Пособие по математике для поступающих в техникумы

Пособие по математике
для поступающих в техникумы

Пособие по математике для поступающих в техникумы

ПОД РЕДАКЦИЕЙ М. Л. СМОЛЯНСКОГО

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве пособия
для поступающих в техникумы

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1978

51
П61
УДК 51 (075.4)

В. А. Гусев, В. К. Егерев, А. Г. Мордкович, М. Л. Смолянский

Рецензенты:
канд. физ.-матем. наук М. И. Грабарь, преп. матем. Л. А. Клюева

П $\frac{60601-061}{001(01)-78}$ 262—77

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено абитуриентам, поступающим в средние учебные заведения на базе восьмилетней школы.

Материалы, изложенные в пособии, полностью соответствуют существующей программе по математике для 5—8 классов средней школы.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть посвящена алгебре. В ней разъясняются, в частности, понятия множества, натурального числа, действительного числа и функции. В ней рассказывается также об операциях над множествами и о построении графиков элементарных функций.

Вторая часть посвящена геометрии на плоскости. Здесь разъясняются понятия конгруэнтности, перемещения, вектора, подобия и гомотетии. Рассказывается об аксиоматике и векторной алгебре. В заключительной главе приводятся основные факты, связанные с тригонометрическими функциями.

Наряду с изложением теоретического материала авторы уделяют большое внимание решению типовых задач. В каждой главе приводится большое количество подробно решенных примеров.

Приведенные в конце каждой главы вопросы для самопроверки и задачи для самостоятельного решения помогут абитуриентам выяснить, насколько хорошо они разобрались в изучаемом курсе.

В процессе изучения курса абитуриенты должны глубоко вникнуть в сущность всех новых понятий и формулировки теорем. При разборе каждой теоремы необходимо выяснить, где в доказательстве используется то или иное ее условие.

Авторы будут благодарны за все замечания и отзывы по данному пособию, которые просят присылать по адресу: Москва, ул. Мархлевского, д. 19/4, издательство «Высшая школа».

Авторы

ЧАСТЬ I
АЛГЕБРА

ГЛАВА ПЕРВАЯ
МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. МНОЖЕСТВА

1. Понятие множества. Одно из основных понятий математики — понятие множества. Оно является простейшим неопределяемым понятием, его нельзя свести к более простым понятиям. Множество можно лишь описать или пояснить примерами. Например, можно говорить о множестве учеников данного класса, о множестве всех предметов, находящихся в классе, о множестве всех натуральных чисел, о множестве всех корней данного уравнения, о множестве всех точек, лежащих на прямой, о множестве всех теорем, входящих в данный курс, и т. д. Говоря о множестве каких-либо объектов, мы объединяем их в одно целое и рассматриваем свойства этого объединения, а не свойства отдельных входящих в него элементов. Не случайно основатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845—1918) писал: «Множество есть многое, мыслимое как единое».

Множества принято обозначать прописными (заглавными) латинскими буквами, а элементы, образующие эти множества, маленькими (строчными) буквами. Если элемент a принадлежит множеству A, то это записывают так: $a \in A$ ($\in$ — *знак принадлежности*). Если элемент b не принадлежит множеству A, то это записывают так: $b \notin A$ или $b \overline{\in} A$. Так, если множество A состоит из чисел 1 и 2, то $3 \notin A$.

Элементами множества могут быть как реально существующие предметы (люди, стулья, деревья и т. д.), так и абстрактные предметы (точки, числа, теоремы и т. д.). Могут быть и такие случаи, когда элементами одного множества являются какие-то другие множества. Можно, например, говорить о множестве M всех классов данной школы, в то время как каждый класс, в свою очередь, является множеством учеников. Но при этом надо помнить, что в множество M входят в качестве элементов не отдельные ученики, а множества учеников, объединенных в классы.

Множества могут быть конечными и бесконечными. *Конечным* называется множество, состоящее из конечного числа элементов (например, множество учеников данного класса — конечное множество). Примером бесконечного множества может служить множество всех натуральных чисел.

Пусть множество A состоит из конечного числа элементов a_1, a_2, a_3, a_4. Такое множество принято записывать следующим образом:

$$A = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4\},$$

т. е. перечисляются все элементы данного множества, а фигурные скобки показывают, что все эти элементы объединены в одно множество. Если множество бесконечно или число элементов множества очень велико, то указанная запись множества становится неудобной или невозможной. В этих случаях применяется другой способ задания множества. Он состоит в том, что указывается характеристическое свойство, присущее всем элементам данного множества.

Под характеристическим свойством понимается свойство, которым обладают все элементы данного множества и которым не обладает ни один элемент, не входящий в данное множество.

Например, свойство «быть квадратом натурального числа» определяет бесконечное множество $A = \{1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ \ldots\}$. Этим характеристическим свойством множество A полностью определено. Ясно, что элемент 144 принадлежит множеству A, так как $144 = 12^2$. В то же время элемент 145 не принадлежит множеству A, так как не существует натурального числа, квадрат которого равен 145. Не принадлежат множеству A и элементы другой природы (не числа), такие, как «дом», «точка», «теорема».

Приведем еще два примера задания множества с помощью характеристического свойства. Характеристическое свойство «быть однозначным нечетным числом» определяет конечное множество $B=\{1; 3; 5; 7; 9\}$. Характеристическое свойство «быть столицей государства» определяет конечное множество, состоящее из столиц всех государств земного шара. В это множество входят такие элементы, как Москва, Рим, Париж, Монтевидео, и не входят такие города, как Ленинград, Милан, Катовице.

Если характеристическое свойство обозначить символом $p(x)$, то множество, определяющееся этим свойством, записывают так:

$$A=\{x \mid p(x)\}.$$

Например, множество корней квадратного уравнения $x^2+3x+2=0$ запишется так: $A=\{x \mid x^2+3x+2=0\}$.

Может случиться так, что характеристическому свойству не удовлетворяет ни один элемент. Если, например, в данном классе все ученики успевают, то характеристическому свойству «быть неуспевающим учеником данного класса» не удовлетворяет ни один элемент. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Примеры пустых множеств: множество натуральных корней уравнения $5x+7=0$, множество всех нечетных чисел, делящихся без остатка на 2, множество людей Земли, побывавших на Марсе и т. д.

Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если каждый элемент множества A является в то же в емя элементом множества B а каждый элемент множества B является и элементом множества A. Если A и B — равные множества, то пишут $A=B$. Например, $\{1; 2; 3\}=\{3; 2; 1\}=\{2; 3; 1\}$, т. е. порядок написания элементов множества не имеет значения.

2. Подмножество. *Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является в то же время и элементом множества A, т. е. из условия $b \in B$ вытекает условие $b \in A$.* Если B — подмножество множества A, то пишут $B \subset A$ ($\subset$ — *знак включения*) или $A \supset B$.

Из этого определения следует, что каждое множество является своим подмножеством: $A \subset A$. Кроме того, принято считать, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества A: $\varnothing \subset A$. Множества A и $\varnothing$ называются *несобственными подмножествами* множества A. Остальные подмножества, если они существуют, называют *собственными подмножествами* множества A.

П р и м е р ы. 1. Пусть задано множество $A=\{1;\ 2;\ 3\}$. Тогда его собственными подмножествами будут множества $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;\ 2\}$, $\{1;\ 3\}$, $\{2;\ 3\}$, а несобственными подмножествами — множества $\{1;\ 2;\ 3\}$ и $\varnothing$.

2. Пусть A — множество всех точек круга а B — множество всех точек квадрата, вписанного в этот круг (рис. 1). Тогда множество B есть подмножество множества A. Множество A имеет еще целый ряд подмножеств. Так, множество всех точек радиуса ON, множество всех точек окружности $MNDK$, множества всех точек хорд MN, DK, ND, KM будут собственными подмножествами множества A.

3. Свойства подмножеств. На рис. 2 изображены три множества A, B и C, причем $C \subset B$, $B \subset A$. Из рисунка видно, что в таком случае и $C \subset A$, т. е. если фигура C

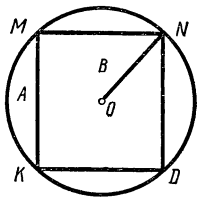


Рис. 1

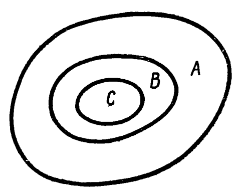


Рис. 2

является частью фигуры B, а фигура B, в свою очередь, является частью фигуры A, то и фигура C является частью фигуры A. Значит, можно утверждать, что выполняется следующее свойство:

1°. *Если* $C \subset B$ *и* $B \subset A$, *то* $C \subset A$.

2°. *Если* $A \subset B$ *и* $B \subset A$, *то* $A = B$.

В самом деле, условие $A \subset B$ означает, что каждый элемент множества A принадлежит множеству B; условие $B \subset A$ означает, что каждый элемент множества B принадлежит A. Следовательно, множества A и B состоят из одних и тех же элементов, т. е. $A = B$.

4. Понятие логического следования. Равносильность. Необходимость и достаточность. *Любое предложение, относительно которого можно сказать, является оно истинным или ложным, называется высказыванием.* Приведем примеры высказываний: а) дуб есть лиственное дерево; б) кит — растение; в) сумма углов треугольника равна 180°. Здесь высказывания а) и в) истинны, а б) — ложно.

Любое числовое равенство является высказыванием. Например, $3=2+1$ — истинное высказывание, а $2+3=7$ — ложное.

Пусть даны два высказывания a и b. Если из истинности a следует истинность b, то пишут $a \Rightarrow b$. Знак $\Rightarrow$ называется *знаком логического следования*. В таком случае говорят также, что b есть *необходимое условие* для a, а a есть *достаточное условие* для b.

Рассмотрим для примера два высказывания: a — данное число делится на 4; b — данное число четное. Ясно, что если число делится на 4, то оно четное. Значит, можно написать $a \Rightarrow b$. Четность числа является необходимым условием делимости его на 4; делимость числа на 4 является достаточным условием четности числа.

С помощью знака логического следования может быть записано первое свойство подмножеств, полученное в предыдущем пункте:

$$(C \subset B,\ B \subset A) \Rightarrow (C \subset A).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться знаком логического следования.

Пусть снова даны два высказывания a и b. Если $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$, то говорят, что высказывания a и b *равносильны* и пишут $a \Leftrightarrow b$.

С помощью знака равносильности может быть записано доказанное в предыдущем пункте второе свойство подмножеств:

$$(A \subset B,\ B \subset A) \Leftrightarrow (A = B). \qquad (1)$$

Заметим, что во многих случаях вместо термина «равносильность» используется термин «необходимость и достаточность». Так, записанное выше предложение (1) можно прочитать следующим образом: *для того чтобы два множества A и B были равны, необходимо и достаточно, чтобы A было подмножеством B и B было подмножеством A.*

5. Операции над множествами. Рассмотрим две операции над множествами.

Пересечение множеств. *Под пересечением множеств A и B понимается множество C, состоящее из тех и только из тех элементов, которые входят одновременно и в множество A, и в множество B.* Пишут $C = A \cap B$.

Примеры. **1.** Пусть $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 5\}$; $B = \{2;\ 5;\ 8;\ 10\}$. Тогда $A \cap B = \{2;\ 5\}$.

2. Пусть A — множество всех нечетных натуральных чисел, $B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. Тогда $A \cap B = \{1;\ 3;\ 5\}$.

3. Пусть A — множество всех ромбов, а B — множество всех прямоугольников. Тогда $A \cap B$ — множество всех прямоугольников с равными сторонами, т. е. множество всех квадратов.

Этот пример показывает, что если множество A задается с помощью характеристического свойства $p_1(x)$, а множество B задается с помощью характеристического свойства $p_2(x)$, то множество C состоит из всех таких элементов, которые одновременно обладают и свойством $p_1(x)$, и свойством $p_2(x)$.

4. Пусть A — множество всех точек квадрата, а B — множество всех точек круга (рис. 3). Тогда множество $A \cap B$ состоит из всех точек заштрихованной области,

5. Пусть A — множество всех четных натуральных чисел, а B — множество всех нечетных натуральных чисел. Тогда $A \cap B = \varnothing$.

Отметим некоторые свойства операции пересечения множеств:

а°. $A \cap B = B \cap A$;

б°. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$;

в°. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Объединение множеств. *Объединением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из*

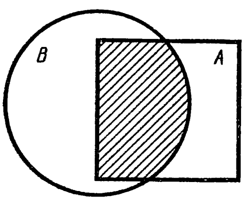


Рис. 3

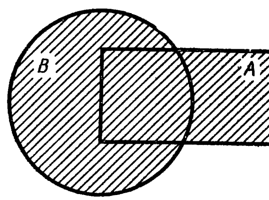


Рис. 4

тех и только из тех элементов, каждый из которых принадлежит, по крайней мере, одному из данных множеств A и B (или A, или B, или и A, и B). Пишут $D = A \cup B$.

Если один и тот же элемент входит и в множество A, и в множество B, то в множество D он входит лишь один раз.

Примеры. **1.** Пусть $A = \{1; 2; 3; 5\}$, $B = \{2; 5; 8; 10\}$. Тогда $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 8; 10\}$.

2. Пусть A — множество точек прямоугольника, а B — множество точек круга (рис. 4). Тогда множество $A \cup B$ состоит из всех точек заштрихованной области.

Отметим некоторые свойства операции объединения:

а°. $A \cup B = B \cup A$;

б°. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$;

в°. $A \cup \varnothing = A$.

Операции пересечения и объединения могут применяться не только к двум множествам, но и к трем, четырем, ста и даже к бесконечной совокупности множеств.

Например, множество натуральных чисел является объединением множеств однозначных, двузначных, трехзначных, ..., n-значных, ... чисел. Множество всех плоских многоугольников — объединение множеств треугольников, четырехугольников, ..., n-угольников, ...

Вопросы для самопроверки

1. Как можно описать множество?
2. Что такое характеристическое свойство?
3. Что такое пустое множество?
4. Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.
5. Что такое подмножество данного множества?
6. Какое подмножество называется собственным?
7. Имеет ли пустое множество собственное подмножество?
8. Какое подмножество называется несобственным?
9. Какие множества называются равными?
10. Равны ли множества $A_1=\{1;\ 2;\ 5\}$ и $A_2=\{5;\ 2;\ 1\}$?
11. Что такое пересечение множеств?
12. Что такое объединение множеств?
13. Докажите, что $A\cup B=B\cup A$.
14. Докажите, что $A\cap B=B\cap A$.

Упражнения

1. Запишите множество, удовлетворяющее характеристическому свойству «быть кубом целого числа».

2. Запишите множество целых решений неравенства $-3\leqslant x<2$.

3. Покажите, что множество положительных целых решений уравнения $x^2=2$ является пустым множеством.

4. Конечно или бесконечно множество делителей натурального числа?

5. Конечно или бесконечно множество целых чисел, делящихся на 5, но не делящихся на 7?

6. Напишите все подмножества множества $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

7. Конечно или бесконечно множество всех собственных подмножеств множества натуральных чисел?

8. Найдите пересечение множеств $\{1; 2; 3; 5; 8\}$ и $\{1;\ 2;\ 10;\ 15;\ 25\}$.

9. Найдите пересечение множества всех треугольников и множества всех равнобедренных треугольников.

10. Найдите пересечение множества всех параллелограммов с множеством всех четырехугольников с равными сторонами.

11. Найдите пересечение множества четных чисел и множества чисел, кратных трем.

12. Докажите, что если $A\subset B$, то $A\cap B=A$?

13. Найдите пересечение множества нечетных чисел и множества целых чисел, делящихся на 5. Конечно или бесконечно это множество?

14. Найдите объединение множеств $\{1;\ 2;\ 3\}$ и $\{1;\ 2;\ 10;\ 11\}$.

15. Найдите объединение множества натуральных четных чисел и множества натуральных чисел, кратных трем.

16. Найдите объединение множества натуральных нечетных чисел и множества натуральных чисел, кратных пяти.

17. Докажите, что если $A\subset B$, то $A\cup B=B$.

§ 2. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Свойства натуральных чисел. Множество всех натуральных чисел N бесконечно. Оно имеет наименьший элемент 1 и не имеет наибольшего элемента. Для каждого натурального числа можно указать следующее за ним (за числом 7 следует число 8, за числом 124 следует число 125, вообще за числом k следует число $k+1$).

Пусть M — некоторое подмножество множества N, $M \subset N$. В M обязательно есть наименьший элемент; если же M — конечное множество натуральных чисел, то в M есть и наибольший элемент. Например, множество M всех четных натуральных чисел $M = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ \ldots\}$ бесконечно, в нем есть наименьший элемент 2, но нет наибольшего. Множество P всех нечетных двузначных чисел конечно, в нем есть и наименьший элемент (число 11), и наибольший элемент (число 99).

На множестве N всех натуральных чисел определены операции сложения и умножения, причем для любых натуральных чисел m, n, k справедливы следующие равенства:

1) $m+n=n+m$,
2) $m+(n+k)=(m+n)+k$,
3) $mn=nm$,
4) $m(nk)=(mn)k$,
5) $m(n+k)=mn+mk$,
6) $m \cdot 1=m$.

Первое и третье равенства выражают *переместительный* закон соответственно сложения и умножения; второе и четвертое — *сочетательный* закон сложения и умножения; пятое равенство носит название *распределительного* закона умножения относительно сложения.

Пример. Найти сумму натуральных чисел от 1 до 99.

Решение. Имеем: $S=1+2+3+\ldots+97+98+99$. Воспользовавшись переместительным и сочетательным законами сложения, получим:

$$S=(1+99)+(2+98)+(3+97)+\ldots+(49+51)+50=$$
$$=\underbrace{100+100+100+\ldots+100}_{49}+50=49\cdot 100+50=4950.$$

Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число. Относительно вычитания и деления этого сказать нельзя: так из числа 3 нельзя вычесть число 7 (в множестве натуральных чисел); число 15 нельзя разделить на 4 (нацело).

Если натуральное число m делится нацело на натуральное число k, то m называется *кратным* числа k. Если m — кратное числа k, то существует натуральное число n такое, что $m = kn$.

Запишем множество P всех кратных числа 3:

$$P = \{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15;\ 18;\ \ldots\}.$$

Множество P можно записать и по-другому:

$$P = \{3n \mid n \in N\}.$$

Аналогично множество M кратных числа 7 имеет вид

$$M = \{7n \mid n \in N\}.$$

Если натуральное число m не делится нацело на натуральное число k, т. е. не существует такого натурального числа n, что $kn = m$, то рассматривают деление с остатком. Например, при делении числа 37 на число 15 в частном получается 2 (неполное частное) и в остатке 7, т. е. $37 = 15 \cdot 2 + 7$. В общем случае, если m — делимое, k — делитель, p — частное и r — остаток, то

$$m = kp + r.$$

Здесь m, k, p, r — натуральные числа. Исключение составляет случай, когда m делится на n нацело; в этом случае $r = 0$.

Примеры. **1.** Выполнить действия:

$$(18 \cdot 96 - (1927 - 1873) \cdot 31) : 27.$$

Решение. 1) $18 \cdot 96 = 1728$, 2) $1927 - 1873 = 54$, 3) $54 \cdot 31 = 1674$, 4) $1728 - 1674 = 54$, 5) $54 : 27 = 2$.

2. Пусть A — множество двузначных чисел, кратных 6, B — множество двузначных чисел, кратных 9. Составить множества $A \cap B$, $A \cup B$ и указать наименьший и наибольший элементы в каждом из этих множеств.

Решение.

$$A = \{12;\ 18;\ 24;\ 30;\ 36;\ 42;\ 48;\ 54;\ 60;\ 66;\ 72;\ 78;\ 84;\ 90;\ 96\},$$
$$B = \{18;\ 27;\ 36;\ 45;\ 54;\ 63;\ 72;\ 81;\ 90;\ 99\};$$

тогда $A \cap B = \{18;\ 36;\ 54;\ 72;\ 90\}$.
Здесь 18 — наименьший, а 90 — наибольший элемент.

Составим объединение множеств A и B, расположив натуральные числа в порядке возрастания:

$$A \cup B = \{12;\ 18;\ 24;\ 27;\ 30;\ 36;\ 42;\ 45;\ 48;\ 54;\ 60;\ 63;\ 66;\ 72;\ 78;\ 81;\ 84;\ 90;\ 96;\ 99\},$$

здесь наименьшим элементом является число 12, а наибольшим — 99.

3. Найти частное и остаток от деления числа 274018 на число 342.

Решение. Выполним «деление углом»:

$$\begin{array}{r|l} 274018 & 342 \\ \underline{-2736} & \overline{801} \\ 418 & \\ \underline{-342} & \\ 76 & \end{array}$$

Итак, частное 801, а остаток 76. Воспользовавшись равенством (1), можем записать, что $274018=342\cdot801+76$.

2. Признаки делимости. В некоторых случаях, не производя деления натурального числа m на натуральное число k, можно ответить на вопрос, выполнимо ли деление m на n без остатка или нет. Ответ на этот вопрос получается с помощью различных признаков делимости. Рассмотрим некоторые из них.

Делимость суммы. *Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число.*

Пусть a и b делятся нацело на c, докажем, что и $a+b$ делится на c.

Так как a кратно c, то существует такое натуральное число n, что $a=nc$. Аналогично, существует такое натуральное число k, что $b=kc$. Тогда можно записать, что

$$a+b=nc+kc=cn+ck.$$

Воспользовавшись распределительным законом, получим равенство $cn+ck=c(n+k)$. Получим $n+k=m$, тогда

$$a+b=cm.$$

Но это и означает, что $a+b$ делится нацело на число c.

Например, не выполняя сложения, можно установить, что сумма $48+64+96$ делится на 16 — ведь каждое слагаемое этой суммы делится на 16.

Не следует, однако, думать, что, если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма $37+19$ делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4.

Делимость произведения. *Если в произведении хотя бы один из сомножителей делится нацело на некоторое число, то и произведение делится на это число.*

Пусть дано произведение ab натуральных чисел a и b, a делится на c; докажем, что и ab кратно c.

Так как a кратно c, то существует натуральное число n, такое, что $a = nc$. Тогда имеем

$$ab = (nc)\,b = ncb = nbc = (nb)\,c$$

(мы воспользовались переместительным и сочетательным законами умножения). Положив $nb = m$, получим

$$ab = mc.$$

Это и означает, что ab делится на c без остатка.

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение $105 \cdot 48 \cdot 93 \cdot 54$ делится на 5 — ведь 105 делится на 5.

Признак делимости на 2. *Если последняя цифра натурального числа делится на 2, то число делится на 2.*

Иными словами, *число будет четным, если оно оканчивается одной из следующих цифр: 0, 2, 4, 6, 8.*

Пусть, например, дано трехзначное число abc, где c кратно числу 2 (запись $\overline{abc}$ означает, что a — цифра сотен, b — цифра десятков, c — цифра единиц), тогда

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c.$$

Числа 10 и 100 делятся на 2, поэтому $a \cdot 100$, $b \cdot 10$ и $a \cdot 100 + b \cdot 10$ делятся на 2. По условию и c делится на 2, поэтому сумма $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ делится на 2, что и требовалось доказать.

Верное и обратное: *если число делится на 2, то его последняя цифра делится на 2.* Значит, можно утверждать следующее: *для того чтобы число было четным, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра была четной.*

Аналогичные рассуждения позволяют получить признаки делимости на 5, на 10 и на 4.

Признак делимости на 5. *Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра была либо 0, либо 5.*

Признак делимости на 10. *Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.*

Признак делимости на 4. *Для того чтобы натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа.*

Например, число 15436 делится на 4 без остатка, так как число 36 делится на 4. Число 372514 не делится на 4, так как 14 не делится на 4.

Отметим еще признаки делимости на 3 и на 9.

Признак делимости на 3. *Для того чтобы натуральное число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.*

Рассмотрим для примера четырехзначное число $\overline{abcd}$. Имеем

$$\begin{aligned}\overline{abcd} &= a\cdot 1000+b\cdot 100+c\cdot 10+d=\\ &=a(999+1)+b(99+1)+c(9+1)+d=\\ &=(a\cdot 999+a)+(b\cdot 99+b)+(c\cdot 9+c)+d=\\ &=999\cdot a+a+99\cdot b+b+9\cdot c+c+d=\\ &=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d).\end{aligned}$$

Числа 9, 99, 999 делятся на 3, поэтому $(999a+99b+$ $+9c)$ делится на 3 и сумма $(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$ будет делиться на 3 тогда и только тогда, когда делится на 3 сумма цифр $(a+b+c+d)$.

Например, число 2742 делится на 3, так как делится на 3 число $2+7+4+2=15$. Число 17941 не делится на 3, так как сумма цифр этого числа равна 22, а 22 не делится на 3.

Признак делимости на 9. *Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.*

Этот признак получается аналогично признаку делимости на 3.

Примеры. **1.** Доказать, что сумма $12a+3b+18c$ делится на 6, если b — четное, а a и c — любые натуральные числа.

Решение. Если b — четное число, то b имеет вид $b=2n$, где n — натуральное число. Тогда $3b=3(2n)=(3\cdot 2)n=6n$, а заданную сумму $12a+3b+18c$ можно переписать так:

$$12a+6n+18c.$$

Числа 12, 6 и 18 делятся на 6, значит $12a$, $6n$ и $18c$ делятся на 6 (по признаку делимости произведения). В таком случае и сумма $12a+6n+18c$ делится на 6 (по признаку делимости суммы).

2. Не производя деления, найти остаток от деления числа 8378 на 5.

Решение. Число 8375 оканчивается цифрой 5, значит делится на 5. Но $8378=8375+3$. Таким образом, остаток от деления числа 8378 на 5 равен 3.

Примечание. Число 8370 тоже делится на 5. Можно записать $8378=8370+8$, но из такого равенства нельзя сделать вывод о том, что остаток от деления числа 8378 на число 5 равен 8 — ведь остаток должен быть меньше делителя. Поэтому мы подобрали ближайшее к 8378 число, кратное 5 и меньшее чем 8378.

3. Какой цифрой должно оканчиваться натуральное число $1743c$, чтобы оно делилось без остатка на 9.

Решение. Имеем: $1+7+4+3=15$. Заданное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр $15+c$ делится на 9. Значит, на месте c должна стоять цифра 3, так как $15+3=18$, а 18 кратно 9.

3. Разложение чисел на простые множители. *Делителем* данного числа называется такое число, на которое данное число делится нацело. Например, 6 является делителем числа 24.

Если число имеет только два делителя (само число и единица), то оно называется *простым*, если число имеет более двух делителей, то оно называется *составным*. Так, число 19 — простое, ибо оно имеет только два делителя: 1 и 19; число 35 — составное, оно имеет четыре делителя: 1, 5, 7, 35. Простое число 19 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом: $19=1\cdot 19$; составное число 35 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом: $35=1\cdot 35=5\cdot 7$.

Множество простых чисел и множество составных чисел — бесконечные множества. Заметим, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Пусть дано составное число 360. Его можно представить в виде произведения двух натуральных чисел $360=60\cdot 6$. Число 6 — составное: $6=2\cdot 3$, число 60 — составное: $60=30\cdot 2$. Значит, $360=(30\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)$. Из полученных множителей лишь множитель 30 вновь представляет собой составное число: $30=3\cdot 10$. Число 10 — составное: $10=2\cdot 5$. Значит, $30=3\cdot(2\cdot 5)$, а для числа 360 получаем:

$$360=(3\cdot 2\cdot 5)\cdot 2\cdot(2\cdot 3) \text{ или } 360=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5.$$

Нам удалось представить составное число 360 в виде произведения простых множителей. Здесь множитель 2 встречается 3 раза — в таком случае произведение записывается в виде степени: $2\cdot 2\cdot 2=2^3$. Число 3 называется *показателем* степени. Аналогично, вместо $3\cdot 3$ запишем 3^2. Множитель 5 встречается 1 раз — в таком случае пишут 5^1 или просто 5.

Итак, $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$; это — *разложение числа на простые множители.*

Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители и только одним способом. При разложении чисел на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывается под делимым. Так, для числа 360 эта запись будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Примеры. 1. Разложить на простые множители число 911250.

Решение. Используя признаки делимости, заключаем, что заданное число делится на 2; 3; 5; имеем

$$\begin{array}{r|l} 911250 & 2 \\ 455625 & 5 \\ 91125 & 5 \\ 18225 & 5 \\ 3645 & 5 \\ 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

или $911250 = 2 \cdot 3^6 \cdot 5^4$.

2. Выполнить деление (792:132), разложив делимое и делитель на простые множители.

Решение. Имеем: $\begin{array}{r|r} 792 & 2 \\ 396 & 2 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$

$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$, $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$.

Значит, $792:132 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 11):(2^2 \cdot 3 \cdot 11) =$

$$= ((2^2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3)):(2^2 \cdot 3 \cdot 11) = 2 \cdot 3 = 6.$$

4. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 72 и 96. Составим множество A делителей числа 72:

$$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 18;\ 24;\ 36;\ 72\}.$$

Составим множество B делителей числа 96:

$$B = \{1;\ 2;\ 3:\ 4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 16;\ 24;\ 32;\ 48;\ 96\}.$$

Составим пересечение $A \cap B$ множеств A и B

$$A \cap B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 24\}.$$

Все элементы этого множества называются *общими делителями* чисел 72 и 96, а наибольший элемент — *наибольшим общим делителем*. Его обозначают $Д\,(72;\ 96)$. Итак,

$$Д\,(72;\ 96) = 24.$$

Так как множество делителей данного числа всегда конечно, то и множество общих делителей нескольких данных чисел конечно. А во всяком конечном множестве натуральных чисел, как мы отмечали выше, есть наибольший элемент. Значит, для любых заданных натуральных чисел можно найти наибольший общий делитель.

Если числа a и b таковы, что $Д\,(a,\ b) = 1$, то числа a и b называются *взаимно простыми*. Так, взаимно простыми будут числа 72 и 35 (хотя каждое из них — составное число). В самом деле, множество A делителей числа 72 таково:

$$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 18;\ 24;\ 36;\ 72\},$$

а множество B делителей числа 35 таково:

$$B = \{1;\ 5;\ 7;\ 35\}.$$

Тогда $A \cap B = \{1\}$; значит, $Д\,(35,\ 72) = 1$.

Если числа разложены на простые множители, то легко найти их наибольший общий делитель. Найдем, например, $Д\,(3780,\ 7056)$:

$$\begin{array}{r|l}
3780 & 2 \\
1890 & 2 \\
945 & 3 \\
315 & 3 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
7056 & 2 \\
3528 & 2 \\
1764 & 2 \\
882 & 2 \\
441 & 3 \\
147 & 3 \\
49 & 7 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \qquad 7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$

Составим разложение числа $Д\,(3780,\ 7056)$ на простые множители. В него должны войти простые множители, которые содержатся как в разложении числа 3780, так и в разложении числа 7056. Если они входят в эти разложения с разными показателями, то берем множитель с меньшим показателем. Число 2 входит в оба разложения: в одно — с показателем 2, а в другое — с показателем 4. Поэтому мы возьмем 2^2. Аналогично возьмем 3^2 и 7, а множитель 5 не берем, так как он отсутствует в разложении числа 7056; итак,

$$Д(3780,\ 7056) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252.$$

Введем теперь понятия общего и наименьшего общего кратного. Пусть A — множество чисел, кратных 12:

$$A = \{12;\ 24;\ 36;\ 48;\ 60;\ 72;\ \ldots\},$$

а B — множество чисел, кратных 18:

$$B = \{18;\ 36;\ 54;\ 72;\ \ldots\}.$$

Составим пересечение множеств A и B:

$$A \cap B = \{36;\ 72;\ \ldots\}.$$

Элементы множества $A \cap B$ называют *общими кратными* чисел 12, 18. Это множество бесконечно, оно не имеет наибольшего элемента, но имеет наименьший элемент — число 36. Это число называется *наименьшим общим кратным* чисел 12 и 18 и обозначается $К\ (12,\ 18)$.

Заметим, что всякое общее кратное чисел 12 и 18 делится без остатка на их наименьшее общее кратное. Вообще, кратное чисел a и b делится на $К(a,\ b)$. Иными словами, если число m делится нацело на a и на b, то оно делится и на $К(a,\ b)$. Это замечание часто используется при исследовании вопроса делимости. Так, число 2340 делится на 2, 3, 4, 5, 9, 10. Значит, это число делится и на наименьшее общее кратное указанных чисел, то есть на число 180.

Если числа разложены на простые множители, то легко найти их наименьшее общее кратное. Найдем, например, $К(3780,\ 7056)$. Выше мы видели, что $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Составим разложение числа $К(3780,\ 7056)$. В него должны войти все простые множители, которые входят хотя бы в одно из чисел 3780 и 7056. Если какой-то простой множитель входит в оба разложения, то он берется с наибольшим показателем; имеем

$$К\ (3780,\ 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 105\,840.$$

Воспользовавшись рассмотренным примером, обратим внимание читателя на следующее обстоятельство:

$$(3780\cdot 7056)=(2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7)\cdot(2^4\cdot 3^2\cdot 7^2)=$$
$$=(2^2\cdot 3^2\cdot 7)\cdot(2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2)=Д\,(3780,\ 7056)\cdot K\,(3780,\ 7056),$$

т. е.

$$Д\,(3780,\ 7056)\cdot K\,(3780,\ 7056)=3780\cdot 7056.$$

Можно доказать, что аналогичное равенство справедливо для любых натуральных чисел a и b:

$$Д\,(a,\ b)\cdot K\,(a,\ b)=ab.$$

Если, в частности, числа a и b взаимно простые, т. е. $Д\,(a,\ b)=1$, то $K\,(a,\ b)=ab$. Это значит, что *наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел.*

Вопросы для самопроверки

1. Какие операции всегда выполнимы на множестве натуральных чисел, а какие не всегда?
2. Расшифруйте следующие записи:

$$M=\{2n\mid n\in N\};\quad M=\{2n-1\mid n\in N\}.$$

3. Какая связь существует между делимым, делителем, неполным частным и остатком?
4. В каком случае натуральное число называется простым, составным?
5. Как определяется наименьшее общее кратное двух или нескольких чисел?
6. Как определяется наибольший общий делитель двух или нескольких чисел?
7. Какие числа называются взаимно простыми? Если a и b взаимно простые, то чему равны $K\,(a,\ b)$ и $Д\,(a,\ b)$?
8. Сформулируйте и докажите признаки делимости суммы и произведения двух чисел на третье.
9. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2 и 5, на 4 и 25, на 8 и 125, на 3 и 9.
10. Опишите метод нахождения $K\,(a,\ b)$.
11. Опишите метод нахождения $Д\,(a,\ b)$.

Упражнения

1. Выполните действия *:

а) $171\,342:57-15\,(7000-6988):36$;

б) $27\cdot 81\,098-61\,098:(1301-18\cdot 39)$;

---

* При решении примеров следите за порядком действий: как известно, сначала выполняются действия в скобках, затем умножение и деление и лишь потом сложение и вычитание.

в) $(101\cdot101-652\,864:808):303\cdot205$;
г) $(345\,465:853+2\,000\,070:639)-109\cdot29$;
д) $[18\cdot93-(1927-1873)\cdot31]:56$.

2. Найдите общие делители чисел: а) 39 и 42, б) 12, 18 и 24.

3. Найдите наибольший общий делитель чисел: а) 7105 и 10 759; б) 74 292 и 74 538.

4. Чему равны $Д(a, b)$ и $К(a, b)$, если a кратно b?

5. Среди чисел 4, 8, 3, 13, 26 найдите все пары взаимно простых.

6. Напишите формулу чисел, кратных 2; 3; 5.

7. Напишите формулу нечетных чисел.

8. Напишите формулу чисел, дающих при делении: а) на 3 в остатке 2, б) на 4 в остатке 1, в) на 5 в остатке 3.

9. Найдите три общих кратных для чисел: а) 7 и 3; б) 14 и 21.

10. Найдите наименьшее общее кратнсе чисел: а) 18 и 36; б) 14 и 35.

11. Докажите, что сумма: а) двух четных чисел — четна, б) двух нечетных чисел — четна, в) четного и нечетного числа — нечетна.

12. Докажите, что произведение: а) двух четных чисел — четно, б) двух нечетных чисел — нечетно, в) четного и нечетного числа — четно.

13. Число a делится нацело на 5. При делении b на 5 в остатке получается 1, а при делении на 5 числа c в остатке получается 2. Какой остаток получится при делении на 5 суммы $a+b$ и суммы $b+c$?

14. Какие цифры следует поставить вместо звездочки в записи 46*, чтобы получившиеся числа делились на: а) 2; б) 3; в) 5; г) 9; д) 4; е) 6; ж) 10.

§ 3. МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Обыкновенные дроби. Напомним основные сведения об обыкновенных дробях, т. е. о числах вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

Пусть дана обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$. Число m называется *числителем* дроби, n — *знаменателем*. В частности, n может быть равным 1. В этом случае обычно не пишут $\frac{m}{1}$, а пишут просто m, т. е. всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1. Отсюда следует, что множество N всех натуральных чисел и множество P всех обыкновенных дробей связаны отношением включения $N\subset P$.

Две дроби $\frac{a}{b}$ *и* $\frac{c}{d}$ *считаются равными, если* $ad=bc$. Например, равными будут дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{12}{20}$ (так как $3\cdot20=5\cdot12$), $\frac{7}{1}$ и $\frac{28}{4}$ (так как $7\cdot4=28\cdot1$).

Из определения равенства дроби следует, что равными будут дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$, так как $a(bm)=b(am)$. Это означает, что если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной. Это свойство называется *основным свойством дроби*.

Пользуясь основным свойством дроби, иногда можно заменить данную дробь другой — равной данной, но с меньшим числителем и меньшим знаменателем. Такую замену называют *сокращением дроби*.

В общем случае, сокращение дроби возможно всегда, если числитель и знаменатель не взаимно простые числа. Если числитель и знаменатель — взаимно простые числа, то дробь называется *несократимой*.

Основная цель сокращения дроби — замена данной дроби равной ей несократимой дробью. Заменим, например, дробь $\frac{36}{48}$ равной ей несократимой дробью. Для этого найдем наибольший общий делитель чисел 36 и 48: $Д(36, 48)=12$. Разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{36}{48}$ на 12, получим $\frac{36}{48}=\frac{3}{4}$. Дробь $\frac{3}{4}$ — несократимая.

Пусть теперь даны две дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{7}$. Они имеют разные знаменатели: 5 и 7. Пользуясь основным свойством дроби, можно заменить эти дроби другими, равными им, причем такими, что у полученных дробей будут одинаковые знаменатели. Такое преобразование, называемое *приведением дробей к общему знаменателю*, часто оказывается полезным. Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{5}$ на 7, получим $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{14}{35}$. Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{7}$ на 5, получим $\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{15}{35}$.

Итак, дроби $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{7}$ приведены к общему знаменателю:

$$\frac{2}{5}=\frac{14}{35}; \quad \frac{3}{7}=\frac{15}{35}.$$

Заметим, что это не единственное решение поставленной задачи: например, дроби можно было привести к общему знаменателю 70:

$$\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 14}{5\cdot 14}=\frac{28}{70}, \quad \frac{3}{7}=\frac{3\cdot 10}{7\cdot 10}=\frac{30}{70}$$

и вообще к любому знаменателю, делящемуся одновременно на 5 и на 7.

Рассмотрим еще один пример: приведем к общему знаменателю дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$. Рассуждая, как в предыдущем примере, получим

$$\frac{7}{24}=\frac{7\cdot 30}{24\cdot 30}=\frac{210}{720}, \quad \frac{11}{30}=\frac{11\cdot 24}{30\cdot 24}=\frac{264}{720}.$$

Но в данном случае можно привести дроби к общему знаменателю, меньшему, чем произведение знаменателей этих дробей. Найдем наименьшее общее кратное чисел 24 и 30: $K(24, 30)=120$. Имеем $120:24=5$, поэтому, чтобы записать дробь $\frac{7}{24}$ со знаменателем 120, надо и числитель, и знаменатель умножить на 5; это число называется *дополнительным множителем*; итак,

$$\frac{7}{24}=\frac{7\cdot 5}{120}=\frac{35}{120}.$$

Далее, имеем $120:30=4$. Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{11}{30}$ на дополнительный множитель 4, получим

$$\frac{11}{30}=\frac{11\cdot 4}{120}=\frac{44}{120}.$$

Дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$ приведены к общему знаменателю.

Ясно, что наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей является наименьшим возможным общим знаменателем. В дальнейшем нам часто придется приводить дроби к наименьшему общему знаменателю (НОЗ).

Перейдем к операциям над обыкновенными дробями.

С л о ж е н и е определяется следующим образом:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Например, $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+2\cdot 5}{5\cdot 7}=\frac{31}{35}$.

Если, в частности, $b=d$, то имеем

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{ab+cb}{b\cdot b}=\frac{(a+c)\,b}{b\cdot b}=\frac{a+c}{b}.$$

Это значит, что для сложения дробей с одинаковым знаменателем достаточно сложить числители, а знаменатель оставить прежним. Например, $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$.

Если же складываются дроби с разными знаменателями, то обычно приводят дроби к НОЗ, а потом складываются числители. Например, $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=\frac{35}{120}+\frac{44}{120}=\frac{35+44}{120}=\frac{79}{120}$.

Вычитание обыкновенных дробей производится аналогично.

Умножение определяется так:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Например, $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$.

Деление определяется так:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Например, $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{21}{10}$.

Среди обыкновенных дробей различают правильные и неправильные дроби. Дробь $\frac{m}{n}$ называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя (заметим, что если числитель и знаменатель дроби равны, т. е. $m=n$, то $\frac{m}{n}=1$; в этом случае дробь $\frac{m}{n}$ не относят ни к правильным, ни к неправильным).

Рассмотрим неправильную дробь $\frac{m}{n}$ и предположим, что m не кратно n $\left(\text{если } m \text{ кратно } n, \text{ то дробь } \frac{m}{n} \text{ можно заменить натуральным числом}\right)$. Так как m больше n, то будем делить m на n. Пусть k — неполное частное, а r — остаток, тогда $m=kn+r$ и

$$\frac{m}{n}=\frac{kn+r}{n}=\frac{kn}{n}+\frac{r}{n}=k+\frac{r}{n}.$$

Так как остаток всегда меньше делителя, то $\frac{r}{n}$ — правильная дробь. Значит, нам удалось представить неправильную дробь $\frac{m}{n}$ в виде суммы натурального числа k и правильной дроби $\frac{r}{n}$, эта операция называется *выделением целой части*. Например, $\frac{28}{5}=\frac{25+3}{5}=\frac{25}{5}+\frac{3}{5}=5+\frac{3}{5}$. Принято сумму натурального числа и правильной дроби записывать без знака сложения, т. е. вместо $\left(5+\frac{3}{5}\right)$ пишут $5\frac{3}{5}$. Такая запись называется *смешанным числом*.

Итак, мы показали, что всякую неправильную дробь можно записать в виде смешанного числа. Верно и обратное, всякое смешанное число можно записать в виде неправильной дроби. Например,

$$2\frac{3}{7}=2+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7}{1\cdot 7}+\frac{3}{7}=\frac{14}{7}+\frac{3}{7}=\frac{14+3}{7}=\frac{17}{7},$$

или

$$2\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7+3}{7}=\frac{17}{7}.$$

Примеры 1. Сократить дробь $\frac{350}{378}$.

Решение. Первый способ. Найдем $Д$ (350, 378):

$$\begin{array}{r|l} 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$350=2\cdot 5^2\cdot 7 \qquad 378=2\cdot 3^3\cdot 7.$$

Значит, $Д\,(350,\ 378)=2\cdot 7=14$, тогда

$$\frac{350}{378}=\frac{25\cdot 14}{27\cdot 14}=\frac{25}{27}.$$

Второй способ. Имеем:

$$\frac{350}{378}=\frac{2\cdot 5^2\cdot 7}{2\cdot 3^3\cdot 7}=\frac{5^2}{3^3}=\frac{25}{27}.$$

2. Выполнить действия: а) $\frac{77}{34}\cdot\frac{17}{33}$, б) $\frac{12}{25}:\frac{18}{35}$.

Решение. Имеем:

$$\text{а)}\ \frac{77}{34}\cdot\frac{17}{33}=\frac{77\cdot 17}{34\cdot 33}=\frac{7\cdot 11\cdot 17}{2\cdot 17\cdot 11\cdot 3}=\frac{7}{2\cdot 3}=\frac{7}{6},$$

$$\text{б)}\ \frac{12}{25}:\frac{18}{35}=\frac{12\cdot 35}{25\cdot 18}=\frac{2\cdot 6\cdot 5\cdot 7}{5\cdot 5\cdot 3\cdot 6}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}=\frac{14}{15}.$$

3. Выполнить действия: $\frac{47}{48}+\frac{3}{72}-\frac{7}{90}$.

Решение. Приведем дроби к НОЗ, для чего найдем наименьшее общее кратное чисел 48, 72 и 90. Имеем $48=2^4\cdot 3$, $72=2^3\cdot 3^2$, $90=2\cdot 3^2\cdot 5$. Значит, $К\,(48,\ 72,\ 90)=2^4\cdot 3^2\cdot 5=720$. Найдем дополнительные множители для каждой из данных дробей. Так как $720:48=15$, то дополнительным множителем для первой дроби будет число 15. Аналогично находим, что дополнительным множителем для второй дроби будет 10 ($720:72=10$), а для третьей дроби — 8 ($720:90=8$). Теперь имеем:

$$\frac{47^{|15}}{48}+\frac{3^{|10}}{72}-\frac{7^{|8}}{90}=\frac{47\cdot 15}{720}+\frac{3\cdot 10}{720}-\frac{7\cdot 8}{720}=\frac{47\cdot 15+3\cdot 10-7\cdot 8}{720}=\frac{679}{720}.$$

Число 679 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. Значит, дробь $\frac{679}{720}$ — несократима.

4. Выполнить действия: а) $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{3}$; б) $1\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{7}$.

Решение. а) Первый способ. Обратим каждое из данных смешанных чисел в неправильную дробь, а затем выполним сложение:

$$2\frac{1}{7}=2+\frac{1}{7}=\frac{14}{7}+\frac{1}{7}=\frac{15}{7},\quad 3\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 3+2}{3}=\frac{11}{3}.$$

Для сложения дробей $\frac{15}{7}$ и $\frac{11}{3}$ приведем их к НОЗ. Имеем $K(7, 3)=21$. Дополнительным множителем для первой дроби будет число 3, для второй — 7. Тогда

$$\frac{15}{7}+\frac{11}{3}=\frac{15^{|3}}{7}+\frac{11^{|7}}{3}=\frac{15\cdot 3}{7\cdot 3}+\frac{11\cdot 7}{7\cdot 3}=\frac{45}{21}+\frac{77}{21}=\frac{45+77}{21}=\frac{122}{21}.$$

Превратим теперь неправильную дробь $\frac{122}{21}$ в смешанное число:

$$\frac{122}{21}=\frac{105+17}{21}=\frac{105}{21}+\frac{17}{21}=5\frac{17}{21}.$$

Второй способ. Имеем:

$$2\frac{1}{7}+3\frac{2}{3}=\left(2+\frac{1}{7}\right)+\left(3+\frac{2}{3}\right)=(2+3)+\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\right)=$$

$$=5+\left(\frac{1^{|3}}{7}+\frac{2^{|7}}{3}\right)=5+\frac{3+2\cdot 7}{21}=5+\frac{17}{21}=5\frac{17}{21}.$$

б) В случае умножения и деления смешанных чисел всегда переходят к неправильным дробям. Имеем: $1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$, $2\frac{1}{7}=\frac{15}{7}$, тогда

$$1\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{7}=\frac{7}{5}\cdot\frac{15}{7}=\frac{7\cdot 15}{5\cdot 7}=3.$$

5. Выполнить действия:

$$\left(\left(2-3:3\frac{1}{3}\right)+7:\left(3\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\cdot 13\right)\right)\cdot\left(1+\frac{4}{59}:4\right).$$

Решение. Перепишем даннсе числовое выражение, определив порядок действий:

(2) (1) (6) (5) (4) (3) (9) (8) (7)

$$\left(\left(2-3:3\frac{1}{3}\right)+7:\left(3\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\cdot 13\right)\right)\cdot\left(1+\frac{4}{59}:4\right).$$

Теперь будем проводить вычисления в указанном порядке:

1) $3:3\frac{1}{3}=3:\frac{10}{3}=\frac{3}{1}:\frac{10}{3}=\frac{3\cdot 3}{1\cdot 10}=\frac{9}{10}$,

2) $2-\frac{9}{10}$. Здесь удобно представить число 2 в виде $1\frac{10}{10}$, тогда

$$2-\frac{9}{10}=1\frac{10}{10}-\frac{9}{10}=1+\left(\frac{10}{10}-\frac{9}{10}\right)=1\frac{1}{10},$$

3) $\frac{1}{8}\cdot 13=\frac{1}{8}\cdot\frac{13}{1}=\frac{13}{8}=1\frac{5}{8}$,

4) $3\frac{1}{12}-1\frac{5}{8}$. Приведем дроби $\frac{1}{12}$ и $\frac{5}{8}$ к НОЗ: $\frac{1}{12}=\frac{2}{24}$, $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$.

Целесообразно представить смешанное число $3\frac{1}{12}$ в виде $2\frac{13}{12}$ $\left(\text{имеем } 3\frac{1}{12}=3+\frac{1}{12}=2+\left(1+\frac{1}{12}\right)=2+\frac{13}{12}=2\frac{13}{12}\right)$. Так как $\frac{13}{12}=\frac{26}{24}$, то

$$3\frac{1}{12}-1\frac{5}{8}=2\frac{26}{24}-1\frac{15}{24}=(2-1)+\left(\frac{26}{24}-\frac{15}{24}\right)=1\frac{11}{24};$$

5) $7:1\frac{11}{24}=\frac{7}{1}:\frac{35}{24}=\frac{7\cdot 24}{1\cdot 35}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$;

6) $1\frac{1}{10}+4\frac{4}{5}=5+\left(\frac{1^{|1}}{10}+\frac{4^{|2}}{5}\right)=5+\frac{9}{10}=5\frac{9}{10}$;

7) $\frac{4}{59}:4=\frac{4}{59}:\frac{4}{1}=\frac{4\cdot 1}{59\cdot 4}=\frac{1}{59}$;

8) $1+\frac{1}{59}=1\frac{1}{59}$;

9) $5\frac{9}{10}\cdot 1\frac{1}{59}=\frac{59}{10}\cdot\frac{60}{59}=\frac{59\cdot 60}{10\cdot 59}=6$.

2. Десятичные дроби. В виде десятичной дроби можно записать правильную дробь, знаменатель которой 10, 100, 1000 и т. д. Например, $\frac{3}{10}=0{,}3$; $\frac{17}{100}=0{,}17$; $\frac{847}{1000}=$ $=0{,}847$; $\frac{3}{100}=0{,}03$.

Таким же образом можно записывать и смешанные числа. Например, $3\frac{3}{10}=3{,}3$; $122\frac{17}{100}=122{,}17$; в этих случаях целую часть смешанного числа отделяют запятой от числителя дробной части.

В виде десятичной дроби можно представить не только обыкновенные дроби со знаменателем, кратным 10, но и некоторые другие обыкновенные дроби, например $\frac{3}{4}$,

$\frac{111}{40}$. В самом деле, имеем:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}75;\quad \frac{111}{40}=\frac{111\cdot 25}{40\cdot 25}=\frac{2775}{1000}=2{,}775.$$

Некоторые обыкновенные дроби нельзя представить в виде десятичных. Например, дробь $\frac{2}{7}$ нельзя записать в виде десятичной, так как ее нельзя привести ни к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т. д. Дробь $\frac{21}{28}$ тоже нельзя привести ни к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т. д. и тем не менее эту дробь можно представить в виде десятичной дроби: сократив дробь $\frac{21}{28}$, получим $\frac{3}{4}$, а $\frac{3}{4}=0{,}75$.

Общий вывод о представлении обыкновенной дроби в виде десятичной таков: если в разложении знаменателя дроби на простые множители содержатся только двойки и пятерки, то эту дробь можно записать в виде десятичной. Если же дробь несократима и в разложение ее знаменателя входят кроме двоек и пятерок другие простые множители, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной.

Рассмотрим десятичную дробь 7,234. Имеем

$$7{,}234=7\frac{234}{1000}=7+\frac{200+30+4}{1000}=$$
$$=7+\frac{200}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{4}{1000}=7+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}.$$

Значит, в дроби 7,234 содержится 7 единиц, 2 десятых, 3 сотых и 4 тысячных. Вообще в десятичной дроби после запятой может быть сколько угодно разрядов: десятые, сотые, тысячные, десятитысячные и т. д.

Дробь 7,234 можно записать так:

$$7{,}234=7\frac{234}{1000}=7\frac{2340}{10\,000}=7\frac{23\,400}{100\,000};$$

но

$$7\frac{2340}{10\,000}=7{,}2340,\ \text{а}\ 7\frac{23\,400}{1000\,000}=7{,}23400.$$

Значит, $7{,}234=7{,}2340=7{,}23400$. Таким образом, если к некоторой десятичной дроби приписать справа нуль или несколько нулей, то получится равная ей дробь. Если десятичная дробь оканчивается одним или несколькими нулями, то эти нули можно отбросить — получится равная ей дробь.

Сложение и вычитание. При сложении десятичных дробей надо записать их одну под другой так, чтобы одинаковые разряды были друг под другом, а запятая под запятой, и сложить числа так, как складывают натуральные числа. Сложим, например, дроби 12,7 и 3,442. Первая дробь содержит одну цифру после запятой, а вторая — три. Чтобы выполнить сложение, преобразуем первую дробь к виду, когда после запятой имеется 3 цифры: $12{,}7 = 12{,}700$, тогда

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 12{,}700 \\ 3{,}442 \end{array} \\ \hline 16{,}142 \end{array}$$

Аналогично выполняется вычитание десятичных дробей. Вычтем для примера из 13,1 десятичную дробь 0,37:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 13{,}10 \\ 0{,}37 \end{array} \\ \hline 12{,}73 \end{array}$$

Умножение. Пусть нужно перемножить десятичные дроби 1,12 и 2,3. Имеем:

$$1{,}12 \cdot 2{,}3 = 1\frac{12}{100} \cdot 2\frac{3}{10} = \frac{112}{100} \cdot \frac{23}{10} = \frac{112 \cdot 23}{100 \cdot 10} = \frac{2576}{1000} = 2{,}576.$$

Но можно было выполнить умножение и не переходя к обыкновенным дробям: достаточно выполнить умножение заданных чисел, не обращая внимания на запятые (как натуральные числа), а затем в результате отделить справа запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Например, умножим 2,7 на 1,3. Имеем $27 \cdot 13 = 351$. Запятой отделим справа две цифры, ибо у сомножителей после запятой по одной цифре. В итоге получаем $2{,}7 \cdot 1{,}3 = 3{,}51$.

Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут несколько нулей. Например,

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 2{,}12 \\ 0{,}13 \end{array} \\ \hline 636 \\ 212 \\ \hline 0{,}2756 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 3{,}43 \\ 0{,}02 \end{array} \\ \hline 0{,}0686 \end{array}$$

Рассмотрим еще умножение десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. Пусть нужно умножить дробь 12,733 на 10. Имеем $12\,733 \cdot 10 = 127\,330$. Отделив справа запятой три цифры, получим $12{,}733 \cdot 10 = 127{,}330$. Но $127{,}330 = 127{,}33$. Значит,

$$12{,}733 \cdot 10 = 127{,}33.$$

Таким образом, умножение десятичной дроби на 10 сводится к переносу запятой на одну цифру вправо.

Вообще, чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000, надо в этой дроби перенести запятую вправо на 1, 2, 3 цифры.

Деление. Пусть нужно разделить дробь 22,1 на 13. Деление выполняется так же, как деление натурального числа на натуральное. Запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части:

$$\begin{array}{r|l}
-22{,}1 & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{13} & 1{,}7 \\
-91 & \\
\underline{91} & \\
0 &
\end{array}$$

Если целая часть делимого меньше делителя, то в ответе получается ноль целых, например:

$$\begin{array}{r|l}
-0{,}221 & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{13} & 0{,}017 \\
-91 & \\
\underline{91} & \\
0 &
\end{array}$$

Рассмотрим теперь деление десятичной дроби на десятичную. Пусть нужно разделить 2,576 на 1,12. Умножим делимое и делитель на 100 — от этого частное не изменится. Тогда нужно будет разделить дробь 257,6 на натуральное число 112, т. е. задача сводится к уже рассмотренному случаю:

$$\begin{array}{r|l}
-257{,}6 & 112 \\ \cline{2-2}
\underline{224} & 2{,}3 \\
-336 & \\
\underline{336} & \\
0 &
\end{array}$$

Как в множестве натуральных чисел деление не всегда выполнимо, так оно не всегда выполнимо и в множестве десятичных дробей. В таких случаях переходят к обыкновенным дробям. Разделим для примера 2,8 на 0,09:

$$\begin{array}{r|l} \underline{-\begin{array}{r}280\\27\end{array}} & \underline{\;9\qquad\;} \\ \underline{-\begin{array}{r}10\\9\end{array}} & 31{,}11\ldots \\ \underline{-\begin{array}{r}10\\9\end{array}} & \\ 1\ldots & \end{array}$$

В результате получается так называемая *бесконечная десятичная дробь*. Выполнинм деление, перейдя к обыкновенным дробям:

$$2{,}8:0{,}09=\frac{28}{10}:\frac{9}{100}=\frac{28\cdot 100}{10\cdot 9}=\frac{280}{9}=31\frac{1}{9}.$$

Может оказаться так, что одни числа записаны в виде обыкновенных дробей, другие в виде смешанных чисел, третьи — в виде десятичных дробей. При выполнении действий над такими числами можно поступать по-разному: 1) обратить десятичные дроби в обыкновенные и применить правила действий над обыкновенными дробями; 2) обратить обыкновенные дроби и смешанные числа в десятичные дроби (если это возможно) и применить правила действий над десятичными дробями.

Пример. Найти значение выражения

$$\frac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25.$$

Решение. 1) $\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005$. Здесь удобнее записать $\frac{17}{40}$ в виде десятичной дроби: $\frac{17}{40}=\frac{17\cdot 25}{40\cdot 25}=\frac{425}{1000}=0{,}425$, тогда

$$\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005=0{,}425+0{,}600-0{,}005=1{,}020=1{,}02;$$

2) $1\frac{1}{5}:1{,}02$. В случае деления чаще переходят к обыкновенным дробям, где деление всегда выполнимо:

$$1\frac{1}{5}:1{,}02=\frac{6}{5}:\frac{102}{100}=\frac{6\cdot 100}{5\cdot 102}=\frac{20}{17};$$

3) $\frac{20}{17}\cdot 1{,}7=\frac{20}{17}\cdot\frac{17}{10}=2;$

4) $\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}=\frac{5^{|5}}{6}+\frac{4^{|10}}{3}-\frac{53^{|1}}{30}=\frac{25+40-53}{30}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5};$

5) $2:\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 5}{1\cdot 2}=5;$

6) $4{,}75+7\frac{1}{2}=4{,}75+7{,}50=12{,}25;$

7) $33:4\frac{5}{7}=\frac{33}{1}:\frac{33}{7}=\frac{33\cdot 7}{1\cdot 33}=7;$

8) $$\begin{array}{r|l} -12{,}25 & 7 \\ \underline{7} & \overline{1{,}75;} \\ -52 & \\ \underline{49} & \\ -35 & \\ \underline{35} & \\ 0 & \end{array}$$

9) $1{,}75:0{,}25=175:25=7;$

10) $5+7=12.$

3. Числовая прямая. Отрицательные числа. Модуль числа. Проведем прямую, отметим на ней точку O, которую примем за начало отсчета, выберем единичный отрезок OI и зададим направление (рис. 5). В этом случае говорят, что задана *числовая прямая.* Каждому из чисел, рассмотренных нами в предыдущих параграфах, соответствует одна точка числовой прямой. Пусть, например, дано число 3. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок три раза, получим точку A — эта точка и соответствует числу 3. Возьмем еще число $4\frac{1}{7}$. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок четыре раза, а затем еще $\frac{1}{7}$ часть отрезка, получим точку B — она и соответствует числу $4\frac{1}{7}$.

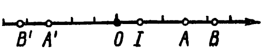


Рис. 5

Если точка M числовой прямой соответствует некоторому числу r, то это число называется *координатой* точки; в таком случае пишут $M(r)$. Так, для точек I, A, B (рис. 5) можно указать их координаты $I(1)$, $A(3)$, $B\left(4\frac{1}{7}\right)$. Координатой точки O считается число ноль.

Отложим теперь три раза единичный отрезок от точки O в направлении, противоположном заданному. Получим точку A', симметричную точке A относительно начала отсчета O. Координатой точки A является число 3, координату точки A' записывают так: $A'(-3)$ и читают «минус 3». Аналогично, координатой точки B', симметричной точке B на рис. 5, считается число $\left(-4\frac{1}{7}\right)$. Числа 3 и -3, $4\frac{1}{4}$ и $-4\frac{1}{7}$ называют *противоположными*. Числа, расположенные на числовой прямой в заданном направлении, называют положительными; так, 1, 3, $4\frac{1}{7}$ — *положительные* числа. Положительные числа пишут иногда со знаком «плюс»: $+1$, $+3$, $+4\frac{1}{7}$. Числа, расположенные на прямой, в направлении, противоположном заданному, называют *отрицательными*; так, -3, $-4\frac{1}{4}$ — отрицательные числа. *Число* 0 не считается ни положительным, ни отрицательным, оно отделяет на числовой прямой положительные числа от отрицательных.

Заданное направление на числовой прямой называют *положительным* (обычно оно идет вправо), а направление, противоположное заданному,— *отрицательным*.

Модулем числа называется расстояние от начала отсчета до точки, которая соответствует этому числу. Так, числу 3 соответствует точка A (рис. 5). Она удалена от точки O на расстояние, равное трем. Значит, модуль числа 3 (он обозначается $|3|$) равен 3, т. е. $|3|=3$. Аналогично $\left|4\frac{1}{7}\right|=4\frac{1}{7}$. Числу -3 соответствует точка A'. Она удалена от точки O на расстояние, равное трем. Значит, $|-3|=3$. Аналогично, $\left|-4\frac{1}{7}\right|=4\frac{1}{7}$.

Модуль любого положительного числа равен самому этому числу, модуль любого отрицательного числа равен числу, ему противоположному, модуль числа 0 *равен* 0.

Правила действий над положительными и отрицательными числами. *Сумма двух отрицательных чисел есть число отрицательное. Чтобы найти модуль суммы, надо сложить модули слагаемых.* Найдем для примера значение суммы $(-12)+(-7)$. Так как $|-12|=12$, $|-7|=7$, а $12+7=19$, то $(-12)+(-7)=-19$.

Сумма двух чисел с разными знаками есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем. Чтобы найти модуль суммы, надо из большего модуля вычесть меньший. Сложим для примера числа 12 и -7. Имеем: $|12|=12$, $|-7|=7$, $12-7=5$, значит, модуль суммы равен 5. Так как 12 больше 7, то сумма чисел 12 и -7 будет положительна: $12+(-7)=5$.

Найдем еще значение суммы $(-12)+7$. Здесь $|-12|=12$, $|7|=7$, $12-7=5$, значит, $(-12)+7=-5$.

Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например:

$$41-12=41+(-12)=29,\quad -41-12=(-41)+(-12)=-53,$$
$$41-(-12)=41+12=53,\quad -41-(-12)=(-41)+12=-29.$$

Произведение (частное) двух отрицательных чисел есть число положительное, произведение (частное) двух чисел с разными знаками есть число отрицательное. Чтобы найти модуль произведения (частного), надо перемножить (разделить) модули этих чисел.

Например:

$$(-8)\cdot(-6)=48,\quad (-8)\cdot 6=-48,\quad 8:(-6)=-\frac{4}{3}.$$

4. Множество рациональных чисел. В § 2 мы рассмотрели множество N всех натуральных чисел. Обозначим через N' множество всех чисел, противоположных натуральным:

$$N'=\{-1;\ -2;\ -3;\ \ldots\}.$$

Если объединить множества N, N' и одноэлементное множество $\{0\}$, то получим множество Z всех целых чисел:

$$Z=\{0\}\cup N\cup N'.$$

Целые числа — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) составляют вместе множество Q *рациональных чисел*.

Множество N натуральных чисел является подмножеством множества Z целых чисел, а множество Z, в свою очередь, является подмножеством множества Q всех рациональных чисел, т. е. $N\subset Z\subset Q$. Это можно проиллюстрировать с помощью так называемых «кругов Эйлера» (рис. 6): внутренний круг изображает множество натуральных чисел, средний — целых, а больший — множество рациональных чисел.

Заметим, что любое рациональное число может быть представлено в виде отношения m/n, где m — целое число, а n — натуральное число, причем одно и то же число можно записать таким образом многими способами. Например,

$$-2=-\frac{4}{2}=-\frac{6}{3}=-\frac{100}{50}; \quad 0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{300}{1000}.$$

Среди дробей, изображающих данное рациональное число, имеется одна и только одна несократимая дробь Для целых чисел — это дробь со знаменателем 1.

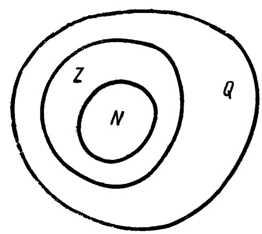


Рис. 6

На множестве рациональных чисел определены операции сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на ноль), причем для любых рациональных чисел a, b, c справедливы следующие равенства:

1) $a+b=b+a$,
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$,
3) $a+0=a$,
4) $a+(-a)=0$, где $(-a)$ — число, противоположное числу a,
5) $ab=ba$,
6) $a(bc)=(ab)c$,
7) $a(b+c)=ab+ac$,
8) $a\cdot 1=a$.

Для каждого рационального числа a, отличного от нуля, существует и только одно рациональное число x, такое, что $ax=1$. Это число x называется *обратным* числу a и обозначается $\frac{1}{a}$. Например, $\frac{1}{3}$ — число, обратное числу 3, а (-2) — число, обратное числу $-\frac{1}{2}$. Справедливо равенство:

9) $a\cdot\frac{1}{a}=1$, где $a\neq 0$.

Пример. Дано множество $A=\left\{0;\ \frac{1}{2};\ 2,\ 3;\ -4;\ -5;\ -\frac{8}{4}\right\}$. Найти $A\cap N$, $A\cap N'$, $A\cap Z$, $A\cap Q$.

Решение. В множестве A нет ни одного элемента, являющегося натуральным числом. Значит, пересечение множества A с множеством N всех натуральных чисел пусто: $A\cap N=\varnothing$.

В множестве A имеются три элемента, являющиеся целыми отрицательными числами: это —4, —5 и $-\frac{8}{4}$. Значит,

$$A \cap N' = \left\{-4;\ -5;\ -\frac{8}{4}\right\}.$$

Аналогично получаем $A \cap Z = \left\{0;\ -4;\ -5;\ -\frac{8}{4}\right\}$.

Найдем, наконец, множество $A \cap Q$. Множество A состоит из рациональных чисел ($A \subset Q$), значит, $A \cap Q = A$.

Вопросы для самопроверки

1. Какие обыкновенные дроби считаются равными?
2. В чем заключается основное свойство дроби?
3. Что называется сокращением дроби?
4. Какая дробь называется несократимой?
5. Как привести дроби к общему знаменателю?
6. Как определяется сложение и вычитание обыкновенных дробей?
7. Как определяется умножение и деление обыкновенных дробей?
8. Какая дробь называется правильной, а какая неправильной?
9. Как из неправильной дроби выделить целую часть?
10. В каком случае обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной?
11. Меняется ли десятичная дробь, если справа приписать один или несколько нулей?
12. Приведите пример сложения десятичных дробей.
13. Как умножить две десятичные дроби?
14. Как разделить десятичную дробь на десятичную? Почему в результате деления может получиться бесконечная десятичная дробь?
15. Как определяется числовая прямая?
16. Как определяется координата точки?
17. Какие числа называются противоположными?
18. Какие числа называются положительными, а какие отрицательными?
19. Что такое модуль числа?
20. Как определяется сумма двух отрицательных чисел?
21. Как определяется сумма положительного и отрицательного числа?
22. Объясните смысл следующих записей: $28-15=28+(-15)$, $32-(-8)=32+8$.
23 Как определяется произведение двух отрицательных чисел?
24. Как определяется произведение положительного и отрицательного числа?
25. Как определяется множество Z целых чисел?
26. Как определяется множество Q рациональных чисел?
27. Какие операции определены на множестве рациональных чисел?
28. Какое число называется обратным числу a?

Упражнения

1. Произведите указанные действия:

а) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{7}}$; б) $\dfrac{\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}\right)\cdot 3\frac{3}{5}}{14-15\frac{1}{2}:2\frac{1}{5}}$;

в) $\left(20\frac{8}{15}\cdot 7\frac{1}{2}-54\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{2}\right):\left(3\frac{13}{21}\cdot 8\frac{2}{5}-29\frac{2}{5}\right)-\frac{5}{6}\cdot 1\frac{1}{5}$;

г) $\frac{7}{9}\cdot 1\frac{2}{7}+43\frac{3}{4}:11\frac{2}{3}-3\frac{18}{25}+1\frac{1}{45}\left(37\frac{1}{2}:2\frac{1}{12}-1\frac{3}{23}\cdot 9\right)+\frac{47}{100}$.

2. Произведите указанные действия:

а) $1{,}35:2{,}7+6{,}02-5{,}9+0{,}4:2{,}5\cdot(4{,}2-1{,}075)$;

б) $\dfrac{(4{,}561+5{,}439)\cdot 0{,}1}{(7{,}01-5{,}01)\ 0{,}5}-\dfrac{(4{,}45-2{,}2):0{,}3}{(0{,}823+0{,}177)\cdot 30}$;

в) $52:\left(\dfrac{6:(0{,}4-0{,}2)}{2{,}5\,(0{,}8+1{,}2)}+\dfrac{(34{,}06-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right)-8$;

г) $(90{,}09:91+3{,}774:0{,}34):(232{,}31:17{,}87+186{,}85:5{,}05)$.

3. Произведите указанные действия:

а) $24{,}57:3{,}5+\left(3{,}35-2\frac{13}{15}+\frac{5}{8}\right)\cdot\left(225:12{,}5-3\frac{14}{19}\cdot 2\right)$;

б) $\left(17\frac{1}{18}\cdot 3{,}6-0{,}476:14\right):\left(0{,}009\cdot 8700-120:4\frac{2}{7}\right)+0{,}306:0{,}3$;

в) $\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):2\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}:1{,}25:6\frac{3}{4}\right):1\frac{53}{68}$;

г) $\left(2\frac{3}{20}-0{,}645:0{,}3\right)\cdot\left(4:6\frac{1}{4}-0{,}2+\frac{1}{7}\cdot 1{,}96\right)$.

Прежде чем переходить к упражнениям 4—9, напомним, что *процентом* называется дробь 1/100, т. е. $1\%=1/100$.

Чтобы найти p % от данного числа, нужно это число умножить на p и разделить на 100.

Если известно, что p % от некоторого неизвестного числа составляют m, то, чтобы найти неизвестное число, нужно m разделить на p и умножить на 100.

Чтобы найти процентное отношение двух чисел, нужно одно число разделить на другое и полученное частное умножить на 100.

4. Найдите. а) 4% от 75, б) 15% от 84 кг; в) 160% от 82 р. 50 к.; г) 20% от 1 ч. 35 мин.

5. Найдите число, если: а) 8% его равны 24; б) 140% его равны 182; в) 45% его равны 225; г) 3,5% его равны 21.

6. Найдите процентное отношение двух чисел: а) 3 и 5; б) 21,6 и 48, в) 374,4 и 480.

7. Найдите 20% от числа $\dfrac{\left(\frac{1}{5}+0{,}75\right):0{,}05}{\frac{19}{99}}$.

8. Найдите число, 1,5% которого равны

$$\frac{3\frac{1}{6}:0{,}38-7\frac{1}{3}}{0{,}25+1\frac{4}{5}}\cdot 1\frac{11}{30}.$$

9. Найдите процентное отношение чисел a и b, если

$$a=\frac{0{,}184}{16\frac{8}{21}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}},\quad b=6{,}12:3{,}6+3\frac{2}{3}.$$

10. Выполните действия:

а) $(+2{,}5)-(+4{,}9)+(-3{,}7)-(-5{,}8)$;

б) $\left(2-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{15}\right)+\left(-\frac{2}{9}+1-\frac{5}{3}\right)$;

в) $(-2)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$.

11. Какие элементы множества

$$X=\left\{-300;\ -28{,}7;\ -3;\ -\frac{4}{5};\ 0{,}2;\ 8;\ 7\frac{1}{2};\ 10\frac{1}{3}\right\}$$

являются числами: а) натуральными, б) целыми, в) дробными, г) рациональными, д) отрицательными, е) положительными?

12. Истинны ли следующие высказывания:

а) $(x\in N)\Rightarrow(x\in Z)$; б) $(x\in Z)\Rightarrow(x\in N)$;
в) $(x\in Z)\Rightarrow(x\in Q)$; г) $(x\in Q)\Rightarrow(x\in Z)$?

13. Найдите объединение и пересечение множеств: а) N и Z; б) Z и Q.

14. Пусть $a\in N$ и $b\in N$. Всегда ли верно, что:

а) $a+b\in N$, б) $a-b\in N$, в) $ab\in N$, г) $\frac{a}{b}\in N$?

15. Пусть $a\in Z$ и $b\in Z$. Всегда ли верно, что:

а) $a+b\in Z$, б) $a-b\in Z$, в) $ab\in Z$, г) $\frac{a}{b}\in Z$ $(b\neq 0)$?

16. Пусть $a\in Q$ и $b\in Q$. Всегда ли верно, что:

а) $a+b\in Q$, б) $a-b\in Q$, в) $ab\in Q$, г) $\frac{a}{b}\in Q$ $(b\neq 0)$?

§ 4. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Иррациональные числа. В предыдущем параграфе было введено понятие числовой прямой. Мы говорили о том, что каждому рациональному числу r соответствует единственная точка M числовой прямой: в таком случае мы писали $M(r)$ и называли число r координатой точки M. Естественно, возникает вопрос: верно ли обратное, т. е. любой ли точке числовой прямой соответствует единственное рациональное число — координата этой точки. Ответ на этот вопрос отрицателен: сейчас мы приведем пример точки числовой прямой, которая не имеет рациональной координаты.

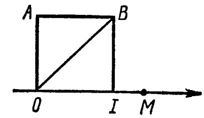


Рис. 7

Построим на единичном отрезке OI квадрат $OABI$ и отложим в положительном направлении отрезок OM, длина которого равна длине диагонали OB, т. е. $|OM|=|OB|$ (рис. 7). Утверждаем, что точка M не соответствует никакому рациональному числу.

Предположим противное, что существует рациональное число r, являющееся координатой точки M. Тогда $|OM|=r$. Но $|OM|=|OB|$, значит, $|OB|=r$. По теореме Пифагора $|OI|^2+|IB|^2=|OB|^2$; значит, $1^2+1^2=r^2$, или $r^2=2$. Так как r — положительное рациональное число, то r можно представить в виде несократимой дроби, $r=\frac{m}{n}$, где m, n — взаимно простые натуральные числа. Теперь имеем $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$, $\frac{m^2}{n^2}=2$, $m^2=2n^2$. Последнее равенство означает, что m^2 — четное число. Но тогда и m — четное число, т. е. $m=2k$. Подставим выражение $2k$ вместо m в равенство $m^2=2n^2$:

$$(2k)^2=2n^2,\ 4k^2=2n^2,\ 2k^2=n^2.$$

Последнее равенство означает, что n^2 — четное число, тогда и n — четное число.

Итак, m, n — четные числа, а это противоречит предположению, что m и n взаимно простые числа. Полученное противоречие означает, что *не существует рационального числа r, квадрат которого равен 2*, и что построенная точка M не имеет рациональной координаты.

И все-таки естественно считать, что и точка M имеет какую-то координату. Эта координата, как мы видим, не есть рациональное число, это число новой природы — *иррациональное*, оно обозначается $\sqrt{2}$. Аналогично можно доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 5,7, 10, соответствующие иррациональные числа обозначаются $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$. Противоположные числа также иррациональны — они обозначаются $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{10}$.

Следует подчеркнуть, что к иррациональным числам приводит не только задача отыскания числа, квадрат которого равен заданному положительному числу. Например, число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, нельзя представить в виде обыкновенной дроби — это иррациональное число.

2. Множество действительных чисел. Рациональные и иррациональные числа составляют *множество действительных чисел*. Каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой, каждой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число. Таким образом, введя в рассмотрение множество действительных чисел, мы можем каждой точке числовой прямой поставить в соответствие координату точки. Для краткости обычно уславливаются вместо фразы «точка числовой прямой, соответствующая действительному числу a» писать и говорить «точка a». Условимся также, употребляя термин «число a», иметь в виду «действительное число a». Как и для рациональных чисел, вводится понятие модуля действительного числа a — это расстояние точки a от начала отсчета.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой R. Так как каждое рациональное число является действительным, то множество Q всех рациональных чисел есть подмножество множества R, т. е. $Q \subset R$. Если обозначить буквой J множество всех иррациональных чисел, то можем записать, что $R = Q \cup J$.

Из двух чисел a и b меньшим считается то, которое расположено левее на числовой прямой, а бóльшим то, которое расположено правее. Если a меньше b, то пишут $a < b$; если a больше b, то пишут $a > b$. Согласно этому определению, любое положительное число больше нуля, любое отрицательное число меньше нуля, любое отрицательное число меньше любого положительного числа.

Основываясь на приведенном определении, можно получить следующее утверждение: $a > b$ *тогда и только тогда, когда разность $a - b$ — положительное число*; $a < b$ *тогда и только тогда, когда разность $a - b$ — отрицательное число.*

Для любых заданных чисел a и b верно одно и только одно из отношений: $a < b$, $a > b$, $a = b$.

Знаки $<$, $>$ называются знаками *строгих* неравенств. Иногда используются знаки $\geqslant$, $\leqslant$—знаки *нестрогих* неравенств; запись $a \leqslant b$ означает, что верно одно из двух: или число a меньше числа b, или число a равно числу b.

Пример. Сравнить числа $\frac{2}{3}$ и 0,67.

Решение. Составим разность $\frac{2}{3}-0{,}67$ и найдем значение этой разности:

$$\frac{2}{3}-0{,}67=\frac{2^{|100}}{3}-\frac{67^{|3}}{100}=\frac{200-201}{300}=-\frac{1}{300}.$$

Так как разность отрицательна, то $\frac{2}{3} < 0{,}67$.

Для действительных чисел справедливы девять основных законов алгебры, которые сформулированы выше для рациональных чисел.

3. Числовые промежутки. Возьмем два числа a и b (пусть $a < b$) и отметим их точками на числовой прямой

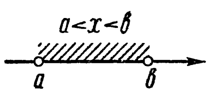


Рис. 8

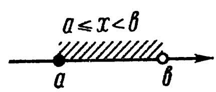


Рис. 9

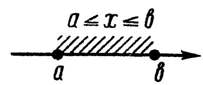


Рис. 10

(рис. 8). Возьмем произвольную точку x прямой, лежащую между a и b, тогда $x > a$ и $x < b$. Обычно вместо двух написанных неравенств используют запись в виде двойного неравенства: $a < x < b$. Рассмотрим множество

$$M_1=\{x \in R \mid a < x < b\},$$

т. е. множество всех таких действительных чисел x, каждое из которых удовлетворяет двойному неравенству $a < x < b$. Это множество обозначается $]a;\ b[$ и называется *интервалом*. На рис. 9 дано геометрическое изображение интервала $]a;\ b[$.

Рассмотрим теперь множество $M_2=\{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Оно отличается от множества M_1 тем, что числа a и b принадлежат множеству M_2, но не принадлежат множеству M_1. Множество M_2 обозначается так: $[a;\ b]$ и называется *отрезком*. На рис. 10 дано геометрическое изображение отрезка $[a;\ b]$.

Обратите внимание на то, что концы отрезка изображены закрашенными кружками, тогда как концы интервала — светлыми кружками (см. рис. 9 и 10).

Отрезок и интервал — это числовые промежутки. Кроме них, рассматривают такие множества:

1) $M_3 = \{x \in R \mid a \leqslant x < b\}$. Это множество обозначают $[a;\ b[$ и называют *полуинтервалом* (рис. 11).

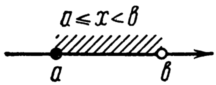


Рис. 11

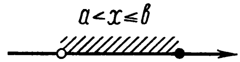


Рис. 12

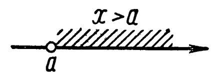


Рис. 13

На рис. 12 изображен полуинтервал вида $]a;\ b]$, соответствующий двойному неравенству $a < x \leqslant b$;

2) $M_4 = \{x \in R \mid x > a\}$. Это множество обозначают $]a; +\infty[$ — интервал от a до плюс бесконечности, или *открытый луч*; геометрическое изображение дано на рис. 13.

Множество вида $M_5 = \{x \in R \mid x \leqslant b\}$ обозначают $]-\infty;\ b]$ — полуинтервал от минус бесконечности до b, или *луч*; геометрическое изображение дано на рис. 14.

Примеры. 1. Даны множества $A =]-1;\ 8[$, $B = \left[\frac{2}{3};\ 9\right]$.

Найти. $A \cup B$, $A \cap B$.

Решение. Изобразим данные числовые промежутки на числовой прямой, используя для множества A верхнюю штриховку, а для

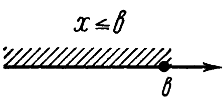


Рис. 14

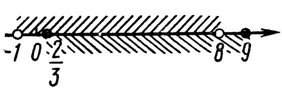


Рис. 15

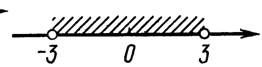


Рис. 16

множества B нижнюю штриховку (рис. 15). Пересечением множеств A и B будет промежуток от $\frac{2}{3}$ до 8 — на нем обе штриховки совпали,

$A \cap B = \left[\frac{2}{3};\ 8\right[$.

Объединением множеств A и B будет промежуток от -1 до 9 — каждая точка этого промежутка принадлежит, по крайней мере, одному из данных множеств: $A \cup B =]-1;\ 9]$.

2. Представить в виде числового промежутка или в виде объединения двух числовых промежутков множество M, состоящее из таких действительных чисел x, что

а) $|x| < 3$; б) $|x| \leqslant 1$;

в) $|x| > 2{,}7$; г) $|x| \geqslant 4$.

Решение. а) Известно, что $|x|$ — это расстояние точки x от начала отсчета. Значит, множество M состоит из всех таких чисел x, которые удалены от начала отсчета на расстояние, меньшее 3. Отметим на числовой прямой точки, которые удалены от начала отсчета на расстояние, равное 3; это точки —3 и 3. Тогда множество M — это интервал от —3 до 3 (рис. 16);

$$M = \{x \in R \mid -3 < x < 3\} =]-3;\ 3[.$$

б) Имеем (рис. 17):

$$M = \{x \in R \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} = [-1;\ 1].$$

в) Множество M состоит из всех таких чисел x, которые удалены от начала отсчета на расстояние, большее 2,7. Отметим на числовой прямой точки, которые удалены от начала отсчета на расстояние,

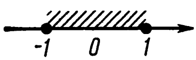


Рис. 17

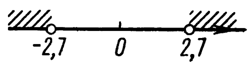


Рис. 18

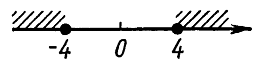


Рис. 19

равное 2,7: это точки —2,7 и 2,7. Тогда множество M состоит из двух промежутков: от $-\infty$ до —2,7 и от 2,7 до $+\infty$ (рис. 18);

$$M =]-\infty;\ -2{,}7\,[\,\cup\,]\,2{,}7;\ +\infty[.$$

г) Имеем (рис. 19):

$$M =]-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty[.$$

Вопросы для самопроверки

1. Почему для измерений длин отрезков недостаточно одних рациональных чисел?
2. Приведите примеры иррациональных чисел.
3. Как вводится отношение порядка $a < b$ во множестве действительных чисел?
4. Как определяется модуль действительного числа?
5. Укажите виды числовых промежутков.

