В. ХАТСОН
ДЖ. ПИМ

приложения функционального анализа и теории операторов

МОСКВА
"МИР"

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Mathematics in Science and Engineering

A Series of Monographs and Textbooks
Volume 146

Applications of Functional Analysis and Operator Theory

V. C. L. HUTSON
and
John Sydney PYM
University of Sheffield

1980 **Academic Press**
A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich Publishers
LONDON NEW YORK TORONTO
SYDNEY SAN FRANCISCO

В. ХАТСОН

ДЖ. ПИМ

приложения функционального анализа и теории операторов

Перевод с английского

Н. И. ПЛУЖНИКОВОЙ и В. И. АВЕРБУХА

под редакцией

А. А. КИРИЛЛОВА

МОСКВА МИР

1983

ББК 22.162
Х 25
УДК 517.43, 519.55

Хатсон В., Пим Дж. С.

Х 25 Приложения функционального анализа и теории операторов. Пер. с англ. — М.: Мир, 1983, 432 с., ил.

Написанное английскими математиками введение в функциональный анализ (линейный и нелинейный) и его приложения. Книга отличается ясностью и точностью изложения, большим количеством и удачным подбором примеров.

Для математиков, физиков, инженеров, экономистов, аспирантов и студентов университетов.

Х $\frac{1702050000-378}{041(01)-83}$ 32—83, ч. 1

ББК 22.162
517.2

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Функциональный анализ возник на рубеже 19-го и 20-го веков в трудах Гильберта, Фреше, Фредгольма, Лебега и др. После выхода в свет знаменитого трактата С. Банаха он стал самостоятельной дисциплиной. Появились специалисты по функциональному анализу, а затем и по отдельным его областям. Монографии и учебники по функциональному анализу постепенно становились всё более специализированными и более абстрактными. И сейчас читатель, заинтересованный в решении конкретной прикладной задачи, часто не в силах извлечь из имеющейся литературы нужную ему информацию.

С другой стороны, многие математики, успешно работающие в области функционального анализа, уже привыкли воспринимать такие понятия, как банахово пространство, линейный оператор, слабая сходимость и т. п., как априори заданные, не связанные ни с какой конкретной задачей.

Мне кажется, что монография В. Хатсона и Дж. С. Пима поможет уменьшить разрыв, образовавшийся между „прикладным" и „чистым" функциональным анализом. Большое количество хорошо подобранных задач в значительной степени способствует этому.

Авторы не ставят своей целью охватить все или хотя бы основные разделы функционального анализа. Наоборот, они справедливо считают, что уже довольно небольшой запас общих понятий и методов достаточен для многих практических применений. В то же время они не жалеют места и усилий для демонстрации того, как один и тот же общий принцип может применяться в различных конкретных ситуациях. Именно этого не хватает многим „потребителям" функционального анализа.

Отметим также, что книга содержит и такие разделы, которые обычно не включаются в университетский курс: топологические методы нелинейного анализа, теорию бифуркаций, теорию монотонных операторов.

В целом книга будет интересна не только „прикладникам", на которых в первую очередь рассчитывают авторы, но и широкому кругу математиков, желающих познакомиться с многочисленными конкретными проявлениями общих идей функционального анализа.

При переводе были исправлены некоторые опечатки и неточности. На часть из них указали авторы, за что мы хотели бы выразить им признательность. В библиографию добавлено несколько руководств по функциональному анализу, имеющихся на русском языке.

Главы 1—7 перевела Н. И. Плужникова, всё остальное — В. И. Авербух.

А. А. Кириллов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уже давно общепризнано, что функциональный анализ — мощное средство для решения математических задач, возникающих в реальных ситуациях. Тем не менее, если кто-нибудь попытается применить методы функционального анализа к интересующей его области, не имея специальной математической подготовки, он быстро окажется перед отпугивающе высоким барьером — особенно в тех областях, где эти методы наиболее эффективны. Дело в том, что такое применение — скажем, к решению дифференциальных уравнений или нелинейных уравнений — связано с многочисленными техническими моментами, на первый взгляд чрезвычайно сложными. По нашему убеждению, однако, в большинстве случаев „чистого" функционального анализа нужно совсем не так уж много (например, обычно можно обойтись стандартной теорией банаховых пространств, без явного привлечения топологии), и неспециалисту вполне посильно овладеть набором методов, достаточным для весьма широкого диапазона приложений.

Первая цель этой книги — представить читателю те абстрактные методы, которые мы считаем самыми существенными для приложений. Это предопределило тщательный отбор теоретического материала. В то же время, желая сделать отобранный материал как можно более доступным, мы не скупимся на пояснения — их гораздо больше, чем это принято в стандартных руководствах, — и часто иллюстрируем абстрактную теорию на примерах конкретных объектов (множеств функций и т. п.), которые ближе читателю. Чтобы не затемнять суть рассуждений лишними деталями, мы иногда ведем рассмотрение не в максимальной возможной общности, а время от времени читателю предлагается даже принять тот или иной результат без доказательства, если используемые в нем рассуждения несущественны для основной линии изложения.

Вторая наша цель — показать, как работает абстрактная теория на практике. Поначалу исследуемые задачи по необходимости просты, но постепенно очередь доходит до серьезных и довольно глубоких задач, занимающих центральное место в приложениях. За очевидной невозможностью охватить все области приложений мы решили сосредоточить внимание на одной основной области, которую, грубо говоря, можно назвать „решение уравнений". Так, мы рассматриваем приложения спектральной теории самосопряженных операторов к обыкновенным дифференциальным уравнениям, вводную часть теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными, ряд стержневых вопросов численного анализа и некоторые из основных разделов теории нелинейных уравнений. Пожалуй, именно вклад в теорию нелинейных уравнений — самый весомый из вкладов функционального анализа в приложения. Ввиду особой важности этой темы (которой и сейчас посвящено много исследований) мы сделали на ней наибольший акцент — нелинейная теория развивается в книге всякий раз, как только появляется соответствующий теоретический материал. Например, уже в одной из первых глав излагаются сравнительно элементарный метод сжимающих отображений (теорема Банаха о неподвижной точке) и метод Ньютона — Канторовича, а в последних главах обсуждаются глубокая теория степени Лерэ — Шаудера и ее приложения к теории бифуркаций.

По нашему замыслу книга может служить основой курса для математиков-прикладников, физиков или инженеров с теоретическими интересами, а также пособием для всех научных работников, желающих самостоятельно ознакомиться с некоторыми из мощных методов функционального анализа. От читателей требуется определенное знакомство с теорией функций вещественной переменной и, в небольшом объеме, с линейной алгеброй. Значительная часть материала глав 1—5 должна быть известна всякому, кто слушал вводный курс функционального анализа, и всё же мы включили этот материал в книгу, потому что надеемся заинтересовать и читателей, не имеющих такой подготовки. Для неспециалистов камнем преткновения обычно является теория интеграла Лебега — очень нужные для приложений пространства $\mathscr{L}_p$ нельзя построить без этой теории, а подступиться к ней нелегко. В гл. 2 мы даем краткое изложение теории интегрирования по Лебегу, однако сразу хотим заверить читателей, не расположенных вдаваться в технические подробности: лишь немногие факты этой теории (главный из них — „полнота“ пространств $\mathscr{L}_p$) существенны для дальнейшего, и гл. 2 понадобится только для ссылок.

Несколько слов о принятой в книге системе нумерации. Все теоремы, леммы, определения и примеры нумеруются подряд трехразрядными номерами (первый слева разряд — номер главы, второй —

номер параграфа); так, за определением 3.5.7 идет пример 3.5.8. При ссылках всегда используются полные номера. Формулы нумеруются отдельно, также трехразрядными номерами, но в скобках. Задача 3.15 — это пятнадцатая задача в конце гл. 3. Задачи повышенного уровня сложности помечены звездочкой.

В конце книги дан список обозначений. Быть может, не лишне будет заранее подчеркнуть один момент: рукописные буквы применяются для обозначения векторных пространств, причем буквы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ всегда обозначают банаховы пространства, а $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство.

В. Хатсон
Дж. С. Пим

Ноябрь 1979

Благодарности

Авторы признательны д-рам Д. Бёрли, Ч. Аусвэйту и П. Харли за ценные советы и обсуждения. Особая наша благодарность — д-ру Дж. У. Бэйкеру, проф. Л. Э. Фрэнкелу и проф. И. С. Снеддону, потратившим много времени на помощь нам.

Глава 1

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Введение

Одно из первых успешных применений „абстрактного" подхода к практическим задачам было связано с изучением линейного уравнения $Lf = g$ с $n \times n$-матрицей L и n-мерными векторами f, g. Возможность рассматривать L как линейное отображение n-мерного векторного пространства позволяет обойтись без выбора какой-либо конкретной системы координат, а это приводит к упрощению рассуждений и идейной ясности теории. Однако в приложениях чаще всего приходится рассматривать дифференциальные или интегральные уравнения, которые обычно не сводятся к указанному конечномерному виду. Одна из главных задач функционального анализа состоит в том, чтобы выявить аналогичную простую алгебраическую структуру в этих более сложных ситуациях.

В конечномерном случае значительную часть теории можно развить без обращения к понятию сходимости последовательностей векторов. Напротив, в бесконечномерном случае это — основополагающее понятие. Чтобы его ввести, нужно наделить пространство какой-то мерой расстояния между точками. Для большинства приложений достаточно естественным образом обобщить понятие евклидова расстояния. Эта идея находит точное воплощение в определении нормы на векторном пространстве. Принимая абстрактный подход, мы обнаруживаем, что на заданном бесконечномерном пространстве функций часто имеется много разных норм. Это говорит о большой маневренности теории. Однако, прежде чем удается в полной мере воспользоваться ее широкими возможностями, приходится преодолеть определенные трудности. Если в конечномерном случае аналитические свойства пространства (например, то, что ограниченная последовательность всегда содержит сходящуюся подпоследовательность) автоматически следуют из свойств вещественных чисел, то в бесконечномерном случае это уже не так. Некоторые наиболее важные методы решения уравнений включают в себя итерации, и тогда возникает вопрос, какие последовательности заведомо сходятся. В конечномерных пространствах основной критерий сходимости — это критерий Коши, который, грубо говоря, утверждает, что если члены последовательности сближаются, то она сходится. Это условие, называемое полнотой, не всегда выполнено в нормированных бесконечномерных пространствах. Пространства, в которых оно выполнено, наиболее важны как в теории, так и на практике. Это банаховы пространства — основной объект изучения в данной главе.

Чтобы достичь наибольшей общности и идейной простоты, в функциональном анализе принят аксиоматический подход. В качестве источника аксиом выбираются те свойства конечномерных пространств, которые делают эти пространства удобными для изучения. Так, аксиомы векторного пространства навеяны алгебраическими правилами действий над „обычными“ векторами, определение нормы — свойствами евклидова расстояния, а понятие полноты — одним важным свойством вещественных чисел. С другой стороны, понятие базиса, столь полезное в конечномерном случае, в более общих приложениях уже не так плодотворно и не будет играть никакой роли в нашем изложении (кроме специального случая гильбертовых пространств).

Сделаем еще одно, последнее, замечание, касающееся системы понятий, в рамках которой рассматриваются бесконечномерные пространства. Можно провести полезное, хотя и не вполне четкое различие между геометрическими и аналитическими свойствами их элементов. К геометрическим относятся свойства, имеющие аналогии в трехмерном пространстве, например свойства прямых или сфер. Аналитическими обычно считаются свойства, в которых главную роль играют сходимость последовательностей, полнота и т. п. Разумеется, между анализом и геометрией нет ясно очерченной границы, и, более того, они тесно переплетаются между собой. Тем не менее, рассматривая функцию как точку некоторого векторного пространства, можно получить геометрическую картину, которая часто оказывается очень полезной, хотя и не всеобъемлющей.

Цель этой главы — изложить основы теории банаховых пространств. В § 1.2 мы напоминаем элементы теории векторных пространств. Мы не претендуем на исчерпывающее изложение и затрагиваем только те вопросы, которые имеют прямое отношение к последующему. Далее вводятся понятия расстояния и нормы и дается несколько связанных с ними определений (уже знакомых читателю в случае вещественной прямой). В § 1.4 мы подходим к сердцевине теории банаховых пространств — понятию полноты — и приводим несколько примеров конкретных банаховых пространств. В ходе дальнейшего изложения этот список будет расширяться, однако важные пространства $\mathscr{L}_p$ появятся лишь после того, как в следующей главе будет кратко рассмотрена необходимая для их определения теория интегрирования. В последнем параграфе этой главы вводятся гильбертовы пространства. Это банаховы пространства с дополнительной структурой скалярного произведения (построенного по образцу скалярного произведения обычных векторов). Их геометрия во многих важных аспектах обнаруживает еще большее сходство с геометрией евклидовых пространств.

В качестве общих руководств по теории векторных пространств и линейных операторов мы рекомендуем следующие книги: Фридман [1970], Тэйлор [1958], Люстерник и Соболев [1965]; две тысячи или около того страниц Данфорда и Шварца [1958, 1963] содержат почти всё, что известно в этой области. Следует упомянуть также прекрасный вводный курс Симмонса [1963], хотя с сугубо практической точки зрения он, пожалуй, не так полезен.

1.2. Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства подсказаны алгебраическими свойствами сложения и умножения на скаляр обычных трехмерных векторов.

1.2.1. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ — непустое множество, и пусть любой паре f, g его элементов при помощи операции, называемой сложением, можно сопоставить элемент $f+g\in\mathscr{V}$. Пусть для любых $f,\ g,\ h\in\mathscr{V}$

(i) $f+g=g+f$;

(ii) $f+(g+h)=(f+g)+h$;

(iii) существует единственный элемент 0 (называемый нулем) в $\mathscr{V}$, такой что $f+0=f$ для всех $f\in\mathscr{V}$;

(iv) для каждого $f\in\mathscr{V}$ существует единственный элемент $(-f)\in\mathscr{V}$, такой что $f+(-f)=0$.

В качестве скаляров далее будут рассматриваться либо вещественные числа (поле вещественных чисел обозначается через $\mathbb{R}$), либо комплексные (поле комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$). Допустим, что из каждого вектора $f\in\mathscr{V}$ и каждого скаляра α можно образовать элемент $\alpha f\in\mathscr{V}$, причем так, что для любых скаляров α, β

(v) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$;

(vi) $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$;

(vii) $(\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$;

(viii) $1\cdot f=f$.

Тогда $\mathscr{V}$ называется **комплексным векторым пространством** (или просто **векторным пространством**), если поле скаляров совпадает с $\mathbb{C}$, и **вещественным векторным пространством**, если полем скаляров служит $\mathbb{R}$. **Элементы** f, g, h, ... пространства $\mathscr{V}$ называют также **точками** или **векторами** в зависимости от контекста.

Дополнительная общность, которая достигается взятием в качестве скаляров комплексных чисел, полезна при изучении пространств функций и редко приводит к каким-либо трудностям. Подчеркнем еще раз, что под векторным пространством мы *всегда* понимаем комплексное векторное пространство; если речь идет о вещественном векторном пространстве, это явно оговорено.

Для обычных векторов известны еще две операции — скалярное и векторное умножение. Первая из них имеет полезное обобщение, которое мы рассмотрим в § 1.5; векторное умножение не будет здесь обсуждаться.

В теории конечномерных пространств важную роль играют такие понятия, как „линейная независимость", „базис", „размерность". Однако они не всегда хорошо обобщаются на бесконечномерный случай. Почти всё, что нужно знать об этих понятиях для целей данной книги, подытожено в следующем определении:

1.2.2. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ — векторное пространство. *Конечное* множество $S=\{f_j\}_{j=1}^n$ векторов из $\mathscr{V}$ называется **линейно-зависимым,** если существуют скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, для которых $\sum \alpha_j f_j = 0$. В противном случае S называется **линейно-независимым.** Произвольное множество S векторов из $\mathscr{V}$ **линейно-независимо**, если каждое его непустое конечное подмножество линейно-независимо. В противном случае оно **линейно-зависимо.**

Если существует положительное целое n, такое что $\mathscr{V}$ содержит n линейно-независимых векторов, но не содержит $n+1$, то $\mathscr{V}$ называется **конечномерным** пространством **размерности** n. Если $\mathscr{V}$ не является конечномерным, оно называется **бесконечномерным.** Конечное множество S элементов $\mathscr{V}$ называется **базисом** $\mathscr{V}$, если S линейно-независимо и каждый элемент $\mathscr{V}$ можно записать в виде $\sum\limits_1^n \alpha_j f_j$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ и $f_1, \ldots, f_n \in S$ (разумеется, n — размерность $\mathscr{V}$).

Отметим, что понятие базиса было нами сейчас определено только для конечномерных пространств. Соответствующее понятие для бесконечномерных пространств намного менее полезно (см. замечание после примера 1.4.20); исключением является лишь случай гильбертовых пространств[1] (§ 1.5).

Приведем несколько примеров векторных пространств.

1.2.3. Пример. Пусть $\mathscr{V}$ — множество упорядоченных n-наборов (т. е. конечных последовательностей) скаляров $(f_1, \ldots, f_n)$, и пусть $f=(f_1, \ldots, f_n)$, $g=(g_1, \ldots, g_n)$ — произвольные элементы $\mathscr{V}$. Если в качестве операций взять покомпонентное сложение и поком-

[1] Но и в этом случае определение базиса приходится изменить. — *Прим. ред.*

понентное умножение на скаляр:

$$f+g=(f_1+g_1, \ldots, f_n+g_n),$$
$$\alpha f=(\alpha f_1, \ldots, \alpha f_n) \quad (\alpha \text{ — скаляр}),$$

то в зависимости от рассматриваемого поля скаляров получится вещественное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ или (комплексное) векторное пространство $\mathbb{C}^n$. Скаляры f_i называются компонентами f. В $\mathbb{R}^3$ мы узнаём пространство обычных трехмерных векторов.

1.2.4. Пример. Если немного обобщить предыдущий пример и взять в качестве элементов бесконечные последовательности $f=(f_n)$, а правила действий сохранить, то получится бесконечномерное пространство. Оно обозначается буквой l и называется *пространством последовательностей.*

1.2.5. Пример. Наиболее важными для приложений, безусловно, являются пространства, элементами которых служат функции. Чтобы проиллюстрировать естественные правила действий над функциями, рассмотрим множество $\mathscr{V}$ комплекснозначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Для $f, g \in \mathscr{V}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ определим новые функции $f+g$ и αf, полагая для всех $x \in [a, b]$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

Разумеется, $(f+g)(x)$ и $(\alpha f)(x)$ суть значения функций $f+g$ и αf в точке x. Эти операции называются соответственно поточечным сложением и умножением на скаляр. Легко проверить, что аксиомы векторного пространства выполнены и $\mathscr{V}$ — (комплексное) векторное пространство. Вещественнозначные функции подобным же образом составляют вещественное векторное пространство. Ясно, что пространство $\mathscr{V}$ бесконечномерно.

В общем случае векторные пространства произвольных функций не поддаются изучению, и на класс допустимых функций всегда налагаются какие-нибудь ограничения. Например, рассматривают пространство ограниченных функций. Другой, особенно важный, пример — пространство $\mathscr{C}([a, b])$ ограниченных непрерывных функций, заданных на $[a, b]$. Вскоре мы приведем еще несколько примеров.

Следует подчеркнуть, что в предыдущем примере точками пространства $\mathscr{V}$ были функции. Здесь легко проследить геометрический подход, о котором говорилось во введении; его цель — попытаться описать свойства множеств функций на языке знакомых геометрических понятий, представляя себе функции как точки „реального“ пространства. Придерживаясь этой аналогии, обобщим понятие прямых и плоскостей, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^3$.

1.2.6. Определение. **Линейным подпространством** $\mathscr{M}$ векторного пространства $\mathscr{V}$ называется непустое подмножество в $\mathscr{V}$, которое само является векторным пространством с теми же правилами действий, что и в $\mathscr{V}$. Оно может состоять из одного нуля, и в этом случае мы будем писать $\mathscr{M} = 0$.

Слово „линейный" включено в название для того, чтобы подчеркнуть чисто алгебраический характер $\mathscr{M}$ и избежать путаницы с „замкнутым подпространством" (определение 1.4.12), на которое налагается некое дополнительное аналитическое условие. Всякое линейное подпространство обязательно содержит 0. Обобщением произвольной прямой или плоскости (не проходящей через нуль) служит *аффинное многообразие* (любое множество вида $\{f+g\colon g \in \mathscr{M}\}$, где $f \in \mathscr{V}$ фиксировано, а $\mathscr{M}$ — линейное подпространство), но это понятие используется реже.

1.2.7. Определение. Пусть S — непустое подмножество векторного пространства $\mathscr{V}$. Множество всех конечных (т. е. состоящих из конечного числа членов) линейных комбинаций элементов S называется **линейной оболочкой** S и обозначается $[S]$.

Ясно, что $[S]$ — линейное подпространство в $\mathscr{V}$. Отсюда видно, что во всяком векторном пространстве содержится великое множество различных линейных подпространств, и поэтому стоит иметь в виду возможность разложения $\mathscr{V}$ на линейные подпространства.

1.2.8. Определение. Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — линейные подпространства векторного пространства $\mathscr{V}$, и пусть $\mathscr{M}, \mathscr{N} \neq 0$. Предположим, что каждый элемент $f \in \mathscr{V}$ можно представить в виде $f = g + h$, где $g \in \mathscr{M}$, $h \in \mathscr{N}$. Тогда мы будем писать $\mathscr{V} = \mathscr{M} + \mathscr{N}$ и называть $\mathscr{V}$ **векторной суммой** подпространств $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$. Если, кроме того, векторы g и h однозначно определены для каждого $f \in \mathscr{V}$, то $\mathscr{V}$ называется **прямой суммой** $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ и мы пишем $\mathscr{V} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$.

1.2.9. Лемма. *Допустим, что $\mathscr{V} = \mathscr{M} + \mathscr{N}$. Тогда $\mathscr{V} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ в том и только том случае, если $\mathscr{M} \cap \mathscr{N} = 0$.*

1.2.10. Пример. Пусть $\mathscr{V}$ есть векторное пространство $\mathscr{C}([-1, 1])$ непрерывных комплекснозначных функций, определенных на $[-1, 1]$. Возьмем две различные точки $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ и для $i = 1, 2$ положим $\mathscr{M}_i = \{f\colon f \in \mathscr{V},\ f(x_i) = 0\}$. Очевидно, что каждое $\mathscr{M}_i$ — линейное подпространство в $\mathscr{V}$. Кроме того, $\mathscr{V} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2$, но $\mathscr{V} \neq \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2$, так как $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 \neq 0$.

Четные и нечетные функции образуют линейные подпространства $\mathscr{M}_{\text{чет}}$ и $\mathscr{M}_{\text{неч}}$ пространства $\mathscr{V}$; ясно, что $\mathscr{V} = \mathscr{M}_{\text{чет}} \oplus \mathscr{M}_{\text{неч}}$.

Если S_1 и S_2 — два произвольных множества, то множество упорядоченных пар $[f, g]$, где $f \in S_1$, $g \in S_2$, обозначается $S_1 \times S_2$. Это обозначение дает удобный способ описания некоторых подмножеств. Например, квадрат $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ принимает в такой записи вид $[0, 1] \times [0, 1]$. Если $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — векторные пространства, то $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ можно превратить в векторное пространство следующим образом:

1.2.11. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — векторные пространства. Для $f_1, f_2 \in \mathscr{V}$ и $g_1, g_2 \in \mathscr{W}$ положим

$$[f_1, g_1] + [f_2, g_2] = [f_1 + f_2, g_1 + g_2],$$
$$\alpha [f_1, g_1] = [\alpha f_1, \alpha g_1] \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

Векторное пространство $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$, состоящее из всевозможных элементов $[f, g]$ называют **прямым произведением** $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ [1]. (Простейшим примером служит $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.)

Полезное обобщение допускает геометрическое понятие выпуклого тела.

1.2.12. Определение. Подмножество S векторного пространства $\mathscr{V}$ называется **выпуклым**, если для каждых $f, g \in S$ элемент $af + (1 - a) g$ лежит в S при всяком a, $0 \leqslant a \leqslant 1$. Равносильное требование состоит в том, что $(af + bg)/(a + b)$ лежит в S для всех $f, g \in S$ и всех неотрицательных и не равных одновременно нулю a, b. Наименьшее выпуклое подмножество в $\mathscr{V}$, содержащее S, называется **выпуклой оболочкой** S и обозначается $\operatorname{co} S$.

1.3. Нормированные векторные пространства

Векторное пространство — это чисто алгебраический объект, и если мы хотим заниматься в нем анализом, нужно ввести какой-то способ измерения расстояния. Это делают, вводя так называемую норму. В данном параграфе мы покажем, что многие обычные понятия (самое важное из которых — сходимость) анализа в пространстве $\mathbb{R}^3$ с обычным расстоянием $|\cdot|$ допускают разумное обобщение на нормированные векторные пространства. Кроме того, мы обсудим некоторые наиболее часто встречающиеся примеры таких пространств. Как правило, на одном и том же векторном пространстве можно ввести целый ряд разных норм. Соображения, которыми руководствуются при конкретном выборе нормы, мы обсудим в следующем параграфе. Следует отметить, что в общем нормированном пространстве не существует никаких аналогов понятия угла или перпендикулярности, вследствие чего геометрия на нем, как

[1] Отметим, что пространство $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ является прямой суммой своих линейных подпространств $\mathscr{V} \times 0$ и $0 \times \mathscr{W}$, которые можно отождествить с $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ соответственно. — *Прим. ред.*

мы увидим на одном примере, может оказаться довольно необычной. Однако для некоторых норм удается ввести разумное определение перпендикулярности (см. § 1.5), и тогда геометрия гораздо больше напоминает геометрию евклидова пространства.

Интуитивно мы представляем себе расстояние между двумя точками как неотрицательное число, симметричное относительно них и удовлетворяющее неравенству треугольника. Эти соображения подсказывают следующее определение:

1.3.1. Определение. Пусть X — произвольное множество, и пусть каждой паре его элементов $f, g \in X$ сопоставлено неотрицательное число $d(f, g)$ так, что для всех $f, g, h \in X$

(i) $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;

(ii) $d(f, g) = d(g, f)$;

(iii) $d(f, g) \leqslant d(f, h) + d(h, g)$ (неравенство треугольника).

Функция d называется **метрикой** на X, а само X, снабженное метрикой, называется **метрическим пространством.**

Это определение не предполагает никакой алгебраической структуры на X. Для большинства представляющих интерес векторных пространств можно ввести более сильное понятие нормы (служащей мерой расстояния от начала). Принятое для нормы обозначение $\|\cdot\|$ подчеркивает, что это есть обобщение обычного расстояния в $\mathbb{R}^3$.

1.3.2. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ — векторное пространство, и пусть каждому его элементу f сопоставлено неотрицательное число $\|f\|$ так, что для всех $f, g \in \mathscr{V}$ выполнены следующие условия:

(i) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$ для любого скаляра α;

(iii) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ (неравенство треугольника).

Величина $\|f\|$ называется **нормой** вектора f, а $\mathscr{V}$ называют в этом случае **нормированным (векторным) пространством.** Начиная отсюда, мы будем всегда обозначать символами $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ нормированные векторные пространства.

При помощи нормы легко получить метрику, положив $d(f, g) = \|f - g\|$, поэтому всякое нормированное пространство является метрическим пространством [1]. Нормированные пространства будут играть в этой книге гораздо более важную роль, чем метрические;

[1] Обратно, метрическое векторное пространство будет нормированным, если расстояние в этом пространстве согласовано естественным образом с алгебраическими операциями: $d(x + z,\ y + z) = d(x, y)$ (инвариантность относительно сдвигов) и $d(\alpha x,\ \alpha y) = |\alpha| d(x,\ y)$ (однородность относительно растяжений). — *Прим. ред.*

последние будут встречаться нам лишь в виде подмножеств нормированного векторного пространства, не являющихся линейными подпространствами. Отметим, что на одном и том же векторном пространстве часто можно ввести более чем одну норму, и соответствующие нормированные пространства рассматриваются как различные.

Аналог шара в $\mathbb{R}^3$ обычно называют шаром и в функциональном анализе. Вводимые ниже термины „открытый“ и „замкнутый“ навеяны понятиями открытого и замкнутого интервалов вещественной прямой; ниже они будут рассмотрены в более общем контексте.

1.3.3. Определение. Пусть заданы вектор $f \in \mathscr{V}$ и число r, $0 < r < \infty$. Множества $S(f, r) = \{g\colon \|f - g\| < r\}$ и $\bar{S}(f, r) = \{g\colon \|f - g\| \leqslant r\}$ называются соответственно **открытым** и **замкнутым шарами** с центром f и радиусом r. Открытый или замкнутый шар с центром в начале и радиусом 1 называется соответственно открытым или замкнутым **единичным шаром**.

1.3.4. Определение. Подмножество S в $\mathscr{V}$ называется **ограниченным**, если оно содержится в некотором шаре (конечного радиуса). Если S ограничено, его **диаметром** называется верхняя грань расстояний между принадлежащими ему двумя точками. **Расстоянием** $\operatorname{dist}(f, S)$ точки f от множества S называется число $\inf\limits_{g \in S} \|f - g\|$[1].

1.3.5. Пример. Пусть $\mathscr{V} = \mathbb{R}^n$. Определим *евклидову норму* вектора $f = (f_1, \ldots, f_n)$, полагая

$$\|f\|_2 = \left\{\sum_1^n f_i^2\right\}^{1/2}.$$

При $n = 3$ эта норма совпадает с обычным расстоянием в $\mathbb{R}^3$. Замкнутый единичный шар $\bar{S}(0, 1)$ в $\mathbb{R}^3$ — это просто обычный шар с центром в начале и радиусом 1. Шар $\bar{S}(0, 1)$ не является векторным пространством, но, если положить $d(f, g) = \|f - g\|_2$, он станет метрическим пространством.

1.3.6. Пример. На этом примере мы увидим, что геометрия в нормированном пространстве может проявлять необычные черты. Пусть $\mathscr{V} = \mathbb{R}^2$; определим норму элемента $f = (f_1, f_2)$, полагая $\|f\|_1 = |f_1| + |f_2|$. Очевидно, что тогда $\mathscr{V}$ — нормированное векторное пространство. Единичным шаром в нем служит квадрат, изображенный на рис. 1.1! Этот факт приводит к неприятным последствиям. В обычном двумерном пространстве ($\mathbb{R}^2$ с евклидовой нормой), если заданы проходящая через начало прямая l и не лежащая на ней точка P, найдется единственная точка P' на l, такая

[1] Символами inf и sup (сокращения от infimum и supremum) обозначаются соответственно нижняя и верхняя грани.

что расстояние PP' минимально. На языке векторных пространств это означает, что для данного линейного подпространства $\mathscr{M}$ и точки $f \notin \mathscr{M}$ найдется единственная точка $g \in \mathscr{M}$, такая что $\|f-g\|$ минимально. Однако для нормы $\|\cdot\|_1$ эта единственность утрачена. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять в качестве $\mathscr{M}$ прямую под углом $\pi/4$ к оси и $f=(1,0)$. Тогда любой вектор $g \in \mathscr{M}$ имеет компоненты (α, α) и $\|f-g\|_1 = |1-\alpha| + |\alpha|$. Минимум $\|f-g\|_1$ равен 1 и достигается для *любого* α, такого что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. А в некоторых нормированных векторных пространствах, когда $\mathscr{M}$ бесконечномерно, минимум может не достигаться ни для какого $g \in \mathscr{M}$.

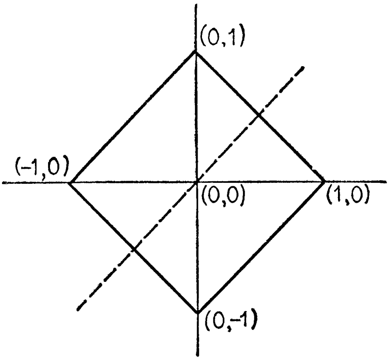

Рис. 1.1.

Анализ в нормированном векторном пространстве изучает главным образом свойства бесконечных множеств точек. Наиболее важным понятием является понятие сходимости последовательности. При помощи этого понятия мы сможем описать два типа подмножеств $\mathscr{V}$, которые обычно находятся в центре внимания.

1.3.7. Определение. Пусть (f_n) — последовательность элементов $\mathscr{V}$. Она называется **сходящейся**, если существует такой вектор $f \in \mathscr{V}$, что $\lim\|f_n - f\| = 0$. Вектор f называется **пределом** последовательности (f_n), и мы пишем $f_n \to f$ или $\lim f_n = f$.

Сходящаяся последовательность имеет единственный предел: если $f_n \to f$ и $f_n \to g$, то по неравенству треугольника

$$\|f-g\| = \|f-f_n+f_n-g\| \leqslant \|f-f_n\| + \|f_n-g\|,$$

а правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда $f=g$.

1.3.8. Определение. Пусть S — подмножество в $\mathscr{V}$. Определим новое подмножество $\bar{S} \subset \mathscr{V}$, называемое **замыканием** S, потребовав выполнения следующего условия: $f \in \bar{S}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность (необязательно различных) точек из S, сходящаяся к f. Подмножество S называется **замкнутым,** если $S = \bar{S}$.

Пусть S_1, S_2 — два подмножества в $\mathscr{V}$ и $S_1 \subset S_2$; S_1 называется **замкнутым в** S_2, если S_1 есть пересечение с S_2 некоторого замкнутого множества. **Замыкание** S_1 **в** S_2 есть $\bar{S}_1 \cap S_2$.

1.3.9. Определение. Подмножество $S \subset \mathscr{V}$ называется **открытым,** если выполнено одно из следующих равносильных условий:

(i) его дополнение $\mathscr{V} \setminus S$ замкнуто;

(ii) для всякого $f \in S$ найдется открытый шар с центром в f, содержащийся в S.

Если $S_1 \subset S_2 \subset \mathscr{V}$, то S_1 называется **открытым в** S_2, когда S_1 есть пересечение с S_2 некоторого открытого множества.

Окрестностью точки называется всякое множество, которое содержит открытое подмножество, содержащее эту точку.

В определении 1.3.8 допускается последовательность из повторяющихся точек, поэтому множество, состоящее из одной точки, замкнуто. Отметим, что точка f принадлежит замыканию S_1 в S_2 тогда и только тогда, когда она лежит в S_2 и является пределом последовательности точек S_1. Произвольное множество не обязано быть ни замкнутым, ни открытым. Вообще говоря, оно может оказаться и открытым, и замкнутым одновременно, хотя в нормированном векторном пространстве этим свойством обладают только всё пространство и пустое множество. Легко видеть, что открытый шар есть открытое множество, а замкнутый — замкнутое. Дальнейшие свойства открытых и замкнутых множеств перечислены в задачах 1.3—1.7.

1.3.10. Определение. Точка f называется **внутренней точкой** множества $S \subset \mathscr{V}$, если существует ее окрестность, содержащаяся в S. Множество S° внутренних точек S называется **внутренностью** S (это — открытое множество).

Точка f называется **граничной точкой** множества S, если всякая ее окрестность содержит как точки S, так и точки его дополнения $\mathscr{V} \setminus S$. Множество ∂S граничных точек S называется **границей** S.

1.3.11. Пример. Проиллюстрируем введенные понятия на одном простом примере. Более трудные примеры еще появятся. Пусть a, b — концы конечного интервала. Тогда $(a, b) = \{x \colon a < x < b\}$ — открытое множество, а $[a, b] = \{x \colon a \leqslant x \leqslant b\}$ — замкнутое. Множество $[a, b) = \{x \colon a \leqslant x < b\}$ не является ни открытым, ни замкнутым: первое потому, что всякий шар с центром в a содержит точки, не лежащие в $[a, b)$, а второе потому, что b есть предел точек из $[a, b)$, но $b \notin [a, b)$.

Далее, предположим, что S — множество рациональных точек отрезка $[a, b]$. Оно тоже не является ни открытым, ни замкнутым, ибо для всякого $c \in S$ шар с центром в c содержит иррациональные точки и предел последовательности рациональных точек может оказаться иррациональным. Более того, S не содержит ни одного открытого подмножества, поэтому его внутренность пуста. С другой стороны, его границей является весь отрезок $[a, b]$ —

намного большее множество, чем само S. Здесь нас подводит интуитивное представление о границе как о „тонком“ множестве

До сих пор мы имели дело только с конечномерными нормированными векторными пространствами. В качестве первого бесконечномерного примера рассмотрим пространство последовательностей l (пример 1.2.4) и определим (возможно, бесконечные) величины

$$\|f\|_p = \left\{\sum |f_n|^p\right\}^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty), \tag{1.3.1}$$

$$\|f\|_\infty = \sup |f_n|, \tag{1.3.2}$$

где $f \in l$ есть последовательность (f_n). Мы покажем сейчас, что $\|\cdot\|_p$ — норма на подмножестве в l, состоящем из тех f, для которых величина $\|f\|_p$ конечна. Единственная трудность здесь — проверка неравенства треугольника. Она проводится при помощи доказываемого ниже неравенства Минковского. Приведенное вместе с ним неравенство Гёльдера окажется полезным позднее.

Два числа p, q, такие что $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$, называются *сопряженными индексами*, если $p^{-1} + q^{-1} = 1$; если $p = 1$, то $q = \infty$.

1.3.12. Теорема. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и пусть q — сопряженный индекс. Тогда для любых f, $g \in l$ имеют место следующие неравенства (допускаются бесконечные значения):*

(i) $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$ (неравенство Гёльдера);

(ii) $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ (неравенство Минковского).

Доказательство. (i) Можно считать, что $0 < \|f\|_p$, $\|g\|_q < \infty$, так как иначе неравенство очевидно. Для $p = 1$

$$\|fg\|_1 = \sum |f_n g_n| \leqslant \left(\sum |f_n|\right) \sup |g_n| = \|f\|_1 \|g\|_\infty,$$

и аналогичную цепочку можно написать для $q = 1$. В случае p, $q > 1$ имеет место элементарное неравенство $ab \leqslant p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$ $(a, b \geqslant 0)$, из которого, полагая $a = |f_n|/\|f\|_p$, $b = |g_n|/\|g\|_q$, получаем

$$|f_n g_n| / \|f\|_p \|g\|_q \leqslant p^{-1} |f_n|^p / \|f\|_p^p + q^{-1} |g_n|^q / \|g\|_q^q.$$

Суммирование по n дает

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant p^{-1} \frac{\sum |f_n|^p}{\|f\|_p^p} + q^{-1} \frac{\sum |g_n|^q}{\|g\|_q^q} = p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

(ii) Замечая, что $(p-1)q = p$, и пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\sum |f_n + g_n|^p = \sum |f_n| |f_n + g_n|^{p-1} + \sum |g_n| |f_n + g_n|^{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_p \left\{\sum |f_n + g_n|^{(p-1)q}\right\}^{1/q} + \|g\|_p \left\{\sum |f_n + g_n|^{(p-1)q}\right\}^{1/q},$$

откуда следует требуемый результат, если $\|f+g\|_p \neq 0, \infty$. В случае $\|f+g\|_p = 0$ утверждение очевидно. Если $\|f+g\|_p = \infty$, то из неравенства

$$|f_n + g_n|^p \leqslant (2 \max(|f_n|, |g_n|))^p \leqslant 2^p (|f_n|^p + |g_n|^p)$$

путем суммирования выводим, что либо $\|f\|_p$, либо $\|g\|_p$ бесконечна, откуда и следует доказываемое неравенство □.

1.3.13. Определение. Выберем некоторое $p \geqslant 1$. Нормированное векторное пространство, состоящее из всех таких $f = (f_1, f_2, \ldots) \in l$, что $\|f\|_p < \infty$, обозначается l_p.

1.3.14. Пример. С понятием сходимости в бесконечномерном пространстве связаны новые (по сравнению с конечномерным случаем) трудности, которые можно проиллюстрировать следующим образом.

Ясно, что $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ являются нормированными векторными пространствами с нормой $\|\cdot\|_p$. Нетрудно показать, что независимо от выбранного $p \geqslant 1$ последовательность $(f^{(k)})$, где $f^{(k)} = \left(f_1^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}\right)$, сходится тогда и только тогда, когда сходится каждая последовательность компонент, т. е. сходится $\left(f_j^{(k)}\right)$ при всяком j.

В l_p это условие уже не является достаточным. В самом деле, рассмотрим в l_∞ последовательность $(f^{(k)})$, где $f^{(k)}$ — вектор, первые k компонент которого — нули, а остальные — единицы. Ясно, что $\lim\limits_{k \to \infty} f_j^{(k)} = 0$ при любом j, откуда следует, что если $(f^{(k)})$ имеет предел, то он должен равняться нулю. Но $\|f^{(k)}\|_\infty = 1$ при всех k, поэтому последовательность не сходится. Более того, нетрудно построить последовательность, сходящуюся в l_∞, но не сходящуюся в l_1, откуда видно, что сходимость в l_p зависит от индекса p.

Чрезвычайно важную роль в приложениях играют нормированные векторные пространства непрерывных и дифференцируемых функций, поэтому мы исследуем подробнее возникающие здесь возможности.

1.3.15. Определение. Пусть Ω — подмножество $\mathbb{R}^n$, а f — определенная на нем комплекснозначная функция. Функция f называется **непрерывной в точке** $x_0 \in \Omega$, если выполнено одно из следующих равносильных условий:

(i) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при всех $x \in \Omega$, для которых $|x - x_0| < \delta$;

(ii) для всякой последовательности (x_n) элементов Ω, сходящейся к пределу x_0, $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Функция f называется **непрерывной,** если она непрерывна в каждой точке Ω.

1.3.16. Определение. Функция f называется **равномерно непрерывной** на Ω, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x, x_0 \in \Omega$, для которых $|x - x_0| < \delta$.

Если в качестве Ω рассматривается конечный отрезок $[a, b]$, то непрерывность в точках a и b означает соответственно непрерывность справа и слева. Если f непрерывна на $[a, b]$, она ограничена, однако если она непрерывна только на (a, b), то может оказаться и неограниченной. Для функций нескольких переменных непрерывность в смысле нашего определения иногда называют „непрерывностью по совокупности переменных“, в отличие от „непрерывности по отдельным переменным“, которая означает, что функция непрерывна по каждой переменной при фиксированных значениях остальных. Например, если f — функция двух переменных, то последнее свойство означает лишь, что непрерывны функции одной переменной $f(x, \cdot)$ [1] и $f(\cdot, y)$ при фиксированном x и y соответственно. Свойство равномерной непрерывности сильнее свойства непрерывности, поскольку одно и то же δ должно годиться для всех $x_0 \in \Omega$, однако если множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и ограничено, то эти свойства равносильны (теорема 5.3.2).

1.3.17. Определение. Пусть Ω — подмножество $\mathbb{R}^n$. Векторное пространство ограниченных непрерывных комплекснозначных функций, определенных на Ω, обозначается $\mathscr{C}(\Omega)$.

Пространство $\mathscr{C}(\Omega)$ можно нормировать разными способами. Положим сначала

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Тогда $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ для всех x, откуда $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$. Следовательно, $\|\cdot\|$ — норма на $\mathscr{C}(\Omega)$.

1.3.18. Определение. Норму (1.3.3) мы будем называть **sup-нормой.** Иногда ее называют „равномерной нормой“, но мы не будем пользоваться здесь этим названием, чтобы избежать путаницы с другими употреблениями термина „равномерный“ в функциональном анализе.

Итак, $\mathscr{C}(\Omega)$ с sup-нормой является нормированным векторным пространством. Это пространство очень важно и будет часто использоваться в дальнейшем. Другая возможная норма определяется формулой

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)|\, dx. \tag{1.3.4}$$

[1] При использовании обозначения $f(x, \cdot)$ подразумевается, что x фиксировано и f рассматривается как функция лишь второго аргумента. Мы часто будем применять такую запись.

По причинам, которые станут понятными в следующем параграфе, это неподходящая норма для $\mathscr{C}(\Omega)$; в большинстве задач, связанных с непрерывными функциями, лучше выбирать sup-норму. Ряд полезных способов обобщения пространства $\mathscr{C}(\Omega)$ подсказывается исследованием дифференциальных уравнений.

1.3.19. Пример. Один из методов решения задачи Коши для дифференциального уравнения

$$df(x)/dx = \psi[x, f(x)] \tag{1.3.5}$$

на отрезке $[a, b]$ основан на превращении этого уравнения в интегральное (см. теорему 4.3.11). Если удается найти решение последнего в $\mathscr{C}([a, b])$, то при некоторых слабых ограничениях на ψ легко показать, что это решение дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (1.3.5). Аналогично в случае эллиптического дифференциального уравнения в частных производных на $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ можно при помощи функции Грина получить интегральное уравнение, которое поддается решению в $\mathscr{C}(\Omega)$.

1.3.20. Пример. Часто небольшое обобщение пространства $\mathscr{C}([a, b])$ позволяет аналогичным образом решать задачу Коши для системы уравнений

$$\frac{df_j(x)}{dx} = \psi_j(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.3.6}$$

1.3.21. Определение. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — функция со значениями в $\mathbb{C}^m$, причем каждая компонента f_j есть ограниченная непрерывная комплекснозначная функция на некотором множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Множество таких функций с правилами действий

$$(f+g)(x) = (f_1(x) + g_1(x), \ldots, f_m(x) + g_m(x)),$$
$$(\alpha f)(x) = (\alpha f_1(x), \ldots, \alpha f_m(x)), \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

является векторным пространством и обозначается $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{C}^m)$; соответствующее вещественное пространство $\mathbb{R}^m$-значных функций обозначается $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Здесь sup-норма определяется формулой

$$\|f\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} |f_j(x)|.$$

В случае $\Omega \subset \mathbb{R}$ можно записать систему (1.3.6) в компактном виде

$$df(x)/dx = \psi(x, f(x))$$

и решать соответствующее интегральное уравнение в $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ (см. теорему 4.3.11).

1.3.22. Пример. Другой (и в некоторых отношениях более привлекательный) метод обращения с дифференциальным уравнением состоит в том, что пытаются решать само это уравнение непосредственно, минуя промежуточную ступень построения интегрального уравнения. При таком подходе, естественно, понадобятся пространства дифференцируемых функций. Поскольку производные определяются при помощи перехода к пределам, в случае произвольного множества Ω могут возникнуть трудности. Этим объясняются ограничения на Ω, налагаемые в следующем определении.

1.3.23. Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть k — некоторое натуральное число. Векторное пространство (с обычными правилами действий), состоящее из всех $\mathbb{C}^m$-значных функций, определенных на Ω и таких, что все частные производные порядка $\leqslant k$ всех их компонент ограничены и непрерывны, обозначается $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{C}^m)$. Векторное пространство $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C}^m)$ состоит из функций, лежащих в $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{C}^m)$ при каждом $k \geqslant 0$, т. е. $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C}^m) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{C}^m)$.

Пространство $\mathscr{C}^k(\bar{\Omega}, \mathbb{C}^m)$ состоит из непрерывных функций, определенных на $\bar{\Omega}$, которые на Ω имеют ограниченные и *равномерно* непрерывные частные производные всех порядков $\leqslant k$. (При $n > 1$ это позволяет избежать трудностей, связанных с определением производных на границе Ω, которая, вообще говоря, не обязана быть гладким множеством.) Как и выше, $\mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{C}^m) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}^k(\bar{\Omega}, \mathbb{C}^m)$.

Наконец, иногда удобно исключить из рассмотрения границу. Пространство $\mathscr{C}_0^k(\Omega', \mathbb{C}^m)$, где $\Omega \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}$, содержит те и только те функции из $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{C}^m)$, которые имеют ограниченный носитель [1], лежащий внутри Ω' (причем у разных функций могут быть разные носители).

Символами $\mathscr{C}^k(\Omega)$, ... и $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, ... обозначаются, естественно, соответствующие подмножества пространств $\mathscr{C}(\Omega)$ и $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Итак, функция, определенная на конечном отрезке $[a, b]$, принадлежит $\mathscr{C}^1([a, b])$ тогда и только тогда, когда она имеет непрерывную производную на (a, b), а в точках b и a имеет соответственно левую и правую производные, которые являются пределами значений производной во внутренних точках.

Одной из норм на пространстве $\mathscr{C}^k(\bar{\Omega})$ является, разумеется, sup-норма. Но есть и другие возможности. Возьмем $\Omega = (a, b)$ и положим

$$\|f\|_{\mathscr{C}^k} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(j)}(x)|, \tag{1.3.7}$$

[1] *Носитель* функции f (обозначаемый $\operatorname{supp} f$) — это замыкание множества, на котором f отлична от нуля.

где $f^{(j)}$ обозначает j-ю производную f. Эта норма гораздо больше подходит для построения анализа в $\mathscr{C}^k(\Omega)$. Соответствующие нормы в случае, когда Ω — подмножество $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, можно определить, рассматривая частные производные.

В заключение этого параграфа проиллюстрируем самые важные из введенных выше понятий на примере пространства $\mathscr{C}([0, 1])$.

1.3.24. Пример. Допустим сначала, что $\mathscr{C}([0, 1])$ снабжено sup-нормой. Если $g(x) = 2 - x^2$, то замкнутый шар $\bar{S}(g, 1/2)$ с центром g и радиусом $1/2$ состоит из непрерывных функций f, графики которых лежат в заштрихованной области на рис. 1.2. Для открытого шара $S(g, 1/2)$ соответствующие графики не должны задевать штриховых линий; его граница $\partial S(g, 1/2)$ есть подмножество в $\bar{S}(g, 1/2)$, состоящее из функций, графики которых задевают эти линии.

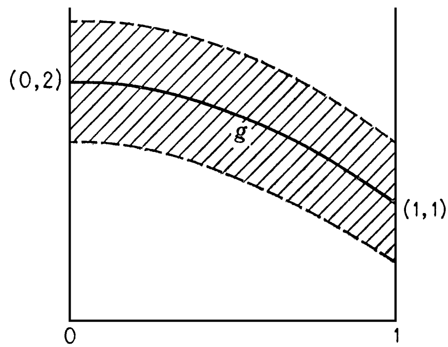

Рис. 1.2. Шар $S(g, 1/2)$ в пространстве $\mathscr{C}([0, 1])$ с sup-нормой, состоящей из всех непрерывных функций, графики которых лежат в заштрихованной области.

Если вместо sup-нормы рассмотреть норму $\|\cdot\|_1$ (см. (1.3.4)), то никакого простого графического описания соответствующих шаров не получится, ибо они содержат также и функции, близкие к g для большинства значений x, но имеющие высокие острые пики.

Сравним понятие „близости" двух функций f, g относительно sup-нормы и нормы $\|\cdot\|_1$: sup-норма ограничивает разность $|f(x) - g(x)|$ при каждом x, в то время как $\|\cdot\|_1$ ограничивает лишь среднее значение этой разности. Сходимость относительно sup-нормы — очень сильное условие; оно влечет за собой сходимость относительно нормы $\|\cdot\|_1$. Обратное, разумеется, неверно (чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть последовательность (x^n)).

1.3.25. Пример. Пусть $S = \{f\colon f \in \mathscr{C}([0, 1]),\ 0 < f(x) < 1\}$. В случае нормы $\|\cdot\|_1$ для всякой функции $f \in S$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g \in \mathscr{C}([0, 1])$, что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ и g принимает отрицательные значения для некоторых x. Следовательно, множество S не является открытым. Оно и не замкнуто (нулевая функция есть предел последовательности функций из S). Легко видеть, что S имеет пустую внутренность и что его граница ∂S целиком содержит само S. В противоположность этому относительно sup-нормы множество S открыто.

1.4. Банаховы пространства

Как показывает изложенное в предыдущем параграфе, многие основные понятия конечномерного анализа допускают важные обобщения на случай бесконечномерных нормированных векторных пространств. Тем не менее, к сожалению, не каждое такое пространство годится для построения в нем анализа. Непреодолимые проблемы могут возникнуть при изучении вопроса о сходимости последовательностей, который является в анализе вопросом первостепенной важности. Грубо говоря, происходит вот что: последовательность, которая „обязана“ быть сходящейся, не всегда оказывается таковой. Чтобы добиться существенного продвижения в анализе, необходимо еще больше сузить класс рассматриваемых пространств. Один из ряда возможных путей оказался особенно успешным. Он состоит в том, что на норму налагается условие „полноты“ и изучаются полные нормированные векторные пространства (их называют банаховыми пространствами). Этим путем мы и последуем здесь. Мы увидим, что предположение о полноте вносит заметные упрощения в абстрактный анализ и в то же время ему удовлетворяет широкий класс нормированных векторных пространств. Полнота — это действительно одно из самых важных понятий функционального анализа, и содержание данного параграфа, где мы занимаемся изучением этого свойства и родственных понятий, а также их иллюстрацией на примере конкретных пространств, имеет основополагающее значение для дальнейшего.

1.4.1. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ — нормированное векторное пространство. Последовательность (f_n) элементов $\mathscr{V}$ называется **последовательностью Коши**[1], если

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \| f_n - f_m \| = 0,$$

т. е. если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ при всех $m,\ n > n_0$.

Если последовательность сходится, то она является последовательностью Коши: это следует из неравенства

$$\| f_n - f_m \| = \| f_n - f + f - f_m \| \leqslant \| f_n - f \| + \| f_m - f \|.$$

В пространстве $\mathbb{R}$, а также в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ всякая последовательность Коши сходится: первое известно из элементарного анализа, а второе легко следует из первого. Это обстоятельство наводит на мысль, не лежит ли в основе достижений конечномерного анализа именно это совпадение классов последовательностей Коши и сходящихся

[1] Часто используется также термин „фундаментальная последовательность“.— *Прим. ред.*

последовательностей и нельзя ли перенести это свойство на бесконечномерный случай.

1.4.2. Пример. Допустим, что какая-то итерационная процедура решения дифференциального уравнения (точный характер которой нас здесь не интересует) привела к последовательности (f_n) элементов нормированного пространства $\mathscr{V}$ и удалось доказать существование такого $q<1$, что

$$\| f_{n+1}-f_n\| \leqslant q \| f_n - f_{n-1}\| \quad (n \geqslant 1). \tag{1.4.1}$$

Это условие гарантирует, что итерации f_n становятся всё ближе и ближе одна к другой с ростом n, и хотелось бы думать, что они сходятся к пределу и что предел этот будет решением уравнения. Главный вопрос: сходится или нет последовательность (f_n)?

1.4.3. Лемма. *Если $q<1$ и выполнено* (1.4.1), *то при всяком $n \geqslant 1$*

$$\| f_{n+k}-f_n\| \leqslant q^n (1-q)^{-1} \|f_1 - f_0\| \quad (k \geqslant 1)$$

и (f_n) есть последовательность Коши.

Доказательство. Из (1.4.1) по индукции получаем, что

$$\| f_{n+1}-f_n\| \leqslant q^n \| f_1 - f_0\| \quad (n \geqslant 1).$$

Следовательно, при $k \geqslant 1$

$$\| f_{n+k}-f_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} (f_{n+j}-f_{n+j-1}) \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \| f_{n+j}-f_{n+j-1}\|$$

$$\leqslant \| f_1 - f_0\| \sum_{j=1}^{k} q^{n+j-1} \leqslant q^n (1-q)^{-1} \| f_1 - f_0 \|.$$

Так как $q<1$, правая часть стремится к 0 при $n \to \infty$ и, значит, (f_n) — последовательность Коши. □

Рассмотрим теперь два примера пространства $\mathscr{V}$. Сначала предположим, что $\mathscr{V} = \mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой. Тогда, поскольку последовательности Коши в $\mathbb{R}^n$ сходятся, (f_n) заведомо сходится.

Теперь возьмем в качестве $\mathscr{V}$ пространство $\mathscr{C}([-1, 1])$ с нормой $\| f \|_1 = \int_{-1}^{1} | f(x) | \, dx$ и рассмотрим последовательность (f_n), состоящую из функций, изображенных на рис. 1.3. Как показывает простое вычисление, (1.4.1) выполнено и, значит, (f_n) — последовательность Коши. Однако она не сходится ни к какой непрерывной функции. В самом деле, в некотором грубом смысле (f_n) сходится к функции, равной 1 при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ и нулю при $0 < x \leqslant 1$, а эта функция разрывна. Итак, последовательность (f_n) не является сходящейся в пространстве $\mathscr{C}([-1, 1])$ с нормой $\| \cdot \|_1$.

Из этого примера можно сделать два вывода. Во-первых, *последовательность Коши в нормированном пространстве не обязательно сходится.* Во-вторых, если всякая последовательность Коши сходится, то условие (1.4.1) заведомо влечет за собой сходимость, а если даже такое сильное условие, как (1.4.1), не гарантирует сходимости, то анализ в соответствующем пространстве почти наверняка сопряжен с серьезными трудностями. Поэтому далее мы будем, как правило, заниматься только теми пространствами, в которых все последовательности Коши сходятся.

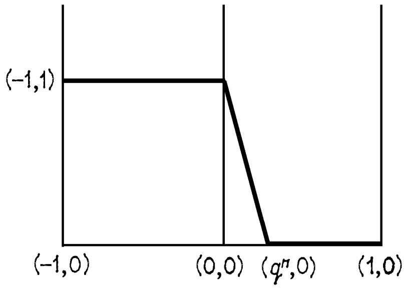

Рис. 1.3. Жирная линия изображает f_n.

1.4.4. Определение. Множество S в нормированном векторном пространстве $\mathscr{V}$ называется **полным,** если всякая последовательность Коши элементов S сходится к некоторому элементу S. Если само $\mathscr{V}$ полно, оно называется полным нормированным векторым пространством или **банаховым пространством**. В дальнейшем буквами $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ *всегда* обозначаются банаховы пространства.

Простейшими примерами банаховых пространств служат $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ — с любой нормой. Прежде чем перейти к другим примерам, попытаемся получше осветить роль полноты.

Из элементарного анализа известно, что всякий абсолютно сходящийся ряд вещественных чисел сходится. Как показывает следующая лемма, это вытекает из полноты $\mathbb{R}$.

1.4.5. Определение. Пусть (f_n) — последовательность элементов $\mathscr{V}$. Ряд $\sum f_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если $\sum \| f_n \| < \infty$, и **сходящимся**, если последовательность $\sum\limits_1^N f_n$ сходится при $N \to \infty$ к некоторому элементу $f \in \mathscr{V}$, называемому **суммой** этого ряда.

1.4.6. Лемма. *Нормированное векторное пространство полно тогда и только тогда, когда в нем всякий абсолютно сходящийся ряд сходится. В банаховом пространстве перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет на его сумму.*

Доказательство. Единственная трудность — доказательство достаточности, т. е. утверждения: если всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, то сходится и всякая последовательность Коши. В качестве первого шага покажем, что при указанном условии всякая последовательность Коши (f_n) содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть $a_n = \sup\limits_{m>n} \| f_n - f_m \|$; тогда по определению последовательности Коши $\lim a_n = 0$. Значит, у последовательности (a_n) существует подпоследовательность, скажем (a_{n_j})[1], такая что $a_{n_j} \leqslant j^{-2}$ при всех j. Тогда $\| f_{n_j} - f_{n_{j+1}} \| \leqslant j^{-2}$, откуда вытекает, что ряд $\sum g_j$, где $g_j = f_{n_j} - f_{n_{j+1}}$ абсолютно сходится, а потому, согласно предположению, сходится. Так как

$$f_{n_i} = \sum_{j=1}^{i} (f_{n_j} - f_{n_{j+1}}) = \sum_{j=1}^{i} g_j,$$

подпоследовательность (f_{n_i}) сходится.

В качестве второго и последнего шага докажем, что сходится сама последовательность (f_n). Если $\lim\limits_{i} f_{n_i} = f$, то

$$\| f_n - f \| \leqslant \| f_n - f_{n_i} \| + \| f_{n_i} - f \|.$$

Так как (f_n) — последовательность Коши, первое слагаемое в правой части при достаточно больших n и i сколь угодно мало, а второе стремится к 0 при $i \to \infty$. Следовательно, $\lim f_n = f$ и (f_n) сходится.

Для доказательства законности перестановки членов воспользуйтесь рассуждением, которое применяется для этой цели в случае рядов из комплексных чисел. □

Последовательности Коши (f_n) элементов множества S можно рассматривать как „потенциально сходящиеся“, поскольку их члены сближаются при $n \to \infty$, а это есть свойство сходящихся последовательностей. Реализует последовательность эту заложенную в ней возможность или нет, зависит от того, является ли S „достаточно обширным“, или же полным, в нашей новой терминологии. Рассмотрим, например, множество $S = (0, 1)$ в $\mathbb{R}$. Последовательность (n^{-1}), очевидно, есть последовательность Коши, но ее предел в $\mathbb{R}$ равен 0 и, значит, не лежит в S. Стало быть, S неполно. С другой стороны, $S = [0, 1]$ полно. В свете того факта, что замыкание S оказалось полным, можно предположить, что

[1] В этом доказательстве, как и во многих других, приходится рассматривать подпоследовательность данной последовательности (f_n), поэтому сделаем несколько замечаний по поводу обозначений. Иногда никаких подробностей о подпоследовательности не требуется (например, достаточно просто знать, что существует *некоторая* подпоследовательность с нужным свойством); в таком случае принято сохранять для нее обозначение (f_n), предупредив об этом читателя фразой типа: „эта подпоследовательность по-прежнему обозначается (f_n)“. В других случаях подпоследовательность обозначают обычно (f_{n_j}); ее членами являются f_{n_1}, f_{n_2}, ... Бывает, что требуется целая цепь подпоследовательностей, каждая из которых выбирается из предыдущей. В этом случае k-я подпоследовательность обозначается $(f_{n,k})$; ее членами являются $f_{1,k}$, $f_{2,k}$, ...

между замкнутыми и полными множествами имеется связь. Эта догадка подтверждается следующим результатом.

1.4.7. Лемма. *Подмножество S банахова пространства $\mathscr{B}$ полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто (в $\mathscr{B}$).*

Доказательство. Если S замкнуто, то всякая последовательность Коши его элементов сходится (в силу полноты $\mathscr{B}$) к некоторой точке $f \in \mathscr{B}$, откуда, по определению замкнутого множества, $f \in S$. Обратно, пусть S полно. Для любого $f \in \bar{S}$ существует последовательность точек из S, скажем (f_n), такая что $\lim f_n = f$. Но (f_n) — последовательность Коши, и так как S полно, то $f = \lim f_n$ лежит в S. Значит, $\bar{S} \subset S$, т. е. S замкнуто. □

Следует отметить, что в общем случае этот результат верен лишь тогда, когда множество, в котором берется замыкание, само полно. В этом можно убедиться, положив $S_2 = (0, 1]$ и взяв в качестве S_1 множество точек n^{-1}, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда S_1 замкнуто в S_2, но не полно. Тот факт, что в банаховом пространстве „замкнутый" = „полный", очень полезен.

Далее в этой книге мы будем заниматься анализом в банаховых пространствах. Поэтому важно убедиться, что существует достаточный запас таких пространств. Сначала обратимся к введенным в предыдущем параграфе пространствам непрерывных и дифференцируемых функций.

1.4.8. Теорема. *Пусть Ω — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathscr{C}(\Omega)$ ограниченных непрерывных комплекснозначных функций с* sup*-нормой банахово.*

Доказательство. Чтобы показать, что $\mathscr{C}(\Omega)$ полно, будем рассматривать его как подмножество пространства $\mathscr{V}$ ограниченных функций на Ω. Последнее, очевидно, есть нормированное пространство с sup-нормой, поэтому, в силу леммы 1.4.7, достаточно доказать, что, во-первых, $\mathscr{C}(\Omega)$ замкнуто (в $\mathscr{V}$) и, во-вторых, $\mathscr{V}$ полно.

Для того чтобы установить замкнутость $\mathscr{C}(\Omega)$, нам надо убедиться, что $\overline{\mathscr{C}(\Omega)} \subset \mathscr{C}(\Omega)$. Пусть $f \in \overline{\mathscr{C}(\Omega)}$. Тогда, по определению замыкания, для всякого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $g \in \mathscr{C}(\Omega)$, что $\|f - g\| < \varepsilon$. Значит, функция f ограничена и $|f(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x_0 \in \Omega$. Далее, для всякого $x_0 \in \Omega$ в силу непрерывности g найдется такое $\delta > 0$, что $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |[f(x) - g(x)] + [g(x) - g(x_0)] + [g(x_0) - f(x_0)]| \\ &\leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Ввиду произвольности ε отсюда видно, что f непрерывна. Будучи ограниченной и непрерывной, f лежит в $\mathscr{C}(\Omega)$. Тем самым доказано, что $\mathscr{C}(\Omega)$ замкнуто.

Покажем теперь, что $\mathscr{V}$ полно. Пусть (f_n) — последовательность Коши его элементов. При любом фиксированном $x \in \Omega$ имеем $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|$ и $\lim\limits_{m, n \to \infty} \|f_n - f_m\| = 0$. Следовательно, $(f_n(x))$ при каждом фиксированном x есть последовательность Коши вещественных чисел, которая, в силу полноты $\mathbb{R}$, имеет некоторый конечный предел, скажем $f(x)$. Так определенная функция f представляет собой поточечный предел последовательности (f_n), т. е. $\lim f_n(x) = f(x)$ при каждом x, и является очевидным претендентом на роль предела (f_n) также и по норме. Так оно и есть. В самом деле, так как (f_n) — последовательность Коши, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ при любых m, $n \geqslant n_0$, откуда

$$\|f - f_n\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \sup_{x \in \Omega} \sup_{m \geqslant n_0} |f_m(x) - f_n(x)|$$
$$= \sup_{m \geqslant n_0} \sup_{x \in \Omega} |f_m(x) - f_n(x)| = \sup_{m \geqslant n_0} \|f_m - f_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Наконец, поскольку последовательность Коши (f_n) заведомо ограничена (задача 1.13) и $f_n \to f$, мы видим, что f — ограниченная функция и, значит, $f \in \mathscr{V}$. □

1.4.9. Следствие. *Пусть* Ω — *произвольное множество в* $\mathbb{R}^n$. *Пространство* $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ *ограниченных непрерывных отображений* Ω *в* $\mathbb{C}^m$, *наделенное* sup-*нормой* (*определение* 1.3.21), *банахово.*

Следующий стоящий перед нами вопрос: относительно каких норм полны пространства $\mathscr{C}^k(\Omega)$ дифференцируемых функций (определение 1.3.23)? Очевидно, что sup-норма здесь не подходит (читатель легко построит последовательность в $\mathscr{C}^1([0, 1])$, сходящуюся по sup-норме к функции, производная которой разрывна), и напрашивается такой способ действий: рассмотреть более сильную норму типа (1.3.7), захватывающую также и производные. Образцом подобного рода результатов, достаточным пока для наших целей, является приводимая ниже лемма, которая легко выводится из предыдущей теоремы.

1.4.10. Лемма. *Пусть* Ω — *открытое множество в* $\mathbb{R}^n$. *Рассмотрим пространство* $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C}^m)$ *функций* $f = (f_1, \ldots, f_m)$. *Оно является банаховым относительно нормы*

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x \in \Omega} |f_i(x)| + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|.$$

Применение sup-нормы налагает слишком сильные ограничения на сходимость последовательностей функций. В приложениях часто бывает удобно использовать то или иное понятие сходимости

„в среднем“, вроде сходимости по норме $\|f\|_1 = \int\limits_\Omega |f(x)|\,dx$. Мы уже говорили, что $\mathscr{C}(\Omega)$ не полно по этой норме, но, оказывается, некоторый более широкий класс „интегрируемых“ функций уже является банаховым пространством $\mathscr{L}_1$ по норме $\|\cdot\|_1$. Это один из примеров пространств $\mathscr{L}_p$, составляющих второй важный для приложений класс банаховых пространств. Мы откладываем их обсуждение до следующей главы из-за технических трудностей, которые объясняются непригодностью в этом контексте римановых интегралов. Закончим наше первое перечисление банаховых пространств, заметив, что к ним относятся еще пространства l_p (определение 1.3.13). Доказательство мы опускаем, поскольку оно является вариантом доказательства теоремы 2.5.5 ниже.

1.4.11. Теорема. *Пространство l_p с нормой $\|\cdot\|_p$ является банаховым при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

В остальной части этого параграфа обсуждаются некоторые понятия, полезные в теории банаховых пространств. Ввиду важности свойства полноты естественно ожидать, что большую роль будут играть линейные подпространства, обладающие этим свойством (или, что то же самое, замкнутые; см. лемму 1.4.7). Такое подпространство, взятое само по себе, конечно, является банаховым пространством.

1.4.12. Определение. Линейное подпространство $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}$, замкнутое в $\mathscr{B}$, называется **замкнутым подпространством** в $\mathscr{B}$.

1.4.13. Определение. Пусть S — некоторое множество в $\mathscr{B}$. Замкнутое подпространство $\overline{[S]}$ называется **замкнутой линейной оболочкой** множества S.

1.4.14. Пример. Рассмотрим $\mathscr{C}([a, b])$ с sup-нормой. Фиксируем некоторое $x_0 \in [a, b]$, и пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство, составленное теми функциями из $\mathscr{C}([a, b])$, которые равны нулю в x_0. Пусть (f_n) — сходящаяся последовательность в $\mathscr{M}$ с пределом f. Тогда $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$, и так как $f_n(x_0) = 0$ при всех n, то $f(x_0) = 0$. Значит, $f \in \mathscr{M}$, и, таким образом, $\mathscr{M}$ — замкнутое подпространство.

Заметим, что $\mathscr{M}$ не содержит ни одного открытого множества из $\mathscr{C}([a, b])$, ибо такое множество содержало бы шар ненулевого радиуса, а в нем нашлась бы функция f с $f(x_0) \neq 0$. Следовательно, $\mathscr{M}$ имеет пустую внутренность и все его точки граничные. Разумеется, если $\mathscr{M}$ рассматривается как банахово пространство само по себе, то в нем нет недостатка в открытых множествах, т. е. множествах, открытых в $\mathscr{M}$. На самом деле всякое собственное подпространство банахова пространства имеет пустую внутренность.

Теперь введем формальное понятие, отвечающее интуитивному представлению о приближении некоторого множества, и в частности всего банахова пространства $\mathscr{B}$, некоторым меньшим множеством.

1.4.15. Определение. Пусть $S_1 \subset S_2 \subset \mathscr{B}$. Множество S_1 называется **плотным в** S_2, если замыкание S_1 в S_2 совпадает с S_2.

Плотные множества играют важную роль как в теории, так и в приложениях. В теории часто применяют такой способ доказательства: сначала убеждаются, что некоторое свойство имеет место на плотном в $\mathscr{B}$ множестве S, а затем совершают переход (обычно „по непрерывности“) ко всему $\mathscr{B}$. В приложениях понятие плотности лежит в основе большинства численных методов и теории приближений. Например, для нахождения непрерывного решения, скажем, интегрального уравнения можно искать приближенные решения среди элементов множества S непрерывных кусочно-линейных функций, ибо S плотно в $\mathscr{C}(\Omega)$ и потому существование в S подходящего приближения к точному решению гарантировано. Для этой цели применяют также множества многочленов, кусочно-квадратичных функций, сплайнов. В следующих результатах речь идет о двух наиболее употребительных плотных множествах в $\mathscr{C}(\Omega)$ относительно sup-нормы. Доказательство второго результата несложно, доказательство первого см. у Симмонса [1963] (или в любом другом учебнике анализа. — *Перев.*).

1.4.16. Теорема Вейерштрасса. *Пусть Ω — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Множество многочленов от n переменных плотно в $\mathscr{C}(\Omega)$ относительно* sup-*нормы.*

1.4.17. Лемма. *Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок. Множество непрерывных кусочно-линейных функций плотно в $\mathscr{C}([a, b])$ относительно* sup-*нормы. Более того, можно ограничиться функциями, кусочно-линейными относительно равномерных разбиений отрезка $[a, b]$.*

Как мы уже знаем, $\mathscr{C}(\Omega)$ полно по sup-норме, но неполно по норме $\|\cdot\|_1$. Наш следующий вопрос — какие модификации нормы не приводят к нарушению полноты?

1.4.18. Определение. Две нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ на векторном пространстве $\mathscr{V}$ называются **эквивалентными**, если существуют строго положительные вещественные числа c_1, c_2, такие что $c_1\|f\|_a \leqslant \|f\|_b \leqslant c_2\|f\|_a$ при всех $f \in \mathscr{V}$.

1.4.19. Лемма. *Если последовательность в нормированном векторном пространстве сходится, то она сходится и по любой эквивалентной норме. Если $\mathscr{B}$ — банахово пространство, то оно останется таким и с любой эквивалентной нормой.*

Доказательство несложно, и мы предоставляем его читателю в качестве упражнения. В коненомерном пространстве все нормы эквивалентны, и всякое конечномерное нормированное векторное пространство является банаховым. Однако выбор той или иной нормы может оказывать заметное влияние на скорость сходимости последовательности (см. задачу 1.11).

1.4.20. Пример. Выберем некоторое $a>0$ и для $f\in\mathscr{C}([0,1])$ положим

$$\|f\|_*=\sup_{x\in[0,1]}|e^{-ax}f(x)|.$$

Тогда

$$e^{-a}\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\leqslant\sup_{x\in[0,1]}|e^{-ax}f(x)|\leqslant\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|,$$

откуда видно, что норма $\|\cdot\|_*$ и sup-норма эквивалентны на $\mathscr{C}([0,1])$. Переход к эквивалентной норме иногда существенно расширяет применимость абстрактных результатов (см., например, задачу 4.14).

Наши последние замечания касаются базисов в банаховых пространствах. Определение 1.2.2 предназначено для конечномерных пространств и, очевидно, нуждается в модификации, если мы хотим распространить его на общий случай. Однако при попытках такой модификации возникают трудности. Самым естественным кажется назвать последовательность (f_n) *базисом* пространства $\mathscr{B}$, если для всякого $f\in\mathscr{B}$ найдется единственная последовательность скаляров (α_n), такая что $f=\sum\alpha_nf_n$ (заметим, что это условие *не сводится* к условию: замкнутая линейная оболочка множества $\{f_n\}$ совпадает с $\mathscr{B}$; последнее условие слабее — см. задачу 1.15). Коротко говоря, дело обстоит так, что у многих банаховых пространств есть базис в этом смысле, однако от него мало проку, полезных же базисов нет. Особенно ярко это демонстрирует пример из теории рядов Фурье: последовательность $(e^{inx})_{n=1}^{n=\infty}$ *не является* базисом в $\mathscr{C}([0,2\pi])$ с sup-нормой. Мы не будем пользоваться в этой книге понятием базиса, за исключением случая гильбертовых пространств, в которых обычно сразу удается выбрать удобный базис. Однако в теории банаховых пространств существует одно полезное понятие, имеющее некоторое отношение к понятию базиса.

1.4.21. Определение. Банахово пространство называется **сепарабельным**, если содержит счетное плотное множество, т. е. если в нем существует такое множество $S=\{f_n\}_{n=1}^{n=\infty}$, что для каждого $\varepsilon>0$ и каждого $f\in\mathscr{B}$ найдется $f_n\in S$ с $\|f-f_n\|<\varepsilon$.

1.4.22. Лемма. (i) *Если Ω — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, то пространство $\mathscr{C}(\Omega)$ с* sup-*нормой сепарабельно.*

(ii) *l_p сепарабельно при $1 \leqslant p < \infty$.*

(iii) *l_∞ не сепарабельно.*

Доказательство. Мы докажем только утверждение (i), оставляя другие два в качестве упражнений. Многочлены с рациональными коэффициентами образуют счетное множество, плотное в множестве всех многочленов; последнее же плотно в $\mathscr{C}(\Omega)$ по теореме Вейерштрасса. □

Многие результаты, справедливые для сепарабельных пространств, имеют место и в общем случае, однако их доказательства могут стать более трудными, поэтому мы иногда вводим в формулировки предположение о сепарабельности. С точки зрения приложений это небольшая потеря, ибо самые важные банаховы пространства сепарабельны.

1.5. Гильбертово пространство

Гильбертовы пространства — это простейший тип бесконечномерных нормированных пространств, играющих заметную роль в функциональном анализе. Их сравнительная простота объясняется тем, что в них вводится дополнительная структура — скалярное произведение. Это — обобщение обычного скалярного произведения из векторной алгебры. Последнее определяется обычно через компоненты векторов, в абстрактном же контексте, как это принято в функциональном анализе, его алгебраические свойства берутся в качестве аксиом.

Наличие дополнительной алгебраической структуры сильно обогащает геометрические свойства пространства. Что наиболее важно, оно позволяет ввести понятие перпендикулярности двух векторов и тем самым существенно приблизиться к евклидовой геометрии. Влияние скалярного произведения на аналитические свойства (в противопоставление метрическим) не так заметно. Основные трудности, как и в случае банаховых пространств, связаны с бесконечномерностью. Однако в некоторых отношениях возможны значительные упрощения. Мы убедимся в этом ниже, когда будем рассматривать базисы в гильбертовых пространствах. С точки зрения приложений, пожалуй, самое важное то, что в гильбертовом пространстве можно дать разумное определение самосопряженного оператора, и на основе этого понятия развита мощная теория.

1.5.1. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ — векторное пространство. **Скалярным произведением** в нем называется комплекснозначная функция

$(\cdot, \cdot)$ на $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$, такая что для всех f, g, $h \in \mathscr{V}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ выполнены следующие условия:

(i) $(f, f) \geqslant 0$, причем $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

(ii) $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$;

(iii) $(f, g) = \overline{(g, f)}$, где черта обозначает комплексное сопряжение;

(iv) $(\alpha f, g) = \alpha (f, g)$.

Пространство $\mathscr{V}$, наделенное скалярным произведением, называется **предгильбертовым** (в литературе встречается также термин *пространство со скалярным произведением*). Если $\mathscr{V}$ — вещественное векторное пространство и скалярное произведение вещественнозначно, то мы получаем **вещественное предгильбертово пространство.**

1.5.2. Пример. Для вещественных векторов в $\mathbb{R}^3$ скалярное произведение (обычно обозначаемое в этом случае $a \cdot b$) определяется формулой

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

где $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$. Легко проверить, что для него выполнены аксиомы (i)—(iv), и, следовательно, трехмерное евклидово пространство является предгильбертовым. Для комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^n$ подходящим скалярным произведением является

$$(f, g) = \sum_{j=1}^{n} f_j \bar{g}_j, \quad f = (f_1, \ldots, f_n), \qquad g = (g_1, \ldots, g_n).$$

1.5.3. Пример. Легко построить скалярное произведение в $\mathscr{C}(\Omega)$:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Величина $(f, f)^{1/2}$ обозначается $\|f\|$. Как подсказывает обозначение, $\|\cdot\|$ есть норма; для доказательства этого факта нам потребуется следующее неравенство, играющее основополагающую роль в теории гильбертовых пространств.

1.5.4. Неравенство Шварца[1]. *Для любых элементов f, g предгильбертова пространства*

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \|g\|. \tag{1.51.}$$

Доказательство. При $g = 0$ результат очевиден. Поэтому достаточно доказать, что $|(f, g/\|g\|)| \leqslant \|f\|$ при $g \neq 0$, или, эквива-

[1] Называемое также *неравенством Коши — Буняковского. — Прим. ред.*

лентно, что $|(f, h)| \leqslant \|f\|$ для всех единичных векторов h. Это следует из соотношений (см. рис. 1.4)

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \|f-(f, h)h\|^2 = (f-(f, h)h, \quad f-(f, h)h) \\
&= (f, f)-(f, h)(h, f)-\overline{(f, h)}(f, h)+(f, h)\overline{(f, h)} \\
&= \|f\|^2-|(f, h)|^2. \quad \square
\end{aligned}
$$

1.5.5. Теорема. *Всякое предгильбертово пространство $\mathscr{H}$ является нормированным векторным пространством с нормой* $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

Доказательство. Единственная аксиома нормы, которая нуждается в проверке, — это неравенство треугольника. Согласно неравенству Шварца,

$$(f, g)+(g, f) = 2\,\mathrm{Re}\,(f, g) \leqslant 2\|f\|\|g\|.$$

Отсюда неравенство треугольника выводится следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = \|f\|^2+(f, g)+(g, f)+\|g\|^2 \\
&\leqslant \|f\|^2+2\|f\|\|g\|+\|g\|^2 = (\|f\|+\|g\|)^2. \quad \square
\end{aligned}
$$

Как показывает этот результат, норма в предгильбертовом пространстве является естественным обобщением длины в $\mathbb{R}^3$; обобщения некоторых других знакомых свойств длины в $\mathbb{R}^3$ указываются в задаче 1.17. Дальнейшая аналогия касается понятия угла между двумя векторами и свойства перпендикулярности двух векторов (в данном контексте его называют ортогональностью). Угол θ между двумя векторами f, g в *вещественном* предгильбертовом пространстве можно определить соотношением $(f, g) = \|f\|\|g\|\cos\theta$. Это определение согласовано со свойствами скалярного произведения: в силу неравенства Шварца, $|\cos\theta| \leqslant 1$. В комплексном случае это определение непригодно. На самом деле величина угла не играет большой роли в теории гильбертовых пространств, за исключением частного случая $(f, g) = 0$, отвечающего ортогональным векторам, зато последнее понятие является фундаментальным.

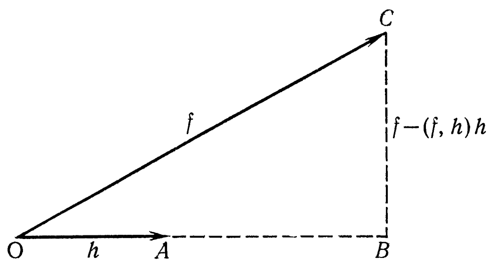

Рис. 1.4. Отрезки OA и OC представляют соответственно h и f, а отрезок OB представляет $(f, h)h$. Равенство $\|f-(f, h)h\|^2 = \|f\|^2 - |(f, h)|^2$, установленное в ходе доказательства неравенства Шварца 1.5.4, есть не что иное, как теорема Пифагора.

1.5.6. Определение. Пусть $\mathscr{H}$ — предгильбертово пространство. Два вектора f, $g \in \mathscr{H}$ называются **ортогональными**, если $(f, g) = 0$;

в таком случае мы пишем $f \perp g$. Для данного множества $S \subset \mathscr{H}$ множество векторов в $\mathscr{H}$, ортогональных каждому вектору из S, называется **ортогональным дополнением** к S и обозначается $S^\perp$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$, если $\mathscr{M}$ — плоскость, проходящая через начало, то $\mathscr{M}^\perp$ — перпендикулярная к ней прямая, проходящая через начало. Вот два типичных свойства $\mathbb{R}^3$, каждое из которых допускает обобщение на любое конечномерное предгильбертово пространство. Во-первых, в $\mathscr{M}$ существует единственный вектор, находящийся на минимальном расстоянии от данного вектора, — в противоположность случаю банахова пространства, когда не гарантированы ни существование, ни единственность такого вектора. Во-вторых, всякий вектор f может быть однозначно записан в виде $f = g + h$, где $g \in \mathscr{M}$, $h \in \mathscr{M}^\perp$; иными словами, $\mathbb{R}^3$ можно разложить в прямую сумму ортогональных подпространств. Хотя эти свойства можно считать геометрическими, их обобщению на случай бесконечномерных предгильбертовых пространств препятствуют трудности чисто аналитического характера. Как и в случае нормированных пространств, ключ к успеху — предположение о полноте.

1.5.7. Определение. Предгильбертово пространство, полное по норме $\|f\| = (f, f)^{1/2}$, называется **гильбертовым пространством.** Начиная отсюда, символом $\mathscr{H}$ *всегда* обозначается гильбертово пространство.

1.5.8. Пример. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ с обычным скалярным произведением (пример 1.5.2), разумеется, гильбертовы. Простейший пример бесконечномерного гильбертова пространства — это l_2 (определение 1.3.13) со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum f_n \bar{g}_n,$$

где $f = (f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_1, g_2, \ldots)$. При этом $\|f\| = \left\{\sum |f_n|^2\right\}^{1/2}$, что совпадает с исходным определением нормы в l_2. Следовательно, по теореме 1.4.11, l_2 полно, а значит, гильбертово относительно введенного скалярного произведения.

1.5.9. Пример. Мы уже знаем, что $\mathscr{C}(\Omega)$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx$ предгильбертово. Однако оно не полно по соответствующей норме — достаточно взять последовательность из примера 1.4.2, чтобы в этом убедиться. К сожалению, такая ситуация типична. Часто векторное пространство удается с одной нормой превратить в банахово, а с другой — в предгильбертово, но совпадение этих норм — явление редкое.

В применениях главный интерес представляют, конечно, гильбертовы пространства, состоящие из функций. Однако из-за технических трудностей, относящихся к теории интегрирования, мы отложим обсуждение таких пространств до следующей главы. Сейчас отметим только, что в наиболее употребительном гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2$ скалярное произведение вводится по указанному выше образцу, однако для обеспечения полноты в него приходится включать другие функции, нежели в $\mathscr{C}(\Omega)$.

Займемся теперь обобщением описанных выше геометрических свойств на случай полных пространств.

1.5.10. Теорема. *Пусть $\mathscr{M}$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathscr{H}$, и пусть $f \in \mathscr{H}$. Тогда в $\mathscr{M}$ существует единственный элемент, ближайший к f.*

Доказательство. Положим $d = \operatorname{dist}(f, \mathscr{M})$ и выберем последовательность (g_n) в $\mathscr{M}$ так, чтобы $\lim \|f - g_n\| = d$. Тогда, согласно тождеству параллелограмма (задача 1.17),

$$\|g_n - g_m\|^2 = \|(g_n - f) - (g_m - f)\|^2 =$$
$$= 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(g_n + g_m) - f\right\|^2.$$

Поскольку $(g_n + g_m)/2 \in \mathscr{M}$, последний член не меньше $4d^2$. Отсюда

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \|g_n - g_m\| \leqslant 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

Стало быть, (g_n) — последовательность Коши, и, так как $\mathscr{M}$ замкнуто, она сходится к некоторому элементу $\mathscr{M}$, скажем g. Очевидно, что $\|f - g\| = d$, откуда вытекает, что минимум расстояния достигается.

Если $g' \in \mathscr{M}$ — другой элемент с тем же свойством $\|f - g'\| = d$, то, как легко следует из тождества параллелограмма,

$$\left\|f - \frac{1}{2}(g + g')\right\|^2 = d^2 - \|g - g'\|^2.$$

Поскольку $(g + g')/2 \in \mathscr{M}$, левая часть этого равенства не меньше d^2. Следовательно, $g = g'$, и доказана единственность. □

1.5.11. Теорема о проекции. *Пусть $\mathscr{M}$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Тогда $\mathscr{M}^\perp$ — тоже замкнутое подпространство и $\mathscr{H} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$. Далее, в разложении $f = g + h$, где $g \in \mathscr{M}$, $h \in \mathscr{M}^\perp$, g есть ближайший к f элемент $\mathscr{M}$.*

Доказательство. Согласно задаче 1.19, $\mathscr{M}^\perp$ замкнуто и $\mathscr{M} \cap \mathscr{M}^\perp = 0$. Следовательно, в силу леммы 1.2.9, достаточно показать, что $\mathscr{H} = \mathscr{M} + \mathscr{M}^\perp$, откуда уже будет следовать, что $\mathscr{H} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$. Если $f \in \mathscr{M}$, утверждение очевидно, поэтому возьмем $f \notin \mathscr{M}$, и пусть g — ближайший к f элемент $\mathscr{M}$, существование которого гарантируется предыдущей теоремой. Покажем, что $f-g \in \mathscr{M}^{\perp}$ и, следовательно, искомым разложением элемента f будет $f=g+(f-g)$, $g \in \mathscr{M}$, $f-g \in \mathscr{M}^{\perp}$.

Для любых $h \in \mathscr{M}$, $\alpha>0$ имеем $g+\alpha h \in \mathscr{M}$, поэтому

$$\|f-g\|^2 \leqslant \|f-g-\alpha h\|^2 = \|f-g\|^2 - 2\operatorname{Re}\alpha(h, f-g) + \alpha^2\|h\|^2.$$

Отсюда следует, что $2\operatorname{Re}\alpha(h, f-g) \leqslant \alpha^2\|h\|^2$. Разделив на α и устремив α к 0, заключаем, что $\operatorname{Re}(h, f-g) \leqslant 0$. Повторение тех же рассуждений для $\alpha<0$ показывает, что $\operatorname{Re}(h, f-g) \geqslant 0$. Значит, $\operatorname{Re}(h, f-g)=0$, и аналогично $\operatorname{Im}(h, f-g)=0$. Таким образом, $(h, f-g)=0$ для всех $h \in \mathscr{M}$, т. е. $f-g \in \mathscr{M}^{\perp}$, как и утверждалось. $\square$

Указанное разложение $\mathscr{H}$ в сумму ортогональных подпространств играет важную роль в теории самосопряженных операторов и других разделах функционального анализа.

В предыдущем параграфе мы говорили о том, что с точки зрения приложений изучение базиса банаховых пространств бесполезно. В противоположность этому для гильбертовых пространств существует очень полезная теория базисов, которую мы сейчас вкратце опишем. Во избежание технических трудностей ограничимся случаем сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Так как самые употребительные гильбертовы пространства сепарабельны, это небольшая потеря; по поводу общего случая можно посмотреть книгу Фридмана [1970, § 6.4]. Наводящим соображением нам будет служить тот факт, что в $\mathbb{R}^3$ множество $\mathscr{K}$ попарно ортогональных единичных векторов тогда и только тогда является базисом, когда $\mathscr{K}^{\perp}=0$.

1.5.12. Определение. Множество $\mathscr{K}$ векторов из $\mathscr{H}$ называется **полным**[1], если $\mathscr{K}^{\perp}=0$, т. е. если равенство $(f, \varphi)=0$ для всех $\varphi \in \mathscr{K}$ влечет за собой $f=0$. Счетное множество $\mathscr{K}=\{\varphi_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ называется **ортонормированным**, если $(\varphi_n, \varphi_m)=\delta_{nm}$ для всех $m, n \geqslant 1$. Числа (f, φ_n) называются **коэффициентами Фурье** элемента f (относительно $\mathscr{K}$), а формальный ряд $\sum(f, \varphi_n)\varphi_n$ — **рядом Фурье** для f.

1.5.13. Лемма. *Для всякого ортонормированного множества $\mathscr{K}=\{\varphi_n\}$ в $\mathscr{H}$ выполняются следующие свойства*:

(i) Неравенство Бесселя: *при любом $f \in \mathscr{H}$*

$$\sum|(f, \varphi_n)|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{1.5.2}$$

[1] Никакой прямой связи этого понятия с понятием полноты в смысле определения 1.4.4 нет. Следует предупредить, что в литературе по этой области теории гильбертовых пространств имеется большой разнобой в терминологии.

(ii) Свойство наилучшего приближения: *для любой последовательности скаляров* (α_n), *любого натурального* m *и любого* $f \in \mathscr{H}$

$$\left\| f - \sum_1^m \alpha_n \varphi_n \right\| \geqslant \left\| f - \sum_1^m (f, \varphi_n) \varphi_n \right\|. \tag{1.5.3}$$

Доказательство. В силу ортонормированности $\mathscr{K}$,

$$\left\| f - \sum_1^m (f, \varphi_n) \varphi_n \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_1^m |(f, \varphi_n)|^2, \tag{1.5.4}$$

откуда при $m \to \infty$ получается (1.5.2). Снова используя ортонормированность $\mathscr{K}$, находим, что

$$\left\| f - \sum_1^m \alpha_n \varphi_n \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_1^m |(f, \varphi_n)|^2 + \sum_1^m |(f, \varphi_n) - \alpha_n|^2$$

$$\geqslant \| f \|^2 - \sum_1^m |(f, \varphi_n)|^2,$$

и (1.5.3) следует из (1.5.4). □

1.5.14. Лемма. *Пусть* $\mathscr{K} = \{\varphi_n\}$ — *ортонормированное множество и* (α_n) — *последовательность скаляров. Ряд* $\sum \alpha_n \varphi_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum |\alpha_n|^2$. *Если ряд* $\sum \alpha_n \varphi_n$ *сходится, то его сумма не зависит от порядка членов и*

$$\left\| \sum \alpha_n \varphi_n \right\| = \left\{ \sum |\alpha_n|^2 \right\}^{1/2}. \tag{1.5.5}$$

Доказательство. В силу ортонормированности $\{\varphi_n\}$,

$$\left\| \sum_{n=i}^j \alpha_n \varphi_n \right\| = \sum_{n=i}^j |\alpha_n|^2, \tag{1.5.6}$$

откуда следует, что если $\sum |\alpha_n|^2$ сходится, то $\left(\sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n \right)_{m=1}^{m=\infty}$ является последовательностью Коши и, значит, сходится, ввиду полноты $\mathscr{H}$. Необходимость следует из тех же рассуждений в обратном порядке. Полагая $i = 1$ и $j \to \infty$ в (1.5.6), получим (1.5.5).

Пусть $f = \sum \alpha_{m_n} \varphi_{m_n}$ — ряд, полученный перестановкой членов ряда $g = \sum \alpha_n \varphi_n$. Легко видеть, что если $\sum |\alpha_n|^2$ сходится, то

$$\| f \|^2 = \| g \|^2 = \sum |\alpha_n|^2, \tag{1.5.7}$$

$$\| f - g \|^2 = \| f \|^2 - 2 \operatorname{Re}(f, g) + \| g \|^2. \tag{1.5.8}$$

Но

$$(f, g) = \lim_{j \to \infty} \left(\sum_{n=1}^j \alpha_{m_n} \varphi_{m_n}, \ \sum_{n=1}^j \alpha_n \varphi_n \right) = \sum |\alpha_n|^2.$$

Следовательно, $\| f - g \| = 0$, согласно (1.5.7) и (1.5.8). □

1.5.15. Лемма. *Пусть $\mathscr{K}=\{\varphi_n\}$ — ортонормированное множество. Тогда ряд $\sum(f,\varphi_n)\varphi_n$ сходится независимо от порядка его членов и сумма этого ряда Pf удовлетворяет условиям: $Pf=0$ для $f\in[\mathscr{K}]^{\perp}$, $Pf=f$ для $f\in\overline{[\mathscr{K}]}$.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из неравенства Бесселя (1.5.2) и леммы 1.5.14. Далее, заметим, что у $f\in\mathscr{K}^{\perp}$ все коэффициенты Фурье равны нулю, и потому $Pf=0$ для $f\in\overline{[\mathscr{K}]}^{\perp}=\mathscr{K}^{\perp}$. С другой стороны, если $f\in\overline{[\mathscr{K}]}$, то по определению замыкания для всякого $\varepsilon>0$ существуют такие $\alpha_1,\ldots$ $\ldots,\alpha_m\in\mathbb{C}$ и $\varphi_1,\ldots,\varphi_m\in\mathscr{K}$, что $\left\|f-\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\varphi_n\right\|<\varepsilon$. Значит, по лемме 1.5.13, (ii),

$$\left\|f-\sum_{n=1}^{m}(f,\varphi_n)\varphi_n\right\|<\varepsilon.$$

Тот же результат показывает, что левая часть этого неравенства не возрастает с ростом m, поэтому при $m\to\infty$ получаем $\|f-Pf\|<\varepsilon$. Поскольку ε произвольно, отсюда следует, что $f=Pf$. $\square$

Завершив на этом технические приготовления, мы теперь в состоянии довольно легко доказать главный результат о базисе.

1.5.16. Определение. Ортонормированное множество $\mathscr{K}=\{\varphi_n\}$ называется **ортонормированным базисом** пространства $\mathscr{H}$, если $f=\sum(f,\varphi_n)\varphi_n$ для всякого $f\in\mathscr{H}$.

Входящий в определение ряд есть, разумеется, ряд Фурье для f (определение 1.5.12). Отметим, что по лемме 1.5.14 допустима любая перестановка его членов.

1.5.17. Теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и $\mathscr{K}=\{\varphi_n\}$ — ортонормированное множество в нем. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *$\mathscr{K}$ полно, т. е. $\mathscr{K}^{\perp}=0$;*

(ii) *$\overline{[\mathscr{K}]}=\mathscr{H}$;*

(iii) *$\mathscr{K}$ — ортонормированный базис;*

(iv) *для всякого $f\in\mathscr{H}$*

$$\|f\|^2=\sum|(f,\varphi_n)|^2 \text{ (равенство Парсеваля).} \tag{1.5.9}$$

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii) Если $\overline{[\mathscr{K}]}\neq\mathscr{H}$, то найдется точка $f\in\mathscr{H}$, не лежащая в $\overline{[\mathscr{K}]}$. Следовательно, по теореме о проекции 1.5.11,

$f = g + h$ для некоторого $g \in [\overline{\mathscr{K}}]$ и некоторого ненулевого $h \in [\overline{\mathscr{K}}]^{\perp}$. Отсюда $\mathscr{K}^{\perp} = [\overline{\mathscr{K}}]^{\perp} \neq 0$, что противоречит (i).

(ii)$\Rightarrow$(iii) Это непосредственно следует из леммы 1.5.15.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Достаточно в (1.5.4) устремить m к ∞.

(iv)$\Rightarrow$(i) Если $f \in \mathscr{K}^{\perp}$, то каждый член ряда (1.5.9) равен нулю, откуда $f = 0$. □

1.5.18. Теорема. *Всякое сепарабельное гильбертово пространство имеет ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — счетное плотное множество. Применим к нему процесс Грама — Шмидта (задача 1.21), отбрасывая на каждом шаге очередное f_n, если оно не образует с предыдущими ортонормированными элементами линейно-независимую систему. Новое множество, скажем $\mathscr{K}$, ортонормировано, и $[\overline{\mathscr{K}}] = \mathscr{H}$, так как $\{f_n\}$ плотно в $\mathscr{H}$; но тогда по предыдущей теореме $\mathscr{K}$ — ортонормированный базис. □

1.5.19. Пример. Рассмотрим гильбертово пространство l_2 (пример 1.5.8). Пусть e_n — элемент, m-я компонента которого равна δ_{mn}, т. е. e_n — единичный вектор „вдоль n-й оси“. Ясно, что $\{e_n\}$ — ортонормированное множество. Для любого вектора $f = (f_1, f_2, \ldots)$ из l_2 имеем $(f, e_n) = f_n$. Следовательно, $f = 0$, если $(f, e_n) = 0$ при всех n. Значит, $\{e_n\}$ полно, а тогда, по теореме 1.5.17, $\{e_n\}$ является базисом.

Последние две теоремы служат прекрасным завершением нашего изучения базисов в гильбертовом пространстве. В частности, отраден тот факт, что если множество $\mathscr{K}$ полно, то оно образует базис; это есть прямое обобщение соответствующего факта для конечномерного случая; для произвольных банаховых пространств нет никакого простого аналога этого условия. С точки зрения приложений особенно важны базисы пространства $\mathscr{L}_2$ (пример 1.5.9). В большинстве случаев такие базисы удобнее всего строить, используя самосопряженность некоторых (обсуждаемых ниже) дифференциальных операторов и теорему Гильберта — Шмидта 7.5.1. В определенных случаях возможно и прямое построение на основе теоремы 1.5.17; этот метод подробно разбирается в книге Хиггинса [1977].

Наконец, в дополнение к работам общего характера, указанным во введении к главе, обратим внимание читателя на очаровательную и необычную книгу Халмоша [1967], в которой теория гильбертовых пространств изложена при помощи тщательного подбора примеров и контрпримеров.

Задачи

1.1. Выведите из определения нормы, что $\|f-g\| \geqslant |\|f\|-\|g\||$.

1.2. Покажите, что открытый и замкнутый шары в нормированном векторном пространстве выпуклы.

1.3. Выведите из определения 1.3.8, что точка f лежит в замыкании S_1 в S_2 тогда и только тогда, когда $f \in S_2$ и f является пределом последовательности элементов из S_1.

1.4. Докажите равносильность двух условий, фигурирующих в определении 1.3.9 открытого множества.

1.5. Пусть $\mathscr{V}$ — нормированное векторное пространство. Покажите, что в нем открытый шар есть открытое множество, а замкнутый — замкнутое Далее, докажите, что само $\mathscr{V}$ (а следовательно, и пустое множество $\varnothing$) одновременно и открыто, и замкнуто.

1.6. Покажите, что в нормированном векторном пространстве объединение любого класса открытых множеств открыто и пересечение *конечного* числа открытых множеств открыто. Путем построения контрпримера в $\mathbb{R}$ покажите, что пересечение бесконечного числа открытых множеств необязательно открыто Кроме того, докажите, что пересечение любого класса замкнутых множеств замкнуто и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

1.7. Множество в нормированом векторном пространстве открыто тогда и только тогда, когда оно является объединением открытых шаров.

1.8. Очень интересным множеством в $\mathbb{R}$ является *канторово множество* Возьмем отрезок $[0, 1]$ и выбросим из него среднюю треть $(1/3, 2/3)$. Из оставшихся двух отрезков снова выбросим их средние трети, и так до бесконечности. То, что останется, и есть канторово множество. Покажите, что оно замкнуто в $\mathbb{R}$ и имеет пустую внутренность.

1.9. Наделим $\mathscr{C}([0, 1])$ нормой $\|\cdot\|_1$, где $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx$. Положим $f_n(x) = x^{1/2}(1-x)^n$ для $n \geqslant 1$. Покажите, что ряд $\sum f_n$ абсолютно сходится в смысле определения 1.4.5, но не сходится Выведите из леммы 1.4.6, что $\mathscr{C}([0, 1])$ с этой нормой не полно.

1.10. Рассмотрим следующее семейство $\{f_\alpha\}$ функций из $\mathscr{C}([0, 1])$:

$$f_\alpha(x) = 2\alpha x/(1+\alpha^2 x^2) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 < \alpha < \infty).$$

Покажите, что $\|f_\alpha\| = 1$, $\|f_\alpha\|_1 = |\alpha|^{-1}\log(1+\alpha^2)$, где $\|\cdot\|$ обозначает sup норму, а $\|\cdot\|_1$ — норму, определенную выше. Выведите отсюда, что эти нормы неэквивалентны.

1.11. Пусть (f_k) — последовательность в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, и $f_k = (1, 2k^{-1}, 3k^{-1}, \ldots, nk^{-1})$. Положим $f = (1, 0, \ldots, 0)$. Покажите, что

$$\|f_k - f\|_\infty = nk^{-1}, \quad \|f_k - f\|_1 = k^{-1}[(1/2)\,n\,(n+1) - 1],$$

где $\|\cdot\|_p$ — норма, определенная формулами (1.3.1) и (1.3.2). Обратите внимание на то, что, хотя $\lim f_k = f$ при любом $p \geqslant 1$ (ибо все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны), выбор той или иной нормы заметно влияет на быстроту сходимости

1.12. Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство и $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \mathscr{B}$. Докажите, что S_1 плотно в S_2 тогда и только тогда, когда для каждого $f \in S_2$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $g \in S_1$, что $\|f-g\| < \varepsilon$. Выведите отсюда, что если S_1 плотно в S_2, а S_2 плотно в S_3, то S_1 плотно в S_3.

1.13. Покажите, что всякая последовательность Коши в нормированном векторном пространстве ограничена.

1.14. Пусть $\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup нормой.

(i) Постройте последовательность в замкнутом единичном шаре, сходящуюся поточечно (т. е. для каждого x) к разрывному пределу.

(ii) Покажите, что ограниченная последовательность (f_n), где $f_n(x) = nx/(1+n^2x^2)$, сходится к (непрерывной) нулевой функции поточечно, но не сходится к ней по норме.

(iii) Покажите, что из сходимости по норме следует поточечная сходимость.

1.15. Наделим $\mathscr{C}([0, 1])$, как и в предыдущей задаче, sup нормой и рассмотрим множество $S = \{x^n\}_{n=0}^{n=\infty}$. По теореме Вейерштрасса замкнутая линейная оболочка S совпадает со всем $\mathscr{C}([0, 1])$. Верно ли, что каждый элемент $f \in \mathscr{C}([0, 1])$ представим в виде суммы (сходящегося по sup норме) ряда $\sum \alpha_n x^n$? [*Указание*: рассмотрите функцию $\exp(-1/x^2)$.]

1.16. Рассмотрим последовательность (f_n) в $\mathscr{C}^1([-1, 1])$, где $f_n(x) = (x^2 + n^{-2})^{1/2}$. Пусть $\|\cdot\|$ обозначает sup-норму. Положим

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [-1,1]} |f'(x)|.$$

Покажите, что (f_n) сходится по норме $\|\cdot\|$ к $|x|$, но не является сходящейся по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$.

1.17. Докажите, что для любых элементов f, g, h предгильбертова пространства и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеют место следующие соотношения:

(i) $(f, \alpha g) = \bar{\alpha}(f, g)$

(ii) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$

(iii) $2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = \|f-g\|^2 + \|f+g\|^2$ (тождество параллелограмма);

(iv) $4(f, g) = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2$.

1.18. Пользуясь равенством (iv) из задачи 1.17, покажите, что нормированное векторное пространство $\mathscr{V}$ с нормой $\|\cdot\|$, удовлетворяющей условию (iii) из той же задачи, можно превратить в предгильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, таким что $(f, f)^{1/2} = \|f\|$ для всех $f \in \mathscr{V}$. Таким образом, тождество параллелограмма характеризует норму в предгильбертовом пространстве. Покажите, что l_∞ нельзя превратить в предгильбертово пространство.

1.19. Пусть S — множество в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ Покажите, что $S^\perp$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{H}$ и что $S^\perp = [\bar{S}]^\perp$. Далее, покажите, что если $f \in S \cap S^\perp$, то $f = 0$.

1.20. Банахово пространство называется *равномерно выпуклым*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $\|f\| = \|g\| = 1$ и $\|(f+g)/2\| > 1-\delta$ следует $\|f-g\| < \varepsilon$. Покажите, что гильбертовы пространства равномерно выпуклы, и приведите два примера банаховых пространств, не обладающих этим свойством.

Докажите, что равномерная выпуклость гарантирует единственность точки линейного подпространства, находящейся на минимальном расстоянии от некоторой заданной точки пространства $\mathscr{B}$. (Существование такой точки не утверждается.)

1.21. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ — линейно-независимое множество векторов в предгильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта — это метод индуктивного построения из этого множества некоторого нового множества, состоящего из ортонормированных векторов: он заключается в том, что полагают $h_1 = \psi_1$, $\varphi_1 = h_1/\|h_1\|$ и

$$h_n = \psi_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, \varphi_k)\, \varphi_k, \qquad \varphi_n = h_n/\|h_n\|.$$

Покажите, что $\{\varphi_n\}$ — ортонормированное множество и что $\{\psi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ имеют одну и ту же линейную оболочку.

Проведите процесс Грама — Шмидта для нескольких первых членов последовательности $1, x, x^2, \ldots$ в пространстве $\mathscr{C}([-1, 1])$ со скалярным произведением $\int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ и покажите, что в результате получаются полиномы Лежандра

$$L_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}\left[(1 - x^2)^n\right].$$

1.22. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — ортонормированные множества в гильбертовом пространстве, причем $\{\varphi_n\}$ полно. Докажите, что $\{\psi_n\}$ полно, если $\sum \|\varphi_n - \psi_n\|^2 < 1$.

Глава 2

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЛЕБЕГУ И ПРОСТРАНСТВА $\mathscr{L}_p$

2.1. Введение

В предыдущей главе мы пытались убедить читателя, что полные нормированные пространства — подходящие пространства для построения анализа, однако привели лишь несколько примеров полных пространств функций ($\mathscr{C}(\Omega)$ с sup-нормой и родственные ему пространства) и не дали ни одного примера гильбертова пространства функций. Хотя $\mathscr{C}(\Omega)$ и очень полезное пространство, ограничить анализ его рамками значило бы слишком сузить круг проблем, доступных решению, и в частности исключило бы применение мощных результатов абстрактной теории операторов в гильбертовых пространствах. В этой главе мы расширим наш перечень пространств, присоединив к нему банаховы пространства $\mathscr{L}_p$ и гильбертово пространство $\mathscr{L}_2$. Вместе с $\mathscr{C}(\Omega)$ это дает уже достаточно широкий диапазон пространств для большинства приложений.

Чтобы построить новые банаховы пространства функций, естественнее всего попытаться ввести в $\mathscr{C}(\Omega)$ другие нормы. Например, в $\mathscr{C}([0, 1])$ можно испробовать

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx;$$

ясно, что $\|\cdot\|_1$ и в самом деле является нормой, и притом $\|f\|_1$ есть физически важная величина — среднее значение $|f|$. К сожалению, $\mathscr{C}([0, 1])$ не полно по этой норме (пример (1.4.2). Один путь обойти эту трудность заключается в том, чтобы рассмотреть „пополнение“ $\mathscr{C}([0, 1])$ по норме $\|\cdot\|_1$. Этот путь действительно приводит к банахову пространству, однако интуитивно не ясно, какими свойствами должна обладать функция, чтобы содержаться в нем, и, более того, совсем не очевидно, будут ли вообще элементы абстрактного пополнения функциями. Другой путь — расширить множество рассматриваемых функций, присоединив к нему все функции, интегрируемые по Риману. Однако этот путь не приводит к полному пространству — интегрируемых по Риману функций не хватает. Иначе говоря, предел последовательности непрерывных функций, являющейся последовательностью Коши по норме $\|\cdot\|_1$, может оказаться неинтегрируемым по Риману. Это обстоятельство подсказывает тактику, которой мы здесь и последуем: построить другое понятие интегрируемости, позволяющее охватить более широкий класс функций.

Теория, которая далее будет изложена, зародилась в работах Лебега, относящихся к началу века, и составляет ныне стандартную часть классической теории функций вещественной переменной. И действительно, во всех случаях, кроме самых простых, интеграл Лебега имеет заметное превосходство над интегралом Римана. Так, например, задачи, в которых интегрирование соединяется с предельным переходом, часто вызывают затруднения, если рассматривается интеграл Римана, и становятся почти тривиальными, если используется интеграл Лебега. И хотя нашим главным стимулом для изложения этой теории остается определение на ее основе пространств $\mathscr{L}_p$, сам интеграл Лебега также пригодится нам во многих других местах.

К сожалению, предварительный анализ, необходимый для построения интеграла Лебега, неспециалисту может показаться довольно трудным, ибо он занимает много места и требует привлечения малоизвестных методов, которые к тому же не используются почти ни в какой другой из областей, представляющих интерес. С другой стороны, сами *результаты* теории изящны по форме и просты для применения. Мы приняли ту точку зрения, что следует привести обзор основных моментов теории, чтобы читатель смог „почувствовать“ предмет, а доказательства стоит опустить, во всяком случае если используемые в них рассуждения не потребуются в дальнейшем. Для удобства ссылок главные результаты собраны вместе в виде теорем. Ими можно пользоваться, не вдаваясь в лежащий в их основе анализ, который прагматически настроенный читатель может, следовательно, опустить.

Чтобы наш подход к построению интеграла Лебега был более понятен, напомним сначала один из методов построения интеграла вещественнозначной функции f по конечному промежутку $[a, b]$, основанный на приближении функции f ступенчатыми функциями.

2.1.1. Определение. Пусть S — подмножество некоторого множества X. Функция χ_S, определенная условиями $\chi_S(x) = 1$ при $x \in S$ и $\chi_S(x) = 0$ при $x \notin S$, называется **характеристической** (или **индикаторной) функцией** множества S. Линейная комбинация конечного числа характеристических функций интервалов называется **ступенчатой функцией.**

Пусть $X = [a, b]$. Рассмотрим подынтервалы $S_1 = [x_0, x_1]$, $S_2 = (x_1, x_2]$, ..., $S_n = (x_{n-1}, x_n]$, где $x_0 = a$, $x_n = b$, и определим интеграл ступенчатой функции $g = \sum\limits_1^n c_i \chi_{S_i}$ как „площадь под ее графиком“:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_1^n c_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

Этот интеграл называется *нижней суммой* (соотв. *верхней суммой*) для f, если $g(x) \leqslant f(x)$ (соотв. $g(x) \geqslant f(x)$) для $x \in [a, b]$. Если верхняя грань всех нижних сумм обладает определенным свойством (а именно равна нижней грани всех верхних сумм), она называется *интегралом* f. Это налагает на f некоторые ограничения; зато для таких интегрируемых по Риману функций интеграл сохраняет свои обычные приятные свойства, такие как аддитивность: $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Чтобы мотивировать следующий шаг, введем несколько иной способ записи: длину S_i обозначим через $\mu(S_i)$. Тогда нижняя сумма примет вид $\sum_1^n c_i \mu(S_i)$. Основная идея при переходе к более общему интегралу состоит в том, чтобы ввести аналог понятия длины интервала (или площади прямоугольника в случае $\mathbb{R}^2$ и т. д.) для более общих множеств; его называют мерой множества. Теория меры составляет основу теории интегрирования; ею мы и займемся прежде всего.

План этой главы таков. В § 2.2 определяется некий достаточно обширный набор множеств и вводится понятие меры таких множеств. Затем рассматриваются измеримые функции (грубо говоря, это функции, для которых можно определить интеграл). В § 2.4 вводится интеграл и перечисляются его основные свойства. В § 2.5 рассматриваются пространства $\mathscr{L}_p$. И наконец, в § 2.6 приводятся некоторые важные результаты, допускающие естественную формулировку в $\mathscr{L}_p$.

Мы настоятельно рекомендуем обратиться к книгам Де Барра [1974] и Бартла [1966]; в них можно найти доказательства. Несколько другой подход применен в книге Бёркилла [1951], с которой также полезно ознакомиться.

2.2. Мера множества

В основе теории меры лежит понятие меры множества — обобщение понятия длины интервала в $\mathbb{R}$ (площади в $\mathbb{R}^2$ и т. д.). Чем больше в пространстве „измеримых“ подмножеств, тем больше интегрируемых функций. Попытка ввести „хорошо себя ведущую“ меру, определенную на всех множествах, оказывается чересчур самонадеянной; тем не менее, как мы увидим, существует мера с приемлемыми свойствами, определенная на очень широком классе подмножеств. Хотя свойства меры и навеяны свойствами длины, в теории меры выгоден абстрактный подход. Во-первых, он помогает прояснить ход рассуждений, освободив их от необязательных деталей, и, во-вторых, позволяет без дополнительных усилий получить сразу несколько разных мер. Одна из них приводит к интегралу Лебега — Стильтьеса — обобщению интеграла Римана — Стильтьеса. Однако нашей главной целью будет мера Лебега и интеграл Лебега в $\mathbb{R}^n$ — непосредственное обобщение интеграла Римана.

Всюду далее через X обозначается некоторое множество (можно считать его подмножеством в $\mathbb{R}^n$), а через $\mathscr{S}$ — некоторый класс его подмножеств. Сначала выясним, для какого класса подмножеств можно разумно определить меру. Интуитивно ясно, что если два каких-то подмножества имеют меру, то этим свойством должны обладать их объединение, пересечение и разность, а если последовательность множеств состоит из непересекающихся множеств, каждое из которых имеет меру, то и их объединение должно иметь меру, и притом равную сумме мер множеств-слагаемых. Эти соображения подсказывают такое определение:

2.2.1. Определение. Класс $\mathscr{S}$ подмножеств множества X называется **σ-алгеброй,** если

(i) $\varnothing,\ X \in \mathscr{S}$;

(ii) $S \in \mathscr{S} \ \Rightarrow\ X \setminus S \in \mathscr{S}$;

(iii) $S_1, S_2, \ldots \in \mathscr{S} \ \Rightarrow\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathscr{S}$.

Множество, принадлежащее данной σ-алгебре, называется **σ-измеримым множеством.**

Коротко говоря, требуется, чтобы $\varnothing$, $X \in \mathscr{S}$ и $\mathscr{S}$ было замкнутым относительно взятия дополнений и счетных объединений. Другие возможные комбинации множеств из $\mathscr{S}$ указаны в задаче 2.1. Очевидно, что σ-алгебры существуют для любого множества X: класс всех подмножеств X является σ-алгеброй, хотя от нее и мало проку. Более успешным оказывается другой подход: взять произвольный класс $\mathscr{S}$ подмножеств X и заметить, что пересечение всех содержащих его σ-алгебр является σ-алгеброй.

2.2.2. Определение. Пусть $\mathscr{S}$ — некоторый класс подмножеств X. Наименьшая содержащая его σ-алгебра называется **σ-алгеброй, порожденной** $\mathscr{S}$, и обозначается $\mathscr{S}_\sigma$.

2.2.3. Определение. σ-алгебра, порожденная открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$, называется **σ-алгеброй борелевских множеств,** а составляющие ее множества называются **борелевскими множествами.** Если X — подмножество $\mathbb{R}^n$, то S называется **борелевским множе-**

ством в X, когда $S = X \cap S_1$, где S_1 — борелевское множество в $\mathbb{R}^n$.

Это особенно важная σ-алгебра, поэтому хорошо было бы иметь какое-нибудь простое описание борелевских множеств. Прежде всего мы замечаем, что эта σ-алгебра очень велика — ведь она содержит произвольные счетные объединения и пересечения открытых множеств. Далее, оказывается, что явное описание борелевских множеств при помощи даже счетного множества операций, исходя из открытых множеств, невозможно. На первый взгляд это сильно портит дело, однако заметим, что и открытые множества допускают простое описание (каждое открытое множество есть объединение последовательности непересекающихся открытых интервалов) только в $\mathbb{R}$, а в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$ такого описания уже нет. Тем не менее открытые множества очень полезны. Решающим фактом является то, что во многих случаях борелевские множества легко распознаются (поскольку разности, объединения и пересечения последовательностей борелевских множеств — снова борелевские множества).

2.2.4. Пример. Рациональные и иррациональные числа в $\mathbb{R}$ образуют борелевские множества. В самом деле, отдельные точки измеримы (берем дополнение к $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$), а так как множество рациональных чисел есть счетное объединение отдельных точек, то оно измеримо по определению σ-алгебры. Дополнением к нему является множество иррациональных чисел, которое, следовательно, тоже измеримо.

2.2.5. Лемма. *σ-алгебра борелевских множеств порождается каждой из следующих совокупностей подмножеств:* (i) *замкнутыми множествами,* (ii) *ограниченными открытыми множествами,* (iii) *ограниченными замкнутыми множествами,* (iv) *открытыми шарами,* (v) *замкнутыми шарами.*

Доказательство. (i) Дополнение открытого множества замкнуто. (ii) Всякое открытое множество S есть объединение последовательности открытых множеств $(0, n) \cap S$ при целых n. (iii) Аналогично. (iv) Здесь недостаточно заметить, что всякое открытое множество есть объединение открытых шаров, — нужно, чтобы объединение было *счетным.* Для этого берутся шары с центрами в точках с рациональными координатами и рациональными радиусами. (v) Аналогично. □

Теперь мы подошли к определению самой меры. Полезные меры всегда определены на σ-алгебрах. По аналогии с понятием длины естественно потребовать, чтобы мера представляла собой функцию со значениями в расширенной вещественной прямой[1], в некотором смысле аддитивную.

2.2.6. *Определение.* **Мерой** μ на σ-алгебре $\mathscr{S}$ называется отображение этой σ-алгебры в $\overline{\mathbb{R}}^+$, обладающее следующими свойствами:

(i) мера пустого множества равна нулю, т. е. $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) μ *счетно аддитивно*, т. е. для всякой последовательности (S_n) попарно непересекающихся множеств из $\mathscr{S}$ имеем

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty S_n\right) = \sum_1^\infty \mu(S_n).$$

Тройка $(X, \mathscr{S}, \mu)$ называется **пространством с мерой.** (Некоторые основные свойства меры перечислены в задаче 2.2.)

2.2.7. *Пример* (мера Дирака, δ функция). Пусть $\mathscr{S}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств X и a — некоторая точка из X. Положим

$$\delta_a(S) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a \in S, \\ 0 & \text{при} \quad a \notin S. \end{cases}$$

Очевидно, что δ_a — мера на $\mathscr{S}$. В случае $X = \mathbb{R}^n$ эта мера называется δ-функцией (сосредоточенной в точке a).

Этот пример убеждает нас в существовании мер, но, конечно, мера Дирака мало напоминает обычную длину в $\mathbb{R}$. Перейдем теперь к случаю мер, похожих на длину.

Можно показать, что на σ-алгебре *всех* подмножеств $\mathbb{R}$ никакой такой (похожей на длину) меры не существует. Чтобы найти меру, аналогичную длине, на σ-алгебре $\mathscr{S}$ борелевских подмножеств $\mathbb{R}$, естественно начать с интервалов и положить меру интервала с концами a и b равной $b - a$. Далее, рассматривая комбинации этих основных множеств — счетные объединения и т. п., — можно было бы надеяться получить в конце концов меру на $\mathscr{S}$. К сожалению, потребуется несчетное множество таких операций (вспомним, что для построения борелевских множеств не хватает счетного числа операций над открытыми множествами). Поэтому мы будем действовать по-другому.

---

[1] Ясно, что такие множества, как $(-\infty, \infty)$, должны иметь бесконечную меру. Поэтому удобно ввести в рассмотрение множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ называемое *расширенной вещественной прямой*, а также положить $\mathbb{R}^+ = \{x: 0 \leqslant x < \infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. В $\overline{\mathbb{R}}$ допускаются обычные алгебраические операции, за исключением запрещенных комбинаций $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ и частных вроде ∞/∞. Напротив, комбинация $\infty + \infty$ разрешена и равна ∞, а произведения $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$ полагаются равными 0.

2.2.8. Определение. Класс $\mathscr{S}$ подмножеств X называется **алгеброй,** если

(i) $\varnothing,\ X \in \mathscr{S}$;

(ii) $S \in \mathscr{S} \Rightarrow X \setminus S \in \mathscr{S}$;

(iii) объединение любой конечной совокупности множеств из $\mathscr{S}$ лежит в $\mathscr{S}$.

Заметим, что алгебра отличается от σ-алгебры только свойством (iii): она замкнута относительно взятия *конечных* объединений. Теперь обобщим на алгебры определение 2.2.6.

2.2.9. Определение. **Мерой** μ на алгебре $\mathscr{S}$ называется отображение этой алгебры в $\overline{\mathbb{R}}^+$, обладающее следующими свойствами:

(i) $\mu(\varnothing)=0$;

(ii) для всякой последовательности $S_1, S_2, \ldots$ попарно непересекающихся множеств из $\mathscr{S}$, такой что $\bigcup\limits_1^\infty S_n \in \mathscr{S}$, имеем

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty S_n\right)=\sum_1^\infty \mu(S_n).$$

2.2.10. Пример. Теперь можно провести предложенную выше процедуру и определить меру на алгебре, состоящей из конечных объединений интервалов, открытых, полуоткрытых или замкнутых (включая пустой интервал и интервалы, состоящие из одной точки). Положим меру конечного интервала с концами a, b равной $b-a$, а меру всякого бесконечного интервала равной ∞. Меру произвольного множества $S \in \mathscr{S}$ определим очевидным образом, а именно положим $\mu\left(\bigcup\limits_1^j S_n\right)=\sum\limits_1^j \mu(S_n)$ для попарно непересекающихся $S_1, \ldots, S_j$. Мы утверждаем, что μ — мера на $\mathscr{S}$.

Чтобы это доказать, достаточно проверить условие (ii) определения 2.2.9, а для этого нужно только убедиться, что если $S=\bigcup\limits_1^\infty S_n$, где S и каждое S_n — интервалы, то $\mu(S)=\sum\limits_1^\infty \mu(S_n)$. Проведем доказательство для типичного случая, когда S — конечный интервал с концами a, b. Пусть S_n — интервал с концами a_n, b_n. При всяком j

$$\sum_1^j \mu(S_n)=\sum_1^j (b_n-a_n) \leqslant b-a=\mu(S),$$

откуда $\sum\limits_1^\infty \mu(S_n) \leqslant \mu(S)$. Чтобы доказать противоположное неравенство, выберем произвольное $\varepsilon>0$ и замкнутый интервал $T \subset S$, такой что $\mu(S)-\mu(T)<\varepsilon$. Далее, выберем такие $\varepsilon_n>0$, чтобы $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n<\varepsilon$, и положим $T_n=(a_n-\varepsilon_n,\ b_n+\varepsilon_n)$ при каждом n, так что $\mu(T_n)=\mu(S_n)+2\varepsilon_n$. Очевидно, $T\subset S=\bigcup\limits_1^\infty S_n=\bigcup\limits_1^\infty T_n$. Так как T замкнуто, то по теореме Гейне — Бореля $T\subset T_{n_1}\cup\ldots\cup T_{n_k}$ для некоторого конечного k. Следовательно, ввиду произвольности ε, наше утверждение вытекает из неравенств

$$\mu(S)-\varepsilon\leqslant\mu(T)\leqslant\sum_1^k\mu(T_{n_i})=\sum_1^k\mu(S_{n_i})+2\sum_1^k\varepsilon_{n_i}\leqslant\sum_1^\infty\mu(S_n)+2\varepsilon.$$

2.2.11. Пример. Проведение подобной процедуры в $\mathbb{R}^2$ приводит к мере, основанной на площадях прямоугольников. Нетрудно построить и многомерные аналоги.

Итак, мы построили меру на $\mathscr{S}$. Но $\mathscr{S}$ не является σ-алгеброй, и наш следующий шаг — определить меру $\bar\mu$ на какой-нибудь σ-алгебре, содержащей $\mathscr{S}$, которая на $\mathscr{S}$ совпадала бы с μ. Такую меру можно определить на $\mathscr{S}_\sigma$ (это так называемая *мера Бореля*), но она неудобна тем, что подмножества множеств меры нуль могут оказаться неизмеримыми. Переход к несколько большей σ-алгебре позволяет избавиться от этого недостатка.

2.2.12. Теорема. *Пусть μ — мера на алгебре $\mathscr{S}$. Тогда на всякой σ-алгебре $\bar{\mathscr{S}}$, содержащей $\bar{\mathscr{S}}$, существует такая мера $\bar\mu$, что*

(i) *μ и $\bar\mu$ совпадают на $\mathscr{S}$;*

(ii) *если $S_2\in\bar{\mathscr{S}}$ и $\bar\mu(S_2)=0$, то $S_1\in\bar{\mathscr{S}}$ и $\bar\mu(S_1)=0$, каково бы ни было $S_1\subset S_2$.*

Кроме того, если существует такая последовательность (S_n), что $S_n\in\mathscr{S}$, $\mu(S_n)<\infty$ и $X=\bigcup\limits_1^\infty S_n$, то $\bar\mu$ однозначно определена на наименьшей σ-алгебре, содержащей $\mathscr{S}$ и удовлетворяющей условию (ii).

Мы не приводим доказательство этой теоремы (см. Бартл [1966, гл. 9]), однако, чтобы читатель мог лучше ее „прочувствовать“, опишем кратко метод построения меры $\bar\mu$. Для всякого $Y\subset X$ положим

$$\mu^*(Y)=\inf\left\{\sum_1^\infty\mu(S_i):\quad Y\subset\bigcup_1^\infty S_i,\quad S_i\in\mathscr{S}\right\}.$$

Таким образом, μ^* определяется посредством „охвата“ Y извне. Функция μ^* обладает свойством $\mu^*(Y_1\cup Y_2)\leqslant\mu^*(Y_1)+\mu^*(Y_2)$ для всех Y_1, $Y_2 \in X$, но равенство, вообще говоря, не имеет места даже для непересекающихся Y_1, Y_2. Поэтому μ^* не является мерой (хоть ее и называют „внешней мерой“!). Стратегия состоит в том, чтобы выбрать класс множеств, на котором μ^* аддитивна, а значит, является мерой. Это не так просто. Оказывается, искомый класс состоит из всех множеств Y, удовлетворяющих условию $\mu^*(S \cap Y) + \mu^*(S \setminus Y) = \mu^*(S)$ при всяком $S \in \mathcal{S}$. Эти множества и составляют σ-алгебру, о которой говорится в теореме.

Теперь мы достигли цели. В случае $\mathbb{R}^n$ мы просто возьмем меру, описанную в примерах 2.2.10 и 2.2.11, и расширим ее в соответствии с предыдущей теоремой.

2.2.13. Определение. σ-алгебра, которая получается по предыдущей теореме, если исходить из длин интервалов, площадей прямоугольников, ... в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, ..., называется **σ-алгеброй лебеговских множеств,** а соответствующая мера $\bar{\mu}$ — **мерой Лебега.**

С практической точки зрения разница между лебеговскими и борелевскими множествами невелика, ибо всякое множество, измеримое по Лебегу, является объединением борелевского множества (той же меры) и множества нулевой меры Лебега. Борелевские множества, разумеется, измеримы по Лебегу. На самом деле построить множество, неизмеримое по Лебегу, очень трудно (для этого приходится воспользоваться одним мудрёным принципом из теории множеств), и чтобы встретиться с подобным объектом, нужно какое-то особое невезение.

2.2.14. Пример. Вычислим меру Лебега множества S рациональных чисел, содержащихся в данном интервале X прямой $\mathbb{R}$. Мера множества, состоящего из одной точки, равна нулю, а S есть счетное объединение своих точек. Следовательно, по определению 2.2.6, (ii), $\mu(S) = 0$. Перейдя к дополнениям, мы убедимся, что мера соответствующего множества иррациональных чисел равна длине интервала X.

2.2.15. Пример. При помощи теоремы 2.2.12 можно построить еще одну полезную меру. Пусть γ — произвольная неубывающая функция на $\mathbb{R}$, непрерывная справа. Для $a, b \in \mathbb{R}$ положим

$$\gamma((a, b]) = \gamma(b) - \gamma(a), \quad \gamma((a, b)) = \lim_{x \to b-} \gamma(x) - \gamma(a)$$

и аналогичные определения введем для других типов интервалов. Тогда γ — мера на конечных объединениях интервалов и потому расширяется до меры, известной под названием *меры Лебега — Стильтьеса.*

Следует обратить внимание на одно важное обстоятельство: в теории меры принято (не без основания) считать множества меры нуль малыми, и даже настолько малыми, что ими почти можно пренебречь. Поэтому естественно ввести следующее определение.

2.2.16. Определение. Говорят, что утверждение имеет место **почти всюду**, если множество, на котором оно не выполнено, имеет меру нуль. Вместо слов „почти всюду“ мы будем часто пользоваться сокращением „п. в.“.

2.2.17. Пример. Пусть μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Допустим, что $\mathbb{R} = S \cup S'$, где S и S' не пересекаются, и $f(x) = 1$ при $x \in S$, $f(x) = 0$ при $x \in S'$. Тогда $f = 1$ п. в. в том и только в том случае, если $\mu(S') = 0$. Чтобы выполнялось последнее условие, разумеется, достаточно, чтобы S' было конечным множеством, но оно может быть и счетным, вроде множества рациональных чисел, и даже некоторые несчетные множества имеют меру нуль (например, канторово множество из задачи 1.8).

В заключение сделаем одно общее замечание. Оно касается одной особенности проведенных выше рассуждений, на которую мы уже намекали. В теории интегрирования определения многих объектов (скажем, меры Лебега) неконструктивны. На первый взгляд это кажется серьезным недостатком. Однако мы увидим, что о таких объектах всегда можно узнать ровно столько, сколько нужно для практических целей, так что неконструктивность определений нам не помеха.

2.3. Измеримые функции

Одно из преимуществ теории интегрирования, построенной на основе теории меры, состоит в том, что в ней, как правило, легко распознать интегрируемые функции. Ключом к этому служит предварительное описание несколько более широкого класса измеримых функций.

Как и в случае мер, большое дополнительное удобство создается тем, что в качестве области значений функций берется *расширенная* вещественная прямая. Это позволяет, например, рассматривать функции типа $x^{-1/2}$ на всём отрезке $X = [0, 1]$, не проявляя никакой специальной заботы о точке $x = 0$. Цена, которую приходится платить за это удобство, невелика. Учитывая предыдущие замечания об $\overline{\mathbb{R}}$, нужно не допускать выражений типа $f + g$, если в некоторой точке такое выражение может оказаться равным $\infty + (-\infty)$. Произведения $0 \cdot \infty$ и $0 \cdot (-\infty)$ допустимы и по определению равны нулю. Комплекснозначным функциям не разрешается принимать бесконечных значений ввиду трудностей с интерпретацией выражений вида $\infty + i\infty$. Приняв эту меру предосторожности, мы можем представить всякую комплекснозначную функцию в виде $f = g + ih$ с однозначно определенными вещественнозначными g и h, а следовательно, все результаты без ограничения общности можно формулировать для вещественного случая.

2.3.1. Определение. Пусть $\mathscr{S}$ — некоторая σ-алгебра. Функция f: $X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **измеримой**, если при любом вещественном α множество

$$f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x : x \in X, \quad f(x) > \alpha\}$$

принадлежит $\mathscr{S}$. Комплекснозначная функция $g + ih$ называется измеримой, если измеримы обе функции g и h. Эквивалентное определение получится, если вместо $(\alpha, \infty]$ взять $[\alpha, \infty]$, $[-\infty, \alpha)$ или $[-\infty, \alpha]$.

2.3.2. Пример. Рассмотрим постоянную функцию $f(x) = a$. Тогда $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \varnothing$ при $\alpha \geqslant a$ и $f^{-1}((\alpha, \infty]) = X$ при $\alpha < a$. Так как по определению всякая σ-алгебра содержит $\varnothing$ и X, то f измерима.

2.3.3. Пример. Пусть S — любое множество из $\mathscr{S}$ и χ — его характеристическая функция. Тогда $\chi^{-1}((\alpha, \infty]) = \varnothing$, S или X соответственно тому, $\alpha \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$ или $\alpha < 0$. Следовательно, χ измерима. Отсюда видно, что относительно σ-алгебры Лебега на $\mathbb{R}$ измерима даже такая не слишком приятная функция, как функция f, определяемая равенствами $f(x) = 1$ при иррациональных x, $f(x) = 0$ при рациональных x.

2.3.4. Пример. Пусть $\mathscr{S}$ есть σ-алгебра Лебега на $\mathbb{R}^n$ и f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Так как f принимает только конечные значения, то $f^{-1}((\alpha, \infty]) = f^{-1}((\alpha, \infty))$. Поэтому из одного результата, который будет доказан в следующей главе (леммы 3.2.9), вытекает, что $f^{-1}((\alpha, \infty))$ — открытое множество. Но $\mathscr{S}$ содержит все открытые множества, и мы заключаем, что *всякая непрерывная функция измерима.*

2.3.5. Пример. Пусть $X = [0, \infty)$, и пусть $\mathscr{S}$ есть σ-алгебра Лебега. Для функции $f(x) = x^{-a}$ $(a > 0)$ из X в $\overline{\mathbb{R}}$ множество $f^{-1}((\alpha, \infty])$ при $\alpha \leqslant 0$ совпадает с X, а при $\alpha > 0$ представляет собой полуинтервал $[0, \alpha^{-1/a})$. Оба эти множества принадлежат $\mathscr{S}$, поэтому x^{-a} измерима.

Какие еще функции измеримы? Их список очень сильно увеличится, если заметить, что измеримы некоторые комбинации измеримых функций и пределы последовательностей измеримых функций. Пусть, например, (f_n) — последовательность измеримых функций. Определим функцию $\sup f_n$, полагая $(\sup f_n)(x) = \sup f_n(x)$ при каждом x. (Заметим, что эта функция всегда существует, поскольку допускаются $\overline{\mathbb{R}}$-значные функции.) Тогда

$$\{x\colon \sup_n f_n(x) > a\} = \{x\colon f_n(x) > a \quad \text{при хотя бы одном } n\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\colon f_n(x) > a\},$$

и так как $\mathscr{S}$ замкнуто относительно счетных объединений, то $\sup f_n$ измерима. Положение дел подытожено в следующих двух теоремах.

2.3.6. Теорема. *Пусть $\mathscr{S}$ есть σ-алгебра подмножеств пространства X и $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые функции. Тогда измеримы также следующие функции*:

(i) af $(a \in \mathbb{R})$;

(ii) $|f|$;

(iii) $f + g$ (*с оговоркой, что не должны встречаться выражения вида* $\pm\infty + (\mp\infty)$);

(iv) fg;

(v) $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ (*где* $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ *при* $x \in X$);

(vi) $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$.

2.3.7. Теорема. *Пусть $\mathscr{S}$ есть σ-алгебра подмножеств пространства X и (f_n) — последовательность измеримых функций $X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда измеримы также следующие функции*:

(i) $\sup f_n$, $\inf f_n$;

(ii) $\limsup f_n$ $(= \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{r \geqslant n} f_r)$, $\liminf f_n$;

(iii) *поточечный предел* $\lim f_n$, *если он существует*.

Рассмотрим, наконец, класс „простых функций“, на использовании которых будет основано определение интеграла. Это — обобщение ступенчатых функций (определение 2.1.1), применяемых для определения интеграла Римана.

2.3.8. Определение. Пусть $\mathscr{S}$ есть σ-алгебра подмножеств пространства X. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется **простой**, если существуют конечное число множеств $S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{S}$ и вещественные числа $c_1, \ldots, c_n$, такие что $f = \sum\limits_1^n c_i \chi_{S_i}$, где χ_{S_i} — характеристическая функция множества S_i.

Очевидно, что простые функции измеримы (вспомним пример 2.3.3). Суммы, произведения и модули простых функций снова являются простыми функциями. Пределы последовательностей простых функций необязательно обладают этим свойством, однако по теореме 2.3.7 они заведомо измеримы. Важная роль простых функций объясняется тем, что ими можно аппроксимировать любую измеримую функцию.

2.3.9. Лемма. *Пусть $\mathscr{S}$ есть σ-алгебра подмножеств пространства X и $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая функция. Тогда:*

(i) *если $f \geqslant 0$, то существует монотонно возрастающая последовательность неотрицательных простых функций, поточечно сходящаяся к f;*

(ii) *если f ограничена, то существует последовательность простых функций, сходящаяся к f по* sup-*норме.*

В заключение заметим, что класс измеримых функций чрезвычайно велик и наверняка включает в себя всякую функцию, которая может возникнуть в приложениях. Например, измеримы поточечные пределы последовательностей непрерывных функций (пример 2.3.4 и теорема 2.3.7). И вообще, найти неизмеримую функцию ничуть не легче, чем построить неизмеримое множество.

2.4. Интегрирование

Трудной частью теории интегрирования, основанной на теории меры, является построение меры, а теперь, когда это уже сделано, определить интеграл не составляет никакого труда. Процесс разбивается на несколько шагов. Сначала дается естественное определение интеграла простой функции. Затем, вспомнив, что всякая неотрицательная измеримая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ является пределом простых функций, мы полагаем интеграл f равным верхней грани интегралов всех простых функций, не превосходящих f; та же процедура используется и при определении интеграла Римана, но там допускаются только ступенчатые функции. Наконец, интеграл вещественной, но необязательно положительной функции f получается при помощи расщепления ее на положительную и отрицательную части, а комплексной — на вещественную и мнимую части. Интеграл по X относительно меры μ будет обозначаться

$$\int_X f\,d\mu,\ \int f\,d\mu \quad \text{или} \quad \int f(x)\,d\mu(x).$$

2.4.1. Определение. Пусть $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с мерой и f — измеримая функция.

