

В.И. Григорьев, И.В. Григорьева,  
В.С. Ростовский

ВАРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ  
ЭФФЕКТ  
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ  
ПОЯСА ПЛАНЕТ И ЗВЕЗД



В.И. Григорьев, Е.В. Григорьева,  
В.С. Ростовский

БАРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ  
ЭФФЕКТ  
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ  
ПОЛЯ ПЛАНЕТ И ЗВЕЗД



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ  
2003

УДК 521  
ББК 22.632  
Г83

Григорьев В. И., Григорьева Е. В., Ростовский В. С. Баро-электрический эффект и электромагнитные поля планет и звезд. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 192 с. — ISBN 5-9221-0391-1.

На базе развитой авторами теории бароэлектрического эффекта — эффекта перераспределения зарядов в средах при наличии в них неоднородных механических напряжений — получены оценки для электрических и магнитных полей, возникающих у планет и звезд как благодаря действию их собственного гравитационного поля, так и из-за испытываемых ими приливных воздействий.

Второе издание — 1999 г.

Для студентов, аспирантов и сотрудников физических специальностей, интересующихся вопросами гравитации.

Ил. 16. Библиогр. 88 назв.

## Оглавление

|  |            |
|--|------------|
| Введение.....  | 4          |
| <b>Глава 1. Бароэлектрический эффект .....</b>   | <b>6</b>   |
| §1. Предварительные замечания .....  | 6          |
| §2. Бароэлектрический эффект при равновесии.....   | 10         |
| §3. Феноменологический подход .....  | 16         |
| §4. Микроскопический подход .....  | 26         |
| <b>Глава 2. Бароэлектрические поля планет и звезд .....</b>                                    | <b>34</b>  |
| §5. Описание модели .....  | 34         |
| §6. Оценки для <b>E</b> и <b>H</b> в рамках феноменологического подхода ....                   | 36         |
| §7. Оценки для <b>E</b> и <b>H</b> в рамках микроскопического подхода.....                     | 47         |
| §8. О роли рельефа поверхности планеты.....  | 55         |
| §9. Бароэлектрический эффект в звездах .....   | 57         |
| <b>Глава 3. Лабораторные исследования</b><br><b>бароэлектрического эффекта.....</b>            | <b>63</b>  |
| §10. Опыты П. Н. Лебедева.....   | 63         |
| §11. Транспортировка ионов.....  | 73         |
| §12. Другие лабораторные исследования.....   | 79         |
| <b>Глава 4. Электродинамика медленно вращающегося</b><br><b>наблюдателя.....</b>               | <b>81</b>  |
| §13. Общековариантная запись уравнений Максвелла .....   | 81         |
| §14. Поляризация и намагничивание при учете<br>бароэлектрического эффекта .....                | 92         |
| §15. Медленное вращение .....  | 98         |
| §16. Некоторые конкретные задачи .....   | 102        |
| <b>Глава 5. Бароэлектрический эффект</b><br><b>при нестационарных градиентах давлений.....</b> | <b>113</b> |
| §17. Упрощающие предположения .....  | 113        |
| §18. Покоящийся относительно инерциального наблюдателя<br>проводник .....                      | 115        |
| §19. Воздействия приливного типа .....   | 116        |
| §20. Приливные вариации магнитного поля.....   | 133        |
| §21. Об электромагнитных предвестниках землетрясений .....                                     | 135        |
| §22. Неравномерность вращения планеты<br>и вариации магнитного поля .....                      | 150        |
| §23. О влиянии магнитных полей на дифференциальные потоки<br>в планетах и звездах.....         | 153        |
| §24. Электрические поля небесных тел .....   | 159        |
| Заключение.....  | 163        |
| Приложения .....   | 175        |
| Литература.....  | 187        |

## ВВЕДЕНИЕ

Первое издание этой книги [1] было подготовлено более полутора десятков лет назад. За последующие годы было получено много новых результатов, особенно относящихся к проблеме электрических полей в планетах и звездах.

Фактически эта проблема ранее почти не обсуждалась. Можно указать тому две основные взаимосвязанные причины.

По распространенному мнению, в толще проводников электростатические поля отсутствуют, а недра планет и, тем более, звезд обладают высокой проводимостью. Но, как то исчерпывающе объяснено, например, в настольной книге всех физиков — курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2], это утверждение относится лишь к проводникам, однородным и химически, и физически. Так, химические неоднородности порождают контактные разности потенциалов, при наличии перепадов температур возникают термоэлектрические поля и т. д.

Однако даже в этой книге имеется неточность, которая может быть названа второй из упомянутых выше причин. В гл. 3, посвященной постоянным токам, ошибочно утверждается, что «...неоднородность давления (или плотности) при постоянной температуре не может привести к возникновению поля (или тока) в проводнике; на этом основании в формулах (26.2) и (26.4)\*»

---

\*) Соотношения между плотностью тока и напряженностью электрического поля и градиентом температур, а также связь между плотностью потока энергии и электрическим потенциалом, температурой, ее градиентом и плотностью тока.

не были написаны члены, пропорциональные  $\nabla p$ . В действительности наличие таких членов противоречило бы закону возрастания энтропии: в подынтегральном выражении (26.5)\*) появились бы члены со знакопеременными произведениями  $\mathbf{j}\nabla p$  и  $\nabla T\nabla p$ , в результате чего интеграл не смог бы быть существенно положительным» [2, §26].