Упражнения

1. Сравните числа a и b, если:

а) $a = \frac{11}{14}$, $b = \frac{13}{14}$; б) $a = \frac{7}{15}$, $b = \frac{2}{5}$; в) $a = \frac{44}{71}$, $b = \frac{41}{69}$;

г) $a = 2\frac{7}{12}$, $b = 2\frac{23}{42}$; д) $a = 3{,}637$, $b = 3{,}635$; е) $= 1{,}41$, $b = 1\frac{3}{7}$;

ж) $a = -8$, $b = -7{,}9$; з) $a = -\frac{4}{7}$, $b = -\frac{13}{22}$; и) $a = -1\frac{101}{102}$, $b = 0{,}0001$.

2. Докажите, что всякая правильная обыкновенная дробь меньше единицы, а всякая неправильная обыкновенная дробь больше единицы.

3. Расположите в порядке возрастания числа

$$-2\frac{1}{8};\ -3;\ \frac{2}{7};\ 0;\ -2\frac{1}{7};\ \frac{3}{14}.$$

4. Изобразите на числовой прямой числовой промежуток, состоящий из всех таких действительных чисел x, что: а) $-1 < x < 2$; б) $0 \leqslant x \leqslant 5$; в) $-2 \leqslant x < 0$; г) $-\frac{2}{5} < x \leqslant \frac{2}{5}$; д) $x > 4{,}5$; е) $x \geqslant -2{,}7$; ж) $x < 0$; з) $x \leqslant -5$; и) $|x| < 8{,}3$; к) $|x| > 1{,}5$; л) $|x| \leqslant 2\frac{1}{3}$; м) $|x| \geqslant \frac{1}{5}$.

5. Изобразите на числовой прямой числовой промежуток M и охарактеризуйте множество чисел промежутка с помощью знаков неравенств: а) $M =]2;\ 8[$; б) $M = [-1;\ +\infty[$; в) $M =]0;\ +\infty[$; г) $M = [-10;\ 0]$; д) $M =]-\infty;\ -4]$; е) $M =]-\infty;\ 2{,}3[$; ж) $M =]-2;\ 2[$; з) $M = [-4;\ 4]$.

6. Найдите объединение и пересечение множеств A и B: а) $A = [1;\ 5]$ и $B = [4;\ 8]$; б) $A =]0;\ 3{,}7]$ и $B = \left[3\frac{2}{3},\ 5{,}5\right[$; в) $A = \left[-8;\ 2\frac{1}{6}\right[$ и $B =]-9;\ 2{,}2[$; г) $A = [0;\ +\infty[$ и $B =]-4;\ +\infty[$; д) $A =]-\infty;\ 1]$ и $B = [1;\ +\infty[$; е) $A = [-4;\ 1[$ и $B =]1;\ 4]$.

7. Для данного множества A найдите $A \cap N$; $A \cap Z$, где N — множество всех натуральных чисел, Z — множество целых чисел. Укажите, если возможно, наименьший и наибольший элемент множеств $A \cap N$ и $A \cap Z$: а) $A =]-3{,}1;\ 8{,}3]$; б) $A = [-3;\ 9[$; в) $A = [-2;\ +\infty[$; г) $A =]-\infty;\ 1]$; д) $A = [-7;\ 0{,}3]$; е) $A = \left]1;\ 1\frac{2}{7}\right]$.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕЛЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Степень с натуральным показателем. *Если a — действительное число, а n — натуральное число, отличное от единицы, то произведение n сомножителей, каждый из которых равен a, называется n-й степенью числа a и обозначается a^n; если $n=1$, то полагают $a^1=a$. Число a называется основанием степени, число n — показателем степени.*

Например, $2^3=2\cdot2\cdot2=8$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$.

Свойства степени с натуральным показателем

1^0. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

Например, $2^2\cdot2^3=2^{2+3}=2^5$;

2^0. $a^m:a^n=a^{m-n}$, если $m>n$.

Например, $3^4:3=3^{4-1}=3^3$;

3^0. $(a^m)^n=a^{mn}$.

Например, $(5^2)^3=5^{2\cdot3}=5^6$;

4^0. $(ab)^n=a^nb^n$.

Например, $6^3=(2\cdot3)^3=2^3\cdot3^3$;

5^0. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Например, $\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{3^4}{5^4}=\frac{81}{625}$.

Докажем эти свойства.

1^0. $a^m\cdot a^n=\underbrace{(a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a)}_{m\text{ раз}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a)}_{n\text{ раз}}=$

$$=\underbrace{a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a}_{m+n\text{ раз}}=a^{m+n};$$

2^0. из свойства 1^0 вытекает, что $a^n\cdot a^{m-n}=a^m$, значит, $a^m:a^n=a^{m-n}$;

$$3^0.\ (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ \dots \ \cdot a^m}_{n} =$$

$$= \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a)}_{m} \underbrace{(a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a)}_{m} \cdot \ \dots \ \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a)}_{m}}^{n \text{ скобок}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{mn} = a^{mn};$$

$$4^0.\ (ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ \dots \ \cdot (ab)}_{n} =$$

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a)}_{n} \underbrace{(b \cdot b \cdot \ \dots \ \cdot b)}_{n} = a^n b^n;$$

$$5^0.\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ \dots \ \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}{b \cdot b \cdot \ \dots \ \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

2. Операции над одночленами. *Одночленом называется такое выражение, которое содержит числа, переменные, степени чисел и переменных и их произведения.*

Например, одночленами являются выражения $2a \cdot 3{,}5a^2$; $7{,}5a^2 \cdot b \cdot 0{,}4ba$; $x^2 \cdot 2y \cdot 3\,(-z) \cdot (-11)$. Приведем также примеры выражений, не являющихся одночленами: $a + b$, $\frac{2ab}{x}$.

Основные законы алгебры и свойства степени с натуральным показателем позволяют нам привести одночлен к стандартному виду, т. е. к такому виду, когда одночлен имеет единственный числовой множитель, стоящий на первом месте (коэффициент), а каждое произведение одинаковых переменных в нем представлено степенью. Приведем для примера к стандартному виду данные выше одночлены. Рассмотрим первый одночлен. Воспользовавшись переместительным и сочетательным законами умножения, получим $2a \cdot 3{,}5a^2 = (2 \cdot 3{,}5)\,(a \cdot a^2)$. Так как $aa^2 = a^1 \cdot a^2 = a^{1+2} = a^3$, то в итоге получаем $2a \cdot 3{,}5a^2 = 7a^3$. Аналогично, $7{,}5a^2b \cdot 0{,}4ba = 3a^3b^2$; $x^2 \cdot 2y \cdot 3\,(-z) \times (-11) = 66x^2yz$.

Пусть даны два одночлена. Если поставить между ними знак умножения, то получится одночлен, называемый произведением исходных одночленов. При возведении одночлена в натуральную степень также получается одночлен. Результат обычно приводят к стандартному виду.

Примеры. 1. Выполнить умножение одночленов $22abc^2d^3$ и $\frac{1}{2}a^2bcx^3$.

Решение. Имеем: $(22abc^2d^3)\cdot\left(\frac{1}{2}a^2bcx^3\right)=\left(22\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot(a\cdot a^2)\times$ $\times(b\cdot b)\cdot(c^2\cdot c)\cdot d^3x^3=11a^3b^2c^3d^3x^3$.

2. Возвести одночлен $-2a^2b^3c$ в четвертую степень.

Решение. $(-2a^2b^3c)^4=(-2)^4(a^2)^4(b^3)^4c^4=16a^8b^{12}c^4$.

Одночлены, приведенные к стандартному виду, называются *подобными*, если они отличаются только коэффициентами либо совсем не отличаются.

Подобные одночлены можно складывать и вычитать, в результате чего снова получается одночлен, подобный исходным. Сложение и вычитание подобных одночленов, называется *приведением подобных членов*.

Пример. Выполнить сложение одночленов $15a^2b$ и $-7a^2b$.

Решение. Воспользовавшись распределительным законом, получим:

$$15a^2b+(-7a^2b)=15a^2b+(-7)a^2b=a^2b\,(15+(-7))=8a^2b.$$

3. Понятие тождественного преобразования выражения. Сравним значения выражений x^2-2x и $4x-5$ при различных значениях x. При $x=2$ получим $x^2-2x=0$ и $4x-5=3$. Числа 0 и 3 называются *соответственными значениями* выражений x^2-2x и $4x-5$ при $x=2$.

Найдем соответственные значения выражений x^2-2x и $4x-5$ при $x=0$ и при $x=1$. Результат запишем в виде таблицы

x	x^2-2x	$4x-5$
0	0	-5
1	-1	-1

Как видно из таблицы, соответственные значения могут иногда совпадать.

Два выражения, зависящие от одних и тех же переменных, называются *тождественно равными*, если все их соответственные значения равны. Так, тождественно равными будут выражения x^5 и $x^2\cdot x^3$, $a+b+c$ и $c+a+b$, $(2ab)^2$ и $4a^2b^2$.

Равенство, в котором левая и правая части — тождественно равные выражения, называется *тождеством*. Тождествами будут, во-первых, все равенства, выражающие основные законы алгебры:

$$a+0=a, \qquad a\cdot(bc)=(ab)\cdot c,$$
$$a+b=b+a, \qquad (a+b)\cdot c=ac+bc,$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c, \qquad a\cdot 1=a.$$
$$ab=ba,$$

Тождествами являются и равенства $x^5=x^2\cdot x^3$; $(2ab)^2=$ $=4a^2b^2$.

Верные числовые равенства также называются тождествами.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется *тождественным преобразованием выражения*. Мы уже имели некоторые примеры тождественных преобразований. Так, приведение одночлена к стандартному виду есть тождественное преобразование, выполняемое на основании определения степени или свойств степени с натуральным показателем и переместительного и сочетательного законов умножения. Тождественными преобразованиями являются также умножение одночленов и их возведение в натуральную степень, приведение подобных членов. Другие примеры тождественных преобразований выражений будут рассмотрены ниже.

4. Многочлены. Приведение многочлена к стандартному виду. *Многочленом называется сумма одночленов.* Если все члены многочлена записать в стандартном виде и выполнить приведение подобных членов, то получится многочлен стандартного вида. Например, выражение $3a\cdot 5b+3ab+2a\cdot(-4b)+b\cdot b$ является многочленом. Для приведения его к стандартному виду нужно сначала привести к стандартному виду члены многочлена: $15ab+$ $+3ab-8ab+b^2$, а затем привести подобные члены; тогда получим $10ab+b^2$.

Одночлены, многочлены, а также их сумма, разность, произведение и степень составляют *множество целых алгебраических выражений*.

Основная задача тождественных преобразований целых выражений состоит в приведении их к стандартному виду многочлена (или одночлена). Такое преобразование всегда выполнимо.

Примеры. Упростить (привести к стандартному виду) многочлены:

1. $(3a+5b-c)+(2a-7b-3c)$.

Решение. Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Воспользовавшись этим правилом раскрытия скобок, получим

$$(3a+5b-c)+(2a-7b-3c)=3a+5b-c+2a-7b-3c$$

и далее

$$(3a+2a)+(5b-7b)+(-c-3c)=5a-2b-4c.$$

2. $(5a^2b+ab^2)-(2{,}5a^2b-ab^2)$.

Решение. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Воспользовавшись этим правилом раскрытия скобок, получим

$$(5a^2b+ab^2)-(2{,}5a^2b-ab^2)=5a^2b+ab^2-2{,}5a^2b+ab^2=$$
$$=(5a^2b-2{,}5a^2b)+(ab^2+ab^2)=2{,}5a^2b+2ab^2.$$

3. $2x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2-4\right)$.

Решение. Воспользовавшись распределительным законом ($a\times\times(b+c)=ab+ac$), получим

$$2x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2-4\right)=2x^2\cdot x+2x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+2x^2\cdot(-4)=$$
$$=2x^3-x^4-8x^2.$$

Таким образом, произведение одночлена на многочлен равно сумме произведений этого одночлена на каждый член многочлена.

4. $(3a+2b)(2a-3b)$.

Решение. Обозначим выражение $2a-3b$ буквой x, тогда выражение $(3a+2b)(2a-3b)$ примет вид $(3a+2b)x$. Раскрыв скобки, получим тождество

$$(3a+2b)x=3ax+2bx$$

или (так как $x=2a-3b$)

$$(3a+2b)(2a-3b)=3a(2a-3b)+2b(2a-3b).$$

Снова раскрывая скобки, получим окончательно:

$$(3a+2b)(2a-3b)=6a^2-9ab+4ab-6b^2=6a^2-5ab-6b^2.$$

Таким образом, *произведение двух многочленов равно сумме произведений каждого члена одного многочлена на каждый член другого.*

5. Разложение многочлена на множители. Представление многочлена в виде произведения ряда многочленов, среди которых могут быть и одночлены, называется *разложением многочлена на множители.* Рассмотрим некоторые наиболее употребительные методы разложения многочленов на множители.

Вынесение общего множителя за скобки. Рассмотрим пример. В многочлене $12a^2b-18ab^2-30ab^3$ члены имеют общий множитель $6ab$. Чтобы разложить этот многочлен на множители, представим каждый член многочлена в виде произведения двух множителей, один из которых $6ab$, а затем применим распределительный закон:

$$12a^2b-18ab^2-30ab^3=6ab\cdot 2a-6ab\cdot 3b-6ab\cdot 5b^2=$$
$$=6ab(2a-3b-5b^2).$$

В рассмотренном примере мы вынесли за скобки $6ab$, но можно было бы выполнить разложение на множители, вынося за скобки $2a$, $-3b$, $6a$ и т. д. Например, если вынести за скобки $-6b$, получим:

$$12a^2b-18ab^2-30ab^3=-6b(-2a^2+3ab+5ab^2).$$

Обычно, если все коэффициенты многочлена целые числа, выносят за скобки множитель с коэффициентом, равным наибольшему общему делителю модуля всех коэффициентов многочлена. Одинаковые переменные, входящие во все члены, выносят с наименьшим показателем, который они имеют в данном многочлене.

Примеры. 1. $35x^6-42x^{12}=7x^6(5-6x^6)$.

2. $n^3+n^9=n^3(1+n^6)$.

3. $(2a+3b)(a-b)+(2a-3b)(b-a)=(2a+3b)(a-b)-(2a-3b)\times$ $\times(a-b)=(a-b)((2a+3b)-(2a-3b))=(a-b)(2a+3b-2a+3b)=$ $=(a-b)\cdot 6b=6b\cdot(a-b)$.

Метод группировки. Пусть дан многочлен $5xy^3+$ $+10y^2-3axy-6a$.

Представим его в виде суммы двух многочленов:

$$5xy^3+10y^2-3axy-6a=(5xy^3+10y^2)-(3axy+6a).$$

Вынося в первом двучлене за скобки $5y^2$, а во втором $3a$, получим

$$(5xy^3+10y^2)-(3axy+6a)=5y^2(xy+2)-3a(xy+2).$$

В результате проделанной группировки нам удалось представить многочлен в виде суммы двух слагаемых, имеющих общий множитель $(xy+2)$. Вынося этот общий множитель за скобки, получаем

$$5xy^3+10y^2-3axy-6a=(xy+2)(5y^2-3a).$$

Примеры.

1. $2ax+ay-az-2bx-by+bz=(2ax-2bx)+(ay-by)-(az-$ $-bz)=2x(a-b)+y(a-b)-z(a-b)=(a-b)(2x+y-z)$.

2. $4ax+3xy^2-3ay^2-4x^2=(4ax-4x^2)+(3xy^2-3ay^2)=4x(a-x)+$ $+3y^2(x-a)=4x(a-x)-3y^2(a-x)=(a-x)(4x-3y^2)$.

Применение тождеств сокращенного умножения. В некоторых случаях приведение многочлена к стандартному виду, а также разложение на множители производится с помощью тождеств сокращенного умножения.

А. Преобразуем выражение $(a-b)(a+b)$ в многочлен стандартного вида. Имеем

$$(a-b)(a+b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

Таким образом, мы получили следующее тождество:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2, \qquad (1)$$

т. е. *произведение суммы и разности двух выражений равно разности квадратов этих выражений.*

Примеры. Упростить, т. е. преобразовать выражение в многочлен стандартного вида:

1. $(3x^2-4y^3)(3x^2+4y^3)=(3x^2)^2-(4y^3)^2=9x^4-16y^6.$
2. $(2a+4)(a-2)=2(a+2)(a-2)=2(a^2-4)=2a^2-8.$
3. $(b+1)(b-1)(b^2+1)=(b^2-1)(b^2+1)=(b^2)^2-1=b^4-1.$

Поменяем в тождестве (1) левую и правую части местами:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b). \qquad (1a)$$

В таком виде это тождество удобно применять для разложения на множители разности квадратов двух выражений.

Примеры. Разложить на множители:

1. $25a^2b^4-36c^6=(5ab^2)^2-(6c^3)^2=(5ab^2-6c^3)(5ab^2+6c^3).$
2. $1{,}44x^{12}-0{,}01=(1{,}2x^6)^2-(0{,}1)^2=(1{,}2x^6-0{,}1)(1{,}2x^6+0{,}1).$
3. $4x^3-4x^2y-x+y=4x^2(x-y)-(x-y)=(x-y)(4x^2-1)=$ $=(x-y)(2x-1)(2x+1).$

Б. Преобразуем теперь в многочлен стандартного вида выражение $(a+b)^2$. Имеем

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Таким образом, получено тождество

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad (2)$$

т. е. *квадрат двучлена равен сумме трех выражений: квадрата первого члена, удвоенного произведения первого члена на второй и квадрата второго члена.*

Поменяв в тождестве (2) b на $-b$, получим

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Примеры. 1. Упростить выражения:
а) $(3a+2y^2)^2.$

Решение. Конечно, это выражение можно преобразовать к стандартному виду многочлена, представив его в виде $(3a+2y^2)\times$ $\times(3a+2y^2)$ и раскрыв скобки по правилу умножения многочленов. Однако использование тождества (2) позволяет выполнить преобразования быстрее:

$$(3a+2y^2)^2=(3a)^2+2\cdot(3a)\cdot(2y^2)+(2y^2)^2=9a^2+12ay^2+4y^4;$$

б) $(3a-2b)^2(3a+2b)^2$.

Решение. Можно было бы возвести в квадрат каждое слагаемое, а затем результаты перемножить. Однако рациональнее сделать так:

$$(3a-2b)^2(3a+2b)^2=((3a-2b)(3a+2b))^2=(9a^2-4b^2)^2=$$
$$=(9a^2)^2-2\cdot 9a^2\cdot 4b^2+(4b^2)^2=81a^4-72a^2b^2+16b^4.$$

2. Доказать тождества:

а) $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$.

Решение. Выполним преобразования левой части тождества:

$$(x+y)^2+(x-y)^2=(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)=$$
$$=2x^2+2y^2=2(x^2+y^2).$$

Так как в результате мы получили правую часть тождества, то тождество доказано;

б) $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$.

Решение.

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^4-2a^2b^2+b^4)+4a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2.$$

Поменяем в тождестве (2) правую и левую части местами:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2. \qquad (2a)$$

В таком виде тождество удобно применять для разложения на множители.

Примеры. Разложить на множители:

1. $2x^2+8x+8=2(x^2+4x+4)=2(x+2)^2$.
2. $4c^2-28cd+49d^2=(2c)^2-2\cdot(2c)\cdot(7d)+(7d)^2=(2c-7d)^2$.
3. $x^2+4x+3=(x^2+4x+4)-1=(x+2)^2-1=$
$=(x+2-1)(x+2+1)=(x+1)(x+3)$.

Заметим, что заданное выражение можно разложить на множители и другим способом:

$$x^2+4x+3=(x^2+x)+(3x+3)=x(x+1)+3(x+1)=(x+1)(x+3).$$

Замечание. Мы показали, что $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$. В таком случае говорят, что многочлен x^2+4x+3 делится на $x+1$ (тогда в частном получается $x+3$) или на $x+3$ (в частном получается $x+1$).

В. Рассмотрим теперь выражение $(a+b)^3$ и преобразуем его в многочлен стандартного вида:

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b)=$$
$$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Таким образом,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \tag{3}$$

т. е. *куб двучлена равен сумме четырех выражений: куба первого члена, утроенного произведения квадрата первого члена на второй, утроенного произведения первого члена на квадрат второго и куба второго члена.*

Поменяв в равенстве (3) b на $-b$, получим

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

П р и м е р ы. Преобразовать выражения в многочлен стандартного вида:

1. $(x+5)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 5 + 3 \cdot x \cdot 5^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125.$
2. $(3b-2)^2 = (3b)^3 - 3 \cdot (3b)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (3b) \cdot 2^2 - 2^3 = 27b^3 - 54b^2 + 36b - 8.$
3. $(x-2)^3 - x(x-3)^2 = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - x(x^2 - 6x + 9) =$
$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 6x^2 - 9x = 3x - 8.$

Г. Преобразуем теперь в многочлен стандартного вида выражение $(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Имеем

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Таким образом, получено тождество

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3. \tag{4}$$

Поменяв в тождестве (4) левую и правую части, получим формулу для разложения на множители суммы кубов:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2). \tag{4a}$$

Поменяв в тождестве ($4a$) b на $-b$, получим

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2). \tag{4б}$$

П р и м е р ы. **1.** Упростить выражение

$$(2p-3)(4p^2+6p+9) + (p+3)(p^2-3p+9).$$

Р е ш е н и е.

$$(2p-3)(4p^2+6p+9) + (p+3)(p^2-3p+9) =$$
$$= (8p^3-27) + (p^3+27) = 9p^3.$$

2. Разложить на множители $a^3 - b^3 + 5a^2c - 5b^2c$.

Р е ш е н и е.

$$a^3 - b^3 + 5a^2c - 5b^2c = (a-b)(a^2+ab+b^2) + 5c(a-b)(a+b) =$$
$$= (a-b)(a^2+ab+b^2+5ca+5cb).$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется n-й степенью числа a?
2. Какими свойствами обладает степень с натуральным показателем?
3. Докажите, что $(ab)^n=a^nb^n$.
4. Что называется одночленом?
5. Выделите одночлены среди выражений:

$$2+x,\ \frac{2}{x},\quad 5a^3b,\quad x^33y^2\cdot 8(-z),\quad \frac{x^3+1}{y}.$$

6. Что называется стандартным видом одночлена?
7. Какие одночлены, приведенные к стандартному виду, называются подобными?
8. Найдите соответственные значения выражений x^2-6x+5 и x^2-1 при $x=1$ и при $x=2$. При каком значении x соответственные значения этих выражений совпадают?
9. Какие выражения, зависящие от одних и тех же переменных, называются тождественно равными?
10. Что такое тождество?
11. Приведите примеры тождеств, выражающие основные законы алгебры.
12. Что называется многочленом? В каком случае многочлен называется многочленом стандартного вида?
13. Что такое целое алгебраическое выражение?
14. В чем заключается основная задача тождественных преобразований целых алгебраических выражений?
15. Как находится произведение одночлена на многочлен и многочлена на многочлен?
16. Что значит разложить многочлен на множители?
17. Перечислите основные приемы разложения многочлена на множители.
18. Приведите примеры тождеств сокращенного умножения.

Упражнения

1. Преобразуйте выражения в многочлен или одночлен стандартного вида: а) $8ab+(-9ab)+(-7ab)$; б) $12m^2n+\frac{1}{4}m^2n-3{,}75m^2n-\frac{17}{20}m^2n$; в) $(-10a^2b^3c^4)\cdot(-1{,}3a^3bc^3)$; г) $\left(\frac{4}{5}x^3\right)\cdot\left(\frac{7}{8}y^4\right)\cdot(4xy)$; д) $\left(2\frac{1}{4}a^{n+1}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}a^{n-1}\right)$; е) $(-2xy^2)^3$; ж) $(2xy)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)^4$; з) $\left(-\frac{1}{3}a^2b\right)^3(3ab^2)^3(-2a^3b)^4$; и) $(3x^2-2xy+y^2)\cdot 4xy$; к) $(a+2b)\times\times(2a+b)$; л) $(a^2+a+1)(a+2)$.

2. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения: а) $(a+5)^2$; б) $(3a-7)^2$; в) $(a^n+b^n)^2$; г) $(1-x)^3$; д) $(3+y)^3$; е) $\left(3a-\frac{1}{3}b\right)^3$; ж) $(4-a)(4+a)$; з) $(8+a^2)(a^2-8)$; и) $(a^nb^k-a^kb^n)\times\times(a^nb^k+a^kb^n)$; к) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$; л) $(a+3)(a^2-3a+9)$; м) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

3. Вычислите, используя тождества сокращенного умножения:
а) $48\cdot52$; б) $93\cdot107$; в) 53^2-43^2; г) $22{,}4^2-22{,}3^2$; д) $\left(6\frac{1}{3}\right)^2-\left(5\frac{1}{3}\right)^2$;
е) $(30+2)^2$; ж) 51^2; з) 99^2; и) $17^2+2\cdot17\cdot23^2$; к) $85^2-2\cdot85\cdot15+15^2$.

4. Докажите, что 11^3+12^3 делится на 23.

5. Докажите, что 94^3-9^3 делится на 17.

6. Даны два многочлена $P(x)=x^3-1$ и $Q(x)=x^2+x-1$.
Составьте: а) $P(x)+Q(x)$; б) $2P(x)-3Q(x)$; в) $(P(x))^3$; г) $(Q(x))^2$.

7. Даны два многочлена $P(x, y)=x^2+y^2+1$ и $Q(x, y)=x^2-y^2-x-y$.
Составьте: $4P(x, y)-2Q(x, y)$; б) $P(x, y)\cdot Q(x, y)$, в) $(P(x, y))^2$.

8. Докажите тождества:
а) $(x-2)(x+2)(x^2+4)=x^4-16$;
б) $(x^2+1)^3-3(x^2-x+1)^2+6x(x-1)+11=(x^3+3)^2$;
в) $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$;
г) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$.

9. Разложите на множители следующие многочлены: а) $3x(a-2)-a+2$; б) $ac+7bc-3a-21b$; в) $63m^4n^3+27m^3n^4-45m^5n^7$; г) $5b^2c^3-2bc^2k-5bck+2k$; д) $2x^3y^2+3xyz^2-2x^2yz-3z^3$; е) $24ax-38bx-12a+19b$; ж) $-8m^3n-18mn^3+24m^2n^2$; з) $25a^2-\frac{1}{4}b^2q^2$; и) $9(5a-4b)^2-64a^2$; к) $121n^2-(3n+2t)^2$; л) $4t^2-20tn+25n^2-36$; м) $-p^4+6p^2k-9k^2$; н) $-16p^3q^8+72p^4q^7-81p^5q^6$, о) $6x^3-36x^2+72x-48$; п) $9a^{3n-1}-4{,}5a^{2n-1}$; р) $4a^7p^2-32a^4p^5$; с) $5p^{2n}q^n+15p^{5n}q^{2n}$; т) $(7z^2-4y^2)^2-(3z^2+8y^2)^2$; у) $1000t^3+27f^6$; ф) $128a^4-96a^3+24a^2-2a$; х) $7-56a^6b^3$; ц) $x^2+7x+12$.

10. Выполните действия:
а) $(28{,}6^3-14{,}6^3):(28{,}6^2+28{,}6\cdot14{,}6+14{,}6^2)$;
б) $\dfrac{100{,}6^2-80{,}2^2}{180{,}8}$;
в) $$\frac{\left(\frac{18{,}8^2-8{,}8^2}{27{,}6}\right)^3+2\cdot18{,}8^3+8{,}8^3}{18{,}8^3+8{,}8^3}+\frac{3\cdot18{,}8\cdot8{,}8-3\cdot8{,}8^2}{18{,}8^2-8{,}8^2}.$$

§ 2. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДРОБНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Основные понятия. Числовые выражения, а также выражения с переменными, в которых используются операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень, называются *рациональными*. Если рациональное выражение не содержит операции деления на выражение с переменными, то оно называется *целым*. Если же при составлении рационального выражения используется операция деления на выражение с переменными, то это рациональное выражение называется *дробным*.

Примеры дробных выражений:

$$\frac{1+2xy+y^2}{y^2-4}, \quad \frac{a+b+c}{a}-\frac{1}{c}, \quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}.$$

Выражение $\frac{3x^2+y^2+2z^3}{7}$ не является дробным, хотя в записи выражения и используется черта дроби. Это — целое выражение, которое можно привести к стандартному виду многочлена $\frac{3}{7}x^2+\frac{1}{7}y^2+\frac{2}{7}z^3$.

Во множестве рациональных выражений выделим еще одно подмножество выражений — подмножество дробей. *Дробь* — это выражение вида a/b, где буквами a и b обозначены числовые выражения или выражения с переменными; a — числитель дроби, b — знаменатель. Согласно этому определению, из рассмотренных выше примеров дробями будут следующие:

$$\frac{1+2xy+y^2}{y^2-4}; \quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}; \quad \frac{3x^2+y^2+2z^3}{7}.$$

Дробное выражение $\frac{a+b+c}{a}-\frac{1}{c}$ не является дробью.

Обращаем внимание читателя на следующее обстоятельство: не всякая дробь является дробным выражением. Так, рассмотренное выше выражение $\frac{3x^2+y^2+2z^2}{7}$ является дробью, но не является дробным выражением (нет деления на выражение с переменными).

Одна из основных задач тождественных преобразований дробных выражений состоит в том, чтобы данное выражение представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой — целые выражения. Чтобы выделить такие дроби из множества всех дробей, условимся называть их *алгебраическими*. Такое преобразование, как мы увидим, всегда выполнимо.

Областью определения выражения с одной переменной называется множество значений переменной, при которых это выражение имеет смысл. Так, область определения выражения $\frac{1+2y+y^2}{y^2-4}$ (обозначим ее Y) состоит из всех чисел, за исключением -2 и 2. Это можно записать так:

$$Y=]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ 2[\cup]2;\ +\infty[.$$

Это множество можно изобразить графически в виде числовой прямой с двумя проколотыми точками (рис. 20).

Если дано выражение с двумя переменными x и y, то областью его определения будет множество числовых пар вида (x, y), при которых выражение имеет смысл. Так, выражение $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{2}$ определено на множестве всех пар (x, y), за исключением пар вида $(0, y)$ и $(x, 0)$. Это — множество точек координатной плоскости xOy за исключением точек, лежащих на осях Ox и Oy.

Целые выражения с переменными определены при любых значениях переменных. Если дана алгебраическая дробь, причем знаменатель содержит переменные, то чтобы найти область определения дроби, нужно найти значения переменных, при которых знаменатель обращается в ноль, и исключить такие значения.

Рис. 20

2. Основное свойство дроби. Как известно, числитель и знаменатель обыкновенной дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число. Например,

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{21}{35}, \quad \frac{48}{64}=\frac{3\cdot 16}{4\cdot 16}=\frac{3}{4}.$$

Естественным обобщением этого факта является основное свойство дроби, выражаемое тождеством

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

Основное свойство дроби имеет разнообразные применения. Так, если числитель и знаменатель дроби являются многочленами с дробными коэффициентами, то для упрощения записи целесообразно умножить числитель и знаменатель дроби на наименьшее общее кратное знаменателей всех коэффициентов. Это умножение является законным в силу основного свойства дроби.

Пример. Упростить дробь $\dfrac{\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{2}x+1}{\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}}$.

Решение. Наименьшим общим кратным знаменателей всех коэффициентов будет в данном случае число 12. Умножив и числитель, и знаменатель дроби на 12, получим

$$\frac{\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}}=\frac{12\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4x^2-6x+12}{3x^2+2x+6}.$$

Основное свойство дроби используется для перемены знаков у членов дроби. Пусть дана дробь $\frac{a}{b}$. Умножив и числитель, и знаменатель дроби на (-1), получим $\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$.

Таким образом, значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки у числителя и знаменателя. Если же изменить знак только у числителя или только у знаменателя, то и дробь изменит свой знак:

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}; \quad -\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}.$$

Если в последних тождествах изменить знаки левой и правой частей, то получим

$$\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}; \quad \frac{a}{b}=-\frac{a}{-b},$$

т. е. если надо изменить знак только числителя или только знаменателя дроби, то нужно изменить знак и перед самой дробью. Например,

$$\frac{3x-2}{3x+4}=-\frac{-(3x-2)}{3x+4}=-\frac{2-3x}{3x+4}.$$

3. Сокращение алгебраической дроби. Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на общий множитель. Возможность такого сокращения обусловлена основным свойством дроби.

Для того чтобы сократить алгебраическую дробь, нужно числитель и знаменатель разложить на множители. Если окажется, что числитель и знаменатель имеют общие множители, то их можно сократить. Если общих множителей нет, то упрощение дроби посредством сокращения невозможно. Сокращение дроби есть тождественное преобразование.

Примеры. 1. Сократить дробь $\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

Решение.

$$x^2-1=(x-1)(x+1), \quad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Замечаем, что числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель $(x-1)$. Значит надо сократить на этот общий множитель. Запись имеет такой вид:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Заметим, что области определения дробей $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ и $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ различны. Дробь $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ определена при $x \neq 1$, а дробь $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ определена при любых значениях x.

Значит, в результате сокращения получилась дробь, область определения которой (обозначим ее X_2) шире, чем область определения исходной дроби (обозначим ее X_1). Это можно записать так:

$$X_2 = X_1 \cup \{1\}.$$

2. Сократить дробь $\frac{x^2-5xy+6y^2}{9y^2-x^2}$.

Для разложения числителя на множители применим способ группировки, представив предварительно одночлен $-5xy$ в виде суммы $-2xy-3xy$; тогда

$$x^2-5xy+6y^2=(x^2-2xy)-(3xy-6y^2)=x(x-2y)-3y(x-2y)= \\ =(x-2y)(x-3y).$$

Для разложения знаменателя на множители используем формулу разности квадратов: $9y^2-x^2=(3y+x)(3y-x)$.

Теперь имеем:

$$\frac{x^2-5xy+6y^2}{9y^2-x^2}=\frac{(x-2y)(x-3y)}{(3y+x)(3y-x)}= \\ =-\frac{(x-2y)(x-3y)}{(3y+x)(x-3y)}=-\frac{x-2y}{3y+x}=\frac{2y-x}{3y+x}.$$

4. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю. *Общим знаменателем нескольких алгебраических дробей* называется многочлен, который делится на знаменатель каждой дроби. Например, общим знаменателем дробей $\frac{x}{x+2}$ и $\frac{3x-1}{x-2}$ служит многочлен $(x+2)(x-2)$, так как он делится и на $x+2$, и на $x-2$. Следует, однако, заметить, что это не единственное решение поставленной задачи: общим знаменателем данных дробей будет и многочлен $3(x+2)(x-2)$, и многочлен $x(x+2)(x-2)$, и многочлен $5(x+2)^2(x-2)^3$ и т. д. Обычно берут такой общий знаменатель, что любой другой общий знаменатель делится на выбранный без остатка. Такой знаменатель называется *наименьшим общим знаменателем* (НОЗ). В рассмотренном выше примере НОЗ равен $(x+2)(x-2)$.

Привести дроби к наименьшему общему знаменателю — это значит преобразовать каждую из дробей к такому виду, чтобы знаменателем служил НОЗ. Возможность такого преобразования вытекает из основного свойства дроби, позволяющего умножать числитель и знаменатель дроби на один и тот же многочлен. Так, для рассмотренных выше дробей имеем

$$\frac{x}{x+2}=\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)},\quad \frac{3x-1}{x-2}=\frac{(3x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}.$$

Нам удалось привести дроби к НОЗ. Это достигнуто путем умножения числителя и знаменателя первой дроби на $x-2$, а числителя и знаменателя второй дроби на $x+2$. Многочлены $x-2$ и $x+2$ называются *дополнительными множителями* соответственно для первой и для второй дроби. Нетрудно понять, что дополнительный множитель для данной дроби равен частному от деления НОЗ на знаменатель данной дроби.

Заметим, что области определения дробей $\frac{x}{x+2}$ и $\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$ различны. Дробь $\frac{x}{x+2}$ определена при $x\neq-2$, а дробь $\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$ определена при значениях x, отличных от -2 и 2.

Значит, в результате умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{x}{x+2}$ на дополнительный множитель $x-2$ получилась дробь, область определения которой X_2 уже, чем область определения X_1 исходной дроби. Это можно записать так:

$$X_1=X_2\cup\{2\}.$$

Пример. Привести к НОЗ дроби $\frac{1}{2(x-y)}$ и $\frac{1}{6(x-y)^2}$.

Решение. В данном случае НОЗ равен $6(x-y)^2$. Чтобы переписать данные дроби со знаменателем $6(x-y)^2$, надо найти дополнительные множители. Для первой дроби дополнительным множителем будет $3(x-y)$. Что касается второй дроби, то ее знаменатель совпадает с НОЗ. В таком случае говорят, что дополнительный множитель равен 1. Итак,

$$\frac{1}{2(x-y)}=\frac{3(x-y)}{2(x-y)\cdot 3(x-y)}=\frac{3(x-y)}{6(x-y)^2}.$$

Вторую дробь оставим без изменения.

Дроби приведены к наименьшему общему знаменателю.

В общем случае, чтобы привести дроби к НОЗ, нужно все знаменатели разложить на множители, из первого знаменателя взять все множители, а из остальных добавить те, которых нет в первом. Покажем на примерах, как это делается.

Пример. Привести к НОЗ дроби

$$\frac{a+2}{2a^3-4a^2}, \quad \frac{a+3}{6a-3a^2}, \quad \frac{a+1}{4a^5-16a^3}.$$

Решение. Разложим каждый из знаменателей на множители:

$$2a^3-4a^2=2a^2(a-2),$$
$$6a-3a^2=3a(2-a)=-3a(a-2),$$
$$4a^5-16a^3=4a^3(a^2-4)=4a^3(a-2)(a+2).$$

Составим НОЗ. Для этого возьмем первый знаменатель $2a^2(a-2)$. Из второго знаменателя возьмем множитель 3, ибо его нет в первом знаменателе, а из третьего знаменателя возьмем множитель $2a(a+2)$. В итоге НОЗ равен $12a^3(a-2)(a+2)$.

Теперь найдем дополнительные множители. Разделив НОЗ на знаменатель первой дроби, получим дополнительный множитель для первой дроби: $6a(a+2)$. Разделив НОЗ на знаменатель второй дроби, получим дополнительный множитель для второй дроби: $-4a^2(a+2)$. Разделив НОЗ на знаменатель третьей дроби, получим дополнительный множитель для третьей дроби: 3. Теперь имеем:

$$\frac{a+2}{2a^3-4a^2}=\frac{(a+2)\,6a(a+2)}{12a^3(a-2)(a+2)}=\frac{6a(a+2)^2}{12a^3(a-2)(a+2)},$$
$$\frac{a+3}{6a-3a^2}=-\frac{4a^2(a+3)(a+2)}{12a^3(a-2)(a+2)},$$
$$\frac{a+1}{4a^5-16a^3}=\frac{3(a+1)}{12a^3(a-2)(a+2)}.$$

Рекомендуем придерживаться следующей схемы отыскания НОЗ и дополнительных множителей (приводим ее на базе рассмотренного примера).

Знаменатели	НОЗ	Дополнительные множители
$2a^2(a-2)$		$6a(a+2)$
$-3a(a-2)$	$12a^3(a-2)(a+2)$	$-4a^2(a+3)$
$4a^3(a-2)(a+2)$		3

Пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби

$$\frac{5}{18x^3y^2z^3-36x^2y^3z^3+18xy^4z^3} \text{ и } \frac{7}{24x^4yz^4-24x^2y^3z^4}.$$

Решение. Прежде всего разложим знаменатели на множители:

$$18x^3y^2z^3-36x^2y^3z^3+18xy^4z^3=18xy^2z^3(x-y)^2,$$
$$24x^4yz^4-24x^2y^3z^4=24x^2yz^4(x-y)(x+y).$$

Применим схему отыскания НОЗ и дополнительных множителей.

Знаменатели	НОЗ	Дополнительные множители
$18xy^2z^3(x-y)^2$ $24x^2yz^4(x-y)(x+y)$	$72x^2y^2z^4(x-y)^2(x+y)$	$4xz(x+y)$ $3y(x-y)$

Если мы теперь числитель и знаменатель первой из данных дробей умножим на первый дополнительный множитель, а числитель и знаменатель второй дроби — на второй дополнительный множитель, то получим дроби с общим знаменателем:

$$\frac{20xz(x+y)}{72x^2y^2z^4(x-y)^2(x+y)} \text{ и } \frac{21y(x-y)}{72x^2y^2z^4(x-y)^2(x+y)}.$$

5. Умножение и деление алгебраических дробей. Обыкновенные дроби перемножаются следующим образом:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Обобщением этого равенства является тождество

$$\frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)}\cdot\frac{P_2(x, y)}{Q_2(x, y)}=\frac{P_1(x, y)\cdot P_2(x, y)}{Q_1(x, y)\cdot Q_2(x, y)},$$

где P_1, P_2, Q_1, Q_2 — целые алгебраические выражения. Итак, *произведение двух (и вообще любого числа) алгебраических дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей.*

Деление обыкновенных дробей выполняется следующим образом:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Обобщением этого равенства является тождество

$$\frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)}:\frac{P_2(x, y)}{Q_2(x, y)}=\frac{P_1(x, y)\cdot Q_2(x, y)}{Q_1(x, y)\cdot P_2(x, y)}.$$

Значит, *частное от деления двух алгебраических дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй дроби, а знаменатель — произведению знаменателя первой дроби на числитель второй.*

Примеры. 1. Преобразовать в дробь произведение

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1},$$

Решение. Применяем правило умножения, затем выполняем необходимые сокращения:

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{(x^2+2x+1)\cdot 9x^4}{18x^3(x^2-1)}=$$
$$=\frac{9x^4(x+1)^2}{18x^3(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+1)}{2(x-1)}.$$

2. Преобразовать в дробь частное

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}.$$

Решение. Используем правило деления и выполняем сокращения:

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{(a^3-2a^2)(3a^2+6a+3)}{(3a+3)(a^2-4)}=$$
$$=\frac{a^2(a-2)\cdot 3(a^2+2a+1)}{3(a+1)(a-2)(a+2)}=\frac{3a^2(a-2)(a+1)^2}{3(a+1)(a-2)(a+2)}=\frac{a^2(a+1)}{a+2}.$$

Замечания. 1. Учитывая возможность сокращения алгебраической дроби, получаемой в результате умножения или деления алгебраических дробей, обычно стремятся до выполнения этих операций разложить на множители числители и знаменатели исходных дробей.

2. Сформулированные правила умножения и деления распространяются и на случай умножения или деления на многочлен, достаточно записать этот многочлен в виде дроби со знаменателем 1.

6. Возведение алгебраической дроби в натуральную степень. Рассмотрим выражение $\left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right)^n$. Имеем

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\underbrace{\frac{P}{Q}\cdot\frac{P}{Q}\cdot\ldots\cdot\frac{P}{Q}}_{n}=\frac{\overbrace{P\cdot P\cdot\ldots\cdot P}^{n}}{\underbrace{Q\cdot Q\cdot\ldots\cdot Q}_{n}}=\frac{P^n}{Q^n},$$

поэтому

$$\left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right)^n=\frac{(P(x, y))^n}{(Q(x, y))^n}.$$

Значит, *степень дроби тождественно равна дроби, у которой числитель есть степень числителя, а знаменатель — степень знаменателя.*

Пример. Преобразовать в дробь степень $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3$.

Решение.

$$\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3=\frac{(2x^2y^3)^3}{(3z^5)^3}=\frac{8x^6y^9}{27z^{15}}.$$

7. Сложение и вычитание алгебраических дробей. Для обыкновенных дробей справедливо равенство

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

Обобщением этого равенства является тождество

$$\frac{P_1(x, y)}{Q(x, y)}+\frac{P_2(x, y)}{Q(x, y)}=\frac{P_1(x, y)+P_2(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Оно означает, что *сумма двух (и вообще любого числа) алгебраических дробей с одинаковым знаменателем тождественно равна алгебраической дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме числителей складываемых дробей.*

Аналогично обстоит дело в случае вычитания дробей с одинаковым знаменателем. В самом деле,

$$\frac{P_1}{Q}-\frac{P_2}{Q}=\frac{P_1}{Q}+\frac{-P_2}{Q}=\frac{P_1+(-P_2)}{Q}=\frac{P_1-P_2}{Q}.$$

Пример. Преобразовать сумму $\frac{x^3}{(x+y)^2}+\frac{y^3}{(x+y)^2}$ в дробь.

Решение.

$$\frac{x^3}{(x+y)^2}+\frac{y^3}{(x+y)^2}=\frac{x^3+y^3}{(x+y)^2}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}.$$

Для сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями нужно прежде всего привести дроби к наименьшему общему знаменателю, а затем выполнить операции над полученными дробями с одинаковым знаменателем.

Примеры **1.** Упростить, т. е. преобразовать в дробь, выражение

$$\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}-\frac{1-2b}{4b+2}.$$

Найдем НОЗ. Для этого прежде всего разложим знаменатели на множители:

$$4b^2-1=(2b-1)(2b+1),\ 3-6b=-3(2b-1),\ 4b+2=2(2b+1).$$

Знаменатели	НОЗ	Дополнительные множители
$(2b-1)(2b+1)$	$6(2b-1)(2b+1)$	6
$-3(2b-1)$		$-2(2b+1)$
$2(2b+1)$		$3(2b-1)$

Перепишем теперь заданную алгебраическую сумму дробей с указанием дополнительных множителей, при помощи которых дроби приводятся к общему знаменателю:

$$\frac{4b^{|6}}{4b^2-1}+\frac{2b+1^{|-2(2b+1)}}{3-6b}-\frac{1-2b^{|3(2b-1)}}{4b+2}.$$

Обычно, соответствующие умножения на дополнительные множители опускают и сразу выписывают дробь, знаменателем которой является НОЗ, а числитель представляет собой сумму произведений числителей исходных дробей на соответствующие дополнительные множители, т. е.

$$\frac{4b\cdot 6+(2b+1)(-2(2b+1))-(1-2b)\cdot 3(2b-1)}{6(2b-1)(2b+1)}$$

и далее,

$$\frac{24b-2(4b^2+4b+1)+3(4b^2-4b+1)}{6(2b-1)(2b+1)}=$$

$$=\frac{24b-8b^2-8b-2+12b^2-12b+3}{6(2b-1)(2b+1)}=\frac{4b^2+4b+1}{6(2b-1)(2b+1)}=$$

$$=\frac{(2b+1)^2}{6(2b-1)(2b+1)}=\frac{2b+1}{6(2b-1)}.$$

2. Упростить выражение $\dfrac{x^3}{x-1}-x^2-x-1.$

Решение.

$$\frac{x^{3|1}}{x-1}-(x^2+x+1)^{|x-1}=\frac{x^3-(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\frac{x^3-(x^3-1)}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$$

8. Примеры на все действия с алгебраическими дробями.

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{x}{x-2}+\frac{x^2}{x^3+8}\cdot\frac{x^2-2x+4}{2-x}\right):\frac{8}{x^2-4x+4}-\frac{x^2+x+6}{4x+8}.$$

Решение. При выполнении операций над алгебраическими дробями придерживаются того же порядка, который принят для упрощения числовых выражений, а именно: умножение, деление и возведение в степень предшествуют сложению и вычитанию; при наличии скобок прежде всего выполняют действия в скобках. В данном примере порядок действий таков:

1) $\dfrac{x^2}{x^3+8}\cdot\dfrac{x^2-2x+4}{2-x}=\dfrac{x^2(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)(2-x)}=\dfrac{x^2}{(x+2)(2-x)};$

2) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x^2}{(x+2)(2-x)}=\dfrac{x^{|x+2}}{x-2}-\dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x^2+2x-x^2}{(x+2)(x-2)}=$

$$=\frac{2x}{(x+2)(x-2)};$$

3) $\dfrac{2x}{(x+2)(x-2)} : \dfrac{8}{x^2-4x+4} = \dfrac{2x(x-2)^2}{8(x+2)(x-2)} = \dfrac{x(x-2)}{4(x+2)}$;

4) $\dfrac{x(x-2)}{4(x+2)} - \dfrac{x^2+x+6}{4x+8} = \dfrac{x^2-2x-x^2-x-6}{4(x+2)} = \dfrac{-3(x+2)}{4(x+2)} = -\dfrac{3}{4}$.

2. Упростить выражение

$$\left(1+\frac{5x^2-x}{6x^2-3xy+2x-y}\cdot\frac{3x+1}{5x-1}+\frac{6x^2-xy-2y^2}{y^2-4x^2}\right):\frac{2y}{x-y}-\frac{y-x}{2y-4x}.$$

Решение. Первым по счету действием является здесь умножение. Мы уже говорили, что умножению (и делению) обычно предшествует разложение числителей и знаменателей на множители. Имеем:

$5x^2-x=x(5x-1)$,

$6x^2-3xy+2x-y=3x(2x-y)+(2x-y)=(2x-y)(3x+1)$;

1) $\dfrac{5x^2-x}{6x^2-3xy+2x-y}\cdot\dfrac{3x+1}{5x-1}=\dfrac{x(5x-1)(3x+1)}{(2x-y)(3x+1)(5x-1)}=\dfrac{x}{2x-y}$;

2) $1+\dfrac{x}{2x-y}+\dfrac{6x^2-xy-2y^2}{y^2-4x^4}=1^{\underline{|4x^2-y^2}}+\dfrac{x^{\underline{|2x+y}}}{2x-y}-$

$-\dfrac{6x^2-xy-2y^{2\,\underline{|1}}}{(2x-y)(2x+y)}=\dfrac{4x^2-y^2+2x^2+xy-6x^2+xy+2y^2}{(2x-y)(2x+y)}=$

$=\dfrac{2xy+y^2}{(2x-y)(2x+y)}=\dfrac{y(2x+y)}{(2x-y)(2x+y)}=\dfrac{y}{2x-y}$;

3) $\dfrac{y}{2x-y}:\dfrac{2y}{x-y}=\dfrac{y(x-y)}{2y(2x-y)}=\dfrac{x-y}{2(2x-y)}$;

4) $\dfrac{x-y}{2(2x-y)}-\dfrac{y-x}{2y-4x}=\dfrac{x-y}{2(2x-y)}-\dfrac{x-y}{2(2x-y)}=0$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется рациональным выражением?

2. При каком условии рациональное выражение называется целым, а при каком — дробным?

3. Среди следующих рациональных выражений выделите целые и дробные:

$$\frac{x^3-2x+3}{3x^2-1};\quad \frac{x^3-2x+3}{5};\quad 5x^3+\frac{2}{3}x;\quad \frac{2}{x+1}.$$

4. Приведите пример дроби, не являющейся дробным выражением, и пример дробного выражения, не являющегося дробью.

5. Что называется областью определения выражения с одной переменной; с двумя переменными?

6. Найдите область определения выражения $\dfrac{a^2+4}{(a-1)(a+2)}$; запишите эту область как объединение множеств; дать графическое изображение этой области определения.

7. В чем состоит основное свойство алгебраической дроби?

8. Что значит сократить алгебраическую дробь? Как выполняется сокращение?

9. Что называется общим знаменателем нескольких алгебраических дробей?

10. Что такое наименьший общий знаменатель?

11. Что значит привести дроби к наименьшему общему знаменателю?

12. Как сложить несколько алгебраических дробей?

13. Как умножаются алгебраические дроби?

14. Как возвести алгебраическую дробь в натуральную степень?

Упражнения

1. Дана дробь $f(x)=\frac{3x^2-4x+3}{x^3+1}$. Вычислите: а) $f(1)$; б) $f(0)$; в) $f(-2)$; г) $f\left(\frac{4}{3}\right)$.

2. Для дроби предыдущего упражнения подберите, по крайней мере, по одному значению x так, чтобы $f(x)$ было числом: а) дробным; б) целым; в) положительным; г) отрицательным.

3. Найдите область определения дроби:

$$\text{а) } \frac{x+1}{x};\quad \text{б) } \frac{3}{1-x};\quad \text{в) } \frac{x}{x^2-4};\quad \text{г) } \frac{x^2-3}{3x-7};\quad \text{д) } \frac{x-2}{(x-1)(x-3)};$$

$$\text{е) } \frac{x^2+5}{x^2+6};\quad \text{ж) } \frac{x^4+x^2+2}{x^2-6x};\quad \text{з) } \frac{x}{x^2-7x+10}.$$

4. Придумайте дробь $f(x)$ такую, чтобы при $x=1$ было: а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)<0$; г) $f(x)>2$; д) $f(x)<-3$; е) $f(x)=4$.

5. Придумайте примеры дробей $f(x)$, которые обращаются в ноль при: а) $x=0$; б) $x=9$; в) $x=-3$; г) $x=3$, $x=0$; д) $x=4$, $x=-4$.

6. Придумайте примеры дробей $f(x)$, которые не определены при: а) $x=8$; б) $x=1$; $x=-1$; в) $x=0$; $x=-8$; г) $x=4/5$; $x=3$.

7. Найдите числовое значение алгебраической дроби $f(x, y)=\frac{2x+3y}{4x-y}$, если: а) $x=6$; $y=3$; б) $x=-5$, $y=2$; в) $x=\frac{1}{8}$; $y=-\frac{1}{3}$.

8. Сократите дроби:

$$\text{а) } \frac{63x^2y^3}{77y^4};\quad \text{б) } \frac{2x^3-8x^5}{12x^4};\quad \text{в) } \frac{(x-4)(x-5)}{(x+4)(5-x)};\quad \text{г) } \frac{5a^2b^7-4ab^3}{10a^4b^6-8a^3b^2};$$

$$\text{д) } \frac{a^2+5a+25}{2a^4-250a};\quad \text{е) } \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^2-1};\quad \text{ж) } \frac{x^2+yz+xz-y^2}{x^2-yz-xz-y^2};$$

$$\text{з) } \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}.$$

9. Упростите дробь:

$$\frac{\frac{x^2}{60}-0{,}1x+\frac{1}{12}}{\frac{x^2}{15}-0{,}2x+\frac{2}{15}}.$$

10. Наиболее рациональным способом найдите числовые значения дробей:

а) $\dfrac{1-6a+9a^2}{9a^2-1}$ при $a=\dfrac{5}{12}$;

б) $\dfrac{4xy^3-4x^3y}{6xy^3-12x^2y^2+6x^3y}$ при $x=4,\ y=3$;

в) $\dfrac{\frac{2}{7}x+\frac{13}{14}y}{\frac{4}{7}x-\frac{9}{14}y}$ при $x=3,\ y=-3$;

г) $\dfrac{\frac{7}{60}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{18}z}{\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}y-\frac{7}{12}z}$ при $x=2,\ y=-\dfrac{1}{3},\ z=-\dfrac{1}{5}$.

11. Упростите выражения:

а) $\dfrac{8x^5}{33x^4}\left(-\dfrac{55x^5}{12x^6}\right)$; б) $\dfrac{3a^{n+5}}{44a^2}:\dfrac{a^{n-5}}{22a}$; в) $(-48a^5x^{k-1}):\dfrac{36x^k}{a^3}$;

г) $\dfrac{25a^5}{6a^3-6}:\dfrac{10a^4}{9a^2+9a+9}$; д) $\dfrac{a^3+8}{4a^2-1}\cdot\dfrac{1-2a}{2a^2-4a+8}\cdot\dfrac{6a+3}{4+4a+a^2}$;

е) $\dfrac{a^4-64a}{a^2-2a+1}\cdot\dfrac{a^2-1}{a^2-16}:\dfrac{a^3+4a^2+16a}{a+4}$;

ж) $\left(-\dfrac{(x-2)^3}{2x-1}\right)^5$; з) $\left(-\dfrac{(2x+1)^k}{(2x-1)^n}\right)^{2m}$.

12. Упростите выражения:

а) $\dfrac{(3a+2)^3}{a+2}-\dfrac{36a+8}{2+a}$; б) $\dfrac{(3a-4)^2}{2-3a}+\dfrac{9a^2}{3a-2}$;

в) $\dfrac{x^3+y^3}{(x-y)^2}+\dfrac{3xy^2-y^3}{(y-x)^2}+\dfrac{3x^2y+y^3}{2xy-x^2-y^2}$; г) $\dfrac{x^3+27}{x-3}-x^2-3x-9$;

д) $\dfrac{5}{14x^3}-\dfrac{1}{42x}+\dfrac{1}{16x}$; е) $\dfrac{1+y^{n+2}}{y^{2n+1}}-\dfrac{1}{y^{n-1}}$;

ж) $\dfrac{15a-13}{3a+1}-\dfrac{10a-1}{2a}$; з) $\dfrac{x}{9x-3}+\dfrac{x-1}{18x-6}-\dfrac{x+2}{4-12x}$;

и) $\dfrac{ad-bc}{2cd(c+d)}+\dfrac{ad+bc}{2cd(c-d)}$; к) $\dfrac{1}{4x^2-9}+\dfrac{2x+3}{2x-3}$;

л) $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{x+15}{x^2-9}+\dfrac{3}{3-x}$; м) $\dfrac{3a(16-3a)}{9a^2-4}+\dfrac{3(1+2a)}{2-3a}-\dfrac{2-9a}{3a+2}$;

н) $\dfrac{x^2}{x-3}+\dfrac{18+2x^2}{x^2+3x+9}+\dfrac{3x(x^2+x+15)}{27-x^3}$;

о) $\dfrac{x+2y}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{x-2y}{x^2-y^2}$; п) $\dfrac{x^2}{x^2+5x+6}-\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{9}{x+3}$.

13. Докажите тождества:

а) $\frac{5}{18y}-\frac{2+3y}{3y^3}+\frac{y+2}{3y^3}-\frac{y-3}{9y^2}=\frac{y-2}{6y^2}$;

б) $\frac{1}{2z^2+5z}-\frac{2}{25-10z}-\frac{4}{4z^2-25}=\frac{1}{5z}$.

14. Найдите числовое значение выражения:

$$\frac{3-x}{x-2}-\frac{x^2+4}{2x^3-8x}+\frac{x+3}{x+2}-\frac{x}{x^2-4} \text{ при } x=-0{,}05.$$

15. Упростите выражения:

а) $\left(\frac{6a+3}{a^2-18a}+\frac{6a-3}{a^2+18a}\right)\cdot\frac{a^2-324}{a^2+9}$;

б) $\left(\frac{a-3}{a^2-3a+9}-\frac{2a-6}{a^3+27}\right):\frac{a+1}{2a^3+54}$;

в) $\left(1+\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}\right)\cdot\left(\frac{3x}{2x-2}-\frac{3x+2}{x}\right)$;

г) $\left(\frac{m-n}{mn}+\frac{3m+n}{m^2-mn}-\frac{3n+m}{n^2-mn}\right):\frac{2m+2n}{mn}+\frac{2m}{n-m}$;

д) $\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{xy+y^2}+\frac{y}{x^2+xy}\right)\right):\frac{y}{x-y}$.

16. Вычислите $f(x)$:

а) $f(x)=\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right):\left(\frac{x^3-4x}{x+1}:\frac{x^2+2x}{x+1}-\frac{x^2-10}{x+2}\right)$

при $x=-10{,}25$;

б) $f(x)=\frac{2-x}{5}+\left(\frac{1}{1-2x}\right)^2:\left(\frac{x+2}{4x^3-4x^2+x}-\frac{2-x}{1-8x^3}\cdot\frac{4x^2+2x+1}{2x^2+x}\right)$

при $x=\frac{537}{4151}$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ И ЕГО СВОЙСТВА

1. Определение арифметического корня. Пусть a — действительное число, а n — натуральное число, большее единицы. Поставим перед собой задачу: найти число x, такое, чтобы выполнялось равенство

$$x^n = a. \tag{1}$$

Сначала рассмотрим конкретные примеры.

1) $a = 16$, $n = 2$; тогда равенство (1) принимает вид: $x^2 = 16$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -4$;

2) $a = 27$, $n = 3$; тогда равенство (1) принимает вид: $x^3 = 27$, откуда $x = 3$;

3) $a = -16$, $n = 4$; тогда равенство (1) принимает вид: $x^4 = -16$, что не выполняется ни при каком действительном значении x;

4) $a = -32$, $n = 5$; тогда равенство (1) принимает вид: $x^5 = -32$, откуда $x = -2$.

Эти примеры показывают, что поставленная задача при четном n и $a > 0$ имеет два решения, при нечетном n — одно решение, при четном n и $a < 0$ — ни одного решения.

Если задача имеет решение, т. е. равенство $x^n = a$ выполняется при некоторых значениях x, то эти значения x называются *корнями* n-й степени из числа a; итак корень n-й степени из числа a — это такое число, n-я степень которого равна a.

Из рассмотренных выше примеров следует, что существуют два корня второй степени из числа 16 — это числа 4 и -4; существует один корень третьей степени из числа 27 — это число 3; не существует корня четвертой степени из числа -16; существует один корень пятой степени из числа -32 — это число -2.

Рассмотрим случай отыскания корня n-й степени из неотрицательного числа. Можно доказать, что если $a \geqslant 0$ и $n > 1$, то существует и только одно неотрицательное число x, такое, что $x^n = a$ (доказательство проводится в курсе высшей математики; представление об этом доказательстве будет дано в следующей главе).

Арифметическим корнем n-й степени из положительного числа a называется такое положительное число, n-я степень которого равна a.

Для арифметического корня n-й степени из числа a принято обозначение $\sqrt[n]{a}$. Число a называется *подкоренным числом* или *подкоренным выражением*, n — *показатель корня*. Если $n=2$, то обычно не пишут $\sqrt[2]{a}$, а пишут просто $\sqrt{a}$ и называют это выражение квадратным корнем. Часто вместо термина «корень» используется термин «радикал».

Согласно определению запись $\sqrt[n]{a}=x$, где $a>0$, означает, во-первых, что $x>0$, и, во-вторых, что $x^n=a$, т. е. $(\sqrt[n]{a})^n=a$. Например, $\sqrt{36}=6$, $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[4]{16}=2$.

Полагают также $\sqrt[n]{0}=0$.

Обратим внимание читателя на то, что, например, $\sqrt{36}=6$, но $\sqrt{36}\neq-6$ и $\sqrt{36}\neq\pm6$.

2. Свойства арифметических корней. Условимся прежде всего о следующем: все переменные, которые встречаются в формулировках свойств и в примерах, рассматриваемых в настоящем и следующем пунктах, будем считать принимающими только неотрицательные значения. Кроме того, мы рассматриваем только арифметические корни, а потому каждый раз специально подчеркивать это не будем. Значит, мы будем писать: «корень n-й степени из неотрицательного числа», а читатель должен понимать, что речь идет об арифметическом корне.

1°. *Корень n-й степени из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел, т. е.*

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

Доказательство. Мы знаем, что $\sqrt[n]{ab}$ — это такое неотрицательное число, которое, будучи возведено в степень n, дает подкоренное выражение ab. Ясно, что $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ — неотрицательное число. Значит, если мы покажем, что $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab$, то это и будет обозначать, что $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

Итак, рассмотрим выражение $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n$. По свойству 1° степени с натуральным показателем (стр. 45) имеем

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n.$$

Так как $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $(\sqrt[n]{b})^n = b$, то получаем $(\sqrt[n]{a})^n \times$ $\times(\sqrt[n]{b})^n = ab$, т. е. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125}$.

Решение. По свойству 1^0 имеем

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{(8 \cdot 27)\,125} = \sqrt[3]{8 \cdot 27}\sqrt[3]{125}$$

и далее,

$$\sqrt[3]{8}\;\sqrt[3]{27}\;\sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

2^0. *Корень n-й степени из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя*, т. е.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0).$$

Пример: $\sqrt{\frac{121}{144}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}} = \frac{11}{12}$.

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства 1^0.

3^0. *Чтобы возвести корень n-й степени в натуральную степень k, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение и из полученного результата извлечь корень n-й степени*, т. е.

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Пример: $(\sqrt[3]{m^2})^4 = \sqrt[3]{(m^2)^4} = \sqrt[3]{m^8}$.

Доказательство. По определению корня $\sqrt[n]{a^k}$ — это такое неотрицательное число, которое, будучи возведено в n-ю степень, дает a^k. Поэтому нам достаточно показать, что $((\sqrt[n]{a})^k)^n = a^k$.

По свойству 3^0 степени с натуральным показателем (стр. 45) имеем

$$((\sqrt[n]{a})^k)^n = (\sqrt[n]{a})^{kn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^k.$$

Так как $(\sqrt[n]{a})^n = a$, то получаем $((\sqrt[n]{a})^k)^n = a^k$, т. е. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

4^0. *Чтобы извлечь корень из корня, нужно перемножить показатели корней, а подкоренное выражение оставить без изменения*, т. е.

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Пример: $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[3\cdot 2]{5}=\sqrt[6]{5}.$

Доказательство.

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right)^{k}=\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k}=a;$$

значит, $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$

5°. *Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится*, т. е.

$$\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^{k}}.$$

Пример: $\sqrt[16]{a^{12}}=\sqrt[4\cdot 4]{a^{3\cdot 4}}=\sqrt[4]{a^{3}}.$

Доказательство. По определению корня $\sqrt[nm]{a^{km}}$ — это такое неотрицательное число, которое, будучи возведено в степень nm, дает a^{km}. Значит, достаточно показать, что $\left(\sqrt[n]{a^{k}}\right)^{nm}=a^{km}$.

По свойству 3° степени с натуральным показателем имеем

$$\left(\sqrt[n]{a^{k}}\right)^{nm}=\left(\left(\sqrt[n]{a^{k}}\right)^{n}\right)^{m}=(a^{k})^{m}=a^{km}.$$

Значит, $\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^{k}}$.

Примеры. 1. Извлечь корень из произведения: а) $\sqrt{a^2b^6}$; б) $\sqrt[4]{16x^4y^8z^{12}}$.

Решение. а) Применив свойство 1° арифметических корней, получим:

$$\sqrt{a^2b^6}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^6}=ab^3.$$

Напомним, что мы в начале рассматриваемого пункта условились считать все переменные принимающими только неотрицательные значения. Не будь этого соглашения, мы не имели бы права писать $\sqrt{a^2}=a$, так как при $a<0$ это неверно; то же относится и к равенству $\sqrt{b^6}=b^3$;

б) $\sqrt[4]{16x^4y^8z^{12}}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{y^8}\cdot\sqrt[4]{z^{12}}=2xy^2z^3.$

2. Извлечь корень из дроби: а) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{343c^9}}$.

Решение. а) Обратим смешанное число $7\frac{19}{32}$ в неправильную дробь: $7\frac{19}{32}=\frac{7\cdot 32+19}{32}=\frac{243}{32}$. По свойству 2° получаем

$$\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{3}{2};$$

б) воспользовавшись свойствами 2^0 и 1^0, получим

$$\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{343c^9}}=\frac{\sqrt[3]{8a^3b^6}}{\sqrt[3]{343c^9}}=\frac{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt[3]{343}\cdot\sqrt[3]{c^9}}=\frac{2ab^2}{7c^3}.$$

3. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{a^{17}}$; б) $\sqrt{45a^5}$; в) $\sqrt[3]{a^{3n+2}b^{6n}c^{9n+1}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{80x^3}{243m^5n^9}}$.

Решение. а) Представим подкореннсе выражение a^{17} в виде $a^{16}a$ и применим к полученному произведению свойство 1^0 арифметических дробей:

$$\sqrt{a^{17}}=\sqrt{a^{16}a}=\sqrt{a^{16}}\sqrt{a}=a^8\sqrt{a}.$$

Такое преобразование называется *вынесением множителя из-под знака корня*. Цель преобразования — упрощение подкоренного выражения;

б) $\sqrt{45a^5}=\sqrt{9a^4 5a}=\sqrt{9}\sqrt{a^4}\sqrt{5a}=3a^2\sqrt{5a}$;

в) $\sqrt[3]{a^{3n+2}b^{6n}c^{9n+1}}=\sqrt[3]{(a^{3n}a^2)\,b^{6n}\,(c^{9n}c)}=\sqrt[3]{a^{3n}b^{6n}c^{9n}\,(a^2c)}=$

$$=\sqrt[3]{a^{3n}}\sqrt[3]{b^{6n}}\sqrt[3]{c^{9n}}\sqrt[3]{a^2c}=a^nb^{2n}c^{3n}\sqrt[3]{a^2c};$$

г) $\sqrt[4]{\dfrac{80x^3}{243m^5n^9}}=\sqrt[4]{\dfrac{16\cdot 5x^3}{81\cdot 3\,(m^4m)\,(n^8n)}}=$

$$=\sqrt[4]{\frac{16}{81\cdot m^4n^8}\cdot\frac{5x^3}{3mn}}=\frac{2}{3mn^2}\sqrt[4]{\frac{5x^3}{3mn}}.$$

В некоторых случаях оказывается полезным преобразование, в определенном смысле обратное только что рассмотренному, а именно: внесение множителя под знак корня. Пусть, например, нужно выяснить, какое из чисел больше: $2\sqrt{5}$ или $3\sqrt{2}$. Рассмотрим число $2\sqrt{5}$. Внесем множитель 2 под знак корня — это достигается с помощью следующего преобразования:

$$2\sqrt{5}=\sqrt{2^2}\sqrt{5}=\sqrt{20}.$$

Сделаем аналогичное преобразование числа $3\sqrt{2}$:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\sqrt{2}=\sqrt{18}.$$

Так как $\sqrt{20}>\sqrt{18}$, то $2\sqrt{5}>3\sqrt{2}$.

4. Ввести множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[3]{2}$; б) $1\frac{2}{5}\sqrt{3\frac{4}{7}}$; в) $2ab^2\sqrt[5]{3ab^3}$; г) $a\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{a^3}}$.

Решение:

а) $3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{54}$;

б) $1\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3\frac{4}{7}}=\frac{7}{5}\cdot\sqrt{\frac{25}{7}}=\sqrt{\frac{49}{25}}\cdot\sqrt{\frac{25}{7}}=$

$$=\sqrt{\frac{49}{25}\cdot\frac{25}{7}}=\sqrt{7};$$

в) $2ab^2\sqrt[5]{3ab^3}=\sqrt[5]{(2ab^2)^5}\sqrt[5]{3ab^3}=\sqrt[5]{(32a^5b^{10})(3ab^3)}=$

$$=\sqrt[5]{96a^6b^{13}};$$

г) $a\sqrt[3]{1+\frac{1}{a^3}}=\sqrt[3]{a^3\left(1+\frac{1}{a^3}\right)}=\sqrt[3]{a^3+1}.$

В рассмотренных примерах мы пользовались только определением корня и свойствами 1° и 2°. Рассмотрим теперь примеры использования свойств 3° и 4°.

5. Выполнить действия:

а) $(\sqrt[3]{a^2})^5$; б) $(\sqrt[7]{4a^2b^3})^5$; в) $\left(\frac{y}{x}\cdot\sqrt[4]{x^2y}\right)^3$.

Решение. а) По свойству 3° имеем $(\sqrt[3]{a^2})^5=\sqrt[3]{(a^2)^5}=\sqrt[3]{a^{10}}$. Обычно стараются подкоренное выражение упростить, для чего выносят множители за знак корня. Имеем:

$$\sqrt[3]{a^{10}}=\sqrt[3]{a^9a}=\sqrt[3]{a^9}\sqrt[3]{a}=a^3\sqrt[3]{a};$$

б) $(\sqrt[7]{4a^2b^3})^5=\sqrt[7]{(2^2a^2b^3)^5}=\sqrt[7]{2^{10}a^{10}b^{15}}=$

$$=\sqrt[7]{2^7a^7b^{14}2^3a^3b}=2ab^2\sqrt[7]{8a^3b};$$

в) $\left(\frac{y}{x}\sqrt[4]{x^2y}\right)^3=\left(\frac{y}{x}\right)^3(\sqrt[4]{x^2y})^3=\frac{y^3}{x^3}\sqrt[4]{(x^2y)^3}=$

$$=\frac{y^3}{x^3}\sqrt[4]{x^6y^3}=\frac{y^3}{x^3}\sqrt[4]{x^4x^2y^3}=\frac{y^3}{x^3}x\sqrt[4]{x^2y^3}=\frac{y^3}{x^2}\sqrt[4]{x^2y^3}.$$

6. Выполнить действия: а) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}}$; б) $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$; в) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$.

Решение. а) По свойству 4° арифметических корней имеем

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[4\cdot 5]{7}=\sqrt[20]{7};$$

б) преобразуем выражение $x^2\sqrt[3]{x}$, внеся множитель x^2 под знак корня:

$$x^2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(x^2)^3}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^6\cdot x}=\sqrt[3]{x^7}.$$

Далее имеем $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}=\sqrt[4\cdot 3]{x^7}=\sqrt[12]{x^7}$;

в) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{\sqrt{8}}}=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{8}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6 2^3}}=$

$$=\sqrt[30]{2^9}.$$

Рассмотрим, наконец, примеры, в которых используется свойство 5^0.

7. Упростить выражения:

а) $\sqrt[30]{2^9}$; б) $\sqrt[6]{27x^3y^3}$; в) $\sqrt[10]{32a^{15}b^{20}c^5}$; г) $\sqrt[9]{\dfrac{8a^6b^9}{27c^{12}d^{15}}}$.

Решение. а) По свойству 5^0 мы имеем право показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделить на одно и то же натуральное число. Если в рассматриваемом примере разделить указанные показатели на 3, то получим

$$\sqrt[30]{2^9}=\sqrt[10]{2^3}=\sqrt[10]{8};$$

б) $\sqrt[6]{27x^3y^3}=\sqrt[6]{(3xy)^3}=\sqrt{3xy}$;

в) $\sqrt[10]{32a^{15}b^{20}c^5}=\sqrt[10]{2^5(a^3)^5(b^4)^5c^5}=\sqrt[10]{(2a^3b^4c)^5}=\sqrt{2a^3b^4c}$;

г) $$\sqrt[9]{\frac{8a^6b^9}{27c^{12}d^{15}}}=\sqrt[9]{\frac{b^9}{c^9d^9}\,\frac{2^3(a^2)^3}{3^3c^3(d^2)^3}}=\frac{b}{cd}\sqrt[9]{\left(\frac{2a^2}{3cd^2}\right)^3}=$$

$$=\frac{b}{cd}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{3cd^2}}.$$

8. Упростить выражения: а) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}$; б) $\sqrt[3]{a^4}:\sqrt[3]{a^2}$; в) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$; г) $\sqrt[10]{m^3}:\sqrt[15]{m^2}$; д) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{a^2}{b^5}}:\sqrt[10]{\dfrac{a}{b}}$.

Решение. а) Из свойства 1^0 получаем, что для перемножения корней одной и той же степени достаточно перемножить подкоренные выражения, из полученного результата извлечь корень той же степени; значит,

$$\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}=\sqrt[5]{a\cdot a^2}=\sqrt[5]{a^3};$$

б) по свойству 2^0 получаем $\sqrt[3]{a^4}:\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{\dfrac{a^4}{a^2}}=\sqrt[3]{a^2}$;

в) выше мы видели, как перемножить корни одной и той же степени. В данном же примере требуется перемножить корни с различными показателями. Значит, прежде всего мы должны привести радикалы к одному показателю. Согласно свойству 5^0, можно показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число; поэтому

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3\cdot 2]{a^{1\cdot 2}}=\sqrt[6]{a^2}.$$

Далее имеем

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a^3}.$$

А теперь разделим в полученном результате показатели корня и подкоренного выражения на 3: $\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}$; итак, $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}=$ $=\sqrt{a}$;

г) приведем радикалы к одному показателю. Для этого, очевидно, нужно найти наименьшее общее кратное чисел 10 и 15; К (10, 15) = 30. Значит, нам нужно показатели корня и степени подкоренного выражения для первого из перемножаемых радикалов умножить на 3, а для второго — на 2; получим

$$\sqrt[10]{m^3}:\sqrt[15]{m^2}=\sqrt[30]{(m^3)^3}:\sqrt[30]{(m^2)^2}=\sqrt[30]{\frac{m^9}{m^4}}=\sqrt[30]{m^5}=\sqrt[6]{m};$$

д) НОК чисел 4, 6, 10 равно 60, поэтому приведем все радикалы к показателю 60:

$$\sqrt[60]{\left(\frac{a^3}{b}\right)^{15}}\cdot\sqrt[60]{\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^{10}}:\sqrt[60]{\left(\frac{a}{b}\right)^{6}}$$

и далее

$$\sqrt[60]{\left(\frac{a^3}{b}\right)^{15}\cdot\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^{10}:\left(\frac{a}{b}\right)^{6}}=\sqrt[60]{\frac{a^{45}\cdot a^{20}\cdot b^6}{b^{15}\cdot b^{50}\cdot a^6}}=\sqrt[60]{\frac{a^{59}}{b^{59}}}.$$

3. Тождество $\sqrt{a^2}=|a|$. Ответим на такой вопрос: если переменная a принимает как неотрицательные, так и отрицательные значения, то чему равен $\sqrt{a^2}$?

Если $a=0$, то $a^2=0$. Но $\sqrt{0}=0$, значит можно считать, что при $a=0$ справедливо равенство $\sqrt{a^2}=a$.

Если $a\neq 0$, то $a^2>0$, и речь, следовательно, идет об арифметическом корне второй степени из положительного числа a^2. Здесь могут представиться два случая: $a>0$ и $a<0$. Если $a>0$, то $\sqrt{a^2}=a$; например, $\sqrt{2^2}=2$, $\sqrt{27^2}=27$. Если же $a<0$, то $\sqrt{a^2}=-a$; например, $\sqrt{(-2)^2}=-(-2)=2$.

Итак, можно записать, что

$$\sqrt{a^2}=\left[\begin{array}{l} a, \text{ если } a\geqslant 0,\\ -a, \text{ если } a<0.\end{array}\right.$$

Но точно так же определяется модуль действительного числа a:

$$|a|=\left[\begin{array}{l} a, \text{ если } a\geqslant 0,\\ -a, \text{ если } a<0.\end{array}\right.$$

Таким образом, $\sqrt{a^2}=|a|$. Например, $\sqrt{3^2}=|3|=3$, $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$.

Вообще, *если n — четное число, т. е. $n=2k$, то*

$$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|.$$

Так, если в рассмотренных примерах 1, а) и б) снять требование неотрицательности значений переменных, то решение примера выглядело бы следующим образом:

а) $\sqrt{a^2b^6}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^6}=|a||b^3|=|ab^3|$;

б) $\sqrt[4]{16x^4y^8z^{12}}=\sqrt[4]{2^4}\,\sqrt[4]{x^4}\,\sqrt[4]{y^8}\,\sqrt[4]{z^{12}}=2|x|\,|y^2|\,|z^3|=$ $=2|xy^2z^3|$.

4. Дополнительные замечания о свойствах радикалов. Рассмотренные пять свойств арифметических корней, т. е. пять свойств радикалов безоговорочно верны для неотрицательных подкоренных выражений. Но при решении примеров на действия с радикалами нужно иметь в виду возможность отрицательных значений переменных, содержащихся под знаками радикалов.

Пусть a и b — отрицательные числа, а n — четное число. В этом случае написать $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ нельзя, так как правая часть такого «равенства» не имеет смысла (например, нельзя написать $\sqrt{(-5)(-6)}=\sqrt{-5}\sqrt{-6}$). Здесь можно рассуждать так: a и b — отрицательные числа, следовательно, $ab>0$. Но тогда $ab=|ab|=|a|\,|b|$; значит,

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{|ab|}=\sqrt[n]{|a|\,|b|}.$$

Так как $|a|>0$ и $|b|>0$, то, применив свойство 1° арифметических корней, получим

$$\sqrt[n]{|a|\,|b|}=\sqrt[n]{|a|}\cdot\sqrt[n]{|b|}.$$

Итак, *если n — четное число, а числа a и b имеют одинаковые знаки, то*

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{|a|}\,\sqrt[n]{|b|}$$

и аналогично

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$$

Очень внимательно следует относиться к свойству 5°. Пусть, например, нужно упростить выражение $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-5)^2}$. Если разделить показатели корня и подкоренного выражения на 2, то придем к выражению $\sqrt{\sqrt{3}-5}$, не имеющему смысла, так как под корнем четной степени содержится отрицательное число. Верное равенство в данном случае выглядит так:

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3}-5)^2}=\sqrt{|\sqrt{3}-5|}=\sqrt{5-\sqrt{3}}.$$

В самом деле, $(\sqrt{3}-5)^2=|\sqrt{3}-5|^2$ и, следовательно,

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3}-5)^2}=\sqrt[4]{|\sqrt{3}-5|^2}=\sqrt{|\sqrt{3}-5|}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сколько решений может иметь уравнение $x^n=a$; приведите примеры, когда это уравнение имеет два решения, одно и ни одного.

2. Что называется арифметическим корнем n-й степени?

3. Сформулируйте пять основных свойств арифметического корня.

4. Докажите, что $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a\geqslant 0$, $b>0$.

5. Укажите, какая ошибка допущена при следующих преобразованиях: $1=\sqrt{1^2}=\sqrt{(-1)^2}=-1$.

6. Почему неверно равенство $\sqrt{25}=-5$?

7. В каком случае можно написать $\sqrt{a^2}=a$, а в каком $\sqrt{a^2}=-a$?

8. Чему равен $\sqrt[n]{0}$, где $n=2, 3, \ldots$?

Упражнения

1. Вычислите: а) $\sqrt{81\cdot 49}$; б) $\sqrt{\frac{289}{169}}$; в) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; г) $\sqrt{0{,}0144}$.

2. Вынесите множители из-под знака радикала (все входящие в состав выражений переменные предполагаются неотрицательными):

а) $2\sqrt{9a^2bc^3}$; б) $\frac{3a}{2}\sqrt[4]{16a^5bc^8}$; в) $\sqrt[3]{\frac{x^6y}{a^3b^9}}$;

г) $\frac{a}{x}\sqrt[3]{\frac{27x^6y^5}{125a^9b^3}}$; д) $x\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

3. Введите множители под знак радикала:

а) $c^2\sqrt{5bc}$; б) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; в) $\frac{2x}{3y}\sqrt[5]{\frac{y^4}{2x^3}}$.

4. Упростите выражения:

а) $\sqrt[6]{27m^3n^3}$; б) $\sqrt[9]{\frac{8a^6b^{12}}{27c^3d^9}}$; в) $\sqrt[10]{32a^{15}b^{20}c^5}$; г) $\sqrt[16]{a^{4m}b^{8n}}$.

5. Упростите выражения:

а) $\sqrt{a^2b}$ $(a<0,\ b\geqslant 0)$; б) $\sqrt[4]{\frac{9a^2}{16b^4}}$ $(a>0,\ b<0)$;

в) $\sqrt{(a-1)^2}$ $(a<1)$; г) $\sqrt{a^2-4a+4}$ $(a\geqslant 2)$;

д) $\sqrt{(a+3)^2}$ $(a<-3)$; е) $\sqrt{(a-b)^4}$; ж) $\sqrt{(a+b)^2}$.

6. Сравните значения выражений $\sqrt[5]{6}$ и $\sqrt[10]{35}$.

7. Какое из равенств верно:

а) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$; б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$?

8. Следующие выражения преобразуйте к простейшему виду, т. е. к такому виду, чтобы под знаком корня не содержались знаменатели и множители, которые можно вынести за знак корня:

а) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{2a^3}{3b^2}}$; в) $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$; г) $b\sqrt[3]{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^2}}$.