(i) Для простой функции f, скажем $f = \sum\limits_1^n c_i \chi_{S_i}$, положим

$$\int f\,d\mu = \sum_1^n c_i \mu(S_i)$$

с учетом соглашения $0\cdot\infty = 0$.

(ii) Для $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$, $f\geqslant 0$ положим

$$\int f\,d\mu = \sup_g\left\{\int g\,d\mu\colon g \text{ простая и } 0\leqslant g(x)\leqslant f(x) \text{ при } x\in X\right\}.$$

(iii) Пусть $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$. Обозначим через f^+, f^- соответственно положительную и отрицательную части f и положим

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu,$$

при условии что хотя бы один из интегралов в правой части конечен (чтобы избежать неопределенности $\infty - \infty$).

(iv) Пусть f комплекснозначна. Если интегралы $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ могут быть определены согласно (iii) и конечны, то положим

$$\int f\,d\mu = \int \operatorname{Re} f\,d\mu + i\int \operatorname{Im} f\,d\mu.$$

(v) Для произвольного измеримого множества S пусть χ_S — его характеристическая функция. Если интеграл $f\chi_S$ можно определить одним из указанных выше способов, то положим

$$\int_S f\,d\mu = \int_X f\chi_S\,d\mu.$$

Если интеграл можно определить таким способом, то мы будем говорить, что *интеграл существует*. Принятое в нашем определении соглашение $0\cdot\infty = 0$ приводит к тому, что интеграл по S существует и равен нулю, если $f(x) = 0$ при $x\in S$ (даже когда $\mu(S) = \infty$) и если $\mu(S) = 0$ (даже когда $f(x) = \infty$ при $x\in S$). Кроме того, если f измерима, то интеграл существует (хотя и может обращаться в бесконечность) во всех случаях, когда либо f неотрицательна, либо конечен интеграл ее положительной или отрицательной части. На самом деле мы обычно будем иметь дело с более узким классом функций, для которых конечны все интегралы, упомянутые в определении (что имеет место только тогда, когда f почти всюду конечна). Для этих функций интеграл обладает всеми свойствами, которых мы от него ждем.

2.4.2. Определение. Пусть f есть $\overline{\mathbb{R}}$-значная или комплекснозначная функция. Она называется **интегрируемой** (по X относительно μ), если она измерима и $\int |f|\,d\mu < \infty$. В случае когда X — подмножество $\mathbb{R}^n$, функция f называется **локально-интегрируемой,** если она интегрируема на каждом замкнутом в $\mathbb{R}^n$ ограниченном множестве $S\subset X$.

2.4.3. Лемма. (i) *Если f интегрируема, то* $\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int |f| d\mu$.

(ii) *Пусть f, g — измеримые функции со значениями в* $\overline{\mathbb{R}}$ *и* $f \leqslant g$. *Тогда* $\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$.

(iii) *Пусть f, g — измеримые функции и a — некоторый скаляр. Если $f, g \geqslant 0$ и $a \geqslant 0$ или если f, g интегрируемы, то*

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu, \quad \int af\, d\mu = a \int f\, d\mu.$$

В теории интегрирования множествами меры нуль, как правило, можно пренебречь. Допустим, например, что интегрируемые функции f, g равны почти всюду. Если $S = \{x\colon f(x) \neq g(x)\}$ и $S' = X \setminus S$, то

$$\int\limits_X (f-g)\, d\mu = \int\limits_{S'} (f-g)\, d\mu + \int\limits_S (f-g)\, d\mu = 0,$$

ибо первый интеграл равен нулю в силу равенства $f = g$ на S', а второй — потому что $\mu(S) = 0$. Итак, две функции, равные почти всюду, имеют равные интегралы, или, иначе говоря, изменение функции на множестве меры нуль не изменяет ее интеграла. Одно из следствий этого факта состоит в том, что обычное понятие ограниченности для теории интегрирования оказывается чересчур сильным. В этом случае больше подходит понятие ограниченности почти всюду.

2.4.4. Определение. Величина

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{k\colon f(x) \leqslant k \text{ п. в.}\}$$

называется **существенной верхней гранью** функции f.

Безусловно, наиболее полезными в приложениях являются интегралы, взятые относительно меры Лебега.

2.4.5. Определение. Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Интеграл относительно меры Лебега μ называется **интегралом Лебега** и записывается обычно в виде $\int f(x)\, dx$ или $\int\limits_S f(x)\, dx$. Если μ — мера Лебега — Стилтьеса, то и интеграл называется **интегралом Лебега — Стилтьеса**.

Чтобы пояснить, как происходит интегрирование по Лебегу, рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию на отрезке $[0, 1]$. Для ступенчатой функции интегралы Римана и Лебега совпадают. Далее, интеграл Римана определяется точно так же, как интеграл Лебега, за исключением того, что верхняя грань в определении 2.4.1, (ii), берется по ступенчатым функциям. Но последние являются простыми функциями, значит, интеграл Римана не превосходит интеграла Лебега. Противоположное неравенство получается применением того же рассуждения к функции $a - f$, где

$a > \sup f$. Итак, в рассматриваемом случае значения интегралов Римана и Лебега совпадают. Обобщение этого рассуждения приводит к следующему обнадеживающему результату:

2.4.6. Теорема. *Пусть X — конечный интервал в $\mathbb{R}$ и f — ограниченная функция. Если f интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу, причем значения интегралов совпадают.*

Грубо говоря, если функция имеет собственный интеграл Римана (а во многих случаях, даже если она имеет несобственный интеграл Римана; см. задачу 2.6), то она интегрируема по Лебегу и интегралы совпадают. С другой стороны, класс функций, интегрируемых по Лебегу, намного шире класса функций, интегрируемых по Риману. Для сравнения отметим, что необходимым и достаточным условием интегрируемости по Риману ограниченной функции на конечном интервале является ее непрерывность почти всюду, в то время как для интегрируемости по Лебегу достаточно измеримости по Лебегу и ограниченности почти всюду. Приведем пример функции, интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману.

2.4 7. Пример. Положим $f(x) = 0$ при рациональных x, $f(x) = 1$ при иррациональных x. Ясно, что f не интегрируема по Риману. С другой стороны, множество рациональных чисел имеет меру 0 (пример 2.2.4), значит, $f = 1$ п. в., и так как множества меры 0 не дают вклада в интеграл, то $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 1$. К тому же выводу можно было прийти, заметив, что f — простая функция.

Остальная часть этого параграфа посвящена тому, чтобы продемонстрировать большое удобство обращения с введенным выше интегралом, и в частности с интегралом Лебега. Особенно заметны преимущества интеграла Лебега над интегралом Римана, когда мы имеем дело с предельным переходом. В случае интеграла Римана перемена порядка операций интегрирования и перехода к пределу часто требует для своего обоснования сложной, кропотливой работы, обычно связанной с установлением факта равномерной сходимости. В случае интеграла Лебега подобных трудностей нет. Это вытекает из трех следующих результатов, играющих центральную роль в теории интегрирования.

2.4.8. Теорема о монотонной сходимости. *Пусть $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с мерой и (f_n) — монотонно возрастающая последовательность неотрицательных $\overline{\mathbb{R}}$-значных измеримых функций. Тогда каждый из написанных ниже интегралов определен (хотя и необязательно конечен) и*

$$\lim \int f_n\,d\mu = \int \lim f_n\,d\mu.$$

Теорема верна и в случае, когда последовательность монотонно возрастает лишь почти всюду. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять характеристическую функцию χ_S множества S, на котором последовательность монотонно возрастает, и применить теорему к $(f_n\chi_S)$. Это — общее свойство теорем теории интегрирования: оставаться справедливыми при замене слова «всюду» словами «почти всюду», — и мы не будем каждый раз об этом говорить.

2.4.9. Пример. В качестве применения теоремы вычислим интеграл Лебега $\int\limits_0^1 x^{-1/2}\,dx$. Функция $x^{-1/2}$, как нам уже известно, измерима (пример 2.3.5). Кроме того, легко найти интеграл $\int\limits_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,dx$ при $\varepsilon > 0$, так как по теореме 2.4.6 он равен соответствующему интегралу Римана. Далее воспользуемся теоремой 2.4.8. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & \text{при } n^{-1} \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant x < n^{-1}. \end{cases}$$

Тогда (f_n) — монотонно возрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций, предел которой почти всюду равен $x^{-1/2}$ (на самом деле всюду, за исключением одноточечного множества $\{0\}$, имеющего меру нуль), и

$$\int\limits_0^1 x^{-1/2}\,dx = \int\limits_0^1 \lim f_n(x)\,dx = \lim \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \lim 2(1 - n^{-1/2}) = 2.$$

Один более общий результат, связывающий несобственный интеграл Римана и интеграл Лебега, сформулирован в задаче 2.6.

2.4.10 Лемма Фату. *Пусть $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с мерой и (f_n) — последовательность неотрицательных $\overline{\mathbb{R}}$-значных измеримых функций. Тогда*

$$\int \liminf f_n\,d\mu \leqslant \liminf \int f_n\,d\mu.$$

2.4.11. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. *Пусть $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с мерой и (f_n) — последовательность $\overline{\mathbb{R}}$-значных измеримых функций, причем $\lim f_n = f$. Если существует интегрируемая функция g, такая что $|f_n| \leqslant g$ $(n \geqslant 1)$, то f интегрируема и*

$$\lim \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

2.4.12. Пример. Рассмотрим интегралы $I_n = \int\limits_0^\infty e^{-nx} x^{-1/2}\,dx$. Мы хотим показать, что $\lim I_n = 0$. Положим $f_n(x) = e^{-nx}x^{-1/2}$. Ясно, что $\lim\limits_n f_n(x) = 0$ при $x \neq 0$, но сходимость неравномерна (так как $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \infty$), поэтому для установления желаемого результата в случае интеграла Римана пришлось бы опираться на тонкие соображения, связанные с разбиением области интегрирования. Если же воспользоваться теоремой о мажорированной сходимости, доказательство становится тривиальным упражнением. Мы попросту замечаем, что $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}x^{-1/2}$ при $x > 0$ и всех n, и, игнорируя точку $x = 0$, поскольку она имеет меру нуль, выводим непосредственно из теоремы, что $\lim I_n = 0$.

Рассмотрим теперь свойства функций, задаваемых при помощи интегралов. Простейшая из функций такого рода — неопределенный интеграл. По известной теореме анализа вещественнозначная функция f на $\mathbb{R}$ имеет непрерывную производную тогда и только тогда, когда она является неопределенным интегралом некоторой непрерывной функции g, и в этом случае $f' = g$. Допустим теперь, что g локально-интегрируема по Лебегу. Что можно сказать о ее неопределенном интеграле f?

2.4.13. Определение. Пусть S — конечный интервал. Вещественная функция f называется **абсолютно непрерывной** на **S**, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\sum\limits_1^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$ для любого конечного множества $\{[a_j, b_j]\}$ попарно непересекающихся интервалов суммарной длины меньше δ. Если f абсолютно непрерывна на каждом конечном подынтервале в $\mathbb{R}$, она называется абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$.

2.4.14. Теорема. *Вещественнозначная функция f, определенная на некотором интервале в $\mathbb{R}$, является неопределенным интегралом локально-интегрируемой по Лебегу функции, скажем g, тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна, и в этом случае f почти всюду дифференцируема и $f' = g$ (п. в.).*

В двух следующих теоремах X и Y — интервалы, а f есть $\overline{\mathbb{R}}$-значная функция на прямоугольнике $X \times Y$.

2.4.15. Теорема. *Предположим, что функция $f(x, \cdot)$ при каждом $x \in X$ измерима, а $f(\cdot, y)$ при каждом $y \in Y$ непрерывна. Допустим, что существует интегрируемая функция g: $X \to \mathbb{R}$, такая что $|f(x, y)| \leqslant g(y)$ при всех $x \in X$, $y \in Y$. Тогда следующая функция* *непрерывна:*

$$F(x) = \int_Y f(x, y)\, d\mu(y). \tag{2.4.1}$$

Доказательство. По теореме о мажорированной сходимости $F(x_n) \to F(x)$ при $x_n \to x$. $\square$

2.4.16. Теорема. *Предположим, что $f(\cdot, y)$ при каждом $y \in Y$ дифференцируема, а $f(x, \cdot)$ при каждом $x \in X$ интегрируема. Допустим, что существует интегрируемая функция $g\colon Y \to \mathbb{R}$, такая что $|\partial f/\partial x(x, y)| \leqslant g(y)$ при всех $x \in X$, $y \in Y$. Тогда функция F, определенная формулой* (2.4.1), *дифференцируема и*

$$\frac{dF}{dx}(x) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, d\mu(y).$$

Доказательство. Если $\lim x_n = x$ и $x_n \neq x$ при всех n, то функции g_n, задаваемые формулой

$$g_n(y) = [f(x_n, y) - f(x, y)]/(x_n - x),$$

измеримы. Так как $\lim\limits_n g_n(y) = \partial f/\partial x(x, y)$ при каждом y, то по теореме 2.3.7 функция $\partial f/\partial x(x, \cdot)$ при каждом x измерима. Кроме того, по теореме о среднем значении $g_n(y) = \partial f/\partial x(z_n, y)$ для некоторого z_n, заключенного между x_n и x; следовательно, $|g_n| \leqslant g$ при всех n. Отсюда по теореме о мажорированной сходимости 2.4.11 получаем наше утверждение. $\square$

В случае интеграла Лебега намного проще становятся также перемена порядка интегрирования и переход от двойного интеграла к кратному. Для обозначаемого ниже через $\iint f(x, y)\, dx\, dy$ интеграла по некоторому фиксированному измеримому множеству в $\mathbb{R}^2$ имеет место следующее утверждение:

2.4.17. Теорема. *Предположим, что функция $f(\cdot, \cdot)$ измерима и удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) (Тонелли) $f \geqslant 0$;

(ii) (Фубини) *один из интегралов*

$$\iint |f(x, y)|\, dx\, dy, \quad \int dx \int |f(x, y)|\, dy, \quad \int dy \int |f(x, y)|\, dx$$

конечен.

Тогда функции $f(\cdot, y)$, $f(x, \cdot)$, $\int f(\cdot, y)\, dy$, $\int f(x, \cdot)\, dx$ измеримы и

$$\int dx \int f(x, y)\, dy = \int dy \int f(x, y)\, dx = \iint f(x, y)\, dx\, dy.$$

2.5. Пространства $\mathscr{L}_p$

Теперь мы можем приступить к осуществлению главной цели, поставленной в этой главе, — построению семейства банаховых пространств, называемых пространствами $\mathscr{L}_p$. Тот факт, что они обладают весьма важным для нас свойством полноты, есть прямое следствие хорошего поведения интеграла при предельных переходах.

Всюду далее используется мера μ, определенная на σ-алгебре подмножеств множества X в $\mathbb{R}^n$. В большинстве приложений μ будет просто мерой Лебега. Рассматриваемые функции $\overline{\mathbb{R}}$-значны или комплекснозначны.

2.5.1. Определение. Пусть функция f измерима, а $p \geqslant 1$. Положим

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|.$$

Пространством $\mathscr{L}_p$ (или $\mathscr{L}_p(X)$, если нужно упомянуть X) называется множество измеримых функций f, для которых $\|f\|_p < \infty$. Часто X будет интервалом с концами a, b, а μ — мерой Лебега. В этом случае мы будем писать $\mathscr{L}_p(a, b)$. Две функции f, g из $\mathscr{L}_p$ считаются равными тогда и только тогда, когда $f = g$ п. в.

Следует обратить внимание на три обстоятельства. Во-первых, приходится отождествлять функции, равные почти всюду, потому что иначе $\|\cdot\|_p$ не было бы нормой (ибо $\|f - g\|_p = 0$ тогда и только тогда, когда $f = g$ п. в.; см. задачу 2.13). Во-вторых, неотрицательная функция f интегрируема только тогда, когда она почти всюду конечна, поэтому все функции из $\mathscr{L}_p$ почти всюду конечны. Значит, их можно сделать конечными всюду, изменив их значения на множестве меры нуль. Наконец, если $p = \infty$, μ — мера Лебега, а f — непрерывная функция, то $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$. Следовательно, непрерывные ограниченные функции с sup-нормой образуют замкнутое подпространство в $\mathscr{L}_\infty$. Если функция $f \in \mathscr{L}_\infty$ разрывна, то множество, на котором $|f(x)| > \|f\|_\infty$, имеет меру нуль. Иногда будет употребляться также следующее пространство:

2.5.2. Определение. $\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}$ — это множество функций, лежащих в $\mathscr{L}_p(S)$ для каждого множества $S \subset X$, замкнутого и ограниченного в $\mathbb{R}^n$.

Пространство $\mathscr{L}_p$ можно считать аналогом пространства последовательностей l_p с интегрированием вместо суммирования. Играющие фундаментальную роль неравенства Гёльдера и Минковского для $\mathscr{L}_p$ устанавливаются просто путем замены сумм интегралами в доказательстве теоремы 1.3.12.

2.5.3. Теорема. *Пусть $p \geqslant 1$ и q — сопряженный индекс. В обозначениях определения 2.5.1 для любых измеримых функций f, g (допускаются бесконечные значения) имеют место следующие неравенства:*

(i) $\| fg \|_1 \leqslant \| f \|_p \| g \|_q$ (неравенство Гёльдера);

(ii) $\| f + g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p$ (неравенство Минковского).

2.5.4. Следствие (неравенство Юнга). *Пусть k: $X \times X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция и*

$$\sup_{x \in X} \int | k(x, y) | \, d\mu(y), \quad \sup_{y \in X} \int | k(x, y) | \, d\mu(x) \leqslant m < \infty.$$

Если $f \in \mathscr{L}_p$ при некотором $p \geqslant 1$, то функция F, задаваемая формулой

$$F(x) = \int k(x, y) f(y) \, d\mu(y),$$

тоже принадлежит $\mathscr{L}_p$ и $\| F \|_p \leqslant m \| f \|_p$.

Доказательство. Если $1 < p < \infty$ и q — сопряженный индекс, то

$$\int | k(x, y) | | f(y) | \, d\mu(y) = \int | k(x, y) |^{1/q} | k(x, y) |^{1/p} | f(y) | \, d\mu(y)$$
$$\leqslant \left\{ \int | k(x, y) | \, d\mu(y) \right\}^{1/q} \left\{ \int | k(x, y) | \; | f(y) |^p \, d\mu(y) \right\}^{1/p},$$

согласно неравенству Гёльдера. Возводя обе части в p-ю степень, интегрируя и меняя порядок интегрирования (что законно в силу теоремы Фубини 2.4.17, (ii)), получаем

$$\int \left\{ \int | k(x, y) | \; | f(y) | \, d\mu(y) \right\}^p d\mu(x) \leqslant m^{p/q} \| f \|_p^p \sup_{y \in X} \int | k(x, y) | \, d\mu(x)$$
$$\leqslant m^{p/q+1} \| f \|_p^p,$$

откуда вытекает наше утверждение. Разобрать случай $p = 1$, ∞ предоставляется читателю в качестве (легкого) упражнения. □

Неравенство Минковского есть не что иное, как неравенство треугольника в $\mathscr{L}_p$. Используя этот факт, нетрудно убедиться, что $\mathscr{L}_p$ — нормированное векторное пространство, а вот доказательство его полноты требует тонких рассуждений; соответствующий результат известен под названием теоремы Рисса — Фишера. Неравенство Гёльдера понадобится нам позднее. Сейчас отметим лишь, что при $p = 2$ оно совпадает с неравенством Шварца (1.5.1) в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2$, о котором говорится в следующей теореме:

2.5.5. Теорема. *Если $p \geqslant 1$, то $\mathscr{L}_p$ с нормой $\| \cdot \|_p$ — банахово пространство. При $1 \leqslant p < \infty$ оно сепарабельно. Пространство $\mathscr{L}_2$*

есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int f\bar{g}\, d\mu.$$

Доказательство. Докажем полноту в случае $1 \leqslant p < \infty$, оставляя случай $p = \infty$ в качестве упражнения. Последовательность Коши (f_n) содержит подпоследовательность (f_{n_k}), такую что $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$. Положим

$$g_r = \sum_{k=1}^{r} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

и заметим, что (g_r) монотонно возрастает и поточечно сходится к g. Согласно неравенству Минковского, $\|g_r\|_p < 1$, откуда, по теореме о монотонной сходимости 2.4.8, $\int g^p\, d\mu = \lim \int g_r^p\, d\mu \leqslant 1$. Следовательно, $g(x) < \infty$ п. в. (если бы $g = \infty$ на множестве положительной меры, ее интеграл был бы бесконечным), а потому ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

абсолютно сходится при почти всех x, т. е. последовательность $(f_{n_k}(x))$ сходится почти всюду к некоторой функции, скажем f, определенной, правда, только почти всюду, но в свете определения $\mathscr{L}_p$ это не имеет значения.

Докажем теперь, что $f \in \mathscr{L}_p$ и $f_n \to f$ в $\mathscr{L}_p$ (ибо сходимость $f_n \to f$ п. в. не следует автоматически из сходимости подпоследовательности). Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Так как (f_n) — последовательность Коши, найдется такое n_0, что при $m, n > n_0$

$$\|f_n - f_m\|_p^p = \int |f_n - f_m|^p\, d\mu < \varepsilon.$$

Возьмем $m = n_k$ и применим лемму Фату 2.4.10. Получим, что при $n > n_0$

$$\|f_n - f\|_p^p = \int \lim_k |f_n - f_{n_k}|^p\, d\mu \leqslant \liminf_k \int |f_n - f_{n_k}|^p\, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $f_n - f \in \mathscr{L}_p$, а потому $f \in \mathscr{L}_p$ и $\lim \|f_n - f\|_p = 0$. $\square$

Большую роль играют множества функций, плотные в $\mathscr{L}_p$, поэтому полезно знать некоторые из них.

2.5.6. Теорема. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и μ — мера Лебега. При $1 \leqslant p < \infty$ в $\mathscr{L}_p(\Omega)$ плотны следующие множества:*

(i) *множество интегрируемых простых функций;*

(ii) *множество $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ функций из $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ с компактным носителем, содержащимся внутри Ω.*

Тот факт, что некоторые элементы пространства $\mathscr{L}_p$ являются совершенно дикими функциями (например, функция из примера 2.4.7), может заставить усомниться в пригодности этих пространств для приложений, где обычно требуется непрерывное решение. Иногда действительно приходится довольствоваться решением из $\mathscr{L}_p$, однако чаще, после того как такое решение найдено, удается независимо доказать его непрерывность. В дальнейшем мы встретимся с несколькими примерами подобных рассуждений. Суть в том, что стратегия использования $\mathscr{L}_p$ и последующего доказательства непрерывности имеет важные технические преимущества по сравнению с методами, в которых все рассуждения проводятся с непрерывными функциями.

2.6. Некоторые приложения

Сейчас мы приведем разного рода результаты, которые допускают наиболее естественную формулировку в $\mathscr{L}_p$. Все рассматриваемые здесь функции определены в $\mathbb{R}^n$ и комплекснозначны.

Многие результаты, касающиеся разложения функций по каким-то стандартным функциям, наиболее четко формулируются в $\mathscr{L}_2$. Например, многие известные ряды по ортонормированным функциям сходятся по норме к функции из $\mathscr{L}_2(a, b)$, в то время как для $\mathscr{C}([a, b])$ подобный результат имеет место только при дополнительных предположениях. Подробнее мы будем говорить об этом в гл. 10, где весьма общие разложения будут получены при помощи спектральной теоремы для самосопряженных операторов. Здесь в качестве примера дадим формулировку в $\mathscr{L}_2$ известной теоремы о преобразовании Фурье.

2.6.1. Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$ и Ω — ограниченный куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. Положим*

$$\hat{f}_\Omega(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_\Omega e^{i\xi\cdot x} f(x)\, dx, \tag{2.6.1}$$

где $\xi \cdot x$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\hat{f}_\Omega$ при $\Omega \to \mathbb{R}^n$ стремится в $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\hat{f}$, называемой преобразованием Фурье *функции f; кроме того, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ (формула Парсеваля) и $(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g)$ (формула Планшереля).*

Имеет место формула обращения (где предел понимается в том же смысле)

$$f(x)=\lim_{\Omega\to\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\Omega}e^{-i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Конечно, если $f\in\mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ вместо $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$, то для определения $\hat{f}$ предельный переход не нужен и интеграл в (2.6.1) берется сразу по всему $\mathbb{R}^n$. Однако для справедливости формулы обращения понадобятся дополнительные условия на f.

С преобразованием Фурье тесно связано понятие свертки двух функций. Эту связь устанавливает теорема 2.6.5, но сначала приведем определение и некоторые свойства свёртки.

2.6.2. Определение. **Свёртка** $f*g$ функций f, g формально определяется равенством

$$f*g(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

2.6.3. Теорема. *Если* $f\in\mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ *и* $g\in\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ *(где* $p\geqslant 1$*), то* $f*g\in\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ *и* $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p$.

Доказательство. Применим следствие 2.5.4 (неравенство Юнга) к $k(x,y)=f(x-y)$, $f(y)=g(y)$. □

2.6.4. Теорема. *Пусть k — неотрицательное целое число или ∞ и* $f\in\mathscr{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ *(см. определение 1.3.23). Если* $g\in\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *при некотором* $p\geqslant 1$, *то* $f*g\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$ *и в определяющем свёртку равенстве допустимы k дифференцирований под знаком интеграла.*

Доказательство. Непосредственное применение теоремы 2.4.16 дает требуемый результат. □

2.6.5. Теорема. *Предположим, что* $f\in\mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$, $g\in\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $\widehat{f*g}=(2\pi)^{n/2}\hat{f}\cdot\hat{g}$ *п. в. Если вдобавок* $h\in\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$, *то* $(f*g,h)=(\hat{f}\cdot\hat{g},\hat{h})$.

Часто функции из $\mathscr{L}_p$ желательно аппроксимировать гладкими функциями. Аппроксимации строят обычно при помощи свёртки.

2.6.6. Определение. Пусть $\bar{S}(0,\varepsilon)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0 и радиусом ε. Пусть j_ε — произвольная неотрицательная непрерывная функция с носителем в $\bar{S}(0,\varepsilon)$, для которой $\int j_\varepsilon(x)\,dx=1$. Семейство $\{j_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ называется **аппроксимативной единицей.** Если к тому же $j_\varepsilon\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, то функцию j_ε называют **сглаживателем.**

2.6.7. Пример. Существование сглаживателей не вполне очевидно, поэтому рассмотрим следующий пример. Положим

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp[-1/(\varepsilon^2 - |x|^2)] & \text{при} \quad |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Функция k_ε постоянна на каждой сфере $|x| = r$, и, как легко проверить, $\partial^n k_\varepsilon / \partial r^n$ экспоненциально стремится к 0 при $r \to \varepsilon -$. Значит, $k_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, и можно взять $j_\varepsilon = k_\varepsilon / \|k_\varepsilon\|_1$.

2.6.8. Теорема. *Предположим, что $g \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ при некотором p, $1 \leqslant p < \infty$. Если $\{j_\varepsilon\}$ — аппроксимативная единица, то $j_\varepsilon * g \to g$ в $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Если вдобавок j_ε — сглаживатель, то $j_\varepsilon * g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Задачи

2.1. Пусть $\mathscr{S}$ — некоторая σ-алгебра. Докажите, что
(i) если $S_1, S_2 \in \mathscr{S}$ и $S_2 \subset S_1$, то $S_1 \setminus S_2 \in \mathscr{S}$;
(ii) счетные пересечения множеств из $\mathscr{S}$ лежат в $\mathscr{S}$.

2.2. Пусть $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с мерой. Докажите, что
(i) если $S_1, S_2 \in \mathscr{S}$, $S_2 \subset S_1$ и $\mu(S_2) < \infty$, то $\mu(S_1 \setminus S_2) = \mu(S_1) - \mu(S_2)$;
(ii) если $S_i \nearrow S$ (т. е. $S_i \subset S_{i+1}$ при всех i и $S = \bigcup S_i$), S_i, $S \in \mathscr{S}$, то $\mu(S_i) \nearrow \mu(S)$. [*Указание*: рассмотрите $T_i = S_i \setminus S_{i-1}$.]
(iii) Если $S_i \searrow S$ (т. е. $S_i \supset S_{i+1}$ и $S = \bigcap S_i$), S_i, $S \in \mathscr{S}$ и $\mu(S_1) < \infty$, то $\mu(S_i) \searrow \mu(S)$. На примере $S_i = [i, \infty) \subset \mathbb{R}$ покажите, что условие $\mu(S_1) < \infty$ не является излишним.

2.3. Покажите, что подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо по Борелю тогда и только тогда, когда этим свойством обладает его пересечение с каждым замкнутым множеством.

2.4. Покажите, что всякая монотонная функция на $\mathbb{R}$ измерима по Борелю.

2.5. Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Положим $S_\pm = \{x\colon f(x) = \pm\infty\}$ и $f_1(x) = f(x)$ при $x \notin S_+ \cup S_-$, $f_1(x) = 0$ при $x \in S_+ \cup S_-$. Тогда f измерима в том и только в том случае, если $S_\pm \in \mathscr{S}$ и f_1 — измеримая функция.

2.6. Пусть $X = [0, b)$, где не исключен случай $b = \infty$. Предположим, что f неотрицательна и интегрируема по Риману на $[0, a]$ при всех $a < b$. Пусть

$$I_a = \int_0^a f(x)\, dx.$$

Докажите, что если существует предел $I = \lim\limits_{a \to b-} I_a$, то f интегрируема по Лебегу на X и интеграл равен I.

2.7. Пусть (f_n) — монотонно возрастающая последовательность $\overline{\mathbb{R}}$ значных функций и $\int f_1\, d\mu > -\infty$. Используя теорему о монотонной сходимости 2.4.8, докажите, что $\lim \int f_n\, d\mu = \int \lim f_n\, d\mu$. Покажите путем построения контрпримера, что условие $\int f_1\, d\mu > -\infty$ опустить нельзя.

2.8. Выведите из теоремы о монотонной сходимости лемму Фату 2.4.10. Докажите аналогичный результат для верхних пределов, откуда будет следовать теорема о мажорированной сходимости.

2.9. (i) Рассмотрите на отрезке $[0, 1]$ функции (a) $nx/(1+n^2x^2)$ и (b) $n^{3/2}x/(1+n^2x^2)$. Покажите, что в обоих случаях $\lim\limits_n \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

(ii) Докажите следующее соотношение (которое понадобится при рассмотрении гамма-функции):

$$\lim_n \int_0^n (1 - x/n)^n x^{\alpha - 1}\,dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1}\,dx \quad (\alpha > 0).$$

2.10. Пусть (f_n) — последовательность вещественных функций, интегрируемых по Лебегу. Покажите, что если $\sum \int |f_n(x)|\,dx < \infty$, то ряд $\sum f_n(x)$ сходится при почти всех x к интегрируемой по Лебегу функции и допустима перемена порядка суммирования и интегрирования, т. е.

$$\int \left(\sum f_n(x)\right) dx = \sum \int f_n(x)\,dx.$$

2.11. Положим $\nu(x) = 0$ при $x < 0$ и $\nu(x) = 1$ при $x \geqslant 0$. Пусть ν — соответствующая мера Лебега — Стильтьеса (пример 2.2.15). Покажите, что если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $\int\limits_{\mathbb{R}} f\,d\nu = f(0)$.

2.12. Дифференцированием соотношения

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,dx = t^{-1} \quad (t > 0)$$

докажите, что $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$.

2.13. Покажите, что если функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу и $\int\limits_0^1 |f(x)|\,dx = 0$, то $f = 0$ п. в. [*Указание*: рассмотрите множества $S_n = \{x\colon |f(x)| \geqslant n^{-1}\}$, $S = \{x\colon |f(x)| \neq 0\}$ (ясно, что $S = \bigcup S_n$) и интегралы от f по ним.]

2.14. Рассмотрите интегралы функций $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ и $(1 - xy)^{-\alpha}$ по квадрату $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ и выясните, законна или нет перемена порядка интегрирования.

2.15. Допустим, что f измерима. Докажите, что $f \in \mathscr{L}_p$ тогда и только тогда, когда $|f| \in \mathscr{L}_p$. Кроме того, покажите, что если $g \in \mathscr{L}_p$ и $|f| \leqslant |g|$ п. в., то $f \in \mathscr{L}_p$.

2.16. Проведите доказательство теоремы 2.5.6, (ii), опираясь на теорему 2.6.8.

Глава 3

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

3.1. Введение

Теперь, когда в нашем распоряжении имеется подходящий набор конкретных банаховых пространств, можно приступить к изложению абстрактной теории операторов на этих пространствах, которая поможет решать уравнения, встречающиеся в приложениях. Большое число таких уравнений допускает запись в виде $Af = g$, где A — отображение одного банахова пространства в другое, и если это A в некотором смысле хорошо себя ведет, то, используя структуру этих пространств и, в частности, их полноту, можно многое узнать о решении.

Лучше всего теория операторов отвечает на вопросы качественного характера и вопросы, касающиеся общих приближенных методов решения уравнений. Вот некоторые из самых важных вопросов:

(i) Имеет ли решение данное уравнение, и если да, то единственно ли оно?

(ii) Устойчиво ли данное уравнение в том смысле, что малое изменение „входа“ g влечет за собой малое изменение „выхода“ f?

(iii) Если уравнение линейно, нельзя ли перенести на него методы теории линейных операторов для конечномерного случая? В частности, нельзя ли разумным образом определить обратный линейный оператор A^{-1} и хорошо ли он себя ведет?

(iv) Если существует оператор A_0, в каком-то смысле аппроксимирующий A, будет ли решение f_0 уравнения $A_0 f_0 = g$ хорошим приближением к решению уравнения $Af = g$?

(v) В случае дифференциального или интегрального уравнения будет ли численное решение, полученное каким-то конкретным методом, близко к точному решению и как оценить погрешность?

(vi) Существуют ли эффективные итерационные методы, позволяющие последовательно улучшать выбранное тем или иным способом начальное приближение?

(vii) В конечномерном случае диагонализация эрмитовых матриц приводит к простому и прозрачному описанию полезного класса операторов. Существует ли аналог этого класса для случая, скажем, линейных дифференциальных уравнений?

(viii) Дифференциальное уравнение $f'' + \lambda f = 0$ с граничными условиями $f(0) = f(\pi) = 0$ имеет набор решений $\{\sin nx\}$, отвечающих $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Широкий класс функций допускает представление в виде линейной комбинации этих решений, и такое представление в виде рядов Фурье часто оказывается очень полезным. Существуют ли соответствующие обобщения на другие дифференциальные уравнения и уравнения иных типов?

Желание ответить на эти вопросы во многом повлияло на выбор тем для последующего изложения. В этой главе мы закладываем фундамент теории линейных операторов, на котором в дальнейшем будет строиться изучение как линейных, так и нелинейных уравнений.

Содержание этой главы таково. В § 3.2 вводится основная терминология. В § 3.3 начинается обсуждение линейных операторов. Мы выясняем возможности обобщения ключевых результатов конечномерной теории и приходим к выводу, что для успешного обобщения нельзя пренебрегать аналитической стороной дела. Значит, на пространства и операторы следует наложить дальнейшие ограничения. Самое простое и, вероятно, самое полезное из них — это условие, чтобы оператор был непрерывным отображением банаховых пространств. Непрерывные линейные операторы вводятся в § 3.4, а в § 3.5 устанавливаются их основные свойства. В § 3.6 нам удается наконец подступиться к проблеме действительного построения решений и, в частности, нахождения обратного оператора. Исследование основано на методе последовательных приближений, или, что то же самое, на рассмотрении ряда Неймана. Полученные результаты применяются к некоторым стандартным задачам. Изучение свойств обратных операторов естественным путем приводит к элементарной спектральной теории, которая обсуждается в § 3.7. В заключительном параграфе вводится более слабое понятие замкнутого оператора, позволяющее работать с дифференциальными операторами, ибо дифференциальные операторы не обладают свойством непрерывности на рассмотренных до сих пор банаховых пространствах.

3.2. Основная терминология теории операторов

Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — векторные пространства. Пусть A — отображение, определенное на некотором подмножестве $D(A) \subset \mathscr{V}$ и сопоставляющее каждому элементу $f \in D(A)$ единственный элемент $Af \in \mathscr{W}$ (на первых порах $D(A)$ будет обычно совпадать со всем $\mathscr{V}$).

3.2.1. Определение. Указанное выше множество $D(A)$ (которое иногда обозначается просто D, если рассматривается всего одно отображение) называется **областью определения** отображения A.

Для всякого элемента $f \in D(A)$ элемент Af называется **образом** f. Аналогично образ множества $S \subset D(A)$ — это множество образов всех его элементов. В частности, образ множества $D(A)$ называется **множеством значений** отображения A и обозначается $R(A)$. **Прообразом** множества $S_1 \subset \mathscr{W}$ называется множество $A^{-1}(S_1) = \{f\colon f \in D(A), Af \in S_1\}$.

3.2.2. Определение. Описанное выше отображение A называется **оператором** (или **функцией**) из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$. Запись $A\colon S \to \mathscr{W}$ означает, что A — оператор с областью определения S и множеством значений, содержащимся в $\mathscr{W}$. В таком случае мы будем говорить, что A отображает S *в* $\mathscr{W}$.

В связи с этими определениями обратим внимание на следующие моменты. Во-первых, оператор всегда однозначен, в том смысле что каждому элементу области определения он сопоставляет точно один элемент множества значений. Во-вторых, когда говорится, что A — оператор из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$, допускается возможность, что $D(A)$ — собственное подмножество $\mathscr{V}$. В противоположность этому запись $A\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ всегда означает, что $D(A) = \mathscr{V}$. Наконец, хотя и нет строгого различия между „оператором“ и „функцией“, обычно о функциях говорят тогда, когда $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ конечномерны, а в остальных случаях употребляют термин „оператор“. Один важный тип операторов имеет специальное название.

3.2.3. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ — комплексное (соотв. вещественное) векторное пространство и $\mathscr{W} = \mathbb{C}$ (соотв. $\mathscr{W} = \mathbb{R}$). В таком случае операторы из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$ называются **функционалами.**

3.2.4. Пример. Проиллюстрируем введенные понятия на примере пространства $\mathscr{C}([0, 1])$. Рассмотрим операцию обычного дифференцирования. Поскольку не все непрерывные функции дифференцируемы, мы ограничимся сначала только очень гладкими функциями, скажем из $\mathscr{C}^\infty([0, 1])$. Для $f \in \mathscr{C}^\infty([0, 1])$ положим $Af(x) = f'(x)$. Ясно, что правая часть непрерывна для всех таких f, и если считать, что $Af(x)$ обозначает значение в точке x функции Af, то написанное выше соотношение, которое по предположению имеет место для всех $f \in \mathscr{C}^\infty([0, 1])$, определяет оператор из $\mathscr{C}([0, 1])$ в себя с областью определения $\mathscr{C}^\infty([0, 1])$. Таким образом, мы можем написать $A\colon \mathscr{C}^\infty([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$.

Конечно, дифференцирование имеет смысл в большем пространстве $\mathscr{C}^1([0, 1])$, и можно определить другой оператор, скажем $\tilde{A}$, положив $\tilde{A}f(x) = f'(x)$ для $f \in \mathscr{C}^1([0, 1])$. Хотя $\tilde{A}f = Af$ при $f \in D(A)$, мы считаем A и $\tilde{A}$ разными операторами, ибо $D(A) \neq D(\tilde{A})$. Отождествляются только такие операторы, у которых совпадают и значения, и области определения. Оператор $\tilde{A}$ рассматривается как продолжение, или „расширение“, оператора A.

3.2.5. Определение. Пусть A и $\tilde{A}$ — операторы из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$. Они называются **равными**, если $D(A) = D(\tilde{A})$ и $Af = \tilde{A}f$ при всех $f \in D(A)$. Оператор $\tilde{A}$ называется **расширением** (или **продолжением**) A (запись: $A \subset \tilde{A}$), а оператор A — **сужением** $\tilde{A}$, если $D(\tilde{A}) \supset D(A)$ и $Af = \tilde{A}f$ для всех $f \in D(A)$. Расширение называется **собственным**, если $D(\tilde{A}) \neq D(A)$.

Первая грубая классификация операторов, полезная при рассмотрении операторных уравнений вида $Af = g$, такова.

3.2.6. Определение. Оператор A из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$ называется: **инъективным**, если для каждого $g \in R(A)$ имеется точно одно $f \in D(A)$, такое что $Af = g$; **сюръективным**, если $R(A) = \mathscr{W}$ (в таком случае мы говорим, что A отображает $D(A)$ *на* $\mathscr{W}$); **биективным**, если он одновременно инъективен и сюръективен.

3.2.7. Примеры. Рассмотрим следующие функции (операторы) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(i) $\varphi(x) = \sin x$. Здесь $R(\varphi) = [-1, 1]$ — собственное подмножество в $\mathbb{R}$. Следовательно, φ не сюръективна. Она и не инъективна, так как $0 = \varphi(0) = \varphi(\pi) = \ \ldots$.

(ii) $\varphi(x) = x(x^2 - 1)$. Здесь $R(\varphi) = \mathbb{R}$, поэтому φ сюръективна, однако она не инъективна, так как точки -1, 0, 1 все переходят в 0.

(iii) $\varphi(x) = \operatorname{th} x$. Здесь $R(\varphi) = (-1, 1)$, и φ не сюръективна. Однако она инъективна, так как уравнение $\operatorname{th} x = a$ $(a \in (-1, 1))$ имеет единственное вещественное решение.

(iv) $\varphi(x) = x^3$. Очевидно, что φ биективна.

Самым употребительным классом операторов как в линейной, так и в нелинейной теориях являются непрерывные операторы. Следующее определение есть прямое обобщение определения 1.3.5 непрерывности комплекснозначной функции.

3.2.8. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — нормированные векторные пространства и A — оператор из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$. Он называется **непрерывным в точке** $f_0 \in D(A)$, если выполнено одно из следующих двух равносильных условий:

(i) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|Af - Af_0\| < \varepsilon$, если $f \in D(A)$ и $\|f - f_0\| < \delta$;

(ii) для всякой последовательности (f_n) в $D(A)$, имеющей предел f_0, выполнено равенство $\lim Af_n = Af_0$.

Оператор A называется **непрерывным**, если он непрерывен в каждой точке $D(A)$.

3.2.9. Лемма. *Оператор A, о котором говорится в предыдущем определении, непрерывен тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества из $\mathscr{W}$ открыт в $D(A)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что A непрерывен, и покажем, что если $S \subset \mathscr{W}$ открыто, то $A^{-1}(S)$ открыто в $D(A)$. Если $A^{-1}(S)$ пусто, оно открыто, поэтому будем считать, что $A^{-1}(S)$ непусто, и пусть f_0 — какая-нибудь его точка. Тогда $Af_0 \in S$ и, так как S открыто, найдется открытый шар $S(Af_0, \varepsilon) \subset S$. По определению непрерывности существует такое $\delta > 0$, что для открытого в $D(A)$ множества $U = \{f: f \in D(A), \|f - f_0\| < \delta\}$ справедливо включение $A(U) \subset S(Af_0, \varepsilon)$. Следовательно, $A(U) \subset S$ и $U \subset A^{-1}(S)$. Так как f_0 — произвольная точка $A^{-1}(S)$, отсюда вытекает, что $A^{-1}(S)$ открыто в $D(A)$.

Теперь докажем обратное утверждение. Пусть для всякого открытого $S \subset \mathscr{W}$ его прообраз $A^{-1}(S)$ открыт в $D(A)$. Тогда для каждого $f_0 \in D(A)$ и любого $\varepsilon > 0$ прообраз $A^{-1}(S(Af_0, \varepsilon))$ открытого шара $S(Af_0, \varepsilon)$ открыт в $D(A)$. Значит, для некоторого $\delta > 0$ множество $U = \{f: f \in D(A), \|f - f_0\| < \delta\}$ содержится в этом прообразе, откуда $A(U) \subset S(Af_0, \varepsilon)$. Тем самым выполнено условие (i) определения 3.2.8, и непрерывность в f_0 установлена. $\square$

3.3. Некоторые алгебраические свойства линейных операторов

Линейный оператор — это многомерный аналог функции одной переменной, графиком которой служит прямая, проходящая через начало координат, т. е. функции $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $\varphi(x) = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. В конечномерном случае, для которого теория линейных уравнений разработана очень хорошо, интересы исследователей в настоящее время почти полностью сосредоточены на нелинейных уравнениях. Иначе обстоит дело в бесконечномерном случае. Хотя и здесь линейные уравнения гораздо лучше поддаются изучению, чем нелинейные, дополнительные проблемы, возникающие в связи с бесконечномерностью, могут оказаться весьма трудными. До конца этой главы мы будем заниматься только линейными операторами. Сначала обсудим их алгебраические свойства и проведем предварительное исследование операторного уравнения $Lf = g$. Затем пересмотрим некоторую часть стандартной конечномерной теории, с тем чтобы установить, какие пути исследований могут оказаться плодотворными в бесконечномерном случае.

3.3.1. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — векторные пространства и $D(L)$ — линейное подпространство в $\mathscr{V}$. Оператор L из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$ с областью определения $D(L)$ называется **линейным**, если для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$ в случае вещественных $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$) и всех $f, g \in D(L)$

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L f + \beta L g.$$

(Условие, что $D(L)$—линейное подпространство, очевидно, необходимо, иначе определение не имеет смысла; заметим, что $R(L)$— тоже линейное подпространство.)

Многие и весьма разнообразные уравнения представимы в виде $Lf=g$, где L — линейный оператор. Приведем несколько примеров.

3.3.2. Пример. Пусть задана система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j = g_j, \quad i=1, \ldots, m; \tag{3.3.1}$$

положим

$$(Lf)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j, \quad i=1, \ldots, m.$$

Тогда L: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ — линейный оператор, и система (3.3.1) принимает вид $Lf=g$. Обратно, любой линейный оператор $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ можно представить в указанном выше виде, выбрав базисы в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$. Систему (3.3.1) можно записать и в матричной форме, однако заметим, что следует различать матрицу, зависящую от выбранного базиса, и оператор L, который от выбора базиса не зависит.

3.3.3. Пример. Напрашивается обобщение предыдущего примера на бесконечную систему. Рассуждая пока формально, рассмотрим соотношение

$$(Lf)_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} f_j, \quad i=1, 2, \ldots, \tag{3.3.2}$$

где α_{ij} — элементы заданного набора комплексных чисел, который можно представлять себе как бесконечную матрицу. Можно попытаться рассмотреть L как оператор из пространства последовательностей l в себя, однако в противоположность предыдущему примеру сумма в правой части имеет смысл только для некоторого подмножества пространства l, зависящего от поведения α_{ij} при $j \to \infty$. Если взять в качестве области определения L это подмножество, соотношение (3.3.2) действительно определяет линейный оператор из l в себя.

3.3.4. Пример. Теперь рассмотрим операторы на пространствах функций. Один из простейших примеров — это умножение на заданную функцию τ, т. е. оператор L определен требованием, чтобы для всех f из некоторого пространства $\mathscr{V}$ имело место равенство $Lf(x) = \tau(x) f(x)$. Если τ непрерывна, то в качестве $\mathscr{V}$ естественно взять $\mathscr{C}([0, 1])$ или $\mathscr{L}_p(0, 1)$. Тогда L — линейный оператор, отображающий каждое из этих пространств в себя.

3.3.5. Пример. В приложениях особенно важную роль играют дифференциальные и интегральные уравнения. Сейчас мы покажем, как приводятся к операторной форме такие уравнения. Рассмотрим сначала интегральное уравнение Фредгольма

$$f(x)-\int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy=g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.3.3}$$

где k и g — заданные функции, а f — неизвестная функция. Для простоты предположим, что k и g — непрерывные комплекснозначные функции. Определим интегральный оператор K соотношением

$$Kf(x)=\int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy$$

для всех $f \in \mathscr{C}([0,1])$. Так как Kf — непрерывная функция (по теореме 2.4.15), то K — линейный оператор из $\mathscr{C}([0,1])$ в себя, и исходное интегральное уравнение (3.3.3) можно записать в виде $f-Kf=g$.

3.3.6. Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0 f''(x)+a_1 f'(x)+a_2 f(x)=g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и g — данная непрерывная функция. Для того чтобы левая часть имела смысл, f должна быть достаточно гладкой. Поскольку g непрерывна, естественно взять в качестве области определения искомого оператора $\mathscr{C}^2([0,1])$ и задать L в этой области соотношением

$$Lf(x)=a_0 f''(x)+a_1 f'(x)+a_2 f(x).$$

Конечно, функция Lf не обязательно дифференцируема, поэтому L — линейный оператор $\mathscr{C}^2([0,1]) \rightarrow \mathscr{C}([0,1])$. Дифференциальное уравнение принимает вид $Lf=g$.

Первый шаг при попытке решить операторное уравнение $Lf=g$ подсказан тактикой, применяемой в теории матриц: пробуют определить обратный оператор L^{-1}. Ясно, что решение f существует для всякого $g \in R(L)$. Если оно единственно, что имеет место тогда и только тогда, когда L инъективен, то соотношение $f=L^{-1} g$ определяет оператор L^{-1} с $D(L^{-1})=R(L)$. Легко показать, что L^{-1} — линейный оператор из $\mathscr{W}$ в $\mathscr{V}$. Однако $R(L)$, вообще говоря, не совпадает со всем $\mathscr{W}$ — это отражает тот факт, что $Lf=g$ имеет решение не при всех $g \in \mathscr{W}$. Ситуация была бы гораздо лучше, если бы $R(L)=\mathscr{W}$, ибо это означало бы, что $Lf=g$ имеет единственное решение при всех $g \in \mathscr{W}$. Перечислим возможности, которые могут представиться.

(i) *L не инъективен.* Никакая разумная интерпретация L^{-1} как оператора в смысле определения 3.2.2 невозможна. Уравнение $Lf=g$ при любом $g \in R(L)$ имеет более чем одно решение.

(ii) *L инъективен, но не сюръективен.* L^{-1} есть линейный оператор с областью определения $R(L)$. Уравнение $Lf = g$ имеет точно одно решение при $g \in R(L)$ и не имеет решений при $g \notin R(L)$.

(iii) *L биективен.* L^{-1} есть линейный оператор с областью определения $\mathscr{W}$, и уравнение $Lf = g$ имеет точно одно решение при каждом $g \in \mathscr{W}$.

Одна из главных целей теории — установить удобные критерии, позволяющие определить, когда реализуется последний, самый удачный случай. Есть надежда, что их источником может послужить конечномерная теория. Поэтому введем теперь некоторые из основных понятий, помогающих выявить аналогию.

3.3.7. Определение. Пусть L — линейный оператор из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$. Будем говорить, что L имеет **обратный** или что существует обратный **к** L, если L инъективен. При этом под обратным понимается оператор с областью определения $R(L)$ и множеством значений $D(L)$, заданный соотношением $f = L^{-1}g$, где $Lf = g$.

3.3.8. Определение. **Тождественный оператор**, обозначаемый всегда через I, есть оператор из $\mathscr{V}$ в себя, такой что $If = f$ при всех $f \in \mathscr{V}$.

3.3.9. Определение. Пусть L — линейный оператор из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{W}$. Множество $N(L) \subset D(L)$ решений уравнения $Lf = 0$ называется **нуль-пространством** (или **ядром**) оператора L. (Очевидно, что $N(L)$ — линейное подпространство, причем $N(L) = 0$ тогда и только тогда, когда L инъективен.)

Теперь мы временно сосредоточим внимание на самом важном случае $\mathscr{V} = \mathscr{W}$. Имеет место следующий простой результат об обратном операторе.

3.3.10. Лемма. *Пусть L: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ — линейный оператор. Тогда*:

(i) *если L^{-1} существует и его область определения есть $\mathscr{V}$, то $L^{-1}L = LL^{-1} = I$;*

(ii) *если существуют линейные операторы A, B: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$, такие что $AL = LB = I$, то L биективен и $A = B = L^{-1}$.*

Эта лемма малоприменима, поскольку трудно установить существование таких A и B. В конечномерном случае стандартный метод исследования уравнения $Lf = g$ начинается с изучения нуль-пространства. Доказательство следующего результата по существу сводится к проверке того, что инъективный оператор сохраняет размерность (см. Халмош [1948]).

3.3.11. Теорема. *Пусть $\mathscr{V}$ конечномерно и L: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ — линейный оператор. Тогда следующие условия равносильны*:

(i) *L биективен;*

(ii) $N(L)=0$, *или, что то же самое, L инъективен*;

(iii) *L сюръективен.*

Итак, если $N(L)=0$, то L^{-1} определен на всём $\mathscr{V}$, т. е. реализуется наилучшая возможность, и уравнение $Lf=g$ имеет единственное решение при каждом $g\in\mathscr{V}$. Для того чтобы выполнялось равенство $N(L)=0$, достаточно, чтобы был отличен от нуля определитель матрицы, представляющей L. К сожалению, как показывает следующий пример, в бесконечномерном случае условие $N(L)=0$ *не является* достаточным.

3.3.12. Пример. Пусть L: $\mathscr{C}([0,1])\to\mathscr{C}([0,1])$ — оператор, определенный формулой

$$Lf(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\quad f\in\mathscr{C}([0,1]).$$

Ясно, что $Lf(0)=0$ для всех $f\in\mathscr{C}([0,1])$. Следовательно, $R(L)$ есть собственное подмножество в $\mathscr{C}([0,1])$ и L не сюръективен. Однако $N(L)=0$, ибо, как показывает дифференцирование, единственным непрерывным решением уравнения $Lf=0$ является $f=0$. Значит, из условия (ii) теоремы 3.3.11 не следует ни (iii), ни (i).

Неудача с теоремой 3.3.11 служит предостережением о том, что стандартные результаты об обратных для конечномерного случая не переносятся непосредственно на бесконечномерный. В свете той важной роли, которую в бесконечномерном случае играют аналитические соображения, естественно ожидать, что дальнейшего прогресса в теории линейных операторов нельзя добиться, оставаясь в рамках чисто алгебраического подхода. И действительно, обобщение конечномерных результатов достигается только при помощи сложной и интересной теории, в которой ведущая роль принадлежит анализу. Изложение некоторых, наиболее важных частей этой теории и будет теперь нашим главным занятием.

3.4. Непрерывность и ограниченность

Теория линейных операторов в бесконечномерных пространствах сталкивается в основном с трудностями двух видов. Первые связаны с непрерывностью: если в конечномерных нормированных пространствах линейные операторы всегда непрерывны, то в бесконечномерных пространствах это уже не так. Вторые проистекают из сложности аналитических свойств самих рассматриваемых пространств.

Простейшие операторы, для которых достигнут значительный прогресс, — это операторы, имеющие областью определения банахово пространство и к тому же непрерывные. Поскольку такие операторы, кроме того, часто встречаются в приложениях, естественно начать с подробного изучения их свойств.

Прежде всего заметим, что наличие линейности существенно упрощает рассмотрение свойств непрерывности. Нелинейная функция даже одной вещественной переменной может быть непрерывной на одних участках своей области определения и разрывной на других. Вдобавок ее градиент может обращаться в бесконечность, даже если сама функция непрерывна. Линейность исключает обе эти возможности даже и в бесконечномерном случае. Далее $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$, как обычно, обозначают банаховы пространства.

3.4.1. Лемма. *Пусть L — линейный оператор из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{C}$. Если L непрерывен в некоторой точке $f \in D(L)$, то он непрерывен.*

Доказательство. Для всякой последовательности (f_n) в $D(L)$ с пределом f имеем $Lf_n \to Lf$. Пусть (g_n) — некоторая последовательность в $D(L)$ с пределом g. Тогда $g_n - g + f \to f$ и, значит, $L(g_n - g + f) \to Lf$, откуда $Lg_n - Lg + Lf \to Lf$, т. е. $Lg_n \to Lg$. $\square$

3.4 2. Определение. Линейный оператор L из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{C}$ называется **ограниченным на** $D(L)$, если существует такое (конечное) число m, что

$$\|Lf\| \leqslant m\|f\|, \quad f \in D(L). \tag{3.4.1}$$

(Из контекста ясно, что здесь стоят нормы соответственно в $\mathscr{C}$ и $\mathscr{B}$, и указывать это в обозначениях нет необходимости.) Если вдобавок $D(L) = \mathscr{B}$, то L называется просто **ограниченным**. Если L не ограничен на $D(L)$, он называется **неограниченным**.

Нижняя грань всех чисел m, для которых выполнено (3.4.1), обозначается $\|L\|$ и называется **операторной нормой**[1] L. Равносильное определение $\|L\|$ таково:

$$\|L\| = \sup_{f \in D(L),\ f \neq 0} (\|Lf\|/\|f\|) = \sup_{f \in D(L),\ \|f\|=1} \|Lf\|.$$

Заметим, что $\|Lf\| \leqslant \|L\|\|f\|$, и для сравнения вспомним, что если $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — линейная функция, $\varphi(x) = \lambda x$, то $|\varphi(x)| = |\lambda x| = |\lambda||x|$. Здесь $|\lambda|$ есть мера „крутизны“ φ, и по аналогии можно представлять себе норму оператора L как меру его максимальной крутизны.

3.4.3. Теорема. *Линейный оператор L из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{C}$ ограничен на $D(L)$ тогда и только тогда, когда он непрерывен.*

Доказательство. Пусть L ограничен. Тогда, согласно (3.4.1), если $f_n \to 0$, то $Lf_n \to 0$, и, следовательно, L непрерывен в нуле. Значит, он непрерывен (по лемме 3.4.1). С другой стороны, если L неогра-

[1] В следующем параграфе будет показано, что слово „норма“ употреблено в смысле, согласованном с определением 1.3.2.

ничен, то найдется такая последовательность g_n, что $a_n = \|Lg_n\|/\|g_n\| \to \infty$. Положим $f_n = g_n/(a_n\|g_n\|)$; тогда $\|f_n\| = a_n^{-1} \to 0$ и $\|Lf_n\| = 1$. Так как $L0 = 0$, то L не непрерывен в нуле и, следовательно, не непрерывен. □

Пока что мы будем в основном заниматься непрерывными операторами, определенными на всём банаховом пространстве $\mathscr{B}$. Однако иногда бывает удобно задать оператор сначала на каком-то подмножестве $\mathscr{B}$, и тогда возникает вопрос: допускает ли оператор, непрерывный на $D(L)$, продолжение, непрерывное на всём $\mathscr{B}$? Как показывает следующий результат, это действительно так, когда исходная область определения плотна в $\mathscr{B}$. (Рассуждение, используемое в приводимом ниже доказательстве, интересно и само по себе как пример часто применяемого метода, называемого „продолжением (или расширением) по непрерывности“.)

3.4.4. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и L — линейный оператор из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{C}$ с областью определения, плотной в $\mathscr{B}$. Если L непрерывен на $D(L)$, то он имеет единственное непрерывное продолжение — обозначим его $\tilde{L}$ — на всё пространство $\mathscr{B}$ и норма $\tilde{L}$ равна норме L.*

Доказательство. Так как $\overline{D(L)} = \mathscr{B}$, то для каждого f из $\mathscr{B}$ найдется такая последовательность (f_n) в $D(L)$, что $\lim f_n = f$. Поскольку (f_n) сходится, она является последовательностью Коши. Значит, для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что $\|f_n - f_m\| \leqslant \varepsilon/\|L\|$ при $m, n \geqslant n_0$. Тогда при $m, n \geqslant n_0$

$$\|Lf_n - Lf_m\| = \|L(f_n - f_m)\| \leqslant \|L\|\|f_n - f_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что (Lf_n) — последовательность Коши в $\mathscr{C}$, а так как $\mathscr{C}$ полно, то существует элемент $g \in \mathscr{C}$, такой что $\lim Lf_n = g$. Легко проверить, что g не зависит от выбора последовательности f_n и, значит, продолжение $\tilde{L}: \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ можно определить формулой $\tilde{L}f = g$. Очевидно, что $\tilde{L}$ — линейный оператор. Кроме того, он ограничен, так как

$$\|\tilde{L}f\| = \|g\| = \lim \|Lf_n\| \leqslant \lim \|L\|\|f_n\| = \|L\|\|f\|.$$

Это соотношение показывает также, что $\|\tilde{L}\| \leqslant \|L\|$, где $\|\tilde{L}\|$ обозначает, конечно, норму $\tilde{L}$ как оператора $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$. С другой стороны, $\tilde{L}f = Lf$ при $f \in D(L)$, поэтому заведомо $\|\tilde{L}\| \geqslant \|L\|$. Стало быть, $\|\tilde{L}\| = \|L\|$.

Если $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ — два продолжения, то для любой сходящейся последовательности (f_n) в $D(L)$ с пределом f

$$\tilde{L}_1 f = \lim \tilde{L}_1 f_n = \lim L f_n = \lim \tilde{L}_2 f_n = \tilde{L}_2 f,$$

откуда вытекает единственность. □

Те приятные последствия, которые влечет за собой предположение о непрерывности, мы обсудим позднее. В следующих далее примерах мы возвращаемся к конкретным операторам, рассмотренным в предыдущем параграфе, с тем чтобы, во-первых, установить их непрерывность и, во-вторых, получить оценки операторной нормы — величины, очень важной для приложений. Следует заметить, что если в конечномерном случае при выборе нормы можно руководствоваться одними только соображениями удобства вычислений, поскольку все линейные операторы непрерывны, то в бесконечномерном случае и само определение оператора, и уж, конечно, его непрерывность всецело зависят от выбора пространства. Поэтому при применении абстрактной теории к конкретным задачам этот выбор имеет решающее значение. Разумеется, нужно стремиться к тому, чтобы получился оператор, который хорошо себя ведет. Кроме того, функции из рассматриваемого пространства должны удовлетворять всем ограничениям (таким как, скажем, непрерывность), диктуемым задачей. На практике достичь разумного равновесия между этими требованиями не всегда легко.

3.4.5. Пример. Системы алгебраических уравнений, и конечные, и бесконечные (примеры 3.3.2 и 3.3.3), удобнее всего решать в пространствах с l_p-нормами. Рассмотрим оператор L: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, определенный формулой

$$(Lf)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и предположим для начала, что $\mathbb{C}^n$ наделено нормой $\|\cdot\|_\infty$, заданной формулой (1.3.2). Тогда

$$\|Lf\|_\infty = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j \right| \leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \, |f_j|$$

$$\leqslant \left(\sup_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \right) (\sup_j |f_j|) = m \|f\|_\infty,$$

где $m = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|$. Из определения 3.4.2 следует, что $\|L\| \leqslant m$. На самом деле $\|L\| = m$. Чтобы в этом убедиться, достаточно найти f, для которого $\|Lf\|_\infty \geqslant m\|f\|_\infty$. С этой целью выберем такое целое k, что $m = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{kj}|$ (существование такого k вытекает из определения m), и пусть f — единичный вектор с j-й координатой $\overline{\alpha}_{kj}/|\alpha_{kj}|$. Тогда

$$\|Lf\|_\infty = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j \right| \geqslant \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} f_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{kj}| = m \|f\|_\infty,$$

откуда и следует сделанное утверждение.

При $1 < p < \infty$ вычисление проводится так. Пусть q — сопряженный индекс. Согласно неравенству Гёльдера 1.3.12,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j\right| \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^q\right\}^{1/q} \left\{\sum_{j=1}^{n} |f_j|^p\right\}^{1/p} = \left\{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^q\right\}^{1/q} \|f\|_p.$$

Отсюда

$$\|Lf\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |(Lf)_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j\right|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^q\right\}^{p/q} \|f\|_q^p$$

и, следовательно,

$$\|L\| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^q\right\}^{p/q}\right]^{1/p}.$$

Это дает оценку для $\|L\|$. Однако найти $\|L\|$ в явном виде, как в случае $p = \infty$, обычно нелегко.

3.4.6. Пример. Приведем теперь бесконечномерный пример. Вернемся к „бесконечной матрице“ и положим формально

$$(Lf)_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{3.4.2}$$

При отсутствии ограничений на рост α_{ij} при $j \to \infty$ трудно придать какой-либо разумный смысл L как оператору на банаховом пространстве. Чтобы показать, в чем тут трудность, разберемся, когда L есть оператор $l_\infty \to l_\infty$. Для того чтобы правая часть (3.4.2) была конечной при всех $f \in l_\infty$, необходимо, чтобы $\sum_j |\alpha_{ij}| < \infty$. Однако одно только это условие не гарантирует, что $Lf \in l_\infty$, нужно еще потребовать, чтобы $m = \sup_i \sum_j |\alpha_{ij}| < \infty$. Тогда наверняка L: $l_\infty \to l_\infty$. На самом деле, поскольку $\|Lf\|_\infty \leqslant m\|f\|_\infty$, условие $m < \infty$ позволяет вдобавок утверждать, что L ограничен. Следующая теорема дает достаточное условие ограниченности L при произвольном p.

3.4.7. Теорема. *Пусть p и q — сопряженные индексы. Положим*

$$|||\alpha|||_1 = \sup_j \sum_i |\alpha_{ij}|,$$
$$|||\alpha|||_p = \left[\sum_i \left\{\sum_j |\alpha_{ij}|^q\right\}^{p/q}\right]^{1/p}, \quad 1 < p < \infty,$$
$$|||\alpha|||_\infty = \sup_i \sum_j |\alpha_{ij}|.$$

Если при некотором p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, величина $|||\alpha|||_p$ конечна, то линейный оператор L: $l_p \to l_p$, заданный формулой (3.4.2), *ограничен и $\|L\| \leqslant |||\alpha|||_p$. В частном случае $p = \infty$ имеет место равенство: $\|L\| = |||\alpha|||_\infty$.*

Доказательство. Достаточно в примере 3.4.5 заменить n на ∞. □

К этому можно добавить, что $\|L\| = |||\alpha|||_1$ при $p = 1$ (см. пример 6.5.4). При $p \neq 1, \infty$ найти точное значение операторной нормы (что позволило бы получить необходимые условия ограниченности), вообще говоря, нелегко. Некоторые другие критерии ограниченности приведены в задаче 3.4.

3.4.8. Пример. Рассмотрим теперь интегральный оператор K, определенный формально равенством

$$Kf(x) = \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy. \tag{3.4.3}$$

Если интервал $[a, b]$ конечен, то уже при довольно слабых ограничениях на k оператор K определен и непрерывен на $\mathscr{C}([a, b])$ или на пространствах $\mathscr{L}_p$. Если же интервал бесконечен, то, как и в предыдущем примере, для того чтобы гарантировать конечность интеграла, понадобится наложить ограничения на поведение $k(x, y)$ при больших y. Приведем для образца два результата, отвечающих первому и второму случаю.

3.4.9. Теорема. *Пусть a и b конечны и $\mathscr{C}([a, b])$ наделено* sup-*нормой. Предположим, что функция k: $[a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ непрерывна. Тогда оператор K: $\mathscr{C}([a, b]) \to \mathscr{C}([a, b])$ ограничен и*

$$\|K\| \leqslant \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |k(x, y)|\, dy \leqslant (b - a) \sup_{x,\, y \in [a, b]} |k(x, y)|.$$

Доказательство. Раз f непрерывна, то и Kf непрерывна (теорема 2.4.15). Оценка для нормы получается из соотношений

$$|Kf(x)| \leqslant [\sup_{y \in [a, b]} |f(y)|] \int_a^b |k(x, y)|\, dy = \|f\| \int_a^b |k(x, y)|\, dy. \quad \square$$

3.4.10. Теорема. *Пусть k измерима и p, q — сопряженные индексы. Положим*

$$|||k|||_1 = \sup_{y \in [a, b]} \int_a^b |k(x, y)|\, dx,$$

$$|||k|||_p = \left[\int_a^b dx \left\{\int_a^b |k(x, y)|^q\, dy\right\}^{p/q}\right]^{1/p}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$|||k|||_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |k(x, y)|\, dy.$$

Если для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, величина $|||k|||_p$ конечна, то оператор K: $\mathscr{L}_p(a, b) \to \mathscr{L}_p(a, b)$ ограничен и $\|K\| \leqslant |||k|||_p$.

Доказательство. Повторяем доказательство из примера 3.4.5, применяя неравенство Гёльдера не для сумм, а для интегралов (теорема 2.5.3). □

Как и в случае пространств l_p, если $p = 1$ или $p = \infty$, то $\|K\| = |||k|||_p$. При всех остальных значениях p сформулированные выше условия не являются необходимыми для ограниченности. Другой признак ограниченности приводится в задаче 3.5; дальнейшие результаты можно найти у Забрейко и др. [1968].

В обоих предыдущих примерах дело обстояло так, что если множество значений оператора лежит в рассматриваемом банаховом пространстве, то он оказывается ограниченным. Можно подумать, что так будет и в общем случае, однако можно построить (хотя и не без труда) контрпример к этой гипотезе: линейный оператор $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ не обязательно ограничен. Неограниченность операторов, возникающих из дифференциальных уравнений, ставит несколько иную проблему, более важную с точки зрения приложений.

3.4.11. Пример. Для иллюстрации этой проблемы достаточно рассмотреть простой оператор, определяемый формально равенством $Lf(x) = f'(x)$, и выяснить, существует ли „разумное“ пространство $\mathscr{B}$, на котором L: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ ограничен. Испытаем сначала $\mathscr{C}([0, 1])$ с sup-нормой и возьмем $D(L) = \mathscr{C}^\infty([0, 1])$. Для последовательности (f_n), где $f_n(x) = \sin n\pi x$, получим $Lf_n(x) = n\pi \cos n\pi x$ и $\|Lf_n\|/\|f_n\| = n\pi$. Значит, L не ограничен на этой области. Аналогичное рассуждение показывает, что L не ограничен на той же области и по нормам $\mathscr{L}_p$.

Ввиду особой важности дифференциальных уравнений для приложений, отсутствие ограниченности приводит к серьезным проблемам, решению которых было отдано много усилий. Укажем кратко два способа обойти трудности. Первый состоит в том, чтобы воспользоваться пространством $\mathscr{C}^k([0, 1])$ с нормой (1.3.7). Действительно, линейный оператор дифференцирования k-го порядка непрерывен как оператор из $\mathscr{C}^k([0, 1])$ в $\mathscr{C}([0, 1])$. Правда, непосредственно в таком виде, как он сформулирован выше, этот подход довольно неудобен, однако его модификация с использованием определенных гильбертовых пространств составит основу нашего изучения дифференциальных уравнений с частными производными в гл. 11. Второй способ заключается в том, чтобы развить теорию операторов, удовлетворяющих некоему условию, более слабому, чем ограниченность. Эти так называемые замкнутые операторы будут введены в § 3.8.

В заключение этого параграфа определим некоторые классы ограниченных операторов, которые понадобятся нам позднее. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства, причем $\mathscr{B}$ есть подмножество $\mathscr{C}$; термин „подмножество" употреблен в теоретико-множественном смысле, и нормы в $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ могут быть разными. Итак, каждый элемент $\mathscr{B}$ является в то же время элементом $\mathscr{C}$, и можно определить линейный оператор $L\colon \mathscr{B}\to\mathscr{C}$ соотношением $Lf=f$ для всех $f\in\mathscr{B}$, где f справа и слева рассматривается соответственно как элемент из $\mathscr{B}$ и из $\mathscr{C}$.

3.4.12. Определение. Введенный выше оператор $L\colon \mathscr{B}\to\mathscr{C}$ называется **вложением** $\mathscr{B}$ **в** $\mathscr{C}$.

Простой пример можно получить, взяв $\mathscr{B}=\mathscr{C}([0, 1])$ с sup-нормой и $\mathscr{C}=\mathscr{L}_1(0, 1)$.

3.4.13. Определение. Пусть оператор $A\colon \mathscr{B}\to\mathscr{C}$ (не обязательно линейный) удовлетворяет условию $\|Af\|=\|f\|$ при всех $f\in\mathscr{B}$. Тогда A называется **изометрией**.

3.4.14. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — векторные пространства. Оператор $L\colon \mathscr{V}\to\mathscr{W}$ называется **изоморфизмом**, если он линеен и биективен.

3.4.15. Определение. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — нормированные векторные пространства. Оператор $L\colon \mathscr{V}\to\mathscr{W}$, который одновременно является изометрией и изоморфизмом, называется **изометрическим изоморфизмом**. Если между пространствами $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ существует изометрический изоморфизм, они называются **изометрически изоморфными.**

Два изометрически изоморфных банаховых пространства — это в некотором смысле одно и то же пространство как с алгебраической, так и с аналитической точки зрения.

3.5. Некоторые фундаментальные свойства ограниченных операторов

Для того чтобы эффективно пользоваться условием ограниченности линейных операторов, нужно познакомиться с некоторыми фундаментальными теоретическими результатами. Их значение в полном объеме, может быть, и не будет сразу понятно, но мотивировать общее направление, на котором будут сосредоточены наши усилия, можно уже сейчас, обратившись к уравнению $Lf = g$ с ограниченным оператором $L\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$.

Если L биективен, то на $\mathscr{C}$ определен обратный L^{-1} и уравнение имеет решение $L^{-1}g$ при всех $g \in \mathscr{C}$. Прежде всего возникает вопрос: устойчиво ли это решение относительно малых изменений правой части g? Если L^{-1} ограничен, то решение устойчиво, ибо $\|f_1 - f_2\| \leqslant \|L^{-1}\| \|g_1 - g_2\|$ при $Lf_1 = g_1$, $Lf_2 = g_2$. Однако, как отмечено выше, ограниченность оператора не следует из одного только факта, что он определен на всём банаховом пространстве. То что L^{-1} ограничен, вытекает из следующей теоремы, являющейся одним из краеугольных камней теории операторов (мы приводим ее без доказательства (см., например, Фридман [1970, с. 141][1]), которое сложно и основано на методах, несущественных для нашего изложения):

3.5.1. Теорема об открытом отображении. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и $L\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ — сюръективный ограниченный линейный оператор. Тогда L переводит открытые множества из $\mathscr{B}$ в открытые множества в $\mathscr{C}$.*

Теперь при помощи этой теоремы докажем ограниченность, или, что равносильно, непрерывность, оператора L^{-1}. Так как L биективен, то по лемме 3.2.9 достаточно показать, что прообраз, скажем U, относительно L^{-1} произвольного открытого множества $S \subset \mathscr{B}$ открыт. Но L биективен; поэтому $U = (L^{-1})^{-1}S = LS$. Отсюда, ввиду непрерывности L, заключаем на основании теоремы об открытом отображении, что U открыто, а значит, L^{-1} непрерывен.

3.5.2. Определение. Говорят, что линейный оператор L из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{C}$ имеет ограниченный обратный, если L биективен, а L^{-1} ограничен.

3.5.3. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и $L\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ — ограниченный линейный оператор. Если L биективен, то он имеет ограниченный обратный.*

Хорошо известный формальный способ решения уравнения $Lf = g$ заключается в том, что решают уравнения $L_n f_n = g$, где L_n — операторы, в каком-то смысле аппроксимирующие L, а затем показывают, что f_n приближают искомое решение f и иногда еще что L_n^{-1} аппроксимируют L^{-1}. Возникает вопрос: как понимать утверждение, что L_n есть аппроксимация L? Иными словами, требуется какая-то конструкция, позволяющая придать смысл понятию сходимости операторов. Имеется много возможных подходов к этой проблеме. Один из них основан на превращении множества ограниченных линейных операторов в банахово пространство и использовании аналитических свойств этого пространства.

[1] Или Данфорд и Шварц [1958, с. 68]. — *Прим. перев.*

Первым шагом в этом направлении будет введение на множестве линейных операторов структуры векторного пространства. Пусть $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ — векторные пространства, L_1, L_2: $\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ — линейные операторы и $\alpha\in\mathbb{C}$. Введем новые операторы L_1+L_2, αL_1, полагая

$$(L_1+L_2)f=L_1f+L_2f, \qquad f\in\mathscr{V},$$
$$(\alpha L_1)f=\alpha L_1f, \qquad f\in\mathscr{V}.$$

Нулевой оператор будем обозначать символом 0. Строго говоря, нулевой оператор и нулевой вектор следовало бы обозначать разными символами, однако для упрощения записи этого обычно избегают, поскольку из контекста всегда ясно, о чем идет речь. Очевидно, что L_1+L_2 и αL_1 — линейные операторы $\mathscr{V}\to\mathscr{W}$, и множество линейных операторов $\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ с указанными правилами действий становится векторным пространством.

Обозначим это пространство $\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$. Пока это чисто алгебраический объект, однако нетрудно проверить, что если $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — нормированные пространства, то операторная норма (определение 3.4.2) действительно является нормой на $\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$.

3.5.4. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства. Нормированное векторное пространство ограниченных линейных операторов из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{C}$ с операторной нормой обозначается $\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{C})$ (или $\mathscr{L}(\mathscr{B})$, когда $\mathscr{B}=\mathscr{C}$).

Утверждение, что L имеет ограниченный обратный (определение 3.5.2), мы будем часто записывать сокращенно в виде $L^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{C},\mathscr{B})$.

3.5.5. Теорема. *Если $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства, то и $\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{C})$ — банахово пространство.*

Доказательство. Убедиться, что $\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{C})$ — нормированное пространство, легко, и мы предоставляем это читателю. Чтобы доказать полноту, возьмем последовательность Коши операторов L_n из $\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{C})$ и докажем, что она имеет предел, который является ограниченным линейным оператором и, следовательно, лежит в $\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{C})$.

Предельный оператор L строится следующим образом. Поскольку $\|L_nf-L_mf\|\leqslant\|L_n-L_m\|\|f\|$ при всех $f\in\mathscr{B}$, то (L_nf) есть последовательность Коши в $\mathscr{C}$. Так как $\mathscr{C}$ полно, (L_nf) имеет там предел, скажем g. Положим $Lf=g=\lim L_nf$. Непосредственно проверяем, что L — линейный оператор. Покажем, что он ограничен. Так как $|\|L_n\|-\|L_m\||\leqslant\|L_n-L_m\|$, то $(\|L_n\|)$ — последовательность Коши вещественных чисел. Она имеет предел, скажем b, и, следовательно:

$$\|Lf\|=\lim\|L_nf\|\leqslant\lim\|L_n\|\|f\|=b\|f\|.$$

Теперь нам надо показать, что $\lim\|L_n - L\| = 0$. Так как (L_n) — последовательность Коши, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что $\|L_m - L_n\| \leqslant \varepsilon$ при m, $n \geqslant n_0$. Значит, для любого $f \in \mathscr{B}$ и любых m, $n \geqslant n_0$ имеем $\|L_n f - L_m f\| \leqslant \varepsilon\|f\|$, откуда

$$\|L_n f - Lf\| = \lim_{m\to\infty} \|L_n f - L_m f\| \leqslant \varepsilon \|f\|.$$

Следовательно, $\|L_n - L\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$, и, поскольку ε произвольно, $\lim\|L_n - L\| = 0$. □

Следующий результат позволяет находить ограниченные множества в $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$. Это еще один из центральных результатов теории линейных операторов. Доказательство имеется у Фридмана [1970, с. 139] [1)].

3.5.6. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха — Штейнгауза). *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства. Пусть $\{L_\alpha\}$, где α пробегает некоторое множество S, есть семейство операторов из $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ и для любого заданного $f \in \mathscr{B}$ множество векторов $\{L_\alpha f\}$ ограничено. Тогда семейство $\{L_\alpha\}$ ограничено в $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, т. е. найдется такое $m < \infty$, что $\|L_\alpha\| \leqslant m$ при всех $\alpha \in S$.*

Банахово пространство $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ удобно для рассмотрения сходимости операторов.

3.5.7. Определение. Пусть (L_n) — последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих $\mathscr{B}$ в $\mathscr{C}$. Если она сходится относительно операторной нормы, т. е. в $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, то мы пишем $L_n \to L$ или $\lim L_n = L$. В таком случае говорят, что эта последовательность **равномерно сходится.**

Легко видеть, что равномерная сходимость равносильна следующему свойству: найдется сходящаяся к нулю последовательность (ε_n) вещественных чисел, такая что $\|(L_n - L)f\| \leqslant \varepsilon_n\|f\|$ при всех $f \in \mathscr{B}$. Заметим, что (ε_n) не зависит от f.

3.5.8. Пример. Рассмотрим интегральные операторы K и K_n, задаваемые формулами

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy,$$

$$K_n f(x) = \int_0^1 k_n(x, y) f(y)\, dy.$$

Пусть Ω — квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ и k, k_n: $\Omega \to \mathbb{C}$ — непрерывные функции. Из теоремы 3.4.9 известно, что K, $K_n \in \mathscr{L}(\mathscr{C}([0, 1]))$, где

[1)] Или, скажем, у Данфорда и Шварца [1958, с. 64]. — *Прим. перев.*

$\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup-нормой. Если, кроме того, $k_n \to k$ в $\mathscr{C}(\Omega)$ с sup-нормой, то по той же теореме

$$\|(K_n - K) f\| \leqslant \|k_n - k\| \|f\|, \tag{3.5.1}$$

откуда следует, что $K_n \to K$.

В теории интегральных уравнений широко применяется техника вывода свойств уравнения с ядром k из свойств уравнений с аппроксимирующими ядрами k_n; см., например, Трикоми [1957]. Один из способов основан на рассмотрении *вырожденных ядер*, т. е. ядер вида

$$k_n(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \psi_j(y), \quad n < \infty.$$

Он приводит к успеху, если известно, что существует последовательность вырожденных ядер, для которой $K_n \to K$. В качестве образца приведем такой результат:

3.5.9. Лемма. *Пусть k: $[0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда существует последовательность (k_n) непрерывных вырожденных ядер, такая что $K_n \to K$ в $\mathscr{L}(\mathscr{C}([0, 1]))$.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса 1.4.6 найдется последовательность (p_n) многочленов от двух переменных, сходящаяся к k в $\mathscr{C}(\Omega)$. Но каждый многочлен p_n есть вырожденное ядро, и утверждение леммы следует из (3.5.1). □

Аналогичные результаты имеют место в пространствах $\mathscr{L}_p$. Можно пользоваться и другими типами аппроксимирующих ядер, например двойными тригонометрическими рядами, которые на практике иногда оказываются более удобными; см. Аткинсон [1976].

3.5.10. Пример. Рассмотрим задачу Коши для системы n линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} u_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(t), \quad t > 0, \\ u_i(0) = u_{0i}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.5.2}$$

Если трактовать u как функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, то эту систему можно записать в виде

$$u'(t) = Lu(t), \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0, \tag{3.5.3}$$

где $u_0 \in \mathbb{C}^n$ и L: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор. Система (3.5.2) — это лишь один пример важного класса задач, которые допускают представление в виде (3.5.3). Рассматривая вместо $\mathbb{C}^n$ другие банаховы пространства и выбирая подходящую интерпретацию L

как линейного оператора, можно выразить в такой форме широкий круг задач Коши, начиная от одного обыкновенного дифференциального уравнения и кончая уравнениями в частных производных. Иногда (3.5.3) называют абстрактным автономным дифференциальным уравнением; „автономность" означает, что L не зависит от t. Сейчас мы будем заниматься решением уравнения (3.5.3) в случае, когда L — ограниченный оператор. Пример, когда (3.5.3) отвечает дифференциальному уравнению в частных производных, будет дан в § 9.7. Метод решения, в котором главную роль играет равномерная сходимость операторов, служит естественным обобщением метода, применяемого в одномерном случае: будет показано, что решение можно представить в виде $e^{tL}u_0$, где оператор e^{tL} определяется соответствующим степенным рядом.

Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство и $\Omega = [0, \infty)$. Векторнозначная функция $u\colon \Omega \to \mathscr{B}$ называется *дифференцируемой в точке* $t \in \Omega$, если в $\mathscr{B}$ существует такой вектор $u'(t)$, называемый *производной* u в t, что [1]

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ t+h \in \Omega}} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\| = 0.$$

Функция *u дифференцируема на* Ω, если она дифференцируема в каждой точке $t \in \Omega$.

Предположим, что $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, и рассмотрим ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (tL)^j j!$ для $t \geqslant 0$. Так как

$$\sum_{j=0}^{\infty} \| (tL)^j \| / j! \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} t^j \| L \|^j / j! < \infty,$$

этот ряд абсолютно сходится в $\mathscr{L}(\mathscr{B})$, а поскольку $\mathscr{L}(\mathscr{B})$ полно, его сумма (которая существует по лемме 1.4.6) есть оператор из $\mathscr{L}(\mathscr{B})$. Обозначим этот оператор e^{tL}, т. е. положим

$$e^{tL} = \sum_{j=0}^{\infty} (tL)^j / j!.$$

Рассуждения, напоминающие те, которые используются в элементарном случае когда L — комплексное число, позволяют легко установить, что функция e^{tL} дифференцируема и обладает свойствами

(i) $(d/dt)(e^{tL}) = Le^{tL}$;

(ii) $e^{(t_1+t_2)L} = e^{t_1 L} e^{t_2 L}$.

Из (i) сразу следует, что $e^{tL}u_0$ есть решение задачи Коши (3.5.3).

---

[1] Ниже и в некоторых других местах авторы не делают очевидных оговорок вроде $h \neq 0$. — *Прим. перев.*

Такая форма решения ценна на практике. Как мы увидим в § 9.7, при определенных обстоятельствах можно придать смысл свойству положительности оператора L (в терминах его собственных значений) и тем самым получить некоторый критерий устойчивости. Полугрупповое свойство (ii) характерно для автономных уравнений. По существу оно означает, что решение в момент $t_1 + t_2$ можно получить таким способом: найти решение в момент t_1, а затем, взяв его в качестве нового начального условия, перейти к моменту t_2.

Равномерная сходимость — это самый сильный тип сходимости операторов. Равномерно сходящиеся последовательности (L_n) удобны в работе, и для них, как мы увидим позднее, можно удовлетворительно решать вопросы, касающиеся сходимости последовательности $\left(L_n^{-1}\right)$ обратных операторов. Однако иногда равномерная сходимость оказывается слишком ограничительным условием, и наш следующий шаг направлен на то, чтобы ввести менее жесткие, но все же полезные условия. Для этого понадобится следующий предварительный результат:

3.5.11. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и (L_n) — ограниченная последовательность в $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$. Предположим, что $(L_n f)$ сходится для всех f из плотного в $\mathscr{B}$ подмножества S. Тогда существует единственный элемент $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, такой что $\lim L_n f = Lf$ для всех $f \in \mathscr{B}$.*

Доказательство. Так как линейная оболочка $[S]$ множества S состоит из конечных линейных комбинаций его элементов, то последовательность $(L_n f)$ сходится для всех $f \in [S]$. Определим оператор L на $[S]$, полагая $Lf = \lim L_n f$ для $f \in [S]$, и заметим, что этот (очевидно, линейный) оператор ограничен на $[S]$, поскольку

$$\| Lf \| \leqslant \lim \| L_n f \| \leqslant \sup \| L_n \| \| f \|, \quad f \in [S].$$

Следовательно (по теореме 3.4.4), он имеет непрерывное продолжение на $\mathscr{B}$, которое мы обозначаем по-прежнему L. Осталось только доказать, что $\lim L_n f = Lf$ при $f \in \mathscr{B} \diagdown [S]$. Но S плотно в $\mathscr{B}$, поэтому для каждого $f \in \mathscr{B}$ найдется последовательность (f_j) элементов $[S]$, такая что $\lim f_j = f$ и

$$\| L_n f - Lf \| \leqslant \| (L_n - L) f_j \| + \| f - f_j \| \sup_n \| L_n - L \|.$$

Итак, для всякого заданного $\varepsilon > 0$ можно сначала выбрать подходящее j, а затем достаточно большое n, при котором $\| L_n f - Lf \| < \varepsilon$. $\square$

3.5.12. Следствие. *Пусть (L_n) — такая последовательность в $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, что $(L_n f)$ сходится при всех $f \in \mathscr{B}$. Тогда существует единственный элемент $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, такой что $\lim L_n f = Lf$ при всех $f \in \mathscr{B}$.*

Доказательство. Так как последовательность $(L_n f)$ сходится, она ограничена. Следовательно (по принципу равномерной ограниченности 3.5.6), (L_n) есть ограниченная последовательность в $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, и доказываемое утверждение вытекает из леммы. $\square$

3.5.13. Определение. Последовательность (L_n) операторов из $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ называется **сильно сходящейся**, если последовательность $(L_n f)$ сходится при каждом $f \in \mathscr{B}$. Оператор L, такой что $\lim L_n f = Lf$ $(f \in \mathscr{B})$ (его существование гарантировано следствием), называется **сильным пределом** последовательности (L_n), и мы пишем $L_n \xrightarrow[s]{} L$.

Итак, если $L_n \xrightarrow[s]{} L$, то для каждого f найдется последовательность (ε_n) вещественных чисел, сходящаяся к нулю и такая, что $\|(L_n - L)f\| \leqslant \varepsilon_n \|f\|$. Отличие от равномерной сходимости в том, что теперь последовательность (ε_n) может зависеть от f. Таким образом, очевидно, что сильная сходимость следует из равномерной. В конечномерном случае верно и обратное. В бесконечномерном случае, как показывает следующий пример, это уже не так.

3.5.14. Пример. Рассмотрим последовательность (L_n) операторов $l_2 \to l_2$, задаваемых формулой

$$L_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (0, \ldots, 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots).$$

Ясно, что $L_n f \to 0$ при каждом f, т. е. $L_n \xrightarrow[s]{} 0$. С другой стороны, вычислив $\|L_n f_n\|$ для вектора f_n, у которого все компоненты нули, кроме $(n+1)$-й, равной 1, мы убедимся, что $\|L_n\| \geqslant 1$ при $n \geqslant 1$. Значит, $L_n \not\to 0$. Следовательно, (L_n) не сходится равномерно (поскольку сильный и равномерный пределы должны совпадать в случае, когда оба они существуют).

3.5.15. Пример. Разница между сильной и равномерной сходимостью заметно сказывается на практике при работе с квадратурными формулами. Стандартный приближенный метод вычисления интеграла $Q(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ состоит в том, что отрезок $[0, 1]$ делят на $n-1$ частей, скажем $[x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)}]$, $j = 1, \ldots, n-1$, и пользуются квадратурной формулой

$$Q_n(f) = \sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} f(x_j^{(n)}), \tag{3.5.4}$$

где $w_j^{(n)}$ — соответствующие веса. Вопрос о сходимости этих приближений весьма важен для приложений.

Чтобы провести его теоретическое исследование, будем рассматривать Q, Q_n как линейные функционалы (т. е. линейные операторы со значениями в $\mathbb{C}$). Выясним, как сходится к Q последовательность (Q_n). Сразу понятно, что сходимость не равномерна: на рис. 3.1 изображен случай, когда $Q_n(f_n)=0$ при всех n, а $Q(f_n)=1$. Тем не менее справедлив следующий полезный результат:

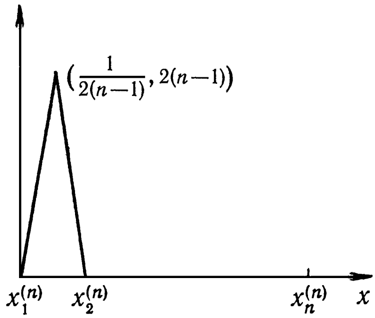

Рис. 3.1.

3.5.16. Лемма. *Допустим, что существует $a<\infty$, для которого*

$$\sum_{j=1}^{n} |w_j^{(n)}| \leqslant a, \quad n \geqslant 1. \qquad (3.5.5)$$

Наделим $\mathscr{C}([0, 1])$ sup-*нормой и предположим, что существует плотное в* $\mathscr{C}([0, 1])$ *множество S таких функций, что $Q_n(f)\to Q(f)$ при всех $f\in S$. Тогда $Q_n(f)\to Q(f)$ при всех $f\in\mathscr{C}([0, 1])$.*

Доказательство. Последовательность $(\|Q_n\|)$ ограничена, так как, в силу (3.5.5),

$$|Q_n(f)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |w_j^{(n)}|\,|f(x_j^{(n)})| \leqslant a\|f\|.$$

Поскольку $Q_n(f)\to Q(f)$ на плотном множестве, доказываемое утверждение следует из леммы 3.5.11. □

Лемма 3.5.16 гарантирует сходимость многих известных квадратурных формул, в частности формулы трапеций, формулы Симпсона и формул гауссова типа. При применении формулы трапеций отрезок $[0, 1]$ делят на равные интервалы длины h и полагают

$$Q_n(f)=\frac{1}{2}h[f(0)+2f(h)+2f(2h)+\ldots+2f((n-1)h)+f(1)].$$

Очевидно, что выполнено (3.5.5) с $a=1$. Пусть S состоит из всех непрерывных кусочно-линейных функций, отвечающих равномерным разбиениям отрезка $[0, 1]$. Это множество плотно в $\mathscr{C}([0, 1])$ по лемме 1.4.17, и, как нетрудно проверить, $Q_n(f)\to Q(f)$ при $f\in S$, т. е. выполнены условия предыдущей леммы. Точно так же обстоит дело с формулой Симпсона. Формулы гауссова типа для любого заданного многочлена точны при достаточно большом n, а многочлены плотны в $\mathscr{C}([0, 1])$ по теореме Вейерштрасса. Кроме того, все веса положительны, и, вычислив $Q_n(1)$, можно убедиться, что (3.5.5) имеет место, т. е. снова выполнены условия леммы.

На практике сказанное выше означает, что интеграл заданной непрерывной функции f можно приблизить сколь угодно точно, скажем по формуле трапеций, выбрав достаточно большое n, однако без какой-либо дополнительной информации об f нельзя сказать, какое понадобится n. Поэтому во многих стандартных оценках погрешности делаются дополнительные предположения о гладкости f и погрешность выражается через ее производные. Однако при таком подходе возникают определенные трудности, если, например, f есть неизвестное решение интегрального уравнения. Подробнее мы поговорим об этом в § 7.6, где рассматривается численное решение интегральных уравнений.

3.6. Первые результаты о решении уравнения $Lf = g$

Теперь приготовления закончены, и настало время вывести некоторые полезные результаты о решении уравнения $Lf = g$. Общее направление исследования определяется вопросами (i)—(vi), поставленными во введении к этой главе. В соответствии с ними мы сосредоточим внимание на нахождении условий, обеспечивающих существование и непрерывность обратного оператора L^{-1}, и построении приближенных методов решения, основанных, например, на рассмотрении близкого оператора L_0, который в каком-то смысле служит хорошим приближением к L и для которого обратный оператор известен.

Все результаты этого параграфа базируются на методе последовательных приближений для нахождения решения уравнения

$$(I - M) f = g, \tag{3.6.1}$$

где $M \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Идея метода очень простая, но плодотворная. Она подсказана следующим эвристическим рассуждением. Перепишем (3.6.1) в виде

$$f = g + Mf. \tag{3.6.2}$$

Если M «мало», то весьма правдоподобно, что с точностью до первого порядка членом Mf можно пренебречь. Это дает первое приближение $f_0 = g$. Его можно улучшить, подставляя f_0 вместо f в правую часть (3.6.2). Получим второе приближение $f_1 = g + Mf_0$. Продолжая действовать так же, придем к последовательности приближений

$$f_0 = g, \qquad f_n = g + Mf_{n-1}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.6.3}$$

Правдоподобно, что $\lim f_n = f$ есть решение уравнения (3.6.1). Еще заметим, что формально

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} M^n g = (I - M)^{-1} g, \tag{3.6.4}$$

и, значит, предположительно $(I-M)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} M^n$. Метод последовательных приближений широко применяется для решения систем алгебраических уравнений и интегральных уравнений Фредгольма; в последнем случае ряд (3.6.4) называют *рядом Неймана.* В связи со следующей теоремой напомним, что утверждение $(I-M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ означает, что оператор $I-M$ биективен и имеет ограниченный обратный.

3.6.1. Теорема. *Пусть* $M \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ *(где* $\mathscr{B}$ *— банахово пространство) и* $\|M\|<1$. *Тогда* $(I-M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. *Кроме того,*

$$(I-M)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} M^n, \tag{3.6.5}$$

причём ряд сходится по операторной норме (т. е. в $\mathscr{L}(\mathscr{B})$*) и* $\|(I-M)^{-1}\| \leqslant (1-\|M\|)^{-1}$.

Доказательство. Так как $\|M^n\| \leqslant \|M\|^n$ и $\|M\|<1$, то ряд (3.6.5) абсолютно сходится (определение 1.4.5). Но по теореме 3.5.5 пространство $\mathscr{L}(\mathscr{B})$ полно, поэтому, согласно лемме 1.4.6, этот ряд сходится и его сумма лежит в $\mathscr{L}(\mathscr{B})$. Простое вычисление показывает, что

$$(I-M)\left(\sum_{n=0}^{\infty} M^n\right)=I=\left(\sum_{n=0}^{\infty} M^n\right)(I-M),$$

и (3.6.5) следует из леммы 3.3.10. Последняя оценка выводится из неравенств

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} M^n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|M^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|M\|^n=(1-\|M\|)^{-1}. \ \square$$

3.6.2. Следствие (ряд Неймана). *Допустим, что выполнены предположения теоремы. Тогда уравнение* $(I-M)f=g$ *имеет точно одно решение* f *в* $\mathscr{B}$. *Если* $f_0=g$, $f_n=g+Mf_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, *то* $f=\lim f_n$, *или, что равносильно,*

$$f=g+\sum_{n=1}^{\infty} M^n g$$

и $\|f\| \leqslant (1-\|M\|)^{-1}\|g\|$.

Выясним теперь, что можно сказать об L^{-1}, если известен обратный L_0^{-1} для некоторого приближения L_0 к L. Положим $A=L_0-L$ и заметим, что

$$L=L_0-A=L_0\left(I-L_0^{-1} A\right).$$

Допустим, что $\|A\| < \|L_0^{-1}\|^{-1}$. Тогда $\|L_0^{-1}A\| < 1$ и (по теореме 3.6.1) $(I - L_0^{-1}A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Следовательно, $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и

$$L^{-1} = [L_0(I - L_0^{-1}A)]^{-1} = (I - L_0^{-1}A)^{-1}L_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (L_0^{-1}A)^n L_0^{-1}.$$

Вычитая L_0^{-1} и переходя к нормам, заключаем, что

$$\begin{aligned} \|L^{-1} - L_0^{-1}\| &\leqslant \|L_0^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|L_0^{-1}\|^n \|A\|^n \\ &= \|L_0^{-1}\|^2 \|A\| [1 - \|L_0^{-1}\| \|A\|]^{-1}. \end{aligned}$$

Тем самым доказана следующая теорема:

3.6.3. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство и L, L_0, $L_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Если $\Delta = \|L - L_0\| \|L_0^{-1}\| < 1$, то $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и*

$$L^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (L_0^{-1}(L_0 - L))^n\right] L_0^{-1},$$

$$\|L^{-1} - L_0^{-1}\| \leqslant (1 - \Delta)^{-1} \Delta \|L_0^{-1}\|.$$

Отсюда видно, что если L_0 имеет ограниченный обратный и норма $\|L_0 - L\|$ разности L_0 и L достаточно мала, то L тоже имеет ограниченный обратный. Более того, получены разложение L^{-1} в ряд и оценка нормы разности обратных операторов. Эта теорема является примером (хотя и совсем элементарным) того типа результатов, которые получаются в теории возмущений. По этому предмету мы отсылаем читателя к книге Като [1966].

Следующие примеры иллюстрируют применение приведенных выше теорем.

3.6.4. Пример. Здесь мы хотим показать, как ограничение $\|M\| < 1$ связано с одним условием, которое часто используется при численном решении систем линейных уравнений. Если уравнения имеют вид

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j = g_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.6.6}$$

то они равносильны операторному уравнению $(I - M)f = g$, где $M\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — оператор, представленный матрицей $[\alpha_{ij}]$. Как мы знаем из примера 3.4.5, если $\mathbb{C}^n$ наделено l_∞-нормой, то

$$\|M\| = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|. \tag{3.6.7}$$

Значит, согласно следствию 3.6.2, при $\|M\| < 1$ система (3.6.6) имеет единственное решение, задаваемое стандартной итерационной формулой (3.6.3).

На самом деле это известный результат численного анализа; правая часть (3.6.7) есть максимальная сумма по строкам данной матрицы, а условие, что она должна быть меньше единицы, есть так называемый *принцип строгого диагонального преобладания*. Хорошо известно, что строгое диагональное преобладание гарантирует единственность решения системы (3.6.6) и что это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Заметим, что если указанное условие не выполнено, то это еще не значит, что нельзя установить тот же результат, используя другую норму на $\mathbb{C}^n$, скажем $\|\cdot\|_p$.

3.6.5. Пример. Анализ, проведенный в предыдущем примере, можно распространить на случай бесконечной системы уравнений, если всюду заменить n на ∞. Такие системы встречаются в разных контекстах, например при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных. Как правило, применяют численный метод, основанный на решении усеченной системы, поэтому важно уметь устанавливать сходимость и точность такого приближения.

Чтобы проиллюстрировать возможный ход рассуждений, рассмотрим систему

$$f_i - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} f_j = g_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.6.8}$$

в l_2 (аналогичный способ применим, конечно, и в l_p). Допустим, что $g \in l_2$ и

$$|||\alpha|||_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \right\}^{1/2} < 1. \tag{3.6.9}$$

Тогда в очевидных обозначениях можно переписать (3.6.8) в виде $(I-M)f = g$. По теореме 3.4.7, $\|M\| < 1$, и, согласно следствию 3.6.2, система имеет единственное решение в l_2. Соответствующая усеченная система такова:

$$\tilde{f}_i^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \tilde{f}_j^{(n)} = g_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6.10}$$

Здесь возникает небольшая трудность, связанная с тем, что теоретическое рассмотрение этой системы естественно вести в конечномерном пространстве, а не в l_2. Ее можно обойти при помощи следующего простого приема: мы замечаем, что решением системы

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \tilde{f}_j^{(n)} &= g_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ \tilde{f}_i^{(n)} \qquad\qquad\quad &= g_i, \qquad i = n+1, \ldots, \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

служит $(\tilde{f}_1^{(n)}, \ldots, \tilde{f}_n^{(n)}, g_{n+1}, \ldots)$, где $(\tilde{f}_1^{(n)}, \ldots, \tilde{f}_n^{(n)})$ — решение (3.6.10), и рассматриваем вместо (3.6.10) систему (3.6.11) в l_2. Нас интересует, имеет ли система (3.6.11) единственное решение, и если да, то насколько хорошо оно приближает решение исходной системы (3.6.8)? Для получения ответа на эти вопросы воспользуемся теоремой 3.6.3.

Чтобы перевести (3.6.11) в операторную форму, определим последовательность операторов (M_n), полагая

$$(M_n f)_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j, & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ 0, & n < i. \end{cases}$$

Тогда (3.6.11) примет вид $(I - M_n)\tilde{f}^{(n)} = g$. Чтобы применить теорему, нужно оценить $\|M - M_n\|$. Очевидно, что бесконечная матрица $[\beta_{ij}]$, отвечающая $M - M_n$, совпадает с матрицей, которая отвечает M, за исключением того, что $\beta_{ij} = 0$, когда $(i, j) \notin s(n)$, где $s(n)$ — множество всех пар (i, j) целых чисел, таких что $i, j > n$. Тогда по теореме 3.4.7

$$\|M - M_n\| \leqslant \Big\{ \sum_{i, j \in s(n)} |\alpha_{ij}|^2 \Big\}^{1/2} = \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $\lim M_n = M$, и, полагая $L_0 = I - M$, $L = I - M_n$, мы выводим из теоремы 3.6.3 следующий результат:

3.6.6. Теорема. *Допустим, что* $g \in l_2$ *и* $|||\alpha|||_2 < 1$. *Тогда* $\varepsilon_n \to 0$ *и найдется такое* n_0, *что* $\varepsilon_n < 1 - |||\alpha|||_2$ *при* $n \geqslant n_0$. *При* $n \geqslant n_0$ *аппроксимирующая система* (3.6.11), *или, что равносильно,* (3.6.10), *имеет точно одно решение* $\tilde{f}^{(n)}$, *и если* f — *решение системы* (3.6.8), *то*

$$\|f - \tilde{f}^{(n)}\|_2 \leqslant \varepsilon_n (1 - |||\alpha|||_2)^{-1} (1 - |||\alpha|||_2 - \varepsilon_n)^{-1} \|g\|_2.$$

По поводу бесконечных систем уравнений см. Рисс [1913].

3.6.7. Пример. Следствие 3.6.2 в сочетании с какой-нибудь оценкой нормы наподобие тех, которые даются в теоремах 3.4.9 и 3.4.10, позволяют получить известный ряд Неймана для интегрального уравнения

$$f(x) - \int_a^b k(x, y)\, g(y)\, dy = g(x). \tag{3.6.12}$$

Если, например, k измерима, $|||k|||_p < 1$ и $g \in \mathscr{L}_p(a, b)$, то (3.6.12) имеет точно одно решение в $\mathscr{L}_p$, которое является суммой в $\mathscr{L}_p(a, b)$ ряда Неймана $\sum g_n$, где $g_0 = g$ и

$$g_n(x) = \int_a^b k(x, y) g_{n-1}(y)\, dy, \quad n \geqslant 1.$$

Этот пример позволяет проиллюстрировать в простой ситуации тип рассуждений, которые применимы для широкого круга проблем и, в частности, будут использованы в гл. 11 при рассмотрении дифференциальных уравнений с частными производными. Допустим, что требуется найти непрерывное решение уравнения (3.6.12). Если k и g непрерывны, но $|||k|||_\infty > 1$, то следствие 3.6.2 не гарантирует сходимости ряда Неймана в $\mathscr{C}([a, b])$. Однако если $|||k|||_p < 1$ при некотором p, то дело можно спасти, работая сначала в $\mathscr{L}_p(a, b)$, а затем воспользовавшись для установления существования непрерывного решения следующим независимым рассуждением. Пусть $\bar{f}$ — решение в $\mathscr{L}_p$; тогда $\bar{f} = g + K\bar{f}$ п. в., где K — наш интегральный оператор. Но, по теореме 2.4.15, K: $\mathscr{L}_p(a, b) \to \mathscr{C}([a, b])$; отсюда следует, что $g + K\bar{f} = f$ — непрерывная функция. Поскольку $f = \bar{f}$ п. в. (и потому в $\mathscr{L}_p$), то и $Kf = K\bar{f}$, откуда $f = g + K\bar{f} = g + Kf$. Таким образом, f — искомое непрерывное решение.

3.6.8. Пример. Другой приближенный метод решения уравнения (3.6.12) основан на том, что ищется близкое к k ядро k_0, для которого разрешимо уравнение

$$f_0(x) - \int_a^b k_0(x, y) f_0(y)\, dy = g(x).$$

Если, скажем, $g \in \mathscr{L}_p(a, b)$, $|||k_0|||_p < 1$ и

$$\Delta = |||k - k_0|||_p (1 - |||k_0|||_p)^{-1} < 1,$$

то по теореме 3.6.3 уравнение (3.6.12) имеет в $\mathscr{L}_p$ решение f и

$$\|f - f_0\|_p \leqslant (1 - \Delta)^{-1} \Delta (1 - |||k_0|||_p)^{-1} \|g\|_p.$$

Одна из возможностей — взять в качестве k_0 вырожденное ядро; см. пример 3.5.8. Этот способ рассуждений приводит к интересным результатам в теории интегральных уравнений, а полученная оценка погрешности полезна при численном решении интегральных уравнений; см. Бэйкер [1977, гл. 4] и Аткинсон [1976, § 2.1]

3.7. Введение в спектральную теорию

Анализ, проведенный в предыдущем параграфе, показал, что уравнение $(I-L)f=g$ особенно хорошо поддается решению тогда, когда мала норма $\|L\|$. К сожалению, для большинства задач, относящихся к линейным уравнениям, это условие слишком ограничительно. Поэтому мы разовьем теорию, в которой допускаются большие значения $\|L\|$. Основная идея, как и в конечномерном случае, состоит в том, что исследуются свойства семейства уравнений

$$(\lambda I-L)f=g, \tag{3.7.1}$$

где λ — комплексный параметр. Теория выглядит намного проще для комплексного пространства, поэтому всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\mathscr{B}$ — *комплексное* банахово пространство.

3.7.1. Определение. Пусть L — линейный (возможно, неограниченный) оператор из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{B}$. Множество $\rho(L)$ комплексных чисел, для которых $(\lambda I-L)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{B})$, называется **резольвентным множеством** оператора L. Его дополнение $\sigma(L)$ в $\mathbb{C}$ называется **спектром** L. Оператор $R(\lambda; L)=(\lambda I-L)^{-1}$, где $\lambda\in\rho(L)$, называют **резольвентой** оператора L.

Очевидно, что $I-L$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда $1\in\rho(L)$. Поэтому главный вопрос при решении уравнения $(I-L)f=g$: каков спектр L? Если L ограничен, то, по теореме 3.6.1, $\sigma(L)$ содержится в круге с центром в начале и радиусом $\|L\|$. Однако $\sigma(L)$ часто гораздо меньше этого круга, и одной из наших «долговременных» целей будет более точное описание спектра, которое, как мы покажем, возможно по крайней мере для некоторых употребительных классов операторов.

Если $\mathscr{B}$ конечномерно, $L\colon \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ и уравнение $(\lambda I-L)f=0$ имеет единственное решение $f=0$, то, по теореме 3.3.11, $\lambda\in\rho(L)$. С другой стороны, если в каком-нибудь банаховом пространстве это уравнение имеет ненулевое решение, то $\lambda I-L$ не инъективен и $(\lambda I-L)^{-1}$ вообще не определен. Аккуратно сформулировать этот результат нам поможет следующее определение:

3.7.2. Определение. Предположим, что L — линейный оператор из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{B}$. Комплексное число λ называется его **собственным значением**, если уравнение $\lambda f=Lf$ имеет ненулевое решение. Все такие решения называются **собственными векторами**[1], отвечающими λ, а определяемое ими линейное подпространство — **собственным подпространством**, отвечающим λ. Множество $\sigma_p(L)$ всех собственных значений оператора L называется его **точечным спектром**.

[1] Или *собственными функциями*, в случае когда $\mathscr{B}$ — пространство функций. — *Прим. перев.*

В конечномерном случае спектр оператора совпадает с множеством его собственных значений. Радикальное отличие бесконечномерного случая в том, что спектр может содержать и, как правило, содержит точки, не являющиеся собственными значениями; см., скажем, пример 3.3.12. Для ограниченных операторов это можно сформулировать несколько иначе. Если оператор $\lambda I - L$ одновременно инъективен и сюръективен, то, по теореме 3.5.3, $\lambda \in \rho(L)$. В бесконечномерном случае второе условие уже не следует, как в конечномерном, из первого, и главную трудность на практике обычно составляет именно проверка сюръективности. Следующее определение завершает описание спектра и позволяет кратко подытожить предыдущие замечания.

3.7.3. Определение. Пусть L — линейный оператор из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{B}$. Множество тех $\lambda \in \sigma(L)$, для которых $\lambda I - L$ инъективен, а $R(\lambda I - L)$ плотно (соотв. неплотно) в $\mathscr{B}$, называется **непрерывным** (соотв. **остаточным**) **спектром** L.

3.7.4. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ — комплексное банахово пространство и L: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ — ограниченный линейный оператор. Тогда $\lambda \in \rho(L)$ в том и только в том случае, если $\lambda I - L$ биективен. Точечный, непрерывный и остаточный спектры попарно не пересекаются, и $\sigma(L)$ является их объединением. Если $\mathscr{B}$ конечномерно, то $\sigma(L) = \sigma_p(L)$.*

В остальной части этого параграфа рассматриваются только ограниченные операторы. Рассуждения строятся по аналогии с одномерным случаем. Если L, f и g — комплексные числа, то (3.7.1) имеет решение всегда, кроме случая $\lambda = L$, а эта точка является спектром оператора $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, отвечающего умножению на L. Тогда резольвента отвечает умножению на $(\lambda - L)^{-1}$, а это выражение есть аналитическая функция от λ на резольвентном множестве, т. е. при всех $\lambda \neq L$. Зная о больших возможностях теории аналитических функций, попробуем обобщить этот результат на операторы L в банаховом пространстве (заметим, что аналогичного рода рассуждения применяются в теории интегральных уравнений Фредгольма; см. задачу 3.2.5). Разумеется, теорию аналитических функций нужно будет применять к *операторнозначной* функции $(\lambda I - L)^{-1}$ от λ, но необходимое обобщение не представляет серьезных трудностей.

3.7.5. Определение. Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Функция $R(\cdot; L)$: $\mathbb{C} \to \mathscr{L}(\mathscr{B})$ называется аналитической в точке λ_0, если существует предел по операторной норме

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} [(R(\lambda;\ L) - R(\lambda_0;\ L))/(\lambda - \lambda_0)]$$

(откуда автоматически следует, что этот предел не зависит от способа стремления λ к λ_0).

3.7.6. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — комплексное банахово пространство и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Тогда $\rho(L)$ есть открытое множество и при λ, $\lambda_0 \in \rho(L)$*

$$R(\lambda_0;\ L) - R(\lambda;\ L) = (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0;\ L) R(\lambda;\ L). \tag{3.7.2}$$

Кроме того, $R(\lambda; L)$ — аналитическая функция от λ в $\rho(L)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\lambda_0 \in \rho(L)$ и заметим, что по теореме 3.6.3 (примененной к $\lambda_0 I - L$ и $\lambda I - L$), если $|\lambda - \lambda_0| < \|L\|^{-1} \|(\lambda_0 I - L)^{-1}\|^{-1}$, то $\lambda \in \rho(L)$. Значит, λ_0 содержится в открытом шаре, лежащем в $\rho(L)$, и $\rho(L)$ — открытое множество. Равенство (3.7.2) — это просто тождество

$$\begin{aligned}(\lambda_0 I - L)^{-1} - (\lambda I - L)^{-1} &= (\lambda_0 I - L)^{-1} [(\lambda I - L) - (\lambda_0 I - L)] (\lambda I - L)^{-1} \\ &= (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0;\ L) R(\lambda;\ L).\end{aligned}$$

Чтобы доказать аналитичность, заметим, что, согласно последнему утверждению теоремы 3.6.3, $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} R(\lambda;\ L) = R(\lambda_0;\ L)$. Следовательно, в силу (3.7.2),

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R(\lambda;\ L) - R(\lambda_0;\ L)}{\lambda - \lambda_0} &= -\lim_{\lambda \to \lambda_0} R(\lambda;\ L) R(\lambda_0;\ L) \\ &= -[R(\lambda_0;\ L)]^2. \ \square\end{aligned}$$

Спектр оператора L можно теперь интерпретировать как множество особенностей аналитической функции $R(\lambda; L)$. Столь же легко обобщается на операторнозначный случай большинство стандартных результатов теории аналитических функций. Поскольку все изменения в доказательствах сводятся в основном к замене модулей нормами, мы не будем на этом останавливаться; подробности можно найти в книге Тэйлора [1958, гл. 5]. Для дальнейших ссылок отметим, что имеют место обычные результаты о рядах Тэйлора и Лорана, а также теорема Лиувилля.

Используя теорию аналитических функций, можно получить дальнейшую информацию о спектре. По теореме 3.6.1 ряд

$$R(\lambda;\ L) = \lambda^{-1} \sum \lambda^{-n} L^n \tag{3.7.3}$$

сходится, если $|\lambda| > \|L\|$. Но это есть ряд Лорана для резольвенты, поэтому он абсолютно сходится во внешности наименьшего круга с центром в начале, содержащего $\sigma(L)$. Таким образом, сходимость зависит не от $\|L\|$, а от радиуса этого круга, который обычно меньше $\|L\|$, что позволяет получить более точное условие сходимости.

3.7.7. Определение. Для всякого оператора $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ число $r_\sigma(L) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(L)} |\lambda|$ называется его **спектральным радиусом.**

3.7.8. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — комплексное банахово пространство и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Тогда ряд* (3.7.3) *сходится в $\mathscr{L}(\mathscr{B})$ к $R(\lambda; L)$, если $|\lambda| > r_\sigma(L)$, и расходится в противном случае; ряд Неймана для* (3.7.1) *сходится при $|\lambda| > r_\sigma(L)$.*

3.7.9. Теорема. *Если комплексное банахово пространство $\mathscr{B}$ содержит хотя бы один ненулевой элемент и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, то множество $\sigma(L)$ непусто.*

Доказательство. По теореме 3.6.1, $\|R(\lambda; L)\| \leqslant (|\lambda| - \|L\|)^{-1}$ при $|\lambda| > \|L\|$, откуда $\|R(\lambda; L)\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если бы $\sigma(L)$ было пустым, то $R(\lambda; L)$ была бы ограниченной аналитической функцией на всей комплексной плоскости, т. е., по теореме Лиувилля, константой, причем ввиду поведения резольвенты на бесконечности эта константа должна быть нулевым оператором. Но это невозможно, так как $R(\lambda; L)$ сюръективна, а $\mathscr{B}$ по предположению содержит ненулевой элемент. □

Чтобы получить формулу для $r_\sigma(L)$, понадобится один подготовительный результат. Для заданного многочлена $p = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$ определим $p(L)$ естественным образом, полагая $p(L) = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j L^j$. Доказательство следующей теоремы проводится непосредственно и предоставляется читателю в качестве упражнения.

3.7.10. Теорема о спектральном отображении для многочленов. *Пусть $\mathscr{B}$ — комплексное банахово пространство и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Спектром оператора $p(L)$ является множество $\{\mu: \mu = p(\lambda), \lambda \in \sigma(L)\}$. Иначе говоря, $\sigma(p(L)) = p(\sigma(L))$.*

3.7.11. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — комплексное банахово пространство и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Тогда*

$$r_\sigma(L) = \lim \|L^n\|^{1/n}.$$

Доказательство. Применив теорему 3.7.8 и вспомнив стандартное выражение для радиуса сходимости степенного ряда, получим

$$r_\sigma(L) = \limsup \|L^n\|^{1/n}. \tag{3.7.4}$$

Нужно доказать, что $\limsup$ совпадает с $\lim$. Но по теореме о спектральном отображении $\sigma(L^n)$ состоит из n-х степеней точек $\sigma(L)$. Значит, $r_\sigma(L^n) = [r_\sigma(L)]^n$. Так как $r_\sigma(L^n) \leqslant \|L^n\|$, то

$$r_\sigma(L) = [r_\sigma(L^n)]^{1/n} \leqslant \|L^n\|^{1/n}. \tag{3.7.5}$$

Следовательно, $r_\sigma(L) \leqslant \liminf \|L^n\|^{1/n}$, что вместе с (3.7.4) приводит к требуемому результату. □

3.7.12. Пример. Положим $Lf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ и будем рассматривать L как оператор $\mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$, где $\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup-нормой. Ясно, что $\|L\| \geqslant 1$. Однако

$$L^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^n f(t)\,dt,$$

откуда следует, что $\|L^n\| \leqslant 1/(n-1)!$, и, значит, по теореме 3.7.11, $r_\sigma(L) = 0$. Итак, спектр L состоит из одной точки 0, и по теореме 3.7.8 ряд Неймана для решения уравнения $(\lambda I - L)f = g$ сходится при любом ненулевом λ. Аналогичный результат имеет место для общего интегрального оператора Вольтерры; см. задачу 3.24.

Посмотрим, к какого типа спектру принадлежит точка 0. Как легко проверить дифференцированием, оператор L инъективен; значит, 0 лежит не в точечном спектре. Так как $R(L)$ содержится в собственном замкнутом подпространстве $\mathscr{M}$, состоящем из всех непрерывных функций f с $f(0) = 0$, то 0 относится к остаточному спектру (определение 3.7.3).

Продолжая и дальше привлекать соображения аналитичности, можно построить теорию, которая позволит иметь дело с общими функциями от операторов; см. Тэйлор [1958, § 5.6] или Данфорд и Шварц [1958, § 7.3]. О преимуществах этого подхода свидетельствует эффективность «операторного» метода в элементарной теории дифференциальных уравнений. Мы не будем здесь следовать по этому пути, за исключением частного случая самосопряженных операторов, который под несколько иным углом зрения рассматривается в гл. 9.

Чтобы продвинуться дальше в спектральной теории, нужны дополнительные теоретические средства. Среди них одно из самых полезных — понятие сопряженного оператора, которое будет обсуждаться в гл. 6. На практике многие операторы обладают помимо ограниченности другими свойствами, которые упрощают их рассмотрение, и использование сопряженных операторов позволит намного точнее описать спектр по крайней мере в двух важных случаях — когда оператор компактен и когда он самосопряжен.

3.8. Замкнутые операторы и дифференциальные уравнения

Почти все результаты, выведенные в предыдущих параграфах, применимы только к непрерывным операторам. Однако, как уже отмечалось в примере 3.4.11, дифференциальные операторы не непрерывны на стандартных банаховых пространствах, и для решения задач, связанных с такими операторами, была развита теория замкнутых операторов, которые мы сейчас введем. Технически эта теория намного труднее тех, что мы рассматривали до сих пор, однако ввиду важности дифференциальных уравнений для приложений потрудиться стоит. В то же время уместно с самого начала отметить, что в некоторых основных аспектах качественные свойства замкнутых операторов подобны свойствам непрерывных операторов. Пожалуй, самым удивительным из таких свойств является устойчивость решений уравнения $Lf = g$, где L — замкнутый биективный оператор: как и в случае непрерывного оператора (теорема 3.5.3), решение непрерывно зависит от правой части.

Мы будем применять эту теорию в дальнейшем только к дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2$, и, хотя общее построение теории в рамках банаховых пространств можно выполнить тем же путем, проще всё же ограничиться гильбертовыми пространствами. Итак, $\mathscr{H}$ будет далее гильбертовым пространством, а L — линейным оператором из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, причем всегда предполагается, что его область определения есть линейное подпространство в $\mathscr{H}$. Напомним, что оператор L называется неограниченным, если он не ограничен на $D(L)$; неограниченный оператор разрывен в каждой точке своей области определения (по лемме 3.4.1 и теореме 3.4.3). Начнем с того, что введем правила действий с неограниченными операторами.

3.8.1. Определение. Пусть L, M — неограниченные линейные операторы из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ положим

$$D(\alpha L + \beta M) = D(L) \cap D(M),$$
$$(\alpha L + \beta M) f = \alpha L f + \beta M f \text{ для } f \in D(\alpha L + \beta M).$$

Произведение определим следующим образом:

$$D(ML) = \{f\colon\ f \in D(L),\ Lf \in D(M)\},$$
$$(ML) f = M(Lf) \text{ для } f \in D(ML).$$

Заметим, что, вообще говоря, $D(ML) \neq D(LM)$ и, значит, $ML \neq LM$. Поэтому рассмотрение обратных операторов требует особых забот. Например, часто бывает так, что неограниченный оператор L имеет ограниченный обратный, и тогда $D(LL^{-1}) = \mathscr{H}$, но $D(L^{-1}L) = D(L)$. Следовательно, $L^{-1}L \neq LL^{-1}$; точнее, $LL^{-1} = I$, а для произведения в обратном порядке имеет место лишь включение $L^{-1}L \subset I$. При изучении неограниченных операторов часто удобнее работать с векторами, а не с „голыми" операторами и, скажем, вместо $L^{-1}L \subset I$ писать $L^{-1}Lf = f$ для $f \in D(L)$.

Следующим примером мы хотим продемонстрировать коренное различие между употреблением термина „оператор" в функциональном анализе и классической теории дифференциальных уравнений.

3.8.2. Пример. Допустим, что рассматриваются операторы в $\mathscr{L}_2(0, 1)$, отвечающие дифференцированию. Можно взять $D(L) = \mathscr{C}^1([0, 1])$ и положить $Lf = f'$ для $f \in D(L)$. Но есть и другие возможности. Например, если решается задача Коши, то можно взять

$$D(L_1) = \{f\colon f \in \mathscr{C}^1([0, 1]),\ f(0) = 0\}$$

и положить $L_1 f = f'$ для $f \in D(L_1)$. И L, и L_1 — неограниченные линейные операторы, но L_1 есть собственное сужение L и, конечно, $L_1 \neq L$. Это не просто формальное различие; оно затрагивает граничное условие и, значит, тесно связано с физикой той задачи, которой отвечают указанные операторы. Поэтому важные свойства таких операторов могут оказаться разными; например, могут не совпадать их спектры (см. задачу 3.32).

С другой стороны, в классической теории под дифференциальным оператором l обычно понимают просто формальное выражение, которое лишь задает коэффициенты при всех производных и, в частности, никак не связано с граничными условиями. Чтобы подчеркнуть это различие, введем следующее определение:

3.8.3. Определение. Для заданных функций p_r, $r = 0, 1, \ldots, n$, на $\mathbb{R}$ положим

$$l = \sum_{r=0}^{n} p_r(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^r;$$

l называется **формальным обыкновенным дифференциальным оператором порядка r**. Если f — достаточно гладкая функция, то можно говорить о применении l к f и писать

$$lf(x) = \sum_{r=0}^{n} p_r(x) f^{(r)}(x).$$

Удобно и любой оператор L в гильбертовом пространстве, который получается из l, если положить $Lf = lf$ для f из некоторой заданной области, тоже называть *дифференциальным оператором.*

Остальная часть этого параграфа посвящена замкнутым операторам.

3.8.4. Определение. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и L — линейный оператор из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$. Рассмотрим следующие условия на последовательность (f_n):

(i) $f_n \in D(L)$ при всех n;

(ii) (f_n) сходится к пределу f;

(iii) (Lf_n) сходится.

Если для всякой последовательности, удовлетворяющей этим условиям, $f \in D(L)$ и $Lf = \lim Lf_n$, то оператор L называется **замкнутым.**[1])

Смысл этого понятия, пожалуй, легче всего пояснить путем сравнения его с непрерывностью. Если L непрерывен на $D(L)$, то (iii) вытекает из (i) и (ii); если же L только замкнут, то (iii) уже не является следствием двух других условий и вводится как дополнительное условие. Заметим, что для замкнутого оператора L предел f последовательности (f_n) лежит в $D(L)$. Таким образом, непрерывный оператор замкнут только тогда, когда замкнута его область определения; очевидно, что это условие является также и достаточным.

3.8.5. Лемма. *Пусть L непрерывен на $D(L)$. Он замкнут тогда и только тогда, когда замкнута $D(L)$.*

3.8.6. Пример. Чтобы объяснить общепринятую тактику решения обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрим уравнение $f' = g$ с заданной правой частью $g \in \mathscr{L}_2(0, 1)$; требуется найти его решение на $[0, 1]$, удовлетворяющее начальному условию $f(0) = 0$. Пусть $D(L)$ состоит из всех функций $f \in \mathscr{L}_2(0, 1)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) f абсолютно непрерывна (определение 2.4.13). По теореме 2.4.14, f дифференцируема тогда почти всюду, а f' локально-интегрируема по Лебегу.

(ii) $f' \in \mathscr{L}_2(0, 1)$. Это условие естественно, поскольку решение уравнения $f' = g$ ищется для всех $g \in \mathscr{L}_2(0, 1)$. Оно гарантирует, что $R(L) \subset \mathscr{L}_2(0, 1)$.

(iii) $f(0) = 0$. Таким образом, каждое $f \in D(L)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Наконец, для всех $f \in D(L)$ положим $Lf = f'$. Приведенные условия на $D(L)$ специально подобраны так, чтобы, с одной стороны, производная f' имела смысл и лежала в $\mathscr{L}_2(0, 1)$, а с другой — ограничения на область определения оператора были минимальными и тем самым уравнению $Lf = g$ были бы созданы наилучшие шансы для существования решения. В действительности $D(L)$ плотна в $\mathscr{L}_2(0, 1)$, что будет важно в дальнейшем. Чтобы помес-

[1]) Совпадение пространства определения и пространства значений оператора L здесь несущественно, определение работает и в случае операторов, действующих между различными пространствами. — *Прим. перев.*

тить оператор L в рамки нашей теории, нужно доказать, что он замкнут.

Возьмем произвольную последовательность (f_n) в $D(L)$, такую что $f_n \to f$ и $Lf_n = f'_n$ сходится к некоторому пределу, скажем h. Требуется установить, что $f \in D(L)$ и $f' = h$. По условию (iii)

$$f_n(x) = \int_0^x f'_n(t)\,dt. \tag{3.8.1}$$

Но, согласно неравенству Шварца,

$$\left| \int_0^x f'_n(t)\,dt - \int_0^x h(t)\,dt \right| \leqslant \| f'_n - h \|_2.$$

Правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Пользуясь формулой (3.8.1), заключаем, что $f_n(x) \to \int_0^x h(t)\,dt$ по sup-норме, а так как по предположению $f_n \to f$ в $\mathscr{L}_2(0, 1)$, отсюда следует, что

$$f(x) = \int_0^x h(t)\,dt. \tag{3.8.2}$$

Поскольку $h \in \mathscr{L}_2(0, 1)$, то $h \in \mathscr{L}_1(0, 1)$, т. е. h локально-интегрируема. Следовательно, f абсолютно непрерывна. Кроме того, $f' = h$, откуда $f' \in \mathscr{L}_2(0, 1)$. Наконец, (3.8.2) показывает, что $f(0) = 0$. Значит, $f \in D(L)$ и $Lf = g$.

Хотя определение 3.8.4 ясно показывает разницу между замкнутыми и непрерывными операторами, оно непрактично из-за сложного описания фигурирующей в нем последовательности f_n. Намного удобнее другое определение, которое мы сейчас введем. Оно основано на той идее, что замкнутые операторы характеризует *одновременная* сходимость последовательностей (f_n) и (Lf_n), а потому стоит ввести в рассмотрение вместо двух[1] одно-единственное гильбертово пространство. А именно, превратим векторное пространство $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ (определение 1.2.11) в гильбертово. Для этого наделим его скалярным произведением и нормой следующим образом:

$$([f_1, g_1], [f_2, g_2]) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2), \tag{3.8.3}$$

$$\| [f_1, g_1] \| = (\| f_1 \|^2 + \| g_1 \|^2)^{1/2}. \tag{3.8.4}$$

[1] Пространства определения и пространства значений; ср. с подстрочным примечанием к определению 3.8.4. — *Прим. перев.*

Здесь f_1, g_1, f_2, g_2 — элементы $\mathscr{H}$, а $[f_1, g_1]$, $[f_2, g_2]$ — элементы $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$. Легко проверить, что $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ действительно становится при этом гильбертовым пространством. Вспомнив, что в случае вещественнозначной функции φ вещественной переменной x множество пар $[x, \varphi(x)]$ называется ее графиком, введем такую терминологию:

3.8.7. Определение. **Графиком** $G(L)$ оператора L называется линейное подпространство в $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, состоящее из всех элементов вида $[f, Lf]$, где $f \in D(L)$. Аналогично *обратный график* $G'(L)$ есть множество всех $[Lf, f]$, где $f \in D(L)$.

3.8.8. Лемма. *Пусть L — линейный оператор из гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$. Оператор L замкнут тогда и только тогда, когда $G(L)$ замкнут (в $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$).*

Доказательство. Если $([f_n, Lf_n]) \to [f, g]$ в $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, то из (3.8.4) следует, что $f_n \to f$ и $Lf_n \to g$ (в $\mathscr{H}$). Поэтому если L замкнут, то $f \in D(L)$ и $Lf = g$. Значит, $[f, Lf] \in G(L)$ и $G(L)$ замкнут. Обратно, если $G(L)$ замкнут, то для любой сходящейся в $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ последовательности $([f_n, Lf_n])$ имеем $f_n \to f \in D(L)$ и $Lf_n \to Lf$. Следовательно, L замкнут. □

3.8.9. Определение. Линейный оператор L из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$ называется **замкнутым,** если замкнут его график.

Ввиду леммы 3.8.8 это определение равносильно данному раньше определению 3.8.4. Отметим, что из замкнутости $G(L)$ не следует замкнутость ни $D(L)$, ни $R(L)$ в $\mathscr{H}$.

С помощью понятия графика легко распространить несколько свойств ограниченных операторов на замкнутые неограниченные операторы. Рассмотрим, например, расширение оператора по непрерывности (теорема 3.4.4). Чтобы построить его аналог, нужно сначала обобщить понятие непрерывности оператора на его области определения.

3.8.10. Определение. Оператор L называется **замыкаемым**, если он имеет замкнутое расширение.

На первый взгляд может показаться, что всякий оператор замыкаем, поскольку его график непременно имеет замыкание. Однако это замыкание необязательно служит графиком оператора (см. задачу 3.30). Следующий результат помогает определять, замыкаем или нет какой-нибудь заданный оператор.

3.8.11. Лемма. *Для того чтобы линейное подпространство $\mathscr{M} \subset \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ было графиком линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало элементов вида $[0, g]$ с $g \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ — график некоторого оператора, скажем L. Если $[0, g] \in \mathscr{M}$, то для некоторого $f \in D(L)$ имеем $0 = f$ и $g = Lf$. Но для линейного L это невозможно.

С другой стороны, допустим, что $[0, g] \in \mathscr{M} \Rightarrow g = 0$. Тогда если $f \in S = \{f\colon \exists g,$ такое что $[f, g] \in \mathscr{M}\}$, то существует ровно одно g, для которого $[f, g] \in \mathscr{M}$. Действительно, если g_1, g_2 — два таких элемента, то $[f, g_1] - [f, g_2] = [0, g_1 - g_2] \in \mathscr{M}$ (поскольку $\mathscr{M}$ — линейное подпространство), откуда по предположению $g_1 = g_2$. Легко проверить, что S — линейное подпространство в $\mathscr{H}$, и, следовательно, можно определить линейный оператор L с $D(L) = S$ и $G(L) = \mathscr{M}$, положив $Lf = g$. □

Как показывает лемма, каждое линейное подпространство графика само является графиком. Значит, если L замыкаем, то $\overline{G(L)}$ есть график некоторого замкнутого расширения L (так как $\overline{G(L)}$ является замкнутым подпространством графика любого замкнутого расширения L). Следовательно, L имеет замкнутое расширение, скажем $\bar{L}$, с $G(\bar{L}) = \overline{G(L)}$. Очевидно, что $\bar{L}$ есть минимальное замкнутое расширение L, т. е. всякое замкнутое расширение L является также и расширением $\bar{L}$.

3.8.12. Определение. Минимальное замкнутое расширение $\bar{L}$ замыкаемого оператора L называется его **замыканием.**

В теории дифференциальных уравнений важное значение имеет явное вычисление замыкания некоторых операторов, поэтому в § 10.2 будут изложены соответствующие методы. Как показывает следующий результат, для непрерывных операторов ничего нового здесь не получается.

3.8.13. Лемма. *Всякий линейный оператор L из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, ограниченный на $D(L)$, замыкаем. Его замыкание совпадает с его расширением по непрерывности на замыкание $\overline{D(L)}$.*

Обсудим теперь обратные замкнутых операторов. При этом мы будем опираться на следующую фундаментальную теорему. Отметим, что обратное к ней утверждение почти очевидно (лемма 3.8.5), в то время как для доказательства самой теоремы нужна теорема об открытом отображении.

3.8.14. Теорема о замкнутом графике. *Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $L\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — замкнутый линейный оператор. Тогда L ограничен.*

Доказательство. Определим линейные операторы P_1, $P_2\colon G(L) \to \mathscr{H}$, полагая

$$P_1[f, Lf] = f, \quad P_2[f, Lf] = Lf \text{ для } f \in \mathscr{H}.$$

Тогда

$$\|P_1[f, Lf]\| = \|f\| \leqslant \{\|f\|^2 + \|Lf\|^2\}^{1/2} = \|[f, Lf]\|.$$

Следовательно, P_1 ограничен, и по аналогичным соображениям ограничен также и P_2. Далее, ясно, что P_1 биективен. Значит, по теореме 3.5.3 (которая является следствием теоремы об открытом отображении) P_1^{-1} ограничен, а потому ограничен и $P_2P_1^{-1}$. Так как $P_2P_1^{-1}f = P_2[f, Lf] = Lf$, то $P_2P_1^{-1} = L$; следовательно, L ограничен. □

3.8.15. Лемма. *Если L — инъективный линейный оператор из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, то L^{-1} замкнут тогда и только тогда, когда L замкнут.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $G(L) = G'(L^{-1})$ (определение 3.8.7). □

3.8.16. Теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и L — замкнутый инъективный линейный оператор из $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$. Тогда $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.*

Доказательство. По предыдущей лемме L^{-1} замкнут. Так как $D(L^{-1}) = \mathscr{H}$, то утверждение теоремы следует из теоремы о замкнутом графике, примененной к L^{-1}. □

Это обобщение теоремы 3.5.3 и есть обещанный выше ключевой результат об устойчивости для замкнутых операторов. Если известно, что уравнение $Lf = g$ имеет точно одно решение при каждом $g \in \mathscr{H}$ (т. е. L биективен), то в случае замкнутого оператора L этот результат гарантирует непрерывную зависимость решения от g. На спектральном языке этот результат означает, что если $\lambda I - L$ биективен, а L замкнут, то λ лежит в резольвентном множестве. Это в точности то же утверждение, что и в случае непрерывного оператора L (лемма 3.7.4).

3.8.17. Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(p(x) f'(x))' + q(x) f(x) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.8.5}$$

вместе с граничными условиями $f(0) = f(1) = 0$. Как мы увидим позже, если p, q — гладкие функции и $p(x) \neq 0$ при $x \in [0, 1]$, то это уравнение можно переписать в виде $Lf = g$, где L — замкнутый оператор из $\mathscr{L}_2(0, 1)$ в $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Тогда из теоремы 3.8.16 получается следующий результат: если (3.8.5) имеет точно одно решение при каждом $g \in \mathscr{L}_2(0, 1)$, то это решение непрерывно зависит от правой части g. Когда (3.8.5) описывает какую-то конкретную задачу, именно такой результат естествен из физических соображений. В рассматриваемом случае, если соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение, то существование и единственность доказать легко. Однако в общем случае убедиться в сюръективности не так легко. Дальнейшее обсуждение этих вопросов мы отложим до гл. 10.

В двух следующих леммах приводятся полезные критерии существования ограниченного обратного.

3.8.18. Лемма. *Пусть L — линейный оператор из гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Если существует такое $m > 0$, что $\|Lf\| \geqslant m\|f\|$ при всех $f \in D(L)$, то L замкнут тогда и только тогда, когда замкнуто $R(L)$.*

(ii) *Если L замкнут, то $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ тогда и только тогда, когда $R(L)$ плотно в $\mathscr{H}$ и существует такое $m > 0$, что $\|Lf\| \geqslant m\|f\|$ при всех $f \in D(L)$.*

Доказательство. (i) Из условия $\|Lf\| \geqslant m\|f\|$ следует, во-первых, что L инъективен и, значит, имеет обратный L^{-1} с $D(L^{-1}) = R(L)$, а во-вторых, что $\|L^{-1}g\| \leqslant m^{-1}\|g\|$ при $g \in D(L^{-1})$. Стало быть, оператор L^{-1} ограничен на $R(L)$, и по лемме 3.8.5 он замкнут тогда и только тогда, когда $R(L)$ замкнуто. Остальное вытекает из леммы 3.8.15.