Здесь имеет место очевидное недоразумение: при равновесии  $\mathbf{j} = 0$ , а температура, как сказано выше, считается постоянной, так что никаких знакопеременных членов не возникает и закону нарастания энтропии ничто не угрожает. Таким образом, «запрет» на целый обширный класс явлений, которые естественно назвать бароэлектрическими, оказывается несостоятельным. Настоящая книга посвящена рассмотрению именно таких явлений.

Физическая причина перераспределения электрических зарядов в проводнике, вызываемого перепадами внутренних механических напряжений (в дальнейшем, несколько упрощая физическую картину, мы ограничимся рассмотрением изотропных проводников, в которых достаточно рассматривать градиенты давлений), очевидна: при контакте проводников количество электронов, переходящих из одного из них в другой, зависит от химического состава проводников и от ряда физических параметров, описывающих их физическое состояние.

Это положение не только диктуется теорией, но и находит прямое экспериментальное подтверждение. Подробнее это обсуждается ниже, здесь же сразу отметим, что бароэлектрическое перераспределение зарядов проявляется тем существеннее, чем больше перепады давлений, чем ближе они к давлениям Ферми.

---

\*) Для производной от энтропии по времени.

## БАРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

### §1. Предварительные замечания

Интереснейшие объекты, где неоднородности давлений весьма значительны, — планеты и звезды. Исторически именно перераспределение зарядов в недрах этих космических тел (и их вращение) как причина появления у них магнитных полей начало обсуждаться физиками в начале XX в. в связи с проблемой магнетизма планет и звезд.

Почему Земля — магнит?

Почему магнитные поля есть и у других планет, и у звезд? Какую физическую природу имеют эти поля? Как объяснить вариации геоэлектрического и геомагнитного полей? Эти и многие другие вопросы, возникшие еще в эпоху классического естествознания, пока еще не нашли полного ответа.

Поиски объяснения физической природы магнетизма небесных тел, в первую очередь геомагнетизма, шли по путям, которые кажутся хорошо известными всем. В начале этих путей — теория Гильберта, Земля как большой постоянный магнит; открытие явления Кюри — разрушающее влияние высокой температуры на остаточное намагничивание — заставило искать новые пути. Но одна из глав летописи этих поисков теперь почти забыта. Только в немногих книгах, в том числе в пользующемся заслуженной известностью труде Б. М. Яновского «Земной магнетизм» [3] можно прочитать о гипотезе разделяющихся зарядов. По этой гипотезе, выдвинутой в начале XX в. В. Сазерлендом [4], магнетизм планет и звезд — хотя бы частично — обязан тому, что в этих небесных телах происходит перераспределение зарядов: электроны вытесняются в приповерхностную область, так что внутренняя часть оказывается заряженной положительно. Вращение этих перераспределившихся зарядов вместе со всем телом и порождает магнитное поле.

Подобного рода идеи оцениваются в книге Яновского так: «Не говоря уже о том, что эта гипотеза требует дополнительного предположения о причинах разделения зарядов, она противоречит принципу относительности, ибо наблюдатель на поверхности Земли, вращаясь вместе с зарядами, остается неподвижным относительно них».

Первая половина процитированной фразы фиксирует внимание на действительно важной физической проблеме, хотя уместнее было бы поставить вопрос не о дополнительных предположениях (это может породить ошибочное впечатление, что без привлечения новых гипотез здесь не обойтись), а просто о последовательном применении к этой задаче уже давно и надежно установленных положений физики. Что же касается принципа относительности, на этом нужно остановиться подробнее.

Общеизвестное утверждение: «покоящийся заряд не создает магнитного поля» справедливо лишь для заряда, покоящегося относительно инерциальной системы отсчета. Перенос этого утверждения на случай неинерциальных систем отсчета попросту ошибочен. В частности, заряд, покоящийся относительно собственной (вращающейся) системы отсчета Земли, вопреки широко распространенному заблуждению создает в этой системе отсчета магнитное поле. Более подробное обсуждение этого вопроса мы проведем в гл. 4.

Каковы же те физические эффекты, благодаря которым электроны вытесняются из внутренних областей планет в их периферические области? Чтобы понять это, нет нужды обращаться к экзотическим гипотезам, требующим, например, модификации закона Кулона [5, 6]. Достаточно опираться на известные, надежно установленные положения нашей физической науки, что мы и постараемся показать ниже.

Перераспределение зарядов может возникать благодаря наличию градиентов разных параметров, определяющих состояние среды. Из этих параметров мы выделим здесь *давление*. Даже если проводник химически однороден, если все его участки имеют одинаковую температуру, если и другие параметры всюду одинаковы, но давление распределено неоднородно, в таком проводнике, даже при равновесии, имеет место перераспределение зарядов: электроны оказываются частично вытесненными из областей больших давлений в области, где внутренние напряжения меньше. Происходящее перераспределение зарядов можно назвать бароэлектрической поляризацией.



В этом перераспределении зарядов, порождаемых перепадами внутренних механических напряжений в веществе, и заключается бароэлектрический эффект (БЭ).