9. Выполните сложение и вычитание корней, преобразовав их предварительно к простейшему виду:

а) $3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

б) $a\sqrt[3]{ab^4}+b\sqrt[3]{a^4b}+\sqrt[4]{a^4b^4}-3ab\sqrt[3]{ab}$.

10. Выполните действия:

а) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2\frac{1}{2}a}\cdot\sqrt[3]{\frac{0,4}{a}}$; б) $9\sqrt{\frac{1}{45}}:\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$;

в) $\sqrt[3]{2a^2}\cdot\sqrt[6]{32a^4}$; г) $\sqrt[5]{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[10]{\sqrt{5}+2}$;

д) $\left(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2}\right)\cdot 2xy\sqrt[2]{xy}$;

е) $\left(\frac{a}{b^3}\sqrt{ab}-6a^3b^2\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[8]{a^4b^3}:\right)\frac{a^2}{b}\sqrt[6]{ab^2}$.

11. Выполните действия:

а) $(-0,1\cdot\sqrt[5]{a^4b^2})^3$; б) $\left(\frac{x}{2y}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^5$; в) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$;

г) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{m^3}}$; д) $\sqrt[5]{a^4\sqrt{a}}$; е) $\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{n}{m}}}$.

§ 2. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОКАЗАТЕЛЕ СТЕПЕНИ

1. Постановка задачи. Напомним определение степени с натуральным показателем и ее свойства.

Определение 1. $a^n=\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ сомножителей}}$, $a^1=a$.

Основные свойства степени

1°. $a^ma^n=a^{m+n}$;

2°. $a^m:a^n=a^{m-n}$, если $m>n$;

3°. $(a^m)^n=a^{mn}$;

4°. $(ab)^n=a^nb^n$;

5°. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ (b\neq 0)$.

В последующих пунктах речь пойдет об определениях степени с любым рациональным показателем.

Сначала мы определим степень с положительным дробным показателем, далее степень с нулевым показателем и затем степень с отрицательным рациональным показателем. Ясно, что ни на один из этих случаев не переносится данное выше определение, например $a^{3/5}$ нельзя определить как произведение числа a самого на себя

3/5 раза. Поэтому каждый раз придется вводить новое определение. При выборе нового определения мы будем руководствоваться требованием, чтобы на новый случай степени распространялись свойства, аналогичные свойствам 1°—5°, перечисленным выше.

2. Степень с положительным дробным показателем. Пусть $a \geqslant 0$. Надо определить $a^{p/q}$ так, чтобы выполнялось, например, равенство $(a^{p/q})^q = a^p$, т. е. чтобы при возведении степени в степень показатели перемножались. Но это равенство возможно лишь в случае, когда $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Возникает вполне естественная мысль: определить $a^{p/q}$ как $\sqrt[q]{a^p}$. Но будет ли такое определение удачным, т. е. будут ли при таком определении выполняться свойства, аналогичные свойствам 1°—5°? Проверим это.

1°. $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}$.

Доказательство. Согласно предложенному определению степени с положительным дробным показателем имеем: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Значит, $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^m}$. Воспользовавшись свойствами радикалов, приведем радикалы к одному показателю и выполним умножение:

$$\sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{np}} \cdot \sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[nq]{a^{np} \cdot a^{mq}} = \sqrt[nq]{a^{np+mq}}.$$

Далее имеем $\sqrt[nq]{a^{np+mq}} = a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}$; значит, $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}}$.

2°. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}}$.

Доказательство. Воспользуемся свойствами возведения радикала в степень и извлечения корня из корня:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{(a^p)^m}} = \sqrt[nq]{a^{pm}} = a^{\frac{pm}{qn}}.$$

Аналогично можно показать, что будут выполняться свойства:

3°. $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$, если $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$.

4°. $(ab)^{p/q} = a^{p/q} \cdot b^{p/q}$.

5°. $\left(\frac{a}{b}\right)^{p/q} = \frac{a^{p/q}}{b^{p/q}}$.

Итак, при предложенном определении степени с положительным дробным показателем основные свойства степени выполнены. Значит, определение удачно и его можно принять.

Определение 2. *Если* $a \geqslant 0$, *то* $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

Например, $8^{1/3} = 2$, так как $\sqrt[3]{8} = 2$; $27^{2/3} = 9$, так как $27^{2/3} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$.

На практике при выполнении действий над радикалами довольно часто переходят к дробным показателям.

Примеры 1. Выполнить умножение: $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7}$.

Решение.

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}} = x^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

2. Разложить на множители $\sqrt[6]{a^2x^3} - \sqrt[4]{a^3x}$.

Решение. Первый способ:

$$\sqrt[6]{a^2x^3} - \sqrt[4]{a^3x} = \sqrt[12]{(a^2x^3)^2} - \sqrt[12]{(a^3x)^3} = \sqrt[12]{a^4x^6} - \sqrt[12]{a^9x^3} =$$
$$= \sqrt[12]{a^4x^3}\,\sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{a^4x^3}\,\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[12]{a^4x^3}\left(\sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{a^5}\right) =$$
$$= \sqrt[3]{a}\,\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{a^5}\right).$$

Второй способ:

$$\sqrt[6]{a^2x^3} - \sqrt[4]{a^3x} = \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{x^3} - \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{x} = a^{2/6} \cdot x^{3/6} - a^{3/4} \cdot x^{1/4} =$$
$$= a^{1/3} \cdot x^{1/2} - a^{3/4}x^{1/4} = a^{1/3}x^{1/4}\left(x^{1/4} - a^{5/12}\right) =$$
$$= \sqrt[3]{a}\,\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{a^5}\right).$$

3. Степень с нулевым показателем. При выборе определения мы также будем руководствоваться требованием, чтобы на случай степени с нулевым показателем распространялись свойства 1°—5° степени с натуральным показателем (впрочем, теперь мы уже вправе говорить о распространении свойств степени с положительным рациональным показателем). В частности, при умножении степеней с одинаковым основанием показатели должны складываться, т. е. должно выполняться равенство

$$a^n a^0 = a^n,$$

так как $n + 0 = n$ (n — натуральное число). Это равенство при $a \neq 0$ возможно лишь в случае, когда $a^0 = 1$. Поэтому возникает мысль определить a^0 как 1. Нетрудно проверить, что при таком определении выполняются свойства, аналогичные свойствам 1^0—5^0 степени с натуральным показателем, значит, определение можно принять.

Определение 3. *Если* $a \neq 0$, *то* $a^0 = 1$.

Например, $5^0 = 1$, $(-2{,}3)^0 = 1$, $(1/7)^0 = 1$.

4. Степень с отрицательным рациональным показателем. Пусть $a > 0$ и r — положительное рациональное число. Надо определить a^{-r} так, чтобы, например, выполнялось равенство

$$a^r a^{-r} = a^0. \tag{1}$$

Так как $a^0 = 1$, то равенство (1) возможно лишь, если определить a^{-r} как $\frac{1}{a^r}$. Нетрудно показать, что при таком определении будут выполняться свойства, аналогичные свойствам 1^0—5^0.

Покажем, например, что

$$(a^{-r_1})^{r_2} = a^{-r_1 r_2}.$$

В самом деле,

$$(a^{-r_1})^{r_2} = \left(\frac{1}{a^{r_1}}\right)^{r_2} = \frac{1^{r_2}}{(a^{r_1})^{r_2}} = \frac{1}{a^{r_1 r_2}} = a^{-r_1 r_2}.$$

Остальные свойства проверяются аналогично.

Определение 4. *Если* $a > 0$, *то* $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Например, $8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$.

Замечание. Если r — целое число, то полагают $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ и в случае, когда $a < 0$.

5. Степень с любым рациональным показателем. В предыдущих параграфах мы определили понятие степени с любым рациональным показателем. Эта степень обладает следующими свойствами (мы полагаем $a > 0$, $b > 0$, r_1, r_2 — произвольные рациональные числа):

1^0. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;

2^0. $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$;

3^0. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

4^0. $(ab)^{r_1} = a^{r_1} b^{r_1}$;

5^0. $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$.

Заметим, что после введения нулевого и отрицательного показателей мы имеем право в свойстве 2° не делать оговорки, что $r_1 > r_2$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте пять основных свойств степени с натуральным показателем.

2. Как определяется степень с положительным рациональным показателем?

3. Докажите, что если $a > 0$; p, q, m, n — натуральные числа и $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$, то выполняется равенство $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}$.

4. Докажите, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и натуральных p и q выполняется равенство $(ab)^{p/q} = a^{p/q} \cdot b^{p/q}$.

5. Представьте каждое из следующих выражений в виде квадрата ($x > 0$): x^6, x^{10}, x^3, x, $x^{1/2}$.

6. Известно, что a — положительное число. Представьте a в виде: а) квадрата; б) куба; в) четвертой степени; г) восьмой степени.

7. Как определяется a^0 при $a \neq 0$?

8. Докажите, что при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ выполняется равенство $(ab)^0 = a^0 b^0$.

9. Как определяется степень с отрицательным рациональным показателем?

10. Каждое из следующих выражений представьте в виде квадрата ($x > 0$): $x^{-1/2}$, $x^{-3/2}$, x^{-8}, x^{-5}.

11. Сформулируйте пять основных свойств степени с любым рациональным показателем.

Упражнения

1. Вычислите: а) 10^{-1}; б) 1^{-7}; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; г) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$; д) $49^{1/2}$; е) $8^{4/3}$; ж) $100^{-1/2}$; з) $64^{-4/3}$; и) $9^{-3/2}$; к) $100^{-1/2} \cdot (0{,}11^{-2})$; л) $(6{,}25)^{-0{,}5} \cdot (0{,}01)^{-1}$; м) $\dfrac{(0{,}1)^{-1} - 0{,}4^0}{2\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$; н) $(0{,}75)^{-1} \times \left(2\frac{10}{27}\right)^{-2/3} \cdot (2{,}5)^0$; о) $\dfrac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-1/3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + (\sqrt{3})^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

2. Следующие выражения преобразуйте так, чтобы они не содержали отрицательных показателей степеней:

а) $2a^{-2}b$; б) $\dfrac{2a^2}{b^{-1}x^{-3}}$; в) $\dfrac{a^{-1}b^{-3/4}}{cd^{-2/3}}$; г) $\left(\dfrac{a^2bc^{-1}}{d}\right)^{-1/3}$.

3. Упростите выражения:

а) $\frac{4}{7} m^7 n^{-3} x^2 : 1\frac{3}{4} m^{-3} n^{-2} x^3$; б) $0{,}2a^{2/5} b^{-7/8} : 0{,}1a^{-3/5} b^{1/8}$;

в) $(x^{-2,5}y^{1,25})^{-0,4}$; г) $(0{,}027m^{-3/5}n^{-1})^{-5/3}$; д) $(0{,}2m^{-2}n^3)^{-3}$;

е) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{2/3}$; ж) $\left(\frac{32x^{-3/4}}{a^3y^5}\right)^{-0,2}$; з) $\sqrt[3]{\frac{64a^{-12}b^{15}}{125c^{-6}d^{-3}}}$;

и) $\left(x^{-3}y^2\sqrt[5]{2x^3y^{-2}}\right)^{-4}$; к) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})$; л) $(a^{-2}-b^{-2})\times$ $\times(a^{-4}+a^{-2}b^{-2}+b^{-4})$; м) $\frac{1}{4}(xa^{-1}-ax^{-1})\cdot\left(\frac{a^{-1}-x^{-1}}{b^{-1}+x^{-1}}-\frac{a^{-1}+x^{-1}}{a^{-1}-x^{-1}}\right)$;

н) $\frac{a^{1/2}b^{1/2}}{c^{1/6}}:\left(\frac{c^{-1/2}}{a^{-1/3}b^{-1/3}}\cdot\frac{a^{-5/6}c^{-2/3}}{b^{5/6}}\right)$;

о) $\left(\frac{a^{-1/2}b^{-1/3}}{a^{-3/4}b^{-5/6}}:\sqrt[4]{a^{-3}b^{-5}}\right)^{2/7}$.

§ 3. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Тождественно равные выражения на данном множестве.

По определению (стр. 47) тождественно равными выражениями называются такие, у которых все соответственные значения равны. Согласно этому определению выражения $(a^2)^{1/2}$ и a не являются тождественно равными. Действительно, пусть $a=-2$. тогда $(a^2)^{1/2}=((-2)^2)^{1/2}=$ $=4^{1/2}=2\neq-2$, т. е. равенство $(a^2)^{1/2}=a$ не является тождеством.

Однако на множестве всех неотрицательных чисел все соответственные значения выражений $(a^2)^{1/2}$ и a равны и равенство $(a^2)^{1/2}=a$ называют тождеством на этом множестве.

Определение. *Два выражения называются тождественно равными на данном множестве, если на этом множестве они имеют смысл и все их соответственные значения равны.*

Например, выражения $\frac{a^2-1}{a-1}$ и $\frac{(a+1)a}{a}$ тождественно равны на множестве $M=]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$. Легко видеть, что $M=N_1\cap N_2$, где N_1 — множество, на котором определено выражение $\frac{a^2-1}{a-1}$, N_2 — множество, на котором определено выражение $\frac{(a+1)a}{a}$.

2. Тождественные преобразования иррациональных выражений. Выражение с переменными называется *иррациональным*, если оно содержит извлечение корня из переменной или возведение переменной в дробную степень.

Тождественные преобразования иррациональных выражений выполняются, как правило, на множестве неотрицательных чисел. Это вытекает из введенных ранее определений. Например, сократим дробь $\frac{a-4}{a^{1/2}+2}$. При $a \geqslant 0$ выражение $a-4$ можно представить в виде разности квадратов выражений $(a^{1/2})^2$ и 2^2, а затем сократить дробь:

$$\frac{a-4}{a^{1/2}+2}=\frac{(a^{1/2})^2-2^2}{a^{1/2}+2^2}=\frac{(a^{1/2}-2)(a^{1/2}+2)}{a^{1/2}+2}=a^{1/2}-2.$$

Проделанное нами тождественное преобразование выполнено на множестве неотрицательных чисел, т. е. при $a \geqslant 0$. В дальнейшем мы будем это подразумевать и специально не оговаривать.

Примеры. 1. Выполнить действия:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Здесь целесообразно применить прием избавления от иррациональности в знаменателе. Для этого умножим числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{2}+1$ (это выражение называется *сопряженным* для $\sqrt{2}-1$):

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=3+2\sqrt{2}.$$

Аналогично поступим со второй дробью (теперь выражением, сопряженным для знаменателя, является $\sqrt{2}-1$):

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}=3-2\sqrt{2}.$$

Для того чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе третьей дроби, умножим числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+3)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}=1+\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)=$$
$$=5-\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

2. Выполнить действия:

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Решение. Прежде всего подумаем, нельзя ли сократить первую дробь. Выражение, стоящее в числителе, можно преобразовать так: $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}$, поэтому:

$$1)\ \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=a+\sqrt{ab}+b.$$

Далее имеем:

$$2)\ \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}=a-2\sqrt{ab}+b=$$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2;$$

$$3)\ \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

$$4)\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1.$$

Таким образом, последовательное сокращение дробей при тождественных преобразованиях иррациональных выражений обеспечивает достаточную простоту решения. Проиллюстрируем эту мысль еще на одном примере.

3. Упростить выражение

$$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$$

Решение. Попытка привести дроби, стоящие в числителе, к общему знаменателю без предварительных сокращений этих дробей приведет решение к неоправданному усложнению. Поэтому в первую очередь надо сократить эти дроби, а затем произвести указанные действия:

$$1)\ \frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{x^3}}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}};$$

$$2)\ \frac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{ax}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2}=\frac{-\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}};$$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}+\dfrac{-\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x};$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}=\dfrac{\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}=$

$=\dfrac{(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x})(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x})}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x};$

5) $\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{a}.$

Идея сокращения дробей лежит и в основе тождественных преобразований выражений, содержащих степени с рациональными показателями.

4. Доказать тождество

$$a^{1/2}-\frac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{1/2}+a^{-1/2}}+\frac{2}{a^{3/2}}=0.$$

Решение.

1) $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}=\dfrac{a^{-2}(a^3-1)}{a^{-1/2}(a-1)}=\dfrac{a^{-2}(a-1)(a^2+a+1)}{a^{-1/2}(a-1)}=$

$=a^{-3/2}(a^2+a+1)=a^{1/2}+a^{-1/2}+a^{-3/2};$

2) $\dfrac{1-a^{-2}}{a^{1/2}+a^{-1/2}}=\dfrac{a^{-2}(a^2-1)}{a^{-1/2}(a+1)}=\dfrac{a^{-2}(a-1)(a+1)}{a^{-1/2}(a+1)}=$

$=a^{-3/2}(a-1)=a^{-1/2}-a^{-3/2};$

3) $a^{1/2}-(a^{1/2}+a^{-1/2}+a^{-3/2})+(a^{-1/2}-a^{-3/2})+2a^{-3/2}=0.$

Подчеркнем, что проделанные нами в примере 4 тождественные преобразования выполнены на множестве положительных чисел, т. е. при $a>0$.

Иногда множество, на котором выполняются преобразования, имеет более сложную природу. Поясним это на следующем примере.

5. Упростить выражение

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}.$$

Решение. Рассмотрим выражение $\dfrac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}$. Оно преобразуется к виду $\dfrac{a-2x\sqrt{a}+x^2}{x}$. Замечаем, что $a-2x\sqrt{a}+x^2=$

$=(\sqrt{a}-x)^2$. Итак, $\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a}-x)^2}{x}$. Аналогично $\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a}+x)^2}{x}$.

После этих наблюдений мы можем заданное выражение переписать в виде

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-x)^2}{x}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+x)^2}{x}}, \text{ или } \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-x)^2}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(\sqrt{a}+x)^2}}{\sqrt{x}}.$$

Выше (см. § 1, п. 4) мы отмечали, что $\sqrt{a^2}=|a|$, поэтому

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-x)^2}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(\sqrt{a}+x)^2}}{\sqrt{x}}=\frac{|\sqrt{a}-x|+|\sqrt{a}+x|}{\sqrt{x}}.$$

По смыслу примера имеем $x>0$ (заданное выражение содержит $\sqrt{x}$) и $\sqrt{a}\geqslant 0$. Значит, $\sqrt{a}+x>0$, а потому $|\sqrt{a}+x|=\sqrt{a}+x$. Таким образом, мы приходим к выражению

$$\frac{|\sqrt{a}-x|+\sqrt{a}+x}{\sqrt{x}}.$$

Теперь нужно рассмотреть два случая: $\sqrt{a}-x\geqslant 0$ и $\sqrt{a}-x<0$. В первом случае $|\sqrt{a}-x|=\sqrt{a}-x$, а во втором $|\sqrt{a}-x|=x-\sqrt{a}$.

Если $\sqrt{a}-x\geqslant 0$, то $\frac{\sqrt{a}-x+\sqrt{a}+x}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{ax}}{x}$;

если $\sqrt{a}-x<0$, то $\frac{x-\sqrt{a}+\sqrt{a}+x}{\sqrt{x}}=\frac{2x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{ax}}{x}$, если $\sqrt{a}\geqslant x$; $2\sqrt{x}$, если $\sqrt{a}<x$.

Вопросы для самопроверки

1. Какие выражения называются тождественно равными на данном множестве?

2. На каком множестве тождественно равны следующие выражения: а) $(a+2)^2$ и a^2+4a+4; б) $\frac{a^2-9}{a-3}$ и $a+3$; в) $\frac{a^3+8}{a+2}$ и a^2-2a+4; г) $\frac{2a-4}{a-2}$ и $\frac{2a+2}{a+1}$; д) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ и $\sqrt{a}+1$; е) $\frac{a\sqrt{a}-8}{\sqrt{a}-2}$ и $a+2\sqrt{a}+4$.

Упражнения

1. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: а) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{ab^3}}$; г) $\frac{1}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$; д) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$;
е) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{\sqrt{7}-5}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$; в) $4\sqrt{7\frac{1}{2}}-\frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}$.

3. Упростите выражения:

а) $\frac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^2}}-\frac{a^2+4}{a^2-4}$;

б) $\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{b^{1/3}(a^2-ab)}:\frac{\sqrt[3]{a^{-1}ba^{-2}}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}-ab-\frac{1}{(a^2+b^2)^{-1}}$;

в) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^3b^{-3}}-\sqrt{b^3a^{-3}}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+1\right)\frac{2(a-b)^{-1}}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}$ $(a>0, b>0)$;

г) $\left(\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}-\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}\right)\frac{x-y}{2\sqrt{xy}}$;

д) $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}-\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2(ab^{-1}+1)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}}$ $(a+b>0)$;

е) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^{3/2}+b^{3/2}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$;

ж) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-1/2}\right)^{-2}+1}$;

з) $\frac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\left(a^{1/2}(a^{1/2}-b^{1/2})^{-1}-\left(\frac{a^{1/2}+b^{1/2}}{b^{1/2}}\right)^{-1}\right)$;

и) $\frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\frac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}$;

к) $(a^{-2/3}-b^{-2/3})\,ab\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{-1}+\sqrt[3]{ab^2}$, $a\neq b$;

л) $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$;

м) $\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

н) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)(a-\sqrt{a^3})^{-1}$,

о) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-1/2}$;

п) $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\dfrac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}$;

р) $\left[\dfrac{(x+\sqrt[3]{2ax^2})(2a+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right]^{-6}$, $\quad x\neq 0,$

$x\neq 2a$;

с) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}$;

т) $\dfrac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+a^{-1}+a}$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1. Соответствие между множествами. Рассмотрим два множества X и Y. Если указан закон, по которому некоторым или всем элементам $x \in X$ соответствует один или несколько элементов $y \in Y$, то говорят, что между множествами X и Y установлено с о о т в е т с т в и е.

Пусть, например, даны два множества X и Y. Множество X состоит из элементов: «яблоко», «автомобиль», «птица», «книга» и «груша». Множество Y состоит из элементов: «дерево», «шофер», «охотник» и «портфель». Установим между этими множествами соответствие. Проведем стрелки от элементов множества X к элементам множества Y и будем считать, что элементу x множества X, от которого исходит стрелка, соответствует тот элемент $y \in Y$, на котором стрелка кончается:

X		Y
яблоко	$\longrightarrow$	дерево,
автомобиль	$\longrightarrow$	шофер,
птица	$\longrightarrow$	охотник,
книга	$\longrightarrow$	портфель,
груша		

Можно установить соответствие и другим способом — при помощи пар. Выпишем пары соответствующих элементов. На первом месте в каждой паре мы запишем элемент, принадлежащий множеству X, а на втором месте — элемент, принадлежащий множеству Y:

(яблоко; дерево), (автомобиль; шофер), (птица; охотник), (книга; портфель).

Соответствие между двумя множествами можно задать и при помощи таблиц. Пусть, например, требуется составить график дежурств в классе на неделю между школьниками Лешей, Верой и Галей. Составим таблицу:

Школьники / Дни недели	Леша	Вера	Галя
Понедельник	+		
Вторник		+	
Среда	+		
Четверг			+
Пятница		+	
Суббота			+

Эта таблица устанавливает соответствие между множеством школьников {Леша, Вера, Галя} и множеством дней недели {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота}.

Это же соответствие можно представить и при помощи пар: (Леша; понедельник), (Вера; вторник), (Леша; среда), (Галя; четверг), (Вера; пятница), (Галя; суббота) или при помощи стрелок:

Леша $\longrightarrow$ понедельник, Вера $\longrightarrow$ вторник, Леша $\longrightarrow$ среда, Галя $\longrightarrow$ четверг, Вера $\longrightarrow$ пятница, Галя $\longrightarrow$ суббота.

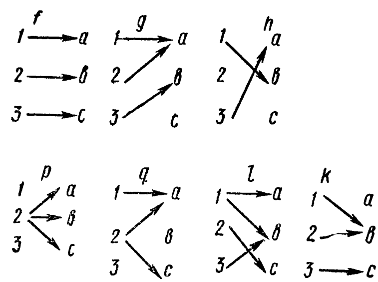


Рис. 21

Мы рассмотрели два примера на соответствие между множествами. В первом примере элементу «груша» из множества X не было соответствующего элемента в множестве Y. Во втором примере каждому элементу из множества X соответствовало несколько элементов из множества Y. Но мы все равно говорим, что в каждом случае между множествами X и Y установлено соответствие.

2. Понятие функции. Пусть даны два множества $X = \{1;\ 2;\ 3\}$ и $Y = \{a;\ b;\ c\}$. Между ними можно установить соответствие различными способами. На рис. 21 указаны некоторые из этих соответствий. Чтобы различать эти соответствия, мы будем обозначать их различными маленькими латинскими буквами f, g, h, p, q и т. д.

Введем теперь понятие функции. *Соответствие между множествами X и Y называется функцией, если каждому* *элементу $x \in X$ соответствует один и только один элемент $y \in Y$.*

Для обозначения функции существует специальная символика. Если даны множества X и Y и задан закон соответствия f, то функцию принято обозначать так: $y = f(x)$, где $x \in X$, $y \in Y$, а знак f определяет закон соответствия.

Так, если $X = \{1;\ 2;\ 3\}$, а $Y = \{21;\ 30;\ 45\}$ и соответствие f задано при помощи стрелок $1 \longrightarrow 21$, $2 \longrightarrow 30$ и $3 \longrightarrow 45$, то это записывается так: $f(1) = 21$, $f(2) = 30$ и $f(3) = 45$.

Из определения функции следует, что не всякое соответствие между двумя множествами является функцией. Так, на рис. 21 приведено несколько соответствий между элементами множеств $X = \{1;\ 2;\ 3\}$ и $Y = \{a;\ b;\ c\}$. Из них только соответствия f, g и k являются функциями.

Приведем еще несколько важных определений. Если даны два множества X и Y и дан закон соответствия между элементами этих множеств $y = f(x)$, то множество X называется *областью определения функции*. Множество элементов из множества Y, которые соответствуют элементам $x \in X$, образуют подмножество множества Y. Обозначим его через Y_1. Множество Y_1, называется *множеством значений функции*.

Примеры. 1. Если $X = \{1;\ 2;\ 3\}$, $Y = \{10;\ 20;\ 30;\ 35;\ 40\}$ и установлен закон соответствия между этими множествами при помощи стрелок $1 \longrightarrow 10$, $2 \longrightarrow 20$, $3 \longrightarrow 30$, то областью определения функции будет множество $\{1;\ 2;\ 3\}$, а множеством значений функции будет подмножество Y_1, состоящее из элементов $\{10;\ 20;\ 30\}$. В этом случае $Y_1 \subset Y$.

2. Если множества X и Y таковы, что $X = \{x \mid x = n,\ n \in N\}$, $Y = \{y \mid y = 2n,\ n \in N\}$, а закон соответствия определен так: $n \longrightarrow 2n$, то областью определения функции $y = f(x)$ будет множество N, а множеством значений функции будет множество всех четных чисел. Ясно, что в этом случае $Y_1 = Y$.

Если задана функция с областью определения X и с множеством значений Y, то ее называют также *отображением* множества X на множество Y.

3. Способы задания функции. Рассмотрим наиболее распространенные способы задания функции.

Табличный. Мы уже знаем, что соответствие можно задавать при помощи таблицы. Так же можно задавать и функцию, так как функция — это частный случай соответствия. Таблицы могут быть вертикальными и горизонтальными.

Если $X=\{1;\ 3;\ 5;\ 8;\ 10\}$, $Y=\{31;\ 33;\ 35;\ 48;\ 50\}$, а функция $y=f(x)$ задана следующим образом: $f(1)=31$, $f(3)=33$, $f(5)=35$, $f(8)=48$, $f(10)=50$, то с помощью таблицы (горизонтальной или вертикальной) это можно записать так:

x	1	3	5	8	10
y	31	33	35	48	50

x	y
1	31
3	33
5	35
8	48
10	50

Пример. Записать в виде таблицы функцию $y=f(x)$, заданную так, что каждому натуральному числу соответствует его квадрат.

Решение. Таблица примет вид

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
y	1	4	9	16	25	36	49	64	...	n^2	...

Табличный способ задания функции широко применяется в практике. Так, записаны таблицы квадратов, кубов натуральных чисел, таблицы значения тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. д.

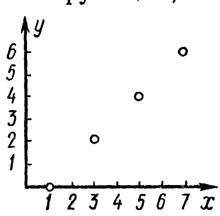


Рис. 22

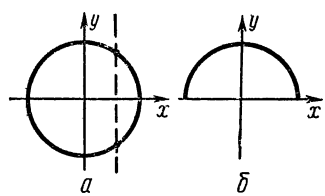


Рис. 23

Графический. Пусть даны множества $X=\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$ и $Y=\{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$ и дан закон соответствия: (1; 0), (3; 2), (5; 4), (7; 6). Начертим оси координат и построим на координатной плоскости точки, координатами которых служат выписанные пары чисел (рис. 22).

Множество построенных точек называется *графиком функции*.

Вообще, график функции $y=f(x)$ есть множество точек плоскости $\{M(x,\ f(x))\,|\,x\in X\}$. Из определения функции следует, что каждому значению $x \in X$ соответствует одно и только одно значение функции $f(x)$, поэтому прямая, параллельная оси координат, может пересекать график функции не более чем в одной точке. Так, окружность, приведенная на рис. 23, *а* не является графиком какой-либо функции: прямые, параллельные оси ординат, могут пересекать ее в двух точках. А полуокружность, приведенная на рис. 23, *б*, является графиком функции. На рис. 24 приведен график функции, а на рис. 25 изображен график соответствия, не являющегося функцией.

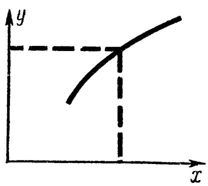


Рис. 24

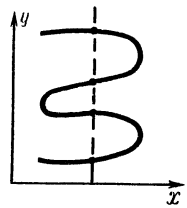


Рис. 25

Задание функции формулой. Пусть даны множества X и Y и формула, пользуясь которой можно находить значения y, зная значения x. Формула выражает закон соответствия между множествами X и Y. Если обозначить эту формулу буквой f, то символически можно записать $x \xrightarrow{f} y$. Если каждому значению x соответствует одно и только одно значение y, то мы имеем дело с функцией, и тогда можно записать $y = f(x)$.

Примеры. 1. Дано множество $X = \{1;\ 3;\ 5;\ 8\}$. Спределить множество Y, если закон соответствия выражается формулой $y = 2x + 1$, где $x \in X$.

Решение. Производя указанные в формуле действия, получим соответствие

$1 \longrightarrow 3$; $3 \longrightarrow 7$; $5 \longrightarrow 11$; $8 \longrightarrow 17$, т. е. множество Y таково: $Y = \{3;\ 7;\ 11;\ 17\}$.

2. Дано множество $X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ и закон соответствия $y = x(x-1)$, где $x \in X$. Найти Y.

Решение. Используя закон соответствия, получим:

$$1 \longrightarrow 0,\ 2 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 6,\ 4 \longrightarrow 12,\ 5 \longrightarrow 20,$$

т. е.

$$f(1) = 0,\ f(2) = 2,\ f(3) = 6,\ f(4) = 12,\ f(5) = 20.$$

Следовательно, $Y = \{0;\ 2;\ 6;\ 12;\ 20\}$.

Обычно, если функция $y = f(x)$ задана на множестве тех значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл, то при задании функции при помощи формулы не указывают область ее определения. В этих случаях область определения функции $y=f(x)$ (т. е. множество X) называется *естественной областью определения* функции.

Например, если функция $y=f(x)$ задана формулой $y=x(x-1)$, то считают, что область ее определения состоит из всех чисел; если функция f задана формулой $y=\frac{1}{x-1}$, область ее определения состоит из всех чисел, кроме 1; если функция f задана формулой $y=\frac{1}{x^2-1}$, то областью ее определения будет множество всех чисел, кроме чисел 1 и -1.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое соответствие между множествами?
2. Какое соответствие называется функцией?
3. Какие способы задания функции вы знаете?
4. Что такое график функции?
5. Что такое область определения функции?
6. Что такое естественная область определения функции?

Упражнения

1. Даны два множества $X=\{1;\ 3;\ 5;\ 8;\ 9\}$ и $Y=\{-1;\ -3;-5;\ -8;\ -9\}$. Установите соответствие между данными множествами так, чтобы это соответствие. а) не было функцией, б) было функцией.

2. Даны два множества $X=\{15;\ 8;\ -8\}$ и $Y=\{1;\ 3\}$. Установите между ними соответствие так, чтобы оно: а) было функцией, б) не было функцией.

3. Каждому числу, принадлежащему множеству $X=\{-3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 5\}$, поставлен в соответствие его модуль. Найдите множество модулей указанных чисел. Запишите это соответствие при помощи: а) стрелок; б) пар.

4. Функция f задана при помощи пар $(1;\ -1)$, $(2;\ -2)$, $(3;\ -3)$, $(10;\ -10)$. Найдите область определения и множество значений этой функции. Найдите $f(1)$ и $f(10)$

5. На рис. 26 установлено соответствие между точками эллипса $KMNLPS$ и точками прямой AD. Является ли это соответствие функцией?

6. Даны множества $X=\{x \mid x=n,\ n\leqslant 3\}$ и $Y=\{y \mid y=n^2,\ n\leqslant 3\}$. Между ними установлено соответствие $n\longrightarrow n^2$. Запишите это соответствие при помощи таблицы.

7. Между множествами $X=\{x \mid x=n;\ 3\leqslant n\leqslant 10\}$ и $Y=\{y \mid y=n^3,\ 3\leqslant n\leqslant 10\}$ установлено соответствие $n\longrightarrow n^3$. Запишите это соответствие при помощи таблицы.

8. Функция f задана таблицей

x	-1	0	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

Чему равно $f(0)$, $f(1)$ и $f(4)$? Изобразите эту зависимость в виде графика.

9. Функция f задана графиком (рис. 27) на множестве $[-3; 2]$. Найдите $f(-2)$; $f(0)$; $f(1)$.

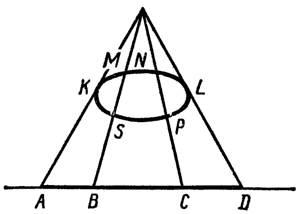


Рис. 26

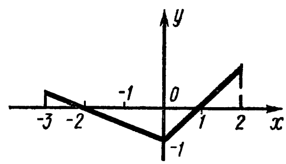


Рис. 27

10. На рис. 28, *а* и *б* изображены полуокружности. Какая из них может служить графиком функции и почему?

11. На рис. 29, *а* изображена траектория движения автомобиля. Может ли этот график быть графиком функции; какова область определения этой функции?

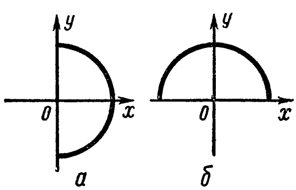


Рис. 28

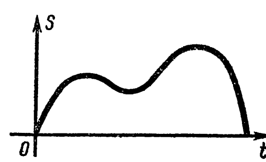


Рис. 29

12. Функция задана формулой $y=x^2-1$, $x\in\{0; 1; 3; 5; 7\}$. Найдите множество значений функции.

13. Функция задана таблицей

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

Задайте ее при помощи формулы.

§ 2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

1. Монотонные функции. Рассмотрим функцию $y=3x$ (рис. 30). Эта функция определена на множестве всех чисел. Составим таблицу некоторых значений функции:

x	y
-3	-9
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6
3	9

Из таблицы видно, что для любых двух значений x_1 и x_2 (например, $x_1=-2$, $x_2=1$) из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (в нашем примере $f(-2)=-6$, $f(1)=3$, $-6<3$).

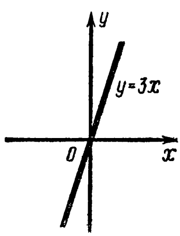


Рис. 30

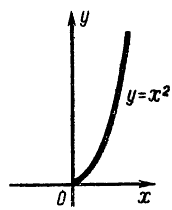


Рис. 31

Возьмем теперь функцию $y=x^2$. Пусть областью ее определения будет множество всех положительных чисел $X=\{x \mid x \geqslant 0\}$ (рис. 31). Составим таблицу некоторых значений этой функции:

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

Из таблицы видно, что из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Например, если $x_1=1$, а $x_2=5$, то $f(1)=1 < f(5)=25$. Функции, обладающие указанными свойствами, называются *возрастающими*.

Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, называется возрастающей, если для всех $x \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Рассмотрим теперь функцию $y = 3 - x$ (рис. 32). Эта функция определена на множестве всех чисел. Из графика этой функции видно, что для всех $x \in X$ справедливо, что если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$. Например, если $x_1 = 1$, а $x_2 = 3$ $(x_1 < x_2)$, то $f(1) = 2$, а $f(3) = 0$ и $f(x_1) > f(x_2)$.

Возьмем функцию $f(x) = x^2$ (рис. 33), определенную на множестве X всех неположительных чисел, $X = \{x \mid x \leqslant 0\}$. Из графика этой функции видно, что для всех $x \in X$ справедливо, что из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$. Например, если $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ $(x_1 < x_2)$, то $f(-1) = 1$, а $f(-3) = 9$, т. е. $f(x_1) = 9 > f(x_2) = 1$. Функции, обладающие таким свойством, называются *убывающими*.

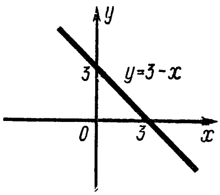


Рис. 32

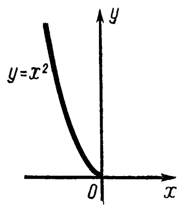


Рис. 33

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется убывающей, если для всех $x \in X$ справедливо, что из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

2. Четные и нечетные функции. Будем рассматривать функции, определенные на множествах, симметричных относительно начала координат. Множество X называется *симметричным относительно начала координат*, если вместе с каждым числом x оно содержит число $-x$. Например, отрезок $[-6; 6]$ симметричен относительно начала координат, а отрезок $[-6; 8]$ не симметричен и полуинтервал $[-6; 6[$ не симметричен.

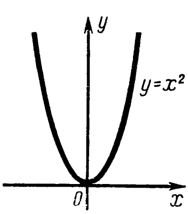


Рис. 34

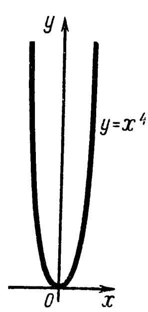


Рис. 35

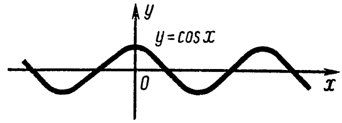


Рис. 36

Функция f, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, для которой выполняется *условие, что для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(x)=f(-x)$, называется четной.*

Примерами четных функций могут служить функции $y=x^2$ (рис. 34); $y=x^4$ (рис. 35); $y=x^{2n}$, где $n=1, 2, 3, 4, \ldots$; $y=\cos x$ (рис. 36) и т. д.

Из рис. 34—36 видно, что графики четных функций симметричны относительно оси Oy. Следовательно, если вы строите график четной функции, то достаточно построить его для значений $x \geqslant 0$, а затем на основании симметрии относительно оси Oy продолжить его для значений $x<0$, т. е. нужно построенный график функции для $x \geqslant 0$ зеркально отобразить относительно оси ординат.

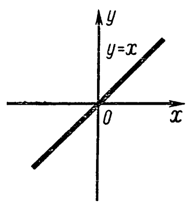


Рис. 37

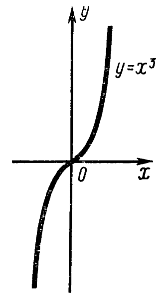


Рис. 38

Рассмотрим функцию $y=x$ (рис. 37). Эта функция определена на множестве всех чисел. Составим таблицу некоторых значений этой функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Из таблицы видно, что $f(x)=-f(-x)$. Так, например, если $x=1$, то $f(1)=1$; если $x=-1$, то $f(-1)=-1$ и $f(1)=-f(-1)$.

Функция f, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, для которой выполняется условие, что для любого $x \in X$ справедливо $f(x)=-f(-x)$, называется нечетной функцией.

Примеры нечетных функций: $y=x$; $y=x^3$ (рис. 38); $y=x^5$; $y=x^{2n+1}$, где $n=1, 2, 3, 4, \ldots$, $y=\sin x$ (рис. 39); $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ и т. д.

Из рисунков видно, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Следовательно, для построения графика нечетной функции достаточно построить часть графика для $x \geqslant 0$, а затем при помощи двух зеркальных отображений относительно осей Ox и Oy получить весь график.

Так, например, чтобы построить график функции $y=x^3$ (см. рис. 38), мы построим часть графика для $x \geqslant 0$ (рис. 40), затем зеркально отображаем его относительно оси Ox (пунктирная линия на рис. 40), а затем полученную пунктирную кривую зеркально отображаем относительно оси Oy.

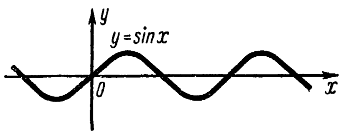


Рис. 39

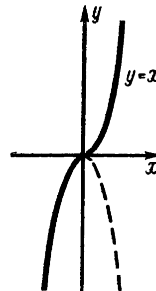


Рис. 40

Вопросы для самопроверки

1. Какие функции называются возрастающими?
2. Какие функции называются убывающими?
3. Какие функции называются монотонными?
4. Что такое четная функция?
5. Что такое нечетная функция?
6. Какие геометрические особенности имеют графики четных и нечетных функций?

Упражнения

1. Какие из приведенных ниже функций являются возрастающими и какие — убывающими: а) $f(x)=x$; б) $f(x)=x+1$; в) $f(x)=5-x$; г) $f(x)=3x$?

2. Укажите область определения, на которой приведенные ниже функции являются убывающими, возрастающими: а) $f(x)=2x^3$; б) $f(x)=3x^2$.

3. Какие из функций (см. упражнение 1 и 2) являются четными и какие — нечетными, и какие ни четными, ни нечетными?

4. Какая из функций является четной, какая нечетной:

$$\text{а) } f(x)=|x|; \text{ б) } f(x)=\frac{x}{|x|}; \text{ в) } f(x)=x\,|x|?$$

§ 3. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ФУНКЦИЯ $y=k/x$

1. Определение. Рассмотрим функции, которые определяются формулой $y=kx+b$, где k и b — постоянные числа. Эти функции определены на множестве всех чисел.

Такие функции называются *линейными функциями*. Например, функции $y=2x+3$, $y=-x+5$, $y=-2x-3$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}$ — линейные.

Линейная функция может быть задана и при помощи таблицы. Покажем, что функция, определенная таблицей

x	0	1	2	3	4	5
y	3	4	5	6	7	8

есть функция линейная. Действительно, из таблицы видно, что значения y отличаются от значения x на три единицы: $3=0+3$, $4=1+3$, $5=2+3$; $6=3+3$, $7=3+4, \ldots$; эту функцию можно задать формулой $y=x+3$. Здесь $k=1$, $b=3$. Следовательно, рассмотренная функция — линейная.

Покажем, что линейная функция $y=kx+b$ есть функция монотонная. Возьмем два произвольных значения x_1 и x_2. Найдем для них соответствующие значения y_1 и y_2:

$$y_1=kx_1+b, \quad y_2=kx_2+b.$$

Вычитая из y_2 значение y_1, получим:

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

Если $x_2>x_1$ и $k>0$, то $y_2-y_1>0$; тогда $y_2>y_1$, и данная функция есть функция возрастающая.

Если $x_2-x_1>0$, а $k<0$, то $y_2-y_1<0$ и $y_2<y_1$; такая функция будет убывающей.

Отсюда следует, что линейная функция есть функция монотонная.

2. График линейной функции. Рассмотрим функцию, заданную формулой $y=x+1$. Составим таблицу некоторых значений этой функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0	1	2	3	4

Если на координатной плоскости отметить все точки, координаты которых суть пары чисел, записанных в таблице, то видно, что все они лежат на одной прямой (рис. 41).

Если взять любую другую линейную функцию, например $y=\frac{1}{2}x+1$ (рис. 41), составить соответствующие пары и нанести их на координатную плоскость, то они также будут лежать на прямой линии. *График линейной функции, заданной на множестве всех чисел, есть прямая линия.*

Если область определения линейной функции состоит из отдельных точек или содержит не все числа, то их графиками будут являться различные подмножества прямой линии (луч, отрезок, множества отдельных точек).

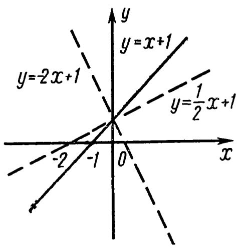


Рис. 41

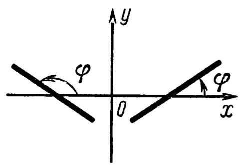


Рис. 42

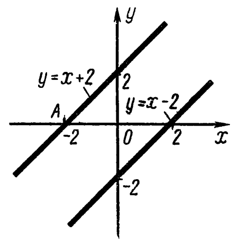


Рис. 43

Выясним теперь смысл коэффициентов k и b. Рассмотрим функции $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=x+1$ и $y=-2x+1$. У них один и тот же коэффициент b, а коэффициент k имеет разные значения. Графики этих функций представлены на рис. 41. Из рисунка видно, что чем больше по абсолютному значению величина k, тем круче идет прямая линия.

Если угол между осью Ox и графиком линейной функции, отсчитываемый против часовой стрелки, обозначить через φ (рис. 42), то из предыдущего ясно, что величина этого угла зависит от значения коэффициента k. При $k>0$ угол φ — острый, а если $k<0$, то угол φ — тупой. Коэффициент k связан с величиной угла φ, поэтому его называют *угловым коэффициентом.*

Рассмотрим теперь функции $y=x+2$ и $y=x-2$ (рис. 43). У них коэффициент k один и тот же, а коэффициент b имеет разные значения. Сравнивая эти графики, мы видим, что при изменении коэффициента b график функции перемещается параллельно самому себе. При $x=0$ $y=b$; так как точка $A(0, b)$ принадлежит графику функции $y=kx+b$, то отсюда следует, что коэффициент b численно равен отрезку, отсекаемому графиком функции на оси Oy. Так, для функции $y=x+1$ отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy, равен 1, а для функции $y=x+2$ —

равен 2. Следовательно, коэффициенты k и b определяют положение прямой, являющейся графиком линейной функции $y=kx+b$, на координатной плоскости.

Покажем более простой способ построения графика линейной функции. Пусть дана линейная функция $y=3x-1$. Возьмем $x=0$, тогда $y=-1$, мы получим точку $A(0; -1)$, лежащую на оси Oy. Положив $y=0$, мы получим точку $B(1/3; 0)$, лежащую на оси Ox. Эти точки принадлежат графику функции $y=3x-1$, следовательно, они лежат на прямой, соединяющей их, — графике данной функции. Проведя прямую через точки A и B, получаем график функции $y=3x-1$ (рис. 44).

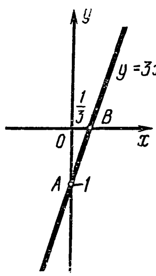


Рис. 44

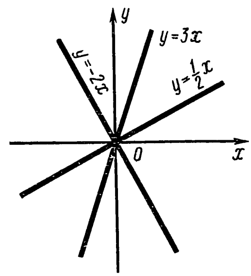


Рис. 45

3. График прямой пропорциональности. Пусть функция задана формулой $y=kx$, определенной на множестве всех чисел. Такая функция называется *прямой пропорциональностью.*

Так как функция $y=kx$ есть частный случай линейной функции (здесь $b=0$), то ее графиком будет прямая линия. В силу того, что $b=0$, отрезок, отсекаемый этой прямой на оси Oy, равен нулю. Следовательно, график прямой пропорциональности проходит через начало координат. На рис. 45 приведены графики прямой пропорциональности.

Если $k>0$, то график прямой пропорциональности расположен в I и III координатных углах, если $k<0$, то — во II и IV.

4. График обратной пропорциональности. Пусть функция задана формулой $y=\frac{k}{x}$. Эта функция определена на множестве всех чисел, кроме нуля. Рассмотрим свойства функции $y=\frac{k}{x}$.

Монотонность. Пусть дана функция $y=\frac{1}{x}$. Покажем, что эта функция является монотонной. Возьмем два произвольных положительных значения аргумента x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, входящих в область определения функции. Найдем соответствующие им значения функции $y_1=\frac{1}{x_1}$ и $y_2=\frac{1}{x_2}$. Имеем $y_2-y_1=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$. Так как $x_1-x_2<0$, то $y_2-y_1<0$ и, следовательно, из условия $x_1<x_2$ следует $y_1>y_2$. Значит, функция $y=\frac{1}{x}$, $X=\{x \mid x>0\}$ есть функция убывающая.

Возьмем теперь два произвольных отрицательных значения x_1 и x_2. Найдем для них соответствующие значения y: $y_1=\frac{1}{x_1}$ и $y_2=\frac{1}{x_2}$; $y_2-y_1=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$. Так как $x_1-x_2<0$, то $y_2<y_1$, следовательно, функция $y=\frac{1}{x}$, $X=\{x \mid x<0\}$ есть функция убывающая.

Нечетность. Функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ можно записать так: $f(x)=-\left(\frac{1}{-x}\right)$, т. е. для этой функции справедлив закон $f(x)=-f(-x)$. Следовательно, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ нечетная.

Построим теперь график функции $f(x)=\frac{k}{x}$ — график *обратной пропорциональности*. Возьмем функцию $f(x)=\frac{1}{x}$. Мы уже знаем, что эта функция нечетная. Следовательно, достаточно построить ее график для $x>0$, а затем при помощи двойного зеркального отображения от оси Ox и Oy получить график функции для всей области определения.

Составим таблицу некоторых значений этой функции:

x	1/3	1/2	1	3/2	2	3
y	3	2	1	2/3	1/2	1/3

Нанесем на координатную плоскость все эти точки и соединим их плавной линией (рис. 46, *а*). Если теперь зеркально отобразить эту кривую сначала относительно оси Ox (пунктирная линия на рис. 46, *б*), а затем полученную «пунктирную» кривую зеркально отобразить относительно оси Oy, то мы получим график обратной пропорциональности (рис. 46, *в*). Полученная кривая называется *гиперболой*.

Из рис. 46, *в* видно, что гипербола состоит из двух ветвей, расположенных в I и III координатных углах. При этом все точки графика, имеющие положительную абсциссу, расположены в I координатном угле, а точки

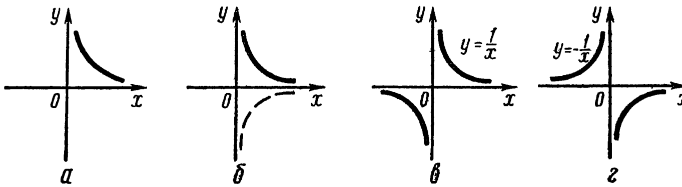


Рис. 46

с отрицательной абсциссой расположены в III координатном угле.

Если $f(x) = -\frac{1}{x}$, то графиком этой функции также будет гипербола, но расположена она во II и IV координатных углах (рис. 46, *г*).

Аналогично обстоит дело и в общем случае обратной пропорциональности. Если $k > 0$, то графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является гипербола, расположенная в I и III координатных углах. Если же $k < 0$, то графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является гипербола, расположенная во II и IV координатных углах.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется линейной?
2. Является ли линейная функция монотонной?
3. Что представляет собой график линейной функции?
4. От чего зависит расположение графика линейной функции на координатной плоскости? Какой смысл имеют коэффициенты k и b?
5. Как нарисовать график линейной функции?
6. Как расположен график прямой пропорциональности?
7. Какими свойствами обладает функция $y = \frac{k}{x}$?
8. Какие особенности имеет график обратной пропорциональности?

Упражнения

1. Постройте график линейной функции:

а) $y=\frac{1}{2}x+1$; б) $y=-\frac{1}{3}x+2$; в) $y=-x-2$; г) $y=-2x-\frac{1}{5}$.

2. Функция $y=f(x)$ задана таблицей

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	—6	—4	—2	0	2	4	6

Покажите, что эта функция линейная, задав ее формулой.

3. У одного ученика было три тетради. В течение недели он каждый день покупал по одной новой тетради. Сколько тетрадей (y) у него было через x дней. Выразите y через x. Является ли зависимость y от x линейной функцией?

4. За отправление телеграммы берется плата 10 коп. и еще по 3 коп. за каждое слово. Сколько стоит отправка телеграммы в x слов? Обозначьте стоимость телеграммы (в копейках) буквой y. Составьте формулу стоимости телеграммы и постройте график. Почему зависимость y от x есть линейная функция? Какова область ее определения?

5. Постройте график линейной функции $y=3x-5$ Пользуясь графиком, узнайте, на сколько единиц возрастет значение y, если значение x увеличить: а) от —2 до —1; б) от 1 до 2; в) от 3 до 4.

6. Постройте график функции $y=5x$ и с его помощью покажите, что равным изменениям x соответствуют равные изменения y.

7. Не выполняя построения графика, выясните, принадлежит ли графику функции $y=-3x+5$ точка A, если: а) A (—15, 49); б) A (1/3; 4); в) A (1,8; —0,4).

8. Найдите значение k, если известно, что график функции $y=kx+2$ проходит через точку P (—7; —12).

9. Найдите значение b и постройте график функции, если известно, что график функции $y=-3x+b$ проходит через точку B (—2; 4).

10. В каких координатных углах лежит график функции а) $f(x)=-3x$; б) $f(x)=10x$?

11. Масса одного карандаша равна 1,5 г. Найдите массу x карандашей. Обозначив массу x карандашей через y, напишите формулу зависимости y от x и постройте график.

12. Площадь прямоугольника равна 12 см². Одна сторона равна y см, а другая x см. Выразите y через x. Псстройте график зависимости y от x.

13. В каких координатных углах расположен график обратной пропорциональности, заданной формулой: а) $y=\frac{3}{x}$; б) $y=-\frac{5}{x}$. Постройте эти графики.

§ 4. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1. Определение. Рассмотрим функции, задаваемые формулой $y=ax^n$, где $a \neq 0$, а $n \neq 0$ — произвольное целое число; такие функции называются *степенными функциями с целым показателем*. Эти функции определены на множестве всех чисел (кроме $x=0$, при $n<0$). Ранее рассмотренные нами функции $y=kx$ и $y=\frac{k}{x}$ принадлежат к этому классу функций (соответственно имеем $n=1$, $n=-1$).

2. Функции, задаваемые формулой $y=ax^2$. Мы уже знаем, что функция $f(x)=ax^2$ $(a \neq 0)$ определена на множестве всех чисел, является четной, возрастающей, если $x \in [0; \infty[$, и убывающей, если $x \in]-\infty; 0]$*.

Построим график функции $y=ax^2$ при $a=2$ (рис. 47):

x	y
—3	18
—2	8
—1	2
0	0
1	2
2	8
3	18

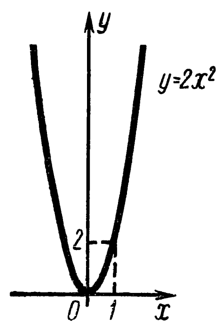


Рис. 47

Этот график симметричен относительно оси Oy. График функции $y=ax^2$ называется *параболой*.

Построим теперь график функции $f(x)=-x^2$, $(a=-1)$ (рис. 48):

---

* Отметим, что в области всех чисел функция $y=ax^2$ не является монотонной функцией.

x	y
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4
3	-9

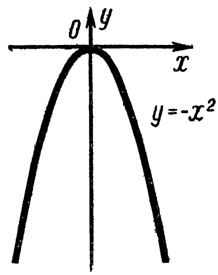


Рис. 48.

Из рис. 48 видно, что если $x \neq 0$, то все точки параболы расположены ниже оси Ox, т. е. в III и IV координатных углах.

На основании этих примеров можно сделать следующие выводы о графике функции $y = ax^2$:

а) если $x = 0$, то $y = 0$ — график проходит через начало координат;

б) если $x \neq 0$, то все точки графика лежат выше оси Ox при $a > 0$ и ниже этой оси при $a < 0$;

в) если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз;

г) чем больше $|a|$, тем «круче» ветви параболы.

3. Функции, задаваемые формулой $y = ax^3$. Функция $y = ax^3$ $(a \neq 0)$ определена на множестве всех чисел, нечетная и монотонная. Мы уже показали (см. § 2, п. 2), что функция $y = ax^3$ является нечетной. Докажем теперь, что она монотонна. Возьмем два неравных значения x_1 и x_2. Для определенности будем считать, что $x_1 < x_2$. Тогда $y_1 = ax_1^3$ и $y_2 = ax_2^3$. Вычитая, получим

$$y_2 - y_1 = a(x_2^3 - x_1^3) = a(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2).$$

Так как

$$x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$$

и $x_2 - x_1 > 0$, то $y_2 - y_1 > 0$, если $a > 0$, и $y_2 - y_1 < 0$, если $a < 0$.

Следовательно, функция $y = ax^3$ будет убывающей, если $a < 0$, и возрастающей, если $a > 0$ во всей области определения этой фунции, т. е. эта функция является монотонной.

Если построить график функции $y=ax^3$ для различных значений a, то мы увидим, что чем больше $|a|$, тем «круче» идут ветви графика (рис. 49).

График функции $y=-ax^3$ $(a>0)$ расположен во II и IV координатных углах и симметричен графику $y=ax^3$. Например, график функции $f(x)=-x^3$ (рис. 50) симметричен графику функции $f(x)=x^3$ и расположен во II и IV координатных углах.

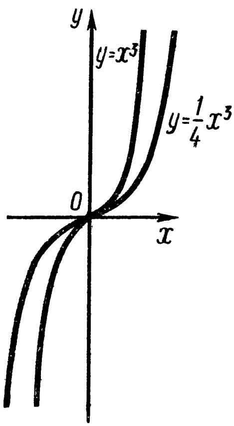


Рис. 49

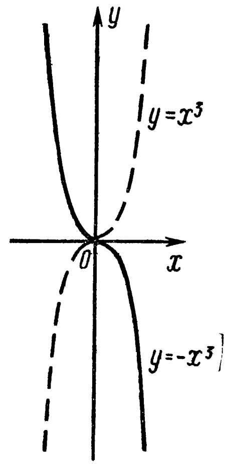


Рис. 50

4. Функции, задаваемые формулой $y=ax^{-2}$. Рассмотрим функцию $f(x)=ax^{-2}$ $(a\neq 0)$. Эта функция определена

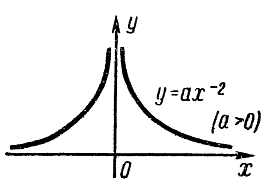


Рис. 51

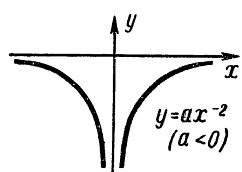


Рис. 52

на множестве всех чисел, кроме нуля, четная, монотонно возрастающая при $x\in\,]-\infty;\ 0\,[$ и монотонно убывающая при $x\in\,]\,0;\ \infty\,[$.

Функция $y=ax^{-2}$ не определена при $x=0$, поэтому ее график не пересекает ось Oy. В силу четности функции график симметричен относительно оси Oy. Если $a>0$, то значения функции всегда положительны, т. е. ее график расположен выше оси Ox (рис. 51).

Если $a < 0$, то значения функции отрицательны и ее график расположен ниже оси Ox (рис. 52).

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется степенной функцией с целым показателем?
2. Как называется график функции $y=ax^2$?
3. Как располагаются ветви параболы в зависимости от знака коэффициента a? От чего зависит «крутизна» ветвей параболы?
4. В каких координатных углах располагается график функции $y=ax^{-2}$ при $a>0$, при $a<0$?
5. Как располагается график функции $y=ax^3$ в зависимости от знака коэффициента a?
6. Перечислите свойства функций $y=ax^2$, $y=ax^3$, $y=ax^{-2}$.

Упражнения

1. Постройте график функции $y=2x^2$. По графику найдите, чему равно $f(1)$, $f(2)$, $f(-3)$.

2. Используя график, полученный в упражнении 1, укажите множество значений y, на которое с помощью соответствия f отображается промежуток: а) $[1;\ 2]$; б) $[-2;\ -1]$; в) $[-3;\ 0[$; г) $]-3;\ 1[$.

3. Принадлежат ли графику функции $y=-20x^2$ точки: а) $A(1;\ -20)$; б) $B(-1,\ -20)$; в) $C(1/2;\ 5)$; г) $D(-1/2;\ -5)$?

4. Функция задана формулой $y=3x^2$. Не выполняя построения ее графика, определите: а) при каком значении x будет $y=0$; б) при каких значениях x будет $y>0$; $y<0$.

5. Найдите значение a, при котором график функции $y=ax^2$ проходит через точку: а) $A(1;\ 3)$; б) $B(0{,}01;\ 2)$; в) $C(-2;\ 0{,}01)$.

6. Постройте график функции $y=0{,}01x^2$.

7. Постройте график функции $y=-0{,}1x^3$.

§ 5. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

1. Функция, задаваемая формулой $y=ax^2+bx+c$. Рассмотрим функцию, задаваемую формулой $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Эта функция определена на множестве всех чисел.

Покажем, что графики функций $y=ax^2+bx+c$, $y=ax^2$ конгруэнтны. Преобразуем выражение $y=ax^2+bx+c$:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+$$
$$+a\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Следовательно, мы доказали, что существует параллельный перенос, определяемый вектором $\vec{p}\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, переводящий график функции $y=ax^2$ в график функции $y=ax^2+bx+c$, т. е. мы показали, что графики этих функций конгруэнтны.

Значит, *графиком функции* $y=ax^2+bx+c$ *является парабола*. Ее можно построить из графика функции $y=ax^2$ с помощью параллельного переноса на вектор $\vec{p}=\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Ось симметрии этой параболы пер-

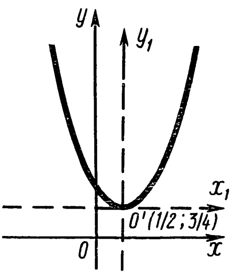


Рис. 53

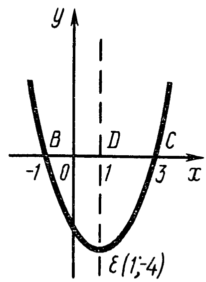


Рис. 54

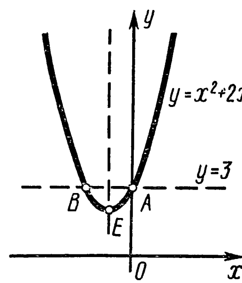


Рис. 55

пендикулярна оси Ox и проходит через точку $(x_0;\ y_0)$, где $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. В этой же точке лежит вершина параболы, а ее ветви направлены вверх при $a>0$ и вниз при $a<0$.

2. Построение графика функции $y=ax^2+bx+c$.

Пример. Построить график функции $y=x^2-x+1$.

Решение. Сделаем соответствующие преобразования:

$$y=x^2-x+1=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Следовательно, график функции $y=x^2-x+1$ получается из графика функции $y=x^2$ переносом на вектор $\vec{p}\,(1/2;\ 3/4)$ (рис. 53). Так как $a>0$, то ветви параболы направлены вверх.

Покажем теперь на примерах другой способ построения графика функции $y=ax^2+bx+c$.

Примеры. 1. Построить график функции $y=x^2-2x-3$.

Решение. Найдем точку пересечения графика с осью Oy. Так как абсцисса этой точки равна нулю, то ее ордината равна -3. Следовательно, ее координаты A $(0;\ -3)$.

Найдем точки пересечения графика с осью Ox. Для этого решим уравнение $x^2-2x-3=0$.

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2;\ x_1=3,\ x_2=-1.$$

Следовательно, координаты точек пересечения C (3; 0) и B (—1; 0). Нанесем все эти точки на координатную плоскость (рис. 54). Точки B и C лежат одновременно и на искомой параболе и на прямой, перпендикулярной оси симметрии параболы, следовательно, они симметричны относительно оси параболы. Значит, ось симметрии параболы пересекает ось Ox в точке D, равноотстоящей от точек B и C, т. е. ее абсцисса равна $\frac{-1+3}{2}=1$.

Найдем теперь координаты вершины параболы. Так как вершина параболы лежит на оси симметрии, то ее абсцисса $x=1$. Отсюда $y=1-2-3=-4$. Итак, координаты вершины параболы E (1; —4). Соединив точки A, B, E и C плавной кривой, получим график функции (рис. 54).

2. Построить график функции $y=x^2+2x+3$.

Решение. Найдем точку пересечения с осью Oy. Положив $x=0$, получим $y=3$, т. е. график проходит через точку A (0; 3). Так как уравнение $x^2+2x+3=0$ не имеет корней, то график функции не пересекает ось Ox. Найдем тогда точки пересечения графика с прямой, параллельной оси Ox. За такую прямую удобно принять прямую $y=3$ ($y=c$). Для этого нужно решить уравнение $3=x^2+2x+3$. Отсюда $x^2+2x=0$ и $x_1=0$; $x_2=-2$. Следовательно, координаты точек пересечения прямой $y=3$ с параболой будут A (0; 3) и B (—2; 3). Используя соображения, приведенные в предыдущем примере, найдем, что координаты вершины параболы E будут $x=\frac{0-2}{2}=-1$ и $y=1-2+3=2$. Соединяя точки A, B и E (—1; 2) плавной кривой, получим искомый график функции (рис. 55).

Вопросы для самопроверки

1. Какая кривая является графиком функции $y=ax^2+bx+c$?
2. Как располагаются ветви параболы в зависимости от знака коэффициента a?
3. Опишите методы построения графика функции $y=ax^2+bx+c$.

Упражнения

1. Постройте график функции $y=x^2+2x-8$. Рассматривая построенный график, найдите: 1) множество значений x, на котором значения функции: а) отрицательны, б) положительны; 2) множество значений x, на котором функция; а) возрастает, б) убывает; 3) наибольшее или наименьшее значение функции; 4) множество значений функции.

2. Постройте график функции и проведите исследование по схеме, предложенной в предыдущем упражнении: а) $y=x^2+4x$; б) $y=x^2+2x-3$; в) $y=-x^2+6x-10$.

3. Сколько общих точек с осью абсцисс имеет график функции $y=x^2+6x+9$? Докажите, что график этой функции расположен в верхней координатной полуплоскости.

4. Постройте график функции $y=(x-2)(x+4)$ и, пользуясь им, решите неравенство: а) $(x-2)(x+4)>0$, б) $(x-2)(x+4)<0$.

5. Укажите координаты вершины параболы: а) $y=(x-2)(x+3)$, б) $y=2(x-1)(x+2)$.

6. Докажите с помощью графика, что при всех значениях x выполняется неравенство: а) $x^2-3x+8>0$; б) $-x^2+6x-10<0$.

7. Проходит ли график функции $y=x^2-7x-31$ через точки: а) $A(3;\ -43)$; б) $B(-8;\ 89)$; в) $C(-5;\ -29)$?

8. а) При каком значении c график функции $y=2x^2+7x+c$ проходит через точку $A(-10;\ 150)$?

б) При каком значении b график функции $y=x^2+bx-19$ проходит через точку $D(-11;\ -30)$?

9. Известно, что график функции $y=ax^2+bx-48$ проходит через точки $M(1;\ 2)$ и $N(2;\ 10)$. Найдите значения коэффициентов a и b.

§ 6. ФУНКЦИЯ, ОБРАТНАЯ ДАННОЙ

1. Обратное соответствие. Обратная функция. Напомним, что соответствие между множествами X и Y называется *функцией*, если каждому значению $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$.

Пусть нам даны множества $X=\{a;\ b;\ c\}$ и $Y=\{1;\ 2;\ 3\}$. Установим различным способом соответствия между этими множествами при помощи стрелок и при помощи пар:

$$\begin{array}{ccc} X\,f_1\,Y & X\,f_2\,Y & \\ a \to 1 & a \to 1 & f_1:(a;\ 1),\ (b;\ 2),\ (c;\ 3) \\ b \to 2 & b \nearrow 2 & f_2:(a;\ 1),\ (b;\ 1),\ (c;\ 3). \\ c \to 3 & c \to 3 & \end{array}$$

Мы видим, что и соответствие f_1, и соответствие f_2 являются функциями.

А теперь поменяем направление стрелок или, что то же самое, поменяем местами элементы в каждой паре. Мы получим соответствия g_1 и g_2

$$\begin{array}{ccccccc} Y & g_1 & X & Y & g_2 & X & \\ 1 & \to & a & 1 & \to & a & g_1:(1;\ a),\ (2;\ b),\ (3;\ c) \\ 2 & \to & b & 2 & \searrow & b & g_2:(1;\ a),\ (1;\ b),\ (3;\ c) \\ 3 & \to & c & 3 & \to & c & \end{array}$$

Если задано соответствие f (при помощи стрелок, пар, графика и т. д.), *то соответствие g, полученное из соответствия f путем замены направления стрелок или изменения расположения элементов в парах, называется обратным соответствием.*

Если задано соответствие между множествами X и Y, которое является функцией, то *обратное соответствие* *не обязательно будет функцией.* Из предыдущего примера видно, что соответствие g_1, обратное соответствию f_1, является функцией. Но соответствие g_2, обратное соответствую f_2, не является функцией (так как элементу $1 \in Y$ соответствуют два элемента a и $b \in X$, элементу 2 нет соответственного элемента).

Функция f, определенная на множестве X и с множеством значений Y, называется обратимой функцией, если обратное ей соответствие g также является функцией. Функция g называется обратной функцией.

Можно показать, что функция f, определенная на множестве X и с множеством значений Y, является обратимой функцией тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает только один раз.

Покажем, что *всякая монотонная функция является обратимой функцией.* Действительно, если $f(x)$ есть функция монотонная, то она будет или возрастающая, или убывающая. Предположим, что $f(x)$ есть функция возрастающая. Тогда для x_1 и $x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ справедливо, что из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, а $x_1 > x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, т. е. разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции. Следовательно, функция $f(x)$ обратимая, так как она принимает каждое свое значение только один раз.

Аналогично можно доказать, что и убывающая функция есть обратимая функция.

Покажем, что если дана монотонная функция, то и обратная функция также будет монотонной, притом функция, обратная возрастающей функции, будет возрастающей, а функция, обратная убывающей, будет убывающей функцией.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ есть возрастающая функция в области ее определения, т. е. для любых x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$ из условия $x_1 < x_2$ вытекает, что $f(x_1) <$ $< f(x_2)$. Покажем, что из условия $f(x_1) < f(x_2)$ следует, что и $x_1 < x_2$. Предположим, что это не так, т. е. $f(x_1) <$ $< f(x_2)$, а условие $x_1 < x_2$ не выполняется. Тогда либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 > x_2$. Но если $x_1 = x_2$, то и $y_1 = y_2$ (иначе соответствие не было бы функцией). Если $x_1 > x_2$, то в силу того, что функция $f(x)$ монотонно возрастающая, $f(x_1) > f(x_2)$, что противоречит условию. Следовательно, наше представление, что $x_1 > x_2$ или $x_1 = x_2$ неверно; отсюда $x_1 < x_2$.

Аналогично доказывается, что если $f(x)$ — монотонно убывающая функция, то и $g(x)$ — монотонно убывающая функция. Значит, *функция, обратная монотонной функции, есть также монотонная функция.* Мы полностью доказали наше утверждение.

В качестве примеров обратимых функций можно привести линейную функцию, функцию $y=ax^3$, функцию $y=ax^2$, рассматриваемую в промежутке $]-\infty;\ 0]$ или в промежутке $[0;\ \infty[$, и т. д.

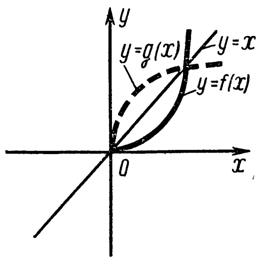


Рис. 56

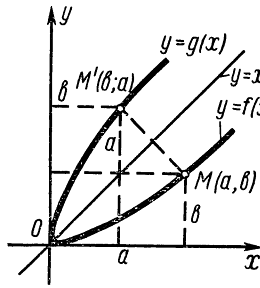


Рис. 57

Покажем, например, что линейная функция есть функция обратимая. Всякую линейную функцию можно записать формулой $y=kx+b$. В зависимости от коэффициента k она будет или убывающей, или возрастающей функцией. Следовательно, линейная функция есть функция монотонная и в силу этого она является обратимой.

2. График функции, обратной данной. Пусть дана обратимая функция $y=f(x)$. Обратная ей функция $y=g(x)$. Построим на одной и той же координатной плоскости графики этих функций.

Пусть график функции $y=f(x)$ есть кривая, изображенная на рис. 56 сплошной линией. Построим график функции $y=g(x)$. Графически обратное соответствие получается при замене оси Ox осью Oy, и наоборот. Чтобы получить это соответствие надо повернуть график так, чтобы координаты x и y у каждой точки поменялись бы местами. Легко видеть, что если мы мысленно перегнем плоскость чертежа по биссектрисе первого и третьего координатных углов, то координаты x и y поменяются местами. Следовательно, чтобы построить график функции $y=g(x)$, обратной данной, нужно зеркально отобразить график обратимой функции $y=f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Полученный таким образом график функции $y=g(x)$ изображен на рис. 56 пунктирной линией.

Докажем теперь, что графики любых двух взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов).

Доказательство. Пусть a—значение аргумента, b—соответствующее значение функции f. Тогда точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции f. Точка $M'(b; a)$ принадлежит графику функции g, обратной f (рис. 57). Но точки M и M' симметричны относительно прямой $y=x$ (докажите это самостоятельно). Следовательно, каждой точке графика функции f соответствует симметричная ей относительно прямой $y=x$ точка графика функции g, и, наоборот,—каждой точке графика функции g соответствует симметричная ей относительно прямой $y=x$ точка графика функции f. Значит, графики функций f и g симметричны относительно прямой $y=x$.

3. Задание формулой функции, обратной данной. Пусть дана обратимая функция $y=f(x)$. В силу того, что функция $y=f(x)$ обратимая, существует функция $y=g(x)$ — обратная данной функции. Как известно, функцию $f(x)$ можно задать при помощи пар соответствующих значений аргумента и функции $(x_0; y_0)$. Тогда функцию $g(x)$ можно задать при помощи пар $(y_0; x_0)$.

Пусть, например, функция $f(x)$ задана при помощи формулы $y=kx+b$ $(k, b\neq 0)$. Чтобы получить задание для обратной функции, преобразуем формулу $y=kx+b$ так, чтобы она давала значения x, соответствующие данным значениям y, т. е. $x=\frac{y-b}{k}$. Этой формулой задана функция $x=g(y)$. Поменяв x и y местами, получим соответствующие пары для функции $y=g(x)$. Значит, обратная функция в данном случае задается формулой $y=\frac{x-b}{k}$. Итак, для того чтобы задать формулой функцию, обратную данной, нужно выразить переменную x через y, а затем поменять обозначения: x на y и y на x.

4. Графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$. Пусть дана функция $y=x^2$. Покажем, что если эта функция задана на множестве $]-\infty; +\infty[$, то она не является обратимой функцией. Из того, что $f(-1)=f(1)$; $f(-2)=f(2)$, $f(-3)=f(3)$, $f(-x)=f(x)$, следует, что она принимает каждое свое значение два раза. А обратимая функция принимает каждое свое значение только один раз. Следовательно, эта функция не обратима.

Рассмотрим функцию $y=x^2$, определенную на множестве $]-\infty; 0]$. Эта функция на множестве $]-\infty; 0]$ является монотонно убывающей. Значит, существует обратная функция, которая также будет монотонно убывающей. Следовательно, на множестве $]-\infty; 0]$ функция $y=x^2$ является обратимой.

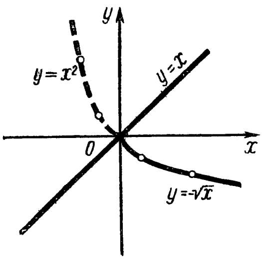


Рис. 58

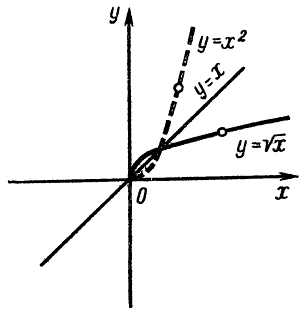


Рис. 59

Выразим x через y. Так как $y=x^2$, то $x=\sqrt{y}$ и $x=-\sqrt{y}$. Заменим x на y и y на x, получим $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$. Нарисуем график функции $y=x^2$; $x\in]-\infty; 0]$ (пунктирная линия на рис. 58). Проведем биссектрису $y=x$ и отобразим зеркально график функции $y=x^2$ относительно биссектрисы. Мы получим график обратной функции (сплошная линия на рис. 58). Так как он целиком лежит ниже оси Ox, то все значения y будут отрицательны. Следовательно, обратная функция выражается формулой $y=-\sqrt{x}$, где $x\geqslant 0$.

Рассмотрим теперь функцию $y=x^2$; $x\in[0; +\infty[$. Эта функция является в области ее определения монотонно возрастающей. Следовательно, она является обратимой функцией и имеет обратную функцию. Выразим x через y: $x=\sqrt{y}$ или $y=\sqrt{x}$. Нарисовав график функции $y=x^2$; $x\in[0; +\infty[$ (пунктирная линия на рис. 59) и зеркально отобразив его относительно биссектрисы $y=x$, мы получим график обратной функции (сплошная линия на рис. 59). Так как график расположен выше оси Ox, то ясно, что обратная функция задается формулой $y=\sqrt{x}$, где $x\geqslant 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое обратное соответствие?
2. Какая функция называется обратимой?
3. Какое условие надо наложить на функцию, чтобы она была обратимой?
4. Как связаны графики взаимно обратных функций?
5. Какая существует связь между монотонной функцией и обратимой?
6. На каком множестве надо задать функцию $y=x^2$, чтобы она была обратимой?

Упражнения

1. Функция задана с помощью пар: (1; 30), (2; 20), (3; 30), (4; 40), (5; 50). а) Задайте с помощью пар обратное соответствие; б) является ли функцией соответствие, обратное данной функции?

2. Между множествами $A=\{1; 2; 3)$ и $B=\{10; 20\}$ установлено соответствие (1; 10), (2; 20), (3; 20). Задайте с помощью пар обратное соответствие. Является ли оно функцией?

3. Функция задана формулой $y=2x-1$ на множестве $X=\{x \mid x>0\}$. Найдите множество значений этой функции. Обратима ли данная функция?

4. Задайте формулой функцию, обратную данной функции:

а) $y=2x$; б) $y=2x-2$; в) $y=\frac{x+3}{4}$; г) $y=x^3$.

5. Докажите, что данные функции взаимно братные:

а) $y=\frac{1}{x}$ и $y=\frac{1}{x}$; б) $y=2x+1$ и $y=\frac{x-1}{2}$.

ГЛАВА ПЯТАЯ
УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Определения. Выше (см. гл. I, § 1) мы говорили, что любое предложение, относительно которого можно сказать, является оно истинным или ложным, называется высказыванием. Многие равенства с переменными являются высказываниями. Например, предложение «при любых a и b справедливо равенство $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$» — истинное высказывание, а предложение «при любых a и b справедливо равенство $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$» — ложное высказывание.

Но существуют равенства с переменными, которые нельзя считать высказываниями. Например, $3+x=7$ не есть высказывание. Если же в этом равенстве переменной x дать конкретное значение, то получится высказывание, истинное (при $x=4$) или ложное (при $x \neq 4$). Относительно любого равенства с переменными могут быть поставлены две задачи:

1. Доказать, что на некотором заданном множестве, т. е. для всех элементов множества, это равенство с переменными обращается в истинное высказывание. В этом случае говорят, что требуется доказать тождество. Например, можно доказать, что следующие равенства являются тождествами:

а) $a+2=2+a$ на множестве всех действительных чисел;

б) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=\sqrt{a}+1$ на множестве $[0,1\,[U]\,1,\ \infty\,[$;

в) $3+x=5$ на одноэлементном множестве $\{x \mid x=2\}$.

2. Найти такое множество, на котором это равенство с переменными обращается в истинное высказывание. В этом случае говорят, что требуется решить уравнение.

Равенство с переменными называется уравнением, если ставится задача найти все те значения переменных, при которых получается истинное высказывание.

Пусть дано уравнение с одной переменной. Значение переменной, при котором получается верное равенство, называется *корнем* или *решением* уравнения.

Примеры. 1. Уравнение $3+x=7$ имеет единственный корень $x=4$ (при этом и только при этом значении x равенство с переменной $3+x=7$ превращается в истинное высказывание $3+4=7$).

Множество корней данного уравнения состоит из одного элемента 4. Записывается это так: $\{4\}$.

2. Уравнение $(x-1)(x-2)=0$ имеет два корня $x=1$ и $x=2$.

Таким образом, множество решений имеет вид $\{1;\ 2\}$.

3. $|x|=x$ имеет бесконечное множество корней (любое неотрицательное число является корнем этого уравнения).

4. $x^2+1=0$ не имеет корней. В этом случае ответ записывается так: $\varnothing$.

Решить уравнение — значит найти множество его корней.

2. Равносильные уравнения. *Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются равносильными.* Например, уравнения $x+2=5$ и $x+5=8$ являются равносильными, так как у первого уравнения один корень $x=3$ и второе уравнение имеет также один корень $x=3$.

В процессе решения уравнения стараются заменить его более простым но равносильным данному. Поэтому важно знать, какие преобразования не связаны с нарушением равносильности.

Теорема 1. *Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую с переменой знака, то получится новое уравнение, равносильное данному.*

Доказательство. Пусть дано уравнение

$$h(x)=g(x)+f(x). \qquad (1)$$

Перенесем слагаемое $f(x)$ в левую часть уравнения (с переменой знака):

$$h(x)-f(x)=g(x). \qquad (2)$$

Докажем, что уравнения (1) и (2) равносильны. Пусть $x=b$ — корень уравнения (1), т. е. справедливо числовое равенство $h(b)=g(b)+f(b)$. Тогда $h(b)-f(b)=g(b)$, а это означает, что $x=b$ — корень уравнения (2).

Итак, мы доказали, что всякий корень уравнения (1) является в то же время корнем уравнения (2).

Докажем теперь, что верно и обратное, т. е. всякий корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1). Пусть $x=c$ — корень уравнения (2), т. е. верно числовое равенство $h(c)-f(c)=g(c)$. Тогда $h(c)=g(c)+f(c)$, а это означает, что $x=c$ — корень уравнения (1).

Теорема 2. *Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

3. Линейные уравнения. Уравнения вида $ax+b=0$, где x — переменная, а a и b — действительные числа, причем $a \neq 0$, называются *линейными*. Числа a и b называются коэффициентами уравнения. Решение линейных уравнений основано из двух сформулированных выше теоремах.

Примеры. 1. Решить уравнение $\frac{1}{5}x+\frac{2}{15}=0$.

Решение. Данное уравнение линейное, здесь $a=1/5$, $b=2/15$. Решение проведем двумя способами.

Первый способ. По теореме 1 уравнение $\frac{1}{5}x=-\frac{2}{15}$ равносильное данному.

Разделим обе части этого уравнения на коэффициент при x, что, по теореме 2, приводит к равносильному уравнению; тогда

$x=-2/3$ — корень уравнения.

