данной теме относятся и следующие работы: [62], [65], [132], [133], [151], [235], [349], [383], [563], [682], [686], [703], [792].

Заметим, что теоремы 1.1.9, 1.1.10 и 2.1 показывают, что функторы C_p и C_k устанавливают антиэквивалентность категории всех тихоновских пространств с непрерывными отображениями и категорий соответствующих топологических колец с непрерывными гомоморфизмами, сохраняющими единицу. Автором обзора получены аналогичные результаты для категорий всех топологических пространств ([65, теорема 1]) и всех T_0-пространств ([66, теорема 3.6]).

Подчеркнем, что почти все указанные двойственности имеют «неоднородный» характер, т. е. устанавливают соответствие между объектами принципиально различной природы — топологическими и алгебраическими или тополого-алгебраическими. Из классических лишь двойственность Понтрягина «однородна». Попытка включить классические двойственности в рамки единой «однородной» двойственности предпринята В. В. Пашенковым в [159].

Примечание. Понятие «двойственность» употребляется нами в широком смысле, в то время как узкое, более строгое значение относится к однородным двойственностям типа двойственности Понтрягина. Термины «эквивалентность», «дуализм», «антиэквивалентность» используются как синонимы «двойственности».

§ 3. Кольцевые характеристики топологических свойств

В этом параграфе рассматриваются характеризации на языке колец непрерывных функций следующих свойств топологических пространств: быть F-пространством и быть P-пространством, базисной несвязности и экстремальной несвязности, дискретности и конечности, паракомпактности и псевдокомпактности, сильной нульмерности и некоторых других.

3.1. F-пространства. F-пространства определены Гиллманом и Хенринксеном [423] в 1956 г. как такие тихоновские пространства X, что каждый конечно порожденный идеал кольца $C(X)$ является главным. Мы не требуем тихоновости в определении F-пространств. Чисто топологическая характеризация произвольных F-пространств получена автором в 1990 г. [68].

Идеал $\mathcal{J}$ кольца называется чистым, если для любого $a\in\mathcal{J}$ существует такой $e\in\mathcal{J}$, что $a\cdot e=a$. Подмножество A пространства X называется C-расширяемым (C^*-расширяемым) в X, если все функции из $C(A)$ ($C^*(A)$) продолжаются до функций из $C(X)$ ($C^*(X)$). Конуль-множества на X — это дополнения до нуль-множеств на X.

Теорема. Для всякого топологического пространства X равносильны следующие условия:

1) X — F-пространство;

2) кольцо $C(X)$ слабо риккартово, т. е. аннуляторы его элементов — чистые идеалы;

3) все идеалы кольца $C(X)$ являются плоскими $C(X)$-модулями;

4) все главные идеалы кольца $C(X)$ плоские;

5) кольцо $C(X)$ дистрибутивно, т. е. решетка всех его идеалов дистрибутивна;

6) каждый максимальный чистый идеал в $C(X)$ прост;

7) все идеалы в $C(X)$ выпуклы (абсолютно выпуклы);

8) любой два-порожденный идеал в $C(X)$ является главным;

9) кольцо $C(X, \mathbf{H})$ инвариантно справа (слева), т. е. каждый его правый (левый) идеал является двусторонним, где $\mathbf{H}$ — топологическое тело кватернионов;

10) кольцо $C^*(X)$ обладает любым (эквивалентно, некоторым) из перечисленных выше свойств;

11) всякое конуль-множество на X C^*-расширяемо;

12) любые два непересекающиеся конуль-множества на X функционально отделимы ($\mathbf{R}$-отделимы).

Е. М. Вечтомов доказал характеристики 2)—4) в [53], 5) и 6) — в [55] и 9) — в [56] и [61]. Условия 3) и 4) передоказаны в [661]. Характеризации 7), 8) и 10)—12) содержатся в [423] и [425]. Другие алгебро-функционально-топологические характеризации F-пространств можно найти в главе 14 монографии [425] и в [55], [61]. Определение EF-пространств и их характеризации для локально компактных тел E содержатся также в [55] и [61]. Различные топологические результаты о классе F-пространств имеются в [325], [364], [381], [382], [418], особенно — в [423] и [425], в [516], [550], [655]. F-пространствами являются экстремально несвязные пространства и P-пространства, но их произведение уже не обязано быть F-пространством [655]. В [423] показано, что нарост $\beta X \setminus X$ произвольного σ-компактного локально компактного некомпактного хаусдорфова пространства есть F-пространство. Здесь βX — стоун-чеховская компактификация пространства X. Специфическим свойством F-пространств является отсутствие в них нетривиальных сходящихся последовательностей [423].

Заметим, что наличие кольцевых характеристик F-пространств позволяет получать некоторые топологические результаты о них по методу алгебраической топологии. Этим способом можно доказать следующие утверждения. C^*-расширяемые подпространства F-пространств суть F-пространства. Пространства X, τX, $\nu\tau X$ и $\beta\tau X$ одновременно являются или не являются F-пространствами. Здесь τX — канонически построенное для произвольного пространства X тихоновское пространство, причем, $C(X) \cong C(\tau X) \cong C(\nu\tau X)$ и $C(\beta\tau X) \cong C^*(X)$ [425].

3.2. P-пространства. P-пространства определены Гиллманом и Хенриксеном [422] в 1954 г. как такие тихоновские пространства X, что каждый простой идеал кольца $C(X)$ максимален. Рассматривались и не тихоновские P-пространства [611], [697].

Теорема. Для произвольного тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:

1) X — P-пространство;

2) пересечения счетных семейств открытых в X множеств открыты;

3) кольцо $C(X)$ регулярно (по Нейману), т. е. для каждого a из $C(X)$ существует такой элемент $b \in C(X)$, что $aba = a$;

4) максимальные чистые идеалы кольца $C(X)$ являются максимальными идеалами;

5) для любых $a, b \in C(X)$ $aC(X) + bC(X) = (a^2 + b^2)C(X)$;

6) каждый идеал в $C(X)$ есть пересечение максимальных идеалов;

7) $C(X)$-модуль $\mathbf{R}^X$ инъективен;

8) $C(X)$-модуль $\mathbf{R}^X$ плосок (строго плосок);

9) $C(X)$ — чистый подмодуль $C(X)$-модуля $\mathbf{R}^X$;

10) νX — P-пространство;

11) каждое конуль-множество на X C-расширяемо;

12) все нуль-множества на X открыто-замкнуты.

Утверждения 2)—6) и 10)—12) (4) — в другой форме) имеются в [422] и [425]. Условия 7)—9) появились в [51]. В этих работах имеются и другие характеризации P-пространств. Заметим, что все условия теоремы, кроме 2), равносильны при любом X. В работе [51] сформулированная теорема распространена на кольца $C(X, K)$ для топологических тел K. Свойства P-пространств изучались также в [416], [511], [648], [655], [665]. Отметим лишь, что псевдокомпактные P-пространства необходимо конечны.

3.3. Базисно несвязные и экстремально несвязные пространства. Если E — топологическое кольцо, то пространство X называется E-базисно несвязным, если замыкания E-конуль-множеств на X открыты. Топологическое пространство называется экстремально несвязным, если замыкания его открытых множеств открыты. В теоремах 1 и 2 предполагается, что E — локально компактное недискретное тело и X — произвольное E-вполне регулярное пространство.

Теорема 1. Эквивалентны следующие условия:

1) пространство X E-базисно несвязно;

2) каждый главный правый (левый) идеал кольца $C(X, E)$ проективен;

3) каждый конечно порожденный правый (левый) идеал в $C(X, E)$ проективен;

4) кольцо $C(X, E)$ риккартово, т. е. аннуляторы его элементов порождаются (центральным) идемпотентом;

5) аннуляторы главных идеалов кольца $C(X, E)$ проективны;

6) каждый аннуляторный идеал кольца $C(X, E)$ порождается идемпотентами;

7) аннуляторные идеалы кольца $C(X, E)$ — чистые идеалы;

8) кольцо $C^*(X, E)$ ограниченных функций удовлетворяет одному (каждому) из перечисленных выше условий.

Теорема 2. Эквивалентны следующие условия:

1) X — экстремально несвязное пространство;

2) кольцо $C(X, E)$ является бэровским, т. е. аннуляторные идеалы в $C(X, E)$ выделяются прямыми слагаемыми;

3) аннуляторные идеалы кольца $C(X, E)$ проективны как правые (левые) $C(X, E)$-модули;

4) открытые множества в X C_E^*-расширяемы.

Теоремы 1 и 2 доказаны в [59]. Эквивалентность условий 1) и 2) теоремы 1 установлена ранее [290], [52]. Равносильность условий 1), 2) и 4) теоремы 2 при $E = \mathbf{R}$ известна давно [425], [524]. Информация о базисно несвязных ($\mathbf{R}$-базисно несвязных) и экстремально несвязных пространствах содержится в книгах [23], [196], [425]. В теореме 2 вместо $C(X, E)$ можно взять кольцо

$C^*(X, E)$. Теорема Кокстера [492] утверждает, что тихоновское пространство X экстремально несвязно тогда и только тогда, когда $C(X)[i]$ (эквивалентно, $C^*(X)[i]$) — тотально целозамкнутое кольцо. Укажем также работы [381], [416], [423], [511], [550], [582], [604]. Среди некольцевых характеризаций выделяется теорема Накано—Стоуна ([649], [756], [758]): для экстремальной несвязности (базисной несвязности) тихоновского пространства X необходимо и достаточно, чтобы решетка $C(X)$ была условно полной (условно σ-полной).

3.4. Дискретность и конечность. Ответ на вопрос о том, является ли свойство дискретности для тихоновских пространств кольцевым, зависит от аксиоматики теории множеств. Если предположить существование измеримых кардиналов, то, взяв дискретное пространство X измеримой мощности и его расширение Хьюитта νX, получим негомеоморфные пространства с изоморфными кольцами $C(X)$ и $C(\nu X)$ (см. главу 12 из [425]). Если же исходить из противоположной гипотезы (все кардиналы неизмеримы), то по теореме Исбелла [511] о дискретности экстремально несвязных P-пространств неизмеримой мощности и по теореме Е. М. Вечтомова [52] о самоинъективных кольцах непрерывных функций дискретность произвольного тихоновского пространства X равносильна самоинъективности кольца $C(X)$. Однако дискретность X можно выразить на языке модуля $\mathbf{R}^X$.

Теорема 1. Для любого топологического тела E и любого E-вполне регулярного пространства X эквивалентны условия:

1) X дискретно;
2) $C(X, E)$-модуль E^X-проективен;
3) модуль E^X свободен;
4) модуль E^X дистрибутивен;
5) все конечно порожденные подмодули в E^X — циклические;
6) E^X — инъективная оболочка модуля $C(X, E)$.

Эквивалентность условий 1)—3) впервые доказана в [51], а эквивалентность 1), 4) и 5) — автором обзора [55] и А. А. Туганбаевым [834].

Очевидно, что свойство конечности тихоновских пространств X является кольцевым и равносильно, скажем, тому или иному условию обрыва цепочек идеалов в $C(X)$.

Теорема 2. Пусть E — локально компактное недискретное тело. Тогда для всякого E-вполне регулярного пространства X эквивалентны следующие условия:

1) X конечно;
2) каждый правый (левый) идеал кольца $C(X, E)$ проективен;
3) чистые идеалы кольца $C(X, E)$ аннуляторны (прямые слагаемые);
4) проективные (правые) идеалы кольца $C(X, E)$ аннуляторны (суть прямые слагаемые);

5) каждый первичный идеал кольца $C(X, E)$ проективен (как правый или левый $C(X, E)$-модуль);
6) каждый максимальный идеал в $C(X, E)$ проективен;
7) $C^*(X, E)$ — прямое слагаемое $C^*(X, E)$-модуля E^X.

Эквивалентность условий 1), 2), 5) и 6) при $E=\mathbf{R}$ впервые доказана Брукшером [291], а в сформулированном виде теорема 2 фактически содержится в [59].

3.5. О некоторых топологических свойствах. Рассматриваются только тихоновские пространства. Пусть T — некоторое свойство топологических пространств и $\mathbf{K}$ — класс всех пространств, удовлетворяющих T. Два пространства X и Y назовем C-эквивалентными, если их кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны. Свойство T, сохраняемое отношением C-эквивалентности, назовем C-свойством (или кольцевым). Аналогично определяется понятие C^*-свойства. Легко убедиться, что T является C-свойством (C^*-свойством) $\Leftrightarrow$ класс $\mathbf{K}$ замкнут относительно хьюиттовских (стоун-чеховских) расширений и взятия плотных C-расширяемых (C^*-расширяемых) подпространств. Все свойства пунктов 3.1—3.4, кроме дискретности, являются C-свойствами, а C^*-свойствами не являются дискретность и свойство быть P-пространством. Всякое C^*-свойство будет и C-свойством.

Очевидно, что такие свойства как связность, псевдокомпактность, сильная нульмерность — примеры C^*-свойств. Отметим, что пространство X сильно нульмерно (т. е. βX нульмерно) тогда и только тогда, когда каждый чистый идеал кольца $C(X)$ (эквивалентно, $C^*(X)$) порождается идемпотентами [59]. Компактность, нормальность, аксиомы счетности, хьюиттовость не являются C-свойствами. Если X — дискретное пространство измеримой мощности, то оно метризуемо и локально связано, но C-эквивалентное ему пространство νX и не метризуемо, и не локально связно. Однако, в классе компактов метризуемость и локальная связность C-выразимы [25], [68].

Заметим, что, как показывает теорема 1.1.12, любое топологическое свойство может быть так или иначе выражено на языке $C(X)$-модуля $\mathbf{R}^X$. Соответствующие примеры — это теоремы 3.2 и 3.4.1, а также модульная характеризация локальной связности, данная в [68].

В заключение § коснемся класса всех локально компактных хаусдорфовых пространств X. Любое такое X определяется $C(X)$-модулем $C_{00}(X)$ и, следовательно, топологические свойства X выразимы в терминах модуля $C_{00}(X)$. В [54] получены модульные характеристики некоторых свойств X: компактность X эквивалентна тому, что модуль $C_{00}(X)$ свободен (или строго плосок); конечность X равносильна инъективности $C_{00}(X)$; найдены $C_{00}(X)$ — эквиваленты дискретности и базисной несвязности X. В [270] и [399] доказано, что паракомпактность

X эквивалентна проективности $C(X)$-модуля $C_{00}(X)$. Из сказанного вытекает, что взяв некомпактное паракомпактное локально компактное хаусдорфово пространство X, получаем пример проективного модуля $C_{00}(X)$, не являющегося свободным или строго плоским.

§ 4. Другие взаимосвязи

4.1. Результаты Де Марко о связи свойств X и C(X). Перечислим результаты о кольцах $C(X)$ из статьи Де Марко [357], примыкающей к статье Е. М. Вечтомова [59], цитированной в § 3 (обе работы сданы в печать осенью 1982 г.). Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Каждый чистый идеал кольца $C(X)$ проективен $\Leftrightarrow X$ компактно и наследственно паракомпактно (см. также [59]). Каждый чистый идеал в $C(X)$ счетно-порожден $\Leftrightarrow X$ компактно и совершенно нормально. Счетно-порожденные идеалы кольца $C(X)$ проективны $\Leftrightarrow X$—P-пространство. Псевдокомпактность X равносильна тому, что каждый проективный (собственный) идеал кольца $C(X)$ — фиксированный, т. е. все его функции обращаются в 0 в некоторой точке пространства X. Отмечено, что конечность X равносильна конечной порожденности всех проективных идеалов в $C(X)$. Для $C(X)$ доказана эквивалентность условий 1)—3) теоремы 3.3.1. Кроме того, указана характеризация сильно нульмерных пространств, приведенная в п. 3.5. Доказательства де Марко основаны на общих теоретико-кольцевых предложениях, устанавливающих связи между свойствами коммутативного кольца с 1 и свойствами его максимального (или пористого) спектра.

4.2. Самоинъективные кольца непрерывных функций.
Теорема ([52]). Для любого топологического тела E и любого E-вполне регулярного пространства X эквивалентны условия:

1) кольцо $C(X, E)$ самоинъективно справа (слева);
2) X экстремально несвязно и пересечение произвольного семейства его открытых множеств, мощность которого не превосходит мощности тела E, открыто;
3) каждое открытое в X множество C_E-расширяемо;
4) $C(X, E)$ — прямое слагаемое $C(X, E)$-модуля E^X.

Следствие 1. Правый (левый) идеал кольца $C(X, E)$ инъективен $\Leftrightarrow$ он имеет вид $M_B=\{f\in C(X, E) : f(B)=\{0\}\}$ для некоторого открыто-замкнутого множества $B\subseteq X$, дополнение которого $X\setminus B$ обладает свойством 2).

Следствие 2. Если E — дискретное конечное поле, то кольцо $C(X, E)$ самоинъективно (рационально полно) $\Leftrightarrow X$ экстремально несвязно. В частности, самоинъективность (полнота) булева кольца с 1 равносильна экстремальной несвязности его максимального спектра.

Вторая часть следствия 2 — это теорема М. Стоуна о полных булевых алгебрах, а первая часть доказана в [681] и [300].

4.3. Перечень работ, дополняющих § 3. Отметим ряд работ о взаимосвязях между X и $C(X)$ как кольцевого, так и не кольцевого характера: [17], [20]—[22], [33], [41], [46], [97], [100], [106]—[114], [119]—[121], [131], [174], [179], [189]—[191], [223], [245], [246], [252], [258], [261], [262], [264]—[267], [272], [273], [277], [287], [288], [298], [305], [311], [324], [326], [335], [336], [343], [359], [362], [390], [396], [400], [404], [438], [442], [445], [450], [458], [460], [465], [486], [487], [506], [514], [525], [528], [533], [540], [542], [556], [562], [572], [573], [587], [588], [592], [594], [601], [608], [640], [646], [647], [651], [673], [704], [717], [720], [723], [735], [747], [761], [770], [794], [795], [801]—[803], [811], [819], [821], [822], [833].

Перечисленные работы содержат много интересных и разнообразных результатов. В качестве иллюстрации выделим теорему Хьюитта [486] о характеризации компактности X в терминах выполнимости на $C^*(X)$ теоремы Стоуна—Вейерштрасса, определяемость категории топологического пространства X кольцом $C(X)$ [326] и некоторые функционально-алгебраические характеризации метризуемости [608], [647].

Глава 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 5. Общие свойства

5.1. Кольца $C(X)$ и $C(X, \mathbf{C})$. Эти кольца коммутативны и с единицей, редуцированны (т. е. не содержат ненулевых нильпотентных элементов), полупросты по Джекобсону, являются pm-кольцами (см. п. 5.2), имеют глубокую теорию идеалов (см. § 7). Рассмотрим ряд общих свойств колец непрерывных функций. Бо́льшая часть монографии Гиллмана и Джерисона [425] посвящена алгебраическим вопросам теории колец $C(X)$, а в книге Бекенштейна, Нариси и Саффела [247] изучаются топологические алгебры $C(X)$ и $C(X, \mathbf{C})$ с компактно-открытой топологией. Хотя $C(X)\cong C(\tau X)$, для определенности будем рассматривать тихоновские пространства X. Поскольку $C^*(X)\cong C(\beta X)$, кольца $C^*(X)$ специально не выделяются. Максимальный идеал M кольца $C(X)$ называется вещественным (гипервещественным), если факторкольцо $C(X)/M$ изоморфно $\mathbf{R}$ (не изоморфно $\mathbf{R}$). Факторполе кольца $C(X)$ по гипервещественному идеалу называется H-полем.

Теорема 1 ([425]). Все максимальные идеалы кольца

$C(X)$ вещественны тогда и только тогда, когда пространство X псевдокомпактно.

Теорема 2 (Исбелл [510]). Любое H-поле вещественно замкнуто.

Теорема 2 впервые появилась у Хьюитта [487], но его доказательство содержало пробел; для нормальных пространств X эта теорема доказана в [476]. Заметим, что H-поля являются неархимедовыми расширениями и нестандартными моделями поля $\mathbf{R}$. Они исследовались в [207], [213], [425], [426], [476], [487], [510], [705], [391], [403]. В большой статье [213] изучаются свойства H-полей в рамках аксиоматической теории множеств. В частности, показано, что мощности H-полей — это в точности кардиналы вида $m^{\aleph_0}$ для бесконечных кардиналов m.

Теорема 3 ([352]). Пусть X — нульмерный компакт, единичный отрезок или $\mathbf{R}$. Тогда всякий нормированный многочлен положительной степени (нечетной степени) с коэффициентами из $C(X, \mathbf{C})$ (из $C(X)$) имеет корень в кольце $C(X, \mathbf{C})$ (в $C(X)$).

По поводу теоремы 3 см. также [90], [136], [476], [335], [351].

Теорема 4 ([470] и [161]). Имеют место следующие два утверждения: 1) существуют негомеоморфные нульмерные компакты X и Y с элементарно эквивалентными кольцами $C(X)$ и $C(Y)$; 2) кольцо $C(\mathbf{R})$ имеет неразрешимую универсальную теорию.

Изучению топологии с помощью языка первого порядка посвящена работа [482]. Работы [216], [218], [286], [289], [343], [344], [425], [468], [487], [518], [519], [552], [564], [584], [607] касаются свойств гомоморфизмов колец непрерывных функций. См. также теорему 2.1.

Теорема 5 ([425]). Любой кольцевой гомоморфизм $\alpha: C(X) \to C(Y)$ обладает свойствами: α — решеточный гомоморфизм; α — линейное отображение; α переводит ограниченные функции в ограниченные; если $\alpha(1)=1$, то α сохраняет константы; если $f \in C^*(X)$ и $\|f\|$ — супремум-норма f, то $\|\alpha\| \leqslant \|f\|$; если X — хьюиттовское пространство и $\alpha(1)=1$, то α индуцируется единственным непрерывным отображением $Y \to X$.

Теорема 6 ([398], [454] и [457]). Справедливы следующие утверждения:

1) максимальное кольцо частных $Q(X)$ кольца $C(X)$ изоморфно факторкольцу кольца всех функций на X, непрерывных на некоторых плотных открытых множествах в X, по идеалу функций, равных нулю на соответствующих плотных открытых подмножествах пространства X;

2) кольца $Q(X)$ и $Q(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда пространства X и Y содержат гомеоморфные плотные открытые подпространства;

3) если мощность X неизмерима, то изоморфность кольца $Q(X)$ некоторому кольцу $C(Y)$ эквивалентна тому, что множество всех изолированных точек пространства X плотно в X.

Кольцам частных колец $C(X)$ посвящена книга Файна, Гилмана и Ламбека [398], где доказаны утверждение 1) и часть ($\Leftarrow$ 2). Хагером доказана другая часть $\Rightarrow$ утверждения 2) [454] и утверждение 3) [457]. Кольца частных колец непрерывных функций рассматриваются также в [45], [403], [554], [671]. В работах [187], [393], [394], [489], [490], [663], [786] исследуются различные топологизации колец $C(X)$. Порядковые пополнения $C(X)$ изучаются в [45], [109]—[114], [217], [346], [580]. Исследовались также такие конструкции, в применении к кольцам $C(X)$, как тензорное произведение [397], [453] и обратный предел [554]. Отметим краткие обзоры Гиллмана [419] и [421] о кольцах $C(X)$.

5.2. Кольца непрерывных функций со значениями в топологическом теле. Кольца $C(X, E)$ со значениями в произвольном топологическом теле E впервые расматривал Капланский [528]. В частности, он нашел весьма общее достаточное условие на E для того, чтобы при любом компакте X все собственные идеалы кольца $C(X, E)$ были фиксированными. Колец $C(X, E)$ в случаях, когда E — конечное дискретное поле или топологическое тело кватернионов, касались соответственно М. Стоун [755] и Хьюитт [487].

Пусть $C^*(X, E)$ — кольцо всех непрерывных ограниченных по Шафаревичу (см. [19]) E-значных функций на X, а $C'(X, E)$ — его подкольцо, состоящее из всевозможных функций с относительно компактными образами.

Теорема 1 ([333]). Если пространство X нульмерно и тело E вполне несвязно, то для каждого максимального идеала кольца $C'(X, E)$ соответствующее факторкольцо изоморфно E (см. еще [505]).

Теорема 2 ([438] и [333]). Вполне несвязное тело E локально компактно тогда и только тогда, когда для любого нульмерного пространства X и для любого максимального идеала кольца $C^*(X, E)$ соответствующее факторкольцо изоморфно E.

Правый идеал $\mathcal{I}$ кольца $C(X, E)$ называется z-идеалом, если для любых $f \in C(X, E)$ и $g \in \mathcal{I}$ $Z(f) \supseteq Z(g)$ влечет $f \in \mathcal{I}$. Ясно, что все z-идеалы — двусторонние.

Теорема 3 ([528] и [56], [61]). Предположим, что топологическое тело E удовлетворяет одному из условий: а) на E существует такая непрерывная функция $*$, что $aa^*+bb^*=0$ влечет $a=b=0$ для любых $a, b \in E$; б) существует ненулевая функция из $C(E, E)$, обращающаяся в нуль на некотором открытом подмножестве в E; в) E — нормированное тело. Тогда для произвольного топологического пространства X любой максимальный односторонний идеал кольца $C(X, E)$ является двусторонним, более того, в случаях а) и б) — z-идеалом.

В случае а) теорема доказана Капланским в [528], а случаи б) и в) — автором в [61], [56].

Дадим несколько определений и обозначений. Если $f\in C(X,E)$, то $\operatorname{coz} f = X\setminus Z(f)$ — соответствующее конуль-множество (символ E опускаем), а $Z^0(f)$ — внутренность нуль-множества $Z(f)$. Кольцо называется pm-кольцом, если каждый его первичный идеал содержится в единственном максимальном идеале этого кольца. Кольцо K называется гельфандовым (см., например, [635]), если для любых двух различных его максимальных правых идеалов A и B в K найдутся такие элементы $a\notin A$ и $b\notin B$, что $aKb=0$. Значение гельфандовых колец будет отмечено в § 9. Ради иллюстрации характера и специфики рассуждений и методов теории колец непрерывных функций докажем следующие две теоремы.

Теорема 4. Для произвольного топологического тела E эквивалентны следующие утверждения:

1) для любого топологического пространства X кольцо $C(X,E)$ является pm-кольцом;

2) для любого топологического пространства X кольцо $C(X,E)$ является гельфандовым;

3) $C(E,E)$ — pm-кольцо;

4) $C(E,E)$ — гельфандово кольцо;

5) кольцо $C(E,E)$ имеет делители нуля.

Доказательство. Утверждение 3) — частный случай 1), а 4) — частный случай 2). Кольцо $C(E,E)$ имеет, как минимум, два различных максимальных (двусторонних и односторонних) идеала $M_0=\{f\in C(E,E): f(0)=0\}$ и M_1. Предположим, что $C(E,E)$ не содержит (ненулевых) делителей нуля. Ясно, что такое кольцо не гельфандово и его нулевой идеал, лежащий в $M_0\cap M_1$, первичен. Значит, $C(E,E)$ не является и pm-кольцом. Это доказывает импликации 4) $\Rightarrow$ 5) и 3) $\Rightarrow$ 5).

5) $\Rightarrow$ 1). Пусть тело E обладает свойством 5), т. е. существуют такие ненулевые функции $\varphi,\psi\in C(E,E)$, что $\varphi\psi=0$. Отсюда нетрудно вывести существование функцин $\varphi_0\in C(E,E)$, удовлетворяющей условию: $0\in Z^0(\varphi_0)$ и $1\in Z^0(1-\varphi_0)$. Рассмотрим произвольные максимальные идеалы $M\neq M'$ в кольце $C(X,E)$. Для подходящих $j\in M$ и $f\in M'$ имеем $f+f'=1$, причем, $f=1$ на $Z(f')$. Далее, найдутся элементы a, $b\in E$, для которых $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)\neq 0$, $\psi(b)=0$ и $\psi(a)\neq 0$. Можно считать, что $\varphi(b)=\psi(a)=1$.

Положим

$$\chi=(b-a)\varphi_0+a\in C(E,E) \quad \text{и пусть}$$

$$g=\varphi\circ\chi\circ f \quad \text{и} \quad h=\psi\circ\chi\circ f$$

Тогда $gh=0$, $Z(f')\subseteq Z^0(1-g)$ и $Z(f)\subseteq Z^0(1-h)$. Легко видеть, что $1-g\in f'C(X,E)\subseteq M'$ и $1-h\in f\,C(X,E)\subseteq M$. Поэтому $g\notin M'$ и $h\notin M$. Кроме того, $g\cdot C(X,E)\cdot h=0$. Из этих двух свойств вытекает, что кольцо $C(X,E)$ строго гармоническое и его максимальный спектр хаусдорфов [544].