Если кроме давления и другие параметры проводника меняются от точки к точке, то на БЭ наслаиваются, конечно, и другие эффекты; однако для того круга задач, который нас будет интересовать, БЭ по проводимым ниже оценкам является доминирующим.

Полностью объяснить магнитные поля планет и звезд одним лишь перераспределением электрических зарядов в этих небесных телах, а также их вращением, разумеется, невозможно. И дело здесь не только в том, что для напряженностей магнитных полей некоторых планет и звезд получаются из «чисто поляризационных» оценок заниженные значения. Такого рода оценки попросту не оставляют места для ряда наблюдаемых черт как геомагнитного поля, так и полей других небесных тел.

Палеомагнитные данные показывают, что геомагнитное поле Земли далеко не неизменно — оно испытывало (и испытывает) вариации; установлено даже и обращение полярности этого поля. Бурным изменениям подвержены и магнитные поля звезд. Магнитное поле Солнца, изучавшееся особенно детально, является ярким тому примером. Вполне очевидно, что здесь определяющее значение приобретают не поляризационные, а магнитогидродинамические эффекты — «эффекты динамо», как их еще называют. Их физическая природа прозрачна: благодаря известному явлению электромагнитной индукции, открытому Фарадемом, кинетическая энергия дифференциальных внутренних движений в проводнике может переходить в энергию магнитного поля. Иначе говоря, эти дифференциальные внутренние движения могут приводить к усилению некоего затравочного магнитного поля; это часто называют динамо-генерацией.

Несмотря на то, что сама по себе идея динамо-генерации вполне ясна, построение полной количественной теории встречает здесь довольно значительные затруднения. Это относится даже и к теориям «кинематического динамо», в которых картина внутренних движений рассматривается как заданная (хотя и базирующаяся в известной мере на данных о структуре небесных тел и о протекающих в них процессах). При этом не учитывается обратное действие магнитного поля на движение проводника.

Исследования, посвященные динамо-генерации магнитных полей небесных тел, весьма многочисленны. Первые указания на

возможность такой генерации принадлежат Дж. Лармору [7]. У нас одним из первых построением количественной теории динамо занялся Я. И. Френкель [8]. И в настоящее время, по мнению многих физиков, динамо-процессам отводится ведущая роль в формировании магнитных полей звезд и ряда планет.

«По нашему убеждению, главные проблемы земного, солнечного и галактического магнетизма, могут быть решены только с помощью теории динамо» — это слова одного из выдающихся наших теоретиков Я. Б. Зельдовича из обзора в УФН, написанного в соавторстве с А. А. Румзайкиным [9]. Это мнение показательно. Однако не менее показательно, что авторы при этом не отвергают возможностей влияния и других факторов, эффектов иной природы на магнитные поля небесных тел.

Конечно, высказывания о механизмах «иной природы», действующих параллельно динамо-механизму, делались и раньше, но согласно господствующему мнению они могут порождать лишь незначительные поправки к магнитным полям магнитогидродинамического происхождения. В частности, многие авторы пытаются объяснить поля планет исключительно на базе теории динамо.

Полученные в этой теории результаты действительно интересны. Однако нельзя закрывать глаза и на ее трудности. Об одной из них в указанном выше обзоре, в частности, написано: «Кроме того, для действия динамо обязательно нужно начальное затравочное поле, которое должно порождаться каким-то другим механизмом». Заметим, что по нашему мнению главная проблема не в поисках источника затравочного поля — оно может возникать по многим причинам, в том числе, далеко не в последнюю очередь, благодаря БЭ. Значительно важнее, что кинематическое динамо не дает возможности однозначно предсказать, каким же должно быть магнитное поле той или иной конкретной планеты или звезды: эти поля определяются картиной внутренних дифференциальных движений, а получить эту картину на базе первых принципов пока еще не удастся. Таким образом, «получение числа», т. е. однозначное количественное описание магнитных полей реальных объектов встречается в рамках теории кинематического динамо принципиальные затруднения. И хотя пока еще нельзя уверенно указать примеры таких небесных тел, магнитное поле которых заведомо не объяснялось бы теорией динамо, актуальность исследований также и эффектов «иной природы» представляется очевидной.

Целью настоящей книги и является обсуждение такого рода эффектов, и в первую очередь — сути самого бароэлектрического эффекта. Даются количественные оценки вклада этого эффекта в магнитные и электрические поля, которые должны возникнуть у планет и звезд благодаря неоднородностям их внутренних напряжений и вращению.

## §2. Бароэлектрический эффект при равновесии

Переходя к рассмотрению равновесных бароэлектрических полей, появляющихся в проводниках первого рода при наличии в них не зависящих от времени градиентов давлений, естественно обратиться к наиболее общему термодинамическому условию равновесия — условию постоянства электрохимического потенциала. Это один из основных вариантов построения теории стационарных (и, с определенными, приводимыми ниже, оговорками, квазистационарных) бароэлектрических полей. Имеются и другие варианты, которые будут рассматриваться ниже. Выбор варианта описания диктуется особенностями рассматриваемой задачи.