Второй способ. Умножим обе части заданного уравнения на 15 (такое преобразование называется освобождением от знаменателя)·

$3x+2=0$. Полученное уравнение равносильно данному по теореме 2. Далее имеем:

$$3x=-2; \quad x=-2/3.$$

2. Решить уравнение

$$7-2x-\frac{1-3x}{7}=2-\frac{2x-1}{3}.$$

Решение. Освободимся от знаменателя, для чего умножим обе части уравнения на 21:

$$147-42x-3(1-3x)=42-7(2x-1);$$

и далее:

$$\begin{gathered}147-42x-3+9x=42-14x+7,\\ 144-33x=49-14x,\\ -33x+14x=49-144,\\ -19x=-95,\\ x=5.\end{gathered}$$

3. Решить уравнение

$$(x+2)^3-(x-2)^3=12(x^2-x)-8.$$

Решение. Имеем последовательно:

$$(x^3+6x^2+12x+8)-(x^3-6x^2+12x-8)=12x^2-12x-8,$$
$$x^3+6x^2+12x+8-x^3+6x^2-12x+8=12x^2-12x-8,$$
$$12x^2+16=12x^2-12x-8.$$

Перенесем все члены уравнения из правой части уравнения в левую, меняя при этом знаки:

$$12x^2+16-12x^2+12x+8=0.$$

После приведения подобных членов получим

$$12x+24=0, \quad 12x=-24, \quad x=-2.$$

4. Уравнение с переменной в знаменателе. Рассмотрим уравнения вида

$$\frac{ax+b}{P(x)}=0, \tag{3}$$

где x — переменная, a и b — действительные числа, $P(x)$ — многочлен, а также уравнения, сводимые к указанному виду. Эти уравнения не являются линейными, но включены в параграф о линейных уравнениях потому, что, как мы увидим, в процессе решения они сводятся к линейным.

Решение уравнения вида (3) основано на следующем утверждении: дробь m/n равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля (на ноль делить нельзя!). Записывают это так:

$$\begin{cases} m=0, \\ n\neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы решить уравнение вида (3), нужно сначала найти корень линейного уравнения $ax+b=0$, а затем выяснить, является ли при найденном значении переменной x истинным высказывание $p(x)\neq 0$. Если это высказывание истинно, то найденный корень линейного уравнения $ax+b=0$ является и корнем уравнения (3); если же это высказывание ложно (истинно высказывание $p(x)=0$), то уравнение (3) не имеет решений.

Примеры. 1. Решить уравнение $\frac{2x-3}{3x+5}=0$.

Решение Воспользовавшись указанным выше условием равенства дроби нулю, получим систему

$$\begin{cases} 2x-3=0, \\ 2x+5\neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения $2x-3=0$ находим $x=1,5$.

Так как высказывание $3\cdot 1,5+5\neq 0$ истинно, то $x=1,5$ — корень заданного уравнения.

2. Решить уравнение $\frac{3x-6}{x^2-x-2}=0$.

Решение. Имеем

$$\begin{cases} 3x-6=0, \\ x^2-x-2\neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения $3x-6=0$ находим $x=2$.

Высказывание $2^2-2-2\neq 0$ — ложно, значит, заданное уравнение не имеет решений

3. Решить уравнение $\frac{6}{x+2}+\frac{x+2}{2-x}=\frac{x^2}{4-x^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{6}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}-\frac{x^2}{4-x^2}=0,$$

$$\frac{6^{|x-2}}{x+2}-\frac{x+2^{|x+2}}{x-2}+\frac{x^{2|1}}{(x+2)(x-2)}=0,$$

$$\frac{6(x-2)-(x+2)^2+x^2}{(x+2)(x-2)}=0,$$

$$\frac{2x-16}{(x+2)(x-2)}=0,$$

откуда $2x-16=0$, $(x+2)(x-2)\neq 0$.

Из уравнения $2x-16$ находим $x=8$.

Высказывание $(8+2)(8-2)\neq 0$ истинно, значит $x=8$ — корень заданного уравнения.

5. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля. Напомним, что модуль числа a определяется следующим образом (см. стр. 33):

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Примеры. 1. Решить уравнение

$$|3x-5|=2.$$

Решение. В силу определения модуля можно написать, что

$$|3x-5|=\begin{cases} 3x-5, \text{ если } 3x-5\geqslant 0, \\ -(3x-5), \text{ если } 3x-5<0. \end{cases}$$

Это значит, что заданное уравнение распадается на два уравнения: $3x-5=2$, $3x-5=-2$. Из уравнения $3x-5=2$ находим $x=7/3$. Из уравнения $3x-5=-2$ находим $x=1$.

2. Решить уравнение $|2x-8|=3x+1$. (4)

Решение. Если $2x-8\geqslant 0$, то $|2x-8|=2x-8$ и уравнение (4) примет вид: $2x-8=3x+1$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} 2x-8\geqslant 0, \\ 2x-8=3x+1. \end{cases}$$

Из уравнения $2x-8=3x+1$ находим $x=-9$. Но при этом значении переменной высказывание $2(-9)-8\geqslant 0$ является ложным, значит, найденное значение не может быть корнем уравнения (4).

Если $2x-8<0$, то $|2x-8|=-(2x-8)$, и уравнение (4) принимает вид

$$-(2x-8)=3x+1.$$

Это можно записать так:

$$\begin{cases} 2x-8<0, \\ -(2x-8)=3x+1. \end{cases}$$

Из уравнения $-(2x-8)=3x+1$ находим $x=7/5$. Высказывание $2\cdot\frac{7}{5}-8<0$ — истинно, значит $x=7/5$ — корень уравнения (4).

Решение многих уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, значительно упрощается, если вспомнить, что $|a|=\rho(a;\,0)$, где $\rho(a;\,0)$ — расстояние от действительного числа a до нуля.

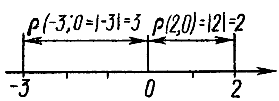


Рис. 60

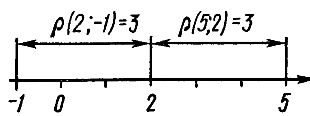


Рис. 61

Например, $\rho(-3;\,0)=|-3|=3$, $\rho(2;\,0)=|2|=2$ (рис. 60).

Аналогично, под $|a-b|$ можно понимать расстояние между действительными числами a и b, т. е. $\rho(a;\,b)$.

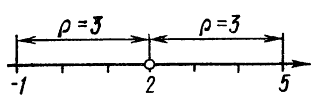


Рис. 62

Например, $\rho(5,\,2)=|5-2|=3$, $\rho(2;\,-1)=2-(-1)=3$ (рис. 61).

Примеры. Решить следующие уравнения:

3. $|x-2|=3$.

Решение. Надо найти такие точки x, расстояние которых до точки 2 равно 3. Как видно из рис. 62, $x=2+3=5$ или $x=2-3=$ $=-1$.

Ответ. $\{5;\,-1\}$.

4. $|2x-5|=4$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения следующим образом

$$|2x-5|=\left|2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right|=|2|\left|x-\frac{5}{2}\right|=2\left|x-\frac{5}{2}\right|,$$

откуда

$$2\left|x-\frac{5}{2}\right|=4;\quad \left|x-\frac{5}{2}\right|=2.$$

Окончательно имеем:

$$x_1=\frac{5}{2}+2=4{,}5;\quad x_2=\frac{5}{2}-2=0{,}5,\ \text{т. е. } \{4{,}5;\ 0{,}5\}.$$

5. $|x+3|=1$.

Решение. $|x+3|=\rho(x;\ -3)$, откуда

$$x=-3+1=-2;\quad x=-3-1=-4,\ \text{или } \{-2;\ -4\}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие две задачи могут быть поставлены относительно любого равенства с переменными?
2. Когда равенство с переменными называется уравнением?
3. Какое значение переменной называется корнем уравнения?
4. Какие уравнения называются равносильными?
5. Какие теоремы о равносильности уравнений вы знаете? Докажите одну из них.
6. Какое уравнение называется линейным?
7. На чем основано решение линейных уравнений?
8. Какова общая схема решения уравнений вида $\frac{ax+b}{P(x)}=0$, где $P(x)$ — некоторый многочлен?
9. Укажите два способа решения уравнений вида $|ax+b|=c$.
10. Дайте определение модуля действительного числа. В чем заключается геометрический смысл выражения $|a-b|$?

Упражнения

1. Решите следующие уравнения:

а) $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{3x-5}{2}$; б) $x-\frac{3x-2}{5}=3-\frac{2x-5}{3}$; в) $\frac{x-3}{8}+\frac{x+9}{12}=\frac{3x+7}{20}+3$; г) $\frac{x}{6}-\frac{x-1/2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$; д) $\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36$; е) $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4}-\frac{14-12x}{2}\right)=\frac{x-9}{2}-\frac{7}{8}$; ж) $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{12}=\frac{x-3}{4}+1$; з) $\frac{x+6}{2}+\frac{2(x+17)}{3}+\frac{5(x-10)}{6}=2x+6$.

2. Решите уравнения:

а) $\frac{2x-13}{2x-16}+\frac{2(x-6)}{x-8}=\frac{7}{8}+\frac{2(5x-39)}{3x-24}$; б) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$;

в) $\frac{7x+8}{21}-\frac{x+4}{8x-11}=\frac{x}{3}$; г) $\frac{5x-2}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3$;

д) $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}$.

3. Решите уравнения: а) $|x|=2$; б) $|x|=0$; в) $|x|=-1$; г) $|x-5|=2$; д) $|x-4|=0$; е) $|x+1|-2=0$; ж) $|2x-7|=3$; з) $|2x+5|=0$; и) $|2x+3|+1=0$.

4. Решить уравнения, используя определение модуля:

а) $|2x-3|=3x+2$; б) $|3x-1|=5-2x$; в) $|5x-2|=3x-8$.

§ 2. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Определение. *Уравнение вида* $ax^2+bx+c=0$, *где* a, b, c *— действительные числа, причем* $a\neq 0$, *а* x *— переменная, называется квадратным уравнением.*

Условились множитель a при x^2 называть *первым* (или *старшим*) *коэффициентом*, множитель b при x — *вторым коэффициентом*, а слагаемое c — *свободным членом*. Если $a=1$, то квадратное уравнение называется *приведенным*, если $a\neq 1$, то *неприведенным*.

В определении квадратного уравнения отмечено условие $a\neq 0$. Что же касается чисел b и c, то одно из них или оба могут обратиться в ноль — в этом случае квадратное уравнение называется *неполным*. Неполные квадратные уравнения решаются с помощью разложения левой части уравнения на линейные множители; если же такое разложение невозможно, то уравнение не имеет решений.

Примеры. **1.** Решить уравнение $2x^2-5x=0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x(2x-5)=0.$$

Если произведение равно нулю, то равен нулю либо первый, либо второй множитель, т. е. либо $x=0$, либо $2x-5=0$, откуда $x=2{,}5$.

Заданное уравнение имеет два корня: 0; 2,5.

2. Решить уравнение $x^2-7=0$.

Решение. Имеем:

$$x^2-(\sqrt{7})^2=0; \quad (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=0.$$

Уравнение имеет два корня: $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$.

3. Решить уравнение $\frac{4x^2-1}{3}-\frac{3x^2-8}{5}=1$.

Р е ш е н и е. Это уравнение нельзя назвать квадратным, но как мы сейчас увидим, оно преобразуется в неполное квадратное уравнение.

Освободимся от знаменателей, для чего обе части уравнения умножим на 15:

$$5(4x^2-1)-3(3x^2-8)=15.$$

Далее имеем:

$$20x^2-5-9x^2+24-15=0; \quad 11x^2+4=0.$$

Полученное неполное квадратное уравнение не имеет решений, так как его левая часть положительна при любом значении переменной x, а значит, отлична от нуля.

2. Формула корней квадратного уравнения. В предыдущем пункте мы говорили о том, как решаются неполные квадратные уравнения. А как быть в случае, когда дано полное квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$?

Выше (гл. IV, § 5) мы с помощью приема выделения полного квадрата преобразовали квадратный трехчлен к виду:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Значит, нам нужно решить уравнение

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0. \tag{2}$$

Положим $b^2-4ac=D$ и разделим обе части уравнения (2) на число $a\neq 0$. Получим уравнение

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0, \tag{3}$$

равносильное уравнению (2), а следовательно, и уравнению (1). Поэтому, отыскивая корни уравнения (3), мы тем самым находим и корни уравнения (1).

Итак, рассмотрим уравнение (3). Если $D<0$, то при любых x левая часть уравнения (3) положительна, а значит, уравнение (3) не имеет действительных решений. Если $D=0$, то уравнение (3) имеет вид:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0,$$

откуда находим $x=-\frac{b}{2a}$ — единственный корень уравнения (3).

Пусть, наконец, $D>0$. Тогда дробь $\frac{D}{4a^2}$ можно представить в виде $\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$, а уравнение (3) переписать следующим образом:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=0.$$

Разложив разность квадратов на множители, получим

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0,$$

что, в свою очередь, приводит к совокупности уравнений:

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}=0;\quad x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}=0.$$

Из первого уравнения находим $x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, из второго получаем $x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Обычно используют следующую краткую запись:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\quad \text{или}\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4}$$

Если в формуле (4) положить $D=0$, то получим $x=-\frac{b}{2a}$. Это означает, что формула (4) может применяться не только в случае $D>0$, но и в случае $D=0$.

Выражение $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом квадратного уравнения* (1). Мы видели, что если $D<0$, то уравнение (1) не имеет корней, если $D=0$, то уравнение имеет один корень, если $D>0$, то уравнение имеет два корня.

Формулу (4) иногда записывают в несколько ином виде:

$$x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{D}}{2}}{a},\quad \text{или}\quad x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}. \tag{5}$$

Здесь $\frac{D}{4}=\frac{b^2-4ac}{4}=\frac{b^2}{4}-ac=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac.$

Если положить $\frac{b}{2}=k$, то формула (5) примет вид:

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Формулой (5) целесообразно пользоваться в тех случаях, когда $\frac{b}{2}$ — целое число, т. е. когда коэффициент b есть четное число.

Примеры. 1. Решить уравнение $2x^2-5x+2=0$.

Решение. Здесь $a=2$, $b=-5$, $c=2$, $D=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=9$. Так как $D>0$, то уравнение имеет два корня, которые мы найдем по формуле (4)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm3}{4},$$

откуда $x=2$; $x=1/2$.

Ответ: $\{2;\ 1/2\}$.

2. Решить уравнение $x^2-6x+9=0$.

Решение. Здесь $a=1$, $b=-6$, $c=9$, $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=0$. По формуле (4) находим:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Замечание. Уравнение $x^2-6x+9=0$ можно решить и без использования формулы (4). Так как $x^2-6x+9=(x-3)^2$, то уравнение можно переписать в виде $(x-3)^2=0$, откуда находим $x=3$.

3. Решить уравнение $2x^2+8x+19=0$.

Решение. Имеем $a=2$, $b=8$, $c=19$. Так как b — четное число, то удобнее находить не D, а $D/4$.

$$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac;\quad \frac{D}{4}=\left(\frac{8}{2}\right)^2-2\cdot19=-22.$$

Так как $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

4. Решить уравнение $x^2-2\sqrt{7}x+3=0$.

Решение. Здесь $a=1$, $b=-2\sqrt{7}$, $c=3$, тогда $D/4=$ $=(\sqrt{7})^2-3=4$; значит, $x=\frac{\sqrt{7}\pm\sqrt{4}}{1}=\sqrt{7}\pm2$.

Уравнение имеет два корня: $\sqrt{7}+2$; $\sqrt{7}-2$.

В заключение заметим, что неполные квадратные уравнения тоже можно решать по формулам (4) и (5). Рассмотрим для примера уравнение $2x^2-5x=0$. Здесь $a=2$, $b=-5$, $c=0$, $D=25$. Значит, $x=\frac{5\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{5\pm5}{4}$, получаем два корня: 2,5; 0. Выше (пример 1 в п. 1) это уравнение было решено разложением на множители.

Теперь рассмотрим различные уравнения, решение которых сводится к решению квадратных уравнений.

5. Решить уравнение $(x-1)(x-2)(x-3)-(x^2+3)(x-5)+2x-$ $-33=0$.

Решение. Раскроем скобки в левой части уравнения, а затем приведем подобные члены:

$$(x^2-3x+2)(x-3)-(x^3-5x^2+3x-15)+2x-33=0,$$
$$x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6-x^3+5x^2-3x+15+2x-33=0,$$
$$-x^2+10x-24=0.$$

Умножив обе части последнего уравнения на (-1), получим

$$x^2-10x+24=0,\quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{1}=5\pm 1.$$

Уравнение имеет два корня: 6; 4.

6. Решить уравнение

$$\frac{x^2+2x+3}{4}-\frac{2x-1}{6}=\frac{3x^2+2x}{8}.$$

Решение. Освободимся от знаменателей, для чего умножим обе части уравнения на 24 (наименьшее общее кратное (K) чисел 4, 6, 8). Это преобразование, согласно теореме 2 из § 1, приводит к уравнению, равносильному данному. Получим:

$$6(x^2+2x+3)-4(2x-1)=3(3x^2+2x);$$

далее имеем:

$$6x^2+12x+18-8x+4=9x^2+6x,$$
$$3x^2+2x-22=0,$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+66}}{3}=\frac{-1\pm\sqrt{67}}{3}.$$

Ответ: $\left\{\frac{-1+\sqrt{67}}{3};\ \frac{-1-\sqrt{67}}{3}\right\}$.

7. Решить уравнение

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}.$$

Решение. Это уравнение содержит переменную в знаменателе. Для решения таких уравнений применяются рассуждения, подобные тем, что были проведены выше в п. 4 § 1. Перенесем все члены уравнения в левую часть и преобразуем полученное таким образом выражение в левой части уравнения в дробь:

$$\frac{2^{|2x}}{2-x}+\frac{1^{|x(2-x)}}{2}-\frac{4^{|2}}{x(2-x)}=0;$$

$$\frac{4x+x(2-x)-8}{x(2-x)}=0;\quad \frac{4x+2x-x^2-8}{x(2-x)}=0;\quad \frac{x^2-6x+8}{x(2-x)}=0.$$

Воспользовавшись отмеченным выше условием равенства дроби нулю, получим:

$$\begin{cases} x^2-6x+8=0, \\ x(2-x)\neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения $x^2-6x+8=0$ находим $x=2$, $x=4$.

Высказывание $2\cdot(2-2)\neq 0$ ложно, значит, 2 не является корнем заданного уравнения (при $x=2$ знаменатель обращается в ноль).

Высказывание $4(2-4)\neq 0$ истинно, значит, 4 — корень заданного уравнения.

Ответ: $\{4\}$.

8. Решить уравнение $x^4-10x^2+9=0$.

Решение. Положим $x^2=y$. Тогда уравнение примет вид $y^2-10y+9=0$, откуда находим $y=1$, $y=9$. Но $y=x^2$. Решив уравнения $x^2=1$; $x^2=9$, получаем четырехэлементное множество корней заданного уравнения $\{1;\ -1;\ 3;\ -3\}$.

Замечание. Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$, называется *биквадратным*. В только что рассмотренном примере мы решили биквадратное уравнение методом введения новой переменной ($x^2=y$). Этот метод, как будет показано в следующих примерах, может с успехом применяться для решения многих уравнений.

9. Решить уравнение $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0$.

Решение. Положим $x^2-3x=y$, получим

$$y^2+3y-28=0,$$

откуда находим $y=-7$, $y=4$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$x^2-3x=-7,\quad x^2-3x=4.$$

Рассмотрим первое уравнение совокупности. Имеем $x^2-3x+7=0$. Здесь $D=9-28=-21$, значит, уравнение не имеет действительных решений.

Рассмотрим второе уравнение совокупности. Имеем $x^2-3x-4=0$, откуда $x=4$; $x=-1$. Значит, множество корней заданного уравнения таково: $\{4;\ -1\}$.

10. Решить уравнение $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=3$.

Решение. Имеем:

$$(x-1)(x-4)=x^2-5x+4,$$
$$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6.$$

Заданное уравнение можно переписать в виде

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=3.$$

Введем новую переменную, положив $x^2-5x+4=y$; заметим при этом, что $x^2-5x+6=x^2-5x+4+2=y+2$. Получим

$$y(y+2)=3;\quad y^2+2y-3=0,\quad y=-3;\quad y=1.$$

Теперь остается решить совокупность уравнений

$$x^2-5x+4=-3,\quad x^2-5x+4=1.$$

Первое уравнение не имеет решений (проверьте), а из второго находим $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$; $x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

11. Решить уравнение

$$\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2. \qquad (6)$$

Решение. Положим $x^2+2x-3=y$, тогда $x^2+2x-8=(x^2+2x-3)-5=y-5$, и уравнение примет вид:

$$\frac{24}{y-5}-\frac{15}{y}=2.$$

Далее имеем:

$$\frac{24}{y-5}-\frac{15}{y}-2=0;$$

$$\frac{24y-15(y-5)-2y(y-5)}{y(y-5)}=0,$$

$$\frac{24y-15y+75-2y^2+10y}{y(y-5)}=0,$$

$$\frac{2y^2-19y-75}{y(y-5)}=0, \qquad (7)$$

$$\begin{cases} 2y^2-19y-75=0, \\ y(y-5)\neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения

$$2y^2-19y-75=0 \qquad (8)$$

находим

$$y=\frac{19\pm\sqrt{19^2+8\cdot 75}}{4}=\frac{19\pm\sqrt{961}}{4}=\frac{19\pm 31}{4}.$$

Значит, уравнение (8) имеет два корня: 12,5; —3.

Будут ли найденные решения уравнений (8) корнями уравнения (7)? Чтобы ответить на этот вопрос, выясним, будет ли при найденных значениях переменной y истинным высказывание $y(y-5)\neq 0$.

При $y=12,5$ высказывание $12,5(12,5-5)\neq 0$ истинно. При $y=-3$ высказывание $-3(-3-5)\neq 0$ истинно. Значит, 12,5 и —3 — корни уравнения (7).

Вспомним теперь, что $y=x^2+2x-3$. Значит, теперь нам нужно решить совокупность уравнений

$$x^2+2x-3=12,5,\ x^2+2x-3=-3.$$

Из первого уравнения находим $x=\frac{-2\pm\sqrt{66}}{2}$, из второго уравнения получаем $x=0$, $x=-2$.

Итак, множество корней заданного уравнения (6) имеет вид:

$$\left\{\frac{-2-\sqrt{66}}{2};\ -2;\ 0;\ \frac{-2+\sqrt{66}}{2}\right\}.$$

Рассмотрим еще пример решения уравнения, содержащего переменную под знаком модуля.

12. Решить уравнение

$$\frac{x^2-|x|-12}{x-3}=2x. \qquad (9)$$

Решение. Нужно рассмотреть два случая: 1) $x \geqslant 0$, 2) $x < 0$. Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$ и уравнение (9) примет вид:

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 3} = 2x.$$

Это можно записать так:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3} = 2x. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $\dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3} = 2x$:

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 3} - 2x = 0, \quad \frac{x^2 - x - 12 - 2x(x - 3)}{x - 3} = 0,$$

$$\frac{x^2 - 5x + 12}{x - 3} = 0, \tag{10}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 12 = 0, \\ x - 3 \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку уравнение $x^2 - 5x + 12 = 0$ не имеет действительных решений (проверьте), то уравнение (10) не имеет корней, а значит, не имеет корней и уравнение (9) в рассматриваемом случае $x \geqslant 0$.

Пусть теперь $x < 0$. Тогда $|x| = -x$ и уравнение (9) примет вид:

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 2x.$$

Это можно записать так:

$$\begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 2x. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $\dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 2x$:

$$\frac{x^2 + x - 12}{x - 3} - 2x = 0, \quad \frac{x^2 + x - 12 - 2x(x - 3)}{x - 3} = 0,$$

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = 0, \tag{11}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0, \\ x - 3 \neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$ находим $x = 3$; $x = 4$. Высказывание $3 - 3 \neq 0$ ложно, значит, $x = 3$ не является корнем уравнения (11). Высказывание $4 - 3 \neq 0$ истинно, значит $x = 4$ — корень уравнения (11).

Осталось выяснить, является ли число 4 корнем уравнения (9). Для этого нужно ответить на вопрос, будет ли при найденном значении переменной x истинным высказывание $x < 0$ (ведь уравнение (11) получено в случае $x < 0$). Поскольку высказывание $4 < 0$ ложно, то $x = 4$ не является корнем уравнения (9).

Таким образом, уравнение (9) не имеет корней.

3. Теорема Виета. Пусть дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ положителен. Тогда, как известно, уравнение имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Найдем сумму и произведение корней:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a};$$

итак, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. (12)

Замечание. При $D=0$ квадратное уравнение имеет один корень: $x=-\frac{b}{2a}$. Обычно считают, что при $D=0$ уравнение имеет два равных корня $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$. Тогда

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Значит, формулы для суммы и произведения корней квадратного уравнения справедливы для любого уравнения, имеющего корни. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема. *Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$.*

Следствие. Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1\cdot x_2=q, \tag{13}$$

т. е. сумма корней приведенного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Выведем еще некоторые соотношения между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Имеем:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Воспользовавшись формулами (13), получим

$$x_1^2+x_2^2=p^2-2q. \tag{14}$$

Рассмотрим еще сумму кубов корней:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)((x_1^2+x_2^2)-x_1x_2).$$

Воспользовавшись формулами (13) и (14), получим

$$x_1^3+x_2^3=-p(p^2-3q). \tag{15}$$

Теорема Виета имеет разнообразные применения. Так, пользуясь этой теоремой (а точнее, ее следствием), можно во многих случаях устно находить корни приведенного квадратного уравнения.

Примеры. 1. Решить уравнение $x^2-7x+12=0$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения (мы предположим, что они есть). Тогда $x_1 \cdot x_2=12$, т. е. x_1 и x_2 — числа одного знака. Далее, $x_1+x_2=7$, значит, x_1 и x_2 — положительные числа. Таким образом, нам нужно найти два положительных числа, сумма которых равна 7, а произведение 12. Легко сообразить, что этими числами являются 3 и 4. Итак, $x_1=3$, $x_2=4$ — корни данного уравнения.

2. Решить уравнение $x^2+11x+30=0$.

Решение. Имеем $x_1 \cdot x_2=30$, значит, x_1 и x_2 — числа одного знака. Далее, $x_1+x_2=-11$, значит, x_1 и x_2 — отрицательные числа. Какие два отрицательных числа дают в сумме -11, а в произведении 30? Это числа -5 и -6.

Итак, $x_1=-5$, $x_2=-6$ — корни уравнения.

3. Решить уравнение $x^2+2x-15=0$.

Решение. Здесь $x_1 \cdot x_2=-15$, значит, x_1 и x_2 — числа разных знаков. Далее, $x_1+x_2=-2$, значит, модуль отрицательного корня на 2 больше положительного корня. Нетрудно сообразить, что $x_1=-5$, $x_2=3$ — корни нашего уравнения.

Рассмотрим еще некоторые примеры применения теоремы Виета.

4. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы заданные числа α и β.

Решение. Будем искать квадратное уравнение в виде $x^2+px+q=0$, где p и q — пока неопределенные коэффициенты. Если α и β — корни записанного уравнения, то

$$\alpha+\beta=-p, \ \alpha\beta=q.$$

Естественно, возникает мысль выбрать коэффициенты p и q следующим образом: $p=-(\alpha+\beta)$, $q=\alpha\beta$.

Покажем, что уравнение

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \tag{16}$$

на самом деле имеет корни α и β.

Имеем:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x^2-\alpha x)-(x\beta-\alpha\beta)=$$
$$=x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=(x-\beta)(x-\alpha).$$

Значит, уравнение (16) можно переписать следующим образом:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0.$$

Очевидно, что полученное уравнение имеет корни α и β, что и требовалось доказать.

Итак, искомое квадратное уравнение имеет вид. $x^2+px+q=0$, где $p=-(\alpha+\beta)$, $q=\alpha\beta$, т. е.

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

Рассмотрим некоторые конкретные случаи. Составим квадратное уравнение с корнями 7 и -3. Будем искать уравнение в виде $x^2+px+q=0$. Имеем $p=-(7-3)=-4$, $q=7\cdot(-3)=-21$; получаем $x^2-4x-21=0$.

Составим квадратное уравнение с корнями $1\frac{2}{5}$ и $-\frac{5}{7}$. Будем искать уравнение в виде $x^2+px+q=0$. Имеем:

$$p=-\left(1\frac{2}{5}-\frac{5}{7}\right)=-\left(\frac{7}{5}-\frac{5}{7}\right)=-\frac{24}{35},\ q=1\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=$$
$$=-\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=-1;$$

получаем:

$$x^2-\frac{24}{35}x-1=0, \text{ или } 35x^2-24x-35=0.$$

5. Пусть α и β — корни уравнения $2x^2-3x-7=0$. Не вычисляя α и β, составить квадратное уравнение с корнями $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\beta}{\alpha}$.

Решение. Будем искать требуемое уравнение в виде

$$x^2+px+q=0.$$
$$p=-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta},\quad q=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1.$$

По условию α и β — корни уравнения $2x^2-3x-7=0$, или $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}=0$; тогда $\alpha\beta=-\frac{7}{2}$. Воспользовавшись формулой (14), получим

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{9}{4}+7=\frac{37}{4};$$

значит, $p=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\frac{\frac{37}{4}}{-\frac{7}{2}}=\frac{37\cdot 2}{4\cdot 7}=\frac{37}{14}$.

Итак, коэффициенты p и q искомого квадратного уравнения найдены. $p=\frac{37}{14}$, $q=1$. Уравнение имеет вид

$$x^2+\frac{37}{14}x+1=0, \text{ или } 14x^2+37x+14=0.$$

4. Разложение квадратного трехчлена на множители. *Корнем* многочлена $P(x)$ называется такое значение переменной x, при котором $P(x)=0$. Пусть дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c и x_1, x_2 — его корни. Значит, x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Тогда по теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Воспользовавшись этим, выполним следующие преобразования:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$
$$=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)=a((x^2-xx_1)-(xx_2-x_1x_2))=$$
$$=a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right)=a(x-x_1)(x-x_2);$$

итак,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \tag{17}$$

где x_1, x_2 — корни трехчлена ax^2+bx+c.

Полученное тождество (17) называется *формулой разложения квадратного трехчлена на множители*.

Примеры разложения на множители. **1.** $2x^2-5x+2$.

Решение. Из уравнения $2x^2-5x+2=0$ находим $x_1=2$, $x_2=1/2$; значит,

$$2x^2-5x+2=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x-1).$$

2. $4x^2+4x+1$.

Решение. Из уравнения $4x^2+4x+1=0$ находим $x_1=x_2=-1/2$; поэтому

$$4x^2+4x+1=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(2x+1)^2.$$

3. $x^2-8x-33$.

Решение. Из уравнения $x^2-8x-33=0$ находим (устно!) $x_1=11$, $x_2=-3$, тогда

$$x^2-8x-33=1(x-11)(x+3)=(x-11)(x+3).$$

4. $3x^2+3x+8$.

Решение Уравнение $3x^2+3x+8=0$ не имеет действительных корней ($D=3^2-4\cdot3\cdot8<0$); поэтому трехчлен $3x^2+3x+8$ не разлагается на линейные множители.

Вопросы для самопроверки

1. Что таксе квадратнсе уравнение?
2 В каком случае квадратнсе уравнение называется приведенным, а в каком неприведенным?
3. Какое квадратное уравнение называется неполным? Какие виды неполных квадратных уравнений вы знаете?
4. Как решаются неполные квадратные уравнения?
5. Какое выражение называется дискриминантом квадратного уравнения?

6. Выведите формулу корней квадратного уравнения.

7. Как записывается формула корней квадратного уравнения в случае четного b?

8. Какое уравнение называется биквадратным? Укажите общий метод решения биквадратных уравнений.

9. Сформулируйте и докажите теорему Виета.

10. Как читается теорема Виета для приведенного квадратного уравнения?

11. Выведите формулу разложения квадратного трехчлена на множители.

Упражнения

1. Решите уравнения: а) $9x^2-361=0$; б) $0{,}0009x^2=0{,}6084$; в) $7\frac{1}{4}-\frac{3}{5}x^2=3\frac{1}{2}$; г) $4x^2+6x=9x^2-15x$; д) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3$; е) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$; ж) $x^2-|x|=0$.

2. Решите уравнения: а) $x^2+12x-64=0$; б) $x^2+14x+24=0$; в) $x^2-x-12=0$; г) $4x^2+12x+9=0$; д) $10x^2-x+1=0$.

3. Решите уравнения:

а) $1-\frac{3-2x}{5-x}=\frac{3}{3-x}-\frac{x+3}{x+1}$; б) $\frac{x+1}{4x}-\frac{5x-1}{2x-4}=\frac{8-x}{3x^2-6x}-\frac{x-5}{x-2}$;

в) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{7+18x}{x^3-1}$; г) $\frac{1}{4x+8}=\frac{20x+1}{4x^2-16}-\frac{7-5x}{x^2-4x+4}$;

д) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$;

е) $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-11}-\frac{1}{x-10}$.

4. Решите уравнения методом введения новой переменной:

а) $x^4-13x^2+36=0$; б) $3x^4-28x^2+9=0$; в) $3x^4-7x^2+2=0$; г) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$; д) $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$;

е) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)-4=0$.

5. Не решая следующих уравнений, определите, какие из них имеют два различных корня, два равных корня или не имеют корней: а) $x^2-4x+3=0$; б) $x^2+7x+15=0$; в) $x^2-2x+5=0$; г) $x^2-10x+25=0$; д) $3x^2+x-1=0$; е) $4x^2+6x+9=0$; ж) $4x^2-12x+9=0$.

6. При каких значениях a следующие уравнения имеют по два равных корня: а) $9x^2+6x+a=0$; б) $x^2+2(a-4)x+a^2+6a+3=0$; в) $(2+a)x^2+6ax+4a+1=0$?

7. При каком значении k уравнение:

а) $x^2+kx+15=0$ имеет корень, равный 5;

б) $x^2+kx-24=0$ имеет корень, равный -3;

в) $kx^2+12x-3=0$ имеет корень, равный $1/5$?

8. Составьте квадратное уравнение с корнями x_1 и x_2, если:

а) $x_1=-2$, $x_2=8$; б) $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{1}{2}$, в) $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{3}$;

г) $x_1=\frac{3+2\sqrt{5}}{3}$, $x_2=\frac{3-2\sqrt{5}}{3}$; д) $x_1=\frac{m+n}{2}$, $x_2=\frac{m-n}{2}$.

9. Разложите на множители следующие трехчлены:
а) $x^2-2x-35$; б) $a^2-29a+198$; в) m^2-m-12; г) $5x^2+17x-126$; д) $2m^2-m-3$.

10. Сократите следующие дроби:
а) $\frac{x^2+6x-91}{x^2+8x-105}$; б) $\frac{b^2-9bx+14x^2}{b^2-bx-2x^2}$; в) $\frac{2a^2+8a-90}{3a^2-36a+105}$.

11. Не решая уравнения $x^2+3x-15=0$, найдите: а) сумму квадратов его корней; б) сумму кубов его корней.

12. Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы а) на 1 больше; б) на 0,1 меньше соответствующих корней уравнения $2x^2-5x+2=0$.

13. Составьте квадратное уравнение, корни которого равнялись бы квадратам соответствующих корней уравнения $5x^2-x-2=0$.

14. Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы обратны соответствующим корням уравнения $2x^2-8x+3=0$.

15. Дано квадратное уравнение $x^2+px+q=0$. Составьте новое квадратное уравнение, корни которого были бы: а) вдвое больше корней данного уравнения; б) обратны корням данного уравнения, в) равны квадратам корней данного уравнения; г) равны кубам корней данного уравнения; д) на $p/2$ больше корней данного уравнения.

16. Решите уравнение $x^2-8x+q=0$, зная, что сумма квадратов его корней равна 34.

§ 3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1. Основные понятия. Рассмотрим уравнения с двумя переменными. Пусть дано уравнение $x-3y=10$. При каких значениях переменных x, y получится верное равенство? Если $x=10$, а $y=0$, то $x-3y=10$ — верное равенство, если $x=16$, $y=2$, то $x-3y=10$ — верное равенство; если же $x=-2$, $y=-3$, то $x-3y=10$ — неверное равенство; если $x=-2$, $y=-4$, то $x-3y=10$ — верное равенство.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Если дано уравнение с двумя переменными x, y, то принято в записи его решения на первое место ставить значение переменной x, а на второе — значение y. Так, решениями уравнения $x-3y=10$, согласно вышеизложенному, будут пары (10; 0), (16; 2), (—2; —4), а пара (—2; —3) решением уравнения не является.

Ясно, что это уравнение имеет и другие решения; более того, уравнение имеет бесконечное множество решений. Для их отыскания удобно выразить одну переменную через другую, например x через y: $x = 10 + 3y$. Выбрав произвольное значение y, вычислим соответствующее значение x. Например, если $y = 7$, то $x = 10 + 3 \cdot 7 = 31$, т. е. пара (31; 7) тоже является решением нашего уравнения. Вообще, множество решений заданного уравнения можно записать так:

$$A = \{(10 + 3y;\ y) \mid y \in R\}.$$

Впрочем, можно было y выразить через x: $y = (x - 10)/3$. Тогда множество решений заданного уравнения запишется следующим образом:

$$A = \left\{\left(x;\ \frac{x-10}{3}\right) \middle| x \in R\right\}.$$

Рассмотрим еще одно уравнение с двумя переменными

$$x^2 - 24y = 100.$$

Выразив y через x, получим $y = (x^2 - 100)/24$. Тогда множество B решений уравнения можно записать следующим образом:

$$B = \left\{\left(x,\ \frac{x^2-100}{24}\right) \middle| x \in R\right\}.$$

Выпишем некоторые решения: (0; —25/6), (10; 0), (—1, —33/8), (—2; —4). Замечаем, что среди решений рассмотренного ранее уравнения $x - 3y = 10$ и уравнения $x^2 - 24y = 100$ есть общие — (10; 0) и (—2; 4). Эти пары принадлежат пересечению множеств A и B.

Если ставится задача найти все общие решения двух или нескольких уравнений, то говорят, что надо решить *систему уравнений*.

Пара значений переменных, обращающая в верное равенство каждое уравнение с двумя переменными, входящее в систему, называется решением системы уравнений.

Решить систему — значит найти множество ее решений. Если A — множество решений первого уравнения, а B — множество решений второго уравнения, то множество C решений системы этих уравнений есть пересечение множеств A и B: $C = A \cap B$.

Так, система уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ x^2 - 24y = 100 \end{cases}$$

имеет следующие решения: (10; 0) и (—2; —4). Правда, пока мы не можем утверждать, что указанная система решена — ведь она может иметь и другие решения, кроме двух найденных (позднее мы увидим, что на самом деле других решений эта система не имеет).

Две системы уравнений называются равносильными, если множества их решений совпадают. Если, в частности, обе системы не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Мы говорили уже о том, что при решении уравнения с одной переменной заменяют одно уравнение другим, более простым, но равносильным данному. При решении систем уравнений обычно поступают аналогично: заменяют одну систему другой, более простой или по каким-либо причинам более «удобной» для нас, но равносильной первоначальной. Возможность такой замены обусловлена следующими двумя теоремами, которые мы приводим без доказательства.

Теорема 1. *Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной.*

Так, системы

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=100 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=3y+10, \\ x^2-24y=100 \end{cases}$$

равносильны: мы заменили уравнение $x-3y=10$ равносильным уравнением $x=3y+10$, а уравнение $x^2-24y=100$ оставили без изменения.

Аналогично, равносильными будут системы

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=100 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-3y=10, \\ \frac{1}{8}x^2-3y=\frac{25}{2}. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение системы оставлено без изменения, а второе заменено равносильным (обе части второго уравнения мы разделили на 8).

Следствие. *Если каждое уравнение системы заменить равносильным уравнением, то получится система, равносильная данной.*

Так, равносильными будут системы

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=100 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=\dfrac{x-10}{3}, \\ y=\dfrac{x^2-100}{24}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, то полученная система будет равносильна заданной.*

Так, системы

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=100 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-3y+x^2-24y=110, \\ x^2-24y=100 \end{cases}$$

равносильны: мы заменили уравнение $x-3y=10$ суммой двух уравнений заданной системы, а уравнение $x^2-24y=100$ оставили неизменным.

Аналогично, равносильными будут системы

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=100 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-3y=10, \\ (x^2-24y)-(x-3y)=90. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение неизменно, а второе уравнение первой системы заменено разностью второго и первого ее уравнений.

Остановимся на основных методах решения систем.

2. Метод подстановки. Пусть дана система

$$\begin{cases} x=4. \\ 2x+3y=17. \end{cases} \tag{1}$$

Первое уравнение этой системы можно считать уравнением с двумя переменными x и y, для этого достаточно переписать уравнение в виде $x+0\cdot y=4$. Решением этого уравнения является любая пара вида $(4,\ y)$, где y — любое действительное число. Ясно, что не всякая пара $(4,\ y)$ является решением второго уравнения заданной системы: если $x=4$, то уравнение $2x+3y=17$ обращается в уравнение $8+3y=17$, откуда находим $y=3$. Итак, если $x=4$, то только пара $(4;\ 3)$ является решением уравнения $2x+3y=17$. Поскольку эта пара, как всякая пара вида $(4;\ y)$, является в то же время и решением первого уравнения системы (1), то $(4;\ 3)$ — решение системы (1) и притом единственное.

Фактически система (1) решена следующим образом: значение переменной x, определяемое первым уравнением, подставлено вместо x во второе уравнение. Из полученного таким образом уравнения с переменной y найдено соответствующее значение y.

Такой метод решения системы носит название *метода подстановки* и используется довольно часто, но, как правило, несколько более общим образом: одно из уравнений системы преобразуют к виду, разрешенному относительно одной переменной, например, y выражают через x. Далее, полученное выражение подставляют вместо y во второе уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной x. Находят корни этого уравнения, а затем, воспользовавшись выражением y через x, находят соответствующие значения y.

Примеры: 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=100. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим $x=3y+10$. Подставим выражение $3y+10$ вместо x во вторсе уравнение системы, тогда

$$(3y+10)^2-24y=100$$

и далее

$$9y^2+36y=0, \quad y(y+4)=0,$$

$y_1=0$; $y_2=-4$.

Соответствующие значения x найдем из уравнения $x=3y+10$. Если $y=0$, то $x=10$; если $y=-4$, то $x=-2$.

Итак, система имеет два решения: $(-2; -4)$; $(10; 0)$, т. е. множество решений системы таково:

$$\{(-2; -4); (10; 0)\}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 20x-4y=1, \\ 5x-y=7. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы находим $y=5x-7$. Подставив выражение $5x-7$ вместо y в первое уравнение системы, получим:

$$20x-4(5x-7)=1, \quad 28=1.$$

Полученное высказывание является ложным при любом x. Это значит, что заданная система уравнений не имеет решений (множество ее решений пусто).

3. Метод сложения. Суть этого метода поясним на примерах.

Примеры. 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x-y=16. \end{cases} \tag{2}$$

Решение. Умножив обе части второго уравнения системы на 3, получим систему

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 9x-3y=48, \end{cases} \tag{3}$$

равносильную данной по теореме 1.

Сложим теперь оба уравнения полученной системы. По теореме 2 система

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ (9x-3y)+(2x+3y)=48+7 \end{cases} \tag{4}$$

будет равносильна системе (3). Система (4) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 11x=55. \end{cases}$$

Из уравнения $11x=55$ находим $x=5$. Подставив это значение в уравнение $2x+3y=7$, находим $y=-1$.

Итак, $(5; -1)$ — решение системы (4), а значит, и решение равносильной ей системы (2).

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0, \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0. \end{cases}$$

Решение. Если обе части первого уравнения системы умножить на 2 и вычесть полученное уравнение из второго уравнения системы, то взаимно уничтожаются члены, содержащие переменные во второй степени:

$$(2x^2+2y^2+x-5y-1)-(2x^2+2y^2-4x+6y-18)=0,$$
$$5x-11y+17=0.$$

Мы приходим к более простой системе

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0, \\ 5x-11y+17=0, \end{cases}$$

которую нетрудно решить методом подстановки:

$$\begin{cases} x=\dfrac{11y-17}{5}, \\ \left(\dfrac{11y-17}{5}\right)^2+y^2-2\cdot\left(\dfrac{11y-17}{5}\right)+3y-9=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы имеем.

$$121y^2-374y+289+25y^2+170-110y+75y-225=0,$$
$$146y^2-409y+234=0,$$
$$y_1=2; \qquad y_2=117/146.$$

Так как $x=(11y-17)/5$, то при $y=2$ получаем $x=1$, при $y=117/146$ получаем $x=-239/146$.

Итак, заданная система имеет два решения: (1; 2); (—239/146; 117/146).

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2-2xy=160, \\ x^2-3xy-2y^2=8. \end{cases} \tag{5}$$

Решение. Умножим обе части второго уравнения системы на 20 и вычтем полученнсе уравнение из первого уравнения системы:

$$\begin{cases} 3x^2-2xy=160, \\ (3x^2-2xy)-20(x^2-3xy-2y^2)=160-8\cdot 20. \end{cases} \tag{6}$$

Второе уравнение системы (6) преобразуется к виду:

$$17x^2-58xy-40y^2=0. \tag{7}$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно x. Применив формулу корней квадратного уравнения, получим:

$$x=\frac{29y \pm \sqrt{841y^2+680y^2}}{17}=\frac{29y \pm 39y}{17},$$

$$x_1=4y;\ x_2=-\frac{10}{17}y.$$

Итак, уравнение (7) распадается на два уравнения: $x=4y$; $x=-\dfrac{10}{17}y$, и в соответствии с этим система (6) распадается на две системы (получается совокупность двух систем):

$$\begin{cases} 3x^2-2xy=160, \\ x=4y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x^2-2xy=160, \\ x=-\dfrac{10}{17}y. \end{cases}$$

Каждая из этих систем решается методом подстановки (сделайте это!).

Ответ: $\{(8;\ 2);\ (-8;\ -2);\ (\sqrt{10};-17\sqrt{10}/10);\ (-\sqrt{10};\ 17\sqrt{10}/10)\}$.

4. Метод введения новых переменных. Этот метод мы также рассмотрим на примерах.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2-2(x+y)=15, \\ xy=6, \end{cases} \tag{8}$$

Решение. Положим $x+y=z$, тогда первое уравнение системы (8) примет вид: $z^2-2z=15$, откуда находим: $z_1=5$, $z_2=-3$. Значит, первое уравнение системы (8) равносильно совокупности двух уравнений:

$$x+y=5,\quad x+y=-3.$$

Соответственно система (8) распадается на две системы:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-3, \\ xy=6. \end{cases}$$

Каждая из систем решается методом подстановки, при этом вторая система не имеет действительных решений.

Ответ: $\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2, \\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7. \end{cases} \tag{9}$$

Решение Положим $\dfrac{1}{x+y}=u$, $\dfrac{1}{x-y}=v$. Тогда система (9) примет вид:

$$\begin{cases} u+v=2, \\ 3u+4v=7, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} u=1, \\ v=1. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным x и y, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=1, \\ \dfrac{1}{x-y}=1 \end{cases} \quad \text{и далее} \quad \begin{cases} x+y=1, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Последняя система, а с нею и заданная система (9), имеет единственное решение $(1;\ 0)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется решением уравнения с двумя переменными?
2. Что значит решить систему уравнений?
3. Какие две системы уравнений называются равносильными?
4. Какие теоремы о равносильности систем уравнений вы знаете?
5. Какие методы решения систем вы знаете?

Упражнения

1. Дано уравнение $3x-2y=5$. Запишите множество решений этого уравнения. Выпишите некоторые решения.

2. Составьте уравнение, множеством решений которого является множество $A=\left\{x;\ \dfrac{x-5}{2}\ \middle|\ x\in R\right\}$.

3. Составьте уравнение, множеством решений которого является множество $A=\{(2y+5)\mid y\in R\}$. Сравните это уравнение с уравнением, полученным в упражнении 2.

4. Составьте уравнение с двумя переменными, решением которого служит пара чисел: 1) $(2;\ 5)$; 2) $(-2;\ 0)$; 3) $\left(\dfrac{2}{5};\ -0{,}3\right)$.

5. Дано уравнение $x+y=13$. Найдите все пары натуральных чисел, которые удовлетворяют данному уравнению.

6. Следующие системы решите двумя методами — методом подстановки и методом сложения:

а) $\begin{cases} 3x+4y-29=0, \\ 9x-2y-17=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+5y+9=0, \\ 2x-y-7=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9x+8y-21=0, \\ 6x+4y-13=0. \end{cases}$

7. Покажите, что следующие системы уравнений не имеют решений:

а) $\begin{cases} 5x+3y=10, \\ 10x+6y=-5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 6x-9y=2. \end{cases}$

8. Покажите, что следующие системы уравнений имеют бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 6x-3y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ 4x+2y=0. \end{cases}$

9. Решите системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{7x-3y}{5}=\dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x+y}{2}, \\ 3(x-1)=5(y+1); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{5}(x+2)=1{,}1, \\ x-2y+4=\dfrac{1}{4}\left(2x+3\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\right). \end{cases}$

10. Решите следующие системы уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3, \\ x+y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2-5xy+y^2+10x+ \\ +12y=100, \\ 2x-3y=1. \end{cases}$

11. Решите следующие системы методом сложения:

а) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x+y-xy=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2-2xy+2y^2=14, \\ x^2+xy-y^2=5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=10, \\ 5xy-2x^2+7x-8y=10. \end{cases}$

12. При решении следующих систем используйте метод введения новых переменных:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{26}{5}, \\ x^2-y^2=24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{20}, \\ x^2-y^2=9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

§ 4. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

1. Графическое решение уравнений с одной переменной. На практике довольно часто оказывается, что решение уравнения $f(x)=0$ сопряжено с громоздкими выкладками. В таких случаях прибегают к тому или иному методу приближенного решения уравнения. Здесь мы рассмотрим графический метод, который, хотя и не обеспечивает хорошей точности, но является одним из наиболее простых. Он заключается в следующем: строят график функции $y=f(x)$ и находят абсциссы точек пересечения графика с осью Ox. Так, для решения уравнения $x^2-5x-3=0$ достаточно построить график функции $y=x^2-5x-3$ и найти абсциссы точек пересечения этого графика с осью Ox.

Однако во многих случаях указанный выше метод графического решения уравнения не очень удобен. Так, для нахождения корней уравнения $x^3-3x=0$ потребовалось бы построить график функции $y=x^3-3x$, а это достаточно трудная задача. В подобных случаях уравнение $f(x)=0$ преобразуют к виду $g(x)=h(x)$, затем строят графики функций $y=g(x)$ и $y=h(x)$ (если, разумеется, это проще, чем построение графика функции $y=f(x)$) и находят абсциссы точек пересечения построенных графиков.

Так, для решения уравнения $x^3-3x=0$ можно преобразовать уравнение к виду $x^3=3x$, затем построить графики функций $y=x^3$ и $y=3x$ и найти абсциссы точек пересечения этих графиков.

Ясно, что уравнение $f(x)=0$ может быть преобразовано к виду $g(x)=h(x)$ разными способами. Например, уравнение $x^2-5x-3=0$ можно преобразовать в одно из следующих уравнений:

$$x^2=5x+3,\quad x^2-3=5x,\quad x^2-5x=3.$$

В первом случае надо строить графики функций $y=x^2$ и $y=5x+3$, во втором — $y=x^2-3$ и $y=5x$, в третьем — $y=x^2-5x$ и $y=3$.

Примеры. 1. Решить графически уравнение $x^2-x-2=0$.

Решение Заданное уравнение целесообразно переписать в виде $x^2=x+2$. Теперь решение уравнения может быть сведено к нахождению абсцисс точек пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=x+2$. На рис. 63 построены в одной системе координат графики функций $y=x^2$ и $y=x+2$. Определяем абсциссы точек A и B пересечения этих графиков $x_A=-1$; $x_B=2$.

Таким образом, заданное уравнение имеет два корня. -1; 2.

2. Решить графически уравнение $\sqrt{x}=x^3-1$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x^3-1$ (рис. 64). Они пересекаются в точке A, абсцисса которой примерно равна 1,3. Значит, заданное уравнение имеет единственное решение $x \approx 1{,}3$.

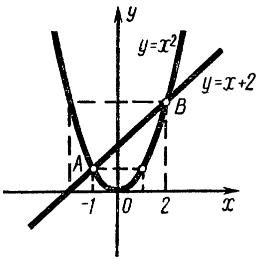


Рис. 63

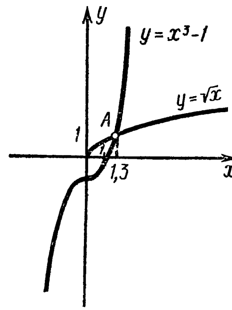


Рис. 64

2. График уравнения с двумя переменными. *Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек плоскости, координаты которых служат решениями этого уравнения.*

Пусть, например, дано уравнение $2x-y=3$. Преобразуем его к виду $y=2x-3$ и построим график линей-

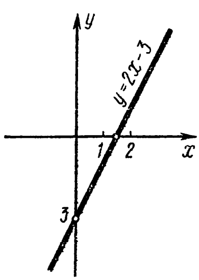


Рис. 65

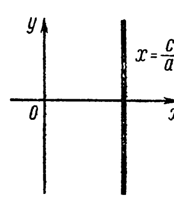


Рис 66

ной функции $y=2x-3$ (рис. 65). Это и есть график уравнения $2x-y=3$.

Рассмотрим теперь произвольное линейное уравнение $ax+by=c$, где a, b, c — действительные числа, причем хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля.

Пусть $b \neq 0$. Тогда уравнение можно преобразовать к виду:

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}.$$

Графиком линейной функции $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ является прямая. Она и будет графиком уравнения $ax+by=c$ в случае $b\neq 0$.

Пусть теперь $b=0$. Тогда уравнение принимает вид: $ax=c$ или $x=\frac{c}{a}$ (если $b=0$, то из условия следует,

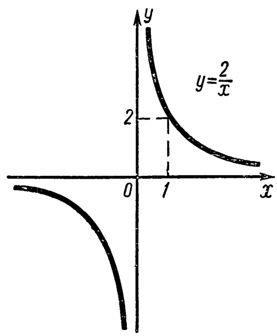


Рис. 67

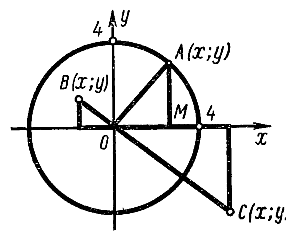


Рис. 68

что $a\neq 0$). Множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $x=\frac{c}{a}$, есть прямая, параллельная оси ординат (рис. 66).

Итак, графиком любого линейного уравнения с двумя переменными является прямая линия.

Построим график уравнения $xy=2$. Преобразуем уравнение к виду $y=\frac{2}{x}$ и построим график функции $y=\frac{2}{x}$ (рис. 67). Построенная гипербола и служит графиком уравнения $xy=2$.

Рассмотрим еще уравнение $x^2+y^2=16$. Докажем, что его графиком является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4 (рис. 68).

Пусть точка $A(x, y)$ — произвольная точка окружности, не принадлежащая ни одной из осей координат. Тогда из прямоугольного треугольника OAM по теореме Пифагора получаем: $|OM|^2+|AM|^2=|OA|^2$. Но $|OM|=|x|$, $|AM|=|y|$, $|OA|=4$; значит, $x^2+y^2=16$.

Очевидно, что координаты каждой из четырех точек пересечения окружности с осями координат: (4; 0), (0; 4), (—4; 0) и (0; —4) также удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=16$.

Итак, уравнению $x^2+y^2=16$ удовлетворяют координаты любой точки рассматриваемой окружности.

Покажем теперь, что если точка не лежит на окружности, то ее координаты не удовлетворяют рассматриваемому уравнению. В самом деле, если точка $B(x, y)$ лежит внутри окружности, то $x^2+y^2<16$, а если точка $C(x, y)$ лежит вне окружности, то $x^2+y^2>16$ (рис. 68). Итак, окружность с центром в начале координат и радиусом 4 является графиком уравнения $x^2+y^2=16$.

Вообще, окружность с центром в начале координат и радиусом, равным r, является графиком уравнения $x^2+y^2=r^2$, где x и y — переменные, r — положительное число.

3. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными. Для того чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя переменными, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

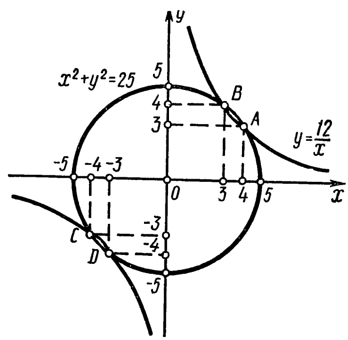


Рис. 69

Пример. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$$

Решение. Графиком уравнения $x^2+y^2=25$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5. Графиком уравнения $xy=12$ является гипербола $y=\frac{12}{x}$. Построив эти графики в одной системе координат (рис. 69), найдем координаты точек A, B, C, D пересечения окружности и гиперболы: $A(4;\ 3)$, $B(3;\ 4)$, $C(-4;\ -3)$, $D(-3;\ -4)$. Значит, множество решений заданной системы таково: $\{(4;3); (3;4); (-4;-3); (-3;-4)\}$.

4. Графическое истолкование решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными зависит от взаимного расположения на координатной плоскости прямых, служащих графиками этих уравнений. Но две прямые на плоскости могут пересекаться — в этом случае система будет иметь единственное решение, могут быть параллельны — в этом случае система не будет иметь решений, и, наконец, прямые могут совпасть — в этом случае система будет иметь бесконечное множество решений.

Примеры. **1.** Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 4x+3y=12. \end{cases}$$

Решение. Из уравнения $2x-y=1$ находим $y=2x-1$; из уравнения $4x+3y=12$ находим $y=-\frac{4}{3}x+4$. Построим в одной си-

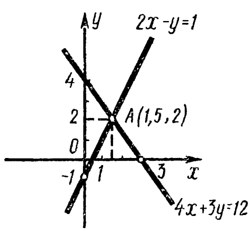


Рис. 70

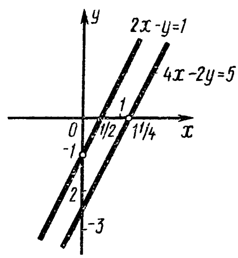


Рис. 71

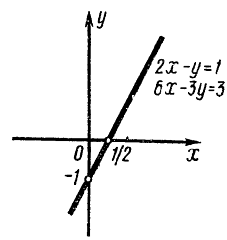


Рис. 72

стеме координат прямые $y=2x-1$ и $y=-\frac{4}{3}x+4$ (рис. 70) Они пересекаются в точке A (1,5; 2)· Значит, система имеет единственное решение (1,5; 2).

2. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 4x-2y=5. \end{cases}$$

Решение. Из уравнения $2x-y=1$ находим $y=2x-1$, из уравнения $4x-2y=5$ находим $y=2x-2,5$. Прямые $y=2x-1$ и $y=2x-2,5$ параллельны (рис. 71), значит, система не имеет решений.

3. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 6x-3y=3. \end{cases}$$

Решение. Из уравнения $2x-y=1$ находим $y=2x-1$, из уравнения $6x-3y=3$ находим $y=2x-1$. Значит, графиком каждого из уравнений системы является одна и та же прямая $y=2x-1$, прямые совпадают (рис. 72). Координаты любой точки прямой являются решением системы. Значит, в этом случае система имеет бесконечное множество решений.

Итак, система двух линейных уравнений с двумя переменными может иметь одно решение, не иметь ни одного решения, иметь бесконечное множество решений.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается графический метод решения уравнения $f(x)=0$?
2. Укажите возможные способы графического решения уравнения $x^3-8x+5=0$.
3. Что называют графиком уравнения с двумя переменными?
4. Что представляет из себя график любого линейного уравнения?
5. Что является графиком уравнения $x^2+y^2=49$?
6. В чем заключается графический метод решения системы двух уравнений с двумя переменными?

Упражнения

1. Решите графически следующие уравнения:

а) $2x-6=0$; б) $4x-2=2x-1$; в) $7-3x=10-5x$;
г) $x^2=6x-5$; д) $x^3=2x-1$; е) $x^3-x=0$

2. Постройте графики следующих уравнений:

а) $3x+4y=-8$, б) $2x+0y=10$; в) $0x-3y=-3$; г) $x^2=y^2$; д) $y=|x|$;
е) $y=x+|x|$; ж) $y=x-|x|$; з) $y=x|x|$; и) $x^2+y^2=25$;
к) $3xy+5=0$; л) $x^2=2y$; м) $y^2-x=0$; н) $\frac{y-x}{x-1}=0$; о) $\frac{y-x^2}{x}=0$.

3. Решите графически следующие системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y=9, \\ x+2y=-2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 2x+4y=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+2y=7. \end{cases}$

4. Решите графически системы уравнений.

а) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=-12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y=5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy=8, \\ y=x^2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y=x^2, \\ x^2-4y^2=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y^2-x^2=0, \\ y+x=0. \end{cases}$

§ 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С помощью уравнений легко решаются многочисленные задачи, к которым приводят самые разнообразные вопросы физики, механики, экономики и многих других прикладных наук. Прежде всего напомним общий порядок решения задач с помощью уравнений: 1) буквами x, y, z обозначаются неизвестные, которые требуется определить в задаче, 2) с помощью введенных переменных и данных в задаче чисел составляется система уравнений (или одно уравнение), 3) решается полученная система уравнений (или уравнение).

Рассмотрим некоторые примеры решения задач с помощью составления уравнений.

1. Два автомобиля выезжают из одного города в другой. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго и поэтому первый автомобиль приезжает на место на один час раньше второго. Определить скорость того и другого автомобиля, если известно, что расстояние между городами 560 км.

Решение. Обозначим скорость первого автомобиля через x км/ч, а второго — y км/ч. По условию задачи $x-y=10$. Время, затраченное первым автомобилем на весь путь, $\frac{560}{x}$ ч. Время, затраченное вторым автомобилем на весь путь, $\frac{560}{y}$ ч. По условию задачи $\frac{560}{y}-\frac{560}{x}=1$.

Таким образом, мы получили систему

$$\begin{cases} x-y=10, \\ \frac{560}{y}-\frac{560}{x}=1. \end{cases}$$

Решим эту систему. Из первого уравнения имеем $x=10+y$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем

$$\frac{560}{y}-\frac{560}{y+10}=1;$$

откуда $y=70$. Тогда $x=10+y=80$.

Ответ. Скорость первого автомобиля 80 км/ч, второго 70 км/ч.

Замечание. При решении этой задачи и вообще задач, связанных с равномерным прямолинейным движением, важно помнить, что $s=vt$, где s — путь, v — скорость, а t — время.

2. Скорый поезд был задержан у семафора на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью, на 10 км/ч большей, чем полагается по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

Решение. Обозначим скорость поезда по расписанию через x км/ч. Тогда скорость поезда после остановки будет $x+10$ км/ч. По расписанию на перегон в 80 км поезд должен был затратить $\frac{80}{x}$ ч, а в действительности этот перегон он прошел за $\frac{80}{x+10}$ ч, и так как по условию задачи он ликвидировал опоздание, то

$$\frac{80}{x}-\frac{80}{x+10}=\frac{16}{60},$$

откуда находим $x_1=50$, $x_2=-60$.

Ответ: 50 км/ч.

Замечание. Обратите внимание, что время, данное в минутах (16 мин), мы перевели на время в часах $\left(\frac{16}{60}\text{ ч}\right)$, так как в левой части уравнения время было записано в часах. При решении задач следите за размерностью!

3. Найти двузначное число, зная, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Решение. Напомним, что любое двузначное число может быть записано в виде $10x+y$, где x — число десятков, а y — число единиц.

Из условия задачи имеем систему

$$\begin{cases} y-x=2, \\ (10x+y)(x+y)=144. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим две пары: (2; 4) и $\left(-3\frac{2}{11};\ 5\frac{2}{11}\right)$. Ясно, что вторая пара не подходит по условию задачи, значит, искомсе число равно 24.

4. Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч скорее, чем второй рабочий, если этот последний будет работать отдельно. Во сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Решение. Прежде чем решать эту задачу (или другие аналогичные задачи «на работу»), заметим следующее: производительность труда (т. е. часть работы, выполняемая в единицу времени, — обозначим ее через A) и время, необходимое для выполнения всей работы (обозначим его через t), есть взаимно обратные величины, т. е. $At=1$.

Поэтому, если обозначить через x ч — время, необходимое для выполнения всей работы первому рабочему, а через y ч — второму, то часть работы выполняемая первым рабочим в 1 ч будет $1/x$, а часть работы выполняемая вторым рабочим в 1 ч будет $\frac{1}{y}$. По условию задачи, они, работая вместе, выполнили всю работу за 6 ч. Часть работы, выполненная за 6 ч первым рабочим, будет $\frac{6}{x}$, а часть работы, выполненная за 6 ч вторым рабочим, будет $\frac{6}{y}$.

Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1.$$

Кроме того, по условию задачи $y-x=5$. Решая систему

$$\begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1, \\ y-x=5, \end{cases}$$

получаем $x=10$ ч, $y=15$ ч.

5. При поступлении в техникум 12% абитуриентов не сдали письменный экзамен по математике, 32% сдали на «3» и «4», остальные 140 человек сдали экзамен на «5». Сколько абитуриентов поступало в техникум и сколько среди них не сдало экзамен по математике?

Решение. Обозначим количество всех поступавших абитуриентов через x. По условию 12% абитуриентов не сдало экзамен — это будет $0{,}12x$ человек, а 32% сдали на «3» и «4» — это будет $0{,}32x$ человек. Остальные 140 человек сдали экзамен на «5». Таким образом, получаем уравнение

$$0{,}12x + 0{,}32x + 140 = x,$$

откуда $x = 250$. Итак, в техникум поступало 250 человек.

Теперь можно определить число абитуриентов, не сдавших экзамен по математике: $\frac{12}{100} \cdot 250 = 30$.

Упражнения

1. Расстояние между станциями A и B 240 км. Из B по направлению к A вышел поезд. Через 30 мин навстречу ему вышел другой поезд со скоростью на 12 км в час большей скорости первого поезда. Найдите скорость каждого поезда, если они встретились на середине пути между A и B.

2. Расстояние по реке между двумя пристанями равно 21 км. Отправляясь от одной из этих пристаней к другой, катер возвращается к первой обратно через 4 ч, затрачивая из этого времени 30 мин на стоянку у второй пристани. Определить скорость этого катера в стоячей воде, зная, что скорость течения реки равна $2\frac{1}{2}$ км/ч.

3. Бак наполняется при помощи двух труб за 2 ч 55 мин. Первая труба, работая отдельно, может наполнить бак на 2 ч скорее, чем одна вторая труба. Во сколько времени каждая труба, работая отдельно, может наполнить бак?

4. При совместной работе двух бригад урожай был убран за 2 дня. Если бы одна треть урожая была убрана сначала первой бригадой, а затем оставшаяся часть второй, то вся работа была бы выполнена за 4 дня. Во сколько дней может быть убран урожай каждой бригадой отдельно?

5. Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа больше нормы, то она окончит работу ранее срока на 3 дня; если же будет печатать по 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов она должна была перепечатать и в какой срок?

6. На какое число надо разделить 73, чтобы частное было на 3 больше делителя, а остаток на 4 меньше делителя?

7. Сумма цифр двузначного числа равна 8. Произведение этого числа на число, полученное путем перестановки его цифр, равно 1855. Найдите это число.

8. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена киноаппарата упала с 300 до 192 руб. На сколько процентов снижалась цена киноаппарата каждый раз?

9. Сумма цифр двузначного числа равна 7. Если к каждой цифре прибавить по 2, то получится число на 3 меньше удвоенного первоначального числа. Найдите это число.

10. Свежие грибы содержат по весу 90% воды, сухие — 12% воды. Сколько получится сушеных грибов из 11 кг свежих?

ГЛАВА ШЕСТАЯ

НЕРАВЕНСТВА

§ 1. СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ

Напомним (гл. 1, § 4), что из двух чисел a и b меньшим считается то, которому соответствует на числовой прямой точка, лежащая левее, и большим считается то, которому соответствует на числовой прямой точка, лежащая правее. Было отмечено, что справедливо следующее утверждение: $a > b$ тогда и только тогда, когда $(a-b)$ — положительное число; $a < b$ тогда и только тогда, когда $(a-b)$ — отрицательное число.

Если два числа a и b соединить одним из следующих знаков: $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, то получится числовое неравенство. Например, $1 < 2$; $5 \geqslant 5$; $4 > 7$; $\sqrt{3} \leqslant 1$. Каждое числовое неравенство есть по существу запись высказывания, например $1 < 2$ есть запись высказывания «число 1 меньше числа 2» Каждое высказывание может быть истинным или ложным; соответственно, каждое числовое неравенство может быть верным или неверным. Так, из написанных выше четырех числовых неравенств первые два являются верными, а последние два — неверными.

Условимся всюду в дальнейшем, говоря о числовых неравенствах, иметь в виду только верные неравенства, т. е. запись $a < b$ понимать как запись истинного высказывания «число a меньше числа b». Аналогично мы будем понимать записи $a > b$, $a \leqslant b$, $a \geqslant b$.

Отметим некоторые свойства числовых неравенств:

1°. *Если $a > b$, то $b < a$.*

2°. *Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).*

3°. *Если $a > b$, то $a + c > b + c$, где c — любое действительное число (свойство монотонности).*

Эти три свойства легко иллюстрируются на числовой прямой: свойство 1° означает, что если точка a лежит правее точки b, то точка b лежит левее точки a; свойство 2° означает, что если точка a лежит правее b, а b — правее c, то точка a лежит на числовой прямой правее точки c; наконец, геометрическая иллюстрация свойства 3° представлена на рис. 73.

4°. *Если $a > b$ и c — положительное число ($c > 0$), то $ac > bc$.*

Доказательство. Рассмотрим разность $ac-bc$. Имеем $ac-bc=c(a-b)$. По условию c — положительное число. Далее, так как $a>b$, то разность $(a-b)$ — положительное число. Но произведение двух положительных чисел есть число положительное, значит, $c(a-b)>0$. Таким образом, $ac-bc>0$. Но если разность $(ac-bc)$ есть число положительное, то $ac>bc$.

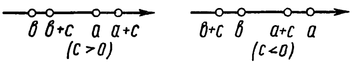


Рис. 73

Аналогично доказываются следующие свойства:

5°. *Если $a>b$ и c — отрицательное число, то $ac<bc$.*

6°. *Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.*

7°. *Если a и b — положительные числа и $a>b$, то $a^2>b^2$.*

Докажите эти свойства самостоятельно.

Замечания. 1. Свойства 1°, 2°, 3° можно доказать таким же методом, каким было доказано свойство 4° (рекомендуем читателю провести соответствующие доказательства).

2. Свойства 4° и 5° имеют следующий смысл. если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число и сохранить знак исходного неравенства, то получится верное неравенство; если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и заменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

3. Свойство 6° имеет следующий смысл: если почленно сложить два верных неравенства одного знака и сохранить этот знак неравенства, то получится верное неравенство.

Остановимся еще на одном свойстве неравенств.

8°. *Если a, b, c, d — положительные числа и если $a>b$ и $c>d$, то $ac>bd$.*

Доказательство. Имеем $a>b$ и $c>0$, поэтому $ac>bc$; $c>d$ и $b>0$, поэтому $bc>bd$. Но из неравенств $ac>bc$, $bc>bd$ следует по свойству транзитивности неравенство $ac>bd$.

Итак, при почленном умножении верных неравенств одинакового смысла с положительными членами верным будет неравенство того же знака.

Замечание. Перечисленные выше 8 свойств верны не только для знака $>$, но и для каждого из остальных знаков неравенств $<$, $\geqslant$, $\leqslant$. Например, верны такие свойства:

2′. *Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.*

2″. *Если $a\geqslant b$ и $b\geqslant c$, то $a\geqslant c$.*

4′. *Если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$.*

5′. *Если $a\geqslant b$ и $c<0$, то $ac\leqslant bc$.*

6′. *Если $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$.*

7′. *Если $a\leqslant b$, где a и b — положительные числа, то $a^2\leqslant b^2$.*

Метод, примененный при доказательстве свойства 4, используется и для доказательства многих неравенств с переменными. Задачу «доказать, что при любых рассматриваемых значениях переменных заданное неравенство с переменными обращается в верное числовое неравенство» мы будем решать следующим образом: составим разность левой и правой частей неравенства и установим, что эта разность при рассматриваемых значениях переменных положительна (или соответственно отрицательна, неположительна, неотрицательна).

Примеры. 1. Доказать, что для любого положительного числа a верно неравенство $a+1/a \geqslant 2$.

Доказательство. Составим разность $\left(a+\frac{1}{a}\right)-2$:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)-2=a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}.$$

Рассмотрим выражение $\frac{(a-1)^2}{a}$. При любом значении a выражение $(a-1)^2$ принимает неотрицательное значение. Так как по условию $a>0$, то $\frac{(a-1)^2}{a} \geqslant 0$ (причем знак равенства имеет место лишь при $a=1$).

Итак, разнсcть $(a+1/a)-2$ неотрицательна. Это значит, что $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$.

2. Доказать, что если $a<0$, то $\frac{a}{3}+\frac{3}{a} \leqslant -2$.

Доказательство. Составим разность $\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)-(-2)$:

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)-(-2)=\frac{a}{3}+\frac{3}{a}+2=\frac{a^2+9+6a}{3a}=\frac{(a+3)^2}{3a}.$$

Так как по условию $a<0$, то $\frac{(a+3)^2}{3a} \leqslant 0$. Значит, $\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)-(-2) \leqslant 0$, откуда следует требуемое неравенство $\frac{a}{3}+\frac{3}{a} \leqslant -2$.

3. Доказать, что если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Но $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0$, причем равенство достигается лишь в случае $a=b$. Значит, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Заметим, что число $\frac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим* чисел a и b, а число $\sqrt{ab}$ называется *средним геометрическим* чисел a, b. Таким образом, неравенство, доказанное в примере 3, означает, что *среднее арифметическое двух неотрицательных чисел всегда больше или равно их среднему геометрическому.*

4. Доказать, что $x^2+4y^2+3z^2+14 > 2x+12y+6z$.

Доказательство. Рассмотрим разность $(x^2+4y^2+3z^2+14)-(2x+12y+6z)$. Перегруппировав слагаемые, получим выражение:

$$(x^2-2x+1)+(4y^2-12y+9)+(3z^2-6z+3)+1=$$
$$=(x-1)^2+(2y-3)^2+3(z-1)^2+1,$$

положительное при любых значениях x, y, z. Значит, $x^2+4y^2+3z^2+14 > 2x+12y+6z$.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите свойства числовых неравенств.
2. В чем состоит свойство транзитивности неравенств? Докажите это свойство.
3. В чем состоит свойство монотонности неравенств? Докажите это свойство.
4. Что называется средним арифметическим двух чисел; средним геометрическим?
5. Докажите, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Упражнения

1. Покажите на числовой прямой, что если $a > b$, то $-a < -b$. Рассмотрите случаи, когда a и b оба положительны; оба отрицательны; a положительно и b отрицательно; $b=0$ и a положительно; $a=0$ и b отрицательно.

2. Каков знак числа a, если: а) $3a < 2a$; б) $5a > 2a$; в) $-2a < 5a$; г) $-6a > -5a$?

3. Известно, что $a > b$. Объясните, на основании каких свойств неравенств можно утверждать, что верны неравенства: а) $-5a < -5b$; б) $\frac{a}{2} > \frac{b}{3}$; в) $3a+5 > 3b+5$; г) $0{,}1a-0{,}4 > 0{,}1b-0{,}4$; д) $2-a < 2-b$; е) $2-\frac{a}{3} < 2-\frac{b}{3}$.

4. Докажите справедливость следующих неравенств:

а) $(a+2)(a-2)-a^2 < 0$; б) $(2a+1)^2-2(2a-1) > 0$;

в) $(6a-1)(a+2) < (3a+4)(2a+1)$; г) $\frac{9a^2-6a+1}{a^2+1} \geqslant 0$;

д) $a^2+b^2+c^2+3 \geqslant 2(a+b+c)$;

е) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$. Указание. Умножьте обе части неравенства на 2;

ж) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$. Указание. Используйте тождество $ab=$ $=2a\cdot\frac{1}{2}b$;

з) $a^5+b^5\geqslant a^4b+b^4a$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

5. Докажите, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, если $ab>0$.

6. Докажите, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant -2$, если $ab<0$.

7. Используя неравенство $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, докажите следующие неравенства:

а) $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$;

б) $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc$, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$;

в) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$, если $a>0$, $b>0$.

§ 2. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Линейные неравенства. Рассмотрим неравенства вида $f(x)>g(x)$ (соответственно $f(x)<g(x)$, $f(x)\geqslant g(x)$ $f(x)\leqslant g(x)$), где x — переменная, а $f(x)$ и $g(x)$ — выражения с переменной x. Если переменной x придать какое-либо числовое значение, то получится числовое неравенство, выражающее либо истинное, либо ложное высказывание. Пусть, например, дано неравенство $5x-1>3x+2$. При $x=2$ получаем $5\cdot 2-1>3\cdot 2+2$ — истинное высказывание (верное числовое неравенство); при $x=0$ получаем $5\cdot 0-1>3\cdot 0+2$ — ложное высказывание.

Всякое значение переменной, при котором данное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство, называется решением неравенства. Решить неравенство с переменной — значит найти множество всех его решений.

Два неравенства с одной переменной x называются равносильными, если множества решений этих неравенств совпадают.

Основная идея решения неравенства состоит в следующем: мы заменяем данное неравенство другим, более простым, но равносильным данному. Такие замены осуществляются на основе следующих утверждений.

1. *Если какой-либо член неравенства с переменной перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.*

2. *Если обе части неравенства с переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.*

3. *Если обе части неравенства с переменной умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, заменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.*

Ниже на примерах мы покажем применение сформулированных утверждений для решения линейных неравенств, т. е. неравенств вида $ax+b>0$ (соответственно $ax+b<0$, $ax+b\geqslant 0$, $ax+b\leqslant 0$), где a и b — действительные числа, и для решения неравенств, сводимых к линейным.

Примеры. **1.** Решить неравенство $2x+7>0$.

Решение. Согласно утверждению 1, данному неравенству будет равносильно неравенство $2x>-7$ (слагаемое 7 перенесено из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, а знак заданного неравенства сставлен без изменения).

Разделим обе части неравенства $2x>-7$ на положительное число 2, а знак неравенства оставим без изменения. Получим неравенство $x>-7/2$, равносильное неравенству $2x>-7$ на основании утверждения 2.

Итак, неравенство $2x+7>0$ и неравенство $x>-7/2$ равносильны. Множество решений неравенства $x>-7/2$, а значит, и заданного неравенства $2x+7>0$ есть промежуток $]-7/2;\ +\infty[$.

2. Решить неравенство $2(x-3)+5(1-x)\geqslant 3(2x-5)$.

Решение. Раскрыв скобки, получим:

$$2x-6+5-5x\geqslant 6x-15,$$

$$-3x-1\geqslant 6x-15. \qquad (1)$$

Далее, имеем: $-3x-6x\geqslant -15+1$, т. е.

$$-9x\geqslant -14. \qquad (2)$$

Это неравенство равносильно неравенству (1), а значит, и заданному неравенству согласно утверждению 1.

Разделим теперь обе части неравенства (2) на отрицательное число -9 и изменим знак неравенства. Согласно утверждению 3 получим неравенство, равносильное неравенству (2): $x\leqslant 14/9$. Множество решений последнего неравенства, а вместе с тем и исходного неравенства есть числовой промежуток $]-\infty;\ 14/9]$.

3. Решить неравенство

$$\frac{(3x-5)(2+x)+5-8x}{3}<\frac{2x^2-5x+3}{2}.$$

Решение. Освободимся от знаменателя, для чего умножим обе части неравенства на положительное число 6.

$$2((3x-5)(2+x)+5-8x)<3(2x^2-5x+3).$$

Далее имеем:

$$2(6x-10+3x^2-5x+5-8x) < 6x^2-15x+9,$$
$$2(3x^2-7x-5) < 6x^2-15x+9,$$
$$6x^2-14x-10 < 6x^2-15x+9,$$
$$6x^2-14x-6x^2+15x < 9+10.$$
$$x < 19$$

Множество решений последнего неравенства, а значит, и равносильного ему заданного неравенства есть промежуток $]-\infty;\ 19[$.

4. Решить неравенство

$$12x-\frac{x-2}{3}+2(x+1) > 5(3x-1)-\frac{2x+3}{2}-\frac{x}{3}.$$

Решение. Имеем последовательно:

$$72x-2(x-2)+12(x+1) > 30(3x-1)-3(2x+3)-2x,$$
$$72x-2x+4+12x+12 > 90x-30-6x-9-2x,$$
$$82x+16 > 82x-39,$$
$$82x-82x > -39-16,$$
$$0\cdot x > -55.$$

Последнее неравенство верно при любом значении x, так как при любом значении x получится истинное высказывание $0 > -55$. Поэтому множеством его решений (а значит, и множеством решений заданного неравенства) будет вся числовая прямая, т. е. промежуток $]-\infty;\ +\infty[$.

5. Решить неравенство

$$7\left(x+\frac{1}{7}\right)-\frac{2x-3}{5} > 3\left(x-\frac{x-2}{3}\right)+\frac{23x}{5}.$$

Решение. Имеем:

$$7x+1-\frac{2x-3}{5} > 3x-x+2+\frac{23x}{5},$$
$$35x+5-2x+3 > 15x-5x+10+23x,$$
$$33x+8 > 33x+10,$$
$$33x-33x > 10-8,$$
$$0x > 2.$$

Последнее неравенство не имеет решений, так как при любом значении переменной x получается ложное высказывание $0 > 2$. Значит, и заданное неравенство не имеет решений, т. е. множество решений пусто: $\varnothing$.

2. Системы и совокупности неравенств. *Несколько неравенств с одной переменной образуют систему, если ставится задача найти множество общих решений заданных неравенств.* Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называется *решением системы неравенств*. Множество решений системы неравенств есть *пересечение* множеств решений неравенств, образующих систему.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой. Например, запись

$$\begin{cases} 2x-1>3, \\ 3x-2<11 \end{cases}$$

означает, что неравенства $2x-1>3$ и $3x-2<11$ образуют систему.

Иногда используется запись в виде двойного неравенства. Например, систему неравенств $\begin{cases} 2x+1>1, \\ 2x+1<5 \end{cases}$ можно записать в виде двойного неравенства $1<2x+1<5$.

Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность, если ставится задача найти множества всех таких значений переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств. Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в верное числовое неравенство, называется *решением совокупности неравенств.* Множество решений совокупности неравенств есть объединение множеств решений неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие совокупность, записываются в строчку и отделяются друг от друга знаком «;». Например, запись

$$2x-5<1; \quad 3x+2>7$$

означает, что неравенства образуют совокупность. Иногда для обозначения совокупности неравенств используется квадратная скобка. Так, запись

$$\left[\begin{array}{l} 2x-5<1, \\ 3x+2>7 \end{array}\right.$$

означает, что неравенства образуют совокупность.

Рассмотрим примеры решения систем и совокупностей неравенств. В этом параграфе ограничиваемся линейными неравенствами и неравенствами, сводящимися к линейным.

Примеры. 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x+2>3x-1, \\ 3x+1>7x-4. \end{cases}$$

Решение. Первое неравенство системы преобразуется в равносильное ему неравенство $x>-3/2$, второе — в неравенство $x<5/4$.

Таким образом, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} x > -3/2, \\ x < 5/4. \end{cases}$$

Множество решений неравенства $x > -3/2$ есть промежуток $]-3/2; +\infty[$, множество решений неравенства $x < 5/4$ — промежуток $]-\infty; 5/4[$. Пересечением этих множеств служит интервал $]-3/2; 5/4[$. Это и есть множество решений данной системы неравенств (рис. 74).