Наконец, пусть P — произвольный первичный идеал кольца

$C(X,E)$, содержащийся в $M\cap M'$. Поскольку $g\cdot C(X,E)\cdot h=0\subset P$, то P содержит g или h. Но тогда $g\in M\cap M'$ или $h\in M\cap M'$, что противоречит доказанному выше. Стало быть, $M\cap M'$ не содержит никаких первичных (даже псевдопервичных) идеалов кольца $C(X,E)$, что и доказывает 1).

5) $\Rightarrow$ 2). Пусть выполнено 5). Тогда имеет место и условие б) теоремы 3. Поэтому максимальные, максимальные правые и максимальные левые идеалы колец $C(X,E)$ совпадают. Остается воспользоваться доказательством импликации 5) $\Rightarrow$ 1) и определением колец Гельфанда. Теорема 4 доказана. Эквивалентность утверждений 1), 3) и 5) доказана в [56], [61]. Из теоремы 4 вытекает хорошо известное свойство колец $C(X)$ [425]: кольца $C(X)$ суть pm-кольца. Теоретико-кольцевые результаты о pm-кольцах рассматриваются в [57], [64], [357], [358], [415], [546].

Теорема 5 ([61]). Если каждый правый идеал кольца $C(X,E)$ является левой E-алгеброй, то $C(X,E)$ коммутативно или слабо риккартово.

Доказательство. Предположим, что правые идеалы кольца $C(X,E)$ выдерживают умножение слева на элементы некоммутативного тела E. Существуют такие $a, в\in E$, что $ав\neq вa$, т. е. $c=в^{-1}ав\neq a$. Возьмем произвольные функции f_1 и f_2 из кольца $C(X,E)$, для которых $\operatorname{coz} f_1\cap\operatorname{coz} f_2=\varnothing$. Положим $f=f+f_2$ и $\tilde f\in C(X,E)$ такова, что

$$\tilde f(x)=\begin{cases} a\cdot f_1(x), & \text{если } x\in\operatorname{coz} f_1,\\ b\cdot f_2(x), & \text{если } x\in\operatorname{coz} f_2,\\ 0, & \text{если } x\in Z(f).\end{cases}$$

По условию $a\cdot\tilde f=\tilde f h$, $c\cdot f=fh_1$ и $(a-c)^{-1}f=fh_2$ для подходящих h, h_1, $h_2\in C(X,E)$. Возьмем функцию $g=(h-h_1)h_2$.

На $\operatorname{coz} f_1$ имеем

$$g=[(\tilde f)^{-1}a\cdot\tilde f-f^{-1}c\cdot f]\,f^{-1}(a-c)^{-1}f=$$

$$=(f_1^{-1}a^{-1}aa\cdot f_1-f^{-1}c\cdot f)\,f_1^{-1}(a-c)^{-1}f_1=$$

$$=f_1^{-1}(a-c)\,f_1\cdot f_1^{-1}(a-c)^{-1}f_1=1,$$

а на $\operatorname{coz} f_2$

$$g=(f_2^{-1}b^{-1}abf_2-f_2^{-1}cf_2)f_2^{-1}(a-c)^{-1}f_2=$$

$$=(f_2^{-1}cf_2-f_2^{-1}cf_2)\,f_2^{-1}(a-c)^{-1}f_2=0.$$

Следовательно, $\operatorname{coz} f_1$ и $\operatorname{coz} f_2$ E-отделимы. Откуда непосредственно следует слабая риккартовость кольца $C(X,E)$ — см. теорему 3.1.

Следствие. Если $C(X,E)$ — некоммутативное инвариантное справа кольцо, то оно слабо риккартово.

Отметим, что для локально компактных тел E слабая риккартовость любого кольца $C(X,E)$ влечет его инвариантность [61].

Замечание. Условие 5) теоремы 4 на E носит весьма общий характер. Автору не известны топологические тела, не удовлетворяющие этому условию. Теорема 5 вносит «некоммутативный эффект» в исследование колец непрерывных функций.

Укажем серию работ Бахмана, Бекенштейна, Нариси и Саффела [224]—[228], [243]—[247] и [654] о кольцах $C(X, E)$ на нульмерных пространствах X со значениями в полных неархимедово нормированных полях E, рассматриваемых, главным образом, в компактно-открытой топологии. Среди них выделим статью [228], развивающую для $C(X, E)$ классический вариант теории колец $C(X)$ — строение максимальных идеалов, E-идеалы, аналоги расширений Хьюитта и Стоуна—Чеха и т. д. Отметим еще работы [361] и [360] о кольцах $C(X, E)$ со значениями в архимедово и неархимедово упорядоченных полях E и [818].

5.3. О кольцах непрерывных функций со значениями в топологическом кольце. Кольца и топологические алгебры $C(X, K)$ со значениями в топологических кольцах K или топологических алгебрах K (банаховых или более общих алгебрах) исследовались в работах [1]—[12], [97], [128]—[130], [206], [236], [250], [351], [353], [367], [378], [528], [680], [687], [700], [779], [827], [484], [485].

Коснемся результатов о кольцах $C(X, \mathbf{Z})$ непрерывных целозначных функций, где $\mathbf{Z}$ берется с дискретной топологией. В большой статье Пирса [680] основное внимание уделено строению максимальных идеалов колец $C(X, \mathbf{Z})$ и свойствам их факторполей. Даны два метода построения максимальных идеалов, опирающиеся на понятие множества делимости $D(f)$ функции $f \in C(X, \mathbf{Z})$. Именно, $D(f) = \{(x, p) : x \in X,\ p$ — простое число и $f(x)$ делится на $p\}$ — аналог понятия нуль-множества для колец $C(X, \mathbf{Z})$. Подобно соответствию между идеалами в $C(X)$ и фильтрами нуль-множеств на X, установлены соотношения между идеалами в $C(X, \mathbf{Z})$ и фильтрами множеств делимости. Показано, что все факторполя колец $C(X, \mathbf{Z})$ либо конечны простого порядка, либо несчетны. В любом факторполе произвольного кольца $C(X, \mathbf{Z})$ всякая однородная форма степени k с n переменными имеет нетривиальное решение при $n > k$. Доказано также, что факторполя $C(X, \mathbf{Z})$ не являются алгебраически замкнутыми. Имеются другие интересные результаты. Сформулированы проблемы.

С работой Пирса тесно связана статья [206]. В ней изучаются кольца $C(X, \mathbf{Z})$ на хаусдорфовых пространствах X. Выяснено строение пространства минимальных простых идеалов в $C(X, \mathbf{Z})$. Показано, что факторкольца колец $C(X, \mathbf{Z})$ по минимальным простым идеалам элементарно эквивалентны кольцу $\mathbf{Z}$. Исследуется структура простых идеалов соответствующих нестандартных моделей $\mathbf{Z}$. Рассматриваются и факторполя колец непрерывных целозначных функций, что прямо дополняет работу [680], давая ответ на два вопроса Пирса.

В заключение параграфа отметим еще некоторые работы, имеющие отношение к теме: [31], [44], [101], [102], [115]—[118], [175], [205], [212], [237], [272], [474], [506], [575], [612], [641], [672], [729]. В следующих работах рассматриваются кольца различных функций, «близких» к непрерывным — равномерно непрерывных [252], [512]; измеримых [521], [791]; интегрируемых [526]; дифференцируемых [685], [760], [808]; целых аналитических [204], [472].

§ 6. Подкольца

6.1. О подкольцах колец непрерывных функций. Различаются алгебраические и аналитические подкольца. Алгебраическое подкольцо в $C(X)$ или в $C(X, \mathbf{C})$ — это просто подкольцо, возможно, обладающее дополнительными алгебраическими свойствами, содержащее константы или разделяющее точки пространства X (регулярные и нормальные подкольца, подкольцо Гельфанда, алгебраические подкольца в смысле Гиллмана и Джерисона). Аналитическое подкольцо — это замкнутое подкольцо в $C(X)$ или $C(X, \mathbf{C})$, наделенных некоторой топологией, в основном, топологией равномерной сходимости (равномерные алгебры, аналитнческие подкольца в смысле Гиллмана и Джерисона). Алгебраические подкольца колец $C(X)$ имеют большое значение в теории представлений упорядоченных колец и векторных решеток [30], [70], [71], [101], [102], [124], [167], [257], [386], [387], [395], [475], [477], [478], [480], [481], [684] (это лишь небольшая часть работ по теории представлений упорядоченных структур, рассмотрение которой не входит в наши цели). Аналогична роль аналитических подколец колец $C(X, \mathbf{C})$ в теории нормированных колец — укажем только несколько книг: [73], [80], [152], [182], [282] и [766]. Подкольца колец $C(X)$ и $C(X, \mathbf{C})$ могут наследовать те или иные свойства самих колец $C(X)$ и $C(X, \mathbf{C})$ (см., например, [425, глава 16]).

6.2. Алгебраические подкольца. Обычно пространства X предполагаются тихоновскими. Подкольцо K кольца $C(X)$ (или $C(X, \mathbf{C})$) называется регулярным (нормальным), если оно разделяет точки и замкнутые множества (замкнутые множества от замкнутых множеств), т. е. для любых точки $p \in X$ (замкнутого множества $A \subseteq X$) и замкнутого множества $B \subseteq X$, не содержащего p (не пересекающегося с A), существует такая функция $f \in K$, что $f(B) = \{0\}$ и $f(p) = 1$ $(f(A) = \{1\})$.

Регулярные и нормальные подкольца играют важную роль в общей теории нормированных колец [152]. Максимальный спектр произвольного регулярного подкольца на X является компактификацией пространства X, если подкольцо содержит константы.

Множество всех функций $f \in C(X)$, таких, что для любого максимального идеала M кольца $C(X)$ существует константа

$k \in \mathbf{R}$, для которой $f-k \in M$, образует подкольцо в $C(X)$ [658], называемое подкольцом Гельфанда кольца $C(X)$ [375]. Подкольца Гельфанда изучались в [375], [376], [658], [749], [750]. В [375] и [376] выясняются достаточные условия на X (скажем, X — паракомпактное локально компактное пространство), при которых подкольцо Гельфанда кольца $C(X)$ совпадает с множеством всех тех функций из $C(X)$, которые вне подходящих компактов в X принимают лишь конечное число значений.

В [253], [254] и [275] исследовались воллмэновские подкольца в $C(X)$. Подкольцо кольца $C(X)$ называется воллмэновским, если нуль-множества его функций образуют нормальную базу пространства X. Понятие нормальной базы введено Фринком — см. упражнение 1.5. G [196]. По решетке нуль-множеств функций произвольного воллмэновского подкольца K в $C(X)$ строится воллмэновское расширение X. Если кольцо K разложимо, то это расширение несвязно; обратное не верно [275]. Там же построен пример аналитического воллмэновского подкольца в $C(X)$, не являющегося решеткой.

Гиллман и Джерисон [425] назвали подкольцо K кольца $C^*(X)$ алгебраическим, если оно содержит константы и $f^2 \in K$ влечет $f \in K$ для любых $f \in C^*(X)$. Ими были рассмотрены некоторые свойства и примеры таких подколец.

Абсолютно выпуклые подкольца колец $C(X)$ рассматривались в [597], а полуалгебры в $C(X)$ — в [219], [238], [239], [280], [281], [294], [670], [688], [689], [708]. Подалгебрам функций в $C(X)$ посвящены также работы [518], [519], [576], [578], [595], [657], [696], [711], [712], [718], [719], [748]. См. также [442], [456], [734].

6.3. Аналитические подкольца. Уточним: аналитическое подкольцо в $C(X)$ или в $C(X, \mathbf{C})$ — это произвольное подкольцо, замкнутое в топологии равномерной сходимости. В зависимости от решаемых задач можно (и требуется) сужать понятие аналитического подкольца. Приведем лишь три возможных варианта.

Равномерной алгеброй на компакте X называется аналитическое подкольцо в $C(X, \mathbf{C})$, содержащее константы и разделяющее точки пространства X [73]. Теория равномерных алгебр прекрасно изложена в книге Гамелина [73]. В книге, в частности, изложено соответствие между компактификациями тихоновского пространства X и определенными аналитическими подкольцами в $C^*(X, \mathbf{C})$. По теореме И. М. Гельфанда [76], [77] любая полупростая коммутативная банахова алгебра с единицей изометрически изоморфна некоторой равномерной алгебре на своем максимальном спектре. Перечислим некоторые работы по равномерным алгебрам (о регулярных, нормальных, локальных и нелокальных алгебрах, о максимальных, дополняемых и недополняемых подалгебрах, о совпадении максимальных спектров алгебры и подалгебры): [27], [28], [42], [43], [80], [88], [127], [152], [182], [189], [210], [230], [241], [267], [268], [282], [369], [471], [494], [627], [805], [809].

Алгеброй на тихоновском пространстве X Хагер [455] назвал аналитическое подкольцо в $C(X)$, содержащее константы, разделяющее точки и замкнутые множества, и вместе с каждой своей функцией f, нигде не равной 0, содержащее и f^{-1}. Хагер рассмотрел аналог теоремы Стоуна—Вейерштрасса, установил соответствие между компактификациями X и алгебрами на X и доказал, что если X линделефово, то на X существует единственная алгебра — $C(X)$.

Наконец, Гиллман и Джерисон [425] от аналитического подкольца требуют, чтобы оно было алгебраическим подкольцом в их смысле. Отмечено, что замыкания алгебраических подколец — аналитические подкольца, а замкнутые подкольца не обязаны быть алгебраическими (в смысле Гиллмана и Джерисона). Нульмерность X равносильна тому, что $C^*(X)$ есть замыкание своего наименьшего алгебраического подкольца. Кроме того, если нормированный многочлен с коэффициентами из аналитического подкольца в $C^*(X)$ имеет корень в $C^*(X)$, то он обладает корнем в самом подкольце.

В заключение параграфа назовем еще несколько работ: [220], [221], [229], [240], [255], [313], [379], [380], [602], [676], [678], [694], [695], [707], [715], [739].

§ 7. Теория идеалов

7.1. Максимальные и простые идеалы. Можно ограничиться тихоновскими пространствами X. Максимальные идеалы колец $C(X)$ и $C^*(X)$ полностью описаны И. М. Гельфандом и А. Н. Колмогоровым [78] на основе компактификации Стоуна—Чеха βX пространства X. Пусть f^β — единственное непрерывное продолжение функции $f \in C^*(X)$ на βX.

Теорема Гельфанда — Колмогорова ([78]). Максимальные идеалы кольца $C(X)$ — это в точности идеалы вида

$$M_p = \{f \in C(X) : p \in \overline{Z(f)}_{\beta X}\} \quad (p \in \beta X),$$

причем, различным p отвечают различные M^p. Максимальные идеалы кольца $C^*(X)$ совпадают с идеалами

$$\{f \in C^*(X) : f^\beta(p) = 0\}, \qquad p \in \beta X.$$

Следовательно, $\operatorname{Max} C(X) \approx \operatorname{Max} C^*(X) \approx \beta X$.

Здесь $\operatorname{Max} K$ — максимальный спектр кольца K, т. е. пространство всех его максимальных идеалов с топологией Стоуна — Зарисского, а $\overline{Z(f)}_{\beta X}$ — замыкание $Z(f)$ в βX, $\approx$ — знак гомеоморфности. Детальное доказательство теоремы Гельфанда—Колмогорова приведено в [424]. Изложение теоремы можно найти в книгах [425], [196], а ее обобщение на $C(X, E)$ — в [228]. Факторполей колец $C(X)$ мы уже касались в п. 5.1.

Простые идеалы в $C(X)$ изучали следующие авторы: Гиллман и Хенриксен [422], [423], Гиллман и Джерисон [425], Колс [548], [549], Манделкер [591], [593], Де Марко и Орсатти [358], Ле Донне [566], Монтгомери [613], Масон [597] и другие. Отметим несколько результатов. Простые идеалы в $C(X)$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь [425]. По теореме 3.2 если X не является P-пространством, то кольцо $C(X)$ содержит хотя бы один простой немаксимальный идеал. Как правило, простых идеалов в $C(X)$ существенно больше, чем максимальных. Например, в $C(\mathbf{R})$ существуют несчетные убывающие вполне упорядоченные цепи простых идеалов [591], хотя каждая такая цепь лежит в точности под одним максимальным идеалом, поскольку $C(\mathbf{R})$ — pm-кольцо (см. теорему 5.2.4). В работах [591], [593] исследуются упорядоченные множества простых z-идеалов, их цепи. Максимальные и простые идеалы колец $C(X, \mathbf{Z})$ рассматривались в [680] и [206].

7.2. z-идеалы и чистые идеалы. Эти понятия были определены в пунктах 5.2 и 3.1 соответственно.

Теорема ([609], [270], [48]). Чистые идеалы произвольного кольца $C(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми множествами $B\subseteq\beta X$, именно,

$$B\leftrightarrow O^B=\{f\in C(X): B\subseteq\overline{(Z}(f)_{\beta X})^0\}.$$

Следствие [290]. Чистые идеалы в $C(X)$ — z-идеалы.

Милгрэм [609] доказал эту теорему для компактов X, причем, вместо чистоты употреблял несколько иное, оказавшееся эквивалентным, понятие. Бкуш [270] указал этот результат для коммутативных полупростых pm-колец K с 1, установив соответствие между чистыми идеалами в K и открытыми множествами в $\operatorname{Max} K$. Теоретико-кольцевые обобщения такого соответствия рассматривались в [357], [64]. Для колец $C(X, E)$, E — локально компактное тело, теорема 7.2 доказана в работе [59].

Максимальными чистыми идеалами в $C(X)$ являются идеалы O^p, $p\in\beta X$. Для любого простого идеала P кольца $C(X)$ существует единственная точка $p\in\beta X$, для которой $O^p\subseteq P\subseteq M^p$ [425]. Прямые слагаемые в $C(X)$ чисты, а аннуляторные идеалы — z-идеалы. Легко дать топологическое описание аннуляторных идеалов в $C(X)$ [524]. Существует взаимно однозначное соответствие между z-идеалами кольца $C(X)$ и фильтрами решетки нуль-множеств на X. Простота всех идеалов O^p эквивалентна тому, что X — F-пространство. См. [425]. В [345] в предположении континуум-гипотезы доказано, что если X локально компактно, σ-компактно и метризуемо, то простота идеала O_p, $p\in X$, равносильна его полупервичности. Напомним, что полупервичность идеала означает, что он равен пересечению первичных (простых) идеалов, его содержащих.

В статьях [417], [355], [567] и [568] изучаются счетно-порожденные z-идеалы колец $C(X)$. Гиллман [417] показал, что простой немаксимальный z-идеал не может быть счетно-порожденным. Ле Донне [567], отрицательно отвечая на один вопрос Де Марко [355], приводит пример счетно-порожденного z-идеала, не являющегося чистым. Им же доказано, что если нормальное пространство X удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности или локально компактно, то всякий счетно-порожденный z-идеал кольца $C(X)$ чист. Отметим здесь также работы [481], [502], [503], [551], [553].

7.3. Плоские и проективные идеалы.

Теорема 1 ([53]). Любой полупервичный идеал произвольного кольца $C(X)$ является плоским $C(X)$-модулем.

Напомним, что плоскостность всех идеалов кольца $C(X)$ означает, что X является F-пространством (см. п. 3.1). Наряду с z-идеалами, необходимо полупервичными, плоскими будут и все простые (максимальные) идеалы в $C(X)$, и все идеалы, являющиеся проективными $C(X)$-модулями. В частности, идеалы, свободные как $C(X)$-модули, являются плоскими. Заметим [53], что идеал кольца $C(X)$ является свободным $C(X)$-модулем тогда и только тогда, когда он главный и порожден функцией f со свойством $Z^0(f)=\varnothing$. Проективные идеалы колец $C(X)$ рассматривались в работах [399], [290], [291], [357], [52], [54], [59]. С учетом теоремы 7.2 теорема Бкуша может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2 ([270]). Произвольный чистый идеал O^B кольца $C(X)$ проективен как $C(X)$-модуль в том и только в том случае, когда его спектр $\beta X\setminus B$ паракомпактен.

Систематическое изучение проективных идеалов в $C(X)$ было предпринято Брукшером [290]. Им получены некоторые функционально-топологические критерии проективности произвольных идеалов и z-идеалов колец $C(X)$. Исходя из этого, построены два идеала, проективный и непроективный, имеющие один и тот же фильтр нуль-множеств. Показано, что главный идеал $f\cdot C(X)$ проективен тогда и только тогда, когда носитель f, определяемый как $\overline{\operatorname{coz} f}$ в X, открыт (см. также [52]). Доказано, что каждый проективный z-идеал в кольце $C(X)$ чист (более общее утверждение имеется в [52]). В другой работе [291] Брукшер выяснил, что проективными простыми идеалами в $C(X)$ являются в точности идеалы M_x для изолированных точек $x\in X$. В [59] доказано, что проективность идеала $M_B=\{f\in C(X):f(B)=\{0\}\}$ кольца $C(X)$, B замкнуто в X, эквивалентна открыто-замкнутости B. См. также пункты 3.3 и 3.4.

7.4. Разное. Выпуклые и абсолютно выпуклые идеалы в $C(X)$ рассматривались в [425], [427], [810]. Идемпотентные абсолютно выпуклые идеалы в $C(X)$ полупервичны [810]. Разложимые и универсально разложимые идеалы в кольцах $C(X, K)$

изучались в [63]. Теории идеалов в C (X) посвящены работы Дитриха [366], [368]—[370]. В [368] доказано, что произвольный идеал $\mathcal{I}$ кольца $C(X)$ заключен между идеалами O^B и M^B при $B = \bigcap_{f \in \mathcal{I}} \overline{Z(f)}_{\beta X}$. Поэтому в цитируемой статье исследуются факторкольца M^B/O^B.

Изучались и конкретные идеалы и $C(X)$-модули. Идеал $C_{00}(X)$ в $C(X)$, состоящий из всех функций с компактными носителями, рассматривался в [528], [547], [425], [702], [600], [50], [54], [532]. Напомним, что идеал $\mathcal{I}$ в $C(X)$ называется нефиксированным (или свободиым), если для любой точки $x \in X$ найдется такая функция $f \in \mathcal{I}$, что $f(x) \neq 0$. Гиллман и Джерисон доказали, что идеал $C_{00}(X)$ равен пересечению всех нефиксированных идеалов в $C(X)$ для хьюиттовских пространств X. Ранее это утверждение было доказано Капланским [528] для дискретных пространств и Колсом [547] для P-пространств. В работах [702], [600] и [532] результат распространен на другие классы пространств. В функциональном анализе важную роль играет идеал $C_0(X, \mathbf{C})$ в $C(X, \mathbf{C})$ всех функций, обращающихся в нуль на бесконечности (сколь угодно малых вне соответствующих компактов пространства X) [182]. Идеал $C_0(X)$ изучался в [547], [425]. $C(X)$-модуля всех функций мы касались в § 3 (см. [51], [55], [68]). Рассматриваются $C(X)$-модули и в работах [661], [706], [782].

Отметим серию работ Рудда [709]—[714]. В [710] и [712] изучаются структурные пространства (спектры) идеалов в $C(X)$ и связанных с ними подалгебр. В [710] исследуются условия, при которых изоморфизм между идеалами колец $C(X)$ и $C(Y)$ продолжается до изоморфизма самих колец; показано, что такое всегда возможно в случае максимальных идеалов. К этой работе примыкает статья [534], в которой, в частности, доказано, что однородность компакта X эквивалентна изоморфности любых двух максимальных идеалов кольца $C(X)$. В статьях [489] и [490] рассматриваются кольцевые топологизации $C(X)$ с заданными свойствами, например, такие, при которых все идеалы кольца $C(X)$ открыты. В [490] существование топологий на кольце $C(X)$, в которых все максимальные идеалы замкнуты, сведено к существованию полевых топологий на факторполях кольца $C(X)$. Идеалы кольца целых аналитических функций на $\mathbf{C}$ исследовались в [472], [204]. Гомологию банаховых модулей начал изучать А. Я. Хелемский [180] — см. его монографию [181].

Перечислим еще несколько работ по теории идеалов в алгебрах функций — [56], [57], [61], [115]—[118], [135], [171], [172], [189], [203], [215], [259], [279], [311], [359], [362], [392], [402], [420], [429]—[431], [479], [481], [508], [522], [590], [614], [653], [721], [722], [733], [734], [790], [793], [800], [827].

§ 8. Характеризация колец непрерывных функций

8.1. Теорема Стоуна—Вейерштрасса. Эта теорема, широко обобщающая известные классические аппроксимационные теоремы Вейерштрасса, доказана М. Стоуном в работе [755] 1937 года.

Т е о р е м а С т о у н а — В е й е р ш т р а с с а (вещественный и комплексный варианты). Если X — компакт, то для всякого подкольца K кольца $C(X)$ (кольца $C(X, \mathbf{C})$) $K = C(X)$ ($K = C(X, \mathbf{C})$) тогда и только тогда, когда K замкнуто в топологии равномерной сходимости, содержит все вещественные (комплексные) константы и разделяет точки пространства X (в случае $C(X, \mathbf{C})$, кроме того, K вместе с каждой своей функцией содержит и комплексно-сопряженную к ней функцию).

Верна и обратная к ней теорема, доказанная Хьюиттом [486] в 1947 году: если для тихоновского пространства X справедливо заключение теоремы Стоуна—Вейерштрасса (Хьюитт рассматривал подкольца кольца $C^*(X)$), то X — компакт. Теорема Стоуна—Вейерштрасса вызвала большую литературу, содержащую обобщения и аналоги этого результата. Укажем работы Е. А. Горина [86], [87], [89], Банашевского [232], [233], Стефенсона [752]. Учебное пособие [299] целиком посвящено теоремам типа Стоуна—Вейерштрасса. В [314] получено обобщение на кольца $C(X, E)$ для нормированных полей E. Отметим еще работы [405], [407], [462], [463], [466], [495], [500], [579], [628], [799].

Сформулируем теорему Банашевского [232]. Пусть X — тихоновское пространство и K — подкольцо в $C^*(X)$, содержащее константы. Говорят, что K разделяет подмножества A и B пространства X, если $\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \varnothing$ для некоторой функции $f \in K$. Тогда K равномерно плотно в $C^*(X) \Leftrightarrow K$ разделяет каждые два подмножества в X, разделяемые $C^*(X)$.

З а м е ч а н и е. Теорема Стоуна—Вейерштрасса не дает непосредственно абстрактной характеристики колец $C(X)$ для компактов X. В ней предполагается заранее, что K является подкольцом в $C(X)$. Но она работает, когда абстрактное кольцо, призванное характеризовать $C(X)$, можно вложить каким-либо образом, скажем, с помощью преобразования Гельфанда, в некоторое кольцо непрерывных функций. Тополого-алгебраическую характеризацию колец $C(X, \mathbf{C})$ для компактов X дает теорема Гельфанда—Наймарка, являющаяся составной частью теории И. М. Гельфанда (см. теорему 2.2.2). См. также [379].

8.2. Алгебраическая характеризация колец непрерывных функций. Алгебраические или почти алгебраические характеристики колец $C(X)$ для различных классов пространств X получены в [125], [209], [211], [260], [262], [263], [287], [288], [318], [337], [354], [356], [428], [480], [513], [574], [603], [684], [813], [814], [824]. Не все из них можно назвать абстрактными чисто алгебраическими (тем более, кольцевыми) характеризациями $C(X)$.

В некоторых работах ([480], [574], [684], [824]) речь идет об упорядоченных алгебрах, в других ([318], [337], [428]) — о превращении кольца функций на множестве X в кольцо непрерывных функций на топологическом пространстве X. Абстрактные характеризации колец $C(X)$ довольно громоздки. Приведем одну чисто алгебраическую характеристику колец $C^*(X)$, или, что то же самое, колец $C(X)$ для компактов X.