Химический потенциал  $\mu$  в химически однородном веществе совпадает с термодинамическим потенциалом, отнесенным к одной молекуле. Удобнее, однако, не учитывая на первых порах, что среда сжимаема, рассматривать вместо  $\mu$  объемную плотность термодинамического потенциала:

$$\frac{\mu}{V} \rightarrow \frac{F + pV}{V} = f + p, \quad (2.1)$$

где  $f$  — плотность свободной энергии,  $p$  — давление. Нас будет в дальнейшем интересовать распределение давлений, порождаемое действием гравитационных или центробежных сил. Нужно подчеркнуть, что использование одной единственной величины — давления — для описания внутренних напряжений в проводнике означает, что мы будем, как в жидкости, учитывать только упругость объема, но не упругость формы. Это существенно сужает круг задач, которые могут быть рассмотрены в рамках предлагаемого ниже подхода к описанию бароэлектрических полей. Заметим, что учет упругости не только объема, но и формы, значительно усложнил бы задачу.

Плотность термодинамического потенциала при равновесии постоянна, так что можно переписать условие равновесия в виде

$$\text{grad}(f + p) = 0. \quad (2.2)$$

Из члена  $f$  выделим прежде всего части, определяемые влиянием различных полей.

Потенциальная энергия единицы объема вещества в гравитационном или в центробежном поле равна  $\tau\varphi$ , где  $\varphi$  — потенциал этого поля, а  $\tau$  — механическая плотность вещества. В ряде случаев, когда сжимаемость среды не играет принципиальной роли, можно использовать для нее усредненное значение. Так, потенциал гравитационного поля планеты мы часто будем в дальнейшем записывать в виде  $\varphi = \frac{2\pi G\tau r^2}{3}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная, а  $r$  — расстояние от центра планеты.

Но когда сжимаемость существенна, а так и обстоит дело в том центральном пункте рассмотрения, когда исследуется зависимость  $f$  от давления, тогда сжимаемость, разумеется, учитывается. Из дальнейшего это видно самым непосредственным образом.

Перераспределение зарядов, вызываемое неоднородностью давлений, приводит к возникновению электрического поля (при равновесии — электростатического). Плотность энергии этого поля мы будем записывать в виде

$$W_{el} = \frac{E^2}{8\pi}, \quad (2.3)$$

где под  $E$  понимается макроскопическая, т. е. усредненная по физически бесконечно малым объемам напряженность электростатического поля.

Уместно обратить внимание на то, что  $E$  отличается как от микроскопической, так и от эффективной напряженности электрического поля, так что выражение (2.3) для плотности энергии электрического поля нуждается в дополнительном обсуждении. К этому вопросу мы еще вернемся ниже.

Что же касается магнитного поля, которое может возникнуть, если перераспределившиеся заряды вовлекаются в движение проводника, то в случае нерелятивистских скоростей они дают такой малый вклад в  $f$ , что им можно пренебречь.

Плотность свободной энергии зависит, конечно, и от химического состава среды, и от температуры, а также от других

параметров, определяющих ее состояние. Поскольку мы условились предполагать, что проводник химически однороден и все его участки имеют одинаковую температуру и что лишь один параметр — давление — в различных точках имеет различные значения, то, с учетом всего сказанного выше, можно записать

$$f = f_0 + W(p) + \tau\varphi + W_{el}, \quad (2.4)$$

где  $f_0$  есть значение  $f$  при отсутствии полей и при нулевом давлении,  $W(p)$  показывает, как изменяется  $f$  при изменении давления от нулевого значения до  $p$ , а остальные члены дают добавки к плотности энергии, которые обсуждались выше.

Помимо условия термодинамического равновесия необходимо также учитывать и условие механического равновесия. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением одних только жидких проводников, в качестве последнего выступает условие гидростатического равновесия

$$\text{grad}(\tau\varphi + p) = 0. \quad (2.5)$$

Подставляя теперь (2.4) в (2.2) и учитывая при этом (2.3) и (2.5), а также условие однородности «невозмущенного» проводника  $\text{grad} f_0 = 0$ , получим

$$\text{grad} \left\{ W(p) + \frac{E^2}{8\pi} \right\} = 0. \quad (2.6)$$

Физическое истолкование этого условия вполне очевидно:  $W(p) + W_{el}$  есть полная плотность «избыточной» энергии, т. е. добавка к плотности энергии невозмущенного проводника, возникающая благодаря появлению внешнего гравитационного (или центробежного) поля и перераспределению зарядов, обусловливаемому возникающими при этом градиентами давлений. Заметим, что если бы мы отказались от представления о постоянстве механической плотности  $\tau$ , то нужно было бы еще учесть добавки к  $W(p)$  типа  $\varphi\Delta\tau$ , где  $\Delta\tau$  — изменение  $\tau$  за счет сжатия вещества при давлении  $p$ . Однако, как показывают оценки, такая поправка вносит в обсуждаемые нами величины лишь малый вклад и поэтому ее можно не учитывать.

При равновесии полная плотность избыточной энергии должна быть всюду одинаковой, иначе продолжались бы процессы перераспределения. В этом и заключается физическое истолкование условия (2.6).