(ii) Если $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, то $\|L^{-1}f\| \leqslant \|L^{-1}\|\|f\|$, откуда для $g = L^{-1}f$ получаем $\|Lg\| \geqslant \|L^{-1}\|^{-1}\|g\|$ при $g \in D(L)$. Чтобы доказать обратное, заметим, что, в силу (i), $R(L)$ замкнуто, а поскольку по предположению оно плотно в $\mathscr{H}$, то $R(L) = \mathscr{H}$. Так как L инъективен, то, по теореме 3.8.16, $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. □

3.8.19. Лемма. *Пусть L — замкнутый инъективный линейный оператор из гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$. Предположим, что существует такой линейный оператор M из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$ с плотной в $\mathscr{H}$ областью определения, что $R(M) \subset D(L)$ и $LMf = f$ для всех $f \in D(M)$. Если M ограничен на своей области определения, то $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ и $L^{-1} = \bar{M}$.*

Доказательство. Так как $LMf = f$ при всех $f \in D(M)$, то $R(L)$ плотно в $\mathscr{H}$. Кроме того, $Mf = L^{-1}f$ на $D(M)$, и потому L^{-1} ограничен на $D(M)$. Но L^{-1} замкнут (лемма 3.8.15). Следовательно, по лемме 3.8.5, примененной к L^{-1}, область $D(L^{-1}) = R(L)$ замкнута. Значит, $R(L) = \mathscr{H}$, и нужный результат вытекает из теоремы 3.8.16. □

Приведенные выше результаты подчеркивают аналогию в свойствах замкнутых и непрерывных операторов. Среди них отсутствуют, конечно, аналоги тех результатов о непрерывных операторах, которые опираются на явное использование операторной нормы. Например, основная теорема теории возмущений (теорема 3.6.3) неприменима к неограниченным операторам. В действительности вопрос о возмущениях одного замкнутого неограниченного оператора посредством другого имеет первостепенное значение для квантовой механики, и для его исследования были разработаны другие эффективные методы (см. Като [1966]). Некоторое представление о них дает задача 3.33; идея состоит в том, что нужно рассматривать возмущения, малые относительно заданного оператора.

Задачи

3.1. Если линейный оператор не инъективен, то обратный к нему не определен. Покажите путем построения примера, что в $\mathbb{R}^2$ уравнение $Lf = g$ с неинъективным L все же может при некоторых g иметь решение, и выведите критерий, позволяющий узнавать, при каких g это так.

3.2. Определим операторы правого и левого сдвига S_R, S_L: $l_2 \to l_2$ следующим образом:

$$S_R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \quad S_L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_2, \alpha_3, \ldots).$$

Покажите, что S_R инъективен, но не сюръективен, а S_L сюръективен, но не инъективен. Это еще один пример нарушения теоремы 3.3.11 в бесконечномерном случае.

3.3. Покажите, что если L: $\mathscr{B} \to \mathscr{E}$, M: $\mathscr{E} \to \mathscr{D}$, где $\mathscr{B}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{D}$ — нормированные векторные пространства, то $\|LM\| \leqslant \|L\|\|M\|$.

3.4. Допустим, что $m = \max\left\{\sup\limits_i \sum\limits_j |\alpha_{ij}|, \sup\limits_j \sum\limits_i |\alpha_{ij}|\right\} < \infty$. Установите аналог неравенства Юнга 2.5.4 и выведите из него, что оператор L: $l_p \to l_p$ $(p \geqslant 1)$, задаваемый формулой $(Lf)_i = \sum\limits_j \alpha_{ij} f_j$ $(i \geqslant 1)$, ограничен и $\|L\| \leqslant m$.

3.5. Пусть Ω — конечный или бесконечный интервал вещественной прямой, k: $\Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ — измеримая функция и

$$Kf(x) = \int\limits_\Omega k(x, y) f(y)\, dy.$$

Докажите при помощи неравенства Юнга, что если

$$m = \max\left\{\sup_{x\in\Omega} \int\limits_\Omega |k(x, y)|\, dy, \ \sup_{y\in\Omega} \int\limits_\Omega |k(x, y)|\, dx\right\} < \infty,$$

то при любом $p \geqslant 1$ оператор K: $\mathscr{L}_p(\Omega) \to \mathscr{L}_p(\Omega)$ ограничен и $\|K\| \leqslant m$

3.6. Рассмотрим интегральный оператор K вида

$$Kf(x) = \int\limits_0^1 \frac{k(x, y)}{|x-y|^\alpha} f(y)\, dy,$$

где k — непрерывная функция, а α — положительное число. Покажите, что если $\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup-нормой, то $K \in \mathscr{L}(\mathscr{C}([0, 1]))$ *при* $\alpha < 1$. Сформулируйте условие на α, гарантирующее ограниченность оператора K: $\mathscr{L}_p(0, 1) \to \mathscr{L}_p(0, 1)$.

3.7. Пусть $\mathscr{C}((-\infty, \infty))$ наделено sup-нормой, функция k непрерывна и

$$\sup_x \int_{-\infty}^{\infty} |k(x, y)|\, dy < \infty.$$

В обозначениях задачи 3.5 покажите, что $K \in \mathscr{L}(\mathscr{C}((-\infty, \infty)))$.

3.8. Покажите, что всякое сепарабельное гильбертово пространство изометрически изоморфно l_2.

3.9. Докажите, что $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ в определении 3.5.4 есть нормированное векторное пространство.

3.10. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$. Покажите, что если $R(L)$ замкнуто, то найдется такое m, что для каждого $g \in R(L)$ существует $f \in \mathscr{B}$ с $Lf = g$ и $\|f\| \leqslant m\|g\|$. [Воспользуйтесь теоремой 3.5.1.]

3.11. Пусть (L_n) — последовательность операторов в $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$. Покажите, что $L_n \to L$ тогда и только тогда, когда существует стремящаяся к нулю последовательность (ε_n) вещественных чисел, такая что $\|(L_n - L)f\| \leqslant \varepsilon_n \|f\|$ при всех $f \in \mathscr{B}$.

3.12. Пусть (μ_n) — сходящаяся последовательность в $\mathscr{C}([0, 1])$, наделенном sup-нормой, скажем $\mu_n \to \mu$. Положим $M_n f(x) = \mu_n(x) f(x)$, $Mf(x) = \mu(x) f(x)$. Покажите, что $M_n \to M$. Всегда ли это верно, если $\mu_n \to \mu$ лишь поточечно?

3.13. Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство. Предположим, что $L_n, L_n^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ при каждом $n \geqslant 1$ и $\lim L_n = L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Покажите путем построения контрпримера, что L^{-1} необязательно существует. Докажите, что $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ тогда и только тогда, когда последовательность $\left(\|L_n^{-1}\|\right)$ ограничена, и что если это условие выполнено, то $L_n^{-1} \to L^{-1}$.

3.14. Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, где $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — банаховы пространства. Покажите, что L^{-1} существует и ограничен на $R(L)$ тогда и только тогда, когда найдется такое $m > 0$, что $\|Lf\| \geqslant m\|f\|$, $f \in \mathscr{B}$. Докажите, что если это неравенство выполнено, то $R(L)$ замкнуто, и выясните, обязательно ли $R(L) = \mathscr{C}$.

3.15. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $L \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Предположим, что найдется $m > 0$, при котором $|(Lf, f)| \geqslant m\|f\|^2$, $f \in \mathscr{H}$. Покажите, что $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

3.16. Пусть $k \in \mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$. Определим операторы K, K_a: $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty) \to \mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ следующим образом:

$$Kf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f(y)\, dy,$$

$$K_a f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-a}^{a} k(x-y) f(y)\, dy, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Покажите, что K_a не сходится равномерно к K при $a \to \infty$.

3.17. Пусть выполнены предположения предыдущей задачи. Если $\|k\|_1 < 1$, то уравнение

$$f_a(x) - \int_{-a}^{a} k(x-y) f_a(y)\, dy = g(x), \qquad -a < x < a, \tag{$*$}$$

при $a = \infty$ легко решаетя для $g \in \mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ при помощи преобразования Фурье. Правдоподобно, что при больших a решение f_∞ служит приближением к решению уравнения (*), однако отсутствие равномерной сходимости, казалось бы, исключает любые рассуждения, опирающиеся на теорему 3.6.3. Докажите тем не менее, что

$$\|f_a - f_\infty\|_{2,a} \leqslant (1 - \|k\|_1)^{-1} \|k\|_1 \left\{ \int\limits_{|x|>a} |f_\infty(x)|^2\, dx \right\}^{1/2},$$

где $\|\cdot\|_{2,\,a}$ — норма в $\mathscr{L}_2(-a, a)$.

3.18. Пусть $\mathbb{C}^2$ наделено нормой $\|\cdot\|_\infty$, и пусть L: $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ имеет матричное представление

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что $r_\sigma(L) = \lim \|L^n\|^{1/n}$.

3.19. Пусть $\mathbb{C}^3$ наделено нормой $\|\cdot\|_\infty$, и пусть L: $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ имеет матричное представление

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что $r_\sigma(L) = 3^{1/2}$, в то время как $\|L\| = 5$. Сравните этот результат с оценками, которые получаются по теореме 3.7.11: $\|L^2\|^{1/2} = 5^{1/2}$, $\|L^3\|^{1/3} = 13^{1/3}$, $\|L^4\|^{1/4} = 13^{1/4}$.

3.20. Пусть S_L: $l_2 \to l_2$ — оператор левого сдвига (задача 3.2). Покажите, что точечным спектром L является внутренность единичного круга, непрерывным спектром — граница этого круга, а остаточный спектр пуст.

3.21. Докажите теорему о спектральном отображении для многочленов (теорему 3.7.10).

3.22. Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$ — банахово пространство. Покажите, что $\|R(\lambda; L)\| \geqslant 1/d(\lambda)$, где $d(\lambda)$ — расстояние от λ до $\sigma(L)$

3.23. Если известно хорошее первое приближение, то может оказаться полезным следующее небольшое обобщение метода последовательных приближений. Пусть $M \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$ — банахово пространство, и $r_\sigma(M) < 1$. Покажите, что последовательность (f_n), где $f_n = g + Mf_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, сходится к решению уравнения $f - Mf = g$ при любом начальном приближении f_0.

3.24. Пусть $\mathscr{C}([0, a])$ наделено sup-нормой. Для непрерывной комплекснозначной функции k определим *интегральный оператор Вольтерры* K: $\mathscr{C}([0, a]) \to \mathscr{C}([0, a])$, полагая

$$Kf(x) = \int\limits_0^x k(x, y)\, f(y)\, dy.$$

Пусть $m(x) = \sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant x} |k(x, y)|$. Покажите, что

$$|K^n f(x)| \leqslant [x m(x)]^n \|f\|/n!, \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

Выведите отсюда, что $r_\sigma(K) = 0$. Следовательно, $\sigma(K)$ состоит из одной точки 0, и по теореме 3.7.11 ряд Неймана для интегрального уравнения Вольтерры $(\lambda I - K)f = g$ сходится при всех $\lambda \neq 0$.

3.25. Пусть $\mathscr{C}([-1, 1])$ наделено sup-нормой. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\lambda f(x) - \int_{-1}^{1} xyf(y)\,dy = g(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $g \in \mathscr{C}([-1, 1])$, и обозначим соответствующий интегральный оператор через K. Покажите, что при $\lambda \neq 0, 2/3$

$$R(\lambda;\ K)\,g(x) = \lambda^{-1}\left[g(x) + \frac{3\lambda}{3\lambda - 2}\int_{-1}^{1} xyg(y)\,dy\right].$$

Очевидно, что функция $R(\cdot;K)$ аналитична всюду, кроме точек $\lambda = 0,\ 2/3$, которые и составляют спектр K. По существу, это теоретико-операторный вариант классической теоремы Фредгольма; выражение $3xy/(3\lambda - 2)$ есть так называемое резольвентное ядро.

3.26. Пусть $M \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$ — банахово пространство, и пусть λ лежит вне некоторого выпуклого множества, содержащего $\sigma(M)$. Положим $\lambda I - M = \mu I - N$, где $\mu = \lambda - \alpha$, $N = M - \alpha I$. Покажите, что можно выбрать такое $\alpha \in \mathbb{C}$, что сходится модифицированный ряд Неймана $\sum(\mu^{-1}N)^n$. В терминах теории функций комплексной переменной новый ряд есть аналитическое продолжение в область $|\lambda| < r_\sigma(M)$, определяемое разложением по степеням $(M - \alpha I)/(\lambda - \alpha)$.

Этот метод (относящийся к методам верхней релаксации) иногда оказывается полезным для увеличения скорости сходимости ряда Неймана (по поводу его приложений см. задачу 7.15 и статью Хатсона, Кендалла и Мейлина [1972]). Кроме того, он показывает, что иногда модифицированным рядом Неймана можно пользоваться и при $|\lambda| < r_\sigma(M)$. Например, если спектр веществен (что имеет место для самосопряженных операторов — см. гл. 6), то годится любое λ с $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Во всех остальных задачах $\mathscr{H}$ есть гильбертово пространство, а L, M — линейные операторы из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$.

3.27. Пусть L замкнут. Докажите, что

(i) $L + A$ замкнут, если $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$;

(ii) нуль-пространство $N(L)$ оператора L замкнуто.

3.28. (i) $L \subset M$ тогда и только тогда, когда $G(L) \subset G(M)$. (ii) Всякое линейное подпространство графика само является графиком.

3.29. Покажите, что L замыкаем тогда и только тогда, когда $g = 0$ для всякой последовательности (f_n), такой что $f_n \in D(L)$, $f_n \to 0$ и $Lf_n \to g$.

3.30 (Рид и Саймон [1972]). Дадим пример незамыкаемого оператора. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Пусть e — какой-нибудь вектор из $\mathscr{H}$, не принадлежащий выпуклой оболочке векторов φ_n (обозначим ее $\mathscr{M}$). Определим $D(L)$ как прямую сумму $\mathscr{M}$ и одномерного подпространства $\{ae\colon a \in \mathbb{C}\}$ и для произвольного натурального N и любых $a, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ положим

$$L\left(ae + \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n\right) = ae.$$

Покажите, что $(0, e) \in \overline{G(L)}$, и выведите отсюда, что L не замыкаем.

3.31. Если $L\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ и $(Lf, g) = (f, Lg)$ при всех $f, g \in \mathscr{H}$, то L ограничен.

3.32. Дифференциальные операторы, отвечающие одному и тому же формальному оператору, могут обладать совершенно разными свойствами. Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(0, 1)$ и $l = id/dx$. Пусть $\mathscr{A}$ — множество абсолютно непрерывных функций с первыми производными в $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Положим

$$D(L_1) = \{f\colon f \in \mathscr{A}\}, \qquad L_1 f = lf, \quad f \in D(L_1),$$
$$D(L_2) = \{f\colon f \in \mathscr{A},\ f(0) = 0\}, \qquad L_2 f = lf, \quad f \in D(L_2).$$

Тогда $L_1 f = L_2 f$ при $f \in D(L_1) \cup D(L_2)$, а последнее множество плотно в $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Покажите, что, несмотря на это, $\sigma(L_1)$ — вся комплексная плоскость, а $\sigma(L_2)$ пуст (вычислите $R(\lambda; L_2)$).

3.33*. *Возмущения замкнутыми операторами* (ср. с теоремой 3.6.3). Оператор M назовем *L-ограниченным*, *если* $D(M) \supset D(L)$ и существуют неотрицательные постоянные a, b, такие что

$$\|Mf\| \leqslant a\|f\| + b\|Lf\|, \qquad f \in D(L).$$

Допустим, что L замкнут, а M является L-ограниченным с постоянной $b < 1$. Докажите, что

(i) $L + M$ замкнут;

(ii) если L имеет ограниченный обратный и $a\|L^{-1}\| + b < 1$, то $(L + M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и

$$\|(L + M)^{-1}\| \leqslant \|L^{-1}\|(1 - a\|L^{-1}\| - b)^{-1},$$
$$\|(L + M)^{-1} - L^{-1}\| \leqslant \|L^{-1}\|(a\|L^{-1}\| + b)(1 - a\|L^{-1}\| - b)^{-1}.$$

Результаты такого типа играют основную роль в теории возмущений для дифференциальных операторов (см. Като [1966, § 4.1]).

Глава 4

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

4.1. Введение

До сравнительно недавнего времени теория нелинейных уравнений представляла собой по сути дела набор разрозненных результатов, касающихся отдельных задач. Однако за последние годы были достигнуты большие успехи, и сейчас в нашем распоряжении имеются довольно общие результаты о нескольких широких классах уравнений. Важную роль в этом процессе сыграл функциональный анализ. Пожалуй, именно здесь вклад функционально-аналитических методов в приложения оказался наиболее ценным. В этой и последующих главах мы кратко опишем самые полезные для приложений разделы теории нелинейных операторов.

При изучении линейных операторов в банаховых пространствах большую помощь при отыскании плодотворных путей исследования оказывают весьма содержательные общие принципы, известные для конечномерного случая. Почти все трудности связаны здесь исключительно с переходом от конечного числа измерений к бесконечному и потому носят, по существу, аналитический характер. В случае нелинейных операторов тоже естественно обратиться сначала к конечномерным аналогиям. Однако конечномерные нелинейные задачи часто и сами очень сложны. Изучением таких задач активно занимаются и в настоящее время, причем многие из основных результатов в этой области получены лишь недавно; стандартное руководство по конечномерным нелинейным задачам — книга Ортеги и Рейнболдта [1970]. Теорию нелинейных операторов в конечномерном случае можно классифицировать как геометрическую теорию, ибо в ней исследуют „форму" функций. Поэтому можно сказать, что теория нелинейных операторов в банаховых пространствах состоит из геометрической и аналитической частей и что геометрическая часть играет более заметную роль, чем в линейной теории.

При отыскании методов решения нелинейных операторных уравнений обычно действуют следующим образом. Вначале на основе геометрической интуиции предлагается какой-нибудь подходящий метод для пространств малой размерности. При этом нужно убедиться, что соответствующая процедура имеет смысл и в банаховых пространствах. Отметим, что идейные трудности даже при работе с функциями из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ столь велики, что часто лучше обратиться сначала к одномерному случаю. Затем делается попытка проверить, пригоден ли найденный метод для произвольного конечномерного пространства. И наконец нужно сделать аналитический шаг от конечной размерности к бесконечной, на этом этапе иногда помогает линейная теория.

Исходя из нужд приложений, естественно прежде всего искать общие конструктивные методы решения, включающие в себя численные методы, основанные на итерациях. Наверное, можно сказать, что для почти всех типов линейных уравнений конструктивные методы известны, однако для нелинейных уравнений положение гораздо хуже. Для определенных классов уравнений действительно имеются очень эффективные конструктивные методы. Однако для многих возникающих на практике уравнений таких методов нет, и часто приходится опираться лишь на качественные соображения, связанные с вопросами существования, единственности, устойчивости и т. п., которые позволяют тем не менее получить достаточно полное представление о поведении системы. Исследование подобных соображений составляет заметную часть нелинейной теории.

Изложение теории нелинейных операторов начинается в следующем параграфе с описания некоторых типичных задач для дифференциальных и интегральных уравнений; затем приводится их унифицированная формулировка в терминах „неподвижных точек" оператора. В остальной части главы изучаются простейшие результаты теории. Здесь не привлекается никаких более глубоких аналитических понятий, чем полнота банахова пространства, и по уровню трудности эта глава сравнима с предыдущей. Обсуждаются два родственных метода, обобщающие известные алгоритмы решения уравнений в одномерном случае. Первый основан на идее последовательных приближений исходя из правдоподобного первого приближения. Эта процедура с успехом применялась в гл. 3 для линейных операторов. Она приводит к знаменитому принципу сжимающих отображений (или теореме Банаха о неподвижной точке). Второй метод представляет собой бесконечномерный вариант алгоритма Ньютона. Для его описания нужно разработать подходящее определение „производной" оператора. Этим объясняется введение в § 4.4 производной Фреше.

Обоими указанными методами можно пользоваться для установления существования и единственности решений, и оба они конструктивны. Поэтому в случаях, когда они применимы, можно получить сколь угодно полные ответы на все интересующие нас вопросы. При этом выводы, к которым мы придем, очень напоминают полученные в § 3.6 для уравнения $(I-L)f=g$, где $\|L\|<1$. Таким образом, теория этой главы в некотором смысле параллельна изложенной выше линейной теории. Как и там, на оператор налагаются сильные ограничения; обсуждение более тонких методов нам придется отложить до того, как будут введены дальнейшие понятия теории банаховых пространств.

Что касается ссылок, то здесь положение хуже, чем для линейных операторов, ибо ни одного исчерпывающего руководства по нелинейной теории не существует. Пожалуй, ближе всего подходят к полному изложению взятые вместе три книги Красносельского [1956, 1962, 1969] [1], дополненные книгой Бергера [1977], где описаны некоторые недавние достижения в этой области. Полезны также Смарт [1974], где дается краткий обзор теорем о неподвижной точке, Крейн [1972] и Красносельский [1954], содержащие очерк многих важных направлений теории без особых технических подробностей, и Саати [1967], где главное место отведено приложениям. По поводу содержания этой главы см. Ролл [1969] и Красносельский и др. [1969].

4.2. Предварительные сведения

В этом параграфе приводятся некоторые вводные замечания, касающиеся формулировки нелинейных задач, наиболее удобной с точки зрения абстрактной теории операторов. Прежде чем переходить к общим рассмотрениям, полезно знать некоторые наводящие конкретные примеры, поэтому мы начнем с описания нескольких типичных задач, включающих дифференциальные и интегральные уравнения.

4.2.1. Пример. Важную роль в приложениях играет задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эту задачу можно записать в виде

$$\begin{aligned} &f'(t) = \psi[t, f(t)], \qquad t \geqslant 0, \\ &f(0) = \alpha, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

где f принимает значения в $\mathbb{C}^n$ и ψ: $[0, \infty) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$; ищется решение с непрерывной первой производной. Путем интегрирования (4.2.1) приводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерры

$$f(t) = \alpha + \int_0^t \psi[s, f(s)]\, ds. \tag{4.2.2}$$

Если ψ непрерывна и $f \in \mathscr{C}([0, t_0], \mathbb{C}^n)$ — решение (4.2.2), то правая часть (4.2.2) имеет непрерывную первую производную. Следовательно, $f \in \mathscr{C}^1([0, t_0], \mathbb{C}^n)$ и дифференцированием можно

[1] Последняя написана М. А. Красносельским вместе с рядом соавторов, см. список литературы. — *Прим. перев.*

вернуться к (4.2.1). Итак, (4.2.1) и (4.2.2) эквивалентны, но с (4.2.2) иногда легче работать.

4.2.2. Пример. Не менее важную роль играет и граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения или уравнения в частных производных. Она тоже часто сводится к интегральному уравнению (при помощи функции Грина), с которым иногда опять проще иметь дело. Сравнительно простой пример дает задача

$$\begin{aligned} -f''(x)+\omega f(x)&=\psi[x, f(x)], \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ f(0)=f(1)&=0, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

где ψ: $[0,1]\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ непрерывна, а от решения требуется принадлежность к $\mathscr{C}^2([0,1])$. Если $\omega>-\pi^2$, то эту задачу можно переписать в виде интегрального уравнения

$$f(x)=\int_0^1 k(x, y)\,\psi[y, f(y)]\,dy. \tag{4.2.4}$$

Здесь k — функция Грина, которую можно найти в явном виде. Например, в простейшем случае $\omega=0$

$$k(x, y)=\begin{cases} y(1-x) & \text{при} \quad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1, \\ x(1-y) & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

В общем случае функция k, отвечающая любому $\omega>-\pi^2$, непрерывна на $[0,1]\times[0,1]$ и неотрицательна.

4.2.3. Пример. Уравнение

$$f(x)=\int_\Omega k(x, y, f(y))\,dy+g(x) \tag{4.2.6}$$

с заданными k и g, где Ω — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$, известно как *интегральное уравнение Урысона.* Его частным случаем, изучением которого много занимались, является *интегральное уравнение Гаммерштейна*

$$f(x)=\int_\Omega k(x, y)\,\psi[y, f(y)]\,dy. \tag{4.2.7}$$

Важность этих уравнений в немалой степени объясняется тем, что они охватывают как частные случаи и те интегральные уравнения, которые получились в двух предыдущих примерах.

4.2.4. Пример. Еще один тип задач заслуживает специального упоминания. Рассмотрим следующее интегральное уравнение с параметром μ:

$$f(x)=\mu\int_0^1 k(x, y)\,[f(y)]^2\,dy.$$

Очевидно, что нуль является решением при всех μ, но практический интерес представляют те значения μ, при которых существует ненулевое решение. По аналогии с линейным случаем эту задачу можно назвать задачей на собственные функции; при этом μ называют *характеристическим значением* (оно обратно собственному значению). Такие уравнения весьма важны для приложений, однако их рассмотрение представляет особые математические трудности, связанные с наличием тривиального нулевого решения. Кроме того, между линейной и нелинейной задачами на собственные функции имеются существенные качественные различия. Некоторые методы, разработанные для таких задач, описаны в гл. 14.

Теперь покажем, как можно сформулировать приведенные выше примеры в виде задач теории операторов. Рассмотрим (4.2.6) и определим сначала формально

$$Af(x)=\int\limits_{\Omega} k(x,\ y,\ f(y))\,dy+g(x),\quad x\in\Omega.$$

Тогда (4.2.6) примет вид

$$f=Af. \tag{4.2.8}$$

4.2.5. Определение. Точка $\bar{f}$ называется **неподвижной точкой** оператора A, если $\bar{f}=A\bar{f}$.

Итак, утверждение, что A имеет неподвижную точку, — это просто сформулированное другим способом утверждение, что $f=Af$ имеет решение. Преимущество новой формулировки в том, что она наглядно выражает геометрическую суть дела: всякая неподвижная точка остается на месте при действии оператора A. Эта точка зрения ярко подчеркнута в интересной статье Шинброта [1969]. В текущей литературе по теории нелинейных операторов такая формулировка широко принята, и многие результаты появляются в виде теорем о неподвижных точках.

Следующий простой пример позволит осветить некоторые характерные черты нелинейных задач, влияющие на построение теории нелинейных операторов.

4.2.6. Пример. Уравнение Гаммерштейна

$$f(x)=\int\limits_0^1 \psi[f(y)]\,dy+a \tag{4.2.9}$$

(с вещественным a и непрерывной ψ) можно записать в виде $f=Af$, где A определен формально соотношением

$$Af(x)=\int\limits_0^1 \psi[f(y)]\,dy+a.$$

Чтобы уточнить определение A, нужно прежде всего выбрать подходящее банахово пространство. Если в случае линейных уравнений обычно имеется много разных возможностей, то здесь следует проявить большую осторожность. Так, если $\psi(z)=z^2$, то A нельзя определить на $\mathscr{L}_p(0,1)$ при $1\leqslant p<2$, поскольку функция $[f(\cdot)]^2$ не будет интегрируемой для всех f из такого пространства; если же $\psi[z]=\exp(z)$, то не подходит вообще никакое конечное значение p. Таким образом, пространство $\mathscr{L}_p$ в данном случае — далеко не идеальный выбор, но если все же приходится идти на него, то нужно принимать специальные меры предосторожности, с учетом скорости роста ψ. Эта трудность исчезает при переходе к $\mathscr{C}([0,1])$, и, когда это допустимо, с этим пространством работать легче.

Второе замечание касается алгебраической структуры оператора A. В противоположность линейному случаю теперь не имеет смысла определять A так, чтобы он обращался в нуль в начале, и исследовать уравнение $f=Af+g$. Поэтому в нелинейной теории, вообще говоря, $A0\neq 0$.

Чтобы проиллюстрировать третью особенность нелинейных задач, допустим, что $\psi[z]=|z|^2/2$. При малых a можно еще ожидать, что метод последовательных приближений приведет к успеху, поскольку вклад от соответствующего интеграла будет меньше, чем в линейном случае $\psi[z]=z/2$. Однако при больших a из-за нелинейности итерации быстро растут и сходимости ожидать не приходится — и, действительно, уравнение может не иметь решения (см. задачу 4.2). При исследовании такого уравнения естественно учитывать, какая область банахова пространства представляет интерес для рассматриваемой задачи, и, как правило, следует ограничиться поисками решения в каком-то ограниченном подмножестве (часто — некотором замкнутом шаре) выбранного пространства, даже если оператор допускает удобное определение во всем пространстве.

Итак, абстрактная постановка для изучения нелинейных задач такова. Рассматриваются банаховы пространства $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ и оператор A: $D\to\mathscr{C}$, где D — некоторое заданное подмножество $\mathscr{B}$. В случае задачи о неподвижной точке, конечно, $\mathscr{B}=\mathscr{C}$. Ясно, что даже в одномерном случае трудно продвинуться дальше без предположения о непрерывности оператора A, и всюду в дальнейшем на A налагается это требование. Можно ввести и понятие ограниченности, например потребовав, чтобы

$$\sup_{f\in D}\|Af\|<\infty, \tag{4.2.10}$$

но в противоположность линейному случаю теперь ограниченность и непрерывность не эквивалентны (даже в размерности 1). Из двух этих понятий непрерывность гораздо важнее. Условия непрерывности интегральных операторов можно найти у Красносельского [1956] или Забрейко и др. [1968]. Для дальнейших ссылок приведем следующие леммы:

4.2.7. Лемма. *Пусть* $r < \infty$ *и* d_r — *круг* $\{z\colon z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant r\}$. *Предположим, что* $[a, b]$ — *конечный отрезок. Если функция* k: $[a, b] \times [a, b] \times d_r \to \mathbb{C}$ *непрерывна, то оператор Урысона* A: $D \to \mathscr{C}([a, b])$, *определенный формулой*

$$Af(x) = \int_a^b k(x, y, f(y))\, dy,$$

непрерывен; здесь D — *замкнутый шар* $\bar{S}(0, r)$ *в* $\mathscr{C}([a, b])$ *с* sup-*нормой.*

4.2.8. Лемма. *Пусть* $[a, b]$ — *конечный отрезок и* k: $[a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$, ψ: $[a, b] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — *непрерывные функции. Предположим, что существуют вещественные числа* $p \geqslant 1$ *и* α, β, *такие что*

$$|\psi[x, z]| \leqslant \alpha + \beta |z|^p, \quad x \in [a, b],\ z \in \mathbb{C}.$$

Тогда оператор Гаммерштейна A, *определенный формулой*

$$Af(x) = \int_a^b k(x, y)\, \psi[y, f(y)]\, dy,$$

непрерывно отображает $\mathscr{L}_p(a, b)$ *в себя.*

Иногда находит применение и понятие обратного оператора, хотя оно и не так полезно, как в линейном случае.

4.2.9. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и D — подмножество в $\mathscr{B}$. Пусть A: $D \to \mathscr{C}$ инъективен. Оператор A^{-1}: $R(A) \to D$ называется **обратным** к A, если он переводит каждый элемент $g \in R(A)$ в его (единственный) прообраз, т. е. в единственное решение уравнения $Af = g$.

Говорят, что A осуществляет **гомеоморфизм** между $D_0 \subset D$ и $R_0 \subset R(A)$, если A: $D_0 \to R_0$ биективен и A: $D_0 \to R_0$, A^{-1}: $R_0 \to D_0$ непрерывны.

Очевидно, что каждый из приведенных выше примеров можно сформулировать (при разумных условиях на заданные функции) как задачу поиска неподвижных точек непрерывного оператора A: $D \to \mathscr{B}$, где D — соответствующее подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$, в качестве которого часто оказывается удобным выбирать $\mathscr{C}(\Omega)$. В следующем параграфе мы приведем простейшие теоремы о неподвижных точках.

4.3. Принцип сжимающих отображений

Самым простым методом приближенного вычисления корней многочленов является, пожалуй, метод последовательных приближений; во всяком случае, он почти наверняка самый старый — его история насчитывает более двух тысячелетий. В существенно бесконечномерном случае первым его применил Лиувилль, который решал с его помощью задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Первый абстрактный результат в этой области принадлежит Банаху (1922 г.) и известен под названием „принцип сжимающих отображений“ или „теорема Банаха о неподвижной точке“. Поскольку этот результат конструктивен, он

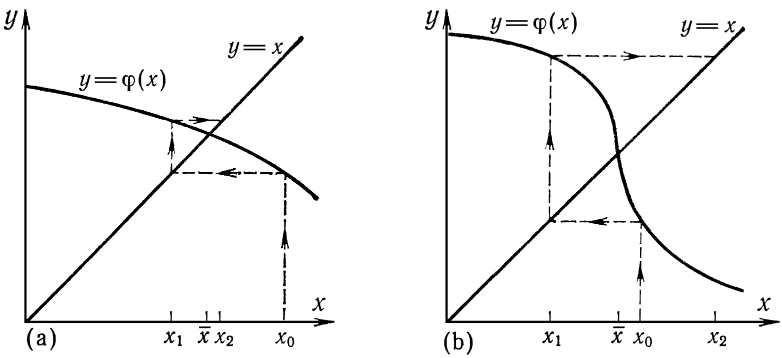

Рис. 4.1.

оказался очень полезным для приложений, и мы начнем изложение нелинейной теории сравнительно подробным исследованием соответствующей процедуры, ее обобщений и приложений.

Рассмотрим прежде всего одномерный пример: пусть $D = [0, 1]$ и φ: $D \to \mathbb{R}$ непрерывна. Посмотрев на график φ, можно сразу понять, что если φ отображает D в себя, то A заведомо имеет в D неподвижную точку; если же это условие нарушено, то неподвижных точек может и не быть. Гарантирует ли это условие существование неподвижной точки в случае большего числа измерений, совсем не ясно. К этому вопросу мы вернемся в гл. 8, а здесь пойдем по другому пути. Предположим, что $\varphi(D) \subset D$, и посмотрим, как найти неподвижную точку последовательными приближениями. Определим последовательность (x_n), взяв $x_0 \in D$ и положив $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ для $n \geqslant 0$. Если график φ таков, как на рис. 4.1, (a), то последовательность сходится к неподвижной точке при любом начальном приближении, а если таков, как на рис. 4.1, (b), то последовательность расходится (если только сама начальная точка x_0 не является неподвижной). Мы замечаем, что в первом случае $|\psi'(x)| < 1$ на D, и дальнейшие

„эксперименты“ с графиками убеждают, что это условие достаточно для обеспечения сходимости. На самом деле, как нетрудно понять, необязательно, чтобы φ была дифференцируемой, достаточно наложить некоторое условие на ее рост. Несколько более слабое условие, чем дифференцируемость, таково: существует число $q < 1$, для которого

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant q|x - y|, \quad x, \ y \in D. \tag{4.3.1}$$

По очевидным причинам такую функцию называют ***сжимающей.*** Разумеется, если φ дифференцируема, то в качестве q можно взять

$$q = \sup_{x \in D} |\varphi'(x)|. \tag{4.3.2}$$

Итак, мы приходим к следующей формулировке принципа сжимающих отображений, которая имеет смысл и в общем банаховом пространстве: *если D замкнуто и φ: $D \to D$ — сжимающее отображение, то φ имеет единственную неподвижную точку $\bar{x}$ в D, причем $\bar{x} = \lim x_n$.*

Попытаемся оценить перспективу справедливости этого принципа в произвольном банаховом пространстве. Как показывает исследование аналогичной линейной задачи, аналитические трудности не будут непреодолимыми. В самом деле, возьмем $D = \mathscr{B}$ и предположим, что $Af = Lf + h$ для $f \in \mathscr{B}$, где $h \in \mathscr{B}$ и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Тогда

$$\| Af - Ag \| = \| Lf - Lg \| \leqslant \| L \| \| f - g \|, \quad f, \ g \in D,$$

и если $\| L \| < 1$, то выполнен аналог (4.3.1). С другой стороны, известно (следствие 3.6.2), что если $\| L \| < 1$, то уравнение $f = Lf + h (= Af)$ имеет единственное решение, которое получается последовательными приближениями. Это и есть приведенное выше утверждение.

Итак, принцип сжимающих отображений подкрепляется эвристическими соображениями. Строгий анализ, который мы далее проведем, окончательно установит его справедливость. Начнем с нескольких определений, последнее из которых обобщает (4.3.1). Всюду в дальнейшем D — подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$ и A отображает D в $\mathscr{B}$.

4.3.1. Определение. Говорят, что A удовлетворяет **условию Липшица** на D с **константой (Липшица)** q, если существует такое $q < \infty$, что

$$\| Af - Ag \| \leqslant q \| f - g \|, \quad f, \ g \in D.$$

В одномерном случае функция, удовлетворяющая условию Липшица, абсолютно непрерывна и, следовательно, почти всюду дифференцируема. В случае неограниченной области D удобно пользоваться следующей терминологией.

4.3.2. Определение. Будем говорить, что A удовлетворяет **локальному условию Липшица,** если для каждого ограниченного $S \subset D$ оператор A удовлетворяет условию Липшица на S с константой q_S (которая может зависеть от S).

4.3.3. Определение. Оператор A, удовлетворяющий условию Липшица с константой $q < 1$, называется **сжимающим** (или **сжатием**).

4.3.4. Принцип сжимающих отображений. *Предположим, что A отображает замкнутое подмножество D банахова пространства $\mathcal{B}$ в D и является сжимающим. Тогда A имеет в D единственную неподвижную точку, скажем $\bar{f}$. Далее, при любом начальном значении $f_0 \in D$ последовательные приближения $f_{n+1} = Af_n$ $(n \geqslant 0)$ сходятся к $\bar{f}$, и справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\|\bar{f} - f_n\| \leqslant q^n (1-q)^{-1} \|Af_0 - f_0\|. \tag{4.3.3}$$

Доказательство. Поскольку A — сжимающий оператор, то

$$\|f_n - f_{n+1}\| = \|Af_{n-1} - Af_n\| \leqslant q \|f_{n-1} - f_n\|,$$

и из леммы 1.4.3 следует, что при $n > m$

$$\|f_m - f_n\| \leqslant q^n (1-q)^{-1} \|Af_0 - f_0\|.$$

Этим доказано, что (f_n) — последовательность Коши. Так как D замкнуто и $(f_n) \subset D$, последовательность (f_n) сходится в D к некоторому $\bar{f}$. В силу непрерывности A, $A\bar{f} = \lim Af_n = \lim f_{n+1} = \bar{f}$, т. е. $\bar{f}$ — неподвижная точка. Чтобы доказать единственность, допустим, что $\bar{g}$ — другая неподвижная точка A. Тогда

$$\|\bar{f} - \bar{g}\| = \|A\bar{f} - A\bar{g}\| \leqslant q \|\bar{f} - \bar{g}\|.$$

Поскольку $q < 1$, это означает, что $\bar{f} = \bar{g}$.

4.3.5. Следствие. *Пусть f_0 — некоторая точка $\mathcal{B}$. Предположим, что A — сжимающее отображение с константой Липшица q на $\bar{S}(f_0, r)$, где*

$$r \geqslant (1-q)^{-1} \|Af_0 - f_0\|.$$

Тогда A имеет в $\bar{S}(f_0, r)$ единственную неподвижную точку $\bar{f}$, и $\bar{f}$ есть предел последовательности (f_n), указанной в теореме. Кроме того, справедлива оценка (4.3.3).

Доказательство. Для $f \in \bar{S}(f_0, r)$

$$\|Af - f_0\| \leqslant \|Af - Af_0\| + \|Af_0 - f_0\| \leqslant q\|f - f_0\| + (1-q)r.$$

Так как $\|f - f_0\| \leqslant r$, отсюда видно, что $A(\bar{S}(f_0, r)) \subset \bar{S}(f_0, r)$, и утверждаемый результат вытекает из принципа сжимающих отображений. □

Этот частный случай принципа сжимающих отображений широко применяется, потому что в качестве D обычно удобнее всего выбирать некоторый замкнутый шар. Следующий результат, который полезно сравнить с теоремой 3.6.3 для линейного случая, показывает, что неподвижные точки устойчивы относительно непрерывных возмущений оператора.

4.3.6. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства. Возьмем замкнутое $D \subset \mathscr{B}$ и произвольное $E \subset \mathscr{C}$ и допустим, что отображение A: $D \times E \to D$ непрерывно. Предположим, что существует такое $q < 1$, что при каждом $g \in E$ оператор $A(\cdot, g)$ сжимающий с константой Липшица q. Для всякого $g \in E$ пусть $\bar{f}(g)$ — единственная неподвижная точка $A(\cdot, g)$. Тогда функция $\bar{f}(\cdot)$ непрерывна, т. е. $\lim_{g \to g_0} \bar{f}(g) = \bar{f}(g_0)$ при любом $g_0 \in E$.*

Доказательство. Существование и единственность $\bar{f}$ следуют, конечно, из принципа сжимающих отображений. Чтобы доказать непрерывность, выберем произвольную точку $g \in E$. Имеем

$$\begin{aligned}\|\bar{f}(g) - \bar{f}(g_0)\| &= \|A(\bar{f}(g), g) - A(\bar{f}(g_0), g_0)\| \\ &\leqslant \|A(\bar{f}(g), g) - A(\bar{f}(g_0), g)\| + \|A(\bar{f}(g_0), g) - A(\bar{f}(g_0), g_0)\| \\ &\leqslant g\|\bar{f}(g) - \bar{f}(g_0)\| + \|A(\bar{f}(g_0), g) - A(\bar{f}(g_0), g_0)\|,\end{aligned}$$

откуда

$$\|\bar{f}(g) - \bar{f}(g_0)\| \leqslant (1-q)^{-1}\|A(\bar{f}(g_0), g) - A(\bar{f}(g_0), g_0)\|.$$

В силу непрерывности A правая часть стремится к нулю при $g \to g_0$, и, следовательно, $\bar{f}(g) \to \bar{f}(g_0)$. □

При применении принципа сжимающих отображений иногда оператор естественно задать на всём пространстве $\mathscr{B}$, а затем искать подходящее подмножество $D \subset \mathscr{B}$. Важность правильного выбора D показывает следующий простой пример:

4.3.7. Пример. Рассмотрим функцию φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, график которой изображен на рис. 4.2. Ясно, что φ отображает отрезок $D = [0, 1]$ в себя и является на нем сжатием. Можно заключить, что A имеет в D единственную неподвижную точку. Однако в $\mathbb{R}$ есть и другие неподвижные точки — единственность гарантируется только в D.

С другой стороны, если в качестве D выбрать, скажем, $[0, 2]$, то неподвижных точек окажется две, и, значит, условия теоремы 4.3.4 заведомо нарушены.

Заметим, наконец, что метод последовательных приближений может приводить к успеху и тогда, когда условия принципа сжимающих отображений не выполнены. Например, при $D = [0, 3]$ итерации будут сходиться к наименьшей и наибольшей неподвижным точкам, если взять соответственно $x_0 = 0$, $x_0 = 3$.

При попытках практического применения принципа сжимающих отображений быстро выясняется, что условие сжатия слишком ограничительно. Поэтому важно отметить, что известно много

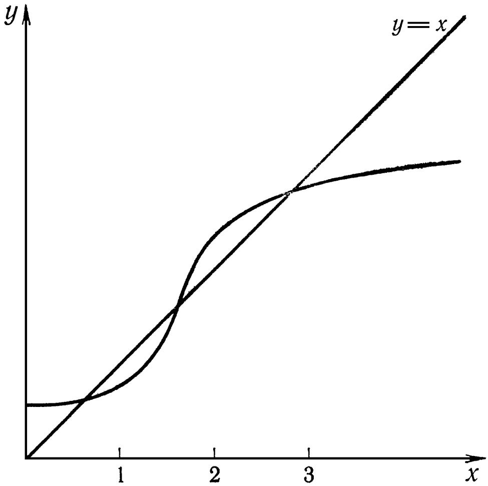

Рис. 4.2.

способов расширить область применимости этого принципа. По существу, имеются три главных направления. Первое сводится к перестройке уравнения; оно иллюстрируется задачами 4.8—4.11. Второе основано на использовании эквивалентной нормы; см. задачу 4.14. Наконец, может случиться, что оператор A не сжимающий, а A^n сжимающий. Это важное замечание мотивирует теорему 4.3.10 ниже.

В качестве типичного применения принципа сжимающих отображений рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f'(t) &= \psi[t, f(t)], \quad t \geqslant 0, \\ f(0) &= \alpha; \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

ищется решение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ с непрерывной первой производной. Эту систему можно переписать в виде $f = Af$, где

$$Af(t) = \alpha + \int_0^t \psi[s, f(s)]\, ds. \tag{4.3.5}$$

Прежде чем говорить о выборе подходящих условий на ψ, рассмотрим следующие примеры.

4.3.8. Пример. В одномерном случае уравнение

$$f'(t) = 2[f(t)]^{1/2}, \quad t \geqslant 0,$$

с начальным условием $f(0) = 0$ имеет решение $f(t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant a$, $f(t) = (t - a)^2$, $t > a$, при каждом $a \geqslant 0$. Таким образом, на любом отрезке $[0, t_0]$ решений бесконечно много.

4.3.9. Пример. Снова в одномерном случае рассмотрим уравнение

$$f'(t) = 1 + [f(t)]^2, \quad t \geqslant 0,$$

с тем же начальным условием $f(0) = 0$. На интервале $[0, \pi/2)$ оно имеет единственное решение $f(t) = \operatorname{tg} t$. Но при $t = \pi/2$ тангенс становится бесконечным, поэтому не существует гладких решений на $[0, t_0]$ при $t_0 \geqslant \pi/2$.

Ясно, что применение принципа сжимающих отображений в примерах такого типа встретит определенные трудности. В первом, ввиду нарушения единственности, вообще не приходится ожидать, что принцип применим в $\mathscr{C}([0, t_0])$ хоть при каком-нибудь t_0. Во втором нарушено условие глобального существования решения (т. е. при любом $t_0 > 0$) и в лучшем случае можно надеяться лишь на какой-нибудь локальный результат при некоторых $t_0 < \pi/2$. Таким образом, одной лишь непрерывности ψ недостаточно ни для глобального существования, ни для единственности. Ограничение на рост ψ, которое мы далее вводим, исключает обе эти неприятные возможности.

Предположим, что ψ: $[0, \infty] \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ непрерывна и удовлетворяет следующему условию Липшица: существуют $t_0 > 0$ и m, такие что

$$|\psi(t, z_1) - \psi(t, z_2)| \leqslant m |z_1 - z_2| \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n.$$

Будем рассматривать пространство $\mathscr{C}([0, t_0], \mathbb{C}^n)$ с sup-нормой. По интегральной теореме о среднем имеем $\|Af - Ag\| \leqslant mt_0 \|f - g\|$. Если $mt_0 < 1$, то выполнено условие сжатия, из которого сразу следует существование. Если $mt_0 \geqslant 1$, то рассуждения можно видоизменить так, чтобы они имели силу на $\mathscr{C}([0, t_1], \mathbb{C}^n)$ для некоторого (меньшего) t_1. Однако получится лишь локальный результат. На самом деле можно получить гораздо более сильное заключение.

Указанием, как нужно поступать, служит наблюдение, что если функция $\psi[t, z]$ линейна по z, то A — линейный оператор Вольтерры, и его итерации A^n ведут себя лучше, чем он сам (задача 3.24). С тем чтобы использовать преимущества подобного поведения в нелинейном случае, выведем следующее обобщение принципа сжимающих отображений:

4.3.10. Теорема (Каччополи). *Пусть f_0 — заданная точка банахова пространства $\mathscr{B}$ и $D=S(f_0, r)$. Пусть $A\colon \mathscr{B}\to\mathscr{B}$. Положим $q_0=1$ и*

$$q_n=\sup_{\substack{f,\, g\in D\\ f\neq g}}\frac{\|A^nf-A^ng\|}{\|f-g\|},\quad n\geqslant 1.$$

Предположим, что ряд $\sum\limits_0^\infty q_n$ сходится, и пусть ρ — его сумма. Тогда если $r\geqslant\rho\|Af_0-f_0\|$, то A имеет в D единственную неподвижную точку $\bar f$ и $\bar f=\lim f_n$, где $f_n=Af_{n-1}$ при $n\geqslant 1$. Кроме того,

$$\|f_n-\bar f\|\leqslant\left(\rho-\sum_0^{n-1}q_k\right)\|Af_0-f_0\|.$$

Доказательство. Имеем

$$\|f_{n+1}-f_n\|=\|A^nf_1-A^nf_0\|\leqslant q_n\|f_1-f_0\|=q_n\|Af_0-f_0\|.$$

Прямое вычисление показывает, что при $n>m$

$$\|f_n-f_m\|\leqslant\|f_1-f_0\|\sum_m^{n-1}q_k. \tag{4.3.6}$$

Так как ряд $\sum\limits_0^\infty q_k$ сходится, то (f_n) — последовательность Коши. Значит, она сходится к некоторому пределу $\bar f$. Полагая $m=0$ в (4.3.6), получаем

$$\|f_n-f_0\|\leqslant\|f_1-f_0\|\sum_0^{n-1}q_k\leqslant\|f_1-f_0\|\rho\leqslant r.$$

Следовательно, (f_n) лежит в $\bar S(f_0, r)$, а поскольку это — замкнутое множество, $\bar f\in\bar S(f_0, r)$. Но A непрерывен, значит, $\bar f$ — неподвижная точка. Указанная оценка сходимости получается из (4.3.6) при $n\to\infty$. Что касается единственности, то пусть $\bar f$, $\bar g$ — неподвижные точки A; тогда

$$\|\bar f-\bar g\|=\|A^n\bar f-A^n\bar g\|\leqslant q_n\|\bar f-\bar g\|,$$

и так как $q_n\to 0$ при $n\to\infty$, то $\bar f=\bar g$. □

4.3.11. Теорема (Пикар). *Пусть функция ψ: $[0, t_0]\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ непрерывна и удовлетворяет следующему условию Липшица:*

$$|\psi(t, z_1)-\psi(t, z_2)|\leqslant m|z_1-z_2|, \tag{4.3.7}$$
$$0\leqslant t\leqslant t_0,\quad z_1, z_2\in\mathbb{C}^n.$$

Тогда система (4.3.4) *имеет единственное решение* $\bar{f}$ *в* $\mathscr{C}^1([0, t_0], \mathbb{C}^n)$. *При этом* $\bar{f}$ *есть предел по* sup-*норме последовательности* (f_n), *где* $f_0 = \alpha$ *и*

$$f_n(t) = \alpha + \int_0^t \psi[s, f_{n-1}(s)]\, ds, \quad n \geqslant 1.$$

Кроме того,

$$\| f - \alpha \| \leqslant e^{mt_0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \left| \int_0^t \psi[s, \alpha]\, ds \right|.$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathscr{C}([0, t_0], \mathbb{C}^n)$, наделенное sup-нормой, и определим оператор A, отображающий это пространство в себя, формулой (4.3.5). Если мы сумеем доказать, что A имеет единственную неподвижную точку в $\mathscr{C}([0, t_0], \mathbb{C}^n)$, то доказываемое утверждение получится отсюда дифференцированием. Применим предыдущую теорему. Оценку для q_n получим из неравенства

$$| A^n f(t) - A^n g(t) | \leqslant \frac{(mt)^n}{n!} \| f - g \|, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{4.3.8}$$

которое устанавливается следующим образом. При $n = 1$ оно очевидно. Если оно справедливо при некотором $n \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned} | A^{n+1} f(t) - A^{n+1} g(t) | &\leqslant \int_0^t | \psi[s, A^n f(s)] - \psi[s, A^n g(s)] |\, ds \\ &\leqslant m \int_0^t | A^n f(s) - A^n g(s) |\, ds \quad \text{(по (4.3.7))} \\ &\leqslant m \| f - g \| \int_0^t \frac{(ms)^n}{n!}\, ds \qquad \text{(по предположению)} \\ &= \frac{(mt)^{n+1}}{(n+1)!} \| f - g \|. \end{aligned}$$

Отсюда по индукции следует (4.3.8). Таким образом, $q_n \leqslant (mt_0)^n / n!$ и

$$\rho \leqslant \sum_0^\infty \frac{(mt_0)^n}{n!} = e^{mt_0}.$$

Указанная оценка решения получается, если выбрать $r = \rho \| Af_0 - f_0 \|$. □

Ясно, что для справедливости глобального результата о существовании и единственности типа доказанного выше функция ψ

должна удовлетворять какому-то очень сильному условию. Естественно, большой интерес вызывает исследование уравнения при более слабых ограничениях на ψ. Не делая никаких попыток привести обзор обширной литературы на эту тему (см. Флетт [1979]), мы только отметим два имеющихся здесь стандартных типа результатов. В первых (задача 4.15) выполнено локальное условие Липшица, как в примере 4.3.9, и при помощи принципа сжимающих отображений удается доказать локальное существование решения. Во вторых предполагается только непрерывность ψ, как в примере 4.3.8. В этом случае принцип сжимающих отображений неприменим, однако, как будет показано ниже (пример 8.2.6), локальное существование решения следует из другой теоремы о неподвижной точке.

В общем принцип сжимающих отображений — самый легкий из имеющих практическое значение результатов теории нелинейных операторов, и его можно рассматривать как аналог теоремы о ряде Неймана для ограниченных линейных операторов (следствие 3.6.2). Его достоинство в том, что он прост в применении, гарантирует единственность и конструктивен, позволяет оценить максимальную погрешность каждой итерации. Однако за эти приятные свойства приходится расплачиваться тем, что сходимость часто оказывается медленной, а условия на оператор — слишком ограничительными,— и тут не помогают никакие уловки, придуманные для того, чтобы расширить область применимости принципа. В § 8.3 будут выведены другие условия, гарантирующие сходимость метода последовательных приближений.

Принципу сжимающих отображений посвящена обширная литература. С точки зрения приложений можно рекомендовать книги Ролла [1969] и Красносельского и др. [1969]. Хольцман [1970] применил принцип сжимающих отображений к задачам, возникающим в теории нелинейных колебаний, и провел интересное исследование возможностей и недостатков этого метода.

4.4. Производная Фреше

Интуитивной предпосылкой метода последовательных приближений послужила простая геометрическая конструкция для получения неподвижной точки функции φ одной переменной. Преимущество этого метода в том, что на φ не налагается никаких условий дифференцируемости. Однако если φ дифференцируема, то с помощью могучих средств дифференциального исчисления можно установить разнообразные более тонкие результаты. Поэтому естественно задаться вопросом: не применим ли аналогичный подход к нелинейным операторам в банаховых пространствах? Ясно, что первая забота — ввести подходящее понятие производной. Имеется целый ряд возможностей, но самым простым и полезным оказалось понятие производной Фреше. Это понятие позволяет естественным образом обобщить многие результаты элементарного анализа, поэтому производная Фреше играет важную роль в теории операторов. В этом параграфе дается ее определение и доказываются некоторые результаты соответствующего бесконечномерного дифференциального исчисления. В § 4.5 обсуждается метод Ньютона, в котором производная Фреше находит непосредственное применение.

Определение производной Фреше основано на следующем наблюдении: если $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, то при малых $|h|$

$$\varphi(y+h) - \varphi(y) - ah = o(|h|), \tag{4.4.1}$$

где вещественное число a равно производной φ в точке y. Геометрически это просто означает, что касательная к графику φ в точке y хорошо аппроксимирует φ в окрестности этой точки. Если определить линейный оператор L, полагая $Lx = ax$ для $x \in \mathbb{R}$, то можно непосредственно получить формальное обобщение соотношения (4.4.1) на высшие размерности:

$$\varphi(y+h) - \varphi(y) - Lh = o(\|h\|).$$

Под производной Фреше как раз и понимается этот линейный оператор L. В одномерном случае под производной Фреше можно понимать либо вещественное число a, либо оператор, отвечающий умножению на a. Имея в виду эту последнюю интерпретацию, естественно и в многомерном случае обозначать L через $\varphi'(y)$. Итак, для операторов A в банаховых пространствах примем следующее определение:

4.4.1. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства. Пусть D — открытое подмножество в $\mathscr{B}$ и A — оператор, отображающий D в $\mathscr{C}$. Оператор A называется **дифференцируемым по Фреше** в точке $g \in D$, если существует такой оператор $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, что

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|A(g+h) - Ag - Lh\| / \|h\| = 0,$$

где требуется, чтобы предел существовал при любом способе стремления h к нулю[1]. Оператор L, который обычно обозначают $A'(g)$, называется **производной Фреше** оператора A в g.

Аналогично определяются высшие производные (см. Ролл [1969, с. 108], Бергер [1977, с. 72])[2], но нам они не понадобятся.

[1] То есть для любого заданного $\varepsilon > 0$ должно существовать такое $\delta > 0$, что при $\|h\| < \delta$

$$\|A(g+h) - Ag - Lh\| \leqslant \varepsilon \|h\|.$$

[2] Или Дьёдонне [1960, с. 207]. — *Прим. перев.*

4.4.2. Пример. Производная Фреше любого ограниченного линейного оператора L: $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$ в любой точке равна самому L. Это следует из тождества $\| L(g+h) - Lg - Lh \| = 0$.

4.4.3. Пример. Пусть D — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и функция φ: $D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит $\mathscr{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$. Представим точки $\mathbb{R}^n$ как векторы-столбцы и для $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in D$ положим $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y))^T$. Если h мало, то по теореме Тэйлора

$$\varphi(y+h) = \varphi(y) + \varphi'(y)\, h + r,$$

где h, r — вектор-столбцы, $\varphi'(y)$ — матрица Якоби (с компонентами $\partial\varphi_i/\partial y_j(y)$) и $\|r\| = o(\|h\|)$. Таким образом, в рассматриваемом случае производная Фреше — это просто матрица Якоби.

4.4.4. Пример. Допустим, что оператор φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задан формулой $\varphi(y) = y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2$, где $y = (y_1, y_2)^T$. Тогда для $h = (h_1, h_2)^T$

$$\varphi(y+h) = \varphi(y) + (2y_1 + y_2)\, h_1 + (y_1 + 2y_2)\, h_2 + r,$$

где $\| r \| = o(\| h \|)$. Таким образом, производная Фреше φ в точке $(y_1, y_2)^T$ задается 1×2-матрицей

$$[2y_1 + y_2 \qquad y_1 + 2y_2].$$

Мы хотим здесь подчеркнуть, что производная Фреше является оператором, область определения и множество значений которого лежат соответственно в тех же пространствах, что и для оператора A.

4.4.5. Пример. В качестве бесконечномерного примера рассмотрим оператор Урысона A, задаваемый формулой

$$Af(x) = \int_0^1 k(x, y, f(y))\, dy.$$

Обозначим частную производную k по последнему аргументу через $\partial k/\partial u$ и предположим, что k, $\partial k/\partial u$: $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ непрерывны. Пусть $\mathscr{C}([0, 1])$ снабжено sup-нормой. Тогда производная Фреше оператора A в $g \in \mathscr{C}([0, 1])$ есть ограниченный линейный оператор L: $\mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$, определенный формулой

$$Lh(x) = \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial u}(x, y, g(y))\, h(y)\, dy, \quad h \in \mathscr{C}([0, 1]).$$

Для доказательства заметим, что

$$\left|k(x,\ y,\ g(y)+h(y))-k(x,\ y,\ g(y))-\frac{\partial k}{\partial u}(x,\ y,\ g(y))\,h(y)\right|$$

$$=\left|\int_0^1\left\{\frac{\partial k}{\partial u}(x,\ y,\ g(y)+th(y))-\frac{\partial k}{\partial u}(x,\ y,\ g(y))\right\}h(y)\,dt\right|$$

$$\leqslant\|h\|\int_0^1\left|\frac{\partial k}{\partial u}(x,\ y,\ g(y)+th(y))-\frac{\partial k}{\partial u}(x,\ y,\ g(y))\right|dt.$$

Интеграл стремится к нулю равномерно по x и y при $\|h\|\to 0$, так как $\partial k/\partial u$ равномерно непрерывна на компактных подмножествах $[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{C}$. Следовательно,

$$\|A(g+h)-Ag-Lh\|=\sup_{x\in[0,\ 1]}\left|\int_0^1\left\{k(x,\ y,\ g(y)-h(y))\right.\right.$$

$$\left.\left.-k(x,\ y,\ g(y))-\frac{\partial k}{\partial u}(x,\ y,\ g(y))\,h(y)\right\}dy\right|=o(\|h\|)$$

при $h\to 0$, и наше утверждение вытекает из определения 4.4.1.

4.4.6. Пример. Дифференциальный оператор $A\colon\mathscr{C}^1([0,1])\to\mathscr{C}^1([0,1])$, определенный формулой

$$Af(x)=f'(x)+[f(x)]^2,$$

очевидно, имеет в каждой точке g производную Фреше $A'(g)\colon$ $\mathscr{C}^1([0,1])\to\mathscr{C}^1([0,1])$, задаваемую формулой

$$(A'(g)h)(x)=h'(x)+2g(x)\,h(x).$$

Побудительным мотивом к введению производной Фреше послужило то, что на основе этого понятия можно развить бесконечномерный анализ. Приведем два типичных результата. Первый, доказательство которого пока придется отложить (см. задачу 6.12), является обобщением теоремы о среднем значении, где вместо обычной производной употребляется производная Фреше $A'(g)$. Поскольку $A'(g)$ — оператор, нужно использовать операторную норму, т. е. норму в $\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{C})$. Непрерывность $A'(\cdot)$ также понимается по отношению к операторной норме.

4.4.7. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства. Пусть D — выпуклое подмножество в $\mathscr{B}$ и оператор $A\colon D\to\mathscr{C}$ дифференцируем по Фреше в каждой точке D. Тогда*

$$\|Af-Ag\|\leqslant\|f-g\|\sup_{h\in D}\|A'(h)\|.$$

Иными словами (см. (4.3.2)), A удовлетворяет условию Липшица с константой

$$q = \sup_{h \in D} \| A'(h) \|.$$

Это неравенство дает хороший метод оценки константы Липшица в применениях принципа сжимающих отображений. Ясно, что чем меньше максимум нормы $\| A'(h) \|$ на D, тем быстрее сходятся итерации к неподвижной точке $\bar{f}$. В следующей лемме утверждается немного больше: асимптотическая скорость сходимости (т. е. скорость сходимости вблизи $\bar{f}$) определяется производной Фреше в $\bar{f}$.

4.4.8. Лемма. *Пусть D — открытое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$ и оператор A: $D \to \mathscr{B}$ имеет в D неподвижную точку $\bar{f}$. Предположим, что A дифференцируем по Фреше в $\bar{f}$ и $\| A'(\bar{f}) \| < 1$. Тогда для любого заданного ε, $0 < \varepsilon < 1 - \| A'(\bar{f}) \|$, найдется открытый шар $S(\bar{f}, \delta)$, такой что при $f_0 \in S(\bar{f}, \delta)$ итерации $f_n = Af_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ тоже лежат в $S(\bar{f}, \delta)$, $\lim f_n = \bar{f}$ и*

$$\| f_n - \bar{f} \| \leqslant (\| A'(\bar{f}) \| + \varepsilon)^n \| f_0 - \bar{f} \|.$$

Доказательство. Пусть задано произвольное ε из указанного интервала. По определению производной Фреше найдется такое $\delta > 0$, что для любого $f \in S(\bar{f}, \delta)$

$$\| Af - A\bar{f} - A'(\bar{f})(f - \bar{f}) \| \leqslant \varepsilon \| f - \bar{f} \|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \| Af - \bar{f} \| &= \| Af - A\bar{f} \| \\ &\leqslant \| Af - A\bar{f} - A'(\bar{f})(f - \bar{f}) \| + \| A'(\bar{f})(f - \bar{f}) \| \\ &\leqslant (\| A'(f) \| + \varepsilon) \| f - \bar{f} \| \leqslant \delta, \end{aligned}$$

т. е. $Af \in S(\bar{f}, \delta)$. По индукции получаем, что если $f_0 \in S(\bar{f}, \delta)$, то и $f_n \in S(\bar{f}, \delta)$ при $n \geqslant 1$. Написанное выше неравенство с f_n вместо f показывает, что

$$\| f_{n+1} - \bar{f} \| \leqslant (\| A'(\bar{f}) \| + \varepsilon) \| f_n - \bar{f} \|.$$

Повторное применение этого неравенства дает окончательный результат, из которого следует сходимость. □

Рассмотрим теперь операторные уравнения вида $A(f, g) = 0$ в случае, когда для некоторого $g = g_0$ известно решение f_0. Правдоподобно, что для „хорошего“ A при g, близком к g_0, существует решение f, близкое к f_0. Иными словами, решение есть непрерывная функция параметра g. В конечномерном случае для этой ситуации имеются хорошо известные теоремы о неявной функции.

Сейчас мы докажем бесконечномерный вариант этой теоремы, в котором A есть отображение $\mathscr{B}\times\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$. Для данного $g\in\mathscr{C}$ обозначим производную Фреше A в f по первому аргументу через $A_1(f, g)$; при заданных f, g это линейный оператор, отображающий $\mathscr{B}$ в $\mathscr{D}$.

4.4.9. Теорема о неявной функции. *Пусть $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ — банаховы пространства и $f_0\in\mathscr{B}$, $g_0\in\mathscr{C}$ — заданные точки. Для фиксированных a, $b>0$ пусть $D\subset\mathscr{B}\times\mathscr{C}$ — множество*

$$\{[f,\ g]\colon\ \|f-f_0\|\leqslant a,\ \|g-g_0\|\leqslant b\}.$$

Предположим, что оператор $A: D\to\mathscr{D}$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) *A непрерывен;*
(ii) *производная $A_1(\cdot,\cdot)$ существует и непрерывна в D (по операторной норме);*
(iii) *оператор $A_1(f_0, g_0)$ имеет обратный в $\mathscr{L}(\mathscr{D}, \mathscr{B})$;*
(iv) *$A(f_0, g_0)=0$.*

Тогда существуют такие окрестности U точки g_0 и V точки f_0, что уравнение $A(f, g)=0$ имеет единственное решение $\bar{f}\in V$ при всяком $g\in U$ и $\bar{f}$ непрерывно зависит от g.

Доказательство. Положим в D

$$B(f,\ g)=f-[A_1(f_0,\ g_0)]^{-1}A(f,\ g).$$

Ясно, что решения уравнений $A(f, g)=0$ и $f=B(f, g)$ совпадают. Мы докажем теорему, применив к B принцип сжимающих отображений. Прежде всего заметим, что так как

$$B_1(f,\ g)=I-[A_1(f_0,\ g_0)]^{-1}A_1(f,\ g),$$

то $B_1(\cdot,\cdot)$ непрерывна по операторной норме (в силу (ii)). Далее, $B_1(f_0, g_0)=0$, поэтому для некоторого $\delta>0$ существует такое $q<1$, что

$$\|B_1(f,\ g)\|\leqslant q \quad \text{при} \quad \|f-f_0\|\leqslant\delta,\ \ \|g-g_0\|\leqslant\delta. \tag{4.4.2}$$

Из леммы 4.4.7 следует, что $B(\cdot, g)$ — сжатие. В силу (i), $B(f_0, \cdot)$ непрерывен. Значит, поскольку $B(f_0, g_0)=f_0$, найдется такое ε, $0<\varepsilon\leqslant\delta$, что

$$\|B(f_0, g)-f_0\|\leqslant(1-q)\,\delta \quad \text{при} \quad \|g-g_0\|\leqslant\varepsilon. \tag{4.4.3}$$

Существование единственной неподвижной точки в $\bar{S}(f_0, \delta)$ вытекает теперь из следствия 4.3.5, а непрерывность — из теоремы 4.3.6. □

При несколько более сильных предположениях можно получить более точную информацию о размерах окрестностей U и V.

4.4.10. Следствие. *Предположим, что выполнены условия теоремы. Выберем такое δ, что при $f \in \bar{S}(f_0, \delta)$*

$$\left\| I - [A_1(f_0, g_0)]^{-1} A_1(f, g_0) \right\| < 1/4. \tag{4.4.4}$$

Предположим, что A_1 при $f \in \bar{S}(f_0, \delta)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\| A_1(f, g) - A_1(f, g_0) \| \leqslant \rho \| g - g_0 \|. \tag{4.4.5}$$

Положим $\| [A_1(f_0, g_0)]^{-1} \| = m_0$ и возьмем такое t_0, что

$$t_0 m_0 \rho < 1/4, \tag{4.4.6}$$

$$m_0 \| A(f_0, g) \| < \delta/4 \quad \text{при} \quad g \in \bar{S}(g_0, t_0). \tag{4.4.7}$$

Тогда для любого $g \in \bar{S}(g_0, t_0)$ уравнение $A(f, g) = 0$ имеет в $\bar{S}(f_0, \delta)$ единственное решение $\bar{f}$ и $\bar{f}$ непрерывно зависит от g.

Доказательство. Существование таких δ и t_0 следует соответственно из (ii) и (i). Поэтому достаточно проверить (4.4.2) и (4.4.3). Для $f \in \bar{S}(f_0, \delta)$

$$\begin{aligned} \| B_1(f, g) \| &= \left\| I - [A_1(f_0, g_0)]^{-1} [A_1(f, g) - A_1(f, g_0) + A_1(f, g_0)] \right\| \\ &\leqslant \left\| I - [A_1(f_0, g_0)]^{-1} A_1(f, g_0) \right\| + \\ &\quad + \left\| [A_1(f_0, g_0)]^{-1} [A_1(f, g_0) - A_1(f, g)] \right\| \\ &\leqslant 1/4 + m_0 \rho t_0 \quad \text{(в силу (4.4.4) и (4.4.5)} \\ &\leqslant 1/2 \quad \text{(в силу (4.4.6)).} \end{aligned}$$

Тем самым установлено (4.4.2). Согласно (4.4.7),

$$\| B(f_0, g) - f_0 \| = \left\| [A_1(f_0, g_0)]^{-1} A(f_0, g) \right\| < \delta/4,$$

откуда вытекает (4.4.3). □

4.5. Метод Ньютона для нелинейных операторов

В одномерном случае хорошо известным и весьма эффективным методом решения уравнений является метод Ньютона. Хотя он имеет почти такую же длинную историю, как и метод последовательных приближений, его многомерный аналог лишь недавно вошел в употребление; первое последовательное изложение многомерного метода Ньютона принадлежит, по-видимому, Канторовичу и относится к 1948 г. Вполне возможно, что такое запоздалое развитие объясняется чисто понятийными трудностями, связанными с самой формулировкой подходящего обобщения. Во всяком случае, несомненно, что обозначения теории операторов подсказывают естественную форму последовательности Ньютона в общем случае, а понятие производной Фреше выявляет геометрическую аналогию между одномерным и бесконечномерным вариантами. При помощи этой теории был заложен прочный фундамент для метода Ньютона, и в настоящее время он является надежным средством решения нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. В последующем обсуждении мы сосредоточим внимание на двух практически важных вопросах: скорости сходимости и зависимости от начального приближения.

Рассмотрим прежде всего одномерный метод Ньютона. Как известно, это способ решения уравнения $\psi(x)=0$ путем последовательных линеаризаций функции ψ. Простые геометрические соображения приводят к последовательности Ньютона (x_n), где

$$x_{n+1}=x_n-[\psi'(x_n)]^{-1}\psi(x_n); \tag{4.5.1}$$

производная предполагается отличной от нуля в надлежащей области. Для обобщения метода удобно рассмотреть эту последовательность с несколько иной точки зрения. Положим

$$\varphi(x)=x-[\psi'(x)]^{-1}\psi(x)$$

и заметим, что уравнения $\psi(x)=0$ и $x=\varphi(x)$ имеют одни и те же решения. Далее, последовательность, которая получается при применении к φ метода последовательных приближений, совпадает с исходной последовательностью Ньютона. Иными словами, нахождение нулей ψ методом Ньютона равносильно нахождению неподвижных точек φ методом последовательных приближений. Преимущество последней формулировки в том, что она позволяет воспользоваться полученными выше результатами.

Обобщение метода Ньютона на высшие размерности подсказывается формулой (4.5.1). Достаточно считать $\psi'(x_n)$ производной Фреше, а $[\psi'(x_n)]^{-1}$ обратным оператором. Отсюда точно так же получается формулировка в терминах неподвижных точек φ. Итак, пусть D — открытое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$ и оператор $B\colon D\to\mathscr{B}$ дифференцируем по Фреше. Для данного $f_0\in D$ последовательность (f_n), определяемая формулой

$$f_{n+1}=f_n-[B'(f_n)]^{-1}Bf_n,\quad n\geqslant 1, \tag{4.5.2}$$

называется *последовательностью Ньютона*. Аналогом введенной выше функции φ служит оператор A, задаваемый формулой

$$Af=f-[B'(f)]^{-1}Bf. \tag{4.5.3}$$

Ясно, что последовательность Ньютона для B и последовательность, получаемая по методу последовательных приближений, примененному к оператору A, совпадают.

В одномерном случае легко убедиться дифференцированием, что если $\bar{x}$ — нуль ψ, то $\varphi'(\bar{x})=0$, и из леммы 4.4.8 видно, что сходимость очень быстрая. Это рассуждение допускает непосредственное обобщение, и теорема 4.5.2 ниже подтверждает, что большое достоинство метода Ньютона — быстрая сходимость — сохраняется и в бесконечномерном случае: асимптотическая скорость сходимости выше, чем у любой степени. Дальнейшее обсуждение вопроса о скорости сходимости можно найти у Флетта [1979].

4.5.1. Лемма. *Пусть D — открытое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$. Предположим, что для заданного оператора B: $D \to \mathscr{B}$ существует такое $\bar{f} \in D$, что $B\bar{f} = 0$. Пусть B дифференцируем по Фреше в D и $B'(\cdot)$ непрерывна (по операторной норме). Предположим еще, что $[B'(\bar{f})]^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Тогда $[B'(f)]^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ в некоторой окрестности $\bar{f}$ и отображение $[B'(\cdot)]^{-1}$ непрерывно в $\bar{f}$. Далее, оператор A, определенный формулой* (4.5.3), *дифференцируем по Фреше в $\bar{f}$ и $A'(\bar{f}) = 0$.*

Доказательство. Существование и непрерывность обратных следуют из теоремы 3.6.3. Значит, в некоторой окрестности $\bar{f}$ имеет место тождество

$$Af - A\bar{f} = [B'(f)]^{-1}\{B'(\bar{f})(f - \bar{f}) - Bf + B\bar{f}\} + \\ + [B'(f)]^{-1}\{B'(f) - B'(\bar{f})\}(f - \bar{f}),$$

откуда

$$\frac{\|Af - A\bar{f}\|}{\|f - \bar{f}\|} \leqslant \|[B'(f)]^{-1}\| \left\{ \frac{\|Bf - B\bar{f} - B'(\bar{f})(f - \bar{f})\|}{\|f - \bar{f}\|} + \|B'(f) - B'(\bar{f})\| \right\}.$$

Стало быть, $\|Af - A\bar{f}\| / \|f - \bar{f}\| \to 0$ при $f \to \bar{f}$, и поэтому $A'(\bar{f}) = 0$. □

4.5.2. Теорема. *Пусть B — такой же оператор, как в предыдущей лемме. Для всякого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такой шар $S(\bar{f}, \delta)$, что*

(i) *если $f_0 \in S(\bar{f}, \delta)$, то последовательность Ньютона, определенная формулой* (4.5.2), *лежит в $S(\bar{f}, \delta)$ и $\lim f_n = \bar{f}$;*

(ii) $\|f_n - \bar{f}\| \leqslant \varepsilon^n \|f_0 - \bar{f}\|$.

Доказательство. По предыдущей лемме $A'(\bar{f}) = 0$. Далее применяем лемму 4.4.8. □

Эта теорема показывает, что в противоположность методу последовательных приближений для сходимости метода Ньютона не нужны никакие ограничения на скорость изменения оператора, если только можно найти достаточно хорошее начальное приближение f_0. К сожалению, метод Ньютона чрезвычайно чувствителен к выбору f_0, и, поскольку теорема не дает критериев оценки сделанного выбора, это несколько сужает ее применимость. Следующий результат, принадлежащий Канторовичу, содержит такой критерий и вдобавок устанавливает существование решения, а потому имеет гораздо большее практическое значение.

4.5.3. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство и заданы $r > 0$ и $f_0 \in \mathscr{B}$. Предположим, что оператор B: $\bar{S}(f_0, r) \to \mathscr{B}$ дифференцируем по Фреше и $[B'(f_0)]^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Предположим, кроме того, что B удовлетворяет следующему условию Липшица в $\bar{S}(f_0, r)$:*

$$\|B'(f) - B'(g)\| \leqslant p \|f - g\|.$$

Допустим, что

$$b_0 \geqslant \|B'(f_0)\|^{-1}, \quad \eta_0 \geqslant \|f_1 - f_0\| = \left\|[B'(f_0)]^{-1} Bf_0\right\|,$$

и положим $h_0 = b_0 p \eta_0$. Если

$$h_0 \leqslant 1/2, \quad \left[1 - (1 - 2h_0)^{1/2}\right] h_0^{-1} \eta_0 \leqslant r,$$

то последовательность Ньютона с начальным приближением f_0 сходится к решению $\bar{f}$ уравнения $Bf = 0$ в $\bar{S}(f_0, r)$.

Чтобы пояснить формулировку теоремы, возьмем в качестве оператора B функцию ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и предположим для простоты, что

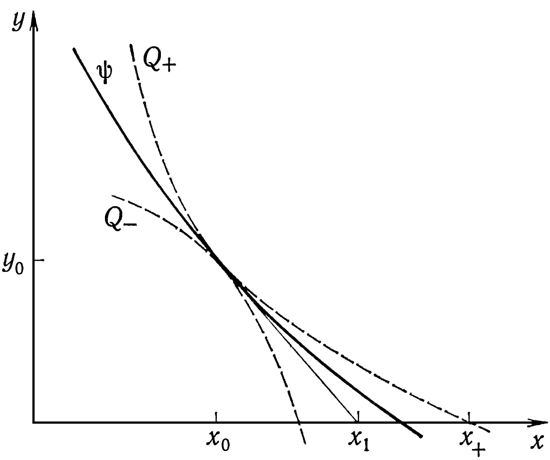

Рис. 4.3.

ψ имеет непрерывную вторую производную и $\psi(x_0) > 0$. Тогда выполнено условие Липшица с $p = \sup |\psi''(x)|$ в $\bar{S}(x_0, r)$. Рассмотрим квадратичные функции

$$Q_\pm(x) = \pm \frac{1}{2} p (x - x_0)^2 + \psi'(x_0)(x - x_0) + \psi(x_0).$$

Ясно, что $Q_-(x) \leqslant \psi(x) \leqslant Q_+(x)$ (см. рис. 4.3). Поэтому уравнение $\psi(x) = 0$ заведомо будет иметь решение, если Q_+ имеет вещественные корни; необходимым и достаточным условием этого является неравенство

$$[\psi'(x_0)]^2 \geqslant 2p\psi(x_0),$$

а это и есть условие $h_0 \leqslant 1/2$ теоремы. Далее, ближайший к x_0 из двух корней Q_+, скажем x_+, удовлетворяет равенству

$$x_+ - x_0 = \left[1 - (1 - 2h_0)^{1/2}\right] h_0^{-1} \eta_0.$$

Обозначим величину в правой части через r_0. Очевидно, что x_+ лежит в $\bar{S}(x_0, r)$, если $r \geqslant r_0$. Но это как раз и есть последнее условие теоремы. Наконец, понятно, что последовательность Ньютона (x_n) лежит в $\bar{S}(x_0, r)$.

Доказательство этой теоремы в бесконечномерном случае (см. Красносельский и др. [1969, с. 140—142]) проводится непосредственно, однако содержит много утомительных и малопоучительных подробностей, поэтому мы его опустим. Следующие два примера иллюстрируют применение метода Ньютона и использование предыдущей теоремы при доказательстве сходимости.

4.5.4. Пример. Применим метод Ньютона с начальным приближением $x_1 = x_2 = 0$ к следующей системе из двух уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 + 30x_2 - 31 = 0,$$
$$x_2^2 - 2x_2 - 16x_1 + 1 = 0.$$

Представляя точки из $\mathbb{R}^2$ векторами-столбцами, можно записать ее в виде уравнения $\psi(x) = 0$, где $x = (x_1, x_2)^T$ и

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + 30x_2 - 31 \\ x_2^2 - 2x_2 - 16x_1 + 1 \end{bmatrix}.$$

Будем пользоваться l_∞-нормой $\|\cdot\|$, т. е. $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$. В рассматриваемом простом случае возможно явное вычисление всех интересующих нас величин. А именно,

$$\psi'(x) = 2\begin{bmatrix} x_1 & x_2 + 15 \\ -8 & x_2 - 1 \end{bmatrix},$$

$$[\psi'(x)]^{-1} = \frac{1}{2[x_1(x_2 - 1) + 8(x_2 + 15)]}\begin{bmatrix} x_2 - 1 & -x_2 - 15 \\ 8 & x_1 \end{bmatrix},$$

и можно явно выписать последовательность Ньютона $(x^{(n)})$; например, $x^{(1)} = (-2, 31)^T/30$. Применим теорему 4.5.3. Согласно выражению для операторной нормы, данному в примере 3.4.5,

$$\left\|[\psi'(x^{(0)})]^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{15 \cdot 16} \max[(1 + 15), 8] = \frac{1}{15} = b_0.$$

Кроме того,

$$\psi'(x)-\psi'(y)=2\begin{bmatrix} x_1-y_1 & x_2-y_2 \\ 0 & x_2-y_2 \end{bmatrix},$$

откуда $\|\psi'(x)-\psi'(y)\|\leqslant 4\|x-y\|$. Следовательно, можно взять $p=4$. Наконец, $\eta_0=\|x^{(1)}-x^{(0)}\|=31/30$. Значит, $h_0=62/225\leqslant 1/2$, как и требовалось. Далее,

$$[1-(1-2h_0)^{1/2}]\,h_0^{-1}\eta_0=\frac{1}{4}[15-101^{1/2}]<1.25.$$

Из теоремы следует, что система имеет решение в шаре с центром в 0 и радиусом 1.25, к которому сходится последовательность Ньютона. Этим решением, очевидно, является $x_1=0$, $x_2=1$.

Аналогичное вычисление с начальным приближением $(0,-1)^T$ показывает, что условие $h_0\leqslant 1/2$ теоремы не выполнено. Однако для данного простого примера можно независимым способом убедиться в том, что последовательность Ньютона и в этом случае сходится. Отсюда видно, что условия теоремы заведомо не являются необходимыми для сходимости метода Ньютона.

4.5.5. Пример. Метод Ньютона является, пожалуй, самым быстросходящимся из всех методов вычисления решений задач с граничными условиями. В качестве примера рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &f''(x)-[f(x)]^2=g(x),\\ &f(0)=f(1)=0, \end{aligned}$$

где g — заданная непрерывная функция, а решение ищется в $\mathscr{C}^2([0,1])$. Эта задача эквивалентна уравнению $Bf=0$ в пространстве $\mathscr{C}([0,1])$ с sup-нормой, где

$$Bf(x)=f(x)+\int_0^1 k(x,y)\{[f(y)]^2+g(y)\}\,dy,$$

а k — функция Грина (4.2.5). Применим метод Ньютона к оператору B.

Сначала воспользуемся теоремой 4.5.3 для доказательства сходимости. Выберем ради простоты начальное приближение $f_0=0$. Согласно примеру 4.4.5,

$$B'(f)\,h(x)=h(x)+2\int_0^1 k(x,y)\,f(y)\,h(y)\,dy.$$

Так как $B'(f_0)=I$, то производная Фреше легко обращается, и можно взять $b_0=1$. Для линейного интегрального оператора K, задаваемого формулой

$$Kh(x)=\int_0^1 k(x, y)\,h(y)\,dy,$$

имеем $\| K \| = 1/8$; в этом нетрудно убедиться, воспользовавшись соотношением $\| K \| = \| \, | k | \, \|_\infty$ из примера 3.4.8. Поэтому возьмем $\eta_0 = \| g \|/8$. Кроме того,

$$\| B'(f_1)\,h - B'(f_2)\,h \| \leqslant 2 \| h \| \| K \| \| f_1 - f_2 \| \leqslant \| h \| \| f_1 - f_2 \| / 4,$$

и можно взять $r = 1/4$. Следовательно, $h_0 = b_0 p \eta_0 = \|g\|/32$. Итак, если $\| g \| < 16$, то по теореме наше уравнение имеет решение, к которому сходится последовательность Ньютона, и это решение лежит в шаре с центром в 0 и радиусом $4[1-(1-\|g\|/16)^{1/2}]$.

Чтобы вычислить решение, применяя метод Ньютона непосредственно к B, нужно было бы на каждом шаге для нахождения $[B'(f_n)]^{-1}Bf_n$ решать линейное интегральное уравнение, что является на практике весьма кропотливым делом. Однако, как показывает дифференцирование, это равносильно решению последовательности линейных краевых задач

$$f''_{n+1}(x) - 2f_n(x)\,f_{n+1}(x) = g(x) - [f_n(x)]^2,$$
$$f_{n+1}(0) = f_{n+1}(1) = 0.$$

Обычно на практике эта процедура предпочтительнее, поскольку для таких задач разработаны эффективные численные методы. Метод Ньютона в таком виде часто называют *квазилинеаризацией* (см. Беллман и Калаба [1965]).

При общей оценке метода Ньютона как вычислительного средства необходимо учитывать два его недостатка. Самым большим недостатком является чувствительность к выбору начального приближения. Она проявляется даже в конечномерном случае при решении больших систем нелинейных уравнений, ибо получаемая последовательность часто оказывается расходящейся, если f_0 недостаточно близко к решению, и для нахождения подходящего f_0 приходится привлекать другие методы. Поэтому на практике особый интерес представляют такие результаты, как теорема 4.5.3, дающие глобальные критерии сходимости. К сожалению, как мы убедились в примере 4.5.4, эта теорема может оказаться неоправданно пессимистичной в своих предсказаниях, и в связи с этим стоит отметить, что, как и для метода последовательных приближений (см. § 8.3), иногда можно получить более лояльные критерии, пользуясь соображениями монотонности. Обсуждение этого подхода в бесконечномерном случае имеется у Вандерграфта [1967] и Муни и Роуча [1976].

Второй недостаток проявляется при вычислении самóй последовательности Ньютона. При каждой итерации нужно вычислять производную Фреше, а затем решать линейное уравнение для ее обращения. На практике такие вычисления иногда поглощают очень много времени, и для того, чтобы обойти эту трудность, было придумано несколько модификаций метода Ньютона. В одной из самых простых модификаций используется последовательность, определяемая формулой

$$f_{n+1} = f_n - [B'(f_0)]^{-1} Bf_n,$$

и требуется только одно вычисление производной Фреше. К сожалению, сходимость при этом становится медленнее. Обсуждение этой группы методов см. у Денниса [1971].

Несмотря на указанные недостатки, быстрота сходимости метода Ньютона служит веским аргументом в его пользу, и он широко используется как вычислительное средство. При этом как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае остается актуальной задача, как сгладить недостатки метода, не нарушая его эффективности.

Задачи

4.1. Возьмите $\omega > -\pi^2$ и вычислите функцию Грина для оператора $-d^2/dx^2 + \omega$ на $[0, 1]$ с однородными условиями Дирихле $f(0) = f(1) = 0$.

4.2. Исследуйте роль вещественного параметра a в решении интегрального уравнения Гаммерштейна

$$f(x) - \int_0^1 [f(y)]^2 \, dy = a, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

4.3. Пусть D — открытый единичный шар в банаховом пространстве $\mathscr{B}$ и A: $D \to \mathscr{B}$ — непрерывный оператор. Покажите, что для всякой точки $f \in D$ оператор A ограничен в смысле (4.2.10) в некоторой окрестности f.

4.4. Пусть оператор $A: l_2 \to l_2$ определен формулой

$$A(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_1, f_2^2, f_3^3, \ldots).$$

Покажите, что A непрерывен, но является неограниченным на любом шаре $\bar{S}(0, r)$ при $r > 1$.

4.5. Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство, заданы $g \in \mathscr{B}$ и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и рассматривается оператор A, определяемый формулой $Af = Lf + g$ для $f \in \mathscr{B}$. Предположим, что A отображает некоторый замкнутый шар в себя.

(i) Докажите, что $\|L\| \leqslant 1$.

(ii) Пусть $\mathscr{B} = c_0$ — пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей с sup-нормой. Покажите, что если $g = (1, 0, 0, \ldots)$, а L — оператор правого сдвига (задача 3.2), то A отображает $\bar{S}(0, 1)$ в себя, но не имеет неподвижных точек в этом шаре.

(iii) Докажите, что если $\mathscr{B}$ — гильбертово пространство, то A имеет неподвижную точку в указанном шаре.

4.6 (Какутани). Пусть D — замкнутый единичный шар в вещественном пространстве последовательностей l_2. Определим на D оператор A, полагая

$$A(f_1, f_2, \ldots) = \left([1 - \| f \|^2]^{1/2}, f_1, f_2, \ldots \right).$$

Докажите, что A отображает D в себя и непрерывен, но не имеет неподвижных точек. Таким образом, даже в гильбертовом пространстве непрерывное отображение замкнутого единичного шара в себя необязательно имеет неподвижную точку, если пространство бесконечномерно.

4.7. Покажите путем построения контрпримера, что в принципе сжимающих отображений нельзя ослабить условие Липшица до условия $\|Af - Ag\| < \|f - g\|$. Обсуждение этого вопроса см. у Смарта [1974, гл. 5].

4.8. Покажем, как влияет перестройка уравнения на сходимость метода последовательных приближений, на примере вычисления положительного корня уравнения $x^2 = 3$.

(i) Сначала перепишем уравнение в виде $x = 3x^{-1}$. Последовательность, получаемая по методу последовательных приближений, не сходится ни при каких x_0, кроме $x_0 = \sqrt{3}$.

(ii) Теперь представим уравнение в виде $x = 3^{-1}(3 - x^2) + x$. Найдите несколько первых членов последовательности для $x_0 = 1$. Рассмотрите применение принципа сжимающих отображений для доказательства сходимости при различных x_0.

4.9. Пусть требуется найти положительное решение уравнения $e^x - x - 2 = 0$. Перепишем его в виде $x = x - a[e^x - 2 - x]$. Рассмотрите влияние выбора a на константу Липшица, на быстроту сходимости метода последовательных приближений и на шар, в котором отображение является сжимающим.

4.10. Положим $\varphi(x) = x + (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Покажите, что функция φ не является сжимающей ни в каком интервале, содержащем 1. Докажите, что несмотря на это последовательность (x_n), где $x_0 = 1/2$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $(n \geqslant 1)$, сходится к неподвижной точке $x = 1$ функции φ.

4.11. Допустим, что требуется методом последовательных приближений вычислить ненулевое решение интегрального уравнения

$$f(x) = \int_0^x [f(t)]^2\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Найдите подходящую перестройку уравнения.

4.12. Пусть D — подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$ и задан оператор A: $D \to D$. Предположим, что A^n при некотором заданном $n > 1$ имеет единственную неподвижную точку $\bar{f}$ в D. Докажите, что $\bar{f}$ — единственная неподвижная точка A в D.

4.13. Рассмотрим интегральное уравнение Гаммерштейна

$$f(x) - \int_0^1 k(x, y)\, \psi[f(y)]\, dy = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где функции k, g, h вещественнозначны и непрерывны. Наделим $\mathscr{C}([0, 1])$ sup-нормой. Используя очевидные обозначения, это уравнение можно переписать в виде $f - K\Psi f = g$, где K, Ψ: $\mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$, причем K линеен.

(i) Допустим, что ψ удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{R}$ с константой m. Покажите, что если $m\|K\| < 1$, то из принципа сжимающих отображений следуют существование и единственность решения; найдите оценку решения.

(ii) Для $\psi(z) = z^2$ способ (i) не работает. Рассмотрите этот случай, введя подходящие ограничения на $\|g\|$.

4.14. Для вещественного a положим

$$\| f \|_* = \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} | e^{-at} f(t) |.$$

Покажите, что норма $\|\cdot\|_*$ и sup-норма эквивалентны на $\mathscr{C}([0, t_0])$. Пользуясь нормой $\|\cdot\|_*$, выведите теорему 4.3.11 непосредственно из принципа сжимающих отображений.

4.15. Теорема 4.3.11 неприменима к уравнению

$$f'(t) = 1 + [f(t)]^2, \quad t \geqslant 0,$$

с начальным условием $f(0) = 0$. Получите локальный результат для интервала $[0, t_0]$, выбрав t_0 настолько большим, насколько это возможно.

4.16. При помощи принципа сжимающих отображений докажите, что задача

$$f''(x) + \mu\psi[f(x)] = g(x),$$
$$f(0) = f(1) = 0,$$

где ψ удовлетворяет локальному условию Липшица, а g непрерывна, имеет решение в $\mathscr{C}^2([0, 1])$ при достаточно малых $|\mu|$.

4.17. Пусть Ω — треугольник на плоскости, образованный двумя прямыми, параллельными координатным осям, и прямой $x + y = 0$. Пусть на стороне этого треугольника, лежащей на прямой $x + y = 0$, заданы однородные условия Коши для гиперболического уравнения

$$\partial^2 u/\partial x\, \partial y = f(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y),$$

где функция f вещественна, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица

$$| f(x, y, u, p, q) - f(x, y, u_1, p_1, q_1) | \leqslant L (| u - u_1 | + | p - p_1 | + | q - q_1 |)$$

для всех $(x, y) \in \Omega$ и всех вещественных u, u_1, p, p_1, q, q_1. Перепишите уравнение в виде интегрального и воспользуйтесь принципом сжимающих отображений для доказательства локального существования и единственности решения, т. е. существования и единственности решения в некоторой окрестности в Ω начальной прямой.

4.18. Уравнение Пуассона — Больцмана, используемое в теории электролитических растворов, записывается (в несколько модифицированном виде) так:

$$f''(x) = \operatorname{sh}(f(x)), \quad x \geqslant 0,$$

где $f(0) = \alpha$ и $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. После надлежащей перестройки запишите его в виде интегрального уравнения, воспользовавшись функцией Грина. Докажите существование решения при подходящих условиях на α, применив принцип сжимающих отображений в $\mathscr{C}([0, \infty))$ с подходящей нормой.

4.19. Рассмотрите применение метода Ньютона к задаче

$$f''(x) - [f(x)]^3 = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(0) = f(1) = 0$$

с начальным приближением нуль, задав на основе теоремы 4.5.3 условия на функцию g (которая предполагается непрерывной), обеспечивающие сходимость метода.

4.20. Пусть функция k: $[0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ непрерывна и на $\mathscr{C}([0, 1])$, наделенном sup нормой, задан оператор K формулой

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) \, dy.$$

Выведите из теоремы о неявной функции 4.4.9, что для всякого $\lambda \in \rho(K)$ найдется $\delta > 0$, такое что интегральное уравнение

$$\lambda f(x) = \int_0^1 k(x, y) \{f(y) + [f(y)]^2\} \, dy + g(x)$$

имеет решение в $\mathscr{C}([0, 1])$ при любой функции $g \in \mathscr{C}([0, 1])$, удовлетворяющей условию $\|g\| \leqslant \delta$.

Глава 5

КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

5.1. Введение

Как показывают две предыдущие главы, большинство основных результатов об операторных уравнениях легко переносится с конечномерного случая на бесконечномерный, если „градиент" фигурирующего в уравнении оператора A на банаховом пространстве не слишком велик. К сожалению, многие операторы, возникающие в приложениях, не удовлетворяют этому ограничению на градиент. С другой стороны, такие операторы часто обладают другими свойствами, компенсирующими этот недостаток. Чтобы эффективно использовать эти свойства, нужно сначала глубже изучить структуру самих банаховых пространств. В этой главе мы сосредоточим внимание на классе так называемых компактных подмножеств, определение которых подсказано одним полезным свойством вещественных чисел.

Доказательства многих стандартных результатов теории функций вещественной переменной опираются на теорему Гейне — Бореля. Она утверждает следующее: для всякого замкнутого ограниченного подмножества $S \subset \mathbb{R}$ из любого семейства открытых множеств, объединение которых содержит S, можно выбрать конечное подсемейство (т. е. подсемейство, содержащее конечное число множеств), объединение которого по-прежнему содержит S. К сожалению, для бесконечномерных банаховых пространств эта теорема неверна. Как принято в подобных случаях, мы возьмем *утверждение* этой теоремы в качестве определяющего свойства компактных множеств. Хотя компактных множеств не так много, как замкнутых ограниченных, и их гораздо труднее распознать, все-таки в самых полезных банаховых пространствах функций их запас вполне достаточен. Поэтому имеется довольно большой класс операторов, множество значений которых (хотя и не область определения) обладает определенными свойствами компактности. Так как по построению компактные множества ведут себя подобно замкнутым ограниченным подмножествам конечномерных пространств, то для таких операторов можно создать теорию, во многих отношениях сходную с конечномерной теорией.

Поскольку принятое нами определение компактности не дает ни простого наглядного представления о компактных множествах, ни удобного способа распознавать такие множества, для прояснения ситуации мы поступим следующим образом. Сначала приведем несколько разных описаний компактных множеств. Затем изучим роль компактности при распространении некоторых важных, но простых результатов с конечномерного случая на бесконечномерный. И наконец, выведем ряд несложных критериев, позволяющих распознавать компактные множества в главных пространствах функций, что весьма существенно для применения понятия компактности в теории операторов.

5.2. Определения

Наше первое определение компактности, как отмечалось во введении к главе, подсказано теоремой Гейне — Бореля.

5.2.1. Определение. Семейство множеств в банаховом пространстве называется **покрытием** данного множества S, если каждая точка S лежит хотя бы в одном из этих множеств. Если диаметр каждого множества из семейства, покрывающего S, не превосходит ε, то это семейство называется ε-покрытием S.

5.2.2. Определение. Подмножество S банахова пространства называется **компактным,** если всякое семейство открытых множеств, покрывающее S, содержит конечное подсемейство, которое также покрывает S. Множество S называется **относительно компактным.** если компактно его замыкание $\bar{S}$ [1]).

Таким образом, теорема Гейне — Бореля утверждает, что всякое замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}$ компактно. Легко доказать, что всякое компактное множество замкнуто и ограничено; следовательно, в $\mathbb{R}$ „замкнутость + ограниченность = компактность“ и компактные множества полностью охарактеризованы. В произвольных банаховых пространствах замкнутость и ограниченность остаются необходимым условием компактности, однако, если размерность пространства бесконечна, это условие уже не является достаточным.

Посмотрим теперь на всё это с другой точки зрения. Вспомним, что замкнутые ограниченные множества в $\mathbb{R}$ обладают следующим характеристическим свойством: каждая последовательность элементов такого множества содержит подпоследовательность, сходящуюся к его точке.

5.2.3. Определение. Подмножество S банахова пространства называется **секвенциально компактным,** если всякая последователь-

---

[1]) К сожалению, в литературе нет единства в употреблении терминов „компактный“ и „относительно компактный“. В частности, под компактными множествами иногда понимают те, которые мы называем относительно компактными, а относительно компактные множества иногда называют предкомпактными.

ность в нем содержит сходящуюся подпоследовательность с пределом, принадлежащим S. Множество S называется **относительно секвенциально компактным**, если секвенциально компактно его замыкание $\bar{S}$.

Очень удачно, что в банаховых пространствах компактность и секвенциальная компактность эквивалентны (см., например, Фридман [1970, с. 108]) — в некоторых более общих пространствах это не так [1]). Остальные утверждения следующей теоремы, подытоживающей ситуацию, несложны, и доказать их предоставляется читателю в качестве упражнения.

5.2.4. Теорема. *Пусть S — подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$. Тогда*:

(i) *S компактно* (*соотв. относительно компактно*) *в том и только том случае, если оно секвенциально компактно* (*соотв. относительно секвенциально компактно*);

(ii) *если S компактно, то оно замкнуто и ограничено*;

(iii) *если S замкнуто и ограничено, а $\mathscr{B}$ конечномерно, то S компактно.*

5.2.5. Лемма. *Замкнутый единичный шар в нормированном векторном пространстве $\mathscr{V}$ компактен тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}$ конечномерно.*

Эта лемма показывает, что в бесконечномерных пространствах компактные множества найти труднее и, в частности, замкнутые шары не являются адекватной заменой замкнутых интервалов в $\mathbb{R}$. Мы не будем доказывать лемму (см. Фридман [1970, с. 133] [2])), а приведем пример, из которого будет видно, как потеря компактности связана с бесконечномерностью.

5.2.6. Пример. Рассмотрим бесконечномерное пространство последовательностей l_∞ (определение 1.3.13), состоящее из ограниченных последовательностей $f = (f_1, f_2, \ldots)$, с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_i |f_i|.$$

Пусть $f^{(n)}$ — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме n-й, которая равна 1; i-ю компоненту вектора $f^{(n)}$ будем обозначать $f_i^{(n)}$. Ясно, что множество $\{f^{(n)}\}$ содержится в замкнутом единичном шаре пространства l_∞. Однако при $n \neq m$

$$\|f^{(n)} - f^{(m)}\|_\infty = \sup_i |f_i^{(n)} - f_i^{(m)}| = 1.$$

---

[1]) Заметим, что во всех метрических пространствах это всё-таки так (см., например, Канторович и Акилов [1977, с. 43]). — *Прим. перев.*

[2]) Или Канторович и Акилов [1977, с. 130]. — *Прим. перев.*

Следовательно, векторы $f^{(n)}$ лежат на единичном расстоянии один от другого, и никакая последовательность таких векторов не может быть сходящейся. Векторы $f^{(n)}$ можно рассматривать как единичные векторы вдоль осей координат, и тогда ясно, что отсутствие компактности есть прямое следствие бесконечности числа осей.

Дальнейшее прояснение ситуации достигается ценой еще одного определения.

5.2.7. Определение. Подмножество S банахова пространства называется **вполне ограниченным**, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется конечное множество открытых шаров, образующих ε-покрытие S.

Легко видеть, что всякое вполне ограниченное множество ограничено. Однако, как показывает следующая теорема, вполне ограниченность — гораздо более сильное условие, чем ограниченность.

5.2.8. Теорема. *Подмножество S банахова пространства $\mathscr{B}$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Доказательство. Сначала предположим, что S относительно компактно. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем семейство открытых шаров $S(f, \varepsilon)$ радиуса ε с центрами в f для всех $f \in \bar{S}$. Это семейство покрывает $\bar{S}$. Поскольку $\bar{S}$ компактно, найдется конечное подсемейство, покрывающее $\bar{S}$, а тем более S. Следовательно, S вполне ограничено.

Теперь покажем, что если S вполне ограничено, то оно относительно секвенциально компактно, а потому относительно компактно (теорема 5.2.4, (i)). В доказательстве используется полезный прием, называемый *диагональным процессом.* Пусть (f_n) — любая бесконечная последовательность в S. Поскольку S вполне ограничено, существует его конечное 1-покрытие, скажем $\{S(g_1, 1/2), \ldots, S(g_l, 1/2)\}$. По крайней мере один из этих шаров содержит бесконечную подпоследовательность последовательности (f_n), скажем $(f_{n,1})$. Возьмем теперь конечное $1/2$-покрытие S и, как и раньше, выделим из $(f_{n,1})$ бесконечную подпоследовательность $(f_{n,2})$, содержащуюся в одном из шаров этого покрытия. Будем продолжать этот процесс и для каждого m найдем бесконечную подпоследовательность последовательности $(f_{n,m-1})$, скажем $(f_{n,m})$, содержащуюся в шаре диаметра m^{-1}. Теперь рассмотрим *диагональную* последовательность $(f_{n,n})$. Тогда $(f_{j,j})_{j=n}^{\infty}$ есть подпоследовательность последовательности $(f_{j,n})_{j=n}^{\infty}$ и, значит, лежит в шаре диаметра n^{-1}. Следовательно,

$$\| f_{n,n} - f_{m,m} \| \leqslant 1/\min(n, m).$$

Стало быть, $(f_{n,n})$ — последовательность Коши, и так как $\mathscr{B}$ полно, то она сходится. Таким образом, (f_n) содержит сходящуюся подпоследовательность, и потому S секвенциально компактно. □

Очевидный вывод из этой теоремы таков: замкнутое множество вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно компактно. Таким образом, вместо конечномерного „замкнутость + ограниченность = компактность" мы получаем „замкнутость + вполне ограниченность = компактность". Грубо можно представлять себе относительно компактное множество S как „приближенно конечномерное" в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ имеется конечное множество точек $f_1, \ldots, f_n$, такое что каждая точка S лежит не дальше чем на ε от одной из точек f_j.

5.3. Некоторые следствия компактности

Один из способов пояснить понятие компактности заключается в том, чтобы проследить, как обобщаются известные результаты для вещественнозначных функций на замкнутых ограниченных интервалах в $\mathbb{R}$, когда область определения функции становится бесконечномерной. Этот способ последовательно проведен в поучительной обзорной статье Хьюитта [1960]. Здесь мы приведем три примера, в которых компактность области определения играет решающую роль в существовании обобщения.

Первый результат показывает, что на компактные множества распространяется хорошо известное утверждение об эквивалентности непрерывности и равномерной непрерывности на замкнутом ограниченном интервале.

5.3.1. Определение. Пусть F — функционал[1] с областью определения $S \subset \mathscr{B}$, т. е. отображение $S \to \mathbb{C}$. Он называется **равномерно непрерывным** на S, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|F(f) - F(g)| < \varepsilon$ для всех $f, g \in S$ с $\|f - g\| \leqslant \delta$.

5.3.2. Теорема. *Пусть F — непрерывный функционал на компактном подмножестве S банахова пространства $\mathscr{B}$. Тогда F равномерно непрерывен на S.*

Доказательство. Если утверждение теоремы неверно, то найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие последовательности (f_n) и (g_n) в S, что

$$|F(f_n) - F(g_n)| \geqslant \varepsilon \tag{5.3.1}$$

при всех n, хотя $\|f_n - g_n\| < n^{-1}$. Так как S секвенциально компактно (теорема 5.2.4, (i)), то (f_n) содержит сходящуюся подпоследовательность с пределом в S. По той же причине у (g_n) имеется сходящаяся подпоследовательность с пределом в S,

[1] Нелинейный! — *Прим. ред.*

Сохраним для них прежние обозначения. Таким образом, (5.3.1) имеет место для сходящихся последовательностей (f_n) и (g_n), причем эти последовательности имеют один и тот же предел, скажем f, в S, так как $\|f_n - g_n\| \to 0$. Но

$$|F(f_n) - F(g_n)| \leqslant |F(f_n) - F(f)| + |F(f) - F(g_n)|,$$

а поскольку F непрерывен, правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, что противоречит (5.3.1). $\square$

Простой, но полезный результат классического анализа утверждает, что всякая непрерывная вещественнозначная функция на замкнутом ограниченном интервале достигает своего максимума и минимума. Этот результат тоже допускает обобщение на компактные множества.

5.3.3. Теорема. *Пусть F — непрерывный вещественный функционал на компактном подмножестве S банахова пространства $\mathscr{B}$. Тогда F ограничен и достигает как верхней, так и нижней своей грани.*

Доказательство. Положим $m = \sup\limits_{f \in S} F(f)$; пока что m может быть конечным или бесконечным, но в любом случае в S найдется последовательность (f_n) с $m = \lim F(f_n)$. Так как S компактно, она содержит сходящуюся подпоследовательность, которую мы по-прежнему обозначаем (f_n), с пределом $f \in S$. Но F непрерывен, значит, $\lim F(f_n) = F(f)$, а это, разумеется, конечное число. Следовательно, m конечно и равно $F(f)$. Доказательство для нижней грани аналогично. $\square$

Обе предыдущие теоремы неверны, если вместо компактности потребовать только замкнутости и ограниченности. В обоих случаях легко построить контрпримеры. Мы приведем контрпример для второй теоремы, а для первой предоставим сделать это читателю.

5.3.4. Пример. Пусть $\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup-нормой и $\mathscr{M}$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{C}([0, 1])$, образованное теми функциями, которые равны нулю в точке $x = 1$. Возьмем в качестве S замкнутый единичный шар в $\mathscr{M}$. Функционал F, определенный формулой

$$F(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx,$$

непрерывен на S, и $F(f) \leqslant 1$ для $f \in S$. Полагая $f_n(x) = 1 - x^n$ при $n \geqslant 1$, получаем, что $\lim F(f_n) = 1$, откуда $\sup\limits_{f \in S} F(f) = 1$. Однако $F(f) = 1$ для непрерывных f с $\|f\| \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда f есть постоянная функция, равная либо 1, либо -1. Поскольку ни одна из этих функций не принадлежит шару S, функционал F не достигает на нем своей верхней грани.

Такого рода трудности часто встречаются в теории оптимизации. Отсюда видно, что проблема нахождения экстремумов в бесконечномерном случае значительно тоньше, чем в конечномерном.

Наш последний пример касается существования неподвижной точки оператора $A\colon \mathscr{B}\to\mathscr{B}$. Стандартное эвристическое соображение состоит в том, что если удается найти последовательность приближений (f_n), такую что разность Af_n-f_n стремится к нулю, то у нее найдется сходящаяся подпоследовательность, предел которой и будет неподвижной точкой оператора A. В общем это вполне разумное соображение, и оно, несомненно, весьма полезно на практике. Однако если размерность бесконечна, то нет никаких оснований ожидать, что (f_n) содержит сходящуюся подпоследовательность, и это, вообще говоря, не так. Дело будет спасено, если (f_n) лежит в компактном множестве, что, как мы далее увидим, действительно имеет место для широкого класса операторов, важных в приложениях.

5.3.5. Теорема. *Пусть S — компактное подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$ и $A\colon S\to\mathscr{B}$ — непрерывный оператор. Предположим, что $\lim\|Af_n-f_n\|=0$ для некоторой последовательности (f_n) в S. Тогда (f_n) содержит сходящуюся подпоследовательность с пределом $\bar{f}\in S$ и $\bar{f}$ является неподвижной точкой оператора A.*

Доказательство. Существование сходящейся подпоследовательности, которую мы по-прежнему обозначаем (f_n), гарантируется компактностью S. В силу непрерывности A, $Af_n\to A\bar{f}$ при $f_n\to\bar{f}$. То что $\bar{f}$ — неподвижная точка A, следует из неравенства

$$\|A\bar{f}-\bar{f}\|\leqslant\|A\bar{f}-Af_n\|+\|Af_n-f_n\|+\|f_n-\bar{f}\|,$$

поскольку по условию $\lim\|Af_n-f_n\|=0$. □

5.4. Некоторые важные компактные множества функций

Если мы хотим использовать компактные множества при изучении операторов на конкретных функциональных пространствах, то нужны легко применимые критерии, позволяющие узнавать такие множества. К счастью, такие критерии существуют для $\mathscr{C}(\Omega)$ и $\mathscr{L}_p$-пространств, наиболее употребительных в приложениях. Проще дело обстоит в $\mathscr{C}(\Omega)$, где относительно компактные множества полностью описываются при помощи довольно простого понятия „равностепенной непрерывности“. Благодаря тому что в конкретных случаях разобраться в структуре равностепенно непрерывных, а значит, и относительно компактных множеств сравнительно легко, получается дополнительный выигрыш — более прозрачным становится само понятие компактности.

Далее Ω обозначает подмножество в $\mathbb{R}^n$, а $\mathscr{C}(\Omega)$ — банахово пространство непрерывных комплекснозначных функций на Ω, наделенное sup-нормой.

5.4.1. Определение. Множество $S \subset \mathscr{C}(\Omega)$ называется **равностепенно непрерывным** (или, в некоторых руководствах, равномерно *равностепенно непрерывным*), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $x, y \in \Omega$ с $|x - y| < \delta$ и всех $f \in S$.

Заметим, что при заданном ε одно и то же δ годится для всех $f \in S$. Грубо говоря, равностепенная непрерывность означает, что „степень непрерывности" не зависит ни от точки множества Ω, ни от функции из множества S. Для ясности рассмотрим два простых примера.

5.4.2. Пример. Множество $\{f_n\}$ функций, определенных соотношением

$$f_n(x) = nx/(1 + n^2x^2), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

содержится в замкнутом единичном шаре в $\mathscr{C}([0, 1])$. Если бы оно было равностепенно непрерывным, то можно было бы, взяв $y = 0$, для каждого $\varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, что $|f_n(x)| < \varepsilon$ при $x < \delta$ и $n \geqslant 1$. Но f_n имеет максимум в точке $x = n^{-1}$, и $f_n(n^{-1}) = 1/2$. Следовательно, δ должно быть обязательно меньше n^{-1}, а значит, его нельзя выбрать независимо от n. Таким образом, множество $\{f_n\}$ не является равностепенно непрерывным.

5.4.3. Пример. В предыдущем примере производная f_n при $x = 0$ равна n, что противоречит „равномерной гладкости" функций f_n, которая требуется для равностепенной непрерывности. Простой способ построить множество функций $\{f_n\}$ с равномерно по n ограниченными производными заключается в том, чтобы воспользоваться сглаживающим оператором интегрирования. Покажем, что это приводит к нужному результату.

Пусть S — замкнутый единичный шар в $\mathscr{C}([0, 1])$. Для каждого $f \in S$ положим

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

и обозначим множество всех таких g через S_1. Для каждого $g \in S_1$

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \left| \int_y^x f(t)\, dt \right| \leqslant |x - y| \, \| f \| \leqslant |x - y|.$$

Правая часть не зависит от g. Значит, для заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \varepsilon$, и тогда $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$. Следовательно, S_1 равностепенно непрерывно.

Это рассуждение легко распространить на множество всех g вида

$$g(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy,$$

где $f \in S$, а k — непрерывная функция. Таким образом, задаваемый этой формулой интегральный оператор переводит ограниченные множества из $\mathscr{C}([0, 1])$ в ограниченные равностепенно непрерывные множества. На этом свойстве в сочетании со следующей теоремой основано применение методов теории операторов к интегральным уравнениям, рассматриваемое в гл. 7.

5.4.4. Теорема Арцела — Асколи. *Пусть Ω — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, а S — подмножество в $\mathscr{C}(\Omega)$. Множество S относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость легко доказывается и менее важна, поэтому мы предоставляем читателю провести рассуждения самостоятельно. Для установления достаточности покажем, что всякая последовательность (f_n) в S содержит сходящуюся подпоследовательность, и тем самым докажем, что S относительно секвенциально компактно.

Пусть (x_m) — какая-нибудь плотная последовательность векторов в Ω; годятся, например, векторы с рациональными координатами. В качестве первого шага покажем с помощью диагонального процесса, что (f_n) содержит подпоследовательность $(f_{n,n})$, которая поточечно сходится на множестве $\{x_m\}$, т. е. при каждом m существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} f_{n,n}(x_m)$. Для этого заметим, что в силу ограниченности S ограничена последовательность комплексных чисел $(f_n(x_1))$, а значит, найдется такая подпоследовательность $(f_{n,1})$, что $(f_{n,1}(x_1))$ сходится. Повторяя это рассуждение, можно убедиться в существовании таких подпоследовательностей $(f_{n,m})$ в $(f_{n,m-1})$, что $(f_{n,m}(x_m))$ сходится при каждом m. Рассмотрим теперь диагональную последовательность $(f_{n,n})$. Для каждого m последовательность $(f_{n,n}(x_m))$, начиная с m-го члена, является подпоследовательностью в $(f_{n,m}(x_m))$, а значит, сходится, как и требовалось.

Для упрощения записи положим $g_n = f_{n,n}$. Последний шаг состоит в том, чтобы перейти от поточечной сходимости на $\{x_m\}$ к равномерной сходимости на Ω, доказав, что (g_n) — последовательность Коши в $\mathscr{C}(\Omega)$. Прежде всего заметим, что в силу равностепенной непрерывности $\{g_n\}$ для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon/3$ при всех $|x - y| < \delta$ и всех n. Далее, Ω можно покрыть конечным числом, скажем, k замкнутыми шарами радиуса $\delta/2$. Поскольку $\{x_m\}$ плотно в Ω, в каждом из этих шаров содержится какой-нибудь из векторов x_m и, значит, каждый элемент $x \in \Omega$ находится в пределах расстояния δ от одного из x_m. Изменим нумерацию и обозначим выбранные таким образом точки через $x_1, \ldots, x_k$. Из доказанного в предыдущем абзаце следует, что $(g_n(x_j))$ сходится при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant k$, причем на конечном множестве $x_1, \ldots, x_k$ сходимость, очевидно, равномерна. Иными словами, существует такое n_0, что при $n, m > n_0$

$$|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \varepsilon/3, \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{5.4.1}$$

Чтобы распространить это неравенство на всё Ω, воспользуемся тем, что каждая точка $x \in \Omega$ удалена не более чем на δ от одного из x_j, откуда в силу равностепенной непрерывности следует, что значение $g_n(x)$ близко к $g_n(x_j)$. Итак, если $|x - x_j| < \delta$, то

$$g_n(x) - g_m(x)| \leqslant |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + \\ + |g_m(x_j) - g_m(x)|$$

Как было отмечено выше, первый и последний члены правой части меньше $\varepsilon/3$; то же, в силу (5.4.1), относится и к среднему члену. Следовательно, $|g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$ при $n, m > n_0$ и $x \in \Omega$. Тем самым доказано, что (g_n) — последовательность Коши, и утверждение теоремы вытекает из полноты пространства $\mathscr{C}(\Omega)$. $\square$

Эта теорема дает требуемое описание относительно компактных подмножеств в $\mathscr{C}(\Omega)$. Заметим, что условие ограниченности Ω, вообще говоря, нельзя отбросить. Полезно также знать, что результат верен и тогда, когда Ω — относительно компактное подмножество банахова пространства (см. задачу 5.11).

Для пространств $\mathscr{L}_p$ известен целый ряд признаков компактности. Условие, приведенное в следующей теореме (см. задачу 5.10), можно трактовать как „равностепенную непрерывность в среднем“.

5.4.5. Теорема. *Допустим, что* $p \geqslant 1$ *и* S — *ограниченное подмножество в* $\mathscr{L}_p(0, 1)$. *Расширим область определения функций из* S *до* $\mathbb{R}$, *полагая их равными нулю вне отрезка* $[0, 1]$. *Тогда* S *относительно компактно, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что при всех* $f \in S$ *и* $|h| < \delta$

$$\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon.$$

Задачи

5.1. Докажите, что компактное подмножество банахова пространства замкнуто, ограничено и сепарабельно.

5.2. Пусть S — подмножество банахова пространства. Докажите, что:

(i) если S вполне ограничено, то оно ограничено;

(ii) S вполне ограничено тогда и только тогда, когда $\bar{S}$ вполне ограничено.

5.3. Пусть S — компактное подмножество банахова пространства Покажите, что множество $S_1 \subset S$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

5.4. Предположим, что последовательность (f_n) содержится в относительно компактном подмножестве банахова пространства и всякая ее сходящаяся подпоследовательность имеет один и тот же предел f. Докажите, что (f_n) сама сходится.

5.5. Рассмотрим пространство последовательностей l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, состоящее из векторов $f = (f_1, f_2, \ldots)$. Докажите, что ограниченное множество $S \subset l_p$ относительно компактно, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |f_n|^p < \varepsilon, \quad f \in S.$$

5 6. Докажите утверждение о необходимости в теореме Арцела — Асколи.

5.7. Пусть $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ — множества функций $f_n(x) = \sin nx$, $g_n(x) = 1 - x^n$, $n \geqslant 1$. Исследуйте их относительную компактность в $\mathscr{C}([0, 1])$ с sup-нормой и сравните результат с положением дел в $\mathscr{L}_p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$.

5 8. Пусть $\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup-нормой и k — непрерывная функция на $[0, 1] \times [0, 1]$. Определим оператор K: $\mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$, полагая

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy.$$

Пусть S — замкнутый единичный шар в $\mathscr{C}([0, 1])$. Покажите, что $K(S)$ ограничено и равностепенно непрерывно, а значит, относительно компактно.

5.9. Для неотрицательных целых k введем норму на $\mathscr{C}^k([0, 1])$ формулой

$$\|f\|_{\mathscr{C}^k} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(j)}(x)|.$$

Докажите, что при $k > h$ единичный шар в $\mathscr{C}^k([0, 1])$ есть относительно компактное подмножество в $\mathscr{C}^h([0, 1])$.

5.10. Докажите теорему 5.4.5. Сначала при фиксированном h установите с помощью теоремы Арцела — Асколи относительную компактность в $\mathscr{C}([0, 1])$, а тем самым и в $\mathscr{L}_p(0, 1)$ множества $\{f_h: f \in S\}$, где

$$f_h(x) = (2h)^{-1} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

Затем покажите, что норма $\|f - f_h\|_p$ мала при малых h, а в заключение воспользуйтесь соображениями вполне ограниченности.

5.11. Пусть Ω — подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$ с нормой $\|\cdot\|$. Покажите, что множество $\mathscr{C}(\Omega)$ комплекснозначных ограниченных непрерывных функций на Ω становится банаховым пространством при наделении его sup-нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{C}(\Omega)}$, определяемой формулой

$$\|\varphi\|_{\mathscr{C}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|.$$

Множество S в $\mathscr{C}(\Omega)$ называется равностепенно непрерывным, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всех $x, y \in \Omega$ с $\|x - y\| < \delta$ и всех $\varphi \in S$. Покажите, что если Ω относительно компактно, то в $\mathscr{C}(\Omega)$ имеет место теорема Арцела — Асколи.

Глава 6

СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

6.1. Введение

В теории линейных уравнений в конечномерных пространствах, в теориях линейных дифференциальных и линейных интегральных уравнений важную роль играют сопряженные уравнения. В абстрактной теории им отвечает столь же важное понятие сопряженного линейного оператора. Чтобы пояснить определение сопряженного оператора, рассмотрим интегральное уравнение

$$f(x) - \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy = h(x),$$

где функция k вещественнозначна и непрерывна, и сопряженное уравнение

$$g(x) - \int_0^1 k(y, x) g(y)\, dy = h(x)$$

в вещественном гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(0, 1)$. В очевидных обозначениях эти уравнения можно переписать соответственно в виде $(I - L) f = h$ и $(I - L^*) g = h$ с линейными операторами L и L^*. Оператор L^*, полученный из сопряженного уравнения, естественно тогда рассматривать как сопряженный к L. Чтобы облечь определение L^* в абстрактную форму, заметим, что

$$\int_0^1 g(x)\, dx \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy = \int_0^1 f(x)\, dx \int_0^1 k(y, x) g(y)\, dy,$$

откуда следует, что L^* должен удовлетворять уравнению

$$(Lf, g) = (f, L^*g), \qquad f, g \in \mathscr{H}. \tag{6.1.1}$$

С другой стороны, для данного L эта формула, как легко видеть, однозначно определяет L^*. Это наводит на мысль взять формулу (6.1.1) в качестве определения сопряженного оператора, и такой способ действительно годится для гильбертовых пространств.

При попытке перенести это определение на банаховы пространства перед нами сразу встает проблема — отсутствие скалярного произведения. Чтобы разрешить ее, необходимо дальше углубиться в теорию банаховых пространств и ввести новое понятие — понятие пространства $\mathscr{B}^*$, сопряженного, или двойственного, исходному пространству $\mathscr{B}$. Тогда на $\mathscr{B} \times \mathscr{B}^*$ можно определить

„внешнее“ произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, сохраняющее некоторые свойства „внутреннего“ [1] произведения $(\cdot,\cdot)$ (определенного на $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$), а затем, формально обобщая (6.1.1), положить

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, L^*g\rangle, \quad f\in\mathscr{B}, \quad g\in\mathscr{B}^*.$$

Таким способом определяется линейный оператор L^*, отображающий пространство $\mathscr{B}^*$ в себя; он и называется сопряженным к L. С этим объектом не так удобно иметь дело, как с сопряженным оператором в гильбертовом пространстве, поскольку он определен не на $\mathscr{B}$, а на $\mathscr{B}^*$. Тем не менее введение этого нового понятия открывает путь для заметного дальнейшего продвижения в теории линейных операторов.

В §§ 6.2—6.4 дается обзор основных свойств сопряженного пространства, который служит подготовкой к обсуждению сопряженных операторов. Затем вводится понятие сопряженного к непрерывному оператору, которое используется потом при доказательстве важных для дальнейшего результатов, касающихся решения операторного уравнения $Lf = g$. Далее показывается, как упрощаются эти результаты в случае самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Наконец, рассматривается сопряженный неограниченного оператора; появление этого понятия мотивируется приложениями к дифференциальным уравнениям.

6.2. Сопряженное к банахову пространству

Этот параграф начинается с определения сопряженного пространства. В частном случае, когда $\mathscr{B}$ — гильбертово пространство, сопряженным к $\mathscr{B}$ оказывается само $\mathscr{B}$. В общем случае дело обстоит уже не так просто, однако для некоторых из самых употребительных банаховых пространств сопряженные имеют простой явный вид. В остальной части параграфа изучается сопряженное $\mathscr{B}^*$ к абстрактному банахову пространству $\mathscr{B}$. Наиболее важный результат здесь — это теорема Хана — Банаха. Для оператора $L\in\mathscr{L}(\mathscr{B})$ областью определения его сопряженного L^* является $\mathscr{B}^*$. Поэтому для того, чтобы L^* давал полезную информацию об L, существенно, чтобы $\mathscr{B}^*$ было „столь же обширным“, как само $\mathscr{B}$. То, что это действительно так, следует из теоремы Хана — Банаха.

Чтобы пояснить определение сопряженного пространства, рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{H}$ (для удобства будем пока считать его вещественным) со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Фиксируем элемент $h\in\mathscr{H}$ и рассмотрим отображение f^* (это обозначение не подразумевает никакой связи между f и f^*), задаваемое формулой $f^*(f) = (f, h)$ для всех $f\in\mathscr{H}$. Очевидно, что f^*

[1] Заметим, что по-английски скалярное произведение так и называется *внутренним* (inner product). — *Прим. перев.*

есть линейный оператор из $\mathscr{H}$ в $\mathbb{R}$, и притом непрерывный, в силу неравенства Шварца, т. е. $f^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{R})$. Дальнейший анализ показывает, что пространства $\mathscr{H}$ и $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{R})$ на самом деле изометрически изоморфны, а значит, могут быть отождествлены. Поэтому естественно писать $h = f^*$ и рассматривать f^* и как элемент $\mathscr{H}$, и как элемент $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{R})$. В случае банахова пространства поступаем в обратном порядке: в качестве исходного объекта берем $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathbb{R})$ (или $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathbb{C})$ — для комплексного $\mathscr{B}$) и называем его сопряженным $\mathscr{B}^*$ к $\mathscr{B}$. В противоположность гильбертову случаю $\mathscr{B}^*$ нельзя отождествить с $\mathscr{B}$, но оно тоже является банаховым пространством, а на $\mathscr{B} \times \mathscr{B}^*$ имеется „внешнее произведение", обладающее некоторыми свойствами скалярного произведения на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$.

Пусть $\mathscr{B}$ — комплексное банахово пространство. В случае вещественного $\mathscr{B}$ нужно всюду в дальнейшем просто заменить $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$.

6.2.1. Определение. Элементы пространства $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathbb{C})$ непрерывных линейных операторов из $\mathscr{B}$ в $\mathbb{C}$ называются **непрерывными линейными функционалами** на $\mathscr{B}$.

6.2.2. Определение. Пространство $\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathbb{C})$ непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{B}$ называется **сопряженным** (или **двойственным**) к $\mathscr{B}$ и обозначается $\mathscr{B}^*$. Далее через $f, g, \ldots$ и $f^*, g^*, \ldots$ обозначаются соответственно элементы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$ (между f и f^* никакой связи не предполагается). Для $f \in \mathscr{B}$, $f^* \in \mathscr{B}^*$ через $f^*(f)$ обозначается, как обычно, значение отображения f^* на элементе f (являющееся комплексным числом).

6.2.3. Теорема. *Если $\mathscr{B}$ — банахово пространство, то $\mathscr{B}^*$ — тоже банахово пространство и*

$$|f^*(f)| \leqslant \|f^*\| \|f\|, \quad f \in \mathscr{B}, \quad f^* \in \mathscr{B}^*.$$

Здесь нормы берутся соответственно в $\mathscr{B}^*$ и $\mathscr{B}$. Вводить разные обозначения для этих норм редко бывает нужно, поскольку обычно из контекста ясно, что имеется в виду. Эта теорема есть частный случай теоремы 3.5.5 с $\mathscr{C} = \mathbb{C}$.

Для большинства употребительных банаховых пространств сопряженные можно отождествить (при помощи изометрического изоморфизма) с каким-нибудь известным пространством. Для наших целей достаточно следующих примеров (дальнейшую информацию можно почерпнуть в Данфорде и Шварце [1958, гл. 4]).

6.2.4. Пример. Возьмем в качестве $\mathscr{B}$ пространство $\mathbb{R}^3$ с l_p-нормой $\|\cdot\|_p$. Для заданного $h = (h_1, h_2, h_3)$ соотношение

$$f^*(f) = f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3, \quad f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathscr{B},$$

определяет линейный функционал f^* на $\mathscr{B}$. По аналогии со скалярным произведением напишем $f^*(f) = \langle f, f^* \rangle$. Если p и q — сопряженные индексы, то, согласно неравенству Гёльдера (теорема 1.3.12), $|f^*(f)| \leqslant \|h\|_q \|f\|_p$, откуда следует, что f^* непрерывен. Обратно, легко показать, что каждому непрерывному линейному функционалу f^* на $\mathbb{R}^3$ с нормой $\|\cdot\|_p$ соответствует некоторый элемент h в пространстве $\mathbb{R}^3$ с нормой $\|\cdot\|_q$. Так как это соответствие является на самом деле изометрическим изоморфизмом, удобно положить $h = f^*$ и рассматривать f^* и как линейный функционал, и как элемент $\mathbb{R}^3$. Сопряженным к $\mathbb{R}^3$ с нормой $\|\cdot\|_p$ является в таком случае само $\mathbb{R}^3$ с нормой $\|\cdot\|_q$. В действительности все нормы на $\mathbb{R}^3$ эквивалентны между собой. Далее, $\mathbb{R}^3$ как множество совпадает со своим сопряженным. Отсюда видно, что в конечномерном случае понятие двойственного пространства не представляет большого интереса.

6.2.5. Пример. В бесконечномерном случае дело обстоит как раз наоборот, и мы продемонстрируем это на примере пространств $\mathscr{L}_p$. Пусть Ω — интервал в $\mathbb{R}$. Возьмем любое p, $1 \leqslant p < \infty$, и пусть q — сопряженный индекс. Для данного $h \in \mathscr{L}_q(\Omega)$ положим

$$f^*(f) = \int_\Omega f(x)\, h(x)\, dx, \quad f \in \mathscr{L}_p(\Omega). \tag{6.2.1}$$

Тогда в силу неравенства Гёльдера (теорема 2.5.3)

$$|f^*(f)| = \left| \int_\Omega f(x)\, h(x)\, dx \right| \leqslant \|f\|_p \|h\|_q.$$

Отсюда следует, что $f^*\colon \mathscr{L}_p(\Omega) \to \mathbb{C}$ — непрерывный линейный оператор и, значит, $f^* \in \mathscr{L}(\mathscr{L}_p(\Omega), \mathbb{C})$. Можно доказать (см. Фридман [1970, § 4.14][1]), что $\|f^*\| = \|h\|_q$ и что, кроме того, всякий непрерывный линейный оператор $L_p(\Omega) \to \mathbb{C}$ допускает запись в виде (6.2.1) с некоторым $h \in \mathscr{L}_q(\Omega)$. Отображение $\mathscr{L}(\mathscr{L}_p(\Omega), \mathbb{C})$ на $\mathscr{L}_q(\Omega)$, переводящее h в f^*, снова есть изометрический изоморфизм, и мы заключаем, что сопряженным к $\mathscr{L}_p(\Omega)$ является $\mathscr{L}_q(\Omega)$. Опять удобно положить $h = f^*$ и рассматривать f^* и как элемент $\mathscr{L}_p(\Omega)^*$, и как элемент $\mathscr{L}_q(\Omega)$. Казалось бы, мы пришли к тому же выводу, что и в предыдущем примере, однако между ними имеется коренное различие, ибо $\mathscr{L}_p(\Omega)$ и $\mathscr{L}_q(\Omega)$ — существенно разные пространства.

6.2.6. Теорема. *Допустим, что $1 \leqslant p < \infty$ и q — сопряженный индекс. Пусть Ω — конечный или бесконечный интервал. Тогда $\mathscr{L}_p(\Omega)^* = \mathscr{L}_q(\Omega)$ и для каждого непрерывного линейного функ-*

[1] Или Канторович и Акилов [1977, с. 185]. — *Прим. перев.*

ционала f^* на $\mathscr{L}_p(\Omega)$ найдется такая функция f^* в $\mathscr{L}_q(\Omega)$, что

$$f^*(f)=\int_\Omega f(x)\,f^*(x)\,dx, \quad f\in\mathscr{L}_p(\Omega).$$

Отметим, что для $p=\infty$ этот результат неверен, т. е. $\mathscr{L}_\infty(\Omega)^*\neq\mathscr{L}_1(\Omega)$. В случае $p=2$ гильбертово пространство $\mathscr{L}_2(\Omega)$ сопряжено к самому себе.

6.2.7. Пример. Для пространства последовательностей l_p имеет место аналогичный результат, т. е. $l_p^*=l_q$, если $1\leqslant p<\infty$ и p, q — сопряженные индексы. При $p=\infty$ это опять неверно. Представление линейного функционала f^* в очевидных обозначениях выглядит так:

$$f^*(f)=\sum f_i f_i^*.$$

Продолжим рассмотрение основных свойств сопряженного пространства. Оно будет основано на теореме Хана — Банаха. Напомним, что непрерывный линейный функционал, определенный на плотном в $\mathscr{B}$ линейном подпространстве $\mathscr{M}$, допускает продолжение на всё $\mathscr{B}$, имеющее ту же норму (теорема 3.4.4). Теорема Хана — Банаха утверждает, что это так даже и в том случае, когда $\mathscr{M}$ не плотно (правда, тогда продолжение может оказаться неединственным). Это гораздо более глубокий результат, чем теорема 3.4.4, и в его доказательстве используются более тонкие соображения, чем простое рассуждение по непрерывности.

6.2.8. Теорема Хана — Банаха. *Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство банахова пространства $\mathscr{B}$ и f^* — непрерывный линейный функционал, определенный на $\mathscr{M}$. Тогда f^* можно продолжить до непрерывного линейного функционала на $\mathscr{B}$, норма которого совпадает с нормой f^*.*

Мы докажем эту теорему для сепарабельного пространства $\mathscr{B}$ (общий случай см. у Фридмана [1970, с. 150][1]). Это избавит нас от необходимости использовать трансфинитную индукцию (лемму Цорна), а основной структуры доказательства не нарушит. Во избежание утомительных выкладок с комплексными числами будем считать $\mathscr{B}$ вещественным. Комплексный случай можно свести к вещественному, записав $f^*(f)=\operatorname{Re}f^*(f)-i\operatorname{Re}f^*(if)$. Наконец, для функционала f^* с областью определения D символом $\|\cdot\|$ мы обозначаем его норму как оператора, т. е.

$$\|f^*\|=\sup_{f\in D,\ \|f\|=1}|f^*(f)|.$$

[1] Или у Канторовича и Акилова [1977, с. 83—84], Данфорда и Шварца [1958, с. 75]. — *Прим. перев.*

Доказательство. В качестве первого шага покажем, что если $\mathscr{M} \neq \mathscr{B}$, то f^* можно без изменения нормы продолжить на несколько большее (на одну размерность) подпространство $\mathscr{M}_1$. Возьмем произвольное $f_0 \notin \mathscr{M}$ и рассмотрим его линейную оболочку $[f_0]$. Положим $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M} \oplus [f_0]$ и заметим, что каждый элемент $f_1 \in \mathscr{M}_1$ имеет единственное представление в виде $f_1 = f + \alpha f_0$, где $f \in \mathscr{M}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ (лемма 1.2.9). При любом вещественном a функционал f_1^*, определенный на $\mathscr{M}_1$ формулой

$$f_1^*(f_1) = f^*(f) + a\alpha,$$

линеен и равен f^* на $\mathscr{M}$. Следовательно, f_1^* есть продолжение f^*. Мы покажем, что существует a, при котором f_1^* ограничен и нормы f^* и f_1^* (рассматриваемых как операторы соответственно на $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}_1$) совпадают. Для этого достаточно убедиться, что найдется a, при котором $|f_1^*(f_1)| \leqslant \|f^*\| \|f_1\|$, $f_1 \in \mathscr{M}_1$, ибо, поскольку $f_1^* = f^*$ на $\mathscr{M}_1$, ясно, что $\|f^*\| \leqslant \|f_1^*\|$. Запишем доказываемое неравенство в развернутом виде:

$$|f^*(f) + \alpha a| \leqslant \|f^*\| \|f + \alpha f_0\|, \quad f \in \mathscr{M}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Разделив его на α (при $\alpha = 0$ неравенство очевидно) и положив $g = \alpha^{-1} f \in \mathscr{M}$, получим

$$|f^*(g) + a| \leqslant \|f^*\| \|g + f_0\|,$$

что заведомо выполнено, если для всех $g_1, g_2 \in \mathscr{M}$

$$-f^*(g_1) - \|f^*\| \|g_1 + f_0\| \leqslant a \leqslant -f^*(g_2) + \|f^*\| \|g_2 + f_0\|. \quad (6.2.2)$$

Но

$$\begin{aligned} f^*(g_2) - f^*(g_1) = f^*(g_2 - g_1) &\leqslant \|f^*\| \|g_2 - g_1\| \\ &\leqslant \|f^*\| \|g_2 + f_0\| + \|f^*\| \|g_1 + f_0\|, \end{aligned}$$

откуда

$$-f^*(g_1) - \|f^*\| \|g_1 + f_0\| \leqslant -f^*(g_2) + \|f^*\| \|g_2 + f_0\|.$$

Таким образом, верхняя граница (по всем $g_1 \in \mathscr{M}$) левой части последнего неравенства не превосходит нижней границы (по всем $g_2 \in \mathscr{M}$) его правой части. Следовательно, (6.2.2) выполнено для любого a, заключенного между этими границами. Отсюда видно, что, как и утверждалось, существует f^*, продолжающий f с $\mathscr{M}$ на $\mathscr{M}_1$ без изменения нормы.