Теорема ([354]). Произвольное кольцо K изоморфно кольцу $C^*(X)$ для некоторого топологического пространства X тогда и только тогда, когда K удовлетворяет следующим условиям: 1) коммутативность; 2) наличие единицы $1\neq 0$; 3) сумма квадратов любых двух его элементов есть квадрат некоторого элемента; 4) каждый его элемент представим как разность квадратов двух элементов с нулевым произведением; 5) все элементы вида a^2+1 обратимы; 6) для любого a существуют элемент b и $n\in\mathbf{N}$, для которых $a^2=n\cdot 1-b^2$; 7) если для элемента a и любого $n\in\mathbf{N}$ существует такой элемент b_n, что $n(a^2+b_n^2)=1$, то $a=0$; 8) если $\{a_n\}$ — последовательность в K, для которой существует последовательность $\{m_k\}\subseteq\mathbf{N}$ такая, что $k((a_m-a_n)^2+b^2)=1$ при любых m, $n\geqslant m_k$ и подходящих $b=b(k,m,n)$, то найдется элемент a, для которого существует такая последовательность $\{n_k\}\subseteq\mathbf{N}$, что для каждого $n\geqslant n_k$ и подходящего $c=c(k,n)$ $k((a-a_n)^2+c^2)=1$.

Для сравнения напомним характеризацию М. Стоуна [755] колец $C_{00}(X,\mathbf{Z}_2)$ как произвольных булевых колец. В [58] получены различные аннуляторные характеристики самих булевых колец. Дадим одну новую характеризацию такого сорта.

Предложение. Для того чтобы произвольное кольцо было булевым (имело вид $C_{00}(X,\mathbf{Z}_2)$ — по теореме М. Стоуна), необходимо и достаточно, чтобы каждые два его элемента, имеющие равные левые аннуляторы и равные правые аннуляторы, были равны.

В заключение § укажем работы [293] и [746] по характеризации решеток нуль-множеств топологических пространств.

Глава 3

ПУЧКИ КОЛЕЦ И КОЛЬЦА ГЛОБАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ

§ 9. Функциональные представления колец сечениями

Смысл функционального представления кольца сечениями пучка колец заключается в более конкретной реализации элементов абстрактного кольца как непрерывных функций (сечений), заданных на некотором топологическом пространстве (спектре кольца) и принимающих значения в более просто (чем исходное кольцо) устроенных кольцах — слоях пучка.

9.1. Спектры колец. Для представления кольца непрерывными функциями — сечениями — необходимо сначала построить то или иное топологическое пространство — спектр кольца, на котором эти функции будут определены. Затем на выбранном спектре кольца строится пучок колец-слоев, в которых реализующие элементы кольца сечения поточечно принимают свои значения. Понятие спектра (или структурного пространства) кольца мы употребляем в широком смысле — как пространства, определяемого по самому кольцу каким-либо стандартным способом. Обычно, говоря о спектре кольца, имеют в виду его максимальный, первичный или примитивный спектр. В теории представлений колец сечениями пучков выделяются три типа спектров кольца: пространства различных идеалов кольца с топологией Стоуна—Зарисского; точечные пространства, конструируемые на основе каркасов (frame) кольца — дистрибутивных решеток идеалов кольца, изоморфных решеткам всех открытых множеств топологических пространств; пространства различных теорий кручения в категории правых модулей над кольцом.

В этой главе, если не оговорено иное, будем считать кольца имеющими единицу 1, а идеалы — двусторонними. Пусть X — пространство всех идеалов кольца K с топологией Стоуна—Зарисского, т. е. множества $\{\mathcal{I}\in X : a\in\mathcal{I}\}$, $a\in K$, образуют предбазу замкнутых множеств пространства X. Подпространства X можно рассматривать как структурные пространства кольца K. Такие структурные пространства изучали Гиллман [415] и Колс [546]. Полный спектр X всех собственных идеалов кольца рассматривался в [201], [679]. Примитивному спектру кольца — структурному пространству всех его примитивных идеалов — посвящена глава 9 книги Джекобсона [97], работы [274], [724]. Наибольшее применение в математике имеют максимальный спектр $\operatorname{Max} K$ и первичный спектр $\operatorname{Spec} K$ кольца K: роли первого мы уже касались, а первичный (простой) спектр играет важную роль в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии [37], [178], [188]. Свойства максимального спектра исследовались в [269], [270], [357], [358], [415], [762], [763]. В частности, в статьях [358], [415], [64] выясняются условия хаусдорфовости $\operatorname{Max} K$. Свойства первичных спектров рассматриваются в [452], [546], [679], в книгах [37], [134]. В [638], [807] исследуются спектры нетеровых колец. Так, в [807] ищется топологическая характеризация $\operatorname{Max} K$ для нетеровых колец K. Изучению пространств минимальных первичных идеалов колец посвящены статьи [479], [493], [778]. Хенриксен и Джерисон [479] выясняют условия на коммутативное кольцо, при которых такой спектр будет компактным или базисно несвязным пространством, и специально исследуют случай колец $C(X)$. Кокстер [493] доказывает нульмерность «минимального первичного спектра» коммутативного кольца и дает его топологическую характеризацию.

В [778] для редуцированных колец доказана хаусдорфовость этого пространства и рассмотрены условия его компактности. Отметим также следующие работы о структурных пространствах различных колец: [143], [145], [465], [504], [545], [674], [827]. Спектры полуколец рассматриваются в [119]—[121], [185], [744], а спектры решеток и полурешеток — в [30], [94], [329], [331], [408], [414], [686], [769]. Подчеркнем, что структурное пространство кольца может строиться как бы не по всему кольцу, а фактически по его центру или, скажем, булевой алгебре его центральных идемпотентов [681].

Определим спектры второго типа. Пусть A — произвольная дистрибутивная подрешетка решетки всех идеалов кольца K, содержащая O и K и замкнутая относительно любых сумм. Положим $\mathrm{pt}\,A$ — это множество всех $\wedge$-неразложимых элементов P решетки A, т. е. таких $P\neq K$ из A, что $\mathcal{I}\wedge J\leqslant P$ влечет $\mathcal{I}\leqslant P$ или $J\leqslant P$ для любых $\mathcal{I}$, $J\in A$. В $\mathrm{pt}\,A$ естественным образом вводится топология, для которой множества $\{P\in \mathrm{pt}\,A : \mathcal{I}\leqslant P\}$, $\mathcal{I}\in A$, образуют базу замкнутых множеств. Полученное топологическое пространство $\mathrm{pt}\,A$ называется точечным пространством решетки A или точечным спектром кольца K. Точечные спектры колец рассматриваются в [284], [741], [742]. Так, в [284] в качестве A берется решетка всех чистых идеалов кольца, а в [742] Симмонс рассмотрел и другие случаи. В этих статьях точечные спектры вводились непосредственно в связи с получением новых пучковых представлений колец. Заметим, что точечные пространства также являются пространствами идеалов кольца, но с несколько по-иному введенной топологией, нежели в спектрах первого типа. Различные пространства теорий кручения кольца рассматриваются в монографии Голана [434] и статьях [435], [436], [439], [440], [716], [740], [741]. Укажем также книги [433], [666] и [669].

9.2. Структурные пучки колец. Общая теория пучков изложена в книгах Годемана [82] и Бредона [35]. См. также книги [83], [93], [98], [178], [188] — все на русском языке. Пучок колец определяется двумя (эквивалентными) способами: или как предпучок колец, удовлетворяющий дополнительным условиям; или как накрывающее пространство со слоями — кольцами. При втором подходе имеем: топологическое пространство X, для каждого $x\in X$ кольцо K_x с 1 и топологическое пространство $\Pi=\dot{\bigcup\limits_{x\in X}} K_x$, причем, каноническая проекция $\pi:\Pi\to X$, $\pi(K_x)=\{x\}$, — локальный гомеоморфизм; все кольцевые операции непрерывны там, где определены; отображение 1: $X\to\Pi$, $x\to 1\in K_x$, непрерывно. Сечением (глобальным) пучка Π называется произвольное непрерывное отображение $f: X\to\Pi$, для которого $\pi\circ f$ — тождественное отображение пространства X. Множество $\Gamma(X,\Pi)$ всех сечений пучка Π относительно поточечно определенных операций является кольцом с 1, называемым кольцом глобальных сечений пучка Π.

Структурный пучок кольца K — это пучок колец Π, построенный на некотором спектре X кольца K, и кольцевой гомоморфизм α_K: $K\to\Gamma(X,\Pi)$. Предполагается, что такая процедура стандартно выполняется для целого класса колец K. Желательно, чтобы представление α было точным (все α_K — вложения) и полным (все α_K — наложения), т. е. для каждого кольца K из рассматриваемого класса имел место изоморфизм $K\cong\Gamma(X,\Pi)$.

Приведем несколько основных структурных пучков колец.

1. Пучок Гротендика ([449]). Определен Гротендиком для коммутативных колец K (с единицей) В качестве базисного пространства X берется $\mathrm{Spec}\,K$. Слой K_x в точке $x=P\in X$ определяется как локализация K_P кольца K по простому идеалу P. Слои соответствующего пучка Π являются локальными кольцами. Гомоморфизм $\alpha: K\to\Gamma(X,\Pi)$ определяется по формуле

$$\alpha(k)(x)=k/1\in K_x=K_P \quad \text{для всех} \quad k\in K \quad \text{и} \quad x=P\in X.$$

Каждый гомоморфизм $\alpha=\alpha_K$ является изоморфизмом:

$$K\cong\Gamma(\mathrm{Spec}\,K,\ \dot{\bigcup} K_P).$$

Если зафиксировать P, то получим гомоморфизм $K\to K_P$, переводящий элементы $k\in K$ в элементы $k/1\in K_P$, ядром которого служит идеал $O_P=\{k\in K : ka=0$ для некоторого $a\in K\setminus P\}$. Отметим, что для всякого пучка колец Π существуют естественные гомоморфизмы $\Gamma(X,\Pi)\to K_x$, $f\to f(x)$ $(x\in X)$.

2. Пучок Пирса ([681]) определен для произвольных колец. Пусть $B(K)$ — булева алгебра всех центральных идемпотентов кольца K. Тогда $X=\mathrm{Max}\,B(K)$. Для любого $x=M\in X$ слой K_x определяется как факторкольцо K/MK. Гомоморфизм α является вложением кольца K в подпрямое произведение колец K/MK и его образ равен $\Gamma(\mathrm{Max}\,B(K),\ \dot{\bigcup} K/MK)$.

3. Пучок Ламбека ([559]). Строится для симметрических колец, т. е. таких колец K, что $abc=0$ влечет $acb=0$ при любых a, b, $c\in K$. Здесь $X=\mathrm{Spec}\,K$ и слой пучка в точке $P\in X$ есть факторкольцо K/O_P. Заметим, что в силу симметричности K определенное чуть выше множество O_P является идеалом. Получается изоморфизм $K\cong\Gamma(\mathrm{Spec}\,K,\ \dot{\bigcup} O_P)$. Для редуцированных колец аналогичный пучок построил Кох [543]. На более широкий класс колец представление Ламбека распространил Шин [731].

4. Двойственность Малвея для гельфандовых колец ([635]). Определение гельфандова кольца приведено в п. 5.2. Кольцо K называется строго гармоническим [544], если оно удовлетворяет условию гельфандовости, но для максимальных двусторонних идеалов. Строго гармонические кольца являются pm-кольцами. Гельфандовы кольца — это в точности строго гармонические кольца, максимальные односторонние

идеалы которых — двусторонние. Кольцо назовем локальным, если оно имеет единственный максимальный правый идеал. Пусть K — гельфандово кольцо и $X = \mathrm{Max}\, K$. Для $M \in X$ положим

$$O(M) = \{a \in K : aKb = 0 \text{ для некоторого } b \in K \setminus M\}.$$

Множество $O(M)$ — идеал в K и факторкольцо $K/O(M)$ локально. Будем считать $K/O(M)$ слоем возникающего пучка Π в точке M. Пучок Π компактен [634], т. е. его базисное пространство X — компакт и сечения из $\Gamma(X, \Pi)$ разделяют точки и замкнутые множества пространства X. Кроме того, все слои пучка Π — локальные кольца. Часто вместо слов «пучок колец Π на пространстве X» говорят об окольцованном пространстве (X, Π). В этих терминах получаем, что каждому гельфандову кольцу K отвечает компактное локально окольцованное пространство (X, Π) и изоморфизм

$$K \cong \Gamma(\mathrm{Max}\, K, \bigcup K/O(M)).$$

Обратно, кольцо $\Gamma(X, \Pi)$ всех глобальных сечений произвольного компактного локально окольцованного пространства (X, Π) гельфандово. Подобное соответствие для строго гармонических колец K получено ранее в работе Коха [544]; в ней речь идет о двусторонней локальности слоев и о мягкости пучка вместо его полной регулярности. См. также статью Симмонса [742] и [775]—[777], [541]. Однако Малвей пошел дальше и доказал следующую теорему двойственности.

Теорема. Функтор $\Gamma : (X, \Pi) \to \Gamma(X, \Pi)$ устанавливает эквивалентность между категорией всех компактных локально окольцованных пространств и их пучковых морфизмов и категорией всех гельфандовых колец с единицей и их унитарных гомоморфизмов. Эта теорема обобщает двойственность И. М. Гельфанда (см. п. 2.2). Отметим также, что для произвольного гельфандова кольца K имеет место эквивалентность между категорией правых K-модулей и категорией соответствующих (X, Π)-модулей [634].

5. Пучок Голана ([434]) строится для определенных нетеровых колец K на пространстве всех первичных теорий кручения τ Голдмана (с ВО-топологией) кольца K. Его слоями служат кольца частных $Q_\tau(K)$.

6. Пучок Λ ([284]). Пусть K — произвольное кольцо, A — решетка всех его чистых идеалов и $X = \mathrm{pt}\, A$ — точечное пространство решетки A. Известно, что решетка A изоморфна решетке всех открытых множеств пространства X. Пучок Λ определяется как предпучок колец (модулей над K, вообще говоря) на X. Если U — открытое множество в X, то ему отвечает чистый идеал $\mathcal{I}$, и тогда $\Lambda(U)$ — это кольцо эндоморфизмов правого K-модуля $\mathcal{I}$. Полученный предпучок является пучком и $K \cong \Lambda(X) = \Gamma(X, \Lambda)$. Для гельфандовых колец пучок Λ совпадает с пучком Малвея—Коха.

Укажем работы, содержащие другие пучковые представления колец: [439], [440], [434], [435], [638], [666], [669], [716], [740]—[742]. Отметим одну из первых работ по представлению колец сечениями пучков — статью Даунса и Гофмана [347] 1966 г. о представлении бирегулярных колец. Книги Даунса и Гофмана [348] и Голана [434], специальные выпуски [565] и [699], большие статьи Малвея [630] и [637], обзорный труд Гофмана [497] (см. также [498]) посвящены теории представлений колец (и алгебр) сечениями. В. Д. Бурков [39] рассматривал пучковые представления колец с дифференцированием. Пучковые представления дистрибутивных решеток рассматривались Корнишем [328]—[332] и в [408], [409]. Представления других алгебраических систем сечениями изучались в [257], [319], [322], [323], [365], [461], [464], [535], [536], [538], [539], [753], [769], [772], [806], [812]. Отметим еще несколько работ [13]—[15], [136], [137], [271], [334], [448], [743], [759], [436], [636].

§ 10. Кольца сечений $\Gamma(X, \Pi)$

В завершающем обзор параграфе мы затронем два вопроса, касающиеся колец $\Gamma(X, \Pi)$.

1) Это вопрос о связи между свойствами кольца $\Gamma(X, \Pi)$ всех сечений пучка колец Π и топологическими свойствами базисного пространства X и накрывающего пространства Π и кольцевыми свойствами слоев K_x. В данном направлении Малвей в работах [633], [634] и [632] обобщил некоторые результаты о кольцах $C(X)$ на кольца $\Gamma(X, \Pi)$; в частности, теорему И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова о характеризации компактности тихоновского пространства X в терминах фиксированности всех собственных идеалов кольца $C(X)$ [78] и теорему Суона ([770], см. также [26]), сформулированную во введении.

2) Это вопрос о применении пучков колец в теории колец. В данном направлении успешно применялось пирсовское представление колец, особенно, при изучении регулярных (по Нейману) колец [681], [300]—[302], [176].

Оба вопроса тесно связаны с теорией представлений колец сечениями пучков, что хорошо демонстрирует теорема 9.2. Рассмотрим две иллюстрации сказанного, помимо прочего, имеющие непосредственное отношение к кольцам непрерывных функций. Если Π — простой пучок на пространстве X со слоем — кольцом K, то $\Gamma(X, \Pi) = C(X, K)$, где K берется с дискретной топологией.

Теорема 1 ([300]). Пусть Π — простой пучок на бесконечном нульмерном компакте X со слоем K, являющимся неразложимым кольцом с единицей. Тогда кольцо $\Gamma(X, \Pi)$ самоинъективно справа в том и только в том случае, когда X экстремально несвязно, а K — конечное самоинъективное справа кольцо. Сравните с теоремой 4.2.

Теорема 2 ([681]). Пусть кольцо K имеет 1 и удовлетворяет тождеству $x^k=x$ для фиксированного натурального $k\geqslant 2$. Тогда K самоинъективно (справа) тогда и только тогда, когда

$$K\cong C(X_1, K_1)\times\ldots\times C(X_n, K_n)$$

для некоторых $n\in\mathbf{N}$, экстремально несвязных компактов X_i и конечных дискретных полей K_i.

Обе теоремы доказаны с помощью техники пирсовских пучков. В следующих работах для пучка колец П (или пучка модулей над П) выясняются соотношения между инъективностью П, вялостью П, самоинъективностью кольца сечений $\Gamma(X, \Pi)$ и самоинъективностью слоев пучка П: [68], [84], [85], [234], [300], [304], [309], [371], [372], [569], [681], [787]. Заметим, что в работе Доббса [371] допущена ошибка, выявленная Банашевским [234] с помощью оптимального контрпримера. В работах [256], [301]—[303], [388], [437], [538], [629], [664], [667], [731], [771], [773] основное внимание обращено на свойства колец-слоев и их связи со свойствами колец сечений.

В [301] введено понятие пирсовской пары абстрактных классов A и B колец. Пара (A, B) называется пирсовской, если: кольцо $K\in A\Leftrightarrow$все его пирсовские слои $K_x\in B$. Укажем некоторые пирсовские пары (A, B): A — все кольца, B — все кольца, вложимые в неразложимые кольца [301]; A — строго регулярные кольца, B — тела [681]; A — бирегулярные кольца, B — простые кольца [347]. В [302] введено интересное понятие пирсовской цепи идеалов кольца, применяемое для дальнейшего разложения и исследования слоев пирсовского пучка кольца.

В заключение перечислим работы: [67], [169], [222], [267], [271], [306]—[308], [342], [583], [631], [668], [725], [788], [789], [831].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абель М.* Об алгебре ограниченных непрерывных функций со значениями в коммутативной банаховой алгебре с единицей // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1971.— № 277.— С. 52—77 (РЖМат, 1972, 5Б816)
2. — Некоторые свойства алгебр функций со значениями в банаховой алгебре // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1972.— № 305.— С. 145—155 (РЖМат, 1973, 11Б692)
3. — Связность пространства максимальных идеалов алгебры ограниченных непрерывных A-значных функций // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.— 1973.— *22,* № 2.— С. 214—216 (РЖМат, 1973, 10Б638)
4. — Описание линейных мультипликативных функционалов в алгебрах непрерывных функций // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1977.— № 430.— С. 14—21 (РЖМат, 1978, 8Б719)
5. — Описание замкнутых идеалов в алгебрах непрерывных векторнозначных функций // Мат. заметки.— 1981.— *30,* № 5.— С. 775—785 (РЖМат, 1982, 2Б928)
6. — Расширения топологических пространств, зависящие от покрытия // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.— 1981.— *30,* № 4.— С. 326—332 (РЖМат, 1982, 4А532)
7. — Некоторые обобщения теоремы Стоуна—Вейерштраса // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1981.— № 504.— С. 3—9 (РЖМат, 1982, 6Б883)

8. — Описание идеалов одной топологической алгебры непрерывных функций // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1982.— № 596.— С. 105—119 (РЖМат, 1982, 5Б850)
9. — Фиксированные идеалы в топологических модуль-алгебрах // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.— 1985.— *34,* № 3.— С. 237—247 (РЖМат, 1986, 1Б1067)
10. — Топологические модуль-алгебры без единицы // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.— 1985.— *34,* № 4.— С. 345—359 (РЖМат, 1986, 7Б1454)
11. — О всюду плотности подмножеств в некоторых пространствах векторнозначных функций // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1987.— № 770.— С. 26—37 (РЖМат, 1987, 11Б923)
12. —, *Херингсон Э.* Некоторые свойства алгебры $C_0(X, A)$ // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1975.— № 374.— С. 79—89 (РЖМат, 1976, 7Б821)
13. *Антонов В. И.* Гейтинговозначные оценки в пирсовских пучках колец // Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина.— М., 1984.— 14 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.03.84, № 1525—84 Деп. (РЖМат, 1984, 7А197 ДЕП)
14. — Локальное кольцо — внутренний объект для кольца Гельфанда // Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина.— М., 1985.— 11 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.02.85, № 1096—85 Деп. (РЖМат, 1985, 7А289 ДЕП)
15. — Булевозначные оценки в канонических пучках, представляющих ортполные B-кольца // Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина.— М., 1989.— 37 с.— Деп. в ВИНИТИ 07.02.89, № 790—В89 (РЖМат, 1989, 6А249 ДЕП)
16. *Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А.* Топологические алгебры Буля (Топологические полуполя. I).— Ташкент: АН УзССР, 1963.— 132 с. (РЖМат, 1966, 1А484К)
17. *Апарина Л. В.* Хьюиттовские Φ-расширения пространств близости // Успехи мат. наук.— 1973.— *28,* № 1.— С. 229—230 (РЖМат, 1973, 7А497)
18. *Арнаутов В. И., Водинчар М. И., Главацкий С. Т., Михалев А. В.* Конструкции топологических колец и модулей.— Кишинев: Штиинца, 1988. — 170 с. (РЖМат, 1988, 6А258К)
19. —, —, *Михалев А. В.* Введение в теорию топологических колец и модулей.— Кишинев: Штиинца, 1981.— 175 с. (РЖМат, 1981, 11А303К)
20. *Архангельский А. В.* Алгебраические объекты, порожденные топологической структурой // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1987.— *25.*— С. 141—198 (РЖМат, 1988, 1А596)
21. — Топологические пространства функций.— М.: МГУ, 1989.— 222 с. (РЖМат, 1989, 11А477К)
22. — II Пространства отображений и кольца непрерывных функций // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1989.— *51.*— С. 81—171 (РЖМат, 1990, 4А674)
23. —, *Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М.: Наука, 1974.— 423 с. (РЖМат, 1975, 3А557К)
24. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.— Ташкент: Фан, 1986.— 123 с. (РЖМат, 1987, 3А318К)
25. *Бабаев Э. А.* О топологических свойствах, сохраняющихся при изоморфизме колец непрерывных функций // Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1988.— 9 с.— Деп. в ВИНИТИ 24.11.88, № 8285—В88 (РЖМат, 1989, 3А480 ДЕП)
26. *Басс Х.* Алгебраическая K-теория.— М.: Мир, 1973.— 591 с. (РЖМат, 1974, 5А439К)
27. *Батикян Б. Т.* О регулярных подалгебрах $C(X)$ // Вестн. МГУ. Сер. I. — 1974.— № 4.— С. 59—61 (РЖМат, 1975, 2Б670)
28. —, *Горин Е. А.* Замечание о нелокальных алгебрах // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1976.— *65.*— С. 172—177 (РЖМат, 1977, 3Б722)
29. *Бейдар К. И., Михалев А. В.* Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи мат. наук.— 1985.— *40,* № 6.— С. 79—115 (РЖМат,

1986, 5А260)
30. *Биркгоф Г.* Теория решеток.— М.: Наука, 1984.— 568 с. (РЖМат, 1984, 11А208К)
31. *Блох Д. А.* О максимальных идеалах кольца функциональных матриц // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1973.— № 5.— С. 17—19 (РЖМат, 1974, 2Б846)
32. *Блудова И. В.* О $\mathscr{E}$-компактных отображениях // Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина.— М., 1990.— 43 с.— Деп. в ВИНИТИ 17.04.90, № 2074—В90 (РЖМат, 1990, 8А448 ДЕП)
33. *Богатый С. А.* Характеристика топологической и равномерной размерности в терминах колец непрерывных функций // Сиб. мат. ж.— 1973.— *14,* № 2.— С. 289—299 (РЖМат, 1973, 9А469)
34. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. C^* и W^*-алгебры. Группы симметрий. Разложение состояиий.— М.: Мир, 1982.— 511 с. (РЖМат, 1983, 5В353К)
35. *Бредон Г.* Теория пучков.— М.: Наука, 1988.— 312 с. (РЖМат, 1988, 8А565К)
36. *Бурбаки Н.* Общая топология. Топологические кольца. Числа и связанные с ними пространства.— М.: Наука, 1969.— 392 с.
37. — Коммутативиая алгебра.— М.: Мир, 1971.— 707 с. (РЖМат, 1973, 9А376К)
38. — Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М.: Наука, 1975.— 408 с.
39. *Бурков В. Д.* Представление дифференциальных колец пучками // МГУ. — М., 1980.— 12 с.— Деп. в ВИНИТИ 16.05.80, № 1885.— Деп. (РЖМат, 1980, 9А263 ДЕП)
40. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.* Нормированные решетки // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ.— 1980.— *18.*— С. 125—184 (РЖМат, 1981, 1Б754)
41. *Вайнгортин Л. Д.* Характеристика размерности хаусдорфова бикомпакта с помощью колец непрерывных функций // Актуальн. вопр. мат. логики и теории множеств.— М., 1975.— С. 285—290 (РЖМат, 1976, 6А526)
42. *Варшавский А. Д.* К вопросу о локальности функциональных алгебр // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1968.— № 5.— С. 23—30 (РЖМат, 1969, 1Б637)
43. — Функциональная алгебра второй степени нелокальности // Успехи мат. наук.— 1969.— *24,* № 2.— С. 223—224 (РЖМат, 1969, 11Б574)
44. *Вахер Ф. С.* О базисе в пространстве непрерывных функций, определенных на компакте // Докл. АН СССР.— 1955.— *101,* № 4.— С. 589—592 (РЖМат, 1956, 2349)
45. *Векслер А. И.* О банаховой и дедекиндовой полноте пространств непрерывных функций, векторных структур и максимальных колец частных // Докл. АН СССР.— 1971.— *196,* № 1.— С. 20—23 (РЖМат, 1971, 7Б637)
46. — P'-пространства // Изв. вузов. Мат.— 1978.— № 5.— С. 9—18 (РЖМат, 1978, 11А503)
47. *Вечтомов Е. М.* Решетки непрерывных функций // Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина.— М., 1977.— 29 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.08.77, № 3352—77 Деп (РЖМат, 1977, 12А545 ДЕП)
48. — Чистые идеалы колец непрерывных функций // Соврем. алгебра.— Л., 1978.— С. 29—37 (РЖМат, 1978, 11А342)
49. — Изоморфизм мультипликативных полугрупп колец непрерывных функций // Сиб. мат. ж.— 1978.— *19,* № 4.— С. 759—771 (РЖМат, 1978, 12Б1068)
50. — Изоморфизм мультипликативных полугрупп алгебр непрерывных функций с бикомпактными носителями // Успехи мат. наук.— 1978.— *33,* № 5.— С. 175—176 (РЖМат, 1979, 4А332)
51. — О модуле всех функций над кольцом непрерывных функций // Мат. заметки.— 1980.— *28,* № 4.— С. 481—490 (РЖМат, 1981, 2А279)
52. — О проективных и инъективных идеалах колец непрерывных функций // Абел. группы и модули.— Томск, 1980.— С. 19—30 (РЖМат, 1980, 11А255)
53. — Об идеалах колец непрерывных функций // Изв. вузов. Мат.— 1981. — № 1.— С. 3—10
54. — О модуле функций с бикомпактными носителями над кольцом непрерывных функций // Успехи мат. наук.— 1982.— *37,* № 4.— С. 151—152 (РЖМат, 1983, 2Б835)
55. — Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F-пространства // Мат. заметки.— 1983.— *34,* № 3.— С. 321—332 (РЖМат, 1984, 1Б938)
56. — К теории колец непрерывных функций. I // Тобол. гос. пед. ин-т.— Тобольск, 1985.— 8 с.— Деп. в ВИНИТИ 5.07.85, № 4868—85 Деп (РЖМат, 1985, 11Б1120 ДЕП)
57. — К теории колец непрерывных функций. II // Тобол. гос. пед. ин-т.— Тобольск, 1985.— 27 с.— Деп. в ВИНИТИ 29.10.85, № 7551-В85 (РЖМат, 1986, 6Б1168 ДЕП)
58. — О булевых кольцах // Мат. заметки.— 1986.— *39,* № 2.— С. 182—185 (РЖМат, 1986, 6А413)
59. — О кольцах непрерывных функций со значениями в локально бикомпактных полях // Абел. группы и модули.— Томск, 1986.— № 4.— С. 20—35 (РЖМат, 1986, 10А239)
60. — Определяемость E-компактных пространств частично упорядоченными множествами идеалов колец непрерывных функций // Абел. группы и модули.— Томск, 1988.— № 7.— С. 20—30 (РЖМат, 1988, 8А292)
61. — О кольцах непрерывных функций со значениями в топологических телах // Мат. исслед.— Кишинев, 1988.— № 105.— С. 45—52 (РЖМат, 1988, 12А268)
62. — Об алгебраических объектах, ассоциированных с топологическими пространствами // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. Алгебраическая геометрия.— Новосибирск, 1989.— С. 17
63. — О некоторых свойствах идеалов колец непрерывных функций // Тополог. пространства и их отображения.— Рига, 1989.— С. 40—49 (РЖМат, 1989, 10А520)
64. — Чистые идеалы колец и теорема Бкуша // Абел. группы и модули.— Томск, 1989.— № 8.— С. 54—64 (РЖМат, 1990, 4А238)
65. — О полугруппах непрерывных частичных функций на топологических пространствах // Успехи мат. наук.— 1990.— *45,* № 4.— С. 143—144 (РЖМат, 1991, 5А495)
66. — Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1990.— *28.*— С. 3—46
67. — Кольца непрерывных функций и кольца глобальных сечений // VI симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщ.— Львов, 1990.— С. 32
68. — Кольца и модули функций // Проблемы теоретич. и прикладной мат. Тезисы докл. конф.— Тарту, 1990.— С. 108—111
69. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры.— М.: Наука, 1969.— 318 с. (РЖМат, 1969, 12А400К)
70. *Вулих Б. З.* О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец // Уч. зап. Ленингр. гос. ин-та им. А. И. Герцена. — 1958.— *166.*— С. 3—15 (РЖМат, 1959, 3972)
71. — Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М.: Физматгиз, 1961.— 407 с. (РЖМат, 1962, 8Б393К)
72. *Гаджиев Ф. А.* Об алгебрах Менгера // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1984.— *163.*— С. 78—80 (РЖМат, 1984, 12А343)
73. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры.— М.: Мир, 1973.— 334 с. (РЖМат, 1974, 2Б847К)
74. *Гасанов А. М.* Тернарные полугруппы непрерывных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1976.— № 2.— С. 52—56 (РЖМат, 1977, 2А198)
75. — Тернарные полугруппы топологических отображений // Изв. АН

АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1977.— № 1.— С. 18—23 (РЖМат, 1978, 2А142)
76. *Гельфанд И. М.* О нормированных кольцах // Докл. АН СССР.— 1939. — *23*, № 5.— С. 430—432
77. — Нормированные кольца // Мат. сб.— 1941.— *9*, № 1.— С. 3—24
78. —, *Колмогоров А. Н.* О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Докл. АН СССР.— 1939.— *22*, № 1.— С. 11—15
79. —, *Наймарк М. А.* О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве // Мат. сб.— 1943.— *12*.— С. 197—213
80. —, *Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца.— М.: Физматгиз, 1960.— 316 с. (РЖМат, 1963, 9Б419К)
81. —, *Шилов Г. Е.* О различных методах введения топологии в множестве максимальных идеалов нормированного кольца // Мат. сб.— 1941.— *9*, № 1.— С. 25—38
82. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков.— М.: ИЛ, 1961.— 319 с. (РЖМат, 1962, 4А335К)
83. *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики.— М.: Мир, 1983.— 486 с. (РЖМат, 1984, 4А347К)
84. *Головин В. Д.* Характеризация инъективных пучков // Докл. АН БССР. — 1984.— *28*, № 5.— С. 396—399 (РЖМат, 1984, 12А590)
85. — Гомологии аналитических пучков и теоремы двойственности.— М.: Наука, 1986.— 191 с. (РЖМат, 1986, 5А747К)
86. *Горин Е. А.* Характеристика кольца всех непрерывных функций на бикомпакте // Докл. АН СССР.— 1962.— *142*, № 4.— С. 781—784 (РЖМат, 1963, 6Б376)
87. — Модули обратимых элементов нормированной алгебры // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1965.— № 5.— С. 35—39 (РЖМат, 1966, 1Б467)
88. — Пространства максимальных идеалов некоторых нормированных колец с равномерной сходимостью // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1966.— № 3. — С. 14—19 (РЖМат, 1967, 4Б483)
89. — О некоторых характеристических свойствах $C(X)$ // Теория функций, функцион. анализ и его прил.— 1971.— *14*.— С. 186—195 (РЖМат, 1972, 4Б915)
90. —, *Лин В. Я.* Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами // Материалы 7-й мат. и 7-й физ. межвуз. конф. Дальн. Вост.— Хабаровск, 1968.— С. 10—12 (РЖМат, 1969, 5Б741)
91. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций.— М.: ИЛ, 1963.— 311 с. (РЖМат, 1963, 12Б438К)
92. *Грауэрт Г., Реммерт Р.* Аналитические локальные алгебры.— М.: Наука, 1988.— 303 с. (РЖМат, 1988, 11А459К)
93. —, — Теория пространств Штейна.— М.: Наука, 1989.— 335 с. (РЖМат, 1989, 8А723К)
94. *Гретцер Г.* Общая теория решеток.— М.: Мир, 1982.— 452 с. (РЖМат, 1982, 11А201К)
95. *Двалишвили Б. П.* Булевы обобщенные алгебры и их представления // Тр. Тбил. Мат. ин-та АН ГССР.— 1986.— *78*.— С. 104—124 (РЖМат, 1986, 11А346)
96. *Демарр Р. А.* Преобразования в полугруппах и многозначные отображения // Докл. АН СССР.— 1962.— *144*, № 5.— С. 968—970 (РЖМат, 1965, 10А298)
97. *Джекобсон Н.* Строение колец.— М.: ИЛ, 1961.— 392 с. (РЖМат, 1961, 11А249К)
98. *Джонстон П. Т.* Теория топосов.— М.: Наука, 1986.— 438 с. (РЖМат, 1987, 4А347К)
99. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления.— М.: Наука, 1974.— 399 с. (РЖМат, 1974, 12Б456К)
100. *Димиев С. Г., Мушкаров О. К., Петров К. П., Стоев П. В.* Някои въпроси за полинормираните пръстени // Мат. и математич. образов.— София: БАН, 1976.— С. 145—159 (РЖМат, 1977, 12Б908)
101. *Домрачева Г. И.* Обобщенные полуупорядоченные кольца // Уч. зап. Новгородск. гос. пед. ин-та.— 1960.— *1*.— С. 51—60 (РЖМат, 1961, 7Б482)
102. — Некоторые замечания о структурно-упорядоченных алгебрах и их идеалах // Уч. зап. Новгородск. гос. пед. ин-та.— 1966.— *7*.— С. 3—16 (РЖМат, 1967, 9А166)
103. *Дэй М. М.* Нормированные линейные пространства.— М.: ИЛ, 1961.— 232 с. (РЖМат, 1963, 12Б432К)
104. *Ершов Ю. Л.* Непрерывные решетки и A-пространства // Докл. АН СССР.— 1972.— *207*, № 3.— С. 523—526 (РЖМат, 1973, 5А96)
105. *Житомирский Г. И.* Полурешетки как базы топологических пространств // Теория полугрупп и ее прил.— Саратов, 1988.— № 9.— С. 20—26 (РЖМат, 1989, 9А161)
106. *Зарелуа А. В.* Универсальный бикомпакт данного веса и данной размерности // Докл. АН СССР.— 1964.— *154*, № 5.— С. 1015—1018 (РЖМат, 1964, 7А331)
107. — Метод теории колец непрерывных функций в конструкции бикомпактных расширений // Contrib. extens. theory topol. struct. Proc. Sympos., Berlin, 1967.— Berlin, 1969.— С. 249—256 (РЖМат, 1970, 4А461)
108. — Построение сильно бесконечномерных компактов с помощью колец непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1974.— *214*, № 2.— С. 264—267 (РЖМат, 1974, 5А553)
109. *Захаров В. К.* Функциональное представление равномерного пополнения максимального и счетно-полного модулей частных модуля непрерывных функций // Успехи мат. наук.— 1980.— *35*, № 4.— С. 187—188 (РЖМат, 1980, 12А282)
110. — Функциональная характеризация абсолюта, векторные решетки функций со свойством Бэра и квазинормальных функций и модули частных непрерывных функций // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1982.— *45*.— С. 68—104 (РЖМат, 1983, 6Б665)
111. — О двух классических расширениях векторной решетки непрерывных функций // Функц. анализ и его прил.— 1984.— *18*, № 2.— С. 92—93 (РЖМат, 1984, 9Б584)
112. — Расширения векторных решеток непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1986.— *228*, № 6.— С. 1297—1301 (РЖМат, 1987, 5Б60)
113. — C_r-оболочки кольца непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1987.— *294*, № 3.— С. 531—534
114. — Связи между расширением Лебега и расширением Бореля первого класса и между соответствующими им прообразами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.— *54*, № 5.— С. 928—956 (РЖМат, 1991, 3А341)
115. *Иванова Г. Я.* Идеалы в обобщенных полуупорядоченных кольцах непрерывных функций // Уч. зап. Новгородск. гос. пед. ин-та.— 1966.— *7*.— С. 17—27 (РЖМат, 1967, 5Б581)
116. — Характеристика максимальных идеалов в нормальных подкольцах кольца непрерывных функций // Уч. зап. Новгородск. гос. пед. ин-та.— 1966.— *7*.— С. 28—36 (РЖМат, 1967, 5Б582)
117. — Максимальные идеалы в обобщенных полуупорядоченных кольцах непрерывных функций с единицей умножения // Сиб. мат. ж.— 1971.— *12*, № 4.— С. 707—717 (РЖМат, 1971, 12Б781)
118. — Простые идеалы обобщенной упорядоченной алгебры расширенных функций на компакте B и z-фильтры на B // Новгородск. гос. пед. ин-т.— Новгород, 1990.— 9 с.— Деп. в ВИНИТИ 24.04.90, № 2214-В90 (РЖМат, 1990, 8Б954 ДЕП)
119. *Калмуцкий Л. И.* Спектры полуколец и характеристика T_1-пространств // Кишинев. ун-т.— Кишинев, 1986.— 23 с.— Деп. в Молд. НИИНТИ 23.01.86, № 615-М (РЖМат, 1986, 6А740 ДЕП)
120. — Полукольца функций и характеристика T_1-пространств // Докл. АН БССР.— 1986.— *30*, № 11.— С. 972—974 (РЖМат, 1987, 5А559)

121. — Спектры полуколец и бикомпактные расширения T_0-пространств // Сообщ. АН ГССР.— 1989.— *134,* № 1.— С. 45—48 (РЖМат, 1990, 1А523)
122. *Канторович Л. В.* О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях к теории линейных операций // Докл. АН СССР.— 1935.— *9,* № 1—2.— С. 11—14
123. — Линейные полуупорядоченные пространства // Мат. сб.— 1937.— *2.* — С. 121—168
124. —, *Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1984.— 752 с. (РЖМат, 1985, 8Б763К)
125. *Караханян М. И.* О некоторых алгебраических характеристиках алгебры $C(X)$ на локально связном компакте // Мат. сб.— 1978.— *107,* № 3.— С. 416—434 (РЖМат, 1979, 5Б787)
126. *Келли Дж.* Общая топология.— М.: Наука, 1981.— 431 с. (РЖМат, 1982, 3А543К)
127. *Кисляков С. В.* Недополняемые равномерные алгебры // Мат. заметки. — 1975.— *18,* № 1.— С. 91—96 (РЖМат, 1975, 11Б841)
128. *Кокк А.* Описание гомоморфизмов топологических модуль-алгебр // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.— 1987.— *36,* № 1.— С. 1—7 (РЖМат, 1987, 7А267)
129. — Функциональное представление топологических $*$-алгебр // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1989.— № 836.— С. 111—117 (РЖМат, 1989, 10Б1012)
130. — Пространство гомоморфизмов топологических модуль-алгебр // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1989.— № 846.— С. 25—40 (РЖМат, 1989, 10Б1013)
131. *Крежевских Л. Т.* Об аналоге банаховой алгебры и пространства ее максимальных идеалов для отображений // Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина.— М., 1986.— 27 с.— Деп. в ВИНИТИ 29.08.86, № 6319-В86 (РЖМат, 1986, 12Б1174 ДЕП)
132. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск.: Наука, 1985.— 256 с. (РЖМат, 1986, 8Б825К)
133. — Элементы булевозначного анализа.— Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1987.— 181 с. (РЖМат, 1987, 12А20К)
134. *Ламбек И.* Кольца и модули.— М.: Мир, 1971.— 280 с. (РЖМат, 1972, 4А291К)
135. *Левина Н. Б.* О структуре замкнутых идеалов в некотором кольце функций // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1967.— № 6.— С. 70—77 (РЖМат, 1968, 9Б569)
136. *Любецкий В. А.* Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем // Дополнение в книге [98].— С. 376—433
137. — Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // Успехи мат. наук.— 1989.— *44,* № 4.— С. 99—153 (РЖМат, 1990, 1А74)
138. *Малыхин В. И., Пономарев В. И.* Общая топология (Теоретико-множественное направление) // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1975.— *13.*— С. 149—229 (РЖМат, 1976, 6А466)
139. *Мальгранж Б.* Идеалы дифференцируемых функций.— М.: Мир, 1968.— 132 с.
140. *Мальцев А. А., Нурутдинов Б. С.* Итеративные алгебры непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1975.— *224,* № 3.— С. 532—535 (РЖМат, 1976, 2А592)
141. —, — Об итеративных алгебрах непрерывных функций // Мат. весн.— 1975.— *12,* № 2.— С. 203—215 (РЖМат, 1976, 5А494)
142. *Милютин А. А.* Изоморфность пространств непрерывных функций над компактами континуальной мощности // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1966.— *2.*— С. 150—156 (РЖМат, 1968, 10Б582)
143. *Митягин Б. С.* Описание пространств максимальных идеалов двух классов нормированных колец // Сиб. мат. ж.— 1961.— *2,* № 1.— С. 82—88 (РЖМат, 1961, 11Б383)
144. *Михайлов Е. Н.* О двойственности в категориях топологических групп // Докл. АН СССР.— 1980.— *251,* № 5.— С. 1059—1062 (РЖМат, 1980, 9А246)
145. *Михалев А. В.* Специальные структурные пространства колец // Докл. АН СССР.— 1963.— *150,* № 2.— С. 259—261 (РЖМат, 1964, 9А224)
146. *Мурадов Ф. Х.* Суперассоциативные алгебры многозначных замкнутых многоместных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1986.— *7,* № 4.— С. 3—6 (РЖМат, 1987, 9А292)
147. — Алгебры Менгера сильно открытых отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1988.— *8,* № 3.— С. 3—7 (РЖМат, 1990, 4А257)
148. — Алгебры Менгера сильно открытых непрерывных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1988.— *8,* № 4.— С. 8—13 (РЖМат, 1990, 6А124)
149. *Мустафаев Л. Г., Фейзуллаев Р. Б.* Полугруды многозначных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1977.— *1.*— 13—17 (РЖМат, 1978, 3А322)
150. —, — Полугруды и полугруппы линейных непрерывных отображений // Успехи мат. наук.— 1979.— *34,* № 6.— С. 170—174 (РЖМат, 1980, 4А156)
151. *Назиев А.* О реализации дуальных категорий // Докл. АН СССР.— 1973.— *212,* № 4.— С. 825—827 (РЖМат, 1974, 2Б901)
152. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.— 664 с. (РЖМат, 1969, 4Б520К)
153. *Пасынков Б. А.* О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы.— М., 1984.— С. 72—102 (РЖМат, 1984, 12А570)
154. — О гомеоморфизме непрерывных отображений // Тезисы докл. Междунар. конф. по алгебре. Алгебраическая геометрия.— Новосибирск, 1989.— С. 48
155. *Пашенков В. В.* О теореме Стоуна // Докл. АН СССР.— 1970.— *194,* № 4.— С. 778—781 (РЖМат, 1971, 2А416)
156. — Двойственность топологических моделей // Докл. АН СССР.— 1974. — *218,* № 2.— С. 291—294 (РЖМат, 1975, 2А506)
157. — О двойственностях // Докл. АН СССР.— 1975.— *222,* № 6.— С. 1295—1298 (РЖМат, 1975, 12А313)
158. — О структуре непрерывных функций на вполне регулярных пространствах // Мат. заметки.— 1976.— *19,* № 6.— С. 863—869 (РЖМат, 1976, 10А287)
159. — Однородные и неоднородные двойственности // Успехи мат. наук.— 1987.— *42,* № 5.— С. 79—99 (РЖМат, 1988, 3А326)
160. *Пелчинский А.* Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций.— М.: Мир, 1970.— 144 с. (РЖМат, 1971, 1Б687)
161. *Пензин Ю. Г.* Неразрешимые теории кольца непрерывных функций // Алгоритмич. вопр. алгебр. систем.— Иркутск, 1978.— С. 142—147 (РЖМат, 1979, 4А359)
162. *Пич А.* Операторные идеалы.— М.: Мир, 1982.— 536 с. (РЖМат, 1983, 6Б680К)
163. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов.— М.: Наука, 1986.— 256 с. (РЖМат, 1986, 11Б709К)
164. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М.: Наука, 1984.— 520 с. (РЖМат, 1984, 11А141К)
165. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики.— М.: Мир, 1972. — 592 с. (РЖМат, 1972, 7А36К)
166. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1967.— 257 с. (РЖМат, 1968, 6Б615К)
167. *Роткович Г. Я.* Об обобщенных полуупорядоченных алгебрах // Сиб. мат. ж.— 1967.— *8,* № 2.— С. 391—398 (РЖМат, 1967, 9Б510)
168. *Рудин У.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.— 443 с. (РЖМат, 1976, 4Б630К)

169. *Рычков С. В.* О пучках и копучках модулей // Алгебр. системы. Алгоритм. вопр. и ЭВМ.— Иркутск, 1986.— С. 96—102 (РЖМат, 1988, 5А249)
170. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры.— Ташкент: Фан, 1983.— 302 с. (РЖМат, 1984, 5А268К)
171. *Селиванов Ю. В.* Проективность некоторых банаховых модулей и строение банаховых алгебр // Изв. вузов. Мат.— 1978.— № 1.— С. 110—116 (РЖМат, 1978, 10Б900)
172. *Сикирявый В. Я.* Идеалы в кольцах измеримых функций // Вестн. МГУ. Сер. I.— 1968.— № 3.— С. 3—5 (РЖМат, 1968, 10Б635)
173. *Сикорский Р.* Булевы алгебры.— М.: Мир, 1969.— 375 с. (РЖМат, 1969, 7А278К)
174. *Терпе Ф., Флаксмайер Ю.* О некоторых приложениях теории расширений топологических пространств и теории меры // Успехи мат. наук.— 1977.— *32*, № 5.— С. 125—162 (РЖМат, 1978, 5А461)
175. *Ткачук В. В.* Наименьшее подкольцо кольца $C_p(C_p(X))$, содержащее $X\cup\{1\}$, всюду плотно в $C_p(C_p(X))$ // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1987.— № 1.— С. 20—23 (РЖМат, 1987, 5А558)
176. *Тюкавкин Д. В.* Пирсовские пучки для колец с инволюцией // МГУ.— М., 1982.— 64 с.— Деп. в ВИНИТИ 2.07.82, № 3446—82 Деп. (РЖМат, 1982, 11А168 ДЕП)
177. *Фейзуллаев Р. Б.* Тернарные полугруппы локально-гомеоморфных отображений // Докл. АН СССР.— 1980.— *252*, № 5.— С. 1063—1065 (РЖМат, 1980, 10А100)
178. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия.— М.: Мир, 1981.— 599 с. (РЖМат, 1982, 5А394К)
179. *Хелемский А. Я.* Пример компакта, не являющегося F-пространством, но обладающего свойством единственности // Мат. заметки.— 1967.— *1*, № 6.— С. 735—740 (РЖМат, 1968, 8Б680)
180. — Описание относительно проективных идеалов в алгебрах $C(\Omega)$ // Докл. АН СССР.— 1970.— *195*, № 6.— С. 1286—1289 (РЖМат, 1971, 5А323)
181. — Гомология в банаховых и топологических алгебрах.— М.: МГУ, 1986. — 288 с. (РЖМат, 1986, 9А362К)
182. — Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.— М.: Наука, 1989.— 464 с. (РЖМат, 1990, 1Б804К)
183. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. I. Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп.— М.: Наука, 1975.— 654 с. (РЖМат, 1976, 6Б767К)
184. —, — Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах.— М.: Мир, 1975.— 904 с. (РЖМат, 1976, 2Б770К)
185. *Чобан М. М., Калмуцкий Л. И.* К одной теореме Нагаты о решетках полунепрерывных функций // Сиб. мат. ж.— 1989.— *30*, № 2.— С. 185—191 (РЖМат, 1989, 7А416)
186. *Чудновский Д. В.* Нестандартный анализ и гомеоморфизм B-пространств // Докл. АН СССР.— 1969.— *185*, № 4.— С. 772—774 (РЖМат, 1969, 8Б535)
187. *Шакенко Н. И.* О топологических кольцах непрерывных действительных функций // Успехи мат. наук.— 1982.— *37*, № 5.— С. 207—208 (РЖМат, 1983, 3А269)
188. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. Т. 2.— М.: Наука, 1988.— 304 с.
189. *Шилов Г. Е.* Идеалы и подкольца кольца непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1939.— *22*, № 1.— С. 7—10
190. *Шостак А. П.* E-компактные расширения топологических пространств. // Функц. анализ и его прил.— 1974.— *8*, № 1.— С. 62—68 (РЖМат, 1974, 6А587)
191. — Q-расширения топологических пространств и кольца функций // Докл. АН СССР.— 1976.— *226*, № 6.— С. 1291—1294 (РЖМат, 1976, 7А607)

192. *Штейнбук В. Б.* Изоморфизмы полугрупп преобразований фильтров // Латв. мат. ежегод.— Рига, 1983.— *27*.— С. 260—269 (РЖМат, 1983, 12А159)
193. — Об элементарной эквивалентности полугрупп замкнутых преобразований // Латв. мат. ежегод.— Рига, 1986.— *30*.— С. 174—176 (РЖМат, 1987, 2А134)
194. — О полугруппах непрерывных преобразований пар топологических пространств // Топол. пространства и их отображения.— Рига, 1989.— С. 173—178 (РЖМат, 1989, 11А102)
195. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.— М.: Мир, 1969.— 1071 с. (РЖМат, 1970, 4Б559К)
196. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 751 с. (РЖМат, 1986, 9А506К)
197. *Эсакиа Л. Л.* Алгебры Гейтинга. I. Теория двойственности.— Тбилиси: Мецниереба, 1985.— 104 с. (РЖМат, 1987, 4А318К)
198. *Юсуфов В. Ш.* Полугруппы гомеоморфизмов на прямой // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1980.— № 5.— С. 21—23 (РЖМат, 1981, 8А181)
199. — Полугруппы гомеоморфных отображений бикомпактов // Докл. АН АзСССР.— 1984.— *40*, № 6.— С. 7—10 (РЖМат, 1985, 3А175)
200. *Ярокер І. Ш.* Півгрупи гомеоморфізмів деяких топологічних просторів // Доповіді АН УРСР.— 1972.— А, № 11.— С. 1008—1010, 1055 (РЖМат, 1973, 3А212)
201. *Abellanas P.* Sheaves on the total spectrum of a ring. // Rend. mat e applic.— 1966(1967).— *25*, № 1—2.— С. 72—76 (РЖМат, 1967, 12А332)
202. *Abian A.* Boolean Rings.— Boston: Branded Press, 1976.— VII.— 394 с. (РЖМат, 1977, 2А355К)
203. *Adler A., Williams R.* Transferring results from rings of continuous functions to rings of analytic functions // Can. J. Math.— 1975.— *27*, № 1.— С. 75—87 (РЖМат, 1975, 10Б724)
204. *Aguiló F. R.* Estudio de los ideales del anillo de las functiones enteras // Collect. math.— 1965.— *17*, № 2.— С. 105—134 (РЖМат, 1967, 10Б549)
205. *Alling N. L.* An application of valuation theory to rings of continuous real and complex-valued functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1963.— *109*, № 3.— С. 492—508 (РЖМат, 1966, 8Б430)
206. — Rings of continuous integer-valued functions and nonstandart arithmetic // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— *118*, № 6.— С. 498—525 (РЖМат, 1966, 6А251)
207. — Residue class fields of rings of continuous functions // Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 17.— London — New York, 1975.— С. 55—67 (РЖМат, 1977, 2Б885)
208. *Anderson F. W.* A lattice characterization of completely regular G_δ-spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1955.— *6*, № 5.— С. 757—765 (РЖМат, 1957, 2133)
209. — A class of function algebras // Can. J. Math.— 1960.— *12*, № 3.— С. 353—362 (РЖМат, 1963, 5Б431)
210. — Approximation in systems of real-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1962.— *103*, № 2.— С. 249—271 (РЖМат, 1963, 6А275)
211. —, *Blair R. L.* Characterizations of the algebra of all real-valued continuous functions on a completely regular space // Illinois J. Math.— 1959. — *3*, № 1.— С. 121—133 (РЖМат, 1960, 10560)
212. *Anderson M.* The essential closure of $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *76*, № 1.— С. 8—10 (РЖМат, 1980, 5А463)
213. *Antonovsky M., Chudnovsky D., Chudnovsky G., Hewitt E.* Rungs of continuous real-valued functions. II // Math. Z.— 1981.— *176*, № 2.— С. 151—186 (РЖМат, 1981, 8Б869)
214. *Aragona J.* Dualité dans les modules topologiques sur un anneau unitaire

commutatif localement compact // C. r. Acad. Sci.— 1973.— *277*, № 20.— C. A979—A981 (РЖМат, 1974, 6A534)
215. *Arhippainen J.* On the ideal structure and approximation properties of algebras of continuous B^*-algebra-valued functions // Acta univ. oulueп. — 1987.— *A*, № 187.— C. 1—103 (РЖМат, 1988, 5Б928)
216. *Arias-de-Reyna J.* A real valued homomorphisms on algebras of differentiable functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *104*, № 4.— C. 1054—1058 (РЖМат, 1989, 11Б856)
217. *Armstrong K. W.* A Cauchy completion for function rings // Math. Z.— 1970.— *113*, № 2.— C. 145—153 (РЖМат, 1970, 6A254)
218. *Aron R. M., Fricke G. H.* Homomorphisms on $C(R)$ // Amer. Math. Mon. — 1986.— *93*, № 7.— C. 555 (РЖМат, 1987, 2Б1049)
219. *Asano T.* On type 1 semi-algebras of continuous functions // Natur. Sci. Rept Ochanomizu Univ.— 1976.— *27*, № 1.— C. 19—26 (РЖМат, 1977, 1Б827)
220. *Aull C. E.* Approximation of continuous functions on pseudocompact spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *81*, № 3.— C. 490—494 (РЖМат, 1982, 3A569)
221. *Aurora S.* A representation theorem for certain connected rings // Pacif. J. Math.— 1969.— *31*, № 3.— C. 563—567 (РЖМат, 1970, 6A255)
222. *Awami M. A., Verschoren A.* Filtered sheaves and their localizations // Commun. Algebra.— 1987.— *15*, № 11.— C. 2391—2416 (РЖМат, 1988, 4A329)
223. *Babiker A. G.* Some measure theoretic properties of completely regular spaces // Atti Acad. naz. Lincei Rend.— 1975(1976).— *59*, № 5.— C. 362—367 (РЖМат, 1978, 4A389)
224. *Bachman G., Beckenstein E., Narici L.* Function algebras over valued fields and measures. Nota I // Atti Acad. naz. Lincei Rend.— 1971(1972). — *51*, № 5.— C. 293—300 (РЖМат, 1973, 1Б610)
225. —, —, — Function algebras over valued fields and measures. Nota II // Atti Acad. naz. Lincei Rend.— 1972.— *52*, № 2.— C. 120—125 (РЖМат, 1973, 5Б843)
226. —, —, — Function algebras over valued fields // Pacif. J. Math.— 1973. — *44*, № 1.— C. 45—58 (РЖМат, 1973, 11A326)
227. —, —, — Measure-theoretic methods in rings of continuous functions // Rev. roum. math. pures et appl.— 1975.— *20*, № 8.— C. 869—872 (РЖМат, 1976, 6Б756)
228. —, —, —, *Warner S.* Rings of continuous functions with values in a topological field // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— *204*, № 4.— C. 91—112 (РЖМат, 1975, 12Б813)
229. *Baer R.* Algebraic closure of fields and rings of functions // Illinois J. Math.— 1958.— *2*, № 1.— C. 37—42 (РЖМат, 1960, 162)
230. *Baker J. W.* Uncomplemented $C(X)$ — subalgebras of $C(X)$ // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— *186*, № 12.— C. 1—15 (РЖМат, 1974, 10Б753)
231. *Banach S.* Theorie des operations lineaires.— Warsawa, 1932
232. *Banaschewski B.* Über einen Approximationssatz auf nichtkompakten Räumen // Arch. Math.— 1959.— *10*, № 1.— C. 31—33 (РЖМат, 1960, 5012)
233. — An algebraic characterization of $C^\infty(R^n)$ // Bull. Acad. polon. sci.— 1968.— *16*, № 3.— C. 169—174 (РЖМат, 1968, 9Б576)
234. — Injective sheaves of abelian groups: a counterexample // Can. J. Math. — 1980.— *32*, № 6.— C. 1518—1521 (РЖМат. 1981, 9A313)
235. — More on compact Hausdorff spaces and finitary duality // Can. J. Math.— 1984.— *36*, № 6.— C. 1113—1118 (РЖМат, 1985, 12A532)
236. —, *Nelson E.* Boolean powers as algebras of continuous functions // Rozpr. mat.— 1980.— № 179.— 55 c. (РЖМат. 1980, 11Б887)
237. *Bankston P.* On productive classes of function rings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *87*, № 1.— C. 11—14 (РЖМат, 1983, 7A274)