Нахождение зависимости  $W$  от  $p$  — задача, имеющая для всего дальнейшего первостепенное значение, и поэтому уместно посвятить ей особое внимание. Но прежде всего нужно заметить, что, записав  $W(p)$ , мы уже вводим предположение, что плотность избыточной энергии  $W$  можно рассматривать как функцию только давления, но не его градиента. Фактически здесь вводится предположение, что перераспределение зарядов, порождаемое перепадами давлений, несущественно влияет на плотность энергии. Такое предположение нужно оправдать — к этому вопросу нам также придется вернуться в дальнейшем.

Для нахождения  $W(p)$  мы будем ниже использовать два разных подхода. Первый из них, который можно назвать феноменологическим, или макроскопическим, заведомо не может претендовать на высокую точность, но он зато позволяет использовать достаточно простые и поэтому удобные методы аналитического описания. Второй, более точный подход к нахождению  $W(p)$  можно назвать микроскопическим. Здесь используются методы квантовой теории и появляется возможность прокорректировать на базе этих более точных расчетов феноменологические оценки. Нужно, однако же, пояснить, что микроскопическое описание распространяется только на нахождение  $W(p)$ , тогда как напряженность бароэлектрического поля, понимаемая по-прежнему как макроскопическая, т. е. усредненная по физически бесконечно малым объемам, должна вновь находиться при помощи (2.6).

Усреднение по физически бесконечно малым объемам — важный момент всего рассмотрения, поэтому на нем нужно остановиться более подробно.

Плотность энергии складывается из кинетической энергии частиц, заполняющих единицу объема, и их потенциальной энергии (для наших целей достаточно квазиклассического приближения). Учитывая электрическую природу взаимодействия частиц, можно рассматривать плотность потенциальной энергии как плотность энергии суммарного электрического поля, создаваемого всеми частицами — атомными ядрами и электронами. Микроскопическую напряженность этого поля  $e$  можно представить в виде  $e = e_1 + e_2$ , где  $e_1$  — напряженность поля, которая была бы в отсутствие градиента давления, а значит, и перераспределения зарядов, а  $e_2$  — напряженность того добавочного поля, которое как раз и возникает в результате такого перераспределения. Для  $e_2$  можно, как то следует из физического смысла этой величины, сразу же принять «макроскопическое», т. е.

усредненное выражение. Очевидно, плотность энергии общего электрического поля есть

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_n}{\Delta V} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + 2(e_1 \cdot e_2)}{8\pi}.$$

Чтобы получить полную микроскопическую плотность энергии, к этому выражению нужно прибавить кинетическую энергию частиц, заполняющих единицу объема (квазиклассическое приближение). И второе: мы убедимся в дальнейшем, что в интересующих нас задачах температурные эффекты несущественны. Если не учитывать этих малозначимых температурных поправок, можно в ряде случаев попросту считать температуру нулевой, а это при используемом нами квазиклассическом описании означает, что вклад в кинетическую энергию от ядер отсутствует, т. е. вся кинетическая энергия — это энергия электронов  $\Delta \mathcal{E}_e / \Delta V$ .

Перейдем теперь к усреднению по физически бесконечно малым объемам, т. е. по областям, размеры которых значительно превосходят масштабы микроскопических неоднородностей (порядка постоянных решеток), но много меньше масштабов макроскопических неоднородностей, в частности масштабов неоднородности макроскопического электрического поля. В качестве такового у нас как раз и выступает поле, которое порождается перераспределением зарядов между участками проводника, находящимися друг от друга на макроскопических расстояниях.

Пользуясь знаком усреднения по физически бесконечно малым объемам  $\langle \dots \rangle$ , можно записать: полная плотность энергии, усредненная по таким объемам

$$\left\langle \frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta V} + \frac{\Delta \mathcal{E}_n}{\Delta V} \right\rangle = \left\langle \frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta V} \right\rangle + \left\langle \frac{e_1^2}{8\pi} \right\rangle + \left\langle \frac{(e_1 \cdot e_2)}{4\pi} \right\rangle + \left\langle \frac{e_2^2}{8\pi} \right\rangle.$$

По самому своему смыслу  $e_2$  можно отождествлять с напряженностью макроскопического поля, возникающего благодаря макроскопическому перераспределению зарядов. Это поле в пределах физически бесконечно малых областей следует считать однородным, так что  $\langle e_2^2 \rangle$  можно выносить из-под знака усреднения. Поскольку в отсутствие перераспределения зарядов, когда остается лишь поле  $e_1$ , его усредненная напряженность  $\langle e_1 \rangle = 0$ , то  $\langle (e_1 \cdot e_2) \rangle = 0$ . Таким образом,

$$\left\langle \frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta V} \right\rangle + \left\langle \frac{\Delta \mathcal{E}_n}{\Delta V} \right\rangle = \left\langle \frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta V} + \frac{e_1^2}{8\pi} \right\rangle + \frac{E^2}{8\pi}.$$

Но первые два члена как раз и дают плотность усредненной полной энергии (т. е. кинетической плюс потенциальной), которая складывается из некоей постоянной части, имеющей нулевой градиент и поэтому не представляющей для нас интереса, и из плотности избыточной энергии, зависящей от давления, которую мы обозначили  $W(p)$ . Постоянная же часть выражения  $\langle \frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta V} + \frac{\epsilon_1^2}{8\pi} \rangle$ , включающая плотность кинетической энергии электронов и потенциальную энергию их взаимодействия между собой, а также с ядрами, относится фактически к нулевому давлению. Она зависит от химической природы проводника, так что положение об отсутствии ее градиента означает, что проводник предполагается химически однородным, т. е. что контактные разности потенциалов отсутствуют.