Доказательство завершается многократным продолжением f^*. Так как $\mathscr{B}$ сепарабельно, в нем найдется плотная последовательность (f_j). Положим $\mathscr{M}_0 = \mathscr{M}$ и $\mathscr{M}_{j+1} = \mathscr{M}_j \oplus [f_j]$ при $j \geqslant 0$. Согласно доказанному выше, существуют линейные функционалы f^*, f_1^*, f_2^*, ... с одинаковыми нормами на линейных подпространствах $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2 \subset \ldots$ соответственно. Пусть $\mathscr{M}_\infty$ — теоретико-множественное объединение этих подпространств. Ясно, что $\mathscr{M}_\infty$ — линейное подпространство, и, поскольку (f_l) плотна в $\mathscr{B}$, $\overline{\mathscr{M}_\infty} = \mathscr{B}$. Определим на $\mathscr{M}_\infty$ линейный функционал f^*_∞, полагая $f^*_\infty = f^*_l$ на $\mathscr{M}_l$. Тогда $\|f^*_\infty\| = \|f^*\|$. Далее, вспомним, что по теореме 3.4.4 можно непрерывно продолжить f^*_∞ без изменения нормы на $\overline{\mathscr{M}_\infty} = \mathscr{B}$. Это и будет искомое продолжение. □

Приведем четыре полезных следствия теоремы Хана — Банаха. Первое из них читателю предоставляется доказать в качестве упражнения (задача 6.1), а остальные легко из него выводятся.

6.2.9. Следствие. *Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство в $\mathscr{B}$ и g — произвольный элемент $\mathscr{B}$, не лежащий в $\overline{\mathscr{M}}$. Тогда на $\mathscr{B}$ существует непрерывный линейный функционал f^*, такой что*

(i) $f^*(f) = 0$ *для* $f \in \mathscr{M}$;
(ii) $f^*(g) = 1$;
(iii) $\|f^*\| = 1/\operatorname{dist}(g, \mathscr{M})$.

6.2.10. Следствие. *Для всякого ненулевого $f \in \mathscr{B}$ найдется $f^* \in \mathscr{B}^*$ с $\|f^*\| = 1$ и $f^*(f) = \|f\|$.*

6.2.11. Следствие. *Если $f^*(f) = 0$ при всех $f^* \in \mathscr{B}^*$, то $f = 0$.*

6.2.12. Следствие. *Для любого $f \in \mathscr{B}$*

$$\|f\| = \sup_{\|f^*\|=1} |f^*(f)|.$$

Выше мы утверждали, что можно построить „внешнее" произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, обладающее некоторыми свойствами скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в гильбертовом пространстве. Это произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$[1)] задается формулой $\langle f, f^* \rangle = f^*(f)$ и представляет собой отображение из $\mathscr{B} \times \mathscr{B}^*$ в $\mathbb{C}$ со следующими свойствами: для $f, g \in \mathscr{B}$, $f^*, g^* \in \mathscr{B}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$

(i) $\langle af + bg, f^* \rangle = a\langle f, f^* \rangle + b\langle g, f^* \rangle$,
$\langle f, af^* + bg^* \rangle = a\langle f, f^* \rangle + b\langle f, g^* \rangle$;
(ii) $|\langle f, f^* \rangle| \leqslant \|f\| \|f^*\|$;
(iii) если $\langle f, f^* \rangle = 0$ при всех $f^* \in \mathscr{B}^*$, то $f = 0$ (следствие 6.2.11).

Отметим формальное сходство соотношений (i) с аналогичными соотношениями для скалярного произведения (отсутствие „черточек" в случае комплексного пространства мы прокомментируем в § 6.4) и неравенства (ii) с неравенством Шварца. Аналог свойства (iii) для гильбертова случая выражает просто тот факт,

---

[1)] Называемое *каноническим спариванием* $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$. — *Прим. перев.*

что $\mathscr{H}^{\perp}=0$, а здесь (iii) можно интерпретировать как свидетельство того, что сопряженное пространство „достаточно велико“. Заметим, что это важное свойство опирается на теорему Хана — Банаха.

Иногда бывает полезно рассмотреть сопряженное пространство к самому $\mathscr{B}^*$.

6.2.13. Определение. Сопряженное $\mathscr{B}^{**}$ к пространству $\mathscr{B}^*$ называется **вторым сопряженным (вторым двойственным)** к $\mathscr{B}$.

На первый взгляд $\mathscr{B}^{**}$ — какой-то непонятный объект. Однако на самом деле второе сопряженное тесно связано с исходным $\mathscr{B}$. Возьмем любое $f\in\mathscr{B}$ и рассмотрим элемент $\hat{f}$ (очевидно, единственный) в $\mathscr{B}^{**}$, определенный соотношением $\hat{f}(f^*)=f^*(f)$, $f^*\in\mathscr{B}^*$. Поскольку каждое f задает единственное $\hat{f}$, соотношение $\hat{f}=Kf$ определяет оператор K: $\mathscr{B}\to\mathscr{B}^{**}$, который часто называют *естественным вложением* $\mathscr{B}$ в $\mathscr{B}^{**}$. Пространство $\hat{\mathscr{B}}=R(K)$ является, очевидно, линейным подпространством в $\mathscr{B}^{**}$, и из следствия 6.2.12 мы сразу выводим такое утверждение:

6.2.14. Лемма. *Оператор K есть изометрический изоморфизм между $\mathscr{B}$ и $\hat{\mathscr{B}}$, и $\hat{\mathscr{B}}$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{B}^{**}$.*

В свете этого результата принято отождествлять $\mathscr{B}$ и $\hat{\mathscr{B}}$ и считать $\mathscr{B}$ замкнутым подпространством $\mathscr{B}^{**}$. Фактически $\hat{\mathscr{B}}$ и $\mathscr{B}^{**}$ часто совпадают.

6.2.15. Определение. Если $\mathscr{B}=\mathscr{B}^{**}$, то $\mathscr{B}$ называется **рефлексивным.**

6.2.16. Пример. Ясно, что все конечномерные нормированные пространства рефлексивны. Что более интересно, при $1<p<\infty$ рефлексивны пространства $\mathscr{L}_p$ (по теореме 6.2.6) и пространства l_p.

Приведем пример результата, где пространство $\mathscr{B}^{**}$ позволяет установить свойство пространств $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$, которое трудно вывести непосредственно.

6.2.17. Лемма. *Пусть $\{f_\alpha\}$ — некоторое множество элементов банахова пространства $\mathscr{B}$. Предположим, что для каждого $f^*\in\mathscr{B}^*$ существует такое m, что $\sup\limits_\alpha|f^*(f_\alpha)|\leqslant m$. Тогда $\sup\limits_\alpha\|f_\alpha\|<\infty$.*

Доказательство. Вместо $\{f_\alpha\}$ рассмотрим $\{\hat{f}_\alpha\}$, т. е. будем считать каждый элемент f_α оператором на $\mathscr{B}^*$. Имеем

$$\sup_\alpha|\hat{f}_\alpha(f^*)|=\sup_\alpha|f^*(f_\alpha)|\leqslant m.$$

Поэтому, в силу принципа равномерной ограниченности 3.5.6, $\sup_\alpha \|\hat{f}_\alpha\| < \infty$. Так как $\hat{f}_\alpha = Kf_\alpha$ и K — изометрия, то $\|\hat{f}_\alpha\| = \|f_\alpha\|$, и лемма доказана. □

Подробное изучение рефлексивности не входит в наши цели, и мы здесь лишь сформулируем те результаты (см. Фридман [1970, гл. 4][1)]), которые нам пригодятся в дальнейшем.

6.2.18. Лемма. (i) *Замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства рефлексивно.*

(ii) *Банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно его сопряженное.*

(iii) *Если $\mathscr{B}$ рефлексивно, то $\mathscr{B}^*$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}$ сепарабельно.*

В § 1.5 мы убедились в том, сколь полезно понятие ортогонального дополнения. Для банаховых пространств напрашивается следующий формальный аналог, использующий каноническое спаривание $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$:

6.2.19. Определение. Пусть заданы множества $S \subset \mathscr{B}$ и $S^* \subset \mathscr{B}^*$. Множества

$$S^\perp = \{f^* \in \mathscr{B}^*\colon \langle f, f^* \rangle = 0,\ f \in S\},$$
$$S^{*\perp} = \{f \in \mathscr{B}\colon \langle f, f^* \rangle = 0,\ f^* \in S^*\}$$

называются **ортогональными дополнениями** соответственно к S и S^*. (Иногда используют также термин *аннулятор*.)

Аналогия с гильбертовым случаем здесь не такая близкая, как хотелось бы, поскольку $S^\perp$ — подмножество $\mathscr{B}^*$, а не $\mathscr{B}$. В этом снова проявляется особая геометрическая сложность банахова пространства. Основные свойства, ради которых вводится понятие ортогонального дополнения, — это $\mathscr{B}^\perp = 0$ и $\mathscr{B}^{*\perp} = 0$; первое очевидно, а второе вытекает из теоремы Хана — Банаха (следствие 6.2.12). При обращении с этим новым понятием необходима осторожность. Так, например, $\mathscr{B}^*$ может содержать *собственное* замкнутое подпространство $\mathscr{M}^*$, для которого $\mathscr{M}^{*\perp} = 0$. Легкое доказательство следующего утверждения мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

6.2.20. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство, а S и S^* — подмножества соответственно в $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$. Ортогональными дополнениями замкнутых линейных оболочек S и S^* являются соответственно $S^\perp$ и $S^{*\perp}$.*

---

1) Или Данфорд и Шварц [1958, гл. 2], Канторович и Акилов [1977, гл. 5]. — *Прим. перев.*

6.3. Слабая сходимость

Иногда удобно использовать понятие сходимости последовательностей, менее сильное, чем сходимость по норме. То что понятие „слабой“ сходимости оказалось весьма полезным, объясняется „приличным поведением“ сопряженного пространства, которое в свою очередь гарантируется теоремой Хана — Банаха. В некоторых областях, например в теории оптимизации, понятие слабой сходимости находит непосредственные приложения, а здесь оно будет употребляться в основном как техническое средство.

6.3.1. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство. Последовательность $(f_n) \subset \mathscr{B}$ называется **слабо сходящейся**, если в $\mathscr{B}$ существует элемент f (*называемый* ее **слабым пределом**), такой что

$$\lim f^*(f_n) = f^*(f) \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathscr{B}^*.$$

В этом случае мы пишем $f_n \rightharpoonup f$.

6.3.2. Лемма. (i) *Слабо сходящаяся последовательность не может иметь двух слабых пределов.*

(ii) *Сходящаяся последовательность слабо сходится к тому же пределу.*

Доказательство. (i) Если последовательность имеет два слабых предела f и g, то $f^*(f) = f^*(g)$ для всех $f^* \in \mathscr{B}^*$, т. е. $f^*(f - g) = 0$. Тогда, согласно следствию 6.2.11 теоремы Хана — Банаха, $f = g$.

(ii) Пусть $f_n \to f$ и $f^* \in \mathscr{B}^*$. Тогда, в силу непрерывности f^* как оператора на $\mathscr{B}$,

$$\lim |f^*(f_n) - f^*(f)| = \lim |f^*(f_n - f)| \leqslant \|f^*\| \lim \|f_n - f\| = 0. \quad \square$$

6.3.3. Пример. В конечномерных пространствах слабая и сильная сходимости эквивалентны. Некоторые бесконечномерные пространства (например, l_1) тоже обладают этим свойством, но, как правило, это не так. Рассмотрим в $\mathscr{L}_2(0, 1)$ последовательность (f_n), где $f_n(x) = 2^{1/2} \sin n\pi x$. Поскольку $\{f_n\}$ — ортонормированное множество, из неравенства Бесселя (лемма 1.5.13, (i)) следует, что $\lim (f_n, f) = 0$ при любом $f \in \mathscr{L}_2(0, 1)$. Поскольку сопряженное к $\mathscr{L}_2(0, 1)$ совпадает с самим $\mathscr{L}_2(0, 1)$ (теорема 6.2.6), отсюда следует, что $f_n \rightharpoonup 0$. Но, как показывает простое вычисление, $\|f_n - f_m\|_2 = 2^{1/2}$ при $n \neq m$. Значит, (f_n) не является сильно сходящейся последовательностью.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли перенормировать банахово пространство таким образом, чтобы исходная слабая сходимость стала сходимостью по новой норме? К сожалению, это невозможно. Поэтому изучение свойств слабой сходимости во всей их глубине — довольно трудная задача, которой лучше заниматься в рамках теории топологических векторных пространств (см., например, Данфорд и Шварц [1958, гл. 2]). Однако для установления тех простых результатов, которые нам здесь понадобятся, нет нужды вводить это новое понятие.

Приведем еще один признак слабой сходимости.

6.3.4. Лемма. *Последовательность* (f_n) *в банаховом пространстве* $\mathscr{B}$ *слабо сходится, если выполнены следующие два условия*:

(i) (f_n) *ограничена*;

(ii) *существует такое* $f \in \mathscr{B}$, *что* $\lim f^*(f_n) = f^*(f)$ *для всех* f^* *из некоторого плотного в* $\mathscr{B}^*$ *множества* S^*.

Доказательство. Согласно (i), существует такое m, что $\|f_n\| \leqslant m$ при $n \geqslant 1$. Далее, для любого $f^* \in \mathscr{B}^*$ найдется такое $g^* \in S^*$, что $\|f^* - g^*\| < \varepsilon$. Значит, в силу (ii),

$$\lim | f^*(f_n) - f^*(f) | = \lim | (f^* - g^*)(f_n) + g^*(f_n) - f^*(f) | \leqslant \varepsilon m + | g^*(f) - f^*(f) | \leqslant \varepsilon (m + \| f \|).$$

Поскольку ε произвольно, отсюда следует утверждение леммы. □

В следующей лемме приводятся некоторые элементарные свойства слабой сходимости. Первые два совпадают с аналогичными свойствами сильной сходимости, а третье в какой-то степени заменяет свойство непрерывности нормы относительно сходимости последовательностей.

6.3.5. Лемма. *Пусть* $f_n \rightharpoonup f$ *в банаховом пространстве* $\mathscr{B}$. *Тогда*:

(i) *последовательность* (f_n) *ограничена*;

(ii) f *принадлежит замыканию линейной оболочки множества* $\{f_n\}$;

(iii) $\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|$.

Доказательство. (i) Это сразу следует из леммы 6.2.17. (ii) Предположим противное. Согласно следствию 6.2.9, найдется такое $f^* \in \mathscr{B}^*$, что $f^*(f_n) = 0$ при $n \geqslant 1$ и $f^*(f) = 1$. Так как $f_n \rightharpoonup f$, то $f^*(f) = \lim f^*(f_n) = 0$. Получено противоречие. (iii) Для любого $f^* \in \mathscr{B}^*$

$$| f^*(f) | = \lim | f^*(f_n) | \leqslant \liminf \| f^* \| \| f_n \| = \| f^* \| \liminf \| f_n \|,$$

и требуемое неравенство вытекает из следствия 6.2.12. □

Со слабой сходимостью естественно связано понятие слабой секвенциальной компактности[1]. Главным результатом о слабой секвенциальной компактности является теорема Банаха — Алаоглу, несколько ослабленный вариант которой приводится ниже

[1] Родственное понятие слабой компактности нам здесь не понадобится, тем не менее стоит предупредить читателя, что слабая компактность и слабая секвенциальная компактность не эквивалентны (ср. с теоремой 5.2.4, (i)).

(общий случай см. у Фридмана [1970, § 4.12][1]). Напомним, что соответствующее утверждение для сходимости по норме неверно, если пространство бесконечномерно.

6.3.6. Определение. Подмножество S банахова пространства называется **относительно слабо секвенциально компактным,** если всякая последовательность в S содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Если вдобавок слабые пределы всех таких подпоследовательностей лежат в S, то оно называется **слабо секвенциально компактным**.

6.3.7. Теорема (Банах — Алаоглу). *Замкнутый единичный шар в сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве слабо секвенциально компактен.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность (f_n) в $\bar{S}(0, 1)$. Сначала при помощи диагонального процесса установим существование такой подпоследовательности $(f_{n,n})$, что $(f^*(f_{n,n}))$ сходится для всех f^* из некоторого плотного в $\mathscr{B}^*$ множества S^*.

По предположению $\mathscr{B}$ сепарабельно, значит, сепарабельно и $\mathscr{B}^*$ (лемма 6.2.18). Поэтому найдется последовательность, скажем (f_m^*), плотная в $\mathscr{B}^*$. Далее, $|f_1^*(f_n)| \leqslant \|f_1^*\| \|f_n\|$, откуда вытекает, что последовательность комплексных чисел $(f_1^*(f_n))$ ограничена и, стало быть, содержит сходящуюся подпоследовательность $f(_1^*(f_{n,1}))$. Повторяя это рассуждение, убедимся, что для всякого m существует подпоследовательность $(f_{n,m})$ последовательности $(f_{n,m-1})$, такая что $(f_m^*(f_{n,m}))$ сходится. Рассмотрим диагональную последовательность $(f_{n,n})$. При каждом m последовательность $(f_m^*(f_{n,n}))$, начиная с m-го члена, является подпоследовательностью последовательности $(f_m^*(f_{n,m}))$ и, значит, сходится.

Теперь покажем, что указанная сходимость имеет место для всех $f^* \in \mathscr{B}^*$. Для этого отождествим $f_{n,n}$ с элементом $\hat{f}_{n,n} \in \mathscr{B}^{**}$, полагая $\hat{f}_{n,n}(f^*) = f^*(f_{n,n})$ для всех $f^* \in \mathscr{B}^*$. По предположению $\mathscr{B}^{**} = \mathscr{B}$, следовательно, $\mathscr{B}$ есть множество непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{B}^*$. Поэтому, согласно лемме 3.5.11, $(\hat{f}_{n,n}(f^*))$, а значит, и $(f^*(f_{n,n}))$ сходится для всех $f^* \in \mathscr{B}^*$. Иными словами, $(f_{n,n})$ слабо сходится. По лемме 6.3.5, (iii), ее слабый предел лежит в $\bar{S}(0, 1)$. □

6.4. Случай гильбертова пространства

Теперь мы быстро просмотрим заново результаты двух предыдущих параграфов применительно к гильбертовым пространствам. Прежде всего обоснуем утверждение, что сопряженное к гильбер-

[1] Или у Данфорда и Шварца [1958, с. 459]. — *Прим. перев.*

тову пространству совпадает с ним самим, т. е. что гильбертово пространство самодвойственно. Для каждого g из комплексного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ определим оператор $g^*: \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ условием, чтобы при всех $f \in \mathscr{H}$ выполнялось равенство $g^*(f) = (f, g)$. В силу неравенства Шварца, $\| g^* \| \leqslant \| g \|$ (для норм соответственно в $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ и $\mathscr{H}$). Следовательно, g^* есть непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}$, т. е. элемент пространства $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C}) = \mathscr{H}^*$. Осталось выяснить важный вопрос: всякий ли элемент $\mathscr{H}^*$ задается таким образом при помощи некоторого элемента $\mathscr{H}$? Утвердительный ответ на него дает следующая теорема:

6.4.1. Теорема Рисса о представлении линейного функционала. *Всякому элементу g^* пространства $\mathscr{H}^*$, сопряженного к гильбертову пространству $\mathscr{H}$, соответствует единственный элемент $g \in \mathscr{H}$, такой что $g^*(f) = (f, g)$ для всех $f \in \mathscr{H}$. При этом $\|g^*\| = \|g\|$.*

Доказательство. Сначала установим существование такого g. Пусть N — нуль-пространство функционала g^*. Если $N = \mathscr{H}$, то результат очевиден (берем просто $g = 0$), поэтому будем считать, что $N \neq \mathscr{H}$. Так как N замкнуто, то по теореме о проекции 1.5.11 существует ненулевой элемент $g_0 \in N^\perp$. Поскольку $g_0 \notin N$, то $\alpha = g^*(g_0) \neq 0$. Далее,

$$g^*(f - \alpha^{-1} g^*(f) g_0) = g^*(f) - g^*(f) \cdot \alpha^{-1} g^*(g_0) = 0, \qquad f \in \mathscr{H}.$$

Отсюда $f - \alpha^{-1} g^*(f) g_0 \in N$ и $(f - \alpha^{-1} g^*(f) g_0, g_0) = 0$. Последнее равенство можно переписать в виде $g^*(f) \| g_0 \|^2 = (f, \bar{\alpha} g_0)$. Требуемое соотношение $g^*(f) = (f, g)$ получится, если взять $g = \bar{\alpha} g_0 / \| g_0 \|^2$.

Докажем единственность. Допустим, что g' — другой элемент, для которого $g^*(f) = (f, g')$ при всех $f \in \mathscr{H}$. Тогда $(f, g - g') = 0$, и, выбрав $f = g'$, получим $\|g - g'\|^2 = 0$. Отсюда $g = g'$.

Наконец, докажем равенство $\| g^* \| = \| g \|$. Прежде всего заметим, что

$$\| g \|^2 = |(g, g)| = | g^*(g) | \leqslant \| g^* \| \| g \|,$$

откуда $\| g \| \leqslant \| g^* \|$. С другой стороны,

$$\| g^* \| = \sup_{\| f \| = 1} | g^*(f) | = \sup_{\| f \| = 1} |(f, g)| \leqslant \| g \|. \ \square$$

Итак, между $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}^*$ имеется биекция — обозначим ее J,— которая сохраняет норму и, значит, является изометрией. Алгебраические свойства биекции J описываются соотношением

$$J(\alpha f + \beta g) = \bar{\alpha} J f + \bar{\beta} J g, \qquad f, \ g \in \mathscr{H}, \quad \alpha, \ \beta \in \mathbb{C}. \qquad (6.4.1)$$

Так как в правой части стоят комплексно-сопряженные числа, то J, строго говоря, не линейна, а *антилинейна*; в таком случае обычно говорят об *антиизоморфизме* (если $\mathscr{H}$ вещественно, то, конечно,

J — изоморфизм). Причину появления комплексно-сопряженных чисел нужно искать в определении скалярного произведения, из которого получено (6.4.1). По техническим причинам, связанным с определением сопряженного оператора, такое определение скалярного произведения удобнее, а небольшое усложнение, вызываемое использованием антиизоморфизма вместо изоморфизма, в дальнейшем не будет обременительным. Ввиду наличия описанного изометрического антиизоморфизма J принято отождествлять $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$.

При построении теории сопряженного банахова пространства важную роль сыграла теорема Хана — Банаха. Интересно отметить, что в случае гильбертова пространства эта теорема представляет собой уже не столь глубокий результат, и ее доказательство сразу получается из теоремы Рисса о представлении и теоремы о проекции 1.5.11.

Наконец, заметим, что определение слабой сходимости в гильбертовом пространстве можно сформулировать в терминах скалярного произведения, и потому идейно оно немного проще. Приведем аналоги определения 6.3.1 и теоремы 6.3.7.

6.4.2. Определение. Последовательность (f_n) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется **слабо сходящейся**, если существует такой элемент $f \in \mathcal{H}$, что

$$\lim (f_n, g) = (f, g) \quad \text{для всех} \quad g \in \mathcal{H}.$$

6.4.3. Теорема. *Замкнутый единичный шар в гильбертовом пространстве слабо секвенциально компактен.*

Доказательство. Нужно только освободиться от предположения о сепарабельности в теореме 6.3.7. Пусть (f_n) — произвольная последовательность в $\bar{S}(0, 1)$ и $\mathcal{M}$ — замкнутая линейная оболочка множества $\{f_n\}$. Тогда $\mathcal{M}$ — сепарабельное гильбертово пространство, а значит, по теореме 6.3.7, существуют подпоследовательность, по-прежнему обозначаемая (f_n), и элемент $f \in \mathcal{M}$, такие что $\lim (f_n, g) = (f, g)$ для всех $g \in \mathcal{M}$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что, поскольку $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, последнее равенство имеет место для всех $g \in \mathcal{H}$. $\square$

6.5. Сопряженный к ограниченному линейному оператору

Теперь, располагая понятием сопряженного пространства, мы можем обратиться к главной цели этой главы — изучению сопряженного к линейному оператору на банаховом пространстве. Вначале рассмотрим более простой случай ограниченных операторов.

Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — банаховы пространства и $L \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Для данного $g^* \in \mathcal{C}^*$ рассмотрим отображение $h^*\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, которое сопоставляет каждому элементу $f \in \mathcal{B}$ комплексное число $g^*(Lf)$.

Так как оператор L линеен и непрерывен, функционал h^* тоже линеен и непрерывен, а значит, лежит в $\mathscr{B}^*$. Итак, каждому $g^* \in \mathscr{C}^*$ отвечает единственный элемент $h^* \in \mathscr{B}^*$, такой что $g^*(Lf) = h^*(f)$ при всех $f \in \mathscr{B}$. Если записать $h^* = L^* g^*$, то это равенство принимает вид $g^*(Lf) = L^* g^*(f)$[1]. Заметим, что L^* отображает $\mathscr{C}^*$ в $\mathscr{B}^*$. Чтобы подчеркнуть аналогию с гильбертовым случаем, заметим еще, что предыдущее равенство можно записать в виде $\langle Lf, g^* \rangle = \langle f, L^* g^* \rangle$, где $\langle\,,\rangle$ обозначает каноническое спаривание пространств $\mathscr{C}, \mathscr{C}^*$ и $\mathscr{B}, \mathscr{B}^*$ соответственно.

6.5.1. Определение. Пусть L: $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$ — ограниченный линейный оператор. Соотношение

$$g^*(Lf) = L^* g^*(f) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathscr{B} \quad \text{и} \quad g^* \in \mathscr{C}^*$$

определяет оператор L^* из $\mathscr{C}^*$ в $\mathscr{B}^*$, называемый **сопряженным к L.**

6.5.2. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$. Тогда $L^* \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^*, \mathscr{B}^*)$ и $\| L^* \| = \| L \|$.*

Доказательство. Линейность очевидна. Для доказательства остальных утверждений заметим, что при любых $f \in \mathscr{B}$, $g^* \in \mathscr{C}^*$

$$| L^* g^*(f) | = | g^*(Lf) | \leqslant \| g^* \| \| Lf \| \leqslant \| g^* \| \| L \| \| f \|,$$

откуда

$$\| L^* g^* \| = \sup_{\| f \| = 1} | L^* g^*(f) | \leqslant \| L \| \| g^* \|.$$

Это показывает, что L^* ограничен и $\| L^* \| \leqslant \| L \|$. С другой стороны, согласно следствию 6.2.12,

$$\begin{aligned} \| Lf \| &= \sup_{\| g^* \| = 1} | g^*(Lf) | = \sup_{\| g^* \| = 1} | L^* g^*(f) | \\ &\leqslant \sup_{\| g^* \| = 1} \| L^* g^* \| \| f \| = \| L^* \| \| f \|, \end{aligned}$$

откуда $\| L \| \leqslant \| L^* \|$. Следовательно, $\| L^* \| = \| L \|$. □

6.5.3. Пример. Рассмотрим привычный конечномерный случай, когда оператор представляется матрицей. Пусть оператор L: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ задается формулой

$$(Lf)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

[1] Употребление звездочки в двух разных смыслах не должно вызвать недоразумений, ибо элементы сопряженного пространства у нас всегда обозначаются маленькими буквами, а сопряженные операторы — большими.

Обозначим пространство $\mathbb{C}^n$, снабженное l_p-нормой, через $l_p^{(n)}$. Пространством, сопряженным к $l_1^{(n)}$, является $l_\infty^{(n)}$. Пусть $g^* = (g_1^*, \ldots, g_n^*)$ — произвольный элемент из $[l_1^{(n)}]^*$. Имеем

$$g^*(Lf) = \sum_{i=1}^n (Lf)_i g_i^* = \sum_{i=1}^n g_i^* \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} f_j$$
$$= \sum_{j=1}^n f_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} g_i^* = (L^* g^*)(f),$$

если

$$(L^* g^*)_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} g_i^*.$$

Таким образом, сопряженный L^*: $l_\infty^{(n)} \to l_\infty^{(n)}$ к оператору L: $l_1^{(n)} \to l_1^{(n)}$, представленному матрицей $[\alpha_{ij}]$, задается транспонированной матрицей $[\alpha_{ij}]^T$. Однако следует отметить, что даже в конечномерном случае сопряженный оператор зависит от выбора нормы в рассматриваемом пространстве, и потому переход к сопряженному оператору подразумевает нечто большее, чем просто транспонирование. Например, соотношение $\| L \| = \| L^* \|$ имеет место только тогда, когда правильно выбрано сопряженное пространство.

6.5.4. Пример. Чтобы построить бесконечномерный аналог оператора из предыдущего примера, положим формально

$$(Lf)_i = \sum_{j=1}^\infty \alpha_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{6.5.1}$$

Если величина $\sup \sum_{i=1}^\infty | \alpha_{ij} |$ конечна, то L — ограниченный оператор из l_1 в l_1 и

$$\| L \| \leqslant \sup_j \sum_{i=1}^\infty | \alpha_{ij} | \equiv m.$$

Вычисление, подобное проведенному в примере 6.5.3 (легко видеть, что перемена порядка суммирования законна), показывает, что формула

$$(L^* g^*)_j = \sum_{i=1}^\infty \alpha_{ij} g_i^*, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

определяет сопряженный оператор L^*: $l_\infty \to l_\infty$. Таким образом, формально сопряженный оператор получается так же, как и выше, переходом к транспонированной бесконечной матрице.

Заметим, что при помощи сопряженного оператора можно убедиться, что на самом деле $\| L \| = m$. Это вытекает из соотношения

$\| L \| = \| L^* \|$ (теорема 6.5.2), если воспользоваться уже известным нам значением $\| L^* \|$ (теорема 3.4.7).

6.5.5. Пример. Рассмотрим, наконец, интегральный оператор K, задаваемый формулой

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy, \tag{6.5.2}$$

и предположим для простоты, что функция k: $[0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ непрерывна. Тогда, очевидно, K: $\mathscr{L}_1(0, 1) \to \mathscr{L}_1(0, 1)$ ограничен. Для $f \in \mathscr{L}_1(0, 1)$ и $g^* \in \mathscr{L}_\infty(0, 1)$ по теореме Фубини 2.4.17

$$\int_0^1 g^*(x)\, dx \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy = \int_0^1 f(y)\, dy \int_0^1 k(x, y) g^*(x)\, dx.$$

Следовательно, сопряженным к K является оператор K^*: $\mathscr{L}_\infty(0, 1) \to \mathscr{L}_\infty(0, 1)$, задаваемый формулой

$$K^* g^*(y) = \int_0^1 k(x, y) g^*(x)\, dx.$$

Особенно важное значение имеет класс ограниченных операторов, отображающих гильбертово пространство $\mathscr{H}$ в себя. В этом случае, вместо того чтобы пользоваться определением 6.5.1, которое привело бы к сопряженному, отображающему $\mathscr{H}^*$ в $\mathscr{H}^*$, удобнее, приняв во внимание возможность отождествить $\mathscr{H}^*$ с $\mathscr{H}$, определить сопряженный оператор как оператор на самом $\mathscr{H}$.

6.5.6. Определение. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Соотношение

$$(Lf, g) = (f, L^* g) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathscr{H}$$

определяет ограниченный линейный оператор $L^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, называемый (гильбертово-)**сопряженным** к L.

Следует отметить еще одно небольшое различие в определениях: в гильбертовом случае $(\alpha L)^* = \bar{\alpha} L^*$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, а в банаховом $(\alpha L)^* = \alpha L^*$. Это объясняется тем, что для скалярного произведения $(f, \alpha g) = \bar{\alpha}(f, g)$, а для канонического спаривания $\langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$. Поскольку из контекста всегда ясно, о каком сопряженном идет речь, мы в обоих случаях будем говорить просто о сопряженном L^* к L.

Поскольку сопряженный к оператору $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ сам лежит в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, с ним удобнее работать, чем в случае банахова пространства. В частности, можно дать естественное определение самосопряженности, в то время как в банаховом случае такому понятию трудно придать какой-либо смысл. Как мы увидим, самосопряженные операторы обладают рядом свойств, значительно упрощающих их рассмотрение. Поэтому задачи, допускающие постановку в рамках гильбертова пространства, легче поддаются решению.

6.5.7. Определение. Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, где $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство. Оператор L называется **самосопряженным,** если $L = L^*$.

6.5.8. Пример. Если $\sum\sum |\alpha_{ij}|^2 < \infty$, то оператор L: $l_2 \to l_2$, определенный формулой (6.5.1), ограничен. Скалярное произведение в l_2 задается равенством $(f, g) = \sum f_i \bar{g}_i$, поэтому

$$(Lf, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (Lf)_i \bar{g}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} f_j \bar{g}_i$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} f_j \overline{\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\alpha_{ij}} g_i} = (f, L^*g),$$

где

$$(L^*g)_j = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\alpha_{ij}} g_i.$$

Таким образом, сопряженный оператор L: $l_2 \to l_2$ представляется бесконечной матрицей, получаемой комплексным сопряжением и транспонированием матрицы, задающей исходный оператор. Оператор L самосопряжен тогда и только тогда, когда $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, т. е. когда задающая его матрица *эрмитова.*

6.5.9. Пример. Интегральный оператор K: $\mathscr{L}_2(0, 1) \to \mathscr{L}_2(0, 1)$, определенный формулой (6.5.2), ограничен, и сопряженный к нему задается соотношением

$$K^*g(y) = \int_0^1 \overline{k(x, y)}\, g(x)\, dx.$$

Таким образом, K самосопряжен тогда и только тогда, когда его ядро *эрмитово*: $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$, или, в вещественном случае, *симметрично*: $k(x, y) = k(y, x)$.

В качестве первого применения понятия сопряженного оператора рассмотрим проблему вывода критериев разрешимости операторного уравнения $Lf = g$. Предположим для простоты, что $g \in \mathscr{B}$ и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Тогда результаты, полученные в гл. 3, можно суммировать следующим образом. Если L биективен, то уравнение имеет единственное решение $f = L^{-1}g$ при любом g, и так как L^{-1} непрерывен (теорема 3.5.3), то никаких дополнительных аналитических затруднений не возникает. Если L сюръективен, то решение всегда существует, но не всегда единственно, если же L инъективен, то (единственное) решение существует тогда и только тогда, когда $g \in R(L)$. В конечномерном случае инъективность оператора L влечет за собой его биективность, и существует еще ряд сильных результатов подобного типа (см. задачу 6.16). В бесконечномерном случае ситуация сложнее. Например, может быть так, что оператор L инъективен, но не сюръективен или сюръективен, но не инъективен (см. задачу 3.2). Но всё-таки некоторые конечномерные результаты допускают частичное обобщение на бесконечномерный случай, как в следующей теореме (другие результаты такого рода см. в задаче 6.17):

6.5.10. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$. Тогда*

(i) $\overline{R(L)} = N(L^*)^{\perp}$;

(ii) *если $R(L)$ замкнуто, то и $R(L^*)$ замкнуто и $R(L^*) = N(L)^{\perp}$.*

Доказательство. Убедиться в справедливости (i) сравнительно нетрудно, и мы предоставляем это читателю в качестве упражнения. (ii) Так как $N(L)^{\perp}$ замкнуто (лемма 6.2.20), достаточно показать, что $R(L^*) = N(L)^{\perp}$. Легко получить включение $R(L^*) \subset N(L)^{\perp}$. Действительно, если $g \in R(L^*)$, то существует такое f^*, что $L^*f^* = g$ и

$$g^*(f) = L^*f^*(f) = f^*(Lf) = 0, \quad f \in N(L),$$

откуда $g^* \in N(L)^{\perp}$.

Докажем обратное включение. Возьмем произвольное $f^* \in N(L)^{\perp}$ и заметим, что при каждом $g \in R(L)$ комплексное число $f^*(f)$, где f — любой вектор, такой что $Lf = g$, определено однозначно (в самом деле, если $Lf_1 = Lf_2 = g$, то $f_1 - f_2 \in N(L)$ и $f^*(f_1 - f_2) = 0$). Значит, соотношение $h^*(Lf) = f^*(f)$ $(f \in \mathscr{B})$ определяет функционал h^* на $R(L)$. Очевидно, что h^* линеен. Докажем, что он непрерывен. Вспомним (задача 3.10), что существует m, такое что для любого $g \in R(L)$ найдется f с $Lf = g$ и $\|f\| \leqslant m\|g\|$; поэтому

$$|h^*(g)| = |f^*(f)| \leqslant \|f^*\| \|f\| \leqslant m \|f^*\| \|g\|.$$

По теореме Хана — Банаха 6.2.8, h^* имеет продолжение — обозначим его $\tilde{h}^*$ — на всё $\mathscr{C}$ и

$$L^*\tilde{h}^*(f) = \tilde{h}^*(Lf) = h^*(Lf) = f^*(f), \quad f \in \mathscr{B}.$$

Отсюда следует, что $L^*\tilde{h}^* = f^*$, т. е. $f^* \in R(L^*)$. □

Этот результат представляет собой теорему существования. Он менее удовлетворителен, чем соответствующее конечномерное соотношение $R(L) = N(L^*)^{\perp}$, поскольку дает информацию только о замыкании множества $R(L)$, а не о нём самом. Поэтому для успешного применения этой теоремы обычно нужны дополнительные ограничения на оператор. С подобным примером мы встретимся в следующей главе. Там множество значений оператора замкнуто, и из теоремы 6.5.10 выводится весьма мощный принцип существования.

Наш последний результат в этом параграфе посвящен связи между операторами, обратными к L и L^*. Его доказательство опущено, так как оно очень похоже на доказательство теоремы 6.7.7, которое будет дано в свое время.

6.5.11. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства. Оператор $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда этим свойством обладает L^*, и в таком случае* $(L^{-1})^* = L^{*-1}$.

6.6. Ограниченные самосопряженные операторы: спектральная теория

Самосопряженные операторы образуют один из простейших и в то же время один из самых полезных классов линейных операторов. В этом параграфе мы сосредоточим внимание на уравнении $(\lambda I - L) f = g$ с ограниченным и самосопряженным оператором L.

Теорема 6.5.10 представляет собой попытку описать множество значений ограниченного линейного оператора при помощи нуль-пространства сопряженного к нему оператора, и эта теорема полезна при рассмотрении вопроса о том, имеет ли L обратный и ограничен ли он. Если вместо L взять $\lambda I - L$, то она даст информацию о спектре $\sigma(L)$. Когда L самосопряжен, все подобные результаты становятся намного проще и сильнее. Для общего оператора $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ спектр $\sigma(L)$ содержится в круге $|\lambda| \leqslant \|L\|$ — и это почти всё, что можно о нём сказать. Если же L самосопряжен, то $\sigma(L)$ веществен (ср. с соответствующим результатом для эрмитовых матриц), и можно получить оценки его размеров через величины, которые сравнительно легко вычисляются.

В этом параграфе $\mathscr{H}$ — *комплексное* гильбертово пространство (некоторые из приведенных ниже результатов для вещественного $\mathscr{H}$ неверны), $L\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — ограниченный самосопряженный оператор и $\lambda = \mu + i\nu$ — комплексное число. Начнем с одной технической леммы.

6.6.1. Лемма. *Для всех $f \in \mathscr{H}$ имеем* $\|(\lambda I - L) f\| \geqslant |\operatorname{Im} \lambda| \, \|f\|$.

Доказательство. Прямым вычислением получаем

$$\|(L - \lambda I) f\|^2 = \|(L - \mu I) f\|^2 + \nu^2 \|f\|^2 + i\nu ((L - \mu I) f, f) - \\ - i\nu (f, (L - \mu I) f).$$

Так как L самосопряжен, то $L - \mu I$ тоже обладает этим свойством, поэтому два последних члена взаимно уничтожаются. Отсюда сразу вытекает доказываемое неравенство, поскольку первый член правой части неотрицателен. □

Из этой леммы видно, что собственные значения L вещественны. Мы хотим доказать более сильное утверждение о том, что весь спектр, который может содержать и не только собственные значения, вещественен.

6.6.2. Лемма. *Замкнутые подпространства* $N(\lambda I - L)$ *и* $\overline{R(\lambda I - L)}$ *являются ортогональными дополнениями друг друга, и* $\mathscr{H} = N(\lambda I - L) \oplus \overline{R(\lambda I - L)}$.

Доказательство. Это вытекает из теоремы 6.5.10. В самом деле, если λ вещественно, то $(\lambda I - L) = (\lambda I - L)^*$ и $\overline{R(\lambda I - L)} = N(\lambda I - L)^{\perp}$. С другой стороны, при $\nu \neq 0$ по предыдущей лемме $N(\bar{\lambda} I - L) = 0$, и так как $(\lambda I - L)^* = (\bar{\lambda} I - L)$, то

$$\overline{R(\lambda I - L)} = (\bar{\lambda} I - L)^{\perp} = 0^{\perp} \mathscr{H}. \ \square$$

6.6.3. Теорема. *Пусть* $\mathscr{H}$ — *комплексное гильбертово пространство и* $L\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — *ограниченный самосопряженный оператор. Тогда спектр* $\sigma(L)$ *веществен и*

$$\|(\lambda I - L)^{-1}\| \leqslant |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0).$$

Доказательство. Как было замечено выше, $\overline{R(\lambda I - L)} = \mathscr{H}$ при $\nu \neq 0$. Далее, по лемме 6.6.1, $\|(\lambda I - L) f\| \geqslant |\nu| \|f\|$. Из леммы 3.8.18 следует, что $(\lambda I - L)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, т. е. $\lambda \in \rho(L)$. Последнее утверждение теоремы получается из предыдущего неравенства, если положить в нём $g = (\lambda I - L) f$. □

В случае когда $\mathscr{H}$ конечномерно, $\sigma(L)$ состоит из одних собственных значений. Следующую теорему можно рассматривать как частичную замену этого результата.

6.6.4. Теорема. *Пусть* $\mathscr{H}$ — *комплексное гильбертово пространство и* $L\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — *ограниченный самосопряженный оператор. Тогда:*

(i) $\lambda \in \rho(L)$ *в том и только том случае, если существует такое* $m > 0$, *что*

$$\|(\lambda I - L) f\| \geqslant m \|f\|, \quad f \in \mathscr{H}; \tag{6.6.1}$$

(ii) $\lambda \in \sigma(L)$ *в том и только том случае, если существует такая последовательность* (f_n), *что*

$$\|f_n\| = 1, \quad \lim \|(\lambda I - L) f_n\| = 0.$$

Доказательство. Если $\lambda \in \rho(L)$, то

$$\|f\| = \left\|(\lambda I - L)^{-1} (\lambda I - L) f\right\| \leqslant \left\|(\lambda I - L)^{-1}\right\| \|(\lambda I - L) f\|,$$

и, полагая $m^{-1} = \|(\lambda I - L)^{-1}\|$, получаем (6.6.1). Достаточность условия (6.6.1) устанавливается рассуждением, использованным при доказательстве предыдущей теоремы, надо лишь заменить m на $|\nu|$. Утверждение (ii) очевидным образом следует из (i). □

Второе утверждение этой теоремы вскрывает различие между спектрами в конечномерном и бесконечномерном случаях. Когда $\mathscr{H}$ конечномерно, множество $\{f_n\}$ относительно секвенциально компактно и существует подпоследовательность — обозначим ее по-прежнему (f_n), — сходящаяся к некоторому пределу f. Отсюда следует, что $Lf_n \to Lf$ и что f — собственная функция, а λ — собственное значение. Так мы вновь приходим к выводу, что каждая точка спектра есть собственное значение. Для бесконечномерного $\mathscr{H}$ это рассуждение непригодно, потому что (f_n) может не содержать сходящейся подпоследовательности. С другой стороны, в каком-то смысле λ есть приближенное собственное значение, ибо даже если никакого ненулевого f с $(\lambda I - L)f = 0$ не существует, всегда найдется последовательность (f_n), для которой это равенство приближенно выполнено, т. е. $\|(\lambda I - L)f_n\| \to 0$.

Выведем теперь одну полезную оценку протяженности спектра. Заметим, что, поскольку L самосопряжен, число (Lf, f) при всех $f \in \mathscr{H}$ вещественно.

6.6.5. Определение. Для всякого самосопряженного оператора L положим

$$m_- = \inf_{\|f\|=1} (Lf, f), \quad m_+ = \sup_{\|f\|=1} (Lf, f).$$

6.6.6. Теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и L: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда $\sigma(L)$ содержится в интервале $[m_-, m_+]$, причем m_- и m_+ оба принадлежат $\sigma(L)$.*

Доказательство. При $\lambda > m_+$

$$(\lambda - m_+)\|f\|^2 \leqslant |((\lambda I - L)f, f)| \leqslant \|(\lambda I - L)f\|\|f\|.$$

Следовательно, $\|(\lambda I - L)f\| \geqslant (\lambda - m_+)\|f\|$ и, по теореме 6.6.4, (i), $\lambda \in \rho(L)$. Аналогично $\lambda \in \rho(L)$ при $\lambda < m_-$.

Докажем второе утверждение. Положим $\lambda = m_-$. По определению m_- найдется последовательность (f_n) с $\|f_n\| = 1$ и $\lim((\lambda I - L)f_n, f_n) = 0$. Далее, согласно задаче 6.23 с $f = f_n$, $L = (\lambda I - L)$ и $g = (\lambda I - L)f_n$,

$$\|(\lambda I - L)f_n\|^4 \leqslant |((\lambda I - L)f_n, f_n)|\|\lambda I - L\|^3\|f_n\|^2. \tag{6.6.2}$$

Значит, $\lim\|(\lambda I - L)f_n\| = 0$ и, по теореме 6.6.4, (ii), $\lambda \in \sigma(L)$. Аналогичное рассуждение проходит и для m_+. □

6.6.7. Теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и L — ограниченный самосопряженный оператор в нём. Тогда* $\| L \| = r_\sigma(L) = \max(| m_- |, | m_+ |)$.

Доказательство. Второе равенство следует из предыдущей теоремы. Докажем первое. Заметим, что по теореме 3.7.11

$$r_\sigma(L) = \lim \| L^n \|^{1/n}.$$

Значит, достаточно показать, что $\| L^k \| = \| L \|^k$ при $k = 2^n$ и $n = 1, 2, \ldots$. Имеем

$$\| Lf \|^2 = (Lf, Lf) = (L^2 f, f) \leqslant \| L^2 \| \| f \|^2,$$

поэтому $\| L \|^2 \leqslant \| L^2 \|$. С другой стороны, $\| L^2 f \| \leqslant \| L \| \| Lf \| \leqslant \| L \|^2 \| f \|$ откуда $\|L^2\| \leqslant \|L\|^2$. Следовательно, $\|L^2\| = \|L\|^2$. Так как операторы L^2, L^4, ... тоже самосопряжены, аналогичное рассуждение показывает, что $\|L^k\| = \|L\|^k$ при $k = 2^n$. □

Для произвольного ограниченного оператора L спектральный радиус $r_\sigma(L)$ может быть строго меньше $\| L \|$ и, более того, спектр может состоять из одной точки 0 (как для оператора Вольтерры из задачи 3.24). Если же L самосопряжен, то обе эти возможности исключены предыдущей теоремой.

6.6.8. Пример. Многие вопросы, поднятые в этом параграфе, хорошо иллюстрируются интегральным уравнением $(\lambda I - K) f = g$, где

$$Kf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x - y) f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если k — четная вещественнозначная функция из $\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$, то K — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$. Удобно изучать K при помощи преобразования Фурье. В силу теоремы 2.6.1 [1]),

$$(Kf, f) = (\hat{k}\hat{f}, \hat{f}), \tag{6.6.3}$$

откуда $m_- \geqslant k_- = \inf \hat{k}(t)$, $m_+ \leqslant k_+ = \sup \hat{k}(t)$, где inf и sup берутся по всем $t \in \mathbb{R}$. На основании теоремы 6.6.6 заключаем, что $\sigma(K) \subset [k_-, k_+]$. В действительности $\sigma(K) = [k_-, k_+]$. Чтобы в этом убедиться, возьмем произвольную точку λ в $[k_-, k_+]$ и заметим, что

$$((\lambda I - K)^2 f, f) = ((\lambda - \hat{k})^2 \hat{f}, \hat{f}). \tag{6.6.4}$$

[1]) И теоремы 2 6.4. — *Прим. перев.*

Поскольку $\hat{k}$ — непрерывная функция[1)], найдется такое t_0, что $\hat{k}(t_0) = \lambda$. Положим

$$\hat{f}_n(t) = \begin{cases} (n/2)^{1/2} & \text{при} \quad t \in [t_0 - n^{-1},\ t_0 + n^{-1}], \\ 0 & \text{при} \quad t \notin [t_0 - n^{-1},\ t_0 + n^{-1}]. \end{cases}$$

Короткое вычисление показывает, что $\lim((\lambda - \hat{k})\hat{f}_n, \hat{f}_n) = 0$, а потому, согласно (6.6.4), $\lim((\lambda I - K)^2 f_n, f_n) = 0$. Значит, в силу (6.6.2), $\lim \|\lambda I - K) f_n\| = 0$. Так как $\|f_n\| = \|\hat{f}_n\| = 1$, то $\lambda \in \sigma(K)$ по теореме 6.6.4.

Какому спектру принадлежит λ — точечному или непрерывному (остаточный спектр пуст; см. задачу 6.31), зависит от меры множества $\Lambda = \{t: \hat{k}(t) = \lambda\}$. В самом деле, если f — решение уравнения $(\lambda I - K) f = 0$, то $(\lambda - \hat{k}(t))\hat{f}(t) = 0$ п.в. Если Λ имеет меру нуль, то $\hat{f} = 0$ п. в. и λ не содержится в точечном спектре, а стало быть, содержится в непрерывном. Если же мера Λ положительна, то можно построить собственную функцию, положив $\hat{f} = 1$ на каком-нибудь компактном подмножестве Λ положительной меры и 0 в остальных точках. Следовательно, λ принадлежит точечному спектру.

6.7. Сопряженный к неограниченному линейному оператору в гильбертовом пространстве

Теперь мы расширим определение сопряженного оператора на неограниченные операторы. При этом будут рассмотрены только операторы, отображающие гильбертово пространство в себя. Это достаточно широкий класс, включающий операторы, которые связаны с обыкновенными дифференциальными уравнениями, а это и есть то главное приложение, которое нас интересует. Неограниченный случай требует особых хлопот потому, что области определения неограниченных операторов являются собственными подмножествами гильбертова пространства. Удовлетворительную теорию удается построить лишь тогда, когда эти области плотны в $\mathscr{H}$, однако в большинстве важных случаев, и в частности для большинства дифференциальных операторов, это условие выполнено, и потому оно не представляет собой серьезного ограничения. Если область определения плотна, то почти все основные свойства сопряженных операторов сохраняются практически без изменений.

Всюду далее $\mathscr{H}$ будет комплексным гильбертовым пространством, а L — линейным оператором из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$ с областью опреде-

[1)] Как преобразование Фурье функции из $\mathscr{L}_1$. — *Прим. перев.*

ления $D(L)$, плотной в $\mathscr{H}$ [1]. Допустим, что M — линейный оператор, такой что при всех $f \in D(L)$ и $g \in D(M)$

$$(Lf, g) = (f, Mg). \tag{6.7.1}$$

Если бы L был ограничен и это соотношение выполнялось для всех $f, g \in \mathscr{H}$, то M был бы однозначно определенным сопряженным оператором к L. Однако в неограниченном случае само по себе соотношение (6.7.1) еще не определяет M однозначно, поскольку не указывает $D(M)$, и ему удовлетворяет любое сужение оператора M. Правдоподобно, хотя и не очевидно, что из всех операторов, удовлетворяющих (6.7.1), найдется один с максимальной (в смысле теоретико-множественного включения) областью определения. Этот оператор L^* и есть искомое обобщение сопряженного оператора. Выбор $D(L^*)$ поясняется следующими соображениями.

Пусть $D(L^*)$ — множество таких $g \in \mathscr{H}$, для которых существует $h \in \mathscr{H}$ с $(f, h) = (Lf, g)$ при всех $f \in D(L)$. Для данного g элемент h определен однозначно. В самом деле, если k — другой элемент, такой что $(f, k) = (Lf, g)$, то $(f, h - k) = 0$ и, поскольку $D(L)$ плотна, $h = k$. (Отметим, что в случае неплотной $D(L)$ приведенное определение не имеет смысла.) Положим $h = L^*g$. Легко проверить, что L^* линеен, и ясно, что $(Lf, g) = (f, L^*g)$ при всех $f \in D(L)$ и $g \in D(L^*)$. Значит, (6.7.1) выполнено для $M = L^*$, и любой оператор M, удовлетворяющий (6.7.1), является сужением L^*. Следовательно, как и утверждалось выше, область $D(L^*)$ максимальна. В большинстве интересующих нас случаев $D(L^*)$ тоже плотна в $\mathscr{H}$.

6.7.1. Определение. Пусть L — линейный оператор из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$ с плотной областью определения. Определим $D(L^*)$ как множество таких элементов g, для которых существует h с $(Lf, g) = (f, h)$ при всех $f \in D(L)$. Пусть L^* — оператор с областью определения $D(L^*)$, такой что $L^*g = h$ на $D(L^*)$, или, что эквивалентно,

$$(Lf, g) = (f, L^*g) \quad \text{при всех} \quad f \in D(L),\ g \in D(L^*). \tag{6.7.2}$$

Оператор L^* называется **сопряженным** к L.

В классической теории дифференциальных уравнений термин „сопряженный" употребляется для некоего формального оператора (который мы называем здесь *формально сопряженным* в соответствии с определением 3.8.3) и подразумевает лишь описание коэффициентов дифференциального оператора. Из следующего примера видно, что теоретико-операторное понятие сопряженного

[1] Важно иметь в виду, что указание области определения есть существенная часть задания неограниченного оператора.

намного глубже, в нем существенно учитываются и граничные условия.

6.7.2. Пример. Рассмотрим формальный дифференциальный оператор $l = id/dx$ на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\mathscr{A}$ — линейное подпространство в $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(0, 1)$, состоящее из абсолютно непрерывных функций с производными из $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Возьмем $D(L) = \mathscr{A}$ и на $D(L)$ положим $Lf = if'$. Интегрированием по частям получаем, что для $f \in D(L)$

$$(Lf, g) = \int_0^1 if'(x)\bar{g}(x)\,dx = i[f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0)] + \int_0^1 f(x)\overline{(ig)'(x)}\,dx = i[f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0)] + (f, Mg),$$

где $Mg = ig'$ и $D(M)$ — произвольное множество гладких функций. Равенство (6.7.1) будет выполнено, если член в квадратных скобках равен нулю, т. е. если $g(0) = g(1) = 0$. Однако одного этого условия недостаточно для точного задания $D(M)$. Заметив, что область $D(L)$ должна быть максимальной, можно предположить, что хорошим кандидатом на роль $D(L^*)$ является множество $\mathscr{A}' = \{g\colon\ g \in \mathscr{A}, g(0) = g(1) = 0\}$. Чтобы доказать, что, действительно, $D(L^*) = \mathscr{A}'$, поступим следующим образом.

Очевидно, что $\mathscr{A}' \subset D(L^*)$; таким образом, достаточно доказать обратное включение. Возьмем любое $g \in D(L^*)$ и положим $L^*g = h$. Тогда для всех $f \in D(L)$

$$\int_0^1 f(x)\bar{h}(x)\,dx = (f, h) = (f, L^*g) = (Lf, g) = \int_0^1 if'(x)\bar{g}(x)\,dx. \qquad (6.7.3)$$

Теперь положим $k(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ и заметим, что $k' = h$, $k(0) = 0$ и $k \in \mathscr{A}$. Производя в левой части (6.7.3) интегрирование по частям, получаем

$$\int_0^1 f'(x)[i\bar{g}(x) + \bar{k}(x)]\,dx = f(1)k(1). \qquad (6.7.4)$$

Если $v \in \mathscr{H}$ и $f(x) = \int_x^1 v(t)\,dt$, то $f \in D(L)$, $f' = v$ и $f(1) = 0$. Следовательно, в силу (6.7.4), $(v, -ig + k) = 0$ при всех $v \in \mathscr{H}$. Это показывает, что $k = ig$, откуда $g \in \mathscr{A}$ и $g(0) = 0$. Докажем, что $g(1) = 0$. Для этого заметим, что (6.7.4) — это просто равенство $f(1)k(1) = 0$ $(f \in D(L))$. Так как $D(L)$ содержит и такие функции, которые не обращаются в нуль при $x=1$, то $0=k(1)=ig(1)$. Тем самым доказано, что $g\in\mathscr{A}'$ и, значит, $D(L^*)\subset\mathscr{A}'$.

Можно рассмотреть тот же пример с граничными условиями, скажем положить $D(L)=\{f\colon f\in\mathscr{A}, f(0)=f(1)=0\}$. Аналогичные рассуждения показывают, что в этом случае $D(L^*)=\mathscr{A}$.

Заметим, что ни в том, ни в другом случае L не совпадает с L^*, хотя в смысле классической теории дифференциальных уравнений оператор l „самосопряжен".

При изучении сопряженных к неограниченным операторам важную роль играют графики (определение 3.8.7). Напомним, что график $G(L)$ и обратный график $G'(L)$ — это подмножества $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$, состоящие соответственно из пар $[f, Lf]$ и $[Lf, f]$, $f\in D(L)$. Эффективность использования графиков основана на следующем результате:

6.7.3. Лемма. $G'(-L^*)=G(L)^\perp$ *(ортогональное дополнение берется в* $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$*).*

Доказательство. Согласно определению (3.8.3) скалярного произведения в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$,

$$([f, Lf], [-L^*g, g])=(f, -L^*g)+(Lf, g), \quad f\in D(L), \ g\in D(L^*).$$

По определению L^* правая часть равна нулю. Следовательно, $G'(-L^*)\subset G(L)^\perp$. Для доказательства обратного включения возьмем произвольный элемент $[h, g]\in G(L)^\perp$. Имеем

$$(f, h)+(Lf, g)=([f, Lf], [h, g])=0.$$

По определению L^* отсюда следует, что $g\in D(L^*)$ и $h=-L^*g$, т. е. $G(L)^\perp\subset G'(-L^*)$. □

Как и в предыдущем обсуждении неограниченных операторов (§ 3.8), существенную роль играет понятие замкнутости. Ниже через L^{**} обозначается *второй сопряженный* оператор $(L^*)^*$, а через $\bar{L}$, как обычно, замыкание L.

6.7.4. Теорема. *Сопряженный оператор замкнут.*

Доказательство. Ортогональное дополнение $G(L)^\perp$ есть замкнутое множество, поэтому $G'(-L^*)$ замкнуто по предыдущей лемме, т. е. L^* замкнут. □

6.7.5. Теорема. *Область определения L^* плотна тогда и только тогда, когда L замыкаем, и в этом случае $L^{**}=\bar{L}$. В частности, $L^{**}=L$, если L замкнут.*

Доказательство. Сначала предположим, что $D(L^*)$ плотна. Если $[0, g]\in G'(-L^*)^\perp$, то $(g, f)=([0, g], [-L^*f, f])=0$ при всех $f\in D(L^*)$. Следовательно, $g=0$, откуда вытекает, что $G'(-L^*)$

есть график (лемма 3.8.11). Далее, по лемме 6.7.3, $G(L) \perp G'(-L^*)$. Значит, $\overline{G(L)} \subset G'(-L^*)^\perp$, а поскольку всякое линейное подпространство графика само является графиком (задача 3.28), то $\overline{G(L)}$ — график.

Теперь предположим, что L замыкаем. Тогда $G(\bar{L})$ замкнуто. Но $(\bar{L})^* = L^*$ (задача 6.26), откуда следует, что $G(\bar{L}) = G'(-L^*)^\perp$. Если бы $D(L^*)$ была неплотна, то существовало бы ненулевое g, такое что $g \perp D(L^*)$. Короткое вычисление показывает, что $[0, g] \in G(-L^*)^\perp = G(\bar{L})$, а это противоречит тому факту, что $G(\bar{L})$ — график. Таким образом, $D(L^*)$ плотна.

Наконец, $L^{**} = \bar{L}$, так как $G(L^{**}) = G(-L^*)^\perp = G(\bar{L})$. □

Результаты, касающиеся связи множеств значений и нуль-пространств операторов L и L^*, почти совпадают с соответствующими результатами для ограниченных операторов. Следующие две теоремы являются аналогами теорем 6.5.10 и 6.5.11.

6.7.6. Теорема. $\overline{R(L)} = N(L^*)^\perp$.

Доказательство. Упражнение для читателя. □

6.7.7. Теорема. *Если L замкнут, то $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ тогда и только тогда, когда $L^{*-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, и в этом случае $(L^{-1})^* = L^{*-1}$.*

Доказательство. Если $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, то, по теореме 6.5.2, $(L^{-1})^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Для любых $g \in D(L^*)$ и $h \in \mathscr{H}$

$$((L^{-1})^* L^* g, h) = (L^* g, L^{-1} h) = (g, LL^{-1} h) = (g, h).$$

Следовательно, $(L^{-1})^* L^* g = g$. Далее, $((L^{-1})^* f, Lg) = (f, L^{-1} Lg) = (f, g)$ для $f \in \mathscr{H}$ и $g \in D(L)$. Из определения сопряженного оператора следует, что $(L^{-1})^* f \in D(L^*)$ и $L^*(L^{-1})^* f = f$. Эти два соотношения дают в точности всё, что нужно для установления существования L^{*-1} и равенства $L^{*-1} = (L^{-1})^*$.

Обратно, если $L^{*-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, то в силу только что доказанного $L^{**-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Так как $L^{**} = L$ (теорема 6.7.5), мы заключаем, что $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. □

Чрезвычайно важную роль в приложениях играют самосопряженные неограниченные операторы, во многом благодаря появлению таких операторов в теории дифференциальных уравнений.

6.7.8. Определение. Плотно определенный линейный оператор L в гильбертовом пространстве называется **самосопряженным,** если $L = L^*$. (Заметьте, что при этом обязательно должно быть $D(L) = D(L^*)$.)

6.7.9. Пример. Посмотрим, как построить самосопряженный оператор из формального оператора $l = i d/dx$ на $[0, 1]$. Главной проблемой является выбор граничных условий, при которых $D(L) =$

$D(L^*)$. Чтобы понять, как надо действовать, проведем следующее формальное рассуждение.

Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(0, 1)$ и $\mathscr{A}$ — подмножество в $\mathscr{H}$, состоящее из абсолютно непрерывных функций с производными из $\mathscr{H}$. Рассмотрим временно операторы L и M, области определения которых обе лежат в $\mathscr{A}$, причем $Lf = lf$ на $D(L)$ и $Mf = lf$ на $D(M)$. Интегрируя по частям, получаем

$$(Lf, g) - (f, Mg) = i[f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0)].$$

Если область $D(L)$ фиксирована, то M будет сопряженным к L тогда, когда он имеет максимальную область определения, удовлетворяющую требованию, чтобы член в квадратных скобках равнялся нулю при всех $f \in D(L)$. Ясно, что чем больше $D(L)$, тем меньше $D(L^*)$. Для самосопряженного оператора L указанная максимальная область должна совпадать с $D(L)$. Согласно примеру 6.7.2, если $D(L) = \mathscr{A}$, то $D(L^*) = \mathscr{A}' = \{f\colon f \in \mathscr{A},\ f(0) = f(1) = 0\}$. Очевидно, что это $D(L)$ слишком велико. С другой стороны, если $D(L) = \mathscr{A}'$, то $D(L^*) = \mathscr{A}$, и $D(L)$ слишком мало. Правдоподобно, что правильная область должна лежать где-то между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$, поэтому испробуем $D(L) = \{f\colon f \in \mathscr{A},\ f(1) = \alpha f(0)\}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда

$$[f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0)] = f(0)[\alpha\bar{g}(1) - \bar{g}(0)],$$

и для обращения в нуль этого выражения при всех $f \in D(L)$ необходимо, чтобы $\alpha\bar{g}(1) = \bar{g}(0)$. Это условие должно совпадать с исходным условием $f(1) = \alpha f(0)$, что имеет место при $\alpha\bar{\alpha} = 1$. Приведенные соображения подсказывают, что подходящей областью определения будет

$$D(L) = \{f\colon f \in \mathscr{A},\ f(1) = e^{i\theta} f(0)\} \qquad (\theta \in \mathbb{R}),$$

а теперь это предположение можно проверить приблизительно так же, как в примере 6.7.2. Таким образом, на основе формального оператора id/dx на отрезке $[0, 1]$ можно построить бесконечно много самосопряженных операторов.

В этом простом примере подходящее граничное условие угадать нетрудно. Однако для операторов l второго порядка в случае бесконечного интервала или в случае, когда у оператора есть особенности, выбор подходящих граничных условий представляет уже весьма трудную проблему. Систематические методы, разработанные для решения этой проблемы, будут изложены в гл. 10.

Ограниченные и неограниченные самосопряженные операторы имеют много общего; потеря непрерывности в достаточной мере компенсируется тем свойством, что неограниченные самосопряженные операторы замкнуты (теорема 6.7.4). В частности, главный результат о спектре сохраняет силу.

6.7.10. Теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и L — (неограниченный) самосопряженный оператор. Тогда спектр $\sigma(L)$ веществен и*

$$\|(\lambda I-L)^{-1}\|\leqslant|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}\qquad(\operatorname{Im}\lambda\neq 0).$$

Доказательство почти то же самое, что и в случае теоремы 6.6.3. Повторение доказательства леммы 6.6.1 применительно к сужению f на $D(L)$ приводит к неравенству $\|(\lambda I-L)f\|\geqslant|\operatorname{Im}\lambda|\,\|f\|$ Соотношение $\mathscr{H}=N(\lambda I-L)\oplus\overline{R(\lambda I-L)}$ следует из теоремы 6.7.6. Значит, $\overline{R(\lambda I-L)}=\mathscr{H}$ при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Так как L замкнут, применима лемма 3.8.18, и мы заключаем, что $(\lambda I-L)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$. □

Задачи

6.1. Докажите следствие 6.2.9. [*Указание.* Всякое $f\in\mathscr{M}_1=\mathscr{M}+[g]$ можно однозначно представить в виде $f=h+\lambda g$ $(h\in\mathscr{M},\ \lambda\in\mathbb{C})$. Примените теорему Хана — Банаха к функционалу f^* на $\mathscr{M}_1$, задаваемому формулой $f^*(h+\lambda g)=\lambda$.] Выведите из него следствия 6.2.10—6.2.12.

6.2. Предположим, что $g\in\mathscr{L}_p(0,1)$ при некотором $p>1$ и

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx=0\quad\text{для всех}\quad f\in\mathscr{C}_0^\infty([0,1]).$$

При помощи следствия 6.2.12 и теоремы 2.5.6 докажите, что $g=0$ п. в.

6.3. (геометрический вариант теоремы Хана — Банаха). Пусть $\mathscr{B}$ — вещественное банахово пространство и f^* — ненулевой элемент $\mathscr{B}^*$. По аналогии с трехмерным случаем множество $\{f\colon f^*(f)=a\}$ при всяком вещественном a называется гиперплоскостью; гиперплоскость делит $\mathscr{B}$ на «полупространства» $f^*(f)\geqslant a$ и $f^*(f)\leqslant a$. Пусть S — замкнутый единичный шар в $\mathscr{B}$ и $f_0\in\partial S$. Элемент f^* называют *касательным* к S в f_0, если $f^*(f)\leqslant f^*(f_0)$ при всех $f\in S$, а гиперплоскость $f^*(f)=f^*(f_0)$ — *касательной гиперплоскостью* к S в f_0. Докажите при помощи следствия 6.2.10, что касательная гиперплоскость существует в каждой точке $f_0=\partial S$.

6.4. Пусть $\mathscr{M}$ — неплотное линейное подпространсто в банаховом пространстве $\mathscr{B}$. Докажите, что существует ненулевое $f^*\in\mathscr{B}^*$, такое что $f^*(f)=0$ для всех $f\in\mathscr{M}$.

6.5. Докажите лемму 6.2.20.

6.6. Покажите, что если $\mathscr{M}$ — замкнутое подпространство, то $\{\mathscr{M}^\perp\}^\perp=\mathscr{M}$.

6.7. Пусть $S=\{\varphi_n\}$ — счетное подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$. Покажите, что $f\in\overline{[S]}$ (замкнутой линейной оболочке S) тогда и только тогда, когда $f^*(f)=0$ для всех $f^*\in\mathscr{B}^*$, таких что $f^*(\varphi_n)=0$, $n=1,2,\ldots$.

6.8. Постройте в l_2 слабо сходящуюся последовательность, которая не сходится сильно.

6.9. Пусть (f_n^*) — последовательность в $\mathscr{B}^*$. Предположим, что $(f_n^*(f))$ сходится при всех $f\in\mathscr{B}$. Покажите, что найдется $f^*\in\mathscr{B}^*$, для которого $\lim f_n^*(f)=f^*(f)$ при всех $f\in\mathscr{B}$. [Воспользуйтесь следствием 3.5.12.]

6.10. Пусть S^* — плотное подмножество в $\mathscr{B}^*$. Предположим, что последовательность (f_n) в $\mathscr{B}$ ограничена и $\lim f^*(t_n)$ существует для каждого $f^* \in S^*$. Докажите, что этот предел существует для всех $f^* \in \mathscr{B}^*$.

6.11. Пусть (f_n) — последовательность в гильбертовом пространстве. Докажите, что если $f_n \rightharpoonup f$ и $\|f_n\| \to \|f\|$, то $f_n \to f$.

6.12 (лемма 4.4.7). Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства, D — выпуклое подмножество $\mathscr{B}$ и оператор A: $D \to \mathscr{C}$ дифференцируем по Фреше на D. Докажите, что

$$\| Af - Ag \| \leqslant \| f - g \| \sup_{h \in D} \| A'(h) \|.$$

[Сначала проведите доказательство для вещественных пространств, применив теорему о среднем значении к функции $f^*(A[f + \theta(f - g)])$, рассматриваемой как функция от θ.]

6.13. Пусть $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ — банаховы пространства и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, $M \in \mathscr{L}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Покажите, что $(ML)^* = L^*M^*$.

6.14. Имея в виду естественное вложение $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ соответственно в $\mathscr{B}^{**}$ и $\mathscr{C}^{**}$, можно рассматривать оператор $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ как оператор с областью определения в $\mathscr{B}^{**}$ и множеством значений в $\mathscr{C}^{**}$. Покажите, что L^{**} является продолжением L.

6.15. Найдите норму оператора K: $\mathscr{L}_1(0, 1) \to \mathscr{L}_1(0, 1)$ из примера 6.5.5.

6.16. Пусть $\mathscr{V}$ — конечномерное нормированное векторное пространство и L: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ — линейный оператор. Докажите, что $R(L)^\perp = N(L^*)$ и $R(L) = N(L^*)^\perp$. Выведите отсюда соотношения $R(L^*) = N(L)^\perp$, $R(L^*)^\perp = N(L)$.

6.17. Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство и $L \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Покажите, что $R(L)^\perp = N(L^*)$, $R(L^*)^\perp = N(L)$, $\overline{R(L^*)} = N(L)^\perp$.

6.18. Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство. Комплекснозначная функция B на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ называется *билинейной формой*, если при всяком фиксированном g функция $B(\cdot, g)$ линейна, а при всяком фиксированном f функция $B(f, \cdot)$ *антилинейна* (т. е. функция $\overline{B(f, \cdot)}$ линейна). Форма B *эрмитова*, если вдобавок $B(f, g) = \overline{B(g, f)}$, и *ограничена*, если существует такое c, что $|B(f, g)| \leqslant c\|f\|\|g\|$ при всех $f, g \in \mathscr{H}$. Покажите, что:

(i) если оператор $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ самосопряжен, то (Lf, g) — ограниченная эрмитова форма;

(ii) если B — ограниченная эрмитова форма, то найдется самосопряженный оператор $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, такой что $(Lf, g) = B(f, g)$;

(iii) если B эрмитова, то ее можно выразить через *квадратичную форму* $B(f) = B(f, f)$ следующим образом:

$$4B(f, g) = B(f + g) - B(f - g) + iB(f + ig) - iB(f - ig).$$

6.19. Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, где $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство. Докажите, что если L самосопряжен, то (Lf, f) вещественно при всех $f \in \mathscr{H}$. Обратно, покажите, что L самосопряжен, если (Lf, f) вещественно при всех $f \in \mathscr{H}$ (в случае вещественного $\mathscr{H}$ это необязательно так).

6.20. Пусть L — ограниченный самосопряженный оператор. Докажите, что: (i) если L сюръективен, то он инъективен (для несамосопряженного L это неверно; см. задачу 3.2); (ii) если L инъективен, то $R(L)$ плотно в $\mathscr{H}$.

6.21. Приведите пример оператора $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, такого что $\|Lf\| = \|f\|$ при всех $f \in \mathscr{H}$, но $0 \in \sigma(L)$. Это показывает, что для произвольных ограниченных операторов теорема 6.6.4 неверна.

6.22. Докажите, что собственные функции самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

6.23. Пусть оператор $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ самосопряжен и «положителен» в том смысле, что $(Lf, f) \geqslant 0$ при всех $f \in \mathscr{H}$. Покажите, что

$$|(Lf, g)|^2 \leqslant (Lf, f)(Lg, g) \quad \text{при всех} \quad f, g \in \mathscr{H}.$$

[Положите $[f, g] = (Lf, g)$ и далее следуйте доказательству неравенства Шварца 1.5.4.]

6.24. Дисковый конденсатор описывается интегральным уравнением

$$f(x) - \pi^{-1} \int_{-1}^{1} \frac{b}{b^2 + (x-y)^2} f(y)\, dy = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $b > 0$. Покажите, что спектр соответствующего интегрального оператора в $\mathscr{L}_2(-1, 1)$ содержится в отрезке $[0, 1]$ (модифицируйте рассуждение из примера 6.6.8). Этого, правда, недостаточно для доказательства сходимости ряда Неймана; см., однако, задачу 7.15.

6.25. При вычислении ёмкости диска радиусом 1 с круглой дыркой радиусом $k < 1$ используется интегральное уравнение (Лав [1974])

$$f(x) - 2\pi^{-1} \int_{0}^{k} \frac{xt}{1 - x^2t^2} f(t)\, dt = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant k.$$

Оценив m_+ (определение 6.6.5), покажите, что соответствующий ряд Неймана сходится в $\mathscr{L}_2(0, k)$, если

$$2^{-1} \ln [(1+k)/(1-k)] - \operatorname{arctg} k < \pi.$$

6.26. Пусть L — плотно определенный линейный оператор в гильбертовом пространстве.

(i) Покажите, что $N(L^*) = R(L)^\perp$. Выведите отсюда, что если L замкнут, то $N(L) = R(L^*)^\perp$.

(ii) Докажите, что если L замыкаем, то $(\bar{L})^* = L^*$.

(iii) Покажите, что если $L \subset L_1$, то $L^* \supset L_1^*$.

6.27. Докажите, что теорема 6.6.4 сохраняет силу для неограниченных самосопряженных операторов.

6.28. Для произвольного самосопряженного оператора L положим

$$m_- = \inf_{f \in D(L)} (Lf, f)/\|f\|^2, \qquad m_+ = \sup_{f \in D(L)} (Lf, f)/\|f\|^2;$$

допускаются и значения $\pm\infty$. Покажите, что если $\lambda \in \sigma(L)$, то $m_- \leqslant \lambda \leqslant m_+$. Выведите отсюда, что в случае, когда m_- и m_+ конечны, оператор L ограничен.

6.29. Если L самосопряжен и $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, то L^{-1} тоже самосопряжен.

6.30. Рассмотрим оператор $l = i d/dx$ на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(0, 1)$ и $\mathscr{A}$ — подмножество в $\mathscr{H}$, состоящее из всех абсолютно непрерывных функций с производной из $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Положим $D(L) = \{f\colon f \in \mathscr{A},\ f(0) = f(1) = 0\}$ и $Lf = lf$ на $D(L)$. Докажите, что $D(L^*) = \mathscr{A}$.

6.31. Покажите, что остаточный спектр (определение 3.7.3) всякого самосопряженного оператора пуст.

Глава 7

ЛИНЕЙНЫЕ КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

7.1. Введение

В конце прошлого века шведский математик Ивар Фредгольм установил группу результатов о линейных интегральных уравнениях, которым суждено было оказать глубокое влияние на развитие математического анализа. Здесь не место подробно излагать историю вопроса (интересующиеся могут обратиться к работам: Бернкопф [1966], Бурбаки [1969], Стин [1973], Монна [1973]). Достаточно сказать, что результаты Фредгольма послужили ключом к открытию той обширной области математики, которая ныне называется функциональным анализом. В данной главе мы кратко изложим теорию линейных компактных операторов, представляющую собой прямое обобщение результатов Фредгольма. Эта теория чрезвычайно важна для приложений, равно как и родственная ей теория нелинейных компактных операторов, о которой пойдет речь несколько ниже.

Чтобы мотивировать направление исследований, напомним сначала некоторые главные результаты об интегральных уравнениях Фредгольма. Рассмотрим уравнения

$$\lambda f(x)-\int_a^b k(x,\ y)\,f(y)\,dy=g(x), \tag{7.1.1}$$

$$\lambda f(x)-\int_a^b k(x,\ y)\,f(y)\,dy=0, \tag{7.1.2}$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ и g, k — заданные непрерывные функции. Они называются соответственно *неоднородным* и *однородным интегральными уравнениями Фредгольма второго рода*. Значения λ, при которых (7.1.2) имеет ненулевое непрерывное решение, называются собственными значениями, а сами решения — собственными функциями. Знаменитая *альтернатива Фредгольма* утверждает следующее: если $\lambda\neq 0$ и однородное уравнение имеет только нулевое решение, то неоднородное уравнение имеет в точности одно решение; если же $\lambda\neq 0$ является собственным значением, то неоднородное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда функция g ортогональна ко всем соответствующим собственным функциям сопряженного уравнения, т. е. уравнения с ядром $k(y, x)$.

Этот результат является мощным средством для установления существования и единственности решения уравнения (7.1.1). Ограничение $\lambda \neq 0$ необходимо (см. пример 7.4.4), зато в этом случае имеет место полная аналогия со случаем операторов в конечномерном пространстве (см. теорему 7.3.7).

Теория Фредгольма дает, кроме того, подробную информацию о собственных функциях и собственных значениях, которые, очевидно, оказывают решающее влияние на поведение уравнения (7.1.1). Она устанавливает, что собственные значения образуют счетное множество $\{\lambda_n\}$, что единственной предельной точкой этого множества является нуль и что каждому ненулевому собственному значению отвечает конечное число линейно-независимых собственных функций. В случае когда ядро эрмитово, имеются дальнейшие мощные теоремы об обобщенном разложении Фурье произвольной функции по собственным функциям, а при определенных обстоятельствах удается даже получить аналог результата о том, что всякий n-мерный вектор можно представить в виде линейной комбинации собственных векторов эрмитовой $n \times n$-матрицы.

Мы хотим показать, что все эти результаты верны и для компактных линейных операторов на банаховых пространствах. Эта теория имеет многочисленные приложения, и самое очевидное среди них — простой вывод основных результатов Фредгольма об интегральных уравнениях. Однако эта тема очень широко освещена в литературе (см., например, Рисс и Сёкефальви-Надь [1955]), поэтому здесь мы избрали для иллюстрации другие приложения. Отметим особо три из них. Во-первых, при помощи теории компактных самосопряженных операторов, развиваемой в § 7.5, для широкого класса дифференциальных уравнений можно построить теорию разложений по ортогональным собственным функциям таких уравнений. Во-вторых, теория, кратко излагаемая в § 7.6, позволяет охватить вопросы численного решения интегральных уравнений. Наконец, в гл. 11 будет показано, как применение теории компактных операторов в пространствах Соболева приводит к элегантному прямому подходу к линейным эллиптическим дифференциальным уравнениям с частными производными. Этот подход особенно важен потому, что он вскрывает несколько существенных моментов теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

7.2. Примеры компактных операторов

7.2.1. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и T: $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$ — линейный оператор. Оператор T называется **компактным**, если образ $T(S)$ всякого ограниченного множества S из $\mathscr{B}$ относительно компактен (в $\mathscr{C}$). Наряду с термином „компактный оператор“ в литературе используется также термин „вполне непрерывный оператор“.

Очевидно, что для компактности линейного оператора достаточно, чтобы образ замкнутого единичного шара был относительно компактен. Заметим, что поскольку относительная компактность эквивалентна относительной секвенциальной компактности (теорема 5.2.4), то T компактен тогда и только тогда, когда для каждой ограниченной последовательности (f_n) последовательность (Tf_n) содержит сходящуюся подпоследовательность.

Легко видеть, что всякий компактный оператор ограничен. В конечных размерностях верно и обратное, т. е. всякий ограниченный оператор компактен, однако в бесконечных размерностях это не так (достаточно рассмотреть тождественный оператор). Понятие компактного оператора впервые было введено в контексте гильбертовых пространств. В первоначальном определении требовалось, чтобы оператор $T\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ переводил всякую слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся. Для гильбертовых пространств (и даже для любых рефлексивных банаховых) эти два определения эквивалентны, но в общем случае это не так (см. задачу 7.4).

Следующие результаты будут нам полезны при установлении компактности конкретных операторов.

7.2.2. Теорема. *Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — банаховы пространства. Если (T_n) — последовательность компактных операторов в $\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{C})$, равномерно сходящаяся к оператору T, то T компактен, т. е. множество компактных операторов в $\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ замкнуто.*

Доказательство. В общих чертах ход рассуждений будет такой. В силу эквивалентности вполне ограниченности и относительной компактности (теорема 5.2.8), если S — замкнутый единичный шар, то множество $T_n(S)$ вполне ограничено при каждом n. Но норма $\|T_n-T\|$ мала при больших n. Отсюда будет выведено, что $T(S)$ тоже вполне ограничено, а значит, оператор T компактен. Теперь займемся подробностями.

Так как $T_n\to T$, то для любого заданного $\varepsilon>0$ найдется такое n, что $\|T_nf-Tf\|<\varepsilon$ при всех $f\in S$. Так как $T_n(S)$ вполне ограничено, найдется конечное множество точек $f_1, \ldots, f_k$, для которых

$$\inf_j\|T_nf-T_nf_j\|<\varepsilon \quad \text{при всех} \quad f\in S. \tag{7.2.1}$$

Значит, при любом $f\in S$

$$\begin{aligned}\|Tf-Tf_j\| &\leqslant \|Tf-T_nf\|+\|T_nf-T_nf_j\|+\|T_nf_j-Tf_j\|\\ &\leqslant 2\varepsilon+\|T_nf-T_nf_j\|.\end{aligned}$$

С учетом (7.2.1) заключаем, что $\|Tf - Tf_j\| < 3\varepsilon$ при некотором j, т. е. $T(S)$ вполне ограничено. □

7.2.3. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ — банаховы пространства и $T: \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ — линейный оператор.*

(i) *Если множество $R(T)$ конечномерно, то T компактен.*

(ii) *Если T компактен, а множество $R(T)$ замкнуто, то оно конечномерно.*

Доказательство. (i) Достаточно заметить, что всякое ограниченное множество в конечномерном банаховом пространстве относительно компактно (лемма 5.2.2).

(ii) Так как $R(T)$ замкнуто, оно является банаховым пространством. По теореме об открытом отображении 3.5.1 образ $T(S)$ открытого единичного шара S открыт в $R(T)$. Значит, в $T(S)$ содержится замкнутый шар положительного радиуса, а так как T компактен, то этот шар компактен. Но по лемме 5.2.5 это может случиться только тогда, когда $R(T)$ конечномерно. □

Рассмотрим теперь некоторые операторы, часто встречающиеся в приложениях, и выясним, компактны они или нет. В этих примерах будут проиллюстрированы два стандартных метода доказательства компактности. Первый основан на теореме 7.2.2: ищется последовательность простых компактных операторов, аппроксимирующих T по норме. Во втором используется теорема Арцела — Асколи 5.4.4.

7.2.4. Пример. Сначала рассмотрим оператор, отвечающий бесконечной матрице. Если $\sum\sum |\alpha_{ij}|^2 < \infty$, то по теореме 3.4.7 оператор $L: l_2 \to l_2$, определенный формулой

$$(Lf)_i = \sum_j \alpha_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

ограничен. Возьмем последовательность операторов (P_n), где

$$P_n(f_1, f_2, \ldots) = (f_1, \ldots, f_n, 0, 0, \ldots).$$

Оператор $P_n L$ имеет конечномерное множество значений и потому, согласно лемме 7.2.3, компактен. Далее, $P_n L \to L$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n L - L \| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 = 0.$$

Следовательно, L компактен по теореме 7.2.2.

7.2.5. Пример. Пусть K — интегральный оператор, задаваемый формулой

$$Kf(x) = \int_\Omega k(x, y) f(y)\, dy. \tag{7.2.2}$$

Какие условия на ядро k и на Ω обеспечивают компактность K? Для многих целей достаточно приводимых ниже двух теорем; дальнейшую информацию можно найти у Данфорда и Шварца [1958, гл. 6] или Забрейко и др. [1968]. В первой теореме допускается возможность, что k — функция Грина.

7.2.6. Теорема. *Пусть Ω — замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, и пусть $\mathscr{C}(\Omega)$ наделено* sup-*нормой. Предположим, что $k(x, y)$ — непрерывная функция от x, y при $x, y \in \Omega$ и $x \neq y$ и что существуют такое m и такое $\alpha < n$, что $|k(x, y)| \leqslant m|x-y|^{-\alpha}$. Тогда оператор K: $\mathscr{C}(\Omega) \to \mathscr{C}(\Omega)$ компактен.*

Доказательство. Сначала установим результат для случая, когда k непрерывна на всём $\Omega \times \Omega$. Применяемый метод проиллюстрирует использование теоремы Арцела — Асколи.

Пусть S — замкнутый единичный шар в $\mathscr{C}(\Omega)$. Покажем, что множество $K(S)$ функций g вида

$$g(x) = \int_\Omega k(x, y) f(y)\, dy, \quad f \in S,$$

ограничено и равностепенно непрерывно. Ограниченность следует из неравенства $\|Kf\| \leqslant \|K\| \|f\|$, так как $|Kf(x)| \leqslant \|Kf\|$ при всех $x \in \Omega$. Для доказательства равностепенной непрерывности заметим, что в силу равномерной непрерывности k для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \varepsilon$ при всех $|x_1 - x_2| < \delta$ и $y \in \Omega$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_2)| &\leqslant \int_\Omega |k(x_1, y) - k(x_2, y)|\, f(y)\, dy \\ &\leqslant V(\Omega) \|f\| \sup_{y \in \Omega} |k(x_1, y) - k(x_2, y)| \\ &\leqslant \varepsilon V(\Omega) \|f\| \quad \text{при} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \end{aligned}$$

где $V(\Omega)$ — объём Ω. Так как δ не зависит от f, то равностепенная непрерывность доказана. Значит, по теореме Арцела — Асколи 5.4.4, $K(S)$ относительно компактно и потому K — компактный оператор.

Для завершения доказательства осталось снять условие непрерывности k в точках с $x = y$. Определим последовательность (k_n) непрерывных ядер, полагая

$$k_n(x, y) = \begin{cases} k(x, y) & \text{при} \quad |x - y| > 1/n, \\ n^\beta |x - y|^\beta k(x, y) & \text{при} \quad |x - y| \leqslant 1/n, \end{cases}$$

где $\alpha < \beta < n$. Пусть K_n — интегральный оператор с ядром k_n. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega |k(x, y) - k_n(x, y)|\, dy = 0,$$

поэтому $K \in \mathscr{L}(\mathscr{C}(\Omega))$ и $\lim K_n = K$. Согласно первой части доказательства, (K_n) — последовательность компактных операторов, и доказываемое утверждение следует из теоремы 7.2.2.

Если Ω неограничено, то это доказательство не проходит, так как неприменима теорема Арцела — Асколи. И действительно, в этом случае для компактности оператора K требуются намного более сильные условия на ядро. Рассмотрим следующий выразительный пример. Пусть $\Omega = (-\infty, \infty)$ и $k(x, y) = k(x-y)$, где k — произвольная непрерывная функция из $\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$ [1]. Тогда $\|Kf\| \leqslant \|k\|_1 \|f\|$ (где $\|\cdot\|_1$ есть $\mathscr{L}_1$-норма), и оператор K: $\mathscr{C}((-\infty, \infty)) \to \mathscr{C}((-\infty, \infty))$ ограничен. До сих пор имеется хорошая аналогия со случаем компактного Ω; дополнительное условие принадлежности k пространству $\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$, очевидно, необходимо для того, чтобы обеспечить сходимость интеграла. Однако оператор K не компактен.

Докажем это. Пусть h — функция из $\mathscr{C}((-\infty, \infty))$ [1] с носителем $[0, 1]$ и (f_n) — ограниченная последовательность сдвигов этой функции: $f_n(x) = h(x-n)$ $(x \in \mathbb{R})$. Как показывает простое вычисление, $Kf_n(x) = g(x-n)$, где

$$g(x) = \int_0^1 k(x-y)\, h(y)\, dy.$$

Функция g не равна тождественно нулю и стремится к нулю на бесконечности, а так как (Kf_n) — последовательность ее сдвигов, то (Kf_n) не содержит сходящихся подпоследовательностей. Следовательно, K не компактен.

Рассмотрим теперь K как оператор в $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Если функция k измерима и

$$|||k|||_2 = \int_\Omega \int_\Omega |k(x, y)|^2\, dx dy < \infty,$$

то оператор K: $\mathscr{L}_2(\Omega) \to \mathscr{L}_2(\Omega)$ ограничен и $\|K\| \leqslant |||k|||_2$ (теорема 3.4.10). Докажем, что K компактен. Сначала предположим, что Ω компактно, а k непрерывна. Тогда по теореме Вейерштрасса 1.4.16 функцию k можно приблизить по sup-норме, а значит и по норме $|||\cdot|||_2$, последовательностью непрерывных вырожденных ядер; этим ядрам отвечают компактные операторы K_n, поскольку

[1] Не равная тождественно нулю. — *Прим. перев.*

их множества значений конечномерны. Далее, $K_n \to K$, ибо $\|K - K_n\| \leqslant \||k - k_n\||_2$. Следовательно, K компактен по теореме 7.2.2. Чтобы освободиться от условий непрерывности k и компактности Ω, достаточно заметить, что по теореме 2.5.6 непрерывные функции с компактным носителем плотны в $\mathscr{L}_2(\Omega \times \Omega)$, а затем вновь сослаться на теорему 7.2.2.

Подобный ход рассуждений применим и в случае пространств $\mathscr{L}_p$ при $p \neq 2$, однако здесь больше технических подробностей, и мы лишь сформулируем следующую теорему (см. Данфорд и Шварц [1958, гл. 6]).

7.2.7. Теорема. *Пусть* Ω — *измеримое подмножество в* $\mathbb{R}^n$, k — *измеримая функция и* $1 < p < \infty$. *Если число* $\||k\||_p$ *(определенное, как в теореме* 3.4.10) *конечно, то оператор* K: $\mathscr{L}_p(\Omega) \to \mathscr{L}_p(\Omega)$ *компактен.*

В этой теореме Ω может быть и неограниченным, но многие употребительные ядра, например $k(x, y) = \exp(-|x - y|)$, удовлетворяют условию $\||k\||_p < \infty$ только в случае ограниченных Ω.

Каждый из компактных операторов, рассмотренных в предыдущих примерах, допускал равномерную аппроксимацию операторами *конечного ранга,* т. е. имеющими конечномерное множество значений. Напрашивается гипотеза, что это верно для любых компактных операторов в банаховых пространствах, т. е. что всякий компактный оператор равен сумме оператора конечного ранга и оператора сколь угодно малой нормы. Хотя в общем случае этот результат не имеет места (как было недавно установлено), он справедлив во всех употребительных банаховых пространствах и дает там хорошее описание компактных операторов, которое еще больше подчеркивает аналогию между компактными операторами и операторами в конечномерных пространствах.

7.3. Альтернатива Фредгольма

Рассмотрим уравнение

$$(\lambda I - T) f = g, \quad g \in \mathscr{B}, \tag{7.3.1}$$

где T: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ — линейный оператор. Если $\mathscr{B}$ конечномерно, а λ не является собственным значением, то оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ существует и ограничен и уравнение (7.3.1) при всяком g имеет единственное решение. Фредгольм доказал аналогичный результат для линейных интегральных уравнений при дополнительном предположении, что $\lambda \neq 0$. В этом параграфе мы обобщим результат Фредгольма на произвольные компактные линейные операторы в банаховых пространствах.

Всюду ниже $\mathscr{B}$ — банахово пространство и T: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ — линейный оператор. Центральную роль в доказательствах будет играть теорема 6.5.10, и в качестве подготовки к ее применению докажем, что если T компактен, то и T^* компактен, а множество $R(\lambda I - T)$ замкнуто.

7.3.1. Теорема. *Сопряженный к компактному оператору T компактен.*

Доказательство. Пусть S и S^* — замкнутые единичные шары соответственно в $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$. Покажем, что $T^*(S^*)$ относительно компактно. Первым шагом будет применение обобщенного варианта теоремы Арцела — Асколи (задача 5.11) к линейным функционалам из S^*, рассматриваемым как непрерывные комплекснозначные функции на $T(S)$, или, иными словами, как элементы пространства $\mathscr{C}(T(S))$.

Так как T компактен, то $T(S)$ относительно компактно. Далее, поскольку $T(S)$ — ограниченное множество, множество функционалов из S^* равномерно ограничено на $T(S)$. Наконец,

$$|f^*(g_1) - f^*(g_2)| \leqslant \|f^*\| \|g_1 - g_2\| \leqslant \|g_1 - g_2\|$$

для $g_1, g_2 \in T(S)$, $f^* \in S^*$, откуда вытекает равностепенная непрерывность функционалов из S^* на $T(S)$. Значит, по упомянутой теореме всякая заданная последовательность в S^* содержит подпоследовательность, обозначим ее (f_n^*), сходящуюся в $\mathscr{C}(T(S))$. Она является там последовательностью Коши, так что

$$\lim_{m, n \to \infty} \sup_{f \in S} |f_n^*(Tf) - f_m^*(Tf)| = 0.$$

Но

$$\sup_{f \in S} |f_n^*(Tf) - f_m^*(Tf)| = \sup_{f \in S} |(T^*f_n^* - T^*f_m^*)(f)| = \|T^*f_n^* - T^*f_m^*\|,$$

поэтому $(T^*f_n^*)$ — последовательность Коши в $\mathscr{B}^*$; следовательно, она сходится, так как $\mathscr{B}^*$ полно. Таким образом, $T^*(S^*)$ относительно секвенциально компактно. □

3.7.2. Лемма. *Пусть T компактен. Если $\lambda \neq 0$, то $N(\lambda I - T)$ и $N(\lambda I - T^*)$ конечномерны.*

Доказательство. Так как T^* тоже компактен, достаточно доказать утверждение для $N(\lambda I - T)$. В силу компактности T всякая ограниченная последовательность в $N(\lambda I - T)$ содержит подпоследовательность (f_n), для которой сходится (Tf_n). Но $Tf_n = \lambda f_n$, поэтому сходится и сама (f_n). Тем самым доказано, что всякое ограниченное множество в $N(\lambda I - T)$ относительно секвенциально компактно, и наше утверждение следует из леммы 5.2.5. □

Доказанная лемма представляет собой обобщение известного результата фредгольмовой теории интегральных уравнений, который утверждает, что всякому собственному значению отвечает конечное число линейно-независимых собственных функций.

7.3.3. Лемма. *Пусть T компактен и $\lambda \neq 0$. Тогда $R(\lambda I - T)$ и $R(\lambda I - T^*)$ — замкнутые подпространства.*

Доказательство. То что $R(\lambda I - T)$ и $R(\lambda I - T^*)$ — линейные подпространства, очевидно. Если удастся установить, что первое из них замкнуто, то из компактности T^* будет следовать, что и второе замкнуто. Итак, нужно доказать, что если (f_n) — произвольная сходящаяся последовательность в $R(\lambda I - T)$, то ее предел f тоже лежит в $R(\lambda I - T)$.

Сначала покажем, что найдется ограниченная последовательность (g_n), для которой $f_n = (\lambda I - T) g_n$. Так как $f_n \in R(\lambda I - T)$, то какая-то, не обязательно ограниченная, последовательность (h_n), для которой $f_n = (\lambda I - T) h_n$, всегда существует. Но если (l_n) — произвольная последовательность в $N(\lambda I - T)$ и $g_n = h_n - l_n$, то $f_n = (\lambda I - T) g_n$. Таким образом, если удастся доказать, что при некотором выборе l_n последовательность $(h_n - l_n)$ окажется ограниченной, то ближайшая цель будет достигнута.

Очевидно, что достаточно установить ограниченность $d(h_n) = \operatorname{dist}(h_n, N(\lambda I - T))$ как функции от n. Предположим, что $(d(h_n))$, напротив, неограничена. Тогда найдется подпоследовательность, обозначим ее по-прежнему (h_n), такая что $d(h_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим $\bar{h}_n = h_n / d(h_n)$. Как показывает короткое вычисление, $d(\bar{h}_n) = 1$ и, значит, в $N(\lambda I - T)$ существует последовательность (k_n), такая что $\|\bar{h}_n - k_n\| \leqslant 2$ при всех n. Поэтому последовательность (w_n), где $w_n = \bar{h}_n - k_n$, ограничена. Так как T компактен, то, заменяя, если надо, исходные последовательности подпоследовательностями, можно считать, что (Tw_n) сходится. Кроме того,

$$(\lambda I - T) w_n = (\lambda I - T) \overline{h_n} = (\lambda I - T) h_n / d(h_n) = f_n / d(h_n) \to 0.$$

Поэтому (w_n) сходится к некоторому пределу, скажем w. Отсюда следует, что

$$\lambda w - Tw = \lim (\lambda w_n - Tw_n) = 0,$$

т. е. $w \in N(\lambda I - T)$. Значит,

$$0 = d(w) = \lim d(w_n) = \lim d(\overline{h_n}) = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что последовательность $(d(h_n))$ ограничена; тем самым установлено существование ограниченной последовательности (g_n), для которой $f_n = (\lambda I - T) g_n$.

Теперь уже легко завершить доказательство. В силу компактности T, (g_n) содержит подпоследовательность — сохраним для нее обозначение (g_n),— такую что сходится (Tg_n). Но $f_n =$

$\lambda g_n - Tg_n$ и (f_n) сходится. Значит, и (g_n) сходится. Если ее предел равен g, то

$$f = \lim f_n = \lim(\lambda g_n - Tg_n) = \lambda g - Tg.$$

Тем самым доказано, что $f \in R(\lambda I - T)$. □

Теперь мы можем пустить в ход теорему 6.5.10, связывающую множество значений оператора с нуль-пространством его сопряженного, и получить следующий результат.

7.3.4. Теорема. *Если T компактен и $\lambda \neq 0$, то*

(i) $R(\lambda I - T) = N(\lambda I - T^*)^{\perp}$;

(ii) $R(\lambda I - T^*) = N(\lambda I - T)^{\perp}$.

Эта теорема доставляет метод доказательства существования решений уравнения $\lambda f - Tf = g$. Например, из (i) вытекает, что это уравнение имеет решение при каждом g, если уравнение $\lambda f^* = T^* f^*$ имеет лишь нулевое решение. Однако этот результат не вполне удовлетворителен, поскольку из него не следует, что оператор $\lambda I - T$ инъективен и $(\lambda I - T)^{-1}$ существует. На самом деле теорему можно значительно усилить.

7.3.5. Лемма. *Для компактного T и ненулевого λ найдется такое целое $k \geqslant 1$, что $N((\lambda I - T)^k) = N((\lambda I - T)^{k+1})$.*

Доказательство. Положим $N_n = N((\lambda I - T)^n)$ при $n \geqslant 1$. Разложение по степеням T показывает, что $(\lambda I - T)^n$ имеет вид $\mu I - T_1$, где $\mu \in \mathbb{C}$ и T_1 компактен. Значит, N_n конечномерно (лемма 7.3.2). Теперь будем рассуждать от противного. Допустим, что $N_n \neq N_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$. Тогда N_n при каждом n есть собственное линейное подпространство в N_{n+1}. Следовательно, согласно задаче 7.7, найдется такая последовательность (f_n), что $f_n \in N_{n+1}$, $\|f_n\| = 1$ и $\|f_n - f\| > 1/2$ для всех $f \in N_n$. Далее, при $n > m$

$$(\lambda I - T)^n [(\lambda I - T) f_n + Tf_m] = (\lambda I - T)^{n+1} f_n + T(\lambda I - T)^n f_m = 0,$$

т. е. $(\lambda I - T) f_n + Tf_m \in N_n$. Поэтому

$$|\lambda|^{-1} \|Tf_n - Tf_m\| = \|f_n - \lambda^{-1}[(\lambda I - T) f_n + Tf_m]\| > 1/2,$$

откуда вытекает, что (Tf_n) не содержит сходящихся подпоследовательностей. Но это противоречит компактности T. □

7.3.6. Лемма. *Если T компактен и $\lambda \neq 0$, то $R(\lambda I - T) = \mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $N(\lambda I - T) = 0$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $R(\lambda I - T) = \mathscr{B}$. Если $N(\lambda I - T) \neq 0$, то найдется ненулевой элемент $f_1 \in N(\lambda I - T)$.

Так как $R(\lambda I - T) = \mathscr{B}$, то существует такая последовательность (f_n), что $(\lambda I - T) f_{n+1} = f_n$ при $n \geqslant 1$ и

$$(\lambda I - T)^n f_{n+1} = f_1 \neq 0,$$
$$(\lambda I - T)^{n+1} f_{n+1} = (\lambda I - T) f_1 = 0.$$

Следовательно, $N((\lambda I - T)^{n+1}) \neq N((\lambda I - T)^n)$ при всех $n \geqslant 1$. Но это противоречит предыдущей лемме. Тем самым доказано, что $N(\lambda I - T) = 0$.

Обратно, если $N(\lambda I - T) = 0$, то, по теореме 7.3.4, (ii), $R(\lambda I - T^*) = \mathscr{B}$. Но оператор T^* сам компактен, поэтому из первой части доказательства следует, что $N(\lambda I - T^*) = 0$. Отсюда на основании теоремы 7.3.4, (i) заключаем, что $R(\lambda I - T) = \mathscr{B}$. □

Эта лемма показывает, что при $\lambda \neq 0$ оператор $\lambda I - T$ инъективен тогда и только тогда, когда он сюръективен, и в этом случае $(\lambda I - T)^{-1}$ ограничен (теорема 3.5.3). Таким образом, получен очень хороший бесконечномерный аналог стандартного конечномерного результата (теоремы 3.3.11). Грубо говоря, отсутствие конечномерности пространства компенсируется компактностью оператора T которая гарантирует, что T имеет „приближенно конечномерное“ множество значений. Лемма имеет большое теоретическое и практическое значение. Сформулировав ее как утверждение о решениях однородного и неоднородного уравнений $\lambda f - Tf = 0$ и $\lambda f - Tf = g$, мы получим точное обобщение классической альтернативы Фредгольма.

7.3.7. Теорема (альтернатива Фредгольма). *Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство, T: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ — линейный компактный оператор и $\lambda \neq 0$. Тогда имеет место одна из следующих двух возможностей:*

(i) *Однородное уравнение имеет только нулевое решение. В этом случае $\lambda \in \rho(T)$, оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ ограничен и неоднородное уравнение имеет точно одно решение $f = (\lambda I - T)^{-1} g$ при каждом $g \in \mathscr{B}$.*

(ii) *Однородное уравнение имеет хотя бы одно ненулевое решение. В этом случае неоднородное уравнение имеет решение (заведомо неединственное) тогда и только тогда, когда $\langle g, f^* \rangle = 0$ для любого решения f^* сопряженного уравнения $\lambda f^* = T^* f^*$.*

Соответствующий результат для интегральных уравнений послужил мощным средством доказательства существования решений краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными. Коротко говоря, рассуждения, ставшие ныне классическими, строятся следующим образом. Сначала при помощи функции Грина дифференциальное уравнение преобразуется в линейное интегральное. Ядро этого интегрального уравнения, как правило, недостаточно мало для применения методов, связанных с использованием ряда Неймана. Однако можно доказать независимым путем, обычно при помощи какого-нибудь принципа максимума, что однородное уравнение не имеет ненулевых решений, и тогда существование решения вытекает из теоремы 7.3.7. Этот подход изложен прекрасно во многих руководствах (см., например, Гарабедян [1964]), поэтому мы обсудим в гл. 11 другой способ действий, который был разработан недавно и который более привлекателен с точки зрения приложений. Он позволяет избежать трудного шага — построения интегрального уравнения; альтернатива Фредгольма применяется сразу к некоторому компактному оператору, полученному непосредственно из рассматриваемого дифференциального уравнения с частными производными.

7.4. Спектр компактного оператора

Одно из главных следствий предположения о компактности оператора — это возможность особенно простого описания его спектра. В самом деле, из теоремы 7.3.7 мы уже знаем, что если оператор T компактен, то всякая ненулевая точка $\sigma(T)$ является собственным значением, а ниже мы докажем, что во внешности любой окрестности начала лежит лишь конечное число точек $\sigma(T)$. Таким образом, за исключением области, близкой к началу, спектр качественно не отличается от спектра оператора в конечномерном случае. В окрестности начала ситуация несколько сложнее; здесь могут представиться разные возможности. Некоторые из них мы проиллюстрируем примерами.

7.4.1. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — бесконечномерное банахово пространство и $T: \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ — компактный линейный оператор. Тогда спектр T состоит из нуля и ненулевых собственных значений, причем собственное подпространство, отвечающее каждому ненулевому собственному значению, конечномерно.*

Доказательство. Если бы $0 \notin \sigma(T)$, то $R(T) = \mathscr{B}$, и, по лемме 7.2.3, $\mathscr{B}$ было бы конечномерно, в противоречие с предположением. Остальные два утверждения вытекают соответственно из теоремы 7.3.7 и леммы 7.3.2. □

7.4.2. Теорема. *Множество собственных значений компактного линейного оператора на банаховом пространстве либо конечно, либо счетно и не имеет предельных точек, кроме, быть может, нуля.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует бесконечная последовательность (λ_n) различных собственных значений с $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$ при каждом n. Пусть (f_n) — соответствующая последовательность собственных функций и $\mathscr{M}_n$ — линейная оболочка $f_1, \ldots, f_n$. Легко проверить, что f_n линейно-независимы и, следовательно, $\mathscr{M}_n$ — собственное подмножество в $\mathscr{M}_{n+1}$. Поэтому, согласно задаче 7.7, найдется такая последовательность (g_n), что при каждом $n > 1$ имеем $g_n \in \mathscr{M}_n$, $\|g_n\| = 1$ и

$$\|g_n - f\| \geqslant 1/2 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathscr{M}_{n-1}. \tag{7.4.1}$$

Далее, $g_n = \sum\limits_1^n \alpha_j f_j$ с некоторыми $\alpha_j \in \mathbb{C}$, откуда $Tg_n \in \mathscr{M}_n$. Кроме того,

$$(\lambda_n I - T) g_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (\lambda_n - \lambda_j) f_j$$

и, значит, $(\lambda_n I - T) g_n \in \mathscr{M}_{n-1}$. Для всякого целого m, $1 \leqslant m < n$, положим $f = (\lambda_n I - T) g_n + Tg_m$. Тогда, в силу только что доказанного, f (а потому и $\lambda_n^{-1} f$) принадлежит $\mathscr{M}_{n-1}$. Так как

$$Tg_n - Tg_m = \lambda_n g_n - (\lambda_n g_n - Tg_n + Tg_m) = \lambda_n (g_n - \lambda_n^{-1} f),$$

то из (7.4.1) следует, что $\|Tg_n - Tg_m\| \geqslant |\lambda_n|/2 \geqslant \varepsilon/2$. Значит, (Tg_n) не содержит сходящихся подпоследовательностей. Поскольку (g_n) ограничена, это противоречит компактности T. □

Итак, спектр линейного компактного оператора состоит из собственных значений, которые образуют либо конечное множество, либо последовательность с пределом нуль, и самой точки нуль. Последняя заслуживает специального упоминания, во-первых, потому, что она всегда лежит в $\sigma(T)$, и, во-вторых, потому, что она может входить как в точечный, так и в остаточный или в непрерывный спектр. Некоторые из возможностей иллюстрируются ниже на примере гильбертова пространства $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(0,1)$ и интегрального оператора K: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$, задаваемого формулой

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy,$$

где k — непрерывная функция.

7.4.3. Пример. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ — конечное множество линейно-независимых непрерывных функций и

$$k(x, y) = \sum_1^n \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}.$$

Тогда

$$Kf = \sum_1^n (f, \varphi_j) \varphi_j \quad (f \in \mathscr{L}_2(0, 1)),$$

откуда следует, что $R(K)$ есть n-мерное линейное подпространство $\mathscr{M}_n$, натянутое на φ_j. Если $f \in \mathscr{M}_n^{\perp}$, то $Kf = 0$, поэтому собственному значению 0 отвечает *бесконечно много* линейно-независимых собственных функций.

7.4.4. Пример. Если ядро k эрмитово, то K самосопряжен. Интересный класс образуют операторы K, для которых вдобавок

$$(Kf, f) > 0 \quad \text{при всех} \quad f \neq 0; \tag{7.4.2}$$

в этом случае оператор K называется *положительным*; примером может служить оператор из задачи 7.15. Из (7 4.2) видно, что 0 не является собственным значением K. Однако $0 \in \sigma(K)$ так как K компактен, поэтому $R(K) \neq \mathscr{H}$. Это подтверждает, что при $\lambda = 0$ альтернатива Фредгольма не имеет места Самое большее, на что здесь можно надеяться,— это что $R(K)$ плотно в $\mathscr{H}$, и, как вытекает из задачи 6.20, это действительно так.

7.4.5. Пример. Рассмотрим интегральный оператор Вольтерры K, задаваемый формулой

$$Kf(x) = \int_0^x k(x, y) f(y)\, dy.$$

Спектральный радиус K равен нулю (задача 3.2.4), т. е. $\sigma(K)$ состоит из одной точки 0. Отсюда можно сделать тот приятный вывод, что при $\lambda \neq 0$ уравнение $\lambda f - Kf = g$ всегда имеет единственное решение, которое можно получить непосредственным разложением в ряд Неймана. Как и в предыдущем примере, 0 не является собственным значением, но $R(K) \neq \mathscr{H}$.

Неприятности, возникающие при рассмотрении *интегрального уравнения Фредгольма первого рода*

$$\int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy = g(x),$$

связаны именно с тем, что нуль принадлежит спектру соответствующего интегрального оператора. Независимо от того, является нуль собственным значением или нет, раз $0 \in \sigma(K)$, то это уравнение не может иметь решение при всех $g \in \mathscr{H}$. Описать $R(K)$ обычно нелегко, и, даже если известно, что $g \in R(K)$, бывает трудно найти решение. В частности, стандартный приближенный метод, основанный на решении модифицированного уравнения $\bar{K}\bar{f} = \bar{g}$ с $\bar{g}$ и $\bar{K}$, близкими к g и K, может оказаться непригодным, ибо нет никакой гарантии, что это уравнение имеет решение, но даже если оно его имеет, то, поскольку K^{-1} либо не существует, либо в лучшем случае существует и неограничен, будет нелегко решить, близко ли

f к $\bar{f}$. Уравнения Фредгольма первого рода приобретают все большее значение в приложениях, поэтому в последнее время был разработан целый ряд методов для их решения; см. Грёч [1977], Хилгерс [1976], Нашед [1974].

7.5. Компактные самосопряженные операторы

Результаты предыдущего параграфа показывают, что со спектральными свойствами компактного линейного оператора T все сравнительно ясно. Теперь посмотрим, какие дальнейшие упрощения вносит в общую картину предположение о самосопряженности T. Соответствующая теория находит очевидное приложение к интегральным уравнениям Фредгольма с эрмитовым ядром. Хотя это и не столь очевидно, она применима и к дифференциальным уравнениям. Несмотря на то что дифференциальные операторы в $\mathscr{L}_2$ сами не компактны, они иногда имеют компактные обратные, и в этом случае с помощью теории компактных самосопряженных операторов можно получить много интересного.

Центральным результатом теории является теорема Гильберта — Шмидта, которая утверждает, что из собственных функций компактного самосопряженного оператора T можно составить базис гильбертова пространства. Эта мощная теорема хорошо выявляет структуру компактных самосопряженных операторов и имеет много полезных следствий. Мы уделим особое внимание двум из них. Во-первых, мы покажем, что для решения уравнения $(\lambda I - T)f = g$ можно написать его разложение по собственным векторам оператора T; это прояснит зависимость решения от параметра λ для λ, лежащих вблизи $\sigma(T)$. Во-вторых, исследуем вопрос, как с помощью теоремы Гильберта — Шмидта строить ортонормированные базисы пространств $\mathscr{L}_2$.

Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и T: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — компактный самосопряженный оператор. Примем следующее соглашение о собственных значениях и собственных векторах оператора T: всюду ниже $\{\varphi_n\}$ обозначает ортонормированное множество всех собственных векторов T[1] (ортонормированности всегда можно добиться, поскольку собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, а те, которые отвечают одному и тому же собственному значению, можно ортогонализовать методом Грама — Шмидта); далее, это множество

[1] Точнее, ортонормированное множество собственных векторов, отвечающих всем собственным значениям T, причем векторы из этого множества, отвечающие данному собственному значению, образуют базис соответствующего собственного подпространства (по теореме 7.4.1 все собственные подпространства конечномерны, кроме, быть может, подпространства, отвечающего собственному значению нуль, а это подпространство во всяком случае сепарабельно вместе с $\mathscr{H}$). — *Прим. перев.*

занумеровано так, что φ_n отвечает собственному значению λ_n, которое повторено столько раз, какова его кратность, и $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$.

7.5.1. Теорема Гильберта — Шмидта. *Пусть T — компактный самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Тогда из его собственных функций можно составить ортонормированный базис пространства $\mathscr{H}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ — замыкание линейной оболочки множества $\{\varphi_n\}$. По теореме о проекции 1.5.11, $\mathscr{H} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$, и легко проверить, что $T\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$, $T\mathscr{M}^\perp \subset \mathscr{M}^\perp$. Обозначим через T_0 сужение T на $\mathscr{M}^\perp$ и заметим, что оператор T_0 отображает $\mathscr{M}^\perp$ в себя, компактен и самосопряжен. Если T_0 имеет ненулевое собственное значение, то оно будет таковым и для T, и соответствующий собственный вектор должен лежать в $\mathscr{M}$. Но это невозможно, поскольку $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}^\perp$ ортогональны. Так как ненулевыми точками $\sigma(T_0)$ могут быть только собственные значения, то $r_\sigma(T_0) = 0$ и $T_0 = 0$ (теорема 6.6.7). Отсюда следует, что $T\mathscr{M}^\perp = 0$, а это означает, что каждый элемент из $\mathscr{M}^\perp$ есть собственный вектор T. Значит, $\mathscr{M}^\perp \subset \mathscr{M}$, откуда $\mathscr{M}^\perp = 0$ и $\mathscr{M} = \mathscr{H}$. Далее применяем теорему 1.5.17. □

Следующая ниже теорема утверждает, что самосопряженный компактный оператор можно диагонализовать, а именно что его „матрица" относительно базиса $\{\varphi_n\}$ диагональна с элементами λ_n на диагонали. Это — обобщение хорошо известного результата для эрмитовых матриц. В свою очередь эта теорема допускает широкое обобщение на неограниченные самосопряженные операторы, которое будет рассмотрено в гл. 9. Оба приводимых ниже результата представляют собой простые следствия теоремы Гильберта — Шмидта, и их доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

7.5.2. Теорема (каноническая форма компактного самосопряженного оператора). *Для всякого компактного самосопряженного оператора T*

$$Tf = \sum \lambda_n (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad f \in \mathscr{H}.$$

7.5.3. Теорема. *Пусть T — компактный самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Если $\lambda \in \rho(T)$, то для всякого $g \in \mathscr{H}$ (единственное) решение уравнения $(\lambda I - T) f = g$ имеет вид*

$$f = R(\lambda; T) g = \sum (\lambda - \lambda_n)^{-1} (g, \varphi_n) \varphi_n. \tag{7.5.1}$$

Этот результат проясняет структуру резольвенты $R(\lambda; T)$. Он показывает, что $R(\lambda; T)$ есть (операторнозначная) аналитическая функция от λ с простыми полюсами в собственных значениях, причем вычеты в этих полюсах дают собственные векторы. С практической точки зрения он доставляет метод изучения решения при λ, близких к данному ненулевому собственному значению; отметим аналогию с поведением физической системы вблизи данной моды свободных колебаний.

Применение теоремы Гильберта — Шмидта к конкретным операторам дает простой способ построения базисов в пространствах $\mathscr{L}_2$. В этих пространствах большинство хороших базисов получается при помощи дифференциальных операторов, которые, хотя сами и не компактны, имеют компактные обратные. Как показывает следующая теорема, работать с такими операторами ничуть не труднее. Следует отметить, что прямое изучение самих операторов позволяет получить обобщение этих результатов на случай, когда обратный оператор не является компактным; см. гл. 9 и 10.

7.5.4. Теорема. *Пусть L — неограниченный самосопряженный оператор в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что L имеет компактный обратный оператор, и пусть $\{\mu_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ — множества собственных значений и собственных векторов оператора L^{-1}. Тогда справедливы следующие утверждения. Все собственные значения L^{-1} отличны от нуля, и $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис $\mathscr{H}$. Последовательность (λ_n), где $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, содержит бесконечно много различных членов, и $|\lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Спектр $\sigma(L)$ совпадает с множеством $\{\lambda_n\}$, и векторы φ_n являются собственными векторами L, отвечающими собственным значениям λ_n. Наконец, для всех $\lambda \in \rho(L)$, $g \in \mathscr{H}$*

$$(\lambda I - L)^{-1} g = \sum (\lambda - \lambda_n)^{-1} (g, \varphi_n) \varphi_n. \tag{7.5.2}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что L^{-1} самосопряжен и $R(L) = D(L^{-1})$, $D(L) = R(L^{-1})$. Поэтому если $L^{-1}\varphi = \mu\varphi$, то, поскольку $\varphi \in R(L^{-1}) = D(L)$, применение оператора L к этому равенству законно и приводит к равенству $\varphi = \mu L\varphi$. Аналогично если $L\varphi = \lambda\varphi$, то $\varphi = \lambda L^{-1}\varphi$. Отсюда следует, во-первых, что 0 не является собственным значением L^{-1} и, во-вторых, что φ есть собственный вектор L^{-1} (отвечающий собственному значению μ) тогда и только тогда, когда он есть собственный вектор оператора L (отвечающий собственному значению $\lambda = \mu^{-1}$). Тот факт, что $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис $\mathscr{H}$, вытекает из теоремы Гильберта — Шмидта.

Теперь покажем, что $\sigma(L) = \{\lambda_n\}$. Включение $\sigma(L) \supset \{\lambda_n\}$ представляет собой очевидное следствие сделанных выше замечаний. Для доказательства обратного включения достаточно убедиться, что $\lambda \in \rho(L)$, когда $\lambda^{-1} \in \rho(L^{-1})$. Допустим, что $\lambda^{-1} \in \rho(L^{-1})$. Тогда оператор $\lambda I - L$ инъективен, ибо если бы это было не так, то мы имели бы $\lambda\varphi = L\varphi$ для некоторого ненулевого φ и λ^{-1}

было бы собственным значением L^{-1}, вопреки предположению. Далее, поскольку $R(L^{-1}) = D(L)$, то для всех $g \in \mathscr{H}$

$$(\lambda I - L)\lambda^{-1}L^{-1}(L^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} g = \\ (L^{-1} - \lambda^{-1}I)(L^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} g = g. \quad (7.5.3)$$

Тем самым доказано, что $\lambda I - L$ сюръективен. Значит, он биективен (и замкнут), и (по теореме 3.8.16) $\lambda \in \rho(L)$. Таким образом, $\sigma(L) = \{\lambda_n\}$.

Наконец, пространство $\mathscr{H}$ бесконечномерно, поэтому, в силу теоремы 7.4.2, $\lim |\lambda_n| = \infty$. Согласно (7.5.3), $(\lambda I - L)^{-1} = \lambda^{-1}L^{-1}(L^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1}$, и (7.5.2) получается применением теоремы 7.5.3 к L^{-1}. □

7.5.5. Пример. Выведем известный результат о разложении в ряд Фурье по синусам, применяя доказанную теорему к самосопряженному оператору, полученному из формального оператора $l = -d^2/dx^2$ с нулевыми граничными условиями.

Возьмем $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(0, \pi)$, и пусть $\mathscr{A}$ — множество функций из $\mathscr{H}$ с абсолютно непрерывной первой производной и второй производной из $\mathscr{H}$. Положим

$$D(L) = \{f\colon f \in \mathscr{A},\ f(0) = f(1) = 0\}$$

и $Lf = lf$ для $f \in D(L)$. Мы утверждаем, что оператор L самосопряжен. В этом можно убедиться так же, как в примере 6.7.9, однако этот способ довольно утомителен, а так как наше утверждение есть следствие общего результата, который будет установлен позднее (теорема 10.5.3), то здесь мы опустим его доказательство.

Чтобы теорема была применима, обратный к L оператор должен быть компактным. Определим функцию Грина k следующим образом:

$$k(x, y) = \begin{cases} (\pi - y)\, x/\pi & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi, \\ (\pi - x)\, y/\pi & \text{при} \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

и пусть K — интегральный оператор с ядром k:

$$Kf(x) = \int_0^\pi k(x, y) f(y)\, dy.$$

Докажем, что $L^{-1} = K$. Пусть K_0 — сужение K на $\mathscr{C}^2([0, \pi])$. Поскольку $\mathscr{C}^2([0, \pi])$ плотно в $\mathscr{L}_2(0, \pi)$, оператор K есть замыкание K_0. Дифференцированием убеждаемся, что $(K_0 f)''(x) = f(x)$ при $f \in D(K_0)$, и ясно, что $K_0 f(0) = K_0 f(\pi) = 0$. Значит, $R(K_0) \subset D(L)$ и $LK_0 f = f$ при $f \in D(K_0)$. Так как L инъективен, из леммы 3.8.19 следует, что $L^{-1} = K$. Но K компактен по теореме 7.2.7.

Итак, выполнены условия теоремы 7.5.4, и мы заключаем, что собственные функции оператора L образуют базис в $\mathscr{L}_2(0, \pi)$.

7.5.6. Теорема. *Пусть* $f \in \mathscr{L}_2(0, \pi)$. *Тогда (почти всюду)*

$$f(x) = 2\pi^{-1} \sum_{1}^{\infty} \sin nx \int_{0}^{\pi} f(y) \sin ny \, dy,$$

где ряд сходится по норме $\mathscr{L}_2(0, \pi)$.

При помощи теоремы 7 5.4 можно также показать, что большинство стандартных систем ортогональных функций являются базисами. Главная трудность состоит в том, что подходящие формальные дифференциальные операторы часто оказываются сингулярными (ниже мы уточним, что это означает), а в таком случае построение соответствующего самосопряженного оператора становится проблемой. Дальнейшее обсуждение этой темы нам придется отложить до гл. 10.

7.6. Численное решение линейных интегральных уравнений

Численное решение интегральных уравнений — чрезвычайно важная для приложений тема, ибо этими уравнениями моделируется широкий диапазон практических задач. Тем не менее в обширной литературе по теории интегральных уравнений численные аспекты этой теории представлены довольно скудно. Некоторые фундаментальные проблемы из этой области имеют прямое отношение к функциональному анализу. Обладают ли решениями приближенные уравнения? Если да, то сходятся ли приближенные решения к решению исходного уравнения и какова погрешность аппроксимации? Для разрешения этих проблем была создана теория коллективно-компактных операторов, принадлежащая Анселоне [1971]. Сейчас мы дадим краткое изложение этой теории и в качестве иллюстрации обсудим ее применение к линейным неоднородным интегральным уравнениям.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(x) - \int_{0}^{1} k(x, y) f(y) \, dy = g(x), \tag{7.6.1}$$

где k и g — заданные непрерывные функции. Для его решения чаще всего пользуются численным методом, основанным на замене уравнения (7.6.1) последовательностью приближенных уравнений

$$f_n(x) - \sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} k\left(x, y_j^{(n)}\right) f_n\left(y_j^{(n)}\right) = g(x), \tag{7.6.2}$$

где $w_j^{(n)}$ — веса в квадратурной формуле, а $y_j^{(n)}$ — узлы. Полагая $x = y_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$f_n(y_i^{(n)}) - \sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} k(y_i^{(n)}, y_j^{(n)}) f_n(y_j^{(n)}) = g(y_i^{(n)}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.6.3}$$

При каждом n это конечная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $f_n(y_i^{(n)})$, и если ее решение вычислено, то функции f_n можно найти подстановкой этого решения в (7.6.2). Таким образом, уравнения (7.6.2) и (7.6.3) можно рассматривать как эквивалентные, поэтому мы сосредоточим внимание на связи между решением f_n уравнения (7.6.2) и решением f уравнения (7.6.1). Чтобы сформулировать задачу в абстрактной форме, возьмем $\mathscr{B} = \mathscr{C}([0, 1])$ с sup-нормой и положим

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy,$$

$$K_n f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} k(x, y_j^{(n)}) f(y_j^{(n)}).$$

Тогда K и K_n $(n \geqslant 1)$ — ограниченные линейные операторы, отображающие $\mathscr{C}([0, 1])$ в себя, и (7.6.1), (7.6.2) принимают соответственно вид

$$(I - K) f = g, \quad (I - K_n) f_n = g.$$

Первое, что приходит в голову при исследовании связи между этими уравнениями,— это воспользоваться теорией возмущений на основе теоремы 3.6.8. Например, если $K_n \to K$ (напомним, что это означает равномерную сходимость; см. определение 3.5.7) и последовательность $(\|(I - K_n)^{-1}\|)$ ограничена, то по указанной теореме $(I - K_n)^{-1} \to (I - K)^{-1}$. К сожалению, такой путь сразу наталкивается на крупное препятствие: как показано в примере 3.5.15, квадратурные формулы не являются равномерно сходящимися, и потому K_n заведомо не сходится к K равномерно. Можно рассчитывать только на *сильную* сходимость (определение 3.5.13) K_n к K, но ее недостаточно, чтобы получить требуемый вывод. К успеху ведет такой подход: использовать эту сильную сходимость в сочетании со свойствами компактности K и (K_n) для доказательства того, что $(I - K_n)^{-1} \xrightarrow[s]{} (I - K)^{-1}$. Эта сильная сходимость обратных операторов не так хороша, как равномерная сходимость, но все же позволяет доказать, что $f_n \to f$; кроме того, мы выведем еще оценку погрешности $\|f_n - f\|$.

Все рассуждения проводятся в абстрактном банаховом пространстве $\mathscr{B}$, и все операторы отображают $\mathscr{B}$ в себя.

7.6.1. Определение. Пусть S — замкнутый единичный шар в $\mathscr{B}$. Последовательность операторов $\mathscr{K}=(K_n)$ называется **коллективно-компактной**, если множество

$$\mathscr{K}(S)=\{Kf\colon\ K\in\mathscr{K},\ f\in S\}$$

относительно компактно.

7.6.2. Лемма. *Пусть последовательность $\mathscr{K}=(K_n)$ коллективно-компактна. Тогда каждый оператор K_n компактен, последовательность $\mathscr{K}$ ограничена, и если $K\in\mathscr{L}(\mathscr{B})$, $K_n\xrightarrow[s]{}K$, то K компактен.*

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Для доказательства последнего заметим, что так как $Kf=\lim K_nf$ при всех $f\in S$, то $K(S)\subset\overline{\{K_nf\colon\ n\geqslant 1,\ f\in S\}}$. Это множество компактно в силу коллективной компактности $\mathscr{K}$. Следовательно, оператор K компактен. □

Рассмотрим последовательность (K_n) ограниченных операторов, сильно сходящуюся к K. В конечномерном случае такая последовательность автоматически сходится к K равномерно. В бесконечномерном случае это, разумеется, неверно, однако если рассмотреть сужения операторов на какое-нибудь относительно компактное подмножество S (его можно считать „почти конечномерным“), то из сильной сходимости (на S) действительно будет следовать равномерная сходимость (на S). Можно выразить это иначе, заметив, что равномерная сходимость — это сходимость, которая равномерна на ограниченных подмножествах, а сильная сходимость — это сходимость, равномерная на вполне ограниченных подмножествах, которые суть не что иное, как относительно компактные подмножества. Это наблюдение имеет решающее значение для наших рассуждений. В самом деле, если K компактен, а последовательность (K_n) коллективно-компактна, то для замкнутого единичного шара S множества $K(S)$ и $\mathscr{K}(S)$ относительно компактны, а потому последовательности $((K_n-K)K)$ и $((K_n-K)K_n)$ равномерно стремятся к нулю.

7.6.3. Лемма. *Пусть (L_n) — последовательность в $\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{C})$* и $L_n\xrightarrow[s]{}$ $L\in\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{C})$. *Тогда (L_n) равномерно сходится к L на любом вполне ограниченном множестве S, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in S}\|(L_n-L)f\|=0.$$

Доказательство. По определению 5.2.7 вполне ограниченного множества для всякого заданного $\varepsilon>0$ найдется конечное множество точек в S, скажем $g_1,\ \ldots,\ g_j$, такое что для каждого $f\in S$ при некотором i, $1\leqslant i\leqslant j$, выполнено неравенство $\|f-g_i\|\leqslant\varepsilon$.

Следовательно,

$$\|(L_n - L) f\| \leqslant \min_i [\|(L_n - L)(f - g_i)\| + \|(L_n - L) g_i\|]$$
$$\leqslant \varepsilon(\|L_n\| + \|L\|) + \min_i \|(L_n - L) g_i\|.$$

Последовательность $(\|L_n\|)$ ограничена по принципу равномерной ограниченности 3.5.6, откуда и вытекает утверждение леммы, так как ε произвольно, а $L_n \xrightarrow[s]{} L$. □

7.6.4. Следствие. *Пусть последовательность (K_n) коллективно-компактна и $K_n \xrightarrow[s]{} K$. Тогда $((K_n - K) K)$ и $((K_n - K) K_n)$ равномерно стремятся к нулю.*

Для того чтобы на основе этого результата можно было сделать выводы о сходимости обратных операторов $(I - K_n)^{-1}$ к $(I - K)^{-1}$, нужна еще подготовительная лемма. Ее стоит сравнить с теоремой 3.6.3; предположение о компактности частично компенсирует ослабление условий этой теоремы.

7.6.5. Лемма. *Пусть T компактен и L, $(I - L)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Предположим, что*

$$\Delta = \|(I - L)^{-1} (T - L) T\| < 1.$$

Тогда $(I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и при $g \in \mathscr{B}$

$$\|(I - T)^{-1}\| \leqslant (1 - \Delta)^{-1} [1 + \|(I - L)^{-1}\| \|T\|], \tag{7.6.4}$$

$$\begin{aligned}(I - T)^{-1} g - (I - L)^{-1} g\| \\ \leqslant (1 - \Delta)^{-1} [\|(I - L)^{-1}\| \|(T - L) g\| + \Delta \|(I - L)^{-1} g\|].\end{aligned} \tag{7.6.5}$$

Доказательство. Идея доказательства такая. Условие $\Delta < 1$ должно гарантировать, что T — разумное приближение к L. Тогда, поскольку $(I - L)^{-1} = I + (I - L)^{-1} L$, неплохим приближением к $(I - T)^{-1}$ должно быть $B = I + (I - L)^{-1} T$.

Короткая выкладка показывает, что $B(I - T) = I - A$, где $A = (I - L)^{-1} (T - L) T$. Так как $\|A\| = \Delta < 1$, то $I - A$ инъективен, а потому и $I - T$ инъективен. Но T компактен, значит, по теореме 7.3.7 об альтернативе Фредгольма $(I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Неравенство (7.6.4) сразу следует из соотношения $B(I - T) = I - A$, если вспомнить (теорема 3.6.1), что $\|(I - A)^{-1}\| \leqslant (1 - \|A\|)^{-1}$. Наконец,

$$\begin{aligned}(I - T)^{-1} - (I - L)^{-1} &= (I - A)^{-1} B - (I - L)^{-1} \\ &= (I - A)^{-1} [B - (I - L)^{-1} + A (I - L)^{-1}] \\ &= (I - A^{-1} [(I - L)^{-1} (T - L) + A (I - L)^{-1}],\end{aligned}$$

откуда немедленно получаем (7.6.5). □

7.6.6. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство, K — компактный оператор и $(I-K)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. Предположим, что последовательность (K_n) коллективно-компактна и $K_n \xrightarrow[s]{} K$. Положим*

$$\Delta_n = \|(I-K)^{-1}(K_n - K)K_n\|.$$

Тогда $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Если $\Delta_n < 1$, то $(I-K_n)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и для $g \in \mathscr{B}$

$$\|(I-K_n)^{-1}\| \leqslant (1-\Delta_n)^{-1}[1 + \|(I-K)^{-1}\| \|K_n\|],$$

$$\|(I-K_n)^{-1}g - (I-K)^{-1}g\|$$

$$\leqslant (1-\Delta_n)^{-1}[\|(I-K)^{-1}\| \|(K_n - K)g\| + \Delta_n \|(I-K)^{-1}g\|]. \tag{7.6.6}$$

Доказательство. В силу следствия 7.6.4, $\lim \|(K_n - K)K_n\| = 0$, откуда $\lim \Delta_n = 0$. Полагая $L = K$ и $T = K_n$ в лемме 7.6.5, получаем искомый результат. □

Эта теорема — центральный результат теории. Она утверждает и существование, и сильную сходимость обратных, а также дает оценки погрешности приближенного решения. На практике иногда бывает удобнее основываться на оценках для $(I-K_n)^{-1}$, поскольку их можно явно вычислить; в этой связи обращаем внимание читателя на задачу 7.23.

Для иллюстрации применения этой теоремы к нахождению численного решения уравнения (7.6.1) изберем сравнительно простую квадратурную формулу. А именно, возьмем

$$Q(f) = \int_0^1 f(t)\,dt,$$

$$Q_n(f) = \sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} f\left(x_j^{(n)}\right)$$

и предположим, что при каждом n узлы $x_j^{(n)}$ расположены на равных расстояниях друг от друга, веса $w_j^{(n)}$ строго положительны и

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} = 1. \tag{7.6.7}$$

Этим предположениям удовлетворяют правило трапеций, правило Симпсона и ряд других квадратурных формул, для которых выполнено основное свойство $Q_n \xrightarrow[s]{} Q$ (пример 3.5.15). Применим эту квадратурную формулу к интегральному уравнению (7.6.1). При этом удобно ввести в рассмотрение функции $k_x(\cdot)$, $k^y(\cdot)$, определяемые соотношением $k_x(y) = k^y(x) = k(x, y)$, поскольку тогда $Kf(x) = Q(k_x f)$ и $K_n f(x) = Q_n(k_x f)$.

7.6.7. Лемма. *Если функция k непрерывна, а Q_n таковы, как указано выше, то оператор K компактен, последовательность (K_n) коллективно-компактна и $K_n \xrightarrow[s]{} K$.*

Доказательство. Компактность K следует из теоремы 7.2.6. В силу (7.6.7)

$$\|K_n\| \leqslant \sup_{x \in [0,\,1]} \sum_{j=1}^{n} |w_j^{(n)} k(x,\, y_j^{(n)})| \leqslant \|k\|.$$

Таким образом, если $f \in S$, где S — замкнутый единичный шар в $\mathscr{B}$, то

$$\|K_n f\| \leqslant \|K_n\| \|f\| \leqslant \|k\| \|f\|,$$

$$|K_n f(x) - K_n f(x')| \leqslant \|k_x - k_{x'}\| \|f\|, \quad x,\ x' \in [0,\ 1],$$

и из равномерной непрерывности k вытекают ограниченность и равностепенная непрерывность $\mathscr{K}(S)$. По теореме Арцела — Асколи 5.4.4 множество $\mathscr{K}(S)$ относительно компактно, и, значит, последовательность (K_n) коллективно-компактна.

Докажем теперь, что $K_n \xrightarrow[s]{} K$. Имеем

$$\begin{aligned} \|(K_n - K) f\| &= \sup_{x \in [0,\,1]} |K_n f(x) - K f(x)| \\ &= \sup_{x \in [0,\,1]} |Q_n(k_x f) - Q(k_x f)|. \end{aligned} \tag{7.6.8}$$

Множество функций $\{k_x f\colon\ x \in [0, 1]\}$ ограничено и равностепенно непрерывно (так как k, f равномерно непрерывны), а потому, согласно теореме Арцела — Асколи, относительно компактно. Значит, по лемме 7.6.3, $Q_n(k_x f)$ сходится к $Q(k_x f)$ равномерно по x. Следовательно, правая часть (7.6.8) стремится к нулю, и наше утверждение доказано. □

7.6.8. Теорема. *Возьмем $\mathscr{B} = \mathscr{C}([0, 1])$ с* sup-*нормой. Предположим, что рассматривается та же квадратурная формула, что и выше, и функция k непрерывна. Если $(I - K)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, то $(I - K_n)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ при достаточно больших n и $(I - K_n)^{-1} \xrightarrow[s]{} (I - K)^{-1}$.*

Доказательство. Как показывает лемма, выполнены все условия теоремы 7.6.6. □

Итак, наша первая цель достигнута — мы доказали, что при достаточно больших n матричные уравнения (7.6.3) имеют решение и что численные решения $f_n = (I - K_n)^{-1} g$ уравнений (7.6.2) сходятся по sup-норме к точному решению интегрального уравнения (7.6.1).

Последняя задача — найти в явном виде оценку погрешности. Мы получим ее из неравенства (7.6.6); при этом для оценки погрешности квадратурной формулы придется наложить дополнительные ограничения на k и g. Из огромного числа различных возможностей мы выбрали для иллюстрации один простой случай; подробное обсуждение вопроса см. у Анселоне [1971, гл. 2]. Сначала приведем без доказательства стандартную оценку погрешности квадратурной формулы.