238. *Barbean E. J.* Two results on semi-algebras // Quart J. Math.— 1964.— *15*, № 57.— C. 69—76 (РЖМат, 1965, 4Б417)
239. — Semi-algebras that are lower semi-lattices // Pacif. J. Math.— 1966.— *18*, № 1.— C. 1—7 (РЖМат, 1967, 6Б676)
240. *Basit B.* Unconditional convergent series and subalgebras of $C_0(X)$ // Rend. Ist. mat. Univ. Trieste.— 1981.— *13*, № 1—2.— C. 1—5 (РЖМат, 1983, 2Б914)
241. *Bear H. S.* Complex function algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1959. — *90*, № 3.— C. 383—393 (РЖМат, 1960, 4244)
242. —, *Yood B.* Multiplicative functionals on semigroups of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1959.— *10*, № 5.— C. 736—741 (РЖМат, 1960, 11858)
243. *Beckenstein E., Bachman G., Narici L.* Function algebras over valued fields and measures. Nota III // Atti Acad. naz. dic. Lincei.— 1972.— *52*, № 6.— C. 840—845 (РЖМат, 1974, 1Б577)
244. —, —, — Function algebras over valued fields and measures. Nota IV // Atti Acad. naz. die Lincei.— 1972(1973)— *53*, № 5.— C. 349—358 (РЖМат, 1974, 7A475)
245. —, —, — Topological algebras of continuous functions over valued fields // Stud. math. (PRL).— 1973.— *48*, № 2.— C. 119—127 (РЖМат, 1974, 6Б737)
246. —, *Narici L.* Automatic continuity of certain linear isomorphisms // Bull. cl. Sci. Acad. roy. Belg.— 1987.— *73*, № 5.— C. 191—200 (РЖМат, 1989, 1Б1089)
247. —, —, *Suffel C.* Topological algebras.— Oxford, 1977.— 370 c.
248. *Bednarek A. R., Norris E. M.* Two semigroups of continuous relations // J. Austral. Math. Soc.— 1977.— *A23*, № 1.— C. 46—58 (РЖМат, 1978, 1A463)
249. *Behrends E.* *M*-structure and the Banach-Stone theorem // Lect. Notes Math.— 1979.— *736*.— X.— 217 c. (РЖМат, 1980, 6Б770К)
250. *Behrens E.-A.* Ringtheorie.— Mannheim e. S. B. I.— Wissenschaftsverl, 1975.— 405 c. (РЖМат, 1976, 9A269К)
251. — Topologically arithmetical rings of continuous functions // Publ. math. — 1977.— *24*, № 1—2.— C. 107—127 (РЖМат, 1978, 11Б939)
252. *Bentley H. L., Hastings M. S., Ori R. G.* Rings of uniformly continuous functions // Categorical Topology Proc. Int. Conf. Toledo. Ohio, Aug. 1—5, 1983.— Berlin, 1984.— C. 46—70 (РЖМат, 1985, 8A594)
253. —, *Taylor B. J.* Wallman rings // Pacif. J. Math.— 1975.— 58, № 1.— C. 15—35 (РЖМат, 1976, 5A492)
254. —, — On generalisations of C^*-embedding for Wallman rings // J. Austral. Math Soc.— 1978.— *A25*, № 2.— C. 215—229 (РЖМат, 1978, 12Б1255)
255. —, — The Stone-Weierstrass theorem for Wallman rings // J. Austral Math. Soc.— 1978.— *A25*, № 2.— C. 230—240 (РЖМат, 1978, 12Б1256)
256. *Bergman G. M.* Hereditary commutative rings and centres of hereditary rings // Proc. London Math. Soc.— 1971.— *23*, № 2.— C. 214—236 (РЖМат, 1972, 3A382)
257. *Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S.* Groupes et anneaux réticulés // Lect. Notes Math.— 1977.— 608.— XI.— 333 c. (РЖМат, 1978, 5A200К)
258. *Biles C. W.* Gelfand and Wallman-type compactification // Pacif. J. Math. — 1970.— *35*, № 2.— C. 267—278 (РЖМат, 1971, 9A401)
259. *Binz E.* On closed ideals in convergence function algebras // Math. Ann. — 1969.— *182*, № 3.— C. 145—153 (РЖМат, 1970, 2Б746)
260. — Notes on a characterization of function algebras // Math. Ann.— 1970. — *186*, № 1.— C. 314—326 (РЖМат, 1970, 12Б775)
261. — Convergence structures on $C(X)$ // Lect. Notes Math.— 1973.— *331*. — C. 203—210 (РЖМат, 1974, 1Б477)
262. — Continuous convergence on $C(X)$ // Lect. Notes Math.— 1975.— *469*. — IX.— 140 c. (РЖМат, 1975, 12Б768)
263. — Representations of convergence algebras as algebras of real-valued

functions // Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 17.— London — New York, 1975.— С. 81—91 (РЖМат, 1977, 2Б877)
264. —, *Butzmann H., Kutzler K.* Bemerkungen über eine Klasse von R-Algebren-topologien auf $\mathscr{E}(X)$ // Arch. Math.— 1972.— *23*, № 1.— С. 80—82 (РЖМат, 1973, 1А449)
265. —, Feldman W. A functional analytic discription of normal spaces // Can. J. Math.— 1972.— *24*, № 1.— С. 45—49 (РЖМат, 1972, 9А381)
266. —, *Kutzler K.* Über metrische Räume und $C_c(X)$ // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.— 1972.— *26*, № 1.— С. 197—233 (РЖМат, 1972, 12А405)
267. *Birtel F. T.* Uniform algebras with unbounded functions // Rice Univ. Stud.— 1968.— *54*, № 4.— С. 1—13 (РЖМат, 1970, 2Б745)
268. *Björk J. E.* Extensions of the maximal ideal space of a function algebra // Pacif. J. Math.— 1968.— *27*, № 3.— С. 453—462 (РЖМат, 1969, 11Б570)
269. *Bkouche R.* Idéaux mous d'un anneau commutatif applications aux anneaux de fonctions // C. r. Acad. sci.— 1965.— *260*, № 25.— С. 6496—6498 (РЖМат, 1966, 1А336)
270. — Pureté, mollese et paracompacité // C. r. Acad. sci.— 1970.— *270*, № 25.— С. A1653—A1655 (РЖМат, 1971, 1А324)
271. — Espaces annelés commutatifs compacts // C. r. Acad. Sci.— 1971.— *273*, № 25.— С. A1200—A1203 (РЖМат, 1972, 5А412)
272. *Blair R. L.* Direct decompositions of lattices, rings, and semigroups of continuous functions // Publs math.— 1976.— *23*, № 3—4.— С. 207—213 (РЖМат, 1977, 10А337)
273. —, *Burrill C.* Direct decompositions of lattices of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1962.— *13*, № 4.— С. 631—634 (РЖМат, 1963, 2Б300)
274. —, *Eggan L. C.* On the compactness of the structure space of a ring // Proc. Amer. Math. Soc.— 1960.— *11*, № 6.— С. 876—879 (РЖМат, 1962, 7А209)
275. *Blasco J. L.* Two questions on Wallman rings // Pacif. J. Math.— 1980.— *88*, № 1.— С. 29—33 (РЖМат, 1981, 6А497)
276. — Funciones de Baire asociadas a ciertas subalgebras de $C(X)$ // Rev. Real Acad. cienc. exact. fis. y natur. Madrid.— 1981.— *75*, № 1.— С. 241—256 (РЖМат, 1982, 2Б815)
277. — A note on enverse — closed subalgebras of $C(X)$ // Acta math. hung. — 1988.— *51*, № 1—2.— С. 47—49 (РЖМат, 1988, 10Б1037)
278. *Blefko R. L.* Structures of continuous functions. VII // Proc. Koninkl Neder. Acad. Math. Sci.— 1968.— *A71*, № 4.— С. 438—441 (РЖМат, 1969, 7Б63)
279. *Blum I. E., Swaminathan S.* A note on intersections of ideals in rings of continuous functions // Topology 4th. Colloq., Budapest, 1978, Vol. 1.— Amsterdam e. a., 1980.— С. 155—162 (РЖМат, 1981, 3А501)
280. *Bonsall F. F.* Semi-algebras of continuous functions // Proc. London Math Soc.— 1960.— *10*, № 37.— С. 122—140 (РЖМат, 1961, 1Б412)
281. — On type 2 semi-algebras of continuous functions // Proc. London Math. Soc.— 1962.— *12*, № 45.— С. 133—143 (РЖМат, 1963, 5Б405)
282. —, *Duncan J.* Complete normed algebras.— Berlin e. a.: Springer, 1973. —X.— 301 с. (РЖМат, 1974, 7Б798К)
283. *Borceux F., Van den Bossche G.* Algebra in a localic topos with applications to ring theory // Lect. Notes Math.— 1983.— *1038*.— X.— 240 с. (РЖМат, 1984, 7А261)
284. —, *Simmons H., Van den Bossche G.* A sheaf representation for modules with applications to Gelfand rings // Proc. London Math. Soc.— 1984.— *48*, № 2.— С. 230—246 (РЖМат, 1985, 1А356)
285. *Borm A. E.* On the lattice of continuous functions on a completely regular G_δ-spaces.— Doct. diss. Univ. Texas, 1965, 72 с.— Dissert. Abstrs.— 1965.— *26*, № 4.— С. 2233 (РЖМат, 1966, 9Б506Д)

286. *Bourgin D. G.* Some multiplicative functionals // Can. J. Math.— 1953.— *5*, № 2.— С. 174—178 (РЖМат, 1953, 823)
287. *Brainerd B.* F-rings of continuous functions. I // Can. J. Math.— 1959.— *11*, № 1.— С. 80—86 (РЖМат, 1962, 10Б321)
288. — On a class of Ф-algebras with zero dimensional structure spaces // Arch. Math.— 1961.— *12*, № 4.— С. 290—297 (РЖМат, 1963, 1А265)
289. — Averaging operators on ring of continuous functions on a compact space // J. Austral. Math. Soc.— 1964.— *4*, № 3.— С. 293—298 (РЖМат, 1965, 6Б438)
290. *Brookshear J. G.* Projective ideals in rings of continuous functions // Pacif. J. Math.— 1977.— *71*, № 2.— С. 313—333 (РЖМат, 1978, 4Б553)
291. — On projective prime ideals in $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978. — *69*, № 1.— С. 203—204 (РЖМат, 1979, 1А455)
292. *Broverman S.* Homomorphisms between lattices of zero-sets // Can. Math. Bull.— 1978.— *21*, № 1.— С. 1—5 (РЖМат, 1978, 11Б722)
293. — Lattices of zero-sets // J. Austral. Math. Soc.— 1978.— *A25*, № 2.— С. 189—194 (РЖМат, 1979, 1А567)
294. *Brown G.* Relatively type of semi-algebras // Quart. J. Math.— 1967.— *18*, № 72.— С. 289—291 (РЖМат, 1968, 12Б645)
295. *Brucker P.* Verbändl stetiger Funktionen und kettenwertige Homomorphismen // Math. Ann.— 1970.— *187*, № 1.— С. 77—84 (РЖМат, 1971, 1А386)
296. — Eine Charakterisierung K-kompakter topologischer Räume // Monatsh. Math.— 1971.— *75*, № 1.— С. 14—25 (РЖМат, 1971, 12А588)
297. *Bruns G.* Some remarks on lattices of functions // Arch. Math.— 1964.— *15*, № 4—5.— С. 338—340 (РЖМат, 1966, 5А306)
298. *Buchwalter H.* Fonctions continues et mesures sur un espace completement regulier // Lect. Notes Math.— 1973.— *331*.— С. 183—202 (РЖМат, 1974, 1Б618)
299. *Burckel R. B.* Characterization of $C(X)$ among its subalgebras.— New York: Marcel Dekker, 1972.— X.— 159 с. (РЖМат, 1973, 5Б762)
300. *Burgess W. D., Byrd K. A., Raphael R.* Self-injective simple Pierce sheaves // Arch. Math.— 1984.— *42*, № 4.— С. 354—361 (РЖМат, 1985, 1А360)
301. —, *Stephenson W.* Pierce sheaves of non-commutative rings // Commun. Algebra.— 1976.— *4*, № 1.— С. 51—75 (РЖМат, 1976, 12А358)
302. —, — An analogue of the Pierce sheaf for non-commutative rings // Commun. Algebra.— 1978.— *6*, № 9.— С. 863—886 (РЖМат, 1978, 12А438)
303. *Burkholder D. C.* Azumaya rings, Pierce stalks and central ideal algebras // Commun. Algebra.— 1989.— *17*, № 1.— С. 103—113 (РЖМат, 1989, 9А207)
304. *Campbell J. M.* A note on flasque sheaves // Bull. Austral. Math. Soc.— 1970.— *2*, № 2.— С. 229—232 (РЖМат, 1971, 3А361)
305. *Canfell M. J.* Uniqueness of generators of principal ideals in rings of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— *26*, № 4.— С. 571—573 (РЖМат, 1971, 11А441)
306. *Carpenter R.* Singly generated homogeneous F-algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— *150*, № 2.— С. 457—468 (РЖМат, 1971, 6Б721)
307. *Carral M.* Modules de tupe fini sur un anneau mou // C. r. Acad. Sci.— 1975.— *281*, № 4.— С. A129—A132 (РЖМат, 1976, 3А405)
308. — K-theory of Gelfand rings // J. Pure and Appl. Algebra.— 1980.— *17*, № 3.— С. 249—265 (РЖМат, 1981, 1А418)
309. *Carson A. B.* Representation of regular rings of finite index // J. Algebra.— 1976.— *39*, № 2.— С. 512—526 (РЖМат, 1976, 12А365)
310. *Cater S.* Remark on a result of Kaplansky concerning $C(X)$ // Michigan Math. J.— 1965.— *12*, № 1.— С. 97—103 (РЖМат, 1965, 10Б312)
311. *Cathelineau J.-L.* Sur les modules topologiques // J. math. pures et appl. — 1969.— *48*, № 1.— С. 13—57 (РЖМат, 1969, 12Б648)

312 *Čech E.* On bicompact spaces // Ann Math.— 1937.— *38,* № 4.— С. 823—844
313. *Cerych J.* On linear codimensions of function algebras // Комплексный анализ и прил. Докл. Междунар. конф., Варна, 5—11 май, 1985.— София, 1986.— С. 141—146 (РЖМат, 1988, 1Б1013)
314. *Chernoff P. R., Rasala R. A., Waterhouse W. C.* The Stone-Weierstrass theorem for valuable fields // Pacif. J. Math.— 1968.— *27,* № 2.— С. 233—240 (РЖМат, 1969, 8А342)
315. *Chew Kim-Peu.* Structures of continuous functions. IX. Homomorphisms of some function rings // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. math., astr., phys.— 1971.— *19,* № 6.— С. 485—489 (РЖМат, 1972, 1Б98)
316. —, *Mrówka S.* Structures of continuous functions. XI. Some type of homomorphisms of general structures of continuous functions // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. math., astr., phys.— 1971.— *19,* № 11.— С. 1023—1026 (РЖМат, 1972, 4А570)
317. *Choe T. H., Hong S. S.* The duality between lattice-ordered monoids and ordered topological spaces // Semigroup Forum.— 1984.— *29,* № 1—2.— С. 149—157 (РЖМат, 1984, 12А179)
318. *Ciampa S.* Full rings of continuous real functions // Rend. Semin. mat. Univ. Padova.— 1968.— *40.*— С. 162—180 (РЖМат, 1968, 12Б650)
319. *Cignoli R.* The lattice of global sections of sheaves of chains over Boolean spaces // Algebra univers.— 1978.— *8,* № 3.— С. 357—373 (РЖМат, 1978, 12А496)
320. *Civin P., Yood B.* Ideals in multiplicative semi-groups of continuous functions // Duke Math. J.— 1956.— *23,* № 2.— С. 325—334 (РЖМат, 1957, 2485)
321. *Cohen H. B.* A second-dual method for $C(X)$ isomorphisms // J. Funct. Anal.— 1976.— *23,* № 2.— С. 107—118 (РЖМат, 1977, 4Б620)
322. *Comer S. D.* Representations by algebras of sections over Boolean spaces // Pacif. J. Math.— 1971.— *38,* № 1.— С. 29—38 (РЖМат, 1972, 3А282)
323. — A sheaf-theoretical duality theory for cylindric algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— *169,* № 1.— С. 75—87 (РЖМат, 1973, 4А407)
324. *Comfort W. W., Hager A. W.* Estimates for the number of real-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— *150,* № 2.— С. 619—631 (РЖМат, 1971, 7А536)
325. —, *Hindman N., Negrepontis S.* F^1-spaces and their product with P-spaces // Pacif. J. Math.— 1969.— *28,* № 3.— С. 489—502 (РЖМат, 1970, 3А479)
326. — *Negrepontis S.* The ring $C(X)$ determines the category of X // Proc. Amer. Soc.— 1965.— *16,* № 5.— С. 1041—1045 (РЖМат, 1966, 12А362)
327. —, — The theory of ultrafilters.— Berlin e. a.: Springer, 1974.— X.— 482 с. (РЖМат, 1975, 6А596К)
328. *Cornish. W. H.* A sheaf representation for generalized Stone lattices // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. math., astr., phys.— 1976.— *24,* № 1.— С. 33—36 (РЖМат, 1976, 8А390)
329. — A sheaf representation of distributive pseudocomplemented lattices // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *57,* № 1.— С. 11—15 (РЖМат, 1977, 3А264)
330. — The chinese remainder theorem and sheaf representations // Fund. math.— 1977.— *96,* № 3.— С. 177—187 (РЖМат, 1978, 4А247)
331. — O-ideals, congruences and sheaf representations of distributive lattices // Rev. roum. math. pures et appl.— 1977.— *22,* № 2.— С. 1059—1067 (РЖМат, 1978, 6А323)
332. — An ordered sheaf representation of subresiduated lattices // Bull. Austral. Math. Soc.— 1980.— *22,* № 1.— С. 125—132 (РЖМат, 1981, 4А256)
333. *Correll E., Henriksen M.* On rings of bounded continuous functions with values in a division ring // Proc. Amer. Math. Soc.— 1956.— *7,* № 2.— С. 194—198 (РЖМат, 1959, 7120)

334. *Coste M.* Localisation, spectra and sheaf representation // Lect. Notes Math.— 1979.— *753.*— С. 212—238 (РЖМат, 1980, 5А255)
335. *Countryman R. S., Jr.* On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed // Pacif. J. Math.— 1967.— *20,* № 3.— С. 433—448 (РЖМат, 1968, 1А509)
336. *Császár A.* Function classes, compactifications, realcompactifications // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sec. math.— 1974 (1975).— *17.*— С. 139—156 (РЖМат, 1976, 6А487)
337. — Some problems concerning $C(X)$ // Lect. Notes Math.— 1977.— *609.*— С. 43—55 (РЖМат, 1978, 9А459)
338. — Semigroups of continuous functions // Acta sci. math.— 1983.— *45,* № 1—4.— С. 131—140 (РЖМат, 1984, 3А229)
339. — $C(X)$ determines νX // Lect. Notes Math.— 1984.— *1060.*— С. 211—216 (РЖМат, 1985, 4А545)
340. — u-isomorphic semigroups of continuous functions // Acta math. hung. — 1986.— *48,* № 1—2.— С. 213—222 (РЖМат, 1987, 5А556)
341. — u-isomorphic semigroups of continuous functions in locally compact spaces // Acta math. hung.— 1988.— *51,* № 3—4.— С. 337—340 (РЖМат, 1989, 3Б1072)
342. *Cunningham J.* Quotient sheaves and valuation rings // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— *164,* № 2.— С. 227—239 (РЖМат, 1972, 11А298)
343. *Dales H. G.* A discontinuous homomorphism from $C(X)$ // Amer. J. Math. — 1979.— *101,* № 3.— С. 647—734 (РЖМат, 1980, 1Б837)
344. — Embedding $C(X)$ in an algebra of analytic functions // Banach Cent. Publ. Vol. 8.— Warszawa, 1982.— С. 231—236 (РЖМат, 1983, 4Б936)
345. —, *Loy R. J.* Prime ideals in algebras of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *98,* № 3.— С. 426—430 (РЖМат, 1987, 7Б939)
346. *Dashiell F., Hager A., Henriksen M.* Order-Cauchy completions of rings and vector lattices of continuous functions // Can. J. Math.— 1980.— *32,* № 3.— С. 657—685 (РЖМат, 1981, 3А502)
347. *Dauns J., Hofmann K. H.* The representation of biregular rings by sheaves // Math. Z.— 1966.— *91,* № 2.— С. 103—123 (РЖМат, 1966, 6А210)
348. —, — Representation of rings by sections // Mem. Amer. Math. Soc.— 1968.— *83.*— 180 с. (РЖМат, 1970, 7А257)
349. *Day B. J.* An extension of Pontryagin duality // Bull. Austral. Math. Soc.— 1978.— *19,* № 3.— С. 445—456 (РЖМат, 1980, 1А559)
350. — Gelfand dualities over topological fields // J. Austral. Math. Soc.— 1982.— *A32,* № 2.— С. 171—177 (РЖМат, 1982, 9Б760)
351. *Deckard D., Pearcy C.* On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space // Proc. Amer. Math. Soc.— 1963.— *14,* № 2.— С. 322—328 (РЖМат, 1964, 5Б470)
352. —, — On algebraic closure in function algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964.— *15,* № 2.— С. 259—263 (РЖМат, 1964, 11Б410)
353. —, — On continuous matrix-valued functions on a Stonian space // Pacif. J. Math.— 1964.— *14,* № 3.— С. 857—869 (РЖМат, 1965, 12Б465)
354. *Delfosse J.-P.* Caractérisations d'anneaux de fonctions continues // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. I.— 1975.— *89,* № 3.— С. 364—368 (РЖМат, 1976, 2Б747)
355. *De Marco G.* On the countably generated z-ideals of $C(X)$ // Proc. Amer. Math.— 1972.— *31,* № 2.— С. 574—576 (РЖМат, 1972, 11А368)
356. — A characterization of $C(X)$ for X strongly paracompact (or paracompact) // Symp. math. Ist. naz. alta. mat. vol. 21.— 1977.— С. 547—554 (РЖМат, 1978, 5А465)
357. — Projectivity of pure ideals // Rend. Semin. mat. Univ. Padova.— 1983. — *69.*— С. 289—304 (РЖМат, 1984, 1А387)
358. —, *Orsatti A.* Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *30,* № 3.— С. 459—466 (РЖМат, 1973, 10А329)

359. —, — Real places on $C(X)$ // Symp. mat. Ist. naz. alta mat. Vol. 8.— London—New York, 1972.— С. 387—392 (РЖМат, 1972, 9А327)
360. —, *Richter M.* Rings of continuous functions with values in a non-archimedean ordered field // Rend. Semin. math. Univ. Padova.— 1971.— *45*.— С. 327—336 (РЖМат, 1972, 3А317)
361. —, *Wilson R. G.* Rings of continuous functions with values in an archimedean ordered field // Rend. Semin. math. Univ. Padova.— 1970.— *44*. — С. 263—272 (РЖМат, 1971, 11Б860)
362. —, — Realcompactness and partitions of unity // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *30*, № 1.— С. 189—194 (РЖМат, 1973, 11А438)
363. *DeZur R. S.* Point-determining homomorphisms on multiplicative semigroups of continuous functions // Pacif. J. Math.— 1966.— *18*, № 2.— С. 227—236 (РЖМат, 1968, 10Б652)
364. *Dickerson C., Moore M.* A characterization of Boolean spaces // Bull. Austral. Math. Soc.— 1975.— *12*, № 1.— С. 89—93 (РЖМат, 1975, 11А509)
365. *Diers Y.* Categories of Boolean sheaves of simple algebras // Lect. Notes Math.— 1986.— *1187*.— VI.— 168с. (РЖМат, 1987, 1А327)
366. *Dietrich W. E., Jr.* A note on the ideal structure of $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *23*, № 1.— С. 174—178 (РЖМат, 1970, 7А451)
367. — The maximal ideals space of the topological algebras $C(X, E)$ // Math. Ann.— 1969.— *183*, № 3.— С. 201—212 (РЖМат, 1970, 7Б686)
368. — On the ideal structure of $C(X)$ // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— *152*, № 1.— С. 61—77 (РЖМат, 1971, 10А264)
369. — Prime ideals in uniform algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1974.— *42*, № 1.— С. 171—174 (РЖМат, 1974, 11А472)
370. — Ideals in subalgebras of $C(X)$ // Fund. math.— 1975.— *86*, № 3.— С. 207—219 (РЖМат, 1975, 9Б739)
371. *Dobbs D. E.* On characterizing injective sheaves // Can. J. Math.— 1977. — *29*, № 5.— С. 1031—1039 (РЖМат, 1978, 4А309)
372. — On characterizing injective sheaves: corrigendum // Can. J. Math.— 1980.— *32*, № 6.— С. 1522 (РЖМат, 1981, 9А314)
373. *Doctor H. P.* The categories of Boolean lattices, Boolean rings and Boolean spaces // Can. Math. Bull.— 1964.— *7*, № 2.— С. 245—252 (РЖМат, 1965, 4А240)
374. *Domiaty R. Z.* Isomorphic monoids and homeomorphic spaces // Glas. mat.— 1977.— *12*, № 2.— С. 237—242 (РЖМат, 1978, 11А514)
375. *Dominguez J. M.* The Gelfand subalgebra of real or nonarchimedean valued continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *90*, № 1.— С. 145—148 (РЖМат, 1985, 5Б903)
376. — Nonarchimedean $C^*(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *97*, № 3. — С. 525—530 (РЖМат, 1987, 2А330)
377. *Donald G.* Local concentedness and pseudocompactness in completely regular spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978.— *68*, № 1.— С. 117—120 (РЖМат, 1978, 10Б688)
378. *Donohue D. J.* The equivalence of certain algebraic systems of functions // Dissert Abstrs.— 1963.— *23*, № 8.— С. 2923—2924 (РЖМат, 1965, 7Б431Д)
379. *Doran R. S., Wichmann J.* The Gelfand-Naimark theorems for C^*-algebras // Enseign. math.— 1977.— *23*, № 3—4.— С. 153—180 (РЖМат, 1978, 8Б742)
380. *Douglas R. G.* On lattices and algebras of real valued functions // Amer. Math. Mon.— 1965.— *72*, № 6.— С. 642—643 (РЖМат, 1966, 5Б417)
381. *Douwen E. K. van, Mill J. van.* Subspaces of basically disconnected spaces or quotients of countably complete Boolean algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1980.— *259*, № 1.— С. 121—127 (РЖМат, 1981, 1А536)
382. *Dow A.* F-spaces and F^1-spaces // Pacif. J. Math.— 1983.— *108*, № 2.— С. 275—284 (РЖМат, 1984, 5А539)