2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3(x+1)-\dfrac{x-2}{4} < 5x-7\dfrac{x+3}{2}, \\ 2x-\dfrac{x}{3}+6 \leqslant 4x-3. \end{cases}$$

Решение. Выполнив преобразование каждого из неравенств системы (сделайте это!), получим систему

$$\begin{cases} x < -56/5, \\ x \geqslant 27/7. \end{cases}$$

Множество решений неравенства $x < -56/5$ — промежуток $]-\infty; -56/5[$, множество решений неравенства $x \geqslant 27/7$ — промежуток

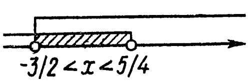


Рис. 74

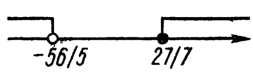


Рис. 75

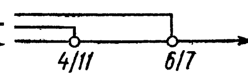


Рис. 76

$[27/7; +\infty[$. Пересечение этих множеств пусто (рис. 75). Это значит, что заданная система не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{3} < \dfrac{5x+1}{5}, \\ \dfrac{7x}{3} \geqslant 2(x+1). \end{cases}$$

Решение. После преобразований получим систему

$$\begin{cases} 0\cdot x < 8, \\ x \geqslant 6. \end{cases}$$

Множеством решений первого неравенства этой системы служит вся числовая прямая, а множеством решений второго неравенства — промежуток $[6; +\infty[$. Этот промежуток будет пересечением множеств решений неравенств системы.

Ответ: $[6; +\infty[$.

4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 6x-1 > x-3+5(x+1), \\ 4x+\dfrac{x}{3} < -3x+8. \end{cases}$$

Решение. После преобразований получим систему

$$\begin{cases} 0\cdot x > 3, \\ x < 12/11. \end{cases}$$

Так как множество решений первого неравенства системы пусто, то и множество решений системы — пустое множество.

Ответ: $\varnothing$.

5. Решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x-3}{5} > \dfrac{3x-2}{2}; \\ \dfrac{x}{3}+1 > \dfrac{3x}{2}. \end{array}\right.$$

Решение Преобразовав каждое из неравенств, получим совокупность $\left[\begin{array}{l} x < 4/11; \\ x < 6/7. \end{array}\right.$. Множество решений неравенства $x < 4/11$ — промежуток $]-\infty;\ 4/11[$, множество решений неравенства $x < 6/7$ — промежуток $]-\infty;\ 6/7[$. Объединением этих множеств служит промежуток $]-\infty;\ 6/7[$ (рис. 76). Это и есть множество решений данной совокупности неравенств.

Ответ: $]-\infty;\ 6/7[$.

3. Примеры решения нелинейных неравенств

1. Решить неравенство

$$\frac{2x-3}{3x-7} > 0.$$

Решение. Значение дроби положительно тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель имеют значения одного знака, т. е. когда

$$\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ 3x-7 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ 3x-7 < 0. \end{cases}$$

Можно сказать, что заданное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ 3x-7 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ 3x-7 < 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы — промежуток $]7/3;\ +\infty[$, множество решений второй системы — промежуток $]-\infty;\ 3/2[$. Объединив эти множества, получим множество решений совокупности систем, а вместе с тем и множество решений заданного неравенства.

Ответ: $]-\infty,\ 3/2[\ \cup\ ]7/3;\ +\infty[$.

2. Решить неравенство

$$\frac{3x+2}{2x+3} \geqslant 4.$$

Решение. Преобразуем заданное неравенство:

$$\frac{3x+2}{2x+3} - 4 \geqslant 0; \quad \frac{-5x-10}{2x+3} \geqslant 0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на (—5):

$$\frac{x+2}{2x+3} \leqslant 0.$$

Значение дроби отрицательно в том и только в том случае, когда числитель и знаменатель имеют значения противоположных знаков; дробь обращается в нуль, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Воспользовавшись этим замечанием, приходим к следующей совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ 2x+3 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2 \leqslant 0, \\ 2x+3 > 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы промежуток $[-2;\ -3/2[$, множество решений второй системы пусто. Значит, множество решений совокупности, а поэтому и заданного неравенства — промежуток $[-2;\ -3/2[$.

3. Решить уравнение

$$|2x^2-5x+2| = 2x^2-5x+2.$$

Решение. Так как $|a|=a$ в том и только в том случае, когда $a \geqslant 0$, то задача сводится к решению неравенства

$$2x^2-5x+2 \geqslant 0.$$

Найдем корни трехчлена $2x^2-5x+2$:

$$x_1 = 1/2; \quad x_2 = 2$$

и разложим этот трехчлен на множители, тогда

$$2(x-1/2)(x-2) \geqslant 0, \quad \text{или} \quad (x-1/2)(x-2) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство равносильно следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} x-1/2 \geqslant 0, \\ x-2 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1/2 \leqslant 0, \\ x-2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Множество решений первой системы — промежуток $[2;\ +\infty[$, второй — промежуток $]-\infty;\ 1/2]$. Объединение этих множеств будет множеством решений совокупности систем, а вместе с тем и множеством решений данного уравнения.

Ответ: $]-\infty;\ 1/2] \cup [2;\ +\infty[$.

4. Решить неравенство

$$|2x+4| \leqslant 3x+2. \tag{3}$$

Решение. Если $2x+4 \geqslant 0$, то $|2x+4| = 2x+4$, и, следовательно, неравенство (3) примет вид: $2x+4 \leqslant 3x+2$. Если же $2x+4 < 0$, то $|2x+4| = -(2x+4)$, и неравенство (3) принимает вид: $-(2x+4) \leqslant 3x+2$. Таким образом, неравенство (3) равносильно следующей совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2x+4 \geqslant 0, \\ 2x+4 \leqslant 3x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4 < 0, \\ -(2x+4) \leqslant 3x+2. \end{cases}$$

Множество решений первой системы — промежуток $[2;\ +\infty[$, множество решений второй системы пусто. Значит, множеством решений совокупности систем, а тем самым и неравенства (3) служит промежуток $[2; +\infty[$.

4. Примеры графического решения неравенств и систем неравенств с одной переменной.

1. Решить графически неравенство $2x-4>0$.

Решение. Построим график функции $y=2x-4$ (рис. 77). Мы видим, что график расположен выше оси Ox при значениях x, при-

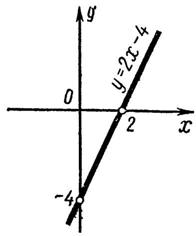


Рис. 77

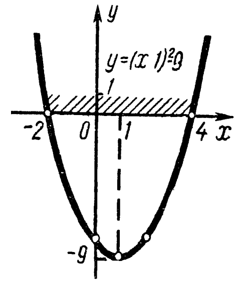


Рис. 78

надлежащих промежутку $]2; +\infty[$. Это и есть множество решений данного неравенства.

2. Решить графически неравенство $x^2-2x-8 \leqslant 0$.

Первый способ решения. Построим график функции $y=x^2-2x-8$; имеем:

$$y=x^2-2x-8=(x^2-2x+1)-9=(x-1)^2-9.$$

Значит, вершиной параболы $y=x^2-2x-8$ служит точка (1, —9). График изображен на рис. 78.

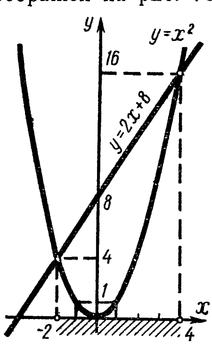


Рис. 79

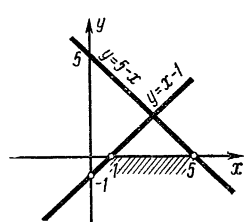


Рис. 80

Мы видим, что график пересекает ось Ox в точках —2 и 4 и расположен ниже оси Ox при значениях x, принадлежащих интервалу $]-2; 4[$. В итоге получаем, что множеством решений заданного неравенства является отрезок $[-2; 4]$.

Второй способ. Преобразуем заданное неравенство к виду $x^2 \leqslant 2x+8$. Построим в одной системе координат графики функций $y=x^2$ и $y=2x+8$ (рис. 79). Неравенство $x^2 \leqslant 2x+8$ будет выполняться при тех и только тех значениях x, при которых график функции $y=x^2$ расположен не выше графика функции $y=2x+8$.

Ответ: $[-2; 4]$.

3. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 5-x>0. \end{cases}$$

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y=x-1$ и $y=5-x$ (рис. 80).

Оба графика лежат выше оси Ox при значениях x, принадлежащих интервалу $]1; 5[$. Значит, множество решений заданной системы неравенств есть интервал $]1; 5[$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется решением неравенства с одной переменной?
2. Что значит решить неравенство с одной переменной?
3. Какие два неравенства с одной переменной называются равносильными?
4. Какие преобразования неравенства приводят к неравенству, равносильному данному?
5. Можно ли назвать равносильными неравенства, имеющие множествами своих решений соответственно множества $A=[1; 4]$ и $B=\,]1; 4[$?
6. Как определяется понятие системы неравенств с одной переменной?
7. Как определяется понятие совокупности неравенств с одной переменной?
8. Как найти множество решений системы неравенств с одной переменной?
9. Как найти множество решений совокупности неравенств с одной переменной?

Упражнения

1. Решите следующие неравенства:

а) $6(2x+7) < 15(x+2)$; б) $0{,}01(1-3x) > 0{,}02x+3{,}01$;

в) $5(x+3)-\frac{x-7}{8} > \frac{11}{2}(x-2)$; г) $\frac{5}{3}x+\frac{7-3x}{2} \leqslant x-\frac{7+3x}{3}+\frac{x}{6}$;

д) $x(x+1)+x(x+3) < (2x-1)(x-5)$; е) $(x-3)(x-5) > (x+1)(x-4)-5x$.

2. Решите следующие системы неравенств:

а) $\begin{cases} 5x+3>0, \\ 2x-1 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5(x+1)-9x-3 > -6(x+2), \\ 3(3+2x) < 7x-2(x-8); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x-9}{4}-x < \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}, \\ 2-x > 2x-8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2} < 2x, \\ \dfrac{2x+15}{9} > \dfrac{1}{5}(x-1)+\dfrac{x}{3}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2 < \dfrac{2x-8}{6}-\dfrac{18-4x}{3}, \\ 9-\left(\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{2}{3}\right) > x; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{5}+\dfrac{x-1}{2} < \dfrac{2x^2+3}{10}+\dfrac{x}{2}+3 \\ 1-x > \dfrac{0,5(x-3)}{2}-\dfrac{2x+3,5}{3}. \end{cases}$

3. Найдите множество целых решений каждой из следующих систем неравенств; укажите, если возможно, наибольший и наименьший элементы этого множества:

а) $\begin{cases} 1-\dfrac{3x-88}{7} > 5x, \\ 4x+5 < 5x+4{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{8} \leqslant \dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2x-1}{3} < 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2 > \dfrac{2x-8}{6}-\dfrac{18-4x}{3}, \\ \dfrac{2-x}{4}+9\dfrac{2}{3} > x. \end{cases}$

4. Решите совокупности неравенств:

а) $5x+3 > 0$; $2x-1 > 0$; б) $\dfrac{2x-3}{5} < x-2$; $5x-7 < x-6$;

в) $3x-1 < \dfrac{x}{2}+2$; $2x-3 \leqslant \dfrac{x}{4}+1$; $3-x > 2-14x$.

5. Решите следующие неравенства:

а) $\dfrac{2x-1}{x} > 0$; б) $\dfrac{3-4x}{x+1} < 0$; в) $\dfrac{2x+1}{x-2} \geqslant 0$;

г) $\dfrac{x+4}{3x-5} \leqslant 0$; д) $\dfrac{3x+2}{x-2} > 1$; е) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$;

ж) $\dfrac{9}{x}-\dfrac{4}{9} > \dfrac{10}{x}-\dfrac{1}{2}$; з) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{3}{x+2} \leqslant \dfrac{2x+3}{4}+\dfrac{x}{x+2}$.

6. Решите следующие неравенства:

а) $x^2-9 > 0$; б) $x^2 \leqslant 4$; в) $x^2-5x+6 < 0$;
г) $3x^2 \leqslant 10x-3$; д) $x^2+3x > 0$; е) $4x^2+6x < 9x^2-14x$,
ж) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{2x}{3} \geqslant \dfrac{3x-10}{4}$; з) $\dfrac{(x-11)^2}{10}-\dfrac{(6x-1)^2}{5} > 7-\dfrac{7x-3}{2}$.

7. Найдите множество решений каждого из следующих уравнений:

а) $|x^2-10x+16|=x^2-10x+16$; б) $|x^2-10|=10-x^2$.

8. Найдите область определения функции $y=f(x)$, если:

а) $f(x)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-2}$; б) $f(x)=\sqrt[4]{3-x}+\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$; г) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{16-x^2}}$.

9. Решите следующие неравенства:

а) $|2x-5|<3$; б) $|3x-1|\geqslant 5$; в) $|2x-4|\leqslant 1$;
г) $|1-2x|>3-x$; д) $|x+8|+1\leqslant 3x$; е) $x\geqslant 2-|4-3x|$.

10. Решите графически следующие неравенства и системы неравенств:

а) $3x-6>0$; б) $x^2\leqslant 9$; в) $x^2>x+2$;

г) $x^2-6x+8\leqslant 0$; д) $\frac{1}{x}<x$;

е) $\frac{4}{x}>x+3$; ж) $\begin{cases} 2x+1>0, \\ x-3<0. \end{cases}$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Поставим в соответствие каждому натуральному числу квадрат этого числа:

$$1 \longrightarrow 1^2,\ 2 \longrightarrow 2^2,\ 3 \longrightarrow 3^2,\ \ldots,\ n \longrightarrow n^2,\ \ldots.$$

Рассмотренное соответствие является функцией. Обозначим эту функцию буквой φ, тогда:

$$\varphi(1) = 1^2,\ \varphi(2) = 2^2,\ \ldots,\ \varphi(n) = n^2,\ \ldots.$$

Областью определения этой функции φ служит множество N натуральных чисел: $\{1;\ 2;\ \ldots;\ n;\ \ldots\}$ множеством ее значений — множество $\{1^2;\ 2^2;\ \ldots;\ n^2\ \ldots\}$.

Функция, заданная на множестве натуральных чисел, называется бесконечной последовательностью. Функция, заданная на множестве первых n натуральных чисел, называется конечной последовательностью.

Значения функции $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n) \ldots$ называются *членами последовательности*. Члены последовательности обозначаются также символами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$, где $a_n = \varphi(n)$. Это равенство называют также *формулой общего члена*. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ обозначается так: (a_n).

Так как последовательность—это частный вид функции, то способы задания функции применимы и для задания последовательности. Графический и табличный способы могут быть использованы для задания конечных последовательностей. Для бесконечных же последовательностей особенно важны два следующих способа задания, которые мы сейчас рассмотрим.

1. Последовательность может быть задана аналитически, т. е. с помощью формулы общего (n-го) члена $a_n = \varphi(n)$. Например:

$$a_n = \frac{1}{n},\ b_n = n^2,\ \ldots.$$

Давая аргументу n значения $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, будем получать соответствующие значения последовательности. Так, последовательность (a_n) имеет вид $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots,$

а последовательность (b_n) имеет вид $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$.

2. Любой член последовательности, начиная с некоторого, часто выражают через предшествующие (один или несколько). Например, последовательность 1; 2; 3; 5; 8; 11; ... может быть задана следующим образом:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Действительно,

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3,$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Такой способ задания последовательности называется *рекуррентным*. При рекуррентном способе задания последовательности обычно указывают: а) первый член последовательности (или несколько первых членов); б) формулу, позволяющую определить любой член последовательности по известным предшествующим членам.

Примеры. 1. Выписать несколько первых членов последовательности, если известно, что $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ при $n > 1$.

Решение.

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Итак, получаем последовательность $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.

2. Выписать несколько членов последовательности, если известно, что $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ при $n > 1$.

Решение.

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{4},$$
$$a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{8},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Итак, получаем последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$.

Последовательность называется *возрастающей*, если каждый последующий ее член больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$ для любого n. Например, возрастающими являются такие последовательности:

1) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots;$

2) $-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots, 3n, \ldots;$

3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots.$

Последовательность называется *убывающей*, если каждый последующий ее член меньше предыдущего, т. е. $a_{n+1} < a_n$ для любого n. Например, убывающими являются такие последовательности:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots;$

2) $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots, -n, \ldots.$

Последовательность называется *монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

Вопросы для самопроверки

1. Какую функцию называют последовательностью?
2. В каком случае последовательность называется бесконечной, а в каком конечной?
3. Приведите пример задания последовательности с помощью формулы n-го члена.
4. Что должно быть указано при рекуррентном способе задания последовательности?
5. Приведите пример рекуррентного задания последовательности.
6. Какая последовательность называется возрастающей?
7. Какая последовательность называется убывающей?
8. Какая последовательность называется монотонной?
9. Приведите примеры монотонных последовательностей.
10. Приведите примеры немонотонных последовательностей.

Упражнения

1. Найдите первые пять членов последовательности, общий член которой выражается формулой:

а) $a_n = 2n-1$; б) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; в) $a_n = n^2-1$;

г) $a_n = -2^n$; д) $a_n = \frac{n}{n+1}$; е) $a_n = n^3$.

2. Укажите, какие из последовательностей упр. **1**: а) убывающие; б) возрастающие; в) немонотонные.

3. Какое из чисел 2; 3; 4; 0,8 является членом последовательности (a_n), если $a_n=\frac{n}{n+1}$? В случае утвердительного ответа укажите порядковый номер этого члена.

4. Напишите наиболее простую формулу для общего члена каждой из следующих последовательностей:

а) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...; б) 2; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; ...;

в) $\frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{3\cdot 4}$; ...; г) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$; $\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}$; $\frac{5\cdot 7}{6\cdot 8}$; ...;

д) $\frac{10}{3}$; $\frac{20}{9}$; $\frac{30}{27}$; ...; е) $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{11}$; ...; ж) $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{11}$, $\frac{11}{17}$; ....

5. Выпишите последовательность (a_n) при $1\leqslant n\leqslant 4$ и постройте ее график:

а) $a_n=2n+1$; б) $a_n=-n^2$; в) $a_n=2-3n$;

г) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; д) $a_n=(-1)^{n+1}n$.

6. Выпишите первые пять членов последовательности (a_n) и задайте эту последовательность формулой n-го члена, если:

а) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+1$; б) $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$;

в) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n-2$; г) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$.

§ 2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. Основные понятия. *Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называется арифметической прогрессией.* Число d — называется *разностью арифметической прогрессии.* Таким образом, арифметическая прогрессия определяется условиями: 1) $a_1=a$, 2) $a_{n+1}=a_n+d$ для любого $n\geqslant 1$.

Например, если $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3$, то $a_2=2+3=5$; $a_3=5+3=8$ ..., т. е. получаем последовательность 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

Очевидно, что при $d>0$ арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, а если $d<0$ — убывающей; если $d=0$, то $a_n=a$ — постоянная последовательность.

Например, прогрессии:

1, 4, 7, 10, 13, ... $(d=3)$ — возрастающая,

12; 10; 8; 6; 4; ... $(d=-2)$ — убывающая,

5; 5; 5; ... $(d=0)$ — постоянная.

Задание арифметической прогрессии, указанное выше, является по сути дела рекуррентным заданием последовательности. Такое задание во многих случаях неудобно. Действительно, для того чтобы найти какой-нибудь член арифметической прогрессии с достаточно большим номером (например, a_{1000}) при рекуррентном задании необходимо знать все предшествующие ему члены (в данном случае число их равно 999). Эту вычислительную работу можно сократить, получив из рекуррентного соотношения $a_{n+1}=a_n+d$ формулу n-го (или общего) члена арифметической прогрессии.

Имеем:

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d.$$

Легко сообразить, что

$$a_7=a_1+6d$$
$$a_{20}=a_1+19d.$$

Вообще

$$a_n=a_1+d\,(n-1).$$

Зная a_1 и d, по формуле общего члена можно непосредственно (без вычисления предыдущих членов) вычислить любой член арифметической прогрессии.

Например, если $a_1=1$, $d=2$, то по формуле общего члена имеем $a_{20}=a_1+19d$, т. е. $a_{20}=1+19\cdot 2=39$.

2. Характеристическое свойство. Арифметическая прогрессия обладает следующим характеристическим свойством: *любой член ее, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов.*

Доказательство. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия. По определению $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$, откуда

$$a_{n+1}+a_{n+1}=a_n+a_{n+2},$$
$$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}.$$

Справедливо и обратное: *если некоторая последовательность такова, что любой ее член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия.*

Действительно, пусть для любых трех соседних членов некоторой последовательности (a_n) справедливо соотношение

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2},$$

тогда $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$; $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, т. е. разность между любым членом последовательности и ему предшествующим равна одному и тому же числу. Значит (a_n) — арифметическая прогрессия. Таким образом, рассматриваемое свойство присуще арифметической прогрессии и только ей.

3. Связь с линейной функцией. На рис. 81 построен график арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 2$, $d = 0{,}5$ и $1 \leqslant n \leqslant 6$. Рассматривая рисунок, замечаем, что точки графика лежат на одной прямой. Покажем, что это не случайно. Запишем формулу общего члена рассматриваемой арифметической прогрессии $a_n = 2 + 0{,}5(n-1) = 0{,}5n + 1{,}5$. Мы получили формулу вида $y = kx + b$, а такой формулой, как известно, задается линейная функция.

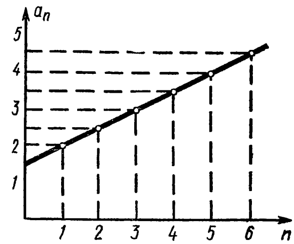


Рис. 81

Таким образом, *арифметическая прогрессия является линейной функцией, заданной на множестве натуральных чисел.*

Справедливо и обратное: *линейная функция, областью определения которой служит множество натуральных чисел, является арифметической прогрессией.*

Пример 1. Последовательность (a_n) задана формулой ее n-го члена $a_n = 2n - 3$. Доказать, что последовательность есть арифметическая прогрессия и найти ее первый член и разность.

Решение. Запишем формулу общего члена для члена с номером $n+1$. Имеем $a_{n+1} = 2(n+1) - 3$, тогда $a_{n+1} - a_n = [2(n+1) - 3] - (2n - 3) = 2$. Таким образом, разность между последующим и предшествующим членами этой последовательности есть величина постоянная. Следовательно, это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $d = 2$. Сама прогрессия имеет такой вид:

$$-1;\ 1;\ 3;\ 5;\ \ldots .$$

4. Формула суммы n первых членов. Рассмотрим какую-нибудь конечную арифметическую прогрессию, например

$$3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15;\ 18$$

и сравним суммы членов, равноудаленных от конца, $3+18$; $6+15$; $9+12$. Легко видеть, что эти суммы равны. Это не случайно, так как можно доказать, что в конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ сумма членов, равноудаленных от конца равна сумме первого и последнего членов, т. е.

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=a_k+a_{n-k+1}.$$

Например, докажем, что $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}$. По формуле общего члена арифметической прогрессии имеем

$$a_n=a_1+d(n-1),$$
$$a_{n-1}=a_1+d(n-2),$$
$$a_2=a_1+d.$$

Подставляя в проверяемое равенство $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}$ найденные значения для a_n, a_{n-1}, a_2, получим a_1+a_1+ $+d(n-1)=a_1+d+a_1+d(n-2)$, т. е. $2a_1+dn-d=$ $=2a_1+dn-d$. Мы получили верное равенство, что и доказывает сформулированное выше утверждение.

Воспользуемся этим фактом для вывода формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии. Обозначим эту сумму через S_n и выпишем эту сумму дважды, поменяв во втором случае порядок слагаемых на обратный:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$
$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1.$$

Сложим почленно эти равенства:

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots+(a_{n-2}+a_3)+$$

$+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$. Сумма каждой пары в правой части равенства равна (a_1+a_n), а число таких пар равно n, поэтому

$$2S_n=(a_1+a_n)n, \text{ откуда } S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Примеры. 1. Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии 2, 5, 8, 11, ...

Решение. Из условия задачи $a_1=2$; $d=3$. По формуле общего члена $a_n=a_1+d(n-1)$ найдем $a_{10}=2+3\cdot 9=29$.

По формуле суммы n членов $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ имеем

$$S_{10}=\frac{2+29}{2}\cdot 10=155.$$

Замечание. Формулу суммы n членов арифметической прогрессии можно записать в другом виде, если вместо a_n подставить его значение $a_1+d(n-1)$, тогда

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n.$$

2. Дана конечная арифметическая прогрессия (a_n). Зная три числа из пяти: a_1, d, n, a_n, S_n, найти остальные два:

а) дано: $a_1=10$, $d=4$, $n=11$. Найти a_n и S_n;
б) дано: $a_1=10$, $d=4$, $a_n=50$. Найти n и S_n;
в) дано: $a_1=10$; $d=4$, $S_n=330$. Найти n и a_n;
г) дано: $a_1=10$, $n=11$, $S_n=330$. Найти a_n и d;
д) дано: $d=4$, $a_n=50$, $S_n=330$. Найти a_1 и n.

Решение. а) По формуле n-го члена $a_n=a_1+d(n-1)$ найдем $a_{11}=10+4\cdot 10=50$. Затем по формуле $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ найдем $S_{11}=$ $=\frac{10+50}{2}\cdot 11=330$;

б) из формулы $a_n=a_1+d(n-1)$ получим

$$n-1=\frac{a_n-a_1}{d}, \text{ т. е. } n=\frac{a_n-a_1}{d}+1;\quad n=\frac{50-10}{4}+1=11.$$

Далее, имеем $S_{11}=\frac{10+50}{2}\cdot 11=330$;

в) воспользуемся формулой $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$. Подставляя данные значения, получаем $330=\frac{20+4(n-1)}{2}n$. Таким образом, мы получили квадратное уравнение относительно n; решим его:

$$330=10n+2n^2-2n,$$
$$2n^2+8n-330=0,$$
$$n^2+4n-165=0,$$

$n=-2\pm\sqrt{4+165}$, $n_1=-15$ (не подходит по условию задачи); $n_2=11$. Зная n, найдем $a_n=a_1+d(n-1)=10+4\cdot 10=50$;

г) из формулы $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$ найдем d:

$2S_n=2a_1n+d(n-1)n$; $d(n-1)n=2S_n-2a_1n$; $d=\frac{2S_n-2a_1n}{(n-1)n}$, т. е.

$$d=\frac{2\cdot 330-2\cdot 10\cdot 11}{10\cdot 11}=\frac{66-22}{11}=4.$$

Теперь можно найти $a_n=a_1+d(n-1)$;

$$a_{11}=10+4\cdot 10=50;$$

д) из формулы $a_n=a_1+d(n-1)$ найдем $a_1=a_n-d(n-1)$ и подставим найденное значение a_1 в формулу $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$, тогда

$S_n = \frac{2a_n - d(n-1)}{2} n$. Теперь найдем n:

$$330 = \frac{2\cdot 50 - 4(n-1)}{2} n,$$

$$330 = 50n - 2n^2 + 2n,$$

$$2n^2 - 52n + 330 = 0,$$

$$n^2 - 26n + 165 = 0,$$

$$n = 13 \pm \sqrt{169 - 165} = 13 \pm 2;\ n_1 = 11,\ n_2 = 15.$$

Если $n = 11$, то $a_1 = a_n - d(n-1) = 50 - 4\cdot 10 = 10$.
Если $n = 15$, то $a_1 = a_n - d(n-1) = 50 - 4\cdot 14 = -6$.
Выпишем обе прогрессии:

10; 14; 18; 22; 26; 30; 34; 38; 42; 46; 50;

−6; −2; 2; 6; 10; 14; 18; 22; 26; 30; 34; 38; 42; 46; 50.

Легко видеть, что в обоих случаях сумма членов равна 330.

Вопросы для самопроверки

1. Какая числовая последовательность называется арифметической прогрессией?
2. Что называется разностью арифметической прогрессии?
3. Укажите условие, при котором арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, убывающей последовательностью.
4. Как задается арифметическая прогрессия?
5. Выведите формулу общего члена арифметической прогрессии.
6. Сформулируйте и докажите характеристическое свойство арифметической прогрессии.
7. Какая существует связь между арифметической прогрессией и линейной функцией?
8. Докажите, что для конечной арифметической прогрессии $a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_{n-2}\ a_{n-1}\ a_n$ справедливо равенство $a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$. Сформулируйте это свойство арифметической прогрессии.
9. Выведите формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.
10. Как выражается сумма n первых членов арифметической прогрессии через a_1; d и n?

Упражнения

1. Какие из следующих последовательностей являются арифметическими прогрессиями:

а) 1; 4; 7; 10; 13; ...; б) 3; 0; −3; −6; ...; в) 2; 4; 8; 16; 32; ...;

г) 4; 9; 16; 25; ... ; д) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots$?

2. Покажите, что следующие числовые последовательности являются арифметическими прогрессиями. Найдите a_1 и d:

а) $a_n = 4n + 3$; б) $a_n = 2n - 1$; в) $a = \frac{3n+2}{5}$;

г) $a_n = \frac{7n-2}{3}$; д) $a_n = \frac{8n+1}{5}$.

3. В каждой строке таблицы по трем данным вычислите неизвестные значения величин.

N	a_1	d	n	a_n	S_n
1	110	-10	11		
2	4	$-\frac{1}{4}$	13		
3	5		26	105	
4	$\frac{3}{4}$		26	$3\frac{7}{18}$	
5		3	12		210
6		2	15	-10	

N	a_1	d	n	a_n	S_n
7	0	0,5		5	
8	-9	$\frac{1}{2}$			-75
9	-28		9		0
10	0,2			5,2	137,7
11			30	$15\frac{3}{4}$	$146\frac{1}{4}$
12		0,3		50,3	2551,3

4. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии в которой:

а) $\begin{cases} a_2+a_8=10, \\ a_3+a_{14}=31; \end{cases}$ б) $\begin{cases} S_5-S_2-a_5=0{,}1, \\ S_4+a_7=0{,}1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} S_4=9, \\ S_6=22\frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} a_3+a_5+a_8=18, \\ a_4+a_2=-2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} S_4=9, \\ S_6=22\frac{1}{2}. \end{cases}$

5. При свободном падении тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Найдите. а) какой путь пройдет тело за 11-ю секунду? б) Какой путь пройдет тело за 11 с? в) сколько времени будет падать тело с высоты 4410 м?

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. Основные понятия.

Определение. *Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю число q,* *называется геометрической прогрессией.* Число q называется *знаменателем прогрессии.*

Таким образом, геометрическая прогрессия определяется условиями:

$$1)\ b_1=b\ (b\neq 0);\quad 2)\ b_{n+1}=b_n\cdot q\ (q\neq 0).$$

Например, если $b_1=1$, $b_{n+1}=b_n\cdot 2$, то $b_2=1\cdot 2=2$, $b_3=b_2\cdot 2=4$, ..., т. е. получаем последовательность 1, 2, 4, 8, 16, ...

Очевидно, что при $q>1$ и $b_1>0$ геометрическая прогрессия является возрастающей последовательностью, а если $0<q<1$ и $b_1>0$, то убывающей, если же $q=1$, то $b_n=b$. При $q<0$ геометрическая прогрессия не является монотонной. Примеры прогрессий:

1; 3; 9; 27; ...	$(q=3,\ b_1>0)$—возрастающая,
$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \dots$	$\left(q=\frac{1}{2},\ b_1>0\right)$— убывающая
2; 2; 2; ...	$q=1$ —постоянная,
1; —2; 4; —8; ...	$q=-2$—немонотонная.

Задание геометрической прогрессии, указанное выше, является рекуррентным заданием последовательности. Такое задание во многих случаях неудобно. Действительно, для того чтобы найти какой-нибудь член геометрической прогрессии с достаточно большим номером, при рекуррентном задании необходимо знать все предшествующие ему члены. Эту вычислительную работу можно сократить, получив из рекуррентного соотношения $b_{n+1}=b_n\cdot q$ $(q\neq 0)$ формулу n-го или общего члена геометрической прогрессии. Имеем:

$$\begin{aligned} b_2&=b_1\cdot q,\\ b_3&=b_2\cdot q=b_1\cdot q\cdot q=b_1\cdot q^2,\\ b_4&=b_3\cdot q=b_1\cdot q^2\cdot q=b_1\cdot q^3.\end{aligned}$$

Легко сообразить, что

$$\begin{aligned} b_7&=b_1\cdot q^6,\\ b_{20}&=b_1\cdot q^{19}.\end{aligned}$$

Вообще

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}.$$

Зная b_1 и q, по формуле общего члена можно непосредственно (без вычисления предыдущих членов) вычислить любой член геометрической прогрессии. Так, если

$b_1=1$, $q=2$, то по формуле общего члена имеем, например, $b_{11}=b_1\cdot q^{10}=2^{10}=1024$.

2. Характеристическое свойство. Геометрическая прогрессия, все члены которой положительные числа, обладает следующим характеристическим свойством.

Любой член геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим предшествующего и последующего членов.

Доказательство. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия. Тогда по определению имеем:

$$b_{n+1}:b_n=b_{n+2}:b_{n+1},$$

откуда

$$b_{n+1}^2=b_n\,b_{n+2},$$

$$b_{n+1}=\sqrt{b_n\,b_{n+2}}$$

Справедливо и обратное: *если некоторая последовательность положительных чисел такова, что любой ее член, начиная со второго, является средним геометрическим предшествующего и последующего членов, то эта последовательность — геометрическая прогрессия.*

Действительно, пусть для любых трех соседних членов некоторой последовательности b_n $(b_n>0)$ справедливо соотношение $b_{n+1}=\sqrt{b_n\,b_{n+2}}$, тогда

$$b_{n+1}^2=b_n\,b_{n+2};\quad b_{n+1}:b_n=b_{n+2}:b_{n+1},$$

а это и означает, что (b_n) — геометрическая прогрессия.

3. Формула суммы n первых членов. В заключение выведем формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии. Обозначим эту сумму через S_n. Можно записать, что

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}+b_n. \qquad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на q:

$$qS_n=b_1q+b_2q+\ldots+b_{n-1}q+b_nq.$$

Но $b_1q=b_2$; $b_2q=b_3$; $\ldots$ $b_{n-1}q=b_n$, поэтому

$$q\,S_n=b_2+b_3+\ldots+b_n+b_nq. \qquad (2)$$

Вычтем почленно из равенства (2) равенство (1):

$$S_n(q-1)=b_nq-b_1.$$

Если положить $q\neq 1$, то

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}.$$

Если $q=1$, то прогрессия имеет вид $b_1, b_1, b_1, \ldots, b_1$. В этом случае $S_n=b_1 n$.

Для примера найдем сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (b_n) 1, 3, 9, ...

По условию задачи $b_1=1$, $q=3$. Найдем пятый член прогрессии по формуле $b_5=b_1 q^4$; $b_5=1\cdot 3^4=81$. Теперь по формуле суммы n первых членов прогрессии найдем S_5

$$S_5=\frac{81\cdot 3-1}{3-1}=121.$$

Замечания 1. Формулу суммы n членов геометрической прогрессии можно записать в другом виде, если вместо b_n подставить его значение b_1q^{n-1}, тогда

$$S_n=\frac{b_1q^n-b_1}{q-1} \qquad (q\neq 1).$$

2. В каждой конечной геометрической прогрессии произведение крайних членов прогрессии равно произведению двух членов, одинаково отстоящих от крайних, т. е. в прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n$ справедливы равенства

$$b_1b_n=b_2b_{n-1}=\ldots=b_kb_{n-k+1}.$$

Например, докажем, что $b_1b_n=b_2b_{n-1}$. По формуле общего члена геометрической прогрессии имеем:

$$b_n=b_1q^{n-1},$$
$$b_{n-1}=b_1q^{n-2},$$
$$b_2=b_1q.$$

Подставляя в предполагаемое равенство $b_1b_n=b_2b_{n-1}$ найденные значения для b_n, b_{n-1}, b_2, получаем:

$$b_1b_1q^{n-1}=b_1qb_1q^{n-2}, \text{ т. е. } b_1^2q^{n-1}=b_1^2q^{n-1}$$

— верное равенство, что и доказывает сформулированное выше утверждение.

Сводная таблица, иллюстрирующая свойства арифметической и геометрической прогрессий, приведена на стр. 187.

Примеры. 1. Восьмой член геометрической прогрессии равен 256, знаменатель прогрессии 4. Найти первый член этой прогрессии.

Решение. По условию $b_8=256$, $q=4$. По формуле общего члена имеем $b_8=b_1\cdot q^7$, откуда

$$b_1=\frac{256}{4^7}=\frac{2^8}{2^{14}}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.$$

2. Определить знаменатель и сумму n членов геометрической прогрессии, в которой $b_1=74\frac{2}{3}$, $n=6$, $b_6=2\frac{1}{3}$.

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
$a_1=a;\ a_{n+1}=a_n+d$	$b_1=b\ (b\neq 0);\ b_{n+1}=b_n\cdot q\ (q\neq 0)$
$a_n=a_1+d(n-1)$	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$
$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$	$b_{n+1}=\sqrt{b_n\cdot b_{n+2}}$ (все $b_k>0$)
$a_1+a_n=a_k+a_{n-k+1}$	$b_1\cdot b_n=b_k\cdot b_{n-k+1}$
$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$	$S_n=\dfrac{b_nq-b_1}{q-1}=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

Решение. По формуле общего члена имеем $b_6=b_1q^5$; значит, $q^5=b_6/b_1$, или

$$q^5=\frac{2\frac{1}{3}}{74\frac{2}{3}}=\frac{7}{224}=\frac{1}{32},$$

т. е. $q=1/2$. Далее, по формуле $S_6=\dfrac{b_6q-b_1}{q-1}$ имеем

$$S_6=\frac{2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-74\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-1}=147.$$

3. Определить первый и последний члены геометрической прогрессии, в которой $n=5$, $q=\dfrac{1}{2}$; $S_5=3\dfrac{7}{8}$.

Решение. Воспользуемся формулой $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, из которой найдем b_1:

$$b_1=\frac{S_n(q-1)}{q^n-1};\quad b_1=\frac{3\frac{7}{8}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^5-1}=2.$$

Теперь по формуле $b_5=b_1\cdot q^4$ найдем последний член прогрессии: $b_5=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{8}$.

4. Определить число членов геометрической прогрессии, в которой $b_1=3$, $b_n=96$, $S_n=189$.

Решение. Прежде всего из формулы $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$ найдем q. Имеем:

$$S_nq-S_n=b_nq-b_1;\quad (S_n-b_n)\,q=S_n-b_1;$$
$$q=\frac{S_n-b_1}{S_n-b_n},\quad \text{т. е.}\quad q=\frac{189-3}{189-96}=2.$$

Затем воспользуемся формулой n-го члена $b_n=b_1q^{n-1}$:

$$96=3\;2^{n-1},\ \text{откуда}\ 2^{n-1}=32\ \text{или}\ 2^{n-1}=2^5,$$

т. е. $n-1=5$, $n=6$.

5. Определить первый член, знаменатель и число членов геометрической прогрессии, в которой $b_6-b_4=216$, $b_3-b_1=8$, $S_n=40$.

Решение. Воспользуемся формулой общего члена геометрической прогрессии: $b_6=b_1q^5$, $b_4=b_1q^3$, $b_3=b_1q^2$. Тогда первые два данных уравнения примут вид:

$$b_1q^5-b_1q^3=216,\ b_1q^2-b_1=8.$$

Разделим почленно одно уравнение на другое:

$$\frac{b_1q^3\,(q^2-1)}{b_1\,(q^2-1)}=\frac{216}{8}.$$

Так как $b\neq 0$; $q\neq\pm 1$ (если $q=\pm 1$, то $b_3-b_1=0$, что противоречит условию), то, сократив левую часть уравнения на $b_1\,(q^2-1)$, получим $q^3=27$, откуда $q=3$.

Теперь из уравнения $b_1q^2-b_1=8$ найдем $b_1=\frac{8}{q^2-1}=1$.

Для определения n воспользуемся формулой $S_n=\frac{b_1\,(q^n-1)}{q-1}$.

Подставляя в это выражение найденные и данные значения, получим:

$$40=\frac{3^n-1}{3-1},\ \text{откуда}\ 3^n=81\ \text{или}\ 3^n=3^4,\ \text{т. е.}\ n=4.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какая числовая последовательность называется геометрической прогрессией?
2. Что называется знаменателем геометрической прогрессии?
3. Укажите условия, при которых геометрическая прогрессия является возрастающей последовательностью, убывающей, принимает постоянное значение, является немонотонной.
4. В чем состоит рекуррентное задание геометрической прогрессии?
5. Выведите формулу общего члена геометрической прогрессии.
6. Сформулируйте и докажите характеристическое свойство геометрической прогрессии.
7. Докажите, что для конечной геометрической прогрессии верно равенство $b_3\cdot b_{n-2}=b_1\cdot b_n$.

8. Выведите формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии для случая $q \neq 1$.

9. Как выражается сумма n первых членов геометрической прогрессии в случае $q = 1$?

10. Как выражается сумма n первых членов геометрической прогрессии через b_1, q и n $(q \neq 1)$?

Упражнения

1. Какие из следующих последовательностей являются геометрическими прогрессиями.

а) 1; 3; 9; 27; ...; б) 1; 8; 27; 64; ...; в) 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; ...;

г) 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{16}$; ...; д) —2; 2; —2; 2; ... ?

2. В каждой строке таблицы по трем данным вычислите неизвестные значения величин.

N	b_1	q	n	b_n	S_n
1	1	3	10		
2		1/2	8	2	
3	2		7	1458	
4		3		567	847
5	½			1/128	127/128
6	1/3	1/3		1/6561	
7		—2	19	262144	
8		—3	4		30

3. Определите первый член, знаменатель и число членов геометрической прогрессии, в которой $b_7 - b_5 = 48$, $b_6 + b_5 = 48$, $S_n = 1023$.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Определение. *Показательной функцией называется функция вида $y=a^x$, где основание a — произвольное положительное число, отличное от единицы.* От отрицательных значений a отказываются по той причине, что при этом для некоторых значений переменной x значения степени a^x не существуют. Например, при $a=-1$ и при $x=1/2$ значение a^x не определено. Легко сообразить, что значение $(-1)^x$ не определено и при $x=1/3$, $x=1/4$ в соответствии с определением степени с рациональным показателем.

В случае $a=1$ значение степени a^x при любом x равно единице. Случай $a=1$ не рассматривают потому, что он не интересен.

Данное выше определение показательной функции позволяет находить значение y для всякого значения x.

Рассмотрим в качестве примера показательную функцию $y=2^x$. Эта функция определена на множестве всех целых значений x. Действительно,

$$2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8$$

и, вообще,

$$2^n=\underbrace{2\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot 2}_{n\text{ раз}};\ 2^0=1\ (\text{по определению}).$$

При отрицательных целых значениях x имеем

$$2^{-1}=\frac{1}{2},\ 2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\ \text{ и, вообще, }\ 2^{-n}=\frac{1}{2^n}.$$

Эта функция определена также при любом рациональном x, например:

$$2^{1/2}=\sqrt{2}\simeq 1{,}414;\quad 2^{1/3}=\sqrt[3]{2}\simeq 1{,}260;$$
$$2^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0{,}707.$$

Наконец, функция определена и при любом иррациональном x (здесь мы этот случай не рассматриваем).

Итак, показательная функция определена на всем множестве действительных чисел.

Найденные значения показательной функции $y=2^x$ запишем в виде таблицы

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/3$	$1/2$	1	2	3
y	0,25	0,5	$\simeq 0,7$	1	$\simeq 1,3$	$\simeq 1,4$	2	4	8

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно в том, что функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ принимает следующие значения:

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
y	4	2	$\simeq 1,4$	1	$\simeq 0,7$	0,5	0,25

2. Свойства показательной функции. Рассмотрим приведенные в п. 1 таблицы. Мы замечаем следующие свойства:

1. *Показательные функции* $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ *принимают только положительные значения*, это вытекает из свойства степени с рациональным показателем. Любая показательная функция обладает этим свойством.

2. *Показательная функция* $y=2^x$ *является монотонно возрастающей.*

Докажем, что показательная функция $y=a^x$ при любом $a>1$ является монотонно возрастающей. Действительно, выберем два произвольных значения x_1 и x_2, причем пусть $x_2>x_1$. Составим для них разность соответствующих значений показательной функции $y_2-y_1=a^{x_2}-a^{x_1}$; вынесем a^{x_1} за скобку:

$$y_2-y_1=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1).$$

Заметим, что число x_2-x_1 положительно, тогда $a^{x_2-x_1}>1$ (положительная степень числа, большего единицы, сама больше единицы). Следовательно, разность $a^{x_2-x_1}-1$ положительна и, так как $a^{x_1}>0$, то $y_2-y_1>0$ и $y_2>y_1$.

Тем самым можно считать доказанным тот факт, что показательная функция $y=a^x$ при $a>1$ является монотонно возрастающей.

3. *Показательная функция* $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ *является монотонно убывающей.*

Предоставляем читателю доказать, что показательная функция $y=a^x$, где $0 < a < 1$, всегда является монотонно убывающей.

3. График показательной функции. Воспользовавшись составленными в п. 1 таблицами, построим в координат-

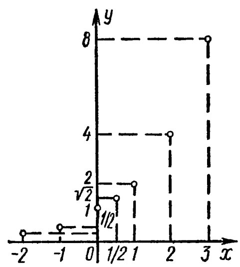


Рис. 82

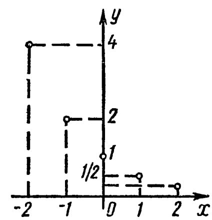


Рис. 83

ной плоскости точки с соответствующими координатами для функции $y=2^x$ на рис. 82 и для функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ на рис. 83. Эти точки намечают в каждом случае некоторую линию, расположенную выше оси абсцисс. Уменьшая шаг таблицы, можно доказать, что мы будем получать точки, попадающие на те же линии. Соединяя эти точки плавной кривой, получим графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 84).

На рис. 85 изображены графики показательной функции $y=a^x$ при различных основаниях $a=\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{2}$, $a=2$, $a=3$.

Рассматривая эти графики, мы видим, что показательная функция при $a > 1$ растет тем быстрее, чем больше a, а при основании $0 < a < 1$ убывает тем быстрее, чем меньше a.

В заключение еще раз перечислим основные свойства показательной функции (в справедливости этих свойств советуем читателю убедиться, рассматривая рис. 85).

1^0. Областью определения показательной функции является множество всех действительных чисел.

2^0. Показательная функция принимает только положительные значения, т. е. областью ее значений является множество положительных чисел.

3^0. Если $a > 1$, то при $x > 0$ $a^x > 1$, а при $x < 0$ $a^x < 1$. Если же $0 < a < 1$, то, наоборот, при $x > 0$ $a^x < 1$, а при $x < 0$ $a^x > 1$.

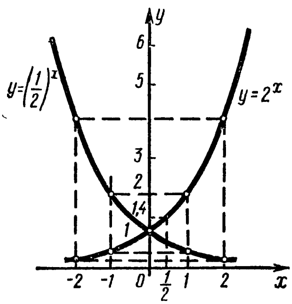


Рис. 84

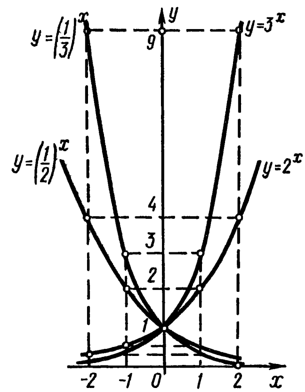


Рис. 85

4^0. Если $x = 0$, то $a^x = 1$ (график показательной функции пересекает ось ординат в точке $y = 1$).

5^0. При $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывающей.

Из этого свойства показательной функции вытекает важное следствие. Если две степени одного и того же положительного числа, отличного от единицы, равны, то равны и их показатели, т. е. если $a^{x_1} = a^{x_2}$ $(a > 0, a \neq 1)$, то $x_1 = x_2$.

Другими словами: показательная функция принимает каждое свое значение один раз.

6^0. Если $a > 1$, то при неограниченном возрастании x $(x \to +\infty)$ значения функции $y = a^x$ также неограниченно растут $(y \to +\infty)$. При неограниченном убывании аргумента x $(x \to -\infty)$ значения этой функции стремятся к нулю, оставаясь при этом положительными $(y \to 0,$ $y > 0)$. Если $0 < a < 1$, то при неограниченном возрастании аргумента x $(x \to +\infty)$ значения функции $y = a^x$ стремятся к нулю, оставаясь при этом положительными $(y \to 0,$ $y > 0)$. При неограниченном убывании аргумента

x $(x \to -\infty)$ значения этой функции неограниченно растут $(y \to +\infty)$.

Примеры. **1.** При помощи графика функции $y=2^x$ найти: а) значение y, соответствующее значению $x=0{,}5$; б) при каком значении x значение y равно 4.

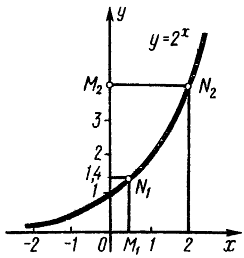


Рис. 86

Решение. а) Через точку M_1 (0,5; 0) проведем прямую, параллельную оси ординат до пересечения с графиком функции $y=2^x$ (рис. 86). Эта прямая пересечет график функции в точке N_1, ордината которой $\simeq 1{,}4$, откуда $y \approx 1{,}4$.

б) Через точку M_2 (0; 4) проведем прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечет график функции $y=2^x$ в точке N_2, абсцисса которой 2, откуда $x=2$ (см. рис. 86).

2. Сравнить значения выражений:

а) $2^{1,6}$ и $2^{1,7}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,3}$; в) $2^{-0,7}$ и $2^{-1,4}$;

г) $3^{\sin\frac{\pi}{6}}$ и $3^{\sin\frac{\pi}{2}}$; д) $8^{1,2}$ и $0{,}5^{-2}$.

Решение. Как известно, при $a>1$ показательная функция $y=a^x$ является монотонно возрастающей, а при $0<a<1$ — монотонно убывающей. На этом и основано сравнение значений выше приведенных выражений:

а) $2^{1,6} < 2^{1,7}$, так как $a=2$ и $1{,}6 < 1{,}7$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,8} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,3}$, так как $a=\frac{1}{3}$ и $2{,}8 > 1{,}3$;

в) $2^{-0,7} > 2^{-1,4}$, так как $a=2$ и $-0{,}7 > -1{,}4$;

г) $3^{\sin\frac{\pi}{6}} < 3^{\sin\frac{\pi}{2}}$, так как $a=3$ и $\sin\frac{\pi}{6} < \sin\frac{\pi}{2}$;

д) имеем $8^{1,2}=2^{3\cdot 1,2}=2^{3,6}$, $0{,}5^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2$;

но $2^{3,6} > 2^2$, поэтому $8^{1,2} > 0{,}5^{-2}$.

Рекомендуем читателю убедиться в справедливости выше перечисленных неравенств, рассматривая графики функций $y=2^x$; $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y=3^x$ и $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (см. рис. 85).

3. Решить уравнения и неравенства $2^x=8$; $2^x>8$; $2^x=-8$.

Решение. Уравнение $2^x=8$ можно переписать в виде $2^x=2^3$ (уравняв основания). Так как показательная функция $(y=2^x)$ принимает каждое свое значение один раз (в силу монотонности), то $x=3$.

Переписав неравенство $2^x>8$ в виде $2^x>2^3$ и учитывая, что показательная функция $y=2^x$ является монотонно возрастающей, получим $x>3$.

Уравнение $2^x=-8$ не имеет корней, так как показательная функция может принимать только положительные значения.

4. Решить следующие уравнения и неравенства:

а) $3^{2x}=\frac{1}{27}$; б) $0,5^{x+1}=0,125$; в) $8^x=4$;

г) $16=\left(\frac{1}{8}\right)^x$; д) $13^{3x}>13^4$; е) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x}>\left(\frac{3}{4}\right)^3$.

Решение. а) $\frac{1}{27}=3^{-3}$, поэтому уравнение примет вид: $3^{2x}=3^{-3}$. Используя свойство монотонности показательной функции, получаем уравнение $2x=-3$, или $x=-\frac{3}{2}$.

б) $0,125=0,5^3$, поэтому уравнение примет вид: $0,5^{x+1}=0,5^3$, откуда $x+1=3$; $x=2$.

8) $8^x=2^{3x}$; $4=2^2$; уравнение примет вид: $2^{3x}=2^2$, откуда $3x=2$; $x=\frac{2}{3}$.

г) $16=2^4$; $\left(\frac{1}{8}\right)^x=2^{-3x}$, уравнение примет вид $2^4=2^{-3x}$. Значит, $4=-3x$, откуда $x=-\frac{4}{3}$.

д) Показательная функция с основанием $a=13$ является монотонно возрастающей, поэтому $3x>4$, или $x>\frac{4}{3}$.

е) Показательная функция с основанием $a=\frac{3}{4}$ является монотонно убывающей, поэтому $5x<3$, или $x<\frac{3}{5}$.

4. Целая и дробная части числа. *Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.* Целая часть числа x обозначается символом $[x]$. Для любого x имеем

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

Пример.

$$[3,7]=3;$$
$$[5,128]=5;$$
$$[7]=7;$$
$$[-0,7]=-1, \text{ так как } -1<-0,7<0,$$
$$[-5,8]=-6.$$

Дробной частью числа x называется разность между x и его целой частью. Дробная часть числа x обозначается символом $\{x\}$. Значит, $\{x\}=x-[x]$.

Так как $[x]\leqslant x<[x]+1$,

то можно записать, что $0 \leqslant x-[x] < 1$, или $0 \leqslant \{x\} < 1$, т. е. дробная часть числа — это неотрицательное число, меньшее единицы.

Например:

$$\{3,7\} = 3,7-[3,7] = 0,7;$$
$$\{5,128\} = 5,128-[5,128] = 0,128;$$
$$\{7\} = 7-[7] = 0;$$
$$\{-0,7\} = -0,7-[-0,7] = -0,7-(-1) = 0,3;$$
$$\{-5,8\} = -5,8-[-5,8] = -5,8-(-6) = 0,2.$$

Из равенства $\{x\} = x-[x]$ следует, что $x = [x] + \{x\}$, т. е. любое число x можно записать в виде суммы его целой и дробной части. Например,

$$3,7 = 3+0,7 = [3,7] + \{3,7\};$$
$$5,128 = 5+0,128 = [5,128] + \{5,128\};$$
$$7 = 7+0 = [7] + \{7\};$$
$$-0,7 = -1+0,3 = [-0,7] + \{-0,7\};$$
$$-5,8 = -6+0,2 = [-5,8] + \{-5,8\}.$$

5. Функция $y = 10^x$. В практике вычислений особую роль играет функция $y = 10^x$. Покажем, что, зная значения выражения 10^x для $x \in [0;\ 1]$, легко вычислить значения этого выражения для любого x.

Пусть нужно найти приближенное значение выражения $10^{3,78}$. Представим показатель степени 3,78 в виде суммы целой и дробной части: $3,78 = 3+0,78$, тогда

$$10^{3,78} = 10^{3+0,78} = 10^3 \cdot 10^{0,78} = 1000 \cdot 10^{0,78}.$$

Таким образом, для отыскания приближенного значения $10^{3,78}$ осталось найти значение выражения $10^{0,78}$, где $0,78 \in [0,1]$.

Рассмотрим еще один пример — найти приближенное значение выражения $10^{-2,85}$. Представим показатель степени $-2,85$ в виде суммы целой и дробной части: $-2,85 = -3+0,15$, тогда

$$10^{-2,85} = 10^{-3+0,15} = 10^{-3} \cdot 10^{0,15}.$$

Для решения задачи осталось найти значение выражения $10^{0,15}$, где $0,15 \in [0,1]$.

Итак, зная значения выражения 10^x для $x \in [0;\ 1]$, легко вычислить значения этого выражения для любого x.

Значения выражения 10^x, где $x \in [0, 1]$, можно приближенно найти, построив график функции $y=10^x$ на отрезке $[0; 1]$. Для этого составим таблицу ее значений с шагом 1/8:

$$x=0, \quad y=10^0=1;$$

$$x=1/2, \quad y=10^{1/2}=\sqrt{10}\approx 3,162 \approx 3,16;$$

$$x=1/4, \quad y=(10^{1/2})^{1/2}\approx \sqrt{3,162}\approx 1,779 \approx 1,78;$$

$$x=1/8, \quad y=(10^{1/4})^{1/2}\approx \sqrt{1,779}\approx 1,333 \approx 1,33.$$

(Все вычисления выполнены по таблицам В. М. Брадиса «Четырехзначные математические таблицы», М., «Просвещение», 1969, таблица IV и затем округлены до сотых).

Далее имеем:

$$x=3/4, \quad y=10^{3/4}=10^{1/2+1/4}=10^{1/2}10^{1/4}\approx 5,63;$$
$$x=3/8, \quad y=10^{3/8}=10^{1/4+1/8}=10^{1/4}10^{1/8}\approx 2,37;$$
$$x=5/8, \quad y=10^{5/8}=10^{1/2+1/8}=10^{1/2}10^{1/8}\approx 4,22;$$
$$x=7/8, \quad y=10^{7/8}=10^{3/4+1/8}=10^{3/4}10^{1/8}\approx 7,50.$$

Найденные значения выражения 10^x занесем в таблицу:

x	0	1/8 (0,125)	1/4 (0,250)	3/8 (0,375)	1/2 (0,500)	5/8 (0,625)	3/4 (0,750)	7/8 (0,875)	1
10^x	1,00	1,33	1,78	2,37	3,16	4,22	5,63	7,50	10,00

Построим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице (причем по оси абсцисс в качестве единицы масштаба возьмем 10 см, а по оси ординат — 1 см), и соединим эти точки плавной кривой (рис. 87).

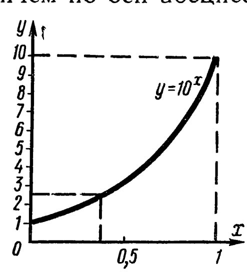


Рис. 87

Построенный график позволяет находить приближенные значения функции $y=10^x$ для любого x. Покажем на примерах, как находить приближенные значения функции $y=10^x$.

Примеры. 1. Пусть $x=3,56$, тогда $10^{3,56}=10^3 10^{0,56}$. По графику находим $10^{0,56}\approx 3,7$, откуда $10^{3,56}=3,7\cdot 10^3$.

Значения функции 10^x

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2

Пусть $x=-1,3$, тогда $10^{-1,3}=10^{-2+0,7}=10^{-2}\cdot 10^{0,7}$. По графику находим $10^{0,7}\approx$ ≈ 5, откуда $10^{-1,3}=10^{-2}\cdot 5$.

Если требуется большая степень точности для вычисления значений выражения 10^x, пользуются таблицами, например четырехзначными математическими таблицами В. М. Брадиса.

Приведенная ниже таблица содержит значения функции $y=10^x$ для значений переменной x от 0,0000 до 0,9999. Рассмотрим начало этой таблицы.

Найдем, например, значение выражения $10^{2,024}$. Прежде всего преобразуем это выражение $10^{2,024}=10^{2+0,024}=$ $=10^2\cdot 10^{0,024}$. Для решения задачи надо найти значение функции $y=10^x$ при $x=$ $=0,024$. Возьмем строку «,02» и столбец «4». В их пересечении стоит число 1057. Чтобы найти значение выражения $10^{0,024}$, заметим, что $10^0<10^{0,024}<10^1$, т. е. $1<10^{0,024}<10$. Значит, $10^{0,024}\approx 1,057$ и окончательно

$$10^{2,024}\approx 10^2\cdot 1,057.$$

Если бы требовалось найти значение $10^{0,0246}$, то к найденному в таблице числу 1057 нужно было бы прибавить 1 — поправку, помещенную в таблице справа на пересечении строки 02 и столбца «6». Таким образом, $10^{0,0246}\approx 1,058$. Аналогично можно найти $10^{-3,685}=$

$=10^{-4+0,315}=10^{-4}\cdot 10^{0,315}$. Значение выражения $10^{0,315}$ находим по таблице $10^{0,315}\approx 2,065$, откуда $10^{-3,685}\approx$ $\approx 2,065\cdot 10^{-4}$.

С помощью таблицы значений функции $y=10^x$ можно представить в виде степени с основанием 10 любое положительное число. Возьмем для примера число 11,09. Найдем это число в таблице. Оно находится на пересечении строки «04» и столбца «5», т. е. $10^{0,45}\approx 1,109$. Значит, $11,09=10\cdot 1,109=10\cdot 10^{0,45}=10^{1,45}$.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется показательная функция?

2. Почему показательная функция $y=a^x$ не определяется при отрицательном основании a?

3. Почему показательная функция $y=a^x$ не определяется при основании $a=0$; $a=1$?

4 Почему показательная функция может принимать только положительные значения?

5. Докажите, что показательная функция $y=a^x$ при $a>1$ является монотонно возрастающей.

6. Докажите, что показательная функция $y=a^x$ при $0<a<1$ является монотонно убывающей.

7. Перечислите основные свойства показательной функции.

8. Что такое целая и дробная части числа?

9. Расскажите, какую роль играет знание значений функции $y=10^x$, где $x\in[0;\ 1]$, для нахождения значений этой функции при любом значении x. Какой общий план решения этой задачи. Приведите примеры.

Упражнения

1. Вычертите на одном чертеже графики функций: а) $y=3^x$ и б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, давая x следующие значения: —3; —2; —1; 0; 1; 2; 3.

2. Вычертите на одном чертеже графики функций: а) $y=2^x$; б) $y=3^x$; в) $y=5^x$, давая x следующие значения: —2; —1; 0; 1; 2.

3. Вычертите на одном чертеже графики функций: а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; в) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$, давая x следующие значения: —2; —1; 0; 1; 2.

4. С помощью графика функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ найдите: а) значение y, соответствующее значению x, равному —2; —1; 0; 1; б) при каком значении x значение y равно 9; 3; 2; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; в) решите уравнения и неравенства: $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x>3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x<3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$.

5. Постройте график функции $y=1{,}5^x$. С помощью этого графика: а) сравните выражения $1{,}5^{-2{,}8}$ и $1{,}5^{-1{,}5}$; $1{,}5^{-1{,}9}$ и $1{,}5^{0{,}7}$; б) решите уравнения. $1{,}5^x=2$; $1{,}5^x=-1$; $1{,}5^x=0$; $1{,}5^x=1$; $1{,}5^x=-0{,}5$; $1{,}5^x=0{,}5$; в) решите неравенства. $1{,}5^x>2$; $1{,}5^x<-1$; $1{,}5^x>0$; $1{,}5^x<1$; $1{,}5^x>-0{,}5$; $1{,}5^x<-0{,}5$; $1{,}5^x<0{,}5$.

6. Решите следующие уравнения:

а) $2^x=2^5$; б) $3^x=27$; в) $15^x=1$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{16}{81}$; д) $\left(\frac{1}{8}\right)^x=32$; е) $2^x=\sqrt[3]{4}$;

ж) $7^x=\frac{1}{\sqrt[3]{49}}$; з) $3^{2x}=\frac{1}{9}$; и) $8^x=128$.

7. Решите следующие неравенства.

а) $5^x<5^4$; б) $0{,}3^x>0{,}3^5$; в) $3^x<243$; г) $10^x>0{,}001$;

д) $0{,}5^x>0{,}125$; е) $0{,}3^x>11\frac{1}{9}$; ж) $2^x<\sqrt{2}$; з) $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\sqrt{3}$.

8. Решите графически следующие уравнения и неравенства:

а) $2^x=x+1$. Указание. Постройте графики функций $y=2^x$; $y=x+1$ и найдите абсциссы точек пересечения этих графиков;

б) $2^x=3x-1$, $2^x>3x-1$;

в) $3^x=3x$, $3^x>3x$, $3^x<3x$.

9. Найдите целую и дробную части числа. Представьте данное число в виде суммы его целой и дробной части: а) 2,7; б) 18,5; в) 0,875; г) —0,3; д) —2,37; е) $-8\frac{3}{11}$.

10. Укажите множество значений переменной x, если известно, что целая часть x равна. а) 2; б) 0; в) —3.

11. Найдите по таблице значение выражения 10^x, если значение переменной x равно:

а) 0,16; 0,02; 0,812; 0,0754; б) 1,23; 3,05; 2,3421; —1,25.

12. С помощью таблицы значений функции $y=10^x$ представьте в виде степени с основанием 10 число: а) 0,1065; б) 111900.

§ 2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1. Определение логарифма. *Логарифмом числа N по данному основанию a называется такой показатель степени, в который надо возвести основание a, чтобы получить число N;* запись $\log_a N$ $(a>0,\ a\neq 1)$

Примеры:

$$\log_2 8=3, \quad \text{так как } 2^3=8;$$
$$\log_2 32=5, \quad \text{так как } 2^5=32;$$
$$\log_2 \frac{1}{4}=-2, \quad \text{так как } 2^{-2}=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\log_a N$ — это другое название для показателя степени.

Примеры. 1. Проверить справедливость следующих равенств: а) $\log_3 27=3$; б) $\log_8 \frac{1}{8}=-1$; в) $\log_2 \frac{1}{32}=4$; г) $\log_2 \frac{1}{32}=-5$; д) $\log_{125} \frac{1}{5}=-1$; е) $\log_{125} \frac{1}{5}=-\frac{1}{3}$.

Решение. а) $3^3=27$, следовательно, $\log_3 27=3$; равенства б), г), е) верны; в) $2^4 \neq 1/32$, следовательно, $\log_2 \frac{1}{32} \neq 4$; д) $125^{-1} \neq \frac{1}{5}$, следовательно, $\log_{125} \frac{1}{5} \neq -1$.

2. Следующие равенства переписать в виде логарифмических равенств: а) $4^{-3}=1/64$; б) $15^1=15$; в) $17^0=1$; г) $36^{1/2}=6$; д) $100^{1/4}=\sqrt{10}$; е) $0{,}01^{-3/2}=1000$.

Решение.

а) $\log_4 \frac{1}{64}=-3$; б) $\log_{15} 15=1$; в) $\log_{17} 1=0$;

г) $\log_{36} 6=\frac{1}{2}$; д) $\log_{100} \sqrt{10}=\frac{1}{4}$; е) $\log_{0,01} 1000=-\frac{3}{2}$.

3. Указать, какие из нижеследующих уравнений имеют решение. Запишите это решение с помощью логарифма: а) $2^x=1/64$; б) $3^x=5$; в) $5^x=-2$.

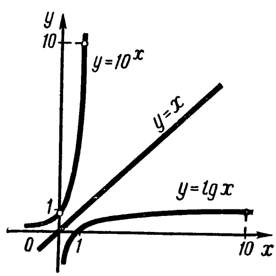


Рис. 88

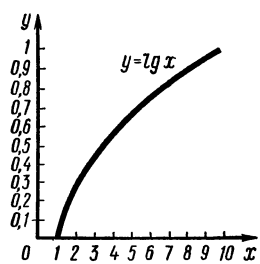


Рис. 89

Решение. а) Уравнение $2^x=1/64$ можно переписать в виде $2^x=2^{-6}$, откуда $x=-6$, или $x=\log_2 \frac{1}{64}=-6$;

б) Уравнение $3^x=5$ также имеет решение $x=\log_3 5$. Так как $3^1 < 5 < 3^2$, то $1 < x < 2$.

в) Уравнение $5^x=-2$ не имеет решения (показательная функция не может принимать отрицательных значений). Таким образом, выражение $\log_5(-2)$ не имеет смысла.

2. Десятичные логарифмы. Если основанием логарифмов служит число 10, то такие логарифмы называются *десятичными*. Десятичный логарифм числа N принято обозначать $\lg N$ (а не $\log_{10} N$).

Примеры 1. Найти десятичные логарифмы следующих чисел: 1000; 0,1; $\sqrt[3]{10}$; $10^{-3/2}$.

Решение. Так как $1000=10^3$, то $\lg 1000=3$. Аналогично: $0,1=10^{-1}$, поэтому $\lg 0,1=-1$; наконец, $\lg 10^{-3/2}=-3/2$.

2. Решить следующие уравнения:

а) $\lg x=1$; б) $\lg x=-2$; в) $\lg x=1/2$; г) $\lg x=0$.

Решение:

а) $x=10^1$; б) $x=10^{-2}=0,01$; в) $x=10^{1/2}=\sqrt{10}$; г) $x=10^0=1$.

3. Функция $y=\lg x$. Функция $y=10^x$ является монотонно возрастающей, поэтому у нее есть обратная функция. Для того чтобы найти эту обратную функцию, поменяем в равенстве $y=10^x$ переменные x и y местами. Получим $x=10^y$, откуда $y=\lg x$. Этой формулой задается функция, обратная показательной функции $y=10^x$. Как отмечалось выше (см. стр. 118), графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 88). Отметим основные свойства функции $y=\lg x$.

1. *Областью определения функции является множество всех положительных чисел.*

2. *Областью значений функции является множество всех действительных чисел.*

Справедливость этих двух свойств вытекает из того факта, что функции $y=10^x$ и $y=\lg x$ являются взаимно обратными и, следовательно, область определения и множество значений у них меняются местами.

3. *Функция $y=\lg x$ является монотонно возрастающей (большему числу соответствует больший логарифм).*

4. *При* $x=1$ $\lg x=0$ (график пересекает ось абсцисс в точке (1; 0)); если $0<x<1$, то $\lg x<0$, если $x>1$, то $\lg x>0$ (рис. 88).

Примеры 1. На рис. 89 изображен график функции $y=\lg x$ в случае, когда масштаб по оси Oy в 10 раз крупнее масштаба по оси Ox. Воспользовавшись этим графиком:

а) найти $\lg 2$; $\lg 5$; $\lg(-2)$; б) найти x, если $\lg x=0,48$; $\lg x=0,7$.

Решение. а) $\lg 2=0,3$; $\lg 5=0,7$; $\lg(-2)$ не существует, так как $-2<0$;

б) если $\lg x=0,48$, то $x=3$;

Если $\lg x=0,7$, то $x=5$.

2. Сравнить значения выражений: а) $\lg 7$ и $\lg 9$; б) $\lg 0,4$ и $\lg 2,1$; в) $\lg 0,7$ и $\lg 0,3$.

Решение. а) Функция $y=\lg x$ возрастающая, значит, $x_1<x_2 \Rightarrow \lg x_1<\lg x_2$, так как $7<9$, то, следовательно, $\lg 7<\lg 9$; б) так как $0,4<2,1$, то $\lg 0,4<\lg 2,1$; в) так как $0,7>0,3$, то $\lg 0,7>\lg 0,3$.

3. Решить уравнения и неравенства:

а) $\lg x=0$, $\lg x>0$, $\lg x<0$;

б) $\lg x=0,6$, $\lg x<0,6$, $\lg x>0,6$;

в) $\lg x=-0,3$, $\lg x < -0,3$, $\lg x > -0,3$.

Решение. Воспользовавшись изображенным на рис. 89 графиком функции $y=\lg x$, получим следующие результаты:

а) $\lg x=0 \Rightarrow x=1$; $\lg x > 0 \Rightarrow x > 1$; $\lg x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$;

б) $\lg x=0,6 \Rightarrow x=4$; $\lg x < 0,6 \Rightarrow 0 < x < 4$; $\lg x > 0,6 \Rightarrow x > 4$;

в) $\lg x=-0,3 \Rightarrow x=0,5$; $\lg x<-0,3 \Rightarrow 0<x<0,5$; $\lg x>-0,3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x > 0,5$.

4. Найти область определения функции:

а) $y=\lg(3x-2)$; б) $y=\lg(5-x)$; в) $y=\lg\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$;

г) $y=\lg(4-x^2)$; д) $y=\lg(x-2)^2$.

Решение. При решении этих примеров надо помнить о том, что область определения функции $y=\lg x$ есть множество положительных чисел.

а) $y=\lg(3x-2)$, $3x-2 > 0$, $x > \frac{2}{3}$. Таким образом, областью определения служит множество $\left]\frac{2}{3};\ +\infty\right[$;

б) $y=\lg(5-x)$, $5-x > 0$, $x < 5$; $]-\infty;\ 5\ [$;

в) $y=\lg\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$, $\frac{x-2}{x+1} > 0$, $x > 2$, или $x < -1$.

Область определения — объединение двух множеств $]-\infty;\ -1\,[\,\cup\,]\,2;\ +\infty\,[$;

г) $y=\lg(4-x^2)$, $4-x^2 > 0$, $-2 < x < 2$.

Область определения — множество $]-2;\ 2\,[$;

д) $y=\lg(x-2)^2$. Выражение, стоящее под знаком логарифма, положительно при всех значениях x, кроме $x=2$ (при котором оно обращается в ноль), а поэтому область определения этой функции есть множество $]-\infty;\ 2\,[\,\cup\,]\,2;\ +\infty\,[$.

5. Решить уравнения:

а) $\lg(3x-2)=1$; б) $\lg(2x-3)=2$; в) $\lg(12-x)=-1$;

г) $\lg(x^2-6x+6)=0$; д) $\lg(676-x^2)=2$

Решение. а) Так как $1=\lg 10$, то уравнение $\lg(3x-2)=1$ можно переписать в виде $\lg(3x-2)=\lg 10$. Далее из свойства монотонности функции $y=\lg x$ вытекает, что эта функция каждое значение принимает только один раз. Следовательно, $3x-2=10$, откуда $x=4$.

Аналогично решаются и остальные уравнения;

б) $2=\lg 100$, т. е. данное уравнение может быть записано в виде $\lg(2x-3)=\lg 100$, откуда $2x-3=100$, $x=\frac{103}{2}$;

в) $-1=\lg 0,1$, поэтому $\lg(12-x)=\lg 0,1$, откуда $12-x=0,1$; $x=11,9$;

г) $0=\lg 1$, поэтому $\lg(x^2-6x+6)=\lg 1$, откуда $x^2-6x+6=1$, или $x^2-6x+5=0$ и $x_1=1$, $x_2=5$;

д) $2=\lg 100$, поэтому $\lg(676-x^2)=\lg 100$, откуда $676-x^2=100$, или $x^2=576$; $x=\pm 24$.

4. Логарифмирование и потенцирование. Применение логарифмов позволяет во многих случаях значительно упростить вычисления. Чтобы убедиться в этом, прежде всего выясним, как находятся логарифмы произведения, частного, степени и корня.

Теорема 1. *Логарифм произведения любых двух положительных чисел равен сумме логарифмов множителей, т. е.*

$$\lg (x_1 x_2) = \lg x_1 + \lg x_2, \text{ где } x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0.$$

Доказательство. Пусть $\lg x_1 = y_1$ и $\lg x_2 = y_2$. Тогда по определению логарифма $x_1 = 10^{y_1}$ и $x_2 = 10^{y_2}$. Перемножив эти равенства почленно, получим

$$x_1 \cdot x_2 = 10^{y_1 + y_2};$$

значит,

$$\lg (x_1 \cdot x_2) = y_1 + y_2, \text{ или } \lg (x_1 \cdot x_2) = \lg x_1 + \lg x_2.$$

Предлагаем читателю самому доказать, что установленное свойство справедливо для любого числа положительных множителей.

Теорема 2. *Логарифм степени с положительным основанием равен произведению показателя степени и логарифма ее основания, т. е.*

$$\lg p^k = k \lg p, \text{ где } p > 0.$$

Доказательство. Пусть $\lg p = y$. Тогда по определению логарифма $p = 10^y$. Возведем обе части этого равенства в степень k: $p^k = (10^y)^k$, или $p^k = 10^{ky}$. Следовательно, $\lg p^k = ky$, или $\lg p^k = k \lg p$.

Покажем, что знания этих теорем достаточно для нахождения логарифмов дроби и корня. Действительно, пусть дано выражение x_1/x_2, где $x_1 > 0$; $x_2 > 0$. Это выражение можно переписать в виде $x_1/x_2 = x_1 (x_2)^{-1}$; тогда

$$\lg (x_1/x_2) = \lg x_1 + \lg x_2^{-1} = \lg x_1 - \lg x_2.$$

Пусть теперь дано выражение $\sqrt[k]{x}$; где $x > 0$, тогда $\lg \sqrt[k]{x} = \lg x^{1/k} = \frac{1}{k} \lg x$. Таким образом, если некоторое выражение составлено из положительных чисел с помощью операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то его логарифм можно выразить через логарифмы входящих в него чисел. Такое преобразование называется *логарифмированием*. Действие, обратное логарифмированию, называется *потенцированием*.

Примеры. 1. Найти приближенные значения следующих логарифмов: а) $\lg 15$; б) $\lg \frac{1}{2}$; в) $\lg 8$; г) $\lg \sqrt{5}$; д) $\lg 20$; е) $\lg 0{,}06$.

Решение. Прежде всего, воспользовавшись графиком функции $y=\lg x$ (см. рис. 89), выпишем приближенные значения следующих логарифмов:

$$\lg 2 \simeq 0{,}30, \quad \lg 3 \simeq 0{,}48, \quad \lg 5 \simeq 0{,}70.$$

Теперь имеем:

а) $\lg 15=\lg(3\cdot 5)=\lg 3+\lg 5 \simeq 0{,}48+0{,}70=1{,}18;$

б) $\lg \frac{1}{2}=\lg 1-\lg 2=0-\lg 2 \approx -0{,}30;$

в) $\lg 8=\lg(2^3)=3\lg 2 \approx 3\cdot 0{,}30=0{,}90;$

г) $\lg \sqrt{5}=\lg\left(5^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\lg 5 \simeq \frac{1}{2}\cdot 0{,}70=0{,}35;$

д) $\lg 20=\lg(5\cdot 2^2)=\lg 5+2\lg 2 \simeq 0{,}70+2\cdot 0{,}30=1{,}30;$

е) $\lg 0{,}06=\lg\left(\frac{6}{100}\right)=\lg 2+\lg 3-\lg 100 \simeq 0{,}30+0{,}48-2=-1{,}22.$

2. Прологарифмировать следующие выражения (буквами обозначены положительные числа):

$$\text{а) } x=abc; \quad \text{б) } x=\frac{3cd}{4ab}; \quad \text{в) } x=5c^2d;$$

$$\text{г) } x=a\sqrt{b}; \quad \text{д) } x=\sqrt[3]{a/b}.$$

Решение.

а) $x=abc;\ \lg x=\lg a+\lg b+\lg c;$

б) $x=\frac{3cd}{4ab}=3\cdot c\cdot d\cdot 2^{-2}\cdot a^{-1}\cdot b^{-1};\quad \lg x=\lg 3+\lg c+\lg d-2\lg 2-$
$-\lg a-\lg b,$

в) $x=5c^2d;\ \lg x=\lg 5+2\lg c+\lg d;$

г) $x=a\sqrt{b}=a\cdot b^{1/2};\ \lg x=\lg a+\frac{1}{2}\lg b;$

д) $x=\sqrt[3]{a/b}=a^{1/3}b^{-1/3};\ \lg x=\frac{1}{3}\lg a-\frac{1}{3}\lg b.$

3. Решить уравнения:

$$\text{а) } 2^x=3; \quad \text{б) } 2\cdot 3^x=7; \quad \text{в) } 5^x=10; \quad \text{г) } 0{,}01^x=2.$$

Решение. а) Прологарифмировав обе части данного равенства, получим $x\lg 2=\lg 3$, откуда $x=\frac{\lg 3}{\lg 2}\approx\frac{0{,}47}{0{,}30}\simeq 1{,}56$ (значения $\lg 2$, $\lg 3$ найдены графически с помощью рис. 89);

б) в результате логарифмирования имеем равенство $\lg 2+x\lg 3=$ $=\lg 7$, откуда $x=\frac{\lg 7-\lg 2}{\lg 3}\simeq\frac{0{,}85-0{,}30}{0{,}47}\approx 1{,}17$ (значение $\lg 7$ найдено с помощью рис. 89);

в) $x \lg 5 = \lg 10$; $x = \frac{\lg 10}{\lg 5} = \frac{1}{\lg 5} \simeq \frac{1}{0,70} \simeq 1,43$;

г) $x \lg 0,01 = \lg 2$; $x = \frac{\lg 2}{\lg 0,01} = \frac{\lg 2}{-2} \approx -0,15$.

4. Найти x, если: а) $\lg x = \lg 7,2 - \lg 2,4$;
б) $\lg x = \lg 1,5 + \lg 12$; в) $\lg x = 2 \lg 5 + 3 \lg 2$;
г) $\lg x = \lg 0,4 - 2 \lg 3$.

Решение. а) $x = \frac{7,2}{2,4} = 3$; б) $x = 1,5 \cdot 12 = 18$; в) $x = 5^2 \cdot 2^3 = 200$; г) $x = \frac{0,4}{3^2} = \frac{2}{45}$.

5. Решить уравнения:

а) $\lg(x-13) + 3 \lg 2 = \lg(3x+1)$;
б) $\lg(2x+2) - \lg(15-x) = 1 + \lg 3$;
в) $2 \lg(2x-4) - \lg(9-x) = 2 \lg 3$;
г) $\lg(x-5) + \lg(2-x) = 2$.

Решение. а) Потенцируя обе части равенства, получаем уравнение

$$(x-13)\,2^3 = 3x+1, \text{ откуда } 5x = 105, \ x = 21.$$

Сделаем проверку. Подставив в уравнение найденное решение $x = 21$, получим:

$$\lg 8 + 3 \lg 2 = \lg 64, \quad \text{или} \quad \lg(8 \cdot 2^3) = \lg 64.$$

Таким образом, корень данного уравнения $x = 21$;

б) прежде чем потенцировать, заметим, что $\lg 10 = 1$, и перепишем уравнение в виде

$$\lg(2x+2) - \lg(15-x) = \lg 10 + \lg 3,$$

откуда

$$\frac{2x+2}{15-x} = 10 \cdot 3, \text{ или } 2x+2 = 450 - 30x, \text{ т. е. } x = 14.$$

Сделаем проверку: $\lg 30 - \lg 1 = 1 + \lg 3$, т. е. $30 = 10 \cdot 3$.

Итак, $x = 14$ — корень уравнения;

в) потенцируя, получаем

$$\frac{(2x-4)^2}{9-x} = 9,$$

откуда

$$4x^2 - 16x + 16 = 81 - 9x, \text{ или } 4x^2 - 7x - 65 = 0; \ x_1 = -13/4; \ x_2 = 5.$$

Сделаем проверку. Корень $x_1 = -13/4$ является посторонним, так как при этом значении x выражение $2x-4$ будет отрицательным, а, как мы знаем, область определения логарифмической функции есть множество положительных чисел.

Корень $x = 5$, как легко видеть, удовлетворяет уравнению (Проверьте сами!);

г) уравнение $\lg(x-5)+\lg(2-x)=2$ не имеет корней, так как искомое значение x должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} x-5>0, \\ 2-x>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x>5 \\ x<2, \end{matrix}$$

а эта система противоречива и решения не имеет.

5. Стандартный вид числа. Характеристика и мантисса. Любое положительное число x можно записать в так называемом стандартном виде: $x=a\cdot 10^n$, где $1\leqslant a<10$; $n\in Z$. Число n называется *порядком* числа x.

Примеры. Записать следующие числа в стандартном виде и указать их порядок: а) 273; б) 51,83; в) 0,8912; г) 400012; д) 0,00051; е) 1,002.

Решение.

а) $273=2{,}73\cdot 10^2$, $n=2$;
б) $51{,}83=5{,}183\cdot 10^1$, $n=1$;
в) $0{,}8912=8{,}912\cdot 10^{-1}$, $n=-1$;
г) $400012=4{,}00012\cdot 10^5$, $n=5$;
д) $0{,}00051=5{,}1\cdot 10^{-4}$, $n=-4$;
е) $1{,}002=1{,}002\cdot 10^0$, $n=0$.

Легко видеть, что если $x\geqslant 1$, то порядок числа неотрицателен, $n\geqslant 0$, причем трехзначное число, например 273, имеет порядок 2; а число, содержащее две цифры в целой части, например 51, 83, имеет порядок $n=1$; наконец, число, содержащее одну цифру в целой части, имеет порядок $n=0$. Можно сделать следующий вывод: *если число $x\geqslant 1$ содержит в целой части m цифр, то его порядок будет $n=m-1$.*

Если же число $0<x<1$, то его порядок отрицателен, $n<0$, причем $|n|$ равен числу нулей в x до первой значащей цифры, включая ноль целых. Так, если $x=0{,}8912$, то $n=-1$; если $x=0{,}00051$, то $n=-4$.