7.6.9. Лемма. *Пусть Q_n соответствует правилу трапеций. Если g удовлетворяет условию Липшица*

$$|g(x)-g(x')| \leqslant M|x-x'|, \quad x, x' \in [0, 1],$$

то

$$|Q_n(g)-Q(g)| \leqslant M/4n.$$

7.6.10. Теорема. *Пусть $\mathscr{C}([0, 1])$ снабжено* sup-*нормой. Предположим, что g и k удовлетворяют условию Липшица*:

$$|g(x)-g(x')| \leqslant M|x-x'|, \quad x, x' \in [0, 1],$$
$$|k(x, y)-k(x', y')| \leqslant N(|x-x'|+|y-y'|), \quad x, x', y, y' \in [0, 1].$$

Если используется правило трапеций, то отклонение численного решения f_n уравнения (7.6.2) *от решения f уравнения* (7.6.1) *удовлетворяет неравенству* (7.6.6), *где*

$$\|(K_n-K)g\| \leqslant (M\|k\|+N\|g\|)/4n, \quad \|(K_n-K)K_n\| \leqslant N\|k\|/2n.$$

Доказательство. В силу предположенной липшицевости функций g и k

$$|k_x(y)g(y)-k_x(y')g(y')| = |k_x(y)[g(y)-g(y')] + \\ + [k_x(y)-k_x(y')]g(y')| \leqslant (M\|k\|+N\|g\|)|y-y'|.$$

Следовательно, по лемме 7.6.9,

$$\|K_ng-Kg\| \leqslant \sup_{x \in [0, 1]} |Q_n(k_xg)-Q(k_xg)| \leqslant (M\|k\|+N\|g\|)/4n.$$

Для доказательства второго неравенства положим

$$k_2(x, y) = \int_0^1 k(x, t)\,k(t, y)\,dt = Q(k_xk^y),$$

$$k_2^{(n)}(x, y) = \sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} k\left(x, t_j^{(n)}\right) k\left(t_j^{(n)}, y\right) = Q_n(k_xk^y).$$

Тогда

$$K_n^2 f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} k_2^{(n)}\left(x,\ t_j^{(n)}\right) f\left(t_j^{(n)}\right),$$

$$KK_n f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j^{(n)} k_2\left(x,\ t_j^{(n)}\right) f\left(t_j^{(n)}\right),$$

$$\|(K_n - K) K_n\| \leqslant \sup_{x \in [0,\ 1]} \sum_{j=1}^{n} |w_j^{(n)}| \left| k_2^{(n)}\left(x,\ t_j^{(n)}\right) - k_2\left(x,\ t_j^{(n)}\right)\right| \leqslant \sup_{x \in [0,\ 1]} |(Q_n - Q)(k_x k^y)|.$$

Используя условие Липшица на k, выводим требуемое неравенство точно так же, как в начале доказательства. □

Большим достоинством изложенного здесь подхода является то, что он допускает обобщения во многих направлениях. Три возможных обобщения, представляющих практический интерес: на случай разрывных ядер, на задачу о собственных функциях и на нелинейные интегральные уравнения — рассмотрены у Анселоне [1971]. Хорошие общие руководства по численному решению интегральных уравнений — книги Аткинсона [1976] и Бэйкера [1977].

Задачи

Всюду ниже $\mathscr{B}$ — банахово пространство, $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, а T — линейный оператор $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ или $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ в зависимости от ситуации.

7.1. Покажите, что если T компактен, то он ограничен.

7.2. Докажите, что если $S \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и T компактен, то ST и TS тоже компактны.

7.3. Покажите, что оператор T в гильбертовом пространстве компактен тогда и только тогда, когда он переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся.

7.4*. Покажите, что всякая слабо сходящаяся последовательность в l_1 сходится сильно. Выведите отсюда, что утверждение предыдущей задачи для банаховых пространств, вообще говоря, неверно.

7.5. Выведите из задачи 5.9, что при $k > j$ вложение $\mathscr{C}^k([0,\ 1])$ в $\mathscr{C}^j([0,\ 1])$ есть компактный оператор. (Аналогичный результат лежит в основе рассмотрения эллиптических уравнений в гл. 11.)

7.6. Пусть $\mathscr{V}$ — векторное пространство и L: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ — линейный оператор. Предположим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения L, причем все они различны, и $f_1, \ldots, f_n$ — соответствующие собственные векторы. Докажите, что они линейно-независимы.

7.7. Пусть $\mathscr{M}$ — собственное замкнутое подпространство в $\mathscr{B}$. Докажите, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $f \in \mathscr{B}$ с $\|f\| = 1$, что $\operatorname{dist}(f,\ \mathscr{M}) > 1 - \varepsilon$.

7.8. Покажите путем построения примеров, что 0 может лежать как в точечном, так и в остаточном или в непрерывном спектре компактного оператора.

7.9. Если оператор T^n при некотором n компактен, то $\sigma(T)$ есть либо конечное, либо счетное множество точек.

7.10. Если $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ компактен, то он является равномерным пределом операторов конечного ранга.

7.11. Пусть $k(x, y) = k(x - y)$, где k — четная вещественнозначная непрерывная функция из $\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$, и пусть $K\colon \mathscr{C}((-\infty, \infty)) \to \mathscr{C}(-\infty, \infty))$ — интегральный оператор, определенный формулой (7.2.2.). Покажите, что всякое λ из некоторого конечного интервала есть собственное значение K (примените оператор к функции $e^{i\omega x}$). Тем самым получится другое доказательство некомпактности K (см. пример 7.2.5).

7.12. Возьмем интервал с концами a, b (возможно, бесконечный) и предположим, что $k \in \mathscr{L}_2((a, b) \times (a, b))$ — эрмитово ядро $(k(x, y) = \overline{k(y,x)})$. Определим интегральный оператор K на $\mathscr{L}_2(a, b)$ с этим ядром формулой (7.2.2). Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированное множество собственных функций K. Покажите, что

$$k(x, y) = \sum \lambda_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}$$

(сходимость в $\mathscr{L}_2((a, b) \times (a, b))$). Другие результаты подобного типа см. в книге Рисса и Сёкефальви-Надя [1955, с. 260 и сл.].

7.13. Пусть $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — компактный самосопряженный оператор. Выведите из теоремы Гильберта — Шмидта следующие утверждения:

(i) для всякого многочлена p

$$p(T) f = \sum p(\lambda_n)(f, \varphi_n)\varphi_n;$$

(ii) для $\lambda \in \rho(T)$

$$R(\lambda; T) f = \sum (\lambda - \lambda_n)^{-1}(f, \varphi_n)\varphi_n.$$

Используя это разложение, найдите явный вид $R(\lambda; T)$ для интегрального оператора K на $[-1, 1]$ с ядром $k(x, y) = 1 + xy$, определенного формулой (7.2.2).

7.14. Пусть $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ компактен и самосопряжен.

(i) Покажите, что если $T \neq 0$, то у него имеется по крайней мере одно ненулевое собственное значение.

(ii) Докажите, что $\|R(\lambda; T)\| = 1/d(\lambda)$, где $d(\lambda) = \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))$.

7.15. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\lambda f(x) - \pi^{-1} \int_{-1}^{1} \frac{b}{b^2 + (x - y)^2} f(y)\, dy = g(x)$$

из задачи 6.24 в $\mathscr{L}_2(-1, 1)$. Используя компактность интегрального оператора K, докажите в дополнение к утверждениям этой задачи, что $1 \in \rho(K)$. Если $|\lambda| = 1$, то при малых b ряд Неймана сходится медленно. Для $\lambda = -1$ докажите, что $\|f\| \leqslant \|g\|$, и покажите, как можно увеличить скорость сходимости, привлекая модифицированный ряд Неймана из задачи 3.26.

7.16. В примере 7.5.5 возьмем $l = -d^2/dx^2$ и $D(L) = \{f\colon f \in \mathscr{A}, f'(0) = f'(\pi) = 0\}$. Считая известным, что L самосопряжен, получите теорему о разложении в ряд Фурье по косинусам в $\mathscr{L}_2(0, \pi)$. [*Указание*: L не инъективен, поэтому рассмотрите $L + aI$ с $a > 0$.]

7.17. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис пространства $\mathscr{H}$.

(i) Покажите, что если T компактен, то $\lim T\varphi_n = 0$.

(ii) Пусть (λ_n) — числовая последовательность, стремящаяся к нулю. Положим $Tf = \sum \lambda_n (f, \varphi_n)\varphi_n$. Докажите, что оператор T компактен.

7.18. Пусть T компактен и самосопряжен. Уравнение $Tf = g$ является обобщением интегрального уравнения Фредгольма первого рода, и с ним связаны те же затруднения. Покажите, что $R(T)$ есть множество всех тех элементов f из замкнутой линейной оболочки собственных векторов φ_n, отвечающих ненулевым собственным значениям λ_n, для которых сходится ряд $\sum \lambda_n^{-1}(f, \varphi_n)\varphi_n$.

7.19. Пусть T компактен и самосопряжен. Если $\lambda \in \rho(T)$, но $|\lambda| < r\sigma(T)$, то ряд Неймана может оказаться расходящимся, но иногда удается построить полезный модифицированный ряд. Предположим для простоты, что все собственные значения неотрицательны, $\lambda_1 > \lambda_2$ и значению λ_1 отвечает ровно один собственный вектор. Положим $g_1 = g - (g, \varphi_1)\varphi_1$. Покажите, что при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

$$(\lambda I - T)^{-1} g = (\lambda - \lambda_1)(g, \varphi_1)\varphi_1 + \sum \lambda^{-n-1} T^n g_1.$$

7.20 (теорема о спектральном отображении). Пусть T компактен и самосопряжен и g — непрерывная функция. Определим оператор $g(T)$, полагая

$$g(T) f = \sum g(\lambda_n)(f, \varphi_n)\varphi_n.$$

Докажите, что $\sigma(g(T)) = g(\sigma(T))$.

Следующие две задачи касаются вычисления собственных значений и собственных векторов компактного самосопряженного оператора T. По поводу дальнейших результатов, относящихся к этой теме, см. Рисс и Сёкефальви-Надь [1955, с. 255 и сл.], Стакголд [1968], Вайнстайн и Стенджер [1972], Вайнбергер [1974].

7.21 (итерации компактного самосопряженного оператора). Возьмем любое g, такое что $Tg \neq 0$. Покажите, что $T^n g \neq 0$ и при всех $n > 1$.

(i) Допустим сначала, что T не имеет отрицательных собственных значений. Для $n \geqslant 1$ положим $\varphi_n = T^n g / \|T^n g\|$, $r_n = \|T^n g\| / \|T^{n-1} g\|$. Докажите, что (r_n) и (φ_n) сходятся соответственно к собственному значению и отвечающему ему собственному вектору оператора T.

(ii) Для произвольного компактного самосопряженного оператора T можно применить (i) к T^2 и получить собственное значение λ^2 и собственный вектор φ оператора T^2. Докажите, что один из векторов $\varphi \pm \lambda^{-1} T\varphi$ будет тогда собственным вектором оператора T.

7.22. Сгруппируем собственные значения в положительную и отрицательную последовательности (μ_n^+) и (μ_n^-) первая из которых не возрастает, а вторая не убывает. Покажите, что

$$\mu_n^+ = \sup(Tf, f),$$

где верхняя грань берется по всем f с $\|f\| = 1$, для которых $(f, \varphi_i^+) = 0$ при $i = 1, \ldots, n-1$.

7.23. Докажите следующий результат, родственный теореме 7.6.6. Пусть последовательность (K_n) коллективно-компактна и $K_n \to K \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$. В случае когда $(I - K_n)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, положим

$$\Gamma_n = \|(I - K_n)^{-1}\| \, \|(K_n - K) K\|.$$

Докажите, что если $(I - K_n)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и $\Gamma_n < 1$ при некотором n, то $(I - K)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ и

$$\|(I - K_n)^{-1}\| \leqslant (1 - \Gamma_n)^{-1}[1 + \|(I - K_n)^{-1}\| \, \|K\|],$$

$$\|(I - K_n)^{-1} g - (I - K)^{-1} g\| \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \Gamma_n)^{-1}[\|(I - K_n)^{-1}\| \, \|K_n g - Kg\| + \Gamma_n \|(I - K_n)^{-1} g\|].$$

Далее, покажите, что $(I - K_n)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$ при всех достаточно больших n и $\lim \Gamma_n = 0$.

Глава 8

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И МОНОТОННОСТЬ

8.1. Введение

Преимущество описанных в гл. 4 методов исследования нелинейных уравнений состоит в том, что они дают весьма много информации о решениях. К сожалению, класс уравнений, к которым они применимы, очень ограничен. Поэтому значительные усилия были потрачены на разработку других методов. Основная часть этих усилий была направлена на изучение компактных операторов. К тому имеются две главные причины. Во-первых, эти операторы часто встречаются в приложениях. Например, в терминах таких операторов часто можно формулировать краевые задачи для дифференциальных уравнений в ограниченных областях — либо при помощи функции Грина, либо привлекая некоторые специальные банаховы пространства, такие как пространства Соболева. Вторая причина заключается в том, что, как и в линейном случае, компактные нелинейные операторы имеют много общего с операторами в конечномерных пространствах и потому сравнительно легко поддаются изучению. О компактных нелинейных операторах сейчас известно много, и в этой и последующих главах будут намечены наиболее важные части теории таких операторов.

В случае вещественной прямой $\mathbb{R}$ очевидно, что всякий непрерывный оператор, отображающий отрезок $D = [-1, 1]$ в себя, имеет в D неподвижную точку. Если попытаться обобщить этот факт на многомерный случай, то естественно заменить отрезок, скажем, замкнутым шаром. Ситуацию в $\mathbb{R}^2$ можно проиллюстрировать на чашке чая. Представим себе, что поверхность чая непрерывно преобразуется в результате плавного помешивания. Спрашивается, осталась ли в данный момент хоть одна точка этой поверхности на прежнем месте. Если чай „крепкий“, вязкий, то очевидно, что каждая точка у стенки чашки останется на месте, но если чай „жидкий“ и не прилипает к стенке, то совсем не легко решить, существует ли неподвижная точка. Таким образом, даже обобщение на случай двух измерений не является непосредственным. Тот факт, что указанный одномерный результат в действительности обобщается на случай любого конечного числа измерений, составляет содержание глубокой и важной теоремы, доказанной Брауэром в 1910 г. Мы опустим прямое доказательство этой теоремы, поскольку используемые в нем рассуждения не понадобятся нам в дальнейшем; простое доказательство, основанное на теории степени, будет представлено в гл. 13 (пример 13.2.15). С практической точки зрения интересно, что недавно были найдены конструктивные алгоритмы для нахождения неподвижных точек; см. Тодд [1976].

8.1.1. Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Пусть D — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество конечномерного нормированного векторного пространства. Если A — непрерывное отображение D в себя, то A имеет неподвижную точку в D.*

Следующий естественный вопрос, это нельзя ли отказаться от ограничения конечности размерности. К сожалению, нельзя, как показывает контрпример (задача 4.6). Простейший способ обойти это затруднение состоит в том, чтобы наложить какое-нибудь условие на скорость изменения оператора, как в принципе сжимающих отображений. Первым нашим результатом, не привлекающим условий такого типа, будет теорема Шаудера о неподвижной точке, в которой в качестве мостика между конечномерным и бесконечномерным используется компактность. Этот классический результат, служащий предметом следующего параграфа, нашел множество приложений в нелинейном анализе.

При всей силе теоремы Шаудера о неподвижной точке ее практическое применение наталкивается на ряд трудностей. Например, первым шагом любого такого применения должно быть нахождение подмножества D области определения оператора A, удовлетворяющего условию $A(D) \subset D$, а это может оказаться не простым делом. Выбор множества D доставляет особенные хлопоты, когда A обладает тривиальной неподвижной точкой (скажем, когда $A0 = 0$); действительно, поскольку утверждается лишь существование одной неподвижной точки, то в случае, если $0 \in D$, теорема Шаудера не даст никакой новой информации. Далее, в ситуациях, когда теорема применяется к операторам, которые могут иметь любое число неподвижных точек (как в примере с чашкой чая), она не дает никаких указаний о единственности неподвижной точки. Наконец, неконструктивный характер результата также доставляет неудобства в приложениях. В последнем параграфе главы будет изучена одна группа методов, предназначенных для преодоления указанных трудностей. В общих чертах эти методы основаны на следующих соображениях.

Хорошо известно, что как в теоретических, так и в численных исследованиях особенно удобно работать с положительными монотонными вещественнозначными функциями вещественной переменной. Например, пусть φ — монотонно возрастающая непрерывная функция на отрезке $[u, v]$ и $\varphi(u) \geqslant u$, $\varphi(v) \leqslant v$ (рис. 8.1). Тогда не только гарантировано существование неподвижной точки, но и можно методом последовательных приближений получить последовательность $\{x_n\}$, которая является возрастающей и сходится к некоторой неподвижной точке $\bar{x}$. При обобщении этого факта на многомерный случай возникает одно затруднение: в то время как для вещественных чисел имеется естественное упорядочение, для векторов в пространстве размерности выше 1 никакого естественного упорядочения нет. В случае x, $y \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, одно из возможных упорядочений такое: $x \geqslant y$, если как $x_1 \geqslant y_1$, так и $x_2 \geqslant y_2$. Существует естественное

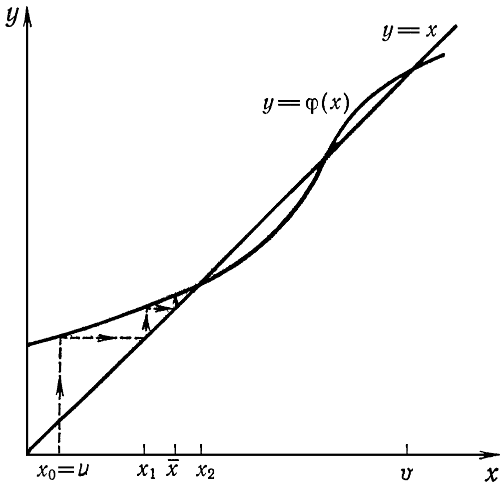

Рис. 8.1. Метод последовательных приближений для монотонной функции.

обобщение этого упорядочения на вещественнозначные функции: $f \geqslant g$, если $f(t) \geqslant g(t)$ для всех t из области определения наших функций. Указанные упорядочения являются лишь частичными (например, не все векторы из $\mathbb{R}^2$ сравнимы между собой в указанном смысле), но оказывается, что это не служит серьезным препятствием, и мы благополучно можем ввести монотонные операторы ($Af \geqslant Ag$ при $f \geqslant g$) и положительные операторы ($Af \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$). В случае когда оператор A вдобавок компактен, многие конечномерные результаты распространяются на банаховы пространства.

Часто успех этого метода в приложениях связан с сочетаемостью упорядочения в рассматриваемом пространстве и некоторого упорядочения, неявно заключенного в самом интересующем нас уравнении. Так обстоит дело для следующей краевой задачи, которой мы уделим особое внимание:

$$\begin{gathered} f''(x) + \psi[x, f(x)] = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ f(0) = f(1) = 0; \end{gathered} \tag{8.1.1}$$

здесь ψ — вещественнозначная непрерывная функция на $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$, а решение ищется в $\mathscr{C}^2([0, 1])$. Прежде всего эту систему можно переписать в виде интегрального уравнения $f = Af$, где

$$Af(x) = \int_0^1 k(x, y)\psi[y, f(y)]\,dy$$

и k — функция Грина (4.2.5). Дальнейшее рассуждение основано на том, что функция k неотрицательна. Действительно, в таком случае A будет положительным оператором, если функция ψ неотрицательна, а если $\psi[x, \cdot]$ — неубывающая функция при каждом x, то A будет монотонным. На первый взгляд указанное условие монотонности, наложенное на ψ, может показаться чересчур суровым. Однако наше дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$\{f''(x) - \omega f(x)\} + \{\omega f(x) + \psi[x, f(x)]\} = 0,$$

и поскольку функция Грина для оператора $-d^2/dx^2 + \omega$ неотрицательна для любого $\omega \geqslant 0$, то соответствующий модифицированный интегральный оператор будет монотонным, если $\psi[x, z] + \omega z$ будет при некотором ω неубывающей функцией от z для каждого x. Это уже гораздо менее ограничительное условие, которое заведомо выполняется, если производная $\partial\psi/\partial z$ ограничена снизу.

Эти рассуждения могут быть проведены в гораздо более общей постановке. Решающее условие неотрицательности функции k будет выполнено, если для рассматриваемого дифференциального оператора справедлив принцип максимума; последнее имеет место для широкого класса эллиптических дифференциальных операторов с частными производными. В сочетании с изобретенным Пероном методом взятия решения в „вилку" при помощи дифференциальных неравенств метод монотонности особенно полезен в случае сильно нелинейных ψ. Для простоты мы ограничимся здесь рассмотрением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Классическим руководством по операторам в частично упорядоченных пространствах является монография Красносельского [1956]. Превосходный обзор современного состояния теории дан в статье Аманна [1976]. В книгах Анселоне [1964], Ролла [1971] и Саати [1967] описано большое число интересных приложений.

8.2. Теорема Шаудера о неподвижной точке

Эта теорема занимает центральное место в нелинейной теории операторов. Помимо того что она сама по себе является чрезвычайно мощным и полезным результатом, она имеет уникальное историческое значение, будучи отправной точкой всей теории нелинейных компактных операторов — быть может, наиболее эффективного инструмента во всем нелинейном анализе. В частности, теория степени Лерэ — Шаудера, излагаемая в гл. 13, ведет начало непосредственно от результата Шаудера.

8.2.1. Определение. Пусть D — подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$. Оператор $A: D \to \mathscr{B}$ называется **компактным**, если он непрерывен и переводит каждое ограниченное подмножество множества D в относительное компактное множество.

Заметим, что в отличие от линейного случая непрерывность не является автоматическим следствием фигурирующего в определении условия. Далее, отметим, что в литературе, к сожалению, нет единства в терминологии; компактные операторы, как они определены выше, иногда называют „непрерывными компактными операторами", а иногда „вполне непрерывными операторами".

8.2.2. Лемма. *Операторы из лемм 4.2.7 и 4.2.8 компактны.*

Таким образом, как и в линейном случае, при весьма слабых ограничениях интегральные операторы компактны, если область интегрирования ограничена.

8.2.3. Теорема Шаудера о неподвижной точке. *Пусть D — непустое замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$ и оператор $A: D \to \mathscr{B}$ компактен и отображает D в себя. Тогда A имеет неподвижную точку в D.*

Идея доказательства состоит в том, чтобы, используя определенные аппроксимирующие операторы A_n, свести дело к задаче, которая по существу является конечномерной и потому подпадает под действие теоремы Брауэра о неподвижной точке (теоремы 8.1.1). В общем этот метод типичен для теории компактных операторов; он появится у нас еще раз в гл. 13 в более сложной форме в рассуждениях, относящихся к теории степени, которые сами дают другое, очень простое доказательство теоремы Шаудера. Ключевой момент доказательства — построение операторов A_n (лемма 8.2.5).

8.2.4. Лемма. (i) *Пусть S — подмножество произвольного векторного пространства. Если $f_1, \ldots, f_k \in S$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — неотрицательные числа, не все равные нулю, то $\sum \alpha_i f_i / \sum \alpha_i$ принадлежит выпуклой оболочке* $\operatorname{co} S$ *множества S.*

(ii) *Пусть S — подмножество банахова пространства. Если S относительно компактно, то и* $\operatorname{co} S$ *таково же.*

Доказательство. Утверждение (i) немедленно следует из определения 1.2.12. Относительно (ii) см. Данфорд и Шварц [1958, с. 451]. □

8.2.5. Лемма. *Пусть S — ограниченное подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$ и A: $S \to \mathscr{B}$ — компактный оператор. Пусть, далее, (ε_n) — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Тогда существует последовательность (A_n) непрерывных операторов A_n: $S \to \mathscr{B}$ со следующими свойствами:*

(i) *(A_n) сходится к A в том смысле, что $\|A_n f - Af\| < \varepsilon$ при всех $f \in S$;*

(ii) *для каждого n образ $A_n(S)$ оператора A конечномерен и содержится в выпуклой оболочке множества $A(S)$.*

Доказательство. Поскольку множество $A(S)$ относительно компактно, оно вполне ограничено (теорема 5.2.8). Следовательно, для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется конечное покрытие этого множества шарами радиуса ε, скажем шарами $S(g_1, \varepsilon)$, ..., $S(g_k, \varepsilon)$. Определим *шаудеров провкционный оператор* P: $A(S) \to \mathscr{B}$ формулой

$$Pg = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(g) g_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(g), \quad g \in A(S), \tag{8.2.1}$$

где

$$\alpha_i(g) = \begin{cases} \varepsilon - \|g - g_i\| & \text{при} \quad \|g - g_i\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad \|g - g_i\| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Поскольку всякое $g \in A(S)$ лежит в ε-окрестности некоторого g_i, знаменатель в (8.2.1) строго положителен. Таким образом, данное определение оператора P имеет смысл. Далее, каждое α_i представляет собой непрерывную функцию $A(S) \to \mathbb{R}$, поэтому оператор P непрерывен. Ввиду леммы 8.2.4, (i), из (8.2.1), очевидно, вытекает, что образ оператора P содержится в $\operatorname{co}(S)$. Теперь, для любого данного $g \in A(S)$ лишь те члены в сумме (8.2.1) отличны от нуля, для которых $g_i \in S(g, \varepsilon)$. Следовательно, снова в силу леммы 8.2.4, (i), $Pg \in \operatorname{co} S(g, \varepsilon) = S(g, \varepsilon)$, т. е. $\|Pg - g\| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что оператор B: $S - \mathscr{B}$, задаваемый формулой $Bf = PAf$ для $f \in S$, непрерывен, имеет конечномерный образ, содержащийся в $\operatorname{co} A(S)$, и близок к A в том смысле, что

$$\|Af - Bf\| = \|Af - PAf\| < \varepsilon, \quad f \in S.$$

Ввиду произвольности ε, мы получим искомые операторы, полагая последовательно $\varepsilon = \varepsilon_n$ и $A_n = B$. □

Доказательство теоремы 8.2.3. Для $S = D$ выберем (ε_n) и (A_n), как в только что доказанной лемме. Так как D выпукло и $A(D) \subset D$, то, в силу свойства (ii), $A_n(D) \subset D$. Далее, $A_n(D)$ содержится в некотором конечномерном подпространстве, скажем $\mathscr{M}_n$, пространства $\mathscr{B}$, и $D \cap \mathscr{M}_n$, очевидно, выпукло, ограничено и замкнуто (в $\mathscr{M}_n$). Таким образом, по теореме Брауэра о неподвижной точке (теорема 8.1.1), примененной к сужению оператора A_n на $D \cap \mathscr{M}_n$, A_n имеет неподвижную точку, скажем f_n, в $D \cap \mathscr{M}_n$. Следовательно,

$$\| Af_n - f_n \| = \| Af_n - A_n f_n \| \leqslant \varepsilon_n,$$

в силу свойства (i) из предыдущей леммы. Поскольку оператор A непрерывен, а $\overline{A(D)}$ компактно, наш результат следует теперь из теоремы 5.3.5. □

В теореме Шаудера о неподвижной точке не требуется никакого условия сжатия. Поэтому в тех приложениях, где рассматриваемый оператор оказывается компактным, эта теорема представляет собой гораздо более мощное орудие доказательства существования, чем принцип сжимающих отображений 4.3.4. С другой стороны, в самой этой общности применимости теоремы кроется причина того, что с ее помощью нельзя ни гарантировать единственность, ни доказать сходимость метода последовательных приближений. Тип ситуаций, в которых полезна теорема Шаудера, иллюстрируют следующие два приложения.

8.2.6. Пример. В задаче Коши

$$\begin{aligned} f'(t) &= \psi[t, f(t)], \quad t \geqslant 0, \\ f(0) &= \alpha, \end{aligned}$$

где f — $\mathbb{C}^n$-значная функция, ищется решение с непрерывной первой производной. Теорема 4.3.11, основанная на принципе сжимающих отображений, утверждает, что если функция ψ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, то такое решение существует при всех t. Ввиду наличия весьма ограничительного условия Липшица этот результат применим к довольно узкому классу уравнений. А что будет, если ψ только лишь непрерывна? Из примеров 4.3.8 и 4.3.9 ясно, что в этом случае нельзя ожидать ни единственности, ни глобального существования решения. В следующем результате (восходящем к Пеано) с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке устанавливается локальное существование решения.

8.2.7. Теорема. *Пусть задано $\bar{t} > 0$, и пусть ψ: $[0, \bar{t}] \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ непрерывная функция. Тогда существует такое $t_0 > 0$, что указанная выше задача Коши имеет решение в $\mathscr{C}^1([0, t_0], \mathbb{C}^n)$.*

Доказательство. Без потери общности можно считать $\alpha = 0$. Очевидно, достаточно показать, что для некоторого $t_0 > 0$ оператор A: $\mathscr{C}([0, t_0], \mathbb{C}^n) \to \mathscr{C}([0, t_0], \mathbb{C}^n)$, определенный формулой

$$Af(t) = \int_0^t \psi[s, f(s)]\, ds,$$

имеет неподвижную точку. Поскольку ψ непрерывна, найдутся строго положительные числа $t_0 \leqslant 1$ и m, такие что $|\psi[t, z]| \leqslant m$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $|z| \leqslant mt_0$. Пусть D — шар $\bar{S}(0, m)$ в пространстве $\mathscr{C}([0, t_0], \mathbb{C}^n)$, снабженном sup-нормой. Так как D — ограниченное замкнутое выпуклое множество, то существование неподвижной точки будет следовать из теоремы Шаудера 8.2.3, если нам удастся доказать, что $A(D) \subset D$ и что оператор A компактен. Но по интегральной теореме о среднем

$$|Af(t)| \leqslant t_0 \sup_{0 \leqslant s \leqslant t_0} |\psi[s, f(s)]| \leqslant mt_0, \quad f \in D.$$

Следовательно, $\|Af\| \leqslant m$, а значит, $A(D) \subset D$. Компактность A гарантируется леммой 8.2.2. $\square$

8.2.8. Пример. Рассмотрим теперь краевую задачу

$$f''(x) + \lambda\psi[x, f(x)] = g(x),$$
$$f(0) = f(1) = 0.$$

Если взять $\psi[x, z] = \sin z$, то эта система описывает вынужденные колебания маятника. В этом случае простейший подход состоит в том, чтобы линеаризировать задачу — заменить $\sin z$ на z. Однако ответы, получаемые на таком пути, иногда не отражают физического существа дела. Например, при периодическом вынуждающем члене $g(x) = \sin \omega\pi x$ мы приходим к неверному заключению, что в случае $\lambda = (\omega\pi)^2$ никакое движение маятника невозможно. Это затруднение не возникает, если использовать полное нелинейное уравнение.

Для ψ, удовлетворяющих условию Липшица, метод сжимающих отображений гарантирует при малых λ существование решения, которое может быть получено методом последовательных приближений (задача 4.1.6). Однако при больших λ рассматриваемое отображение не является сжимающим и такое рассуждение не проходит. С помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке легко доказать, что для ограниченных ψ наше уравнение имеет решение при *любом* λ, хотя сама теорема не дает никаких указаний относительно того, как это решение можно построить.

8.2.9. Теорема. *Предположим, что функция ψ: $[0, 1] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ непрерывна и ограничена, а g ограничена. Тогда приведенная выше краевая задача имеет решение $f \in \mathscr{C}^2([0, 1])$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Будем считать, что $\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup-нормой. Как было отмечено в примере 4.2.2, достаточно показать, что имеет неподвижную точку оператор A в пространстве $\mathscr{C}([0, 1])$, задаваемый формулой

$$Af(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y)\, \psi[y, f(y)]\, dy + h(x),$$

где k — функция Грина, а h — некоторая (известная) непрерывная функция. Но оператор A компактен (лемма 8.2.2), следовательно, мы сможем применить теорему Шаудера, если найдем подходящее множество D. Поскольку ψ ограничена, найдется m, такое что $|\psi[x, z]| \leqslant m$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $z \in \mathbb{C}$. Поэтому $\|Af - h\| \leqslant |\lambda|\, \|K\| m$, где K — линейный интегральный оператор с ядром k. Отсюда вытекает, что A отображает замкнутый шар D с центром h и радиусом $|\lambda|\, \|K\| m$ в себя. □

8.3. Положительные и монотонные операторы в частично упорядоченных банаховых пространствах

Наша очередная цель — выяснить, как можно усилить результаты теории компактных операторов в случае, когда на рассматриваемые операторы налагаются условия положительности и монотонности. Ясно, что эти условия имеют смысл лишь в пространствах, для которых имеется удовлетворительное понятие упорядочения, и наша первая задача будет состоять в том, чтобы показать, как обычное упорядочение вещественных чисел можно обобщить на случай банаховых пространств. Поскольку модельным здесь является некое свойство *вещественных* чисел, естественно предполагать всюду далее, что $\mathscr{B}$ — *вещественное* пространство.

Для $a, b \in \mathbb{R}$ соотношение $a \geqslant b$ эквивалентно соотношению $a - b \in \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных чисел. Следовательно, если нам удастся найти в банаховом пространстве подходящую замену для $\mathbb{R}^+$, то мы сможем естественным образом ввести в нем упорядочение. В двумерном случае разумно считать вектор положительным, если у него положительные координаты; геометрически такие векторы образуют конус. Поскольку конусы легко можно описать с помощью понятий, имеющих смысл для абстрактных банаховых пространств, возможная замена для $\mathbb{R}^+$ у нас уже и готова.

8.3.1. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ — вещественное банахово пространство. Подмножество $E \subset \mathscr{B}$ называется **конусом,** если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) замкнуто и выпукло;

(ii) если $f \in E$, то $tf \in E$ для каждого $t \geqslant 0$;

(iii) если как f, так и $-f$ принадлежат E, то $f = 0$.

8.3.2. Определение. Пусть $E \subset \mathscr{B}$ — конус. Говорят, что f **больше или равно** g, и пишут $f \geqslant g$ либо $g \leqslant f$, если $f - g \in E$;

аналогично определяется соотношение **меньше или равно.** Наделенное таким упорядочением $\geqslant$ банахово пространство $\mathscr{B}$ называется **частично упорядоченным.**

Использование того же самого символа $\geqslant$ в указанном новом смысле не должно приводить к путанице, поскольку из контекста всякий раз будет ясно, что имеется в виду — векторы или вещественные числа. Отметим, что $E = \{f\colon f \geqslant 0\}$. Таким образом, положительные элементы пространства $\mathscr{B}$ можно представлять себе как элементы из E.

8.3.3. Пример. На рис. 8.2 изображен конус в пространстве $\mathscr{B} = \mathbb{R}^2$. Заметим, что он вовсе не обязан совпадать с первым квадрантом, так что наше определение — несколько более общее, чем определение при помощи векторов с неотрицательными координатами, из которого мы исходили. Тем не менее ввиду условия (iii) нашего определения угол θ должен быть меньше π. В случае когда E — первый квадрант и $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, неравенство $x \geqslant y$ выполняется, если и только если $x_1 \geqslant y_1$ и $x_2 \geqslant y_2$. Если $x_1 > y_1$ и $x_2 < y_2$, то не имеет места ни неравенство $x \leqslant y$, ни неравенство $x \geqslant y$. Таким образом, не всякие два вектора сравнимы между собой, т. е. наше упорядочение лишь частичное.

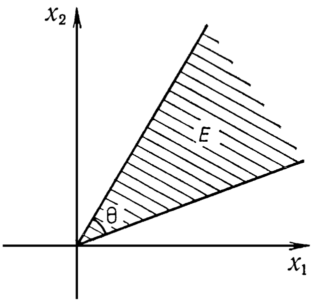

Рис. 8.2.

8.3.4. Пример. (a) Пусть $\mathscr{B} = \mathscr{C}([0, 1])$ — пространство вещественнозначных непрерывных функций с sup-нормой и E — множество неотрицательных функций из $\mathscr{B}$. Как легко проверить, E замкнуто, а остальные требования выполняются очевидным образом. Значит, E — конус. (b) Возьмем теперь в качестве $\mathscr{B}$ вещественное пространство $\mathscr{L}_p(0, 1)$ с $p \geqslant 1$. Снова множество E неотрицательных функций из $\mathscr{B}$ образует конус.

Указанные два выбора конуса E — бесспорно важнейшие для приложений; одна другая возможность описана в задаче 8.10. Иногда оказываются полезными и более изощренно выбираемые конусы; см. Красносельский [1962].

Хотя упорядочение, порождаемое конусом E, является лишь частичным, большинство стандартных свойств, справедливых для упорядочения вещественных чисел, сохраняет силу. Например, для $f, g, h \in \mathscr{B}$

(i) $f \geqslant g,\ g \geqslant h \ \Rightarrow\ f \geqslant g,$

(ii) $f \geqslant g,\ g \geqslant f \ \Rightarrow\ f = g.$

Некоторые другие важные свойства конусов приведены в задаче 8.7.

В теории функций вещественной переменной часто важную роль играют интервалы в $\mathbb{R}$, рассматриваемые как упорядоченные множества. Обобщение этого понятия на случай частично упорядоченных пространств напрашивается само собой.

8.3.5. Определение. Пусть u, $v \in \mathscr{B}$ и $u \leqslant v$. Множество элементов f, удовлетворяющих условию $u \leqslant f \leqslant v$, называется **порядковым интервалом** и обозначается $[u, v]$.

Всякий порядковый интервал замкнут и выпукл. Однако он не обязан быть ограниченным по норме, если только порождающий упорядочение конус не является „нормальным" в следующем смысле:

8.3.6. Определение. Конус E называется **нормальным**, если существует такое $m \in \mathbb{R}$, что $\|f\| \leqslant m\|g\|$ для любых f, $g \in \mathscr{B}$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant f \leqslant g$.

Конусы неотрицательных функций в $\mathscr{C}([0, 1])$ и $\mathscr{L}_p(0, 1)$ оба нормальны (с $m = 1$). Конус неотрицательных функций в банаховом пространстве $\mathscr{C}^1([0, 1])$ с нормой (1.3.7) *не является* нормальным. Действительно, если $g(x) = 1$, $f_n(x) = \sin^2 nx$, то $0 \leqslant f_n \leqslant g$, но $\lim \| f_n \|_{\mathscr{C}^1} = \infty$.

Договорившись о подходящем упорядочении в наших пространствах, вернемся к изучению компактных операторов. Следующие наводящие замечания выявляют общую перспективу построения теории. В одномерном случае для того, чтобы оператор A имел неподвижную точку, достаточно по теореме о промежуточном значении, чтобы существовал интервал $[u, v]$, такой что $Au \geqslant u$ и $Av \leqslant v$. Если A положителен, то $A0 \geqslant 0$, и в качестве u можно, очевидно, взять точку 0. Далее, если при больших значениях аргумента производная меньше единицы (это отнюдь не исключает больших отрицательных значений производной), то в качестве второй концевой точки можно будет взять некоторое достаточно большое v; в случае же бóльших производных неподвижной точки вообще может не существовать. Надлежащее обобщение этого рассуждения на многомерный случай связано с привлечением понятия порядкового интервала. Однако для существования неподвижной точки у компактного оператора A требуется дополнительное геометрическое условие: нужно, чтобы он отображал интервал $[u, v]$ в себя. Естественно ожидать, что, как и в одномерном случае, при установлении этого факта может оказаться полезной монотонность оператора A.

Следующие определения — естественное обобщение одномерных определений. Ниже D обозначает подмножество в $\mathscr{B}$, а A — оператор $D \to \mathscr{B}$.

8.3.7. Определение. Оператор A называется **положительным** [1], если $f \in D$ и $f \geqslant 0 \Rightarrow Af \geqslant 0$.

8.3.8. Определение. Оператор A называется **монотонным** [1], если $f, g \in D$ и $f \geqslant g \Rightarrow Af \geqslant Ag$.

Для линейных операторов положительность и монотонность эквивалентны, но в общем случае это не так. Как отмечалось во введении к главе, часто оказывается возможным сделать так, чтобы оператор A в интегральном уравнении $f = Af$, отвечающем данной краевой задаче для дифференциального уравнения, был положительным и монотонным; такие операторы возникают и во многих других приложениях.

Следующий результат немедленно вытекает из теоремы Шаудера о неподвижной точке 8.2.3, если учесть, что в случае, когда задающий упорядочение конус нормален, всякий порядковый интервал является ограниченным замкнутым выпуклым множеством.

8.3.9. Теорема. *Пусть E — конус в вещественном банаховом пространстве $\mathscr{B}$. Предположим, что он нормален, и пусть A — компактный оператор, отображающий порядковый интервал $[u, v]$ в себя. Тогда A имеет неподвижную точку в $[u, v]$.*

8.3.10. Пример. Полезность этой теоремы демонстрирует следующее ее применение к одной задаче из нелинейной теории упругости. Приводимое ниже рассуждение принадлежит Стьюарту [1975].

Рассмотрим тонкую упругую закрепленную по краям мембрану под нормальным давлением. При больших деформациях становятся существенными нелинейные эффекты; учитывающая их приближенная теория приводит к так называемым уравнениям Фёппля — Хенки. Для круговой мембраны радиальное напряжение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f''(x) + 3x^{-1}f'(x) + 2[f(x)]^{-2} = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{8.3.1}$$

с граничными условиями $f'(0) = 0$, $f(1) = a$. Это классическая краевая задача. Используя теорему 8.3.9, можно дать следующее чрезвычайно простое доказательство существования решения для всех $a > 0$.

Прежде всего с помощью функции Грина задача формально переписывается в виде интегрального уравнения Гаммерштейна.

[1] К сожалению, оба термина «положительный» и «монотонный» используются в функциональном анализе в нескольких различных смыслах. С другим значением термина «положительный» мы встретимся в § 9.2. Предметом активных исследований последнего времени служит класс «монотонных» операторов, определенных совсем иначе, чем здесь (см., например, Вайнберг [1972]. — *Перев.*).

Если положить $g(x)=f(x-a)$, то это будет уравнение $g=Ag$, где

$$Ag(x)=\int_0^1 k(x,\ y)[a+g(y)]^{-2}\,dy,$$

$$k(x,\ y)=\begin{cases}(x^{-2}-1)\,y^3 & \text{при} \quad 0\leqslant y<x\leqslant 1,\\ (y^{-2}-1)\,y^3 & \text{при} \quad 0\leqslant x<y\leqslant 1.\end{cases}$$

Подходящее для анализа этого уравнения пространство — вещественное $\mathscr{C}([0,1])$ с sup-нормой и с частичным упорядочением, задаваемым конусом E неотрицательных функций. Для $z\geqslant 0$ положим $\psi(z)=(a+z)^{-2}$ и определим оператор Ψ: $E\to\mathscr{C}([0,1])$ формулой $\Psi g(x)=\psi(g(x))$; ясно, что он непрерывен и положителен. Положим

$$Lg\,(x)=\int_0^1 k(x,\ y)\,g(y)\,dy,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Непосредственно проверяется, что L: $\mathscr{C}([0,1])\to\mathscr{C}([0,1])$ — непрерывный положительный линейный оператор. Далее,

$$(Lg)'(x)=-2\int_0^x (y/x)^3\,g(y)\,dy,\quad 0<x\leqslant 1,$$

$$(Lg)'(0)=0,$$

откуда следует, что $\|(Lg)'\|\leqslant 2\|g\|$. Следовательно, оператор L компактен (задача 5.9). Поэтому оператор $A=L\Psi$ положителен и компактен, и мы сможем применить теорему 8.3.9, если нам удастся найти порядковый интервал $[u,v]$, отображаемый этим оператором в себя. Поскольку A положителен, можно взять $u=0$. Далее, так как ψ — монотонно убывающая функция, то очевидно, что $Ag\leqslant A0$ для любого $g\in E$. Следовательно, $A[0,v]\subset[0,v]$, если взять $v=A0$. Итак, теорема 8.3.9 гарантирует существование неподвижной точки, и стандартное рассуждение показывает, что $f(x)=g(x)+a$ удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению и граничным условиям. Мы доказали результат:

8.3.11. Теорема. *Для каждого $a>0$ уравнение Фёппля — Хенки (8.3.1) с граничными условиями $f'(0)=0$, $f(1)=a$ имеет решение $f\in\mathscr{C}^1([0,1])\cap\mathscr{C}^2((0,1))$, такое что*

$$a\leqslant f(x)\leqslant a+(2a)^{-2}(1-x^2)\quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Это решает вопрос о существовании решения, но можно поставить два дальнейших вопроса: единственно ли решение и как его можно построить? Единственность доказать легко (задача

8.12), но на второй вопрос ответить не так-то просто, и мы отсылаем читателя к указанной работе Стьюарта.

В приведенном примере выбрать искомый порядковый интервал оказалось легко потому, что оператор A был положительным и „монотонно убывающим“ (т. е. $f \geqslant g \Rightarrow Af \leqslant Ag$). Замечания перед определением 8.3.7 наводят на мысль, что аналогичное рассуждение пройдет и в том случае, если оператор A возрастает, но не слишком быстро, и это действительно так (задача 8.11).

В практическом отношении теорема 8.3.9 страдает двумя главными недостатками. Во-первых, часто бывает трудно выбрать подходящий порядковый интервал. Во-вторых, как и всякий результат, основанный на теореме Шаудера о неподвижной точке, теорема 8.3.9 не дает никаких указаний относительно того, как построить решение. Исходя из рассмотрения одномерной ситуации (рис. 8.1), можно надеяться, что с этими проблемами удастся справиться в случае монотонных операторов. Основой для последующего анализа служат свойства монотонных последовательностей в частично упорядоченных пространствах.

8.3.12. Определение. Последовательность (f_n) в $\mathscr{B}$ называется **монотонно возрастающей,** если $f_{n-1} \leqslant f_n$ для всех n, и **порядково-ограниченной сверху,** если существует такой элемент v, называемый **порядковой границей**, что $f_n \leqslant v$ для всех n. Аналогично определяются **монотонно убывающие** и **порядково-ограниченные снизу** последовательности. Заметим, что термин „ограниченный“ у нас по-прежнему означает „ограниченный по норме“.

8.3.13. Лемма. *Пусть E — конус в вещественном банаховом пространстве $\mathscr{B}$. Пусть, далее, D — подмножество в $\mathscr{B}$ и A: $D \to \mathscr{B}$ — монотонный оператор. Предположим, что существует такой порядковый интервал $[u, v] \subset D$, что $Au \geqslant u$, $Av \leqslant v$. Тогда*

(i) *оператор A отображает $[u, v]$ в себя;*

(ii) *последовательности (f_n), (g_n), задаваемые формулами $f_0 = u$, $g_0 = v$ и $f_n = Af_{n-1}$, $g_n = Ag_{n-1}$ для $n \geqslant 1$, являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей.*

Доказательство. (i) Если $f \geqslant u$, то $Af \geqslant Au \geqslant u$. Аналогично, если $f \leqslant v$, то $Af \leqslant v$.

(ii) Поскольку оператор A монотонен, то $f_n = Af_{n-1} \leqslant Af_n = f_{n-1}$, если $f_{n-1} \leqslant f_n$. Так как $f_1 = A\,u \geqslant u$, то по индукции последовательность (f_n) — монотонно возрастающая. Рассуждение для (g_n) аналогично. □

Таким образом, в случае монотонного оператора A для нахождения порядкового интервала $[u, v]$, отображаемого оператором A в себя, достаточно найти u, v, удовлетворяющие условиям $Au \geqslant u$, $Av \leqslant v$. Тем самым для таких A проверка предположения теоремы

8.3.9 осуществляется сравнительно непосредственно и соответственно легче установить существование решения. К тому же, если монотонные последовательности (f_n) и (g_n) сходятся, их пределы будут неподвижными точками A. Следует, однако, заметить, что при этом не гарантировано ни то, что неподвижная точка единственна, ни то, что всякая неподвижная точка в $[u, v]$ может быть получена таким образом. Выясним теперь, является ли — как это имеет место в $\mathbb{R}$ — условие порядковой ограниченности достаточным для обеспечения сходимости монотонных последовательностей.

8.3.14. Определение. Конус называется **регулярным**, если каждая монотонно возрастающая последовательность, порядково-ограниченная сверху, сходится.

8.13.15. Пример. Регулярен ли конус E неотрицательных функций в вещественном пространстве $\mathscr{C}([0, 1])$, наделенном sup-нормой? Последовательность (f_n) с $f_n(x) = 1 - x^n$ монотонно возрастает и порядково-ограничена сверху, но не сходится по норме ни к какому пределу. Следовательно, конус E не регулярен.

8.3.16. Пример. Рассмотрим теперь конус E неотрицательных функций в вещественном пространстве $\mathscr{L}_p(\Omega)$, где $1 \leqslant p < \infty$ и Ω — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}$. Пусть (f_n) — монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху некоторой функцией $g \in \mathscr{L}_p(\Omega)$; можно считать, что $f_n \geqslant 0$ (в противном случае возьмем $f_n - f_1$). Тогда поточечный предел f последовательности (f_n) существует почти везде и $f \leqslant g$. Следовательно, $0 \leqslant (f - f_n)^p \leqslant g^p$ и

$$\| f - f_n \|_p^p = \int_\Omega | f - f_n |^p \to 0$$

по теореме 2.4.11 о мажорированной сходимости. Тем самым доказано, что $f_n \to f$ в $\mathscr{L}_p(\Omega)$, и, значит, конус E регулярен.

В пространствах, упорядоченных при помощи регулярных конусов, последовательности из леммы 8.3.13 будут сходиться каждая к некоторой неподвижной точке оператора A, если этот оператор непрерывен. Поскольку компактность A не является здесь необходимой, этот результат можно использовать для того, чтобы подступиться к задачам в неограниченных областях (см. пример 8.3.21 ниже). К сожалению, из-за того, что конус неотрицательных функций в $\mathscr{C}([0, 1])$ нерегулярен, самый удобный выбор банахова пространства исключается. Правда, в $\mathscr{C}([0, 1])$ вообще-то имеются регулярные конусы (см. задачу 8.10), но при их использовании приходится налагать нежелательные ограничения на операторы. С другой стороны, нелинейные операторы не являются непрерывными в $\mathscr{L}_p$-пространствах, разве что если нелинейность очень слабая. В дальнейшем мы будем обычно опираться на второе из двух условий (a) и (b) приводимой ниже теоремы, в котором компактность оператора призвана компенсировать недостачу регулярности у конуса.

8.3.17. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — вещественное банахово пространство с конусом E и A: $D \to \mathscr{B}$ — непрерывный монотонный оператор. Предположим, что существует порядковый интервал $[u, v] \subset D$, такой что $Au \geqslant u$, $Av \leqslant v$. Тогда A отображает $[u, v]$ в себя. Кроме того, A имеет неподвижную точку в $[u, v]$, если дополнительно выполняется какое-нибудь из условий:* (a) *конус E регулярен,* (b) *конус E нормален, а оператор A компактен.*

Определим последовательности (f_n), (g_n) формулами $f_0 = u$, $g_0 = v$ и $f_n = Af_{n-1}$, $g_n = Ag_{n-1}$ для $n \geqslant 1$. Эти последовательности (f_n) и (g_n) являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей, и если выполнено одно из условий (a) *или* (b), *то каждая из них сходится к некоторой неподвижной точке оператора A в $[u, v]$.*

Доказательство. Если последовательность (f_n) сходится к некоторому пределу f, то непрерывность A гарантирует, что f будет неподвижной точкой для A. Далее, $f \in [u, v]$, в силу замкнутости $[u, v]$. Согласно лемме 8.3.13, последовательность (f_n) монотонно возрастает, поэтому утверждение теоремы будет установлено, если мы сможем доказать сходимость (f_n). В случае выполнения условия (a) эта сходимость есть очевидное следствие определения 8.3.14. В случае выполнения условия (b) множество $[u, v]$ ограничено, ввиду нормальности конуса E, так что множество $A([u, v])$ относительно компактно. Таким образом, нам достаточно показать, что всякая монотонная последовательность (f_n) в относительно компактном множестве сходится.

По соображениям компактности (f_n) обладает некоторой сходящейся подпоследовательностью (f_{n_k}) с пределом, скажем, f. Так как последовательность (f_{n_k}) монотонна, то $f_{n_r} - f_{n_k} \in E$ при $r \geqslant k$, и на основании замкнутости E мы заключаем, переходя к пределу, что $f - f_{n_k} \in E$. Таким образом, $f_{n_k} \leqslant f$ для всех k[1]. Далее, при всех $n \geqslant n_k$ мы имеем $0 \leqslant f - f_n \leqslant f - f_{n_k}$, откуда следует в силу нормальности E, что

$$\|f - f_n\| \leqslant m \|f - f_{n_k}\|.$$

Полагая $k \to \infty$, получаем, что $f_n \to f$. □

Главное достоинство этого результата состоит в его конструктивности. При его практическом применении основная проблема —

[1] А значит, $f_n \leqslant f$ для всех n. — *Прим. перев.*

это найти подходящие u и v — концевые точки порядкового интервала; этой проблемой мы сейчас и займемся. При поисках условия, которое гарантировало бы существование подходящего v, естественно, как и в одномерном случае, рассмотреть ограничения на скорость изменения оператора, о котором идет речь, измеряемую, скажем, при помощи производной Фреше. Более общим образом, достаточно потребовать, чтобы наш оператор „мажорировался" некоторым другим оператором с подходящей производной Фреше. Во многих задачах в качестве такой мажоранты можно взять линейный оператор, и в этом случае мерой скорости изменения является спектральный радиус; именно с этой ситуацией мы и будем иметь дело.

8.3.18. Определение. Оператор V (соотв. U) называется **мажорантой** (соотв. **минорантой**) оператора A: $D \to \mathscr{B}$, если $Af \leqslant Vf$ (соотв. $Uf \leqslant Af$) для всех $f \in D$.

8.3.19. Лемма. *Пусть E — конус в вещественном банаховом пространстве $\mathscr{B}$ и A: $E \to \mathscr{B}$ — непрерывный положительный монотонный оператор. Предположим, что $Vf = Lf + h$ для $f \in \mathscr{B}$, где $h \in E$ и L — положительный ограниченный линейный оператор с $r_\sigma(L) < 1$. Если V является мажорантой для A, то интервал $[0, v]$, где v — единственное решение уравнения $Vv = v$, отображается оператором A в себя.*

Доказательство. Поскольку $r_\sigma(L) < 1$, то по теореме 3.7.8 уравнение $f = Lf + h$ имеет единственное решение v, которым служит предел последовательности (v_n), задаваемой формулой

$$v_n = h + \sum_{1}^{n} L^k h.$$

Так как оператор L положителен, то $L^k h \in E$ для $k \geqslant 1$. Следовательно, v_n есть сумма векторов из E, а значит, $v_n \in E$. Поэтому $v \in E$, в силу замкнутости E.

Наш результат вытекает теперь из леммы 8.3.13. Действительно, поскольку оператор A положителен, то $A0 \geqslant 0$, а ввиду того что V — мажоранта для A, $Av \leqslant Vv = v$. □

8.3.20. Пример. Рассмотрим интегральное уравнение Гаммерштейна $f = Af$, где

$$Af(x) = \int_0^1 k(x, y)\, \psi[y, f(y)]\, dy,$$

а k, ψ — вещественнозначные неотрицательные непрерывные функции на $[0, 1] \times [0, 1]$ и $[0, 1] \times [0, \infty)$ соответственно. При наделении пространства $\mathscr{C}([0, 1])$ вещественнозначных непрерывных функций sup-нормой и упорядочением, задаваемым конусом E неотрицательных функций, оператор $A: E \to \mathscr{C}([0, 1])$ компактен и положителен. Предположим, что

(i) $\psi[x, z]$ — неубывающая функция от z при каждом $x \in [0, 1]$;

(ii) существуют неотрицательные числа m, l, такие что $\psi[x, z] \leqslant mz + l$ для $x \in [0, 1]$ и $z \geqslant 0$.

Тогда имеется очевидная возможность для выбора L и h в предыдущей лемме. А именно, полагаем

$$Lf(x) = m \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy,$$

$$h(x) = l \int_0^1 k(x, y)\, dy.$$

Для всякого $f \in E$ имеем $0 \leqslant Af \leqslant Lf + h$, так что V — мажоранта для A. Чтобы применить лемму, требуется еще следующее условие:

(iii) $r_\sigma(L) < 1$.

Если v — решение уравнения $v = Lv + h$, то A отображает $[0, v]$ в себя. Следовательно, по теореме 8.3.17, в $[0, v]$ существует неподвижная точка оператора A. Далее, полагая $f_0 = 0$, $g_0 = v$ и $f_n = Af_{n-1}$, $g_n = Ag_{n-1}$ для $n \geqslant 1$, мы получаем монотонные итерационные схемы для решения нашего интегрального уравнения.

8.3.21. Пример. В случае бесконечного интервала интегрирования рассуждение из предыдущего примера, вообще говоря, не проходит, потому что оператор A обычно оказывается некомпактным. Эту трудность можно иногда преодолеть, привлекая условие регулярности (а) из теоремы 8.3.17. Однако, поскольку в $\mathscr{C}([0, \infty])$ конус неотрицательных функций нерегулярен, приходится выбирать другое банахово пространство. Если используется пространство $\mathscr{L}_p(0, 1)$, то к интегральному уравнению

$$f(x) = \int_0^\infty k(x, y) \psi[y, f(y)]\, dy$$

применим тот же подход, что и в предыдущем примере, при условии что рассматриваемый оператор непрерывен.

Методы монотонности особенно удобны при работе с краевыми задачами для дифференциальных уравнений. Одна из возможностей здесь состоит в том, чтобы воспользоваться рассуждением из примера 8.3.20 (см. задачу 8.14), но при этом надо налагать довольно ограничительные условия на нелинейный член; здесь мы рассмотрим другой метод, который часто оказывается более эффективным. Центральная идея, принадлежащая Перрону, является классической, но с помощью техники частично упорядоченных пространств этот классический метод удалось значительно обобщить (см. недавнюю обзорную статью Аманна [1976]). Метод основан на использовании в качестве концевых точек порядкового интервала $[u, v]$ так называемых „верхнего и нижнего решений“ u, v, в сочетании с некоторой „перекройкой“ дифференциального уравнения с целью получить монотонный оператор.

Для иллюстрации рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &f''(x) + \psi[x, f(x)] = 0, \\ &f(0) = f(1) = 0. \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

Предположим, что вещественнозначная функция ψ непрерывна и *локально-липшицева* в том смысле, что для любого конечного отрезка $[\alpha, \beta]$ существует число m (возможно, зависящее от α, β), такое что

$$|\psi[x, z_1] - \psi[x, z_2]| \leqslant m|z_1 - z_2| \tag{8.3.3}$$

для $x \in [0, 1]$ и $z_1, z_2 \in [\alpha, \beta]$.

8.3.22. Определение. Функция $u \in \mathscr{C}^2([0,1])$ называется **нижним решением** системы (8.3.2), если

$$\begin{aligned} &-u''(x) \leqslant \psi[x, u(x)] \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \\ &u(0),\ u(1) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Верхнее решение определяется при помощи обратных неравенств.

Возьмем вещественное банахово пространство $\mathscr{C}([0,1])$ с sup-нормой и частичным упорядочением, задаваемым конусом E неотрицательных функций. Допустим, что существуют нижнее и верхнее решения u и v, удовлетворяющие условию $u \leqslant v$, и положим

$$\alpha = \sup_{x \in [0, 1]} u(x), \qquad \beta = \sup_{x \in [0, 1]} v(x).$$

Тогда $[\alpha, \beta]$ — конечный отрезок в $\mathbb{R}$ и в силу локальной липшицевости ψ найдется вещественное число ω, такое что, каково бы ни было $x \in [0, 1]$, $\psi[x, z] + \omega^2 z$ есть неубывающая функция от z для $z \in [\alpha, \beta]$. Поскольку наше дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$-f''(x) + \omega^2 f(x) = \psi[x, f(x)] + \omega^2 f(x),$$

система (8.3.2) эквивалентна интегральному уравнению $f=Af$, где

$$Af(x)=\int_0^1 k(x, y)\{\psi[y, f(y)]+\omega^2 f(y)\}\, dy$$

и k — функция Грина для оператора $-d^2/dx^2+\omega^2$ с указанными выше граничными условиями. По лемме 8.2.2 оператор A компактен, а в силу неотрицательности k он также и монотонен. Таким образом, мы сможем применить теорему 8.3.17, если докажем, что $u\leqslant Au$ и $v\geqslant Av$. Это делается так.

Поскольку u — нижнее решение, то

$$-u''(x)+\omega^2 u(x)\leqslant\psi[x, u(x)]+\omega^2 u(x).$$

Умножая на k и интегрируя, получаем

$$u(x)\leqslant\left\{u(0)\frac{\partial k}{\partial y}(x, 0)+u(1)\frac{\partial k}{\partial y}(x, 1)\right\}+\\ +\int_0^1 k(x, y)\{\psi[y, u(y)]+\omega^2 u(y)\}\, dy.$$

Так как $u(0), u(1)\leqslant 0$, то выражение в первых фигурных скобках может принимать лишь отрицательные значения, откуда следует, что $u\leqslant Au$. Аналогичным рассуждением устанавливается, что $v\geqslant Av$. Поэтому теорема 8.3.17 гарантирует существование решения нашего интегрального уравнения в $[u, v]$. Далее, если $f_0=u$ и f_n — решение линейного дифференциального уравнения

$$-f_n''(x)+\omega^2 f_n(x)=\psi[x, f_{n-1}(x)]+\omega^2 f_{n-1}(x)\quad (n\geqslant 1),$$

удовлетворяющее граничным условиям $f_n(0)=f_n(1)=0$, то (f_n) есть монотонно возрастающая последовательность, сходящаяся к некоторому решению системы (8.3.2). Определяя аналогичным образом (g_n) с $g_0=v$, мы, очевидно, получим убывающую последовательность, сходящуюся к некоторому решению той же системы. Тем самым доказан следующий результат.

8.3.23. Теорема. *Пусть* ψ: $[0, 1]\times(-\infty, \infty)\to\mathbb{R}$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица* (8.3.3). *Предположим, что существуют нижнее и верхнее решения* u, v, *такие что* $u\leqslant v$. *Тогда краевая задача* (8.3.2) *имеет по крайней мере одно решение в* $[u, v]$. *Далее, определенные выше последовательности* (f_n) *и* (g_n) *монотонно сходятся к решениям этой задачи.*

По поводу обобщений этого результата на случай, когда ψ зависит еще и от f', см. Чандра и Дейвис [1974].

Верхнее и нижнее решения часто можно построить при помощи одного простого геометрического соображения (задача 8.15). Например, для уравнения

$$f''(x) = \mu \operatorname{sh}[f(x)] + g(x)$$

с $g \in \mathscr{C}([0, 1])$ и $\mu > 0$ в качестве u и v можно взять соответственно большую отрицательную константу и большую положительную константу. Особенно полезна теорема при рассмотрении уравнений с сильной нелинейностью вроде приведенного выше. Другая область приложения теоремы — это нелинейные задачи на собственные функции, где наличие тривиального решения вызывает серьезные затруднения при применении большинства методов. В приводимом ниже обсуждении задачи для нелинейного осциллятора решающий шаг состоит в выборе неотрицательного нижнего решения, не равного тождественно нулю.

8.3.24. Пример. Для краевой задачи

$$f''(x) + \mu \sin[f(x)] = 0,$$
$$f(0) = f(1) = 0$$

соответствующее линеаризованное уравнение имеет собственные значения $\mu_n = n^2\pi^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В нелинейном случае тоже при $\mu < \pi^2$ нетривиальных решений нет, но при $\mu > \pi^2$ ситуация совсем иная.

В самом деле, предположим, что $\mu > \pi^2$. Попробуем в качестве нижнего решения взять $u(x) = \varepsilon \sin \pi x$. При некотором (малом) $\varepsilon \geqslant 0$

$$u''(x) + \mu \sin[u(x)] = \mu \sin[\varepsilon \sin \pi x] - \pi^2\varepsilon \sin \pi x \geqslant 0.$$

Поскольку $u(0) = u(1) = 0$, и действительно будет нижним решением при таком ε. Далее, легко видеть, что $v(x) = \pi$ является верхним решением. Так как $u \leqslant v$, то теорема 8.3.23 применима, и мы заключаем, что наша краевая задача имеет нетривиальное решение при *каждом* $\mu > \pi^2$. Теорема дает также конструктивный метод для нахождения решений.

Интересно заметить, что уравнение

$$f''(x) + \mu \sin[f(x)] = g(x)$$

с теми же граничными условиями имеет решение при каждой непрерывной функции g и каждом $\mu \in \mathbb{R}$ (теорема 8.2.9). Таким образом, хотя соответствующий интегральный оператор и компактен, его собственные значения образуют целый континуум и, кроме того, альтернатива Фредгольма не имеет места. Как мы увидим в гл. 14, это типичные черты нелинейных задач на собственные значения.

Задачи

8.1. (Роте) Пусть D — открытый единичный шар в банаховом пространстве $\mathscr{B}$ и A: $\bar{D} \to \mathscr{B}$ — компактный оператор. Используя теорему Шаудера о неподвижной точке, покажите, что A имеет неподвижную точку в $\bar{D}$, если $A(\partial D) \subset \bar{D}$. [Рассмотрите оператор RA, где $Rf = f$ при $f \in \bar{D}$, $Rf = f/\|f\|$ при $f \notin \bar{D}$.]

8.2. Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство в B: $D \to \mathscr{B}$ — сжимающее отображение. Положим $(I - B)(D) = S$. Докажите, что $I - B$: $D \to S$ есть гомеоморфизм (определение 4.2.9). Покажите также, что если S относительно компактно, то и D таково же.

8.3 (Красносельский). Пусть D — замкнутое ограниченное выпуклое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$. Предположим, что операторы A, B: $D \to \mathscr{B}$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $Af + Bg \in D$ при всех f, $g \in D$;

(ii) A компактен;

(iii) B является сжимающим.

Используя задачу 8.2 и теорему Шаудера о неподвижной точке, докажите, что оператор $T = A + B$ имеет неподвижную точку в D.

Выведите отсюда, что написанное ниже интегральное уравнение имеет решение в $\mathscr{C}([0, 1])$:

$$3f(x) = x + [f(x)]^2 + \int_0^1 |x - f(y)|^{1/2}\, dy.$$

8.4. Пусть D — замкнутое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$. Предположим, что $A(D) \subset D$, $A(D)$ относительно компактно и A является «почти сжимающим» в том смысле, что

$$\| Af - Ag \| < \| f - g \| \qquad (f,\ g \in D, \quad f \neq g).$$

Привлекая функционал $\|f - Af\|$, покажите, что оператор A имеет единственную неподвижную точку в D. (Заметьте, что A не обязан быть сжимающим.)

8.5. Пусть $\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup-нормой. Докажите, что если функция k: $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathscr{C} \to \mathbb{C}$ непрерывна, то оператор A: $\mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$, задаваемый формулой

$$Af(x) = \int_0^1 k(x, y, f(y))\, dy,$$

компактен.

8.6. Пусть k и A те же, что и в предыдущей задаче. Предположим, что существуют вещественные числа k_1, k_2, $\alpha \geqslant 0$ и $r > 0$, такие что $k_1 + k_2 r^\alpha \leqslant r$ и

$$|k(x,\ y,\ z)| \leqslant k_1 + k_2 |z|^\alpha \qquad (x,\ y \in [0, 1], \quad |z| \leqslant r).$$

Докажите, что уравнение Урысона $f = Af$ имеет решение в $\mathscr{C}([0, 1])$.

8.7. Пусть E — конус в вещественном банаховом пространстве $\mathscr{B}$. Докажите следующие утверждения и дайте их геометрическую интерпретацию для случая конуса на рис. 8.2:

(i) f, $g \in E$ и a, $b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow af + bg \in E$;

(ii) $-f \notin E \Rightarrow \inf\limits_{g \in E} \| f + g \| > 0$;

(iii) если $f \in E$, $g \in \mathscr{B}$ и $g \leqslant tf$ при некотором $t \in \mathbb{R}$, то $g \leqslant sf$ при всех $s > t$;

(iv) если $g \in \mathscr{B}$, $t \in \mathbb{R}$ и $g \leqslant tf$ для некоторого ненулевого $f \in E$, то существует наименьшее $s \in \mathbb{R}$, для которого $g \leqslant sf$.

8.8*. Докажите, что конус E нормален тогда и только тогда, когда существует такое $\delta > 0$, что $\|f + g\| \geqslant \delta$ для любых f, $g \in E$ с $\|f\| = \|g\| = 1$.

8.9. Покажите, что всякий регулярный конус нормален.

8.10. Пусть вещественное пространство $\mathscr{C}([0, 1])$ наделено sup-нормой. Возьмем некоторое $m \in (0, 1)$ и рассмотрим множество E всех неотрицательных функций из $\mathscr{C}([0, 1])$, таких что

$$m \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) \leqslant \inf_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x).$$

Докажите, что E — регулярный конус.

8.11. Пусть k: $[0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, и пусть

(i) функция ψ: $[0, 1] \times [0, \infty] \to \mathbb{R}$ непрерывна и неотрицательна;
(ii) $z^{-1}\psi[y, z] \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно по y.

Докажите, что для любой неотрицательной функции $g \in \mathscr{C}([0, 1])$ интегральное уравнение

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 k(x, y)\, \psi[y, f(y)]\, dy$$

имеет неотрицательное решение в $\mathscr{C}([0, 1])$.

Покажите, что в случае, когда условие (i) выполнено лишь на $[0, 1] \times (0, \infty)$, указанное выше заключение сохраняет силу, если потребовать дополнительно, чтобы $g(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. (Главное здесь то, что результат оказывается применимым к функциям ψ с сильной особенностью в нуле, например к $\psi[x, z] = z^{-n}$.)

8.12. В примере 8.3.11 нами было установлено существование положительного решения уравнения Фёппля — Хенки. Докажите, что

$$\int_0^1 \int_0^1 x^3 k(x, y) f(x) f(y)\, dx\, dy \geqslant 0 \qquad (f \in \mathscr{C}([0, 1])),$$

и выведите отсюда, что в $\mathscr{C}([0, 1])$ существует только одно строго положительное решение.

8.13. Пусть E — конус в вещественном банаховом пространстве $\mathscr{B}$, и пусть A: $D \to \mathscr{B}$ — монотонно убывающий оператор ($f \geqslant g \Rightarrow Af \leqslant Ag$). Для $[u_0, v_0] \subset D$ положим $u_{n+1} = Av_n$, $v_{n+1} = Au_n$ $(n \geqslant 0)$. Покажите, что если $u_0 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant \leqslant v_0$, то

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

Далее, покажите, что если конус E нормален, а оператор A компактен, то последовательности (u_n), (v_n) монотонно сходятся к неподвижным точкам A.

Применяя этот результат, постройте неотрицательное непрерывное решение интегрального уравнения Урысона

$$f(x) = \mu \int_0^1 \frac{dy}{1 + x + f(y)} \qquad (\mu > 0)$$

(Коллатц). Поучительно заметить, что если попытаться здесь воспользоваться принципом сжимающих отображений, то при больших μ возникнут трудности.

8.14. Пусть ψ: $[0, 1] \times [0, \infty] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Предположим, что существуют неотрицательные ω, m, l, такие что для $x \in [0, 1]$ и $z \geqslant 0$

(i) $0 \leqslant \psi[x, z] + \omega z \leqslant mz + l$;
(ii) $\psi[x, z] + \omega z$ — неубывающая функция от z;
(iii) $m/(\pi^2 + \omega) < 1$.

Используя лемму 8.3.19, покажите, что уравнение

$$f''(x) + \psi[x, f(x)] = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

имеет неотрицательное решение с $f(0) = f(1) = 0$.

8.15. Пусть ψ: $[0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и пусть существуют положительные числа $a < \pi^2$ и z_0, такие что $z\psi[x, z] \leqslant az^2$ при $|z| \geqslant z_0$ и $x \in [0, 1]$. Докажите, что у системы

$$f''(x) + \psi[x, f(x)] = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$
$$f(0) = f(1) = 0$$

существуют верхнее и нижнее решения u, v, удовлетворяющие условию $u \leqslant v$. [*Указание*: в качестве v можно взять решение системы $v'' + av + m = 0$, $v(0) = v(1) = 0$ с некоторым $m \in \mathbb{R}$.]

8.16. Пусть g — вещественнозначная непрерывная функция на $[0, 1]$. Покажите, что при $\omega > 0$ система

$$f''(x) = \mu \operatorname{sh}[f(x)] + g(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$
$$f(0) = f(1) = 0$$

имеет решение, и дайте монотонные итерационные схемы для вычисления ее решений.

8.17. Понятие миноранты бывает иногда полезным в задачах на собственные значения. Пусть E — нормальный конус в вещественном банаховом пространстве $\mathscr{B}$ и A: $E \to \mathscr{B}$ — непрерывный компактный монотонный оператор. Предположим, что существуют $L, M \in \mathscr{L}(\mathscr{B})$, $h \in E$ и $\delta > 0$, такие что

(i) оператор L служит минорантой для A на $\bar{S}(0, \delta) \cap E$ и обладает собственным вектором $u \in E$ с собственным значением $\lambda \geqslant 1$;

(ii) оператор M положителен, $r_\sigma(M) < 1$ и оператор B, задаваемый равенством $Bf = Mf + h$, служит мажорантой для A.

Докажите, что оператор A имеет нетривиальную неподвижную точку в E, и укажите монотонные последовательности, сходящиеся к его неподвижным точкам.

8.18. Используя задачу 8.17, докажите, что каждое $\mu > 0$ является собственным значением уравнения

$$f''(x) + \mu [f(x)]^{1/2} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

с граничными условиями $f(0) = f(1) = 0$.

8.19. Покажите, что каждое $\mu > \pi^2$ является собственным значением уравнения Дуффинга

$$f''(x) + \mu \left\{ f(x) - \frac{1}{6} [f(x)]^3 \right\} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

с граничными условиями $f(0) = f(1) = 0$.

8.20. Пусть $\mu > 0$. Покажите, что при любом $\omega > (\pi^2/\mu)^{1/2}$ уравнение

$$f''(x) + \mu \sin[f(x)] = 0$$

имеет нечетное периодическое решение в $\mathscr{C}^2((-\infty, \infty))$ с периодом 2ω.

Глава 9

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

9.1. Введение

Почти во всякой физической задаче, которая может быть сформулирована с помощью линейных операторов, объектом основного физического интереса служит спектр рассматриваемого оператора. Вполне достаточным подтверждением этого высказывания служит повсеместное использование термина „спектр“ как в физическом, так и в математическом смысле. Например, в квантовой механике физический спектр энергетических состояний атома и спектр соответствующего дифференциального уравнения тесно связаны между собой. Для произвольного линейного оператора часто бывает трудно получить информацию даже просто качественного характера, но для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве это задача намного меньшей трудности. В действительности, как показывают дальнейшие исследования в области спектральной теории, в последнем случае часто может быть получено весьма полное описание решений уравнений, содержащих самосопряженные операторы. Сердцевиной любого обсуждения таких уравнений является один результат — спектральная теорема. Эта теорема, принадлежащая Гильберту и фон Нейману, позволяет объединить великое множество внешне различных результатов и представляет собой одно из главных достижений теории линейных операторов.

Общеизвестна важность результата, утверждающего, что всякую эрмитову матрицу (а тем самым и всякую эрмитову квадратичную форму) можно диагонализовать при помощи подходящего выбора базиса; превосходное изложение этого конечномерного результата дано в книге Халмоша [1948]. Спектральная теорема представляет собой, в сущности, далеко идущее обобщение этого результата на случай самосопряженных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. На пути к этому обобщению первым шагом, где важную роль играет бесконечномерность, служит теорема Гильберта — Шмидта 7.5.1 о компактных самосопряженных операторах. Эта теорема утверждает, что для всякого такого оператора T ортонормированное множество $\{\psi_n\}$ его собственных векторов образует базис пространства $\mathscr{H}$. Таким образом, произвольное $g \in \mathscr{H}$ можно представить в виде

$$g = \sum (g, \psi_n)\psi_n, \tag{9.1.1}$$

откуда немедленно следует, что

$$Tg = \sum \lambda_n (g, \psi_n) \psi_n, \tag{9.1.2}$$

где λ_n — собственное значение, отвечающее ψ_n. Формула (9.1.2) осуществляет в очевидном смысле диагонализацию оператора T. Дальнейшее наблюдение состоит в том, что если p — многочлен, то

$$p(T) g = \sum p(\lambda_n)(g, \psi_n) \psi_n. \tag{9.1.3}$$

Определение полиномиальной функции от T, разумеется, не представляет никаких трудностей, но оказывается, что (9.1.3) доставляет удовлетворительное определение произвольной непрерывной функции от T. Такие функции интересны по целому ряду причин; с точки зрения приложений особенно важны экспоненциальные функции, ибо они входят в решение задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения $u'(t) = \bar{L} u(t)$ (см. пример 3.5.10).

Какой вид должны принять соотношения (9.1.1) и (9.1.2) в случае, когда оператор самосопряжен, но не компактен? Ключ к решению вопроса дают две хорошо известные формулы разложения для дифференциальных уравнений. Пусть L — самосопряженный оператор, получаемый из оператора $l = i\, d/dx$ при наложении граничного условия $f(0) = f(2\pi)$ (пример 6.7.9), и пусть λ_n, ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — собственные значения и соответствующие собственные функции оператора L, т. е. $\lambda_n = n$, $\psi_n = (2\pi)^{-1/2} e^{-inx}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Общеизвестная формула разложения в ряд Фурье записывается так:

$$g(x) = \sum \psi_n(x) \int_0^{2\pi} g(y) \overline{\psi_n(y)}\, dy.$$

В $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2((0, 2\pi))$ она принимает вид

$$g = \sum (g, \psi_n) \psi_n.$$

Областью определения оператора L служит не всё $\mathscr{H}$, но по крайней мере для гладких g мы имеем

$$Lg = \sum \lambda_n (g, \psi_n) \psi_n.$$

Последние два соотношения и являются искомыми аналогами соотношений (9.1.1) и (9.1.2).

В только что рассмотренном примере оператор L, хотя сам и не компактен, но обладает компактным обратным, и указанные выше результаты могут быть выведены из теоремы 7.5.4. В качестве примера, когда это уже не так, возьмем снова оператор $l = i\, d/dx$, но предположим теперь, что рассматриваемым интервалом служит $(-\infty, \infty)$. В этом случае имеет место следующая формула обращения для преобразования Фурье:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(x)\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, \overline{\psi_\lambda(y)}\, dy;$$

здесь $\psi_\lambda(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{i\lambda x}$. Если $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ и g имеет компактный носитель, то эту формулу можно переписать в виде

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (g,\ \psi_\lambda)\, \psi_\lambda(x)\, d\lambda. \tag{9.1.4}$$

Замечая, что уравнение $lf = \lambda f$ имеет решение ψ_λ при каждом вещественном λ, можно попробовать принять такую гипотезу: под спектром нужно понимать всю вещественную ось, а под собственными функциями оператора l — функции ψ_λ. Тогда (9.1.4) можно интерпретировать как обобщение соотношения (9.1.1), получаемое заменой суммирования интегрированием по спектру. Чтобы сделать эту интерпретацию строгой, надо, конечно, преодолеть много трудностей. Во-первых, не очевидно, как следует определить самосопряженный оператор L, отвечающий дифференциальному оператору l. Во-вторых, ψ_λ не принадлежат $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ и потому заведомо не являются собственными векторами самого оператора L. Однако трудно отказаться от мысли, что (9.1.4) представляет собой в некотором смысле разложение по „обобщенным собственным функциям“, аналогичное разложению, доставляемому теоремой Гильберта — Шмидта.

Наша непосредственная цель — получить абстрактный вариант разложения по обобщенным собственным функциям для произвольного (не обязательно ограниченного) самосопряженного оператора и воспользоваться этим разложением для определения функций от операторов. В следующей главе мы займемся вопросом о построении самосопряженных операторов, отвечающих формальным обыкновенным дифференциальным операторам. Тогда станет ясно, что обширный список различных разложений в ряды по ортогональным функциям и различных „преобразований“ представляет собой не что иное, как перечень частных случаев разложений по обобщенным собственным функциям, получаемых применением спектральной теоремы.

9.2. Предварительные сведения

Прежде чем приступить к само́й спектральной теореме, нам надо разобраться с некоторыми техническими моментами. Сначала мы обсудим понятие функции от оператора. Следует подчеркнуть, что приводимое ниже определение не дает удобного метода для практического вычисления функций от операторов; такой метод даст в конечном счете сама спектральная теорема. Всюду далее $\mathscr{H}$ обозначает комплексное гильбертово пространство, а $L\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — ограниченный самосопряженный оператор.

Если p — многочлен, то оператор $p(L)$ имеет очевидный смысл. По теореме Вейерштрасса всякая непрерывная функция вещественной переменной λ может быть аппроксимирована на компактных интервалах в sup-норме последовательностью многочленов, и это наводит на мысль, что непрерывные функции от L можно определить как пределы в операторной норме (т. е. в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$) полиномиальных функций от L. Легко проверить, что это — и в самом деле разумное определение, но ограничение непрерывности слишком сурово для наших настоящих целей. Однако можно получить гораздо более общий класс функций, беря монотонные поточечные пределы непрерывных функций. Если мы хотим распространить эту конструкцию на случай функций от операторов, то нам нужна надлежащая интерпретация монотонности для последовательностей операторов. Основой для такого определения монотонности служит следующее частичное упорядочение в множестве самосопряженных операторов:

9.2.1. Определение. Пусть L, $M\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — ограниченные самосопряженные операторы. Мы пишем $L \geqslant M$ (или $M \leqslant L$), если $(Lf, f) \geqslant (Mf, f)$ для всех $f \in \mathscr{H}$. Оператор L называется **положительным**[1], если $L \geqslant 0$, и **строго положительным**, если $L \geqslant cI$ при некотором $c > 0$. Последовательность (L_n) самосопряженных операторов из $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ называется **монотонной** (или, точнее, **монотонно возрастающей**), если $L_{n-1} \leqslant L_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и **порядково-ограниченной сверху**, если существует такой ограниченный самосопряженный оператор L, что $L_n \leqslant L$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Важную роль в нашем анализе будут играть числа $m_\pm$ (определение 6.6.5). Напомним (см. теорему 6.6.6), что спектр оператора L содержится в $[m_-, m_+)$, и заметим, что $m_-I \leqslant L \leqslant m_+I$. Главные свойства введенного упорядочения перечислены в приводимой ниже лемме.

9.2.2. Лемма. *Пусть $L, M, N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ — самосопряженные операторы и $a, b \in \mathbb{R}$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) $L \geqslant M,\ M \geqslant L \ \Rightarrow\ L = M$;
(ii) $L \geqslant M \ \Rightarrow\ L + N \geqslant M + N$;
(iii) $L \geqslant M,\ a \geqslant 0 \ \Rightarrow\ aL \geqslant aM$;

---

[1] Положительные в смысле этого определения самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$ образуют конус в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, и частичное упорядочение $\geqslant$ есть упорядочение, задаваемое этим конусом. Операторы, положительные в смысле определения 8.37, — это, конечно, совсем другой объект.

(iv) $L,\ M \geqslant 0,\ a,\ b \geqslant 0 \ \Rightarrow\ aL + bM \leqslant \max(a,\ b)\cdot(L+M)$;
(v) $L \geqslant M \geqslant N \ \Rightarrow\ \|M\| \leqslant \max(\|L\|,\ \|N\|)$;
(vi) $L \geqslant M_1 \geqslant N,\ L \geqslant M_2 \geqslant N \ \Rightarrow\ \|M_1 - M_2\| \leqslant \|L - N\|$.

Доказательство. Утверждения (i)—(iv)—очевидные следствия определения. Утверждение (v) вытекает из неравенства

$$|(Mf,\ f)| \leqslant \max\left[\sup_{\|f\|=1} |(Lf, f)|,\quad \sup_{\|f\|=1} |(Nf, f)|\right]$$

и теоремы 6.6.7. Что касается (vi), то достаточно заметить, что $N - L \leqslant M_1 - M_2 \leqslant L - N$, и применить (v). $\square$

9.2.3. Лемма. *Пусть $\{L_n\}$ — последовательность ограниченных самосопряженных операторов. Предположим, что эта последовательность монотонно возрастает и порядково-ограничена сверху. Тогда она сильно сходится к некоторому ограниченному самосопряженному оператору, скажем L. Если каждый оператор L_n коммутирует с $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, то и L коммутирует с B.*

Доказательство. Очевидно, достаточно установить наш результат для случая $0 \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant \ \ldots\ \leqslant I$. Пусть $n \geqslant m$. Тогда $0 \leqslant L_n - L_m \leqslant I$, а значит, $\|L_n - L_m\| \leqslant 1$ (лемма 9.2.2, (v)). Отсюда следует, в силу задачи 6.23 и неравенства Шварца, что для всех $f \in \mathscr{H}$

$$\|[L_n - L_m] f\|^4 \leqslant ([L_n - L_m] f,\ f)([L_n - L_m]^2 f,\ [L_n - L_m] f) \leqslant$$
$$\leqslant \{(L_n f,\ f) - (L_m f,\ f)\} \|f\|^2. \qquad (9.2.1)$$

Поскольку последовательность $((L_n f, f))$ вещественных чисел по предположению не убывает и ограничена, она сходится. Следовательно, правая часть (9.2.1) стремится к нулю при $m,\ n \to \infty$; значит, $(L_n f)$ является последовательностью Коши, а потому сходится. Согласно следствию 3.5.12, существует оператор $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, служащий сильным пределом последовательности (L_n), и очевидно, что L самосопряжен. Утверждение о перестановочности следует из равенств

$$LBf = \lim L_n Bf = \lim BL_n f = BLf. \ \square$$

9.2.4. Лемма. *Пусть L — ограниченный самосопряженный оператор. Если многочлены p, q с вещественными коэффициентами таковы, что $p(\lambda) \geqslant q(\lambda)$ при $m_- \leqslant \lambda \leqslant m_+$, то $p(L) \geqslant q(L)$.*

Доказательство. Очевидно, операторы $p(L)$ и $q(L)$ самосопряжены. Предположим сперва, что $q = 0$. Поскольку многочлен p не меняет знака на интервале $[m_-, m_+]$, его можно представить в виде

$$p(\lambda) = a \prod (\lambda - a_j) \prod (b_j - \lambda) \prod ((\lambda - c_j)^2 + d_j^2),$$

где $a>0$; первые два произведения отвечают вещественным корням, причем $a_j \leqslant m_-$, $b_j \geqslant m_+$, последнее же отвечает комплексным корням. Далее, $p(L)$ получается подстановкой в это выражение L вместо λ, и так как $m_-I \leqslant L \leqslant m_+I$, то каждый сомножитель будет положительным оператором. Поскольку все сомножители перестановочны, то, в силу задачи 9.5, $p(L) \geqslant 0$. В заключение следует применить полученный результат к $p-q$. □

Эта лемма показывает, что отображение $p \mapsto p(L)$ сохраняет положительность. При этом фактически существенны лишь значения, принимаемые многочленом $p(\lambda)$ на интервале $[m_-, m_+]$, покрывающем спектр рассматриваемого оператора.

Теперь мы вполне подготовлены к тому, чтобы определить более общие функции от L. Допустим сначала, что f — вещественнозначная функция, непрерывная на $[m_-, m_+]$. По теореме Вейерштрасса существует последовательность (p_n) многочленов с вещественными коэффициентами, сходящаяся к f на $[m_-, m_+]$ в sup-норме. Следовательно, для любого заданного $\varepsilon>0$ найдется такое n_0, что

$$-\varepsilon \leqslant f\lambda - p_n - p_n(\lambda) \leqslant \varepsilon \quad (n \geqslant n_0,\ m_- \leqslant \lambda \leqslant m_+),$$

откуда

$$-2\varepsilon \leqslant p_n(\lambda) - p_m(\lambda) \leqslant 2\varepsilon \quad (m,\ n \geqslant n_0,\ m_- \leqslant \lambda \leqslant m_+).$$

В силу леммы 9.2.4

$$-2\varepsilon I \leqslant p_n(L) - p_m(L) \leqslant 2\varepsilon I,$$

а значит, по лемме 9.2.2,(v), $\|p_n(L) - p_m(L)\| \leqslant 2\varepsilon$. Таким образом, последовательность $(p_n(L))$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ является последовательностью Коши, а потому сходится к некоторому пределу; обозначим его через $f(L)$. Легко проверить, что $f(L)$ не зависит от выбора указанной последовательности многочленов, и, следовательно, описанная выше процедура доставляет удовлетворительное определение оператора $f(L)$. Следующая лемма утверждает, что этот оператор наследует хорошие свойства вещественнозначной функции f.

9.2.5. Лемма. *Для каждой вещественнозначной функции f, непрерывной на $[m_-, m_+]$, описанная выше процедура определяет единственный ограниченный самосопряженный оператор $f(L)$, и этот оператор коммутирует со всяким ограниченным оператором, с которым коммутирует L. Кроме того:*

(i) *оператор $f(L)$ положителен, если функция f неотрицательна на $[m_-, m_+]$;*

(ii) *отображение* $f \mapsto f(L)$ *не увеличивает норму в том смысле, что*

$$\|f(L)\| \leqslant \sup_{\lambda \in [m_-,\, m_+]} |f(\lambda)|;$$

(iii) *если* g — *другая функция того же типа, то*

$$(f \cdot g)(L) = f(L) \cdot g(L),$$
$$(f+g)(L) = f(L) + g(L).$$

Доказательство. Покажем, что

$$I \inf f(\lambda) \leqslant f(L) \leqslant I \sup f(\lambda); \tag{9.2.2}$$

здесь и всюду далее в этом доказательстве нижняя и верхняя грани берутся по $[m_-, m_+]$ Положим $\varepsilon_n = \sup |f(\lambda) - p_n(\lambda)|$; очевидно, $\lim \varepsilon_n = 0$. Имеем $p_n(\lambda) \geqslant \inf f(\lambda) - \varepsilon_n$, а значит, по лемме 9.2.4,

$$p_n(L) \geqslant [\inf(\lambda) - \varepsilon_n] I.$$

Следовательно, для всех $g \in \mathscr{H}$

$$(p_n(L)g,\, g) \geqslant [\inf f(\lambda) - \varepsilon_n] \|g\|^2,$$

откуда

$$\begin{aligned}(f(L)g,\, g) &= (p_n(L)g,\, g) + ([f(L) - p_n(L)]g,\, g)\\ &\geqslant [\inf f(\lambda) - \varepsilon_n] \|g\|^2 - \|f(L) - p_n(L)\| \|g\|^2\\ &\to \|g\|^2 \inf f(\lambda) \quad \text{при} \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

поскольку как ε_n, так и второй член в правой части неравенства стремятся к нулю. Отсюда вытекает первое неравенство в (9.2.2). Второе устанавливается аналогично.

Утверждение (i) немедленно следует из (9.2.2), а (ii) получается применением леммы 9.2.2, (v). Остальные утверждения непосредственно вытекают из определения оператора $f(L)$. □

Отображение $f \mapsto f(L)$ можно продолжить на непрерывные комплекснозначные функции, рассматривая по отдельности вещественную и мнимую части, но, конечно, при этом оператор $f(L)$ уже не обязательно будет самосопряженным. Наш заключительный шаг — обобщение определения на случай функций, „полунепрерывных сверху“.

9.2.6. Определение. Вещественнозначная функция f на $[a, b]$ называется **полунепрерывной сверху**, если она является поточечным пределом монотонно убывающей последовательности вещественнозначных непрерывных функций.

Для наших настоящих целей достаточно заметить, что индикаторные функции замкнутых интервалов или объединений конечного числа таких интервалов полунепрерывны сверху. Применение леммы 9.2.3 дает следующий результат (по поводу единственности см. задачу 9.6):

9.2.7. Теорема. *Пусть L — неотрицательная полунепрерывная сверху функция на $[m_-, m_+]$ и $\{f_n\}$ — монотонно убывающая последовательность непрерывных функций, поточечно сходящаяся к f. Тогда $f_n(L)$ сильно сходится к некоторому пределу $f(L)$ и $f(L)$ обладает всеми свойствами, перечисленными в лемме* 9.2.5.

Следует отметить три момента. Во-первых, если полунепрерывная сверху функция f определена на каком-либо интервале, содержащем $[m_-, m_+]$, то при определении $f(L)$ мы рассматриваем ограничение f на $[m_-, m_+]$; снова существенны лишь значения f на $[m_-, m_+]$. Во-вторых, отображение $f \longmapsto f(L)$ сохраняет как алгебраическую структуру, так и структуру порядка. В-третьих, сходимость $f_n(L)$ к $f(L)$ сильная, а не равномерная.

Теперь на очереди исследование класса операторов, называемых проекторами. Понятие проектора обобщает понятие отображения ортогонального проектирования в $\mathbb{R}^3$; из теоремы о проекции 1.5.11 вытекает, что такое обобщение имеет смысл в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

9.2.8. Определение. Пусть $\mathscr{M}$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Для всякого $f \in \mathscr{H}$ пусть g, h — единственные векторы из $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}^\perp$ соответственно, такие что $f = g + h$. Положим $Pf = g$. Оператор P называется **проектором** на $\mathscr{M}$, а g — **проекцией** f на $\mathscr{M}$. Говорят, что два проектора P_1 и P_2 **ортогональны,** если $P_1P_2 = 0$.

Проекторы, как они определены выше, иногда называют „ортогональными проекторами", чтобы выделить их из более общего класса проекторов, рассматриваемых в теории банаховых пространств. Поскольку это более общее понятие проектора нам здесь не понадобится, мы опускаем добавочное слово „ортогональный". При этом достигается та выгода, что исключается всякая возможность путаницы с понятием ортогональности пары проекторов. Свойства проекторов суммированы в следующих леммах. Доказательство первой из них совсем легкое, и провести его предоставляется читателю в качестве упражнения.

9.2.9. Лемма. *Если P — проектор на замкнутое подпространство $\mathscr{M}$, то*

(i) *P — линейный ограниченный самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию $P^2 = P$;*

(ii) *либо $P = 0$, либо $\|P\| = 1$;*

(iii) *$I - P$ есть проектор на $\mathscr{M}^\perp$;*

(iv) $0 \leqslant P \leqslant I$.

9.2.10. Лемма. *Пусть оператор $P \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ самосопряжен. Если $P^2 = P$, то P — проектор.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что линейное подпространство $R(P)$ замкнуто, ибо если $g_n = Pf_n \to g$, то $Pg_n = P^2 f_n = Pf_n = g_n$ и $g = \lim g_n = \lim Pg_n = Pg \in R(P)$. Далее, любое $f \in \mathscr{H}$ можно записать в виде $f = Pf + (I - P)f$. Поскольку P самосопряжен,

$$((I-P)f,\ Pf) = ((P - P^2)f,\ g) = 0.$$

Следовательно, $(I - P)f \in (R(P))^{\perp}$ и, значит, P есть проектор на $R(P)$. □

9.2.11. Лемма. *Пусть P_1 и P_2 — проекторы на замкнутые подпространства $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ соответственно. Тогда*

(i) *$P_1 + P_2$ — проектор $\Leftrightarrow P_1P_2 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{M}_1 \perp \mathscr{M}_2$;*

(ii) *$P_1P_2 = P_2 \Leftrightarrow P_1 \geqslant P_2 \Leftrightarrow \mathscr{M}_1 \supset \mathscr{M}_2$; если выполнено любое из этих эквивалентных соотношений, то P_1 коммутирует с P_2.*

Доказательство. Мы докажем (ii), а доказать (i) предоставим читателю в качестве упражнения. Если $P_1P_2 = P_2$, то $P_2P_1 = (P_1P_2)^* = P_2^* = P_2$. Следовательно, P_1 и P_2 перестановочны и

$$\begin{aligned}(P_1 - P_2)^2 &= P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 - P_2^2 \\ &= P_1 - 2P_1P_2 + P_2 = P_1 - P_2.\end{aligned}$$

Поскольку оператор $P_1 - P_2$ самосопряжен, из леммы 9.2.10 следует, что это проектор. Значит, по лемме 9.2.9, (iv), $P_1 \geqslant P_2$. Обратно, если $P_1 \geqslant P_2$, то $I - P_1 \leqslant I - P_2$ и

$$\|(I - P_1)P_2 f\|^2 = ((I - P_1)P_2 f, (I - P_1)P_2 f) = ((I - P_1)P_2 f,\ P_2 f) \leqslant$$
$$\leqslant ((I - P_2)P_2 f,\ P_2 f) = 0.$$

Поэтому $(I - P_1)P_2 = 0$, откуда $P_1P_2 = P_2$. Тем самым доказано, что $P_1P_2 = P_2$ тогда и только тогда, когда $P_1 \geqslant P_2$.

Далее, предположим, что $P_1P_2 = P_2$. Для любого $f \in \mathscr{M}_2$ имеем $f = P_2 f = P_1P_2 f = P_1 f \in R(P_1) = \mathscr{M}_1$. Следовательно, $\mathscr{M}_2 \subset \mathscr{M}_1$. Обратно, допустим, что $\mathscr{M}_2 \subset \mathscr{M}_1$. Любое $f \in \mathscr{H}$ можно записать в виде $f = g + h$, где $g \in \mathscr{M}_2$, $h \in \mathscr{M}_2^{\perp}$. Ясно, что $P_1 g = P_2 g = g$ и $P_2 h = 0$. Значит, $P_1P_2 g = P_1 g = g = P_2 g$, а потому

$$P_1P_2 f = P_1P_2 g + P_1P_2 h = P_2 g = P_2 g + P_2 h = P_2 f. \ \square$$

Эта лемма играет фундаментальную роль. Отметим особенно, что естественному упорядочению подпространств $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ по включению отвечает упорядочение соответствующих проекторов, задаваемое отношением $\geqslant$.

Наконец, для того чтобы дать аккуратную формулировку спектральной теоремы, нам надо ввести интеграл, который

„справлялся“ бы с функциями, принимающими значения в банаховых пространствах. С абстрактным лебеговым интегралом связан ряд довольно неприятных технических моментов, и мы отдадим здесь предпочтение следующему более простому понятию, достаточному для наших нынешних целей:

9.2.12. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство, $\Omega = [\alpha, b]$ — конечный интервал в $\mathbb{R}$ и f, γ — соответственно $\mathbb{C}$-значная и $\mathscr{B}$-значная функции, определенные на Ω. Говорят, что функция f **интегрируема** на Ω **по Риману — Стилтьесу** относительно γ, если существует такое $g \in \mathscr{B}$, что

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| \sum_{j=1}^{n-1} f(c_j)\,[\gamma(a_{j+1}] - \gamma(a_j)] - g \right\| = 0;$$

при образовании сумм (называемых суммами Римана — Стилтьеса) рассматриваются всевозможные конечные наборы точек a_j, c_j, удовлетворяющие условиям $a_1 = a$, $a_n = b$ и $a_j \leqslant c_j \leqslant a_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, а δ обозначает максимум длин подынтервалов $[a_j, a_{j+1}]$. Элемент g называют **интегралом Римана — Стилтьеса** от f и пишут

$$g = \int_a^b f(\lambda)\, d\gamma(\lambda).$$

В случае когда Ω — бесконечный интервал и f интегрируема на каждом конечном подынтервале в Ω, мы полагаем,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\gamma(\lambda) = \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(\lambda)\, d\gamma(\lambda),$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(\lambda)\, d\gamma(\lambda) = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(\lambda)\, d\gamma(\lambda),$$

если эти пределы существуют.

Заметим, что если функция γ постоянна на некотором подынтервале Ω_0 в Ω, то члены в суммах Римана — Стилтьеса, отвечающие этому подынтервалу, обращаются в нуль, и, следовательно, значения f на Ω_0 не влияют на значение интеграла.

9.3. Подоплёка спектральной теоремы

Спектральную теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Гильберта — Шмидта на случай операторов, являющихся самосопряженными, но не обязательно компактными. Однако при осуществлении этого обобщения возникают определенные трудности, и в результате формулировка спектральной теоремы связана с рядом концептуальных проблем. Поэтому, прежде чем приступать к деталям анализа, мы попытаемся объяснить, в чем заключаются главные трудности, и наметить, как эти трудности можно преодолеть. Следует, подчеркнуть, что рассуждения этого параграфа носят чисто формальный характер.

Предположим сначала, что оператор T компактен и самосопряжен. Сила теоремы Гильберта — Шмидта в значительной мере основана на том обстоятельстве, что, поскольку всякий вектор $g \in \mathscr{H}$ можно представить как сумму собственных векторов ψ_k (с собственными значениями λ_k), а $T\psi_k$ нам известны в явном виде, мы легко можем записывать функции от T. В частности, если $\mathscr{M}_k$ — собственное подпространство, отвечающее λ_k, то

$$g = \sum \psi_k \qquad (\psi_k \in \mathscr{M}_k), \tag{9.3.1}$$

$$Tg = \sum \lambda_k \psi_k. \tag{9.3.2}$$

На первый взгляд перспективы обобщения этих соотношений на случай оператора L, самосопряженного, но не компактного, представляются не слишком хорошими, потому что собственные векторы L не обязаны порождать $\mathscr{H}$ — на самом деле L может вообще не иметь никаких собственных векторов! Однако есть один обнадеживающий момент. По теореме 6.6.4 для любого $\lambda \in \sigma(L)$ существует последовательность (φ_j) векторов единичной нормы, такая что $\|L\varphi_j - \lambda\varphi_j\| = 0$. Поэтому возникает соблазн трактовать λ как „приближенное собственное значение“, а φ_j при больших j как „приближенный собственный вектор“ и предполагать, что λ и φ_j окажутся подходящей заменой для собственных значений и собственных векторов.

Чтобы посмотреть, насколько правдоподобно, что этот подход может оказаться плодотворным, возьмем $\mathscr{H} = \mathscr{L}_2(0, 1)$ и рассмотрим оператор M: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ умножения на x, задаваемый формулой $Mg(x) = xg(x)$ $(g \in \mathscr{H})$. Это ограниченный самосопряженный оператор, спектр которого $[0, 1]$ весь непрерывный (задача 9.8); следовательно, M не имеет собственных функций. Пусть дано $\lambda \in [0, 1]$. Возьмем какой-нибудь подынтервал $[\mu, \nu]$ в $[0, 1]$, содержащий λ. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathscr{H}$ с $\|\varphi\| = 1$, носитель которой лежит в $[\mu, \nu]$, мы имеем $\|M\varphi - \lambda\varphi\| \leqslant |\nu - \mu|$. Таким образом, φ можно трактовать как приближенную собственную функцию, причем $|\nu - \mu|$ служит мерой погрешности. Теперь разобьем интервал $[0, 1]$ на n равных подынтервалов $[\mu_k, \mu_{k+1}]$ „малой“ длины δ, и пусть $\mathscr{M}_k$ обозначает множество функций с носителем в k-м подынтервале. Множества $\mathscr{M}_k$ играют роль приближенных собственных подпространств, отвечающих приближенным собственным значениям λ_k, где $\mu_k \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_{k+1}$, и простое вычисление показывает, что если φ_k — проекция g на $\mathscr{M}_k$ (т. е. ограничение g на $[\mu_k, \mu_{k+1}]$), то

$$g = \sum \varphi_k \quad (\varphi_k \in \mathscr{M}_k), \tag{9.3.3}$$

$$\|Mg - \sum \lambda_k \varphi_k\| \leqslant \delta \|g\|. \tag{9.3.4}$$

Эти соотношения можно рассматривать как аналоги соотношений (9.3.1) и (9.3.2), а тем самым как обобщение теоремы Гильберта — Шмидта.

Это рассуждение наводит на мысль, что переход от точечного спектра к непрерывному можно осуществить, рассматривая приближенные собственные пространства и используя соответствующую предельную процедуру. Однако, поскольку концептуально проще иметь дело со сходимостью операторов, а не подпространств, мы перепишем наш результат в несколько ином виде. Вспоминая, что φ_k — это проекция g на $\mathscr{M}_k$, обозначим через $P(\mu, \nu)$ проектор на замкнутое подпространство в $\mathscr{H}$, состоящее из функций с носителем в $[\mu, \nu] \cap [0, 1]$; при этом условимся, что $P(\mu, \nu) = 0$, если это пересечение пусто. Положим $P_\nu = P(-\infty, \nu)$. Тогда $P(\mu, \nu) = P_\nu - P_\mu$ и $P_\mu = 0$ при $\mu < 0$, $P_\mu = I$ при $\mu > 1$. Подпространства $\mathscr{M}_k$ суть образы проекторов $P(\mu_k, \mu_{k+1})$, и (9.3.3) принимает вид $g = \sum [P_{\mu_{k+1}} - P_{\mu_k}] g$. Это верно для всех δ, поэтому мы можем переписать последнее равенство так:

$$g = \lim_{\delta \to 0} \sum [P_{\mu_{k+1}} - P_{\mu_k}] g; \tag{9.3.5}$$

соотношение же (9.3.4) дает

$$Mg = \lim_{\delta \to 0} \sum \lambda_k [P_{\mu_{k+1}} - P_{\mu_k}] g. \tag{9.3.6}$$

Но в правых частях этих равенств мы видим не что иное, как суммы, фигурирующие в определении интеграла Римана — Стилтьеса для банаховых пространств (определение 9.2.12). Следовательно,

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} dP_\lambda g, \tag{9.3.7}$$

$$Mg = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda g. \tag{9.3.8}$$

Эти интегралы доставляют разложение операторов I и M на „хорошие“ операторы P_λ и тем самым, опосредствованно, разложение пространства $\mathscr{H}$ в сумму подпространств $R(P(\mu, \nu))$, как в теореме Гильберта — Шмидта. Аналогами соотношений (9.3.1) и (9.3.2) служат, таким образом, (9.3.7) и (9.3.8) соответственно, и элегантность и лаконичная выразительность этих последних убеждают, что именно они должны быть нашей целью при искомом обобщении. Это обобщение дает спектральная теорема.

Свойства операторов P_λ, фигурирующих в спектральной теореме, могут быть выражены в сжатой математической форме, но хотя эти свойства, очевидно, должны быть связаны со свойствами собственных подпространств или приближенных собственных подпространств, а значит, и со свойствами самого рассматриваемого оператора, природа этой связи на первый взгляд довольно темна. Прояснить ее можно, вернувшись к исходному компактному оператору T. Занумеруем различные собственные значения оператора T в возрастающую последовательность (λ_n), и пусть $\mathscr{M}_n$ — соответствующие собственные подпространства. Обозначим через E_{λ_n} проектор на $\mathscr{M}_n$ и положим

$$P_\lambda g = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} E_{\lambda_n} g \tag{9.3.9}$$

(если сумма не содержит ни одного слагаемого, то она полагается равной нулю). Семейство $\{P_\lambda\}$ и есть требуемое семейство проекторов. Заметим прежде всего, что подпространства $\mathscr{M}_n$ — а значит и проекторы E_{λ_n} — взаимно ортогональны. Следовательно, P_λ — проекторы (лемма 9.2.11,(i)). Теперь рассмотрим P_λ как операторнозначную функцию от λ. Из определения сразу видно, что если $\lambda > \mu$, то $R(P_\lambda) \supset R(P_\mu)$, откуда следует, что $P_\lambda \geqslant P_\mu$ и все операторы P_λ коммутируют (лемма 9.2.11,(ii)). Фактически по поводу коммутативности можно утверждать больше. А именно, можно доказать, что если оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ коммутирует с T, то он коммутирует с каждым P_λ. Важность этого обстоятельства не так легко сразу объяснить, но некоторый свет может пролить на дело рассмотрение математической модели квантовой механики. „Наблюдаемым" квантовой механики соответствуют в этой модели самосопряженные операторы, и две величины наблюдаемы одновременно тогда и только тогда, когда соответствующие им операторы коммутируют (задача 9.2). Таким образом, если A и T наблюдаемы одновременно, то одновременно наблюдаемы A и P_λ при каждом λ. Поскольку спектральную теорему можно трактовать как результат о разложении оператора T на более простые операторы P_λ, это свойство является необходимым, если мы хотим, чтобы наше разложение имело практическое значение.

Все эти свойства справедливы также для произвольного самосопряженного оператора. Принципиальное различие между компактным и общим случаями заключается в поведении P_λ как функции от λ. Для оператора M умножения на x очевидно, что функция P_λ сильно непрерывна в том смысле, что $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} P_\lambda g = P_{\lambda_0} g$. Из (9.3.9) следует, что в компактном случае функция P_λ сильно непрерывна справа, но *не* непрерывна слева, ибо она имеет скачок в каждой точке, являющейся собственным значением, и постоянна между ними. Представляется правдоподобным — и это будет доказано ниже,— что разрывность связана с точечным спектром, а гладкое изменение — с непрерывным. Именно для того и необходимо введение интеграла Римана — Стилтьеса (как в (9.3.7) и (9.3.8)), чтобы допустить возможность как изолированных точек, так и сегментов непрерывности в спектре.

Наше заключительное замечание касается метода доказательства, который будет применен. В общем случае вместо того, чтобы для получения P_λ использовать конструкцию типа той, которую мы описали для оператора умножения M, проще строго обосновать несколько иной подход. Для оператора M соответствующее рассуждение выглядит так. Семейство $\{P_\lambda\}$ таково, что для $\lambda \in [0, 1]$

$$(P_\lambda g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda < x \leqslant 1, \end{cases}$$

а для $\lambda < 0$ и $\lambda > 1$ мы имеем $P_\lambda = 0$ и $P_\lambda = I$ соответственно. Для каждого λ определим вещественнозначную ступенчатую функцию P_λ следующим образом:

$$p_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad x > \lambda. \end{cases}$$

Проведенный в предыдущем параграфе анализ показывает, что существует оператор $p_\lambda(M)$, отвечающий p_λ. Для случая когда f — многочлен, $f(M)g(x) = f(x)g(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, и, значит, это соотношение сохраняет силу для любой полунепрерывной сверху функции f, в частности для p_λ. Следовательно, $p_\lambda(M)$ обладает в точности теми самыми свойствами, которые были указаны выше для P_λ. Это подсказывает нам положить в общем случае $P_\lambda = p_\lambda(M)$. С теоретической точки зрения этот подход обладает тем достоинством, что он применим к любому ограниченному самосопряженному оператору M. Правда, он не дает удобного метода для явного построения P_λ, за исключением простейших случаев, но для этого имеется другой метод, который мы опишем попозже.

9.4. Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов

В этом параграфе выводы, полученные в предыдущем параграфе из эвристических соображений, будут строго обоснованы для случая произвольного ограниченного самосопряженного оператора L. Всюду ниже $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство.

Первый шаг состоит в определении семейства проекторов $\{P_\lambda\}$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ положим

$$p_\lambda(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t > \lambda. \end{cases}$$

Очевидно, что p_λ — ступенчатая функция, полунепрерывная сверху. Следовательно, по теореме 9.2.7, существует соответствующий самосопряженный оператор $p_\lambda(L)$. Для каждого t имеем $[p_\lambda(t)]^2 = p_\lambda(t)$, и из той же теоремы следует, что $[p_\lambda(L)]^2 = p_\lambda(L)$. Значит, $p_\lambda(L)$ — проектор (лемма 9.2.10). Искомое семейство проекторов $\{P_\lambda\}$ мы определяем, полагая $P_\lambda = p_\lambda(L)$. Приводимые ниже леммы показывают, что поведение P_λ именно такое, как утверждалось в предыдущем параграфе.

9.4.1. Лемма. *Определенное выше семейство самосопряженных проекторов $\{P_\lambda\}$ обладает следующими свойствами:*

(i) P_λ — *сильно непрерывная справа функция от λ, т. е. $P_\mu \xrightarrow[s]{} P_\lambda$ при $\mu \to \lambda +$;*

(ii) *проекторы P_λ коммутируют друг с другом и с любым ограниченным оператором, который коммутирует с L;*

(iii) $P_\lambda = 0$ *при* $\lambda < m_-$, $P_\lambda = I$ *при* $\lambda \geqslant m_+$;

(iv) *если* $\lambda \geqslant \mu$, *то* $P_\lambda \geqslant P_\mu$, *или, эквивалентно,* $P_\lambda P_\mu = P_\mu$.

Доказательство. (i) Пусть (ε_n) — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Зафиксируем λ и выберем какую-нибудь последовательность непрерывных функций (p_n), которая, монотонно убывая, сходится к p_λ на некотором интервале, содержащем $[m_-, m_+]$, и такова, что $p_n(t) \geqslant p_{\lambda+\varepsilon_n}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме 9.2.7

$$p_n(L) \geqslant p_{\lambda+\varepsilon_n}(L) \geqslant p_\lambda(L).$$

Но $p_n(L) \xrightarrow[s]{} p_\lambda(L)$, значит, $p_{\lambda+\varepsilon_n}(L) \xrightarrow[s]{} p_\lambda(L)$ при $n \to \infty$. Поскольку $p_\mu(L)$ — монотонно убывающая функция от μ, отсюда вытекает, что $p_{\lambda+\varepsilon}(L) \xrightarrow[s]{} p_\lambda(L)$ при $\varepsilon \to 0+$.

(ii) Это утверждение следует из теоремы 9.2.7.

Утверждения (iii) и (iv) вытекают из соответствующих свойств вещественнозначной функции p_λ в силу той же теоремы. □

В дальнейшем часто будут полезны следующие неравенства:

$$\mu(P_\nu - P_\mu) \leqslant L(P_\nu - P_\mu) \leqslant \nu(P_\nu - P_\mu) \quad \text{при} \quad \mu \leqslant \nu. \tag{9.4.1}$$

Чтобы установить (9.4.1), заметим, что $p_\nu - p_\mu$ — индикаторная функция интервала (μ, ν), а значит,

$$\mu[p_\nu(t) - p_\mu(t)] \leqslant t[p_\nu(t) - p_\mu(t)] \leqslant \nu[p_\nu(t) - p_\mu(t)], \tag{9.4.2}$$

поскольку все три члена обращаются в нуль при $t \notin (\mu, \nu]$. Заменяя здесь t на L и вспоминая, что $P_\lambda = p_\lambda(L)$, получаем (9.4.1) (на основании теоремы 9.2.7).

9.4.2. Лемма. *Если $\lambda_0 \in \rho(L)$, то у λ_0 существует окрестность, на которой функция P_λ постоянна.*

Доказательство. По теореме 6.6.4 найдется $m > 0$, такое что $\|(L - \lambda_0 I) f\| \geqslant m \|f\|$ при всех $f \in \mathscr{H}$. Возьмем любое положительное $\varepsilon < m$ и предположим, что функция P_λ не постоянна на $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$. Тогда $P = P_{\lambda_0+\varepsilon} - P_{\lambda_0-\varepsilon} \neq 0$ и, значит, существует h с $\|h\| = 1$, для которого $Ph = h$. Из (9.4.1) очевидным образом следует, что $-\varepsilon P \leqslant (L - \lambda_0 I) P \leqslant \varepsilon P$, а потому $\|(L - \lambda_0 I) P\| \leqslant \varepsilon$ (лемма 9.2.2,(v)). Поскольку $Ph = h$, отсюда вытекает, что $\|(L - \lambda_0 I) h\| \leqslant \varepsilon \|h\|$. Но это противоречит начальному утверждению доказательства. □

9.4.3. Лемма. *Пусть $\mu_0, \ldots, \mu_n$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ таковы, что $\mu_0 < m_-$, $\mu_n = m_+$ и $\mu_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, и пусть δ — максимум длин интервалов $[\mu_k, \mu_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$. Тогда*

$$L = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right],$$

где предел понимается в смысле равномерной операторной сходимости (т. е. сходимости в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$).

Доказательство. Полагая в (9.4.1) последовательно $\nu = \mu_k$, $\mu = \mu_{k-1}$ и складывая эти неравенства, получаем

$$\sum \mu_{k-1} \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right] \leqslant L \sum \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right] \leqslant \sum \mu_k \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right]. \tag{9.4.3}$$

Далее, очевидно, что

$$\sum \mu_{k-1} \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right] \leqslant \sum \lambda_k \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right] \leqslant \sum \mu_k \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right]. \tag{9.4.4}$$

Но

$$L \sum \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right] = L \left[P_{\mu_n} - P_{\mu_0}\right] = L, \tag{9.4.5}$$

ибо $P_{\mu_0} = 0$, $P_{\mu_n} = I$ (лемма 9.4.1,(iii)). По той же причине разность между крайними частями в каждом из неравенств (9.4.3) и (9.4.4) допускает оценку

$$\sum (\mu_k - \mu_{k-1}) \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right] \leqslant \delta \sum \left[P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}\right] = \delta I.$$

Следовательно, норма этой разности не превосходит δ. Значит, средние члены в (9.4.3) и (9.4.4) отличаются друг от друга по норме самое большее на δ (лемма 9.2.2,(vi)). Наш результат вытекает теперь из (9.4.5). $\square$

9.4.4. Следствие. *Для любой комплекснозначной непрерывной функции f на $\mathbb{R}$*

$$f(L)=\lim_{\delta\to 0}\sum f(\lambda_k)\left[P_{\mu_k}-P_{\mu_{k-1}}\right]. \tag{9.4.6}$$

Доказательство. Поскольку f можно разложить на вещественную и мнимую части, достаточно доказать результат для вещественнозначной функции f. В силу леммы 9.4.1,(iv),

$$\left[P_{\mu_k}-P_{\mu_{k-1}}\right]\left[P_{\mu_j}-P_{\mu_{j-1}}\right]=0 \quad \text{при} \quad j\neq k,$$

и непосредственные алгебраические выкладки показывают, что

$$\sum \lambda_k^r\left[P_{\mu_k}-P_{\mu_{k-1}}\right]=\left\{\sum \lambda_k\left[P_{\mu_k}-P_{\mu_{k-1}}\right]\right\}^r.$$

Полагая $n\to\infty$ и используя рассуждение из доказательства предыдущей леммы, получаем наш результат для случая $f(L)=L^r$. Распространение его на случай, когда f — многочлен, производится очевидным образом.

Предположим теперь, что f — произвольная непрерывная функция. Тогда для любого заданного $\varepsilon>0$ найдется такой многочлен p, что $|f(\lambda)-p(\lambda)|\leqslant\varepsilon$ при $\lambda\in[m_-, m_+]$. Следовательно, по теореме 9.2.5,(ii), $\|f(L)-p(L)\|\leqslant\varepsilon$. Если

$$S(f)=\sum f(\lambda_k)\left[P_{\mu_k}-P_{\mu_{k-1}}\right],$$

то, как легко видеть, $\|S(f)-S(p)\|\leqslant\varepsilon$. Поскольку для достаточно мелких разбиений $\|p(L)-S(p)\|\leqslant\varepsilon$, доказываемый результат вытекает из оценки

$$\|f(L)-S(f)\|\leqslant\|f(L)-p(L)\|+\|p(L)-S(p)\|+\|S(p)-S(f)\|\leqslant 3\varepsilon. \quad \square$$

9.4.5. Спектральная теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и L: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ — ограниченный самосопряженный оператор. Существует единственное семейство $\{P_\lambda\}$ самосопряженных проектов со следующими свойствами:*

(i) *P_λ — сильно непрерывная справа функция от λ;*

(ii) *проекторы P_λ коммутируют друг с другом и с любым ограниченным оператором, который коммутирует с L;*

(iii) *$P_\lambda=0$ при $\lambda<m_-$, $P_\lambda=I$ при $\lambda\geqslant m_+$;*

(iv) *$P_\lambda\geqslant P_\mu$ при $\lambda\geqslant\mu$;*

(v) *для всякой функции f: $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, непрерывной на некотором открытом множестве, содержащем спектр оператора L, справед-*

ливы формулы

$$f(L)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dP_\lambda, \tag{9.4.7}$$

$$f(L)g=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dP_\lambda g \quad (g\in\mathscr{H}), \tag{9.4.8}$$

$$(f(L)g,\ h)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d(P_\lambda g,\ h) \quad (g,h\in\mathscr{H}), \tag{9.4.9}$$

где интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса (определение 9.2.12).

Доказательство. Утверждение о существовании семейства $\{P_\lambda\}$ со свойствами (i) — (iv) — это в точности утверждение леммы 9.4.1. Чтобы доказать (9.4.7), заметим, что функция P_λ постоянна на $\rho(L)$ (лемма 9.4.2). Следовательно, по определению интеграла Римана — Стилтьеса, значения, отвечающие $\lambda\in\rho(L)$, не вносят никакого вклада в интеграл. Равенство (9.4.7) следует поэтому из (9.4.6), а равенства (9.4.8) и (9.4.9) устанавливаются аналогичным образом. Относительно доказательства единственности см. Рисс и Сёкефальви-Надь [1955] [1]. □

Пределы интегрирования $\pm\infty$ в теореме взяты просто для того, чтобы упростить запись. Фактически функция P_λ постоянна при $\lambda\notin[m_-, m_+)$ и непрерывна справа. Поэтому вполне можно было бы взять в качестве верхнего предела интегрирования m_+, а в качестве нижнего $m_- - \varepsilon$ при некотором $\varepsilon>0$ (с тем чтобы учесть возможную разрывность P_λ в m_-) или вообще интегрировать по любому открытому множеству Ω, содержащему спектр; очевидно, что значения f вне Ω на значение интеграла не влияют. Интегралы в (9.4.7) и (9.4.8) можно также трактовать как интегралы по мерам, принимающим значения в банаховом пространстве, но при таком подходе появляются дополнительные технические тонкости.

9.4.6. Определение. Семейство проекторов с указанными в спектральной теореме свойствами известно как **спектральное семейство** оператора L (или **разложение единицы** для L), а каждый из входящих в него проекторов P_λ называют **спектральным проектором.**

Спектральная теорема представляет собой искомое обобщение теоремы Гильберта — Шмидта на произвольные ограниченные самосопряженные операторы. Чтобы применять спектральную тео-

[1] Или любой другой учебник функционального анализа. — *Прим. ред.*

рему на практике, нужно иметь в распоряжении удобный метод построения спектрального семейства. Такой метод будет описан в следующем параграфе.

Во введении к настоящей главе мы уже указывали на важность функций от операторов. Спектральная теорема доставляет реальный метод для вычисления таких функций. В следующей теореме упор делается на обращение с этими функциями; грубо говоря, теорема утверждает, что операции над ними можно выполнять, просто выполняя соответствующие операции над комплекснозначными функциями вещественной переменной. Эта теорема по существу представляет собой переформулировку установленных выше результатов, и ее доказательство опускается.

9.4.7. Спектральное исчисление. *Пусть* L *и* $\mathscr{H}$ *те же, что и в предыдущей теореме, и* f, g — *комплекснозначные функции, непрерывные на некотором открытом множестве, содержащем* $\sigma(L)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *алгебраические соотношения сохраняются при переходе от функций вещественной переменной к функциям от операторов, а именно*

$$(f+g)(L)=f(L)+g(L), \quad (\alpha f)(L)=\alpha f(L), \quad (f\cdot g)(L)=f(L)\cdot g(L);$$

(ii) *оператор* $f(L)$ *самосопряжен, если функция* f *вещественнозначна, и положителен, если* f *неотрицательна;*

(iii) (a) $\|f(L)\|=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(L)}|f(\lambda)|$,

(b) $$\|f(L)h\|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2\,d(P_\lambda h,\ h) \quad (h\in\mathscr{H});$$

(iv) (теорема об отображении спектра) $f(\sigma(L))=\sigma(f(L))$.

9.5. Спектр и резольвента

Для того чтобы спектральную теорему можно было применять в полную силу, нужно поближе рассмотреть спектральное семейство. Первый вопрос, который здесь надо изучить, это связь между поведением P_λ как функции от λ и спектром. В подтверждение сделанного в § 9.3 предположения мы докажем, что функция P_λ постоянна на $\rho(L)$, непрерывна, но не постоянна в некоторой окрестности точки λ, если эта точка принадлежит непрерывному спектру, и разрывна в λ, если λ является собственным значением.

Отправной точкой нашего анализа будет формула, выражающая резольвенту $R(\lambda; L)$ через P_λ. Пусть λ_0 — произвольное комплексное число, не принадлежащее $\sigma(L)$. Тогда функция $f(\lambda)=(\lambda_0-\lambda)^{-1}$ непрерывна на некотором открытом множестве, содержащем $\sigma(L)$, и, согласно спектральной теореме 9.4.5, (v),

$$f(L)=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^{-1}\,dP_\lambda.$$

Далее, по теореме 9.4.7, (i)

$$\begin{aligned}(\lambda_0 I-L)\,f(L)&=f(L)\,(\lambda_0 I-L)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)(\lambda_0-\lambda)\,dP_\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}dP_\lambda=I,\end{aligned}\tag{9.5.1}$$

откуда $R(\lambda_0;\ L)=f(L)$ и

$$R(\lambda_0;\ L)=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^{-1}\,dP_\lambda\quad(\lambda_0\in\rho(L)).\tag{9.5.2}$$

Предположим теперь, что λ_0 — вещественное число, такое что функция P_λ постоянна в некоторой его окрестности $U=[\lambda_0-\varepsilon,\ \lambda_0+\varepsilon]$. Пусть f_0 — произвольная функция, непрерывная на $\mathbb{R}$ и совпадающая с $(\lambda_0-\lambda)^{-1}$ при $\lambda\notin U$. Поскольку P_λ постоянна на интервале U, этот интервал не вносит никакого вклада в интеграл, и поэтому мы вправе заменить f на f_0 в (9.5.1). Отсюда вытекает, что оператор $\lambda_0 I-L$ имеет обратный, т. е. $\lambda_0\in\rho(L)$. Так как из леммы 9.4.2 уже известно, что функция P_λ постоянна в некоторой окрестности любой точки $\lambda_0\in\rho(L)$, нами установлен следующий результат:

9.5.1. Теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и L: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ — ограниченный самосопряженный оператор. Вещественное число λ_0 принадлежит $\rho(L)$ тогда и только тогда, когда у λ_0 существует окрестность, в которой функция P_λ постоянна.*

Определим P_{λ_0-} как сильный предел P_λ при $\lambda\to\lambda_0-$; существование предела гарантируется леммой 9.2.3.

9.5.2. Теорема. *Пусть L и $\mathscr{H}$ те же, что и в предыдущей теореме. Вещественное число λ_0 принадлежит точечному спектру оператора L тогда и только тогда, когда $P_{\lambda_0}\neq P_{\lambda_0-}$. Собственное подпространство $N(\lambda_0 I-L)$, отвечающее λ_0, совпадает с образом оператора $P_{\lambda_0}-P_{\lambda_0-}$. Непрерывный спектр оператора L состоит из тех точек, в которых функция P_λ непрерывна, но ни в какой окрестности которых P_λ не постоянна.*

Доказательство. Для $\varepsilon,\ \eta\geqslant 0$ положим $P_{\varepsilon,\,\eta}=P_{\lambda_0+\eta}-P_{\lambda_0-\varepsilon}$. В силу (9.4.1)

$$(\lambda_0-\varepsilon)\,P_{\varepsilon,\,\eta}\leqslant LP_{\varepsilon,\,\eta}\leqslant(\lambda_0+\eta)\,P_{\varepsilon,\,\eta},\tag{9.5.3}$$

откуда

$$\|(L-\lambda_0 I)\,P_{\varepsilon,\,\eta}\|\leqslant\max(\varepsilon,\ \eta).\tag{9.5.4}$$

Предположим, что $P_{\lambda_0} \neq P_{\lambda_0-}$. Тогда функция P_λ не постоянна на $[\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0]$ ни при каком $\varepsilon > 0$. Выберем произвольное $h \in R(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-})$ с $\|h\| = 1$; очевидно, $P_{\varepsilon,0}\, h = h$ при любом $\varepsilon > 0$. Из (9.5.4) вытекает, что $\|(L-\lambda_0 I)\, h\| = \|(L-\lambda_0 I)\, P_{\varepsilon,0}\, h\| = 0$. Следовательно, $R(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-}) \subset N(\lambda_0 I - L)$.

Обратно, предположим, что $h \in N(\lambda_0 I - L)$. Можно считать, что $\|h\| = 1$. Возьмем любое $\nu > m_+$ и любое $\eta > 0$, такое что $\lambda_0 + \eta < \nu$. В силу (9.5.3)

$$(\lambda_0+\eta)(P_\nu - P_{\lambda_0+\eta}) \leqslant L(P_\nu - P_{\lambda_0+\eta}).$$

Поскольку каждый проектор P_λ коммутирует с L, отсюда следует, что

$$((\lambda_0+\eta)(P_\nu - P_{\lambda_0+\eta})\, h,\ h) \leqslant ((P_\nu - P_{\lambda_0+\eta})\, Lh,\ h) = \lambda_0\, ((P_\nu - P_{\lambda_0+\eta})\, h,\ h).$$

Но $P_\nu - P_{\lambda_0+\eta} \geqslant 0$, значит, $((P_\nu - P_{\lambda_0+\eta})\, h,\ h) = 0$. Вспоминая, что $P_\nu = I$, мы заключаем, что $P_{\lambda_0+\eta} h = h$. Аналогичным рассуждением устанавливается, что $P_{\lambda_0-\varepsilon} h = 0$, и, полагая $\varepsilon,\ \eta \to 0$ и используя непрерывность P_λ справа, мы получаем равенство $(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-})\, h = h$. Таким образом, $N(\lambda_0 I - L) \subset R(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-})$. В сочетании с утверждением, полученным в предыдущем абзаце, это доказывает первые два утверждения теоремы. Наконец, последнее утверждение следует из теоремы 9.5.1. □

Выведем теперь формулу, дающую удобный метод для вычисления спектрального семейства $\{P_\lambda\}$. Для $\lambda_1 < \lambda_2$ положим $P(\lambda_1, \lambda_2) = P_{\lambda_2-} - P_{\lambda_1}$ ($P(\lambda_1, \lambda_2)$ представляет собой проектор, отвечающий индикаторной функции открытого интервала (λ_1, λ_2)). Поскольку $P_\lambda = 0$ при $\lambda < m_-$, семейство $\{P_\lambda\}$ можно будет найти, если знать $P(\lambda_1, \lambda_2)$ при всех λ_1, λ_2. Значения $P(\lambda_1, \lambda_2)$ получаются решением „интегрального уравнения“ (9.5.2).

9.5.3. Теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $L\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — ограниченный самосопряженный оператор. Для любых $g,\ h \in \mathscr{H}$*

$$(P(\lambda_1, \lambda_2)\, g,\ h) = \lim_{\delta\to 0+}\ \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} ([R(\lambda - i\varepsilon;\ L) - R(\lambda + i\varepsilon;\ L)]\, g,\ h)\, d\lambda. \qquad (9.5.5)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$(P_{\lambda_0} g,\ g) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda_0} d(P_\lambda g,\ g)$$

(чтобы убедиться в справедливости этой формулы, надо просто явно выписать суммы Римана — Стилтьеса, фигурирующие в определении интеграла). Следовательно, в силу непрерывности P_λ справа,

$$(P(\lambda_1, \lambda_2) g, g) = \lim_{\delta \to 0+} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} d(P_\lambda g, g). \tag{9.5.6}$$

Достаточно доказать наш результат для $g = h$; формула (9.5.5) для общего случая будет следовать отсюда ввиду представимости билинейной формы через соответствующую квадратичную (задача 6.18). Преимущество указанного частного случая в том, что $(P_\lambda g, g)$ — неубывающая вещественнозначная функция от λ, а значит, она порождает некоторую меру Лебега — Стилтьеса (пример 2.2.15), и применима теория гл. 2.

Для $\varepsilon > 0$ положим $q(\lambda, \mu, \varepsilon) = (\lambda - \mu - i\varepsilon)^{-1} - (\lambda - \mu + i\varepsilon)^{-1}$. Несложное вычисление показывает, что при $\delta > 0$

$$\begin{aligned} p(\mu, \delta, \varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} q(\lambda, \mu, \varepsilon)\, d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_2 - \delta - \mu}{\varepsilon} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_1 + \delta - \mu}{\varepsilon}\right]. \end{aligned}$$

Следовательно, $|p(\mu, \delta, \varepsilon)| < 1$, и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} p(\mu, \delta, \varepsilon)$ равен 1 внутри интервала $[\lambda_1 + \delta, \lambda_2 - \delta]$, 1/2 в концевых точках этого интервала и 0 вне его. Теорема о мажорированной сходимости 2.4.11 дает

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu, \delta, \varepsilon)\, d(P_\mu g, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to 0+} p(\mu, \delta, \varepsilon)\, d(P_\mu g, g).$$

При $0 < \delta' < \delta < \delta''$ имеем

$$\int_{\lambda_1+\delta''}^{\lambda_2-\delta''} d(P_\mu g, g) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to 0+} p(\mu, \delta, \varepsilon)\, d(P_\mu g, g) \leqslant \int_{\lambda_1+\delta'}^{\lambda_2-\delta'} d(P_\mu g, g).$$

Отсюда, в силу (9.5.6),

$$\lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu, \delta, \varepsilon)\, d(P_\mu g, g) = (P(\lambda_1, \lambda_2) g, g).$$

Поскольку $q/2i \geqslant 0$ и функция q измерима, мы можем (по теореме 2.4.17, (i)) поменять порядок интегрирования и получить

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu, \delta, \varepsilon)\, d(P_\mu g, g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} \int_{-\infty}^{\infty} q(\lambda, \mu, \varepsilon)\, d(P_\mu g, g)\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} ([R(\lambda - i\varepsilon; L) - R(\lambda + i\varepsilon; L)] g, g)\, d\lambda, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое утверждение. $\square$

9.6. Неограниченные самосопряженные операторы

Требование, чтобы рассматриваемый оператор был ограниченным, оказывается чересчур суровым ограничением в большинстве приложений; в частности, ему не удовлетворяют дифференциальные операторы. Однако результаты данной главы можно распространить и на неограниченные самосопряженные операторы, если произвести некоторые довольно естественные видоизменения.

Наиболее важные переделки связаны с тем фактом, что спектр не является более ограниченным. Поэтому функция P_λ будет теперь изменяться на бесконечном интервале, и соотношения $P_\lambda = 0$ при $\lambda < m_-$, $P_\lambda = I$ при $\lambda \geqslant m_+$ примут вид

$$P_\lambda \xrightarrow[s]{} 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to -\infty, \quad P_\lambda \xrightarrow[s]{} I \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Носители функций, входящих в подынтегральные выражения в различных интегралах, фигурирующих в спектральной теореме, не будут больше компактными, и требуется дополнительное внимание к вопросам сходимости интегралов. При условии, что $g \in D(L)$, интегралы для Lg и (Lg, h) (см. (9.4.8) и (9.4.9) соответственно) можно интерпретировать как (несобственные) интегралы Римана — Стилтьеса по $(-\infty, \infty)$. Однако придать смысл интегралу $\int \lambda dP_\lambda$ уже не так легко, и мы воздержимся от обсуждения таких интегралов.

Для полноты упомянем еще об одном изменении, хотя на последующем анализе оно непосредственно не скажется. В случае когда L, $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, перестановочность этих операторов означает по определению, что просто выполняется равенство $BL = LB$. В случае когда оператор L неограничен, это определение уже не годится. В самом деле, если $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, то оператор LL^{-1} определен на всём $\mathscr{H}$, оператор же $L^{-1}L$ имеет смысл только на $D(L)$, и при указанном определении оператор L не коммутировал бы со своим обратным. Чтобы избежать этого затруднения, будем говорить, что L *коммутирует* с $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, если $BL \subset LB$.

Доказательство спектральной теоремы для неограниченных операторов можно получить, рассматривая предел соответствующей последовательности ограниченных операторов, но техническая сторона дела здесь довольно неприятна, и мы отошлем читателя за подробностями к книге Рисса и Сёкефальви-Надя [1955, гл. 8].

9.6.1. Спектральная теорема для неограниченных операторов. *Пусть L — самосопряженный (неограниченный) оператор в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Существует единственное спектральное семейство $\{P_\lambda\}$ самосопряженных проекторов со следующими свойствами:*

(i) *P_λ — сильно непрерывная справа функция от λ;*

(ii) *проекторы P_λ коммутируют друг с другом и с любым ограниченным оператором, который коммутирует с L;*

(iii) $P_\lambda \xrightarrow[s]{} 0$ *при* $\lambda \to -\infty$, $P_\lambda \xrightarrow[s]{} I$ *при* $\lambda \to \infty$;

(iv) $P_\lambda \geqslant P_\mu$ *при* $\lambda \geqslant \mu$;

(v) *справедливы формулы*

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} dP_\lambda g, \quad (g, h) = \int_{-\infty}^{\infty} d(P_\lambda g, h) \qquad (g, h \in \mathscr{H}),$$

$$Lg = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dP_\lambda g, \quad (Lg, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(P_\lambda g, h) \qquad (g \in D(L),\ h \in \mathscr{H}),$$

где $D(L)$ *— это множество всех* g, *таких что* $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(P_\lambda g, g) < \infty$, *а сходимость векторнозначных интегралов понимается как сходимость в* $\mathscr{H}$.

В случае когда оператор L самосопряжен и ограничен, имеется целый ряд методов определения операторнозначной функции $f(L)$. Одна из возможностей — использовать разложение в степенной ряд; распространение этого метода на случай неограниченных L представляет очевидные трудности. Другой метод — конструкция, описанная в § 9.2. Еще один метод состоит в том, чтобы положить

$$f(L) g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda g \qquad (g \in \mathscr{H}).$$

При переходе к неограниченным L именно этот последний метод создает наименьшее число проблем и в то же время удобен для вычислений. Мотивировкой для определения $D(f(L))$ служит теорема 9.4.7, (iii), (b).

9.6.2. Определение. Пусть L — самосопряженный оператор, а f — функция, непрерывная на некотором открытом множестве, содержащем $\sigma(L)$. Мы берем в качестве $D(fL))$ множество всех $g \in \mathscr{H}$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d(P_\lambda g, g) < \infty,$$

и определяем оператор $f(L)$ формулой

$$f(L) g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda g \quad (g \in D(f(L))). \ \square$$

9.6.3. Теорема. *Пусть L — неограниченный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и f, g — комплекснозначные функции, непрерывные на некотором открытом множестве, содержащем $\sigma(L)$. Тогда*

(i) $(f+g)(L)=f(L)+g(L)$, $(\alpha f)(L)=\alpha f(L)$, *и если функция* g *ограничена на* $\sigma(L)$, *то* $D(f(L)\cdot g(L))=D((f\cdot g)(L))$ *и* $(f\cdot g)(L)=f(L)\cdot g(L)$;

(ii) *оператор* $f(L)$ *самосопряжен, если* f *вещественнозначна, и положителен, если* f *неотрицательна*;

(iii) (a) $\|f(L)\|=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(L)}|f(\lambda)|$, *если* f *ограничена на* $\sigma(L)$;

$$\text{(b)}\quad \|f(L)\,h\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2\,d(P_\lambda h,\,h)\quad (h\in D(f(L)));$$

(iv) (теорема об отображении спектра) $f(\sigma(L))=\sigma(f(L))$.

9.6.4. Теорема. *Теоремы* 9.5.1—9.5.3 *сохраняют силу для неограниченных самосопряженных* L. *В частности, при всех* $g,\ h\in\mathscr{H}$

$$(P(\lambda_1,\lambda_2)\,g,\ h)=\lim_{\delta\to 0+}\ \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta}([R(\lambda-i\varepsilon;\,L)-R(\lambda+i\varepsilon;\,L)]\,g,\ h)\,d\lambda.$$

9.7. Решение эволюционного уравнения

Мы уже рассматривали выше (пример 3.5.10) абстрактную задачу Коши

$$\begin{aligned} &u'(t)=Lu(t)\qquad (t<0),\\ &u(0)=u_0, \end{aligned}\tag{9.7.1}$$

где L — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве. Наша цель теперь — обобщить эти рассмотрения в двух направлениях: во-первых, изучить случай неограниченных L, а во-вторых, используя спектральную теорему, дать качественное описание решения в терминах спектра L.