383. *Dowker C. H.* Isomorphism of categories // J. Pure and Appl. Algebra.— 1983.— *27*, № 2.— С. 205—206 (РЖМат, 1983, 9А274)
384. —, *Strauss D.* Products and sums in the category of frames // Lect. Notes Math.— 1976.— *540*.— С. 208—219 (РЖМат, 1977, 2А556)
385. *Dube K. K., Sengar R. K.* Homeomorphism between semi-T_D spaces // Мат. весн.— 1980.— *4*, № 4.— С. 425—429 (РЖМат, 1983, 4А547)
386. *Dubois D. W.* A note on David Harrison's theory of preprimes // Pacif. J. Math.— 1967.— *21*, № 1.— С. 15—19 (РЖМат, 1968, 3А275)
387. — Second note on David Harrison's theory of preprimes // Pacif. J. Math.— 1968.— *24*, № 1.— С. 57—68 (РЖМат, 1968, 12А224)
388. *Dydak J., Walsh J.* Sheaves with finitely generated isomorphic stalks and homology manifolds // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *103*, № 2.— С. 655—660 (РЖМат, 1989, 4А494)
389. *Engelking R., Mrówka S.* On E-compact spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. math., astr., phys.— 1958.— *6*, № 7.— С. 429—436 (РЖМат, 1959, 10917)
390. *England J. W., Lamier L. H., Jr.* Transformation groups of automorphisms of $C(X)$ // Illinois J. Math.— 1968.— *12*, № 3.— С. 397—402 (РЖМат, 1969, 12А566)
391. *Erdös P., Gillman L., Henriksen M.* An isomorphism theorem for real-closed fields // Ann. Math.— 1955.— *61*, № 3.— С. 542—554 (РЖМат, 1956, 6442)
392. *Esterle J.* Semi-normes sur $\mathscr{E}(K)$ // Proc. London Math. Soc.— 1978.— *36*, № 1.— С. 27—45 (РЖМат, 1978, 9Б649)
393. *Feldman W. A.* A characterization of the topology of compact convergence on $C(X)$ // Pacif. J. Math.— 1974.— *51*, № 1.— С. 109—119 (РЖМат, 1975, 3Б615)
394. —, *Kong T. J.* Algebraically defined topologies for function spaces // J. London Math. Soc.— 1976.— *13*, № 3.— С. 557—563 (РЖМат, 1977, 4А502)
395. —, *Porter J. F.* A vector lattice topology and function space representation // Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— *235*.— С. 193—204 (РЖМат, 1978, 10Б683)
396. *Fernandez B. E.* K-algebras y algebras de funciones continuas // Actas prim. jorn. mat. luso-esp. Publes Inst. Jorge Juan mat.— Madrid, 1973.— С. 41—43 (РЖМат, 1974, 4А293)
397. *Fine N. J.* Tensor products of function rings under composition // Pacif. J. Math.— 1977.— *68*, № 1.— С. 63—72 (РЖМат, 1978, 2Б612)
398. —, *Gillman L., Lambek J.* Rings of quotients of rings of functions.— Montreal, 1965
399. *Finney R. L., Rotman J.* Paracompactive of locally bicompact Hausdorff spaces // Michigan Math. J.— 1970.— *17*, № 4.— С. 359—361 (РЖМат, 1971, 7А513)
400. *Flachsmeyer J.* Bemerkungen über die Banach-Algebra der stetigen, beschränkten Funktionen eines vollständig regulären Raumes // Arch. Math. — 1961.— *12*, № 5.— С. 366—369 (РЖМат, 1963, 4Б365)
401. *Fourneau R.* Isomorphisms of lattices of closed convex sets. II. // J. Math. Anal. and Appl.— 1977.— *61*, № 2.— С. 382—388 (РЖМат, 1978, 10Б716)
402. — Idéaux des lattis $C(X)$ et $C^*(X)$ // Bull. Soc. roy. Sci. Liége.— 1982.— *51*, № 5—8.— С. 167—169 (РЖМат, 1983, 5Б654)
403. *Fraga R. J., Park Y. L.* On hyper-real rings of quotients // Mathematica (RSR).— 1980.— *22*, № 2.— С. 269—271 (РЖМат, 1982, 5А353)
404. *Frölicher A.* Sur l'anneau des fonctions continues d'un espace á génération compacte // C. r. Acad. sci.— 1972.— *A275*, № 1.— С. 25—27 (РЖМат, 1973, 1А450)
405. *Fujiwara K.* Sur les anneax des fonctions continues á support compact // Math. J. Okayama Univ.— 1954.— *3*, № 2.— С. 175—184 (РЖМат, 1956, 1477)
406. — Notes sur les demi-groupes topologi ques fonctions continues. II //

Math. J. Okayama Univ.— 1957.— *7,* № 2.— С. 185—189 (РЖМат, 1960, 1865)
407. *Gamelin T. W., Wilken D. R.* Closed partitions of maximal ideal spaces // Illinois J. Math.— 1969.— *13,* № 4.— С. 789—795 (РЖМат, 1970, 6Б688)
408. *Georgescu G.* Some sheaf constructions for distributive lattices // Bull. Math. Soc. Sci. math. RSR.— 1988.— *32,* № 4.— С. 299—303 (РЖМат, 1990, 10А223)
409. —, *Voiculescu I.* Representations of normal algebras // Lucr. conf. algebra Timisoara. 4—7 iun., 1986.— Timisoara, 1987.— С. 45—46 (РЖМат, 1989, 1А245)
410. *Gerstenhaber M.* On canonical constructions. I // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1955.— *41,* № 4.— С. 233—236 (РЖМат, 1956, 3718)
411. — On canonical constructions. II // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1956.— *42,* № 11.— С. 881—883 (РЖМат, 1958, 6503)
412. — On canonical constructions. III // Proc. Amer. Math. Soc.— 1956.— *7,* № 4.— С. 543—550 (РЖМат, 1958, 6504)
413. — On canonical constructions. IV // Proc. Amer. Math. Soc.— 1957.— *8,* № 4.— С. 745—749 (РЖМат, 1960, 154)
414. *Gierz G., Keimel K.* Topologische Darstellung von Verbänden // Math. Z. — 1976.— *150,* № 1.— С. 83—99 (РЖМат, 1977, 4А317)
415. *Gillman L.* Rings with Hausdorff structure space // Fund. Math.— 1957. — *45,* № 1.— С. 11—16 (РЖМат, 1959, 3591)
416. — A *P*-space and an extremally disconnected space whose product is not an *F*-space // Arch. Math.— 1960.— *11,* № 1.— С. 53—55 (РЖМат, 1961, 9Б425)
417. — Countably generated ideals in rings of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1960.— *11,* № 4.— С. 660—666 (РЖМат, 1962, 5Б485)
418. — A note on *F*-spaces // Arch. Math.— 1961.— *12,* № 1.— С. 67—68 (РЖМат, 1962, 5А304)
419. — Rings of continuous functions // Trans. N. Y. Acad. Sci.— 1964.— *27,* № 1.— С. 5—6 (РЖМат, 1965, 9Б393)
420. — Ideals in rings of functions // Trans. N. Y. Acad. Sci.— 1967.— *29,* № 6.— С. 684—685 (РЖМат, 1968, 9Б564)
421. — Rings of continuous functions // Symp. math. Ist. naz. alta mat. vol. 17.— London—New York, 1975.— С. 93—96 (РЖМат, 1977, 2Б887)
422. —, *Henriksen M.* Concerning rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1954.— *77,* № 2.— С. 340—362 (РЖМат, 1956, 3929)
423. —, — Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc.— 1956.— *82,* № 2.— С. 366—391 (РЖМат, 1958, 2802)
424. —, —, *Jerison M.* On a theory of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1954.— *5,* № 3.— С. 447—455 (РЖМат, 1955, 4546)
425. —, *Jerison M.* Rings of continuous functions.— Prenston: Van Nostrand, 1960.— 300 с. (РЖМат, 1963, 4Б366К)
426. —, — Quotient fields of residue class rings of function rings // Illinois J. Math.— 1960.— *4,* № 3.— С. 425—436 (РЖМат, 1963, 3Б386)
427. —, *Kohls C.* Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions // Math. Z.— 1960.— *72,* № 5.— С. 399—409 (РЖМат, 1960, 10561)
428. *Giuli E.* Un teorema di Stoun-Weierstrass per i fasci // Boll. Unione mat. ital.— 1977.— *14A,* № 2.— С. 351—354 (РЖМат, 1978, 3А330)
429. *Glaeser G.* Algèbres et sous-algébres de fonctions différentiables // An. Acad. brasil. ciênc.— 1965.— *37,* № 3—4.— С. 395—406 (РЖМат, 1967, 9Б455)
430. *Gleason A. M.* Finitely generated ideals in Banach algebras // J. Math. and Mech.— 1964.— *13,* № 1.— С. 125—132 (РЖМат, 1964, 12Б432)

431. *Glicksberg I.* Some remarks on ideals in function algebras // Isr. J. Math. — 1970.— *8,* № 4.— С. 413—418 (РЖМат, 1971, 5Б830)
432. *Gluskin L. M., Schein B. M., Sneperman L. B., Yaroker I. S.* Addendum to «A survey of semigroups of continuous selfmaps» // Semigroup Forum.— 1977.— *14,* № 2.— С. 95—123 (РЖМат, 1978, 5А152)
433. *Golan J. S.* Localization of noncommutative rings.— New York: Marcel Dekker, 1975.— 346 с. (РЖМат, 1975, 9А217К)
434. — Structure Sheaves over a Noncommutative Ring // Lect. Notes in Pure and Appl. Math., 56.— Marcel Dekker, 1980
435. — Two sheaf constructions for noncommutative rings // Houston J. Math. — 1980.— *6,* № 1.— С. 59—66 (РЖМат, 1981, 2А256)
436. — A note on Lambek's representation sheaf // Math. Rept. Acad. Sci. Can.— 1980.— *2,* № 2.— С. 79—82 (РЖМат, 1981, 11А232)
437. — *Raynaud J., Van Oystaeyen F.* Sheaves over the spectra of certain noncommutative rings // Commun. Algebra.— 1976.— *4,* № 5.— С. 491—502 (РЖМат, 1977, 2А323)
438. *Goldhaber J. K., Wolk E. S.* Maximal ideals in rings of bounded continuous functions // Duke. Math. J.— 1954.— *21,* № 3.— С. 565—569 (РЖМат, 1955, 5141)
439. *Goldston B., Mewborn A. C.* A structure sheaf for a noncommutative noetherian ring // Bull. Amer. Math. Soc.— 1975.— *81,* № 5.— С. 944—946 (РЖМат, 1976, 7А321)
440. —, — A structure sheaf for a noncommutative noetherian ring // J. Algebra.— 1977.— *47,* № 1.— С. 18—28 (РЖМат, 1978, 2А209)
441. *Goodearl K. R.* Local isomorphisms of algebras of continuous functions // J. London Math. Soc.— 1977.— *16,* № 2.— С. 348—356 (РЖМат, 1979, 3Б677)
442. *Gordon H.* Rings of functions determined by zero-sets // Pacif. J. Math.— 1971.— *36,* № 1.— С. 133—157 (РЖМат, 1971, 11А440)
443. *Govaerts W.* Structures of continuous functions representation of homomorphisms // Simon Stevin.— 1974—1975.— *48,* № 3—4.— С. 121—132 (РЖМат, 1976, 1А350)
444. — A separation axiom for the study of function space structures // Bull. Acad. Pol. Sci.— 1976.— *24,* № 1.— С. 65—69 (РЖМат, 1976, 9А436)
445. — The class of compact* spaces is productive and closed hereditary // Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— *66,* № 1.— С. 167—168 (РЖМат, 1978, 9А444)
446. — General spaces of continuous functions // Bull. Soc. math. Belg.— 1977. — *29B,* № 1-2.— С. 45—55 (РЖМат, 1978, 10Б749)
447. — *E*-compactness and continuous function spaces // Acta Math. Acad. Sci. Hungar.— 1978.— *32,* № 3-4.— С. 235—242 (РЖМат, 1979, 7А529)
448. *Gray J. W.* Fragments of the history of sheaf theory // Lect. Notes Math. — 1979.— *753.*— С. 1—79 (РЖМат, 1980, 6А436)
449. *Grothendieck A., Dieudonné J.* Elements de Géométrie Algébrique I.— I. H. E. S., Publ. Math. 4.— Paris, 1960
450. *Grove K., Pedersen G. K.* Diagonalizing matrices over $C(X)$ // J. Funct. Anal.— 1984.— *59,* № 1.— С. 65—89 (РЖМат, 1985, 7Б951)
451. *Grzesiak M.* Real function algebras and their sets of antisymmetry // Glas. mat.— 1989.— *24,* № 2-3.— С. 297—304 (РЖМат, 1991, 4Б870)
452. *Guazzone S.* Alcuni controesempi per la teoria degli spazi spettrali // Ric. mat.— 1971.— *20,* № 1.— С. 28—33 (РЖМат, 1972, 3А371)
453. *Hager A. W.* Some remarks on the tenzor product of function rings // Math. Z.— 1966.— *92,* № 3.— С. 210—224 (РЖМат, 1966, 12А377)
454. — On the maximal ring of quotients $C(X)$ // Bull. Amer. Math. Soc.— 1966.— *72,* № 5.— С. 850—852 (РЖМат, 1967, 6А265)
455. — On inverse-closed subalgebras of $C(X)$ // Proc. London Math. Soc.— 1969.— *19,* № 2.— С. 233—257 (РЖМат, 1969, 12А567)
456. — Approximation of real continuous functions on Lindelöf spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *22,* № 1.— С. 156—163 (РЖМат, 1970, 1А430)

457. — Isomorphism with a $C(Y)$ of the maximal ring of quotients of $C(X)$ // Fund. Math.— 1969.— *66*, № 1.— С. 7—13 (РЖМат, 1970, 9А327)
458. —, *Johnson D. G.* A note on certain subalgebras of $C(X)$ // Can. J. Math. — 1968.— *20*, № 2.— С. 389—393 (РЖМат, 1968, 12А393)
459. *Halmos P. R. Algebraic logic. I.* Monadic Boolean algebras // Compositio math.— 1955.— *12*, № 3.— С. 217—249 (РЖМат, 1959, 6555)
460. *Hansard J. D.* Function space topologies // Pacif. J. Math.— 1970.— *35*, № 2.— С. 381—388 (РЖМат, 1971, 7А539)
461. *Hansoul G., Vrancken-Mawet L.* Orded sheaves and priestley decompositions of distributive lattices // Bull. Soc. roy. sci. Liège.— 1986.— *55*, № 2.— С. 291—302 (РЖМат, 1986, 11А348)
462. *Hasumi M.* The extension property of complex Banach spaces // Tohoku Math. J.— 1958.— *10*, № 2.— С. 135—142 (РЖМат, 1960, 11832)
463. *Hatori Osamu.* Range transformations on a Banach function algebra. II // Pacif. J. Math.— 1989.— *138*, № 1.— С. 89—119 (РЖМат, 1990, 8Б956)
464. *Hatvany C.* Sectional representations of rings // Lucr. coloc. nat. geom. si topol., Busteni, 27—30 iun., 1981.— Bucuresti, 1983.— С. 145—159 (РЖМат, 1983, 10А222)
465. *Hausner A.* Ideals in a certain Banach algebra // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957.— *8*, № 2.— С. 246—249 (РЖМат, 1958, 3900)
466. *Hegde S.* A characterization of z-separating algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *73*, № 1.— С. 40—44 (РЖМат, 1979, 9А472)
467. *Heider L. J.* Directed limits on rings of continuous functions // Duke Math. J.— 1956.— *23*, № 2.— С. 293—296 (РЖМат, 1958, 1345)
468. — A characterization of function lattices // Duke Math. J.— 1956.— *23*, № 2.— С. 297—301 (РЖМат, 1960, 9162)
469. — Prime dual ideals in Boolean algebras // Can. J. Math.— 1959.— *11*, № 3.— С. 397—408 (РЖМат, 1960, 10089)
470. *Heindorf L.* Continuous functions on countable ordinals // Z. math. Log. und Grundl. Math.— 1984.— *30*, № 4.— С. 339—340 (РЖМат, 1985, 5А91)
471. *Helson H., Quigley F.* Maximal algebras of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1957.— *8*, № 1.— С. 111—114 (РЖМат, 1958, 3899)
472. *Henriksen M.* On the prime ideals of the ring of entire functions // Pacif. J. Math.— 1953.— *3*, № 4.— С. 711—720 (РЖМат, 1954, 5073)
473. — On the equivalence of the ring, lattice, and semigroup of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1956.— *7*, № 6.— С. 959—960 (РЖМат, 1960, 5512)
474. — On minimal completely regular spaces associated with a given ring of continuous functions // Michigan Math. J.— 1957.— *4*, № 1.— С. 61—64 (РЖМат, 1958, 3071)
475. — Uniformly closed ideals of uniformly closed algebras of extended real-valued functions // Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 17.— London — New York, 1975.— С. 49—53 (РЖМат, 1977, 2Б879)
476. —, *Isbell J.* On the continuity the real roots of algebraic equation // Proc. Amer. Math. Soc.— 1953.— *4*, № 3.— С. 431—434 (РЖМат, 1954, 4740)
477. —, — Lattice-ordered rings and function rings // Pacif. J. Math.— 1962. — *12*, № 2.— С. 533—565 (РЖМат, 1963, 10А233)
478. —, —, *Johnson D.* Residue class fields of lattice-ordered algebras // Fund. Math.— 1961.— *50*, № 2.— С. 107—117 (РЖМат, 1963, 6Б422)
479. —, *Jerison M.* The space of minimal prime ideals of a commutative ring // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— *115*, № 3.— С. 110—130 (РЖМат, 1966, 12А376)
480. —, *Johnson D.* On the structure of a class of archimedean lattice-ordered algebras // Fund. Math.— 1961.— *50*, № 1.— С. 73—94 (РЖМат, 1963, 3Б421)
481. —, *Smith F. A.* Sums of z-ideals and semiprime ideals // Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra. 5.— Berlin, 1983.— С. 272—278 (РЖМат, 1983, 10А201)

482. *Henson C. W., Jockusch C. G., Jr., Rubel L. A., Takeuti G.* First order topology // Rozpr. mat.— 1977.— *143*.— 44 с. (РЖМат, 1978, 1А449)
483. *Herrlich H.* F-kompakte Räume // Math. Z.— 1967.— *96*, № 2.— С. 228—255 (РЖМат, 1968, 9А340)
484. *Hery W.* Maximal ideals in algebras of continuous $C(S)$ valued functions // Atti Acad. naz. Lincei Rend.— 1975.— *58*, № 2.— С. 195—199 (РЖМат, 1977, 1Б824)
485. — Maximal ideals in algebras of topological algebra valued functions // Pacif. J. Math.— 1976.— *65*, № 2.— С. 365—373 (РЖМат, 1977, 6Б708)
486. *Hewitt E.* Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem // Duke Math. J.— 1947.— *14*.— С. 419—427
487. — Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc.— 1948.— *64*, № 1.— С. 45—99
488. — Linear functionals on spaces of continuous functions // Fund. Math.— 1950.— *37*.— С. 161—189
489. *Hinrichs L. A.* Open ideals in $C(X)$ // Pacif. J. Math.— 1964.— *14*, № 4. — С. 1255—1263 (РЖМат, 1966, 9Б502)
490. — The existence of topologies on field extensions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1964.— *113*, № 3.— С. 397—405 (РЖМат, 1966, 10Б550)
491. *Hirschfeld R. A.* Function rings on Tyhonov spaces // Bull. Soc. Math. Belg.— 1973.— *25*, № 4.— С. 334—338 (РЖМат, 1975, 4А541)
492. *Hochster M.* Rings of continuous functions and totally integrally closed rings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— *25*, № 2.— С. 439—442 (РЖМат, 1971, 10А210)
493. — The minimal prime spectrum of a commutative ring // Can. J. Math.— 1971.— *23*, № 5.— С. 749—758 (РЖМат, 1972, 6А407)
494. *Hoffman K., Singer I. M.* Maximal subalgebras of continuous functions // Acta Math.— 1960.— *103*, № 3-4.— С. 217—241 (РЖМат, 1963, 4Б364)
495. —, *Wermer J.* A characterization of $C(X)$ // Pacif. J. Math.— 1962.— *12*, № 3.— С. 941—944 (РЖМат, 1963, 12Б460)
496. *Hofmann K. H.* Gelfand-Naimark theorems for non-commutative topological rings // Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra. 2.— Prague, 1967.— С. 184—189 (РЖМат, 1968, 8Б616)
497. — Reprentations of algebras by continuous sections // Bull. Amer. Math. Soc.— 1972.— *78*, № 3.— С. 291—373 (РЖМат, 1973, 1А244)
498. — Some bibliographical remarks of «Pepresentations of algebras by continuous sections» // Mem. Amer. Math. Soc.— 1974.— *148*.— С. 177—182
499. —, *Wright F.* The automorphism group of certain function rings // Arch. Math.— 1961.— *12*, № 6.— С. 420—424 (РЖМат, 1963, 1А267)
500. *Holladay J. C.* A note on the Stone-Weierstrass theorem for quaternions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1957.— *8*, № 4.— С. 656—657 (РЖМат, 1958, 3902)
501. *Holme A.* A generalization of the $C(X)$-characterization of topological spaces // Math. Scand.— 1965.— *15*, № 2.— С. 156—162 (РЖМат, 1966, 8Б480)
502. *Horne J. G., Jr.* On O_ω-ideals in $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1958. — *9*, № 4.— С. 511—518 (РЖМат, 1960, 8693)
503. — Or primary ideals in $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1959.— *10*, № 1.— С. 158—163 (РЖМат, 1961, 2Б376)
504. — Some multiplicative aspects of ideal structure theory // Fund. Math.— 1959.— *48*, № 1.— С. 27—55 (РЖМат, 1962, 7А208)
505. *Hsu Pao-Sheng.* An application of compactifications: some theorems on maximal ideals // Ann. mat. pura ed appl.— 1977.— *112*.— С. 107—118 (РЖМат, 1977, 10А336)
506. *Hu S. T.* Homology groups of a ring // Bull. Calcutta Math. Soc.— 1950. — *42*.— С. 123—130

507. *Hu Tah-Kai.* Stone duality for primal algebra theory // Math. Z.— 1969. — *110,* № 3.— С. 180—198 (РЖМат, 1970, 3А366)
508. *Huijsmans C., Pagter B.* Ideal theory in *f*-algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1982.— *259,* № 1.— С. 225—245 (РЖМат, 1982, 7Б846)
509. *Hušok M.* On a problem of H. Herrlich // Comment. math. Univ. Carolinae.— 1968.— *9,* № 4.— С. 571—572 (РЖМат, 1966, 12А555)
510. *Isbell J.* More on the continuity of the real roots of an algebraic equation // Proc. Amer. Math. Soc.— 1954.— *5,* № 3.— С. 439 (РЖМат, 1956, 2775)
511. — Zero-dimensional spaces // Tohoky Math. J.— 1955.— *7,* № 1-2.— С. 1—8 (РЖМат, 1956, 7227)
512. — Algebras of uniformly continuous functions // Ann. Math.— 1958.— *68,* № 1.— С. 96—125 (РЖМат, 1962, 3А295)
513. — Generating the algebraic theory of $C(X)$ // Algebra univers.— 1982.— *15,* № 2.— С. 153—155 (РЖМат, 1983, 11А346)
514. *Isiwata Takesi.* Structures of a uniform space X and $C(X)$ // Sci. Repts Tokyo, Kyoiku Daigaku.— 1956.— *A5,* № 5.— С. 174—184 (РЖМат, 1959, 10158)
515. — On the ring of all bounded continuous functions // Sci. Repts Tokyo, Kyoiku Daigaku.— 1957.— *A5.*— С. 293—294 (РЖМат, 1959, 6002)
516. — Some properties of *F*-spaces // Proc. Japan. Acad.— 1959.— *35,* № 2. — С. 71—76 (РЖМат, 1961, 3А324)
517. — On locally *Q*-complete spaces. II // Proc. Japan. Acad.— 1959.— *35,* № 6.— С. 263—267 (РЖМат, 1960, 8724)
518. — On ring homomorphisms of a ring of continuous functions // Proc. Japan. Acad.— 1959.— *35,* № 6.— С. 268—272 (РЖМат, 1962, 2Б436)
519. — On ring homomorphisms of a ring of continuous functions. II // Proc. Japan. Acad.— 1959.— *35,* № 7.— С. 335—339 (РЖМат, 1962, 6Б465)
520. *Jarosz K.* Small isomorphisms of $C(X, E)$ // Pacif. J. Math.— 1989.— *138,* № 2.— С. 295—315 (РЖМат, 1990, 1Б705)
521. *Jayne J. E., Pellett F.* Anneaux de fonctions de Baire // C. r. Acad. sci. — 1983.— *296,* № 6.— С. 311—314 (РЖМат, 1983, 9А504)
522. *Jenkins T., McKnight J.* Coherence classes of ideals in rings of continuous functions // Indag. math.— 1962.— *24,* № 3.— С. 299—306 (РЖМат, 1963, 3Б385)
523. *Perison M.* Sur l'anneau des germes des fonctions continues // C. r. Acad. sci.— 1965.— *260,* № 25.— С. 6507—6509 (РЖМат, 1965, 12Б502)
524. *Johnson D. G., Kist J. E.* Complemented ideals and extremally disconnected spaces // Arch. Math.— 1961.— *12.* № 5.— С. 349—354 (РЖМат, 1963, 4Б392)
525. —, *Mandelker M.* Functions with pseudocompact support // Gen. Topol. and Appl.— 1973.— *3,* № 4.— С. 331—338 (РЖМат, 1974, 9А541)
526. *Johnson K. G.* Algebras of Riemann integrable functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1962.— *13,* № 3.— С. 434—441 (РЖМат, 1963, 3Б387)
527. *Kakutani S.* Rings of analytic functions // Lect. Funct. Complex Variable. Ann. Arbor. Univ. Michigan Press.— 1955.— С. 71—83 (РЖМат, 1957, 6282)
528. *Kaplansky I.* Topological rings // Amer. J. Math.— 1947.— *69.*— С. 153—183
529. — Lattices of continuous functions. I // Bull. Amer. Math. Soc.— 1947.— *53,* № 6.— С. 617—623
530. — Lattices of continuous functions. II // Amer. J. Math.— 1948.— *70,* № 3.— С. 626—634
531. — Rings of operators.— New York: Benjamin, 1968.— VI.— 151 с. (РЖМат, 1970, 7Б691)
532. *Karamzadeh O. A. S., Rostami M.* On the intrinsic topology and some related ideals of $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1985.— *93,* № 1.— С. 179—184 (РЖМат, 1986, 5А629)
533. *Karrer G.,* Mühlethaler R. Reelle Funktionenringe // Lect. Notes Math.— 1974.— *419.*— С. 232—236 (РЖМат, 1975, 5Б739)