Пример. Не переходя к стандартному виду записи, найти порядок чисел: а) $x=373{,}25$; б) $x=0{,}00085$.

Решение. а) Число 373,25 больше единицы и содержит в целой части три цифры. Следовательно, его порядок $n=2$;

б) число 0,00085 меньше единицы и содержит четыре нуля до первой значащей цифры. Следовательно, $n=-4$.

Пусть $x=375{,}8$. Запишем это число в стандартном виде и найдем его логарифм:

$$x=3{,}758\cdot 10^2;\ \lg x=\lg 3{,}758+\lg 10^2=\lg 3{,}758+2.$$

Так как $1<3{,}758<10$, то $\lg 1<\lg 3{,}758<\lg 10$, т. е. $0<\lg 3{,}758<1$. Таким образом, $\lg x$ представлен в виде суммы целого числа 2 и положительного числа, меньшего единицы ($\lg 3{,}758$), т. е. в виде суммы его целой и дробной частей. Целая часть логарифма числа x равна порядку этого числа, а дробная часть равна $\lg 3{,}758$, т. е. $[\lg x]=2$; $\{\lg x\}=\lg 3{,}758$.

Целая часть логарифма числа называется его *характеристикой*, а дробная часть — *мантиссой*.

Теорема. *Характеристика логарифма числа $a\cdot 10^n$, где $1\leqslant a<10$ и $n\in Z$, равна порядку этого числа, т. е. n, а мантисса равна $\lg a$.*

Доказательство. Пусть $x=a\cdot 10^n$, где $1\leqslant a<10$ и $n\in Z$. Тогда $\lg x=\lg a+\lg 10^n$, т. е. $\lg x=n+\lg a$. Так как $1\leqslant a<10$, то $0\leqslant \lg a<1$. Следовательно, $\lg x=[\lg x]+\{\lg x\}$, причем $[\lg x]=n$, а $\{\lg x\}=\lg a$.

Следствие. *Логарифмы чисел, отличающихся друг от друга только порядком, имеют одну и ту же мантиссу.*

Доказательство. Пусть $x=a\cdot 10^k$, $y=a\cdot 10^n$, где $0\leqslant a<1$; k, $n\in Z$, тогда $\lg x=\lg a+k$; $\lg y=\lg a+n$. Таким образом,

$$\{\lg x\}=\{\lg y\}=\lg a.$$

Например, пусть $x=57{,}5$; $y=0{,}0575$. Запишем эти числа в стандартном виде и найдем их логарифмы: $x=5{,}75\cdot 10^1$, $y=5{,}75\cdot 10^{-2}$, $\lg x=1+\lg 5{,}75$, $\lg y=-2+\lg 5{,}75$. Таким образом, доказанное следствие можно сформулировать иначе: *мантисса логарифма числа не зависит от положения запятой в числе.*

Примеры. 1. Найти характеристику логарифма числа а) 302; б) 87,5; в) 0,015.

Решение Как было доказано выше, характеристика логарифма числа равна его порядку, а поэтому $[\lg 302]=2$, $[\lg 87{,}5]=1$, $[\lg 0{,}015]=-2$

2. Зная, что $\lg 2\approx 0{,}30$ и $\lg 3\approx 0{,}48$, найти: а) $\lg 20$; б) $\lg 2000$; в) $\lg 0{,}02$; г) $\lg 300$; д) $\lg 0{,}3$; е) $\lg 0{,}003$; ж) $\lg 600$; з) $\lg 0{,}6$; и) $\lg 0{,}9$.

Решение. а) $\lg 20=1+0{,}30=1{,}30$; б) $\lg 2000=3+0{,}30=3{,}30$; в) $\lg 0{,}02=-2+0{,}30=-1{,}70$; г) $\lg 300=2+0{,}48=2{,}48$; д) $\lg 0{,}3=-1+0{,}48=-0{,}52$; е) $\lg 0{,}003=-3+0{,}48=-2{,}52$; ж) $\lg 600=\lg 2+\lg 3+2=0{,}30+0{,}48+2=2{,}78$; з) $\lg 0{,}6=\lg 2+\lg 3-1=0{,}30+0{,}48-1=-0{,}22$; и) $\lg 0{,}9=2\lg 3-1=2\cdot 0{,}48-1=-0{,}04$.

6. Вычисления с помощью таблиц логарифмов. Как известно, характеристика логарифма числа легко находится устно (она равна порядку числа). Значения мантисс приведены в таблице «Четырехзначных математических таблиц» В. М. Брадиса. Приведем часть этой таблицы и укажем как ею пользоваться.

Примеры. 1. Найти логарифмы следующих чисел: а) $\lg 72{,}4$; б) $\lg 7485$, в) $\lg 0{,}06932$.

Мантиссы десятичных логарифмов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5

Решение. а) Характеристика $\lg 72{,}4$ равна 1, так как $72{,}4 = 7{,}24 \cdot 10^1$. Мантиссу найдем на пересечении строки с меткой «72» и столбца с меткой «4». Получаем число 8597. Значит, мантисса равна (приблизительно) 0,8597. Отсюда:

$$\lg 72{,}4 \simeq 1 + 0{,}8597 = 1{,}8597;$$

б) $\lg 748{,}5 = [\lg 748{,}5] + \{748{,}5\} = 2 + \{\lg 748{,}5\}$.

Для отыскания мантиссы мы, прочитав число 8739 на пересечении строки с меткой «74» и столбца с меткой «8», прибавим к этому числу поправку на четвертую цифру. Эта поправка расположена в правой части таблицы на пересечении той же строки и столбца поправок с меткой «5». Поправка равна 3, следовательно, мантисса равна $0{,}8739 + 0{,}0003 = 0{,}8742$. Таким образом,

$$\lg 748{,}5 = 2 + 0{,}8742 = 2{,}8742;$$

в) $\lg 0{,}06932 = [\lg 0{,}06932] + \{\lg 0{,}06932\} = -2 + 0{,}8408 = -1{,}1592$.

Для решения обратной задачи — нахождения числа по его логарифму пользуются таблицей, с которой мы уже знакомы (см. стр. 198).

2. Найти x, если: а) $\lg x = 2{,}0324$; б) $\lg x = -2{,}9665$.

Решение. а) По таблице значений функции $y = 10^x$ найдем число 1,077, соответствующее мантиссе $\lg x$, равной 0,0324. Так как характеристика логарифма равна 2, то

$$x = 1{,}077 \cdot 10^2 = 107{,}7;$$

б) представим данный логарифм в виде суммы характеристики и мантиссы:

$$\lg x = -2{,}9665 = -3 + 0{,}0335.$$

Мантиссу 0,0335 имеет любое число вида $1{,}080 \cdot 10^n$ $(n \in Z)$. Характеристика равна -3, поэтому

$$x \approx 1{,}080 \cdot 10^{-3} = 0{,}001080.$$

В заключение приведем пример вычисления с помощью таблиц логарифмов.

3. Вычислить значение x, если $x = \dfrac{19{,}5 \cdot 238{,}4}{\sqrt[3]{7406}}$.

Решение. Логарифмируя, имеем:

$$\lg x = \lg 19{,}5 + \lg 238{,}4 - \frac{1}{3} \lg 7406.$$

По таблице логарифмов найдем:

$\lg 19{,}5 = 1{,}2900,$
$\lg 238{,}4 = 2{,}3773,$

$\lg 19{,}5 + \lg 238{,}4 = 3{,}6673,$
$\frac{1}{3} \lg 7906 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}8696 \approx 1{,}2899;$

$\lg x = 3{,}6673 - 1{,}2899 = 2{,}3774$, откуда $x = 238{,}4$.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется логарифм?
2. Какие логарифмы называются десятичными?
3. Как определяется логарифмическая функция $y = \lg x$?
4. Как построить график функции $y = \lg x$?
5. Перечислите основные свойства логарифмической функции.
6. Докажите теорему о логарифме произведения двух положительных чисел.
7. Докажите теорему о логарифме степени с положительным основанием.
8. Что такое логарифмирование?
9. Что такое потенцирование?
10. Как определяется стандартный вид числа?
11. Что называют порядком числа?
12. Как определяется характеристика логарифма?
13. Какая существует связь между порядком числа и характеристикой его логарифма?
14. Как определяется мантисса?
15. Докажите, что мантисса логарифма не зависит от положения запятой в числе.

Упражнения

1. Следующие равенства перепишите в виде логарифмических равенств: а) $2^3 = 8$; б) $6^2 = 36$; в) $3^4 = 81$; г) $2^{-1} = 1/2$; g) $3^{-2} = 1/9$; е) $4^{1/2} = 2$.

2. (Устно). На основании определения логарифма проверьте справедливость следующих равенств: а) $\log_3 9 = 2$; б) $\log_5 125 = 3$; в) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; 2) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$.

3. На рис. 89 изображен график функции $y = \lg x$. а) Определите значения функции y при следующих значениях x: 0,1; 10; 5; 4; 1,5.

б) Истолкуйте при помощи графика, что:

всякое положительное число имеет логарифм и притом только один;

отрицательные числа и ноль не имеют логарифмов;

логарифм единицы равен нулю;

логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны;

при неограниченном возрастании числа логарифм его неограниченно возрастает.

4. Найдите область определения следующих функций:

а) $y = \lg(-x)$; б) $y = \lg(1 - x^2)$; в) $y = \lg(1 - x)$;
г) $y = \lg x^2$; д) $y = \lg(1 + x^2)$; е) $y = \lg \sqrt{x}$.

5. Найдите число x, если:

а) $\log_2 x = 5$; б) $\lg x = -1$; в) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$;

г) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; д) $\log_x 216 = 3$; е) $\log_x \frac{1}{64} = -3$; ж) $\log_5 x = 0$;

з) $\log_{\frac{1}{3}} x=-1$; и) $\log_x \frac{1}{81}=4$; к) $\log_x \sqrt{8}=\frac{3}{4}$; л) $\log_8 x=1$;

м) $\log_{0,1} x=-1$.

6. Прологарифмируйте следующие выражения (буквами обозначены положительные числа):

а) $x=3cd$; б) $x=\frac{3mn}{5}$; в) $x=5a^2$; г) $x=13c^4d^3kl^2$;

д) $x=a\sqrt{b}$; е) $x=5p^{-3/4}q^{-1/3}$.

7. Найдите x по данному его логарифму (буквами обозначены положительные числа)

а) $\lg x=\lg b+\lg c$; б) $\lg x=\frac{1}{2}\lg a$; в) $\lg x=2\lg a+3\lg b-5\lg c$;

г) $\lg x=\frac{2}{5}\lg m-\frac{3}{4}\lg n$; д) $\lg x=2\lg(a+b)-\frac{2}{3}\lg(a-b)+$
$+\frac{1}{2}\lg a$.

8. Найдите с помощью таблицы логарифмы следующих чисел: а) 0,7; б) 0,015; в) 7091; г) 24,16; д) 342,3; е) 1,0053

9. Найдите с помощью таблицы число N, если $\lg N$ равен: а) 1,7482; б) 0,3618; в) —1,4715; г) 2,6149; д) —2,8176.

10. Решите следующие уравнения:

а) $3^x=2$; б) $2^{3x}=3$; в) $3^{x-2}=5$; г) $\lg x=2-\lg 5$;

д) $2\lg x=\lg(5x-4)$; е) $\frac{\lg x}{1-\lg 2}=2$;

ж) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\frac{1}{2}-\lg x$; з) $2\lg x=-\lg(6-x^2)$.

11. Вычислите с помощью таблиц логарифмов:

а) $x=\frac{103,8\cdot 20,97}{5,174\cdot 13,62}$; б) $x=\frac{9,738\cdot 21,09}{48,72\cdot 0,8478}$; в) $x=3\sqrt[4]{273,5}$;

г) $x=0,156\sqrt[5]{85,74}$; д) $x=\frac{92,17^2\cdot 5,14^3}{2,184^4\cdot 0,5836^2}$.

ЧАСТЬ II

ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Неопределяемые понятия в геометрии. Геометрия, как и каждая математическая дисциплина, строится на неопределяемых понятиях, на аксиомах, из которых на основании логических рассуждений выводятся другие предложения — теоремы. Аксиома — это предложение, принимаемое без доказательства. Теорема — это предложение, истинность которого доказывается.

В нашем курсе геометрии к неопределяемым понятиям относятся точка, прямая, плоскость и расстояние.

Точки обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, X, Y, Z, ...

Прямая обозначается так: (AB); читается: «прямая AB». Прямую можно обозначать и малыми латинскими буквами a, b, c ... .

Плоскости обозначаются греческими буквами α, β, γ, ...

Для расстояния от точки A до точки B принято обозначение $|AB|$.

В последующих пунктах мы подробнее остановимся на свойствах этих понятий.

Мы также пользуемся и другими понятиями, определения которым не даем — это понятие множества, числа и величины. О свойствах этих понятий уже известно из курса алгебры.

2. Расстояние и его свойства. Сформулируем свойства расстояний.

Аксиома 1. *Расстояние от точки A до точки B положительно, если точки различны, и равно нулю, если* *точки совпадают, т. е.*

$$|AB|>0, \text{ если } A\neq B, \text{ и } |AB|=0, \text{ если } A=B.$$

Аксиома 2. *Расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B* до точки A, т. е.

$$|AB|=|BA|.$$

Аксиома 3. *Для любых трех точек A, B, C расстояние от A до C не больше (меньше или равно) суммы расстояний от A до B и от B до C*, т. е.

$$|AC|\leqslant|AB|+|BC|.$$

Перечисленные три основных свойства расстояния являются аксиомами курса геометрии. С помощью аксиом доказываются другие предложения—теоремы.

Теорема 1. *Для любых трех точек A, B, C расстояние* $|AB|$ *не меньше разности расстояний* $|AC|$ *и* $|BC|$.

Доказательство. По аксиоме 3 имеем неравенство

$$|AB|+|BC|\geqslant|AC|.$$

Вычтем из обеих частей этого неравенства $|BC|$:

$$|AB|\geqslant|AC|-|BC|.$$

В заключение приведем еще одну аксиому.

Аксиома 4. *Если три точки A, B и C не принадлежат одной прямой, то*

$$|AC|<|AB|+|BC|.$$

3. Язык теории множеств в геометрии. Принято считать, что любые фигуры в геометрии—это произвольные множества точек. Следовательно, и точка и пустое множество являются фигурами. Плоскость, прямая—тоже геометрические фигуры.

Применяя известные вам определения пересечения и объединения множеств к фигурам, получаем следующие определения.

1. *Пересечением двух или нескольких данных фигур называется фигура, состоящая из всех точек, которые принадлежат каждой из этих данных фигур.*

На рис. 90 приведены примеры пересечения фигур. Пересечением отрезков AB и CD является точка O. Пересечением же отрезков EH и TX является отрезок TH.

Из рис. 91 видно, что пересечением двух треугольников может быть: а) пустое множество; б) множество, состоящее из одной точки; в) отрезок; г) треугольник; д) четырехугольник; е) пятиугольник; ж) шестиугольник.

Если фигуры не имеют общих точек, то их пересечение есть пустое множество; например, запись $a \cap b = \varnothing$ означает, что прямые a и b не имеют общих точек.

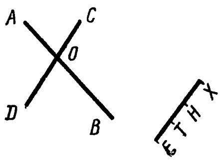


Рис. 90

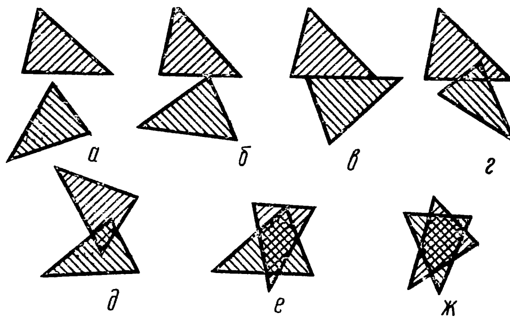


Рис. 91

2. *Объединением двух или нескольких данных фигур называется фигура, состоящая из всех точек, которые принадлежат хотя бы одной из этих фигур.*

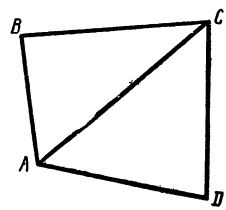


Рис. 92

Например, четырехугольник $ABCD$ (рис. 92) можно рассматривать как объединение двух треугольников ABC и ADC.

Таблица (стр. 216), поясняет, как применяется в геометрии язык теории множеств; в ней также приведены соответствующие обозначения.

Следует хорошо научиться применять язык теории множеств и соответствующие обозначения в геометрии.

4. Понятие «лежать между». Каждое новое понятие мы будем определять, используя неопределяемые понятия. Например, легко представить, что значит «точка X лежит между точками A и B». А нельзя ли определить это понятие с помощью понятий «точка» и «расстояние»? Ответ на этот вопрос дает следующее определение.

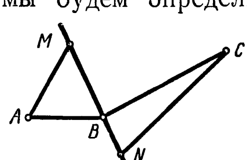


Рис. 93

Точка X лежит между точками A и B, если эти три точки различны и $|AX| + |XB| = |AB|$.

№	На языке теории множеств	На языке геометрии	В обозначениях
1	Точка A принадлежит прямой a	Точка A лежит на прямой a, или прямая a проходит через точку A	$A \in a$
2	Точка A не принадлежит прямой a	Точка A не лежит на прямой a, или прямая a не проходит через точку A	$A \notin a$
3	Точка A принадлежит плоскости α	Точка A лежит на плоскости α, или плоскость α проходит через точку A	$A \in \alpha$
4	Прямая a есть подмножество плоскости α	Прямая a лежит на плоскости α, или плоскость α проходит через прямую a	$a \subset \alpha$

Примеры. **1.** Доказать, что длина ломаной ABC меньше длины ломаной $AMNC$ (рис. 93).

Решение. Имеем:

$$|AB| < |AM| + |MB|; \quad |BC| < |NC| + |BN|;$$

следовательно,

$$|AB| + |BC| < |AM| + |MB| + |BN| + |NC|$$

или

$$|AB| + |BC| < |AM| + |MN| + |NC|.$$

2. Может ли пересечением двух углов быть четырехугольник, имеющий: а) только один прямой угол; б) два прямых угла?

Решение. а) Такой четырехугольник можно получить в результате пересечения прямого и острого (или тупого) углов; б) такой четырехугольник можно получить в результате пересечения двух прямых углов, острого и тупого углов, прямого и острого углов, прямого и тупого углов.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

1. Отрезок. Введем теперь понятие отрезка.

Множество, состоящее из двух различных точек A и B и всех точек, лежащих между ними, называется отрезком AB. Обозначается отрезок так: $[AB]$.

Длиной отрезка называется расстояние между его концами. Обозначается так: $|AB|$, т. е. так же, как и расстояние от точки A до точки B.

2. Луч. Если на прямой AB взять произвольную точку O, то будут заданы три подмножества прямой (рис. 94). Подмножества I и III называются *открытыми лучами*. Подмножество II состоит из одной точки O.

Объединение открытого луча с данной точкой O называется лучом с началом в этой точке; обозначается так: $[OB)$, читается: «луч OB»; точка O — начало луча.

Ответим теперь на следующие вопросы.

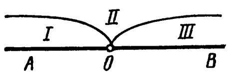


Рис. 94

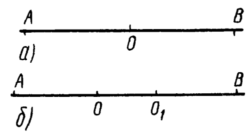


Рис 95

Пусть даны два луча, принадлежащие одной прямой.

а) Каким множеством является объединение двух лучей?

б) Каким множеством является пересечение двух лучей?

в) Каким множеством является объединение двух открытых лучей?

г) Каким множеством является пересечение двух открытых лучей?

Чтобы ответить на эти вопросы рассмотрим два случая расположения данных лучей на прямой (рис. 95). В первом случае (рис. 95, *а*) имеем:

а) $[OA) \cup [OB) = (AB)$; б) $[OA) \cap [OB) = 0$;

в) объединением открытых лучей с началом в точке O является прямая без этой точки O;

г) пересечение есть $\varnothing$.

Во втором случае (рис. 95, *б*) имеет:

а) $[OA) \cup [O_1B)$ — прямая AB без внутренних точек отрезка OO_1;

б) $[OA) \cap [O_1B) = \varnothing$;

в) объединение соответствующих открытых лучей является прямая AB без точек $[AB]$;

г) пересечением открытых лучей, соответствующих лучам OA и O_1B, будет $\varnothing$.

Заметьте, что мы рассмотрели лишь лучи OA и O_1B и соответствующие им открытые лучи, а ведь здесь есть еще лучи OB, O_1A. Рассмотрите эти случаи самостоятельно.

Сам факт разбиения прямой точкой на два непустых подмножества ниоткуда не следует. Его мы принимаем в качестве пятой аксиомы геометрии.

Аксиома 5. *Любая лежащая на прямой точка O разбивает множество всех отличных от O точек прямой p на два непустых множества так, что: а) точка O лежит между любыми двумя точками, принадлежащими разным множествам; б) из двух точек, принадлежащих одному множеству, одна лежит между другой и точкой O.*

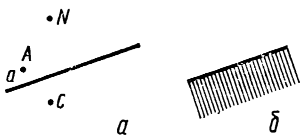


Рис. 96

3. Полуплоскость. Предварительно дадим следующее определение: *две точки A и C разделены прямой a, если отрезок AC имеет с прямой a одну и только одну общую внутреннюю точку* (рис. 96, *а*).

Используя это определение, сформулируем следующую аксиому.

Аксиома 6. *Любая прямая a разбивает множество не принадлежащих этой прямой точек плоскости на два непустых множества так, что:* а) *любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены прямой a*; б) *любые же две точки, принадлежащие одному множеству, не разделены прямой a*, как, например, точки A и N на рис. 96, *а*.

Множества, о которых идет речь в этой аксиоме, называются *открытыми полуплоскостями с границей a*. Объединение открытой полуплоскости и ее границы a называется *полуплоскостью с границей a*. На рис. 96, *б* одна из таких полуплоскостей заштрихована.

4. Ломаная. Многоугольник. На рис. 97, *а* изображена ломаная $A_0A_1A_2A_3A_4$. Она является объединением отрезков A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4. Конец каждого отрезка является началом следующего. Но смежные отрезки не лежат на одной прямой.

Ломаной называется объединение отрезков A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, таких, что конец каждого отрезка (кроме последнего) является началом следующего и смежные отрезки не лежат на одной прямой.

Точки A_0 и A_n называются *концами ломаной* $A_0A_1A_2$, ..., A_n. Говорят, что ломаная соединяет точки A_0 и A_n.

Каждый из отрезков, составляющих ломаную, называется ее *звеном*. Сумма длин всех звеньев ломаной называется *длиной ломаной*.

На рис. 97 приведены примеры ломаных; здесь изображены два вида ломаных: замкнутые (*в*, *г*, *е*) и незамкнутые (*а*, *б*, *д*).

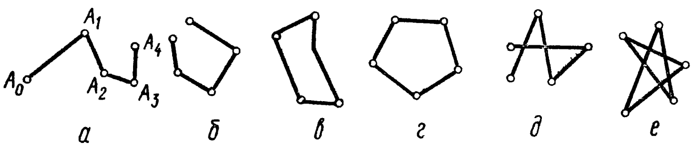


Рис. 97

Ломаная называется *замкнутой*, если конец ее последнего звена совпадает с началом первого.

Несоседние звенья замкнутых ломаных на рис. 97, *в*, *г* не пересекаются; такие ломаные называются *простыми* Замкнутая ломаная *е* не является простой.

В дальнейшем мы будем рассматривать только простые замкнутые ломаные и слово «простые» будем опускать.

Теорема. *Длина ломаной больше расстояния между ее концами.*

Доказательство. Докажем эту теорему для ломаных, состоящих из трех звеньев. Пусть дана ломаная $A_0A_1A_2A_3$ (рис. 98). Точка A_0, A_1, A_2 по определению ломаной не лежат на одной прямой. Воспользуемся свойством расстояний для трех точек, не лежащих на одной прямой, т. е.

$$|A_0A_1|+|A_1A_2|>|A_0A_2|. \tag{1}$$

Для точек A_0, A_2, A_3 по свойству расстояний имеем:

$$|A_0A_2|+|A_2A_3|\geqslant|A_0A_3|. \tag{2}$$

При замене $|A_0A_2|$ суммой $|A_0A_1|+|A_1A_2|$ левая часть соотношения (2) увеличится, поэтому

$$|A_0A_1|+|A_1A_2|+|A_2A_3|>|A_0A_3|.$$

Замкнутая ломаная l (рис. 99) разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два подмножества. Их называют *внутренней областью* (на рисунке заштрихована) и *внешней областью* относительно этой ломаной. Любые две точки одной и той же области можно соединить отрезком или ломаной, не пересекающей ломаную l. Например, точки A и B соединяет ломаная $ANMB$, а точки C и D — ломаная $CKPD$. Для точек разных областей этого сделать нельзя. Во внешней области найдется прямая, которая вся расположена в этой области. Во внутренней области такой прямой нет.

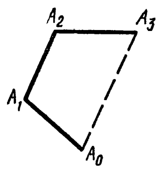


Рис. 98

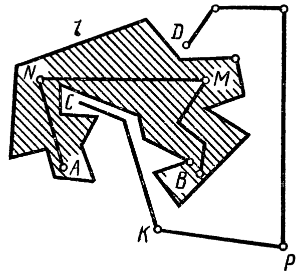


Рис. 99

Объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области называется многоугольником. Сама ломаная называется границей многоугольника, а ее внутренняя область — *внутренней областью многоугольника.* Звенья границы многоугольника называются *сторонами** *многоугольника*, а вершины ее — *вершинами многоугольника*,

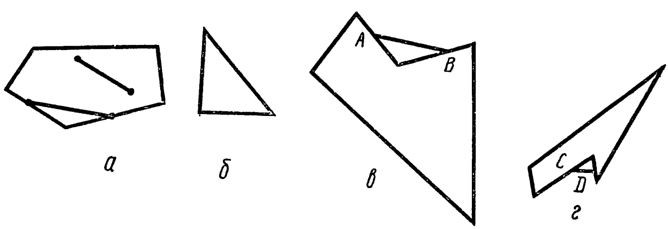


Рис. 100

отрезок, соединяющий две несмежные вершины, называется его *диагональю.*

Плоская фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, целиком ей принадлежит. На рис. 100 фигуры *а*, *б* — выпуклые, *в* и *г* не являются выпуклыми.

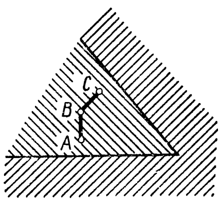
Во всяком многоугольнике число вершин равно числу сторон. Многоугольники разделяются на виды в зависи-

---

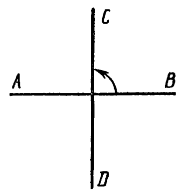
* Стороной многоугольника для краткости называют и ее длину.

мости от числа сторон. Например, многоугольник с тремя сторонами называется треугольником. Многоугольник с четырьмя сторонами называется четырехугольником и т. д.

5. Угол. Два различных луча с общим началом разбивают множество не лежащих на них точек плоскости на два подмножества. При этом две произвольные точки, принадлежащие любому из этих подмножеств, можно соединить ломаной, не пересекающей данные лучи (рис. 101, *а*). Две точки из разных подмножеств такой ломаной соединить



а



б

Рис. 101

нельзя. Таким образом, эти лучи ограничивают две части плоскости.

Фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости, называется углом.

Два луча с общим началом ограничивают два угла с общими сторонами. Тот из углов, который рассматривается, обычно выделяется дугой. Если стороны угла образуют прямую, то такой угол называется *развернутым углом*.

Угол обозначается так: $\angle AOB$. Каждому углу ставится в соответствие его величина, которая обозначается, например, для угла AOB так $\widehat{AOB}$.

Не путайте: $\angle AOB$ — *это множество точек плоскости, а* $\widehat{AOB}$ — *величина угла.*

Если разделить развернутый угол на 180 частей, то получатся углы, величина каждого из которых есть один градус. Градус принимается за единицу измерения углов. Следовательно, величина развернутого угла равна 180°.

Если разделить развернутый угол пополам, то получаемые два угла называются *прямыми*. Следовательно, величина прямого угла равна 90°; ее принято обозначать буквой d. Если при пересечении двух прямых AB и CD

образуются прямые углы, то эти прямые называются *взаимно перпендикулярными* (рис. 101, *б*). Каждая из двух взаимно перпендикулярных прямых называется *перпендикуляром* к другой из них. Если прямая AB перпендикулярна прямой CD, то пишут $(AB) \perp (CD)$.

Введем понятие угла между лучами.

Углом между лучами называется меньшая из величин, образовавшихся углов. Ясно, что угол между лучами принимает значения от 0 до 180°.

6. Окружность и круг. *Множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки, лежащей в этой плоскости, называется окружностью.* Рассмотрим окружность с центром O радиуса r (рис. 102, *а*). Она состоит из всех точек X плоскости, для которых расстояние от точки O равно r. Тогда для любой точки X окружности $|OX| = r$.

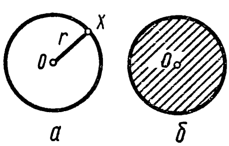


Рис. 102

Теперь представим себе множество таких точек плоскости, расстояние каждой из которых от точки O не больше r, т. е. равно или меньше r. Это множество точек состоит из всех точек окружности с центром O и радиусом r и всех точек, лежащих внутри этой окружности. Иначе говоря, это круг радиуса r с центром O.

Множество всех точек плоскости, расстояние каждой из которых от данной точки этой плоскости не больше данного, называется кругом (рис. 102, *б*).

Рассмотрим возможные случаи пересечения прямой и окружности.

1. Если радиус окружности меньше расстояния от ее центра до прямой *, то их пересечение есть пустое множество — окружность и прямая не имеют общих точек (рис. 103, *а*).

2. Если радиус окружности равен расстоянию от ее центра до прямой, то их пересечение состоит из одной точки — основания перпендикуляра, проведенного из центра окружности к прямой (рис. 103, *б*).

3. Если радиус окружности больше расстояния от ее центра до прямой, то их пересечение состоит из двух точек (рис. 103, *в*).

---

* Расстоянием от точки A до основания перпендикуляра, проведенного через точку A к прямой p, называем расстояние от точки A до прямой p.

Рассмотрим теперь пересечение круга прямой. Пусть дан круг радиуса r с центром в точке O и ограничивающая его окружность. Обозначим через h расстояние от центра круга до прямой (рис. 104). Если $h < r$, то прямая пересекается с окружностью в двух точках: A и B. Пересечением прямой и круга будет отрезок, соединяющий точки A и B (рис. 104, *а*).

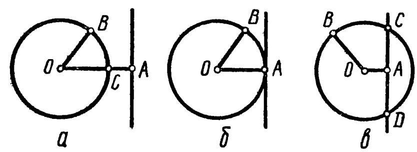


Рис. 103

Если $h = r$, то прямая имеет с кругом одну общую точку (рис. 104, *б*). Если $h > r$, то пересечением круга и прямой будет пустое множество (рис. 104, *в*).

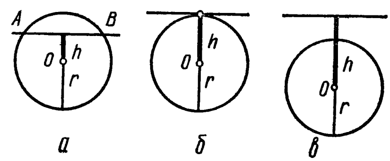


Рис. 104

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой* этой окружности (он же называется и хордой соответствующего круга).

Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.

Отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называется *радиусом* этой окружности.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к этой окружности.

Так же определяется и касательная к кругу.

Замечание. Обратите внимание на то, что касательная к окружности лежит в одной плоскости с этой окружностью.

Примеры 1. Построить касательные к данной окружности: а) параллельные данной хорде; б) перпендикулярные данной прямой; в) параллельные данной прямой, не пересекающей окружность.

Решение. а) Построим серединный перпендикуляр к данной хорде. Через точки его пересечения с окружностью проведем к нему перпендикуляры. Они и будут искомыми касательными. Эта задача имеет всегда два решения.

б) Построим диаметр, параллельный данной прямой. Через его концы проведем перпендикуляры к нему. Они и будут искомыми касательными. Задача всегда имеет два решения.

в) Через центр окружности проведем перпендикуляр к данной прямой. Через точки пересечения его с окружностью построим перпендикуляры к нему. Они и будут искомыми касательными. Задача имеет всегда два решения.

2. Из точки A проведены к окружности две касательные. Доказать, что: а) отрезки этих касательных (от A до точки касания)

конгруэнтны; б) прямая, проходящая через центр и точку A, делит угол между касательными пополам (рис. 105).

Решение. а) Проведем прямую через данную точку A и центр окружности O. Эта прямая является осью симметрии окружности.

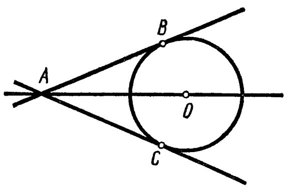


Рис. 105

При осевой симметрии с осью OA точка A останется на месте, касательная AB отобразится на касательную, проходящую через точку A, т. е. на прямую AC. Точка касания B отобразится на точку касания, т. е. на точку C. Следовательно, отрезки AB и AC симметричны относительно прямой AO и поэтому конгруэнтны.

б) Так как лучи AB и AC симметричны относительно оси AO, то углы BAO и CAO тоже симметричны относительно оси AO и, следовательно, $\widehat{BAO}=\widehat{CAO}$.

Вопросы для самопроверки

1) Принадлежит ли кругу его центр? Принадлежит ли окружности ее центр?

2. Назовите геометрические понятия, которые использованы при определении: а) геометрической фигуры; б) окружности; в) круга.

3. Какие геометрические понятия использованы для определения понятия «между».

4. Являются ли различными: а) отрезки AB и BA; б) лучи AB и BA?

5. Сколько лучей задают на прямой AB две ее точки A и B?

6. Сколько линий можно провести через две данные точки? Сколько прямых проходит через эти точки?

7. Сколько различных углов определяют две пересекающиеся прямые?

8. Как записать с помощью обозначений, что: а) прямые AB и CD имеют единственную общую точку X; б) прямые AB и CD совпадают; в) прямые AB и CD пересекаются?

Упражнения

1. С центром в данной точке O постройте две окружности, радиусы которых равны r_1 и r_2. Какой фигурой будет множество таких точек X, для которых выполняется условие $r_1 \leqslant |OX| \leqslant r_2$, где $r_1 < r_2$? Заштрихуйте эту фигуру. Какая образуется фигура в случае, когда: а) $r_1=0$, б) $r_1=r_2$?

2. На плоскости даны две точки A и B, $|AB|=4$ см. Найдите на этой плоскости множество таких точек X, для которых будут выполняться условия $|AX| \leqslant 2$ см и $|BX| \leqslant 3$ см.

3. Даны три точки T, P, M; $|TM|=14$ см, $|TP|=8$ см, $|PM|=6$ см. Лежит ли точка P между точками T и M? Лежит ли точка B на прямой PM, если $|BM|=5$ см, $|PB|=4$ см?

4. В четырехугольнике $ABCD$ $|AB|=6$ см, $|BC|=2$ см, $|CD|=10$ см, $|AD|=5$ см. Какую длину может иметь при этих условиях отрезок AC?

5. В данной плоскости постройте $\angle KTM$ и проведите прямую p, имеющую с этим углом только одну общую точку.

6. Сколько различных углов, величина каждого из которых не больше 180°, определяются тремя лучами с общим началом? Выполните рисунок и обозначьте эти углы.

7. Даны пять различных точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, через каждые две из них проведены прямые. Оказалось, что все прямые взаимно пересекаются. Сколько получилось точек пересечения?

8. Запишите в обозначениях: а) точка M принадлежит отрезку AB; б) луч PT лежит в плоскости α; в) угол ABC лежит в плоскости α; г) отрезок AB пересекается с прямой KD в точке M.

9. Постройте два прямых угла так, чтобы их объединением и их пересечением был прямой угол.

10. Постройте два угла, объединением которых была бы полуплоскость, а пересечением — прямой угол.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

КОНГРУЭНТНОСТЬ ФИГУР И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

§ I. КОНГРУЭНТНЫЕ ФИГУРЫ

1. Отображения фигур. В гл. IV было выяснено, какие соответствия называются отображениями. Напомним, что отображением множества A на множество B называется соответствие, при котором каждой точке множества A соответствует одна и только одна точка множества B. Геометрические фигуры — это множество точек, а поэтому все, что мы говорим об отображениях, переносится и на геометрические фигуры.

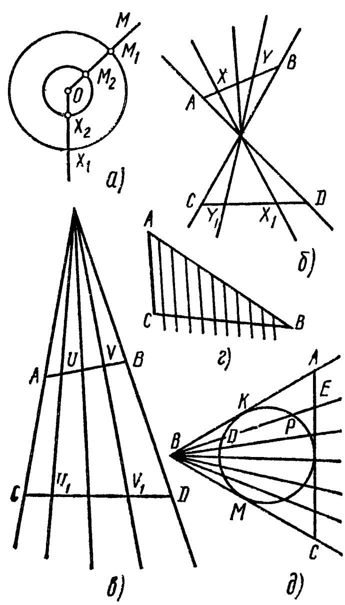


Рис. 106

Приведем различные примеры отображения фигур.

1. На рис. 106, *а* приведены две окружности с общим центром. Проведем произвольный луч OM с началом в точке O. Он пересечет обе эти окружности. Обозначим точки пересечения луча с окружностями через M_1 и M_2. Будем считать, что точке M_1, принадлежащей первой окружности, соответствует та точка M_2, принадлежащая второй окружности, которая лежит на луче OM. Таким образом, каждой точке X_1 первой окружности соответствует вполне определенная точка X_2 второй окружности; точка X_2 называется *образом* точки X_1. Каждая точка второй окружности является образом какой-либо точки первой окружности. Мы получим отображение первой окружности на вторую.

2. На следующих двух рисунках приведены различные способы отображения отрезка AB на отрезок CD. На рис. 106, *б* образом точки A является точка D, а на рис. 106, *в* — точка C.

3. На рис. 106, *г* приведено отображение одной стороны треугольника на другую. При этом образом точки B будет являться сама точка B.

4. На рис. 106, *д* приведено отображение окружности на отрезок AC. Обратите внимание, что в этом случае точка E, например, является образом двух различных точек окружности, P и D.

В примерах 1—3 каждая точка X_2 второй фигуры была образом только одной точки X_1 первой фигуры. Поэтому по точке X_2 (образу) можно было найти ту точку X_1, которой она соответствует. Следовательно, отображение в этих примерах обратимо, т. е. если существует отображение $X_1 \longrightarrow X_2$, то существует обратное отображение $X_2 \longrightarrow X_1$, которое отображает вторую фигуру на первую.

Отображение в примере 4 необратимо. Зная образ — точку X_2, нельзя точно указать точку X_1. Следовательно, нет обратного отображения, которое отображало бы отрезок AC на окружность.

2. Конгруэнтные фигуры. Так как геометрические фигуры — это различные множества точек, то они подчиняются всем операциям с множествами, с которыми вы познакомились ранее. Мы уже знаем, что два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Поэтому не могут быть равными геометрические фигуры, состоящие из различных точек. Исходя из этого мы будем говорить не о равенстве, а о конгруэнтности геометрических фигур.

Две геометрические фигуры конгруэнтны, если одну из них можно отобразить на другую так, что сохранится расстояние между соответственными точками.

Конгруэнтность обозначается знаком $\cong$.

Рассмотрим примеры. 1. Две пары точек $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ конгруэнтны в том и только в том случае, когда $|AB| = |CD|$.

2. Два отрезка конгруэнтны в том и только в том случае, когда их длины равны.

3. Все лучи конгруэнтны.

4. Все прямые конгруэнтны.

5. Две окружности конгруэнтны в том и только в том случае, когда их радиусы равны.

Пример. Задано отображение круга F на круг F_1. Произвольной точке X соответствует точка X_1, полученная при параллельном переносе в заданном направлении на заданное расстояние $|XX_1|$ (рис. 107). а) Какая точка соответствует точке A? б) На какую точку отображается центр круга — точка O? в) На какую фигуру отображается радиус OQ? Дуга AQM? г) Образом какой фигуры будет треугольник O_1RP? д) Будет ли верным равенство $|XA| = |X_1K|$, где $X \to X_1$, $A \to K$?

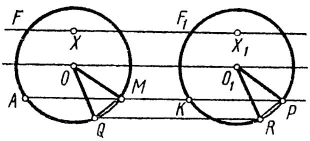


Рис. 107

Р е ш е н и е. а) Точке A соответствуют точки K и P.

б) Точка O отображается на точку O_1

в) $[OQ]$ отображается на $[O_1R]$, дуга AQM — на дугу KRP.

г) $\triangle O_1RP$ будет образом треугольника OQM.

д) Да, верно, так как при параллельном переносе сохраняются расстояния.

§ 2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

1. Отображения плоскости на себя. Перемещения. Рассмотрим примеры различных отображений плоскости на себя, т. е. таких отображений, когда каждая точка плоскости отображается на точку этой же плоскости. Представим, что на плоскость сверху положили прозрачную пленку и перенесли на нее все расположенные на плоскости фигуры (рис. 108). Затем эту верхнюю пленку повернули, например, вокруг точки A. При этом точка A отобразится сама на себя, а каждая точка плоскости займет какое-то новое положение (рис. 109).

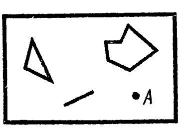


Рис. 108

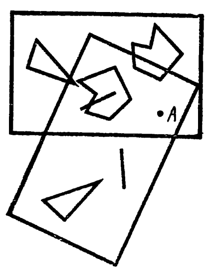


Рис. 109

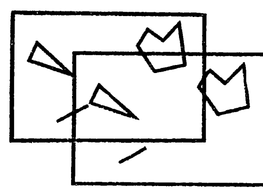


Рис. 110

Можно поступить иначе, если, например, сдвинуть верхнюю пленку, то все точки плоскости переместятся в одном направлении и на одно расстояние (рис. 110).

Среди множеств различных отображений точек плоскости на себя выделим те отображения, которые сохраняют расстояния между соответственными точками. В приведенных примерах оба отображения именно такие — это п е р е м е щ е н и я.

Перемещением называется такое отображение плоскости на себя, при котором сохраняются расстояния между соответствующими точками.

Так как при перемещениях сохраняются расстояния между соответствующими точками, то каждая фигура при перемещении отображается на конгруэнтную ей фигуру.

Заметим, что могут быть отображения плоскости на себя и не сохраняющие расстояния между соответствую-

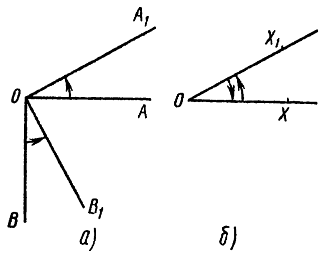


Рис. 111

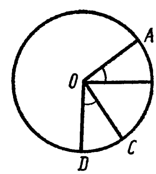


Рис. 112

щими точками. Такие отображения мы будем рассматривать позднее.

2. Поворот. Рассмотрим частный случай отображения плоскости на себя, называемый п о в о р о т о м.

Выберем произвольным образом точку O и проведем луч OA. Повернем луч OA вокруг точки O (она называется центром поворота) на произвольный угол α. При повороте вокруг центра O луч OA отображается на луч OA_1, а луч OB на луч OB_1 (рис. 111, *а*). При этом $\widehat{AOA_1} = \widehat{BOB_1} = \alpha$.

Поворотом вокруг центра O называется такое перемещение плоскости, при котором: 1) *точка O отображается сама на себя и* 2) *угол между любым лучом OX и соответствующим ему лучом OX_1 имеет одну и ту же величину α.* Величина α називатся *углом поворота.*

Угол поворота всегда заключается в пределах $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

При повороте на 0° все точки плоскости отображаются на себя. Такой поворот на 0° только один. Это один из примеров тождественного отображения плоскости — отображения, при котором все точки плоскости отображаются сами на себя. Поворотов вокруг заданного центра O на любой угол α два: один по часовой стрелке и второй против часовой стрелки.

Отображение, обратное повороту вокруг центра O, тоже является поворотом вокруг центра O. Например, для поворота против часовой стрелки на 30° обратным является поворот тоже на 30°, но по часовой стрелке (рис. 111, *б*).

Остановимся на наиболее важных теоремах, которые доказываются с использованием поворота.

Теорема 1. *Чтобы две дуги окружности были конгруэнтны, необходимо и достаточно, чтобы они соответствовали конгруэнтным центральным углам.*

Доказательство достаточности: *если два центральных угла окружности конгруэнтны, то конгруэнтны и соответствующие им дуги.* Дуга, соответствующая центральному углу (рис. 112), есть множество всех точек этого угла, лежащих на данном расстоянии, равном радиусу, от его вершины. Поэтому при повороте около центра O, отображающем угол AOB на угол COD, дуга AB отобразится на дугу CD. Следовательно, $\smile AB \cong \smile CD$ и т. д.

Докажем теперь необходимость: *если две дуги окружности конгруэнтны, то тогда конгруэнтны и соответствующие им центральные углы.* При перемещении, отображающем дугу AB (рис. 112) на дугу CD, точки A и B отобразятся на точки C и D*. Поэтому $|AB| = |CD|$. Тогда $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (по трем сторонам). Следовательно, $\angle AOB \cong \angle COD$.

Теорема 2. *В окружности хорды равной длины равноудалены от центра и, обратно, хорды, равноудаленные от центра окружности, имеют равные длины.*

Доказательство. Пусть хорды AB и CD (рис. 113) имеют равные длины; значит, они конгруэнтны. Тогда поворотом вокруг центра хорду AB можно отобразить на хорду CD. При этом повороте расстояние хорды от центра не изменится. Значит, конгруэнтные хорды равноудалены от центра.

Обратная теорема доказывается аналогично.

3. Центральная симметрия. Поворот на 180° вокруг центра O имеет специальное название: *центральная симметрия с центром O.* При центральной симметрии (как

---

* Это следует из утверждения: при перемещении, отображающем одну из двух конгруэнтных дуг на другую, концы первой отображаются на концы второй. (Это утверждение есть следствие из аксиомы подвижности.)

и при любом повороте с центром O) точка O отображается на себя. Любая же точка A, отличная от центра O, отображается на точку A_1, лежащую на прямой OA на том же расстоянии от O, как и точка A, но по другую сторону от O. Центр симметрии является серединой отрезка AA_1. Для задания центральной симметрии достаточно задать ее центр.

Центральная симметрия, как и всякий поворот, является отображением плоскости на себя; так как при этом сохраняются расстояния между соответственными точ-

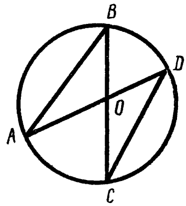


Рис. 113

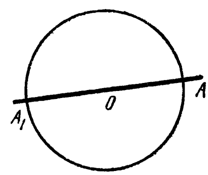


Рис. 114

ками, то она является перемещением. Следовательно, центрально симметричные фигуры конгруэнтны.

При центральной симметрии любая прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя. Поэтому любой угол при центральной симметрии относительно его вершины отображается на вертикальный ему угол. Отсюда следует теорема о вертикальных углах: *вертикальные углы конгруэнтны.*

Любая окружность симметрична относительно своего центра. Действительно, точка A, принадлежащая окружности, (рис. 114) имеет симметричную относительно центра O точку A_1, принадлежащую той же окружности.

Если фигура отображается сама на себя при центральной симметрии с центром O, то говорят, что фигура центрально симметрична (или имеет центр симметрии O).

Центральная симметрия широко применяется при изучении параллельности. Дадим определение параллельных прямых.

Прямые a и b, принадлежащие одной плоскости, называются параллельными, если они не имеют общих точек или совпадают.

Теорема 3. *Центрально симметричные друг другу прямые параллельны.*

Доказательство. При центральной симметрии прямая отображается на прямую. Если прямая a проходит через центр симметрии, то она отображается сама на себя.

Пусть прямая a не проходит через центр симметрии O. Построим прямую a_1, симметричную прямой a относительно центра O (рис. 115). Предположим, что $a_1 \cap a = C$ (рис. 116). Тогда существует симметричная ей относительно центра O точка C_1. Но прямые a и a_1 симметричны

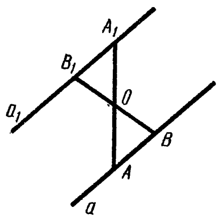


Рис. 115

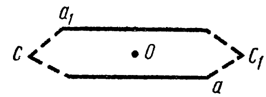


Рис. 116

относительно центра O. Следовательно, точка C_1 принадлежит этим прямым. Получается, что две различные прямые a и a_1 должны пересекаться в двух точках — C и C_1, что неверно. Значит, предположение, что прямые a и a_1 пересекаются, неверно. Следовательно, $a_1 \| a$.

4. Осевая симметрия. Осевую симметрию мы также будем рассматривать как отображение всей плоскости. Пусть ось l разбивает плоскость α на две полуплоскости α_1 и α_2 (рис. 117, *а*). Если повернуть плоскость α в пространстве вокруг оси l на 180°, то полуплоскость α_1 наложится на полуплоскость α_2, а полуплоскость α_2 — на полуплоскость α_1. Каждая фигура, лежащая в плоскости α, при таком повороте займет новое положение в той же плоскости — наложится на фигуру, ей конгруэнтную. Таким образом получается модель отображения плоскости на себя, при этом сохраняются расстояния между соответствующими точками. Точки, лежащие на оси l, отображаются сами на себя, а точки полуплоскости α_1 отображаются на точки полуплоскости α_2, и наоборот. Такое отображение и есть осевая симметрия.

Осевой симметрией с осью l называется такое перемещение, при котором: 1) точки прямой l отображаются сами на себя, 2) полуплоскости с границей l отображаются одна на другую.

Без доказательства примем, что каждая прямая l, лежащая на плоскости α, определяет одну и только одну осевую симметрию с осью l.

Так как осевая симметрия есть перемещение, то при осевой симметрии каждая фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру. Отображение, обратное осевой симметрии, есть та же самая осевая симметрия.

Если фигура Ф отображается при осевой симметрии с осью l сама на себя, то прямая l называется также осью симметрии фигуры Ф.

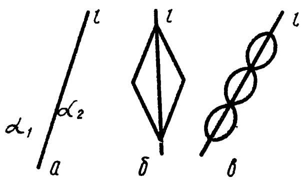


Рис. 117

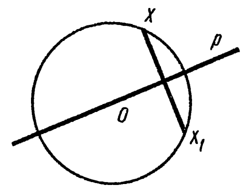


Рис. 118

Фигура Ф при этом называется *симметричной* относительно оси l. На рис. 117, *б*, *в* приведены фигуры, симметричные относительно оси l.

Теорема 4. *Окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через ее центр.*

Доказательство. Пусть прямая p проходит через центр O данной окружности (рис. 118). Возьмем произвольную точку X окружности. Построим симметричную ей точку X_1 относительно прямой p. Точка O при этой осевой симметрии отображается на себя, точка X — на точку X_1. Поэтому $|OX|=|OX_1|$, т. е. X_1 принадлежит этой же окружности. Следовательно, окружность симметрична относительно произвольной прямой p, проходящей через ее центр.

Точки, симметричные оси симметрии, лежат в разных полуплоскостях на перпендикуляре к оси симметрии и на одинаковом расстоянии от этой оси. Это утверждение вытекает из следующих двух теорем (их доказательство не входит в программу).

Теорема 5 (о перпендикуляре к оси симметрии). *Прямая l, перпендикулярная оси, при осевой симметрии отображается сама на себя.*

Теорема 6 (о единственности перпендикуляра). *Через любую точку плоскости можно провести ровно одну прямую, перпендикулярную данной прямой.*

Рассмотрим теперь перпендикулярные и наклонные прямые. Пусть точка A лежит вне прямой p. Проведем через точку A перпендикуляр к p. Обозначим через O точку их пересечения (рис. 119). Точка O называется *основанием* этого перпендикуляра.

Прямая, пересекающая другую прямую под углом, отличным от прямого, называется наклонной к этой прямой.

Теорема 7. *Длина отрезка перпендикуляра AO короче, чем длина отрезка AB любой наклонной* (рис. 120).

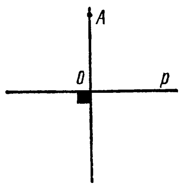


Рис. 119

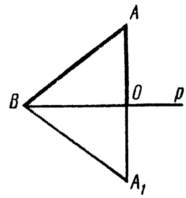


Рис. 120

Доказательство. Возьмем точку A_1, симметричную точке A относительно прямой p. По теореме о длине ломаной имеем

$$|AA_1| = |AO| + |A_1O| < |AB| + |A_1B|.$$

Но $|AO| = |A_1O|$ и $|AB| = |A_1B|$, так как осевая симметрия не изменяет расстояния. Поэтому $2|OA| < 2|AB|$ и $|AO| < |AB|$.

Теорема 8. *Пусть из точки O проведены к прямой a две наклонные OA и OB и перпендикуляр OM; тогда:*

1) *если* $|OA| = |OB|$, *то и* $|MA| = |MB|$ (рис. 121, *а*);

2) *если* $|OA| > |OB|$, *то и* $|MA| > |MB|$ (рис. 121, *б*).

Доказательство. 1) Так как $|OA| = |OB|$, то точки A и B принадлежат окружности радиуса $|OA|$ с центром O. Эта окружность симметрична относительно прямой OM. Так как $(AB) \perp (OM)$, то точки A и B, окружности симметричны относительно (OM). Следовательно, отрезки MA и MB симметричны относительно (OM) и поэтому $|MA| = |MB|$.

2) Рассмотрим круги с центром O радиусов $|OA|$ и $|OB|$. Так как $|OA| > |OB|$, то круг с центром O радиуса $|OB|$ лежит внутри круга с центром O радиуса $|OA|$. Поэтому отрезок BB_1, высекаемый на прямой a первым кругом, лежит внутри отрезка AA_1, высекаемого

вторым кругом. Значит, $|AA_1| > |BB_1|$), откуда следует, что $|MA| > |MB|$.

Теорема 9. *В равнобедренном треугольнике:* 1) *углы при основании конгруэнтны;* 2) *высота, проведенная из вершины, является также биссектрисой и медианой.*

Доказательство. Пусть дан равнобедренный треугольник ABC; $|AB| = |BC|$ (Рис. 122). Проведем из его вершины B высоту BD; $|AD| = |DC|$. Так как

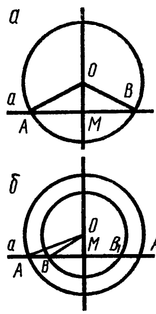


Рис. 121

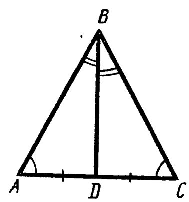


Рис. 122

$BA| = |BC|$, то треугольники ABD и CBD симметричны относительно оси BD. Из их симметрии следует, что: 1) $\angle BAC \cong \angle BCA$, т. е. углы при основании данного треугольника конгруэнтны; 2) $\angle ABD \cong \angle CBD$, т. е. высота BD—биссектриса угла треугольника при вершине B; 3) $|DA| = |CD|$, т. е. высота BD—медиана, проведенная из вершины B.

Примеры. **1.** Построить центр поворота, при котором данная точка A отображается на другую данную точу B. Сколько решений имеет задача?

Решение. Чтобы точка A отобразилась на точку B при повороте вокруг точки O, нужно, чтобы $|OA| = |OB|$. Поэтому для построения точки O достаточно построить точку пересечения конгруэнтных окружностей любого радиуса с центрами A и B.

Задача име т бесконечно много решений.

2. Внутри прямого угла BOD взята точка X и построены точки $S_{(BO)}(X) = X_1$, $S_{(OD)}(X) = X_2$ (рис. 123). Доказать, что точки X_1, O и X_2 лежат на одной прямой.

Решение. Имеем. $\widehat{X_1OB} = \widehat{XOB}$, $\widehat{XOD} = \widehat{X_2OD}$—по условию; но

$$\widehat{X_1OX_2} = \widehat{X_1OB} + \widehat{XOB} + \widehat{XOD} + \widehat{X_2OD} =$$
$$= \widehat{XOB} + \widehat{XOB} + \widehat{XOD} + \widehat{XOD} = 2(\widehat{XOB} + \widehat{XOD}),$$

т. е. $\widehat{X_1OX_2} = 2 \cdot 90° = 180°$.

Значит, точки X_1, O_1, X_2 лежат на одной прямой.

3. Даны прямая MK и две точки A и B, лежащие по одну сторону от нее (рис. 124). Найдите кратчайший путь из A в B с заходом на прямую.

Решение Строим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой MK. Соединяем отрезком точки A и B. Точка X пересечения отрезка A_1B с прямой MK является искомой. Действи-

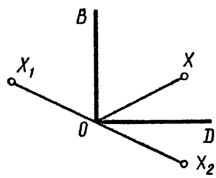


Рис. 123

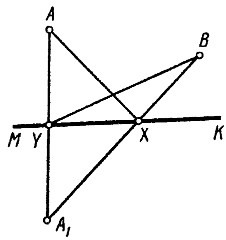


Рис. 124

тельно, $|AX|+|XB|=|A_1X|+|XB|=|A_1B|$, т. е. сумма расстояний $|AX|$ и $|XB|$ равна длине отрезка A_1B.

Если же точка Y—другая точка прямой MK, то $|AY|+|YB|=$ $=|A_1Y|+|YB|>|A_1B|$, т. е. сумма расстояний $|AY|+|YB|$ больше суммы расстояний $|AX|$ и $|XB|$.

Вопросы для самопроверки

1. Каким свойством обладает образ точки A при повороте вокруг точки O на угол α?
2. На какую фигуру отображается при повороте прямая, проходящая через центр поворота?
3. Задает ли центральную симметрию одна пара соответственных точек; как найти в этом случае центр симметрии?
4. Какие прямые при центральной симметрии отображаются сами на себя?
5. Имеет ли центр симметрии: а) отрезок, б) прямая, в) луч, г) пара пересекающихся прямых?
6. Существуют ли фигуры, имеющие несколько центров симметрии?
7. Откуда следует, что любая точка оси симметрии одинаково удалена от двух точек, симметричных относительно этой оси?
8. Какие прямые при осевой симметрии отображаются сами на себя?
9. Сколько осей симметрии и какие имеет: а) отрезок, б) луч, в) прямая, г) круг?

Упражнения

1. Постройте фигуру, центрально симметричную данной окружности, приняв за центр симметрии точку, лежащую внутри окружности.

2. Постройте центр симметрии двух лучей, не имеющих общих точек и лежащих на одной прямой.

3. Начертите угол AOB и ось l, пересекающую стороны этого угла. Постройте угол, симметричный данному относительно оси l. Конгруэнтны ли эти углы?

4. Сколько осей симметрии имеет: а) угол; б) квадрат?

5. Сколько осей симметрии имеет: а) равносторонний треугольник; б) окружность?

6. Даны окружность и точки A и B вне круга, ограниченного этой окружностью. Постройте окружность, проходящую через точки A и B так, чтобы ее центр лежал на данной окружности.

7. Постройте окружность, касающуюся двух данных пересекающихся прямых, причем одной из них в данной точке.

8. Если окружность с центром O касается сторон угла ABC, то прямая BO является осью симметрии угла ABC. Докажите.

9. Через точку A проведены к окружности (O, r) две касательные. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна прямой OA.

10. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности и данной прямой.

11. Постройте множество всех таких точек, для которых отрезки касательных к данной окружности радиуса r конгруэнтны данному отрезку a.

12. Дано: (AB), (AC) и (MN) — общие касательные к двум касающимся окружностям (O_1, r_1) и (O_2, r_2); $(AB) \cap (MN) = B$, $(AC) \cap (MN) = C$. Доказать, что $\triangle ABC$ равнобедренный.

13. С помощью циркуля и линейки разделите данную дугу окружности на четыре конгруэнтные части (центр окружности известен).

14. Концы отрезка длины a скользят по сторонам данного прямого угла AOB. Какую фигуру описывает при этом середина отрезка?

15. Прямая a проходит через центр данной окружности. Точка A не принадлежит прямой a. Постройте с помощью линейки перпендикуляр к прямой a, проходящий через точку A.

16. На данной прямой постройте точку, из которой данный отрезок виден под прямым углом.

17. Постройте прямоугольный треугольник по его гипотенузе и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

18. Разделите данную окружность на четыре конгруэнтные части.

19. Докажите, что середины параллельных хорд окружности принадлежат одному ее диаметру.

20 Отрезки AB и CD — диаметры окружности. $\smile{AC} = 50°$. Вычислите $\smile{DCB}$.

21. Отрезок AB — диаметр, а отрезок AC — хорда окружности (O, r), $\widehat{BOC}$ больше $\widehat{BAC}$ на $40°$. Вычислите угловую величину дуги BC.

22. Расстояние хорды от центра равно половине радиуса окружности. Вычислите угловые величины дуг, стягиваемых этой хордой.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС (ВЕКТОР)

§ 1. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ. НАПРАВЛЕНИЯ

1. Аксиома параллельных. Из теоремы о центрально симметричных прямых вытекает, что через любую точку можно провести хотя бы одну прямую, параллельную данной прямой; значит, таких прямых существует не менее одной. Ответ на вопрос «А сколько же их?» дает аксиома параллельных.

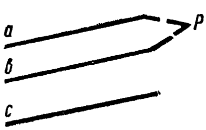


Рис. 125

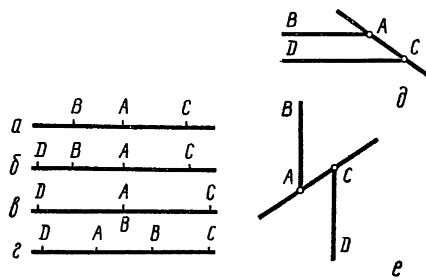


Рис. 126

Аксиома параллельных. *Через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной.*

Как видим, с одной стороны, можно провести не более одной прямой, а с другой — не менее одной. Это значит, что можно провести только одну прямую.

Опираясь на аксиому параллельных, можно доказать теорему о свойстве транзитивности параллельности прямых.

Теорема 1. *Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.*

Доказательство. Допустим противное: пусть прямые a и b не параллельны. Это значит, что они различны и имеют общую точку P (рис. 125). Но тогда через точку P проходили бы две параллельные к прямой c, что невозможно по аксиоме параллельных. Значит, допущение неверно и потому $a \parallel b$.

2. Направления. Углы между направлениями. Рассмотрим сонаправленные и противоположно направленные лучи. Отметим, что эти лучи принадлежат параллельным прямым.

Случай 1. Лучи лежат на одной прямой. Если $[AC) \subset [BC)$ (рис. 126, *а*), то эти лучи сонаправлены, а если $[AC) \cap [BD) = \varnothing$ (рис. 126, *б*), то эти лучи противоположно направленные. Лучи $[AC)$ и $[BD)$ будут противоположно направленными также в случае, если $[AC) \cap \cap [BD) = A = B$ (рис. 126, *в*) или $[AC) \cap [BD) = [AB]$ (рис. 126, *г*).

Случай 2. Два луча параллельны, но не лежат на одной прямой. Проведем через их начала прямую. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. Если рассматриваемые лучи лежат в одной из этих полуплоскостей (рис. 126, *д*), то они сонаправлены, если же лежат в разных полуплоскостях (рис. 126, *е*), то они противоположно направлены.

Можно доказать, что если два луча сонаправлены третьему, то все эти лучи будут сонаправлены (свойство транзитивности).

Для противоположно направленных лучей можно доказать такую теорему.

Теорема 2 (о симметричности противоположно направленных лучей). *Два противоположно направленных луча симметричны относительно середины отрезка, соединяющего их начала.*

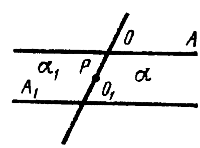


Рис. 127

Доказательство. Рассмотрим случай, когда лучи OA и O_1A_1 не лежат на одной прямой (рис. 127). Обозначим буквой α ту полуплоскость с границей OO_1, в которой лежит луч OA. Другую полуплоскость обозначим через α_1.

При центральной симметрии с центром P точка O отобразится на точку O_1. При этом прямая отображается на параллельную прямую, которая согласно аксиоме параллельных единственна, прямая OA отобразится на прямую, проходящую через точку O_1 и параллельную (OA), т. е. на прямую O_1A_1. Полуплоскость α отобразится на полуплоскость α_1. Поэтому луч OA отобразится на луч O_1A_1, лежащий в полуплоскости α_1 (рассмотрите это на модели).

Основываясь на свойстве транзитивности сонаправленности лучей, можно дать определение направлению на плоскости.

Множество лучей, сонаправленных данному лучу, называется направлением на плоскости.

Следовательно, для того чтобы задать направление на плоскости, нужно задать какой-нибудь луч. Направления на плоскости задаются лучами, поэтому угол между направлениями совпадает с углом между лучами (угол AOB на рис. 128).

Докажем теорему об углах между направлениями.

Теорема 3. *Угол между двумя направлениями не зависит от выбора начальной точки лучей, которые определяют этот угол.*

Доказательство. Пусть лучи OA и O_1A_1 сонаправлены и лучи OB и O_1B_1 тоже сонаправлены. Что можно сказать об углах AOB и $A_1O_1B_1$ (рис. 129)?

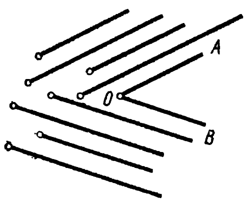


Рис. 128

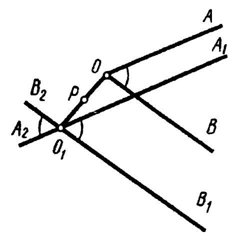


Рис. 129

Пусть P — середина отрезка OO_1. При симметрии с центром P лучи OA и OB перейдут в лучи O_1A_1' и O_1B_1', противоположно направленные лучам O_1A_1 и O_1B_1. Ограниченный лучами OA и OB меньший угол перейдет в меньший из углов, ограниченный лучами O_1A_1 и O_1B_1. Эти углы конгруэнтны (так как отображаются друг на друга при центральной симметрии). Значит, они имеют одну величину: $\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}$. Так как $\angle A_1O_1B_1$ и $\angle A_2O_1B_2$ вертикальные, то $\widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A_2O_1B_2} = \widehat{AOB}$. Если выбранные направления совпадают, то как угол между лучами OA и OB, так и угол между лучами O_1A_1 и O_1B_1 равен нулю; если же направления противоположны, то оба эти угла равны 180°. В обоих этих случаях равенство $\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}$ также выполняется. Значит, углы между направлениями равны.

Примеры. 1. Дан острый угол. Построить отрезок, конгруэнтный и параллельный данному отрезку AB, так, чтобы концы его лежали на сторонах угла.

Решение. Пусть MNL — данный угол и $[AB]$ — данный отрезок (рис. 130). Построим прямую, проходящую через N, параллельную (AB), и на ней от точки N отложим в двух направлениях отрезки NP и NQ, конгруэнтные данному. Построим прямую, проходящую через P и параллельную (NL). Пусть она пересекает (MN) в точке C. Через C проведем прямую, параллельную (PQ). Отрезок CD этой прямой, принадлежащий данному углу, и будет искомым. Если бы мы выполнили аналогичное построение, взяв точку Q, то получили бы тот же самый отрезок CD. (Докажите.)

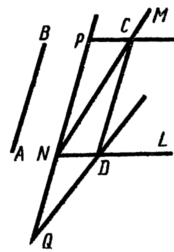


Рис. 130

2. Доказать, что если две прямые параллельны ($a \parallel b$), то перпендикуляр к одной из них ($c \perp a$) является перпендикуляром и к другой ($c \perp b$).

Доказательство. Допустим, что прямая c не перпендикулярна к b. Значит, прямая b является наклонной к прямой c. Но $a \perp c$ и потому $b \cap a \neq \varnothing$, что противоречит условию.

§ 2. ВЕКТОР. СВОЙСТВА ВЕКТОРОВ

1. Параллельный перенос (вектор). *Параллельным переносом называется перемещение плоскости, при котором все точки плоскости отображаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.*

Если указать образ одной точки при параллельном переносе, то параллельный перенос будет задан. Действительно, если образом точки A является точка A_1, то эти две точки определяют и расстояние $|AA_1|$ и направление от точки A к точке A_1. Тогда для любой точки X образ X_1 можно получить так: построить луч XM, сонаправленный лучу AA_1, и на нем отложить отрезок XX_1, конгруэнтный отрезку AA_1 (рис. 131).

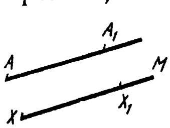


Рис. 131

Будем обозначать параллельный перенос буквой T. Если точка X отображается при параллельном переносе T на точку X_1, будем писать $T(X) = X_1$.

Для параллельного переноса в математике есть еще одно название — вектор. Векторы обычно обозначаются латинскими буквами со стрелками сверху $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Вектор, как и параллельный перенос, является отображением точек плоскости, т. е. наряду с записью $X_1 = T(X)$ возможна запись $X_1 = \vec{a}(X)$ (читается: вектор $\vec{a}$ отображает точку X на точку X_1).

Если пары точек A и A_1, X и X_1 задают один и тот же вектор (рис. 131), то это записывают так: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{XX_1}$.

Вообще, запись $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MN}=\ldots$ означает, что $[AB)$, $[CD)$, $[MN)$ — сонаправленные лучи и $|AB|=|CD|=|MN|$.

Параллельный перенос на расстояние, равное нулю, определяет тождественное отображение плоскости. Такой параллельный перенос называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$; итак, $\vec{0}(A)=A$, $\vec{0}(X)=X$. Нулевой вектор можно обозначить и так: $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{KK}=\ldots$.

2. Докажем теперь теоремы с использованием параллельного переноса.

Теорема 1. *Параллельный перенос отображает прямую на параллельную ей прямую.*

Доказательство. Пусть $[OA)$ и $[O_1A_1)$ сонаправлены и $|OA|=|O_1A_1|$ (рис. 132). Обозначим через P середину отрезка OA_1. Лучи OA и A_1O противоположно направлены. Поэтому они симметричны относительно точки P. Значит, точка O отображается на точку A_1.

Отрезки OO_1 и A_1O центрально симметричны, поэтому (по теореме о центрально симметричных прямых)

$$[OO_1]\parallel[A_1A] \text{ и } (OO_1)\parallel(A_1A).$$

Теорема 2. *Отрезки двух параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными прямыми, конгруэнтны между собой.*

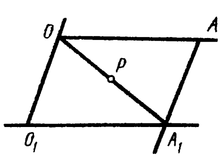


Рис. 132

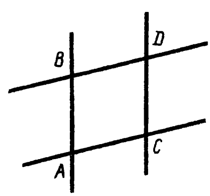


Рис. 133

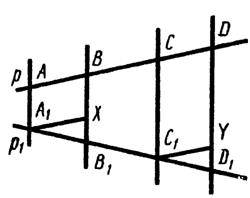


Рис. 134

Доказательство. Пусть $(AB)\parallel(CD)$, $(AC)\parallel(BD)$ (рис. 133). Рассмотрим параллельный перенос, отображающий точку A на точку C. При этом отрезок AB отображается на отрезок CD. Поэтому $[AB]\cong[CD]$.

Докажем, наконец, одну из классических теорем геометрии — теорему **Фалеса**.

Теорема 3. *Если на одной прямой отложить несколько конгруэнтных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то* *они отсекут на второй прямой отрезки, конгруэнтные между собой.*

Доказательство. Рассмотрим на прямой p (рис. 134) два отрезка. Пусть $[AB] \cong [CD]$ и $(AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1)$. Через точки A_1 и C_1 проведем прямые, параллельные прямой p. Точки их пересечения с прямыми BB_1 и DD_1 обозначим через X и Y. Тогда $[A_1X] \cong [AB]$ и $[C_1 Y] \cong [CD]$ по теореме об отрезках параллельных, заключенных между параллельными; значит, $[A_1X] \cong [C_1Y]$.

По построению $[A_1X] \parallel [C_1Y]$. Параллельный перенос, отображающий точку A_1 на точку C_1, отображает отрезок A_1X на отрезок C_1Y, прямую XB_1 на параллельную ей прямую YD_1. Следовательно, при этом параллельном переносе точка B_1 отображается на точку D_1 и отрезок A_1B_1 — на отрезок C_1D_1, поэтому $[A_1B_1] \cong [C_1D_1]$.

Вопросы для самопроверки

1. Как расположены центрально симметричные друг другу: а) отрезки; б) лучи?

2. Откуда следует, что через каждую точку плоскости проходит одна и только одна прямая, параллельная данной прямой?

3. Сколько различных направлений определяют три различные точки?

4. Какой фигурой может быть пересечение двух сонаправленных лучей, лежащих на одной прямой; объединение этих лучей? Какой фигурой может быть пересечение двух противоположно направленных лучей, лежащих на одной прямой?

5. Какими фигурами являются образы отрезка, луча, прямой, окружности, круга, треугольника, угла при параллельном переносе?

6. Пересекающиеся прямые a и b при параллельном переносе перешли в прямые a_1 и b_1. В какую точку перешла при этом точка пересечения прямых a и b.

7. Дан треугольник ABC. Какими двумя последовательными переносами можно отобразить его на самого себя.

8. Существует ли параллельный перенос, при котором: а) одна сторона треугольника отобразится на другую его сторону; б) одна сторона квадрата отобразится на другую его сторону?

9. Даны два сонаправленных луча. Сколько существует параллельных переносов, отображающих один из них на другой?

Упражнения

1. Отрезок AB центрально симметричен отрезку CD. Докажите, что эти отрезки конгруэнтны и лежат на параллельных прямых.

2. Докажите, что если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

3. Докажите, что прямая, проходящая через внутреннюю точку острого угла, пересекает хотя бы одну из его сторон.

4. Начертите треугольник и задайте параллельный перенос парой точек. Постройте образ данного треугольника в этом переносе.

5. Дано $[AB] \cong [A_1B_1]$. При каком условии отрезок AB отобразится на отрезок A_1B_1 при параллельном переносе, отображающем точку A на A_1?

6. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC из точки, взятой на гипотенузе AB, проведены перпендикуляры к его катетам. Периметр образовавшегося четырехугольника равен 24 см. Сделайте чертеж и найдите сумму длин катетов треугольника.

7. При каком условии параллельный перенос отрезка можно заменить осевой симметрией? Рассмотрите различные случаи.

8. Всегда ли последовательное выполнение двух осевых симметрий отрезка может быть заменено параллельным переносом?

9. Начертите четырехугольник $ABCD$, у которого стороны BC и AD параллельны. Пользуясь теоремой Фалеса, разделите каждую из сторон AB и CD на три равные части.

10. В прямоугольном треугольнике через середину его гипотенузы проведены прямые, параллельные его катетам. Найдите периметр образовавшегося четырехугольника, если катеты треугольника равны 10 и 8 см.

11. Дан четырехугольник, диагонали которого равны 6 и 10 см Вычислите периметр четырехугольника, образованного отрезками, соединяющими последовательно середины сторон данного четырехугольника.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ
МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. Виды треугольников. Основные свойства. Если замкнутая ломаная, о которой говорится в определении многоугольника, состоит из трех звеньев, то такая геометрическая фигура называется *треугольником*. Измерив длины сторон треугольника и величины его углов, мы получим шесть величин, называемых основными элементами треугольника *.

Треугольники разделяются на виды в зависимости от длины сторон и в зависимости от величины углов. В зависимости от длины сторон различают разносторонние и равнобедренные треугольники. Треугольник, у которого все три стороны имеют различные длины, называется *разносторонним*. Треугольник, у которого две стороны равны, называется *равнобедренным*. Среди равнобедренных треугольников встречаются и такие, у которых все три стороны равны, эти треугольники называются *равносторонними*. Равносторонний треугольник — частный случай равнобедренного.

В зависимости от величины углов различают остроугольные, прямоугольные и тупоугольные треугольники. Треугольник, у которого все углы острые, называется *остроугольным*. Треугольник, в котором имеется прямой угол, называется *прямоугольным*. Треугольник, в котором имеется тупой угол, называется *тупоугольным*.

Сформулируем (без доказательства) три признака конгруэнтности треугольников.

Теорема 1. *Если три стороны треугольника соответственно конгруэнтны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.*

Теорема 2. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно конгруэнтны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.*

Теорема 3. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно конгруэнтны двум*

---

* Для краткости мы длину стороны треугольника будем называть стороной треугольника, величину угла — углом и т. д.

сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.

Теорема 4. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

Доказательство. Пусть дан $\triangle ABC$ (рис. 135). Проведем через вершину C прямую MN, параллельную прямой AB. Продолжим стороны AC и BC за вершину C.

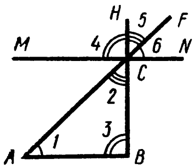


Рис. 135

Лучи AF и CF сонаправлены, лучи AB и CN сонаправлены, поэтому $\hat{1} = \hat{6}$. Лучи BH и CH сонаправлены, лучи BA и CM сонаправлены, поэтому $\hat{3} = \hat{4}$. Углы 2 и 5 — вертикальные, поэтому $\hat{2} = \hat{5}$.

Значит, $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = \hat{6} + \hat{5} + \hat{4}$.

Но углы 6, 5 и 4 в сумме составляют развернутый угол MCN, поэтому $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$.

Следствие. *В треугольнике не может быть более одного прямого или тупого угла.*

Действительно, в противном случае сумма углов треугольника оказалась бы больше 180°, что неверно.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности построения треугольников. Из теоремы 1—3 следует, что для построения треугольника достаточно хотя бы трех основных элементов. Треугольник можно построить, если заданы:

а) три его стороны;

б) его сторона и прилежащие к ней два угла;

в) две его стороны и угол между ними.

Кроме перечисленных случаев логически возможны еще следующие (существенно различные) комбинации трех основных элементов треугольника: г) сторона, прилежащий к ней угол и угол противолежащий его стороне; д) две стороны треугольника и угол противолежащий одной из них и е) три угла треугольника.

Если воспользоваться теоремой 4, то случай г) сводится к случаю б). Действительно, сумма углов треугольника равна 180°, поэтому, зная его два угла, можно *высчитать* третий угол. Следовательно, станут известными сторона и два прилегающих к ней угла.

Иначе обстоит дело в случае е). Чтобы треугольник с заданными углами α, β, γ существовал, необходимо выполнение равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Если это равенство соблюдается, то можно выбрать произвольно сторону a и построить треугольник с заданными прилежащими углами β, γ. При различном выборе стороны получится сколько угодно неконгруэнтных треугольников. Тройка α, β, γ не определяет треугольник.

В случае д) задача требует исследований,— в этом случае можно построить один треугольник, два или вообще не построить его. Это связано с требованиями к данным элементам.

Дадим теперь определение внешнего угла треугольника.

Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется его внешним углом (величина этого угла также называется внешним углом треугольника).

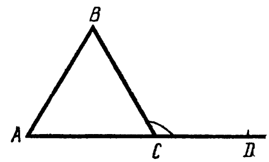


Рис. 136

Докажем еще одно следствие из теоремы о сумме углов треугольника.

Теорема 5. *Внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с этим внешним.*

Доказательство. В $\triangle ABC$ угол BCD — внешний (рис. 136). $\widehat{BCD}+\widehat{BCA}=180^\circ$ (смежные углы). $(\widehat{A}+\widehat{B})+$ $+\widehat{C}=180^\circ$ (по теореме о сумме углов треугольника). В равных суммах вторые слагаемые одинаковы. Значит, равны и первые слагаемые:

$$\widehat{BCD}=\widehat{A}+\widehat{B}.$$

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

Теорема 6 (о средней линии треугольника). *Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне, а длина ее равна половине этой стороны.*

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 137) $|AD|=|DB|$, $|BE|=|EC|$. Если через точку D провести прямую, параллельную отрезку AC, то она, по теореме Фалеса, разделит отрезок BC пополам, т. е. пройдет как раз через точку E, поэтому $[DE]\parallel[AC]$.

Проведем $(EF)\parallel(AB)$. По теореме Фалеса, прямая EF разделит отрезок AC пополам: $|AF|=|FC|=\frac{1}{2}|AC|$, но $|DE|=|AF|$; следовательно, $|DE|=\frac{1}{2}|AC|$.

Теорема 7. *Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.*

Доказательство. Пусть $|BC| > |AB|$. Отложим на большей стороне BC отрезок BD (рис. 138), конгруэнтный отрезку AB. Соединим точки A и D отрезком. Треугольник ABD — равнобедренный, поэтому $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$.

Угол BDA больше угла C, как внешний угол треугольника ADC, значит, и $\widehat{BAD} > \hat{C}$.

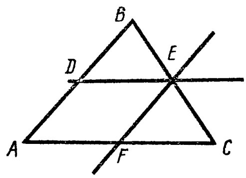


Рис. 137

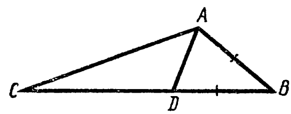


Рис. 138

Но угол BAD составляет часть угла A, поэтому угол A и подавно больше угла C.

Теорема 8. *Против большего угла в треугольнике лежит бо́льшая сторона.*

Доказательство. Пусть $\hat{A} > \hat{C}$. Длина отрезка AB (см. рис. 138) не может быть больше длины отрезка BC, так как по предыдущей теореме угол C был бы больше угла A, что противоречит условию.

Длина отрезка AB не может быть и равной длине отрезка BC, так как треугольник ABC был бы равнобедренным и в нем величины углов A и C были бы равны.

Итак, длина отрезка AB не больше и не равна длине отрезка BC. Значит, она меньше длины отрезка BC, поэтому $|BC| > |AB|$.

Теорема 9. *Против равных сторон в треугольнике лежат равные углы, и, наоборот, против равных углов в треугольнике лежат равные стороны.*

Доказательство. Пусть $\hat{C} = \hat{A}$ (рис. 139). Сторона $|AB|$ не может быть больше $|BC|$, так как в этом случае по предыдущей теореме угол C был бы больше угла A, что противоречит условию.

Сторона $|AB|$ не может быть и меньше $|BC|$, так как в этом случае угол C был бы меньше угла A, что противоречит условию; следовательно, $|AB| = |BC|$.

2. Признаки параллельности прямых.

1. *Если две прямые центрально симметричны, то они параллельны.*

Рассмотрим еще один признак параллельности двух прямых.

2. *Если две прямые плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.*

Действительно, в противном случае через их точку пересечения проходили бы два перпендикуляра к одной прямой, а это невозможно (на основании теоремы о единственности перпендикуляра к прямой в данной точке).

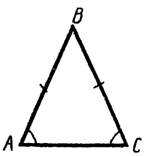


Рис. 139

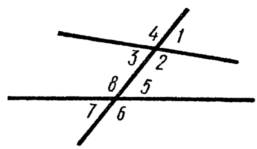


Рис. 140

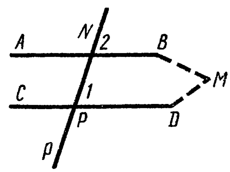


Рис. 141

Если две прямые пересечены третьей, то углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 (рис. 140) называются соответственными.

Теорема. *Если какие-либо два соответственных угла при пересечении двух прямых третьей конгруэнтны, то эти две прямые параллельны.*

Доказательство. Имеем: $\angle 1 \cong \angle 2$. Предположим, что $(AB) \cap (CD) = M$ (рис. 141). Тогда образуется $\triangle MNP$. В нем $\angle 2$—внешний, $\angle 1$—внутренний. Значит, $\hat{2} > \hat{1}$, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и $(AB) \parallel (CD)$.

3. Свойства серединного перпендикуляра и биссектрисы угла. *Прямая, перпендикулярная к отрезку и проходящая через его середину, называется серединным перпендикуляром к этому отрезку.* Серединный перпендикуляр к отрезку является одной из двух осей симметрии этого отрезка (второй осью симметрии отрезка является прямая, на которой лежит отрезок).

Свойство серединного перпендикуляра определяется следующей теоремой.