Мотивировкой для изучения задач с неограниченными операторами L служит то обстоятельство, что дифференциальные уравнения с частными производными можно тогда трактовать как частный случай задачи (9.7.1). Например, стандартная смешанная задача для уравнения диффузии состоит в том, чтобы решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (t>0,\ 0\leqslant x\leqslant a)$$

при заданном $u(x,0)$ и при граничных условиях, скажем, $u(0,t)=u(a,t)=0$. Эту систему можно представить в виде (9.7.1), положив

$\mathscr{H}=\mathscr{L}_2(0,a)$ и взяв в качестве L самосопряженный оператор, задаваемый дифференциальным оператором $l=d^2/dx^2$ с граничными условиями $u(0)=u(a)=0$ (в следующей главе появятся и более общие l). При этом u рассматривается как $\mathscr{L}_2(0,a)$-значная функция от t.

9.7.1. Теорема. *Пусть L — самосопряженный (возможно, неограниченный) оператор в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что $\sigma(L)\subset(-\infty,-m]$ для некоторого $m>0$. Зафиксируем $u_0\in\mathscr{H}$ и положим*

$$u(t)=e^{tL}u_0=\int\limits_{-\infty}^{-m}e^{t\lambda}\,dP_\lambda u_0\quad(t\geqslant 0).$$

Функция u непрерывна на $[0,\infty]$, а при $t>0$ дифференцируема, ее значения $u(t)$ при $t>0$ лежат в $D(L)$, и она служит решением задачи Коши (9.7.1). *Кроме того*:

(i) $\|u(t)\|\leqslant e^{-mt}\|u_0\|$ *при* $t<0$;

(ii) *выполняется полугрупповое свойство*: $e^{(t_1+t_2)L}u_0=e^{t_1L}e^{t_2L}u_0$ *при* $t_1,\ t_2\geqslant 0$.

Доказательство. Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{-m}|\lambda e^{t\lambda}|^2\,d(P_\lambda g,\,g)<\infty,\quad(g\in\mathscr{H}),$$

то, в силу определения 9.6.2 и теоремы 9.6.3, (i), $e^{tL}u_0\in D(L)$ при $t>0$. Далее, по теореме 9.6.3, (iii), (a)

$$h^{-1}\left\|e^{(t+h)L}-e^{tL}-hLe^{tL}\right\|=\sup_{\lambda\in\delta(L)}h^{-1}\left|e^{(t+h)\lambda}-e^{t\lambda}-h\lambda e^{t\lambda}\right|,$$

и стандартное вычисление, основанное на теореме о среднем, показывает, что для любого $t>0$ правая часть стремится к нулю при $h\to 0$. Тем самым доказано, что функция $e^{tL}u_0$ дифференцируема и удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению. Непрерывность u устанавливается аналогичным рассуждением. Наконец, утверждения (i) и (ii) легко получаются применением соответственно утверждений (iii) (a) и (i) теоремы о спектральном исчислении 9.6.3. □

Доказанная теорема выявляет сильную аналогию между свойствами решения абстрактной задачи Коши и соответствующего одномерного уравнения, в котором L — вещественное число. В одномерном случае, если L — отрицательное число, то решение $e^{tL}u_0$ асимптотически устойчиво в том смысле, что $e^{tL}u_0\to 0$ при $t\to\infty$. В общем случае условие, что спектр оператора L отрицателен, означает, что L разумно рассматривать как отрицательный оператор, ибо решение снова оказывается асимптотически устойчивым (в силу утверждения (i) теоремы). Общеизвестны трудности, связанные с „обратным“ уравнением диффузии; очевидно, что устойчивость решающим образом зависит от спектра.

Полугрупповое свойство (ii) является, как отмечалось в примере 3.5.10, типичным для автономных уравнений. Это характеристическое свойство интенсивно эксплуатировалось при изучении более общих вариантов рассматриваемого выше дифференциального уравнения и привело к созданию весьма изощренной теории полугрупп операторов. Хорошим введением в обширную теорию эволюционных уравнений может служить книга Ладаса и Лакшмикантхама [1972][1].

Задачи

Всюду ниже $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство.

9.1. Физический смысл самосопряженности проясняется следующими двумя примерами. В обоих предполагается, что оператор L самосопряжен.

(i) Рассмотрим «абстрактное волновое уравнение»

$$u''(t) + Lu(t) = 0$$

относительно $\mathscr{H}$ значной функции u от t. По аналогии с динамическими системами $-Lu$ можно трактовать как силу, а $V = (u, Lu)/2$, $K = (u', u')/2$ и $E = V + K$ — как потенциальную, кинетическую и полную энергии соответственно. Покажите, формально, что

$$E' = \frac{1}{2}(u', u'' + Lu) + \frac{1}{2}(u'' + Lu, u'),$$

и выведите отсюда *принцип сохранения энергии*: $E = \text{const}$.

(ii) Для «абстрактного уравнения Шрёдингера»

$$u'(t) + iLu(t) = 0,$$

где L — «гамильтониан», покажите формально, что норма $\|u(t)\|$ постоянна. Квантовомеханический смысл этого утверждения состоит в том, что состояние u все время должно иметь норму единица.

9.2. *Принцип неопределенности Гейзенберга.* Пусть L, M — неограниченные самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$, для которых $D = D(LM) \cap D(ML)$ плотно в $\mathscr{H}$. Зафиксируем $f \in D$ и положим

$$m(L) = (Lf, f), \quad \lambda(L) = \|(L - m(L)I)f\|.$$

Покажите, что

$$\lambda(L)\,\lambda(M) \geqslant \frac{1}{2}|m(LM - ML)|.$$

В квантовой механике число $\lambda(L)$ характеризует меру неопределенности при измерении наблюдаемой, отвечающей оператору L. Таким образом, в случае если коммутатор $ML - LM$ отличен от нуля, существует предел точности одновременных наблюдений. Самый известный пример получается, когда L — это оператор импульса, задаваемый дифференциальным оператором $-i\hbar d/dx$, а M — оператор положения, задаваемый как оператор умножения на x.

[1] На русском языке см., например, Хилле и Филлипс [1957]. — *Прим. перев.*

9.3. Постройте пример самосопряженных операторов L, M в $\mathbb{R}^2$, для которых не выполняется ни соотношение $L \geqslant M$, ни соотношение $L \leqslant M$.

9.4. Докажите, что каждый положительный ограниченный самосопряженный оператор L обладает единственным положительным квадратным корнем $L^{1/2}$. Покажите, что оператор $L^{1/2}$ может быть представлен как сильный предел многочленов от L и потому коммутирует с каждым оператором, который коммутирует с L. [*Указание*: сведите дело к случаю, когда $0 \leqslant L \leqslant I$, положите $L_0 = 0$, $L_{n+1} = L_n + 2^{-1}(L - L_n^2)$ при $n \geqslant 1$ и примените лемму 9.2.3.]

9.5. Пусть $L, M, N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ — самосопряженные операторы. Используя задачу 9.4, докажите, что

(i) оператор LM положителен и самосопряжен, если L, M положительны и перестановочны;

(ii) $L \geqslant M \Rightarrow LN \geqslant MN$, если N положителен и коммутирует с L, M.

9.6. Покажите, что в теореме 9.2.7 значение $f(L)$ не зависит от выбора последовательности (f_n). [Воспользуйтесь теоремой Дини: если последовательность непрерывных функций на компакте монотонно сходится к непрерывной функции, то эта сходимость равномерна.]

9.7. Пусть P_1, P_2 — проекторы на замкнутые подпространства $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ соответственно Докажите следующие утверждения:

(i) P_1 и P_2 коммутируют $\Leftrightarrow P_1P_2$ — проектор $\Rightarrow R(P_1P_2) = \mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2$;

(ii) $P_1 + P_2$ — проектор $\Leftrightarrow P_1P_2 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{M}_1 \perp \mathscr{M}_2$;

(iii) $P_1 - P_2$ — проектор $\Leftrightarrow \mathscr{M}_1 \supset \mathscr{M}_2$;

(iv) $\|P_1 - P_2\| < 1 \Rightarrow \mathscr{M}_1 \supset \mathscr{M}_2$ изометрически изоморфны.

9.8. Рассмотрим оператор $\mathscr{M}$: $\mathscr{L}_2(0, 1) \to \mathscr{L}_2(0, 1)$, задаваемый формулой $Mg(x) = xg(x)$ при $x \in [0, 1]$. Покажите, что $\sigma(M) = [0, 1]$ и что каждая точка $\sigma(M)$ принадлежит непрерывному спектру.

9.9. Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Докажите, что $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ тогда и только тогда, когда оператор L^*L имеет строго положительную нижнюю границу m_-.

9.10. Пусть E — проектор на некоторое собственное подпространство компактного самосопряженного оператора T. Покажите, что если оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ коммутирует с T, то он коммутирует и с E.

9.11. Пусть L — ограниченный самосопряженный оператор, а f — комплекснозначная непрерывная функция. Докажите, что

$$\|f(L)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(L)} |f(\lambda)|.$$

9.12. Пусть μ — измеримая ограниченная вещественнозначная функция. Определим оператор M: $\mathscr{L}_2(0, 1) \to \mathscr{L}_2(0, 1)$, полагая $Mg(x) = \mu(x)g(x)$ для всех $g \in \mathscr{L}_2(0, 1)$. Используя теорему 9.5.3, найдите проекторы $P(\lambda_1, \lambda_2)$.

9.13*. Пусть k — четная вещественнозначная непрерывная функция из $\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$. Определим оператор K: $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty) \to \mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ формулой

$$Kg(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - y)\, g(y)\, dy.$$

Используя преобразование Фурье, найдите резольвенту и выведите формулу для $P(\lambda_1, \lambda_2)$ (Тэйлор [1958, с. 356]).

Глава 10

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

10.1. Введение

В качестве одной из причин нашего интереса к спектральной теореме был указан тот факт, что широкий класс внешне различных формул разложения, содержащих ряды или интегралы, может быть получен применением этой теоремы к самосопряженным операторам, ассоциированным с определенными формальными обыкновенными дифференциальными операторами l. Докажем теперь справедливость этого утверждения. Чтобы подчеркнуть близкое сродство всех этих формул, мы будем называть их „разложениями по обобщенным собственным функциям". Оправданием для такого названия служит то, что все эти разложения представляют собой суммы или интегралы (либо, возможно, комбинации сумм и интегралов) решений уравнений $lf=\lambda f$; слово же „обобщенные" призвано напоминать, что эти решения не обязаны быть собственными функциями самóго нашего самосопряженного оператора[1)].

Очевидно, что, прежде чем применять спектральную теорему, надо сперва найти подходящий самосопряженный оператор L, ассоциированный с l. Иногда, как, скажем, в примере 6.7.9, L можно построить просто по догадке, но это не всегда удается.

10.1.1. Пример. Как и в примере 6.7.9, возьмем $l=id/dx$, но на этот раз пусть рассматриваемым интервалом будет $[0,\infty]$. Для иллюстрации возникающих здесь трудностей достаточно провести некоторые чисто формальные рассуждения, поэтому предположим, что области определения всех фигурирующих ниже операторов содержат лишь гладкие функции из $\mathscr{L}_2(0,\infty)$. Пусть L, M — любые операторы, такие что $Lf=lf$ и $Mf=lf$ на $D(L)$ и $D(M)$ соответственно. Интегрирование по частям дает

$$(Lf,\ g)-(f,\ Mg)=i\,[\lim_{x\to\infty} f(x)\,\bar{g}(x)-f(0)\,\bar{g}(0)]=-if(0)\,\bar{g}(0),$$

если принять предположение (вполне разумное, поскольку $f,\ g\in\mathscr{L}_2(0,\infty)$), что фигурирующий в этом соотношении предел равен

---

1) Выражению „обобщенная собственная функция" можно придать и точный смысл (см. Гельфанд и Виленкин [1961]). — *Прим. перев.*

нулю. При заданной области определения $D(L)$ оператор M будет сопряжен к L, если $D(M)$ есть максимальная область, для которой $f(0)\bar{g}(0)$ обращается в нуль при всех $f \in D(L)$. Отсюда следует, что если на $D(L)$ не налагается никаких условий (помимо упомянутого выше требования гладкости), то для того, чтобы функция g принадлежала области определения L^*, необходимо, чтобы $g(0)=0$; в таком случае L^* будет собственным сужением L, и L не будет самосопряженным. С другой стороны, если мы предположим, что $f(0)=0$ для всех $f \in D(L)$, то единственным ограничением, которое надо наложить на элемент g из $D(L^*)$, является требование, чтобы он был достаточно гладким; в этом случае L^* будет собственным расширением L, и снова L не будет самосопряженным. Никаких других простых способов получить самосопряженный оператор L не видно, и можно высказать гипотезу (которая будет подтверждена ниже в примере 10.5.5), что такого оператора вообще не существует.

Таким образом, даже для простых l при построении ассоциированного оператора возникают трудности, и есть даже сомнения относительно самого́ существования такого оператора. Для операторов l высших порядков, да еще если они действуют на бесконечном интервале или имеют старший коэффициент, обращающийся в нуль в какой-нибудь концевой точке, эти трудности весьма велики, и основная часть технического материала данной главы связана именно с их преодолением. Очевидно, что нашей первой целью должна быть разработка систематической процедуры для решения вопроса о том, существует ли в данном конкретном случае самосопряженный оператор и как его построить.

Разумный первый шаг в этом направлении состоит в том, чтобы отправиться от оператора L_0 с областью определения, ограниченной настолько жестко, чтобы она содержалась в областях определения всех вероятных кандидатов в самосопряженные операторы, и попытаться построить эти операторы, расширяя первоначальную область, другими словами, рассматривая самосопряженные расширения оператора L_0. Например, для случая интервала (a, b) разумным выбором $D(L_0)$ могло бы быть $\mathscr{C}^\infty((a, b))$. Такой оператор L_0 не является самосопряженным, однако удовлетворяет более слабому условию симметричности. Поэтому сначала мы займемся подробным изучением расширений самосопряженных операторов, имея в виду поставленную выше цель. Затем мы применим эту теорию для решения вопроса о том, обладает ли L_0 самосопряженными расширениями, и для построения таковых расширений, если они существуют. Заключительный шаг получения разложений по обобщенным собственным функциям, состоящий в применении спектральной теоремы, сам по себе осуществляется уже довольно непосредственно.

Стандартными руководствами по тематике этой главы служат обширная глава 13 из второго тома трехтомника Данфорда и Шварца [1963] и монография Наймарка [1969]. Другой подход, основанный на классическом анализе, проведен у Титчмарша [1962], где дано множество примеров. Широкий спектр приложений описан у Снеддона [1972]. Для многих приложений представляет интерес качественное описание спектра; эта тема широко освещена в первых трех указанных работах и обсуждается с точки зрения квантовой механики в книгах Рида и Саймона [1972, 1975]. Точка зрения теории возмущений представлена в монографии Като [1966]. Обзор спектральной теории для дифференциальных уравнений с частными производными дан в работе Александряна, Березанского, Ильина и Костюченко [1975].

10.2. Расширения симметрических операторов

Цель этого параграфа — во-первых, развить систематический метод для решения вопроса о том, обладает ли данный симметрический оператор самосопряженными расширениями, а во-вторых, дать характеризацию таковых расширений (если они существуют), пригодную для случая обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее $\mathscr{H}$ обозначает комплексное гильбертово пространство, и все рассматриваемые операторы отображают $\mathscr{H}$ в себя. Операторы обычно неограничены.

10.2.1. Определение. Линейный оператор L_0 называется **симметрическим,** если его область определения плотна в $\mathscr{H}$ и выполнено одно из следующих (очевидно, эквивалентных) условий:

(i) $(L_0 f, g) = (f, L_0 g)$ для всех $f, g \in D(L_0)$;

(ii) $L_0 \subset L_0^*$.

Очевидно, что для ограниченных операторов симметричность и самосопряженность равносильны, но для неограниченных операторов это уже не так. Всякий самосопряженный оператор, конечно, симметричен, но вот для симметрического оператора L_0 может случиться, что $D(L_0) \neq D(L_0^*)$, и в этом случае L_0 не будет самосопряженным (см. пример 6.7.2). В действительности симметрические операторы не обязаны быть даже замкнутыми. Однако они замыкаемы, что почти так же хорошо, и этого достаточно для наших настоящих целей.

10.2.2. Лемма. *Всякий симметрический оператор L_0 замыкаем, причем его замыкание $\bar{L}_0$ снова есть симметрический оператор, $\bar{L}_0 = L_0^{**}$ и $\bar{L}_0^* = L_0^*$. Если L_1 — симметрическое расширение L_0, то $L_0 \subset L_1 \subset L_1^* \subset L_0^*$.*

Доказательство. Поскольку $L_0^* \supset L_0$, оператор L_0^* плотно определен. Следовательно, по теореме 6.7.5, L_0 замыкаем и $\overline{L}_0 = L_0^{**}$. Но оператор L_0^* замкнут (теорема 6.7.4) и $L_0 \subset L_0^*$, поэтому $\overline{L}_0 \subset L_0^*$. Согласно определению замыкания, $G(\overline{L}_0) \subset \overline{G(L_0)}$, где G обозначает график (определение 3.8.7). Следовательно, по лемме 6.7.3, $L_0^* = \overline{L}_0^*$. Этим доказано, что $\overline{L}_0 \subset \overline{L}_0^*$ и, значит, оператор $\overline{L}_0$ симметричен. Последнее утверждение леммы вытекает из леммы 6.7.3. □

В последующем изложении положим для простоты записи $\overline{L}_0 = L$. Согласно доказанной лемме, $L_0^* = \overline{L}_0^* = L^*$.

10.2.3. Лемма. *Пусть L — замкнутый симметрический оператор, и пусть* $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. *Тогда* $N(L - \lambda I) = 0$ *и*

$$\mathscr{H} = R(L - \lambda I) \oplus N(L^* - \bar{\lambda} I) = R(L - \bar{\lambda} I) \oplus N(L^* - \lambda I).$$

Подпространства $R(L - \lambda I)$ и $N(L^* - \bar{\lambda} I)$ замкнуты и взаимно ортогональны.

Доказательство. Повторение доказательства леммы 6.6.1 при дополнительном ограничении $f \in D(L)$ дает неравенство $\|(L - \lambda I) f\| \geqslant \nu \|f\|$, где $\nu = |\operatorname{Im} \lambda|$. Из леммы 3.8.18, (i) следует, что $R(L - \lambda I)$ замкнуто. Наш результат вытекает теперь из теоремы 6.7.6. □

Лемма 10.2.2 сужает район поиска интересующих нас самосопряженных расширений. Поскольку всякий самосопряженный оператор замкнут, а $\overline{L}_0$ по определению есть минимальное замкнутое расширение L_0, мы видим, что если L_0 обладает самосопряженным расширением M, то оператор M симметричен и является расширением $\overline{L}_0$ и сужением L_0^*. Для формальных обыкновенных дифференциальных операторов найти подходящий симметрический оператор L_0 несложно, но, хотя L_0 и замыкаем, вычисление его замыкания — в общем случае совсем не легкая задача. Однако не составляет труда найти L_0^*, и, следовательно, естественно вести наши поиски, сужая L_0^*, а не расширяя $\overline{L}_0$; между прочим, этот подход приводит даже к некоторой характеризации $\overline{L}_0$. Поскольку $D(M)$ — линейное пространство, возникающую проблему можно сформулировать следующим образом: существуют ли линейные подпространства $\mathscr{M}$, удовлетворяющие условию $D(\overline{L}_0) \subset \mathscr{M} \subset D(L_0^*)$, такие что сужение L_0^* на $\mathscr{M}$ является самосопряженным? Если да, то как их охарактеризовать?

Лемма 10.2.3 указывает, в каком направлении продолжать. Если оператор $\overline{L}_0$ самосопряжен, то его спектр веществен и, следовательно, $R(\overline{L}_0 - \lambda I) = \mathscr{H}$ для $\lambda \subset \operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Поэтому для симметрического L_0 размерности подпространств $N(L_0^* - \lambda I)$ и $N(L_0^* - \bar{\lambda} I)$ служат мерой того, насколько $\overline{L_0}$ не дотягивает до самосопряженного оператора. Внимательное изучение этих подпространств приведет нас к ответам на поставленные выше вопросы. Фактически размерность каждого из этих подпространств остается постоянной, когда λ изменяется в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (Данфорд и Шварц [1963, с. 399]), так что достаточно рассмотреть лишь $\lambda = i$.

10.2.4. Определение. Замкнутые подпространства

$$N_+ = N(L_0^* - iI), \quad N_- = N(L_0^* + iI)$$

называются **дефектными подпространствами** оператора L_0, а их размерности $n_\pm$ — **индексами дефекта** этого оператора. Для краткости мы будем иногда использовать обороты вроде: „L_0 имеет индексы дефекта (n_+, n_-)“.

10.2.5. Лемма. *Если оператор L_0 симметричен и $L = \overline{L_0}$, то $D(L^*) = D(L) \oplus N_+ \oplus N_-$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $f \in D(L^*)$. По лемме 10.2.3

$$L^*f - if = (Lg - ig) + h_-$$

для некоторых $g \in D(L)$ и $h_- \in N_-$. Поскольку $g \in D(L) \subset D(L^*)$, это равенство можно переписать так:

$$\begin{aligned} L^*\left(f - g - \tfrac{1}{2}\, ih_-\right) &= i(f-g) + h_- + L^*\left(-\tfrac{1}{2}\, ih_-\right) \\ &= i(f-g) + h_- - \tfrac{1}{2}\, h_- \quad (\text{ибо } L^*h_- = -ih_-) \\ &= i\left(f - g - \tfrac{1}{2}\, ih_-\right). \end{aligned}$$

Таким образом, $f - g - ih_-/2 \in N_+$, и, значит, если положить $\varphi_- = ih_-/2$, $\varphi_+ = f - g - ih_-/2$, то

$$f = g + \varphi_+ + \varphi_- \quad (g \in D(L),\ \varphi_\pm \in N_\pm). \tag{10.2.1}$$

Так как $D(L)$ и $N_\pm$ содержатся в линейном подпространстве $D(L^*)$, наш результат будет следовать отсюда, если мы покажем, что представление (10.2.1) единственно, или, эквивалентно, что $f = 0 \Rightarrow g = \varphi_+ = \varphi_- = 0$. Но применение к равенству (10.2.1) с $f = 0$ оператора $L^* - iI$ дает

$$(L^* - iI)\, g - 2i\varphi_- = 0,$$

а поскольку $\varphi_- \in N_-$, члены в левой части взаимно ортогональны (лемма 10.2.3). Следовательно, каждый из них равен нулю. Итак, $\varphi_- = 0$. Аналогично $\psi_+ = 0$, а отсюда вытекает, что и $g = 0$. $\square$

10.2.6. Следствие. *Пусть оператор L замкнут, а L_1 — произвольный линейный оператор, удовлетворяющий условию $L \subset L_1 \subset L^*$. Тогда существует единственное линейное подпространство N в $N_+ \oplus N_-$, такое что $D(L_1) = D(L) \oplus N$.*

Доказательство. Пусть N — множество, состоящее из всех $n \in N_+ \oplus N_-$, для которых существуют $f_1 \in D(L_1)$, $f \in D(L)$, такие что $f_1 = f + n$. Из того что $D(L)$ и $D(L_1)$ — линейные подпространства, легко следует, что и N — линейное подпространство. Но $N \cap D(L) = 0$, поэтому $D(L_1) = D(L) \oplus N$ (лемма 1.2.9). Единственность N очевидна. $\square$

Таким образом, область определения любого симметрического расширения (а тем самым и любого самосопряженного расширения) оператора $\bar{L}_0$ получается „добавлением“ к $D(\bar{L}_0)$ некоторого линейного подпространства N прямой суммы $N_+ \oplus N_-$. В последующем анализе свойства N_+ и N_- будут играть важную роль.

10.2.7. Определение. Для всякого симметрического оператора L_0 положим

$$\langle f, g\rangle = (L_0^* f,\ g) - (f,\ L_0^* g) \quad (f,\ g \in D(L_0^*)).$$

Очевидно, что $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — билинейная форма на $D(L_0^*) \times D(L_0^*)$ и $\langle f, g\rangle = -\overline{\langle g, f\rangle}$.

10.2.8. Пример. Рассмотрим интервал $[0, 1]$ и $l = id/dx$. Напомним (см. пример 6.7.2), что если $\mathscr{A}$ обозначает множество всех абсолютно непрерывных функций f с $f' \in \mathscr{L}_2(0, 1)$ и $Lf = lf$ на $D(L)$, где

$$D(L) = \{f\colon\ f \in \mathscr{A},\ f(0) = f(1) = 0\},$$

то $D(L^*) = \mathscr{A}$. Для $g \in \mathscr{A}$

$$\langle f, g\rangle = (L^* f,\ g) - (f,\ L^* g) = i\,[f(1)\,\bar{g}(1) - f(0)\,\bar{g}(0)]. \quad (10.2.2)$$

Анализ примера 6.7.9 показывает, что билинейная форма $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ играет центральную роль в вопросах самосопряженности. Область определения самосопряженного расширения оператора L получается сужением $D(L^*)$ при помощи некоторого граничного условия вида $\beta f(1) - \alpha f(0) = 0$. Из (10.2.2) видно, что это условие можно переписать в виде $\langle f, g\rangle = 0$, если $\bar{g}(1) = \beta$, $\bar{g}(0) = \alpha$. Таким образом, в развиваемой далее абстрактной теории такого рода условия можно рассматривать как обобщенные граничные условия, и наша цель будет состоять в том, чтобы найти такие условия указанного рода на $D(L^*)$, которые дают область определения самосопряженного расширения оператора L.

10.2.9. Лемма. *Пусть оператор L_0 симметричен. Вектор f из $D(L_0^*)$ принадлежит $D(\bar{L}_0)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно* *из следующих эквивалентных между собой условий*:

(i) $\langle f, g\rangle = 0$ *при всех* $g \in D(L_0^*)$; (10.2.3)

(ii) $\langle f, \varphi\rangle = 0$ *при всех* $\varphi \in N_+ \oplus N_-$. (10.2.4)

Если $N_+ \oplus N_-$ — *конечномерное подпространство с базисом* $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_n$, *то эти условия эквивалентны условию*

(iii) $\langle f, \varphi_i\rangle = 0$ *для* $i = 1, \ldots, n$. (10.2.5)

Доказательство. Пусть $\bar{L}_0 = L$. Согласно лемме 10.2.2, $L_0^* = L^*$ и $D(L^{**}) = D(L) \subset D(L^*)$. Следовательно, по определению сопряженного оператора, вектор f из $D(L^*)$ принадлежит $D(L^{**}) = D(L)$ тогда и только тогда, когда $\langle f, g\rangle = 0$ при всех $g \in D(L^*)$. Этим доказаны необходимость и достаточность условия (i), а отсюда очевидным образом вытекает необходимость условия (ii). Чтобы доказать его достаточность, заметим, что по лемме 10.2.5 каждое $g \in D(L^*)$ можно записать в виде $g = g_0 + \varphi$, где $g_0 \in D(L)$ и $\varphi \in N_+ \oplus N_-$. Поэтому

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g_0\rangle + \langle f, \varphi\rangle.$$

В силу (i), $\langle f, g_0\rangle = 0$, а $\langle f, \varphi\rangle = 0$ по предположению. Значит, $\langle f, g\rangle = 0$ при всех $g \in D(L^*)$, и достаточность (ii) следует из достаточности (i). Утверждение относительно условия (iii) очевидно по соображениям линейности. $\square$

Эта лемма дает описание области определения замыкания симметрического оператора. Для наших нынешних целей самый главный момент — это то, что $\langle \cdot, g\rangle$ обращается в нуль на $D(\bar{L}_0)$. Вводимая ниже терминология будет нам полезна в ходе дальнейшего анализа, но в окончательном результате не появится.

10.2.10. Определение. Пусть N — линейное подпространство в $N_+ \oplus N_-$. **Сопряженным** к нему **подпространством** N^* назовем линейное подпространство, состоящее из всех векторов $f \in N_+ \oplus N_-$, таких что $\langle f, g\rangle = 0$ при всех $g \in N$. Будем называть N **симметрическим**, если $N \subset N^*$ (или, эквивалентно, если $\langle f, g\rangle = 0$ при всех $f, g \in N$), и **самосопряженным**, если $N = N^*$.

10.2.11. Лемма. *Пусть* L_0 — *симметрический оператор, а* L_1 — *произвольный линейный оператор, такой что* $\bar{L}_0 \subset L_1 \subset L_0^*$. *Тогда* $D(L_1) = D(\bar{L}_0) \oplus N$, *где* N — *некоторое линейное подпространство в* $N_+ \oplus N_-$, *и* $D(L_1^*) = D(\bar{L}_0) \oplus N^*$. *Оператор* L_1 *симметричен в том и только том случае, если подпространство* N *симметрично, и самосопряжен в том и только том случае, если таково же* N.

Доказательство. Положим $L = \bar{L}_0$. Для любых $f \in D(L_1)$, $g \in D(L^*)$

$$\langle f, g\rangle = (L^* f, g) - (f, L^* g) = (L_1 f, g) - (f, L^* g).$$

Поскольку $D(L) \subset D(L_1^*) \subset D(L^*)$, то в силу определения L_1^*, для того чтобы вектор $g \in D(L^*)$ принадлежал $D(L_1^*)$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle f, g\rangle = 0$ при всех $f \in D(L_1)$.

Согласно следствию 10.2.6, $D(L_1) = D(L) \oplus N$, $D(L_1^*) = D(L) \oplus P$, где N, P — некоторые линейные подпространства в $N_+ \oplus N_-$. Далее, лемма 10.2.5 показывает, что любые векторы $f \in D(L_1)$, $g \in D(L^*)$ представимы в виде $f = f_0 + \varphi$, $g = g_0 + \psi$, где f_0, $g_0 \in D(L)$, а φ, $\psi \in N_+ \oplus N_-$, и из леммы 10.2.9 легко вытекает, что $\langle f, g\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle \varphi, \psi\rangle = 0$. Следовательно, ввиду доказанного в предыдущем абзаце, $g \in D(L_1^*)$ тогда и только тогда, когда $\langle \varphi, \psi\rangle = 0$ при всех $\varphi \in N$, а по определению N^* это имеет место тогда и только тогда, когда $\psi \in N^*$. Значит, $P = N^*$. Последнее утверждение леммы следует из определений симметричности и самосопряженности. □

Вопрос о симметричности и самосопряженности расширений оператора L_0 равносилен, таким образом, вопросу о симметричности и самосопряженности линейных подпространств в $N_+ \oplus N_-$. Это резко упрощает дело, в случае если L_0 имеет конечные индексы дефекта, ибо вопрос может быть тогда решен элементарными конечномерными методами. Как мы увидим, для симметрических операторов, отвечающих формальным обыкновенным дифференциальным операторам, подпространства $N_\pm$ состоят соответственно из $\mathscr{L}_2$-решений уравнений $lf = \pm i f$ и, следовательно, заведомо конечномерны. Поэтому будем развивать теорию дальше, приняв это предположение. Выведем теперь один простой критерий, позволяющий выяснять, обладает ли данный симметрический оператор самосопряженными расширениями.

10.2.12. Лемма. *Пусть $\varphi, \psi \in N_+ \oplus N_-$ и $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, $\psi = \psi_+ + \psi_-$, где $\varphi_\pm$, $\psi_\pm \in N_\pm$ соответственно. Тогда*

$$\langle \varphi, \psi\rangle = 2i\left[(\varphi_+, \psi_+) - (\varphi_-, \psi_-)\right], \tag{10.2.6}$$

$$\langle \varphi, \varphi\rangle = 2i\left[\|\varphi_+\|^2 - \|\varphi_-\|^2\right]. \tag{10.2.7}$$

Доказательство. По определению, $L^*\varphi_\pm = \pm i\varphi_\pm$, $L^*\psi_\pm = \pm i\psi_\pm$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \psi\rangle &= (L^*\varphi, \psi) - (\varphi, L^*\psi)\\ &= (L^*[\varphi_+ + \varphi_-], \psi_+ + \psi_-) - (\varphi_+ + \varphi_-, L^*[\psi_+ + \psi_-])\\ &= i(\varphi_+ - \varphi_-, \psi_+ - \psi_-) + i(\varphi_+ + \varphi_-, \psi_+ - \psi_-)\\ &= 2i[(\psi_+, \psi_+) - (\varphi_-, \psi_-)]. \ □\end{aligned}$$

10.2.13. Следствие. *Пусть подпространство $N \subset N_+ \oplus N_-$ симметрично, и пусть $\varphi \in N$. Запишем $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где $\varphi_\pm \in N_\pm$ соответственно. Тогда $\|\varphi_+\| = \|\varphi_-\|$.*

Доказательство. В силу определения 10.2.10, $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$. Наш результат следует поэтому из (10.2.7). □

10.2.14. Лемма. *Предположим, что оператор L_0 имеет конечные индексы дефекта $n_\pm$. Если N — линейное подпространство в $N_+ \oplus N_-$ размерности n, то N^* имеет размерность $n_+ + n_- - n$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in N_+ \oplus N_-$ таково, что $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всех $f \in N_+ \oplus N_-$. Запишем $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где $\varphi_\pm \in N_\pm$ соответственно. Полагая последовательно $f = \varphi_+$; φ_- и используя (10.2.6), получаем $\varphi_+ = \varphi_- = 0$. Значит, $\varphi = 0$.

Пусть теперь $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — какой-нибудь базис в N. Определим линейные функционалы $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$ на $N_+ \oplus N_-$ формулой $\varphi_i^*(f) = \langle f, \varphi_i \rangle$. Тогда

$$\left(\sum \alpha_i \varphi_i^*\right)(f) = \left\langle f, \sum \bar{\alpha}_i \varphi_i \right\rangle \quad (f \in N_+ \oplus N_-, \ \alpha_i \in \mathbb{C}).$$

В силу результата, установленного в первом абзаце доказательства, отсюда следует, что φ_i^* линейно-независимы. Но N^* представляет собой ортогональное дополнение к $\{\varphi_i^*\}$, и наше утверждение вытекает из известной теоремы о конечномерных векторных пространствах (см., например, Халмош [1948, с. 46]).

10.2.15. Теорема. *Симметрический оператор с конечными индексами дефекта обладает самосопряженным расширением тогда и только тогда, когда его индексы дефекта равны между собой.*

Доказательство. Ввиду леммы 10.2.11 достаточно показать, что самосопряженное линейное подпространство в $N_+ \oplus N_-$ существует тогда и только тогда, когда $n_+ = n_-$. Доказательство основано на изучении связи между N_+, N_- и симметрическим подпространством N в $N_+ \oplus N_-$. Ключевую роль играет следствие 10.2.13, показывающее, что ненулевой элемент из N может быть суммой двух элементов из N_+ и N_- соответственно, только если оба они отличны от нуля. Это подсказывает нам, в какой форме надо взять элементы, образующие базис N.

Предположим сперва, что $n_+ = n_- \equiv n$. Выберем в подпространствах $N_\pm$ ортонормированные базисы $\{\varphi_{i\,\pm}\}_1^n$ и положим $\varphi_i = \varphi_{i+} + \varphi_{i-}$. Пусть N — линейная оболочка векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (очевидно, линейно-независимых). Для любых $f, g \in N$ имеем $f = \sum \alpha_i \varphi_i$, $g = \sum \beta_i \varphi_i$ при некоторых $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, и из (10.2.6) вытекает, что

$$\langle f, g\rangle = \Big\langle \sum_i \alpha_i [\varphi_{i+} + \varphi_{i-}], \quad \sum_j \beta_j [\varphi_{j+} + \varphi_{j-}] \Big\rangle$$
$$= 2i \sum_i \sum_j \alpha_i \bar{\beta}_j [(\varphi_{i+}, \varphi_{j+}) - (\varphi_{i-}, \varphi_{j-})] = 0$$

(в силу ортонормированности базисов). Следовательно, $\langle f, g\rangle = 0$, N симметрично и $N \subset N^*$. Согласно лемме 10.2.14, $\dim N^* = n_+ + n_- - n = n = \dim N$. Таким образом, $N = N^*$, и N самосопряжено.

Обратно, предположим, что N самосопряжено. Выберем какой-нибудь базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ в N и запишем $\varphi_i = \varphi_{i+} + \varphi_{i-}$, где $\varphi_{i+} \in N_\pm$. Множество $\{\varphi_{i+}\}$ линейно-независимо. Действительно, если бы это было не так, то нашлись бы скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, такие что $\sum \alpha_i \varphi_{i+} = 0$, а значит, $\sum \alpha_i \varphi_i = \sum \alpha_i \varphi_{i-}$. Поскольку левая часть принадлежит симметрическому линейному подпространству N, то $\sum \alpha_i \varphi_{i-} = 0$ по следствию 10.2.13. Следовательно, мы имели бы $\sum \alpha_i \varphi_i = 0$, и φ_i были бы линейно-зависимы, вопреки предположению. Аналогично и множество $\{\varphi_{i-}\}$ линейно-независимо. Отсюда следует, что $k \leqslant \min(n_+, n_-)$. Однако, в силу самосопряженности N, $2k = n_+ + n_-$ (лемма 10.2.14), а это равенство согласуется с предыдущим неравенством лишь в случае $n_+ = n_-$. $\square$

Доказанная теорема прекрасно решает вопрос о существовании самосопряженных расширений. Следующий шаг — выяснить, как эти расширения построить. Для приложений к обыкновенным дифференциальным уравнениям наиболее пригодна конструкция, избегающая, насколько это возможно, использования детальных свойств функций, принадлежащих подпространствам N_+ и N_-; описать ее удобнее всего с помощью следующего понятия:

10.2.16. Определение. Множество элементов $f_1, \ldots, f_k$ из $D(L_0^*$ называется **линейно-независимым относительно** $D(L_0)$, если линейно-независимы элементы φ_j, фигурирующие в представлениях $f_j = h_j + \varphi_j$, где $h_j \in D(\bar{L}_0)$, $\varphi_j \in N_+ \oplus N_-$.

10.2.17. Лемма. *Элементы $f_1, \ldots, f_k$ из $D(L_0^*)$ линейно-независимы относительно $D(L_0)$ в том и только том случае, когда существуют такие элементы $g_1, \ldots, g_k$ из $D(L_0^*)$, что $\det(\langle f_i, g_j\rangle) \neq 0$, а в этом случае $k \leqslant n_+ + n_-$.*

Доказательство. Используя обозначения из приведенного выше определения, зададим линейные функционалы φ_j^* на $D(L_0^*)$ формулой $\varphi_j^*(f) = \langle f, \varphi_j\rangle$; как было замечено в доказательстве леммы 10.2.14, элементы φ_j^* линейно-независимы тогда и только тогда, когда линейно-независимы элементы φ_j. Необходимость указанного в формулировке леммы условия становится очевидной, если выбрать какой-нибудь дуальный базис (Халмош [1948, с. 37]) для линейной оболочки элементов φ_j^* и вспомнить что $\langle \cdot, g\rangle$ обращается в нуль на $D(\bar{L}_0)$. Доказать достаточность предоставляется читателю в качестве упражнения. □

10.2.18. Теорема. *Пусть L_0 — симметрический оператор с конечными индексами дефекта $n_+ = n_- \equiv n$. В случае если $n = 0$, замыкание оператора L_0 является его единственным самосопряженным расширением. В случае если $n \neq 0$, предположим, что элементы $f_1, \ldots, f_n \in D(L_0^*)$ линейно-независимы относительно $D(L_0)$ и удовлетворяют условию*

$$\langle f_i, f_j\rangle = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{10.2.8}$$

Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство в $\mathscr{H}$, состоящее из всех $f \in D(L_0^*)$, таких что

$$\langle f, f_i\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.2.9}$$

Тогда $\mathscr{M}$ служит областью определения самосопряженного расширения M оператора L_0, которое задается формулой $Mf = L_0^* f$ при $f \in \mathscr{M}$.

Обратно, пусть M — некоторое самосопряженное расширение оператора L_0. Предположим, что векторы $h_1, \ldots, h_{2n} \in D(L_0^*)$ линейно-независимы относительно $D(L_0)$. Тогда в их линейной оболочке существуют векторы $f_1, \ldots, f_n$, которые удовлетворяют условию (10.2.8) *и для которых линейное подпространство $\mathscr{M}$, определяемое условием* (10.2.9), *служит областью определения оператора M.*

Доказательство. Запишем $f_i = g_i + \varphi_i$, где $g_i \in D(\bar{L}_0)$, $\varphi_i \in N_+ \oplus N_-$. Условие (10.2.8) гарантирует, что линейная оболочка N векторов φ_i симметрична, так что $N \subset N^*$. По лемме 10.2.14 размерности N и N^* равны. Отсюда следует, что $N = N^*$, т. е. N самосопряжено. Поскольку $\mathscr{M} = D(\bar{L}_0) \oplus N$, сужение M оператора L_0^* на $\mathscr{M}$ является самосопряженным (лемма 10.2.11). Обратно, если M — самосопряженное расширение оператора L_0, то $D(M) = D(\bar{L}_0) \oplus N$, где N самосопряжено, и наш результат легко получается, если выбрать какой-нибудь базис в N. □

Теоремы 10.2.15 и 10.2.18 вместе с простым критерием линейной независимости относительно $D(L_0)$, даваемым леммой 10.2.17, образуют подходящую теоретическую базу для разрешения вопросов, касающихся существования и построения самосопряженных расширений. Но прежде чем применять эти результаты к дифференциальным операторам, надо еще вычислить некоторое конкретное представление операторов L_0, L_0^* и билинейную форму $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

10.3. Формальные обыкновенные дифференциальные операторы: предварительные сведения

Для простоты ограничимся изучением самого распространенного случая — операторов второго порядка. Рассмотрим формальный обыкновенный дифференциальный оператор l вида

$$lf = (pf')' + qf,$$

действующий на функции, определенные на некотором интервале Ω с концевыми точками a, b $(a < b)$, которые обе вместе или по отдельности могут быть как конечными, так и бесконечными; вопрос о том, принадлежат ли сами точки a, b интервалу Ω, мы обсудим чуть позже. Далее мы будем предполагать, что p, $q \in \mathscr{C}^\infty((a, b))$ и $p(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Для последующего анализа весьма важно, конечны точки a, b или бесконечны и обращается p в нуль в этих точках или нет.

10.3.1. Определение. Концевая точка a называется **регулярной,** если она конечна, $p(a) \neq 0$ и p, $q \in \mathscr{C}([a, b])$; аналогично определяется регулярность b. Нерегулярные концевые точки будем называть **сингулярными.** Формальный оператор l называется **регулярным,** если регулярны обе точки a и b, **сингулярным** в противном случае. Точка a включается в интервал Ω тогда и только тогда, когда она регулярна, и то же соглашение относится к b. Таким образом, Ω может иметь вид $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ или (a, b). Например, $\Omega = [a, b)$, если точка a регулярна, а b сингулярна.

Для того чтобы получить из l операторы в $\mathscr{H}_2(\Omega)$, являющиеся симметрическими, на коэффициенты l надо наложить дополнительное условие.

10.3.2. Определение. Формальный оператор l^*, задаваемый формулой

$$l^*g = (\bar{p}g')' + \bar{q}g,$$

называется **формальным сопряженным** к l. Будем говорить, что l **формально самосопряжен,** если $l = l^*$.

Очевидно, что l будет формально самосопряженным тогда и только тогда, когда p и q вещественнозначны. Снова имеет место неудачное столкновение терминологий: согласно классической терминологии говорят не „формальная самосопряженность", а просто „самосопряженность". Как мы вскоре увидим, симметричность наших операторов в сущности вытекает из следующей леммы, устанавливаемой с помощью элементарных выкладок.

10.3.3. Лемма. *Если l формально самосопряжен, то для всех f, g, для которых фигурирующие ниже выражения имеют смысл,*

$$\bar{g}lf - f\overline{lg} = \frac{d}{dx}[f, g], \tag{10.3.1}$$

где

$$[f, g] = p(f'\bar{g} - f\bar{g}'). \tag{10.3.2}$$

Для любого конечного подынтервала $[\alpha, \beta]$ *в* Ω *справедлива формула Грина*

$$\int_\alpha^\beta (\bar{g}lf - f\overline{lg})\,dx = [f, g]_\alpha^\beta, \tag{10.3.3}$$

где

$$[f, g]_\alpha^\beta = [f, g](\beta) - [f, g](\alpha). \tag{10.3.4}$$

Условия на формальные операторы l, с которыми мы будем иметь дело, собраны вместе в виде следующего определения (допускаемая общность l достаточна для почти всех приложений):

10.3.4. Определение. Всюду далее в этой главе Ω таково, как указано в определении 10.3.1, p и q — вещественнозначные функции[1)] из $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, причем $p(x) \neq 0$ при $x \in \Omega$, и l — формальный дифференциальный оператор, задаваемый формулой

$$lf = (pf')' + qf. \tag{10.3.5}$$

Доказательство приводимой ниже основной теоремы существования можно найти у Данфорда и Шварца [1963, с. 448].

10.3.5. Теорема. *Для любой функции* $g \in \mathscr{L}_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *любой точки* $x_0 \in \Omega$ *и любых комплексных чисел* c_0, c_1, λ *существует единственная функция* f *на* Ω *с абсолютно непрерывной производной* f', *удовлетворяющая условиям*

$$lf(x) + \lambda f(x) = g(x) \quad (\textit{п. в.}),$$
$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1.$$

Если $g \in \mathscr{C}^l(\Omega)$, *то* $f \in \mathscr{C}^{l+2}(\Omega)$.

10.4. Симметрические операторы, ассоциированные с формальными обыкновенными дифференциальными операторами

Прежде чем применять теорию § 10.2, нам нужно вычислить три величины. Именно, надо найти симметрический оператор L_0, отвечающий формальному оператору l, сопряженный к L_0 оператор

---

1) Так что l — формально самосопряженный оператор. — *Прим. перев.*

и достаточно простое выражение для билинейной формы $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Для большей ясности разберем сначала тот более простой случай, когда l регулярен. Дело здесь обстоит проще, потому что не возникает трудностей, связанных с концевыми точками интервала Ω.

Весь анализ будет проводиться в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Приводимые ниже определения подсказаны модельным случаем операторов первого порядка, рассмотренным в примере 6.7.2. Прежде всего мы определяем $\mathscr{A}$ как наибольшее множество, на котором lf имеет смысл и принадлежит $\mathscr{L}_2(\Omega)$; для регулярных l условие $lf \in \mathscr{L}_2(\Omega)$ эквивалентно просто условию $f'' \in \mathscr{L}_2(\Omega)$, но для сингулярных l множество $\mathscr{A}$ зависит от коэффициентов l. Затем определяются операторы L и L' и доказывается, что L симметричен, а L' сопряжен к L.

10.4.1. Определение. Пусть l — формальный оператор второго порядка из определения 10.3.4. Обозначим через $\mathscr{A}$ множество всех функций f из $\mathscr{L}_2(\Omega)$ с абсолютно непрерывной производной f' с $lf \in \mathscr{L}_2(\Omega)$.

10.4.2. Определение. Для регулярных l положим

$$D(L) = \{f\colon\ f \in \mathscr{A},\ f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\},$$
$$D(L') = \mathscr{A}$$

и определим операторы L и L' на $D(L)$ и $D(L')$ соответственно формулами $Lf = lf$, $L'f = lf$. Иногда нам будет нужно рассматривать подынтервалы Δ в Ω; соответствующие операторы для Δ будут обозначаться через L_Δ, L'_Δ.

10.4.3. Лемма. *Если формальный оператор l регулярен, то $D(L)$ плотно в $\mathscr{L}_2(\Omega)$, $L \subset L'$ и*

$$(L'f,\ g) - (f,\ L'g) = [f,\ g]_a^b \quad (f,\ g \in D(L')), \tag{10.4.1}$$

$$(Lf,\ g) = (f,\ L'g) \quad (f \in D(L),\ g \in D(L')). \tag{10.4.2}$$

Доказательство. Поскольку $D(L) \supset \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, первое утверждение следует из теоремы 2.5.6. Равенство (10.4.1) — это не что иное, как формула Грина (10.3.3). В случае когда $f \in D(L)$, f и f' обращаются в нуль в точках a и b, а значит, $[f,\ g]_a^b = 0$. Отсюда вытекает (10.4.2). □

Соотношения (10.4.1) и (10.4.2), представляющие собой непосредственное следствие формальной самосопряженности l, служат важнейшим связующим звеном между формальным оператором l и операторами L, L' в $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Из (10.4.2) следует симметричность L, а (10.4.1) дает удобное выражение для билинейной формы $\langle\cdot, \cdot\rangle$. В качестве подготовки к главной теореме этого параграфа докажем два технических результата.

10.4.4. Лемма. *Если формальный оператор l регулярен, то $N(L')^{\perp}=R(L)$ и $\mathscr{L}_2(\Omega)=R(L)\oplus N(L')$.*

Доказательство. В силу теоремы существования 10.3.5, для всякого $g\in\mathscr{L}_2(\Omega)$ существует единственное решение f уравнения $lf=g$, обладающее абсолютно непрерывной производной f' и удовлетворяющее условиям $f(a)=f'(a)=0$; это решение f принадлежит $\mathscr{A}$, поскольку $lf=g\in\mathscr{L}_2(\Omega)$. Тем самым доказано, что уравнение $L'f=g$ имеет решение, удовлетворяющее указанным граничным условиям. Теорема 10.3.5 показывает также, что $N(L')$ обладает базисом $\{k_1, k_2\}$, таким что $k_1(b)=1$, $k_1'(b)=0$, $k_2(b)=0$, $k_2'(b)=1$. Учитывая граничные условия на f и используя (10.4.1), заключаем, что для $j=1, 2$

$$(g,\ k_j)=(L'f,\ k_j)=[f,\ k_j]_a^b=(-1)^{j+1}\,p(b)\,f^{(2-j)}(b).$$

Так как l регулярен, то $p(b)\neq 0$. Следовательно, $(g, k_j)=0$ для $j=1, 2$ тогда и только тогда, когда $f(b)=f'(b)=0$. Ввиду определения $D(L)$ это означает, что $f\in D(L)$ тогда и только тогда, когда $g\in N(L')^{\perp}$. Таким образом, $N(L')^{\perp}=R(L)$. Второе доказываемое равенство вытекает отсюда, поскольку $N(L')$ замкнуто. □

10.4.5. Лемма. *Для любых α, β, γ, $\delta\in\mathbb{C}$ существует функция $f\in\mathscr{C}^{\infty}([a, b])$ с $f(a)=\alpha$, $f'(a)=\beta$, $f(b)=\gamma$, $f'(b)=\delta$.*

Доказательство. Очевидным образом строится многочлен с такими свойствами. □

10.4.6. Теорема. *Предположим, что формальный оператор l регулярен. Тогда L представляет собой замкнутый симметрический оператор с сопряженным $L^*=L'$ и $L'^*=L$.*

Доказательство. Поскольку $L\subset L'$, симметричность L следует из соотношения (10.4.2), которое показывает также, что $L^*\supset L'$. Утверждаемое равенство $L'=L^*$ будет поэтому установлено, если мы докажем противоположное включение. Выберем произвольное $g\in D(L^*)$ и положим $L^*g=h$. По теореме 10.3.5 уравнение $L'f=h$ имеет решение f, и для любого $k\in D(L)$, в силу (10.4.2), $(k, h)=(k, L'f)=(Lk, f)$. Но $(k, h)=(k, L^*g)=(Lk, g)$ (по определению сопряженного оператора), и вычитание дает $(Lk, f-g)=0$. Следовательно, $f-g\in R(L)^{\perp}$, а значит, $f-g\in N(L')$ (лемма 10.4.4). Поскольку $f\in D(L')$, то и $g\in D(L')$, и, так как g — произвольный элемент из $D(L^*)$, этим доказано, что $D(L^*)\subset D(L')$ и $L'g=L'f=h=L^*g$. Таким образом, $L^*\subset L'$ и, следовательно, $L'=L^*$.

Замкнутость L будет следовать из теоремы 6.7.4, если мы покажем, что $L'^*=L$. Но $\bar{L}=L^{**}$ по лемме 10.2.2, и поскольку

$L^* = L'$, то $\bar{L} = L'^*$ и $L'^* \supset L$. Поэтому достаточно показать, что $L'^* \subset \bar{L}$. Так как $L \subset L'$, то $L' = L^* \supset L'^*$ и

$$(L'g,\ f) = (g,\ L'^*f) = (g,\ L'f) \quad (f \in D(L'^*),\ g \in D(L')).$$

Значит, в силу (10.4.1), $[g,\ f]_a^b = 0$. Но по лемме 10.4.5 существует $g \in D(L')$ с $g'(a) = 1$ и $g(a) = g(b) = g'(b) = 0$. Подставляя это g в последнее равенство, получаем $f(a) = 0$. Аналогично и $f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Таким образом, $f \in D(\bar{L})$. □

Итак, мы нашли замкнутый симметрический оператор $\bar{L}$ и его сопряженный $L^* = L'$, а из леммы 10.4.3 нам известно, что билинейная форма $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ из определения 10.2.7 равна $[\cdot,\ \cdot]_a^b$. Тем самым приготовления к применению теории самосопряженных расширений для случая регулярных l завершены.

Для сингулярных l непосредственное обобщение приведенных выше рассуждений оказывается затруднительным. Главная причина этого состоит в том, что область определения замкнутого симметрического оператора, отвечающего l, теперь зависит как от коэффициентов l, так и от Ω, и ее не удается задать так легко, как в определении 10.4.2. Все трудности связаны с концевыми точками интервала Ω, и наша тактика будет заключаться в том, чтобы начать с симметрического оператора L_0, в область определения которого входят лишь функции, обращающиеся в нуль в некоторой окрестности каждой концевой точки. Такой оператор L_0 не будет замкнут, но теория § 10.2 как раз для этого случая и приспособлена, и замыкание $\bar{L}_0$ и его симметрические расширения получаются сужением $D(L_0^*)$ при помощи условий, аналогичных граничным условиям.

10.4.7. Определение. Для произвольного формального оператора l (регулярного или сингулярного) обозначим через $\mathscr{A}_0$ множество всех функций f на Ω, обладающих следующими двумя свойствами:

(i) производная f' абсолютно непрерывна и $f'' \in \mathscr{L}_2(\Omega)$;

(ii) f имеет компактный носитель, содержащийся во внутренности Ω.

Очевидно, что $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$. Простое, но полезное наблюдение состоит в том: что для всякой функции $f \in \mathscr{A}_0$ существуют такие α, β, $a > \alpha < \beta < b$, что носитель f содержится в $[\alpha, \beta]$ и, стало быть, $f(\alpha) = f'(\alpha) = f(\beta) = f'(\beta) = 0$.

10.4.8. Определение. Для любого формального оператора l (регулярного или сингулярного) положим $D(L_0) = \mathscr{A}_0$, $D(L') = \mathscr{A}$ и $L_0 f = lf$, $L'f = lf$ на $D(L_0)$ и $D(L')$ соответственно.

Заметим, что в отличие от регулярного случая $D(L')$ зависит от l, если l сингулярен. Нужен какой-то аналог леммы 10.4.3, связывающий l с L_0 и L'. Здесь возникают некоторые дополнительные хлопоты с интерпретацией $[f, g]_a^b$, и мы начнем с той части результата, в которой эта величина не фигурирует.

10.4.9. Лемма. *Для любого l (регулярного или сингулярного) $L_0 \subset L'$ и*

$$(L_0 f, g) = (f, L'g) \quad (f \in D(L_0),\ g \in D(L')). \tag{10.4.3}$$

Оператор L_0 симметричен.

Доказательство. Область $D(L_0)$ содержит $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ и потому плотна (теорема 2.5.6). Пусть $f \in D(L_0)$, и пусть $[\alpha, \beta]$ — компактный интервал, содержащий носитель f и содержащийся во внутренности Ω. Тогда f и f' обращаются в нуль в точках α и β, и член $[f, g]_\alpha^\beta$ в формуле Грина (10.3.3) равен нулю. Отсюда следует равенство (10.4.3), а из него — симметричность L_0. □

10.4.10. Определение. Для любого l (регулярного или сингулярного) положим $L = \bar{L}_0$.

То что это определение согласуется с определением 10.4.2, вытекает из приводимой ниже теоремы (поскольку в обоих случаях L — замкнутый оператор с сопряженным L').

10.4.11. Теорема. *Пусть l — (регулярный или сингулярный) формально самосопряженный оператор, удовлетворяющий условиям определения* 10.3.4. *Тогда оператор L_0 симметричен, L является замкнутым симметрическим оператором с сопряженным $L^* = L_0^* = L'$ и $L'^* = L = \bar{L}_0$.*

Доказательство. Поскольку L, по определению,— замыкание L_0, единственное, что нуждается в доказательстве,— это равенство $L_0^* = L'$. В силу (10.4.3) и определения сопряженного оператора, $L' \subset L_0^*$, поэтому достаточно показать, что $L' \supset L_0^*$. Идея доказательства состоит в том, чтобы применить результаты для регулярного случая, воспользовавшись тем наблюдением, что l регулярен на любом компактном интервале Δ, содержащемся во внутренности Ω. Пусть L_Δ, L'_Δ — соответствующие операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2(\Delta)$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ (см. определение 10.4.2). Для всякой функции f на Ω через f_Δ будем обозначать ее сужение на Δ.

Возьмем произвольное $f \in D(L_0^*)$. По определению сопряженного оператора существует такое $g \in \mathscr{L}_2(\Omega)$, что

$$(L_0 h, f) = (h, g) \quad (h \in D(L_0)). \tag{10.4.4}$$

Зафиксируем какое-нибудь Δ, и пусть носители функций h лежат в Δ. Тогда h и h' обращаются в нуль в концевых точках Δ, а значит, $h \in D(L_\Delta)$, и (10.4.4) принимает вид

$$(L_\Delta h, f_\Delta)_\Delta = (h, g'_\Delta)_\Delta.$$

По определению сопряженного оператора $f_\Delta \in D(L^*_\Delta)$ и $L^*_\Delta f_\Delta = g_\Delta$. Но $L^*_\Delta = L'_\Delta$ (теорема 10.4.6). Следовательно, $f_\Delta \in D(L'_\Delta)$, и ввиду произвольности Δ производная f' абсолютно непрерывна на Ω. Далее, $L'_\Delta f_\Delta = g_\Delta$ в $\mathscr{L}_2(\Delta)$, а потому почти всюду. Значит, $(lf)_\Delta = g_\Delta$ п. в. и, в силу произвольности L, $lf = g$ п. в. Таким образом, $lf = g \in \mathscr{L}_2(\Omega)$ и, следовательно, $f \in \mathscr{A} = D(L')$. $\square$

Последнее, что нам еще требуется в сингулярном случае, — это явное выражение для билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из определения 10.2.7; оно получается обобщением соотношения (10.4.1). То что приводимое ниже определение разумно, вытекает из приводимой вслед за ним леммы.

10.4.12. Определение. Пусть l — произвольный формальный оператор (регулярный или сингулярный). Для f, $g \in D(L')$ положим

$$[f, g]^b = \lim_{x \to b-} [f, g](x), \quad [f, g]_a = \lim_{x \to a+} [f, g](x),$$

$$[f, g]_a^b = [f, g]^b - [f, g]_a.$$

10.4.13. Лемма. *Для произвольного l (регулярного или сингулярного) выписанные выше пределы существуют и конечны, если $f, g \in D(L')$, и в этом случае*

$$\langle f, g \rangle = (L'f, g) - (f, L'g) = [f, g]_a^b.$$

Доказательство. Пусть $a < \alpha < x < b$. Тогда по формуле Грина (10.4.3)

$$\int_\alpha^x (\bar{g} lf - f \overline{lg})\, dy = [f, g](x) - [f, g](\alpha).$$

В силу определения $D(L')$ каждая из функций f, g, lf, lg принадлежит $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Поэтому предел интеграла в левой части при $x \to b$ — существует и конечен. $\square$

10.4.14. Определение. Пусть l — регулярный или сингулярный формальный оператор, и пусть задана функция $g \in D(L')$. Условие $[f, g]_a^b = 0$ будет называться **граничным условием** на функцию $f \in D(L')$. Эта терминология естественна, поскольку в случае регулярных l мы, очевидно, получаем граничные условия обычного вида.

10.4.15. Лемма. *Пусть l — формально самосопряженный оператор из определения* 10.3.4. *Если он регулярен, то L_0 имеет индексы дефекта* $(2, 2)$, *а если сингулярен, то* (m, m), *где* $m = 0$, 1 *или* 2.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2m}$ — произвольный базис в $N_+ \otimes N_-$. Функция f из $D(L')$ принадлежит $D(L)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет граничным условиям

$$[f, \varphi_i]_a^b = 0 \quad (i = 1, \ldots, 2m).$$

Доказательство. Поскольку коэффициенты l вещественны, то $l\varphi = i\varphi \Leftrightarrow l\bar{\varphi} = -i\bar{\varphi}$. Следовательно, $n_+ = n_-$. Так как l — оператор второго порядка, то у уравнения $l\varphi = i\varphi$ имеется самое большее два линейно-независимых решения. Если l регулярен, то оба эти решения лежат в $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Утверждение об области $D(L)$ вытекает из лемм 10.4.13 и 10.2.9. $\square$

Ниже будут построены примеры сингулярных l, для которых $m = 0$, 1 и 2. Таким образом, и само число граничных условий, нужных для того, чтобы определить $D(L)$, зависит от поведения коэффициентов и от Ω, и природа этих условий более сложна. Разумеется, в случае когда l регулярен, лемма дает четыре граничных условия из определения 10.4.2.

10.5. Построение самосопряженных расширений

Теперь мы полностью завершили приготовления к тому, чтобы применить развитую выше теорию и получить самосопряженные расширения для формально самосопряженных операторов l второго порядка. Заключительный результат предыдущего параграфа утверждает, что такие расширения всегда существуют, и согласно теореме 10.2.18 их области определения получаются сужением области $D(L')$ при помощи ровно m условий, где (m, m) — индексы дефекта оператора L_0; в силу леммы 10.4.13 эти условия суть граничные условия из определения 10.4.14. Если l регулярен, то эти условия выражаются через линейные комбинации значений функции и ее производной в концевых точках и имеют знакомый нам вид. Если l сингулярен, но одна из концевых точек, скажем a, регулярна, то в некоторых случаях бывает достаточно наложить граничные условия лишь в точке a, и они оказываются не более сложными, чем для регулярных l. Однако в общем случае приходится рассматривать условия в сингулярных концевых точках, и туда будут входить уже не просто значения функций, а их пределы.

Техническая сторона дела, связанная с применением теоремы 10.2.18, намного упрощается, если произвести удачный выбор функций $f_1, \ldots, f_n$, и именно в этом месте полезна лемма 10.2.17. Иллюстрируем метод на следующем простом примере для оператора первого порядка.

10.5.1. Пример. Возьмем $\Omega = [0, 1]$ и $l = id/dx$, и пусть $\mathscr{A}$ — это множество всех абсолютно непрерывных функций с производными из $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Если $D(L) = \{f: f \in \mathscr{A}, f(0) = f(1) = 0\}$ и $Lf = lf$ на $D(L)$, то $D(L^*) = \mathscr{A}$. Решениями уравнений $lf = \pm if$ служат $\exp(\pm x)$ соответственно; оба решения лежат в $D(L^*)$. Следовательно, индексы дефекта равны (1, 1), и L обладает самосопряженными расширениями. Найти все такие расширения M можно с помощью конструкции, описанной в теореме 10.2.18.

Поскольку $n = 1$, $D(M)$ представляет собой множество всех функций f из $D(L^*)$, удовлетворяющих условию $\langle f, f_1 \rangle = 0$, где f_1 — некоторая линейно-независимая относительно $D(L)$ функция с $\langle f_1, f_1 \rangle = 0$, и, обратно, всякий такой выбор f_1 ведет к некоторому самосопряжённому M. В соответствии с данным в примере 10.2.8 выражением для $\langle \cdot, \cdot \rangle$, указанные выше условия выглядят так:

$$f(1)\bar{f}_1(1) - f(0)\bar{f}_1(0) = 0, \quad f_1(1)\bar{f}_1(1) - f_1(0)\bar{f}_1(0) = 0. \quad (10.5.1)$$

В качестве h_1, h_2 можно взять просто $h_1(x) = x$, $h_2(x) = 1 - x$. Действительно, $h_1(0) = 0$ и $h_2(1) = 0$; коротенькое вычисление показывает, что $\langle h_1, h_1 \rangle = -\langle h_2, h_2 \rangle = -1$ и $\langle h_1, h_2 \rangle = 0$; значит, в силу леммы 10.2.17, h_1 и h_2 линейно-независимы относительно $D(L)$. Следовательно, $f_1 = \bar{\alpha} h_1 + \bar{\beta} h_2$ при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Поскольку функция f_1 обязана удовлетворять условиям (10.5.1), то $|\alpha| = |\beta|$. Таким образом, $\alpha/\beta = e^{i\theta}$ при некотором $\theta \in \mathbb{R}$, и граничное условие, дающее самосопряженное расширение, должно иметь вид $f(1) = e^{i\theta} f(0)$ при некотором $\theta \in \mathbb{R}$. Это подтверждает заключения, к которым мы пришли в примере 6.7.9 на основе формальных соображений, и доказывает, кроме того, что *всякое* самосопряженное расширение получается таким путем.

Ниже приводится основной результат о построении самосопряженных расширений для операторов l второго порядка; для его доказательства достаточно просто положить $\langle f, g \rangle = [f, g]_a^b$ в теореме 10.2.18.

10.5.2. Теорема. *Пусть l — (регулярный или сингулярный) формально самосопряженный оператор второго порядка из определения* 10.3.4. *Тогда L_0 имеет равные индексы дефекта (m, m), причем $m \leqslant 2$, и потому обладает самосопряженными расширениями.*

Если $m = 0$, то $\bar{L}_0 = L = L'$ и замыкание оператора L_0 является его единственным самосопряженным расширением. В случае $m \neq 0$ пусть $f_1, \ldots, f_m$ — функции из $D(L')$, линейно-независимые относительно $D(L_0)$ и удовлетворяющие условиям

$$[f_i, f_j]_a^b = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, m). \quad (10.5.2)$$

Пусть, далее, $\mathscr{M}$ — линейное подпространство, состоящее из всех $f \in D(L')$, для которых

$$[f, f_i]_a^b = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \quad (10.5.3)$$

Тогда $\mathscr{M}$ служит областью определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0. Обратно, всякое самосопряженное расширение оператора L_0 получается таким образом, и без потери общности можно считать, что f_i выбраны из числа линейных комбинаций произвольных $2m$ функций, принадлежащих $D(L')$ и линейно-независимых относительно $D(L)$.

Тот факт, что L_0 обладает самосопряженными расширениями, является следствием предположенного вида оператора l; имеются формальные операторы, для которых самосопряженных расширений не существует (см. пример 10.5.5).

Теперь мы легко можем разделаться с регулярным случаем.

10.5.3. Теорема. *Пусть оператор l из определения* 10.3.4 *регулярен. Предположим, что комплексные числа* α_i, α_i', β_i, β_i', $i=1, 2$, *удовлетворяют следующим условиям*:

(i) 4-*мерные векторы* $(\alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i')$ *линейно-независимы*;

(ii) $p(b)\left(\overline{\beta_i'}\beta_j - \overline{\beta_i}\beta_j'\right) - p(a)\left(\overline{\alpha_i'}\alpha_j - \overline{\alpha_i}\alpha_j'\right) = 0 \quad (i, j = 1, 2).$ (10.5.4)

Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство всех функций из $D(L')$, удовлетворяющих граничным условиям

$$p(b)\left(\beta_i' f'(b) - \beta_i f(b)\right) - p(a)\left(\alpha_i' f'(a) - \alpha_i f(a)\right) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Тогда $\mathscr{M}$ служит областью определения некоторого самосопряженного расширения оператора L. Обратно, каждое самосопряженное расширение оператора L может быть получено таким образом.

Доказательство. По лемме 10.4.5 существуют функции f_1, f_2 из $D(L')$, для которых $f_i(a) = \overline{\alpha_i'}$, $f_i'(a) = \overline{\alpha_i}$, $f_i(b) = \overline{\beta_i'}$, $f_i'(b) = \overline{\beta_i}$, $i = 1, 2$. Наш результат устанавливается поэтому применением теоремы 10.5.2: условие (i) обеспечивает нужную линейную независимость, а (ii) — это в точности (10.5.2). □

10.5.4. Пример. Пусть l регулярен. Возможные граничные условия удобно разделить на два класса. К первому, более простому относятся *разделенные условия*, характерные тем, что в каждое из условий входят значения f и f' лишь в какой-нибудь одной концевой точке. Прочие условия называются *смешанными.*

Разделенные условия. Возьмем $\alpha_1 = \alpha_1' = \beta_2 = \beta_2' = 0$. Поскольку l регулярен, $p(b) \neq 0$. Поэтому условие (10.5.4) при $i = j = 1$ требует, чтобы $\overline{\beta_1'}\beta_1$ было вещественным, а согласно условию (i) теоремы β_1 и β_1' не могут одновременно равняться нулю. Аналогичное рассуждение применимо к α_2, α_2'. При $i \neq j$ условие (10.5.4) выполняется тождественно. Из сказанного следует, что самые общие разделенные граничные условия имеют вид

$$f(b)\cos\theta - f'(b)\sin\theta = 0, \quad f(a)\cos\varphi - f'(a)\sin\varphi = 0$$

при некоторых вещественных θ, φ.

Смешанные условия. Рассмотрим для примера условия вида $f(a) = \gamma f(b)$, $f'(a) = \delta f'(b)$, получаемые при выборе $\alpha_1 = \alpha_2' = 1$, $\beta_1 = \gamma p(a)/p(b)$, $\beta_2' = \delta p(a)/p(b)$, $\alpha_1' = \alpha_2 = \beta_1' = \beta_2 = 0$. Единственное условие теоремы, не выполняющееся автоматически,— это условие (ii) при $i \neq j$; непосредственное вычисление показывает, что оно выполняется тогда и только тогда, когда $\gamma\bar{\delta} = p(b)/p(a)$. Хорошо известный пример — оператор $l = -d^2/dx^2$ с периодическими граничными условиями $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b)$.

Обсуждение более интересного сингулярного случая начнем с рассмотрения двух простых примеров.

10.5.5. Пример. Возьмем $l = id/dx$ (видоизменения, которые надо внести в нашу теорию в случае операторов l первого порядка, совершенно очевидны). В примере 10.1.1 остался открытым вопрос, можно ли устроить из l какой-нибудь самосопряженный оператор, если $\Omega = [0, \infty)$. Ответ легко может быть теперь получен проверкой размерностей дефектных подпространств $N_\pm$. Решениями уравнений $lf = \pm if$ служат $\exp(\pm x)$ соответственно, и, поскольку $\exp(-x)$ принадлежит $\mathscr{L}_2(0, \infty)$, а $\exp(x)$ нет, индексы дефекта равны $(0, 1)$. Отсюда немедленно вытекает, что L_0 *не имеет никаких* самосопряженных расширений.

Если $\Omega = (-\infty, \infty)$, то $D(L')$ есть множество всех абсолютно непрерывных f, таких что f, $f' \in \mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$. Поскольку ни одна из функций $\exp(\pm x)$ не принадлежит $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$, индексы дефекта равны $(0, 0)$. Таким образом, $\bar{L}_0 = L = L'$ — уже само замыкание L_0 оказывается самосопряженным, и в действительности оно является единственным самосопряженным расширением оператора L_0. Ниже мы получим классический результат о преобразовании Фурье применением спектральной теоремы к L'.

10.5.6. Пример. Простейший формальный оператор второго порядка — это $l = -d^2/dx^2$. Поскольку из теоремы 10.5.2 нам известно, что индексы дефекта равны между собой, достаточно рассмотреть лишь уравнение $-f'' = if$. Оно имеет решения $\exp(\lambda_1 x)$, $\exp(\lambda_2 x)$, где $\lambda_1 = \exp(-i\pi/4)$, $\lambda_2 = \exp(-5i\pi/4)$.

Предположим сначала, что $\Omega = (-\infty, \infty)$. В этом случае ни одно из указанных решений не принадлежит $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ и индексы дефекта равны $(0, 0)$. Таким образом, единственным самосопряженным расширением оператора L_0 является его замыкание и уже сам оператор L' самосопряжен.

В случае $\Omega = [0, \infty]$ второе решение принадлежит $\mathscr{L}_2(0, \infty)$, а первое нет. Индексы дефекта равны $(1, 1)$, а самосопряженные расширения получаются наложением одного граничного условия.

Ясно, что самая простая ситуация — это когда индексы дефекта равны $(0, 0)$, ибо тогда уже сам L' самосопряжен, и никаких граничных условий рассматривать не надо. В ряде важных случаев (например, в разобранном выше случае $\Omega = [0, \infty)$) одна из концевых точек является регулярной. Проводимое ниже исследование показывает, что и здесь ситуация иногда оказывается простой.

10.5.7. Лемма. *Предположим, что a — регулярная концевая точка формального оператора l из определения* 10.3.4. *Тогда L_0 имеет индексы дефекта* $(1, 1)$ *или* $(2, 2)$.

Доказательство. Возьмем произвольное c, такое что $a < c < b$, и пусть h_1, h_2 — вещественнозначные функции из $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ с носителями в $[a, c]$ и с $h_1(a) = 1$, $h_1'(a) = 0$, $h_2(a) = 0$, $h_2'(a) = 1$. Поскольку a регулярна, $h_1, h_2 \in D(L')$. Учитывая тот факт, что h_1 и h_2 обращаются в нуль на (c, b), легко проверить, что

$$\det\left([h_i, h_j]_a^b\right) = -p^2(a) \neq 0.$$

Следовательно, по лемме 10.4.17, h_1 и h_2 линейно-независимы относительно $D(L_0)$ и $n_+ + n_- \geqslant 2$. □

Это — *альтернатива Вейля.* Возможности $(1, 1)$ и $(2, 2)$ для индексов дефекта известны соответственно как случай *предельной точки* и случай *предельного круга*; эта терминология связана с методами, используемыми в классической теории. В случае предельной точки граничное условие истолковывается очень просто.

10.5.8. Лемма. *Пусть a — регулярная концевая точка оператора l (всё того же). Предположим, что L_0 имеет индексы дефекта* $(1, 1)$. *Пусть M — некоторое самосопряженное расширение оператора L_0. Тогда найдется вещественное число θ, такое что $D(M)$ есть подмножество в $D(L')$, состоящее из всех f, для которых*

$$f(a)\cos\theta - f'(a)\sin\theta = 0. \tag{10.5.5}$$

Обратно, всякое такое сужение области $D(L')$ служит областью определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0.

Доказательство. Поскольку L_0 имеет индексы дефекта $(1, 1)$, область определения любого самосопряженного расширения определяется одним граничным условием, скажем $[f, f_1]_a^b = 0$, и в силу теоремы 10.5.2 можно без потери общности считать, что $f_1 =$

$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C})$, где h_1, h_2 — функции, определенные в доказательстве предыдущей леммы. Так как h_1 и h_2 обращаются в нуль на (c, b), то это условие имеет вид $\bar{\alpha}_1 f'(a) - \bar{\alpha}_2 f(a) = 0$. Однако f_1 должно удовлетворять условию (10.5.2), т. е. $[f_1, f_1]_a^b = 0$. Несложное вычисление показывает, что последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \bar{\alpha}_2$ вещественно, откуда и следует (10.5.5). □

10.5.9. Пример. Как мы видели в примере 10.5.6, для $l = -d^2/dx^2$ и $\Omega = [0, \infty]$ область определения самосопряженного расширения задается одним граничным условием, ибо индексы дефекта равны (1, 1). Поскольку 0 — регулярная концевая точка, наша последняя лемма показывает, что это условие имеет вид

$$f(0)\cos\theta - f'(0)\sin\theta = 0$$

при некотором вещественном θ. Применение спектральной теоремы дает cos-преобразование, если $\theta = \pi/2$, и sin-преобразование, если $\theta = 0$, а при других значениях θ получаются менее известные преобразования (см. пример 10.6.4).

10.5.10. Пример. Пусть l — оператор Бесселя:

$$lf(x) = -f''(x) + x^{-2}\left(\nu^2 + \frac{1}{4}\right) f(x),$$

и $\Omega = (0, 1]$. По поводу используемых ниже обозначений и свойств бесселевых функций см., например, книгу Уиттекера и Ватсона [1927]. Решениями уравнения $lf = if$ служат $x^{1/2} J_\nu(x\lambda^{1/2})$ и $x^{1/2} Y_\nu(x\lambda^{1/2})$, где $\lambda^{1/2} = \exp(-i\pi/4)$, а J_ν и Y_ν — бесселевы функции первого и второго рода соответственно. Первое решение ограничено на $(0, 1]$ для всех $\nu \geqslant 0$, второе же вблизи начала пропорционально $x^{1/2-\nu}$ (или $x^{1/2}\ln x$ для $\nu = 0$). Таким образом, для $\nu \geqslant 1$ лишь одно из решений принадлежит $\mathscr{L}_2(0, 1)$ и индексы дефекта равны (1, 1), в то время как для $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ оба решения принадлежат $\mathscr{L}_2(0, 1)$ и индексы дефекта равны (2, 2). В первом случае, как показывает лемма 10.5.8, самосопряженные расширения получаются наложением одного-единственного условия

$$f(1)\cos\theta - f'(1)\sin\theta = 0 \quad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{10.5.6}$$

При $\theta = 0$ спектральная теорема дает известный ряд Фурье — Бесселя, а при других θ мы приходим к так называемому ряду Фурье — Дини.

В случае индексов дефекта (2, 2) требуется дополнительное граничное условие, и по аналогии с положением дел для регулярных l в этом условии должна, по-видимому, фигурировать сингулярная концевая точка. Чтобы разобраться с этим случаем, а также с ситуациями, в которых обе концевые точки сингулярны, нам надо теперь обсудить вопрос о граничных условиях в сингулярных концевых точках. Вообще говоря, анализ здесь носит менее непосредственный характер. Осложнений возникает поменьше, когда граничные условия разделены; это понятие является обобщением соответствующего понятия для регулярных l. Почти во всех приложениях граничные условия оказываются разделенными.

10.5.11. Определение. Пусть g — заданная функция из $D(L')$. Говорят, что граничное условие $[f, g]_a^b = 0$ является условием в (точке) a, если $[f, g]^b = 0$ для всех $f \in D(L')$; аналогичное словоупотребление используется и для другой концевой точки. Заметим, что если g равна нулю на (c, b), то мы получаем условие в a. Граничное условие называется **вещественным**, если $[\bar{f}, g]_a^b = \overline{[f, g]_a^b}$ для всех $f \in D(L')$. Систему граничных условий называют **распадающейся** (а сами граничные условия — **разделенными**), если каждое из входящих в него условий есть либо условие в a, либо условие в b.

10.5.12. Пример. Для иллюстрации процедуры применения граничного условия в сингулярной концевой точке рассмотрим оператор Бесселя из примера 10.5.10 при $0 < \nu < 1$; случай $\nu = 0$ разбирается в общем так же, хотя имеются некоторые отличия в деталях, связанные с наличием логарифмической особенности у второго решения.

Решениями уравнения $lf = if$ служат функции $x^{1/2} J_{\pm\nu}(x\lambda^{1/2})$, где $\lambda^{1/2} = \exp(i\pi/4)$. Вблизи начала они пропорциональны

$$x^{\pm\nu+1/2}[1 + O(x^2)].$$

Пусть h_1, h_2 — вещественнозначные функции из $\mathscr{C}^\infty((0, 1])$ с носителями в $[0, 1/2]$, на интервале $(0, 1/4)$ равные $x^{\pm\nu+1/2}$ соответственно. Несложное вычисление показывает, что $lh_1 = lh_2 = 0$ на $(0, 1/4)$, откуда следует, что h_1, $h_2 \in D(L')$. Далее, $[h_1, h_1]_0^1 = [h_2, h_2]_0^1 = 0$ и

$$[h_1, h_2]_0^1 = [h_1, h_2]_0 = \lim_{m \to 0+} \{h_1(x) h_2'(x) - h_1'(x) h_2(x)\} = 2\nu. \qquad (10.5.7)$$

Что касается другой концевой точки, то возьмем в качестве h_3, h_4 вещественнозначные функции из $\mathscr{C}^\infty((0, 1])$ с носителями в $[1/2, 1]$ и с $h_3(1) = 1$, $h_3'(1) = 0$, $h_4(1) = 0$, $h_4'(1) = 1$. Наиболее общим выбором функций f_1, f_2, ведущим к разделенным граничным условиям, будет, очевидно, $f_1 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$, $f_2 = \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4$, и, используя (10.5.7) и лемму 10.2.17, легко проверить, что f_1 и f_2 линейно-независимы относительно $D(L_0)$, если хотя бы одно из чисел α_1, α_2 и хотя бы одно из чисел α_3, α_4 ненулевые. Условие (10.5.2) удовлетворяется тогда и только тогда, когда $\alpha_1\bar{\alpha}_2$ и $\alpha_3\bar{\alpha}_4$ вещественны, и общие разделенные граничные условия имеют, таким образом, вид $[f, f_1]_0 = 0$, $[f, f_2]^1 = 0$ с $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Условие в точке 1 — это как раз условие (10.5.6) из примера 10.5.9. Что же касается точки 0, то, например, выбор $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ дает такое условие в нуле:

$$\lim_{x\to 0+} \{x^{\nu+1/2}f'(x) - (\nu + 1/2)\, x^{\nu-1/2}f(x)\} = 0. \tag{10.5.8}$$

Наконец, предположим, что обе концевые точки сингулярны. Прямое вычисление индексов дефекта зачастую связано с утомительной возней со специальными функциями, поскольку надо знать поведение решения уравнения $lf = if$ в обеих концевых точках. Следующий результат (см. Данфорд и Шварц [1963, с. 469]) сводит проблему к случаю операторов с одной регулярной концевой точкой, что намного упрощает дело.

10.5.13. Лемма. *Пусть l — формальный оператор второго порядка из определения* 10.3.4. *Пусть $a < c < b$, и пусть L_{0a}, L_{0b} — симметрические операторы, ассоциированные с оператором l на $(a, c]$ и $[c, b)$ соответственно. Пусть, далее, $n_\pm$, $a_{\pm a}$, $n_{\pm b}$ обозначают индексы дефекта операторов L, L_{0a}, L_{0b} соответственно. Тогда $n_\pm = n_{\pm a} + n_{\pm b} - 2$.*

10.5.14. Пример. Снова рассмотрим оператор Бесселя из примера 10.5.10, но на этот раз для $\Omega = (0, \infty)$. Теперь обе концевые точки сингулярны. Вычислим индексы дефекта. Из проведенного выше анализа ясно, что (в обозначениях последней леммы) $n_{+0} = 1$ при $\nu \geqslant 1$ и 2 при $0 \leqslant \nu < 1$. Из асимптотических формул для бесселевых функций следует, что функции $x^{1/2}[J_\nu(x\lambda^{1/2}) \pm iY_\nu(x\lambda^{1/2})]$ пропорциональны соответственно $\exp(\pm ix\lambda^{1/2})$ при $x \to \infty$. Следовательно, $n_{+\infty} = 1$. Поэтому из леммы вытекает, что индексы дефекта равны $(0, 0)$ при $\nu \geqslant 1$ и $(1, 1)$ при $0 \leqslant \nu < 1$.

При $\nu \geqslant 1$ единственным самосопряженным расширением оператора L_0 является его замыкание, и никаких граничных условий не требуется. При $0 < \nu < 1$ требуется одно граничное условие, а именно условие в нуле, как это видно из примера 10.5.12, если заметить, что функции h_1, h_2 линейно-независимы относительно $D(L_0)$. Поэтому всякое самосопряженное расширение задается при помощи некоторой линейной комбинации этих функций, и расширение самого общего вида получается, таким образом, наложением одного-единственного условия $[f, f_1] = 0$, где $f_1 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$. При $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ это условие есть не что иное, как (10.5.8).

Очевидно, что индексы дефекта играют центральную роль при построении самосопряженных расширений. Их легко найти, когда известны явные формулы для решений уравнения $lf = if$, но если только коэффициенты оператора l не самые простые, вычисления резко усложняются, поскольку приходится иметь дело со специальными функциями. По поводу интересной качественной теории, которая была развита в связи с этой проблемой, см. Данфорд и Шварц [1963, § 13.6] или Наймарк [1969, гл. 7].

10.6. Разложения по обобщенным собственным функциям

Наши приготовления окончательно завершены, и мы можем теперь показать, как разложения по обобщенным собственным функциям, отвечающие формальным обыкновенным дифференциальным операторам, получаются применением спектральной теоремы к ассоциированным самосопряженным операторам. Анализ основан на следующих формулах (теоремы 9.6.1 и 9.6.4) для спектрального семейства $P(\lambda_1, \lambda_2)$ самосопряженного оператора M:

$$\lim_{\lambda\to\infty} P(-\lambda, \lambda) f = f \quad (f \in \mathscr{H}), \tag{10.6.1}$$

$$(P(\lambda_1, \lambda_2) f, g) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} ([R(\lambda - i\varepsilon; M) - R(\lambda + i\varepsilon; M)] f, g)\, d\lambda, \tag{10.6.2}$$

вместе с явным представлением резольвенты $R(\lambda; M)$ при $\operatorname{Im} > 0$ в виде интегрального оператора с ядром — функцией Грина. Поскольку M самосопряжен, то спектр $\sigma(M)$ веществен и $R(\lambda; M)$ является аналитической функцией от λ в верхней и в нижней полуплоскостях и допускает аналитическое продолжение на те части вещественной оси, которые лежат в $\rho(M)$. Следовательно, проектор $P(\lambda_1, \lambda_2)$ отличен от нуля, только если интервал (λ_1, λ_2) содержит точки из $\sigma(M)$. Другими словами, ненулевой вклад в интеграл в (10.6.2) вносят лишь точки спектра $\sigma(M)$. Эти точки разбиваются на два основных класса. Во-первых, $R(\lambda; M)$ может иметь изолированные полюсы в некоторых точках вещественной оси; в этом случае интеграл вычисляется по теореме о вычетах. Во-вторых, $R(\lambda; M)$ может иметь разрывы вдоль некоторых участков вещественной оси, и тогда для вычисления интеграла используется надлежащий предельный переход. Эти два класса отвечают точечному и непрерывному спектрам соответственно.

Граничные условия, встречающиеся в приложениях, почти всегда разделены, и ниже мы рассматриваем лишь самосопряженные операторы, определяемые разделенными граничными условиями. Выгода от такого ограничения та, что можно дать простую формулу для резольвенты. В следующей теореме, заимствованной из книги Данфорда и Шварца [1963, с. 495], единственность понимается как единственность с точностью до мультипликативной постоянной. Далее, если для определения M не требуется никакого граничного условия в a, то функция φ в этой теореме — это просто единственное решение в $\mathscr{L}_2(a, c)$ уравнения $l\varphi = \lambda\varphi$, и аналогично обстоит дело с ψ.

10.6.1. Теорема. *Пусть l — формально самосопряженный оператор второго порядка из определения* 10.3.4, *и пусть M — самосопряженное расширение оператора L_0, полученное с помощью некоторой распадающейся системы вещественных граничных условий. Предположим, что* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, *и возьмем какое-нибудь c, удовлетворяющее условию $a < c < b$. Тогда существует в точности одно решение φ уравнения $l\varphi = \lambda\varphi$, принадлежащее $\mathscr{L}_2(a, c)$ и удовлетворяющее произвольному граничному условию в a, и в точности одно решение ψ уравнения $l\psi = \lambda\psi$, лежащее в $\mathscr{L}_2(c, b)$ и удовлетворяющее произвольному граничному условию в b. Далее,*

$$R(\lambda;\ M)\, g = \int_a^b k(x,\ y;\ \lambda)\, g(y)\, dy \quad (g \in \mathscr{L}_2(\Omega)),$$

где

$$k(x,\ y;\ \lambda) = \begin{cases} \gamma\varphi(x,\ \lambda)\,\psi(y,\ \lambda) & \text{при} \quad x < y, \\ \gamma\varphi(y,\ \lambda)\,\psi(x,\ \lambda) & \text{при} \quad x > y, \end{cases}$$

$\gamma = -1/[p(x)\, W]$, *W — вронскиан функций φ и ψ. Ядро k симметрично, и*

$$k(x,\ y;\ \bar{\lambda}) = \overline{k(x,\ y;\ \lambda)}. \tag{10.6.3}$$

Если L_0 имеет индексы дефекта $(2, 2)$, *то оператор $R(\lambda; M)$ компактен.*

В случае когда индексы дефекта равны $(2, 2)$, формула разложения может быть получена прямо из теории компактных самосопряженных операторов, развитой в § 7.5. Действительно, тогда, согласно сформулированной выше теореме, оператор $(\lambda I - M)^{-1}$ компактен для всякого λ с $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, и отсюда нетрудно вывести, что то же верно и для *некоторого* вещественного λ. Применение теоремы 7.5.4 показывает теперь, что из собственных функций оператора $\lambda I - M$, а значит, и оператора M можно составить базис в $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Этот результат решает дело для всех регулярных l (см. пример 7.5.5); что еще важнее, так это то, что, хотя большинство стандартных систем ортогональных функций возникает из сингулярных l, полноту их можно вывести непосредственно из теоремы 7.5.4. Поскольку применимость ее ограничена случаем индексов дефекта $(2, 2)$, мы не следуем здесь этому подходу и разложения по обобщенным собственным функциям выводим при помощи спектральной теоремы. Для иллюстрации применяемой процедуры рассмотрим сперва два примера минимальной сложности.

10.6.2. Пример (разложение в ряд Фурье по синусам). Возьмем $l = -d^2/dx^2$ и $\Omega = [0, \pi]$. Пусть M — самосопряженное расширение оператора L_0, определяемое граничными условиями $f(0) = f(\pi) = 0$. По теореме 10.6.1, для $\operatorname{Im}\lambda > 0$

$$k(x, y; \lambda) = \frac{\sin \lambda^{1/2}(x-\pi) \sin \lambda^{1/2} y}{\lambda^{1/2} \sin \lambda^{1/2} \pi} \quad \text{при} \quad x > y;$$

при $x < y$ функция k определяется по симметрии, а для $\operatorname{Im}\lambda < 0$ — по формуле (10.6.3). Очевидно, что k можно аналитически продолжить на всю плоскость λ, за исключением нулей функции $\sin \lambda^{1/2}\pi$, где будут полюсы.

Следующий шаг — расписываем (10.6.2). Меняя порядок интегрирования, что законно ввиду ограниченности Ω, получаем

$$(P(\lambda_1, \lambda_2) f, g) = \int_0^\pi \bar{g}(x)\, dx \int_0^\pi f(y)\, dy$$

$$\times \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2+\delta} [k(x, y; \lambda - i\varepsilon) - k(x, y; \lambda + i\varepsilon)]\, d\lambda. \qquad (10.6.4)$$

Если обозначить через Γ прямоугольник с вершинами $(\lambda_2 - \delta - i\varepsilon)$, $(\lambda_2 - \delta + i\varepsilon)$, $(\lambda_1 + \delta + i\varepsilon)$, $(\lambda_1 + \delta - i\varepsilon)$, то

$$\lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\lambda_2+\delta}^{\lambda_2-\delta} [k(x, y; \lambda - i\varepsilon) - k(x, y; \lambda + i\varepsilon)]\, d\lambda$$

$$= \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\Gamma k(x, y; \lambda)\, d\lambda,$$

поскольку вклады от коротких сторон Γ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, и непосредственный подсчет с помощью теоремы о вычетах дает

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma k(x, y; \lambda)\, d\lambda = \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda_1 < n^2 < \lambda_2} \sin nx \sin ny.$$

Для любой функции $f \in \mathscr{L}_2(\Omega)$ положим

$$\hat{f}(n) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\pi \sin ny\, f(y)\, dy \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

и пусть $\hat{f}$ обозначает последовательность $\hat{f}(1)$, $\hat{f}(2)$, ... Во введенных обозначениях (10.6.4) принимает вид

$$(P(\lambda_1, \lambda_2) f, g) = \sum_{\lambda_1 < n^2 < \lambda_2} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}. \tag{10.6.5}$$

Следовательно, ввиду (10.6.1), $\hat{f} \in l_2$ и

$$\| f \|^2 = \sum | \hat{f}(n) |^2 = \| [f] \|^2, \quad (f, g) = \sum \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = [f, g], \tag{10.6.6}$$

где $\| [\cdot] \|$ и $[\cdot, \cdot]$ — скалярное произведение и норма в l_2. Эти соотношения известны как *формула Парсеваля* (см. (1.5.9)) и *формула Планшереля* соответственно.

Теперь легко получить и само разложение в ряд Фурье. Действительно, если положить $\varphi_n(x) = (2/\pi)^{1/2} \sin nx$, то (10.6.5) можно переписать в виде

$$(P(\lambda_1, \lambda_2) f, g) = \Big(\sum_{\lambda_1 < n^2 < \lambda_2} \hat{f}(n) \varphi_n, g \Big),$$

и поскольку это верно для любой функции $g \in \mathscr{L}_2(\Omega)$, то мы заключаем, что

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{\lambda_1 < n^2 < \lambda_2} \hat{f}(n) \varphi_n.$$

Следовательно, в силу (10.6.1),

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin nx,$$

причем ряд сходится в $\mathscr{L}_2(\Omega)$.

В этом примере резольвента компактна, ядро резольвенты — мероморфная функция от λ, функции $(2/\pi)^{1/2} \sin nx$ — нормированные собственные функции оператора M и $\hat{f}(n)$ — коэффициенты Фурье по синусам. Легко показать, что отображение $f \longmapsto \hat{f}$ пространства $\mathscr{L}_2(\Omega)$ в l_2 сюръективно, и, таким образом, формула Планшереля выражает тот факт, что это отображение представляет собой изометрический изоморфизм.

10.6.3. Пример (*преобразование Фурье*). В предыдущем примере спектр был дискретный. Теперь рассмотрим оператор с непрерывным спектром. Пусть $l = id/dx$ и $\Omega = (-\infty, \infty)$. Тогда единственным самосопряженным расширением оператора L_0 служит его замыкание M (пример 10.5.5). Резольвента легко вычисляется:

$$R(\lambda; M) g(x) = \begin{cases} -i \int\limits_x^{\infty} g(y)\, dy & \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ i \int\limits_{-\infty}^{x} e^{i\lambda(y-x)} g(y)\, dy & \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda < 0. \end{cases}$$

Из-за того что область интегрирования бесконечна, появляются некоторые дополнительные трудности. Наша тактика будет заключаться в том, чтобы действовать первоначально в пространстве $\mathscr{L}_{20}(\Omega)$, состоящем из тех функций из $\mathscr{L}_2(\Omega)$, у которых носитель компактен, потому что тогда не возникает никаких проблем с переменой порядка интегрирования. Полученные результаты затем легко распространяются по непрерывности на всё $\mathscr{L}_2(\Omega)$, поскольку $\mathscr{L}_{20}(\Omega)$ плотно там. В силу (10.6.2), для $f, g \in \mathscr{L}_{20}(\Omega)$

$$(P(\lambda_1, \lambda_2)f, g) = \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2-\delta} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x)\,dx$$

$$\times\left\{ i\int_{-\infty}^{x} e^{i(\lambda-i\varepsilon)(y-x)} f(y)\,dy + i\int_{x}^{\infty} e^{i(\lambda+i\varepsilon)(y-x)} f(y)\,dy \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-x)} f(y)\,dy$$

(по теореме о мажорированной сходимости 2.4.11). Значит,

$$(P(\lambda_1, \lambda_2)f, g) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\lambda)\,d\lambda,$$

где

$$\hat{f}(\lambda) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y} f(y)\,dy.$$

Таким образом, в силу (10.6.1),

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\lambda)\,d\lambda, \tag{10.6.7}$$

откуда следует (берем $f = g$), что $\hat{f} \in \mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$. Следовательно, отображение $f \mapsto \hat{f}$ является изометрическим изоморфизмом $\mathscr{L}_{20}(\Omega)$ в $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$. Поскольку $\mathscr{L}_{20}(\Omega)$ плотно в $\mathscr{L}_2(\Omega)$, соображения непрерывности показывают, что полученные результаты справедливы и для всего $\mathscr{L}_2(\Omega)$, и, в частности,

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} e^{i\lambda x} f(x)\,dx$$

существует по норме $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Как и в предыдущем примере, с помощью (10.6.1) устанавливается формула обращения. Наконец, из соображений симметрии очевидно, что отображение $f \mapsto \hat{f}$ сюръективно и, значит, является изометрическим изоморфизмом $\mathscr{L}_2(\Omega)$ *на* $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$. Тем самым мы получили доказательство стандартной теоремы о преобразовании Фурье 2.6.1; соотношение (10.6.7) — это формула Планшереля.

Предыдущие два примера иллюстрируют анализ, лежащий в основе построения разложений по обобщенным собственным функциям. В двух последующих примерах мы ограничимся приведением формальной схемы такого построения, поскольку детали рассуждения проводятся аналогично.

10.6.4. Пример. Пусть $l = -d^2/dx^2$ и $\Omega = [0, \infty)$; выбор соответствующих граничных условий приводит к одному не очень известному преобразованию (по поводу его приложений см. задачу 10.11). Самосопряженные расширения получаются наложением граничного условия в нуле. Рассмотрим условие $f(0) + \alpha f'(0) = 0$ при некотором $\alpha > 0$. Согласно теореме 10.6.1, для того чтобы вычислить резольвенту, надо найти решение φ уравнения $l\varphi = \lambda\varphi$, удовлетворяющее этому граничному условию, и решение ψ, принадлежащее $\mathscr{L}_2(c, \infty)$. Для $\operatorname{Im} \lambda > 0$ имеем

$$\varphi(x, \lambda) = \sin(x\lambda^{1/2}) - \alpha\lambda^{1/2}\cos(x\lambda^{1/2}),$$

$$\psi(x, \lambda) = \exp(ix\lambda^{1/2}),$$

и

$$k(x, y; \lambda) = -\frac{1}{\lambda^{1/2}(1 + i\alpha\lambda^{1/2})}\varphi(y, \lambda)\psi(x, \lambda) \quad \text{при} \quad x > y;$$

при $x < y$ значения k получаются по симметрии, а при $\operatorname{Im}\lambda < 0$ — по формуле $k(x, y, \bar{\lambda}) = \overline{k(x, y; \lambda)}$. Функцию k можно аналитически продолжить через отрицательную вещественную полуось, за исключением точки $\lambda = 1/\alpha^2$. Наличие полюса в этой точке отражает тот факт, что она принадлежит точечному спектру оператора M; соответствующая собственная функция равна $\exp(-x/\alpha)$. Вдоль положительной вещественной полуоси k имеет разрыв, и, следовательно, эта полуось принадлежит непрерывному спектру M. Таким образом, спектр M — смешанный, в нем есть точечная и непрерывная части. Вычисление определяющего $P(\lambda_1, \lambda_2)$ интеграла, основанное на сочетании методов двух предыдущих примеров, дает следующий результат:

$$(P(\lambda_1, \lambda_2)f, g) = 2\alpha^{-1}\int_0^\infty \exp(-y/\alpha) f(y)\,dy \int_0^\infty \exp(-x/\alpha)\bar{g}(x)\,dx$$

$$+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2}(1 + \alpha^2\lambda)} \int_0^\infty \varphi(y, \lambda) f(y)\,dy \int_0^\infty \varphi(x, \lambda)\bar{g}(x)\,dx, \qquad (10.6.8)$$

причем если $-1\alpha^2 \notin (\lambda_1, \lambda_2)$, то первый член опускается, а если $\lambda_2 \leqslant 0$, то опускается второй. Полагая

$$\tau(x, \lambda) = \left[\lambda^{1/2}(1+\alpha^2\lambda)\right]^{-1/2} \varphi(x, \lambda)$$

и переходя к пределу в соответствии с (10.6.1), получаем

$$(f, g) = 2\alpha^{-1} \int_0^\infty \exp(-y/\alpha) f(y)\, dy \int_0^\infty \exp(-x/\alpha) \bar{g}(x)\, dx + \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty \tau(y, \lambda) f(y)\, dy \int_0^\infty \tau(x, \lambda) \bar{g}(x)\, dx.$$

Чтобы представить результат в форме, аналогичной той, в какой обычно записывают формулы преобразования, положим

$$\hat{f}_1 = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2} \exp(-y/\alpha) f(y)\, dy,$$

$$\hat{f}_2(\lambda) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \tau(y, \lambda) f(y)\, dy.$$

Тогда мы получим формулу Планешереля в виде

$$(f, g) = \hat{f}_1 \overline{\hat{g}}_1 + \int_0^\infty \hat{f}_2(\lambda) \overline{\hat{g}}_2(\lambda)\, d\lambda,$$

а формула обращения будет иметь вид

$$f(x) = \hat{f}_1 \exp(-x/\alpha) + \lim_{A\to\infty} \int_0^A \tau(x, \lambda) \hat{f}_2(\lambda)\, d\lambda$$

(сходимость в $\mathscr{L}_2(\Omega)$). Ситуация, когда спектр включает в себя как точечную, так и непрерывную части, не так уж редка. Соответствующий пример с бесселевыми функциями можно найти у Титчмарша [1962, с. 103].

10.6.5. Пример (*преобразование Ханкеля*). Пусть l — оператор Бесселя из примера 10.5.10 и $\Omega = (0, \infty)$. Согласно примеру 10.5.14, индексы дефекта равны $(1, 1)$ при $0 \leqslant \nu < 1$ и $(0, 0)$ при $\nu \geqslant 1$. Чтобы не затемнять суть дела ненужными деталями, предположим, что ν больше 1 и нецелое. При $\operatorname{Im} \lambda > 0$ функции φ, ψ из теоремы 10.6.1 равны

$$\varphi(x, \lambda) = x^{1/2} J_\nu(x\lambda^{1/2}),$$

$$\psi(x, \lambda) = x^{1/2}\left[e^{-\nu\pi i} J_\nu(x\lambda^{1/2}) - J_{-\nu}(x\lambda^{1/2})\right],$$

и

$$k(x, y; \lambda) = (\pi/2 \sin \nu\pi)\, \psi(x, \lambda)\, \varphi(y, \lambda) \quad \text{для} \quad x > y;$$

при прочих значениях x, y, λ функция k определяется по симметрии и по комплексной сопряженности. Когда λ сверху или снизу достигает положительной вещественной полуоси, единственным невещественным членом является $\exp(-\nu\pi i)$; отсюда ясно, что k претерпевает разрыв на этой полуоси. Рассмотрим теперь отрицательную вещественную полуось. Вспоминая, что

$$J_\nu(iz) = \exp(\nu\pi i/2)\, I_\nu(z),$$

мы видим, что при $\lambda \to -\mu$ $(\mu > 0)$

$$\varphi(x, \lambda)\, \psi(y, \lambda) \to (xy)^{1/2} e^{\nu\pi i/2} I_\nu(x\mu^{1/2}) \times \left[e^{-\nu\pi i} e^{\nu\pi i/2} I_\nu(y\mu^{1/2}) - e^{-\nu\pi/2} I_{-\nu}(y\mu^{1/2})\right].$$

Так как члены $I_{\pm\nu}(y\mu^{1/2})$ оба вещественны, то k непрерывна на отрицательной вещественной полуоси, которая, таким образом, принадлежит $\rho(M)$. Дальнейший анализ проводится, как и выше, и мы получаем формулу обращения

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{1/2} J_\nu(x\lambda^{1/2})\, H_\nu f(\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$H_\nu f(\lambda) = \int_0^\infty y^{1/2} J_\nu(y\lambda^{1/2})\, f(y)\, dy$$

(оба интеграла понимаются в смысле сходимости в $\mathscr{L}_2(0, \infty)$).

Приведенные примеры показывают, как с помощью спектральной теоремы получать результаты о разложениях по обобщенным собственным функциям. Этот метод весьма мощен и применим к широкому классу операторов второго порядка; он позволяет охватить большинство стандартных разложений и ряд менее известных. В заключение заметим, что имеется более общий подход, основанный на теореме Титчмарша — Вейля — Кодаиры (см. Данфорд и Шварц [1963, с. 530 и сл.]). Однако технические подробности, связанные с этой теоремой, носят довольно-таки устрашающий характер.

Задачи

Всюду здесь $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство, а L, L_0 — плотно определенные линейные операторы в $\mathscr{H}$.

10.1. Докажите, что L_0 симметричен тогда и только тогда, когда $(L_0 f, f)$ вещественно при всех $f \in D(L_0)$.

10.2. Предположим, что L замкнут и симметричен. Покажите, что если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то λ принадлежит либо $\rho(L)$, либо остаточному спектру L.

10.3. Возьмем $l = -d^2/dx^2$ и $\Omega = [0, \infty]$. Пусть M — самосопряженный оператор, полученный наложением граничного условия $f(0) = 0$. Используя задачу 6.28, докажите, что спектр $\sigma(M)$ лежит на положительной вещественной полуоси. Остается ли этот результат верным для граничного условия $f'(0) + \alpha f(0) = 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$?

10.4. Пусть $p(\cdot)$ — многочлен степени m с постоянными вещественными коэффициентами. Возьмем $l = p(id/dx)$ и $\Omega = [0, \infty]$. Покажите, что ассоциированный оператор L_0 с областью определения $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ симметричен. Докажите, что если p содержит лишь четные степени, то индексы дефекта $n_\pm$ оператора L_0 равны между собой, а если m нечетно, то $n_+ \neq n_-$.

10.5. Докажите, что если L симметричен и $R(L) = \mathscr{H}$, то L самосопряжен.

10.6. Пусть L замкнут, симметричен и имеет конечные, равные между собой индексы дефекта, и пусть L_1 — какое нибудь замкнутое симметричное расширение L. Обязательно ли L_1 обладает самосопряженными расширениями?

10.7. Пусть M — самосопряженный (неограниченный) оператор в $\mathscr{H}$. Предположим, что оператор $(\lambda I - M)^{-1}$ компактен для любого λ с $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Докажите, что:

(i) существует вещественное λ, для которого $(\lambda I - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$;

(ii) для таких λ оператор $(\lambda I - M)^{-1}$ компактен.

10.8. Рассмотрим оператор Бесселя из примера 10.5.10 на интервале $(0, 1]$ для $0 < \nu < 1$. Покажите, что его самосопряженное расширение определяется граничными условиями $f(1) = 0$ и

$$\lim_{x \to 0+} \left[x^{\nu + 1/2} f'(x) + (\nu + 1/2)\, x^{\nu - 1/2} f(x)\right] = 0.$$

Используя результат предыдущей задачи и теорему 7.5.4, установите справедливость разложения в ряд Фурье — Бесселя в $\mathscr{L}_2(0, 1)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{1/2} J_\nu(\alpha_n x) \int_0^1 y^{1/2} J_\nu(\alpha_n y) f(y)\, dy,$$

где α_n — нули J_ν и c_n — некоторые нормировочные постоянные. (Если выводить этот результат с помощью спектральной теоремы, то постоянные c_n получатся в явном виде.)

10.9. Возьмем $\Omega = (-1, 1)$ и $lf(x) = [(1 - x^2) f'(x)]'$. Найдите индексы оператора L_0. Укажите разделенные граничные условия для самосопряженных расширений и получите стандартное разложение в ряд Лежандра.

10.10. Выведите формулу преобразования Ханкеля (пример 10.6.5) для $\nu = 0$.

10.11. Задача о генераторе волн в линеаризованной теории волн на глубокой воде ставится следующим образом. Пусть y измеряется вертикально вниз от поверхности воды. Требуется найти решение уравнения $\nabla^2\varphi = 0$, удовлетворяющее граничным условиям: (i) $\partial^2\varphi/\partial t^2 - g\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = 0$ (условие на поверхности воды); (ii) $\partial\varphi/\partial x = u(y)\sin\omega t$ при $x = 0$ (генератор волн); (iii) $\varphi \to 0$ при $y \to \infty$; (iv) φ ведет себя при $x \to \infty$ как уходящая волна (условие излучения). Полагая $\varphi(x, y, t) = \operatorname{Im} e^{i\omega t}\varphi(x, y)$, мы получаем стандартную краевую задачу, причем граничное условие при $y = 0$ принимает вид $\partial\varphi/\partial y(x, 0) + k\varphi(x, 0) = 0$, где $k = \omega^2/g$. Разложение по обобщенным собственным функциям из примера 10.6.4 как раз приспособлено к такой задаче. Покажите, что если u — непрерывная функция с компактным носителем, то искомое решение задается формулой

$$\varphi(x, y, t) = 2\cos(kx - \omega t)\, e^{-ky} \int_0^\infty e^{-ks} u(s)\, ds - \frac{2}{\pi}\sin\omega t \int_0^\infty e^{-\mu x}(\mu\cos\mu y - k\sin\mu y)\, A(\mu)\, d\mu,$$

где

$$A(\mu) = [\mu(k^2 + \mu^2)]^{-1} \int_0^\infty (\mu\cos\mu s - k\sin\mu s)\, u(s)\, ds.$$

Глава 11

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

11.1. Введение

Стандартный классический подход к граничным задачам для эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными состоит в том, что данное уравнение переформулируют, используя функцию Грина, в виде интегрального уравнения, а затем привлекают теорию интегральных уравнений. Хотя этот подход и привел к значительным успехам, все же представляется несколько искусственным основывать теорию на интегральном уравнении, а не на самом дифференциальном уравнении, и недавние исследования показали, что прямая атака на дифференциальное уравнение часто дает больше информации и в то же время позволяет избежать скучных технических моментов, связанных с построением интегрального уравнения. Одна из областей, где преимущество прямого подхода очевидно, — это нахождение численных решений. Действительно, использование интегрального уравнения плохо увязывается со стандартными численными процедурами, и потому явно неестественно привлекать интегральные уравнения для численного решения дифференциальных. Цель настоящей главы — дать вводное изложение прямого подхода.

Отправной точкой служит замена исходной краевой задачи некоторым ее слабым аналогом. Для иллюстрации рассмотрим уравнение Пуассона

$$\nabla^2 f - g = 0 \tag{11.1.1}$$

в ограниченной открытой области Ω, для которого ищется решение $f \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega})$, обращающееся в нуль на границе области $\partial\Omega$. Умножая это уравнение на произвольную функцию $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ и интегрируя, получаем

$$\int_\Omega (\nabla^2 f - g)\,\varphi\,dx = 0 \quad \text{для} \quad \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega). \tag{11.1.2}$$

Так как $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\mathscr{L}_2(\Omega)$, то (11.1.1) и (11.1.2) эквивалентны. Интегрирование по частям дает (поскольку φ вместе со всеми своими производными обращается в нуль на $\partial\Omega$)

$$\int_\Omega f\nabla^2\varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx. \tag{11.1.3}$$

Итак, (11.1.3) и (11.1.1) эквивалентны для гладких f. Однако (11.1.3) прекрасно имеет смысл для любых f из $\mathscr{L}_2(\Omega)$, в то время как само уравнение (11.1.1) для таких f прямого смысла не имеет и никаких очевидных интерпретаций не допускает. Это эвристическое рассуждение приводит к следующему слабому варианту исходной задачи: для заданной функции g найти функцию f, обращающуюся в нуль на $\partial\Omega$ и удовлетворяющую соотношению (11.1.3) для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$.

Сразу же видны две привлекательные черты такой слабой задачи. Во-первых, она имеет смысл для весьма широкого класса правых частей g — заведомо для любых $g \in \mathscr{L}_2(\Omega)$. Во-вторых, поскольку производные от f в (11.1.3) не фигурируют, гладкость f не составляет (по крайней мере на первых порах) столь настоятельной проблемы, как это было бы, рассматривай мы исходное уравнение. На самом деле, проведенное в предыдущем абзаце рассуждение грешит небольшой неточностью, а именно: условие $f=0$ на $\partial\Omega$ не имеет смысла для произвольных $f \in \mathscr{L}_2(\Omega)$, и, чтобы придать этому граничному условию смысл, приходится все же наложить на f кое-какие требования в отношении гладкости, хотя и не такие большие, как в исходной формулировке.

При решении описанной выше слабой краевой задачи (известной как *обобщенная задача Дирихле*) ключ к успеху — в выборе подходящего пространства. Задача естественным образом „укладывается" в определенное соболевское пространство функций, удовлетворяющих сравнительно слабым требованиям гладкости, и тот факт, что это пространство гильбертово, существенно упрощает анализ. Соболевские пространства служат в настоящее время основным инструментом в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Хотя здесь для простоты мы рассматриваем лишь сравнительно несложный пример — однородную задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения, излагаемая ниже теория соболевских пространств находит применения при изучении как линейных, так и нелинейных уравнений, эллиптических и эволюционных.

Преимущества постановки задачи в соболевском пространстве становятся особенно очевидными, когда исследуется проблема существования и единственности для общего эллиптического уравнения, потому что эту проблему удается тогда сформулировать в терминах некоего ограниченного линейного оператора, свойства которого изучить сравнительно просто. В определенных случаях, например для уравнения Пуассона в ограниченной области, легко показать, что этот оператор обладает ограниченным обратным, откуда следует, что обобщенная задача Дирихле имеет ровно одно решение для всякой разумной правой части g. В общем случае, однако, однородное уравнение может иметь и нетривиальные решения, и тогда уже нельзя ожидать существования решения при произвольной правой части g. Самое большее, на что можно надеяться, — это на существование и единственность при условии, что соответствующее однородное уравнение обладает лишь нулевым решением, иными словами, на результат, аналогичный альтернативе Фредгольма. При некоторых предположениях, главное из которых — ограниченность области, некий родственный оператор имеет компактный обратный, и желаемую теорему об альтернативе легко получить. Интересно заметить, что теория компактных операторов, первоначально придуманная для того, чтобы исследовать интегральное уравнение, возникающее при подходе с функцией Грина, по-прежнему остается основным рабочим инструментом и в прямом подходе, где, однако, она применяется к „оператору Грина", точный вид которого вычислять не нужно. Доказательство этой теоремы об альтернативе будет нашим главным делом в данной главе; мы будем заниматься им в §§ 11.4 и 11.5 после того как проведем предварительно обсуждение соболевских пространств в § 11.3. Указанный выше метод дает критерии существования и единственности решений в некотором соболевском пространстве для эллиптического оператора порядка $2m$. Однако эти решения не обязаны принадлежать $\mathscr{C}^{2m}(\Omega)$, и потому их нельзя рассматривать как решения в классическом смысле. Для того чтобы определить, когда эти решения имеют классический смысл, требуется дополнительное исследование, и некоторые результаты в этом направлении приводятся в § 11.6.

Стандартные руководства по линейным дифференциальным уравнениям с частными производными — Агмон [1965] и Фридман [1969]; из других полезных работ отметим недавние книги Фоллэнда [1976], Шехтера [1977], Шоуолтера [1977] и Трева [1975]. Значительная часть известных к настоящему времени результатов о линейных и нелинейных эллиптических уравнениях второго порядка содержится в монографии Гилбарга и Трудингера [1977].

11.2. Обозначения

При изучении рассматриваемых в этой главе вопросов некоторую трудность представляют сложные обозначения, и для удобства ссылок ниже собран ряд основных соглашений на эту тему.

Мы будем иметь дело с дифференциальными уравнениями с частными производными в подмножествах Ω пространства $\mathbb{R}^n$. Множество Ω всегда будет *открытым*, $\overline{\Omega}$ обозначает его замыкание, а $\partial\Omega = \overline{\Omega}\setminus\Omega$ — его границу.

Нам понадобится ряд пространств функций. Поскольку по большей части функции будут определены на фиксированной области Ω, то для упрощения довольно громоздкой записи мы всюду в данной главе будем в обозначениях этих пространств опускать символ Ω, за исключением тех случаев, когда область определения функций отлична от Ω. Так, $\mathscr{L}_2$ будет обозначать $\mathscr{L}_2(\Omega)$. Все функции предполагаются комплекснозначными, если только явно не оговорено противное.

Помимо пространств $\mathscr{C}^m$ и $\mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$, состоящих из m раз дифференцируемых функций, определенных на Ω и $\overline{\Omega}$ соответственно, часто будет использоваться пространство $\mathscr{C}_0^m$ (определение 1.3.23) функций из $\mathscr{C}^m$ с ограниченным носителем, содержащимся в Ω. Поскольку Ω открыто, а всякий носитель замкнут, легко показать, что для любой заданной функции $f \in \mathscr{C}_0^m$ существует такое $\varepsilon > 0$, что, каково бы ни было $x \in \partial\Omega$, $f = 0$ в $S(x, \varepsilon)$ — открытом шаре с центром x и радиусом ε. Таким образом, f равняется нулю во всех точках, расстояние от которых до границы меньше ε, т. е. в некоторой полосе около границы. Отметим, что $\mathscr{C}_0^m$ плотно в $\mathscr{L}_2$ для $0 \leqslant m \leqslant \infty$ (теорема 2.5.6).

Для общего дифференциального уравнения с частными производными в случае n измерений классические обозначения ужасно громоздки. Сложность записи значительно понижается при использовании мультииндексов.

11.2.1. Определение. **Мультииндекс** α — это упорядоченный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, состоящий из n неотрицательных целых чисел. Мы полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; правда, это вступает в противоречие с традиционным обозначением для евклидова расстояния в $\mathbb{R}^n$, но из контекста всегда будет ясно, что именно имеется в виду. Для мультииндексов мы резервируем буквы α и β.

Для точки $x = (x_1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ используются обозначения $|x|^2 = \sum x_j^2$ и $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Далее, мы пишем $D_j = \partial/\partial x_j$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. При этих соглашениях запись дифференциального уравнения с частными производными значительно упрощается, поскольку мы можем написать

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = j} p_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} p_\alpha D^\alpha.$$

Хотя всю теорию можно развить и при более общих условиях, мы примем здесь упрощающее предположение, что коэффициенты гладки, и оператор будем обычно записывать в следующем виде:

11.2.2. Определение. Предположим, что $p_{\alpha\beta} \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ при всех α, β, причем $p_{\alpha\beta} \neq 0$ при некоторых α, β с $|\alpha| = |\beta| = m$. Таким образом, $p_{\alpha\beta}$ — переменные комплекснозначные коэффициенты. Для $\varphi \in \mathscr{C}^{2m}$ положим

$$\begin{aligned} l\varphi &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (p_{\alpha\beta} D^\beta \varphi), \\ l_P\varphi &= (-1)^m \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} D^\alpha (p_{\alpha\beta} D^\beta \varphi). \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

Оператор l называется **формальным дифференциальным оператором с частными производными** порядка $2m$, а l_P — его **главной частью** [1].

Как и в случае формальных обыкновенных дифференциальных операторов, нам необходимо понятие формального сопряженного. Допустим на минуту, что $n=1$ и $\Omega=(-1, 1)$. Для $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_0^\infty$ интегрирование по частям дает

$$\int_{-1}^{1} \varphi \cdot D_1\bar{\psi}\, dx = -\int_{-1}^{1} D_1\varphi \cdot \bar{\psi}\, dx.$$

Заметим, что внеинтегральный член равен нулю, поскольку φ и ψ обращаются в нуль вблизи $\partial\Omega$; последнее вытекает из предположения, что $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_0^\infty$, Аналогично и в общем случае повторным интегрированием по частям получаем для $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_0^\infty$

$$\begin{aligned}(l\varphi, \psi)_0 &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \left(p_{\alpha\beta} D^\beta \varphi\right) \cdot \bar{\psi}\, dx \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \int_\Omega p_{\alpha\beta} D^\beta \varphi \cdot D^\alpha \bar{\psi}\, dx \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \varphi \cdot \overline{D^\beta \left(\bar{p}_{\alpha\beta} D^\alpha \psi\right)}\, dx \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi \cdot \overline{D^\alpha \left(\bar{p}_{\beta\alpha} D^\beta \psi\right)}\, dx \equiv (\varphi, l^*\psi)_0,\end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)_0$ — скалярное произведение в $\mathscr{L}_2$ (индекс 0 используется в этой главе по причинам, которые вскоре станут ясными).

11.2.3. Определение. Оператор l^*, задаваемый формулой

$$l^*\varphi = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\bar{p}_{\beta\alpha} D^\beta \varphi\right) \quad \left(\varphi \in \mathscr{C}^{2m}\right),$$

называется **формальным сопряженным** к l. Оператор l называют **формально самосопряженным,** если $l = l^*$.

Для того чтобы получить корректно поставленную краевую задачу, надо наложить на l некоторое условие эллиптичности. Здесь мы будем использовать следующее условие:

11.2.4. Определение. Оператор l называется **сильно эллиптическим** (в $\bar{\Omega}$), если существует такое $c > 0$, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{Re}(-1)^m l_P(\xi) = \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} \xi^\alpha p_{\alpha\beta}(x) \xi^\beta \geqslant c |\xi|^{2m} \quad (x \in \bar{\Omega}),$$

[1] Индекс P — от английского principal (главный). — *Прим. перев.*

где $|\xi|^2=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$. В литературе это условие иногда именуют условием *равномерной сильной эллиптичности.*

Очевидно, что если l сильно эллиптичен, то и l^* тоже. Стоит также заметить, что условие сильной эллиптичности инвариантно относительно замен координат с ненулевым якобианом (задача 11.1).

11.2.5. Пример. Для $l=-\nabla^2=-\sum\limits_1^n D_i^2$ мы имеем $-l_P(\xi)=\sum\limits_1^n \xi_i^2$.

Таким образом, лапласиан (взятый со знаком минус) сильно эллиптичен. Если $l=-\left(x_1D_1^2+D_2^2\right)$ в $\mathbb{R}^2$, то l сильно эллиптичен в полуплоскости $\{x_1, x_2\}$: $x_1\geqslant d\}$ для $d>0$, но не для $d=0$. Если $l=D_1-D_2^2$, то $(-1)^m l_P(\xi)=\xi_2^2$, а $|\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2$, и рассматриваемое условие не выполняется. Следовательно, уравнение теплопроводности не является сильно эллиптическим.

11.3 Слабые производные и соболевские пространства

В классической теории дифференциальных уравнений принято рассматривать функцию f как решение данного уравнения, только если у нее существуют и непрерывны все производные, фигурирующие в этом уравнении. Этим мотивируется приводимое ниже определение.

11.3.1. Определение. Пусть область Ω ограничена и имеет границу класса $\mathscr{C}^\infty$ [1]), а l — формальный оператор из определения 11.2.2. При заданном $g\in\mathscr{C}$ функция f называется **классическим решением** уравнения $lf=g$, если $f\in\mathscr{C}^{2m}$ и

$$lf=g \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{11.3.1}$$

Функция f называется классическим решением **однородной задачи Дирихле**, если вдобавок $f\in\mathscr{C}^{m-1}(\bar{\Omega})$ и

$$\partial^j f/\partial\nu^j=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1), \tag{11.3.2}$$

где $\partial/\partial\nu$ обозначает дифференцирование по направлению нормали к границе.

Аналогично формулируется соответствующая неоднородная задача Дирихле, при некоторых умеренных ограничениях на граничные данные (см. Фридман [1969, с. 38]). Следуя намеченной во

---

[1]) Для целей настоящей главы достаточно интуитивного представления о границе класса $\mathscr{E}^\infty$ как об „очень гладкой" границе. Точнее определение можно было бы дать в таком духе: для каждой точки $P\in\partial\Omega$ должны существовать открытые множества $S_1\subset\mathbb{R}^{n-1}$, $S_2\subset\partial\Omega$ и биекция φ: $S_1\to S_2$, такие что $P\in S_2$, $\varphi\in\mathscr{C}^\infty(S_1)$ и ранг матрицы Якоби отображения φ равен $n-1$ во всех точках S_1.

введении линии, мы введем сейчас понятие слабого решения. С учетом определения 11.2.3 формального сопряженного l^* обобщение рассуждений, ведущих к (11.1.3), приводит к следующему определению:

11.3.2. Определение. Пусть задана функция $g \in \mathscr{L}_2$. Функция $f \in \mathscr{L}_2$ называется **слабым решением** уравнения $lf = g$, если

$$(f, l^*\varphi)_0 = (g, \varphi)_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty, \tag{11.3.3}$$

и мы пишем в таком случае

$$lf \stackrel{w}{=} g. \tag{11.3.4}$$

Никаких краевых условий на слабые решения не налагается, так что они представляют собой аналог классических решений уравнения $lf = g$, а не аналог классических решений задачи Дирихле. Мы еще вернемся к этому вопросу, а пока рассмотрим дальше соотношение (11.3.4).

Заметим, что мы не имеем права трактовать левую часть (11.3.4) как сумму обыкновенных производных, поскольку ни для какого из фигурирующих в этой сумме членов не гарантировано существование в обычном смысле. Имея конечной целью придать смысл этим членам, покажем сначала, что иногда возможно дать разумную интерпретацию производных от функции, которая не является гладкой в традиционном смысле.

11.3.3. Определение. Говорят, что функция f из $\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$ (определение 2.5.2) обладает **слабой производной** порядка α, если существует такая функция $g \in \mathscr{L}^{\mathrm{loc}}$, что

$$\int_\Omega g\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \cdot (D^\alpha \varphi)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty.$$

Эту функцию g называют α-й **слабой производной** (от) f и пишут $D^\alpha f = g$.

Последующие замечания призваны пояснить понятие слабой производной.

(i) Так как у φ и $D^\alpha\varphi$ носители компактные, оба интеграла, фигурирующие в определении, существуют.

(ii) Слабая производная — это, по существу, „$\mathscr{L}_2$-понятие", и, как обычно в таком контексте, функции, равные почти всюду, отождествляются между собой. С этой оговоркой слабая производная определена однозначно. Действительно, если каждая из функций g_1, g_2 служит α-й производной f, то

$$\int_\Omega (g_1 - g_2)\varphi\, dx = 0 \quad (\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty).$$

Далее, для любого компактного множества $S \subset \Omega$ разность $g_1 - g_2$ принадлежит $\mathscr{L}_2(S)$, а $\mathscr{C}_0^\infty(S)$ плотно в $\mathscr{L}_2(S)$. Отсюда следует, что $g_1 = g_2$ п. в. в S, а значит, ввиду произвольности S, и п. в. в Ω.

(iii) Если функция f обладает α-й производной в обычном смысле, принадлежащей $\mathscr{L}_2^{\text{loc}}$ то g будет и слабой α-й производной f. Чтобы убедиться в этом, достаточно просто проинтегрировать по частям левую часть равенства, фигурирующего в определении 11.3.3.

(iv) Слабую производную можно представлять себе как нечто, получающееся в результате устранения разрывов f путем усреднения. Стоит, однако, заметить, что f может иметь обычную производную почти везде и не иметь слабой производной. Например, пусть $f(x) = 1$ при $x = 0$ и 0 при $x < 0$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} f\varphi'\,dx = \int_{0}^{1} \varphi'\,dx = -\varphi(0),$$

и, поскольку не существует функции $g \in \mathscr{C}_2^{\text{loc}}$, такой что $\varphi(0) = \int_{-1}^{1} g\varphi\,dx$ для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$, f не обладает слабой производной.

(v) В одномерном случае имеется простая характеризация функций со слабой первой производной. Это в точности те абсолютно непрерывные функции, у которых первая производная принадлежит $\mathscr{L}_2^{\text{loc}}$ (задача 11.6).

(vi) Из свойства усреднения, лежащего в основе понятия слабой производной, вытекает то приятное следствие, что всегда возможна перемена порядка дифференцирования. В самом деле, $D_iD_j\varphi = D_jD_i\varphi$ для $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$, и если f обладает слабой производной D_iD_jf, то

$$\int_\Omega D_iD_jf \cdot \varphi\,dx = \int_\Omega f \cdot D_jD_i\varphi\,dx = \int_\Omega f \cdot D_iD_j\varphi\,dx = \int_\Omega D_jD_if \cdot \varphi\,dx,$$

откуда $D_iD_jf = D_jD_if$.

(vii) Из того что f — решение уравнения $lf \overset{w}{=} g$, нельзя сразу же заключить, что каждый отдельный член в lf можно трактовать как слабую производную. Конечно, это следует из определений, если l состоит ровно из одного члена, но для l общего вида сразу сказать ничего нельзя. В § 11.6 мы покажем, что для сильно эллиптических l указанное заключение, вообще говоря, верно, но доказывается это нетривиально.

Теперь введем гильбертовы пространства, в рамках которых будет проводиться весь анализ. Фигурирующую ниже норму можно рассматривать как измеряющую среднее значение слабых производных.

11.3.4. Определение. Пусть m — неотрицательное целое число. Обозначим через $\mathscr{H}^m$ (или $\mathscr{H}^m(\Omega)$, если надо явно указать область) множество функций f, таких что при $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ все слабые производные $D^\alpha f$ существуют и принадлежат $\mathscr{L}_2$, и наделим $\mathscr{H}^m$ скалярным произведением и нормой по формулам

$$(f, g)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha f \cdot \overline{D^\alpha g}\, dx,$$

$$\|f\|_m^2 = (f, f)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha f|^2\, dx.$$

Пространство $\mathscr{H}^m$ известно как **соболевское пространство** (или **пространство Соболева**) порядка m.

$\mathscr{H}^m$ — собственное подмножество множества всех функций, обладающих m-ми слабыми производными, поскольку от $D^\alpha f$ требуется, чтобы они принадлежали $\mathscr{L}_2$, а не только лишь $\mathscr{L}_2^{\mathrm{loc}}$. Очевидно, что $\mathscr{L}^0 = \mathscr{L}_2$ и $(\cdot, \cdot)_0$, $\|\cdot\|_0$ совпадают со скалярным произведением и нормой в $\mathscr{L}_2$; индекс 0 здесь и далее в этой главе мы ставим для согласования с обозначением соболевских пространств высших порядков. Непосредственно ясно, что

$$\mathscr{C}^\infty \subset \ldots \subset \mathscr{H}^{m+1} \subset \mathscr{H}^m \subset \ldots \subset \mathscr{H}^0 = \mathscr{L}_2.$$

11.3.5. Теорема. *$\mathscr{H}^m$ — гильбертово пространство.*

Доказательство. Легко проверяется, что $\mathscr{H}^m$ — предгильбертово пространство. Докажем его полноту. Пусть (f_j) — последовательность Коши в $\mathscr{H}^m$. Тогда при $|\alpha| \leqslant m$

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_k\|_0^2 = \int_\Omega |D^\alpha f_j - D^\alpha f_k|^2\, dx$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha f_j - D^\alpha f_k|^2\, dx = \|f_j - f_k\|_m^2.$$

Следовательно, $(D^\alpha f_j)$ есть последовательность Коши в $\mathscr{L}_2$ и, значит, сходится там, скажем к $f^{(\alpha)}$. Для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$

$$(f^0, D^\alpha \varphi)_0 = \lim (f_j, D^\alpha \varphi)_0 = (-1)^{|\alpha|} \lim (D^\alpha f_j, \varphi)_0 = (-1)^{|\alpha|} (f^{(\alpha)}, \varphi)_0.$$

Таким образом, $f^{(0)}$ обладает слабыми производными $D^\alpha f^{(0)} = f^{(\alpha)}$ при $|\alpha| \leqslant m$, а потому принадлежит $\mathscr{H}^m$. Далее,

$$\|f_j - f^{(0)}\|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha f_j - D^\alpha f^{(0)}|^2\, dx,$$

откуда следует, что $f_j \to f^{(0)}$ в $\|\cdot\|_m$. Этим доказано, что (f_j) имеет предел в $\mathscr{H}^m$, и установлена искомая полнота. □

Как хорошо известно, множество $\mathscr{C}^\infty$ гладких функций плотно в $\mathscr{L}_2$. Другими словами, для $m=0$ замыкание $\mathscr{C}^\infty$ в $\mathscr{H}^m$ совпадает с $\mathscr{H}^m$. Следующая теорема (см. Фридман [1969, с. 15]) утверждает, что то же верно для произвольного m, и тем самым дает другое описание функций из $\mathscr{H}^m$ — как пределов последовательностей гладких функций.

11.3.6. Теорема. *Замыкание $\mathscr{C}^\infty$ в $\|\cdot\|_m$ совпадает с $\mathscr{H}^m$.*

При минимальных ограничениях на l может быть доказано существование слабых решений, локально принадлежащих $\mathscr{H}^{2m}$ и, значит, обладающих слабыми производными порядка $2m$ (см. Агмон [1965, с. 49]). Для такого решения левую часть уравнения $lf \overset{w}{=} g$ можно записать как сумму слабых производных. Однако $\mathscr{C}^{2m}(\bar{\Omega}) \subset \mathscr{H}^{2m}$, если область Ω ограничена, и потому ясно, что даже гладкие функции из $\mathscr{H}^{2m}$ не обращаются в нуль на границе, как это требуется в классической однородной задаче Дирихле. Чтобы получить слабый аналог этой задачи, нужна некоторая модификация пространств $\mathscr{H}^m$.

11.3.7. Определение. Обозначим через $\mathscr{H}_0^m$ замыкание $\mathscr{C}_0^\infty$ в $\mathscr{H}^m$. Пространство $\mathscr{H}_0^m$ тоже называется **соболевским постранством** порядка m.

Как и выше, имеет место цепочка включений

$$\mathscr{C}_0^\infty \subset \ldots \subset \mathscr{H}_0^{m+1} \subset \mathscr{H}_0^m \subset \ldots \subset \mathscr{H}_0^0 = \mathscr{L}_2.$$

Функции из $\mathscr{C}_0^\infty$ обращаются в нуль вблизи $\partial\Omega$, и можно ожидать, что этот факт соответствующим образом отражается в поведении на $\partial\Omega$ функций из $\mathscr{H}_0^m$.

11.3.8. Пример. Как и $\mathscr{H}^1$, в одномерном случае пространство $\mathscr{H}_0^1$ допускает простое описание. Пусть $\Omega = (-1, 1)$. Согласно замечанию (v) к определению 11.3.3, каждая функция $f \in \mathscr{H}_0^1 (\subset \mathscr{H}^1)$ есть абсолютно непрерывная функция, у которой первая производная принадлежит $\mathscr{L}_2$. По определению, существует последовательность (φ_j) в $\mathscr{C}_0^\infty$, такая что $\lim \|\varphi_j - f\| = 0$. Поскольку носители φ_j лежат в Ω, то

$$\varphi_j(x) = \int_{-1}^{x} \varphi_j'(t)\,dt,$$

и, в силу неравенства Шварца,

$$\left|\varphi_j(x)-\int_{-1}^{x} f'(t)\,dt\right|=\left|\int_{-1}^{x}[\varphi_j'(t)-f'(t)]\,dt\right|$$
$$\leqslant 2\|\varphi_j'-f'\|_0\leqslant 2\|\varphi_j-f\|_1.$$

Следовательно, $\varphi_j(x)\to\int_{-1}^{x} f'(t)\,dt$ в sup-норме, а так как $\varphi_j\to f$ в норме $\|\cdot\|_1$ и потому в $\mathscr{L}_2$, то $f(x)=\int_{-1}^{x} f'(t)\,dt$ п. в. Таким образом, $f(-1)=0$, и по сходным соображениям также и $f(1)=0$. Как легко проверить (задача 11.8), справедливо и обратное утверждение, и мы заключаем, что $f\in\mathscr{H}_0^1$ тогда и только тогда, когда f — абсолютно непрерывная функция с $f'\in\mathscr{L}_2$, обращающаяся в нуль в точках ± 1.

11.3.9. Лемма. *Предположим, что область Ω ограничена и имеет гладкую границу. Если $f\in\mathscr{H}_0^m\cap\mathscr{C}^{m-1}(\bar{\Omega})$, то $\partial^j f/\partial\nu^j=0$ на $\partial\Omega$ при $0\leqslant j\leqslant m-1$. Обратно, если $f\in\mathscr{C}^m(\Omega)$ и указанные выше нормальные производные обращаются в нуль на $\partial\Omega$, то $f\in\mathscr{H}_0^m$.*

Доказательство. См. Фридман [1969, с. 39]. □

В случае когда $m=0$ или $\Omega=\mathbb{R}^n$, мы имеем $\mathscr{H}_0^m=\mathscr{H}^m$, но, как явствует из леммы, в общем случае эти пространства не совпадают. За исключением одномерного случая, для функций из $\mathscr{H}_0^m$ обычно нельзя дать простой характеризации. Однако, как показывает лемма, всякая гладкая функция из $\mathscr{H}_0^m$ обращается на $\partial\Omega$ в нуль вместе со своими первыми $m-1$ нормальными производными. Поскольку это — как раз то свойство, которое требуется от решения классической однородной задачи Дирихле, слабый аналог этой задачи разумно сформулировать следующим образом: найти решение уравнения $lf\overset{w}{=}g$ в $\mathscr{H}_0^m$. Эта задача называется *обобщенной задачей Дирихле*, и ее изучение составляет главный предмет данной главы. Решение этой задачи опирается на свойства соболевских пространств, которые устанавливаются ниже.

Пусть функция f определена на Ω. Для произвольного открытого множества $\Omega'\supset\Omega$ зададим продолжение f на Ω' (которое снова обозначим через f), потребовав, чтобы $f=0$ на $\Omega'\setminus\Omega$. Будем в таком случае говорить, что *f продолжена на Ω' нулем.*

Вообще говоря, функция $f\in\mathscr{H}^m(\Omega)$, продолженная нулем на Ω', не будет принадлежать $\mathscr{H}^m(\Omega')$. Действительно, если рассмотреть такое продолжение, скажем, для индикаторной функции множества Ω, то, очевидно, всё, что можно сказать, это что оно принадлежит $\mathscr{H}^0(\Omega')$. Однако ввиду предыдущих замечаний можно рассчитывать на большее для функций из $\mathscr{H}_0^m(\Omega)$.

11.3.10. Лемма. *Пусть Ω, Ω' открыты и $\Omega' \supset \Omega$.*

(i) *Если функция $f \in \mathscr{H}_0^m(\Omega)$ продолжена нулем на Ω', то $f \in \mathscr{H}_0^m(\Omega')$. В этом смысле $\mathscr{H}_0^m(\Omega) \subset \mathscr{H}_0^m(\Omega')$.*

(ii) *Если функция f принадлежит $\mathscr{H}_0^m(\Omega')$ и имеет компактный носитель, лежащий в Ω, то (сужение на Ω) $f \in \mathscr{H}_0^m(\Omega)$.*

Доказательство. (i) Пусть (φ_j) — последовательность в $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, такая что $\varphi_j \to f$ в $\|\cdot\|_m$. Для каждой функции φ_j ее продолжение нулем на Ω' принадлежит $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega')$, и (φ_j) — последовательность Коши в $\mathscr{H}_0^m(\Omega')$. Отсюда немедленно следует наше утверждение.

(ii) легко доказать, используя какую-нибудь последовательность сглаживающих функций, и мы предоставляем проделать это читателю в качестве упражнения (задача 11.11). □

Хотя рассматриваемые нами функции обычно определены на некотором собственном подмножестве в $\mathbb{R}^n$, для того чтобы можно было эксплуатировать свойства преобразования Фурье (см. теорему 2.6.1), нужно сперва продолжить функции нулем на всё $\mathbb{R}^n$. Следующая лемма утверждает, что если $f \in \mathscr{H}_0^m(\Omega)$, то $\hat{f}$ быстро стремится к нулю на бесконечности. Это, конечно, неверно, если предположить лишь, что $f \in \mathscr{H}^m(\Omega)$.