534. *Keesling J., Nanzetta P.* On certain ideals of $C(X)$ // Duke Math. J.— 1971.— *38,* № 2.— С. 259—263 (РЖМат, 1972, 1А787)
535. *Keimel K.* Représentation d'anneaux réticulés dans des faisceaux // C. r. Acad. sci.— 1968.— *266,* № 3.— С. А124—А127 (РЖМат, 1969, 6А241)
536. — The representation of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves // Lect. Notes Math.— 1971.— *248.*— С. 1—98 (РЖМат, 1972, 4А289)
537. —, *Werner H.* Stone duality for varieties generated by quasi-primal algebras // Mem. Amer. Math. Soc.— 1974.— *148.*— С. 59—85
538. *Kennison J. F.* Integral domain type representations in sheaves and other topoi // Math. Z.— 1976.— *151,* № 1.— С. 35—56 (РЖМат, 1977, 5А196)
539. —, *Ledbetter C. S.* Sheaf representations and the Dedekind reals // Lect. Notes Math.— 1979.— *753.*— С. 500—513 (РЖМат, 1980, 5А282)
540. *Kent D., McKennon K., Richardson G., Schroder M.* Continuous convergence in $C(X)$ // Pacif. J. Math.— 1974.— *52,* № 2.— С. 457—465 (РЖМат, 1975, 5А505)
541. *Kim Sun Hae.* On the strongly harmonic algebras // Rev. roum. math. pures et appl.— 1978.— *23,* № 10.— С. 1553—1575 (РЖМат, 1979, 8А254)
542. *Kirk R. B.* Algebras of bounded real-valued functions. I // Proc. Kon. ned. akad. wetensch.— 1972.— *A75,* № 5.— С. 443—451 (РЖМат, 1973, 5Б760)
543. *Koh K.* On functional representations of a ring without nilpotent elements // Can. Math. Bull.— 1971.— *14,* № 3.— С. 349—352 (РЖМат, 1972, 3А224)
544. — On a representation of a strongly harmonic ring by sheaves // Pacif. J. Math.— 1972.— *41,* № 2.— С. 459—468 (РЖМат, 1973, 2А248)
545. —, *Luh J.* Maximal regular right ideal space of primitive ring // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— *170,* № 8.— С. 269—277 ((РЖМат, 1973, 6А283)
546. *Kohls C. W.* The space of prime ideals of a ring // Fund. Math.— 1957. — *45,* № 1.— С. 17—27 (РЖМат, 1959, 3592)
547. — Ideals in rings of continuous functions // Fund. Math.— 1958.— *45,* № 1.— С. 28—50 (РЖМат, 1961, 10А278)
548. — Prime ideals in rigns of continuous functions // Illinois J. Math.— 1958.— *2,* № 4А.— С. 505—536 (РЖМат, 1961, 10А277)
549. — Prime ideals in rings of continuous functions. II // Duke Math. J.— 1958. — *25,* № 3.— С. 447—458 (РЖМат, 1962, 4Б323)
550. — Hereditary properties of some special spaces // Arch. Math.— 1961.— *12,* № 2.— С. 129—133 (РЖМат, 1962, 5Б486)
551. — A note on countably generated ideals in rings of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1961.— *12,* № 5.— С. 744—749 (РЖМат, 1963, 7Б368)
552. — A representation theorem for transformations of rings of continuous functions // Illinois J. Math.— 1962.— *6,* № 4.— С. 674—681 (РЖМат, 1964, 10Б370)
553. — Primary ideals in rings of continuous functions // Amer. Math. Mon. — 1964.— *71,* № 9.— С. 980—984 (РЖМат, 1965, 12Б499)
554. — Decomposition spectra of rings of continuous functions // Pacif. J. Math.— 1967.— *23,* № 1.— С. 101—105 (РЖМат, 1968, 10А364)
555. — Representation of abelian groups and rings by families of real-valued functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— *25,* № 1.— С. 86—92 (РЖМат, 1971, 10А96)
556. —, *Lardy L. J.* Extensions and retractions of algebras of continuous functions // Illinois J. Math.— 1968.— *12,* № 4.— С. 539—549 (РЖМат, 1969, 9А344)
557. *Köhn J.* Zur Klassifizierung der einfacherzeugten Functionenalgebren // Arch. Math.— 1970.— *21,* № 4.— С. 379—380 (РЖМат, 1971, 5Б817)
558. *Kowalsky H.-J.* Verbandstheoretische Kenuzeichung topologischer Räume // Math. Nachr.— 1960.— *21,* № 3—5.— С. 297—318 (РЖМат, 1962, 8А250)

559. *Lambek J.* On the representation of modules by sheaves of factor modules // Can. Math. Bull.— 1971.— *14,* № 3.— С. 359—368
560. —, *Rattray B. A.* Functional completeness and Stone duality // Stud. Found. and Comb. Vol. 1.— New York e. a., 1978.— С. 1—9 (РЖМат, 1980, 10А223)
561. *Lau Ka-Sing.* A representation theorem for isometries of $C(X, E)$ // Pacif. J. Math.— 1975.— *60,* № 1.— С. 229—233 (РЖМат, 1976, 5Б664)
562. *Lavigne J.-P.* Sur la propriété de Kaplansky // C. r. Acad. sci.— 1971.— *272,* № 13.— С. A860—A862 (РЖМат, 1971, 9А403)
563. *Lawson J. D.* The duality of continuous posets // Houston J. Math.— 1979.— *5,* № 3.— С. 357—386 ((РЖМат, 1981, 2А282)
564. *Leavona J. G., Jaramilo J. A.* Homomorphisms between algebras of continuous functions // Can. J. Math.— 1989.— *41,* № 1.— С. 132—162 (РЖМат, 1989, 12Б1074)
565. Lectures on the applications of sheaves to ring theory // Lect. Notes Math.— 1971.— *248.*— С. 1—315 (РЖМат, 1972, 4А290)
566. *Le Donne A.* On prime ideals of $C(X)$ // Rend. Semin. mat. Univ. Padova.— 1977.— *58.*— С. 207—214 (РЖМат, 1981, 11А418)
567. — On a question concerning countably generated z-ideals of $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1980.— *80,* № 3.— С. 505—510 (РЖМат, 1981, 7А390)
568. — On countable generated z-ideals of $C(X)$ for first countable spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *82,* № 2.— С. 280—282 (РЖМат, 1982, 1Б1022)
569. *Levaro R. A.* A note on flabby sheaves // Bull. Austral. Math. Soc.— 1972.— *7,* № 3.— С. 387—389 (РЖМат, 1973, 8А361)
570. *Levi I.* Automorphisms of normal partial transformation semi-groups // Glas. Math. J.— 1987.— *29,* № 2.— С. 149—157 (РЖМат, 1988, 1А201)
571. *Lindenstrauss J.* On the extension of operators with range in a $C(K)$ space // Proc. Amer. Math. Soc.— 1964.— *15,* № 2.— С. 218—225 (РЖМат, 1965, 6Б437)
572. *Liu Teng-sun, Wang Ju-kwei.* On the lattice of normal functions on a totally disconnected compact space // Arch. Math.— 1961.— *12,* № 3.— С. 202—205 (РЖМат, 1962, 4А305)
573. *López P. M.* Sobre unas propiedades de los espacios $C(X)$ no hereditarias en los espacios $C^*(X)$ // Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid.— 1974.— *68,* № 1.— С. 119—127 (РЖМат, 1974, 11Б809)
574. *Lowen-Colebunders E.* Algebras of Cauchy continuous maps // J. Math. Anal. and Appl.— 1984.— *104,* № 2.— С. 408—417 (РЖМат, 1985, 7А603)
575. *Luchins E. H.* Completion of norms for $C(X, Q)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *28,* № 2.— С. 478—480 (РЖМат, 1972, 6Б709)
576. *Lund B.* Ideals and subalgebras of a function algebra // Can. J. Math.— 1974.— *26,* № 2.— С. 405—411 (РЖМат, 1974, 11Б906)
577. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz spaces. Vol. 1.— Amsterdam: North-Holland, 1971.— XI.— 514 с. (РЖМат, 1974, 2Б661К)
578. *MacDowell R.* Banach spaces and algebras of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1955.— *6,* № 1.— С. 67—78 (РЖМат, 1956, 3146)
579. *Machado S., Prolla J. B.* An introduction to Nachbin spaces // Rend. Circ. mat. Palermo.— 1972.— *21,* № 1—2.— С. 119—139 (РЖМат, 1973, 12Б744)
580. *Mack J. E., Johnson D. G.* The Dedekind completion of $C(X)$ // Pacif. J. Math.— 1967.— *20,* № 2.— С. 231—243 (РЖМат, 1968, 11Б546)
581. —, *Rayburn M., Woods G.* Lattices of topological extensions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— *189.*— С. 163—174 (РЖМат, 1975, 1А513)
582. *Macoosh R., Raphael R.* Totally integrally closed rings of continuous functions and rings of quotients // Math. Repts. Acad. Sci. Can.— 1989. — *11,* № 3.— С. 109—111 (РЖМат, 1989, 12А447)

583. *Magid A. R.* Pierce's representation and separable algebras // Illinois J. Math.— 1971.— *15,* № 1.— С. 114—121 (РЖМат, 1971, 12А300)
584. *Magill K. D., Jr.* Some embedding theorems // Proc. Amer. Math. Soc.— 1965.— *16,* № 1.— С. 126—130 (РЖМат, 1965, 9Б394)
585. — The semigroup of endomorphisms of a Boolean ring // J. Austral. Math. Soc.— 1970.— *11,* № 4.— С. 411—416 (РЖМат, 1971, 5А336)
586. — A survey of semigroups of continuous selfmaps // Semigroup Forum.— 1975/76.— *11,* № 3.— С. 189—282 (РЖМат, 1976, 12А204)
587. —, *Glasenapp J. A.* O-dimensional compactifications and Boolean rings // J. Austral. Math. Soc.— 1968.— *8,* № 4.— С. 755—765 (РЖМат, 1969, 9А342)
588. *Maharam D.* Category, Boolean algebras and measure // Lect. Notes Math.— 1977.— *609.*— С. 124—135 (РЖМат, 1978, 9Б675)
589. *Mallios A.* Topological algebras. Selected topics.— Amsterdam e. a.: North-Holland, 1986.— XVII.— 533 с. (РЖМат, 1987, 5Б943К)
590. *Maltese G.* Prime ideals are dense in maximal ideals of continuous functions // Rend. Circ. mat. Palermo.— 1981.— *30,* № 1.— С. 50—52 (РЖМат, 1982, 5Б860)
591. *Mandelker M.* Prime z-ideal structure of $C(\mathbf{R})$ // Fund. Math.— 1968.— *63,* № 2.— С. 145—166 (РЖМат, 1969, 10А289)
592. — F'-spaces and z-embedded subspaces // Pacif. J. Math.— 1969.— *28,* № 3.— С. 615—621 (РЖМат, 1969, 10А290)
593. — Prime ideal structure of rings of bounded continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1968.— *19,* № 6.— С. 1432—1438 (РЖМат, 1971, 8А355)
594. — Supports of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— *156,* № 5.— С. 73—83 (РЖМат, 1972, 2А627)
595. *Marshall D. E., O'Farrell A. G.* Uniform approximation by real functions // Fund. Math.— 1979.— *104,* № 3.— С. 203—211 (РЖМат, 1980, 8Б702)
596. *Mason G.* z-ideals and prime ideals // J. Algebra.— 1973.— *26,* № 2.— С. 280—297 (РЖМат, 1974, 2А365)
597. — Prime z-ideals of $C(X)$ and related rings // Can. Math. Bull.— 1980.— *23,* № 4.— С. 437—443 (РЖМат, 1981, 7А389)
598. — Prime ideals and quotient rings of reduced rings // Math. jap.— 1989.— *34,* № 6.— С. 941—956 (РЖМат, 1990, 8А174)
599. *Mattson Don A.* A note on equimorphisms of proximity spaces // Math. Scand.— 1968.— *22,* № 1.— С. 143—144 (РЖМат, 1969, 10А297)
600. — Maximal p-systems and realcompleteness // Math. Scand.— 1974.— *35,* № 2.— С. 215—222 (РЖМат, 1976, 1А576)
601. *McCandless B. H.* On the dimension $C(X)$ // Portug. Math.— 1962.— *21,* № 1—2.— С. 27—29 (РЖМат, 1963, 8Б397)
602. *McKissick R.* A nontrivial normal sup norm algebra // Bull. Amer. Math. Soc.— 1963.— *69,* № 3.— С. 391—395 (РЖМат, 1964, 3Б485)
603. *McKnight J. D.* Characterization of function-rings. Preliminary report // Bull. Amer. Math. Soc.— 1953.— *59,* № 1.— С. 73
604. *McVoy W. S., Rubel L. A.* Coherence of some rings of functions // J. Funct. Anal.— 1976.— *21,* № 1.— С. 76—87 (РЖМат, 1976, 8Б912)
605. *Mehta R. D., Vasavada M. H.* Algebra direct sum decomposition of $C_R(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *98,* № 1.— С. 71—74 (РЖМат, 1987, 4Б1058)
606. —, — Algebra direct sum decomposition of $C_R(X)$. II // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100,* № 1.— С. 123—126 (РЖМат, 1988, 8Б913)
607. *Mena R., Roth B.* Homomorphisms of lattices of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978.— *71,* № 1.— С. 11—12 (РЖМат, 1979, 4Б722)
608. *Merziger G.* Beziehungen zwischen Tychonoff-Räumen und ihren Funktionenringen // Math. Ann.— 1972.— *196,* № 2.— С. 148—162 (РЖМат, 1972, 11А370)

609. *Milgram A. N.* Multiplicative semigroups of continuous functions // Duke Math. J.— 1949.— *16,* № 2.— С. 377—383
610. *Misra P. R.* On isomorphism theorems for *C(X)* // Acta math. Acta sci. hung.— 1982.— *39,* № 4.— С. 379—380 (РЖМат, 1983, 1А518)
611. *Mistra A. K.* A topological view of *P*-spaces // Gen. Topol. and Appl.— 1972.— *2,* № 4.— С. 349—362 (РЖМат, 1973, 5А482)
612. *Močkoř J.* The completion of Prüfer rings // Topology. 4th Colloq., Budapest, 1978, Vol. 2.— Amsterdam e. a., 1980.— С. 863—867 (РЖМат, 1981, 2А404)
613. *Montgomery R. G.* Structures determinated by prime ideals of rings of functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— *147,* № 2.— С. 367—380 (РЖМат, 1971, 2А422)
614. *Moran W.* The global dimension of *C(X)* // J. London Math. Soc.— 1978.— *17,* № 2.— С. 321—329 (РЖМат, 1978, 12А641)
615. *Mrówka S.* On the form of certain functionals // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. math., astron. et phys.— 1957.— *5,* № 11.— С. 1061—1067 (РЖМат, 1959, 1669)
616. — Functionals on uniformly closed rings of continuous functions // Fund. Math.— 1958.— *46,* № 1.— С. 81—87 (РЖМат, 1960, 1841)
617. — On the form of positive continuous functionals and isomorphisms of functions spaces // Stud. Math.— 1961.— *21,* № 1.— С. 1—14 (РЖМат, 1962, 10Б319)
618. — Structures of continuous functions. III. Rings and Lattices of integer-valued continuous functions // Indag. math.— 1965.— *27,* № 1.— С. 74—82 (РЖМат, 1966, 12Б408)
619. — On *E*-compact spaces. II // Bull. Acad. Pol. Sci.— 1966.— *14,* № 11.— С. 597—605 (РЖМат, 1968, 5А442)
620. — Futher results on *E*-compact spaces. I // Acta Math.— 1968.— *120.*— С. 161—185 (РЖМат, 1969, 1А454)
621. — Structures of continuous functions. I // Acta math. Acad. Sci. hung.— 1970.— *21.*— С. 239—259 (РЖМат, 1971, 8А356)
622. — Structures of continuous functions. VIII. Homomorphisms of groups of integer-valued continuous functions // Bull. Acad. Pol. Sci.— 1972.— *20,* № 7.— С. 563—566 (РЖМат, 1973, 2А414)
623. — Structures of continuous functions. VI. Lattices of continuous functions // Rocz. Pol. tow. mat.— Ser. 1.— 1974.— *17,* № 2.— С. 411—420 (РЖМат, 1975, 1Б892)
624. — Recent results on *E*-compact spaces // Lect. Notes Math.— 1974.— *378.*— С. 298—301 (РЖМат, 1975, 2А498)
625. —, *Shore S.* Structures of continuous functions. IV. Representation of real homomorphisms of lattices of continuous functions // Indag. math.— 1965.— *27,* № 1.— С. 83—91 (РЖМат, 1966, 12Б409)
626. —, — Structures of continuous functions. V. On homomorphisms of structures of continuous functions with O-dimensional compact domains // Indag. math.— 1965.— *27,* № 1.— С. 92—94 (РЖМат, 1966, 12Б410)
627. *Mullins R. E.* The essential set of function algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1967.— *18,* № 2.— С. 271—273 (РЖМат, 1968, 6Б718)
628. — A characterization of the algebra of functions vanishing at infinity // Can. J. Math.— 1969.— *21,* № 3.— С. 751—754 (РЖМат, 1971, 2А423)
629. *Mulvey C. J.* A condition for a ringed space to be a generator in its category of modules // J. Algebra.— 1970.— *15,* № 3.— С. 312—313 (РЖат, 1971, 3А329)
630. — Intuitionistic algebra and representations of rings // Mem. Amer. Math. Soc.— 1974.— *148.*— С. 3—57 (РЖМат, 1975, 6А404)
631. — Espaces annelés compacts // C. r. Acad. sci.— 1976.— *283,* № 5.— С. А229—А231 (РЖМат, 1977, 4А299)
632. — A generalization of Swan' theorem // Math. Z.— 1976.— *151,* № 1.— С. 57—70 (РЖМат, 1977, 6А284)
633. — A categorical characterisation of compactness // J. London Math. Soc.— 1978.— *17,* № 2.— С. 356—362 (РЖМат, 1978, 11А509)
634. — Compact ringed spaces // J. Algebra.— 1978.— *52,* № 2.— С. 411—436 (РЖМат, 1979, 2А331)
635. — A generalization of Gelfand duality // J. Algebra.— 1979.— *56,* № 2. — С. 499—505 (РЖМат, 1979, 8А255)
636. — On a condition for the representability of a topological ring // Commun. Algebra.— 1979.— *7,* № 10.— С. 995—998 (РЖМат, 1979, 12А477)
637. — Representations of rings and modules // Lect. Notes Math.— 1979.— *753.*— С. 542—585 (РЖМат, 1980, 5А257)
638. *Murdoch D., Oystaeyen F. Van.* Noncommutative localization and sheaves // J. Algebra.— 1975.— *35,* № 1—3.— С. 500—515 (РЖМат, 1976, 1А293)
639. *Myers S. B.* Algebras of differentiable functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1954.— *5,* № 6.— С. 917—922 (РЖМат, 1956, 1488)
640. *Nachbin L.* Topological vector spaces of continuous functions // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1954.— *40,* № 6.— С. 471—474 (РЖМат, 1956, 3910)
641. — On the priority of algebras of continuous functions in Weighted approximation // Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 17.— London—New York, 1975.— С. 169—183 (РЖМат, 1977, 2Б883)
642. *Nagasawa M.* Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions // Kodai Math. Semin. Repts.— 1959.— *11,* № 4.— С. 182—188 (РЖМат, 1962, 2Б455)
643. *Nagata Jun-iti.* On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces // Osaka Math. J.— 1949.— *1,* № 2.— С. 166—181
644. — On uniform topology of functional spaces // J. Inst. Polytechn. Osaka city Univ.— 1954.— *A5,* № 2.— С. 87—95 (РЖМат, 1957, 1233)
645. — On uniform topology of functional spaces. II // J. Inst. Polytechn. Osaka city Univ.— 1955.— *A6,* № 2.— С. 71—77 (РЖМат, 1959, 189)
646. — On rings of continuous functions and the dimension of metric spaces // Proc. Japan. Acad.— 1960.— *36,* № 2.— С. 49—52 (РЖМат, 1962, 8А275)
647. — On rings of continuous functions // Lect. Notes Math.— 1977.— *609.* — С. 136—153 (РЖМат, 1978, 9А460)
648. *Nakahara I.* Survey of *P*-spaces // Mem. Fac. Gen. Educ. Kumamoto Univ. Nat. Sci. Math.— 1973.— № 8.— С. 7—16 (РЖМат, 1976, 5Б771)
649. *Nakano H.* Über das System aller Stetigen Functionen auf einem topologischen Raum // Proc. Imp. Acad. Tokyo.— 1941.— *17.*— С. 308—310
650. *Namioka Isacu, Saeki Sadahiro.* On lattice isomorphisms of $C(X)^+$ // Tokyo J. Math.— 1978.— *1,* № 2.— С. 345—368 (РЖМат, 1979, 8Б895)
651. *Nanzetta P.* Maximal lattice-ordered algebras of continuous functions // Fund. Math.— 1968.— *63,* № 1.— С. 53—75 (РЖМат, 1969, 4Б519)
652. — On the lattice *D(X)* // Illinois J. Math.— 1969.— *13,* № 1.— С. 145—154 (РЖМат, 1969, 9А345)
653. —, *Plank D.* Closed ideals in *C(X)* // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *35,* № 2.— С. 601—608 (РЖМат, 1973, 7А478)
654. *Narici L., Beckenstein E.* Banach algebras over valued fields // Approximat. Theory and Funct. Anal. Proc. Int. Symp., Brazil, 1977.— Amsterdam e. a., 1979.— С. 333—342 (РЖМат, 1981, 4Б854)
655. *Negrepontis S.* On the product of *F*-spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— *136.*— С. 339—346 (РЖМат, 1970, 2А422)
656. *Nel L. D.* Topological universes and smooth Gelfand-Naimark duality // Contemp. Math.— 1984.— *30.*— С. 244—276 (РЖМат, 1985, 4А544)
657. — Optimal subcategories and Stone-Weierstrass // Topol. and Appl.— 1987.— *27,* № 2.— С. 191—200 (РЖМат, 1988, 3А653)
658. —, *Riordan D.* Note on a subalgebra of *C(X)* // Can. Math. Bull.— 1972.— *15,* № 4.— С. 607—608 (РЖМат, 1973, 9А459)

659. —, *Wilson R. G.* Epireflections in the category of T_0-spaces // Fund. Math.— 1972.— *75*, № 1.— С. 69—74 (РЖМат, 1973, 2А401)
660. *Nelson E.* Algebras of continuous functions in universal algebra // Gen. Topol. and Relat Modern Anal. and Algebra IV. Proc. 4th Prague Topol. Symp., 1976. Part B.— Prague, 1977.— С. 331—332 (РЖМат, 1978, 6А333)
661. *Neville C. W.* Flat $C(X)$-modules and F-spaces // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1989.— *106*, № 2.— С. 237—244 (РЖМат, 1990, 1А391)
662. *Nielsen R., Sloyer C.* Ideals of semi-continuous functions and compactifications of T_1-spaces // Math. Ann.— 1970.— *187*, № 4.— С. 329—331 (РЖМат, 1971, 2А424)
663. *Noureddine K.* Topologies sur $C(T)$ et $C^\infty(T)$ // Publ. Dep. math.— 1977. — *14*, № 1.— С. 1—54 (РЖМат, 1979, 1Б509)
664. *Ohori M.* Some studies on generalized p. p. rings and hereditary rings // Math. J. Okayama Univ.— 1985.— *27*, № 12.— С. 53—70 (РЖМат, 1986, 9А224)
665. *Onuchic N.* On two properties of P-spaces // Portug. math.— 1957.— *16*, № 1—2.— С. 37—39 (РЖМат, 1959, 4891)
666. *Oystaeyen F. Van.* Primer spectra in noncommutative Algebra // Lect. Notes Math.— 1975.— *444*.— 128 с. (РЖМат, 1975, 12А263К)
667. — Stalks of sheaves over the spectrum of certain noncommutative rings // Commun. Algebra.— 1977.— *5*.— С. 899—901
668. —, *Verschoren A.* Localization of presheaves of modules // Indag. math.— 1976.— *38*, № 4.— С. 335—348 (РЖМат, 1977, 6А214)
669. —, — Non-commutative algebraic geometry // Lect. Notes Math.— 1981. — *887*.— VI.— 404 с. (РЖМат, 1982, 7А244К)
670. *Page A.* On type 1 semi-algebras of continuous functions // J. London Math. Soc.— 1963.— *38*, № 4.— С. 486—494 (РЖМат, 1964, 12Б433)
671. *Park Y.* On quotient-like extensions of $C(X)$ // Can. Math. Bull.— 1969.— *12*, № 6.— С. 793—799 (РЖМат, 1970, 9А328)
672. *Páter Z.* Topological algebras of functions // Mathematica.— 1988.— *30*, № 2.— С. 163—170 (РЖМат, 1989, 10А251)
673. *Peck E. M.* Lattice projections on continuous function spaces // Pacif. J. Math.— 1976.— *66*, № 2.— С. 477—490 (РЖМат, 1977, 12Б846)
674. *Pedersen G. K.* The structure space of a left ideal // Math. Scand.— 1964.— *14*, № 1.— С. 90—92 (РЖМат, 1965, 10А232)
675. *Pelczynski A.* A remark on spaces 2^X for zero-dimensional X // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. math., astron. et phys.— 1965.— *13*, № 2.— С. 85—89 (РЖМат, 1967, 4А341)
676. — Uncomplemented function algebras with separable annihilators // Duke Math. J.— 1966.— *33*, № 3.— С. 605—612 (РЖМат, 1968, 6Б715)
677. *Pérez E. D.* Semi-rings and spectral spaces // Lect. Notes Math.— 1988. — *1328*.— С. 219—226 (РЖМат, 1989, 4А225)
678. *Phelps R. R.* Extreme points in fuction algebras // Duke Math. J.— 1965. — *32*, № 2.— С. 267—277 (РЖМат, 1966, 8Б434)
679. *Picavet C.* Sur une généralisation de la notion de spectre d'anneau // Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont. Math.— 1970.— *7*, № 44.— С. 81—101 (РЖМат, 1973, 4А510)
680. *Pierce R. S.* Rings of integer-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— *100*, № 3.— С. 371—394 (РЖМат, 1962, 9Б340)
681. — Modules over commutative regular rings /// Mem. Amer. Math. Soc.— 1967.— *70*.— С. 1—112
682. — Topological Boolean algebras /// Queen's Pap. Pure and Appl. Math. — 1970.— № 25.— С. 107—130 (РЖМат, 1970, 12А233)
683. *Plank D.* On a class of subalgebras of $C(X)$ with applications to $\beta X \setminus X$ // Fund. Math.— 1969.— *64*, № 1.— С. 41—54 (РЖМат, 1969, 12А579)
684. — Closed l-ideals in a class of lattice-ordered algebras // Illinois J. Math.— 1971.— *15*, № 3.— С. 515—524 (РЖМат, 1972, 4А539)
685. *Prasad P. K.* Algebras of differentiable functions and algebras of Lipschitz functions // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1985.— *16*, № 4.— С. 376—382 (РЖМат, 1985, 10Б1252)
686. *Priestley H. A.* Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices // Proc. London Math. Soc.— 1972.— *24*, № 3.— С. 507—530 (РЖМат, 1972, 10А319)
687. *Prolla J. B.* Topological algebras of vector-valued continuous functions // Math. Anal. and Appl. Pt. B.— New York e. a., 1981.— С. 727—740 (РЖМат, 1983, 6Б734)
688. *Pryce J. D.* Of type F semi-algebras of continuous functions // Quart J. Math.— 1965.— *16*, № 61.— С. 65—71 (РЖМат, 1966, 10Б551)
689. — A counterexample concerning type in semi-algebras of continuous functions //Quart. J. Math.— 1968.— *19*, № 73.— С. 9—15 (РЖМат, 1968, 11Б570)
690. *Pursell L. E.* An algebraic characterization of fixed ideals in certain function rings // Pacif. J. Math.— 1955.— *5*, № 2.— С. 963—969 (РЖМат, 1958, 4548)
691. — The rings $C(X, \mathbf{R})$ considered as a subring of the ring of all real-valued functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1957.— *8*, № 4.— С. 820—821 (РЖМат, 1959, 3950)
692. — A note on isomorphisms of $C(X, \mathbf{R})$ and $C^*(X, \mathbf{R})$ // Bull. Calcutta Math. Soc.— 1957.— *49*, № 1.— С. 47—48 (РЖМат, 1959, 3951)
693. — Rings of continuous functions on open convex subsets of $\mathbf{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1968.— *19*, № 3.— С. 581—585 (РЖМат, 1971, 8Б616)
694. *Put M. van der.* Algèbres de fonctions continuous p-adiques // Indag. math.— 1968.— *30*, № 4.— С. 401—411 (РЖМат, 1969, 4А296)
695. — Algebres de fonctions continuous p-adiques. II // Indag. math.— 1968.— *30*, № 4.— С. 412—420 (РЖМат, 1969, 4А297)
696. *Quigley F.* Approximation by algebras of functions // Math. Ann.— 1958.— *135*, № 2.— С. 81—92 (РЖМат, 1962, 6Б464)
697. *Raghavan T. G.* An example in non-Hausdorff P-spaces // Indian. J. Pure and Appl. Math.— 1978.— *9*, № 1.— С. 32—33 (РЖМат, 1979, 3А428)
698. *Redlin L., Watson S.* Maximal ideals in subalgebras of $C(X)$ // Proc. Amer. Math.— 1987.— *100*, № 4.— С. 763—766 (РЖМат, 1988, 3А652)
699. Representations of algebras // Lect. Notes Math.— 1981.— *903*.— С. 1—371 (РЖМат, 1982, 6А254)
700. *Retting W.* Über den Ring der stetigen Funktionen eines nulldimensionaler Raumes in einen topologischen ring.— Hannover: Fac. Math. und Naturwiss. Univ.— Hannover, 1981.— V.— 70 с. (РЖМат, 1982, 10А427Д)
701. *Rickart C. E.* General theory of Banach algebras.— New York: D. Van Nostrand Co., Ltd, 1960.— *11*.— 394 с. (РЖМат, 1963, 8Б395К)
702. *Robinson S. M.* The intersection of the free maximal ideals in a complete space // Proc. Amer. Math. Soc.— 1966.— *17*, № 2.— С. 468—469 (РЖМат, 1967, 2А309)
703. *Rocos P.* D'un isomorphisme de deux catégories // C. r. Acad. sci.— 1976.— *282*, № 4.— С. А179—А181 (РЖМат, 1976, 7А471)
704. *Rodinó N.* Seminorme submoltiplicative su algebre di funzioni // Atti Acad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.— 1981 (1982).— *70*, № 1.— С. 49—54 (РЖМат, 1983, 10Б781)
705. *Roitman J.* Non-isomorphic hyper-real fields from non-isomorphic ultrapowers // Math. Z.— 1982.— *181*, № 1.— С. 93—96 (РЖМат, 1983, 2Б787)
706. *Roth B.* Submodules of $C(X) \times \ldots \times C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *32*, № 2.— С. 543—548 (РЖМат, 1972, 11Б837)
707. — Closed countably generated structures in $C(X)$ // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— *177*, № 3.— С. 191—197 (РЖМат, 1974, 3Б628)
708. *Roy A. K.* Ideals in semi-algebras of continuous monotone functions on a compact orded space // Math. Ann.— 1970.— *185*, № 3.— С. 231—246 (РЖМат, 1970, 11Б622)