Подводя итог сказанному выше, можно сформулировать такой план дальнейших действий:

- 1) пользуясь традиционными методами механики сплошных сред, нужно для каждой конкретной задачи находить распределение давлений;
- 2) по найденному распределению давлений находить  $W(p)$  — это самая важная и сложная часть задачи, и именно ей будет в дальнейшем посвящено несколько упоминавшихся выше подходов;
- 3) после нахождения  $W(p)$  при помощи условия равновесия (2.6) с учетом соображений симметрии можно переходить непосредственно к цели всего рассмотрения — к нахождению напряженности бароэлектрического поля  $\mathbf{E}$ .

Здесь, однако, требуется некоторое дополнительное пояснение. Условие равновесия (2.6) позволяет найти по известному  $W(p)$  лишь распределение модуля  $\mathbf{E}$ . Для того же, чтобы найти не только абсолютное значение, но и направление вектора напряженности электрического поля, нужно учесть, что поверхности постоянных значений давления являются и эквипотенциальными поверхностями.

Если пользоваться приближением постоянной механической плотности, то из условия механического равновесия (2.5) вытекает, что  $\text{grad } p = 0$ , если  $\text{grad } \varphi = 0$ , так что области постоянного постоянного гравитационного (или центробежного) потенциала имеют и постоянный электрический потенциал.

И еще одно замечание: поняв, что напряженность бароэлектрического поля направлена по нормали к поверхностям постоянных давлений, мы однозначно определим направление вектора



Е, если уточним, какую из нормалей — внешнюю или внутреннюю — нужно иметь в виду. Такой выбор во всех конкретных случаях не составляет труда, в чем мы убедимся в дальнейшем.

### §3. Феноменологический подход

Перейдем теперь к обсуждению зависимости  $W$  от  $p$ . Если давление невелико, т. е. значительно меньше фермиевского, то можно пользоваться законом Гука, и тогда плотность «избыточной» энергии может быть представлена в виде  $W = p^2/2B$ , где  $B$  — модуль всестороннего сжатия, который для многих проводников имеет тот же порядок величины, что и давление Ферми.

Однако вне области применимости закона Гука, когда сжатие жидкости уже нельзя считать абсолютно упругим, выражение для  $W$  нуждается в модификации. Остановимся на простейшем варианте такой модификации, записав

$$W(p) = \frac{p^2}{2B + \nu p}, \quad (3.1)$$

где  $\nu$  — безразмерный множитель порядка единицы. Это выражение при  $p \ll B$  переходит в  $p^2/2B$ . Если же давление таково, что  $\nu p \gg 2B$ , то мы получаем  $W \approx p/\nu$ , что при  $\nu = 2/3$  переходит в известное выражение для объемной плотности энергии полностью вырожденного газа невзаимодействующих электронов. Чем выше давление, тем более реалистичной оказывается такая модель электронного газа, не учитывающая ни межэлектронных взаимодействий, ни воздействия на электроны кулоновского поля атомных ядер.

Действительно, кинетическая энергия электронов по мере увеличения давления неуклонно возрастает, так что роль потенциальной энергии межэлектронного и электронно-ядерного взаимодействий становится все менее существенной, тогда как роль принципа Паули, который и определяет физические черты модели невзаимодействующих электронов, оказывается решающей.

Пользуясь для  $W$  выражением (3.1), мы будем брать значения параметров  $B$  и  $\nu$  как табличные величины. Этим и объясняется определение подхода как феноменологического. Впрочем, как уже говорилось, параметр  $\nu$  нужно полагать равным  $2/3$  для всех веществ, так что к таблицам остается обращаться лишь для нахождения  $B^*$ ).

\*) Табличные значения  $B$  относятся к кривым давления, что требует учета в дальнейшем.

Поскольку мы неоднократно подчеркивали, что вещества, которые имеются в виду при рассмотрении бароэлектрического эффекта, — это прежде всего проводники первого рода, уместно обсудить, каким образом учитывается это обстоятельство.

Понятно, что варианты вычисления плотности избыточной энергии, которые были (и еще будут) привлечены нами, никак не выделяют именно этот класс веществ. Особенно наглядно это проявляется при том микроскопическом подходе, который будет детально обсуждаться ниже. Таким образом, действительно необходимо обсудить, какие физические факторы являются препятствием к обобщению предлагаемых здесь методов описания бароэлектрического эффекта на диэлектрики, где имеются другие, хорошо известные процессы возникновения механико-электрических эффектов, и на проводники второго рода. Основным фактором такого запрета является весьма простое обстоятельство: даже если объемные плотности избыточной энергии в различных участках диэлектрика различны, потенциальные барьеры, которые исключают перемещение электронов на макроскопические расстояния, препятствуют тому макроскопическому перераспределению зарядов, которое необходимо для появления бароэлектрического поля.