11.3.11. Лемма. *Пусть $f \in \mathscr{H}_0^m(\Omega)$. Продолжим f нулем на $\mathbb{R}^n$. Тогда при $|\alpha| \leqslant m$*

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \tag{11.3.5}$$

$\xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|f\|_m^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2 \, |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{11.3.6}$$

Доказательство. Для $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ равенство (11.3.5) получается интегрированием по частям. Для произвольной функции f ее продолжение принадлежит $\mathscr{H}_0^m(\mathbb{R}^n)$ (по лемме 11.3.10), а потому $D^\alpha f \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(\widehat{D^\alpha f}, \hat{\varphi})_0 &= (D^\alpha f, \varphi)_0 = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)_0 \\ &= (-1)^{|\alpha|} (\hat{f}, \widehat{D^\alpha \varphi})_0 = \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}}(\xi) \, d\xi.\end{aligned}$$

Равенство (11.3.5) вытекает отсюда, поскольку $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$, а значит, тем же свойством обладает и его образ при изометрическом изоморфизме $f \longmapsto \hat{f}$. Формула (11.3.6) немедленно следует из определения $\|\cdot\|_m$ и формулы Парсеваля. $\square$

Следующая ниже теорема — ключ к решению обобщенной задачи Дирихле, ибо она позволяет установить, что основной оператор в рассматриваемой теории компактен. Фигурирующее в этой теореме условие ограниченности Ω в общем случае опустить нельзя; заметим, что при определенных условиях на $\partial\Omega$ результат верен также и для $\mathscr{H}^m$ (см. Агмон [1965, с. 30]).

11.3.12. Теорема вложения Реллиха. *Пусть Ω открыто и ограничено и m, k — неотрицательные целые числа, такие что $m > k$. Тогда вложение $\mathscr{H}_0^m$ в $\mathscr{H}_0^k$ компактно.*

Доказательство. Надо проверить, что любая последовательность (f_j) в замкнутом единичном шаре пространства $\mathscr{H}_0^m$ обладает подпоследовательностью, сходящейся в $\|\cdot\|_k$. В силу слабой секвенциальной компактности замкнутого единичного шара в гильбертовом пространстве (теорема 6.4.3) существует подпоследовательность (будем обозначать ее по-прежнему через (f_j)), слабо сходящаяся в $\mathscr{H}_0^m$ к некоторому элементу f с $\|f\|_m \leqslant 1$. Далее, для $0 \leqslant k \leqslant m$ вложение $\mathscr{H}_0^m$ в $\mathscr{H}_0^k$ непрерывно, и поэтому каждый непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}_0^k$ можно рассматривать как непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}_0^m$; отсюда следует, что $f_j \rightharpoonup f$ в $\mathscr{H}_0^k$. Сейчас будет показано, что если $k < m$, то $\|f_j\|_k \to \|f\|_k$, откуда и вытекает требуемый результат (см. задачу 6.11).

Продолжим f_j, f на $\mathbb{R}^n$ нулем. Поскольку $f_j \rightharpoonup f$ в $\mathscr{H}_0^0 = \mathscr{L}_2(\Omega)$ то, как легко следует из определения преобразования Фурье, $\hat{f}_j \to \hat{f}$ поточечно, а потому

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}_j(\xi)|^2 \to \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \tag{11.3.7}$$

для каждого ξ. В силу неравенства Шварца, $|\hat{f}_j(\xi)| < c$, где c зависит только от Ω. Следовательно, для любого $\tau < \infty$ каждый член в (11.3.7) мажорируется при $|\xi| \leqslant \tau$ некоторой константой, и, значит, по теореме 2.4.11 о мажорированной сходимости,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{|\xi| \leqslant \tau} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}_j(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| \leqslant \tau} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \tag{11.3.8}$$

Ввиду (11.3.6) это почти то, что нам нужно. Доказательство будет завершено, если мы убедимся, что вклад в интеграл от

$|\xi|>\tau$ мал. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Поскольку $m>k$, найдется $\tau>0$, такое что

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}|\xi^\alpha|^2\Big/\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2<\varepsilon \quad \text{при} \quad |\xi|\geqslant\tau. \tag{11.3.9}$$

В силу лемм 11.3.10 и 11.3.11, $\xi^\alpha\hat f(\xi)\in\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha|\leqslant m$. Поэтому

$$\int\limits_{|\xi|>\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant k}|\xi^\alpha|^2|\hat f(\xi)|^2d\xi$$

$$=\int\limits_{|\xi|>\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant k}|\xi^\alpha|^2\Big/\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2\right\}|\hat f(\xi)|^2d\xi\leqslant\varepsilon\|f\|_m^2\leqslant\varepsilon \tag{11.3.10}$$

(первое неравенство справедливо вследствие (11.3.9) и (11.3.6)). Аналогичное рассуждение показывает, что оценка (11.3.10) верна и при $\hat f$, замененном на $\hat f_j$. Далее, ввиду (11.3.8) существует n_0, такое что для $j>n_0$

$$\left|\int\limits_{|\xi|\leqslant\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant k}|\xi^\alpha|^2\{|\hat f_j(\xi)|^2-|\hat f(\xi)|^2\}\,d\xi\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, для $j>n_0$

$$\left|\|f_j\|_k^2-\|f\|_k^2\right|=\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\leqslant k}|\xi^\alpha|^2\{|\hat f_j(\xi)|^2-|\hat f(\xi)|^2\}\,d\xi\right|\leqslant 3\varepsilon$$

(мы разбиваем $\mathbb{R}^n$ на внутренность и внешность шара $\bar S(0,\tau)$ и используем последнюю оценку и (11.3.10)). Таким образом, $\lim\|f_j\|_k=\|f\|_k$, что и требовалось установить. □

Следующий результат будет применен при решении вопроса о том, когда решения обобщенной задачи Дирихле являются гладкими. Говорят, что ограниченная область Ω обладает *свойством конуса*, если существуют такие положительные числа θ, h, что для каждой точки $x\in\Omega$ найдется прямой круговой конус с вершиной x, углом при вершине θ и высотой h, содержащийся в Ω.

11.3.13. Лемма. *Пусть Ω открыто и ограничено, $m>n/2$ — некоторое целое число. Предположим, что либо $f\in\mathscr{C}_0^\infty$, либо $f\in\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ и Ω обладает свойством конуса. Тогда существует вещественное число c (зависящее только от n, m, Ω), такое что*

$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\leqslant c\|f\|_m. \tag{11.3.11}$$

Доказательство. Мы докажем результат для случая $f\in\mathscr{C}_0^\infty$; доказательство для второго случая можно найти у Фридмана [1969, с. 22]. Пусть ρ — какое-нибудь число, большее диаметра Ω. Возьмем произвольную точку $P \in \Omega$ в качестве начала координат, и пусть r обозначает расстояние от точки P до рассматриваемой точки. Продолжим f на $\mathbb{R}^n$ нулем. Интегрируя по частям $m-1$ раз, получаем

$$f(P) = -\int_0^\rho \frac{\partial f}{\partial r}\, dr = b \int_0^\rho r^{m-1} \frac{\partial^m f}{\partial r^m}\, dr,$$

где b — константа, зависящая только от m. Интегрирование по угловым переменным дает

$$f(P) = b' \int_{S(P,\,\rho)} r^{m-n} \frac{\partial^m f}{\partial r^m}\, d\tau,$$

где τ — элемент объема b' зависит лишь от n, m. В силу неравенства Шварца,

$$|f(P)|^2 \leqslant b'^2 \int_{S(P,\,\rho)} r^{2(m-n)}\, d\tau \cdot \int_{S(P,\,\rho)} \left|\frac{\partial^m f}{\partial r^m}\right|^2 d\tau.$$

Первый интеграл конечен при $m > n/2$ и зависит только от m, n, Ω, а второй не превосходит $\|f\|_m^2$. Наш результат вытекает теперь из произвольности P. $\square$

11.3.14. Теорема вложения Соболева. *Предположим, что Ω открыто и ограничено, и пусть k — целое число, меньшее $m-n/2$. Если $f \in \mathscr{H}_0^m$ или же $f \in \mathscr{H}^m$, но Ω обладает свойством конуса, то f п. в. равняется некоторой функции из $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$, и вложение $\mathscr{H}_0^m$ (соотв. $\mathscr{H}^m$), в $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ непрерывно, причем его норма зависит только от n, m, Ω.*

Доказательство. Оценка (11.3.11), примененная к $D^\alpha f$ при $|\alpha| \leqslant k$, показывает, что вложение $\mathscr{H}_0^m$ в $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ непрерывно на плотном подпространстве $\mathscr{C}_0^\infty$ в $\mathscr{H}_0^m$. Утверждаемый результат получается продолжением этого вложения по непрерывности (теорема 3.4.4). Доказательство для второго случая аналогично. $\square$

11.4. Обобщенная задача Дирихле

Мы можем теперь продвинуться вперед в нашем главном деле — решении слабого аналога классической однородной задачи Дирихле. Напомним, что этим аналогом служит обобщенная задача Дирихле, состоящая в нахождении решений в $\mathscr{H}_0^m$ уравнения $lf \overset{w}{=} g$, причем граничные условия имитируются следующим ограничением: допускаются только решения, принадлежащие $\mathscr{H}_0^m$. На самом деле эта формулировка не очень удобна, так как порядок рассматриваемого соболевского пространства равен всего лишь m и потому члены порядка выше m в lf нельзя интерпретировать как слабые производные. Более удобная формулировка вновь подсказывается рассмотрением уравнения Пуассона.

Если $f \in \mathscr{H}_0^1$ — решение обобщенной задачи Дирихле для $l = -\nabla^2$, то

$$-\nabla^2 f \overset{w}{=} g; \tag{11.4.1}$$

согласно определению 11.3.2, это равносильно соотношению

$$(f, -\nabla^2\varphi)_0 = (g, \varphi)_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty.$$

Поскольку функция f принадлежит $\mathscr{H}_0^1$, она обладает слабыми частными производными первого порядка, и *одно* интегрирование по частям законно. Интерпретируя компоненты ∇ как слабые производные, получаем

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega g\bar{\varphi}\, dx. \tag{11.4.2}$$

Положим

$$B[f, \varphi] = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla\bar{\varphi}\, dx.$$

Ясно, что B — билинейная форма (см. задачу 6.18) на $\mathscr{H}_0^1 \times \mathscr{C}_0^\infty$ и

$$|B[f, \varphi]| = \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i f \cdot D_i \bar{\varphi}\, dx \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n |(D_i f, D_i\varphi)_0| \leqslant \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_0 \|D_i\varphi\|_0 \leqslant c\|f\|_1 \|\varphi\|_1,$$

где c зависит лишь от n. Следовательно, форма B ограничена, и, поскольку $\mathscr{H}_0^1$ представляет собой замыкание $\mathscr{C}_0^\infty$ в $\|\cdot\|_1$, ее можно продолжить по непрерывности до ограниченной формы на $\mathscr{H}_0^1 \times \mathscr{H}_0^1$, причем в силу (11.4.2)

$$B[f, \varphi] = (g, \varphi)_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathscr{H}_0^1. \tag{11.4.3}$$

Задача нахождения $f \in \mathscr{H}_0^1$, удовлетворяющего этому уравнению, равносильна, таким образом, задаче (11.4.1). Уравнение (11.4.3) и есть искомая более удобная форма обобщенной задачи Дирихле. В контексте пространства $\mathscr{H}_0^1$ это весьма естественная формулировка, ибо каждая производная в выражении $B[f, \varphi]$ определена в слабом смысле, в то время как в исходной задаче (11.4.1) члены $\nabla^2 f$ нельзя так интерпретировать.

Интересно заметить, что последняя формулировка является, по существу, вариационной. Чтобы убедиться в этом, предположим для простоты, что все функции вещественнозначны, и рассмотрим квадратичный функционал Q, задаваемый формулой

$$Q(f)=\int_\Omega |\nabla f|^2\,dx-2\int_\Omega gf\,dx.$$

Формальная производная Фреше от Q в φ равна

$$2\int_\Omega \nabla f\cdot\nabla\varphi\,dx-2\int_\Omega g\varphi,$$

и условие ее обращения в нуль как раз совпадает с (11.4.2). Таким образом, обобщенную задачу Дирихле можно трактовать как уравнение Эйлера для Q. Далее, легко проверить, что если $\tilde f$ — решение уравнения (11.4.2), то $Q(\tilde f+\varphi)\geqslant Q(\tilde f)$ для любого $\varphi\in\mathscr{H}_0^1$; это показывает, что Q достигает минимума на некотором решении уравнения (11.4.2). Развивая этот подход, можно доказать существование и единственность функции из $\mathscr{H}_0^1$, минимизирующей Q, и тем самым дать доказательство существования решения для обобщений задачи Дирихле. Это — прямой метод вариационного исчисления, исторические корни которого лежат в рассуждениях Римана об интеграле Дирихле (см. задачу 11.17). Здесь мы пойдем по несколько иному пути.

Вернемся к обобщенной задаче Дирихле для произвольного l и будем действовать по образцу рассуждений, приведших нас к (11.4.3).

11.4.1. Определение. Пусть l — формальный дифференциальный оператор из определения 11.2.2. Для всех $f,\ \varphi\in\mathscr{H}_0^m$ положим

$$B[f,\varphi]=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(p_{\alpha\beta}D^\alpha f,\ D^\beta\varphi)_0.$$

B называется **билинейной формой, ассоциированной с** l.

11.4.2. Лемма. *B — ограниченная билинейная форма на $\mathscr{H}_0^m\times\mathscr{H}_0^m$. Если оператор l формально самосопряжен, то форма B эрмитова.*

Доказательство. По предположению $p_{\alpha\beta}\in\mathscr{C}(\overline{\Omega})$. Следовательно,

$$|B[f,\varphi]|\leqslant\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\|p_{\alpha\beta}D^\alpha f\|_0\|D^\beta\varphi\|_0$$

$$\leqslant c\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_0\|D^\beta\varphi\|_0\leqslant c'\|f\|_m\|\varphi\|_m,$$

где c, c' — константы, зависящие лишь от $p_{\alpha\beta}$ и m, n. Это показывает, что форма B ограничена. Второе утверждение леммы следует из определения 11.2.3. □

11.4.3. Определение. Пусть l — формальный оператор порядка $2m$ из определения 11.2.2. При заданной функции $g \in \mathscr{L}_2$ задача нахождения функции $f \in \mathscr{H}_0^m$, такой что

$$B[f, \varphi] = (g, \varphi)_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathscr{H}_0^m, \tag{11.4.4}$$

называется **обобщенной задачей Дирихле.**

Это — наш окончательный вариант слабого аналога классической однородной задачи Дирихле.

В качестве первого шага на пути к решению переформулируем задачу так, чтобы в новой формулировке фигурировало одно-единственное гильбертово пространство, $\mathscr{H}_0^m$. В силу неравенства Шварца, $|(g, \varphi)_0| \leqslant \|g\|_0 \|\varphi\|_0$; следовательно, поскольку $\|\varphi\|_0 \leqslant \|\varphi\|_m$, мы имеем $|(g, \varphi)_0| \leqslant \|g\|_0 \|\varphi\|_m$. Таким образом, функционал g^*, определенный формулой $g^*(\varphi) = (g, \varphi)_0$, есть непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}_0^m$, и по теореме Рисса о представлении линейного функционала 6.4.1 существует единственный элемент $h \in \mathscr{H}_0^m$, такой что $(g, \varphi)_0 = g^*(\varphi) = (h, \varphi)_m$. Обобщенная задача Дирихле состоит, следовательно, в том, чтобы найти для такого $h \in \mathscr{H}_0^m$ элемент $f \in \mathscr{H}_0^m$, удовлетворяющий условию

$$B[f, \varphi] = (h, \varphi)_m \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \mathscr{H}_0^m. \tag{11.4.5}$$

Метод, которым решается эта задача, можно прояснить, приняв на время дополнительное предположение, что форма B эрмитова. Поскольку B ограничена, то, согласно задаче 6.18, существует единственный ограниченный самосопряженный оператор, скажем L, такой что

$$B[f, \varphi] = (Lf, \varphi)_m \quad \text{при всех} \quad f\varphi \in \mathscr{H}_0^m,$$

и (11.4.5) принимает вид $(Lf\varphi)_m = (h, \varphi)_m$ для всех $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$, или, эквивалентно, $Lf = h$. Если $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_0^m)$, то это уравнение, а с ним и обобщенная задача Дирихле имеет единственное решение $f = L^{-1}h$. Так как это дает полный ответ на вопрос о существовании и единственности решения, нас интересуют условия на B, гарантирующие, что B обладает указанным свойством. Простейшее такое условие заключается в том, что форма B *строго положительна*, т. е. существует такое $c > 0$, что $(Lf, f)_m = B[f, f] \geqslant c\|f\|_m^2$, ибо тогда (по теореме 6.6.6) $0 \in \rho(L)$. Если B не эрмитова (а тем самым и не вещественнозначна), то это условие уже не годится, но легко подыскать подходящее его обобщение. Вот оно.

11.4.4. Определение. Форма B называется **коэрцитивной**, если существует вещественное число $c > 0$, такое что для всех $f \in \mathscr{H}_0^m$

$$\operatorname{Re} B[f, f] \geqslant c \|f\|_m^2.$$

11.4.5. Теорема Лакса — Милгрэма. *Для всякой ограниченной билинейной формы B на $\mathscr{H}_0^m \times \mathscr{H}_0^m$ существует единственный оператор $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_0^m)$, такой что $B[f, \varphi] = (Lf, \varphi)_m$ при всех $f, \varphi \in \mathscr{H}_0^m$. Если B коэрцитивна, то $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_0^m)$.*

Доказательство. Поскольку B ограничена, то при фиксированном f функционал $B^* = B[f, \cdot]$ есть непрерывный антилинейный функционал на $\mathscr{H}_0^m$. Следовательно, по теореме Рисса о представлении 6.4.1, существует единственный элемент $k \in \mathscr{H}_0^m$, такой что $B[f, \varphi] = (k, \varphi)_m$ при всех $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$, и $\|k\|_m = \|B^*\|$. Формула $k = Lf$ $(f \in \mathscr{H}_0^m)$ определяет тогда оператор L, который линеен (это очевидно), ограничен (поскольку $\|B^*\| \leqslant d\|f\|_m$ для некоторого $d \in \mathbb{R}$) и удовлетворяет условию $B[f, \varphi] = (Lf, \varphi)_m$.

Если форма B коэрцитивна, то найдется $c > 0$, такое что

$$\|Lf\|_m \|f\|_m \geqslant |B[f, f]| \geqslant \operatorname{Re} B[f, f] \geqslant c\|f\|_m^2.$$

Следовательно, $\|Lf\|_m \geqslant c\|f\|_m$. Кроме того, $R(L) = \mathscr{H}_0^m$, ибо если $h \in R(L)^\perp$, то $B[h, h] = (Lh, h)_0 = 0$, а значит, $h = 0$, в силу коэрцитивности B. Утверждаемый результат следует теперь из леммы 3.8.18. □

11.4.6. Теорема. *Пусть l — формальный оператор порядка $2m$ из определения 11.2.2 и B — ассоциированная с ним билинейная форма. Тогда если B коэрцитивна, то у обобщенной задачи Дирихле при любой заданной правой части $g \in \mathscr{L}_2$ существует ровно одно решение (в $\mathscr{H}_0^m$).*

Доказательство. Применяем лемму Лакса — Милгрэма к (11.4.5).

11.4.7. Пример. Возьмем $l = -\nabla^2 + k + p$, где $k \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Тогда

$$B[f, \varphi] = \int_\Omega [\nabla f \cdot \nabla \bar{\varphi} + (k + p) f \bar{\varphi}]\, dx$$

и

$$\operatorname{Re} B[f, f] = \|f\|_1^2 - \|f\|_0^2 + \operatorname{Re}((k + p) f, f)_0$$
$$\geqslant \|f\|_1^2 + (k - 1 + p_0)\|f\|_0^2,$$

где $p_0 = \inf\limits_{x \in \Omega} \operatorname{Re} p(x)$. Таким образом, если $k \geqslant 1 - p_0$, то наша форма коэрцитивна и по теореме 11.4.6 обобщенная задача Дирихле имеет единственное решение. Условие $k \geqslant 1 - p_0$, вообще говоря, существенно, но в том важном случае, когда область Ω ограничена, его можно значительно ослабить, используя неравенство Пуанкаре (см. задачу 11.15). Приводимая далее лемма показывает, как реализуется эта идея в одном конкретном случае, и, в частности, устанавливает существование и единственность решения для уравнения Лапласа.

С другой стороны, если $p = 0$ и k — большое отрицательное число, то форма B не коэрцитивна и указанный метод не проходит. Это и естественно, ибо, поскольку оператор Лапласа имеет отрицательные собственные значения (совпадающие со значениями k, при которых у уравнения $lf = 0$ есть нетривиальные решения), существование не должно иметь места при некоторых отрицательных k. Лучшее, на что можно рассчитывать, — это альтернатива Фредгольма. Она будет темой следующего параграфа.

11.4.8. Лемма. *Пусть Ω ограничено. Предположим, что l — однородный оператор степени $2m$ с постоянными коэффициентами:*

$$lf = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} p_{\alpha\beta} D^{\alpha+\beta} f.$$

Тогда, если l сильно эллиптичен, то ассоциированная с ним форма коэрцитивна.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть функции из $\mathscr{C}_0^\infty$, так как это — плотное подпространство в $\mathscr{H}_0^m$. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$ и продолжим ее нулем на $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} B[\varphi, \varphi] &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} p_{\alpha\beta} \xi^{\alpha+\beta} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\geqslant c \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \quad \text{(сильная эллиптичность!)} \\
&\geqslant c' \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= c' \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \varphi|^2 \, dx,
\end{aligned} \tag{11.4.6}$$

где c, c' — строго положительные числа, не зависящие от φ. Далее, из неравенства Пуанкаре непосредственно следует (задача 11.15), что существует $a > 0$, такое что для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$

$$(1 + a) \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \varphi|^2 \, dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha \varphi|^2 \, dx = \|\varphi\|_m^2.$$

Сопоставляя это с (11.4.6), заключаем, что

$$\operatorname{Re} B[\varphi, \varphi] \geqslant c'(1+a)^{-1}\|\varphi\|_m^2. \square$$

В случае когда форма B коэрцитивна, существование и единственность решения для обобщенной задачи Дирихле гарантируется теоремой 11.4.6. Как будет показано ниже, это решение f непрерывно зависит от правой части g в том смысле, что $f = Gg$, где G: $\mathscr{L}_2 \to \mathscr{H}_0^m$ — ограниченный линейный оператор.

Поскольку $\mathscr{H}_0^m \subset \mathscr{H}_0^0 = \mathscr{L}_2$, всякий элемент $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$ можно рассматривать и как элемент из $\mathscr{L}_2$, и если мы так поступаем, то часто никаких недоразумений не возникает. Однако сейчас нам необходимо проводить четкое различие между этими двумя возможностями, и с этой целью мы введем следующее определение:

11.4.9. Определение. Пусть K: $\mathscr{H}_0^m \to \mathscr{L}_2$ обозначает естественное вложение $\mathscr{H}_0^m$ в $\mathscr{L}_2$ и K^*: $\mathscr{L}_2 \to \mathscr{H}_0^m$ — сопряженный к нему оператор.

Очевидно, K и K^* — ограниченные линейные операторы с нормой, не превосходящей единицы. Одно из преимуществ явного введения оператора K состоит в том, что можно использовать свойства его сопряженного. В силу определения 6.5.6 [1)], если $g \in \mathscr{L}_2$ и $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$, то

$$(g, \varphi)_0 = (g, K\varphi)_0 = (K^*g, \varphi)_m. \tag{11.4.7}$$

Далее, согласно лемме Лакса — Милгрэма 11.4.5 и уравнению (11.4.5), решением f обобщенной задачи Дирихле служит $L^{-1}h$, где h связано с правой частью g соотношением $(h, \varphi)_m = (g, \varphi)_0$ для всех $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$. Следовательно, ввиду (11.4.7), $h = K^*g$ и $f = L^{-1}K^*g$. Это показывает, что f непрерывно зависит от g (ибо оператор $L^{-1}K^*$ ограничен).

11.4.10. Определение. Операторы $G = L^{-1}K^*$: $\mathscr{L}_2 \to \mathscr{H}_0^m$ и $\tilde{G} = KL^{-1}K^*$: $\mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$ будем называть **операторами Грина.**

Термин „оператор Грина" используется потому, что G играет здесь ту же роль, какую в классической теории играет интегральный оператор с ядром — функцией Грина. Одно из преимуществ настоящего метода состоит в том, что все свойства G, требуемые для доказательства существования и единственности, могут быть получены без детального анализа соответствующей функции Грина. Подытожим результаты данного параграфа в виде следующей теоремы.

---

1) Точнее, „гильбертова аналога" определения 6.5.1. — *Прим. перев.*

11.4.11. Теорема. *Предположим, что форма, ассоциированная с оператором l, коэрцитивна. Тогда для любой правой части $g \in \mathscr{L}_2$ решением обобщенной задачи Дирихле служит $f = Gg$, где $G = L^{-1}K^*$ — ограниченный линейный оператор из $\mathscr{L}_2$ в $\mathscr{H}_0^m$.*

11.4.12. Следствие. *Предположим вдобавок, что оператор l формально самосопряжен. Тогда $\tilde{G} = KL^{-1}K^*$ есть ограниченный самосопряженный оператор $\mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$.*

Доказательство. Поскольку форма B эрмитова, оператор L самосопряжен, а следовательно, таков же и оператор $\tilde{G}$. □

11.5. Альтернатива Фредгольма для обобщенной задачи Дирихле

Теорема 11.4.6 решает вопрос о существовании и единственности решения обобщенной задачи Дирихле для случая, когда форма B, ассоциированная с оператором l, коэрцитивна. Рассмотрение простых примеров (скажем, оператора $-\nabla^2 + k$ из примера 11.4.7) показывает, что если форма B не коэрцитивна, то соответствующее однородное уравнение (т. е. уравнение с правой частью $g = 0$) может обладать нетривиальными решениями. Эти примеры наводят также на мысль, что единственности и существования решения для произвольных g можно ожидать в том и только том случае, когда таких нетривиальных решений не существует. Мы докажем сейчас, что этот мощный аналог альтернативы Фредгольма действительно имеет место для всех сильно эллиптических операторов в ограниченной области. Доказательство основано на компактности оператора Грина и напоминает рассуждения, используемые при классическом подходе с интегральными уравнениями.

Используемый метод подсказывается тактикой, применяемой в случае более простого уравнения

$$Mf = g, \tag{11.5.1}$$

где $M \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Если M строго положителен, то $0 \in \rho(M)$ и уравнение (11.5.1) имеет единственное решение $f = M^{-1}g$. Предположим, однако, что вместо условия строгой положительности выполнено лишь более слабое условие $(Lf, f) \geqslant -b\|f\|^2$ $(b > 0)$. Тогда для $a > b$ снова оператор $M_a = M + aI$ строго положителен, $0 \in \rho(M_a)$ и M_a обладает ограниченным обратным. Переписывая уравнение (11.5.1) в виде $M_a f = g + af$, получаем

$$f = aM_a^{-1}f + \bar{g}, \quad \text{где} \quad \bar{g} = M_a^{-1}g. \tag{11.5.2}$$

Таким образом, вопрос о существовании и единственности решения для уравнения (11.5.1) можно решить, рассматривая уравнение

(11.5.2). Если оператор M_a^{-1} компактен, то преимущества использования уравнения (11.5.2) очевидны, ибо в случае компактных операторов применима альтернатива Фредгольма.

При проведении этого рассуждения для обобщенной задачи Дирихле то обстоятельство, что вместо одного появляются два гильбертовых пространства $\mathscr{H}_0^m$ и $\mathscr{L}_2 = \mathscr{H}_0^0$ и вместо строго положительных операторов приходится иметь дело с коэрцитивными формами, слегка усложняет дело, но в общем метод аналогичен. Мы показываем, что, добавляя к B подходящий член, можно получить форму, которая коэрцитивна (а потому обладает ограниченным оператором Грина). То что это можно сделать, вытекает из фундаментального неравенства Гординга. Доказательство этого неравенства довольно сложно; его можно найти, например, у Фридмана [1969, с. 34].

11.5.1. Теорема (неравенство Гординга). *Пусть* Ω *ограничено, а формальный оператор* l *из определения* 11.2.2 *сильно эллиптичен. Тогда существуют такие числа* $c > 0$ *и* a, *что для всех* $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$

$$\operatorname{Re} B[\varphi, \varphi] \geqslant c \|\varphi\|_m^2 - a \|\varphi\|_0^2.$$

11.5.2. Следствие. *В предположениях предыдущей теоремы форма* B_a, *задаваемая равенством*

$$B_a[f, \varphi] = B[f, \varphi] + a(f, \varphi)_0,$$

коэрцитивна.

Доказательство. В силу неравенства Гординга, для всех $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} B_1[\varphi, \varphi] &= \operatorname{Re} B[\varphi, \varphi] + a\|\varphi\|_0^2 \\ &\geqslant c\|\varphi\|_m^2 - a\|\varphi\|_0^2 + a\|\varphi\|_0^2 = c\|\varphi\|_m^2. \ \Box\end{aligned}$$

Теперь для установления компактности оператора Грина привлекается теорема вложения Реллиха 11.3.12. Как уже отмечалось ранее, без условия ограниченности Ω в общем случае обойтись нельзя.

Ниже L_a, G_a, $\tilde{G}_a$ обозначают операторы, которые строятся по форме B_a точно так же, как операторы L, G, $\tilde{G}$ строятся по форме B.

11.5.3. Теорема. *Если* Ω *ограничено, то оператор Грина* $\tilde{G}_a$: $\mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$, *отвечающий коэрцитивной форме* B_a, *компактен.*

Доказательство. В силу теоремы 11.3.12 вложение K пространства $\mathscr{H}_0^m$ в $\mathscr{H}_0^0 = \mathscr{L}_2$ компактно. Отсюда следует компактность оператора $G_a = K L_a^{-1} K^*$, ибо L_a^{-1} и K^* непрерывны. $\Box$

11.5.4. Определение. Комплексное число λ называется **собственным значением** обобщенной задачи Дирихле, если существует ненулевая функция $f \in \mathscr{H}_0^m$, такая что

$$B[f, \varphi] = \lambda (f, \varphi)_0 \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \mathscr{H}_0^m;$$

в этом случае f называется **собственной функцией,** отвечающей собственному значению λ.

11.5.5. Теорема (альтернатива Фредгольма). *Пусть Ω открыто и ограничено, а формальный оператор l из определения* 11.2.2 *сильно эллиптичен. Тогда либо обобщенная задача Дирихле имеет в точности одно решение для любого $g \in \mathscr{L}_2$, либо нуль является ее собственным значением.*

Доказательство. В силу следствия 11.5.2 и теоремы 11.5.3, для некоторого $a \in \mathbb{R}$ оператор Грина $\tilde{G}_a$ компактен. Покажем прежде всего, что обобщенная задача Дирихле равносильна уравнению

$$f = aG_a\tilde{f} + \tilde{g}, \tag{11.5.3}$$

где $\tilde{g} = \tilde{G}_a g$ и $\tilde{f} = Kf$. (Заметим, что функции f и $\tilde{f}$ — это на самом деле одна и та же функция; в настоящем доказательстве мы используем для нее два символа, чтобы подчеркнуть тот факт, что она рассматривается то как элемент пространства $\mathscr{H}_0^m$, то как элемент пространства $\mathscr{L}_2$. Если быть абсолютно точными, то нам следовало бы записывать обобщенную задачу Дирихле в виде $B[f, \varphi] = (g, K\varphi)_0$, поскольку в старой записи φ фигурирует в одном случае как элемент из $\mathscr{H}_0^m$, а в другом как элемент из $\mathscr{L}_2$. Однако здесь, как и в других местах, мы стараемся избегать излишне педантичной записи.)

Добавляя $a(\tilde{f}, \varphi)_0$ к каждой части уравнения $B[f, \varphi] = (g, \varphi)_0$, получаем

$$B_a[f, \varphi] = (a\tilde{f} + g, \varphi)_0,$$

откуда, в силу теоремы 11.4.11, $\tilde{f} = a\tilde{G}_a\tilde{f} + \tilde{G}_a g$. Обратно, предположим, что $\tilde{f} \in \mathscr{L}_2$ удовлетворяет уравнению (11.5.3), и положим $f = G_a(a\tilde{f} + g)$. Тогда $f \in \mathscr{H}_0^m$ и

$$Kf = KG_a(a\tilde{f} + g) = G_a(a\tilde{f} + g) = \tilde{f}.$$

Таким образом, для всех $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$

$$\begin{aligned} B_a[f, \varphi] &= (L_a f, \varphi)_m = (L_a G_a(a\tilde{f} + g), \varphi)_m \\ &= (K^*(a\tilde{f} + g), \varphi)_m = (a\tilde{f} + g, K\varphi)_0 = (a\tilde{f} + g, \varphi)_0. \end{aligned}$$

Вычитая $(a\tilde{f}, \varphi)_0$ из каждой части уравнения, убеждаемся, что f есть решение обобщенной задачи Дирихле.

Для завершения доказательства остается вспомнить, что оператор $\tilde{G}_a$ компактен, и применить к (11.5.3) теорему 7.3.7 об альтернативе Фредгольма. □

Используя компактность $\tilde{G}_a$, можно, далее, показать, что если нуль служит собственным значением обобщенной задачи Дирихле, то она имеет решение тогда и только тогда, когда функция g ортогональна к каждой из (конечного числа) соответствующих собственных функций.

Мы завершим параграф двумя результатами, которые подчеркивают аналогию между спектральными свойствами обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными.

11.5.6. Теорема. *Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы. Тогда либо обобщенная задача Дирихле для оператора $l-\lambda$ имеет ровно одно решение для любого $g \in \mathscr{L}_2$, либо λ является собственным значением исходной обобщенной задачи Дирихле. Множество собственных значений этой последней не имеет конечных предельных точек, и каждому собственному значению отвечает лишь конечное число линейно-независимых собственных функций.*

Доказательство. Применяем теорему 11.5.5 к оператору $l-\lambda$ и используем теоремы 7.4.1 и 7.4.2. □

11.5.7. Теорема. *Пусть выполнены предположения теоремы* 11.5.5. *и, кроме того, оператор l формально самосопряжен. Тогда из собственных функций обобщенной задачи Дирихле можно составить базис пространства $\mathscr{L}_2$.*

Доказательство. В силу соображений, использованных при доказательстве теоремы 11.5.5, всякому решению $\tilde{f}$ уравнения $\mu_n \tilde{f} = a\tilde{G}_a \tilde{f}$ отвечает собственная функция f обобщенной задачи Дирихле с собственным значением $\lambda_n = a\left(\mu_n^{-1} - 1\right)$. Поскольку оператор $\tilde{G}_a$ самосопряжен (следствие 11.4.12), наш результат будет следовать из теоремы Гильберта — Шмидта 7.5.1, если мы покажем, что нуль не является собственным значением оператора $\tilde{G}_a$. Но действительно, пусть $\tilde{G}_a \tilde{f} = 0$. Тогда

$$0 = (KL_a^{-1}K^*\tilde{f},\ \tilde{f})_0 = (L_a^{-1}K^*\tilde{f},\ K^*\tilde{f})_m = B_a[K^*\tilde{f},\ K^*\tilde{f}],$$

а значит, поскольку форма B_a коэрцитивна, $K^*\tilde{f} = 0$. Следовательно, для всех $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$

$$0 = (K^*\tilde{f},\ \varphi)_m = (\tilde{f},\ K\varphi)_0 = (\tilde{f},\ \varphi)_0,$$

откуда вытекает, что $\tilde{f} = 0$, ибо $\mathscr{H}_0^m$ плотно в $\mathscr{L}_2$. □

11.6. Гладкость слабых решений

Проведенный в предыдущем параграфе анализ дает единственные критерии существования и единственности решения обобщенной задачи Дирихле. В приложениях иногда важно знать, не является ли такое решение f достаточно гладким для того, чтобы служить классическим решением задачи Дирихле. Если мы хотим, чтобы это было так, то f, во-первых, должно иметь $2m$ непрерывных производных в Ω, а во-вторых, должно быть настолько гладким, чтобы для него имели смысл граничные условия, т. е. f должно иметь $m-1$ непрерывных производных в $\overline{\Omega}$. Эти два свойства называют *регулярностью внутри области* и *регулярностью вплоть до границы* соответственно, и в общем дело обстоит так, что f обладает обоими этими свойствами, если правая часть g и граница $\partial\Omega$ достаточно гладки. Доказательство этого утверждения сопряжено с весьма значительными техническими трудностями, и, поскольку главный интерес представляет для нас обобщенная задача Дирихле, мы просто сформулируем соответствующий результат и отошлем читателя за доказательством к одному из указанных выше руководств. Тем не менее, чтобы дать читателю почувствовать, какого типа рассуждения здесь используются, мы дадим набросок доказательства регулярности внутри области для одного сравнительно простого, но важного случая — когда главная часть l имеет постоянные коэффициенты. Основная идея состоит в том, чтобы показать, что порядок соболевского пространства, которому принадлежит f, можно шаг за шагом поднять до $2m+k$, если $g\in\mathscr{H}^k$. Непрерывность нужных производных следует тогда из теоремы вложения Соболева 11.3.14.

При рассмотрении вопросов, связанных с регулярностью внутри области, удобнее брать дифференциальный оператор l не в форме, указанной в определении 11.2.2, а в следующей форме:

11.6.1. Определение. Пусть $p_\alpha\in\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ для $|\alpha|\leqslant 2m$. Формальный оператор l порядка $2m$, его сопряженный l^* и его главная часть l_P определяются формулами:

$$lf=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} p_\alpha D^\alpha f,$$

$$l^*f=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\bar{p}_\alpha f),$$

$$l_Pf=\sum_{|\alpha|=2m} p_\alpha D^\alpha f.$$

Оператор l называется **сильно эллиптическим**, если существует такое $c>0$, что для любого вещественного ξ и любого $x\in\Omega$

$$(-1)^m \operatorname{Re} l_P(\xi)=(-1)^m \operatorname{Re}\sum_{|\alpha|=2m} p_\alpha\xi^\alpha\geqslant c|\xi|^{2m}.$$

Пусть l, l_1, ..., l_r — формальные операторы. Соотношение

$$lf \overset{w}{=} l_1 g_1 + \ldots + l_r g_r \quad \text{на} \quad \Omega$$

означает, что для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$

$$(f, l^*\varphi)_0 = (g_1, l_1^*\varphi)_0 + \ldots + (g_r, l_r^*\varphi)_0.$$

Регулярность внутри области — локальное свойство. Функция f дифференцируема на открытом множестве Ω, если она дифференцируема в некоторой окрестности каждой точки этого множества. Поэтому интуитивно ясно, что граница Ω не имеет здесь никакого отношения к делу. В частности, не должно иметь значения, лежит f в $\mathscr{H}_0^m$ или в $\mathscr{H}^m$, и, действительно, регулярность внутри области будет установлена нами для всех решений уравнения $lf \overset{w}{=} g$, при условии что правая часть g достаточно гладка. Для того чтобы извлечь выгоду из того обстоятельства, что нас интересует лишь локальный результат, для произвольной точки P из Ω рассматривается уравнение относительно ψf, где функция ψ равна 1 в некоторой окрестности S точки P и принадлежит $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. Тогда если $f \in \mathscr{H}^k$, то $\psi f \in \mathscr{H}_0^k$ и по лемме 11.3.10 функция ψf, продолженная нулем на $\mathbb{R}^n$, принадлежит $\mathscr{H}_0^k(\mathbb{R}^n)$. Преимущества такого подхода в том, что с регулярностью на всем $\mathbb{R}^n$ иметь дело гораздо легче, ибо можно применять преобразование Фурье. Поведение же f на самой окрестности S легко восстанавливается, поскольку $\psi = 1$ на S. Начнем поэтому с двух результатов для $\mathbb{R}^n$.

11.6.2. Лемма. *Пусть $f \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f \in \mathscr{H}^k(\mathbb{R}^n)$ в том и только том случае, если $(1 + |\xi|)^k \hat{f}(\xi) \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Вспоминаем, что $\mathscr{H}_0^k(\mathbb{R}^n) = \mathscr{H}^k(\mathbb{R}^n)$ и дальше действуем, как при доказательстве леммы 11.3.11. □

11.6.3. Лемма. *Пусть оператор l_P имеет постоянные коэффициенты и сильно эллиптичен. Предположим, что на $\mathbb{R}^n$*

$$(1 + l_P) f \overset{w}{=} \sum_{|\alpha| < 2m} D^\alpha g_\alpha,$$

где $g_\alpha \in \mathscr{H}^{k_\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f \in \mathscr{H}^j(\mathbb{R}^n)$, где

$$j = \min_{|\alpha| < 2m} (2m + k_\alpha - |\alpha|).$$

Доказательство. Нам дано, что для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(f, (1 + l_P^*)\varphi)_0 = \sum_{|\alpha| < 2m} (g_\alpha, D^\alpha \varphi)_0,$$

а поскольку $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$, отсюда следует в силу формулы Планшереля, что

$$[1+l_P(\xi)]\,\hat{f}(\xi)=\sum_{|\alpha|<2m}(-i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{g}_\alpha(\xi).$$

Используя сильную эллиптичность, получаем после несложных выкладок, что для некоторого $c>0$

$$c\,(1+|\xi|)^j\,|\hat{f}(\xi)|\leqslant\sum_{|\alpha|<2m}(1-|\xi|)^{j-(2m+k_\alpha-|\alpha|)}\{(1-|\xi|)^{k_\alpha}|\hat{g}_\alpha(\xi)|\}.$$

Согласно лемме 11.6.2, каждый член в фигурных скобках принадлежит $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$, а все множители при этих членах ограничены при указанном в формулировке теоремы значении j. Следовательно, каждый член в правой части, а значит, и левая часть принадлежат $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$, и наш результат вытекает из леммы 11.6.2. $\square$

Следуя намеченной выше тактике и имея целью придать уравнению $lf\overset{w}{=}g$ форму, к которой применима последняя лемма, запишем новое уравнение относительно ψf. В принципе для этого не нужно ничего больше, кроме как свободно пользоваться теоремой Лейбница для слабых производных (задача 11.12). Мы избавим читателя от скучных подробностей.

11.6.4. Лемма. *Пусть S — открытое подмножество в Ω и $\psi\in\mathscr{C}_0^\infty(S)$. Пусть, далее, $g\in\mathscr{H}^k(\Omega)$, а функция $f\in\mathscr{H}^t(S)$ удовлетворяет уравнению $lf\overset{w}{=}g$ на S. Тогда существуют функции $\psi_\alpha\in\mathscr{C}_0^\infty(S)$, такие что на $\mathbb{R}^n$*

$$(1+l_P)(\psi f)\overset{w}{=}\psi g+\sum_{|\alpha|<2m}D^\alpha(\psi_\alpha f),\tag{11.6.1}$$

и (продолженные нулем) $\psi g\in\mathscr{H}^k(\mathbb{R}^n)$, $\psi_\alpha f\in\mathscr{H}^t(\mathbb{R}^n)$.

Наивысший порядок производной в правой части (11.6.1) равен $2m-1$. Следовательно, по лемме 11.6.3, $\psi f\in\mathscr{H}^j(\mathbb{R}^n)$, где $j=\min(2m+k,\ t+1)$. Это показывает, что (если только мы уже с самого начала не имели $t=2m+k$) порядок соболевского пространства, которому принадлежит ψf, можно повысить с t до $t+1$. Далее, согласно задаче 11.10, для любого ограниченного открытого множества S' с $\overline{S'}\subset S$ существует функция $\psi\in\mathscr{C}_0^\infty(S)$ такая что $\psi=1$ на S'. Следовательно, $f\in\mathscr{H}^{t+1}(S')$. Повторяя нужное число раз это рассуждение, получаем, что $f\in\mathscr{H}^{2m+k}(\Omega')$ для любого ограниченного открытого множества Ω', для которого $\overline{\Omega'}\subset\Omega$. Наконец, применение теоремы вложения Соболева 11.3.14 к $\psi f\subset\mathscr{H}_0^{2m+k}(\Omega)$ доказывает непрерывность нужных производных. Тем самым искомая регулярность внутри области установлена.

11.6.5. Теорема. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что формальный оператор l порядка $2m$ из определения* 11.6.1 *сильно эллиптичен и его главная часть имеет постоянные коэффициенты. Предположим, далее, что $g \in \mathscr{H}^k(\Omega)$ и f есть решение в $\mathscr{L}_2$ уравнения $lf \overset{w}{=} g$. Тогда $f \in \mathscr{H}^{2m+k}(\Omega')$ для любого ограниченного открытого множества Ω', такого что $\Omega' \subset \Omega$. Далее, $f \in \mathscr{C}^s(\Omega')$ для целых $s < 2m + k - n/2$ и $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega')$, если $g \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$.*

Мы ограничились рассмотрением случая, когда l_P имеет постоянные коэффициенты, потому что это предположение упрощает техническую сторону дела. Доказательство для общего случая см. у Фридмана [1969, § 1.15].

Для того чтобы получить регулярность вплоть до границы, нужно потребовать некоторой гладкости от $\partial\Omega$. Довольно сложное доказательство приводимой ниже теоремы и дальнейшие сведения по этому вопросу можно найти у Фридмана [1969, § 1.17].

11.6.6. Теорема. *Пусть Ω — ограниченная область с $\mathscr{C}^\infty$-границей, и пусть формальный оператор l из определения* 11.2.2 *сильно эллиптичен. Предположим, что f есть решение обобщенной задачи Дирихле с правой частью $g \in \mathscr{H}^k(\Omega)$. Тогда $f \in \mathscr{H}^{2m+k}(\Omega)$. Кроме того, $f \in \mathscr{C}^s(\Omega)$ для целых $s < 2m + k - n/2$.*

Задачи

Ниже Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$.

11.1. Пусть оператор l из определения 11.2.2 сильно эллиптичен в ограниченной области Ω. Произведем замену переменных $y = \psi(x)$, где $\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ — функция из $\mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Покажите, что если якобиан (определитель матрицы Якоби) ψ нигде в $\bar{\Omega}$ не обращается в нуль, то новый оператор также будет сильно эллиптическим.

11.2. Докажите, что оператор $(-1)^k(\nabla^2)^k$ сильно эллиптичен.

11.3. Оператор l из определения 11.6.1 называется *эллиптическим*, если

$$\sum_{|\alpha| = 2m} p_\alpha(x)\, \xi^\alpha \neq 0$$

для любого вещественного $\xi \neq 0$ и любого $x \in \bar{\Omega}$ Если допускаются комплексные коэффициенты, то эллиптичности недостаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставленной. Действительно, возьмем в качестве Ω открытый единичный шар в $\mathbb{R}^2$ и рассмотрим оператор $lf = f_{xx} + 2if_{xy} - f_{yy}$. Докажите, что l эллиптичен, но не сильно эллиптичен. Покажите, что для любой аналитической функции u функция $f(x, y) = (1 - |z|^2)u(z)$, где $z = x + iy$, служит решением уравнения $lf = 0$, но обращается в нуль на $\partial\Omega$.

11.4. Пусть Ω' — компактное подмножество в Ω. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $S(x, \varepsilon) \cap \Omega' = \varnothing$ для всякого $x \in \partial\Omega$.

11.5. Возьмем $\Omega = (-1, 1)$, и пусть функция $\tau \in \mathscr{C}_0^\infty$ такова, что $\int\limits_\Omega \tau\, dx = 1$.

Покажите, что если $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty$, то и функция φ, задаваемая формулой

$$\varphi(x) = \int\limits_{-1}^{x} \psi(t)\, dt - \int\limits_{-1}^{1} \psi(t)\, dt \cdot \int\limits_{-1}^{x} \tau(s)\, ds,$$

также принадлежит $\mathscr{C}_0^\infty$. Выведите отсюда, что если $h \in \mathscr{L}_2^{\text{loc}}$ и $\int\limits_\Omega h\varphi'\, dx = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$, то функция h (почти всюду) постоянна.

11.6. Пусть $\Omega = (-1, 1)$. Докажите, что функция $f \in \mathscr{L}_2^{\text{loc}}$ обладает слабой первой производной тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна и $f' \in \mathscr{L}_2^{\text{loc}}$.

11.7. Для $\Omega = (0, 1)$ докажите, что замыкание $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ в $\|\cdot\|_1$ совпадает с $\mathscr{H}^1$ (ср. с теоремой 11.3.6). Один из способов доказательства — в формуле

$$(f, \varphi)_1 = \int\limits_0^1 f(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'')\, dx + \bar{\varphi}'(1) f(1) - \bar{\varphi}'(0) f(0)$$

положить $\varphi(x) = \cos n\pi x$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

11.8. Завершите доказательство из примера 11.3.8.

11.9. Пусть $\{j_\varepsilon\}$ — некоторое семейство сглаживателей (определение 2.6.6). Докажите, что если $f \in \mathscr{H}^m(\Omega)$ и Ω_0 — компактное подмножество в Ω, то $j_\varepsilon * f \to f$ в $\mathscr{H}^m(\Omega_0)$ при $\varepsilon \to 0$.

11.10. Пусть Ω_0 — компактное подмножество в Ω. Покажите, что существует вещественнозначная функция $g \in \mathscr{C}_0^\infty$, такая что $g(x) = 1$ при $x \in \Omega_0$ и $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ при $x \in \Omega$. [*Указание*: воспользуйтесь сглаживателями.]

11.11. Докажите, что если у функции $f \in \mathscr{H}^m(\Omega)$ носитель лежит в некотором компактном множестве, содержащемся в Ω, то $f \in \mathscr{H}_0^m(\Omega)$.

11.12. Пусть $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$. Покажите, что если f обладает слабыми производными до порядка m включительно, то то же самое верно и для φf, и докажите n-мерный вариант формулы Лейбница:

$$D^\alpha(\varphi f) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta}\varphi;$$

здесь $\beta \leqslant \alpha$ означает, что $\beta_i \leqslant \alpha_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, и

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

11.13. Пусть функция $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ равна 1 на $\bar{S}(0, 1)$, а носитель ее содержится в $\bar{S}(0, 2)$. Положим $\psi_j(x) = \psi(x/j)$. Докажите, что если $f \in \mathscr{H}^m(\mathbb{R}^n)$, то $\psi_j t \to f$ в $\|\cdot\|_m$ при $j \to \infty$. Выведите отсюда, что $\mathscr{H}_0^m(\mathbb{R}^n) = \mathscr{H}^m(\mathbb{R}^n)$.

11.14. Покажите, что если $f \in \mathscr{H}_0^1$, то

$$\int_0^1 |f|^2\,dx \leqslant b \int_0^1 |f'|^2\,dx,$$

где $b = \pi^{-2}$, и докажите, что это значение b неулучшаемо.

Покажите, что билинейная форма $B[f, \varphi] = \int_0^1 (f'\bar{\varphi}' - kf\bar{\varphi})\,dx$, ассоциированная с оператором $l = -d^2/dx^2 - k$ $(k \in \mathbb{R})$, коэрцитивна тогда и только тогда, когда $k < \pi^2$. Дайте интерпретацию этого результата в терминах однородной задачи Дирихле для оператора $-d^2/dx^2$.

11.15. Пусть множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и $d = \sup_{x, y \in \bar{\Omega}} |x - y|$ — его диаметр.

(i) Покажите, что если $f \in \mathscr{C}_0^\infty$, то

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_x^{x_1} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \ldots, x_n)\,dt$$

для любого числа x, такого что точка $(x, x_2, \ldots, x_n)$ лежит в Ω, но вне носителя f. Выведите отсюда, что

$$\|f\|_0 \leqslant 2^{-1/2} d\, \|\partial f/\partial x_1\|_0.$$

Используя этот факт, докажите, что для $f \in H_0^1$

$$\|f\|_0 \leqslant (2n)^{-1/2} d\, |f|_1, \text{ где } |f|_m^2 = \int_\Omega \sum_{\alpha = m} |D^\alpha f|^2\,dx.$$

Покажите, что билинейная форма $\int_\Omega (\nabla f \cdot \nabla\bar{\varphi} - kf\bar{\varphi})\,dx$, ассоциированная с оператором $-\nabla^2 - k$ $(k \in \mathbb{R})$, коэрцитивна на $\mathscr{H}_0^1$, если $k < d^2/2n$. Получите отсюда оценку снизу для наименьшего собственного значения обобщенной задачи Дирихле для оператора $-\nabla^2$.

(ii) *Неравенство Пуанкаре.* Докажите, что существует постоянная a, зависящая только от n и m, такая что для всех $f \in \mathscr{H}_0^m$

$$|f|_j \leqslant a d^{m-j} |f|_m \quad (0 \leqslant j \leqslant m - 1).$$

11.16. Покажите, что для всякого натурального числа k существуют коэрцитивные формы, ассоциированные с операторами $(-1)^k (\nabla^2)^k + 1$ и $(1 - \nabla^2)^k$.

11.17. Пусть оператор l из определения 11.2.2 формально самосопряжен и ассоциированная с ним форма B коэрцитивна. Положим $(f, \varphi)_E = B[f, \varphi]$ и $\|f\|_E^2 = (f, f)_E$ для всех $f, \varphi \in \mathscr{H}_0^m$. Покажите, что $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_m$ — эквивалентные нормы, и выведите отсюда, что $\mathscr{H}_0^m$ становится гильбертовым пространством, если наделить его новым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_E$, которому отвечает норма $\|\cdot\|_E$. Обозначим это гильбертово пространство через $\mathscr{H}_E$.

Фиксируем какое-нибудь $g \in \mathscr{L}_2$ и для всякого $f \in \mathscr{H}_E$ определим „полную энергию“ формулой

$$Q(f) = \|f\|_E^2 - (g, f)_0 - (f, g)_0.$$

Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное замкнутое подпространство в $\mathscr{H}_E$. Покажите, что существует ровно одно $\tilde{f} \in \mathscr{M}$, такое что

$$Q(\tilde{f}) = \inf_{\varphi \in \mathscr{M}} Q(\varphi),$$

и выведите отсюда, что обобщенная задача Дирихле имеет единственное решение.

Историческое замечание. Это — доказательство существования прямым методом вариационного исчисления. Его история начинается с принципа Дирихле, при помощи которого Риманом и другими были получены важные результаты в целом ряде областей. Первоначальное соображение, которым обосновывали этот принцип, заключалось попросту в том, что, поскольку некоторый определенный интеграл, связанный с Q, ограничен снизу, то должна существовать функция, на которой достигается минимум. Ввиду очевидной ошибочности этого обоснования и других трудностей, связанных с классом допустимых функций, метод стал пользоваться дурной славой, и только Гильберт спас его репутацию. Подробности этой интересной истории см. у Куранта [1950] и Монны [1975].

11.18. (Непрерывная зависимость решения от правой части.) В обозначениях задачи 11.15, (i), возьмем $k < a$ и положим $a = 2nd^{-2}$. Покажите, что если $g \in \mathscr{L}_2$, то решение f рассматриваемой обобщенной задачи Дирихле удовлетворяет соотношениям

$$\|f\| \leqslant (a-k)^{-1}\|g\|_0, \quad \|f\|_1 \leqslant c\|g\|_0,$$

где

$$c^2 = \begin{cases} (a+1)/(a-k)^2 & \text{цри } -1 < k \ (< a), \\ 1/(a-k) & \text{при } k \leqslant -1. \end{cases}$$

11.19. Обобщите теорему 11.5.5 следующим образом. Покажите, что если нуль является собственным значением обобщенной задачи Дирихле, то она имеет решение при данном $g \in \mathscr{L}_2$ тогда и только тогда, когда $(g, \psi_i)_0 = 0$ для каждой собственной функции ψ_i сопряженной обобщенной задачи Дирихле, отвечающей собственному значению нуль, т. е. для каждой функции ψ_i, удовлетворяющей условию: $B[\varphi, \psi_i] = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{H}_0^m$.

Глава 12

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

12.1. Введение

Первым методом, использовавшимся для численного решения эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными, был метод конечных разностей. В дальнейшем изучение сложных и нерегулярных границ, возникающих в инженерных задачах, привело к изобретению метода конечных элементов. В этом методе заданная область заменяется некоторым набором „элементов“ достаточно простой формы, на которых тем или иным способом аппроксимируется неизвестная функция. Физические соображения равновесия, примененные к каждому элементу, дают систему линейных уравнений, решение которой можно вычислить. Главным практическим достоинством такого подхода является его гибкость; элементы можно подгонять к геометрии задачи и ожидаемым физическим характеристикам решения. Метод конечных элементов вскоре стал пользоваться наибольшим предпочтением в широком круге задач.

На первых порах численные методы для решения дифференциальных уравнений с частными производными можно было в достаточной мере обосновать на интуитивном уровне. Однако самая сложность задач, к которым мог быть применен метод конечных элементов, и широкий диапазон возможных элементов и аппроксимаций для неизвестной функции иногда приводили к трудностям, которые уже не могли быть разрешены на таком уровне. Поэтому естественно было попытаться подыскать соответствующую математическую теорию, в рамках которой можно было бы исследовать вопросы пригодности и точности рассматриваемых методов. К сожалению, такой теории, которая подходила бы для решения этой трудной проблемы, вначале не было. Поворотным пунктом в математическом развитии метода конечных элементов было, пожалуй, сознание того, что этот метод является в сущности своей вариационным. Было показано, что упомянутые выше системы уравнений можно получать, выбирая простые пробные функции, аппроксимирующие неизвестную функцию, и используя соображения минимизации энергии, т. е. применяя метод Ритца. После этого стало возможным понять, что теоретический анализ метода конечных элементов естественно укладывается в рамки вариационного подхода к изучению дифференциальных уравнений с частными производными, использующего соболевские пространства. В результате была развита обширная теория, способная ответить на многие вопросы большой практической важности.

Для того чтобы ввести читателя в эту теорию, не обременяя его техническими подробностями, мы рассмотрим сравнительно простую ситуацию — однородную задачу Дирихле для формального оператора $l = -\nabla^2 + p$ в двумерном случае. Эта задача может быть разобрана методом Ритца; для общих эллиптических операторов надо использовать более сложные методы типа метода Галёркина. Главная цель исследования — получить глобальные оценки для ошибки.

Хорошее общее руководство по методу конечных элементов — книга Стренга и Фикса [1973]; полезны также монографии Прентера [1975] и Митчелла и Уэйта [1977]. В двухтомнике Уайтмэна [1973, 1977] охвачен широкий круг тем, включая нестационарные и нелинейные задачи, а также помещен интересный исторический обзор, написанный Зенкевичем. Более глубокое изложение теории можно найти у Азиза [1972], Обэна [1972], Одена и Редди [1976], Темама [1970].

12.2. Метод Ритца

Мы будем рассматривать обобщенную задачу Дирихле для оператора $l = -\nabla^2 + p$ на Ω при следующих условиях:

(i) множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограничено и открыто, и его граница $\partial\Omega$ гладка;

(ii) p — вещественнозначная неотрицательная функция из $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$;

(iii) $g \in \mathscr{L}_2$.

Для f, $\varphi \in \mathscr{H}_0^1$ положим

$$B[f, \varphi] = \int_\Omega (\nabla f \cdot \nabla\overline{\varphi} + pf\overline{\varphi})\,dx.$$

12.2.1. Лемма. *Форма B эрмитова и коэрцитивна. Рассматриваемая обобщенная задача Дирихле имеет в точности одно решение f в $\mathscr{H}_0^1$. Это решение $f \in \mathscr{H}^2 \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega})$.*

Доказательство. Коэрцитивность B следует из леммы 11.4.8, ибо ввиду неотрицательности p добавочный член $(pf, f) \geqslant 0$. Теорема 11.4.6 дает существование и единственность, а включение $f \in \mathscr{H}^2 \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega})$ справедливо по теореме 11.6.6. □

Наш первый шаг состоит в том, чтобы, используя теорию Ритца, показать, что вопросы пригодности и точности метода конечных элементов для приведенного выше уравнения могут быть переформулированы как задачи теории аппроксимации в $\mathcal{H}_0^1$, Основной вопрос принимает тогда такой вид: насколько близко можно приблизить решение в $\mathcal{H}_0^1$ элементами из $\mathcal{M}_k$ — некоторого k-мерного линейного подпространства, состоящего из простых пробных функций? Этот подход естественно приводит к весьма убедительным критериям для глобальной ошибки, поскольку рассматриваемая норма ошибки служит мерой среднего значения квадратов модулей ошибки и ее первой производной по всей области Ω.

Технические подробности анализа существенно упрощаются, если воспользоваться специальными свойствами билинейной формы B, ассоциированной с l. А именно, эта форма коэрцитивна и эрмитова, т. е. она фактически представляет собой новое скалярное произведение в $\mathcal{H}_0^1$. Так как соответствующая норма эквивалентна норме $\|\cdot\|_1$, то все наши предыдущие результаты относительно пространства $\mathcal{H}_0^1$, в частности утверждение о его полноте, сохранят силу и для нового скалярного произведения. В то же время преимущество иметь дело со скалярным произведением, а не с какой-то там билинейной формой является весьма значительным. Вдобавок при этом подчеркивается физическое существо дела, поскольку квадрат новой нормы естественно интерпретируется как энергия (с точностью до множителя 2, вводимого для удобства); в методе конечных элементов ее часто называют энергией деформации, потому что истоки метода лежат в строительной механике.

12.2.2. Определение. Для всех $f,\ \varphi \in \mathcal{H}_0^1$ положим

$$(f, \varphi)_E = B[f, \varphi] = \int_\Omega (\nabla f \cdot \nabla \bar{\varphi} + p f \bar{\varphi})\, dx,$$

$$\|f\|_E^2 = B[f, f] = \int_\Omega (|\nabla f|^2 + p|f|^2)\, dx.$$

Норма $\|\cdot\|_E$ называется **энергетической нормой.** Множество $\mathcal{H}_0^1$ наделенное скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_E$ и нормой $\|\cdot\|_E$, будем обозначать через $\mathcal{H}_E$.

12.2.3. Лемма. *Если выполнены условия* (i) *и* (ii) *выше, то нормы* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_E$ *эквивалентны и* $\mathcal{H}_E$ — *гильбертово пространство.*

Доказательство. Поскольку $\|f\|_E^2 = B[f, f]$, то в силу лемм 12.2.1 и 11.4.2 существуют вещественные числа, $c,\ c' > 0$, такие что

$$c\|f\|_1 \leqslant \|f\|_E \leqslant c'\|f\|_1 \qquad (f \in \mathcal{H}_0^1).$$

Этим доказана эквивалентность норм, а тем самым и полнота $\mathscr{H}_E$. Далее, $(\cdot, \cdot)_E$ является скалярным произведением, так как это билинейная эрмитова форма и $(f, f)_E = \|f\|_E^2 = 0 \Rightarrow f = 0$. □

Поскольку $B[f, \varphi] = (f, \varphi)_E$, наша обобщенная задача Дирихле принимает в $\mathscr{H}_E$ очень простой вид: найти решение в $\mathscr{H}_E$ уравнения

$$(f, \varphi)_E = (g, \varphi)_0 \text{ для всех } \bar{\varphi} \in \mathscr{H}_E. \tag{12.2.1}$$

12.2.4. Лемма. *Пусть выполнены предположения* (i)—(iii) *выше, и пусть* $\mathscr{M}$ *— произвольное замкнутое подпространство в* $\mathscr{H}_E$. *Тогда для любого заданного* $f \in \mathscr{H}_E$ *существует ровно одно* $\tilde{f} \in \mathscr{M}$, *такое что*

$$\| f - \tilde{f} \|_E = \inf_{\varphi \in \mathscr{M}} \| f - \varphi \|_E; \tag{12.2.2}$$

этим $\tilde{f}$ *является проекция* f *на* $\mathscr{M}$. *Далее, если* f *— решение рассматриваемой обобщенной задачи Дирихле, то* $\tilde{f}$ *есть решение — единственное в* $\mathscr{M}$ *— уравнения*

$$(\tilde{f}, \varphi)_E = (g, \varphi)_0 \quad \textit{для всех } \varphi \in \mathscr{M}. \tag{12.2.3}$$

Доказательство. Первое утверждение — это просто теорема о проекции 1.5.11, из которой следует также, что $f = \tilde{f} + (f - \tilde{f})$, где $\tilde{f} \in \mathscr{M}$, $f - \tilde{f} \in \mathscr{M}^{\perp}$. Подставляя это выражение для f в (12.2.1), получаем, что для всех $\varphi \in \mathscr{M}$

$$(g, \varphi)_0 = (\tilde{f} + f - \tilde{f}, \varphi)_E = (\tilde{f}, \varphi)_E + (f - \tilde{f}, \varphi)_E = (\tilde{f}, \varphi)_E,$$

а это и есть (12.2.3). Наконец, если $\tilde{f}_1$ — какое-нибудь другое решение уравнения (12.2.3) в $\mathscr{M}$, то $(\tilde{f} - \tilde{f}_1, \varphi)_E = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{M}$. Следовательно, $\tilde{f} - \tilde{f}_1 \in \mathscr{M}^{\perp}$. Поскольку $\mathscr{M}$ — линейное подпространство, так может быть, только если $\tilde{f} = \tilde{f}_1$, чем доказана и единственность. □

12.2.5. Определение. Всякое k-мерное линейное подпространство $\mathscr{M}_k$ в $\mathscr{H}_E$ будем называть **пространством пробных функций** или, короче, **пробным подпространством**, а всякий элемент из $\mathscr{M}_k$ — **пробной функцией.** Для заданного $f \in \mathscr{H}_E$ элемент $\tilde{f}_k$ из $\mathscr{M}_k$, ближайший к f по норме $\|\cdot\|_E$, называется **приближением Ритца** (или **ритцевым приближением**) в $\mathscr{M}_k$ к f.

12.2.6. Теорема (Ритца). *Пусть выполнены предположения* (i)—(iii) *выше, и пусть* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *— произвольный базис пространства* $\mathscr{M}_k$. *Тогда система уравнений*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i (\varphi_i, \varphi_j)_E = (g, \varphi_j)_0 \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{12.2.4}$$

имеет единственное решение и приближение Ритца $\tilde{f}_k$ в $\mathscr{M}_k$ к решению рассматриваемой обобщенной задачи Дирихле задается формулой

$$\tilde{f}_k = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i. \tag{12.2.5}$$

Ошибка $f - \tilde{f}_k$ удовлетворяет оценке

$$\| f - \tilde{f}_k \| \leqslant \| f - \varphi \|_E \text{ для всех } \varphi \in \mathscr{M}_k. \tag{12.2.6}$$

Доказательство. Положим $\tilde{f}_k = \sum c_i \varphi_i$. В силу леммы 12.2.4, $\tilde{f}_k$ удовлетворяет уравнению (12.2.3); полагая в этом уравнении последовательно $\varphi = \varphi_j$, получаем (12.2.4). Далее, пусть $c_1, \ldots, c_k$ — какое-нибудь другое решение системы (12.2.4). Умножая уравнения этой системы соответственно на $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ и складывая их, находим, что

$$\left(\sum c_i \varphi_i, \sum \bar{\alpha}_i \varphi_i\right)_E = \left(g, \sum \bar{\alpha}_i \varphi_i\right)_0.$$

Поскольку $\{\varphi_i\}$ — базис $\mathscr{M}_k$, отсюда следует, что

$$\left(\sum c_i \varphi_i, \varphi\right)_E = (g, \varphi)_0 \text{ для всех } \varphi \in \mathscr{M}_k,$$

поэтому, по лемме 12.2.4, $\tilde{f}_k = \sum c_i \varphi_i$. Тем самым доказана также и единственность. Наконец, оценка (12.2.6) немедленно следует из определения приближения Ритца. □

Первоначально теоретическое рассмотрение метода конечных элементов было основано на соображениях минимизации энергии. Связь между этим подходом и нашими последними результатами состоит в том, что $\tilde{f}_k$ есть функция из $\mathscr{M}_k$, минимизирующая „полную энергию“ (см. задачу 11.17).

Теорема Ритца служит теоретическим фундаментом для нашего изучения метода конечных элементов. На практике типичная процедура построения соответствующего численного метода выглядит следующим образом. Прежде всего область Ω разбивается на некоторое конечное число подобластей простой формы — у нас это будут треугольники — вместе с тонким слоем около границы, если нужно. Вершины этих треугольников обычно называют *узлами*; мы будем обозначать их через x_i. Затем выбирается множество пробных функций $\{\varphi_i\}$; обычно это многочлены низких степеней в каждом треугольнике, с некоторым условием непрерывности на сторонах треугольников, причем каждая из функций φ_i отлична от нуля лишь в треугольниках, имеющих одной из своих вершин x_i. Далее вычисляются коэффициенты $(\varphi_i, \varphi_j)_E$ и $(g, \varphi_j)_0$ в (12.2.4) — в простых случаях явно, а в общем случае с помощью численного интегрирования. После этого вычисляется решение системы (12.2.4) (тот факт, что решение существует и единственно, гарантируется теоремой Ритца) и по формуле

(12.2.5) находится приближенное решение $\tilde{f}_k$ нашего дифференциального уравнения. Заключительным шагом, который будет главным объектом нашего интереса, является анализ погрешности; он основан на оценке (12.2.6).

С точки зрения практики, очевидно, важны следующие моменты:

(i) Нужно, чтобы коэффициенты $(\varphi_i, \varphi_j)_E$ вычислялись достаточно просто. Это означает, что пробные функции не должны быть слишком сложными.

(ii) Матрица получающейся системы уравнений должна быть достаточно разреженной. Обычно этого добиваются, требуя, чтобы носители функций φ_i имели не слишком много перекрытий (как, скажем, в указанном выше случае).

(iii) Система (12.2.4) должна хорошо вести себя с вычислительной точки зрения. Этот момент, разумеется, важен, но поскольку он больше относится к области линейной алгебры, мы не обсуждаем его здесь, а отсылаем читателя к книгам Стренга и Фикса [1973] или Митчелла и Уэйта [1977].

(iv) $\tilde{f}_k$ должно быть хорошим приближением к f уже при достаточно малом числе уравнений системы.

Имеется очевидное противоречие между первыми двумя требованиями и последним, и решить, какое пространство пробных функций послужит удовлетворительным компромиссом, может быть весьма трудным делом. Здесь встают два основных вопроса, ответы на которые должна дать и дает теория. Первый: какой выбор пробного пространства является законным? Ответ прост — дозволяется любое конечномерное линейное подпространство в $\mathscr{H}_E (= \mathscr{H}_0^1)$, Второй: какова точность приближенного решения?

12.2.7. Пример. Прежде чем вплотную заняться техническими подробностями, специфическими для дифференциальных уравнений с частными производными, разберем для уяснения сути дела один простой одномерный пример. Возьмем оператор $lf = -f'' + f$ и гладкую функцию g и рассмотрим обобщенную задачу Дирихле для l на $\Omega = (0, 1)$. Ввиду предположенной гладкости g эта задача равносильна классической задаче нахождения функции $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, такой что $-f'' + f = g$ на $(0, 1)$ и $f(0) = f(1) = 0$. Разделим интервал Ω на равные подынтервалы (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, k$, длины $h = (k+1)^{-1}$ (рис. 12.1).

Поскольку наше уравнение — второго порядка, то нам вроде бы надо требовать, чтобы пробные функции были дважды дифференцируемы. Однако теория говорит нам, что всё, что нужно, это чтобы они принадлежали $\mathscr{H}_E$, а для этого достаточно, чтобы они были абсолютно непрерывны и обращались в нуль в концевых точках рассматриваемого интервала (см. пример 11.3.8). Эта чрезвычайная гибкость, дозволяемая вариационным подходом, крайне полезна на практике, поскольку при этом становится гораздо проще удовлетворять условиям гладкости в узлах. Простейшим выбором пробных функций было бы взять кусочно-постоянные функции, равные 1 на i-м интервале и 0 вне него, но такие функции не лежат в $\mathscr{H}_E$ и потому должны быть исключены. Другой простой выбор — это множество „функций-колпаков“, таких

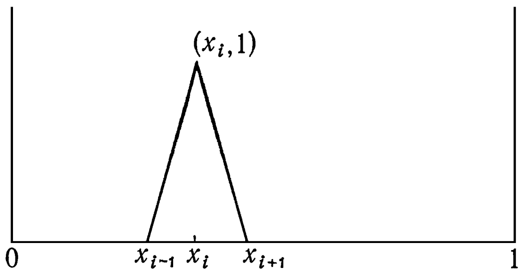

Рис. 12.1. Функция-колпак.

как на рис. 12.1; хотя они не обладают даже слабой второй производной, они лежат в $\mathscr{H}_E$, и потому такой выбор является законным — его мы и примем здесь. Каждое пробное подпространство будет тогда состоять из линейных комбинаций выбранных функций-колпаков, и всякая функция $\varphi \in \mathscr{M}_k$ будет линейной на каждом подынтервале и непрерывной на $\bar{\Omega}$. Очевидно, что для всякой функции $\varphi \in \mathscr{M}_k$ справедливо равенство

$$\varphi(x) = \sum_1^k \varphi(x_i)\varphi_i(x).$$

Найдем матрицу системы (12.2.4) для определения коэффициентов приближения Ритца. Элементы этой матрицы задаются формулой

$$(\varphi_i, \varphi_j)_E = \int_0^1 (\varphi_i'\bar{\varphi}_j' + \varphi_i\bar{\varphi}_j)\,dx,$$

и элементарным интегрированием получаем, что

$$(\varphi_i, \varphi_i)_E = (2/3)h^{-2}[3 + h^3],$$

$$(\varphi_i, \varphi_{i+1})_E = (\varphi_{i+1}, \varphi_i)_E = -(1/3)h^{-2}[3 - h^3],$$

и все остальные элементы равны нулю, поскольку для каждого i функция φ_i равна нулю всюду вне интервала (x_{i-1}, x_{i+1}). Таким образом, наша матрица имеет простой тридиагональный вид. Первые два из указанных выше требований также, очевидно, удовлетворяются. Обратимся к анализу погрешности.

Теорема 12.2.6 утверждает, что ошибка $\|f-\tilde{f}_k\|_E$ есть расстояние решения f от подпространства $\mathscr{M}_k$; отсюда следует, что приближение Ритца $\tilde{f}_k$ лучше любого другого приближения из $\mathscr{M}_k$. Это наблюдение позволяет избежать многих затруднений, которые мы имели бы, работая с самим $\tilde{f}_k$; действительно, приемлемую верхнюю границу для ошибки можно получить, используя любой элемент $\varphi\in\mathscr{M}_k$, достаточно близкий к f. Напрашивающийся выбор — взять функцию $\hat{f}_k$, получаемую линейной интерполяцией f, т. е. функцию, принимающую значения $f(x_i)$ в точках x_i и линейную между ними. Решающий шаг, и притом шаг, доставляющий в случае уравнений с частными производными немало хлопот, состоит в том, чтобы найти оценку для $\|f-\hat{f}_k\|_E$. В настоящем примере, не используя ничего большего, чем элементарные выкладки и неравенство Шварца, можно доказать (задача 12.2), что существуют вещественные числа c_1, c_2, такие что для любого $f\in\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$

$$\|f-\hat{f}_k\|_0\leqslant c_1h^2\|f''\|_0, \tag{12.2.7}$$

$$\|f'-\hat{f}'_k\|_0\leqslant c_2h\|f''\|_0, \tag{12.2.8}$$

а значит, при некоторой постоянной c

$$\|f-\hat{f}_k\|_E\leqslant ch\|f''\|_0. \tag{12.2.9}$$

Следовательно, ввиду (12.2.6), если f — решение рассматриваемой обобщенной задачи Дирихле, то

$$\|f-\tilde{f}_k\|_E\leqslant ch\|f''\|_0, \tag{12.2.10}$$

где c — некоторая постоянная, зависящая от f и h. Этим доказано, что $\tilde{f}_k\to f$ в $\|\cdot\|_E$ при $h\to 0$ (т. е. при $k\to\infty$), что и дает искомую оценку скорости сходимости.

Для большинства целей этого достаточно. Однако оценка (12.2.10) всё-таки не вполне удовлетворительна, поскольку в ней фигурирует сама неизвестная функция. Этот недостаток можно исправить, найдя какую-либо *априорную* оценку для f, выраженную лишь через заданную правую часть g. В одномерном случае это нетрудно сделать. Действительно, поскольку f есть решение обобщенной задачи Дирихле, то $\|f\|_E^2=(f,\ f)_E=(g,\ f)_0$. Следовательно,

$$\|f\|_0^2\leqslant\|f\|_E^2=(g,\ f)_0\leqslant\|g\|_0\|f\|_0,$$

откуда вытекает, что $\|f\|_0\leqslant\|g\|_0$. Но $f''=-g+f$; значит, $\|f''\|_0\leqslant\|g\|_0+\|f\|_0$, а потому

$$\|f''\|_0\leqslant 2\|g\|_0. \tag{12.2.11}$$

Таким образом, в силу (12.2.10),

$$\|f-\tilde{f}_k\|_E \leqslant ch\|g\|_0. \tag{12.2.12}$$

Это и есть искомая оценка.

В заключение стоит отметить еще один момент. На практике правые части $(g, \varphi_j)_0$ решаемой системы уравнений обычно приходится вычислять при помощи численного интегрирования. Как это влияет на ошибку? Оказывается, что если g заменяется своей кусочно-линейной *интерполянтой* (интерполяционной функцией), то разность между соответствующим приближением Ритца и $\tilde{f}_k$ будет порядка h^2 в норме $\|\cdot\|_E$. (Доказательство этого факта можно получить незначительным видоизменением проведенных выше рассуждений; см. задачу 12.3.) Такая поправка, очевидно, никак не скажется на оценке (12.2.10).

12.3. Скорость сходимости метода конечных элементов

Теперь мы обратимся к обобщенной задаче Дирихле для оператора $-\nabla^2+p$ в двумерном случае и получим оценки ошибки для ее решения, даваемого методом конечных элементов. Будем по-прежнему предполагать, что выполнены условия (i)—(iii) предыдущего параграфа.

Простейший и наиболее распространенный способ разбиения области Ω таков. Для получения k-го разбиения границу $\partial\Omega$ области Ω аппроксимируют границей некоторого вписанного многоугольника Ω_k („заполненного“) и Ω_k разбивают на треугольники, скажем T_i, максимального диаметра h. Узлы разбиения (т. е. вершины треугольников) обозначаются через x_i. Имеется в виду, что триангуляции последовательно измельчаются таким образом, чтобы $h\to 0$ при $k\to\infty$.

12.3.1. Определение. Будем называть триангуляции **допустимыми**, если

(i) ни одна сторона никакого треугольника данной триангуляции не идет *частично* вдоль стороны другого треугольника той же триангуляции;

(ii) существует такое число $\theta_0>0$, что каждый угол каждого треугольника в любой триангуляции (т. е. для всех k) не меньше θ_0.

Последнее условие будет существенно использовано ниже при выводе оценки ошибки; подробное его обсуждение см. у Стренга и Фикса [1973, с. 165]. Заметим, что это условие можно ослабить, — правда, ценой дополнительного усложнения технической стороны дела (см. Бабушка и Азиз [1976]).

Выбор пробного подпространства осуществим простейшим возможным способом. Для k-го разбиения возьмем в качестве $\mathcal{M}_k$

пространство функций, каждая из которых обращается в нуль всюду на $\partial\Omega_k$ и в „пограничном слое“ $\Omega\setminus\Omega_k$, непрерывна на Ω и на любом треугольнике разбиения является многочленом первой степени. Поверхность, описываемая такой функцией, представляет собой, таким образом, объединение плоских треугольных „плиток“. В качестве базиса $\{\varphi_i\}$ используем „пирамидальные функции“ — обобщение функций-колпаков на $\mathbb{R}$. А именно, для каждого внутреннего узла x_i соответствующая функция φ_i — это функция из

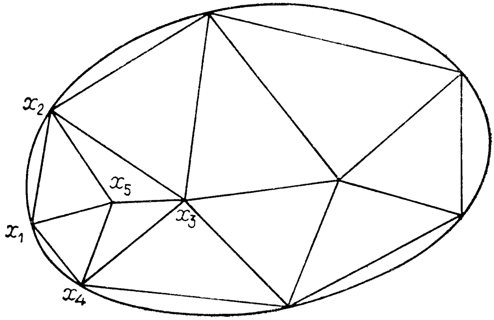

Рис. 12.2. Разбиение области Ω.

$\mathscr{M}_k$, принимающая значение 1 в x_i и имеющая носителем многоугольник с вершинами, соседними с x_i. Так, на рис. 12.2 функция φ_5 имеет носителем четырехугольник $x_1x_2x_3x_4$ и обращается в нуль на его сторонах. Ясно, что для каждой функции $\varphi\in\mathscr{M}_k$

$$\varphi(x)=\sum\varphi(x_i)\varphi_i(x)\quad(x\in\overline{\Omega}).$$

Наша цель — получить аналог оценки (12.2.10), справедливой для одномерного случая. Ход рассуждений в общих чертах тот же самый. Сперва вычисляется оценка для $\|f-\hat{f}_k\|_E$, где $\hat{f}_k$ — кусочно-линейная интерполянта для f, а затем применяется (12.2.6). Однако вывести аналоги неравенства (12.2.7) и (12.2.8) отнюдь не просто; для этого нам понадобится один предварительный результат, доказательство которого носит до некоторой степени технический характер.

Для $f\in\mathscr{H}^j$ положим

$$|f|_j=\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=j}|D^{\alpha}f|^2\,dx.$$

В случае когда интегрирование проводится не по Ω, а по данному треугольнику T, мы будем писать $|f|_{j,T}$, $\|f\|_{j,T}$ и т. д.

12.3.2. Лемма Брэмбла — Хилберта. *Пусть задано $\theta_0>0$. Существуют вещественные числа c_0, c_1, d, такие что для любого $h>0$, для любого замкнутого треугольника T с диаметром h и с углами,* *ограниченными снизу значением* θ_0, *и для любой функции* $f \in \mathscr{H}^2(T)$ *найдется многочлен первой степени* q, *удовлетворяющий условиям*

$$|f-q|_{j,T} \leqslant c_j h^{2-j} |f|_{2,T} \quad (j=0, 1), \tag{12.3.1}$$

$$\sup_{x \in T} |f(x)-q(x)| \leqslant dh|f|_{2,T}. \tag{12.3.2}$$

Доказательство. Сначала докажем (12.3.1). Достаточно сделать это для треугольника с $h=1$; множитель h^{2-j} появится затем в результате сжатия по независимым переменным. Далее, достаточно рассмотреть какой-то один фиксированный треугольник T. Действительно, существует линейное преобразование независимых переменных, переводящее T в любой другой треугольник T_1, и отношение констант, фигурирующих в правых частях неравенств для T_1 и T соответственно, зависит лишь от минимального угла в треугольнике T_1, так что это отношение ограничено, если T_1 удовлетворяет наложенному ограничению на минимальный угол. Наконец, поскольку треугольник T будет фиксирован на протяжении всего дальнейшего доказательства, мы можем опустить всюду индекс T.

Наш первый шаг будет состоять в том, чтобы переформулировать проблему, по существу удалив q из левой части (12.3.1).

12.3.3. Предложение. *Для любой заданной функции* $f \in \mathscr{H}^2(T)$ *существует единственный многочлен первой степени* q, *такой что*

$$\int_T D^\alpha (f-q)\, dx = 0 \quad (|\alpha| \leqslant 1). \tag{12.3.3}$$

Доказательство. Условием (12.3.3) налагаются три ограничения, а у многочлена первой степени от двух переменных как раз три коэффициента. □

Вернемся к доказательству леммы. Возьмем многочлен q, удовлетворяющий условию (12.3.3), и положим $u=f-q$. Нам надо показать, что

$$|u|_j \leqslant c_j |u|_2 \quad (j=0, 1)$$

для всех u, таких что

$$\int_T D^\alpha u\, dx = 0 \quad (|\alpha| \leqslant 1).$$

Будем рассуждать от противного. Если наш результат неверен, то либо для $j=0$, либо для $j=1$ найдется последовательность (u_i)

в $\mathscr{H}^2$, обладающая следующими свойствами:

$$\|u_i\|_2 = 1, \tag{12.3.4}$$

$$|u_i|_j \leqslant i\,|u_i|_2, \tag{12.3.5}$$

$$\int_T D^\alpha u_i\,dx = 0 \quad (|\alpha| \leqslant 1). \tag{12.3.6}$$

Заметим теперь, что теорема вложения Реллиха 11.3.12 верна также и для $\mathscr{H}^2(T)$ (см. Агмон [1965, с. 30]). Следовательно, найдутся такая подпоследовательность, которую мы снова обозначим через (u_i), и такая функция $u \in \mathscr{H}^1$, что $u_i \to u$ в $\|\cdot\|_1$. Поскольку $|u_i|_j \leqslant \|u_i\|_2$, то, в силу (12.3.4) и (12.3.5), $|u_i|_2 \to 0$. Значит, (u_i) является последовательностью Коши в $\mathscr{H}^2$, а потому сходится, причем пределом, очевидно, служит u. Отсюда следует ввиду (12.3.4), что $\|u\|_2 = 1$. Отсюда вытекает также, что $D^\alpha u = 0$ для $|\alpha| = 2$, т. е. u — многочлен первой степени. Но, в силу (12.3.6), $\int_T D^\alpha u\,dx = 0$ $(|\alpha| \geqslant 1)$. Следовательно, согласно предложению 12.3.3, $u = 0$. Это противоречит тому факту, что $\|u\|_2 = 1$.

Чтобы доказать (12.3.2), снова достаточно рассмотреть случай $h = 1$, а потом произвести замену переменных. Имеем

$$\sup_{x \in T} |f(x) - q(x)| \leqslant d_1 \|f - q\|_{2,T} \leqslant d_2 |f|_{2,T};$$

первое неравенство следует из теоремы вложения Соболева 11.3.14, а второе — из (12.3.1). □

Теперь мы, наконец, в состоянии доказать наш основной результат. В тонком слое $\Omega \setminus \Omega_k$, не покрытом триангуляцией, все функции из $\mathscr{M}_k$ обращаются в нуль. Поэтому вклад в ошибку от этой зоны равен $\|f\|_{E,\,\Omega\setminus\Omega_k}$ и наша задача — найти оценку ошибки в Ω_k.

12.3.4. Теорема. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — *ограниченное открытое множество с гладкой границей. Предположим, что функция* $p \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *вещественнозначна и неотрицательна. Тогда существует вещественное число* c, *такое что*

$$\|f - \tilde{f}_k\|_{E,\,\Omega} \leqslant ch\,|f|_{2,\,\Omega_k} + \|f\|_{E,\,\Omega\setminus\Omega_k} \tag{12.3.7}$$

для любой допустимой триангуляции (определение 12.3.1) *и любого решения* f *обобщенной задачи Дирихле для оператора* $-\nabla^2 + p$ *с правой частью* $g \in \mathscr{L}_2$.

Доказательство. Ниже d_1, d_2, ... будут обозначать фиксированные вещественные числа, не зависящие от f и от разбиения. Как и в случае $\mathbb{R}$, достаточно доказать (12.3.7) с $\tilde{f}_k$, замененным на

$\hat{f}_k$ — „кусочно-линейную" интерполяционную функцию для f (т. е. функцию, являющуюся многочленом первой степени на каждом треугольнике и совпадающую с f в узлах), и воспользоваться (12.2.6). Далее, если результат будет установлен для отдельного треугольника, то мы получим (12.3.7), произведя суммирование по треугольникам триангуляции. Поэтому дальше рассматривается один-единственный треугольник T и индекс T в записи опускается. Линейную интерполянту произвольной непрерывной функции u будем обозначать через $\hat{u}$.

В силу леммы 12.3.2 существует многочлен первой степени q, такой что ошибка $\delta = f - q$ удовлетворяет оценке

$$|\delta|_j \leqslant c_j h^{2-j} |f|_2 \quad (0 \leqslant j \leqslant 2). \tag{12.3.8}$$

Так как q — первой степени, то $q = \hat{q}$, а потому

$$\hat{f} = \hat{q} + \hat{\delta} = q + \hat{\delta}.$$

Следовательно, $f - \hat{f} = \delta - \hat{\delta}$ и если нам удастся показать, что оценка (12.3.8) остается справедливой[1] и после замены δ на $\hat{\delta}$. то мы сможем получить оценку для $|f - \hat{f}|_j$, из которой уже легко вывести нужный результат.

В силу определения пирамидальных функций φ_i

$$\hat{\delta}(x) = \sum \hat{\delta}(x_i)\, \varphi_i(x) = \sum \delta(x_i)\, \varphi_i(x),$$

где суммирование производится по вершинам треугольника T. Следовательно, для $|\alpha| \leqslant 1$

$$\begin{aligned} |D^\alpha \hat{\delta}(x)| &= 3 \max_i |\delta(x_i)| \cdot \max_i |D^\alpha \varphi_i(x)| \\ &= 3h^{-|\alpha|} \max_i |\delta(x_i)| \cdot \max_i |h^{|\alpha|} D^\alpha \varphi_i(x)|. \end{aligned} \tag{12.3.9}$$

Ввиду (12.3.2)

$$\max_i |\delta(x_i)| \leqslant d_1 h |f|_2.$$

Далее, последний сомножитель в (12.3.9) ограничен единицей при $\alpha = 0$ (поскольку, по определению, $|\varphi_i(x)| \leqslant 1$ для $x \in T$), а при $|\alpha| = 1$ первые производные функции φ_i мажорируются некоторой константой, умноженной на h^{-1} (вследствие ограничения, наложенного на углы треугольника T). Мы заключаем, что

$$|D^\alpha \hat{\delta}(x)| \leqslant d_2 h^{1-|\alpha|} |f|_2.$$

Теперь возводим в квадрат, интегрируем, суммируем по α, извлекаем квадратный корень и получаем

$$|\hat{\delta}|_j \leqslant d_3 h^{2-j} |f|_2 \quad (0 \leqslant j \leqslant 2).$$

[1] Быть может, с другой константой. — *Прим. перев.*

Это — искомая оценка для $\hat{\delta}$. Оценка для $|f-\hat{f}|_j$ получается отсюда, если вспомнить, что $f-\hat{f}=\delta-\hat{\delta}$ и воспользоваться оценкой (12.3.8). Суммирование по j дает

$$\|f-\hat{f}\|_1 \leqslant d_4 h |f|_2,$$

и оценка (12.3.7) следует теперь из эквивалентности норм $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_1$. □

Эта теорема доставляет желаемую оценку для глобальной скорости сходимости метода конечных элементов в энергетической норме. В заключение сделаем несколько общих замечаний.

В оценку (12.3.7) для ошибки входит сама неизвестная функция f. Как мы видели (пример 12.2.7) в одномерном случае, используя соответствующее априорное неравенство, легко вывести оценку, выраженную через $\mathscr{L}_2$-норму известной правой части g. Аналогичные априорные неравенства имеются и для уравнений с частными производными, но устанавливать их значительно труднее, мы отсылаем читателя за дальнейшими подробностями к книге Фридмана [1969, § 1.17].

Описанный метод доказательства является неконструктивным и не дает численного значения для константы c в оценке (12.3.7), каковую, таким образом, надо рассматривать как асимптотическую. В одномерном случае (пример 12.2.6) оценить значение c несложно, но в общем случае возникают значительные трудности (см., например, Барнхилл и Уайтмэн [1973]).

Метод Ритца, использованный в этой главе, применим и к общим дифференциальным уравнениям с частными производными порядка $2m$, в случае если оператор l формально самосопряжен, а соответствующая билинейная форма коэрцитивна; в противном случае нужно уже применять методы типа метода Галёркина. Разумеется, для уравнений высших порядков может оказаться необходимым привлекать более сложные пробные функции. Это может оказаться необходимым и тогда, когда требуется обеспечить повышенную точность, не прибегая к измельчению разбиения. В качестве пробных функций почти всегда берут функции, являющиеся на каждом элементе многочленами с соответствующими условиями непрерывности на стыках элементов. Центральной здесь является проблема „сходимости“ пробных подпространств к основному соболевскому пространству $\mathscr{H}_0^m$, почему мы и сосредоточили на ней свое внимание в нашем вводном изложении. По данной тематике имеется обширная литература. Помимо уже указанных общих руководств см. Брэмбл и Зламал [1970], где подробно исследуются кусочно-полиномиальные пробные функции на триангуляциях.

В заключение упомянем об одном любопытном моменте. Хотя рассматриваемое уравнение было второго порядка, тем не менее, как мы убедились, достаточно было использовать пробные функции, обладающие лишь кусочно-непрерывными первыми производными и не имеющие даже слабых вторых производных. На самом деле это и совершенно естественно в подходе с соболевскими пространствами. Однако на практике, особенно для уравнений высших порядков, бывает очень утомительно возиться с условиями на стыках элементов, и иногда используют пробные функции, которые *не* принадлежат основному соболевскому пространству. Такие „несогласованные“ элементы не всегда работают, но зачастую дают превосходные результаты (см. Стренг и Фикс [1973, с. 205]). Для определения приемлемости таких пробных функций разработан специальный „метод заплат“ (Митчелл и Уэйт [1977, с. 167]).

Задачи

12.1. Предложите пробное подпространство для метода конечных элементов для оператора d^4/dx^4 на (0, 1) с однородными условиями Дирихле.

12.2. Возьмем $\Omega = (0, 1)$. Пусть $f \in \mathscr{H}^2$ и $\hat{f}$ — линейная функция на Ω, удовлетворяющая условиям $\hat{f}(0) = f(0)$, $\hat{f}(1) = f(1)$. Укажите явно c_1, c_2, такие что

$$|f - \tilde{f}|_j \leqslant c_j |f|_2 \qquad (j = 0, 1),$$

и выведите (12.2.7) и (12.2.8).

12.3. В примере 12.2.7 правую часть $(g, \varphi_j)_0$ надо находить численным интегрированием. Для определенного там $\mathscr{M}_k$ пусть f_k^* — приближение Ритца к решению уравнения с правой частью, равной кусочно-линейной интерполянте g. Покажите, что существует c, такое что для любой функции $g \in \mathscr{H}^2$

$$\|\tilde{f}_k - f_k^*\|_E \leqslant ch^2 \|g''\|_0.$$

12.4. Помимо оценок ошибки в энергетической норме представляют интерес и другие оценки ошибки. Например, средняя поточечная ошибка удовлетворяет оценке

$$\|f - \tilde{f}_k\|_0 \leqslant ch^2 \|g\|_0.$$

На первый взгляд это следует из (12.2.7) и (12.2.11). Почему это не так?

Следующий метод известен как *прием Нитче*. Положим $\delta = f - \tilde{f}_k$ и пусть u — решение обобщенной задачи Дирихле с правой частью δ, а $\tilde{u}_k$ — ритцево приближение к нему. Покажите, что

$$\left(u - \tilde{u}_k, \ \delta\right)_E = \|\delta\|_0^2.$$

Выведите отсюда приведенную выше оценку, используя неравенства из примера 12.2.7.

Глава 13

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СТЕПЕНИ

13.1. Введение

Для ряда важных нелинейных уравнений, возникающих в приложениях, неизвестно никаких общих конструктивных методов решения, и в настоящее время приходится довольствоваться методами, которые дают лишь качественную информацию о поведении системы, описываемой уравнением. Мы рассмотрим сейчас один из самых эффективных таких методов — теорию степени Лерэ — Шаудера.

Вначале, чтобы пояснить используемые в дальнейшем рассуждения, мы разберем некоторые простые ситуации, причем наше обсуждение будет пока носить чисто формальный характер. Пусть D — ограниченный открытый интервал (a, b) и $\varphi: \overline{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Задавшись целью использовать как можно меньше информации относительно φ, попробуем выяснить, что можно сказать о существовании решения уравнения $\varphi(x) = p$, зная одни только значения φ на границе ∂D. Одно из возможных соображений такое. Если φ есть тождественное отображение I, то наше уравнение принимает просто вид $x = p$, а это уравнение имеет решение в D, если $p \in D$. В случае произвольной функции φ геометрически очевидно, что если кривую $y = \varphi(x)$ можно непрерывно деформировать в прямую $y = Ix$ без того, чтобы какая-либо из концевых ее точек пересекала прямую $y = p$, то уравнение $\varphi(x) = p$ также будет иметь решение при условии, что $p \in D$ (рис. 13.1). Возможности этого утверждения как принципа существования чрезвычайно велики, ибо, поскольку используются лишь значения φ на ∂D, нет никаких ограничений ни на коэффициент наклона функции φ, ни на абсолютную величину ее значений. Далее, этот принцип во всяком случае допускает разумную переформулировку для случая высших размерностей, хотя отнюдь не легко предложить, даже хотя бы формально, геометрические соображения в его обоснование. С другой стороны, надо признать, что в качестве неизбежного следствия своей общности этот метод имеет определенные недостатки: он неконструктивен и не пригоден сам по себе для доказательства единственности решения, а при некоторых граничных условиях (таких, как на рис. 13.2) он вообще не действует и никаких заключений о существовании решения сделать с его помощью нельзя.

К указанному выше принципу существования мы пришли, используя соображения типа возмущений, и будет поучительным попытаться для сравнения получить тот же результат при помощи

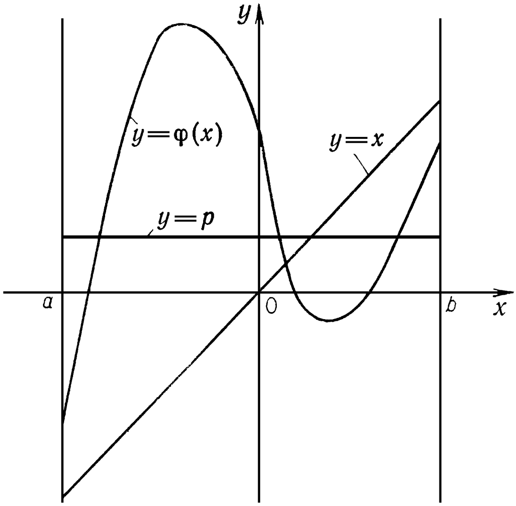

Рис. 13.1.

стандартного метода непрерывности, основанного на теореме о неявной функции 4.4.9. Пусть $\{h_t\}$ — некоторое семейство гладких

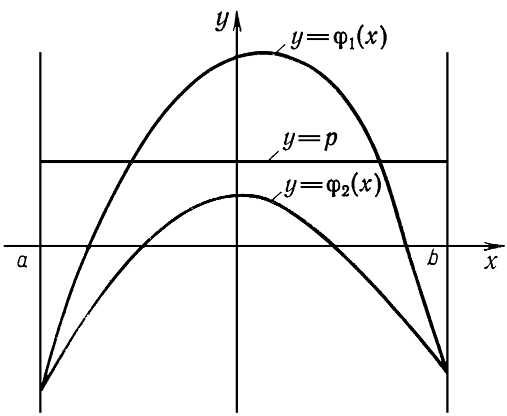

Рис. 13.2.

функций, непрерывно зависящих от параметра t, причем $h_1 = \varphi$, $h_0 = I$. Теорема о неявной функции показывает, что если $p \in D$, то при определенных условиях на $\partial h_t / \partial x$ существование решения уравнения $h_t(x)=p$ для достаточно малых t следует из того факта, что уравнение $h_0(x)=p$ имеет решение; повторяя эту процедуру, можно расширить диапазон таких t. Однако теорема о неявной функции — локальный результат, и нет никакой гарантии, что мы достигнем значения $t=1$. Кроме того, эта процедура не проходит, если $\partial h_t/\partial x$ обращается в нуль. Напротив, соображения, развитые в предыдущем абзаце, не страдают ни одним из этих недостатков и могут быть положены в основу теории больших возмущений, значительно более сильной, чем теория, основанная на методе непрерывности.

Чтобы развить сделанные выше наблюдения в систематическую теорию, естественно спросить, не существует ли некоего целого числа $d(\varphi, p, D)$, — которое можно было бы рассматривать в некотором смысле как результат счета числа решений уравнения $\varphi(x)=p$ и которое мы будем называть *степенью* [1], — обладающего следующими свойствами:

(i) Степень $d(\varphi, p, D)$ определена для любого ограниченного открытого множества D и любой функции φ, непрерывной на $\bar{D}$, такой что $\varphi(x)\neq p$ при $x\in\partial D$, и зависит лишь от p и значений φ на ∂D.

(ii) Степень инвариантна относительно любого непрерывного возмущения данной функции, при котором решение не переходит через границу. Это условие можно сформулировать точно следующим образом. Пусть $h_t(x)$ непрерывно зависит от t и x для $x\in\bar{D}$ и $t\in[0, 1]$, причем $h_t(x)\neq p$ для любых $x\in\partial D$ и $t\in[0, 1]$. Тогда $d(h_t, p, D)$ не зависит от t. Такое семейство $\{h_t\}$ называют *гомотопией*, а сформулированное выше свойство — свойством *гомотопической инвариантности* степени.

(iii) $d(I, p, D)=0$, если $p\notin\bar{D}$, и 1, если $p\in D$.

(iv) Если $d(\varphi, p, D)\neq 0$, то уравнение $\varphi(x)=p$ имеет решение в D.

Предположив, что такое целое число существует, нетрудно заново получить предыдущий результат для функции на рис. 13.1. Действительно, в силу (ii) с $h_t=t\varphi+(1-t)I$ и (iii), $d(\varphi, p, D)=1$, и существование решения следует из (iv). Заметим, что (iv) не дает никакой информации о существовании решений, если $d(\varphi, p, D)=0$; как видно из рис. 13.2, уравнение $\varphi(x)=p$ может при этом иметь решения, а может и не иметь.

Посмотрим теперь, как можно было бы дать явное определение степени. На рис. 13.1 функции φ и I гомотопны, тем не менее уравнение $\varphi(x)=p$ имеет три решения, а уравнение $Ix=p$ — всего одно. Следовательно, если мы хотим, чтобы выполнялось усло-

[1] По-английски degree. Отсюда буква d для обозначения степени. — *Прим. перев.*

вие (ii), то, очевидно, $d(\varphi, p, D)$ не может непосредственно равняться числу решений. Более обещающим выглядит подход, при котором каждому решению приписывается знак, зависящий от направления, в котором график функции φ пересекает прямую $y = p$, и степень определяется как суммарное число решений *с учетом их знаков*. Тогда в приведенном выше примере, хотя два решения — одно со знаком плюс, другое со знаком минус — и теряются, когда φ превращается в I, но степень остается неизменной. Итак, положим

$$d(y,\ p,\ D) = \sum_j \operatorname{sgn} \varphi'(x_j), \tag{13.1.1}$$

где сумма берется по всем решениям x_j уравнения $\varphi(x) = p$, лежащим в D; если в D решений нет, то полагаем $d(\varphi, p, D) = 0$. Это определение имеет смысл, только если функция φ дифференцируема, $\varphi'(x_j) \neq 0$ для любого j и существует лишь конечное число решений, но мы пока игнорируем все эти технические затруднения и просто заметим, что степень, определенная таким образом, удовлетворяет приведенным выше условиям (i) — (iv), если функция φ хорошо себя ведет.

В одномерном случае геометрическая картина легко обозрима и проверить, что формула (13.1.1) дает целое число, обладающее желаемыми свойствами, нетрудно. В высших размерностях представить себе геометрию происходящего гораздо труднее и не получается даже обойтись чисто формальным обобщением определения 13.1.1, поскольку неясно, как интерпретировать правую часть. К счастью, для двумерного случая есть один результат из теории функций комплексной переменной, который подсказывает, каким должно быть искомое обобщение.

Пусть D — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^2$, граница которой представляет собой простой замкнутый контур (в смысле теории функций комплексной переменной), и φ: $\bar{D} \to \mathbb{R}^2$ — отображение $(\xi, \eta) \longmapsto (u, v)$. Предположим сперва, что u и v — соответственно вещественная и мнимая части некоторой аналитической функции φ от $x = \xi + i\eta$, причем $\varphi(x) \neq p$ на ∂D, и пусть $x_1, \ldots$ $\ldots, x_k$ — решения уравнения $\varphi(x) = p$ в D. Положим

$$d(\varphi,\ p,\ D) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - p}\, dx. \tag{13.1.2}$$

По теореме Коши

$$d(\varphi,\ p,\ D) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_j} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) - p}\, dx, \tag{13.1.3}$$

где C_j для каждого j — маленькая окружность с центром x_j, не содержащая внутри себя никаких других решений, кроме x_j. Теорема о вычетах показывает, что $d(\varphi, p, D)$ есть неотрицательное целое число, равное сумме кратностей решений, и, как нетрудно проверить с помощью стандартных методов теории функций комплексной переменной, все условия (i) — (iv) действительно выполняются. Таким образом, мы движемся в нужном направлении. Однако, если мы хотим, чтобы сфера действия определения степени не ограничивалась одними аналитическими функциями, формулу (13.1.3) надо видоизменить.

Чисто формально это видоизменение проводится так. Перепишем (13.1.3) в виде

$$d(\varphi,\ p,\ D) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi} \int_{C_j} d\left\{\operatorname{arc\,tg} \frac{v-\beta}{u-\alpha}\right\}, \tag{13.1.4}$$

где $p = \alpha + i\beta$. Теперь, когда аналитичность больше не предполагается, интегралы не обязательно будут положительными. Тем не менее, поскольку каждый интеграл равен, очевидно, числу оборотов вектора, идущего от точки $p = (\alpha, \beta)$ в точку $\varphi = (u, v)$, когда (ξ, η) совершает один оборот вокруг решения, несложное рассуждение с использованием линеаризации позволяет вычислить $d(\varphi, p, D)$, по крайней мере для случая, когда нули функции $\varphi(x) - p$ простые. Действительно, по теореме Тэйлора, в соответствующей окрестности точки x_j

$$\varphi(x) - p = \varphi'(x_j)(x - x_j) + r,$$

где $\varphi'(x_j)$ — матрица Якоби функции φ в точке x_j, а r — малый остаточный член. Если x_j — простой нуль, то матрица $\varphi'(x_j)$ невырожденна и, значит, задает линейную биекцию $\mathbb{R}^2$ на себя; следовательно, когда точка x делает один оборот по окружности C_j, ее образ $\varphi'(x_j)(x - x_j)$ совершает один оборот по некоторому эллипсу C_j' в направлении, определяемом знаком якобиана $J_\varphi(x_j)$. Итак, значение j-го интеграла в (13.1.4) равно $\operatorname{sgn} J_\varphi(x_j)$. Тем самым мы получаем следующее определение степени:

$$d(\varphi,\ p,\ D) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sgn} J_\varphi(x_j); \tag{13.1.5}$$

если решений в D нет, то полагаем $d(\varphi, p, D) = 0$. По сравнению с одномерным определением (13.1.1) это гораздо более перспективная формула, поскольку якобиан имеет четкий смысл для любого конечного числа измерений.

Наша первая цель в этой главе — показать, что степень с указанными выше свойствами (i) — (iv) может быть определена для некоторых определенных классов операторов в банаховых пространствах. Сначала степень будет определена для непрерывных операторов в конечномерных пространствах; отправной точкой здесь служит формула (13.1.5). Именно на этом этапе приходится преодолевать наибольшие технические трудности. В качестве демонстрации силы теории дается простое доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке. Следующий шаг — переход к бесконечномерному случаю. Оказывается, что прямое обобщение на произвольные непрерывные операторы невозможно. Самый известный и самый полезный класс операторов, для которых можно определить степень, образуют операторы вида $I+A$, где A — компактный оператор; для распространения конечномерной теории на бесконечномерный случай используется соответствующая предельная процедура. Получаемые таким образом результаты можно трактовать как теорию (больших) компактных возмущений тождественного оператора. Результат, приносящий наибольшую пользу, — это знаменитая теорема Лерэ — Шаудера о неподвижной точке 13.3.6, (iii), бесконечномерный аналог приведенного выше свойства (iv) с φ, замененным на $I+A$.

Стоит отметить два общих момента. Во-первых, хотя формула (13.1.5) и является отправной точкой для нашего определения, саму ее не используют для вычисления степени ни в каких приложениях. В самом деле, в (13.1.5) предполагается, что решения уже известны, в то время как цель всего исследования — найти их. Когда теоретическое изучение вопроса завершено, эта формула уже не играет больше никакой роли, поскольку практическое вычисление степени основано на указанном выше свойстве (ii) гомотопической инвариантности степени. Во-вторых, с точки зрения приложений самих по себе обычно неважно знать довольно-таки технические подробности анализа, лежащего в основе теории. В самом деле, результаты теории, суммированные в теореме 13.3.6, элегантны и просты, а их применение осуществляется непосредственно — по крайней мере в принципе.

Теория степени нашла с течением лет множество приложений и является теперь стандартным методом нелинейного анализа. Она чрезвычайно полезна при исследовании нелинейных уравнений с частными производными, таких как уравнения Навье — Стокса, для которых она и была первоначально изобретена. Однако для таких уравнений весьма труден этап предварительного анализа, и мы ограничимся здесь задачами, для которых требующиеся приготовления не так дорого стоят, — по существу теми, в которых рассматриваемые дифференциальные уравнения легко сводятся к интегральным. В § 13.4 дается одно приложение к H-уравнению радиационного переноса Чандрасекхара, которое в простом контексте позволяет подчеркнуть основные моменты рассуждений. Развитая теория будет затем играть существенную роль в последующем обсуждении нелинейных задач на собственные функции.

Первоначально теория степени опиралась в своем развитии на глубокие результаты алгебраической топологии. Хотя этот подход и позволяет лучше выявить лежащую в основе геометрическую структуру, он требует значительной теоретической подготовки, и здесь мы следуем аналитическому подходу, как он описан, например, у Бергера и Бергера [1968] или Дж. Шварца [1969]. По поводу приложений к интегральным уравнениям см. книгу Красносельского [1956], к дифференциальным уравнениям — книгу Бергера [1977] и недавний обзор Серрина [1976]. Стандартное руководство по уравнениям Навье — Стокса — монография Ладыженской [1970], а сравнительно элементарное введение в теорию этих уравнений представлено у Сэттингера [1973].

13.2. Степень в конечномерном случае

Разовьем теперь сделанные выше эвристические замечания в строгую теорию степени в *вещественных* конечномерных банаховых пространствах. Поскольку всякое такое пространство можно отождествить с $\mathbb{R}^n$ при помощи подходящего выбора базиса, достаточно провести анализ для самого $\mathbb{R}^n$.

Будем использовать следующие обозначения. Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\|\cdot\|$. Всюду далее $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество с замыканием $\bar{D}$ и границей ∂D. Рассматриваемые отображения φ: $\bar{D} \to \mathbb{R}^n$ всегда принадлежат $\mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, а иногда и $\mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$. Эти пространства снабжаются соответственно sup-нормой (обозначаемой в этом параграфе для большей выразительности через $\|\cdot\|\mathscr{C}$) и нормой $\|\cdot\|\mathscr{C}^1$, превращающими их в банаховы пространства (следствие 1.4.9 и лемма 1.4.10). Как обычно, $\varphi(S)$ обозначает образ множества S при отображении φ.

Пусть задана точка $p \in \mathbb{R}^n$. Степень $d(\varphi, p, D)$ будет определена лишь для случая, когда уравнение $\varphi(x) = p$ не имеет решений на ∂D, другими словами, когда $p \notin \varphi(\partial D)$. Для таких φ, поскольку граница ∂D компактна, а φ непрерывна, мы имеем, в силу теоремы 5.3.3, $\operatorname{dist}(p, \varphi(\partial D)) > 0$. Непосредственного применения неравенства треугольника достаточно для того, чтобы доказать остальную часть следующего утверждения:

13.2.1. Лемма. *Для заданного ограниченного открытого множества D пусть φ, $\psi \in \mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ и $p \notin \varphi(\partial D)$. Тогда $r = \operatorname{dist}(p, \varphi(\partial D)) > 0$, и точки p, p_0 лежат в одной и той же компоненте*[1] *множества $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial D)$, если $\|p - p_0\| < r/2$. Если $\|\varphi - \psi\|\mathscr{C} < r/2$, то $p \notin \psi(\partial D)$.*

13.2.2. Определение. Для $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ матрицу Якоби (производную Фреше) функции φ в точке x будем обозначать через

[1] *Компонентой* открытого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ называется всякое максимальное подмножество в S, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в S (и, значит, не пересекающей ∂S).

$\varphi'(x)$, а соответствующий якобиан (определитель этой матрицы) — через $J_\varphi(x)$.

Критической точкой функции φ называется всякая точка $x \in D$, такая что $J_\varphi(x) = 0$. Множество всех критических точек функции φ будем обозначать через Z.

Наша цель — определить степень для D, p, φ, удовлетворяющих условиям:

(i) D — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi \in \mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$;

(ii) у уравнения $\varphi(x) = p$ нет решений, лежащих на ∂D, т. е. $p \notin \varphi(\partial D)$.

Однако отправной точкой для определения служит формула (13.1.5), и сначала нам придется, чтобы эта формула имела смысл, наложить следующие дополнительные ограничения:

(iii) $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$;

(iv) ни одно решение уравнения $\varphi(x) = p$ не является критической точкой функции φ, т. е. $p \notin \varphi(Z)$.

При этих условиях множество решений $\varphi^{-1}(p) = \{x\colon x \in D,\ \varphi(x) = p\}$ конечно. Действительно, если бы это было не так, то ввиду компактности $\bar{D}$ нашлась бы последовательность (x_j) попарно различных точек из $\varphi^{-1}(p)$, сходящаяся к некоторой точке $x \in \bar{D}$. Поскольку φ непрерывна, то $\varphi(x) = p$ и, в силу (ii), $x \in D$. Таким образом, в любой окрестности точки x содержалось бы бесконечное число решений. Но эта возможность исключается теоремой о неявной функции 4.4.9, ибо, в силу (iv), $J_\varphi(x) \neq 0$. Поэтому имеет смысл приводимое ниже определение, которое, следует заметить, не зависит от выбора базиса. Мы полагаем

$$d(\varphi,\ p,\ D) = \begin{cases} 0, & \text{если}\ \ p \notin \varphi(D), \\ \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_\varphi(x), & \text{если}\ \ p \in \varphi(D). \end{cases} \tag{13.2.1}$$

В общих чертах дальнейший план действий состоит в том, чтобы последовательно в два этапа снять ограничения (iv) и (iii). Во-первых, в случае если $p \in \varphi(Z)$, мы используем тот факт, что существует точка $p_0 \notin \varphi(Z)$, сколь угодно близкая к p, и полагаем $d(\varphi, p, D) = d(\varphi, p_0, D)$. Во-вторых, поскольку $\mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, найдется функция $\varphi_0 \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, сколь угодно близкая к любой данной функции $\varphi \in \mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, и мы полагаем $d(\varphi, p, D) = d(\varphi_0, p, D)$. Чтобы оправдать эту процедуру, надо показать, что так определенная степень не зависит от выбора p_0, φ_0, и именно при установлении этого факта возникает бо́льшая часть неприятных технических моментов в конечномерной теории степени. Нам понадобятся три леммы. Первая, которую мы заимствуем без доказательства из книги Дж. Шварца [1969, с. 54], позволяет доказать существование подходящего p_0. Другие две показывают соответственно, что при надлежащих условиях степень $d(\varphi, p, D)$, определенная формулой (13.2.1), инвариантна относительно малых по норме $\|\cdot\|\mathscr{C}^1$ изменений φ и не меняется при изменении p, если p не пересекает $\varphi(\partial D)$.

13.2.3. Лемма Сарда. *Если $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, то мера Лебега множества $\varphi(Z)$ равна нулю.*

13.2.4. Лемма. *Пусть p, φ, D удовлетворяют приведенным выше условиям* (i)—(iv). *Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если $\psi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ и $\|\varphi - \psi\|_{\mathscr{C}^1} < \varepsilon$, то $p \notin \psi(\partial D)$, степень $d(\psi, p, D)$ определена и $d(\varphi, p, D) = d(\psi, p, D)$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 13.2.1. Далее, пусть $x_1, \ldots, x_k$ — решения уравнения $\varphi(x) = p$. В силу (iv), $J_\varphi(x_i) \neq 0$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, и поскольку $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, то функция $J_\varphi(\cdot)$ непрерывна, так что для некоторого $\delta > 0$ якобиан J_φ не обращается в нуль ни в одном из замкнутых шаров $\bar{S}(x_i, \delta)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Кроме того, якобиан $J_\varphi(x)$ непрерывен и как функция от φ (т. е. как отображение пространства $\mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}$), откуда следует, что при достаточно малых ε якобиан $J\;(x)$ также отличен от нуля и имеет тот же знак, что и $J_\varphi(x)$, в каждом из этих шаров. Мы сейчас покажем, уменьшая δ и ε далее, если это окажется необходимым, что у уравнения $\psi(x) = p$ существует ровно по одному решению $\bar{x}_i$ в каждом из наших шаров и нет ни одного решения вне этих шаров. Этого будет достаточно для установления желаемого результата, поскольку степень $d(\varphi, p, D)$ тогда, очевидно, будет определена и мы будем иметь

$$d(\varphi,\ p,\ D) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sgn} J_\varphi(x)_i = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J_\varphi(\bar{x}_i) = d(\psi,\ p,\ D).$$

Определим функцию h: $D \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, полагая $h(x, t) = \varphi(x) - p + t[\psi(x) - \varphi(x)]$. Отметим, что $h(x, 0) = \varphi(x) - p$, $h(x, 1) = \psi(x) - p$. Применим следствие 4.4.10 из теоремы о неявной функции к шару $\bar{S}(x_i, \delta)$, произведя следующую замену обозначений: $A = h$, $f = x$, $g = t$, $g_0 = 0$. Выбрав надлежащее δ, замечаем, что условия (4.4.5)—(4.4.7) выполняются просто при $t_0 = 1$, если ε достаточно мало, ибо

$$\|A_1(f,\ 0) - A_1(f,\ g)\| = \|t\,[\psi' - \varphi']\|_{\mathscr{C}} \leqslant t\varepsilon,$$
$$\|A(f_0,\ g)\| - t\,\|\varphi(x_i) - \psi\, x_i)\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, уравнение $\psi(x) = p$ имеет в точности одно решение в шаре $\bar{S}(x_i, \delta)$. Повторяем это рассуждение для каждого $i = 1, \ldots, k$, последовательно уменьшая δ и ε, если необходимо. Остается только заметить, что, поскольку существует такое

$\eta > 0$, что $\|\varphi(x)-p\| \geqslant \eta$ на $\bar{D} \setminus \bigcup \bar{S}(x_i, \delta)$, то уравнение $\psi(x)=p$ не имеет иных решений, кроме уже полученных, если $\varepsilon < \eta$. □

13.2.5. Лемма. *Пусть* $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ *и* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$. *Предположим, что* $p_1, p_2 \in \varphi(\partial D) \cup \varphi(Z)$. *Тогда если* p_1 *и* p_2 *принадлежат одной и той же компоненте множества* $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial D)$, *то*

$$d(\varphi, p_1, D) = d(\varphi, p_2, D). \tag{13.2.2}$$

Доказательство. Наш первый шаг будет состоять в том, чтобы получить другую формулу для степени. Мы покажем, что если $p \notin \varphi(\partial D) \cup \varphi(Z)$, то для достаточно малого ε (зависящего от φ)

$$d(\varphi, p, D) = \int_D j_\varepsilon(\varphi(x)-p) J_\varphi(x)\, dx, \tag{13.2.3}$$

где j_ε — сглаживатели из определения 2.6.6, так что носители лежат в $\bar{S}(0, \varepsilon)$. Выписанный выше интеграл зависит лишь от поведения φ в малых окрестностях решений $x_1, \ldots, x_k$, что согласуется с определением степени, и наш результат получается заменой переменных $y = \varphi(x) - p$ после разбиения множества D на маленькие шары, в которых $J_\varphi(x) \neq 0$, и зону, где подынтегральное выражение равно нулю. Проведем это рассуждение в подробностях.

По соображениям компактности найдется такая окрестность U точки p, что

$$U \cap \{\varphi(Z) \cup \varphi(\partial D)\} = \varnothing.$$

Далее, функция $J_\varphi(\cdot)$ непрерывна и не обращается в нуль ни в какой точке-решении, поскольку $p \notin \varphi(Z)$. Следовательно, существуют попарно непересекающиеся открытые шары $S_i = S(x_i, \delta)$, $i = 1, \ldots, k$, ни в одном из которых J_φ не обращается в нуль, и, выбрав δ достаточно малым, мы можем обеспечить, чтобы $\bigcup \varphi(S_i) \subset U$. В силу теоремы о неявной функции 4.4.9, δ можно выбрать таким, чтобы ограничения φ на каждый шар S_i были гомеоморфизмами на соответствующие окрестности точки p, содержащиеся в U. Отсюда следует, что при некотором $\varepsilon > 0$ мы будем иметь $\|\varphi(x)-p\| > \varepsilon$ для $x \in \bar{D} \setminus \bigcup S_i \equiv V$, и поскольку носитель j_ε лежит в $S(0, \varepsilon)$, то $j_\varepsilon(\varphi(x)-p) = 0$ для $x \in V$, а на каждом S_i якобиан J_φ имеет постоянный знак. Произведя в каждом S_i замену переменных $y = \varphi(x) - p$, получаем (13.2.3) следующим образом:

$$\int_D j_\varepsilon(\varphi(x)-p) J_\varphi(x)\, dx = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} J_\varphi(x_i) \int_{S_i} j_\varepsilon(\varphi(x)-p) |J_\varphi(x)|\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} J_\varphi(x_i) \int_{S_i} j_\varepsilon(y)\, dy = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} J_\varphi(x_i) = d(\varphi, p, D).$$

Вывод равенства (13.2.2) основан на том простом наблюдении, что если у функции $v \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ носитель лежит в D, то по известной теореме анализа

$$\int_D \operatorname{div} v\, dx = 0. \tag{13.2.4}$$

Теперь мы сошлемся на трудный результат из книги Дж. Шварца [1969, с. 63—66], утверждающий, что если в дополнение к уже сделанным предположениям $\varphi \in \mathscr{C}^2(D, \mathbb{R}^n)$, то функции

$$[j_\varepsilon(\varphi(x) - p_1) - j_\varepsilon(\varphi(x) - p_1 + p_2)]\, J_\varphi(x),$$
$$[j_\varepsilon(\varphi(x) - p_2) - j_\varepsilon(\varphi(x) - p_1 + p_2)]\, J_\varphi(x)$$

являются дивергенциями некоторых функций из $\mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ с носителями в D. Следовательно, в силу (13.2.3) и (13.2.4), для достаточно малых ε

$$\begin{aligned} d(\varphi, p_1, D) &= \int_D j_\varepsilon(\varphi(x) - p_1)\, J_\varphi(x)\, dx \\ &= \int_D j_\varepsilon(\varphi(x) - p_1 + p_2)\, J_\varphi(x)\, dx \\ &= \int_D j_\varepsilon(\varphi(x) - p_2)\, J_\varphi(x)\, dx = d(\varphi, p_2, D). \end{aligned}$$

Осталось сделать последний шаг — освободиться от ограничения $\varphi \in \mathscr{C}^2(D, \mathbb{R}^n)$. Пространство $\mathscr{C}^2(D, \mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$. По лемме 13.2.4, для некоторой функции $\psi \in \mathscr{C}^2(D, \mathbb{R}^n)$, достаточно близкой к φ по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$, степени $d(\psi, p_1, D)$ и $d(\psi, p_2, D)$ обе определены и равны соответственно $d(\varphi, p_1, D)$ и $d(\varphi, p_2, D)$. Формула (13.2.2) следует поэтому из результата, полученного в предыдущем абзаце. □

Мы в состоянии теперь удалить из определения степени условие (iv), т. е. условие, что $p \notin \varphi(Z)$. В силу леммы Сарда 13.2.3 множество тех точек, которые не являются образами критических точек функции φ (т. е. не лежат в $\varphi(Z)$), плотно в каждой компоненте множества $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial D)$. Действительно, если бы это было не так, то $\varphi(Z)$ содержало бы некоторый открытый шар, имеющий ненулевую меру, — возможность, исключаемая леммой Сарда. Возьмем любое p_0, не лежащее в $\varphi(Z)$, но принадлежащее той же компоненте $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial D)$, что и p, и положим $d(\varphi, p, D) = d(\varphi, p_0, D)$. По лемме 13.2.5 степень $d(\varphi, p, D)$ одна и та же для всех таких p_0, и та же лемма показывает фактически, что $d(\varphi, p, D)$ не меняется при изменении p, если p не пересекает $\varphi(\partial D)$.

Чтобы избавиться от условия $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, нужно сперва усилить лемму 13.2.4.

13.2.6. Лемма. *Лемма* 13.2.4 *остается справедливой, даже если* $p \in \varphi(Z)$.

Доказательство. В силу леммы Сарда найдется такая точка $p_0 \in \varphi(Z)$, что $\|p - p_0\| < 2^{-1} \operatorname{dist}(p, \varphi(\partial D))$, так что p и p_0 лежат в одной и той же компоненте множества $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial D)$ (по лемме 13.2.1). Поэтому для достаточно малого ε и любой функции $\psi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\|\varphi - \psi\|_{\mathscr{C}^1} < \varepsilon$, точки p и p_0 будут находиться в одной и той же компоненте множества $\mathbb{R}^n \setminus \psi(\partial D)$. Уменьшая, если надо, ε, можно обеспечить (лемма 13.2.4), чтобы $d(\varphi, p_0, D) = d(\psi, p_0, D)$. Наш результат следует теперь из того, что в силу леммы 13.2.5 $d(\varphi, p, D) = d(\varphi, p_0, D)$ и $d(\psi, p, D) = d(\psi, p_0, D)$. □

13.2.7. Следствие. *Пусть* $\{h_t\}$ — *семейство отображений* $\bar{D} \to \mathbb{R}^n$, *определенное для* $t \in [0, 1]$. *Предположим, что* $h_t \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ *для каждого* t *и что* h_t *непрерывно зависит от* t *в смысле нормы* $\mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$. *Тогда, если* $p \notin h_t(\partial D)$ *для любого* t, *то* $d(h_t, p, D)$ *не зависит от* t.

Доказательство. Замечаем просто, что в силу предыдущей леммы степень $d(h_t, p, D)$ постоянна в некоторой окрестности каждого t, а потому является непрерывной функцией от t. Поскольку она целозначна, она должна быть постоянной.

13.2.8. Лемма. *Пусть заданная функция* $\varphi \in \mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ *такова, что* $p \in \varphi(\partial D)$, *и пусть* $\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$. *Тогда если* $\|\varphi - \psi_1\|_{\mathscr{C}}$, $\|\varphi - \psi_2\|_{\mathscr{C}} < 2^{-1} \operatorname{dist}(p, \varphi(\partial D))$, *то* $d(\psi_1, p, D) = d(\psi_2, p, D)$.

Доказательство. Положим $h_t(x) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x)$ для $t \in [0, 1]$ и $x \in \bar{D}$. Легко проверить, что $p \neq h_t(x)$ для любых $x \in \partial D$ и $t \in [0, 1]$. Далее,

$$\|h_{t_1} - h_{t_2}\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant |t_1 - t_2| [\|\varphi_1\|_{\mathscr{C}^1} + \|\psi_2\|_{\mathscr{C}^1}],$$

а значит, h_t — непрерывная функция от t в смысле нормы $\mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$. Наш результат вытекает поэтому из следствия 13.2.7. □

Мы можем, наконец, снять условие (iii), т. е. условие, что $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$. Поскольку $\mathscr{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, найдется функция $\varphi_0 \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, такая что $\|\varphi - \varphi_0\|_{\mathscr{C}} < 2^{-1} \operatorname{dist}(p, \varphi(\partial D))$. Положим $d(\varphi, p, D) = d(\varphi_0, p, D)$. В силу предыдущей леммы это определение корректно. Описанные выше этапы определения степени суммируются в приводимом ниже окончательном определении.

13.2.9. Определение. Пусть D — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $\varphi\colon \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ принадлежит $\mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ и ни одно решение уравнения $\varphi(x) = p$ не лежит на ∂D. **Степень** $d(\varphi, p, D)$ определяется следующим образом.

(i) Если $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ и $p \notin y(Z)$, то полагаем

$$d(\varphi,\ p,\ D) = \begin{cases} 0 & \text{при } p \notin \varphi(\bar{D}), \\ \sum\limits_{x_i \in \varphi^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_\varphi(x_i) & \text{при } p \in \varphi(D). \end{cases}$$

(ii) Если $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, а $p \in \varphi(Z)$, берем любую точку p_0, не лежащую в $\varphi(Z)$, но находящуюся в той же компоненте множества $\mathbb{R}^n \diagdown \varphi(\partial D)$, что и p, и полагаем $d(\varphi, p, D) = d(\varphi, p_0, D)$.

(iii) Если $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, то берем любую функцию $Z_0 \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, такую что $\|\varphi - \varphi_0\|_{\mathscr{C}} < 2^{-1}\operatorname{dist}(p, \varphi(\partial D))$, и полагаем $d(\varphi, p, D) = d(\varphi_0, p, D)$.

Определение степени дано. Остается только проверить, что, как было обещано во введении, степень обладает указанными там свойствами (i) — (iv).

13.2.10. Определение. Пусть D — подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$, и пусть $\{h_t\}$, $t \in [0, 1]$, — семейство операторов, отображающих $\bar{D}$ в $\mathscr{B}$. Предположим, что функция $h_t(x)$ непрерывна по (совокупности) t и x (т. е. непрерывна как отображение $[0, 1] \times \bar{D} \to \mathscr{B}$). Тогда такое семейство называется **гомотопией**, а любые два его члена называют **гомотопными** между собой.

13.2.11. Теорема. *Пусть D — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\varphi \in \mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ и ни одно решение уравнения $\varphi(x) = p$ не лежит на ∂D. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *$d(\varphi, p, D)$ есть целозначная функция, зависящая лишь от p и значений φ на ∂D. Эта функция постоянна по p, если p не пересекает $\varphi(\partial D)$, и постоянна по φ, если φ (оставаясь в $\mathscr{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$) изменяется так, что образ границы $\varphi(\partial D)$ не проходит через точку p.*

(ii) Гомотопическая инвариантность степени. *Пусть $\{h_t\}$ — гомотопия, такая что $h_t(x) = p$ для любых $x \in D$ и $t \in [0, 1]$. Тогда $d(h_t, p, D)$ не зависит от t.*

(iii) *$d(I, p, D) = 1$, если $p \in D$, и 0, если $p \notin \bar{D}$.*

(iv) *Если $d(\varphi, p, D) \neq 0$, то уравнение $\varphi(x) = p$ имеет по крайней мере одно решение в D.*

Доказательство. (ii) Замечаем, что по лемме 13.2.8 степень постоянна в некоторой окрестности каждого t, и дальше рассуждаем, как при доказательстве следствия 13.2.7. (i) Пусть φ_1 и φ_2 имеют одинаковые значения на ∂D. Рассматривая гомотопию $h_t = t\varphi_1 +$

$(1-t)\varphi_2$ и используя (iii), видим, что $d(\varphi_1, p, D) = d(\varphi_2, p, D)$. Остальные утверждения следуют из лемм 13.2.8 и 13.2.5 соответственно. (iii) очевидно. (iv) Покажем, что если решений в D нет, то $d(\varphi, p, D) = 0$. Выберем функцию $\psi \in \mathscr{C}^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, такую что $\|\varphi - \psi\|_{\mathscr{C}} < 2^{-1}\operatorname{dist}(p, \varphi(\bar{D}))$. Тогда $p \in \psi(\bar{D})$ и $d(\psi, p, D) = 0$ по определению 13.2.9, (i). В силу леммы 13.2.8, $d(\varphi, p, D) = d(\psi, p, D)$, откуда и следует утверждаемый результат. □

Завершим наше обсуждение теории одним замечанием, касающимся определения степени. В силу утверждения (i) последней теоремы, если точка p фиксирована, то степень $d(\varphi, p, D)$ зависит только от значений φ на ∂D. Поэтому естественно спросить, нельзя ли определить степень для непрерывной функции φ, заданной лишь на ∂D, при условии что $p \notin \varphi(\partial D)$. Очевидно, что это можно сделать, если существует непрерывное продолжение φ на всё $\bar{D}$ (какова явная форма такого продолжения, разумеется, не имеет значения), однако если число измерений больше единицы, то совсем неясно, существуют ли такие продолжения. Как утверждает теорема Титце о продолжении, в конечномерном случае — всегда существуют. Замечательно, что аналогичный результат справедлив даже и в бесконечномерном случае; мы сформулируем его здесь, потому что он нам понадобится чуть погодя. Доказательство можно найти у Дж. Шварца [1969, с. 94].

13.2.12. Теорема Дугунджи о продолжении. *Пусть X — замкнутое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$, а множество $S \subset \mathscr{B}$ выпукло. Предположим, что отображение A: $X \to S$ непрерывно. Тогда, каково бы ни было подмножество Y в $\mathscr{B}$, содержащее X, A допускает непрерывное продолжение $\tilde{A}$: $Y \to S$.*

Несомненно, анализ, лежащий в основе теории степени, достаточно труден. Однако это не должно затемнять того факта, что применение теории на практике в принципе чрезвычайно просто, и бо́льшая часть того, что при этом важно знать, содержится в теореме 13.2.11. В общих чертах дело обстоит следующим образом. Степень определена для любой непрерывной функции φ, такой что уравнение $\varphi(x) = p$ не имеет решений на ∂D. На практике степень почти никогда не вычисляют, основываясь на определении 13.2.9; обычно при вычислении степени опираются на ее гомотопическую инвариантность (теорема 13.2.11, (ii)), при помощи стандартных методов непрерывно преобразуя φ в тождественное отображение и используя известное значение $d(I, p, D)$. Наконец, если степень отлична от нуля, то утверждением (iv) теоремы 13.2.11 гарантируется существование решения (но, конечно, не его единственность). Приводимые ниже примеры призваны пояснить некоторые из этих моментов.

13.2.13. Пример. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество, содержащее начало, и пусть L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Будем обозначать через L также и матрицу этого оператора в каком-нибудь базисе. Очевидно, что степень $d(L, 0, D)$ определена в том и только том случае, если оператор L инъективен (иначе имелось бы решение, лежащее на ∂D), но в таком случае $\det L \neq 0$ и, согласно определению 13.2.9, (i), $d(L, 0, D) = \operatorname{sgn} \det L$. Но $\det L$ равен просто произведению собственных значений λ_i с учетом их алгебраической кратности (напомним, что *алгебраическая кратность* собственного значения λ_i — это размерность подпространства $\bigcup\limits_k N((\lambda_i I - L)^k))$. Поскольку все элементы матрицы L вещественны, ее собственные значения либо вещественны, либо встречаются комплексно-сопряженными парами. Следовательно,

$$d(L,\ 0,\ D) = \operatorname{sgn} \prod_1^n \lambda_i = (-1)^\beta,$$

где β — сумма алгебраических кратностей отрицательных собственных значений.

13.2.14. Пример. В $\mathbb{R}$ возьмем $D = (-1, 1)$ и $\varphi(x) = x^2(x - 1/2)/2$. Тогда ∂D представляет собой просто пару точек ± 1, и $\varphi(1) = 1/4$, $\varphi(-1) = -3/4$. Таким образом, степень $d(\varphi, p, D)$ определена для всех $p \neq 1/4$, $-3/4$. Посмотрим сначала, как вычисляется степень непосредственно на основе определения 13.2.9. Какую часть этого определения использовать, зависит от того, обращается ли J_φ в нуль в какой-нибудь из точек-решений $x = 0$, $1/2$, т. е. равна ли в какой-нибудь из этих точек нулю производная от φ. Очевидно, последнее имеет место тогда и только тогда, когда $p = 0$. Если $p \neq 0$, то степень легко находится по части (i) определения 13.2.9: $d(\varphi, p, D) = 1$ или 0 в соответствии с тем, лежит p в интервале $(-3/4,\ 1/4)$ или вне интервала $[-3/4,\ 1/4]$. В случае $p = 0$ возьмем любое малое отличное от нуля p_0. Тогда часть (ii) определения дает $d(\varphi, 0, D) = d(\varphi, p_0, D) = 1$.

Вычисление, основанное на использовании гомотопической инвариантности степени, проводится так. Положим $h_1(x) = t\varphi(x) + (1 - t)x$, так что $h_1 = \varphi$ и $h_0 = I$. Тогда $h_t(\pm 1) \neq p$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $-3/4 < p < 1/4$. Поэтому для таких p

$$d(\varphi,\ p,\ D) = d(h_1,\ p,\ D) = d(h_0,\ p,\ D) = d(I,\ p,\ D) = 1.$$

13.2.15. Пример. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Теория степени доставляет простой метод доказательства этой глубокой теоремы. Теорема утверждает, что если Ω — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество конечномерного банахова пространства $\mathscr{B}$ и функция φ: $\Omega \to \Omega$ непрерывна, то она имеет неподвижную точку в Ω. Заметим, что пространство $\mathscr{B}$ можно без ограничения общности считать вещественным, ибо $\mathbb{C}^n$ изоморфно $\mathbb{R}^{2n}$, причем выпуклость при этом изоморфизме сохраняется.

Установим результат сначала для $\Omega = \bar{S}(0, r) \equiv \bar{S}$. Допустим, что φ не имеет неподвижных точек на ∂S (в противном случае доказывать уже нечего), и рассмотрим гомотопию $h_t = I - t\varphi$, $t \in [0, 1]$. Если $t < 1$ и $x \in \partial S$, то $t\|\varphi(x)\| < r$, откуда следует, что $h_t(x) \neq 0$ для любых $x \in \partial S$ и $t \in [0, 1]$. Следовательно, в силу гомотопической инвариантности степени (теорема 13.2.11, (ii)),

$$d(I - \varphi,\ 0,\ S) = d(h_1,\ 0,\ S) = d(h_0,\ 0,\ S) = d(I,\ 0,\ S) = 1.$$

Таким образом, согласно части (iv) той же теоремы, φ имеет неподвижную точку в $\bar{S}$.

Пусть теперь Ω — произвольное ограниченное замкнутое выпуклое множество. Тогда оно содержится в некотором шаре $\bar{S}$ с центром в начале. Поскольку Ω выпукло, функция φ допускает непрерывное продолжение на $\bar{S}$ до функции $\tilde{\varphi}$: $\bar{S} \to \Omega$ (теорема (13.2.12). По доказанному в предыдущем абзаце $\tilde{\varphi}$ имеет неподвижную точку, скажем $\bar{x}$, в $\bar{S}$. Но $\tilde{\varphi}(\bar{S}) \subset \Omega$, поэтому $\bar{x} \in \Omega$. Тем самым теорема доказана, ибо $\varphi = \tilde{\varphi}$ на Ω.