709. *Rudd D.* On two sum theorems for ideals of $C(X)$ // Mich. Math. J.— 1970.— *17*, № 2.— С. 139—141 (РЖМат, 1971, 3Б463)
710. — On isomorphisms between ideals in rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— *159*, № 4.— С. 335—353 (РЖМат, 1972, 6А467)
711. — An example of a Ф-algebra whose uniform closure is a ring of continuous functions // Fund. Math.— 1972.— *77*, № 1.— С. 1—4 (РЖМат, 1973, 7Б735)
712. — On structure spaces of ideals in rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— *190*, № 4.— С. 393—403 (РЖМат, 1975, 2Б655)
713. — A note on zero-sets in the Stone-Čech compactification // Bull. Austral. Math. Soc.— 1975.— *12*, № 2.— С. 227—230 (РЖМат, 1975, 12А472)
714. — *P*-ideals and *F*-ideals in rings of continous functions // Fund. Math.— 1975.— *88*, № 1.— С. 53—59 (РЖМат, 1976, 1Б645)
715. *Rudin W.* Continuous functions on compact spaces without perfect subsets // Proc. Amer. Math. Soc.— 1957.— *8*, № 1.— С. 39—42 (РЖМат, 1958, 1346)
716. *Rumbos I. B.* A structure sheaf for semiprime rings // Commun. Algebra.— 1989.— *17*, № 11.— С. 2773—2794 (РЖМат, 1990, 7А184)
717. *Sancho de Salas J. B., De Salas M. T. S.* Dimension of dence subalgebras of $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1989.— *105*, № 2.— С. 491—499 (РЖМат, 1989, 11А513)
718. *Sanz A. M.* Acerca de ciertos subanillos de $C(X)$ // Rev. Real acad. cienc. exact. fis. y natur. Madrid.— 1979.— *73*, № 3.— С. 407—422 (РЖМат, 1980, 9Б533)
719. *Sawoń Z., Warzecha-Sawoń A.* Maximal subalgebras of algebra $C(X)$ // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. math., astron. et phys.— 1980.— *28*, № 5—6.— С. 257—260 (РЖМат, 1981, 10Б761)
720. *Scanlon C. H.* Rings of functions with certain Lipschitz properties // Pacif. J. Math.— 1970.— *32*, № 1.— С. 197—201 (РЖМат, 1970, 9А329)
721. *Schaefer H. H.* Invariant ideals of positive operators in $C(X)$. I // Illinois J. Math.— 1967.— *11*, № 4.— С. 703—715 (РЖМат, 1968, 10Б651)
722. — Invariant ideals of positive operators in $C(X)$. II // Illinois J. Math.— 1968.— *12*, № 4.— С. 525—538 (РЖМат, 1969, 10Б521)
723. *Schmets J.* Espaces de fonctions continues // Lect. Notes Math.— 1976.— *519*.— XII.— 148 с. (РЖМат, 1976, 11Б718К)
724. *Schreiber M.* Compactness of the structure space of a ring // Proc. Amer. Math. Soc.— 1957.— *8*, № 4.— С. 684—685 (РЖМат, 1960, 4973)
725. *Seda A. K.* Banach bundldes of continuous functions and an integral representation theorem // Trans. Amer. Math. Soc.— 1982.— *270*, № 1.— С. 327—332 (РЖМат, 1982, 10Б770)
726. *Semadeni Z.* Banach spaces of continuous functions. Vol. I // Monogr. mat., 1971.— *55*.— 584 с. (РЖМат, 1972, 3Б498К)
727. — Some categorical characterizations of algebras of continuous functions // Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 17.— London—New York, 1975.— С. 97—112 (РЖМат, 1977, 2Б743)
728. *Shanks M. E.* Rings of functions on locally compact spaces. Preliminary report // Bull. Amer. Math. Soc.— 1951.— *57*, № 4.— С. 295
729. — Homology and rings of continuous functions. Preliminary report // Bull. Amer. Math. Soc.— 1953.— *59*, № 1.— С. 74
730. *Shannon C. D.* Lattice ideals in the space of continuous functions // Houston J. Math.— 1977.— *3*, № 3.— С. 441—452 (РЖМат, 1978, 11А791)
731. *Shin Gooyong.* Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— *184*, № 10.— С. 43—60 (РЖМат, 1974, 9А301)
732. *Shirota Taira.* Class of topological spaces // Osaka Math. J.— 1952.— *4*.— С. 23—40

733. — A generalization of a Theorem of I. Kaplansky // Osaka Math. J.— 1952.— *5*, № 2.— С. 121—132
734. — On ideals in rings of continuous functions // Proc. Japan. Academy.— 1954.— *30*, № 2.— С. 85—89 (РЖМат, 1955, 4547)
735. — On locally convex vector spaces of continuous functions // Proc. Japan. Acad.— 1954.— *30*, № 4.— С. 294—299 (РЖМат, 1955, 5939)
736. *Shore S.* Homomorphisms of lattices of integer-valued continuous functions // Indag. math.— 1965.— *27*, № 3.— С. 532—538 (РЖМат, 1966, 12Б411)
737. — On lattices of chain-valued continuous functions // Proc. Koninkl Neder. Acad. Math. Sci.— 1968.— *A71*, № 4.— С. 421—427 (РЖМат, 1969, 4Б549)
738. — Decomposition of function-lattices // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— *28*, № 1.— С. 189—190 (РЖМат, 1972, 6А311)
739. *Sidney S. J.* Uniform algebras and projections // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *91*, № 3.— С. 381—382 (РЖМат, 1985, 5Б902)
740. *Simmons H.* Torsion theoretic points and spaces // Proc. Roy Soc. Edinburgh.— 1984.— *96A*, № 3—4.— С. 345—361 (РЖМат, 1985, 4А211)
741. — Three sheaf constructions for noncommutative rings // Houston J. Math.— 1984.— *10*, № 3.— С. 433—443 (РЖМат, 1985, 8А244)
742. — Sheaf representations of strongly harmonic rings // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.— 1985.— *A99*, № 3—4.— С. 249—268 (РЖМат, 1985, 12А243)
743. — Compact representation the lattice theory of compact ringed spaces // J. Algebra.— 1989.— *126*, № 2.— С. 493—531 (РЖМат, 1990, 5А199)
744. *Słowikowski W., Zawadowski A.* A generalization of maximal ideals method of Stone and Gelfand // Fund. Math.— 1955.— *42*, № 2.— С. 215—231 (РЖМат, 1957, 2123)
745. *Spector R.* Caractérisation des espaces compacts par certains semigroupes de fonctions continues // C. r. Acad. sci.— 1966.— *262*, № 25.— С. A1396—A1399 (РЖМат, 1967, 3Б525)
746. *Speed T. P.* On rings of sets. II. Zero-sets // J. Austral. Math. Soc.— 1973.— *16*, № 2.— С. 185—199 (РЖМат, 1974, 7А417)
747. — Spaces of ideals of distributive lattices. II. Minimal prime ideals // J. Austral. Math. Soc.— 1974.— *18*, № 1.— С. 54—72 (РЖМат, 1975, 7А413)
748. *Srinivasan N., Kulkarni S. H.* Restriction algebras of a real function algebra // J. Math. and Phys. Sci.— 1988.— *22*, № 2.— С. 209—223 (РЖМат, 1988, 9Б968)
749. *Stefani O., Zanardo A.* Un'osservazione su una sottoalgebra di $C(X)$ // Rend. Semin. mat. Univ. Padova.— 1975.— *53*.— С. 327—328 (РЖМат, 1977, 1А460)
750. —, — Alcune caratterizzazioni di una sottoalgebra di $C^*(X)$ e compattificazioni ad essa associate // Rend. Semin. mat. Univ. Padova.— 1975.— *53*.— С. 363—367 (РЖМат, 1977, 1А461)
751. *Stenström Bo.* Rings of Quotients.— Springer—Verlag, 1975.— VIII. — 309 с.
752. *Stephenson R. M., Jr.* Spaces for which the Stone-Weierstrass theorem holds // Trans. Amer. Math. Soc.— 1968.— *133*, № 2.— С. 537—546 (РЖМат, 1971, 5А484)
753. *Stewart P. N.* A sheaf theoretic representation of rings with Boolean orthogonalities // Pacif. J. Math.— 1975.— *58*, № 1.— С. 249—254 (РЖМат, 1976, 2А341)
754. *Stone M.* The theory of representations for Boolean algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1936.— *40*, № 1.— С. 37—111
755. — Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc.— 1937.— *41*, № 3.— С. 375—481
756. — A general theory of spectra. I // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1940. *26*.— С. 280—283

757. — A general theory of spectra. II // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1941. — *27.*— C. 83—87
758. — Boundedness properties in function lattices // Can. J. Math.— 1949.— *1.*— C. 176—186
759. *Stout L. N.* A topological structure on the structure sheaf of a topological ring // Commun. Algebra.— 1977.— *5,* № 7.— C. 695—705 (РЖМат, 1978, 6А424)
760. *Su Li Pi.* Algebraic properties of certain rings of continuous functions // Pacif. J. Math.— 1968.— *27,* № 1.— C. 175—191 (РЖМат, 1969, 11А410)
761. — Homomorphisms of near-rings of continuous functions // Pacif. J. Math.— 1971.— *38,* № 1.— C. 261—266 (РЖМат, 1972, 4А336)
762. *Subramanian H.* The structure space of a ring // Math. Student.— 1966 (1968).— *34,* № 3—4.— C. 179—184 (РЖМат, 1969, 8Б628)
763. — Kaplansky's theorem for *f*-rings // Math. Ann.— 1968.— *179,* № 1.— C. 70—73 (РЖМат, 1969, 7А243)
764. — Integer-valued continuous functions // Bull. Soc. Math. France.— 1969 (1970).— *97,* № 3.— C. 275—283 (РЖМат, 1970, 9А230)
765. — Integer-valued continuous functions. II // Can. Math. Bull.— 1971.— *14,* № 2.— C. 235—237 (РЖМат, 1972, 1А390)
766. *Suciu I.* Function algebras.— Leyden, 1975.— 272 s. (РЖМат, 1976, 2Б745К)
767. *Sundaresan K.* Spaces of continuous functions into a Banach space // Stud. math. (PRL).— 1973.— *48,* № 1.— C. 15—22 (РЖМат, 1974, 3Б665)
768. —, *Swaminathan S.* Orthogonality and linear homomorphisms in Banach lattices // Contem. Math.— 1986.— *52.*— C. 163—169 (РЖМат, 1986, 11Б712)
769. *Swamy U. M., Rao V. V.* Triple and sheaf representations of Stone lattices // Algebra univers.— 1975.— *5,* № 1.— C. 104—113 (РЖМат, 1976, 2А377)
770. *Swan R. G.* Vector bundles and projective modules // Trans. Amer. Math. Soc.— 1962.— *105,* № 2.— C. 264—277 (РЖМат, 1964, 12А292)
771. *Szeto G.* On an exact sequence modules // Arch. Math.— 1977.— *29,* № 1.— C. 67—71 (РЖМат, 1978, 4А293)
772. — On sheaf representation of a biregular near-ring // Can. Math. Bull.— 1977.— *20,* № 4.— C. 495—500 (РЖМат, 1978, 10А203)
773. —, *To T. O.* The p. p. ring and Pierce sheaf representation of noncommutative rings // Math. Slovaca.— 1980.— № 4.— C. 337—343 (РЖМат, 1981, 4А226)
774. *Taylor J. L.* Banach algebras and topology // Algebras in analysis.— London: Acad. Press, 1975.— C. 118—186
775. *Teleman S.* La représentation des anneaux réguliers par les faisceaux // Rev. roum. math. pures et appl.— 1969.— *14,* № 5.— C. 703—717 (РЖМат, 1970, 4А282)
776. — Représentation par faisceaux des modules sur les anneaux harmoniques // C. r. Acad. sci.— 1969.— *269,* № 17.— C. A753—A756 (РЖМат, 1970, 4А283)
777. — On the regular rings of John von Neumann // Rev. roum. math. pures et appl.— 1970.— *15,* № 5.— C. 735—742 (РЖМат, 1971, 2А238)
778. *Thakare N. K., Nimbhorkar S. K.* Space of minimal prime ideals of a ring without nilpotent elements // J. Pure and Appl. Algebra.— 1983.— *27,* № 1.— C. 75—85 (РЖМат, 1983, 10А202)
779. *Thomsen K.* On the diagonalization of matrices over $C(X)$ // Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus. Univ.— 1985—1986.— № 30.— 15 c. (РЖМат, 1988, 4Б1188)
780. *Thornton M. C.* Topological spaces and lattices of lower semicontinuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— *181.*— C. 495—506 (РЖМат, 1974, 6А606)

781. *Thrivikraman T.* A net characterization of Herlich's *k*-compactness // Yokohama Math. J.— 1977.— *25,* № 1.— C. 31—33 (РЖМат, 1978, 7А597)
782. *Todd C.* Stone-Weierstrass theorems for the strict topology // Proc. Amer. Math. Soc.— 1965.— *16,* № 4.— C. 654—659 (РЖМат, 1966, 9Б503)
783. *Tsai J. H.* On *E*-compact spaces and generalizations of perfect mappings // Pacif. J. Math.— 1973.— *46,* № 1.— C. 275—282 (РЖМат, 1974, 2А416)
784. *Vanght R. L.* The continuous real-valued functions on a completely regular space. Preliminary report // Bull. Amer. Math. Soc.— 1949.— *55,* № 7.— C. 716
785. *Varela J.* Duality of C^*-algebras // Mem. Amer. Math. Soc.— 1974.— *148.*— C. 97—108
786. *Verma R. K., Begum H.* A topological ring of functions and uniform ring of functions // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1984.— *15,* № 3.— C. 305—312 (РЖМат, 1984, 10Б980)
787. *Verra A.* Moduli iniettivi e fasci flasques su uno schema affine // Rend. semin. mat. Univ. e politecn. Torino.— 1974—1975 (1976).— *33.*— C. 131—141 (РЖМат, 1976, 10А255)
788. *Verschoren A.* Localization of (pre-)sheaves of modules and structure sheaves // Ring Theory Proc. Antwerp. Conf., 1977.— New York—Basel, 1978.— C. 181—207 (РЖМат, 1979, 9А234)
789. —, *Oystaeyen F. van.* Localization of sheaves of modules // Indag. math. — 1976.— *38,* № 5.— C. 470—481 (РЖМат, 1977, 8А321)
790. *Viertl R.* Ideale in Ringen merbarer Funktionen // Math. Nachr.— 1977.— *79.*— C. 201—205 (РЖМат, 1978, 4Б552)
791. — Über die Structur Von Ringen messbarer Funktionen mit allgemeinen Ringen als Bildbereich // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sec. math.— 1981.— *24.*— C. 45—49 (РЖМат, 1982, 5Б862)
792. *Vrancken-Mawet L.* Dualite pour les demi-lattis de Brouwer // Bull. Soc. roy sci. Liége.— 1986.— *55,* № 2.— C. 346—352 (РЖМат, 1987, 1А297)
793. *Wada J.* Positive linear functionals on ideals of continuous functions // Osaka Math. J.— 1959.— *11,* № 2.— C. 173—185 (РЖМат, 1963, 8Б398)
794. *Wajch E.* Complete rings of functions and Wallman-Frink compactifications // Colloq. math.— 1988.— *56,* № 2.— C. 281—290 (РЖМат, 1990, 1А526)
795. *Wajnryb B.* Projective and separable extensions of rings of continuous functions // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. math., astron. et phys.— 1969.— *17,* № 5.— C. 269—271 (РЖМат, 1969, 11А330)
796. *Wallace A. D.* Some characterization of interior transformations // Amer. J. Math.— 1939.— *41.*— C. 757—763
797. *Wallman H.* Lattices and topological spaces // Ann. Math.— 1938.— *39,* № 1.— C. 112—126
798. *Walter M. E.* Towards a duality theory for algebras* // Lect. Notes Math.— 1986.— *1210.*— C. 353—364 (РЖМат, 1987, 6Б952)
799. *Wang J.-K.* On a theorem of M. Eidelheit concerning rings of continuous functions // Amer. Math. Mon.— 1961.— *68,* № 2.— C. 143 (РЖМат, 1961, 12Б376)
800. *Warner C. R., Whitley R.* Ideals of finite codimension in $C[0, 1]$ and $L^1(\mathbf{R})$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *76,* № 2.— C. 263—267 (РЖМат, 1980, 4Б927)
801. *Warner S.* The topology of compact convergence on continuous function spaces // Duke Math. J.— 1958.— *25,* № 2.— C. 265—282 (РЖМат, 1960, 1840)
802. — Compact rings and Stone-Cech compactifications // Arch. Math.— 1960.— *11,* № 5.— C. 327—332 (РЖМат, 1962, 1А307)
803. *Weinberg E. C.* Higher degrees of distributivity in lattices of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1962.— *104,* № 2.— C. 334—346 (РЖМат, 1964, 10А228)

804. *Weir M. D.* Hewitt Nachbin spaces.— Amsterdam: North-Holland, 1975.— VII.— 270 с. (РЖМат, 1978, 6А495К)
805. *Wermer J.* Dirichlet algebras // Duke Math. J.— 1960.— *27,* № 3.— С. 373—381 (РЖМат, 1961, 12Б375)
806. *Werner H. A.* A generlization of Comer's sheaf-representation theorem // Contrib. Gen. Algebra. Proc. Klagenfurt Conf., 1978.— Klagenfurt, 1979. — С. 395—397 (РЖМат, 1981, 3А301)
807. *Wiegand S., Wiegand R.* The maximal ideal space of a Noetherian ring // J. Pure and Appl. Algebra.— 1976.— *8,* № 2.— С. 129—141 (РЖМат, 1977, 1А381)
808. *Wilke G.* Über die Primideale differenzierbarer und integrierbarer Functionen // Math. Ann.— 1986.— *273,* № 2.— С. 191—197 (РЖМат, 1986, 11Б883)
809. *Wilken D. E.* A note on strongly regular function algebras // Can. J. Math.— 1969.— *21,* № 4.— С. 912—914 (РЖМат, 1970, 11Б628)
810. *Williams D. R.* Intersections of primary ideals in rings of continuous functions // Can. J. Math.— 1972.— *24,* № 3.— С. 502—519 (РЖМат, 1972, 12А339)
811. *Wilson R. G.* Pointwise sequentially closed ideals in $C^*(X)$ // Can. Math. Bull.— 1973.— *16,* № 1.— С. 115—117 (РЖМат, 1973, 9Б718)
812. *Wolf A.* Sheaf representations of arithmetical algebras // Mem. Amer. Math. Soc.— 1974.— *148.*— С. 87—93 (РЖМат, 1975, 5А299)
813. *Wolfson K. G.* The algebra of bounded functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1954.— *5,* № 1.— С. 10—14 (РЖМат, 1955, 337)
814. — A note on the algebra of bounded functions. II // Proc. Amer. Math. Soc.— 1956.— *7,* № 5.— С. 852—855 (РЖМат, 1957, 8013)
815. *Wolk E. S.* Free ideals in rings of functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1955.— *6,* № 5.— С. 711—715 (РЖМат, 1957, 2122)
816. *Wood G. R.* Semigroups of differentiable functions // Bull. Austral. Math. Soc.— 1973.— *9,* № 2.— С. 313—314 (РЖМат, 1974, 4Б818)
817. *Wood G. V.* A note on isomorphisms of group algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— *25,* № 4.— С. 771—775 (РЖМат, 1971, 9Б614)
818. *Woodruff D.* Compactifications and function algebras // Atti Acad. naz. Lincei Rend. Cl. Sci. fis. mat. e natur.— 1977 (1978).— *63,* № 1—2.— С. 45—51 (РЖМат, 1979, 4А527)
819. *Woods R. G.* Characterization of some C^*-embedded subspaces of $\beta\mathbf{N}$ // Pacif. J. Math.— 1976.— *65,* № 2.— С. 573—579 (РЖМат, 1977, 8А507)
820. *Wright F. B.* Some remarks on Boolean duality // Portug. math.— 1957. — *16,* № 3—4.— С. 109—117 (РЖМат, 1962, 2Б490)
821. *Wulbert D. E.* A characterization $C^*(X)$ for locally connected X // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *21,* № 2.— С. 269—272 (РЖМат, 1969, 11А415)
822. *Xiong Hong-Yun.* Characterizations of the completely regular topological spaces X for which $C(X)$ is a dual ordered vector space // Math. Z.— 1983.— *183,* № 3.— С. 413—418 (РЖМат, 1983, 12Б958)
823. — Realcompact spaces X and Riesz homomorphisms from $C(X)$ to $\mathbf{R}$ // J. Tianjin Univ.— 1986.— № 4.— С. 95—99 (РЖМат, 1987, 8Б1000)
824. — A characterization of Riesz spaces which are Riesz isomorphic to $C(X)$ for some completely regular space X // Proc. A Kon. Ned. Akad. Wetensch.— 1989.— *92,* № 1.— С. 87—95 (РЖМат, 1989, 10Б841)
825. *Yang J. S.* Transformation groups of automorphisms of $C(X, G)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1973.— *39,* № 3.— С. 619—624 (РЖМат, 1974, 3А358)
826. — On isomorphic groups and homeomorphic spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1974.— *43,* № 2.— С. 431—438 (РЖМат, 1975, 2А507)
827. *Yood B.* Banach algebras of continuous functions // Amer. J. Math.— 1951.— *73,* № 1.— С. 30—42

828. — Multiplicative semi-group of continuous functions on a compact space // Duke Math. J.— 1955.— *22,* № 3.— С. 383—392 (РЖМат, 1956, 3930)
829. — Structure spaces of rings and Banach algebras // Mich. Math. J.— 1984.— *31,* № 2.— С. 181—189 (РЖМат, 1985, 8Б941)
830. *Yu-Lee Lee.* On the existence of noncomparable homogeneous topologies with the same class of homeomorphisms // Tohoku Math. J.— 1970.— *22,* № 4.— С. 499—501 (РЖМат, 1971, 9А405)
831. *Yuzvinsky S.* Projective modules over rings of global sections of flasque sheaves // J. Pure and Appl. Algebra.— 1990.— *65,* № 2.— С. 191—197 (РЖМат, 1991, 1А404)
832. *Zenor P.* Directed $\mathscr{E}$-structures and $\mathscr{E}$-compact spaces // Lect. Notes Math.— 1974.— *378.*— С. 638—644 (РЖМат, 1975, 2А500)

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

833. *Вечтомов Е. М.* О P'-пространствах // Материалы 5-й науч. конф. молод. ученых мех.-мат. фак. и НИИ мех. Горьков. ун-т. Ч. 2. Горький, 1980.— С. 51—56.— Деп. в ВИНИТИ 22.04.81, № 1836—81 Деп. (РЖМат, 1981, 8Б985 Деп.)
834. *Туганбаев А. А.* Дистрибутивные кольца и модули // Успехи мат. наук.— 1984.— *39,* № 1.— С 157—158 (РЖМат, 1984, 7А239)

ВЫПУСКИ И ТОМА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ

Алгебра. Топология. «1962» (1964)*

Геометрия. «1963» (1965)

Алгебра. Топология. Геометрия. «1965» (1967), «1966» (1968), «1967» (1969), «1968» (1970), «1969» (1970), «1970» (1972); тома 10(1971), 11(1974), 12(1974), 13(1975), 14(1977), 15(1977), 16(1978), 17(1979), 22(1984), 23(1985), 24(1986), 25(1987) 26(1988), 27(1989), 28(1990),

Проблемы геометрии. Тома 7(1976), 8(1977), 9(1979), 10(1978), 11(1981), 12(1981), 13(1982), 14(1983), 15(1984), 16(1984), 17(1985), 18(1987), 19(1987), 20(1988), 21(1989), 22(1990)

Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. «1962» (1964).

Математический анализ. «1963» (1965), «1964» (1966), «1965» (1966), «1966» (1967), «1967» (1969), «1968» (1969), «1969» (1971), «1970» (1971); тома 10(1973), 11(1973), 12(1974), 13(1975), 14(1977), 15(1977), 16(1978), 17(1979), 18(1980), 19(1981), 20(1982), 21(1983), 22(1984), 23(1985), 24(1986), 25(1987), 26(1988), 27(1989), 28(1989), 29(1990)

Теория вероятностей. «1963» (1965)

Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. «1964» (1966), «1966» (1967), «1967» (1969), «1968» (1970), «1969» (1970), «1970» (1971); тома 10(1972), 11(1974), 12(1975), 13(1976), 14(1977), 15(1978), 16(1978), 17(1979), 18(1981), 19(1982), 20(1983), 21(1983), 22(1984), 23(1985), 24(1986), 25(1987), 26(1988), 27(1989), 28(1989)

Современные проблемы математики. Тома 1(1973), 2(1973), 3(1974), 4(1975), 5(1975), 6(1976), 7(1976), 8(1977), 9(1977), 10(1978), 11(1978), 12(1978), 13(1979), 14(1979), 15(1980), 16(1980), 17(1981), 18(1981), 19(1982), 20(1982), 21(1982), 22(1983), 23(1983)

Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Тома 24(1984), 25(1984), 26(1985), 27(1985), 28(1986), 29(1986), 30(1987), 31(1987), 32(1988), 33(1988), 34(1989), 35(1989), 36(1989), 37(1989), 38(1990)

Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Тома 1(1985), 2(1985), 3(1985), 4(1985), 5(1986), 6(1988), 7(1985), 8(1986), 9(1986), 10(1986), 11(1986) 12(1986), 13(1986), 14(1987), 15(1987), 16(1987), 17(1988), 18(1988), 20(1988), 21(1988), 22(1988), 23(1988), 24(1988), 25(1988), 26(1988), 27(1988), 28(1988), 29(1988), 30(1988), 31(1988), 32(1988), 33(1988), 34(1988), 35(1989), 36(1989), 37(1989), 38(1989), 39(1989), 41(1989), 42(1989), 43(1989), 45(1989), 46(1989), 48(1989), 49(1990), 50(1989), 51(1989), 54(1989), 55(1989), 57(1990), 58(1990), 59(1990), 62(1990), 63(1989), 64(1989), 69(1991), 70(1989), 83(1991), 85(1991)

* Число в кавычках — название, в скобках — год издания.