Теорема (о серединном перпендикуляре к отрезку).
Множество всех точек, каждая из которых равноудалена от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Для доказательства этой теоремы нужно доказать два утверждения.

Лемма А. *Если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от его концов.*

Доказательство. Точки A и B симметричны относительно прямой p, а тогда $|XA|=|XB|$ (рис. 142).

Лемма Б. *Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.*

Доказательство. Пусть точка X равноудалена от концов отрезка AB. Тогда $\triangle AXB$ равнобедренный (см. рис. 142). Проведем его высоту XO; она является и медианой. Значит, $(XO)\perp(AB)$ и $|AO|=|OB|$. Следовательно, точка X лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

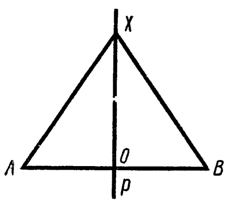


Рис. 142

Сформулируем свойство биссектрисы угла.

Теорема (о точках биссектрисы угла). *Множеством всех точек угла, равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла.*

Доказательство этой теоремы основано на двух леммах.

Лемма А. *Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла.*

Доказательство. Пусть $[OC)$ — биссектриса угла AOB, $M\in[OC)$ (рис. 143). Проведем перпендикуляр ME к стороне OA. Рассмотрим осевую симметрию с осью OC. Угол AOC отобразится при этой симметрии на конгруэнтный ему угол, расположенный по другую сторону от оси OC, т. е. на угол BOC.

Следовательно, луч OA отобразится на луч OB, а прямоугольный $\triangle OME$ — на прямоугольный же $\triangle OMK$ с вершиной K на луче OB. Поэтому расстояния $|ME|$ и $|MK|$ от точки M до сторон угла AOB равны между собой.

Лемма В. *Если точка угла равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.*

Доказательство. Пусть точка M равноудалена от сторон угла AOB. Проведем через точку M перпендикуляры к сторонам угла AOB (рис. 144): $[ME]\perp[OA)$, $[MD]\perp[OB)$.

По условию теоремы $|ME|=|MD|$. Тогда прямоугольные треугольники MEO и MDO конгруэнтны по гипотенузе и катету. Поэтому $\angle EOM \cong \angle DOM$, т. е. луч OM является биссектрисой угла AOB.

Примеры. 1. В $\triangle MEK$ $[ME] \cong [EK]$, $[ED] \perp [MK]$, $O \in [ED]$. Доказать, что $\triangle MOE \cong \triangle EOK$.

Решение. Имеем: (ED) — ось симметрии $\triangle MEK$. Осевая симметрия с осью ED отображает $\triangle MOE$ на $\triangle EOK$, а так как осевая симметрия является перемещением, то $\triangle MOE \cong \triangle EOK$.

2. На рис. 145 $[AB] \parallel [CD]$, $[BE] \parallel [CF]$. Найти условие, при котором $\triangle ABE$ конгруэнтен $\triangle DCF$.

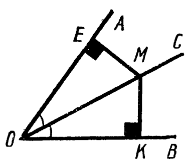


Рис. 143

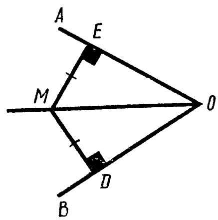


Рис. 144

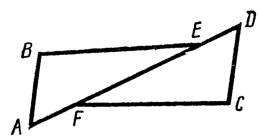


Рис. 145

Решение. Имеем: $\hat{A} = \hat{D}$, так как $[AB)$ и $[DC)$ противоположно направлены; $[AD)$ и $[DA)$ противоположно направлены;

$\widehat{AEB} = \widehat{DFC}$, так как $[EB)$ и $[FC)$ противоположно направлены, $[EA)$ и $[FD)$ противоположно направлены.

Для того чтобы $\triangle ABE$ был конгруэнтен $\triangle FCD$, нужно к данным условиям добавить условие $|AE| = |FD|$.

§ 2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

1. Параллелограмм. *Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, называется параллелограммом.*

Теорема 1. *Середина диагонали параллелограмма является его центром симметрии.*

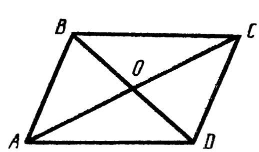


Рис. 146

Доказательство. Пусть точка O — середина диагонали AC параллелограмма $ABCD$ (рис. 146). При центральной симметрии с центром O луч AD отобразится на луч CB. Следовательно, точки A, D, C и B отобразятся соответственно на точки C, B, A и D, т. е. параллелограмм $ABCD$ отобразится сам на себя. Поэтому точка O является центром симметрии данного параллелограмма.

Следствие 1. *Противоположные стороны параллелограмма равны* *.

Действительно, они отображаются друг на друга при центральной симметрии с центром O (рис. 146).

Следствие 2. *Противоположные углы параллелограмма равны.*

Действительно, они являются центрально симметричными фигурами относительно точки O (рис. 146).

Следствие 3. *Каждая диагональ параллелограмма делит его на два конгруэнтных треугольника.*

Действительно, треугольники ABC и CDA (рис. 146) центрально симметричны относительно центра O и поэтому конгруэнтны.

Следствие 4. *Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.*

Доказательство. Так как точка O — центр симметрии параллелограмма (рис. 146), то вершины B и D центрально симметричны относительно O. Значит, точка O делит диагональ BD пополам. Аналогично доказывается, что точка O делит пополам и диагональ AC.

Отрезок перпендикуляра, проведенного к противоположным сторонам параллелограмма, заключенный между этими сторонами (или их продолжениями), называется высотой параллелограмма.

Сформулируем и докажем признаки параллелограмма.

Первый признак параллелограмма. *Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

Доказательство. В четырехугольнике $ABCD$ $|AB|=|CD|$, $|BC|=|DA|$ (рис. 147) проведем диагональ AC, тогда $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (по трем сторонам); отсюда $\angle 1 \cong \angle 3$ и $\angle 2 \cong \angle 4$.

Из конгруэнтности углов 1 и 3 следует, что $[AB] \parallel [CD]$. Из конгруэнтности углов 2 и 4 следует, что $[BC] \parallel [AD]$. Значит четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Второй признак параллелограмма. *Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.*

Доказательство аналогично доказательству первого признака.

---

* Как и в предыдущих параграфах, мы длину стороны многоугольника называем (для краткости) стороной, величину угла — углом. Длину диагонали многоугольника — диагональю и т. д.

2. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. *Параллелограмм, у которого углы прямые, называется прямоугольником.* Так как прямоугольник есть параллелограмм, то он обладает всеми его свойствами. Кроме того, прямоугольник обладает свойствами, указанными в следующей теореме и ее следствиях.

Теорема. *Серединный перпендикуляр к стороне прямоугольника является его осью симметрии.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — прямоугольник (рис. 148). Серединный перпендикуляр MN к отрезку

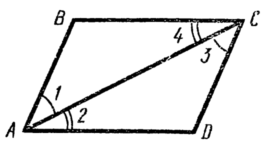


Рис. 147

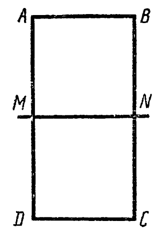


Рис. 148

AD является его осью симметрии. Поэтому точки A и D симметричны относительно оси MN.

Теперь докажем, что точки B и C симметричны относительно оси MN, т. е. что $(MN) \perp [BC]$ и $[BN] \cong [NC]$. Прямые AD и BC параллельны, а прямая MN перпендикулярна прямой AD по условию. Значит, прямая MN перпендикулярна и прямой BC. Прямые AB, MN, DC параллельны между собой, как перпендикулярны к одной и той же прямой AD. Отрезки AM и MD конгруэнтны по условию. Тогда, по теореме Фалеса, отрезки BN и NC конгруэнтны.

Итак, вершины A и B симметричны относительно оси MN вершины D и C. Поэтому при симметрии с осью MN четверка вершин данного прямоугольника отображается сама на себя: $A \to D$, $B \to C$, $C \to B$, $D \to A$. Отрезки AD и BC отображаются на себя, отрезки же AB и DC отображаются друг на друга. Составленная из этих отрезков граница прямоугольника отображается сама на себя. Поэтому и весь прямоугольник отображается сам на себя. Значит, прямая MN есть ось симметрии прямоугольника.

Следствие 1. *Прямоугольник имеет две оси симметрии.*

Следствие 2. *Диагонали прямоугольника равны.*

Как видите, перемещения находят широкое применение при доказательстве стойств прямоугольника. Точно также все характерные свойства ромба и квадрата доказываются с использованием осевой симметрии.

Параллелограмм, все стороны которого равны, называется ромбом. Так как ромб есть параллелограмм, то он обладает всеми его свойствами. Кроме того, ромб обладает и другими свойствами.

Теорема. *Прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии, т.е. диагональ ромба является его осью симметрии.*

Доказательство. Пусть точки ромба B и D (рис. 149) равноудалены от концов отрезка AC, тогда

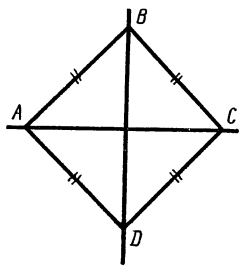


Рис. 149

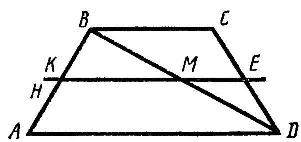


Рис. 150

они лежат на его оси симметрии. При симметрии относительно оси BD четверка вершин ромба отображается сама на себя: $B \longrightarrow B$, $A \longrightarrow C$, $D \longrightarrow D$, $C \longrightarrow A$.

Следовательно, отрезки AB и BC, AD и DC отображаются друг на друга. Составленная из этих отрезков граница ромба отображается на самое себя. Поэтому и весь ромб отображается сам на себя, т. е. прямая BD является осью симметрии ромба $ABCD$.

Точки A и C равноудалены от концов отрезка BD, поэтому прямая AC также является осью симметрии ромба $ABCD$.

Следствие 1. *Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.* Действительно, ось симметрии перпендикулярна прямой, соединяющей симметричные точки, не принадлежащие этой оси; значит, $[AC] \perp [BD]$ (рис. 149).

Следствие 2. *Диагонали ромба делят его углы пополам.*

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны. Из определений квадрата и ромба следует, что квадрат является ромбом, у которого углы прямые. Так как квадрат является и параллелограммом, и прямоугольником, и ромбом, то он обладает всеми их свойствами.

3. Трапеция. *Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие непараллельны, называется трапецией.* Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а непараллельные — *боковыми сторонами*. Боковые стороны трапеции могут оказаться равными, тогда она называется *равнобедренной*. Если один из углов трапеции прямой, то она называется *прямоугольной*. В этом случае у трапеции будет еще один прямой угол.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*.

Теорема. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям, длина ее равна полусумме оснований.*

Доказательство. Пусть в трапеции $ABCD$ $|AH|=|HB|$, $|CE|=|ED|$ (рис. 150). Разобьем трапецию диагональю BD на два треугольника. Проведем через точку E прямую EK, параллельную $[AD]$. Тогда, по теореме Фалеса, для угла CDB точка M будет серединой отрезка BD. По этой же теореме для угла DBA прямая EK разделит отрезок AB пополам. Следовательно, средняя линия лежит на прямой EK, параллельной $[AD]$: $[EH] \parallel [AD]$. Первая часть теоремы доказана.

Отрезок EM является средней линией треугольника BCD, а отрезок MH — средней линией треугольника ADB, поэтому

$$|ME|=\frac{1}{2}|BC|, \quad |MH|=\frac{1}{2}|AD|,$$

$$|EH|=|ME|+|MH|=\frac{1}{2}|BC|+\frac{1}{2}|AD|=\frac{1}{2}(|BC|+|AD|).$$

Примеры. 1. В прямоугольнике $ABCD$ $\widehat{BOA}=60^\circ$, $|AB|=5$ см (рис. 151); найти $|AC|$.

Решение. Так как $|AC|=|BD|$, $|AO|=|OC|$ и $|BO|=|OD|$, то $|BO|=|AO|$. Треугольник AOB равнобедренный, так как $|AO|=$ $=|BO|$; поэтому $\widehat{AOB}=60^\circ$. Но $\widehat{AOB}+\widehat{BAO}+\widehat{ABO}=180^\circ$, значит $\widehat{OBA}=\widehat{BAO}$, $\widehat{OBA}=\widehat{BAO}=\widehat{AOB}=60^\circ$. Теперь имеем:

$|AO|=|BO|=|AB|=5$ см; $\quad |AC|=|BD|=10$ см; $\quad |AC|=1$ дм.

2. Построить ромб по его стороне $b=4$ см и углу $\alpha=65^\circ$.

Решение. Можно предложить различные способы построения. Приводим один из возможных.

От руки рисуем ромб, чтобы увидеть, к чему сводится его построение (рис. 152). В $\triangle ABD$ имеем $|AB|=|AD|=b$; пусть $\widehat{A}=\alpha$.

Рассмотрение рисунка показывает, что построение ромба сводится к построению равнобедренного $\triangle ABD$ по боковой стороне, равной 4 см, и углу при вершине, величина которого равна 65°.

Выполнять построение нужно с помощью циркуля, угольника и линейки; запись шагов построения может быть краткой:

1) $|AD|=b$; 2) $\widehat{BAD}=\alpha$; 3) $|AB|=b$; 4) $[BC)\parallel[AD]$; $[DC]\parallel[AB]$ $ABCD$ — ромб.

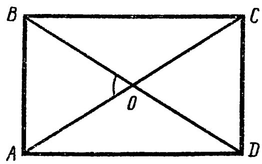


Рис. 151

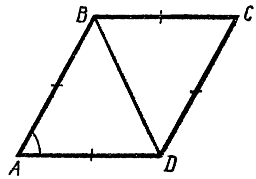


Рис. 152

Доказательство. Имеем $[AD]\parallel[BC]$, $[AB]\parallel[DC]$, а значит, $ABCD$ — параллелограмм, откуда $|AB|=|CD|$ и $|AD|=|BC|$, $|AB|=|AD|=b$ (по построению), а значит, $|AD|=|BC|=|AB|=$ $=|CD|=b$; $ABCD$ — ромб, $\widehat{A}=65°$.

§ 3. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1. Понятие площади. Прежде чем вывести формулы для площадей различных многоугольников, следует разобраться в том, что же такое площадь многоугольника и какими свойствами она обладает.

Площадь это неотрицательная величина, а следовательно, для нее выполняются все свойства величин. Площади можно складывать между собой и умножать на положительные числа. При сложении двух площадей получается площадь, при умножении на числа — площадь. Выбрав площадь V за единицу измерения, любую другую площадь S можно выразить в виде $S=kV$, где k — числовой множитель, который называется *числовым значением площади* S при единице измерения V или отношением площади S и площади V. Если две площади A и B выражены через общую единицу измерения V в виде $A=\alpha V$, $B=\beta V$, то отношение $A:B$ равно отношению числовых значений α и β.

Обычно за единицу измерения площади принимается площадь квадрата со стороной единичной длины l. При этом выбранную таким образом единицу измерения площадей S обозначают l^2. Например, из линейных единиц см (сантиметр) и м (метр) получают единицы измерения $см^2$ (квадратный сантиметр) и $м^2$ (квадратный метр).

При получении формул для площадей многоугольников мы будем пользоваться следующими свойствами площадей.

1. *Конгруэнтные многоугольники имеют равные площади.*

2. *Если многоугольник составляется из неперекрывающихся* многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников *.

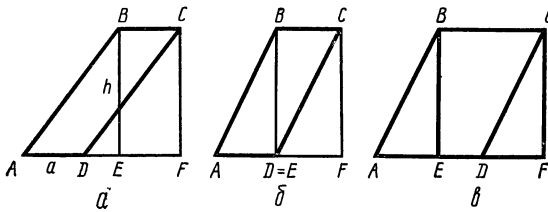


Рис. 153

2. Площадь четырехугольника. Площадь прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле $S=ab$.

Докажем теорему, дающую формулу для вычисления площади параллелограмма.

Теорема. *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.*

Доказательство. Один из двух углов, прилежащих к основанию AD параллелограмма $ABCD$, острый (рис. 153). Пусть это будет угол A. Проведем через вершины B и C перпендикуляры к прямой AD. Получим прямоугольник $BCFE$, вершины F и E которого лежат на луче AD. Точка F при этом всегда лежит вне отрезка AD. В положении точки E могут встретиться три различных случая (рис. 153, *а*, *б*, *в*). Имеем равенство

$$S_{ABCF}=S_{ABCD}+S_{DCF}=S_{BCFE}+S_{ABE}. \qquad (1)$$

Но $\triangle DCF \cong \triangle ABE$ (докажите); значит, $S_{DCF}=S_{ABE}$. Поэтому из равенства (1) следует, что $S_{ABCD}=S_{BCFE}$. Но $S_{BCFE}=|BC|\cdot|BE|$, значит,

* Многоугольник составлен из неперекрывающихся многоугольников, если он является объединением этих многоугольников, и никакие два из этих многоугольников не имеют общих внутренних точек.

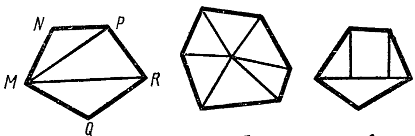
$$S_{ABCD} = |BC| \cdot |BE| = |AD| \cdot |BE| = a \cdot h, \text{ т. е. } S_{\text{пар}} = ah.$$

3. Площадь треугольника.

Пользуясь формулой, выведенной в п. 2, получим формулу для вычисления площади треугольника.

Теорема. *Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.*

Доказательство этой теоремы заключается в том, что треугольник достраивается до параллелограмма. Диагональ же параллелограмма делит его на два конгруэнтных треугольника.



а *б* *в*

Рис. 154

Аналогично получим и формулу для вычисления площади трапеции.

Теорема. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.*

Чтобы вычислить площадь многоугольника, можно воспользоваться разложением его на треугольники и найти сумму их площадей (используя второе свойство площадей). Такое разложение выпуклого многоугольника можно осуществить, проводя, например, диагонали из одной его вершины (рис. 154, *а*). Иногда удобно воспользоваться разложением, показанным на рис. 154, *б*, *в*.

§ 4 ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Вписанные и описанные треугольники. *Многоугольник, все вершины которого принадлежат окружности, называется вписанным в эту окружность, а окружность — описанной около этого многоугольника.*

Многоугольник, все стороны которого касаются окружности, называется описанным около этой окружности, а окружность — вписанной в этот многоугольник.

Теорема 1. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну окружность.*

Значит, окружность определяется заданием трех ее точек, не лежащих на одной прямой.

Следствие. *Через вершины любого треугольника можно провести окружность и притом только одну.* Иначе говоря — около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Если окружность описана около прямоугольного треугольника, то центр этой окружности лежит на середине гипотенузы (рис. 155).

Это замечание можно сформулировать в виде двух лемм.

Лемма А. *Вершины прямоугольного треугольника с гипотенузой AB лежат на окружности с диаметром AB.*

Лемма В. *Все точки окружности с диаметром AB являются вершинами прямоугольных треугольников с гипотенузой AB* (см. рис. 78).

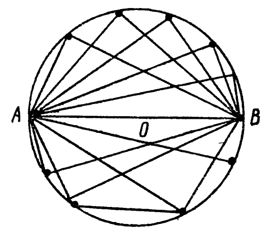


Рис. 155

Из лемм *A* и *B* следует теорема.

Теорема 2. *Множество всех вершин прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой есть окружность, диаметром которой является эта гипотенуза.*

Эта теорема позволяет обосновать простой способ построения касательной, проходящей через данную точку вне окружности. Если прямая *PX* касается окружности с центром *O* в точке *X* (рис. 156), то точка *X* является вершиной прямоугольного треугольника с гипотенузой

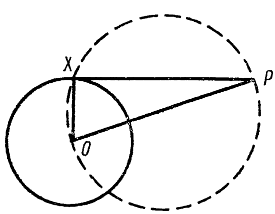


Рис. 156

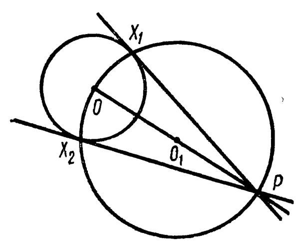


Рис. 157

OP. Поэтому точка *X* является точкой пересечения данной окружности и окружности с диаметром *OP*.

Через точку *P*, лежащую вне окружности, всегда можно провести к ней две касательные (рис. 157). Действительно, окружность с диаметром *OP* проходит через центр данной окружности *O* и через точку *P*, лежащую вне этой окружности. Значит, она всегда пересекает данную окружность в двух точках: X_1 и X_2. Прямые PX_1 и PX_2 и будут двумя искомыми касательными.

Теорема 3. *Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центром ее является точка пересечения биссектрис углов треугольника, а радиусом — расстояние от центра до сторон треугольника.*

2. Вписанные и описанные четырехугольники. Сначала дадим определение вписанного угла.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают ее, называется вписанным в эту окружность.

Теорема 1. *Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.*

Для доказательства этой теоремы рассмотрим три возможных случая расположения центра окружности относительно данного вписанного угла.

1. Центр окружности лежит на стороне вписанного угла ABC (рис. 158). Величина центрального угла равна угловой величине соответствующей ему дуги, поэтому рассмотрим образ угла ABC при параллельном переносе $\overrightarrow{BO}$. Это будет центральный угол EOC. Его величина равна угловой величине дуги CE. Осталось сравнить дугу CE с дугой AC. Для этого заметим прежде всего, что $[OE) \parallel [BA)$ (как образ луча BA при параллельном переносе $\overrightarrow{BO}$). Обозначим через D вторую точку пересечения прямой OE с данной окружностью, тогда $\smile AE \cong \smile BD$ (как дуги, заключенные между параллельными хордами); $\angle DOB \cong \angle EOC$ (как вертикальные); $\smile BD \cong \smile CE$ (как дуги, соответствующие конгруэнтным центральным углам).

Значит, $\smile CE \cong \smile AE$, поэтому угловая величина дуги CE равна половине угловой величины дуги AC. Следовательно, величина угла ABC равна половине угловой величины дуги AC.

2. Центр окружности лежит внутри вписанного угла ABC (рис. 159). Проведя луч BO, разобьем данный угол на два угла, для которых справедлив рассмотренный уже случай теоремы: $A\widehat{B}C = A\widehat{B}D + D\widehat{B}C$.

Величина угла ABD равна половине угловой величины дуги AD. Величина угла DBC равна половине угловой величины дуги DC. Тогда величина угла ABC равна половине угловой величины дуги AC.

3. Центр окружности лежит вне вписанного угла. В этом случае проведите доказательство самостоятельно.

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы четырехугольник можно было вписать в окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов равнялась* $2d$.

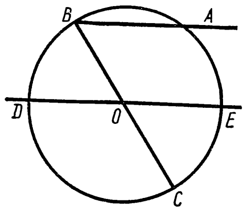


Рис. 158

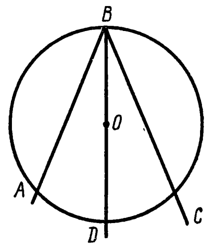


Рис. 159

Доказательство. Докажем сначала, что это условие необходимо, т. е. что сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна $2d$. Пусть четырехугольник $ABCD$ (рис. 160) вписан в окружность (O, R), тогда

$$\hat{A}=\frac{1}{2}\overset{\smile}{BCD}, \quad \hat{C}=\frac{1}{2}\overset{\smile}{DAB};$$

следовательно, $\hat{A}+\hat{C}=\frac{1}{2}\overset{\smile}{BCD}+\frac{1}{2}\overset{\smile}{DAB}$; поэтому $\hat{A}+\hat{C}=$

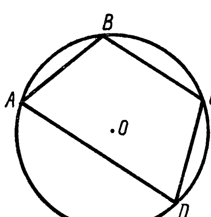


Рис. 160

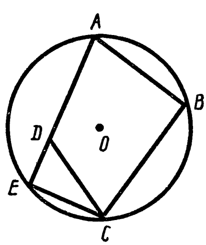


Рис. 161

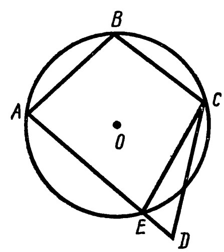


Рис. 162

$=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{BCD}+\overset{\smile}{DAB})$. Но дуги BCD и DAB составляют окружность.

Таким образом, величина суммы углов A и C равна угловой величине половины окружности, т. е. $\hat{A}+\hat{C}=2d$.

Докажем теперь достаточность. Предположим, что в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна $2d$, и докажем, что около этого четырехугольника можно описать окружность. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ имеем $\hat{B}+\hat{D}=2d$.

Проведем через точки A, B, C окружность. Как будет расположена точка D относительно этой окружности? Возможно лишь одно из трех положений: точка D лежит: 2) внутри окружности, 2) вне окружности, 3) на окружности.

Допустим, что точка D лежит внутри окружности (рис. 161), тогда $\hat{B}+\hat{D}=2d$ (по условию теоремы), $\hat{B}+\hat{E}=2d$ (по доказанному). Отсюда $\hat{D}=\hat{E}$, что невозможно (внешний угол D треугольника EDC не может быть конгруэнтным его внутреннему углу E). Значит, допущение неверно. Следовательно, точка D не может занять положение внутри построенной окружности.

Аналогично доказывается, что вершина D не может лежать и вне этой окружности (рис. 162).

Итак, вершина D не может лежать ни внутри построенной окружности, ни вне ее. Следовательно, точка D должна лежать на этой окружности, т. е. около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Следствие 1. *Около любого прямоугольника можно описать окружность.*

Следствие 2. *Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.*

Необходимое и достаточное условие того, что четырехугольник является описанным, формулируется так.

Теорема 3. *Для того чтобы четырехугольник был описанным, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его противоположных сторон равнялись между собой.*

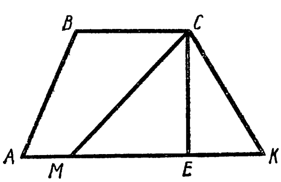


Рис. 163

Примеры. 1. От участка земли в форме трапеции нужно отделить треугольный участок так, чтобы площадь его была равна площади оставшейся части. Как это сделать?

Решение. Пусть участок имеет форму трапеции $ABCK$ (рис. 163) и $S_{ABCM}=S_{MCK}$.

Обозначим $|CE|=h$, $|BC|=b$, $|AK|=a$, $|MK|=x$. Тогда

$$S_{MCK}=\frac{1}{2}xh, \quad S_{ABCK}=\frac{a+b}{2}h;$$

но $S_{ABCM}=S_{MCK}$, откуда $S_{MCK}=\frac{1}{2}S_{ABCK}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot h, \text{ откуда } x=\frac{a+b}{2}; \ |MK|=\frac{a+b}{2}.$$

Ответ. На большем основании трапеции нужно отложить отрезок MK, длина которого равна длине средней линии трапеции.

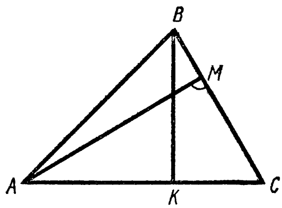


Рис. 164

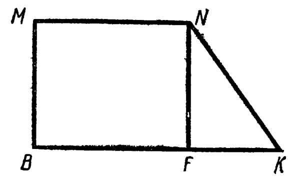


Рис. 165

2. Найти высоту BK треугольника ABC (рис. 164), если $|BC|=6$ см, $|AC|=10$ см, $[AM]\perp[BC]$, $|AM|=5$ см.

Решение. Имеем:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\,|AM|\cdot|BC|;\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\text{ см}\cdot 6\text{ см}=15\text{ см}^2;$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|BK|\,|AC|;\ 15=\frac{1}{2}|BK|\cdot 10;\ |BK|=3\text{ см}.$$

3. Дано: $[BK]\parallel[MN]$, $\widehat{B}=90^\circ$ (рис. 165) $[BM]$ не параллелен $[KN]$; $|MN|=2{,}6$ см; $|BK|=4{,}6$ см; $\widehat{K}=45^\circ$.

Найти S_{BMNK}.

Решение. а) $[NF]\perp[BK]$, а значит, ΔFKN прямоугольный;

б) $\widehat{K}=45^\circ$, откуда $\widehat{FNK}=45^\circ$; $\widehat{K}=\widehat{FNK}$, следовательно, $|NF|=|FK|$,

в) $[NF]\perp[BK]$ $[BM]\perp[BK]$, а значит, $[BM]\parallel[NF]$, $[MN]\parallel[BF]$, а значит, $[MN]\cong[BF]$ и $|MN|=|BF|$

г) $|FK|=|BK|-|BF|$; $|FK|=4{,}6-2{,}6=2$ см, а тогда $|NF|=2$ см;

д) $S_{BMNK}=\dfrac{|MN|+|BK|}{2}\cdot|NF|$; $S_{BMNK}=\dfrac{2{,}6+4{,}6}{2}\cdot 2=$ $=7{,}2$ см^2.

Вопросы для самопроверки

1. Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник?

2. Можно ли через точку, взятую во внутренней области многоугольника, провести прямую, не пересекающую его сторон?

3. Можно ли провести прямую, не пересекающую сторон данного многоугольника? В какой области многоугольника (внутренней или внешней) расположена такая прямая?

4. На сколько треугольников разобьется выпуклый четырехугольник, пятиугольник, n-угольник всеми диагоналями, исходящими из одной вершины?

5. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины, выпуклого n-угольника? Сколько всего диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

6. Какие тройки основных элементов определяют треугольник?

7. Какая сторона является наибольшей в тупоугольном треугольнике?

8. Может ли быть только один из углов параллелограмма прямым?

9. Будет ли выпуклый четырехугольник параллелограммом, если: а) две противоположные стороны его равны; б) две противоположные стороны его параллельны; в) диагонали равны; г) диагонали точкой их пересечения делятся пополам; д) углы, прилежащие к каждой из его сторон, в сумме составляют развернутый угол?

10. Могут ли два заданных неравных острых угла быть углами одного и того же параллелограмма?

11. Сколько различных перемещений (включая тождественное) отображают прямоугольник сам на себя?

12. Даны два конгруэнтных прямоугольника. Сколькими различными способами один из них может быть отображен на другой?

13. Сколько перемещений (включая и тождественное) отображают ромб на себя?

14. Какие свойства ромба следуют из существования у него: а) осей симметрии; б) центра симметрии?

15. Могут ли неконгруэнтные ромбы иметь равные периметры? Может ли длина стороны ромба равняться половине его диагонали? Может ли диагональ ромба быть: 1) перпендикулярной его стороне; 2) равной его стороне?

16. Сколько элементов определяют трапецию?

17. Может ли площадь параллелограмма равняться произведению его основания на диагональ?

Упражнения

1. В треугольнике BAC $|AB|=|BC|$, $\widehat{BAC}=50°$. Через вершину B проведен отрезок BD, $D\subset(AC)$, так, что $\widehat{ABD}=\widehat{ADB}$. Найдите углы треугольника BDC и запишите стороны треугольника BDC в порядке их возрастания.

2. Постройте равнобедренный треугольник с основанием 4 см, два угла которого равны 80 и 50°.

3. Периметр параллелограмма равен 122 см. Одна из его сторон больше другой на 25 см. Найдите стороны параллелограмма.

4. Биссектриса AE угла параллелограмма $ABCD$ отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник с углом при основании, равным 35°. Найдите углы параллелограмма.

5. Постройте параллелограмм по двум его диагоналям, равным 12 и 8 см, и углу между ними, равному 50°. Из вершины острого угла проведите его меньшую высоту и измерьте ее.

6. Через основание биссектрисы треугольника проведены прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что стороны полученного четырехугольника равны.

7. Через точку M, взятую на биссектрисе AK треугольника ABC, проведены прямые MP и MS, соответственно параллельные сторонам AB и AC; $P\in[AC]$, $S\in[AB]$. Докажите, что стороны четырехугольника $APMS$ равны.

8. Отметьте три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм, считая две из этих точек его вершинами, а третью — точкой пересечения диагоналей.

9. Даны три точки A, B, C; $|AB|=4$ см, $|BC|=5$ см, $|AC|=6$см. Найдите периметр параллелограмма, вершины которого находятся в этих точках.

10. Постройте ромб по стороне 5 см и прилежащему к ней углу в 30°.

11. Высоты, проведенные из вершины ромба, образуют угол в 30°. Вычислите величины углов ромба.

12. Сторона квадрата равна 10 см. Середины его сторон последовательно соединены. Определите вид полученного четырехугольника и найдите длины его диагоналей.

13. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна ее боковой стороне и образует с основанием угол в 15°. Вычислите углы трапеции.

14. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на два отрезка, длины которых относятся как 3:8. Найдите основания трапеции, если средняя линия трапеции равна 22 см.

15. Докажите, что любой отрезок, концы которого лежат на основаниях трапеции, делится ее средней линией на два конгруэнтных отрезка.

16. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия этой трапеции равна ее высоте

17. Площадь параллелограмма равна 24 см^2, каждая из его сторон равна 6 см. Найдите расстояние между противоположными сторонами параллелограмма; постройте этот параллелограмм.

18. Одна из сторон треугольника равна 6 см, высота, проведенная к ней, равна 12 см. Вычислите высоту этого треугольника, проведенную к другой его стороне, равной 16 см.

19. В треугольнике ABC найдите отношение высот, проведенных из вершин B и C, если $|AB|=3|AC|$.

20. Через вершины произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям. Найдите отношение площади четырехугольника, образованного этими прямыми, к площади заданного четырехугольника.

21. Боковая сторона трапеции, равная 20 см, образует с меньшим основанием трапеции угол в 150°. Вычислите площадь трапеции, если основания ее равны 12 и 30 см.

22. Основания трапеции равны 10 и 20 см. Диагональ трапеции отсекает от нее равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является меньшее основание трапеции. Вычислите площадь этой трапеции.

23. Докажите, что биссектрисы двух соответственных углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей, параллельны между собой.

24. Сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 280°. Найдите величину каждого из этих углов.

25. Вычислите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен 40°.

26. В треугольнике ABC, в котором $\widehat{A}=60°$, $\widehat{B}=80°$, проведена биссектрисса AD угла A ($D\in[BC]$). Найдите углы треугольника ACD.

27. В равнобедренном треугольнике проведена высота к его боковой стороне. Вычислите угол, образованный этой высотой и второй боковой стороной, если угол при основании равнобедренного треугольника равен 40°.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ

1. Сложение векторов. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Произвольную точку X вектор $\vec{a}$ отображает на точку Y (это записывается так: $Y=\vec{a}(X)$, а вектор $\vec{b}$ отображает точку Y на точку Z, т. е. $Z=\vec{b}(Y)=\vec{b}(\vec{a}(X))$ (рис. 166).

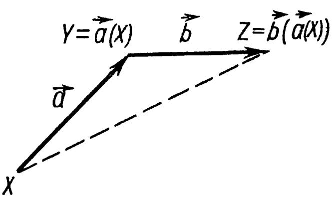


Рис. 166

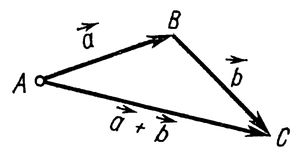


Рис. 167

Следовательно, в результате последовательного выполнения отображения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точка X отображена на точку Z.

Однако можно задать такое одно отображение, которое точку X сразу же отображало бы на точку Z. Можно доказать, что это отображение также есть вектор. Все точки плоскости оно отображает в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Мы принимаем этот вектор за сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Он обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется отображение плоскости на себя, являющееся результатом последовательного выполнения отображений $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Покажем теперь, как при помощи геометрических построений можно получить вектор $\vec{a}+\vec{b}$, если заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем произвольную точку A. Вектор $\vec{a}$ отображает ее на точку $B=\vec{a}(A)$, т. е. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Отобразим при помощи вектора $\vec{b}$ точку B на точку $C=\vec{b}(\vec{B})$, т. е.

$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 167). Действительно, так как $\vec{a}(A)=B$, $\vec{b}(B)=C$, то $(\vec{a}+\vec{b})(A)=C$.

Следовательно, для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{XY})$, где точки A, B, X и Y произвольно расположены на плоскости, надо вектор $\overrightarrow{XY}$ отложить от точки B (рис. 168). Получим точку C. Затем соединить точку C с точкой A. Вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Действительно,

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC};$$

такое построение называется *«правилом треугольника»*.

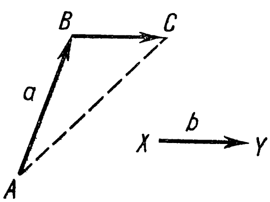


Рис. 168

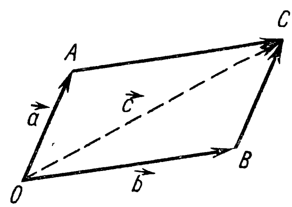


Рис. 169

Докажем, что для суммы векторов справедливо переместительное свойство.

Теорема 1. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от одной точки O. Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ и точки A, B, O не лежат на одной прямой (рис. 169).

Отобразим при помощи вектора $\vec{b}$ точку A на точку $C=\vec{b}(A)$.

Получим параллелограмм $OACB$. Тогда (объясните почему)

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC},\quad \vec{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$$

и по правилу треугольника

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},\quad \vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

откуда следует, что

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Доказанное свойство позволяет выполнять сложение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по так называемому «*правилу параллелограмма*». Это правило проиллюстрировано на рис. 169, где $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. (Случай, когда точки A, B, O расположены на одной прямой, будет рассмотрен в следующем пункте.)

Используя правило параллелограмма в случае сложения двух векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$, можно либо отложить вектор $\overrightarrow{XY}$ от точки B, либо вектор $\overrightarrow{AB}$ от точки Y.

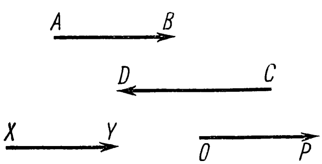


Рис. 170

2. Коллинеарные векторы. В зависимости от направлений векторы делятся на коллинеарные и неколлинеарные.

Векторы называются коллинеарными, если их направления совпадают или противоположны. Геометрически это означает, что направленные отрезки, изображающие вектор, лежат на параллельных прямых. Так, на рис. 170 векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{OP}$ — коллинеарны, при этом направления векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{XY}$ совпадают, а направление вектора $\overrightarrow{CD}$ им противоположно.

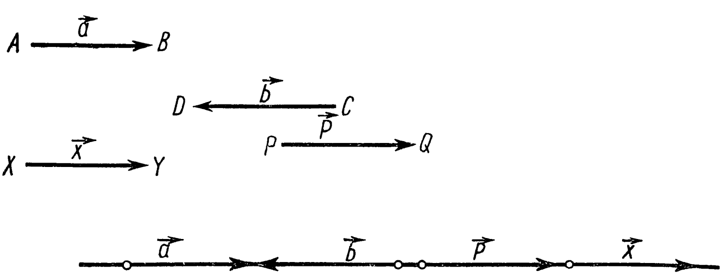


Рис. 171

Так как любой вектор можно отложить от любой точки плоскости, то коллинеарные векторы могут быть изображены на одной прямой (рис. 171).

Ясно, что изобразить векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ и $\vec{x}$ на прямой a можно бесконечным числом способов.

Пусть дан вектор $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$. Введем на прямой OE координаты. Примем точку O за нулевую, направление от O к E за положительное и расстояние $e=|OE|$ за единицу длины (рис. 172), т. е. $|\vec{e}|=1$. Каждая точка A координатной прямой OE характеризуется абсциссой x_A. Расстояние между точками A и B этой прямой будет равно $|AB|=|x_B-x_A||\vec{e}|$.

Два направленных отрезка AB и CD прямой OE являются изображениями одного и того же вектора, если

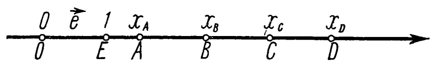


Рис. 172

Рис. 173

имеют одну и ту же длину и одно и то же направление, т. е. если разности x_B-x_A и x_D-x_C равны по абсолютной величине и по знаку. Следовательно, если точки A, B, C, D лежат на прямой OE, равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ равносильно равенству

$$x_B-x_A=x_D-x_C.$$

В пункте 1 доказано свойство переместительности для неколлинеарных векторов. Докажем это свойство для коллинеарных векторов.

Построим на координатной прямой равные векторы $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ (рис. 173).

Будем геометрически складывать два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ различными способами (рис. 173):

1) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$,

2) $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{a}=\overrightarrow{DN}$, $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AN}$.

Чтобы установить равенство $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, надо доказать, что точки C и N совпадают, т. е. что $x_C=x_N$.

Воспользуемся координатной записью равенства двух векторов; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DN}$ означает, что

$$x_B - x_A = x_N - x_D. \qquad (1)$$

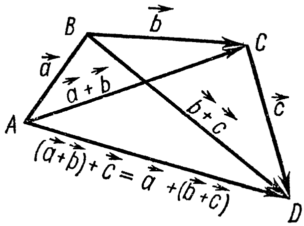


Рис. 174

Равенство $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ означает, что

$$x_C - x_B = x_D - x_A. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2), получаем

$$x_C = x_N,$$

а это и означает, что точки C и N совпадают.

Теорема 2. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *выполняется равенство* $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Доказательство. Любые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ могут быть записаны в виде $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$* (рис. 174). Из определения сложения векторов вытекает, что

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}, \quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$
$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD}, \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Мы видим, что

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),$$

т. е. сложение векторов обладает свойством сочетательности.

3. Противоположный вектор. Вычитание векторов. Мы знаем, что любое перемещение является обратимым отображением. Обратное к нему отображение — тоже перемещение. Производя последовательно перемещение F и обратное перемещение L, получаем тождественное отображение плоскости. Если отображение есть вектор, то обратное к нему отображение называют *противоположным вектором*. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$. Вектор $-\vec{a}$ противоположен вектору $\vec{a}$, если $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

* Направленные отрезки на рисунке могут занимать и другие положения, однако это не влияет на доказательство.

Из определения сложения векторов вытекает, что всегда $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (это равенство называют *законом поглощения* нулевого вектора). В самом деле, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, то $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Теперь введем операцию вычитания векторов. Пусть

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}. \tag{1}$$

Рассмотрим вектор $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ и докажем, что он удовлетворяет равенству (1). В самом деле,

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{a}+(-\vec{c})=\vec{a}+(\vec{b}+(-\vec{b}))=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Вектор $\vec{c}$ называется *разностью векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}-\vec{b}$.

Из сказанного вытекает правило: для построения вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ следует построить вектор $\vec{a}+(-\vec{b})$. Если

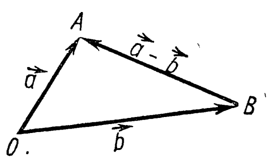


Рис. 175

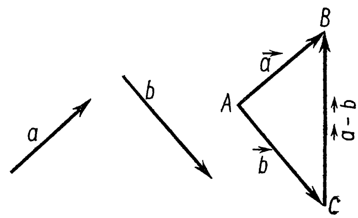


Рис. 176

векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от одной и той же точки O (рис. 175), то имеем

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}.$$

Но сумма векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BO}$ есть вектор $\overrightarrow{BA}$, поэтому

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Найдем разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рис. 176. Возьмем на плоскости произвольную точку A и отложим эти векторы от этой точки. Тогда на основании нашего правила имеем:

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.$$

4. Умножение вектора на число. *Произведением вектора* $\vec{a}$ $(|\vec{a}| \neq 0)$ *на число* x *называется вектор, имеющий направление вектора* $\vec{a}$, *если* $x > 0$, *и противоположное направление, если* $x < 0$. *Длина этого вектора равна произведению длины вектора* $\vec{a}$ *на модуль числа* x.

Будем обозначать произведение вектора $\vec{a}$ на число x через $x\vec{a}$ (числовой множитель будем писать слева). По определению $|x\vec{a}| = |x||\vec{a}|$. Отсюда вытекает, что при любом векторе $\vec{a}$ имеем $0\vec{a} = \vec{0}$ и при любом числе x имеем

$$x\vec{0} = \vec{0}.$$

Умножением вектора на число мы фактически пользовались уже, когда вводили координаты точек на прямой. Теперь, пользуясь векторным языком, можно сказать, что, выбрав единичный вектор $\vec{e}$, мы геометрически изображаем число x вектором $x\vec{e}$, равным произведению единичного вектора на число x.

5. Основные законы векторной алгебры. Для операции сложения векторов мы доказали три закона.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переместительный закон.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ — сочетательный закон.
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ — закон поглощения нулевого вектора.

В случае умножения векторов на число мы будем пользоваться еще четырьмя законами.

4. $(xy)\vec{a} = x(y\vec{a})$ — сочетательный закон.
5. $x\vec{a} + y\vec{a} = (x + y)\vec{a}$ — первый распределительный закон.
6. $x\vec{a} + x\vec{b} = x(\vec{a} + \vec{b})$ — второй распределительный закон.
7. $0\vec{a} = x\vec{0} = \vec{0}$ — закон поглощения нуля и нулевого вектора.

Обратим внимание на отсутствие переместительного закона умножения вектора на число. Это произошло из-за того, что мы условились писать числовой множитель всегда первым. Закон поглощения нуля и нулевого вектора доказан в предыдущем параграфе.

Докажем теперь остальные законы.

Сочетательный закон. Предположим сначала, что $\vec{a} \neq \vec{0}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Докажем равенство векторов $(xy)\vec{a}$ и $x(y\vec{a})$. Достаточно доказать, что они имеют одно и то же направление и одну и ту же длину. Равенство их длин вытекает из следующих выкладок:

$$|(xy)\vec{a}| = |xy||\vec{a}| = |x||y||\vec{a}|,$$
$$|x(y\vec{a})| = |x||y\vec{a}| = |x||y||\vec{a}|.$$

Эти векторы имеют одно и то же направление. Это следует из того, что они оба имеют направление вектора $\vec{a}$,

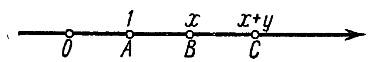


Рис. 177

если $xy > 0$, и направление, противоположное вектору $\vec{a}$, если $xy < 0$.

Если же $\vec{a} = \vec{0}$ или $x = 0$, или $y = 0$, то $(xy)\vec{a} = \vec{0}$ и $x(y\vec{a}) = \vec{0}$.

Первый распределительный закон. Будем считать, что $\vec{a} \neq \vec{0}$. Отложим вектор $\vec{a}$ от произвольной точки O и введем на прямой OA координаты (рис. 177), считая начальной — точку O, положительным направлением — направление от O к A и единицей длины — длину $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}|$. Сложим векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{a}$ по правилу треугольника:

$$x\vec{a} = \overrightarrow{OB},\quad y\vec{a} = \overrightarrow{BC},\quad x\vec{a} + y\vec{a} = \overrightarrow{OC}.$$

Найдем координаты точек B и C: $x_B = x$, $x_C - x_B = y$, $x_C = x + y$ (рис. 177). Из последнего равенства вытекает, что

$$x\vec{a} + y\vec{a} = \overrightarrow{OC} = (x + y)\vec{a}.$$

Остается рассмотреть случай $a = \vec{0}$. В этом случае

$$x\vec{0} + y\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} = (x + y)\vec{0}.$$

В т о р о й р а с п р е д е л и т е л ь н ы й з а к о н. Докажем его для натурального множителя x:

$$x\vec{a}+x\vec{b}=(\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{x\text{ раз}})+(\underbrace{\vec{b}+\vec{b}+\ldots+\vec{b}}_{x\text{ раз}})=$$

$$=\underbrace{(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{b})+\ldots+(\vec{a}+\vec{b})}_{x\text{ раз}}=x(\vec{a}+\vec{b}).$$

Остается только проверить, какой смысл имеет знак «—» в записи противоположного вектора.

Мы обозначим противоположный вектор через $-\vec{a}$. Но известно, что $(-1)\vec{a}$ есть вектор $-\vec{a}$, противоположный вектору $\vec{a}$. Легко проверить (проверьте!), что $-\vec{a}+(-\vec{b})=$ $=-(\vec{a}+\vec{b})$, Отсюда следует, что $(-1)\vec{a}+(-1)\vec{b}=$ $=(-1)(\vec{a}+\vec{b})$ и $\vec{a}+(-1)\vec{a}=\vec{0}$.

П р и м е р ы. 1. Дан пятиугольник $ABCDE$. Выразить через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EC}$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC});\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.$$

Векторы $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EC}$ выражаются через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ аналогичными способами.

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ изображают векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$. Сколько различных выражений получится?

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a};\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}.$$

Мы получили три различных выражения, так как $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Вопросы для самопроверки

1. Сколько существует различных параллельных переносов, которые какую-либо из вершин параллелограмма $ABCD$ отображают на: а) смежную; б) одну из вершин этого параллелограмма?

2. Определяется ли вектор заданием: а) своей длины; б) направления? Чем задается вектор, отличный от нулевого? Какое отображение плоскости на себя называется параллельным переносом?

3. Как задается параллельный перенос?
4. Какое отображение плоскости на себя называется вектором?
5. Что значит указать направление вектора?
6. Что называется длиной вектора?
7. При каких значениях числа n возможны соотношения: а) $|n\vec{c}| < |\vec{c}|$; б) $|n\vec{c}| > |\vec{c}|$; в) $|n\vec{c} = |\vec{c}|$, где $\vec{c}$—ненулевой вектор?
8. При каких условиях $a\vec{x} = \vec{0}$?

Упражнения

1. Дана пара точек (X, Y). Постройте еще три пары точек, задающих тот же вектор, что и пара точек (X, Y).

2. На плоскости даны четыре точки A, B, C, D, такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько различных векторов могут определить эти точки, взятые попарно? Выполните чертеж.

3. Дан ромб $KMPN$. Сколько различных векторов задают его вершины K, M, P и точка O пересечения его диагоналей. Запишите их.

4. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Сколько различных векторов задают ее вершины?

5. Дан вектор. Назовите какие-либо фигуры, которые данный вектор отображает самих на себя.

6. Для каких трех параллельных переносов их последовательное выполнение дает тождественное отображение?

7. Дан параллелограмм $EGKL$. Найдите сумму векторов а) $\overrightarrow{KG}$ и $\overrightarrow{EL}$; б) $\overrightarrow{GE}$ и $\overrightarrow{GK}$; в) $\overrightarrow{GK}$ и $\overrightarrow{EL}$.

8. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CO}$; г) $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$.

9. Для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенсгво $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{b}|$?

10. Для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$?

11. Может ли длина вектора $\vec{a} + \vec{b}$ быть меньше, чем длина каждого из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (отрезки, изображающие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, не параллельны)? Ответ обосновать?

12. Задайте гри неколлинеарных вектора $\vec{a} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$. Постройте вектор $\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$.

13. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразиге векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

14. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка O—точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

15. Даны два неколлинеарных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте вектор $3\vec{m} + 2\vec{n}$.

16. В треугольнике ABC точки M и K — середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$.

17. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон C и A соответственно. Выразите вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

18. Упростите выражение $2(\vec{b}-\vec{a})+3(\vec{a}-2\vec{b})$. Поясните, какими законами действий с векторами вы пользовались.

19. Дано $\vec{n}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ вектор $-\vec{a}+2\vec{b}$.

20. В трапеции $ABCD$ основание AD в n раз больше основания BC. Выразите вектор $\overrightarrow{OD}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, где O — произвольная точка плоскости.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ПОДОБИЕ

§ 1. ПОДОБИЕ И ГОМОТЕТИЯ

1. Подобные фигуры. Из всевозможных геометрических фигур мы уже умеем выделять конгруэнтные фигуры. Их можно отобразить одну на другую с сохранением расстояний между соответствующими точками. Рассмотрим две фигуры, являющиеся изображениями карты Советского Союза в различных масштабах. Эти фигуры имеют одинаковую форму, но разные размеры. Их можно отобразить одну на другую так, что, во-первых, каждой точке меньшей фигуры соответствует единственная точка большей фигуры, и наоборот, и, во-вторых, отношение расстояний между соответствующими точками фигур постоянно и равно отношению масштабов.

Фигуры, которые можно отобразить одну на другую с сохранением отношения расстояний между соответствующими точками, называются *подобными*, а число $k > 0$, равное отношению этих расстояний, называется *коэффициентом подобия*.

Если фигура Φ_1 подобна фигуре Φ с коэффициентом подобия k, то пишут $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi$.

Рассмотрим свойства подобных фигур.

1. *Каждая фигура подобна самой себе с коэффициентом подобия* $k = 1$, т. е. $\Phi \overset{1}{\backsim} \Phi$.

2. *Если фигура Φ_1 подобна фигуре Φ с коэффициентом подобия k, то фигура Φ подобна фигуре Φ_1 с коэффициентом подобия $k' = 1/k$.*

Если $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi$, *то* $\Phi \overset{1/k}{\backsim} \Phi_1$.

3. *Если фигура Φ_1 подобна Φ с коэффициентом подобия k_1, а фигура Φ_2 подобна фигуре фигуре Φ_1 с коэффициентом подобия k_2, то фигура Φ_2 подобна фигуре Φ с коэффициентом подобия $k = k_1k_2$, если $\Phi_1 \overset{k_1}{\backsim} \Phi$ и $\Phi_2 \overset{k_2}{\backsim} \Phi_1$, то* $\Phi_2 \overset{k_1k_2}{\backsim} \Phi_1$.

4. *Конгруэнтные фигуры подобны с коэффициентом подобия* $k = 1$, т. е.

если $\Phi_1 \cong \Phi$, то $\Phi_1 \overset{1}{\backsim} \Phi$.

Из свойства 4 следует, что конгруэнтные фугуры так же обладают перечисленными выше свойствами:

1) $\Phi \cong \Phi$;

2) если $\Phi_1 \cong \Phi$, то $\Phi \cong \Phi_1$;

3) если $\Phi_1 \cong \Phi$ и $\Phi_2 \cong \Phi_1$, то $\Phi_2 \cong \Phi$.

2. **Гомотетия и ее свойства.** Мы уже знаем, что при перемещениях расстояния между соответствующими точками сохраняются. Однако это выполняется не при любых

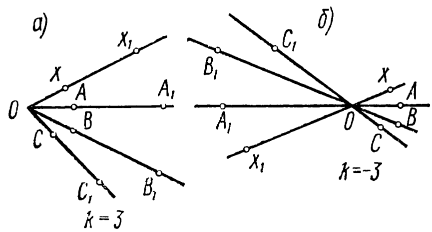


Рис. 178

отображениях плоскости на себя. Возьмем на плоскости произвольную точку O. Проведем через нее пучок прямых (рис. 178, *а*, *б*). Каждой точке X, принадлежащей плоскости, можно поставить в соответствие точку X_1, определяемую условием $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$ (на рис. 178, *а* $k=3$, а на рис. 178, *б* $k=-3$). Из рис. 178 видно, что при этом расстояние между соответствующими точками не сохраняется.

Отображения такого типа имеют специальное название — г о м о т е т и я, а точка O называется *центром гомотетии*.

Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором образом произвольной точки X является точка X_1, определяемая из условия $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k обозначают H_0^k. Пользуясь этим обозначением, можно определение гомотетии записать так:

$$H_0^k(X) = X_1; \text{ если } \overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}.$$

Иногда гомотетию обозначают просто буквой H.

Отметим два важных частных случая гомотетии. При гомотетии с коэффициентом $k=1$ каждая точка отображается сама на себя. Значит, тождественное отображение можно рассматривать как гомотетию с любым центром и коэффициентом $k=1$.

При гомотетии с центром O и коэффициентом $k=-1$ каждая точка X отобразится на точку X_1, для которой $\overrightarrow{OX_1}=-\overrightarrow{OX}$, т. е. на точку, центрально симметричную точке X. Значит, гомотетия с коэффициентом -1 есть центральная симметрия:

$$H_0^{-1}=Z_0.$$

Само определение гомотетии подсказывает нам возможность построения фигуры, гомотетичной данной. Так, на рис. 179 пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ гомотетичен пятиугольнику $ABCDE$ с коэффициентом гомотетии $k=-2$.

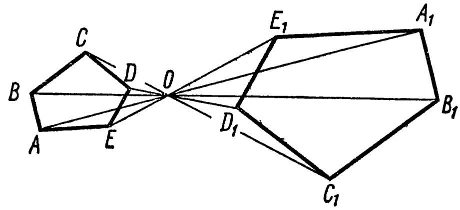


Рис. 179

Рассмотрим наиболее важные свойства гомотетии.

1. *Центр гомотетии отображается сам на себя.* Действительно, при умножении нулевого вектора $\overrightarrow{00}$ на любое число n получится также нулевой вектор $\overrightarrow{00}=$ $=k\overrightarrow{00}$.

2. *Если $k>0$, то точки X и $X_1=H(X)$ лежат на прямой OX по одну сторону от центра гомотетии.* В этом случае векторы $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OX_1}=kOX$ сонаправлены (см. рис. 178, *а*).

Если $k<0$, то точки X и $X_1=H(X)$ лежат на прямой OX по разные стороны от центра гомотетии. В этом случае векторы $\overrightarrow{OX_1}$ и $\overrightarrow{OX}$ противоположно направлены (см. рис. 178, *б*).

3. **Теорема 1.** *Если при гомотетии с коэффициентом k точки X и Y отображаются на точки X_1 и Y_1 то*

$$\overrightarrow{X_1Y_1}=\overrightarrow{kXY}.$$

Доказательство. По определению гомотетии $\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY_1}=k\overrightarrow{OY}$ (рис. 180). Найдем разность векторов $\overrightarrow{OY_1}$ и $\overrightarrow{OX_1}$:

$$\overrightarrow{X_1Y_1}=\overrightarrow{OY_1}-\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OY}-k\overrightarrow{OX}=k(\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX})=k\overrightarrow{XY}.$$

Следствие 1. *При гомотетии с коэффициентом k все расстояния между соответствующими точками умножаются на $|k|$, т. е.*

$$|X_1Y_1|=|k||XY|.$$

Следствие 2. *Гомотетичные фигуры подобны.* При гомотетии с коэффициентом k из фигуры Ф получается фигура $Ф_1$, подобная Ф, с коэффициентом подобия $|k|$. Для дока-

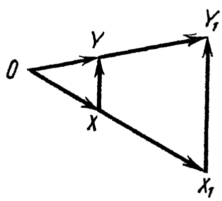


Рис. 180

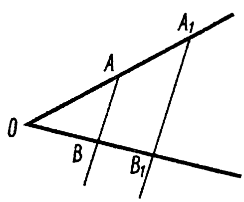


Рис. 181

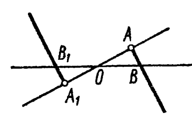


Рис. 182

зательства следует вспомнить определение подобных фигур и воспользоваться следствием 1.

Следствие 3. *При гомотетии с коэффициентом $k>0$ каждый луч отображается на сонаправленный с ним луч* (рис. 181). *При гомотетии с коэффициентом $k<0$ каждый луч отображается на противоположно направленный с ним луч* (рис. 182).

Доказательство. Из равенства $\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{AB}$ следует, что векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, а это значит, что лучи AB и A_1B_1 имеют либо одинаковое, либо противоположное направление в зависимости от знака коэффициента k.

Из следствия 3 вытекает, что гомотетия отображает прямую на параллельную ей прямую, отрезок — на параллельный ему отрезок, угол — на конгруэнтный ему угол (углы между направлениями).

3. Пропорциональные отрезки. Отрезки называются *пропорциональными*, если пропорциональны их длины.

Теорема 2. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки.*

Доказательство. Рассмотрим гомотетию с центром O и парой соответствующих точек $A \longrightarrow A_1$ (рис. 183). В этой гомотетии лучи OA и OB отображаются сами на себя. Точка B отображается на точку B_1, так как прямая AB отображается на параллельную ей прямую A_1B_1 (следствие 3).

Но при гомотетии с коэффициентом k расстояние между точками умножается на $|k|$, значит,

$$|OA_1| = |k| \cdot |OA| \text{ и } |OB_1| = |k| \cdot |OB|,$$

откуда

$$|OA_1| : |OA| = |OB_1| : |OB|.$$

Следствие. *Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от него треугольник, стороны которого пропорциональны сторонам данного треугольника.*

Верна и обратная теорема.

Теорема 3. *Если отрезки OA_1 и OB_1 пропорциональны отрезкам OA и OB и лежат соответственно на лучах OA и OB, то прямые A_1B_1 и AB параллельны* (см. рис. 183).

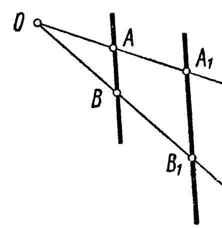


Рис. 183

Доказательство. Пусть $|OA_1| : |OA| = |OB_1| : |OB| = k$; $A_1 \in [OA)$; $B_1 \in [OB)$. Так как точки A и A_1 лежат на одном луче с началом O, то векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$ сонаправлены. Кроме того, по условию $|OA_1| = k|OA|$. Значит, по определению произведения вектора на число будем иметь $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$. Аналогично, $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{OB}$. Следовательно, точки A и B при гомотетии с центром O и коэффициентом k отражаются на точки A_1 и B_1, откуда $(A_1B_1) \parallel (AB)$.

Следствие. *Если прямая DH при пересечении двух сторон треугольника ABC делит их на отрезки так, что* $|CD| : |CA| = |CH| : |CB|$, то эта прямая параллельная третьей стороне треугольника (рис. 184).

4. Построение подобных фигур. Мы знаем, что гомотетичные фигуры подобны. Напомним, что для построения гомотетичных точек достаточно задать центр гомотетии и одну пару соответственных точек $A \longrightarrow A_1$, лежащих на одной прямой с центром O (рис. 185). Тогда для любой точки плоскости можно построить ее образ. Действительно, пусть дана произвольная точка B. Проведем прямые OB и AB. Затем проведем прямую A_1B_1, параллельную прямой AB. Тогда точка $B_1 = (A_1B_1) \cap (OB)$ будет образом точки B в заданной гомотетии (так как прямая AB в этой гомотетии должна отобразиться на параллельную ей прямую). Но при построении подобных фигур

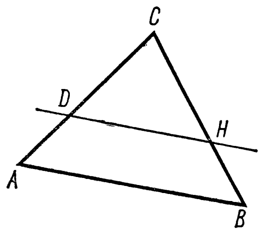


Рис. 184

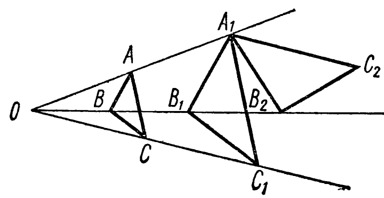


Рис. 185

не всегда можно воспользоваться гомотетией, так как не все подобные фигуры гомотетичны.

На рис. 185 изображены три треугольника: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_1B_2C_2$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, а треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_2$ конгруэнтны. Поэтому треугольники ABC и $A_1B_2C_2$ подобны. Но они не гомотетичны, так как прямые AA_1, BB_2, CC_2, не проходят через одну точку. Следовательно, две подобные фигуры могут быть и не гомотетичны.

А нельзя ли всегда построение подобных фигур свести к построению гомотетичных фигур?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4. *Если две фигуры подобны, то существует третья фигура, гомотетичная первой и конгруэнтная второй.*

Доказательство. Пусть фигуры Φ и Φ_2 подобны с коэффициентом подобия k (рис. 186). Значит, при отображении фигуры Φ на фигуру Φ_2 расстояния между точками фигуры Φ умножаются на k.

Построим фигуру Φ_1, гомотетичную фигуре Φ, с коэффициентом гомотетии, равным коэффициенту подобия k. Тогда при отображении фигуры Φ на фигуру Φ_1 расстояния между точками фигуры Φ тоже умножаются на k. Поэтому фигуры Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны.

Таким образом, построенная фигура Φ_1 гомотетична фигуре Φ и конгруэнтна фигуре Φ_2.

Следовательно, если две конгруэнтные фигуры можно отобразить одну на другую с помощью перемещения или последовательного выполнения перемещений, то две подобные фигуры можно отобразить одну на другую с помощью последовательного выполнения гомотетии и перемещения. Так, например, на рис. 185 треугольник $A_1B_2C_2$

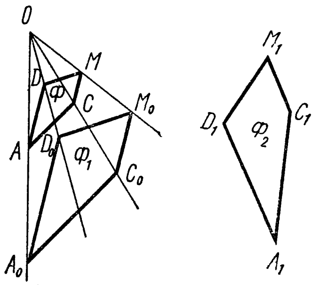


Рис. 186

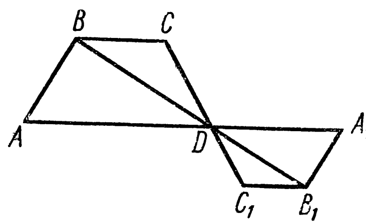


Рис. 187

получен из треугольника ABC последовательным выполнением гомотетии ($\triangle A_1B_1C_1$) и поворота вокруг точки A_1.

Примеры. 1. Дана трапеция $ABCD$ (рис. 187). Построить фигуру, гомотетичную данной относительно центра D и с коэффициентом гомотетии $k=-2/3$.

Решение. Примем точку D за центр гомотетии. Проведем через точку D $[AD)$, $[BD)$ и $[CD)$. Найдем на луче точку C_1, используя свойство гомотетии $|DC_1|=\frac{2}{3}|CD|$, тогда:

$$(B_1C_1)\parallel(BC);\quad (B_1C_1)\cap[BD)=B_1,$$
$$(A_1B_1)\parallel(AB);\quad (A_1B_1)\cap[AD)=A_1.$$

Соединив точки D, C_1, B_1, A_1 отрезками, мы получим искомую трапецию.

2. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к его основанию, как 5:7. Периметр этого треугольника равен 85 см. Вычислить длины сторон треугольника.

Решение. Имеем $\frac{|AB|}{5}=\frac{|AC|}{7}=\frac{|BC|}{5}=k$, следовательно,

$$|AB|=|BC|=5k;\quad |AC|=7k;$$
$$5k+5k+7k=85;\quad 17k=85;$$
$$|AB|=|BC|=25\text{ см};\quad |AC|=35\text{ см}.$$

§ 2. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. Признаки подобия треугольников. Рассмотрим признаки подобия треугольников.

Первый признак подобия треугольников (по трем сторонам).

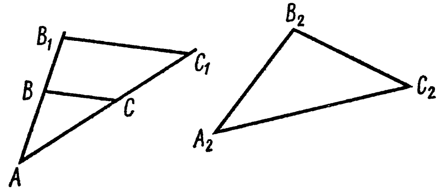


Рис. 188

Теорема 1. *Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть даны $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$, стороны которых пропорциональны. Рассмотрим гомотетию с коэффициентом k, равным коэффициенту пропорциональности сторон данных треугольников. (Центр O этой гомотетии можно выбрать произвольно.) Эта гомотетия отобразит треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 188), при этом

$$|A_1B_1|=k|AB|, \quad |B_1C_1|=k|BC|, \quad |A_1C_1|=k|AC|.$$

Но

$$|A_2B_2|=k|AB|, \quad |B_2C_2|=k|BC|, \quad |A_2C_2|=k|AC|$$

по условию; значит, $\triangle A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$ (по трем сторонам).

Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — гомотетичны, а треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — конгруэнтны. Гомотетичные же фигуры подобны, значит, $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \triangle ABC$; конгруэнтные фигуры тоже подобны, значит, $\triangle A_2B_2C_2 \overset{1}{\sim} A_1B_1C_1$. Тогда по свойству 3 подобных фигур имеем:

$$\triangle A_2B_2C_2 \overset{k}{\sim} \triangle ABC.$$

Аналогично доказываются два других признака подобия треугольников. При этом за центр гомотетии можно принять любую точку плоскости (на рис. 189 центр гомотетии — точка O).

Второй признак подобия треугольников (по двум углам).

Теорема 2. *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Третий признак подобия треугольников (по двум сторонам и углу).

Теорема 3. *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника*

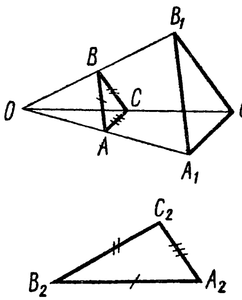


Рис. 189

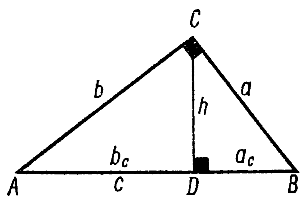


Рис. 190

и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

2. Теорема Пифагора. Пользуясь признаками подобия треугольников, можно доказать одну из центральных теорем планиметрии — теорему Пифагора.

Теорема 4. *Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.*

Доказательство. Проведем в прямоугольном треугольнике ABC высоту CD, равную h (рис. 190). Треугольники ADC и ACB подобны, так как $\angle A$ у них общий (по второму признаку); отсюда

$$b_C : b = b : c = h : a. \quad (1)$$

Из подобия треугольников BDC и BCA ($\angle B$ — общий) следует, что

$$a_C : a = a : c = h : b. \quad (2)$$

Из (1) и (2) соответственно имеем:

$$b^2 = b_C c, \quad (3)$$

$$a^2 = a_C c. \quad (4)$$

Сложив (3) и (4), получим:

$$b^2+a^2=b_Cc+a_Cc=c(b_C+a_C)=cc=c^2,$$

т. е.

$$b^2+a^2=c^2.$$

Величина x называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) между величинами m и n, если выполняется равенство $m:x=x:n$.

Сформулируем теперь свойства прямоугольных треугольников: *катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, т. е.* $b_C:b=b:c$, $a_C:a=a:c$ или $b^2=b_Cc$ и $a^2=a_Cc$.

Рассмотрим теперь треугольники ADC и CDB (см. рис. 190). Они подобны, так как $\widehat{ACD}=\widehat{CBD}$ (см. второй признак) $\triangle ADC \sim \triangle CDB$. Из подобия этих треугольников следует, что

$$b_C:h=h:a_C=b:a. \qquad (4)$$

Из соотношения (4) и определения среднего пропорционального следует: высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу:

$$b_C:h=h:a_C, \quad \text{или} \quad h^2=a_C\cdot b_C.$$

Задача. Дан треугольник ABC (рис. 191). Приняв за центр гомотетии вершину A, построить треугольник

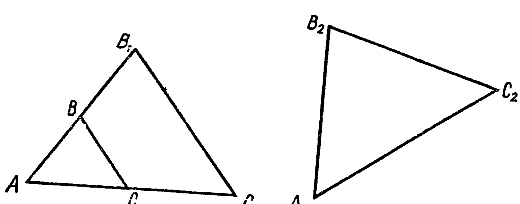


Рис. 191

AB_1C_1, гомотетичный данному, с коэффициентом гомотетии $k=2$. Построить треугольник $A_2B_2C_2$, конгруэнтный треугольник AB_1C_1. Доказать подобие треугольников ABC и $A_2B_2C_2$.

Решение. Гомотетия H_A^2 отображает $\triangle AB_1C_1$ на $\triangle ABC$, а значит, $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$. $\frac{|AB_1|}{|AB|}=\frac{|AC_1|}{|AC|}=\frac{|B_1C_1|}{|BC|}=k$. Теперь имеем: $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, так как $|AB_1|=|A_2B_2|$; $|AC_1|=|A_2C_2|$; $|B_1C_1|=|B_2C_2|$; $\frac{|A_2B_2|}{|AB|}=\frac{|A_2C_2|}{|AC|}=\frac{|B_2C_2|}{|BC|}=k$, откуда $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$ (по определению подобия).

§ 3. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

1. Отношение периметров и площадей подобных фигур.

Теорема 1. *Отношение периметров подобных многоугольников равно отношению их соответствующих сторон* (коэффициенту подобия).

Доказательство. Действительно, по определению подобных фигур имеем (рис. 192):

$$|A_1B_1|=k|AB|\,|B_1C_1|=\\ =k|BC|\ldots|E_1A_1|=k|EA|.$$

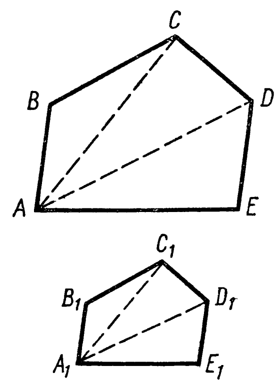


Рис. 192

Сложив почленно эти равенства, находим:

$$|A_1B_1|+|B_1C_1|+\ldots+|E_2A_2|=\\ =k[|AB|+|BC|+\ldots+|EA|]$$

или

$$P_1=kP,$$

где P_1 и P — периметры данных многоугольников.

Отсюда $P_1:P=k$.

Теорема 2. *Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему сначала для треугольников.

Пусть треугольник $\Delta_1=\Delta_{(A_1B_1C_1)}$ подобен треугольнику $\Delta=\Delta_{(ABC)}$ с коэффициентом подобия k (рис. 193). Отображение подобия, которое отображает треугольник Δ на треугольник Δ_1, отображает высоту CD на высоту C_1D_1 (объясните почему). Поэтому имеем:

$$|A_1B_1|=k|AB|,\quad |C_1D_1|=k|CD|,$$

$$S(\Delta_1)=\frac{1}{2}k|AB|k|CD|=k^2\frac{1}{2}|AB||CD|=k^2S(\Delta).$$

2. Пусть многоугольник Ф разбит на треугольники (рис. 194) Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n. Многоугольник Ф′ подобен Ф с коэффициентом подобия k. При отображении подобия, отображающем Ф на Ф′, треугольники Δ_m перейдут

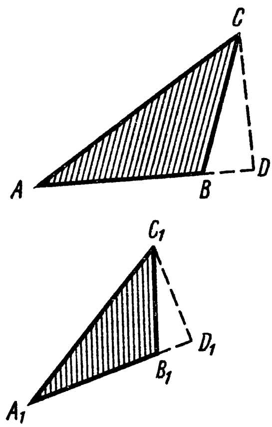


Рис. 193

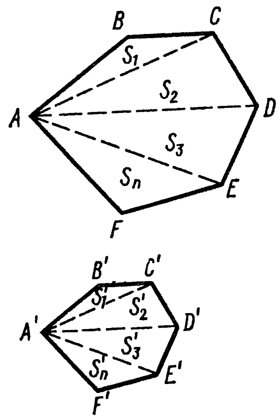


Рис. 194

в треугольники $\Delta' m$, на которые окажется разбитым многоугольник Ф′ (рис. 194).

Для площадей получим:

$$S(\Phi') = S(\Delta_1') + S(\Delta_2') + \ldots + S(\Delta_n') =$$
$$= k^2 S(\Delta_1) + k^2 S(\Delta_2) + \ldots + k^2 S(\Delta_n) =$$
$$= k^2 (S\Delta_1) + S(\Delta_2) + \ldots + S(\Delta_n) = k^2 S(\Phi).$$

Итак, $S(\Phi') : S(\Phi) = k^2$.

2. Длина окружности и площадь круга. Выведенные выше теоремы подсказывают нам путь к получению формул для длины окружности и площади круга (доказательство этих формул не входит в программу).

Так как любые две окружности подобны друг другу с коэффициентом подобия, равным отношению их диаметров (в том же отношении находятся и длины окружностей), то, обозначив соответственно длины двух окружностей через C_1 и C_2, а их диаметры через d_1 и d_2, получим

$$C_1 : C_2 = d_1 : d_2,$$

т. е. длины окружностей пропорциональны их диаметрам. Следовательно, это можно записать в виде $\frac{C}{d}=\pi$ *, где π (произносится «пи») — название греческой буквы π. Буквой π принято обозначать отношение длины окружности к диаметру; итак,

$$C=\pi d.$$

Через радиус r длина окружности выражается формулой

$$C=2\pi r.$$

Любые два круга подобны. Коэффициент подобия двух кругов равен отношению их диаметров или радиусов. Следовательно, площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов. Обозначим площадь круга через S. Отношение площадей S_1 и S_2 двух кругов, радиусы которых r_1 и r_2, записывается так:

$$S_1:S_2=r_1^2:r_2^2, \text{ или } \frac{S_1}{r_1^2}=\frac{S_2}{r_2^2}.$$

Итак, площади кругов пропорциональны квадратам их радиусов. Оказывается, что коэффициент пропорциональности также равен числу π. Таким образом,

$$\frac{S}{r^2}=\pi, \text{ или } S=\pi r^2.$$

Через диаметр площадь круга выражается формулой

$$S=\frac{\pi d^2}{4}.$$

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ГОМОТЕТИИ И ПОДОБИЯ

1. Применение «метода подобия» при решении задач на построение Сущность «метода подобия» состоит в том, что сперва вместо искомой фигуры строится фигура, подобная искомой, а затем, используя данные,— искомая фигура.

Рассмотрим задачу. Построить треугольник по двум данным углам (α и β) и высоте h_C, проведенной из вершины третьего угла.

Решение. Треугольники, у которых два угла равны, подобны (по трем углам), поэтому мы вначале строим треугольники, подобные данному. Для этого от концов любого отрезка отложим заданные углы α и β (рис. 195)

*) $\pi \approx 3,14159$.

и получим $\triangle ABC$. Все треугольники, стороны которых параллельны стороне BC, подобны ему. Нам осталось выбрать из этих треугольников тот, у которого высота опущенная из вершины третьего угла, равна h_C. Для этого проведем на расстоянии h от AB прямую, параллельную AB, и найдем точку ее пересечения с прямой AC. Пусть это будет точка C_1. Проведем $(C_1B_1) \| (BC)$, тогда $\triangle AC_1B_1$ — искомый.

2. Определение высоты предмета. Для определения высоты предмета, например дерева, ставят на некотором расстоянии от него шест (по отвесу) с вращающейся

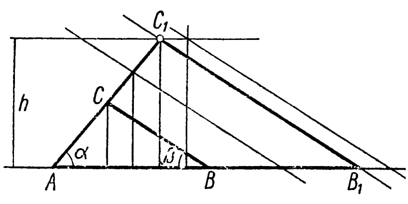


Рис. 195

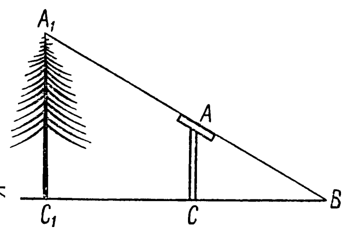


Рис. 196

планкой (рис. 196). Планку направляют на верхнюю точку предмета (дерева), как показано на рисунке. Далее отмечают на поверхности земли точку ее пересечения с прямой AA_1. Пусть это будет точка B. Получаются пары соответственных точек A и A_1, C и C_1 в гомотетии с центром B. Отношение $|A_1C_1|:|AC|$ равно коэффициенту гомотетии и $|BC_1|:|BC|$. Отрезки BC_1 и BC измеряют, длина отрезка AC известна. Тогда из пропорции $|A_1C_1|:|AC| = |BC_1|:|BC|$ находят

$$|A_1C_1| = \frac{|BC_1|}{|BC|} = |AC|.$$

3. Определение расстояния до недоступной точки. Расстояние от точки A до недоступной точки B на местности можно найти, пользуясь признаками конгруэнтности треугольников. Проще это сделать, пользуясь признаками подобия треугольников. Для этого выбирают на местности точку C и измеряют отрезок AC и углы A и C (рис. 197). Затем на листе бумаги строят в каком-нибудь масштабе отрезок A_1C_1 и $\angle A_1 \cong \angle A$, $\angle C_1 \cong \angle C$; получают $\triangle A_1B_1C_1$.

По второму признаку подобия $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Из этой пропорции находят $|AB|$, измерив отрезок A_1B_1.

Примеры 1. Через точку, данную внутри угла, провести прямую так, чтобы отрезок прямой, отсекаемый сторонами угла, делился этой точкой в данном отношении $m:n$.

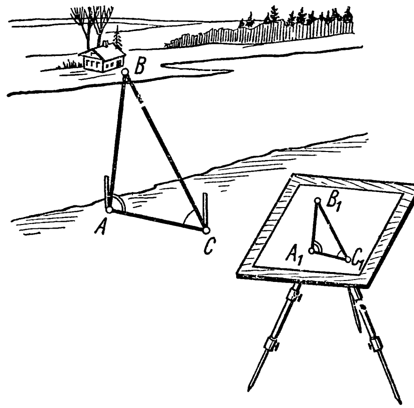


Рис. 197

Решение. Пусть дан угол ABC и D — внутренняя точка его Проведем через D прямую, параллельную прямой BC. Пусть точка пересечения ее с прямой BA — E. От точки E на стороне BA (в направлении от B к A) отложим отрезок EF длины $\frac{m}{n}|BE|$. Прямая FD — искомая.

2. В данный угол вписать окружность, проходящую через данную внутри угла точку.

Решение. Сначала впишем в данный угол окружность произвольного радиуса, построим прямую, соединяющую данную точку с вершиной угла, и проведем два радиуса построенной окружности в точки пересечения ее с построенной прямой. Из данной точки проведем лучи, параллельные этим радиусам, до пересечения с биссектрисой угла. Получим два центра искомых окружностей.

Решение упрощается, если данная точка лежит на биссектрисе угла. (В случае развернутого угла задача имеет единственное решение.)

Вопросы для самопроверки

1. Подобны ли любые две конгруэнтные фигуры? Конгруэнтны ли любые две подобные фигуры?

2. Какими основными свойствами обладают подобные фигуры?

3. Каким отображением является гомотетия при $k = 1$?

4. На какую точку отображает гомотетия центр гомотетии?

5. Как найти коэффициент гомотетии, если даны две соответствующие точки и известен центр гомотетии?

6. Можно ли найти центр гомотетии, если известна. а) только одна пара соответствующих точек;

б) две пары соответствующих точек, не лежащих на одной прямой?

7. Что называется коэффициентом гомотетии?

8 Что показывает коэффициент гомотетии, выраженный отрицательным числом?

9. В каких случаях расстояния между точками при гомотетии не изменяются?

10. Сохраняется ли при гомотетии параллельность прямых?

11. На какую фигуру отобразится при гомотетии а) угол; б) полоса; в) параллелограмм; г) трапеция?

12. Какая фигура подобна равностороннему треугольнику?

13. Назовите такие фигуры, которые подобны самим себе при любом коэффициенте подобия.

14. Подобны ли любые два равнобедренных прямоугольных треугольника?

15. Могут ли длины всех сторон прямоугольного треугольника выражаться: а) четными числами; б) нечетными?

Могут ли длины только двух сторон выражаться: а) четными числами; б) нечетными?

16 Могут ли два подобных, но не конгруэнтных многоугольника иметь: а) по конгруэнтной стороне; б) равные периметры?

Упражнения

1. Квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичны (точка D — центр гомотетии). Найдите коэффициент гомотетии, отображающей квадрат $ABCD$ на квадрат $A_1B_1C_1D_1$.

2. Дан отрезок AB. Постройте гомотетичный ему отрезок с коэффициентом гомотетии $k = -3/2$. За центр гомотетии примите: а) точку O_1, не принадлежащую отрезку, но лежащую на прямой AB; б) точку O_2, не лежащую на прямой AB.

3. а) Вычислите длину моста через реку, который на плане с масштабом 1/5000 изображается отрезком длиной 4,2 см; б) каким отрезком изображается на этом плане прямолинейная улица длиной 1,25 км?

4. а) Вычислите масштаб плана, если улица в 3 км изображается на этом плане отрезком длиной 60 см; б) вычислите расстояние от школы до дома ученика, если на этом плане оно изображается отрезком длиной 4,6 см.

5. Квадрат $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен квадрату $ABCD$ относительно центра O, коэффициент гомотетии равен —0,8. Вычислите длину стороны квадрата $A_1B_1C_1D_1$, если длина стороны квадрата $ABCD$ равна 7,4 см.

6. Даны две прямые AB и CD, пересекающиеся в точке P, и центр гомотетии O, $O \notin [AB]$, $O \notin [CD]$. Постройте образы прямых AB и CD в гомотетии с центром O и коэффициентом 2.

7. Имеются три плана одного и того же города в масштабах 1/50000, 1/10000 и 1/5000. На первом плане некоторая улица изображается отрезком длиной 6,2 см. Какими отрезками эта улица изображается на двух остальных планах?

8. Данный отрезок разделите на две части в отношении 5:3.