Подчеркнем, что особо существенно здесь слово «макроскопические». Дело в том, что под действием гравитационного или центробежного поля некоторое микроскопическое перераспределение зарядов происходит всегда: ядра в каждой из атомных ячеек под действием этого поля слегка смещаются по отношению к электронам этой ячейки. Такая поляризация обуславливает лишь те добавки к электрическим полям, которые весьма малы по сравнению с частью, обязанной бароэлектрическому эффекту, если, конечно, последний имеет место. Действительно, электрическая поляризуемость каждой атомной ячейки имеет порядок куба ее радиуса; если поляризация вызывается действием гравитационного поля и если напряженность гравитационного поля есть  $g$ , то возникающий у атомной ячейки дипольный электрический момент порядка  $Mga_B^3/e$ , где  $a_B$  — радиус Бора,  $M$  — масса ядра,  $e$  — модуль элементарного заряда.

Подсчитав напряженность электрического поля, возникающего благодаря такой поляризации, и сравнивая ее с типичными напряженностями бароэлектрических полей, которые будут нами получены ниже, действительно убеждаешься, что первые часто пренебрежимо малы.

Поскольку перераспределение зарядов в пределах атомных ячеек, т. е. в микроскопических по масштабу областях, оказывается, таким образом, несущественным, определяющую роль приобретает перераспределение электронов в макроскопических областях. Именно переходы электронов из одних ячеек в другие, перемещения на макроскопические расстояния, а не их перегруппировки внутри каждой из атомных ячеек, имеют решающее значение для формирования бароэлектрического поля.

Полезно, однако, заметить, что проводимость веществ не будет входить в выражения для напряженностей бароэлектрических полей, пока мы будем рассматривать бароэлектрические поля в равновесных или «квазиравновесных» проводниках (последний термин подробнее объясняется ниже), т. е. нас будут интересовать случаи, когда типичные времена электрической релаксации значительно меньше всех остальных временных масштабов процесса. В реальных же планетах, и тем более в звездах, где ситуация вовсе не является такой статической, всегда необходимо проявлять осторожность и, прежде чем обращаться к квазиравновесным оценкам, сравнивать между собой времена макроскопического перераспределения вещества и времена перераспределения электрических зарядов. Наиболее важны такие оценки для областей вблизи поверхности планет, которые могут быть подвержены особенно быстрым перестройкам и где, к тому же, и времена электрической релаксации относительно велики. Последнее, в частности, связано с тем, что по мере удаления от поверхности планеты давления возрастают и достигают значений, при которых даже типичные диэлектрики превращаются в проводники.

Подход к исследованию бароэлектрических полей, основанный на использовании условия (2.6), можно назвать «энергетическим»: в основу здесь положено термодинамическое условие равновесия — условие постоянства электрохимического потенциала, постоянства плотности избыточной энергии.

Однако можно еще попытаться подойти к вопросу и по-иному, с точки зрения баланса сил. Именно такой «силовой» подход использовался часто в 60-е гг., когда появилось несколько статей, посвященных вопросу о появлении электрического поля в результате гравитационных воздействий на вещество [10–16]. Для этого поля даже появилось особое наименование: «поле Барнхилла–Шиффа». Простейшая оценка для напряженности электрического поля, фактически использовавшаяся уже в

одной из главных работ указанного цикла [10], основывается на таком элементарном рассуждении: гравитационное поле напряженности  $g$  действует на ион (т. е. на атомный остов — атомное ядро и тесно связанные с ним электроны внутренних оболочек) с силой  $Mg$ , где  $M$  — масса иона, которую можно приравнять массе ядра; ион находится в равновесии, если возникает электрическое поле с такой напряженностью  $E$ , что электрическая сила уравнивает гравитационную  $Mg + eE = 0$ . Отсюда получается оценка для величины напряженности электрического поля  $E = Mg/e$ . Если, к примеру, подставить  $M \sim 10^{-23}$ ,  $g \sim 10^3$ ,  $e \sim 10^{-10}$ , (все в единицах СГС), то для  $E$  получается оценка  $E \approx 10^{-11}$  в абсолютных гауссовых единицах, или  $6 \cdot 10^{-7}$  В/м. Это весьма малая, но, главное, не внушающая доверия величина. Действительно, путь ее получения таков, что возникает ряд вопросов. На каком основании той части атомной ячейки, которую мы называем ионом или остовом и который состоит из ядра и тесно связанных с ним электронов, приписывается элементарный заряд  $e$  (множители порядка единицы, призванные учитывать валентность, при таких грубых оценках несущественны); какую роль играют в установлении равновесия электроны внешних оболочек и каковы эти оболочки? И главное: что это за поле  $E$ , действием которого компенсируется воздействие гравитационного поля и какое отношение имеет это  $E$  к тому электрическому полю, которое представляет для нас основной интерес?

Попытаемся обсудить этот круг вопросов.

Под действием гравитационного поля (для определенности будем говорить именно о нем, а не о центробежном поле) ядро в каждом атоме перемещается по направлению к центру тяготения, но уже при малых (по сравнению с размерами атома) перемещениях относительно облака атомных электронов оно начинает испытывать воздействие электрического поля последних, которое и уравнивает в конце концов гравитационное воздействие.