13.3. Степень Лерэ — Шаудера

Для произвольных непрерывных операторов в бесконечномерных пространствах определить степень с теми же самыми свойствами, что и в конечномерном случае, заведомо невозможно, потому что тогда теорема Брауэра о неподвижной точке обобщалась бы без всяких изменений на бесконечномерный случай, а известно, что такое обобщение неверно (задача 4.6). Очевидно, надо наложить какие-то ограничения на рассматриваемые операторы. Поскольку естественным обобщением теоремы Брауэра служит теорема Шаудера о неподвижной точке, можно ожидать, что будет достаточно какого-либо условия компактности, и, действительно, как было показано в классической теории Лерэ — Шаудера, можно дать удовлетворительное определение степени для компактных возмущений тождественного оператора, т. е. для операторов вида $I + A$, где A — компактный оператор. Эту теорию мы сейчас вкратце и изложим; по поводу позднейших ее обобщений см. книгу Ллойда [1978].

Что касается технологии определения степени, то ясно, что дать определение, основанное на формуле (13.2.1), в бесконечномерном случае нелегко. Наша тактика будет состоять не в том, чтобы попытаться обобщить эту формулу, а в том, чтобы использовать конечномерные приближения к рассматриваемому оператору и „нажить капитал“ на теории, развитой в предыдущем параграфе.

Всюду в этом параграфе D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathscr{B}$, p — вектор из $\mathscr{B}$ и A: $\bar{D} \to \mathscr{B}$ — компактный оператор, такой что $f + Af \neq p$ для $f \in \partial D$. По соображениям технического порядка удобно предположить на время, что $0 \in D$. Положим

$$r = 2^{-1} \operatorname{dist}(p, (I + A)(\partial D)). \tag{13.3.1}$$

13.3.1. Лемма. *При указанных выше условиях $r > 0$.*

Доказательство. Если сформулированный результат неверен, то найдется последовательность (f_n) в ∂D, такая что $\lim(f_n + Af_n \dot{-} p) = 0$. Поскольку A компактен, найдется последовательность, которую мы снова обозначим через (f_n), такая что последовательность (Af_n) сходится. Отсюда следует, что последовательность (f_n) тоже сходится, скажем к f, и так как граница ∂D замкнута, то $f \in \partial D$. Следовательно, $f + Af = p$, вопреки предположению. □

13.3.2. Лемма. *Пусть оператор A удовлетворяет указанным выше условиям. Тогда для любого заданного ε из интервала $0 < \varepsilon < r$ существуют такое конечномерное линейное подпространство $\mathscr{M}$ в $\mathscr{B}$, содержащее p, и такой непрерывный оператор B: $\bar{D} \to \mathscr{M}$, что*

$$(i) \|Af - Bf\| \leqslant \varepsilon \text{ при всех } f \in \bar{D},$$
$$(ii) \|f + Bf - p\| \geqslant r \text{ при всех } f \in \partial D.$$

Доказательство. В силу леммы 8.2.5 существует удовлетворяющий условию (i) непрерывный оператор B, определенный на $\bar{D}$ и принимающий значения в некотором конечномерном линейном подпространстве $\mathscr{M}_0$ пространства $\mathscr{B}$. Возьмем в качестве $\mathscr{M}$ наименьшее линейное подпространство, содержащее одновременно p и $\mathscr{M}_0$. Ясно, что $R(B) \subset \mathscr{M}$. Поскольку $\varepsilon < r$, условие (ii) вытекает из следующей оценки, справедливой для всех $f \in \partial D$:

$$\|f + Bf - p\| \geqslant \|f + Af - p\| - \|Af - Bf\| \geqslant 2r - \varepsilon. \quad \square$$

Ниже нам будет нужно рассматривать различные ограничения оператора B; каждое из них мы будем по-прежнему обозначать через B, ибо из контекста всегда будет ясно, о каком именно ограничении идет речь.

Теперь мы готовы приступить к выработке определения степени оператора $I + A$. Пусть B — любой оператор, удовлетворяющий условиям (i), (ii) из предыдущей леммы. Рассмотрим его ограничение на множество $\overline{D \cap \mathscr{M}}$, которое непусто, поскольку $0 \in D$. Ясно, что B отображает ограниченное множество $D \cap \mathscr{M}$, открытое в $\mathscr{M}$, в пространство $\mathscr{M}$ и что $f + Bf \neq p$ для $f \in \partial(D \cap \mathscr{M})$. Поскольку $\mathscr{M}$ конечномерно, степень $d(I + B, p, D \cap \mathscr{M})$ можно определить, как в предыдущем параграфе. В конечном счете мы так и положим $d(I + A, p, D)$ равным этому целому числу, надо только сперва показать, что такое определение не зависит от выбора B. Для этого нам понадобится один предварительный результат.

13.3.3. Лемма. *Пусть m, $n > 0$ — целые числа и S — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$. Пусть, далее, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ — естественное вложение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+m}$ и C: $\bar{S} \to \mathbb{R}^n$ — непрерывный оператор. Положим для $f \in \bar{S}$*

$$Cf = (C_1 f, \ldots, C_n f), \quad \tilde{C} f = (C_1 f, \ldots, C_n f, 0, \ldots, 0),$$

так что $\tilde{C}$ есть композиция C с естественным вложением $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+m}$. Если $(I + C) f \neq p$ для $f \in \partial S$, то

$$d(I + C, p, S \cap \mathbb{R}^n) = d(I + \tilde{C}, p, S),$$

где I обозначает тождественный оператор как в $\mathbb{R}^n$, так и в $\mathbb{R}^{n+m}$.

Доказательство. Предположим сперва, что $C \in \mathscr{C}^1(\bar{S}, \mathbb{R}^n)$ и $p \in C(Z)$. Пусть J_{n+m} — матрица Якоби для $I + \tilde{C}$, а J_n — матрица Якоби для ограничения $I + C$ на $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой точки из $S \cap \mathbb{R}^n$

$$\det J_{n+m} = \begin{vmatrix} J_n & * \\ 0 & I_m \end{vmatrix} = \det J_n,$$

где I_m обозначает единичную $m \times m$-матрицу, и наш результат следует из определения степени 13.2.9, (i). В случае $C \in \mathscr{C}(\bar{S}, \mathbb{R}^n)$ используем соответствующий предельный переход и утверждение (i) теоремы 13.2.11. □

13.3.4. Лемма. *Пусть B_1: $\bar{D} \to \mathscr{M}_1$ и B_2: $\bar{D} \to \mathscr{M}_2$ — любые два оператора, удовлетворяющие условиям* (i), (ii) *из леммы* 13.3.2. *Тогда*

$$d(I + B_1, p, D \cap \mathscr{M}_1) = d(I + B_2, p, D \cap \mathscr{M}_2).$$

Доказательство. При надлежащем выборе базиса любое конечномерное линейное подпространство в $\mathscr{B}$ можно отождествить с $\mathbb{R}^k$ для некоторого k, и выбор базиса никак не влияет на степень. Поэтому, по предыдущей лемме, для $i = 1, 2$

$$d(I + B_i, p, D \cap \tilde{\mathscr{M}}) = d(I + B_i, p, D \cap \mathscr{M}_1), \tag{13.3.2}$$

где $\tilde{\mathscr{M}}$ — наименьшее линейное подпространство, содержащее $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$. Следовательно, наш результат будет доказан, если мы сможем показать, что степени в левых частях при $i = 1$ и 2 равны между собой.

Рассмотрим гомотопию $\{H_t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где оператор H_t: $\overline{D \cap \tilde{\mathcal{M}}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ задается формулой

$$H_t f = t(f + B_1 f - p) + (1-t)(f + B_2 f - p).$$

Для $f \in \partial(D \cap \tilde{\mathcal{M}})$

$$\begin{aligned} \|H_t f\| &= \|f + Af - p + t(B_1 f - Af) - (1-t)(B_2 f - Af)\| \\ &\geqslant \|f + Af - p\| - t\|B_1 f - Af\| - (1-t)\|B_2 f - Af\| \\ &\geqslant 2r - tr - (1-t)r = r \end{aligned}$$

(последнее неравенство справедливо, поскольку по предположению B_1 и B_2 удовлетворяют условиям (i), (ii) из леммы 13.3.2). Следовательно, в силу гомотопической инвариантности степени (теорема 13.2.11, (ii)),

$$d(H_1, 0, D \cap \tilde{\mathcal{M}}) = d(H_0, D \cap \tilde{\mathcal{M}}).$$

Так как $H_1 f = f + B_1 f - p$, $H_0 f = f + B_2 f - p$, то этим доказано, что

$$d(I + B_1, p, D \cap \tilde{\mathcal{M}}) = d(I + B_2, p, D \cap \tilde{\mathcal{M}}),$$

и наш результат вытекает из (13.3.2). □

13.3.5. Определение. Пусть D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathcal{B}$ и A: $\bar{D} \to \mathcal{B}$ — компактный оператор, причем $(I + A)f \neq p$ для $f \in \partial D$.

Предположим сначала, что $0 \in D$. Возьмем любые B и $\mathcal{M}$, существование которых утверждается в лемме 13.3.2, и положим

$$d(I + A, p, D) = d(I + B, p, D \cap \mathcal{M}).$$

В случае когда $0 \notin D$, сдвинем сперва начало в какую-нибудь точку D, а потом определим $d(I + A, p, D)$, как выше. Конечное целое число $d(I + A, p, D)$ называется **степенью (Лерэ — Шаудера)** оператора $I + A$.

Как нетрудно показать, используя теорему Дугунджи о продолжении 13.2.12, степень можно определить также и для случая компактных операторов A: $\partial D \to \mathcal{B}$ (см. задачу 13.6).

Итак, определение степени для компактных возмущений тождественного оператора дано. В приводимой ниже теореме собраны те свойства степени, которые наиболее важны для приложений.

13.3.6. Теорема. *Пусть D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathcal{B}$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) Гомотопическая инвариантность степени. *Пусть $\{H_t\}$, $t \in [0, 1]$, — гомотопия, состоящая из операторов $\bar{D} \to \mathcal{B}$, причем для* *каждого t оператор $H_t - I$ компактен. Если $H_t f \neq p$ для любых $f \in \partial D$ и $t \in [0, 1]$, то $d(H_t, p, D)$ не зависит от t.*

(ii) $d(I, p, D) = 1$, *если* $p \in D$, и 0, *если* $p \notin \bar{D}$.

(iii) Теорема Лерэ — Шаудера о неподвижной точке. *Пусть A: $\bar{D} \to \mathscr{B}$ — компактный оператор, причем $f + Af \neq p$ для любого $f \in \partial D$. Если $d(I + A, p, D) \neq 0$, то уравнение $f + Af = p$ имеет по крайней мере одно решение в D.*

Доказательство. Доказательство всех этих утверждений несложно и основывается на соответствующем конечномерном утверждении и некой процедуре предельного перехода; чтобы сделать ясным ход рассуждений, вполне достаточно будет доказать, скажем, утверждение (iii).

Выберем какую-нибудь последовательность (ε_n) строго положительных чисел, стремящуюся к нулю. По лемме 13.3.2 найдутся последовательность (B_n) непрерывных операторов и последовательность $(\mathscr{M}_n)$ конечномерных линейных подпространств, содержащих p, такие что B_n отображает $\bar{D}$ в $\mathscr{M}_n$ и $\|B_n f - Af\| \leqslant \varepsilon_n$ для $f \in \bar{D}$. Следовательно, согласно определению 13.3.5, для достаточно больших n

$$d(I + B_n,\ p,\ D \cap \mathscr{M}_n) = d(I + A,\ p,\ D).$$

Поскольку $d(I + A, p, D) \neq 0$, мы можем привлечь теорему 13.2.11, (iv) и заключить, что существует последовательность (f_n) в D, такая что $f_n + B_n f_n = p$. Но оператор A компактен, поэтому найдется подпоследовательность, обозначаемая по-прежнему через (f_n), такая что последовательность (Af_n) сходится. Таким образом,

$$\| f_n + Af_n - p \| \leqslant \| f_n + B_n f_n - p \| + \| Af_n - B_n f_n \| \leqslant \varepsilon_n.$$

Отсюда следует, что последовательность (f_n) сходится, скажем к f, а поскольку оператор A непрерывен, то $f + Af = p$. □

Что касается практического применения этой теоремы, то, как и в конечномерном случае, чаще всего вычисление степени проводят, используя ее гомотопическую инвариантность, а затем устанавливают существование решения при помощи теоремы Лерэ — Шаудера о неподвижной точке.

Последний результат этого параграфа, также иногда называемый теоремой Лерэ — Шаудера о неподвижной точке, особенно удобен для приложений, поскольку вообще не содержит никакого упоминания о степени.

13.3.7. Теорема. *Пусть D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathscr{B}$ и A: $\bar{D} \to \mathscr{B}$ — компактный оператор. Пусть, далее, точка $p \in D$ такова, что $f + tAf \neq p$ для любых $f \in \partial D$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда уравнение $f + Af = p$ имеет по крайней мере одно решение в D.*

Доказательство. Положим $H_t f = (I + tA) f$ для $f \in \bar{D}$. По теореме 13.3.6, (i)

$$d(I, p, D) = d(H_0, p, D) = d(H_1, p, D) = d(I + A, p, D).$$

Поскольку $p \in D$, то $d(I, p, D) = 1$, и наш результат следует из теоремы 13.3.6, (iii). □

13.4. Одна задача из теории радиационного переноса

Задача радиационного переноса в звездных оболочках представляет значительный интерес для астрономии и активно изучалась в течение последних пятидесяти лет. Одна из формулировок этой задачи приводит к сингулярному линейному интегральному уравнению, которое послужило поводом для создания теории Винера — Хопфа. Другой подход приводит к нелинейному интегральному уравнению, известному как H-уравнение Чандрасекхара; оно обладает некоторыми преимуществами с вычислительной точки зрения. Первое строгое рассмотрение этого уравнения было, по-видимому, проведено Крамом в 1947 г. Метод Крама основан на тонких рассуждениях, связанных с использованием теории функций комплексной переменной, и хотя он был впоследствии несколько упрощен Басбридж, он все равно остается весьма сложным для понимания. Недавно ряд авторов предприняли изучение этого уравнения методами функционального анализа. Так, Леггетт [1976] успешно применил к этому уравнению теорию монотонных операторов, а Стьюарт [1974] дал элегантное доказательство существования решения, используя теорию степени. В методе Стьюарта хорошо прослеживаются все основные моменты, типичные для приложений теории степени, и в то же время он не отягощен излишними техническими подробностями, поэтому мы изложим его здесь в качестве иллюстрации.

H-уравнение Чандрасекхара имеет вид

$$H(x) = 1 + xH(x) \int_0^1 \frac{\Psi(y) H(y)}{x + y} dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{13.4.1}$$

Здесь Ψ — некоторая заданная функция, неотрицательная и непрерывная, причем предполагается, что

$$\mu = \int_0^1 \Psi(y)\, dy \leqslant \frac{1}{2}. \tag{13.4.2}$$

Требуется, чтобы решение H принадлежало $\mathscr{C}([0, 1])$. Отметим тот полезный факт, непосредственно усматриваемый из уравнения (13.4.1), что $H(x) \geqslant 1$ для $x \in [0, 1]$. С уравнением (13.4.1) в том виде, как оно есть, работать трудно, и наш первый шаг будет состоять в том, чтобы переписать его в более удобной форме, в которой неизвестным элементом будет ограниченная непрерывная функция $u = 1/H$. Приводимый ниже стандартный результат суммирует некоторые полезные сведения об этом новом уравнении.

13.4.1. Лемма. *Пусть выполнено условие* (13.4.2). *Если* $u \in \mathscr{C}([0, 1])$ — *строго положительное решение уравнения*

$$u(x) = (1 - 2\mu)^{1/2} + \int_0^1 \frac{y\Psi(y)[u(y)]^{-1}}{x+y}\,dy, \tag{13.4.3}$$

то $H = 1/u$ *есть решение* H-*уравнения* (13.4.1). *Далее,* u *удовлетворяет соотношениям*

$$\int_0^1 \Psi(x)[u(x)]^{-1}\,dx = 1 - (1 - 2\mu)^{1/2}, \tag{13.4.4}$$

$$1 \geqslant u(x) \geqslant (1 - 2\mu)^{1/2} + \int_0^1 \frac{y\Psi(y)}{x+y}\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{13.4.5}$$

Доказательство. Разделим (13.4.3) на u, помножим на Ψ и проинтегрируем. Это даст

$$\int_0^1 \Psi(x)\,dx = (1-2\mu)^{1/2}\int_0^1 \Psi(x)[u(x)]^{-1}\,dx + \int_0^1\int_0^1 y\Psi(x)\Psi(y)[(x+y)u(x)u(y)]^{-1}\,dx\,dy.$$

Меняя в последнем интеграле местами x и y и складывая получившееся уравнение с исходным, придем к уравнению

$$\mu = (1 - 2\mu)^{1/2}\left\{\int_0^1 \Psi(x)[u(x)]^{-1}\,dx\right\} + \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 \Psi(x)[u(x)]^{-1}dx\right\}^2.$$

Решая его как квадратное уравнение относительно члена в фигурных скобках, получаем (13.4.4). Подставляя в (13.4.3) выражение для $(1-2\mu)^{1/2}$, даваемое формулой (13.4.4), и произведя замену $u = 1/H$, приходим к (13.4.1). Наконец, поскольку $y(x+y)^{-1} \leqslant 1$ для $x, y \in [0, 1]$, то в силу (13.4.3) и (13.4.4)

$$u(x) \leqslant (1 - 2\mu)^{1/2} + \int_0^1 \Psi(y)[u(y)]^{-1}\,dy = 1.$$

Второе неравенство в (13.4.5) очевидным образом вытекает из первого, если еще раз воспользоваться (13.4.3). □

Наибольший математический интерес задача представляет в случае $\mu = 1/2$. Действительно, при $\mu < 1/2$ существование решения легко устанавливается с помощью теории положительных операторов (см. задачу 13.16). Поэтому мы рассмотрим здесь лишь случай $\mu = 1/2$. В силу последней леммы существование решения H-уравнения будет доказано, если нам удастся установить, что уравнение

$$u(x) = \int_0^1 \frac{y\Psi(y)}{x+y} [u(y)]^{-1} \, dy \tag{13.4.6}$$

имеет строго положительное непрерывное решение. Пусть, как обычно, $\mathscr{C}([0, 1])$ обозначает банахово пространство ограниченных вещественнозначных непрерывных функций с sup-нормой. Имея в виду использовать гомотопическую инвариантность степени, положим

$$\Psi_t(x) = (1-t)\Psi(x),$$

$$K_t f(x) = \int_0^1 \frac{y\Psi_t(y)}{x+y} f(y) \, dy,$$

$$A_t u(x) = t^{1/2} + \int_0^1 \frac{y\Psi_t(y)}{x+y} [u(y)]^{-1} \, dy$$

для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$. В этих обозначениях уравнение (13.4.6) принимает вид $u = A_0 u$, и нам надо показать, что оператор A_0 имеет в $\mathscr{C}([0, 1])$ неподвижную точку, которая представляет собой строго положительную функцию. Заметим прежде всего, что K_t: $\mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$ для каждого t есть компактный линейный оператор (см. задачу 13.14). Главная трудность заключается в выборе подходящей области $\bar{D}$ для операторов A_t. Ввиду наличия члена $1/u$ в выражении для $A_t u$ область $\bar{D}$ должна состоять из одних лишь строго положительных u, скажем из тех u, для которых $u(x) \geqslant a > 0$; зато операторы A_t при этом будут компактными. Далее, в соответствии с обычными ограничениями в теории степени операторы $I - A_t$ не должны обращаться на ∂D в нуль ни при каком t. Как и во многих других приложениях теории степени, решающим наблюдением на этой стадии рассуждений является то, что имеется некая не зависящая от t оценка, справедливая для всех неподвижных точек оператора A_t. Как и в приводимой ниже лемме, такая априорная оценка устанавливается независимым рассуждением. Заметим, что существование неподвижных точек при этом не предполагается.

13.4.2. Лемма. *Существует такое $m > 0$, что всякое строго положительное непрерывное решение уравнения $u = A_t u$ для любого $t \in [0, 1]$ удовлетворяет неравенству $u(x) \geqslant 2m$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.*

Доказательство. Поскольку $\mu = 1/2$, то в силу (13.4.2)

$$\left\{1 - 2\int_0^1 \overline{\Psi}_t(x)\,dx\right\}^{1/2} = \left\{1 - 2(1-t)\int_0^1 \Psi(x)\,dx\right\}^{1/2} = t^{1/2}.$$

Поэтому, если в (13.4.3) заменить Ψ на Ψ_t, то получится как раз уравнение $u = A_t u$. Значит, в силу (13.4.5),

$$u(x) \geqslant t^{1/2} + (1-t)\int_0^1 \frac{y\Psi(y)}{1+y}\,dy.$$

Несложное вычисление показывает, что для $0 \leqslant t \leqslant 1$ правая часть этого неравенства достигает минимума при $t = 0$. □

13.4.3. Теорема. *В случае* $\mu = 1/2$ *интегральное уравнение* (13.4.6) *имеет строго положительное решение* $u \in \mathscr{C}([0,1])$, *и* $H = 1/u$ *будет непрерывным решением* H_1*-уравнения* (13.4.1), *таким что*

$$1 \geqslant 1/H(x) \geqslant \int_0^1 \frac{y\Psi(y)}{x+y}\,dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Доказательство. Для любых заданных a, b, $0 < a < b$, положим

$$D = \{u\colon\ u \in \mathscr{C}([0,\ 1]),\ a < u(x) < b \text{ при } x \in [0,\ 1]\}.$$

Ясно, что D — непустое ограниченное открытое подмножество в $\mathscr{C}([0,1])$ и операторы $A_t\colon\ \bar{D} \to \mathscr{C}([0,1])$ компактны. Выберем теперь a, b таким образом, чтобы оператор $I - A_t$ не обращался в нуль на ∂D ни при каком $t \in [0,1]$. А именно, положим

$$a = \min(1/2,\ m), \quad b = 2 + a^{-1}\|K_0\|.$$

Очевидно, достаточно показать, что если $u - A_t u = 0$ для некоторого $u \in \bar{D}$, то $u \in D$. С этой целью заметим прежде всего, что в силу априорной оценки для u, даваемой леммой 13.4.2,

$$u(x) \geqslant 2m > a \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Далее,

$$\|u\| = \|A_t u\| \leqslant t^{1/2} + a^{-1}\|K_t\| \leqslant t^{1/2} + a^{-1}(1-t)\|K_0\| < b.$$

Таким образом, $u \in D$, что и требовалось установить.

Приготовления к применению теории степени теперь завершены. Рассмотрим гомотопию $H_t = I - A_t$. Как было только что доказано, ни один из этих операторов не обращается в нуль на ∂D. Следовательно, в силу гомотопической инвариантности степени (теорема 13.3.6, (i)),

$$d(I - A_0,\ 0,\ D) = d(I - A_1,\ 0,\ D).$$

Но $A_1 u = 1$ (где 1 обозначает функцию, тождественно равную единице), так что

$$d(I - A_1, 0, D) = d(I, 1, D) = 1$$

по теореме 13.3.6, (ii) (поскольку $1 \in D$). Значит, $d(I - A_0, 0, D) = 1$. Наш результат следует теперь из теоремы Лерэ — Шаудера о неподвижной точке 13.3.6, (iii). □

Задачи

13.1. Возьмем $D = (-1, 1)$, $\mathscr{B} = \mathbb{R}$ и $-1 < p < 1$ и рассмотрим по очереди функции $|x|^3 \sin(\pi/2x)$ и $|x| \sin(\pi/2x)$, считая, что обе они доопределены нулем при $x = 0$. Прикиньте, как вычислить степень, исходя непосредственно из определения, и сравните это со способом, основанным на гомотопической инвариантности степени.

13.2. Пусть L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор и $\mu^{-1} \in \rho(L)$. Взяв в качестве D открытый единичный шар, покажите, что

$$d(I - \mu L, 0, D) = (-1)^\beta,$$

где β — сумма алгебраических кратностей (определение алгебраической кратности см. в примере 13.2.13) тех вещественных собственных значений оператора L, которые имеют тот же знак, что и μ, а по абсолютной величине превосходят $|\mu|^{-1}$.

13.3. Пусть D_1 и D_2 — непересекающиеся ограниченные открытые множества в $\mathbb{R}^2$ и φ: $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, такая что $\varphi(x) \neq p$ для $x \in \partial D_1 \cup \partial D_2$. Докажите, что

$$d(\varphi, p, D_1 \cup D_2) = d(\varphi, p, D_1) + d(\varphi, p, D_2).$$

13.4. Пусть D — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и φ: $\bar{D} \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, такая что $\varphi(x) \neq p$ на ∂D. Для всякого изолированного решения x_0 уравнения $\varphi(x) = p$ индекс $i(\varphi, x_0)$ определяется как степень $d(\varphi, p, D_0)$, где D_0 — какая-нибудь открытая окрестность точки x_0, не содержащая других решений, кроме самого x_0. Предположим, что уравнение $\varphi(x) = p$ имеет конечное число решений $x_1, \ldots, x_k$ в $\bar{D}$. Докажите,

$$d(\varphi, p, D) = \sum_{j=1}^{k} i(\varphi, x_j).$$

13.5 (Пуанкаре — Боль). Пусть D — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и φ_j: $\bar{D} \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2,$ — непрерывные функции, такие что $\varphi_j(x) \neq p$ на ∂D. Докажите, что $d(\varphi_1, p, D) = d(\varphi_2, p, D)$, если ни для какого $x \in \partial D$ векторы $\varphi_1(x) - p$ и $\varphi_2(x) - p$ не являются противоположно направленными.

13.6. Пусть D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathscr{B}$ и A: $\partial D \to \mathscr{B}$ — компактный оператор. Используя теорему Дугунджи 13.2.12 и лемму 8.2.4, покажите, что A допускает компактное продолжение $\tilde{A}$ на $\bar{D}$ с $R(\tilde{A})$, содержащимся в выпуклой оболочке множества $R(A)$. Исходя из этого, дайте определение степени $d(I + A, p, D)$, при условии что $(I + A)f \neq p$ на ∂D, и покажите, что это определение не зависит от выбора продолжения.

13.7. Докажите теорему Шаудера о неподвижной точке, используя теорию степени. [Вспомните о лемме 8.2.4 и рассуждайте, как в примере 13.2.15.]

13.8. Пусть D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathscr{B}$ и A, B: $\bar{D} \to \mathscr{B}$ — компактные операторы. Покажите, что если

$$\|Af - Bf\| < \|f - Bf - p\| \text{ при всех } f \in \partial D,$$

то $d(I - A, p, D) = d(I - B, p, D)$.

13.9. Пусть $\mathscr{B}$ — вещественное банахово пространство, оператор B: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ линеен и компактен, а оператор A: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ компактен. Предположим, что A *асимптотически линеен* в том смысле, что

$$\lim_{\|f\| \to \infty} \|Af - Bf\| / \|f\| = 0.$$

Используя предыдущую задачу и лемму 14.2.4, докажите, что A имеет неподвижную точку.

13.10. Из результата последней задачи можно вывести весьма мощную глобальную теорему существования для интегральных уравнений Гаммерштейна. Пусть k: $[0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и оператор K: $\mathscr{C}([0, 1]) \to \mathscr{C}([0, 1])$ задан формулой

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy.$$

Пусть, далее, функция ψ: $[0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и существуют такое вещественное число α, такое $\varepsilon > 0$ и такие непрерывные функции g_1, g_2, что

$$|\Psi(x, z) - \alpha z| \leqslant g_1(x) |z|^{1-\varepsilon} + g_2(x) \text{ при } x \in [0, 1],\ z \in \mathbb{R}.$$

Докажите, что если $\alpha^{-1} \in \rho(K)$, то уравнение

$$f(x) = \int_0^1 k(x, y)\, \varphi[y, f(y)]\, dy$$

имеет решение в $\mathscr{C}([0, 1])$.

13.11. Пусть D — открытый единичный шар в вещественном банаховом пространстве $\mathscr{B}$ и A: $\bar{D} \to \mathscr{B}$ — компактный оператор. Покажите, что A имеет неподвижную точку в $\bar{D}$, если выполнено какое-нибудь из следующих условий:

(i) $\|f - Af\|^2 \geqslant \|Af\|^2 - \|f\|^2$ для $f \in \partial D$;

(ii) $\mathscr{B}$ — вещественное гильбертово пространство и $(f, Af) \leqslant \|f\|^2$ для $f \in \partial D$.

13.12. Пусть $\mathscr{B}$ — вещественное банахово пространство и A: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ — компактный оператор. Предположим, что существует априорная граница $m > 0$, такая что для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$ каждое решение уравнения $f - tAf = 0$ удовлетворяет оценке $\|f\| \leqslant m$. Докажите, что A имеет неподвижную точку в $\bar{S}(0, m)$.

13.13. Пусть Ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная неубывающая функция, причем $\psi(z) \to \pm\infty$ соответственно при $z \to \pm\infty$, а g — произвольная непрерывная вещественнозначная функция. Используя задачу 13.12, установите существование в $\mathscr{C}^2([0, 1])$ решения уравнения

$$f''(x) = \varphi(f(x)) + g(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

при однородных граничных условиях Дирихле.

13.14. Докажите, что операторы K_t из § 13.4 компактны.

13.15. Покажите, как упростить доказательство существования решения H-уравнения в случае $\mu < 1/2$ [можно обойтись без априорной оценки!].

13.16. В случае $\mu < 1/2$ существование решения H-уравнения можно также вывести из теоремы 8.3.9.

Глава 14

ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ

14.1. Введение

Среди великого множества физических явлений, моделируемых нелинейными уравнениями, особенно важны и особенно трудны для анализа те, которые приводят к задачам на собственные функции. Следующий классический пример является типическим. Предположим, что идеальная жидкость течет без завихрений по каналу с плоским дном. Могут ли существовать периодические волны неизменяющейся формы? Такое течение можно моделировать уравнением вида $\lambda f = Af$, где A — нелинейный оператор с $A0 = 0$, а λ — некоторый параметр. Одно из возможных течений — равномерное (отвечающее тривиальному решению $f = 0$), но, конечно, физический интерес представляют как раз нетривиальные решения. Наличие тривиального решения существенно усложняет математическое рассмотрение вопроса, и далеко не просто придумать метод, достаточно тонкий для того, чтобы он „различал" тривиальные и нетривиальные решения. Цель этой главы — дать обзор некоторых из таких методов.

Для случая, когда оператор A линеен, изучение уравнения $\lambda f = Af$ уже было проведено ранее как часть спектральной теории. Хотя нашей задачей и является обобщить эту теорию, в нелинейном случае удобно изменить обозначения и вместо параметра λ использовать параметр $\mu = \lambda^{-1}$. В некоторых приложениях сам рассматриваемый оператор зависит от μ, и эта возможность предусматривается следующим определением:

14.1.1. Определение. Пусть D — подмножество *вещественного* банахова пространства $\mathscr{B}$, причем $0 \in D$. Для каждого вещественного μ пусть A_μ — оператор из D в $\mathscr{B}$, удовлетворяющий условию $A0 = 0$. (Вещественные) значения μ, для которых уравнение $f = \mu A_\mu f$ имеет ненулевые решения, называют **характеристическими значениями** оператора A_μ, а соответствующие решения f — **собственными векторами** (или **собственными функциями,** если речь идет о пространстве функций). Как и в линейном случае, название „собственное значение" сохраняется за величиной, обратной к характеристическому значению.

14.1.2. Пример. Рассмотрим для иллюстрации следующие три случая, в каждом из которых φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Случай A. Пусть φ — линейное отображение, задаваемое формулой $\varphi(x) = \alpha x$, где α — отличное от нуля вещественное число. Ясно, что уравнение $x = \mu\varphi(x)$ имеет ненулевое решение в том и только том случае, если $\mu = \alpha^{-1}$, и в этом случае каждое вещественное число будет решением; см. рис. 14.1, (a), где решения, отложенные напротив соответствующих μ, представлены жирными линиями.

Случай B. Для $\varphi(x) = x/(1 + |x|)$ уравнение $x = \mu\varphi(x)$ имеет ненулевые решения $(x = \pm(\mu - 1))$ тогда и только тогда, когда $\mu > 1$. Аналогичная диаграмма для этого случая дана на рис. 14.1, (b).

Случай C. Для $\varphi(x) = x^3$ уравнение $x = \mu\varphi(x)$ имеет ненулевые решения $(x = \pm\mu^{-1/2})$ тогда и только тогда, когда $\mu > 0$ (см. рис. 14.1, (c)).

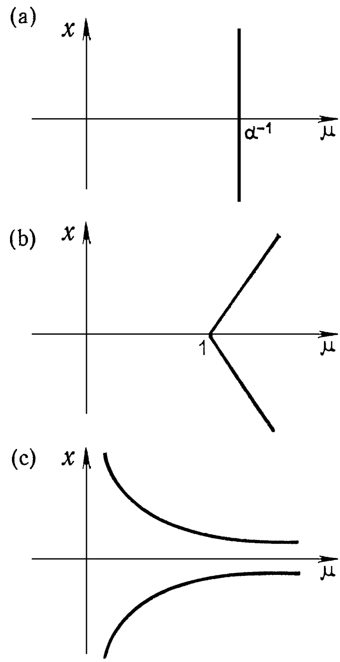

Рис. 14.1. Бифуркационные диаграммы для
(a) $\varphi(x) = \alpha x$,
(b) $\varphi(x) = x/(1 + |x|)$,
(c) $\varphi(x) = x^3$.

Из сравнения этих трех случаев вытекают интересные выводы:

(i) В каждом из случаев можно указать фиксированный шар в $\mathbb{R}$ с центром в начале, не содержащий при малых μ ни одного собственного вектора.

(ii) В линейном случае множество характеристических значений состоит из одной-единственной точки. Для нелинейных операторов это множество представляет собой интервал: $\mu > 1$ в случае B и $\mu > 0$ в случае C. Таким образом, в разительном контрасте с линейным случаем „нелинейный спектр“ недискретен, даже если рассматриваемый оператор компактен.

(iii) В случае линейной функции φ уравнение $x - \mu\varphi(x) = a$ имеет решение при каждом вещественном a тогда и только тогда, когда μ не является характеристическим значением. Соответствующие нелинейные уравнения обладают решениями для всех μ; альтернатива Фредгольма для них очевидным образом не имеет места.

(iv) В случаях A и B при увеличении μ достигается точка, в которой решения „разветвляются“ [1] — от тривиального решения

[1] По-английски bifurcate (от латинского furca — двузубые вилы). Отсюда и сам термин „бифуркация“. — *Прим. перев.*

„ответвляются" другие решения. Такое поведение является общим правилом, однако, как показывает рис. 14.1, (с), бывают и исключения из этого правила. В любом случае поведение решений как функций от μ изящно и лаконично представляется бифуркационными диаграммами типа приведенных на рис. 14.1. Хотя в многомерном случае решения уже нельзя изобразить с помощью одной-единственной оси, часто имеется величина, важная по физическим или каким-нибудь иным причинам, — это может быть, скажем, норма решения, — которую можно с успехом использовать для построения аналогичной бифуркационной диаграммы.

Приведенные выше примеры вместе с примерами из задачи 14.1 дают некоторое представление о разнообразии возможностей, име-

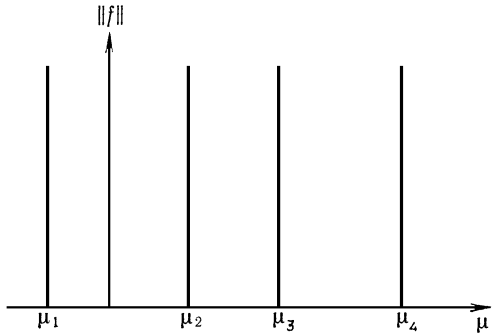

Рис. 14.2. Бифуркационная диаграмма для линейного компактного оператора; μ_1, μ_2, ... — характеристические значения.

ющихся даже в одномерном случае, а в многомерном случае возникают дальнейшие усложнения. Бесконечномерный случай вообще поддается рассмотрению, только если принять какие-либо дополнительные предположения, и мы ограничимся здесь изучением компактных операторов A. В этом случае для линейных A бифуркационную диаграмму легко построить на основе спектральной теории компактных операторов (рис. 14.2).

Если A нелинеен, то зависимость от μ редко бывает столь простой, и, в частности, поведение при малых и больших $\|f\|$ может быть совершенно разным. В последующем мы будем использовать термин „локальный" для случая, когда допускаются лишь малые значения $\|f\|$, и термин „глобальный" для случая, когда никаких ограничений на $\|f\|$ не налагается.

Для исследования локальных задач часто применяется формальный прием, основанный на линеаризации: исходное нелинейное уравнение заменяется линейным уравнением, решения которого используются в качестве приближений к малым решениям исходного уравнения. Применение этого приема к указанному выше случаю В показывает, что единственным характеристическим значением линеаризованного уравнения является единица и что, в самом деле, это единственная точка ветвления для A. В следующем параграфе будет изложена локальная теория бифуркаций, основанная на этом методе линеаризации. Мы увидим, что хотя этот метод и не всегда работает, он применим для достаточно широкого класса операторов. Среди приложений, которые мы обсудим, будет и упомянутая выше задача о распространении волн, для которой с помощью локальной теории бифуркаций можно получить простое доказательство существования периодического цуга малых нелинейных волн.

Во многих приложениях локальная теория, хоть и оказывается полезной, не дает полного решения проблемы. Например, в случае задачи о распространении волн целый ряд эвристических соображений указывает на то, что могут существовать периодические волны не изменяющейся формы с максимальным углом наклона вплоть до $\pi/6$, и, чтобы подтвердить это, нужна, очевидно, глобальная теория. Построение такой теории представляет гораздо большие технические трудности, тем не менее в § 14.3 мы получим некоторые результаты в этом направлении, эксплуатируя глобальный характер теории степени Лерэ — Шаудера. Главной нашей целью будет вывод мощной теоремы Красносельского о монотонной миноранте; в качестве одного из ее приложений мы подтвердим приведенное выше предсказание для задачи о распространении волн.

Нелинейные задачи на собственные функции подробно обсуждаются в книгах Красносельского [1956] и Бергера [1977]. В журнале Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1973, 3, № 2, содержится целый ряд интересных статей о последних достижениях в этой области; к ним можно добавить еще работы Стакголда [1971] и Сэттингера [1973]. В сборнике под редакцией Келлера и Антмана [1969] дан обзор ряда приложений к физическим задачам, а у Дикки [1976] — к задачам теории упругости. Обсуждение важного вопроса устойчивости решений эволюционных уравнений можно найти у Сэттингера [1973], а гидродинамическую интерпретацию соответствующих результатов — у Бенджамена [1976]. Наконец, заметим, что для одного специального класса нелинейных операторов построена теория типа теории Фредгольма; см. Фучик, Нечас, Соучек и Соучек [1973].

14.2. Локальная теория бифуркаций

Всюду ниже D — открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathscr{B}$, содержащее нуль, и $\{A_\mu\}$ — семейство операторов из $\bar{D}$ в $\mathscr{B}$, такое что $A_\mu f$ непрерывно по μ и f для μ из некоторого подмножества в $\mathbb{R}$ и f из $\bar{D}$. Далее, предполагается, что $A_\mu 0 = 0$

для каждого μ. Локальная теория изучает собственные векторы малой нормы операторов A_μ.

14.2.1. Определение. Пусть задано $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют характеристическое значение μ и соответствующий собственный вектор f оператора A_μ, такие что $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ и $\|f\| < \varepsilon$. В таком случае μ_0 называется **бифуркационным значением** или **точкой бифуркации** (от нуля) для A_μ. Ветвления от ненулевых решений также могут иметь место, но мы их здесь рассматривать не будем.

Если оператор A_μ линеен и не зависит от μ, то его точки бифуркации суть в точности его характеристические значения. Если A_μ нелинеен и имеет производную Фреше $A'_\mu(0)$ в нуле, то линейный оператор $A'_\mu(0)$ служит приближением к A_μ вблизи нуля. Поэтому можно ожидать, что точки бифуркации и малые собственные векторы оператора A_μ и линейного оператора $A'_\mu(0)$ тесно связаны друг с другом. Мы сейчас исследуем вопрос о справедливости этого *принципа линеаризации* в предположении, что $A_\mu = L + N_\mu$, где

(i) L: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ — ненулевой компактный линейный оператор, не зависящий от μ;

(ii) для каждого μ оператор N_μ: $\bar{D} \to \mathscr{B}$ компактен, $N_\mu f$ непрерывно по μ и f и

$$\lim_{h \to 0} \| N_\mu h \| / \| h \| = 0,$$

причем сходимость равномерна по μ для μ из любого конечного интервала.

Если оператор A_μ не зависит от μ и компактен, то эти условия равносильны дифференцируемости A_μ по Фреше в нуле с производной $A'_\mu(0) = L$, причем компактность L обеспечена в этом случае автоматически (задача 14.5). У нас здесь рассматривается несколько более общая ситуация, когда оператору дозволяется зависеть от μ, правда, лишь весьма слабым образом.

14.2.2. Теорема. *При указанных выше предположениях μ_0 может быть бифуркационным значением для A_μ только в том случае, если оно является характеристическим значением для L. Множество бифуркационных значений A_μ не имеет конечных предельных точек.*

Доказательство. Допустим, что μ_0 — точка бифуркации для A_μ, но не характеристическое значение для L. Поскольку L компактен, некоторая окрестность точки μ_0^{-1} содержится в $\rho(L)$. Следовательно, для μ из этой окрестности операторы $(I - \mu L)^{-1}$ равномерно ограничены в $\mathscr{L}(\mathscr{B})$ (по теореме 3.6.3). Далее, равенство $f=\mu A_\mu f$ можно переписать в виде

$$f/\|f\|=\mu(I-\mu L)^{-1}N_\mu f/\|f\|,$$

и ввиду условия (ii) мы придем к противоречию, если возьмем норму левой и правой частей последнего равенства и выберем достаточно малое f. □

Раз ветвления могут происходить лишь в точках, являющихся характеристическими значениями для L, естественно спросить, не будет ли каждое из таких значений точкой бифуркации. Не нужно ходить слишком далеко, чтобы убедиться, что ответ отрицателен.

14.2.3. Пример. Для векторов $x=(x_1, x_2)$ из $\mathbb{R}^2$ определим функцию φ: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ формулой

$$\varphi(x)=\left(x_1-x_2\left(x_1^2+x_2^2\right),\ x_2+x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\right).$$

Производная Фреше функции φ в нуле есть тождественный оператор, который имеет характеристическое значение 1. Если x — собственный вектор для φ, то

$$x_1=\mu\left[x_1-x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right],\quad x_2=\mu\left[x_2+x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]. \tag{14.2.1}$$

Умножая эти равенства на x_1 и x_2 соответственно и складывая, получим

$$x_1^2+x_2^2=\mu\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

Это уравнение имеет ненулевое решение, только если $\mu=1$, но в этом случае единственным решением уравнения (14.2.1) служит $x=0$. Таким образом, у φ нет *ни одного* характеристического значения[1)].

Итак, характеристические значения L не обязаны быть точками бифуркации для A_μ. Приводимая ниже теорема утверждает, что ветвление в точке, являющейся характеристическим значением, всё же имеет место, если кратность этого характеристического значения нечетна. Рассуждение, с помощью которого мы докажем этот факт, использует теорию степени и основано на том, что в некоторой окрестности начала степени операторов $I-\mu A_\mu$ и $I-\mu L$ одинаковы. В конечномерном случае последнюю легко вычислить (задача 13.2), и, оказывается, та же самая формула верна и в бесконечномерном случае (доказательство см. у Красносельского [1956, с. 138]):

14.2.4. Лемма. *Пусть* $\mu^{-1}\in\mathbb{R}$ *не является собственным значением компактного линейного оператора* L. *Тогда для любого открытого*

[1)] А значит, нет и точек бифуркации. — *Прим. перев.*

множества D, содержащего 0,

$$d(I-\mu L,\ 0,\ D)=(-1)^{\beta},$$

где β — сумма алгебраических кратностей вещественных собственных значений L, имеющих тот же знак, что и μ, а по абсолютной величине превосходящих $|\mu|^{-1}$.

Здесь и далее алгебраическая кратность понимается в смысле определения, данного в примере 13.2.13, и собственное значение называется *простым*, если его алгебраическая кратность равна единице.

14.2.5. Теорема. *Пусть A_μ удовлетворяет приведенным выше условиям* (i) *и* (ii). *Если μ_0 — характеристическое значение нечётной кратности*[1] *для L, то оно является точкой бифуркации для A_μ.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Выберем $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы μ_0 было единственным характеристическим значением L в интервале $[\mu_0-\varepsilon,\ \mu_0+\varepsilon]$. Если μ_0 не является точкой бифуркации, то, уменьшив, если надо, ε, можно добиться, чтобы для всякого μ из указанного интервала нуль был единственным решением уравнения $f=\mu A_\mu f$, имеющим норму $\leqslant\varepsilon$. Пусть S — открытый шар в $\mathscr{B}$ с центром в начале и радиусом ε. Тогда $I-(\mu_0+t\varepsilon)A_{\mu_0+t\varepsilon}$ не обращается в нуль на ∂S ни при каком $t\in[-1,\ 1]$, и в силу гомотопической инвариантности степени

$$d(I-(\mu_0-\varepsilon)A_{\mu_0-\varepsilon},\ 0,\ S)=d(I-(\mu_0+\varepsilon)A_{\mu_0+\varepsilon},\ 0,\ S). \tag{14.2.2}$$

Теперь покажем, что степени операторов $I-\mu A_\mu$ и $I-\mu L$ равны между собой[2]. Рассмотрим гомотопию $H_t=I-\mu L-t\mu N_\mu$, $t\in[0,\ 1]$. Поскольку μ не является характеристическим значением для L, то

$$\|H_0 f\|=\|f-\mu Lf\|\geqslant c\|f\| \tag{14.2.3}$$

при некотором $c>0$ для всех $f\in\mathscr{B}$. Далее,

$$\|H_t f-H_0 f\|=t\,|\mu|\,\|N_\mu f\|,$$

и ввиду условия, наложенного на N_μ, мы можем считать (уменьшив, если надо, ε), что $\|N_\mu f\|/\|f\|<c/|\mu|$ при $\|f\|\leqslant\varepsilon$. Таким образом,

$$\|H_t f-H_0 f\|<c\varepsilon \text{ для } f\in\bar{S}. \tag{14.2.4}$$

---

[1] То есть μ_0^{-1} — собственное значение нечётной алгебраической кратности. — *Прим. перев.*

[2] Для μ из указанного выше или, быть может, несколько меньшего интервала. — *Прим. перев.*

Следовательно, для $f \in \partial S$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\| H_t f \| \geqslant \| H_0 f \| - \| H_t f - H_0 f \| > 0,$$

в силу (14.2.3) и (14.2.4). Поэтому степень H_t на S определена, и, вспоминая, что $H_0 = I - \mu L$, $H_1 = I - \mu A_\mu$, и используя гомотопическую инвариантность степени, мы заключаем, что

$$d(I - \mu A_\mu,\ 0,\ S) = d(I - \mu L,\ 0,\ S). \tag{14.2.5}$$

Наконец, в силу (14.2.2) и (14.2.5)

$$d(I - (\mu_0 + \varepsilon) L,\ 0,\ S) = d(I - (\mu_0 + \varepsilon) A_{\mu_0+\varepsilon},\ 0,\ S)$$
$$= d(I - (\mu_0 - \varepsilon) A_{\mu_0+\varepsilon},\ 0,\ S) = d(I - (\mu_0 - \varepsilon) L,\ 0,\ S).$$

Однако равенство степеней в крайних частях этой цепочки противоречит лемме 14.2.4, поскольку μ_0 имеет нечетную степень. □

Интересно заметить, что эту теорему можно значительно усилить и получить результат, по существу, глобального характера (см. Рабинович [1973] или Бергер [1977, с. 276]). Приводимая ниже теорема, доказательство которой предоставляется читателю в качестве упражнения, утверждает, что вблизи точки бифуркации собственные векторы A локально ведут себя подобно собственным векторам L.

14.2.6. Теорема. *Предположим, что A_μ удовлетворяет приведенным выше условиям* (i) *и* (ii), *и пусть μ_0 — точка бифуркации для A_μ. Обозначим через X множество собственных векторов A_μ, отвечающих характеристическим значениям из интервала $[\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$, и через Y — линейную оболочку собственных векторов L, отвечающих μ_0. Тогда для достаточно малых ε*

$$\lim_{f \to 0,\ f \in X} \operatorname{dist}(f, Y) / \| f \| = 0.$$

В совокупности эти теоремы дают строгое обоснование эвристического принципа линеаризации. Некоторым недостатком является то, что теорема 14.2.5 охватывает лишь ситуации, когда кратность характеристического значения нечётна. При определенных условиях, например в случае, когда A есть потенциальный оператор (Красносельский [1956, с. 299, 332]), это ограничение может быть снято, но в общем случае, если кратность нечётна, приходится привлекать к рассмотрению члены высших порядков; вводное обсуждение этого вопроса имеется у Бергера и Бергера [1968, с. 123]. Тем не менее и сама теорема 14.2.5 во многих приложениях бывает полезной. Например, в случае когда L — интегральный оператор, отвечающий граничной задаче для дифференциального уравнения, характеристические значения часто оказываются простыми. Ниже мы рассмотрим две хорошо известные нелинейные задачи на собственные функции. Первая представляет собой простой пример из теории упругости и приводится здесь лишь в качестве беглой иллюстрации.

14.2.7. Пример. Выпучивание сжатого стержня. Рассмотрим тонкий упругий стержень единичной длины[1], шарнирно закрепленный на одном конце и находящийся под воздействием приложенной к нему на другом конце сжимающей силы P (см. рис. 14.3). Пусть s обозначает расстояние вдоль стержня, и пусть $\rho(s)$ — его плотность, предполагаемая непрерывной и строго положительной.

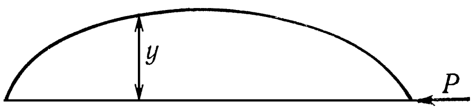

Рис. 14.3.

Если поперечное смещение стержня в точке s обозначить через $y(s)$, то поведение стержня описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\mu\rho y\left[1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{1/2}=0$$

с граничными условиями $y(0)=y(1)=0$; здесь μ — некоторая постоянная, пропорциональная P. Физическая интуиция подсказывает, что при малых P стержень будет сжиматься, не прогибаясь, а при больших P может произойти выпучивание.

Переписывая это дифференциальное уравнение с помощью функции Грина k в виде интегрального, получаем для $\varphi=y''$

$$\varphi(s)=\mu\rho(s)\int_0^1 k(s,t)\varphi(t)\,dt\cdot\left\{1-\left|\int_0^1\frac{\partial k}{\partial s}(s,w)\varphi(w)\,dw\right|^2\right\}^{1/2}\equiv\mu A\varphi(s).$$

Это — нелинейная задача на собственные функции. Возьмем в качестве $\mathscr{B}$ вещественное банахово пространство $\mathscr{C}([0,1])$ с sup-нормой и в качестве D — его открытый единичный шар. Очевидно, что оператор A: $\bar{D}\to\mathscr{C}([0,1])$ компактен и обладает в нуле производной Фреше L, задаваемой формулой

$$L\varphi(s)=\rho(s)\int_0^1 k(s,t)\varphi(t)\,dt.$$

Обозначим характеристические значения и отвечающие им собственные функции оператора L через μ_1, μ_2, ... и φ_1, φ_2, ... соответственно. Поскольку эти характеристические значения оказы-

[1] Неоднородный по длине. — *Прим. перев.*

ваются простыми, из теорем 14.2.2 и 14.2.5 немедленно следует, что множество точек бифуркации оператора A в точности совпадает с $\{\mu_n\}$. Далее, согласно теореме 14.2.6, для μ, близких к μ_n, малые собственные функции оператора A хорошо аппроксимируются соответствующими кратными функций φ_n.

Мы убедились, что ветвление имеет место в точках, являющихся характеристическими значениями линеаризованного уравнения. Однако локальная теория оставляет ряд важных вопросов без ответа. В частности, она не дает никаких указаний относительно того, будет ли характеристическим любое μ, лежащее между двумя точками бифуркации, равно как и не позволяет она решить

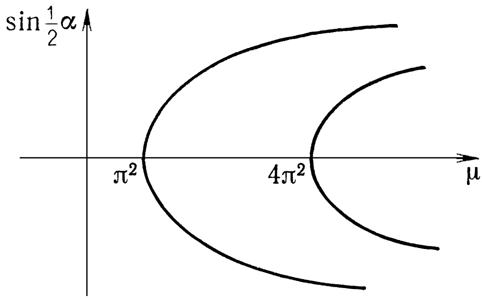

Рис. 14.4. Бифуркационная диаграмма для задачи о выпучивании сжатого стержня.

вопрос (к которому мы вернемся в примере 14.3.11) о существовании состояний с большим прогибом. В данном простом примере можно получить полное решение, если предположить, что стержень однороден, ибо тогда исходное дифференциальное уравнение можно явно проинтегрировать, используя эллиптические функции (см. Келлер и Антман [1969]). Представленная на рис. 14.4 бифуркационная диаграмма, где α — угол поворота в концевой точке стержня, служащий мерой отклонения от невыпученного состояния, показывает, что при любом $\mu > \pi^2$ имеется по крайней мере одно выпученное состояние. Вопрос о том, какие именно состояния предпочитаются системой при больших μ, также может быть решен дальнейшим анализом.

14.2.8. Пример. Одна из наиболее интересных тем в теории волн на воде — это изучение волн большой амплитуды в канале. Вот уже более ста лет привлекает внимание математиков следующая задача из этой области. Предположим, что идеальная жидкость совершает безвихревое двумерное движение в канале. Существует ли периодический цуг волн не изменяющейся формы (т. е. неизменной по отношению к наблюдателю, движущемуся вместе с волной с ее скоростью)? Стокс высказал еще в 1880 г. гипотезу, что должны существовать волны с максимальной крутизной вплоть до $\pi/6$, но возникающие здесь математические трудности были столь велики, что лишь сравнительно недавно это предсказание было строго подтверждено, и до сих пор еще в этой области остается множество нерешенных проблем. Близкая задача об уединенной волне (солитоне) оказалась даже более податливой.

Главное затруднение, возникающее при рассмотрении волн, не являющихся бесконечно малыми волнами, отвечающими линеаризованным граничным условиям, связано с наличием свободной границы. (Заметим, что в двумерном случае задачу можно решить, привлекая методы теории функций комплексной переменной.) Дифференциальное уравнение, описывающее поведение волн на воде, нелинейно, и существование тривиального решения — невозмущенного течения — означает, что наша задача относится к типу нелинейных задач на собственные функции, причем соответствующий параметр связан с длиной волны. В долгой истории этой задачи выделяются два основных достижения. Первое — это локальный результат о существовании малых волн, полученный независимо Леви-Чивитой и Некрасовым в начале 20-х годов; впоследствии было показано, что этот результат очень легко получить, используя методы теории бифуркаций, излагаемые в данном параграфе. Второе, которое мы обсудим в следующем параграфе, — это вклад Красовского в решение гораздо более трудной глобальной проблемы существования решения.

Приводимое ниже доказательство локального результата о существовании решения основано на формулировке задачи, данной Некрасовым, который показал, что в случае канала бесконечной глубины угол θ между вектором скорости распространения волны и свободной границей удовлетворяет уравнению $\theta = \mu A_\mu \theta$, где

$$A_\mu\theta(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x,\ y)\sin\theta(y)\left|1+\mu\int_0^y \sin\theta(u)\,du\right|^{-1} dy.$$

Здесь μ — некоторый параметр, зависящий от длины волны, от скорости частиц в подошве волны и от g[1], а ядро k, представляющее собой функцию Грина задачи Неймана для оператора Лапласа в круге, задается формулой

$$k(x,\ y) = \frac{1}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\sin nx \sin ny.$$

Цель состоит в том, чтобы доказать существование ненулевых непрерывных решений. Рассмотрим пространство $\mathscr{C}([-\pi, \pi])$ (банахово пространство вещественнозначных непрерывных функций

[1] Ускорения силы тяжести. — *Прим. перев.*

с sup-нормой). Легко показать, что для некоторого фиксированного конечного интервала значений μ оператор A_μ непрерывен и компактен на некотором достаточно малом шаре с центром в нуле. Его производная Фреше в нуле представляет собой интегральный оператор L, задаваемый формулой

$$L\theta(x)=\int_{-\pi}^{\pi} k(x, y)\,\theta(y)\,dy.$$

Оператор L имеет простые характеристические значения $3n\pi$ ($n=1, 2, \ldots$), и все другие условия на A_μ также легко проверяются. На основании теоремы 14.2.5 мы немедленно заключаем, что каждое из этих значений является точкой бифуркации для A_μ. Тем самым доказано существование периодического цуга волн малой, но не бесконечно малой амплитуды. Это и есть искомый локальный результат о существовании решения. (В действительности физический смысл имеет лишь первая точка бифуркации (Хайерс [1964, с. 324]).)

14.3. Глобальная теория собственных векторов

Два примера, которыми мы закончили предыдущий параграф, ярко подчеркивают ограниченность локальной теории бифуркаций, поскольку в обоих случаях наиболее интересные вопросы касаются как раз „больших" решений и потому по своей сути являются глобальными. На практике обычно из физических соображений бывает ясно, что должны существовать решения, размер которых ограничен лишь некоторой естественной границей, вытекающей из физики задачи. Как правило, такое физическое предсказание весьма трудно подтвердить математически, если не наложить на рассматриваемый оператор какие-либо дополнительные условия. В одном случае, а именно в случае, когда на пространстве, где действует оператор, задано частичное упорядочение, дело существенно упрощается и возможно значительное продвижение вперед. В этом параграфе мы обсудим группу типичных результатов такого рода, которые оказались полезными в приложениях.

Всюду ниже $\mathscr{B}$ — вещественное банахово пространство, наделенное частичным упорядочением, задаваемым конусом E, и D — ограниченное открытое подмножество в $\mathscr{B}$, такое что $0\in D$. Пусть $A\colon \bar{D}\to\mathscr{B}$ — заданный компактный оператор (отметим, что A предполагается теперь независящим от μ). Нашей целью будет показать, что совокупность собственных векторов оператора A образует „непрерывную ветвь" некоторой определенной длины; приводимое ниже определение этого понятия подсказано соответствующим свойством непрерывной кривой в двумерном пространстве, проходящей через начало координат.

14.3.1. Определение. Пусть S — подмножество в $\mathscr{B}$, и пусть задано $r > 0$. Говорят, что S образует **непрерывную ветвь** длины r, если для любого $r' < r$ граница всякого открытого множества, содержащего 0 и содержащегося в шаре с центром 0 и радиусом r', имеет непустое пересечение с S.

14.3.2. Теорема. *Пусть D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства, содержащее начало. Предположим, что оператор A: $\bar{D} \to E$ компактен и*

$$\operatorname{dist}(0,\ A(\partial D)) = \inf_{f \in \partial D} \| Af \| > 0. \tag{14.3.1}$$

Тогда у A имеется в $\partial D \cap E$ собственный вектор, отвечающий некоторому положительному характеристическому значению.

В случае когда D — шар с центром в начале, этот результат легко выводится из теоремы Шаудера о неподвижной точке (см. задачу 14.9). Смысл того, что D дозволяется быть любым открытым множеством, заключается в том, что в таком случае теорема позволяет устанавливать существование непрерывных ветвей собственных векторов. Средоточием доказательства теоремы является приводимая далее лемма, которая выводится при помощи теории степени.

14.3.3. Определение. Говорят, что у двух ненулевых векторов f, $g \in \mathscr{B}$ **одно и то же направление** (или что они **одинаково направлены**), если существует такое $c > 0$, что $f = cg$.

14.3.4. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ и D такие же, как в последней теореме, и B: $\bar{D} \to \mathscr{B}$ — компактный оператор. Предположим, что $I - B$ не обращается в нуль на ∂D и что существует такой ненулевой вектор $p \in \mathscr{B}$, что векторы $(I - B) f$ и p не являются одинаково направленными ни для одного $f \in \partial D$. Тогда у B имеется в ∂D собственный вектор, отвечающий некоторому положительному характеристическому значению.*

Доказательство. Рассмотрим гомотопию $\{H_t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, задаваемую формулой

$$H_t f = t (I - B) f - (1 - t) p.$$

Заметим прежде всего, что $H_t f \neq 0$ для любых $t \in (0, 1)$ и $f \in \partial D$, ибо в противном случае векторы $(I - B) f$ и $t^{-1} (1 - t) p$ имели бы для некоторых таких t, f одно и то же направление, вопреки нашему предположению. Далее, $H_1 = I - B$, а по условию леммы оператор $I - B$ не обращается в нуль на ∂D. Таким образом, H_t не обращается в нуль на ∂D ни при каком $t \in (0, 1)$. Но поскольку $p \neq 0$, то при достаточно малых t оператор H_t не обращается в нуль в $\bar{D}$ и потому имеет степень нуль[1]. Следовательно, в силу гомотопической инвариантности степени, $d(I-B,\ 0,\ D)=0$.

Если утверждение леммы неверно, то найдутся $t>0$ и $f\in\partial D$, такие что $f=tBf$. Отсюда следует, что $I-tB$ не обращается в нуль на ∂D ни при каких $0\leqslant t\leqslant 1$. Замечая, что $0\in D$ и вновь используя гомотопическую инвариантность степени, заключаем, что

$$1=d(I,\ 0,\ D)=d(I-B,\ 0,\ D).$$

Но это противоречит утверждению, полученному в предыдущем абзаце. □

Мы докажем нашу теорему, применяя эту лемму к оператору tA для большого положительного t. Следующий результат показывает, что для этого оператора выполнено последнее условие леммы.

14.3.5. Лемма. *Существуют $p\in\mathscr{B}$ и $t_0>0$, такие что ни при каких $t>t_0$ и $f\in\partial D$ векторы $(I-tA)f$ и p не являются одинаково направленными.*

Доказательство. Возьмем любое $p\in E$ с $\|p\|=1$. Если наш результат неверен, то найдутся последовательность (t_n) вещественных чисел, стремящаяся к бесконечности, последовательность (c_n) положительных чисел и последовательность (f_n) в ∂D, такие что $f_n-t_nAf_n=c_np$. Деля на t_n и беря нормы, получаем

$$\left(t_n^{-1}f_n-Af_n\right)/\left\|t_n^{-1}f_n-Af_n\right\|=p. \tag{14.3.2}$$

Поскольку оператор A компактен, найдется подпоследовательность, снова обозначаемая через (f_n), такая что последовательность (Af_n) сходится; пусть $g=\lim Af_n$. В силу (14.3.1), $g\neq 0$, и так как $Af_n\in E$, а E замкнуто, то $g\in E$. Полагая $n\to\infty$ в (14.3.2), заключаем, что $g/\|g\|=-p$, и поскольку $g\in E$, то $-p\in E$. Следовательно (поскольку E — конус и $p\in E$), $p=0$. Но это противоречит тому, что $\|p\|=1$.

Доказательство теоремы 14.3.2. Предположим, что не существует такого $t>0$, для которого оператор $I-tA$ обращается в нуль на ∂D. Тогда при $t>t_0$ (где t_0 определено, как в лемме 14.3.5) и $B=tA$ выполнены условия леммы 14.3.4. Значит, для некоторого $\mu>0$ и некоторого $f\in\partial D$ мы имеем $f=\mu Bf=t\mu Af$, откуда следует, что при $t'=t\mu>0$ оператор $I-t'A$ обращается в нуль на ∂D, вопреки предположению.

Следовательно, $f=t'Af$ для некоторых $t'>0$ и $f\in\partial D$. Так как $A\bar{D}\subset E$ (по условию теоремы), то $f\in E$. Таким образом, f

[1] Относительно точки 0. — *Прим. перев.*

есть собственный вектор из $\partial D \cap E$, отвечающий положительному характеристическому значению t'. □

Условия этой теоремы крайне стеснительны. В самом деле, требованию, что оператор A отображал всё $\bar{D}$ в E, не удовлетворяют даже положительные линейные операторы. От этого упрека свободна следующая теорема, в которой ограничения налагаются лишь на поведение A на $\partial D \cap E$.

14.3.6. Теорема. *Пусть D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathcal{B}$, такое что $0 \in D$, и пусть $A\colon \partial D \cap E \to E$ — компактный оператор, для которого*

$$\operatorname{dist}(0,\ A(\partial D \cap E)) > 0. \tag{14.3.3}$$

Тогда у A имеется в $\partial D \cap E$ собственный вектор, отвечающий положительному характеристическому значению.

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что существует некое расширение, скажем $\tilde{A}$, оператора A на всё $\bar{D}$, удовлетворяющее условиям теоремы 14.3.2. Этого достаточно для установления нужного нам результата, ибо, очевидно, всякий собственный вектор оператора $\tilde{A}$, принадлежащий $\partial D \cap E$, будет также собственным вектором A.

Поскольку конус E выпукл, выпуклая оболочка $\operatorname{co} R(A)$ множества $R(A) = A(\partial D \cap E)$ содержится в E. По теореме Дугунджи о продолжении 13.2.12 оператор A обладает продолжением на $\bar{D}$, по-прежнему обозначаемым через A, с образом, содержащимся в $\operatorname{co} R(A) \subset E$, и это продолжение $A\colon \bar{D} \to \operatorname{co} R(A)$ компактно (лемма 8.2.4). Однако оно не совсем ещё годится нам. Дело в том, что, хотя $A(\partial D \cap E)$ надежно удалено от начала, про $A(\partial D)$ известно лишь, что оно лежит в $\operatorname{co} A(\partial D \cap E)$, а в бесконечномерном случае этого не достаточно для того, чтобы утверждать, что $\operatorname{dist}(0, A(\partial D)) > 0$. Поэтому условие (14.3.1) может не выполняться. Однако если мы подыщем такой непрерывный оператор P, который оставляет каждую точку множества $A(\partial D \cap E)$ на месте, а часть конуса E, лежащую вблизи начала, отодвигает подальше от начала, то оператор $\tilde{A} = PA$ уже будет обладать всеми требуемыми свойствами. Покажем, как можно получить такой оператор P с помощью простой геометрической конструкции.

Пусть $a = \operatorname{dist}(0, A(\partial D \cap E))$. Выберем любое u, удовлетворяющее условиям $-u \in E$ и $\|u\| = a$ (см. рис. 14.5), и обозначим через S пересечение E с замкнутым шаром с центром u и радиусом $a/2$. Далее, для каждого $f \in S$ пусть $\tilde{f}$ обозначает точку, в которой прямая, проходящая через u и f, пересекается со сферической частью границы S, т. е.

$$\tilde{f} = u + (a/2)(f - u)/\|f - u\|.$$

Положим $Pf = f$ для $f \in E \setminus S$ и $\tilde{f}$ для $f \in S$. Оператор P проецирует внутренность множества S на сферическую часть его границы, а остальные точки конуса E оставляет каждую на своем месте. Следовательно, $\operatorname{dist}(0, P(E)) > 0$. Непрерывность P легко проверяется. Таким образом, P обладает всеми нужными свой-

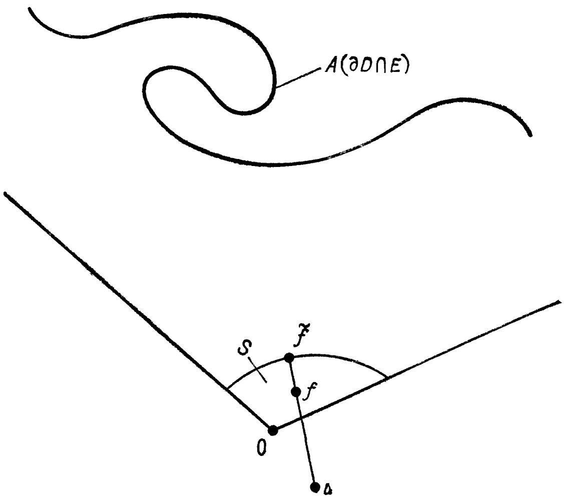

Рис. 14.5.

ствами, и утверждение нашей теоремы получается применением теоремы 14.3.2 к $\tilde{A} = PA$. $\square$

В случае когда оператор A положителен и условие (14.3.3) выполняется для каждого открытого D, содержащего начало и содержащегося в $S(0, r)$, собственные векторы A образуют непрерывную ветвь длины r в E. „Опробуем" теперь установленную теорему на интегральном уравнении Гаммерштейна.

*14.3.7. **Пример.*** Рассмотрим уравнение $f = \mu A f$, где

$$Af(x) = \int_0^1 k(x, y)\, \psi[y, f(y)]\, dy,$$

а k и ψ — непрерывные вещественнозначные функции. Если функция k строго положительна, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $k(x, y) \geqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$. Если, кроме того, $\psi[y, z] \geqslant z$ для $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $z \geqslant 0$, то оператор A будет положительным относительно конуса E неотрицательных функций в некотором подходящем банаховом пространстве $\mathscr{B}$. Главная проблема — выбрать $\mathscr{B}$

таким образом, чтобы выполнялось условие (14.3.3). К сожалению, простейший возможный выбор $\mathscr{B} = \mathscr{C}([0, 1])$ не проходит, в общем потому, что интеграл от f может быть мал, даже если $\|f\| = 1$ и $f \geqslant 0$. В случае $\mathscr{B} = \mathscr{L}_1(0, 1)$ имеем для $f \in E$

$$\| Af \| = \int_0^1 \int_0^1 k(x, y) \psi[y, f(y)]\, dx\, dy \geqslant \int_0^1 \int_0^1 \varepsilon f(y)\, dx\, dy = \varepsilon \| f \|,$$

и условие (14.3.3) удовлетворяется. Однако требуется еще какое-нибудь условие на рост ψ, чтобы обеспечить компактность A. Если такое условие выполнено, то применима теорема 14.3.6 и можно заключить, что A имеет непрерывную ветвь собственных функций бесконечной длины в E.

Если в этом примере ослабить условие строгой положительности k, то теорему уже нельзя будет применить, поскольку (14.3.3) может тогда не выполняться. Это условие строгой положительности является слишком жестким для большинства приложений, и, в частности, оно не выполняется в случае, когда k — функция Грина для однородной задачи Дирихле. В приводимой ниже теореме, которая представляет собой вариант теоремы Красносельского о монотонной миноранте (Красносельский [1956, с. 269]), условие (14.3.3) заменено менее ограничительным условием.

14.3.8. Определение. Оператор B называется однородным, если

$$B(tf) = tBf \text{ для всех } f \in E, \ t \geqslant 0.$$

14.3.9. Теорема. *Положим $E_r = E \cap S(0, r)$, и пусть A — положительный компактный оператор, определенный на E_r. Предположим, что A обладает монотонной однородной минорантой B, такой что для некоторого $m > 0$ и некоторого ненулевого $u \in E$ выполнено неравенство $Bu \geqslant mu$. Тогда A имеет непрерывную ветвь собственных векторов длины r в E.*

Доказательство. Надо показать, что у A имеется собственный вектор в $\partial D \cap E$ для любого открытого D, содержащего 0 и содержащегося в шаре $\bar{S}(0, r')$ с $r' < r$. Возьмем любое такое D и будем считать его далее фиксированным на протяжении всего доказательства.

Положим $A_t f = Af + tu$ для $t > 0$ и $f \in E_r$. Поскольку A положителен, то $A_t f \geqslant 0$ и, значит, в силу утверждения (iii) задачи 8.7, $\operatorname{dist}(0, A_t(\partial D \cap E)) > 0$. Поэтому теорема 14.3.6 показывает, что для каждого t существуют $\mu_t > 0$ и $f_t \in \partial D \cap E$, такие что

$$\mu_t (Af_t + tu) = \mu_t A_t f_t = f_t.$$

Покажем теперь, что $\mu_t \leqslant m^{-1}$ для всех $t > 0$. Поскольку B — миноранта для A, то $Bf_t \leqslant Af_t$. Следовательно, в силу (14.3.4),

$$Bf_t + tu \leqslant \mu_t^{-1} f_t. \tag{14.3.5}$$

Так как $Af_t \geqslant 0$, то из (14.3.4) вытекает, что $f_t \geqslant \mu_t tu$, и мы заключаем на основании элементарных свойств конуса (задача 8.7, (iv)), что существует наибольшее вещественное число s_t, для которого $f_t \geqslant s_t u$. Далее, имеем

$$\mu_t^{-1} f_t \geqslant Bf_t \geqslant B\left(s_t u\right) \geqslant s_t Bu \geqslant m s_t u;$$

здесь последовательно использованы неравенство (14.3.5), монотонность и однородность B и тот факт, что $Bu \geqslant mu$. Следовательно, $f_t \geqslant \mu_t m s_t u$, и из максимальности s_t вытекает, что $\mu_t m s_t \leqslant s_t$. Значит, $\mu_t \leqslant m^{-1}$, как и утверждалось.

Наш результат легко получается теперь, если выбрать какую-нибудь последовательность (t_n), стремящуюся к нулю, и взять соответствующие пределы. А именно, поскольку $\mu_t \leqslant m^{-1}$, найдется подпоследовательность, которую мы по-прежнему обозначим через (t_n), такая что последовательность $\left(\mu_{t_n}\right)$ сходится. Пусть $\mu = \lim \mu t_n$. Так как оператор A компактен, то, перейдя, если надо, еще раз к подпоследовательности, можно считать, что сходится и последовательность $\left(Af_{t_n}\right)$. Следовательно, в силу (14.3.4), последовательность $\left(f_{t_n}\right)$ сходится к некоторому пределу f, и $f \in \partial D \cap E$, ибо последнее множество замкнуто. Таким образом,

$$f = \lim f_{t_n} = \lim \mu_{t_n} + \left(Af_{t_n} + t_n u\right) = \mu Af. \quad \square$$

14.3.10. Пример. Поучительно заново рассмотреть пример 14.3.7, используя только что доказанную теорему. Пусть, как и прежде, $\psi[y, z] \geqslant z$ для $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $z \geqslant 0$, но про функцию k предположим теперь лишь, что она неотрицательна. Тогда для неотрицательных f

$$Af(x) \geqslant \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy \equiv Bf(x).$$

Если существуют непрерывная неотрицательная функция u и $m > 0$, такие что $Bu \geqslant mu$, то теорема 14.3.9 применима в $\mathscr{C}([0, 1])$ с обычным конусом E неотрицательных функций, откуда следует, что A имеет непрерывную ветвь собственных функций бесконечной длины.

Теорема о монотонной миноранте особенно полезна в том важном случае, когда k — функция Грина. Действительно, в этом случае k, как правило, неотрицательна, и у оператора B будет иметься собственный вектор в E, отвечающий его наименьшему характеристическому значению. Этот собственный вектор и годится в качестве u. Кроме того, поскольку используется пространство $\mathscr{C}([0, 1])$, не требуется налагать никаких ограничений на рост ψ.

В приведенных в предыдущем параграфе примерах из теории упругости и теории волн на воде при помощи локальной теории бифуркаций было установлено существование малых решений. Рассмотрим эти примеры заново, с тем чтобы на этот раз доказать существование решений реального физического масштаба.

14.3.11. Пример (Саати [1967, с. 298]). Явление выпучивания сжатого стержня (пример 14.2.7) описывается уравнением $\varphi = \mu A\varphi$, где

$$A\varphi(x) = p(s)\int_0^1 k(s, t)\varphi(t)\,dt\cdot\left\{1 - \left[\int_0^1 \frac{dk}{ds}(s, w)\varphi(w)\,dw\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Возьмем в качестве $\mathscr{B}$ пространство $\mathscr{C}([0, 1])$ непрерывных вещественнозначных функций с sup-нормой и в качестве E конус неотрицательных функций. Ядро k задается явно формулой (4.2.5), и стандартное вычисление показывает, что

$$\left|\int_0^1 \frac{\partial k}{\partial s}(s, w)\varphi(w)\,dw\right| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\| \text{ для } \varphi \in E.$$

Следовательно, оператор A определен на $E_r = E \cap \bar{S}(0, r)$ для любого $r < 2$ и, очевидно, положителен и компактен. Нетрудно подыскать монотонную миноранту для A; ею будет линейный оператор B, задаваемый формулой

$$B\varphi(s) = \left(1 - \frac{1}{4}r^2\right)^{1/2}\rho(s)\int_0^1 k(s, t)\varphi(t)\,dt.$$

Далее, если положить $\varphi = y''$ и $\lambda = \mu(1 - r^2/4)^{1/2}$, то уравнению $\varphi = \mu B\varphi$ соответствует граничная задача

$$y''(s) + \lambda\rho(s)y(s) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

и поскольку функция ρ строго положительна, то, согласно классической теории Штурма — Лиувилля, эта задача имеет неотрицательную собственную функцию, отвечающую некоторому положительному собственному значению λ. Это означает, что существуют ненулевой элемент $u \in E$ и $\mu > 0$, такие что $u = \mu Bu$. Таким образом, выполнены все условия теоремы о монотонной миноранте 14.3.9 и, значит, A имеет непрерывную ветвь собственных функций длины 2 в E. Это согласуется с физической картиной больших выпучиваний для случая достаточно больших сжимающих сил.

14.3.12. Пример. Главный прорыв в задаче о периодическом цуге волн (пример 14.2.8) был осуществлен Красовским [1961], который установил существование волн любой крутизны (максимального угла наклона) вплоть до $\pi/6$, в потоке конечной или бесконечной глубины. Ниже мы дадим доказательство результата Красовского для случая бесконечной глубины. Метод доказательства, принадлежащий Киди [1972], основан на теореме о монотонной миноранте.

В формулировке Некрасова рассматриваемый оператор зависит довольно сложным образом от параметра μ. В доказательстве Красовского задача переформулируется в терминах некоторого оператора, не зависящего от μ. Как и раньше, неизвестная функция θ — это угол наклона вектора скорости распространения волны по отношению к свободной границе. После соответствующего выбора масштаба областью изменения независимой переменной можно считать интервал $[-\pi, \pi]$. Далее, как оказывается, можно ограничиться рассмотрением волн, симметричных относительно гребня. Соответствующая функция θ будет нечетной, и, таким образом, достаточно в качестве области определения θ взять интервал $[0, \pi]$. Основное уравнение задачи может быть записано в виде $\theta = \mu A\theta$. Здесь $\mu = gl/2\pi c^2$, где g — ускорение силы тяжести, а l и c — длина волны и скорость распространения волны соответственно. Оператор A задается формально равенством

$$A\theta(x) = \int_0^\pi k(x, y) \exp[3C\theta(y)] \sin\theta(y)\, dy.$$

Как и раньше, k — функция Грина

$$k(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx \sin ny.$$

Оператор C — это оператор гармонического сопряжения, определяемый так: в качестве $C\theta$ берется граничное значение вещественной части аналитической функции, у которой мнимая часть имеет граничным значением θ. Более точно, берем нечётную вещественнозначную непрерывную функцию θ на $[-\pi, \pi]$, обращающуюся в нуль в точке π, и продолжаем θ на всю вещественную ось до периодической функции с периодом 2π. Пусть Θ — определенная на $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ гармоническая функция, такая что $\Theta(x, x') \to 0$ при $x' \to \infty$ и $\Theta(x, x') \to \theta(x)$ при $x' \to 0$, и пусть $\Phi(x, x') + i\Theta(x, x')$ — аналитическая функция от $x + ix'$. Тогда мы полагаем $C\theta(x) = \lim\limits_{x' \to 0} \Phi(x, x')$. Тем самым $C\theta$ определяется с точностью до произвольной постоянной; фиксируем эту постоянную требованием, чтобы

$$\int_0^{2\pi} C\theta(x)\,dx = 0.$$

С учетом ожидаемых свойств решения естественным выбором банахова пространства будет пространство $\mathscr{C}_*[0,\pi]$ — наделенное sup-нормой множество вещественнозначных непрерывных функций на интервале $[0,\pi]$, обращающихся в нуль в концевых точках этого интервала. В качестве E возьмем конус неотрицательных функций в $\mathscr{C}_*[0,\pi]$. В доказательстве нам понадобится также использовать пространство $\mathscr{L}_p(0,\pi)$; норма в этом пространстве будет обозначаться через $\|\cdot\|_p$. Наша цель — показать, что для любого заданного положительного числа $\theta_m < \pi/6$ задача на собственные функции $\theta = \mu A\theta$ имеет решение в E с $\|\theta\| = \theta_m$. Бо́льшая часть трудностей в доказательстве проистекает из скверной природы оператора гармонического сопряжения C. Вывод свойств этого оператора представляет собой техническое упражнение из теории функций комплексной переменной, и мы просто сформулируем нужные нам результаты, по поводу доказательства см. Зигмунд [1959]. Свойства функции Грина k общеизвестны. Основные факты, которые нам понадобятся, суммированы в следующих двух леммах:

14.3.13. Лемма. *Выписанная выше функция Грина $k(x,y)$ непрерывна и неотрицательна при всех $x \neq y$, $x, y \in [0,\pi]$. Для всякого p из интервала $1 \leqslant p < \infty$ существует вещественное число k_p, такое что при всех $x \in [0,\pi]$*

$$\int_0^{\pi} |k(x, y)|^p\,dy \leqslant k_p.$$

14.3.14. Лемма. *Оператор гармонического сопряжения C, определенный на $\mathscr{C}_*[0,\pi]$, обладает следующими свойствами.*

(i) *Для любого заданного p из интервала $1 < p < \infty$ существует вещественное число m_p, зависящее лишь от p, такое что $\|C\theta\|_p \leqslant m_p\|\theta\|_p$.*

(ii) *Для любого заданного $d > 0$ существует вещественное число n_d, такое что если $a\|\theta\| = \pi/2 - d$, то*

$$\int_0^{\pi} \exp[aC\theta(x)]\,dx \leqslant n_d.$$

Теперь мы можем приступить к проверке выполнения условий теоремы о монотонной миноранте. Детали этой проверки довольно утомительны, хотя в принципе требуется немногим больше, чем неравенство Гёльдера (теорема 2.5.3).

14.3.15. Лемма. *Для любого*[1] $d > 0$ *оператор* A *положителен и компактен в замкнутом шаре* $\bar{S}(0, \pi/6 - d)$ в $\mathscr{C}_*[0, \pi]$.

Доказательство. Положительность очевидна, непрерывность будет доказана ниже, а доказательство компактности, проводящееся аналогичным образом, мы опустим.

Фиксируем $d > 0$. В силу свойства функции Грина k, $R(A) \subset \mathscr{C}_*[0, \pi]$. Поэтому искомая непрерывность будет установлена, если мы покажем, что существует такое число c, что

$$\|A\theta_1 - A\theta_2\| \leqslant c\,\|\theta_1 - \theta_2\|. \tag{14.3.6}$$

С этой целью положим $\varphi_j = C\theta_j$, $j = 1, 2$, и заметим, что справедливо тождество

$$A\theta_1(x) - A\theta_2(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi k(x, y)\,[e^{3\varphi_1(y)} + e^{3\varphi_2(y)}]\,[\sin\theta_1(y) - \sin\theta_2(y)]\,dy$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\pi k(x, y)\,[e^{3\varphi_1(y)} - e^{3\varphi_2(y)}]\,[\sin\theta_1(y) + \sin\theta_2(y)]\,dy. \tag{14.3.7}$$

Для первого интеграла имеем

$$\left|\int_0^\pi k(x, y)\,e^{3\varphi_j(y)}\,[\sin\theta_1(y) - \sin\theta_2(y)]\,dy\right|$$

$$= 2\left|\int_0^\pi k(x, y)\,e^{3\varphi_j(y)}\cos\frac{1}{2}[\theta_1(y) + \theta_2(y)]\sin\frac{1}{2}[\theta_1(y) - \theta_2(y)]\,dy\right|$$

$$\leqslant \int_0^\pi k(x, y)\,e^{3\varphi_j(y)}\,|\theta_1(y) - \theta_2(y)|\,dy$$

$$\leqslant \|\theta_1 - \theta_2\|\left\{\int_0^\pi |k(x, y)|^p\,dy\right\}^{1/p}\left\{\int_0^\pi e^{3q\varphi_j(y)}\,dy\right\}^{1/q}$$

при любых $1 < p$, $q < \infty$ с $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (в силу неравенства Гёльдера). Поскольку $d > 0$, найдется такое $q > 1$, что $3q(\pi/6 - d) < \pi/2$. Леммы 14.3.13 и 14.3.14 соответственно показывают, что для этого q первый и второй члены в фигурных скобках ограничены. Второй интеграл в (14.3.7) оценивается аналогично, надо только сперва воспользоваться элементарным неравенством

$$|e^x - e^y| \leqslant |x - y|(e^x + e^y).$$

Отсюда немедленно следует (14.3.6). □

[1] Здесь и в дальнейшем подразумевается, конечно, что d мало, во всяком случае меньше $\pi/6$. — *Прим. перев.*

14.3.16. Лемма. *Возьмем произвольное $d > 0$ и положим $r = \pi/6 - d$. Пусть E_r — пересечение конуса E с шаром $\bar{S}(0, r)$ в $\mathscr{C}_*[0, \pi]$. Выберем любое $p > 1$ и для вещественного γ определим оператор B: $E \to \mathscr{C}_*[0, \pi]$ формулой*

$$B\theta(x) = \gamma\left\{\int_0^\pi k(x,y)|\theta(y)|^{1/p}\,dy\right\}^p.$$

Тогда при некотором $\gamma > 0$ оператор B является монотонной однородной минорантой для A на E_r и существуют $\alpha > 0$ и ненулевое $u \in E$, такие что $Bu = \alpha u$.

Доказательство. Ясно, что B монотонен и однороден (определение 14.3.8) и $Bu = \alpha u$ с $a > 0$ для $u(x) = (\sin x)^p$. Остается лишь доказать, что B служит минорантой для A. Полагая $\varphi = C\theta$, имеем

$$[\gamma^{-1}B\theta(x)]^{1/p} = \int_0^\pi k(x, y)\,|\theta(y)|^{1/p}\,dy$$

$$= \int_0^\pi |\,k(x,\ y)\,e^{3\varphi(y)}\sin\theta(y)\,|^{1/p}\,|k(x, y)|^{1/q}\left|\frac{\theta(y)}{\sin\theta(y)}\right|^{1/p} e^{-3p^{-1}\varphi(y)}\,dy,$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Для любых $r, s > 1$ с $p^{-1} + r^{-1} + s^{-1} = 1$ в силу неравенства Гёльдера

$$[\gamma^{-1}B\theta(x)]^{1/p} \leqslant \left\{\int_0^\pi k(x, y)\,e^{3\varphi(y)}\sin\theta(y)\,dy\right\}^{1/p}\left\{\int_0^\pi |k(x, y)|^{r/q}dy\right\}^{1/r}$$

$$\times\left\{\int_0^\pi\left|\frac{\theta(y)}{\sin\theta(y)}\right|^{s/p} e^{-3sp^{-1}\varphi(y)}\,dy\right\}^{1/s}.$$

Выберем теперь любое s, такое что $1 < s < p$. Тогда, согласно лемме 14.3.14, (ii), последний интеграл конечен. Далее, легко проверить, что $rq^{-1} > 1$, так что и второй интеграл конечен, по лемме 14.3.13. Следовательно, для некоторого вещественного c

$$[\gamma^{-1}B\theta(x)]^{1/p} \leqslant c\,[A\theta(x)]^{1/p}.$$

Наш результат получается, если взять $\gamma^{-1} = c_p$. □

Глобальное существование решения следует теперь немедленно из теоремы о монотонной миноранте 14.3.9, которая показывает также, что решения образуют непрерывную ветвь.

14.3.17. Теорема. *Пусть θ_m — любое число, удовлетворяющее условию $0 < \theta_m < \pi/6$. Существует цуг постоянных (не изменяющихся по форме) симметричных периодических волн на глубокой воде,* *для которых максимальный угол наклона вектора скорости распространения волны к поверхности воды равен θ_m. Эти решения образуют непрерывную ветвь длины $\pi/6$ в $\mathscr{C}_*[0, \pi]$.*

Результат Красовского представляет собой совершенно замечательное достижение на пути к решению проблемы, которая не поддавалась усилиям математиков более века. Этот результат был недавно усилен Киди и Норбери [1978] и Тоулэндом [1977]. Тем не менее проблему никоим образом нельзя считать полностью решенной, и она по-прежнему остается предметом активных исследований. Так, столь давно уже высказанная гипотеза, что цуг постоянных периодических волн с максимальным углом наклона, бóльшим $\pi/6$, существовать не может, все еще не подтверждена и не опровергнута (см. Тоулэнд [1977]). Также и вопросы, касающиеся единственности и устойчивости решений, остаются совершенно открытыми. Помимо уже упомянутых работ, рекомендуем читателю статьи Хайерса [1964], Киди [1972] и Вехаузена [1963], в которых дан обзор обширной литературы по задаче о распространении волн.

Задачи

14.1. Постройте бифуркационные диаграммы для следующих операторов φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(i) $\varphi(x) = x + x^2$;
(ii) $\varphi(x) = x + x^3$;
(iii) $\varphi(x) = x(1 - x + x^2)$;
(iv) $\varphi(x) = \sin x$.

14.2. Постройте бифуркационную диаграмму для оператора A_μ в вещественном пространстве $(\mathscr{C}[0, 1])$, задаваемого формулой

$$A_\mu f(x) = \int_0^1 [f(x)]^2\,dx + \mu^{-1}.$$

14.3. Покажите, что у системы уравнений

$$u'' + \lambda\,[u + v\,(u^2 + v^2)] = 0, \quad v'' + \lambda\,[v - u\,(u^2 + v^2)] = 0$$

нет вещественнозначных нетривиальных решений, удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = u(1) = v(0) = v(1)$, а в то же время соответствующая линеаризованная система имеет собственные значения π^2, $4\pi^2$, ...

14.4. Пусть D — открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathscr{B}$ и A: $D \to \mathscr{B}$ — непрерывный оператор. Предположим, что существуют ненулевой элемент $\varphi_0 \in D$ и окрестность S этого элемента, такие что

(i) A дифференцируем по Фреше на S, и его производная $A'(\cdot)$ непрерывна;
(ii) $\varphi_0 = \mu_0 A \varphi_0$;
(iii) $\mu_0^{-1} \in \rho\,(A'(\varphi_0))$.

Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что всякое $\mu \in [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ является характеристическим значением для A. [Воспользуйтесь теоремой о неявной функции 4.4.9.]

14.5. Пусть D — открытое подмножество банахова пространства $\mathscr{B}$, такое что $0 \in D$. Докажите, что если оператор $A\colon D \to \mathscr{B}$ компактен и имеет в 0 производную Фреше L, то оператор L тоже компактен.

14.6. Пусть D — ограниченное открытое подмножество вещественного банахова пространства $\mathscr{B}$, и пусть оператор $A\colon \bar{D} \to \mathscr{B}$ компактен, причем $Af \neq f$ на ∂D. Докажите, что у A имеется собственный вектор, принадлежащий ∂D, если выполнено любое из следующих условий:

(i) $0 \in D$ и $d(I - A, 0, D) \neq 1$;

(ii) $0 \notin D$ и $d(I - A, 0, D) \neq 0$.

14.7. Рассмотрим краевую задачу

$$f''(x) + \mu\varphi[x, f(x)] = 0, \quad f(0) = f(1) = 0,$$

где $\varphi\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Предположим, что $\varphi[x, z] = z + \psi[x, z]$, причем $z^{-1}\psi[x, z] \to 0$ равномерно по x при $z \to 0$. Покажите, что точки бифуркации суть π^2, $4\pi^2$, ...

14.8. Дайте доказательство теоремы 14.2.6.

14.9. Покажите, что в случае $D = S(0, r)$ теорему 14.3.6 можно доказать простым применением теоремы Шаудера о неподвижной точке к оператору $\tilde{A}$, задаваемому формулой

$$\tilde{A}f = \|f\| A(rf/\|f\|) + (r - \|f\|)\, q,$$

где g — некоторый вектор из E.

14.10. Пусть каждый элемент $n \times n$-матрицы A строго положителен. Покажите, что у A имеется положительное собственное значение, которому отвечает собственный вектор с положительными координатами.

14.11. Рассмотрим интегральный оператор Гаммерштейна A, задаваемый формулой

$$Af(x) = \int_0^1 k(x, y)\, \psi[y, f(y)]\, dy,$$

где функция k непрерывна и строго положительна, а функция $\psi\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Предположим, что существуют вещественные числа $a > 0$, b и c, такие что для некоторого p из интервала $1 \leqslant p \leqslant \infty$

$$az^p \leqslant \psi[y, z] \leqslant bz^p + c \text{ при } 0 \leqslant y \leqslant 1,\ z \geqslant 0.$$

Используя теорему 14.3.6, докажите, что A имеет непрерывную ветвь неотрицательных собственных функций бесконечной длины в $\mathscr{L}_p(0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА[1)]

Агмон (S. Agmon)
[1965] Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, New York.
Азиз (A. K. Aziz)
[1972] (ред.) The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations, Academic Press, New York and London.
Александрян Р. А., Березанский Ю. М., Ильин В. А., Костюченко А. Г.
[1975] Некоторые вопросы спектральной теории для дифференциальных уравнений с частными производными. — В сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды симпозиума, посвященного 60-летию академика С. Л. Соболева. — М.: Наука, 1970, с. 3—35.
Аманн (H. Amann)
[1976] Fixed point theorems and nonlinear eigenvalue problems, *SIAM Rev.* **18**, 620—709.
Анселоне (P. M. Anselone)
[1964] (ред.) Nonlinear integral equations, University of Wisconsin Press, Madison.
[1971] Collectively compact operator approximation theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
Аткинсон (K. E. Atkinson)
[1976] A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind, SIAM, Philadelphia.
Бабушка, Азиз (J. Babuška, A. K. Aziz)
[1976] On the angle condition in the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.* **13**, 214—226.
Барнхилл, Уайтмэн (R. Barnhill, J. R. Whiteman)
[1973] Error analysis of finite element methods with triangles for elliptic boundary value problems, *in* "The mathematics of finite elements and applications" (Whiteman, J. R., ed.), Academic Press, London, pp. 83—112.
Бартл (R. G. Bartle)
[1966] The elements of integration, Wiley, New York.
Беллман, Калаба (R. Bellman, R. Kalaba)
[1965] Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968.
Бенджамен (T. B. Benjamin)
[1976] Applications of Leray — Schauder degree theory to problems of hydrodynamic stability, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79**, 373—392.
Бергер (M. Berger)
[1977] Nonlinearity and functional analysis, Academic Press, New York.
Бергер, Бергер (M. Berger, M. Berger)
[1968] Perspectives in nonlinearity, Benjamin, New York.

[1)] Звёздочкой помечены работы, добавленные при переводе. Для переводных книг в квадратных скобках указан год оригинального издания. Если он больше года выхода перевода, это означает, что перевод делался с более раннего издания, чем то, которое приводит автор. В тексте при ссылках на работы, имеющиеся в переводе на русский, страницы указываются по переводу. — *Прим. перев.*

Бернкопф (M. Bernkopf)
[1966] The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory, *Arch. History Exact Sci.* **3,** 1—136.
Бёркилл (J. C. Burkill)
[1951] The Lebesgue integral, Cambridge University Press.
Брэмбл, Зламал (J. H. Bramble, M. Zlámal)
[1970] Triangular elements in the finite element method, *Math. Comput.* **24,** 809—820.
Бурбаки (N. Bourbaki)
[1969] Очерки по истории математики. — М.: ИЛ, 1963.
Бэйкер (C. T. H. Baker)
[1977] The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, Oxford.
Вайнберг М. М.
*[1972] Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука.
Вайнбергер (H. F. Weinberger)
[1974] Variational methods of eigenvalue approximation, SIAM, Philadelphia.
Вайнстайн, Стенджер (A. Weinstein, W. Stenger)
[1972] Methods of intermediate problems for eigenvalue theory and ramifications, Academic Press, New York.
Вандерграфт (J. S. Vandergraft)
[1967] Newton's method for convex operators in partially ordered spaces, *SIAM J. Numer. Anal.* **4,** 406—432.
Вехаузен (J. V. Wehausen)
[1963] Recent developments in free-surface flows (Report No. NA-63-5), Institute of Engineering Research, University of California, Borkeley.
Гарабедян (P. R. Garabedian)
[1964] Partial differential equations, Wiley, New York.
Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.
*[1961] Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз.
Гилбарг, Трудингер (D. Gilbarg, N. S. Trudinger)
[1977] Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag, Berlin.
Грёч (C. W. Groetsch)
[1977] Generalized inverses of linear operators, Marcel Dekker, New York.
Данфорд, Шварц (N. Dunford, J. Schwartz)
[1958] Линейные операторы. В 3 томах. — Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
[1963] — Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1966.
Де Барра (G. De Barra)
[1974] Introduction to measure theory, Van Nostrand, New York.
Деннис (J. E. Dennis)
[1971] Towards a unified convergence theory for Newton-like methods, *in* "Nonlinear functional analysis and applications" (Rall, L. B., ed.), Academic Press, New York, pp. 425—472.
Дикки (R. W. Dickey)
[1976] Bifurcation problems in nonlinear elasticity, Pitman, London.
Дьёдонне (J. Dieudonné)
*[1960] Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.
[1968] Интегральные уравнения. (Серия: Справочная математическая библиотека.) — М.: Наука.
Зигмунд (A. Zygmund)
[1959] Тригонометрические ряды. В 2 томах. — М.: Мир, 1965.

Иосида (K. Yosida)
*[1965] Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
Канторович Л. В., Акилов Г. П.
*[1977] Функциональный анализ. — М.: Наука.
Като (T. Kato)
[1966] Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
Келлер, Антман (J. B. Keller, S. Antman)
[1969] (ред.) Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. — М.: Мир, 1974.
Киди (G. Keady)
[1972] Large-amplitude water waves and Krasovskii's existence proof (Report No. 37), Fluid Mechanics Research Institute, University of Essex.
Киди, Норбери (G. Keady, J. Norbury)
[1978] On the existence theory for irrational water waves, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 83, 137—157.
Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
*[1968] Элементы теории функций и функционального анализа. — 2-е изд. — М.: Наука.
Красносельский М. А.
[1954] Некоторые задачи нелинейного анализа. — УМН, **9**, № 3, с. 57—114.
[1956] Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат.
[1962] Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз.
Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.
[1969] Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука.
Красовский Ю. П.
[1961] К теории установившихся волн конечной амплитуды. — ЖВМиМФ, **1**, № 5, с. 836—855.
Крейн С. Г.
[1972] (ред.) Функциональный анализ. (Серия: Справочная математическая библиотека). — 2-е изд. — М.: Наука.
Курант (R. Courant)
[1950] Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. — М.: ИЛ, 1953.
Лав (E. R. Love)
[1974] Inequalities for the capacity of an electrified conducting annular disc, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 74, 257—270.
Ладас, Лакшмикантхам (G. Ladas, V. Lakshmikantham)
[1972] Differential equations in abstract spaces, Academic Press, New York.
Ладыженская О. А.
[1970] Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— 2-е изд. — М.: Наука.
Леггетт (R. W. Leggett)
[1976] A new approach to the *H*-equation of Chandrasekhar, *SIAM J. Math. Anal.* 7, 542—550.
Ллойд (N. G. Lloyd)
[1978] Degree theory, Cambridge University Press.
Люстерник Л. А., Соболев В. И.
[1965] Элементы функционального анализа. — 2-е изд. — М.: Наука.
Митчелл, Уэйт (A. R. Mitchell, R. Wait)
[1977] Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1981.
Монна (A. Monna)
[1973] Functional analysis in historical perspective, Oosthoek, Scheltema and Holkema, Utrecht.
[1975] Dirichlet's principle, Oosthoek, Scheltema and Holkema, Utrecht.

Муни, Роуч (J. Mooney, G. Roach)
[1976] Iterative bounds for the stable solutions of convex nonlinear boundary value problems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* **76**, 81—94.
Наймарк М. А.
[1969] Линейные дифференциальные операторы. — 2-е изд. — М.: Наука.
Нашед (Z. Nashed)
[1974] Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations, *in* "Constructive and computational methods for differential and integral equations" (Lecture Notes in Math. **430**), Springer-Verlag, Berlin, pp. 289—332.
Обэн (J.-P. Aubin)
[1972] Приближенное решение эллиптических краевых задач.— М.: Мир, 1977.
Оден, Редди (J. T. Oden, J. N. Reddy)
[1976] An introduction to the mathematical theory of finite elements, Wiley, New York.
Ортега, Рейнболдт (J. Ortega, W. Rheinboldt)
[1970] Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.
Прентер (P. M. Prenter)
[1975] Splines and variational methods, Wiley, New York.
Рабинович (P. H. Rabinowitz)
[1973] Some aspects of nonlinear eigenvalue problems, *Rocky Mountain J. Math.* **3**, 161—202.
Рид, Саймон (M. Reed, B. Simon)
[1972] Методы современной математической физики. В 4 томах. — Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
[1975] — Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978.
Рисс (F. Riesz)
[1913] Les systèmes d'equations linéaires à une infinité d'inconnues, Gauthier-Villars, Paris.
Рисс, Сёкефальви-Надь (F. Riesz, B. Sz.-Nagy)
[1955] Функциональный анализ. — 2-е изд. — М.: Мир, 1979.
Ролл (L. B. Rall)
[1969] Computational solution of nonlinear operator equations, Wiley, New York.
[1971] (ред.) Nonlinear functional analysis and applications, Academic Press, New York.
Саати (T. L. Saaty)
[1967] Modern nonlinear equations, McGraw-Hill, New York.
Серрин (J. Serrin)
[1976] The solvability of boundary value problems, *Proc. Symp. P. M.*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, **18**, 507—524.
Симмонс (G. F. Simmons)
[1963] Introduction to topology and modern analysis, McGraw-Hill, New York.
Смарт (D. R. Smart)
[1974] Fixed point theorems, Cambridge University Press.
Снеддон (I. Sneddon)
[1972] The use of integral transforms, McGraw-Hill, New York.
Стакголд (I. Stakgold)
[1968] Boundary value problems of mathematical physics, Macmillan, New York.
[1971] Branching of solutions of nonlinear equations, *SIAM Rev.* **13**, 289—332.
Стин (L. A. Steen)
[1973] Highlights in the history of spectral theory, *Amer. Math. Monthly* **80**, 359—381.
Стренг, Фикс (G. Strang, G. Fix)
[1973] Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977.

Стьюарт (C. A. Stuart)
[1974] Existence theorems for a class of nonlinear integral equations, *Math. Z.* **137**, 49—66.
[1975] Integral equations with decreasing nonlinearities, *J. Differential Equations* **18**, 202—217.
Сэттингер (D. H. Sattinger)
[1973] Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Notes in Math. **309**, Springer-Verlag, Berlin.
Темам (R. Temam)
[1970] Analyse numerique: Résolution approchée d'equations aux dérivées partielles, Presses Universitaires, Paris.
Титчмарш (E. C. Titchmarsh)
[1962] Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. В 2-х томах. — М.: ИЛ, 1960, 1961.
Тодд (M. J. Todd)
[1976] The computation of fixed points and applications, Springer-Verlag, Berlin.
Тоулэнд (J. F. Toland)
[1977] On the existence of a wave of greatest height and Stokes' conjecture (Report No. 87), Fluid Mechanics Research Institute, University of Essex.
Трев (F. Treves)
[1975] Basic linear partial differential equations, Academic Press, New York.
Трикоми (F. G. Tricomi)
[1957] Интегральные уравнения. — М.: ИЛ, 1960.
Тэйлор (A. E. Taylor)
[1958] Introduction to functional analysis, Wiley, New York.
Уайтмэн (J. R. Whiteman)
[1973] (ред.) The mathematics of finite elements and applications, Vol. I, Academic Press, New York.
[1977] — Vol. II, Academic Press, New York.
Уиттекер, Ватсон (E. T. Whittaker, G. N. Watson)
[1927] Курс современного анализа. В 2 томах. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1963.
Флетт (T. M. Flett)
[1979] Differential analysis, Cambridge University Press.
Фоллэнд (G. B. Folland)
[1976] Introduction to partial differential equations, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
Фридман (A. Friedman)
[1969] Partial differential equations, Holt, Rinehart and Winston, New York.
[1970] Foundations of modern analysis, Holt, Rinehart and Winston, New York.
Фучик, Нечас, Соучек, Соучек (S. Fučik, J. Nečas, J. Souček, V. Souček)
[1973] Spectral analysis of nonlinear operators, Lecture Notes in Math. **343**, Springer-Verlag, Berlin.
Хайерс (D. H. Hyers)
[1964] Some nonlinear equations of hydrodynamics, *in* "Nonlinear integral equations" (Anselone, P. M., ed.), University of Wisconsin Press, Madison, pp. 319—344.
Халмош (P. R. Halmos)
[1948] Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963.
[1967] Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
Хатсон, Кендалл, Мейлин (V. Hutson, P. C. Kendall, S. Malin)
[1972] Computation of the solution of geomagnetic induction problems: a general method with applications, *Geophys. J. R. astr. Soc.* **28**, 489—498.

Хиггинс (J. R. Higgins)
[1977] Completeness and basic properties of sets of special functions, Cambridge University Press.
Хилгерс (J. M. Hilgers)
[1976] On the equivalence of regularization and certain reproducing kernel Hilbert space approaches for solving first kind problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **13**, 172—184.
Хилле, Филлипс (E. Hille, R. S. Phillips)
*[1957] Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
Хольцман (J. M. Holtzman)
[1970] Nonlinear system theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
Хьюитт (E. Hewitt)
[1960] The rôle of compactness in analysis, *Amer. Math. Monthly* **67**, 499—516.
Чандра, Дейвис (J. Chandra, P. Davis)
[1974] A monotone method for quasilinear boundary value problems, *Arch. Rational Mech. Anal.* **54**, 257—266.
Шварц (J. T. Schwartz)
[1969] Nonlinear functional analysis, Gordon and Breach, New York.
Шехтер (M. Schechter)
[1977] Modern methods in partial differential equations, McGraw-Hill, New York.
Шинброт (M. Shinbrot)
[1969] Fixed point theorems, *in* "Mathematics in the modern world", Freeman, San Francisco, pp. 145—150.
Шоуолтер (R. E. Showalter)
[1977] Hilbert space methods for partial differential equations, Pitman, London.
Эдвардс (R. E. Edwards)
*[1965] Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Пространства

$\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$	банаховы пространства (всегда) 28
$\mathscr{B}^*$, $\mathscr{C}^*$	сопряженные пространства 167
$\mathbb{C}^n$	n-мерное комплексное пространство
$\mathscr{C}(\Omega)$, $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{C}^n)$	ограниченные непрерывные функции 23
$\mathscr{C}^k(\Omega)$, $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{C}^n)$	функции с k ограниченными непрерывными производными 24
$\mathscr{C}_0^k(\Omega)$, $\mathscr{C}_0^k(\Omega, \mathbb{C}^n)$	24
$\mathscr{H}$	гильбертово пространство (всегда) 38
$\mathscr{H}^m$, $\mathscr{H}_0^m$	пространства Соболева 321, 322
l	пространство последовательностей 13
l_p	пространство последовательностей с нормой $\\|\cdot\\|_p$ 21
$\mathscr{L}_p(\Omega)$	пространство функций с нормой $\\|\cdot\\|_p$ 66
$\mathscr{L}_p^{\mathrm{loc}}(\Omega)$	функции, принадлежащие $\mathscr{L}_p(S)$ для каждого компактного $S \subset \Omega$ 66
$\mathscr{L}(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, $\mathscr{L}(\mathscr{B})$	пространства ограниченных линейных операторов $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$, $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ 90
$\mathscr{M}$	линейное подпространство 14
$\mathscr{M}_k$	348
$\mathbb{R}^n$	n-мерное вещественное пространство
$\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$	нормированные векторные пространства 16

Латинский алфавит

A	нелинейный оператор
A'	производная Фреше оператора A 137
$A(S)$	образ S при отображении A 75
$A^{-1}(S)$	прообраз S при отображении A 75
$A\colon S \to \mathscr{W}$	A отображает S в $\mathscr{W}$ 75
B	нелинейный оператор
$B[\cdot, \cdot]$	билинейная форма 195
$\mathbb{C}$	система комплексных чисел
co	выпуклая оболочка 15
$D(A)$	область определения A 74

$d(\cdot,\ \cdot)$	метрика 16
$d(I+A,\ p,\ D)$	степень 378
$\operatorname{dist}(f,\ S)$	расстояние точки f от множества S 17
E	конус 233
ess sup	существенная верхняя грань 61
$f,\ g,\ h$	точки в рассматриваемом пространстве
$f^*,\ g^*,\ h^*$	точки в сопряженном пространстве
$\hat{f}$	преобразование Фурье 69
$\tilde{f}_k$	приближение Ритца 348
$G,\ \tilde{G}$	операторы Грина 333
$G(L),\ G'(L)$	график оператора L, обратный график 112
$h_t,\ H_t$	гомотопии 372
I	тождественный оператор 80
Im	мнимая часть
j_ε	сглаживатель 70
$J_\varphi(x)$	якобиан φ в точке x
K	интегральный оператор
L	линейный оператор 77
L^{-1}	обратный к L 80
L^*	сопряженный к L 165, 179, 181, 189
$\tilde{L}$	расширение L 76
$\bar{L}$	замыкание L 113
$L',\ L_0$	290, 292
l	формальный дифференциальный оператор 109, 317, 338
l^*	формально сопряженный к l 288, 317
l_p	главная часть l 317, 338
M	линейный оператор
$m_+,\ m_-$	186
$N(L)$	нуль-пространство 80
$N_\pm$	дефектные подпространства 281
$n_\pm$	индексы дефекта (размерности подпространств $N_\pm$) 281

P_λ	спектральный проектор 266
$\mathbb{R}$	система вещественных чисел
$\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}}^+$	расширенная вещественная прямая, ее неотрицательная часть 52
Re	вещественная часть
$R(A)$	множество значений A 75
$R(\lambda;\ L)$	резольвента $(\lambda I - L)^{-1}$ оператора L 103
$r_\sigma(L)$	спектральный радиус L 106
S	множество
$\overline{S}$, S°, ∂S	замыкание S, внутренность S, граница S 18—19
$[S]$	линейная оболочка S 14
$S^\perp$	ортогональное дополнение S 38, 173
$S(f,\ r)$, $\overline{S}(f,\ r)$	открытый, замкнутый шар с центром f и радиусом r 16
$\mathscr{S}$	класс множеств
$\mathscr{S}_\sigma$	σ-алгебра, порожденная классом $\mathscr{S}$ 50
T	компактный оператор 198
$(X,\ \mathscr{S},\ \mu)$	пространство с мерой 52
Z	множество критических точек 367

Греческий алфавит

μ	мера 52, 53
$\rho(L)$	резольвентное множество оператора L 103
$\sigma(L)$	спектр L 103
$\sigma_p(L)$	точечный спектр L 103
φ'	производная Фреше от φ 137
χ_S	характеристическая функция множества S 48
Ω	подмножество в $\mathbb{R}^n$

Общие обозначения

$\exists$	существует
$\in$	принадлежит
$\notin$	не принадлежит
$\varnothing$	пустое множество

$\subset$	для множеств: является подмножеством (необязательно собственным); для операторов: является сужением 76
$\cap$, $\cup$	пересечение, объединение
$S \setminus U$	дополнение к U в S
$\{x\colon P(x)\}$	множество всех x, для которых имеет место $P(x)$
$X \times Y$	произведение 15
$\oplus$	прямая сумма 14
$+$	векторная сумма 14
$\perp$	ортогональность 38, 173
$\\|\cdot\\|$	норма вектора 16, норма оператора 82
$\\|\cdot\\|_p$	норма в l_p 20, норма в $\mathscr{L}_p$ 66
$\\|\cdot\\|_m$	норма в $\mathscr{H}^m$ 321
$\\|\cdot\\|_E$	энергетическая норма 347
$\vert\cdot\vert_m$	354
$\vert\vert\vert\cdot\vert\vert\vert_p$	85—86
$(\cdot,\ \cdot)$	скалярное произведение 36
$(\cdot,\ \cdot)_m$	скалярное произведение в $\mathscr{H}^m$ 321
$(\cdot,\ \cdot)_E$	энергетическое скалярное произведение 347
$[\cdot,\ \cdot]_a^b$	289, 294
$[\cdot,\ \cdot]$	элемент векторного пространства $\mathscr{V} \times \mathscr{W}$ 15, порядковый интервал 235
$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$	внешнее произведение (каноническое спаривание) 171
∇^2	оператор Лапласа
$\to$	сходимость векторов 18, равномерная сходимость операторов 91
$\rightharpoonup$	слабая сходимость векторов 174, 178
$\xrightarrow[s]{}$	сильная сходимость операторов 95
$\overset{w}{=}$	слабое равенство 319, 339

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Авербух В. И. 5
Агмон (S Agmon) 315, 322, 325, 356, 411
Азиз (A. K. Aziz) 346, 353, 411
Акилов Г. П. 155, 168, 169, 173, 412
Александрян Р. А. 279, 411
Аманн (H. Amann) 228, 243, 411
Анселоне (P. M. Anselone) 215, 221, 222, 228, 411
Антман (S. Antman) 389, 395, 412
Аткинсон (K. E. Atkinson) 92, 102, 222, 411
Аусвэйт (C. Outhwaite) 8

Бабушка (I. Babuška) 353, 411
Банах (S. Banach) 5, 128
Барнхилл (R. Barnhill) 358, 411
Бартл (R. G. Bartle) 49, 411
Басбридж (I. W. Busbridge) 380
Беллман (R. Bellman) 148, 411
Бенджамен (T. B. Benjamin) 389, 411
Бергер (M. Berger) 123, 137, 366, 389, 393, 411
Березанский Ю. М. 279, 411
Бернкопф (M. Bernkopf) 197, 412
Бёркилл (J. C. Burkill) 49, 412
Бёрли (D. Burley) 8
Боль (P. Bohl) 384
Брауэр (L. E. J. Brouwer) 225
Брэмбл (J. H. Bramble) 358, 412
Бурбаки (N. Bourbaki) 197, 412
Бэйкер Дж. (J. W. Baker) 8
Бэйкер Ч. (C. T. H. Baker) 102, 222, 412

Вайнберг М. М. 236, 412
Вайнбергер (H. F. Weinberger) 224, 412
Вайникко Г. М. 413
Вайнстайн (A. Weinstein) 224, 412
Вандерграфт (J. S. Vandergraft) 148, 412
Ватсон (G. N. Watson) 415
Вехаузен (J. V. Wehausen) 409, 412
Виленкин Н. Я. 277, 412

Гарабедян (P. R. Garabedian) 208, 412
Гельфанд И. М. 277, 412
Гилбарг (D. Gilbarg) 315, 412
Гильберт (D. Hilbert) 5, 249, 344
Грёч (C. W. Groetsch) 211, 412

Данфорд (N. Dunford) 11, 89, 91, 107, 167, 169, 173, 175, 176, 201, 203, 229, 279, 281, 289, 302, 303, 310, 412
Де Барра (G. De Barra) 49, 412
Дейвис (P. Davis) 244, 416
Деннис (J. E. Dennis) 149, 412
Дикки (R. W. Dickey) 389, 412
Дьёдонне (J. Dieudonné) 137, 412

Забрейко П. П. 87, 127, 201, 412
Зенкевич (Zienkiewicz) 346
Зигмунд (A. Zygmund) 406, 412, 413
Зламал (M. Zlámal) 358, 412

Ильин В. А. 279, 411
Иосида (K. Yosida) 412

Какутани (Kakutani) 150
Калаба (R. Kalaba) 148, 411
Канторович Л. В. 145, 155, 168, 169, 173, 412
Като (T. Kato) 99, 116, 120, 279, 412
Келлер (J. B. Keller) 389, 395, 412
Кендалл (P. C. Kendall) 119, 415

Киди (G. Keady) 405, 409, 412
Коллатц (L. Collatz) 248
Колмогоров А. Н. 412
Костюченко А. Г. 279, 411
Кошелев А. И. 412
Крам (Crum) 380
Красносельский М. А. 123, 127, 136, 146, 228, 234, 246, 366, 389, 391, 393, 402, 412, 413
Красовский Ю. П. 396, 405, 409, 413
Крейн С. Г. 123, 413
Курант (R. Courant) 344, 413

Лав (E. R. Love) 196, 413
Ладас (G. Ladas) 275, 413
Ладыженская О. А. 366, 413
Лакшмикантхам (V. Lakshmikantham) 275, 413
Лебег (H. L. Lebesgue) 5, 48
Леви-Чивита (T. Levi-Civita) 396
Леггетт (R. W. Leggett) 380, 413
Лиувилль (J. Liouville) 128
Ллойд (N. G. Lloyd) 375, 413
Люстерник Л. А. 11, 413

Мейлин (S. Malin) 119, 415
Митчелл (A. R. Mitchell) 346, 350, 359, 413
Михлин С. Г. 412
Монна (A. Monna) 197, 344, 413
Муни (J. Mooney) 148, 414

Наймарк М. А. 279, 303, 414
Нашед (Z. Nashed) 211, 414
Некрасов А. И. 396, 405
Нечас (J. Nečas) 389, 415
Норбери (J. Norbury) 409, 412

Обэн (J.-P. Aubin) 346, 414
Оден (J. T. Oden) 346, 414
Ортега (J. Ortega) 121, 414

Пеано (G. Peano) 231
Перрон (Perron) 228, 243
Пим (J. S. Pym) 5, 8
Плужникова Н. И. 5
Прентер (P. M. Prenter) 346, 414
Пуанкаре (H. Poincaré) 384

Рабинович (P. H. Pabinovitz) 393, 414
Раковщик Л. С. 412
Редди (J. N. Reddy) 346, 414
Рейнболдт (W. Rheinboldt) 121, 414
Рисс (F. Riesz) 101, 198, 223, 224, 266, 271, 414
Рид (M. Reed) 119, 279, 414
Риман (B. Riemann) 329, 344
Ролл (L. B. Rall) 123, 136, 137, 228, 414
Роуч (G. Roach) 148, 414
Рутицкий Я. Б. 413

Саати (T. L. Saaty) 123, 228, 404, 414
Саймон (B. Simon) 119, 279, 414
Серрин (J. Serrin) 366, 414
Сёкефальви-Надь (B. Sz.-Hagy) 198, 223, 224, 266, 271, 414
Симмонс (G. F. Simmons) 11, 33, 414
Смарт (D. T. Smart) 123, 150, 414
Снеддон (I. S. Sneddon) 8, 279, 414
Соболев В. И. 11, 143
Соучек В. (V. Souček) 389, 415
Соучек И. (J. Souček) 389, 415
Стакголд (I. Stakgold) 224, 389, 414
Стенджер (W. Stenger) 224, 412
Стеценко В. Я. 412, 413
Стин (L. A. Steen) 197, 414
Стокс (G. G. Stokes) 395
Стренг (G. Strang) 346, 350, 353, 359, 414
Стьюарт (C. A. Stuart) 236, 238, 380, 415
Сэттингер (D. H. Sattinger) 366, 389, 415

Темам (R. Temam) 346, 415
Титчмарш (E. C. Titchmarsh) 188, 279, 309, 415
Тодд (M. J. Todd) 226, 415
Тоулэнд (J. F. Toland) 409, 415
Трев (F. Treves) 315, 415
Трикоми (F. G. Tricomi) 92, 415
Трудингер (N. S. Trudinger) 315, 412
Тэйлор (A. E. Taylor) 11, 105, 107, 276, 415

Уайтмэн (J. R. Whiteman) 346, 358, 411, 415
Уиттекер (E. T. Whittaker) 415
Уэйт (R. Wait) 346, 350, 359, 413

Фикс (G. Fix) 346, 350, 353, 359, 414
Филлипс (R. S Phillips) 275, 416
Флетт (T. M. Flett) 136, 144, 415
Фоллэнд (G. B. Folland) 315, 415
Фомин С. В. 412
фон Нейман (J. von Neumann) 249
Фредгольм (I. Fredholm) 5, 197
Фреше (M. Fréchet) 5
Фридман (A. Friedman) 11, 40, 89, 91, 155, 169, 173, 176, 315, 318, 322, 323, 326, 335, 341, 358, 415
Фрэнкел (L. E. Fraenkel) 8
Фучик (S. Fučík) 389, 415

Хайерс (D. H. Hyers) 397, 409, 415
Халмош (P. R. Halmos) 43, 80, 249, 285, 287, 415
Харли (P. Harley) 8
Хатсон (V. Hutson) 5, 8, 119, 415
Хиггинс (J. R. Higgins) 43, 415
Хилгерс (J. W. Hilgers) 211, 415
Хилле (E. Hille) 275, 416
Хольцман (J. M. Holtzman) 136, 416
Хьюитт (E. Hewitt) 157, 416

Чандра (J. Chandra) 244, 416

Шварц (J. T. Schwartz) 11, 89, 91, 107, 167, 169, 173, 175, 176, 201, 203, 229, 279, 281, 289, 302, 303, 310, 366, 367, 370, 373, 412, 416
Шехтер (M. Schechter) 315, 416
Шинброт (M. Schinbrot) 125, 416
Шоуолтер (R. E. Showalter) 315, 416

Эдвардс (R. E. Edwards) 416

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

абсолютно непрерывная функция 64
– сходящийся ряд 28
автономное уравнение 93
алгебра 53
алгебраическая кратность собственного значения 374
аналитическая операторнозначная функция 104
антиизоморфизм 177
антилинейность 177, 195
аппроксимативная единица 70
априорная оценка 352, 358, 382
Арцела — Асколи теорема 161, 163
аффинное многообразие 14

базис 12, 34
— в гильбертовом пространстве 42, 211, 212, 304
Банаха — Алаоглу теорема 175—176
— теорема о неподвижной точке *см.* принцип сжимающих отображений
— *Штейнгауза* теорема *см.* принцип равномерной ограниченности
банахово пространство 28
Бесселя неравенство 40
— оператор 300—302, 309, 311
биективный оператор 76
билинейная форма 195
— — ассоциированная с l 329
— — коэрцитивная 331, 332, 343
бифуркационное значение 390
бифуркация 387
борелевское множество 50—51
Бореля мера 54
Брауэра теорема о неподвижной точке 226, 365, 374, 375
Брэмбла — Хилберта лемма 354

Вейерштрасса теорема 33
Вейля альтернатива 299
векторная сумма 14
векторное пространство 11
верхнее решение 243
вещественное векторное пространство 11
— граничное условие 301
вложение 88
внешнее произведение 171
внутреннее произведение *см.* скалярное произведение
внутренность, внутренняя точка 19
Вольтерры интегральный оператор 118, 210
вполне непрерывный оператор *см.* компактный оператор
— ограниченное подмножество 156
второе сопряженное к банахову пространству 172
второй сопряженный оператор 191
выпуклая оболочка 15
выпуклое подмножество 15
выпучивание сжатого стержня 395—397, 404
вырожденные ядра 92

Гаммерштейна интегральное уравнение 124—126, 149, 150, 241, 247, 385, 401—403, 410
— оператор 127
Гейзенберга принцип неопределенности 275
Гейне — Бореля теорема 154
Гёльдера неравенство 20, 67
Гильберта — Шмидта теорема 43, 211, 212, 249, 251, 258—260
гильбертово пространство 38
гиперболическое дифференциальное уравнение с частными производными 151, 273—275
главная часть дифференциального оператора 317, 338
гомеоморфизм 127
гомотопическая инвариантность степени 362, 372, 378—379
гомотопия 362, 372
Гординга неравенство 335
Грама — Шмидта процесс 43, 45—46
граница, граничная точка 19
граничное условие 294
график и обратный график оператора 112, 191
Грина операторы 333
— функция 124, 201

дефектные подпространства 281
диагональный процесс 156
диаметр 17
Дирака мера (δ-функция) 52
Дирихле задача классическая 318
— — обобщенная 314, 323, 325, 327—334, 346, 350
— принцип 344
дифференциальный оператор 109
дифференцируемая векторнозначная функция 93
дифференцируемость по Фреше 137
допустимая триангуляция 353

Дугунджи теорема о продолжении 373, 378
Дуффинга уравнение 248

евклидова норма 17
единичный шар 17

замкнутая линейная оболочка 32
замкнутое подмножество 18
— подпространство 14, 32
замкнутый оператор 112
— шар 17
замыкаемый оператор 113, 279
замыкание множества 18
— оператора 113

измеримая функция 57
измеримое множество 50
изометрический изоморфизм 88
изометрия 88
изоморфизм 88
индекс 384
— дефекта 281
интеграл 59—60
— в банаховом пространстве 258
интегральные операторы 86, 91, 117, 119, 196—198, 210, 215—223 276
— уравнения 78—79, 101, 107, 117, 119, 196—198, 210, 215—223
интегрируемая функция 60
интегрируемость по Риману — Стилтьесу 258
интерполянта 353
инъективный оператор 76

каноническая форма компактного самосопряженного оператора 212
каноническое спаривание *см.* внешнее произведение
канторово множество 44
касательная гиперплоскость 194
касательный элемент 194
Каччополи теорема 134
квадратичная форма 195
квадратный корень из оператора 276
квадратурные формулы 95
квазилинеаризация 148
классическое решение 318
коллективно-компактная последовательность операторов 217
компактное подмножество 154
компактный оператор линейный 198
— — нелинейный 229
комплексное векторное пространство 11
компонента открытого множества 366
конус в банаховом пространстве 233
конуса свойство 326
Коши последовательность 26, 28—30
коэрцитивная билинейная форма 331
Красносельского теорема о неподвижной точке 246
критическая точка 367

Лакса — Милгрэма теорема 331
Лапласа уравнение 332
Лебега интеграл 61, 62, 65
— мера 55
— *Стилтьеса* интеграл 61
— — мера 55
— теорема о мажорированной сходимости 63
Лежандра полиномы 46
— ряд 311
Лейбница формулы 340, 342
Лерэ — Шаудера теорема о неподвижной точке 365, 379
— — теория степени 360, 375, 378
линеаризация 388
линейная оболочка 14
линейное подпространство 14
линейно-зависимое и линейно-независимое множества 12
линейно-независимое относительно $D(L_0)$ множество 286
линейный оператор 77
Липшица константа, условие 129, 130
локальное условие Липшица 130
локально-интегрируемая функция 60
локально-липшицева функция 243

мажоранта 241
мера 52—53
метод заплат 359
— конечных элементов 345
— последовательных приближений 97, 131
метрика, метрическое пространство 16
Минковского неравенство 20, 67
миноранта 241
множество значений 75
монотонная последовательность самосопряженных операторов 252
монотонно возрастающая (убывающая) последовательность 238
монотонный оператор 236
мультииндекс 316

Неймана ряд 98
неограниченный оператор 82
неподвижная точка 125
непрерывная ветвь 398
— функция 21

непрерывные линейные функционалы 167
непрерывный оператор 76
— спектр 104
несогласованные элементы 359
нижнее решение 243
Нитче прием 359
норма вектора 16, 17
нормальный конус 235
нормированное векторное пространство 16
носитель функции 24
нуль-пространство 80
Ньютона метод 143—149
— последовательность 143

область определения 74
обобщенные собственные функции 277
образ 75
обратный к линейному оператору 79—80
— — нелинейному оператору 127
ограниченная эрмитова форма 195
ограниченное подмножество 17
ограниченный оператор 82
одинаково направленные векторы 398
однородный оператор 402
окрестность 19
оператор 75
— гармонического сопряжения 406
— конечного ранга 203
операторная норма 82, 90
операторнозначная функция 272
ортогональное дополнение 38, 173
ортогональные векторы 37
— проекторы 256
ортонормированное множество 40
ортонормированный базис 42
остаточный спектр 104
открытое подмножество 19
открытый шар 17
относительно компактное подмножество 154
— секвенциально компактное подмножество 155

Парсеваля формула 42, 69, 306
Пеано теорема 231
перестановочность неограниченных операторов 271
периодический цуг волн 395, 405, 409
Пикара теорема 134—135, 151
пирамидальная функция 354
Планшереля формула 69, 306, 308, 309
плотное множество 33
пограничный слой 354
полная энергия 344, 349
полное множество 28
— — в гильбертовом пространстве 40
положительный оператор 210
— нелинейный оператор 236
— — самосопряженных операторов 252
полугрупповое свойство 94, 275
полунепрерывная функция 255
порядковая граница 238
порядково-ограниченная последовательность 238
— — самосопряженных операторов 252
порядковый интервал 235
почти всюду (п. в.) 56
— сжимающее отображение 246
правило трапеций 221
предгильбертово пространство 36
предел последовательности векторов 18
предельная точка, предельный круг 299
принцип линеаризации 390
— равномерной ограниченности 91
— сжимающих отображений 130
— сохранения энергии 275
— строгого диагонального преобладания 100
пробная функция 348
пробное подпространство 348
продолжение нулём 323
— оператора *см.* расширение оператора
— по непрерывности 83
проектор, проекция 256
производная векторнозначной функции 93
прообраз 75
простая функция 58
простое собственное значение 392
пространство последовательностей 13
— пробных функций *см.* пробное подпространство
— с мерой 52
— со скалярным произведением *см.* предгильбертово пространство
прямая сумма 14
прямое произведение 15
Пуанкаре — Боля теорема 384
— неравенство 332, 343
Пуассона — Больцмана уравнение 151
— уравнение 313, 328

равномерная норма *см.* sup-норма
— сильная эллиптичность 318
— сходимость 91, 94
равномерно выпуклое банахово пространство 45
— непрерывная функция 22

— непрерывный функционал 157
равностепенно непрерывное множество 160
радиационный перенос 380
разделенные условия 297, 301
разложение единицы *см.* спектральное семейство
распадающаяся система граничных условий 301
расширение оператора 76
расширенная вещественная прямая 52, 56
регулярная концевая точка 288
регулярность внутри области 338
— вплоть до границы 338
регулярный конус 239
— формальный дифференциальный оператор 288
резольвента 103, 267
резольвентное множество 103
— ядро 119
Реллиха теорема вложения 325
рефлексивность 172
Римана интеграл 48—49, 62, 63
— *Стилтьеса* интеграл 258
Рисса теорема о представлении 177
— *Фишера* теорема 67
Ритца метод 346
— приближение 348, 351—353
— теорема 348—349
Роте теорема о неподвижной точке 246

самосопряженное линейное подпространство 283
— расширение 296
самосопряженный оператор 182, 192
Сарда лемма 368
свёртка 70
свойство наилучшего приближения 41
сглаживатель 70
секвенциально компактное подмножество 154
сепарабельное банахово пространство 34
сжимающий оператор 130
сильная сходимость 95
сильно эллиптический дифференциальный оператор 317, 338
сильный предел 95
симметрический линейный оператор 279
симметрическое подпространство 283
симметричное ядро 182
сингулярная концевая точка 288
сингулярный формальный дифференциальный оператор 288
скалярное произведение 35
слабая производная 319—320
— секвенциальная компактность 176
— — — относительная 176
— сходимость 174, 178
слабое решение 319
слабый предел 174
смешанные граничные условия 297, 298
Соболева теорема вложения 327
соболевское пространство (пространство *Соболева*) 321, 322
собственное значение 103, 336
— подпространство 103
— расширение 76
собственные векторы (собственные функции) 103, 386
солитон 396
сопряженное к банахову пространству 167
— подпространство 283
сопряженные индексы 20
сопряженный оператор 165
— к ограниченному оператору в банаховом пространстве 179
— — — — — гильбертовом пространстве 181
— — неограниченному оператору в гильбертовом пространстве 189
спектр 103, 267
спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов 265
— — — неограниченных операторов 271
спектральное исчисление 267
— семейство 266
спектральный проектор 266
— радиус 106
сужение оператора 76
сумма ряда 28
существенная верхняя грань 61
степень 362, 364, 367, 372, 373
строго положительный самосопряженный оператор 252
ступенчатая функция 48
сходящаяся последовательность векторов 18
сходящийся ряд 28
счётная аддитивность 52
сюръективный оператор 76
sup-норма 22

теорема о замкнутом графике 113
— — монотонной миноранте 402
— — — сходимости 62
— — неявной функции 141
— — проекции 39
— — спектральном отображении 106, 273
— об открытом отображении 89

теория возмущений для замкнутых операторов 115—116, 120
— — — нелинейных операторов 131
— — — ограниченных линейных операторов 99
Титце теорема о продолжении 373
тождественный оператор 80
тождество параллелограмма 45
Тонелли теорема 65
точечный спектр 103
точка бифуркации *см.* бифуркационное значение
триангуляция 353

узел 349
Урысона интегральное уравнение 124, 247
— оператор 127, 138

Фату лемма 63
Фёппля — Хенки уравнения 236, 237
формально самосопряженный оператор 288, 317
формальный дифференциальный оператор обыкновенный 109, 288
— — — с частными производными 316—317, 338
— сопряженный оператор 189, 288, 317, 338
формула трапеций 96
Фредгольма альтернатива 197
— — (обобщение) 203, 207
— — для обобщенной задачи *Дирихле* 332, 334, 336
— интегральное уравнение 79
— — — однородное и неоднородное второго рода 197
— — — первого рода 210—211
Фреше производная 137, 329
Фубини теорема 65
фундаментальная последовательность *см. Коши* последовательность
функционал 75
функция-колпак 351

Фурье — Бесселя ряд 300, 311
— *Дини* ряд 300
— коэффициенты 40
— преобразование 69, 306
— ряд 40
— — по синусам 305

Хана — Банаха теорема 169
Ханкеля преобразование 309
характеристическая функция 48
характеристическое значение 125, 386

Чандрасекхара H-уравнение 380
частичное упорядочение в банаховом пространстве 233—234
численное интегрирование 95, 96, 221
— решение интегральных уравнений 102, 215—222, 224
— — эллиптических уравнений 345—359

Шаудера теорема о неподвижной точке 226, 229, 231, 232
шаудеров проекционный оператор 230
Шварца неравенство 36
Шрёдингера уравнение 275

эволюционное уравнение 273—275
эквивалентные нормы 33
эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными 207, 313—344
энергетическая норма 347
эрмитова матрица 182
— форма 195
эрмитово ядро 182

Юнга неравенство 67

ядро интегрального уравнения 92
— оператора *см.* нуль-пространство
Якоби матрица, якобиан 366—367

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5

Предисловие 6

Глава 1. **Банаховы пространства** 9

1.1. Введение 9
1.2. Векторные пространства 11
1.3. Нормированные векторные пространства 15
1.4. Банаховы пространства 26
1.5. Гильбертово пространство 35
Задачи 44

Глава 2. **Интегрирование по Лебегу и пространства $\mathscr{L}_p$** 47

2.1. Введение 47
2.2. Мера множества 49
2.3. Измеримые функции 56
2.4. Интегрирование 59
2.5. Пространства $\mathscr{L}_p$ 66
2.6. Некоторые приложения 69
Задачи 71

Глава 3. **Основы теории линейных операторов** 73

3.1. Введение 73
3.2. Основная терминология теории операторов 74
3.3. Некоторые алгебраические свойства линейных операторов 77
3.4. Непрерывность и ограниченность 81
3.5. Некоторые фундаментальные свойства ограниченных операторов . 89
3.6. Первые результаты о решении уравнения $Lf = g$ 97
3.7. Введение в спектральную теорию 103
3.8. Замкнутые операторы и дифференциальные уравнения 107
Задачи 116

Глава 4. **Введение в теорию нелинейных операторов** 121

4.1. Введение 121
4.2 Предварительные сведения 123
4.3. Принцип сжимающих отображений 128
4.4. Производная Фреше 136
4.5. Метод Ньютона для нелинейных операторов 142
Задачи 149

Глава 5. Компактные множества в банаховых пространствах 153

5.1. Введение 153
5.2. Определения 154
5.3. Некоторые следствия компактности 157
5.4. Некоторые важные компактные множества функций 159
Задачи 163

Глава 6. Сопряженный оператор 165

6.1. Введение 165
6.2. Сопряженное к банахову пространству 166
6.3. Слабая сходимость 174
6.4. Случай гильбертова пространства 176
6.5. Сопряженный к ограниченному линейному оператору 178
6.6. Ограниченные самосопряженные операторы: спектральная теория 184
6.7. Сопряженный к неограниченному линейному оператору в гильбертовом пространстве 188
Задачи 194

Глава 7. Линейные компактные операторы 197

7.1. Введение 197
7.2. Примеры компактных операторов 198
7.3. Альтернатива Фредгольма 203
7.4. Спектр компактного оператора 208
7.5. Компактные самосопряженные операторы 211
7.6. Численное решение линейных интегральных уравнений 215
Задачи 222

Глава 8. Нелинейные компактные операторы и монотонность 225

8.1. Введение 225
8.2. Теорема Шаудера о неподвижной точке 228
8.3. Положительные и монотонные операторы в частично упорядоченных банаховых пространствах 233
Задачи 246

Глава 9. Спектральная теорема 249

9.1. Введение 249
9.2. Предварительные сведения 251
9.3. Подоплёка спектральной теоремы 258
9.4. Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов 262
9.5. Спектр и резольвента 267
9.6. Неограниченные самосопряженные операторы 271
9.7. Решение эволюционного уравнения 273
Задачи 275

Глава 10. Разложения по обобщенным собственным функциям для обыкновенных дифференциальных уравнений 277

10.1. Введение 277
10.2. Расширения симметрических операторов 279
10.3. Формальные обыкновенные дифференциальные операторы: предварительные сведения 288

10.4. Симметрические операторы, ассоциированные с формальными обыкновенными дифференциальными операторами 289
10.5. Построение самосопряженных расширений 295
10.6. Разложения по обобщенным собственным функциям 303
Задачи 311

Глава 11. **Линейные эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными** 313

11.1. Введение 313
11.2. Обозначения 315
11.3. Слабые производные и соболевские пространства 318
11.4. Обобщенная задача Дирихле 327
11.5. Альтернатива Фредгольма для обобщенной задачи Дирихле . . . 334
11.6. Гладкость слабых решений 338
Задачи 341

Глава 12. **Метод конечных элементов** 345

12.1. Введение 345
12.2. Метод Ритца 346
12.3. Скорость сходимости метода конечных элементов 353
Задачи 359

Глава 13. **Введение в теорию степени** 360

13.1. Введение 360
13.2. Степень в конечномерном случае 366
13.3. Степень Лерэ — Шаудера 375
13.4. Одна задача из теории радиационного переноса 380
Задачи 384

Глава 14. **Теория бифуркаций** 386

14.1. Введение 386
14.2. Локальная теория бифуркаций 389
14.3. Глобальная теория собственных векторов 397
Задачи 409

Литература 411
Список обозначений 417
Именной указатель 421
Предметный указатель 424

В. К. Л. Хатсон, Джон Сидни Пим

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА
И ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

Ст. научный редактор В. И. Авербух
Мл. научный редактор Л. А. Макарова
Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Н. И. Манохина
Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 3255

Сдано в набор 18.01.83. Подписано к печати 11.08.83. Формат $60\times90^1/_{16}$. Объем б. л. 13,50. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 27,00. Усл. кр.-отт. 27,00. Уч.-изд. л. 26,27. Изд. № 1/2019. Тираж 8000 экз. Зак. 518. Цена 3 руб.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

129820, Москва, М-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.