9. Дан отрезок AB. Разделите его на три части, пропорциональные длинам данных отрезков CD, EF и KL.

10. Угол A пересечен двумя параллельными прямыми BC и DE (B и D лежат на одной стороне угла, C и E — на другой). Вычислите $|AD|$, если $|AB| = 15$ см, $|AC| = 8$ см и $|AE| = 24$ см.

11 Даны два подобных (но не гомотетичных) ромба $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Постройте ромб $A_2B_2C_2D_2$, гомотетичный ромбу $ABCD$ и конгруэнтный ромбу $A_1B_1C_1D_1$.

12. Постройте фигуру, подобную фигуре, состоящей из трех попарно пересекающихся окружностей различного радиуса, при коэффициенте подобия, равном 2/3.

13. Стороны треугольника пропорциональны числам 5, 6, 8. Вычислите длины сторон треугольника, подобного данному, если разность между большей и меньшей его сторонами равна 15 см.

14. Основание треугольника 6 см, высота, проведенная к этому основанию, равна 3 см. В этот треугольник вписан квадрат так, что две вершины его лежат на основании, а две другие на боковых сторонах. Вычислите длину стороны квадрата.

15. Углы данного треугольника пропорциональны числам 6, 3 и 1. Докажите, что биссектриса, проведенная из вершины большего угла, отсекает от данного треугольника треугольник, ему подобный.

16. Докажите, что две высоты остроугольного треугольника отсекают от него два подобных треугольника с общей вершиной.

17. В треугольнике ABC $|AC|=30$ см, $h_C=16$ см, $|BC|=25$ см. Вычислите h_A.

18. Диагонали трапеции $ABCD$ $((BC)\parallel(AD))$ пересекаются в точке O и $|BO|:|OD|=3:5$. Разность оснований равна 8 см. Вычислите среднюю линию трапеции.

19. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 18 см, а один из катетов 6 см. Вычислите проекции катетов на гипотенузу и высоту, проведенную к гипотенузе.

20. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, равна 8 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу 6 см. Вычислите стороны этого треугольника.

21. В круге, радиус которого 25 см, проведены по одну сторону от центра две параллельные хорды в 40 и 30 см. Вычислите расстояние между этими хордами.

22. Стороны треугольника, образующие угол в 60°, равны 25 и 40 см. Вычислите третью сторону.

23. В окружности, длина диаметра которой 13 см, проведена хорда длиной 5 см. Вычислите расстояние этой хорды от центра

24. Постройте отрезок, средний пропорциональный для двух данных отрезков.

25. В круге построена хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину. Найдите длину этой хорды, если диаметр круга равен 8 см.

26. Трапеция равновелика треугольнику, образованному продолжениями боковых сторон ее и меньшим основанием. Найдите отношение оснований этой трапеции.

27. Стороны одного четырехугольника равны 2, 3, 4 и 5 см. Второй четырехугольник подобен первому и сумма наибольшей и наименьшей его сторон равна 28 см. Вычислите длины сторон второго четырехугольника.

28. Высота треугольника 12 см. На каком расстоянии от вершины надо провести прямую, чтобы образовавшиеся треугольник и трапеция были равновелики?

29. Прямая, параллельная основанию треугольника, рассекает этот треугольник на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит боковые стороны треугольника?

30. Постройте равнобедренный треугольник по данному углу при основании и высоте, проведенной к основанию.

31. Постройте треугольник по его периметру, углу при вершине и отношению сторон, заключающих этот угол.

32. Дан круг и вне его треугольник. Впишите в этот круг треугольник, стороны которого были бы соответственно параллельны сторонам данного треугольника.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Задание поворотов. Композиция поворотов с общим центром. Вы уже знаете, что поворот определен, если заданы его центр O, угол поворота α и направление поворота. Угол поворота α при этом считается заключенным в пределах $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Поворот на $0°$ — это тождественное отображение плоскости $E(X)=X$. Для любого центра O повороты на $180°$ в обоих направлениях совпадают и являются центральной симметрией относительно центра поворота O.

Познакомимся теперь с другой системой задания поворотов.

Выберем какое-либо направление поворота в качестве положительного, а противоположное будем считать отрицательным. Положительным обычно считают направление поворота против часовой стрелки. Например, поворот на $20°$ против часовой стрелки будем называть просто поворотом на $20°$, поворот же на $20°$ по часовой стрелке — поворотом на минус $20°$. При таком соглашении поворот полностью определяется заданием центра O и угла поворота α.

Поворот с центром O на угол α обозначается R_O^{α}. Например, повороты, указанные в предыдущем примере, обозначаются $R_O^{20°}$ и $R_O^{-20°}$. Введение знака для угла поворота позволяет рассматривать теперь угол поворота в интервале от -180 до $180°$, т. е. $-180° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Мы рассматриваем поворот как результат вращения. При этом поворот может происходить и на угол, не лежащий в указанных пределах. Следовательно, нам надо определить поворот на угол $\beta \in]-\infty; +\infty[$.

На рис. 198 изображен результат поворота точки X_0 на угол $295°$. При этом точка X_0 займет положение X_1. Из рисунка ясно, что то же положение займет точка X_0, если осуществить поворот на угол $-65°$. Следовательно, $R_0^{295°}=R_0^{-65°}$. Но это же положение займет точка X_0, если вращать ее на углы $-65°+360°$, $-65°+360°\cdot 2$, $-65°+$ $+360°\cdot 3$, ..., т. е. это положение точка X_0 может занять при помощи поворотов бесконечным множеством способов.

Следовательно, если $\beta = \alpha + 360^\circ n$, где $n \in Z$ и $-180^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$, то поворотом на угол β называется поворот на R_0^α. Например,

$$R^{-720^\circ} = R^{360^\circ \cdot (-2)} = R^{0^\circ} = E, \quad R^{1000^\circ} = R^{-80^\circ + 360^\circ \cdot 3} = R^{-80^\circ}.$$

В курсе геометрии угловые величины мы употребляем в нескольких различных смыслах: 1) величина угла (геометрической фигуры) лежит в пределах $0^\circ < \alpha < 360^\circ$;

2) угол между двумя лучами и угол между двумя направлениями лежит в пределах $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$;

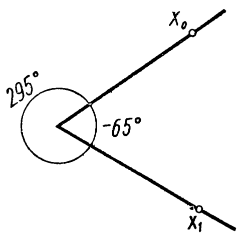


Рис. 198

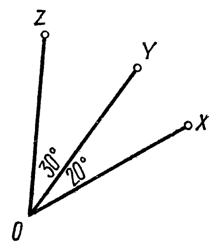


Рис. 199

3) угол между двумя прямыми лежит в пределах $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$;

4) вращательное движение характеризуется любыми углами $-\infty < \alpha < +\infty$;

5) при задании поворотов тоже пользуются любыми углами $-\infty < \alpha < +\infty$, хотя любой поворот можно охарактеризовать углом, лежащим в пределах $-180^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

Рассмотрим результат последовательного выполнения двух поворотов с общим центром.

Рассмотрим повороты R^{20° и R^{30° с общим центром. В результате их последовательного выполнения получится поворот вокруг того же центра O на 50°. Например, точка X (рис. 199) при повороте R^{20° отобразится на точку Y, а второй поворот R^{30° отобразит точку Y на точку Z:

$$Y = R^{20^\circ}(X); \quad Z = R^{30^\circ}(Y).$$

Значит,

$$R^{30^\circ}(R^{20^\circ}(X)) = R^{50^\circ}(X).$$

Результат последовательного выполнения двух отображений f и g обозначается так: $g \circ f$ и называется *композицией отображений* f и g. В нашем примере композиция поворотов $R^{20°}$ и $R^{30°}$ есть поворот $R^{50°}$;

$$R^{30°} \circ R^{20°} = R^{50°}.$$

Без доказательства мы принимаем следующую формулу

$$R^{\beta} \circ R^{\alpha} = R^{\alpha+\beta}.$$

Из этой формулы следует, что композицией поворотов с общим центром на углы α и β является поворот с тем же центром на угол, равный сумме углов α и β.

Покажем, что для композиции поворотов с общим центром справедливо переместительное свойство $R^{\beta} \circ R^{\alpha} = R^{\alpha} \circ R^{\beta}$.

Действительно, так как $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, то

$$R^{\beta} \circ R^{\alpha} = R^{\alpha+\beta} = R^{\beta+\alpha} = R^{\alpha} \circ R^{\beta}.$$

Однако для композиции поворотов с различными центрами переместительное свойство не выполняется, $R^{\alpha}_{O_1} \circ R^{\beta}_{O_2} \neq R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1}$.

2. Тригонометрические функции. Мы уже знаем, что уравнение окружности радиуса r с центром в начале прямоугольной системы координат запишется так: $x^2+y^2=r^2$.

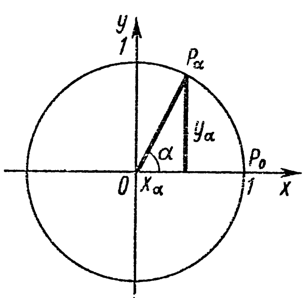


Рис. 200

Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Будем такую окружность называть единичной окружностью; ее уравнение $x^2+y=1$. Возьмем на единичной окружности точку P_0 (1; 0) (рис. 200). Поворот R^{α} вокруг начала координат отображает точку P_0, на точку $P_\alpha = R^{\alpha}(P_0)$, которая, как и точка P_0 лежит на единичной окружности. Координаты x_α и y_α точки P_α имеют специальные названия: ордината точки P_α называется *синусом угла* α, а абсцисса точки P_α называется *косинусом угла* α. Они обозначаются так: $x_\alpha=\cos\alpha$, $y_\alpha=\sin\alpha$. Любому углу поворота будет соответствовать одна вполне определенная точка P_α, с координатами $x_\alpha=\cos\alpha$ и $y_\alpha=\sin\alpha$. Каждой точке единичной окружности соответствуют определенные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Эти соответствия называют *тригонометрическими* *функциями* $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Следовательно, тригонометрические функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются функциями угла α.

Чтобы наглядно представить себе поведение функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при изменении угла α, выберем какой-либо масштаб изображения величин углов отрезками прямой. На рис. 201 и 202 один миллиметр соответствует 5°.

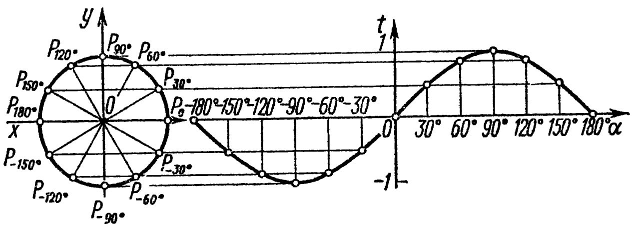


Рис. 201

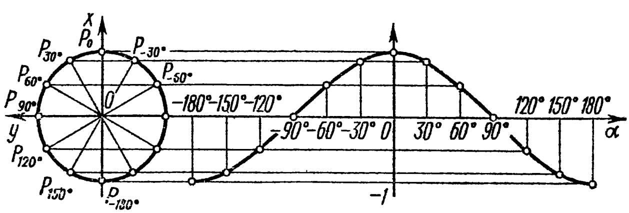


Рис. 202

Построение графиков функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в пределах $-180° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ ясно из этих рисунков*.

Построением графиков тригонометрических функций и подробным изучением свойств этих функций занимаются в старших классах. Нам важно усвоить общий принцип построения этих графиков. Отметим, что областью их определения является множество всех углов поворотов.

Мы знаем, что при любом целом n поворот на угол $\beta = \alpha + 360°n$ совпадает с поворотом на угол α. Поэтому при любом целом n имеем $P_{\alpha+360°n} = P_\alpha$, т. е.

$$x_{\alpha+360°n} = x_\alpha, \quad y_{\alpha+360°n} = y\ ;$$
$$\sin(\alpha + 360°\, n) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 360°\, n) = \cos\alpha.$$

Любой угол β можно представить в виде $\beta = \alpha + 360°n$, где n — целое число, а α находится в пределах $-180°$.

---

* Обратите внимание на то, что рис. 202 ось Ox направлена вертикально, а ось Oy — горизонтально влево.

Поэтому достаточно изучить поведение функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ на отрезке [—180°; 180°] оси α.

3. Функция $\operatorname{tg}\alpha$. Отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ называется *тангенсом угла* α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$. Функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена для всех тех углов α, для которых $\cos\alpha \neq 0$. На отрезке [—180°; 180°] имеются два угла, для которых $\cos\alpha = 0$ и для них $\operatorname{tg}\alpha$ не определен. Это углы 90 и —90°.

На рис. 203 показано, как строится график тангенса для углов $-90° < \alpha < 90°$. При $\alpha > 0$ из подобия треугольников $OM_\alpha P_\alpha$ и OEQ_α имеем:

$$\frac{|EQ_\alpha|}{|OE|} = \frac{|P_\alpha M_\alpha|}{|OM_\alpha|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

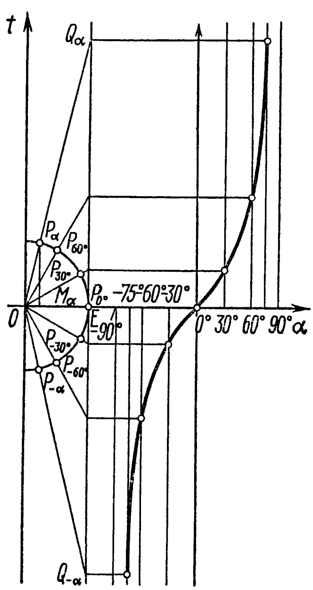


Рис. 203

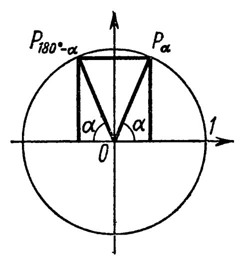


Рис. 204

Но $|OE| = 1$; следовательно, $|EQ_\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$.

Значения функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ для углов от 0 до 90° даны в четырехзначных математических таблицах В. М. Брадиса. Подробное описание правил использования таблиц содержится в объяснительном тексте к ним.

4. Некоторые тригонометрические тождества. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Рассмотрим произвольную точку P_α, принадлежащую единичной окружности.

1. Так как при осевой симметрии относительно оси Oy точка P_α отображается на точку $P_{180°-\alpha}$ (рис. 204), то координаты точки $P'_{180°-\alpha}$ равны: $x_{180°-\alpha} = -x_\alpha$, $y_{180°-\alpha} = y_\alpha$.

Отсюда имеем:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$$

2. Так как при осевой симметрии относительно оси Ox точка $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ отображается на точку $P_{-\alpha}$ (рис. 205), то координаты точки $P'_{-\alpha}$ равны $y_{-\alpha} = -y_\alpha$, $x_{-\alpha} = x_\alpha$.

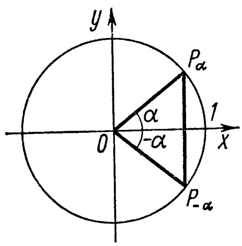


Рис. 205

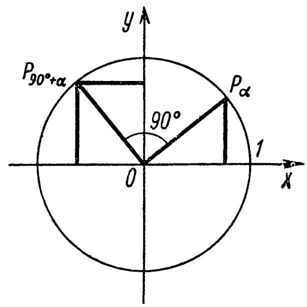


Рис. 206

Отсюда имеем:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

3. Так как при повороте на 90° точка P_α отображается на точку $P_{90^\circ+\alpha}$, т. е. $P_{90^\circ+\alpha} = R^{90^\circ}(P_\alpha)$ (рис. 206), то

$$y_{90^\circ+\alpha} = x_\alpha \quad \text{и} \quad x_{90^\circ+\alpha} = -x_\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Примечание. Из этих формул вытекает, что график $\sin\alpha$ и отличается от графика $\cos\alpha$ только тем, что

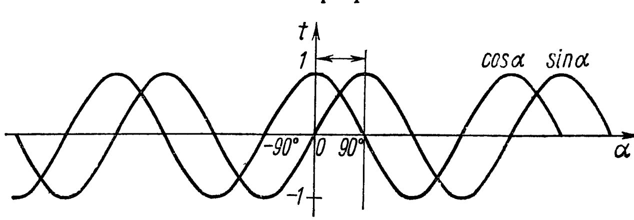


Рис. 207

он сдвинут вдоль оси Ox влево на расстояние, соответствующее углу 90° (рис. 207).

4. Так как при центральной симметрии точка P_α отображается на точку $P_{180°+\alpha}$ (рис. 208), то $y_{180°+\alpha} = -y_\alpha$ и $x_{180°+\alpha} = -\sin\alpha$. Отсюда имеем:

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha.$$

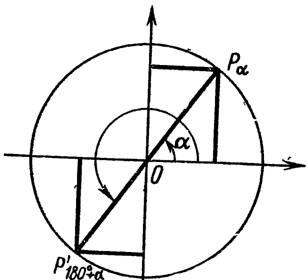


Рис. 208

5. Так как точка P_α лежит на единичной окружности, то при любом α

$$x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1, \text{ т. е. }$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

6. Справедливость тождеств

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

вытекает из формул (2) и (3) предыдущего пункта:

$$\sin(90° - \alpha) = \sin(90° + (-\alpha)) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90° - \alpha) = \cos(90° + (-\alpha)) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

С помощью этих формул можно найти значение тригонометрической функции для произвольного угла и значение функции угла для интервала от 0 до 90°. Приведем некоторые углы, для которых имеются точные выражения их синусов и косинусов:

	0	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Рассмотрим некоторые примеры.

1. $\sin(-72°) = -\sin 72° = -0{,}9511$.

2. $\cos(-108°) = \cos 108° = \cos(90° + 18°) = -\sin 18° = -0{,}3090$.

3. $\sin 430° = \sin(360° + 70°) = \sin 70° = 0{,}9397$.

4. $\cos 550° = \cos(2\cdot 360° - 170°) = \cos(-170°) = -\cos(180° - 10°) = -\cos 10° = -0{,}9848$.

Примеры 1. Вычислить $\cos\beta$, если $\sin\beta = -\frac{3}{4}$, $180° < \beta < 270°$.

Решение. Имеем: $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$; $\cos^2\beta + \frac{9}{16} = 1$; $\cos\beta = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}}$ (β — угол III четверти, поэтому $\cos\beta < 0$); $\cos\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

2. Сравнить значения выражений $\cos(-120°)$ и $\sin(-149°12')$. Решение.

$$\sin(-149°12') = -\sin(180° - 30°48') = -\sin 30°48'.$$
$$\cos(-120°) = \cos(90° + 30°) = -\sin 30°.$$
$$\sin 30°48' > \sin 30°, \text{ откуда } -\sin 30°48' < -\sin 30°.$$

§ 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1. Решение прямоугольных треугольников. Рассмотрим способы вычисления основных элементов треугольника.

Введем понятие «координаты векторов» и выведем формулы, связывающие координаты произвольного и единичного векторов. Если на координатной плоскости от начала координат откладывать векторы, то каждому вектору будет соответствовать вполне определенная точка плоскости A, а каждой точке плоскости A — вполне определенный вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 209). *Координатами вектора* называются координаты точки A (рис. 210), которые будем обозначать $x_{\vec{a}}$ и $y_{\vec{a}}$.

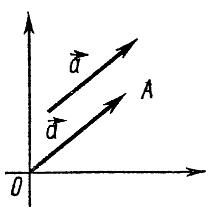


Рис. 209

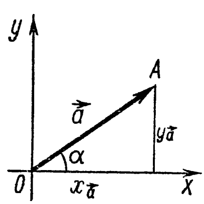


Рис. 210

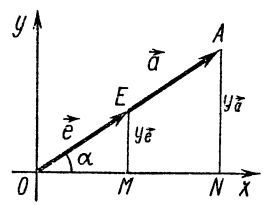


Рис. 211

Координаты нулевого вектора $\vec{0} = \overrightarrow{OO}$ равны $x_{\vec{0}} = 0$, $y_{\vec{0}} = 0$.

Если вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ ненулевой, то он имеет определенное направление. Направление вектора $\overrightarrow{OA}$ определяется направлением луча OA.

Если ограничить угол α условиями $-180° < \alpha \leqslant 180°$, то угол α определяется по вектору $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ однозначно. Говорят, что вектор $\vec{a}$ образует угол α с положительным направлением оси абсцисс. Ненулевой вектор полностью определяется заданием его длины $|\vec{a}|$ и угла α, который он образует с положительным направлением оси абсцисс.

Вектор единичной длины называется *единичным вектором*. Конец единичного вектора лежит на единичной окружности. Поэтому единичный вектор, образующий с положительным направлением оси абсцисс угол α, можно записать так: $\vec{e}_\alpha=\overrightarrow{OP_\alpha}$. Его координаты равны $x_{\vec{e}}=\cos\alpha$; $y_{\vec{e}}=\sin\alpha$.

Возьмем единичный вектор $\vec{e}$ того же направления, что и вектор $\vec{a}$ (рис. 211). Из подобия треугольников OAN и OEM следует, что при любом угле α отношения $\dfrac{y_{\vec{a}}}{|\vec{a}|}$ и $\dfrac{y_{\vec{e}}}{|\vec{e}|}$ будут равны. Знаки ординат $y_{\vec{a}}$ и $y_{\vec{e}}$ одинаковы. Так как $y_{\vec{e}}=\sin\alpha$; $|\vec{e}|=1$, то

$$\sin\alpha=\frac{y_{\vec{a}}}{|\vec{a}|} \quad \text{и} \quad y_{\vec{a}}=|\vec{a}|\sin\alpha.$$

Аналогично, из подобия треугольников OAN и OEM (рис. 212) следует, что $\dfrac{x_{\vec{a}}}{|\vec{a}|}=\dfrac{x_{\vec{e}}}{|\vec{e}|}$. Так как $x_{\vec{e}}=\sin\alpha$, $|\vec{e}|=1$, то

$$\cos\alpha\,\frac{x_{\vec{a}}}{|\vec{a}|} \quad \text{и} \quad x_{\vec{a}}=|\vec{a}|\cos\alpha.$$

Итак, вектор $\vec{a}$, образующий с положительным направлением оси абсцисс угол α, имеет координаты

$$x_{\vec{a}}=|\vec{a}|\cos\alpha; \quad y_{\vec{a}}=|\vec{a}|\sin\alpha.$$

Перейдем теперь к выводу нужных нам соотношений в прямоугольном треугольнике. Расположим прямоугольный треугольник ABC так, как это показано на рис. 213. В этом случае a и b являются координатами вектора $\overrightarrow{OB}$, c — его длина, тогда $b = c \cdot \cos \widehat{A}$, $a = c \cdot \sin \widehat{A}$. Из этих формул находим

$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{c}; \ \cos \widehat{A} = \frac{b}{c}; \ c = \frac{a}{\sin \widehat{A}}; \ c = \frac{b}{\cos \widehat{A}}.$$

Из формул $a = c \cdot \sin \widehat{A}$ и $b = c \cdot \cos \widehat{A}$ находим

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} = \operatorname{tg} \widehat{A}.$$

Следовательно, в прямоугольном треугольнике

$$a = b \operatorname{tg} \widehat{A}, \ b = a \operatorname{tg} \widehat{B}.$$

Полученные соотношения позволяют вычислять по известным элементам треугольника его неизвестные элементы.

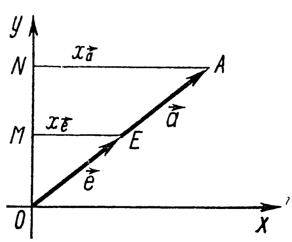


Рис. 212

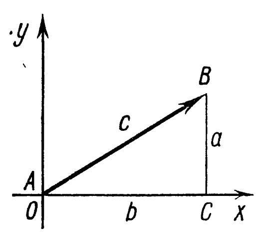


Рис. 213

Треугольник, как мы знаем, определяется тремя основными элементами, из которых по меньшей мере один линейный.

В прямоугольном треугольнике один элемент всегда известен — прямой угол. Поэтому прямоугольный треугольник определяется двумя основными элементами, из которых хотя бы один является линейным.

2. Метрические соотношения в треугольнике. Пусть дан произвольный треугольник ABC. Рассмотрим соотношения между основными элементами (метрические соотношения) в этом треугольнике.

Теорема 1 (т е о р е м а к о с и н у с о в). *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разберем два случая.

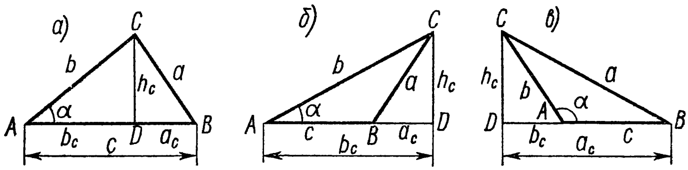


Рис. 214

С л у ч а й 1. Сторона треугольника лежит против острого угла. Рассмотрим треугольник ABC, в котором угол A острый. Проведем через вершину C перпендикуляр CD к прямой AB (рис. 214). Получим прямоугольные треугольники ACD и BDC. Из треугольника BDC по теореме Пифагора имеем

$$a^2 = h_c^2 + a_c^2.$$

Вычислим отдельно h_c^2 и a_c^2. Из треугольника ACD находим $h_c^2 = b^2 - b_c^2$. Найдем теперь a_c. Заметим, что при этом могут быть два различных расположения:

$a_c = c - b_c$ (рис. 214, *а*) и $a_c = b_c - c$ (рис. 214, *б*).

Следовательно,

$$a_c^2 = (c - b_c)^2 = (b_c - c)^2 = c^2 - 2cb_c + b_c^2.$$

Подставляя выражения h_c^2 и a_c^2 в равенство (1), получим

$$a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 - 2cb_c + b_c^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c.$$

Но в треугольнике ACD имеем $b_c = b\cos\alpha$. Окончательно получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Что и требовалось доказать.

С л у ч а й 2. Сторона треугольника лежит против тупого угла. Рассмотрим треугольник ABC, в котором угол A тупой (рис. 214, *в*). Проведем через вершину C перпендикуляр CD к прямой AB. Получим прямоугольные треугольники ACD и BCD. Из треугольника BCD

по теореме Пифагора $a^2=h_c^2+a_c^2$. Из треугольника ACD находим $h_c^2=b^2-b_c^2$.

Найдем теперь

$$a_c^2=(b_c+c)^2;\ a_c^2=b_c^2+2cb_c+c^2.$$

Представляя выражения h_c^2 и a_c^2 в равенство (1), получаем

$$a^2=b^2-b_c^2+b_c^2+2cb_c+c^2=b^2+2cb_c+c^2.$$

Но в треугольнике ACD имеем $b_c=b\cos(180°-\alpha)=-b\cos\alpha$. Окончательно получаем:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Следствие. *Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, не равны, то против большего угла лежит большая сторона.*

В самом деле, пусть стороны b и c треугольника ABC соответственно равны сторонам b_1 и c_1 треугольника $A_1B_1C_1$, а угол α первого треугольника больше угла α_1 второго треугольника. Тогда по теореме косинусов имеем:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;\ a_1^2=b_1^2+c_1^2-2b_1c_1\cos\alpha_1.$$

Произведя почленное вычитание после упрощения, получим

$$a^2-a_1^2=2bc(\cos\alpha_1-\cos\alpha),$$

но правая часть равенства всегда положительна, так как $\cos\alpha_1>\cos\alpha$, следовательно, $a^2>a_1^2$ или $a>a_1$.

Теорема 2. *Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними.*

Доказательство. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 214, *а*), у которого $[CD]$ — высота. Следовательно, $S=\frac{1}{2}|CD|\cdot|AB|$. Так как $|CD|=h_c$ — высота, то $\triangle ACD$ — прямоугольный. Для всех возможных случаев (рис. 214, *а, б, в*) $h_c=b\sin\alpha$, тогда

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Теорема 3 (теорема синусов). *Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами a, b, c и углами α, β, γ *.

Запишем формулы для вычисления площади данного треугольника:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}cb\sin\alpha;\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma;\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\beta,$$

откуда

$$\sin\alpha=\frac{2S}{cb};\quad \sin\gamma=\frac{2S}{ab};\quad \sin\beta=\frac{2S}{ac}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{cb}{2S};\quad \frac{1}{\sin\gamma}=\frac{ab}{2S};\quad \frac{1}{\sin\beta}=\frac{ac}{2S},$$

или

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{abc}{2S};\quad \frac{c}{\sin\gamma}=\frac{abc}{\sin\gamma};\quad \frac{b}{\sin\beta}=\frac{abc}{2S}.$$

Из полученных равенств следует

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Теорема синусов позволяет по двум данным сторонам и углу, лежащему против одной из них, или по стороне и двум углам вычислять остальные элементы треугольника.

Примеры. 1. Дано: $a=2$; $c=3$; $\hat{B}=123°17'$. Найти: b.

Решение. $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$ (по теореме косинусов),,
$b^2\approx 4+9+12\cdot 0{,}55$; $b^2\approx 19{,}6$,
$\cos 123°17'=\cos(90°+33°17')=-\sin 33°17'\approx -0{,}5488$;
$b\approx\sqrt{19{,}6}$; $b\approx 4{,}4$.

2. Доказать, что треугольник — равнобедренный, если $a=2b\cos\hat{C}$

Дано: $\triangle CAB$; a — основание треугольника; $a=2b\cos\hat{C}$.
Доказать: $b=c$.

Доказательство. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$ (по теореме косинусов);

$a=2b\cos\hat{C}$, откуда $c^2=a^2+b^2-a^2$;

$c>0$ и $b>0$ и $c^2=b^2$, а значит, $c=b$, т. е. $\triangle CAB$ — равнобедренный.

---

* В целях упрощения записей в дальнейшем величины углов A, B и C треугольника ABC будем соответственно обозначать через α, β и γ.

§ 3. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Вписанные и описанные правильные многоугольники. Разделим окружность на n конгруэнтных дуг $n > 2$. Это можно сделать, построив последовательно центральные углы, величина каждого из которых равна $360°/n$ (рис. 215). Соединим последовательно точки деления хордами. Получим n-угольник, вписанный в окружность. Поворот вокруг центра окружности на угол $\alpha = 360°/n$ отобразит построенный n-угольник на себя. Значит, в таком n-угольнике все стороны равны и все углы равны.

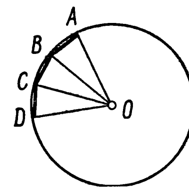


Рис. 215

Многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны, называется *правильным*.

Теорема 1. *Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность.*

Доказательство. Пусть $ABC\ldots L$ — правильный многоугольник. Построим биссектрисы двух соседних его углов A и B. Они пересекутся, так как $\hat{1} + \hat{2} < 2d$. Точку пересечения этих биссектрис O соединим отрезками с остальными вершинами данного многоугольника.

Так как углы A и B равны, то равны и их половины $\hat{1} = \hat{2}$. Значит, и треугольник AOB равнобедренный. Поэтому $|OA| = |OB|$. Теперь сравним треугольники AOB и BOC. В них $[OB]$ — общая сторона, $|AB| = |BC|$ по условию, $\hat{2} = \hat{3}$ как половины угла B. Следовательно, $\triangle AOB \cong \triangle BOC$, откуда $|OB| = |OC|$.

Итак, $|OA| = |OB| = |OC|$.

Продолжая сравнение соседних треугольников, получим:

$$|OA| = |OB| = |OC| = \ldots = |OL|.$$

Отсюда следует, что все вершины данного многоугольника лежат на окружности с центром O.

Теорема 2. *Во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.*

Доказательство. Проведем через центр O окружности, описанной около правильного n-угольника $ABC\ldots M$, перпендикуляры к его сторонам (рис. 216). Обозначим их основания через A_1, B_1, $\ldots$, M_1. Поворот вокруг центра O на угол $360°/n$ отобразит многоугольник на себя. При этом точка A_1 отобразится на точку B_1. Точка B_1 — на точку C_1, и т. д. Точка M_1 отобразится на точку A_1. Следовательно, $|OA_1| = |OB_1| = |OC_1| = \ldots \ldots = |OM_1|$ и точки A_1, B_1, C_1, ..., M_1 будут лежать на одной окружности с центром O. Любая сторона данного многоугольника будет касаться этой окружности.

Центр вписанной и описанной около правильного многоугольника окружности называется также *центром правильного многоугольника*. Он является центром поворотов на углы $360°/n$; такие повороты отображают этот

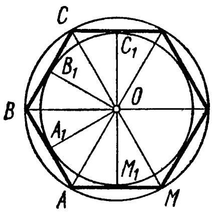


Рис. 216

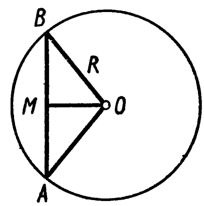


Рис. 217

правильный многоугольник на себя. Отрезок перпендикуляра, проведенного из центра правильного многоугольника к его стороне, называется *апофемой* этого правильного многоугольника.

Пусть $[AB]$ — сторона n-угольника, вписанного в окружность радиуса R (рис. 217). Построим апофему OM. В прямоугольном треугольнике AOM имеем:

$$\widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n},$$

$$|AM| = |AO| \sin \widehat{AOM} = R \sin \frac{180°}{n}.$$

Но $|AB| = 2|AM|$, следовательно, $|AB| = 2R \sin \frac{180°}{n}$. Сторону правильного n-треугольника принято обозначать a_n.

Теорема 3. *Сторона a_n правильного n-угольника выражается через радиус R описанной около него окружности формулой* $a_n = 2R \sin \frac{180°}{n}$.

Следствие 1. $a_6 = R$.

Действительно,

$$a_6 = 2R \sin \frac{180°}{6} = 2R \sin 30° = 2R \cdot \frac{1}{2} = R.$$

Следствие 2. $a_4 = R\sqrt{2}$.
Действительно,

$$a_4 = 2R\sin\frac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = 2R\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}.$$

Следствие 3. $a_3 = R\sqrt{3}$.
Действительно,

$$a_3 = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

2. Площадь правильных многоугольников. Для отыскания площади правильного n-угольника разобьем его на n конгруэнтных треугольников, соединяя отрезками

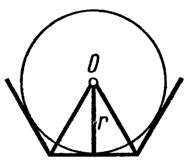


Рис. 218

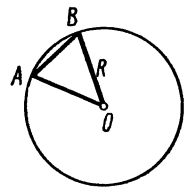


Рис. 219

вершины с центром (рис. 218). Площадь одного такого треугольника будет равна $\frac{1}{2}a_n r$, где r — радиус вписанной окружности.

Площадь всего многоугольника будет равна $\frac{1}{2}a_n rn$. Но $a_n n$ — периметр p многоугольника. Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{2}P_r.$$

Мы доказали теорему: *площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.*

Найдем теперь выражение площади правильного многоугольника через радиус R описанной окружности (рис. 219):

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\widehat{AOB};\quad S_{AOB}\,\frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Тогда для площади правильного n-угольника имеем:

$$S_n = \frac{1}{2}R^2\cdot n\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Вопросы для самопроверки

1. При выполнении каких условий говорят, что «поворот задан»?
2. Будут ли повороты R^{180° и R^{-180° различны?
3. При каких значениях числа k будет справедлива следующая запись:

$$R^{\beta} = R^{\beta + 360k}?$$

4. Каждый ли правильный многоугольник имеет центр симметрии?
5. Сколько существует перемещений, отображающих на себя: а) правильный пятиугольник, б) правильный шестиугольник?
6. Правильный n-угольник вращается вокруг своего центра. При каких значениях угла поворота α этот n-угольник будет совмещаться сам с собой?

Упражнения

1. Запишите с использованием обозначения R^{α}, $-180^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$, повороты на угол: а) 825°; б) -522°.

2. Укажите все углы поворота около точки O, при которых равносторонний треугольник отображается на себя. O — центр треугольника.

3. Укажите все углы поворота около точки O, при которых квадрат отображается на себя; O — центр квадрата.

4. В прямоугольной системе координат дана точка $A\,|\,X;\ Y\,|$. а) Каковы будут координаты точки A_1, на которую отобразится точка A при повороте на 630° около начала координат?

б) Укажите координаты точки A_2, если $A_2 = R^{180^\circ}(A_1)$.

5. Какие координаты имеют точки единичной окружности: а) P_{-135°; б) P_{-90°; в) P_{-225°? Сделайте чертеж.

6. Определите знаки значений функций синуса и косинуса углов: а) 260°; б) -280°; в) 300°; г) -300°. Сделайте чертеж.

7. Чему равны синус и косинус углов: а) 180°; б) -225°?

8. Постройте углы α, если $\cos\alpha = -1$.

9. Постройте углы γ, удовлетворяющие равенству $\sin\gamma = -0{,}9$. Выпишите значения всех таких углов.

10. Выразите через тригонометрические функции положительных углов, меньших 45°, тригонометрические функции углов: а) 196°; (б 480°; в) (-285°).

11. В прямоугольном треугольнике ADB $|AD| = 7$ см, $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 31^\circ 20'$. Вычислите $|DB|$.

12. Длина тени дерева равна 12 м. Вершина дерева видна из крайней точки тени под углом 39°. Какова высота дерева?

13. Наклонный въезд в склад имеет длину 9,2 м, а высота его подъема равна 2,1 м. Вычислите угол наклона въезда.

14. Периметр равнобедренного треугольника равен a, а угол при основании α. Выразите через a и α площадь треугольника. Вычислите эту площадь при $a = 2$ см и $\alpha = 10^\circ$.

15. Найдите площадь ромба, угол которого 120°, а диагональ, проведенная из вершины этого угла, равна 10 см.

16. Диагональ равнобедренной трапеции, равная 16 см, образует с основанием угол 45°. Вычислить площадь трапеции.

17. Стороны параллелограмма равны 4 и 5 см. Угол его $52°$. Вычислите длину его наибольшей диагонали.

18. В параллелограмме острый угол равен $60°$. Вычислите стороны параллелограмма, если его периметр равен 22 см, а меньшая диагональ равна 7 см.

19. Вычислите площадь параллелограмма $ABCD$, если его диагонали равны 4 и 6 см, а острый угол равен $45°$.

20. В треугольнике KPD $|PD|=6$ см, $\widehat{K}=60°$, $\widehat{P}=45°$. Вычислите стороны KD и KP.

ОТВЕТЫ

ЧАСТЬ I

Глава первая

§ 1

1. $A=\{x \mid x=k^3\}$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **2.** $A=\{-3; -2; -1; 0; 1\}$. **4.** Конечно. **5.** Бесконечно. **6.** $\{1; 2; 3; 4\}$, $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$, $\{1; 3; 4\}$, $\{2; 3; 4\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 4\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{3; 4\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\varnothing$. **7.** Бесконечно. **8.** $\{1; 2\}$. **9.** Множество всех равнобедренных треугольников. **10.** Множество всех ромбов. **11.** $\{x \mid x=6n\}$ $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **13.** Множество целых чисел, оканчивающихся цифрой 5. Это множество бесконечно. **14.** $\{1; 2; 3; 10; 11\}$. **15.** $\{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22; 24; \ldots\}$. **16.** $\{1; 3; 5; 7; 9; 10; 11; 13; 15; 17; 19; 20; 21; 23; 25; 27; 28; 29; 30; 31; \ldots\}$.

§ 2

1. а) 3001; б) 2189544; в) 6355; г) 374; д) 0. **2.** а) 1; 3; б) 1; 2; 3; 6. **3.** а) $Д$ (7105, 10 759)=203, б) $Д$ (74 292, 74 538)=246. **4.** $Д(a, b)=b$; $K(a, b)=a$. **5.** 4 и 3; 4 и 13; 8 и 3; 8 и 13; 3 и 13; 3 и 26. **6.** $2n$, $3n$, $5n$, где $n \in N$; **7.** $2n-1$, где $n \in N$. **8.** а) $3n+2$; б) $4n+1$; в) $5n+3$, где $n \in N$. **9.** а) 21, 42, 63; б) 42, 84, 126. **10.** а) K (18, 36)=36; б) K (14, 35)=70. **13.** 1 и 3. **14.** а) 0, 2, 4, 6, 8; б) 2, 5, 8; в) 0,5; г) 8; д) 0, 4, 8; е) 2, 8; ж) 0.

§ 3

1. а) 1; б) 4; в) 681,5; г) 9,5. **2.** а) 1,12; б) 0; в) 0; г) 0, 2418. **3.** а) $18\frac{103}{150}$; б) 2,24; в) $1\frac{7}{27}$. **4.** а) 3; б) 12,6 кг; в) 132 руб; г) 19 мин. **5.** а) 300; б) 130; в) 500; г) 600. **6.** а) 60%; б) 45%; в) 78%. **7.** 19,8. **8.** 100 **9.** 3/14%. **10.** а) —0,3; б) 17/15; в) —2/5. **12.** а) да; б) нет; в) да; г) нет. **13.** а) $N \cup Z=Z$; $N \cap Z=N$; б) $Z \cup Q=Q$; $Z \cap Q=Z$. **14.** а) да; б) нет; в) да; г) нет. **15.** а) да; б) да; в) да; г) нет. **16.** а) да; б) да; в) да; г) да.

§ 4

1. а) $a<b$; б) $a>b$; в) $a>b$; г) $a>b$; д) $a>b$; е) $a<b$; ж) $a<b$; з) $a<b$; и) $a<b$. **3.** -3; $-2\frac{1}{7}$; $-2\frac{1}{8}$, 0; $\frac{3}{14}$; $\frac{2}{7}$.

5. а) $2 < x < 8$; б) $x \geqslant -1$; в) $x > 0$; г) $-10 \leqslant x \leqslant 0$; д) $x \leqslant -4$; е) $x < 2$, 3; ж) $|x| < 2$, з) $|x| \leqslant 4$. 6. а) $A \cup B = [1;\ 8]$, $A \cap B = [4;\ 5]$; б) $A \cup B =]0;\ 5{,}5[$, $A \cap B = \left[3\frac{2}{3};\ 3{,}7\right]$; в) $A \cup B =]-9;\ 2{,}2[$, $A \cap B = [-8;\ 2\frac{1}{6}[$; г) $A \cup B =]-4;\ +\infty[$, $A \cap B = [0;+\infty[$; д) $A \cup B =]-\infty;\ +\infty[$, $A \cap B = \{1\}$; е) $A \cup B = [-4;\ 1[\cup]1;\ 4]$, $A \cap B = \varnothing$. 7. а) $A \cap N = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 8\}$, $A \cap Z = \{-3; -2; -1; 0; 1; \ldots; 8\}$; б) $A \cap N = \{1; 2; 3; \ldots; 8\}$, $A \cap Z = \{-3; -2; -1; 0; 1; \ldots; 8\}$; в) $A \cap N = \{1; 2; 3; \ldots\}$, $A \cap Z = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ \ldots\}$; г) $A \cap N = \{1\}$, $A \cap Z = \{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1\}$; д) $A \cap N = \varnothing$, $A \cap Z = \{-7; -6; -5;\ \ldots;\ 0\}$; е) $A \cap N = \varnothing$, $A \cap Z = \varnothing$.

Глава вторая

§ 1

1. а) $-8ab$; б) $7{,}65m^2n$; в) $13a^5b^4c^7$; г) $2{,}8x^4y^5$; д) $-\frac{3}{4}a^{2n}$; е) $-8x^3y^6$; ж) $\frac{1}{2}x^{11}y^{11}$; з) $-16a^{21}b^{13}$; и) $12x^3y-8x^2y^2+4xy^3$; к) $2a^2+5ab+2b^2$; л) a^3+3a^2+3a+2. 2. а) $a^2+10a+25$; б) $9a^2-42a+49$; в) $a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}$; г) $1-3x+3x^2-x^3$; д) $27+27y+9y^2+y^3$; е) $27a^3-9a^2b+ab^2-\frac{1}{27}b^3$; ж) $16-a^2$; з) a^4-64; и) $a^{2n}b^{2k}-a^{2k}b^{2n}$; к) a^3-8b^3; л) a^3+27; м) a^6+b^6. 3. а) 2496; б) 9951; в) 960; г) 4,47; д) $11\frac{2}{3}$; е) 1024, ж) 2601; з) 9801; и) 1600; к) 4900. 6. а) x^3+x^2+x-2; б) $2x^3-3x^2-3x+1$; в) $x^9-3x^6+3x^3-1$; г) $x^4+2x^3-x^2-2x+1$. 7. а) $2x^2+6y^2+2x+2y+4$; б) $x^4-y^4-x^3-y^3-x^2y-xy^2+x^2-y^2-x-y$; в) $x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2+2y^2+1$). 9. а) $(a-2)(3x-1)$; б) $(a+7b)(c-3)$; в) $9m^3n^3(7m+3n-5m^2n^4)$; г) $(5bc-2k)(bc^2-k)$; д) $(2x^2y+3z^2)(xy-z)$; е) $(12a-19b)(2x-1)$; ж) $-2mn(2m-3n)^2$; з) $25(a-0{,}01bg)(a+0{,}1bg)$; и) $(7a-12b)(23a-12b)$; к) $(14n+2t)(8n-2t)$; л) $(2t-5n+6)(2t-5n-6)$; м) $-(p^2-3k)^2$; н) $-p^3q^6(4q-9p)^2$; о) $6(x-2)^3$; п) $4{,}5a^{2n-1}(2a^n-1)$; р) $4a^4p^2(a-2p)(a^2+2ap+4p^2)$; с) $5p^{2n}q^n(1+3p^{3n}q^n)$; т) $-8(5z^2+2y^2)(z^2-3y^2)$; у) $(10t+3f^2)(100t^2-30t\cdot f^2+9f^4)$; 1). $2a(4a-1)^3$; х) $7(1-2a^2b)(1+2a^2b+4a^4b^2)$; ц) $(x+3)(x+4)$. ф0 а) 14; б) 20,4; в) 3.

§ 2

1. а) 1; б) 3; в) $-23/7$; г) $81/91$. 2. а) $4/3$; б) 0; в) 1; г) -2. 3. а) $]-\infty;\ 0[\cup]0,\ +\infty[$; б) $]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$; в) $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$; г) $]-\infty;\ 7/3[\cup]7/3;\ +\infty[$; д) $]-\infty;\ 1[\cup]1;\ 3[\cup]3;\ +\infty[$; е) $]-\infty;\ +\infty[$; ж) $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ 6[\cup]6;\ +\infty[$; з) $]-\infty;\ 2[\cup]2;\ 5[\cup]5;\ +\infty[$. 7. а) 1; б) $2/11$; в) $-0{,}9$. 8. а) $\frac{9x^2}{11y}$; б) $\frac{1-4x^2}{6x}$; в) $\frac{4-x}{4+x}$; г) $\frac{b}{2a^2}$; д) $\frac{1}{2a(a-5)}$; е) $-\frac{(x-1)^2}{x+1}$; ж) $\frac{x-y+z}{x-y-z}$; з) $\frac{x-2}{x+1}$. 9. $\frac{x-5}{4(x-2)}$. 10. а) $\frac{1}{9}$;

б) $-\frac{14}{3}$; в) $-\frac{9}{13}$; г) $\frac{55}{73}$. **11.** а) $-\frac{10}{9}$; б) $\frac{3a^9}{2}$; в) $-\frac{4a^8}{3x}$; г) $\frac{15a}{4(a-1)}$; д) $-\frac{3}{a+2}$; е) $\frac{a+1}{a-1}$; ж) $-\frac{(x-2)^{15}}{(2x-1)^5}$; з) $\frac{(2x+1)^{2mk}}{(2x-1)^{2nk}}$. **12.** а) $27a^2$; б) 8; в) $x-y$; г) $\frac{54}{x-3}$; д) $\frac{13x^2+120}{336x^2}$; е) $\frac{1}{y^{2n+1}}$; ж) $\frac{1-33a}{2a(3a+1)}$; з) $\frac{9x+4}{12(3x-1)}$; и) $\frac{a+b}{c^2-d^2}$; к) $\frac{4x^2+12x+10}{4x^2-9}$; л) 0; м) $\frac{1}{3a+2}$; н) $x+2$; о) $\frac{2xy}{(x+y)^2(x-y)}$; п) 1. **14.** —10. **15.** а) 12; б) $2(a-3)$; в) —1; г) —1; д) $\frac{x}{x+y}$. **16.** а) $\frac{4}{49}$; б) 0,5.

Глава третья

§ 1

1. а) 63; б) $\frac{17}{13}$; в) $\frac{7}{3}$; г) 0,12. **2.** а) $6ac\sqrt{bc}$; б) $3a^2c^2\sqrt[4]{ab}$; в) $\frac{x^2}{ab^3}\sqrt[3]{y}$; г) $\frac{3xy}{5a^2b}\sqrt[3]{y^2}$; д) $x^2\cdot\sqrt[n]{x}$. **3.** а) $\sqrt{5bc^5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{16x^2}{243y}}$. **4.** а) $\sqrt{3mn}$; б) $\frac{b}{d}\sqrt[3]{\frac{2a^2b}{3c}}$; в) $ab^2\sqrt{2ac}$; г) $\sqrt[4]{a^mb^{2n}}$. **5.** а) $-a\sqrt{b}$; б) $-\frac{1}{2b}\sqrt{3a}$; в) $1-a$; г) $a-2$; д) $-a-3$; е) $|a-b|$; ж) $|a+b|$. **6.** $\sqrt[5]{6}>\sqrt[10]{35}$. **7.** Равенство а) верно. **8.** а) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; б) $\frac{a}{3b}\sqrt{6a}$; в) $\frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}$; г) $\sqrt[3]{1+b}$.
9. а) $20\sqrt{2}$; б) $|ab|-ab\sqrt[3]{ab}$. **10.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\sqrt{0,3}$; в) $2|a|\sqrt[6]{2a^2}$; г) $\sqrt[10]{\sqrt{5}-2}$; д) $8x^3y\sqrt[3]{y}-10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2}+$ $+2x^2y^3\sqrt[3]{x}$; е) $\frac{1}{ab^2}\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{b}-6ab^3\cdot\sqrt{a}+\frac{b}{a^2}\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[24]{b}$.
11. а) $-0,001a^2b\sqrt[5]{a^2b}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$; в) $15\frac{1}{8}$; г) $\sqrt[4]{m}$; д) $\sqrt[10]{a^9}$; е) $\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$.

§ 2

1. а) 0,1; б) 1; в) $2\frac{1}{4}$; г) $\frac{81}{625}$; д) 7; е) 16; ж) 0,1; з) 1/256; и) 1/27; к) 1000/121; л) 40; м) 3/2; н) 3/4; о) 1/8. **2.** а) $\frac{2b}{a^2}$; б) $2a^2bx^3$; в) $\frac{d^{2/3}}{ab^{3/4}c}$; г) $\frac{d^{1/3}c^{1/3}}{a^{2/3}b^{1/3}}$. **3.** а) $\frac{16}{49}m^{10}n^{-1}x^{-1}$; б) $2ab^{-1}$;

в) $xy^{-1/2}$; г) $\frac{100\,000}{243}\,mn^{5/3}$; д) $125m^6n^{-9}$; е) $\frac{a^{2/3}}{b^{4/3}}$; ж) $\frac{a^{3/5}\,yx^{3/20}}{2}$; з) $\frac{4c^2db^5}{5a^4}$; и) $\frac{x^{48/5}}{2^{4/5}\,y^{32/5}}$; к) $a^{-2}-b^{-2}$; л) $a^{-6}-b^{-6}$; м) -1; н) $a^{-2/3}b^{-2/3}c^{-1/3}$; о) $a^{2/7}\,b^{1/2}$.

§ 3

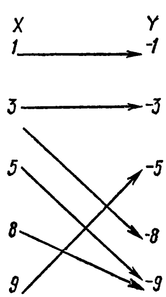
1. а) $\frac{\sqrt{a}}{a}$; б) $\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$; в) $\frac{\sqrt[4]{a^3b}}{ab}$; г) $\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{30}$; д) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$; е) $\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}$. **2.** а) $\sqrt{11}-3\sqrt{7}+4$; б) $\frac{13-\sqrt{5}}{2}$; в) -10. **3.** а) $\frac{2}{2-a}$; б) 0; в) 1; г) $-\frac{\sqrt{y}}{x}$; д) 0; е) 3; ж) $\left|\frac{x+y}{x-y}\right|$; з) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; и) 0; к) $-a^{2/3}\,b^{1/3}$; л) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$; м) $x+1$; н) $\frac{1}{a}$; о) $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$; п) $\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ при $a>1$, $-\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ при $-1<a<1$; р) $\frac{16a^4}{x^2}$; с) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$; т) $\frac{a}{a+1}$.

Глава четвертая

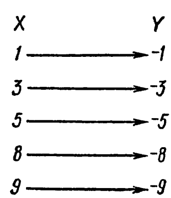
§ 1

1. Например, так:

а)

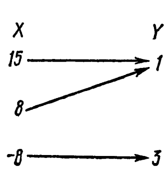


б)

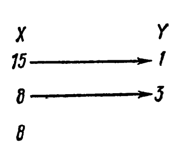


2. Например, так.

а)



б)



3. а) $-3 \to 3$; $-2 \to 2$; $0 \to 0$; $1 \to 1$; $5 \to 5$; б) $(-3;\ 3)$; $(-2;\ 2)$; $(0;\ 0)$; $(1;\ 1)$; $(5;\ 5)$. **4.** $X=\{1;\ 2;\ 3;\ 10\}$, $Y=\{-1;\ -2;\ -3;\ -10\}$; $f(1)=-1$, $f(10)=-10$. **5.** Да.

6.

x	1	2	3
y	1	4	9

7.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	27	64	125	216	343	512	729	1000

8. $f(0)=0$; $f(1)=\frac{1}{2}$; $f(4)=2$. **9.** 0; -1; 0; 3. **10.** Полуокружность, изображенная на рис. 28, *б*. **11.** Да; $0 \leqslant x \leqslant 11$. **12.** $Y=\{-1;\ 0;\ 8;\ 24;\ 48\}$. **13.** $y=2x$.

§ 2

1. а) возрастающая; б) возрастающая; в) убывающая; г) возрастающая. **2.** возрастающая на $]-\infty;\ +\infty[$; б) убывающая на $[-\infty;\ 0]$, возрастающая на $]\ 0;\ +\infty[$. **4.** а) четная; б) нечетная; в) нечетная.

§ 3

2. $y=2x$. **3.** $y=3+x$. **4.** $y=10+3x$. **5.** а), б), в) на 3. **7.** а) нет; б) да; в) да. **8.** 2. **9.** -2. **10.** а) II и IV; б) I и III. **11.** $y=1{,}5x$. **12.** $y=\frac{12}{x}$. **13.** а) I и III; б) II и IV.

§ 4

1. $f(1)=2$, $f(2)=8$, $f(-3)=18$. **2.** а) $[2;\ 8]$; б) $[2;\ 8]$; в) $]0;\ 9]$; г) $[0;\ 9[$. **3.** а) да; б) да; в) нет; г) да. **4.** а) $y=0$ при $x=0$; б) $y>0$ при любом $x \neq 0$. **5.** а) $a=3$; б) $a=2\cdot 10^4$; в) $a=\frac{1}{400}$.

§ 5

4. а) $x<-4$; $x>2$; б) $-4<x<2$. **5.** а) $\left(-\frac{1}{2};\ -6\frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2};\ -4\frac{1}{2}\right)$. **7.** а) да; б) да; в) нет. **8.** а) $c=20$; б) $b=12$. **9.** $a=-21$, $b=71$.

§ 6

1. а) (30; 1), (20; 2), (30; 3), (40; 4), (50; 5); б) нет. **2.** (10; 1); (20; 2), (20; 3). Нет. **3.** $]-1;\ +\infty[$, да. **4.** а) $y=\frac{x}{2}$; б) $y=\frac{x+2}{2}$; в) $y=4x-3$; г) $y=\sqrt[3]{x}$.

Глава пятая

§ 1

1. а) 3; б) 4; в) 51; г) $\frac{3}{5}$; д) 9; е) 17; ж) $\varnothing$. **2.** а) 12; б) $\varnothing$; в) $\frac{4}{3}$; г) $-\frac{9}{2}$; д) 1. **3.** а) -2; 2; б) 0; в) $\varnothing$; г) $\{3;\ 7\}$; д) 4; е) $\varnothing$; ж) $\{2;\ 5\}$; з) $-2{,}5$; и) $\varnothing$. **4.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\left\{-4;\ \frac{6}{5}\right\}$; в) $\varnothing$.

§ 2

1. а) $\{-19/3;\ 19/3\}$; б) $\{-26;\ 26\}$; в) $\{-5/12;\ 5/12\}$; г) $\{0;\ 21/5\}$; д) $\varnothing$; е) $\{-6;\ 6\}$; ж) $\{0;\ -1;\ 1\}$. **2.** а) $\{-16;\ 4\}$; б) $\{-12;\ -2\}$, в) $\{-3;\ 4\}$; г) $-1{,}5$; д) $\varnothing$. **3.** а) $\{-9;\ 2\}$; б) $\{-1;\ -38/15\}$ в) $\{-4;\ 9\}$; г) $\{2;\ 124/39\}$; д) $\{3;\ 1{,}4\}$; е) $\{9{,}2;\ 12\}$. **4.** а) $\{-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$; б) $\left\{-3;\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 3\right\}$; в) $\left\{-\sqrt{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 2\right\}$; г) $\{-5;\ -1;\ 3\}$; д) $\{-1/3;\ 1/6;\ 1;\ 3/2\}$; е) $\{-1/3;\ 1/2\}$. **5.** а) Два различных корня; б) нет корней; в) нет корней; г) два равных корня; д) два различных корня; е) нет корней; ж) два равных корня. **6.** а) 1; б) 13/14; в) 0,2; 2. **7.** а) -8; б) -5; в) 15. **8.** а) $x^2-6x-16=0$; б) $2x^2-10x+3=0$; в) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\,x+\sqrt{6}=0$; г) $9x^2-18x-11=0$; д) $4x^2-mx+m^2-n^2=0$. **9.** а) $(x-7)(x+5)$; б) $(a-18)(a-11)$; в) $(m-4)(m+3)$; г) $(x+7)(5x-18)$; д) $(2m-3)(m+1)$.

10. а) $\frac{x+13}{x+15}$; б) $\frac{b-7x}{b+x}$; в) $\frac{2(a+9)}{3(a-7)}$. **11.** а) 39; б) -135. **12.** а) $2x^2-9x+9=0$; б) $x^2-2{,}3x+0{,}76=0$. **13.** $25x^2-21x+4=0$. **14.** $3x^2-8x+2=0$. **15.** а) $x^2+2px+4q=0$; б) $qx^2+px+1=0$; в) $x^2-(p^2-2q)\,x+q^2=0$; г) $x^2+(p^3-3pq)\,x+q^3=0$; д) $4x^2+4q-p^2=0$. **16.** $\{3;\ 5\}$.

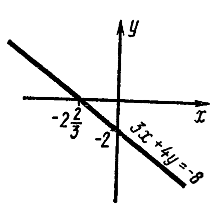
§ 3.

1. $\left\{\left(x;\ \frac{3x-5}{2}\right) \mid x\in R\right\}$. **2.** $x-2y=5$. **3.** $x-2y=5$. **6.** а) $(3;\ 5)$; б) $(2;\ -3)$; в) $\left(\frac{5}{3};\ \frac{3}{4}\right)$. **9.** а) $(1;\ -1)$; б) $\left(5;\ 2\frac{1}{2}\right)$. **10.** а) $(4;\ -3)$, $(17;\ 10)$; б) $(4;\ 2)$, $(16;\ -10)$; в) $(11;\ 7)$, $\left(10\frac{5}{8};\ 6\frac{3}{4}\right)$. **11.** а) $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$; б) $(3;\ 2)$, $(3;\ -3)$, $(-4;\ 2)$, $(-4;\ -3)$; в) $(3;\ 4)$ $(-3;\ -4)$, $\left(\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{57}};\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{57}}\right)\left(-\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{57}};\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{57}}\right)$; г) $(3;\ 1)$, $\left(\frac{2}{3};\ -1\frac{1}{3}\right)$. **12.** а) $(5;\ 1)$, $(-5;\ -1)$; б) $(+5;\ +4)$, $(-5;\ -4)$; в) $(2;\ 6)$; $(1;\ 3)$; г) $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$.

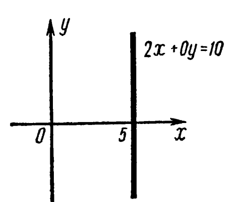
§ 4.

1. а) 3; б) 0,5; в) 1,5; г) $\{1;\ 5\}$; д) $\{\sim-1{,}6;\ \sim0{,}6;\ 1\}$; е) $\{-1;\ 0;\ 1\}$.

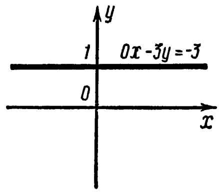
2. а)



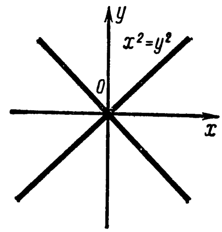
б)



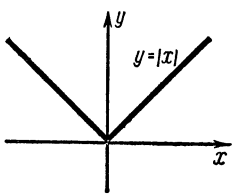
в)


$0x-3y=-3$
y
1
0
x

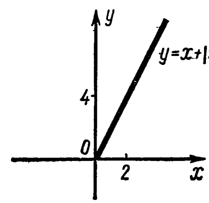
г)


$x^2=y^2$
y
0
x

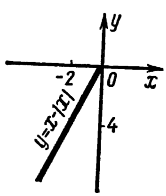
д)


$y=|x|$
y
x

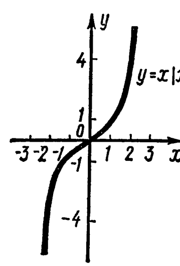
е)


$y=x+|x|$
y
4
0
2
x

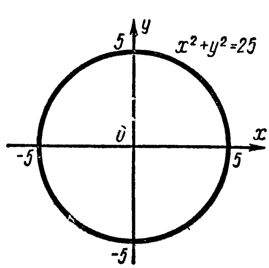
ж)


$y=x-|x|$
y
-2
0
x
-4

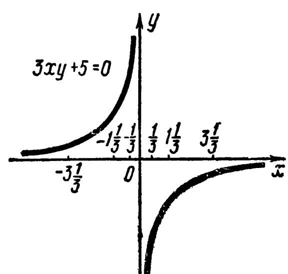
з)


$y=x|x|$
y
4
1
0
-3 -2 -1
1 2 3
x
-1
-4

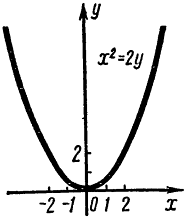
и)


$x^2+y^2=25$
y
5
0
x
-5
5
-5

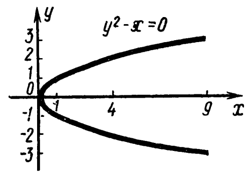
к)


$3xy+5=0$
y
$-1\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $1\frac{1}{3}$ $3\frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{3}$
0
x

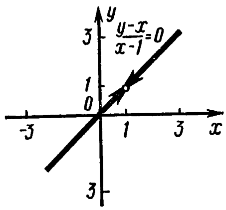
л)



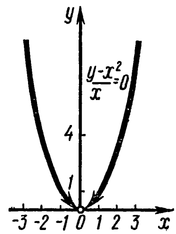
м)



н)



о)



3. а) (3; 2); б) (4; —3); в) бесконечно много решений; г) $\varnothing$; **4.** а) $\{(0; -5);\ (5; 0)\}$; б) $\{(-4; -3);\ (-3; -4);\ (3; 4);\ (4; 3)\}$; в) $\{(-3; 4);\ (3; 4);\ (0; -5)\}$; г) (2; 4); д) $\{(-0{,}5; 0{,}25);\ (0; 0).\ (+0{,}5; 0{,}25)\}$; е) бесконечно много решений.

§ 5.

1. 48 км/ч; 60 км/ч. **2.** 12,5 км/ч. **3.** $4\frac{1}{6}$ ч; $6\frac{1}{6}$ ч. **4.** 6 дней и 4 дня. **5.** 120 листов за 15 дней. **6.** 7. **7.** 35 или 53. **8.** 18%. **9.** 25. **10.** 2,42 кг.

Глава шестая

§ 1

2. а) $a < 0$; б) $a > 0$; в) $a > 0$; г) $a < 0$.

§ 2.

1. а)]4; $+\infty$[; б)]$-\infty$; 60[; в)]$-\infty$; 43[; г) $\varnothing$; д)]$-\infty$; 1/3[; е)]$-\infty$; $+\infty$[. **2.** а)]1/2; $+\infty$[; б)]—7; 7[; в) —29/11; 10/3[; г)]27/10; 6[; д) $\varnothing$; е)]$-\infty$; 5[. **3.** а) $\{1, 2\}$; б) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; в) $\{8, 7, 6, 5, 4, \ldots\}$. **4.** а)]—3/5; $+\infty$[; б)]$-\infty$; 1/4 [$\cup$] 7/3, $+\infty$[; в)]$-\infty$; $+\infty$[. **5.** а)]$-\infty$; 0 [$\cup$] 1/2; $+\infty$[; б)]$-\infty$; —1 [$\cup$] 3/4; $+\infty$[; в)]$-\infty$; —1/2] $\cup$]2; $+\infty$[; г) [—4; 5/3[; д)]$-\infty$; —2[$\cup$]2; $+\infty$[; е)]$-\infty$; 0[$\cup$]3; $+\infty$[; ж)]$-\infty$; 0[$\cup$]18; $+\infty$[; з)]$-\infty$; —2 [$\cup$ [2/9; $+\infty$[. **6.** а)]$-\infty$; —3 [$\cup$] 3; $+\infty$[; б) [—2; 2]; в)]2; 3[; г) [1/3; 3]; д)]$-\infty$; —3 [$\cup$] 0; $+\infty$[; е)]$-\infty$; 0 [$\cup$] 4; $+\infty$[; ж)]$-\infty$; 5/2] $\cup$] 6; $+\infty$[; з) $\varnothing$. **7.** а)]$-\infty$;

$2]\cup[8;\ +\infty[$; б) $[-\sqrt{10};\ \sqrt{10}[$. **8.** а) $[2/3;\ +\infty[$; б) $]-5/2;\ 3]$; в) $]-\infty,\ -2]\cup[1;\ +\infty[$; г) $]-4;\ 4[$. **9.** а) $]1;\ 5/2[\cup[5/2;\ 4[$; б) $]-\infty;\ -4/3]\cup[2;\ +\infty[$; в) $[2;\ 5/2]\cup[3/2;\ 2[$; г) $]-\infty;\ -2[\cup]4/3;\ +\infty[$; д) $[9/2;\ +\infty[$; е) $]-\infty;\ 1]\cup[3/2;\ +\infty[$. **10.** а) $]2;\ +\infty[$; б) $[-3;\ 3]$; в) $]-\infty;\ -1[\cup]2;\ +\infty[$; г) $[2;\ 4]$; д) $]-1;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$; е) $]-\infty;\ -4[\cup]0{,}4[$; ж) $]-1/2;\ 3[$.

Глава седьмая

§ 1

1. а) 1, 3, 5, 7, 9; б) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$; в) 0, 3, 8, 15, 24; г) —2, —4, —8, —16, —32; д) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}$; е) 1, 8, 27, 64, 125. **2.** а) 1 *г*; б) 1 *а*, 1 *b*, 1 д, 1 *е*; в) 1 *б*. **3.** 0,8; $n=4$. **4.** а) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$; б) $\frac{1+n}{n}$; в) $\frac{1}{n(n+1)}$; г) $\frac{4n^2-1}{2n(2n+2)}$; д) $\frac{10n}{3^n}$; е) $\frac{1+2n}{3+2n}$; ж) $\frac{4n-1}{6n-1}$. **5.** а) 3, 5, 7, 9; б) —1, —4, —9, —16; в) —1, —4, —7, —10; г) —1, 0,5; $-\frac{1}{3}$; 0,25; д) 1, —2, 3, —4. **6.** а) 1, 2, 3, 4, 5; $a_n=n$; б) 2, 4, 8, 16, 32; $a_n=2^n$; в) 2, 0, —2, —4, —6; $a_m=2(2-n)$; г) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}$; $a_m=\frac{1}{2^n}$.

§ 2.

1. а), б). **2.** а) $a_1=7$; $d=4$; б) $a_1=1$; $d=2$; в) $a_1=1$; $d=0{,}6$; г) $a_1=1\frac{2}{3}$; $d=2\frac{1}{3}$; д) $a_1=1{,}8$; $d=1{,}6$. **3.** 1. $a_n=10$, $S_n=660$; 2. $a_n=1$, $S_n=32{,}5$, 3. $d=4$, $S_n=1430$; 4. $d=\frac{1}{20}$, $S_n=56\frac{7}{9}$, 5. $a_1=1$, $a_n=34$; 6. $a_1=-38$, $S_n=-360$; 7. $n=11$, $S_n=27{,}5$; 8. $n=25$, $a_n=3$, 9. $d=7$, $a_n=28$; 10. $d=0{,}1$, $n=51$; 11. $a_1=-6$, $d=\frac{3}{4}$; 12. $a_1=32$, $n=62$. **4.** а) $a_1=-7$, $d=3$; б) $a_1=1{,}05$, $d=0{,}8$; в) $a_1=0{,}25$, $d=1{,}5$; г) $a_1=1\frac{2}{3}$, $d=-1\frac{1}{3}$; д) $a_1=0$, $d=1{,}5$. **5.** а) 102,9 м; б) 592,9 м; в) 30 с.

§ 3

1. а); в); д). **2.** 1) $b_n=19683$, $S_n=29524$; 2) $b_1=256$, $S_n=127{,}5$; 3) $q=3$, $S_n=2186$; 4) $b_1=7$, $n=5$; 5) $q=\frac{1}{2}$, $n=7$; 6) $n=8$, $S_n=\frac{3280}{6561}$; 7) $b_1=-2$, $S_n=174762$; 8) $b_1=-1{,}5$, $b_n=40{,}5$. **3.** $b_1=1$, $q=2$, $n=10$.

Глава восьмая

§ 1

4. а) 9, 3, 1, 1/3; б) —2, —1, 0,7, 0, 1, 1,1; в) —1, $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ +\infty[$, —0,7. **5.** а) $1{,}5^{-2{,}8}<1{,}5^{-1{,}5}$; $1{,}5^{-1{,}9}<1{,}5^{0{,}7}$; б) 1,8; $\varnothing$;

$\varnothing$; 0; $\varnothing$; —1,8; в)]1,8; $+\infty$[; $\varnothing$;]$-\infty$; $+\infty$[;]$-\infty$; 0[;]$-\infty$; $+\infty$[; $\varnothing$;]$-\infty$; —1,8[. **6.** а) 5; б) 3; в) 0; г) 4; д) —5/3; е) 2/3; ж) —2/3; з) —1; и) 7/3. **7.** а)]$-\infty$; 4[; б)]$-\infty$; 5[; в)]$-\infty$; 5[; г)]—3; ∞[; д)]$-\infty$; 3[; е)]$-\infty$; —2[; ж)]$-\infty$; 0,5[; з)]—0,5; $+\infty$[. **8.** а) 0; 1; б) 1; 3;]3; $+\infty$[; в) 1;]1; $+\infty$[;]$-\infty$; 1[. **9.** а) 2+0,7; б) 18+0,5; в) 0+0,875; г) —1+0,7; д) —3+0,63; е) —9+8/11. **10.** а) [2, 3[; б) [0; 1[; в) [—3; —2[. **11.** а) $\approx 1{,}445$; 1,047; 6,486; 1,190; б) 16,98; 1122; 219,9; 0,05623. **12.** а) $10^{-0{,}727}$; б) $10^{5{,}49}$.

§ 2

1. а) $\log_2 8=3$; б) $\log_6 36=2$; в) $\log_3 81=4$; г) $\log_2 \frac{1}{2}=-1$; д) $\log_3 \frac{1}{9}=-2$; е) $\log_4 2=1/2$. **3.** а) —1; 1; 0,7; 0,6; 0,2. **4.** а)]$-\infty$; 0[; б)]$-\infty$; -1[$\cup$]1; $+\infty$[; в)]$-\infty$; 1[; г)]$-\infty$; 0[$\cup$]0; $+\infty$[; д)]$-\infty$; $+\infty$[; е)]0; $+\infty$[. **5.** а) 32; б) 0,1; в) 8; г) 4; д) 6; е) 4; ж) 1; з) 3; и) 1/3; к) 4; л) 8; м) 10. **6.** а) $\lg 3+\lg C+\lg d$; б) $\lg 3+\lg m+\lg n-\lg 5$; в) $\lg 5+2\lg a$; г) $\lg 3+4\lg c+3\lg d+\lg k+$ $+2\lg l$; д) $\lg a+\frac{1}{2}\lg b$; е) $\lg 5-\frac{3}{4}\lg p-\frac{1}{3}\lg q$. **7.** а) bc; б) $\sqrt{a}$; в) $\frac{a^2b^3}{c^5}$; г) $\frac{\sqrt[5]{m^2}}{\sqrt[4]{n^3}}$; д) $\frac{(a+b)^2\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}$. **8.** а) —0,1549; б) —1,8239; в) 3,8507; г) 1,3831; д) 2,5344; е) 0,022. **9.** а) 56; б) 2,300; в) 0,03377; г) 412; д) 0,001522. **10.** а) $\log_3 2$; б) $\frac{1}{3}\log_2 3$; в) $\log_3 5+2$; г) 25; д) 1,4; е) 25; ж) 1/2; з) $\sqrt{3\pm 2\sqrt{2}}$; и) 13. **11.** а) 30,89; б) 4,972; в) 12,20, г) 0,3799; д) 148900.

ЧАСТЬ II

Глава девятая

1. Кольцо. а) Круг; б) окружность. **2.** Искомым множеством точек является общая часть кругов, построенных в точках A и B радиусами, равными соответственно 2 и 3 см. **3.** Точка P лежит между точками M и T, так как $|TP|+|PM|=|TM|$. Точка B не лежит на прямой PM, так как $|PB|+|BM|>|PM|$. **4.** Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности. Рассматриваются треугольники ABC и ADC. Имеем: $|AC|<$ <6 см$+2$ см, т. е. $|AC|<8$ см; $|AC|>10$ см-5 см, $|AC|>5$ см; 5 см $<|AC|<8$ см. **5.** Указание. Такой точкой может быть только вершина угла. **6.** Три угла. (Каждая пара лучей определяет угол). **7.** 20. **8.** а) $M\in[AB]$; б) $[PT)\subset\alpha$; в) $\angle ABC\subset\alpha$; г) $[AB]\cap$ $\cap(KD)=M$. **9.** Указание. Один из построенных углов должен находиться во внутренней области второго угла. **10.** Указание. Проведите прямую и постройте прямой угол, имеющий с этой прямой только одну общую точку (вершину угла). Рассмотрите образовавшиеся углы.

Глава десятая

1. 1) Возможны два случая: 1) центр симметрии совпадает с центром данной окружности и 2) центр симметрии не совпадает с центром данной окружности. В первом случае получаем ту же окружность, а во втором — окружность, пересекающую данную и ей конгруэнтную. **4.** а) Угол имеет одну ось симметрии — его биссектрису; б) квадрат имеет четыре оси симметрии. **5.** а) Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии; б) окружность имеет бесчисленное множество осей симметрии. **6.** Центр искомой окружности является точкой пересечения срединного перпендикуляра к отрезку AB с данной окружностью. Таких точек две. Задача имеет два решения. Срединный перпендикуляр может иметь с данной окружностью две, одну или ни одной общей точки. Соответственно задача может иметь два, одно или не иметь ни одного решения. **7.** У к а з а н и е. Так как искомая окружность касается двух данных пересекающихся прямых, то ее центр принадлежит множеству всех точек, равноудаленных от этих прямых. Таким множеством точек является пара прямых, на которых лежат биссектрисы углов, образованных данными прямыми. Так как искомая окружность касается одной из данных прямых, то ее центр лежит на перпендикуляре к этой прямой. Задача имеет два решения. **8.** Если соединить точку O с точками касания B и C, то получатся два прямоугольных треугольника ABO и ACO, которые конгруэнтны по гипотенузе и катету. Значит, точки B и C равноудалены от точек A и O. Поэтому прямая AO является осью симметрии точек B и C. Следовательно, прямые AB и AC симметричны относительно прямой AO и прямая AO является осью симметрии фигуры, состоящей из касательных AB и AC. **9.** Точки касания симметричны относительно прямой AO. Поэтому прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна прямой OA. **13.** Надо разделить данную дугу пополам и затем каждую из полученных дуг также разделить пополам. **18.** Через произвольную точку A данной окружности (O, r) надо построить окружность (A, r) и обозначить через B и C точки ее пересечения с данной окружностью. Затем построить окружность (c, r) и обозначить такую точку пересечения ее данной окружностью через D. Точки B и D — концы одного из диаметров данной окружности (докажите). Построив срединный перпендикуляр к отрезку BD, получим в пересечении с окружностью (O, r) еще две искомые точки. **19.** Проведем две параллельные хорды AB и CD окружности с центром O; точки M и P — их середины. Тогда прямая OM перпердикулярна каждой из прямых AB и CD. Аналогично прямая OP перпендикулярна каждой из прямых AB и CD. Но через точку O можно провести лишь один перпендикуляр к прямой AB. Поэтому прямые OM и OP совпадают. Следовательно, точки M и P лежат на одном и том же диаметре данной окружности.

Глава одиннадцатая

1. Отрезки AB и CD конгруэнтны, так как любые центрально симметричные фигуры конгруэнтны. Прямые AB и CD центрально симметричные и поэтому параллельны. Значит, отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых. **2.** Предполагаем противное и получаем противоречие с аксиомой параллельности. **3.** У к а з а н и е. Доказательство проводится от противного. **4.** Построение сводится к нахождению образов вершин данного треугольника в заданном параллельном переносе. **7.** При условии, когда данный отрезок перпендикулярен направлению переноса. **8.** Не всегда. Это возможно, если оси симметрии параллельны. **9.** Делим сторону AB на три равные части, а затем через точки деления проводим прямые, параллельные стороне BC (или AD) четырехугольника $ABCD$. Эти прямые разделят сторону CD также на три равные части. **10.** 18 см. **11.** 16 см. Стороны полученного четырехугольника являются средними линиями треугольников, на которые каждая диагональ разбивает данный четырехугольник.

Глава двенадцатая

1. 1. а) $\widehat{KAC}=37^\circ$, $\widehat{C}=38^\circ$, $\widehat{K}=105^\circ$; $|CK|<|AK|<|AC|$. **3.** 18 см и 43 см. **4.** 70°, 110°, 70°, 110°. **5.** ≈ 42 мм. **8.** Задача имеет три решения. **11.** 30°; 150°. **12.** Квадрат 10 см. **13.** 75°, 105°. **14.** 12 см, 32 см. **16.** Указание. Воспользуйтесь теоремой Фалеса. **17.** 4 см. **18.** 4,5 см. **19.** $h_b:h_c=3:1$. **20.** 1:2. **21.** 210 см^2. **22.** 75 см^2. **23.** Указание. Воспользуйтесь признаком параллельности прямых. **24.** 100°, 100°, 80°. **25.** 40°, 40°, 100° или 40°, 70°, 70°. **26.** $\widehat{CAD}=30^\circ$, $\widehat{ACD}=40^\circ$, $\widehat{CDA}=110^\circ$. **27.** 10°.

Глава тринадцатая

3. Десять: $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{PK}$. **4.** 12. **8.** а), д) $\overrightarrow{AC}$; б) $\vec{0}$; в) $\overrightarrow{BA}$; г) $\vec{0}$. **9.** $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}$ — произвольный вектор. **10.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны иметь противоположные направления, $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$ или быть равными нулю. **11.** Может. Рассмотрите треугольник ABC, у которого сторона AC наименьшая. Тогда векторы, заданные парами точек (A, B) и (B, C) будут удовлетворять условию задачи. **13.** $\overrightarrow{DA}=-(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO})$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}$. **16.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, а так как MK — средняя линия треугольника ABC, то $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$. **17.** $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. **18.** $\vec{a}-4\vec{b}$. **19.** $-\frac{1}{3}\times(4\vec{m}-5\vec{n})$. **20.** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OC}-n\overrightarrow{OB}$.

Глава четырнадцатая

3. а) 210 м; б) 25 см. **4.** а) $\frac{1}{5000}$; б) 230 см. **7.** 31 см; 1,24 см. **10.** 45 см. **13.** 40 см; 25; 30 см. **14.** 2 см. **15.** Указание. Надо воспользоваться признаками подобия треугольников по двум углам. **16.** Указание. Следует воспользоваться признаками подобия прямоугольных треугольников по острому углу. **17.** $\approx 27{,}6$ см. **18.** 16 см. **19.** 16 см; 2 см; $\approx 5{,}7$ см. **20.** 10 см; $\approx 16{,}7$ см; $\approx 13{,}3$ см. **21.** 5 см. **22.** 3,5 см. **23.** 6 см. **25.** $\approx 6{,}9$ см. **27.** 8 см; 12 см; 16 см, 20 см. **28.** $\approx 8{,}5$ см. **29.** В отношении $(1+\sqrt{2}):1$, считая от вершины. **30.** Указание. Сначала постройте равнобедренный треугольник, подобный искомому (по углу при основании), а затем воспользуйтесь гомотетией. **31.** Указание. Сначала постройте треугольник, подобный искомому (по углу при вершине и отношению заключающих его сторон), а затем воспользуйтесь тем, что периметры подобных многоугольников относятся как соответственные стороны. **32.** Указание. Около данного треугольника опишите окружность и воспользуйтесь гомотетией, отображающей эту окружность и данную. Задача имеет одно или два решения.

Глава пятнадцатая

1. а) $R^{105°}$; б) $R^{-162°}$. **2.** $120° n$, $n \in z$. **3.** $90° n$, $n \in z$. **4.** 1) $A_1(y; -x)$, 2) $A_2(-y; x)$. **5.** а) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $(0; -1)$; в) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
6. а) $\sin 260° < 0$, $\cos 260° < 0$; б) $\sin(-280°) > 0$, $\cos(-280°) > 0$; в) $\sin 300° < 0$, $\cos 300° > 0$; г) $\sin(-300°) > 0$, $\cos(-300°) > 0$.
7. а) $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$; б) $\sin(-225°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\pm 180° + 360° n$, где n — целое число.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава третья. Преобразование иррациональных выражений

Глава четвертая. Функции и графики

Глава восьмая. Показательная и логарифмическая функции

ЧАСТЬ II. ГЕОМЕТРИЯ

Глава девятая. Начальные понятия геометрии

Глава десятая. Конгруэнтность фигур и перемещения

Глава одиннадцатая. Параллельный перенос (вектор)

Пособие по математике для поступающих в тех-
П61 никумы. Под ред. М. Л. Смолянского. Учебн. пособие для техникумов. М.. «Высш. школа», 1978.

334 с. с илл.

На обороте тит. л. авт: В. А. Гусев, В. К. Егерев, А. Г. Мордкович, М. Л. Смолянский.

Данное учебное пособие предназначено для лиц, поступающих в техникумы на базе восьми классов средней школы Материал книги полностью охватывает программу вступительных экзаменов Изложение материала сопровождается большим количеством решенных примеров.

$$П\frac{60601-061}{001(01)-78}262-77$$

51

Валерий Александрович Гусев, Виктор Константинович Егерев, Александр Григорьевич Мордкович, Марк Львович Смолянский

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ТЕХНИКУМЫ

Редактор А. И. Селиверстова. Художник В. И. Казакова. Художественный Редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор З. В. Нуждина. Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 916

Сдано в набор 13/IV 1977 г. Подп. к печати 15/XI 1977 г. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бум. тип. № 3. Объем 10,5 печ. л. Усл. п. л. 17,64. Уч.-изд. л. 16,74. Изд. № ФМ-616. Тираж 175 000 экз. Заказ № 2098. Цена 60 коп.

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1977 г. Позиция № 262. Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

60 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА
ВЫСШАЯ ШКОЛА
1978 ГОД