Но такое микроскопическое внутриатомное электрическое поле, действующее на ядро, никоим образом нельзя отождествлять с тем полем, которое мы именуем бароэлектрическим, хотя бы потому, что средняя напряженность внутриатомного электрического поля, по крайней мере невозмущенного, равна нулю, тогда как бароэлектрическое поле уже изначально рассматривается как макроскопическое, т. е. усредненное. Все это имеет пря-

мое отношение к обсуждаемому выше различию между микроскопическим (т. е. происходящим внутри каждой из атомных ячеек) перераспределением зарядов, которое создает несущественную для нас поляризацию атомного масштаба, и тем макроскопическим перераспределением зарядов, которое и ответственно за порождение бароэлектрического поля.

Итак, падать под действием гравитационного поля не дает ядрам электрическое поле, но это вовсе не то бароэлектрическое поле, которое мы обсуждаем. Однако «то», т. е. бароэлектрическое поле тоже вносит определенный вклад в уравнивание гравитационных сил. Но поскольку мы рассматриваем бароэлектрическое поле как макроскопическое, то и об уравнивании сил уместно говорить на уровне макроскопического описания. Это, в частности, необходимо понимать так, что в условии равновесия должны входить только макроскопические величины, т. е. величины, усредненные по физически бесконечно малым объемам. Уже это показывает, что такое макроскопическое условие равновесия должно относиться не к одному ядру или даже к одной атомной ячейке, а к макроскопическому количеству вещества; удобно относить его к единице объема, что мы и будем предполагать далее.

Попытаемся более детально разобраться в условии макроскопического равновесия, считая, что внешние силы имеют гравитационную природу. Плотность гравитационной силы, если говорить о среднем, равна  $\tau g$ , где, напомним,  $\tau$  — механическая плотность,  $g$  — напряженность гравитационного поля. На все атомные ячейки, заполняющие один кубический сантиметр вещества, действует гравитационная сила, которую можно переписать в виде  $f_{gp} = Mng$ , где  $n$  — усредненное число атомов в единице объема, а массу атома  $M$  можно принять равной массе ядра.

Какова же физическая природа сил, которыми может быть скомпенсировано гравитационное воздействие? Об этом можно сказать и так: что за силы делают твердое тело твердым, т. е. обуславливают упругость его формы (в жидкости — объема)? Ответ хорошо известен: если иметь в виду фундаментальные типы сил, то определяющая роль принадлежит здесь двум типам взаимодействия, а именно электромагнитным (в основном — кулоновским) и тем квантовым «взаимодействиям», которые связаны с принципом Паули. Эти последние вовсе не малы. Как хорошо известно, даже в модели невзаимодействующих электро-

нов, вообще не учитывающей электрических зарядов этих частиц, т.е. в модели, где жесткость электронного газа целиком обязана принципу Паули, эта жесткость оказывается весьма значительной. Для многих металлов модули сжатия, подсчитанные с помощью такой модели, оказываются близкими к эмпирическим значениям [17].

Пользуясь условием равновесия из арсенала классической механики — условием равенства нулю суммарной силы, — запишем его в виде

$$\mathbf{f}_{\text{гр}} + \mathbf{f}_{\text{эл}} + \mathbf{f}_{\text{Паули}} = 0. \quad (3.2)$$

Плотность гравитационной силы  $\mathbf{f}_{\text{гр}}$  уже была выписана выше, плотность же электрической силы  $\mathbf{f}_{\text{эл}} = \rho \mathbf{E}$ , причем объемная плотность электрического заряда  $\rho$  и напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля понимаются как величины, усредненные по физически бесконечно малым объемам; заметим, что постановка интересующей нас физической задачи такова, что разделение зарядов на свободные и на связанные нецелесообразно, так что мы будем использовать для описания электрического поля только «макроскопический» вектор напряженности, не вводя в рассмотрение вектор электрической индукции; тогда в уравнение Максвелла  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$  входит лишь усредненная плотность  $\rho$  полного заряда.

Плотность той «силы»  $\mathbf{f}_{\text{Паули}}$ , которая обязана происхождением принципу Паули, можно исключить из условия механического равновесия (3.2), переписав это условие следующим образом:

$$\alpha \mathbf{f}_{\text{гр}} + \mathbf{f}_{\text{эл}} = 0, \quad (3.3)$$

где, очевидно, безразмерный параметр  $\alpha$  показывает, какую долю от гравитационной силы  $\mathbf{f}_{\text{гр}}$  компенсирует электрическая сила  $\mathbf{f}_{\text{эл}}$ .

Наиболее интересная для нас задача — попытаться установить, каким образом параметр  $\alpha$  зависит от давления.

Физические причины того, почему такая зависимость должна быть, опять-таки имеют квантово-механическую природу, а именно: когда повышается давление, вещество сжимается, уменьшается размер атомных ячеек, следовательно, возрастает кинетическая энергия электронов. Благодаря этому влияние на распределение электронов межэлектронного и электронно-

ядерного кулоновского взаимодействий делается все менее ощутимым. Очевидно, что когда давления достигают значений порядка или более фермиевских, то, как следует из вышеизложенного, при «провисании» ядер под действием гравитационной силы электроны проводимости ведут себя как газ электронейтральных частиц, подчиняющихся статистике Ферми, которые тем слабее увлекаются вслед за ядрами, (точнее — атомными остовами) при их провисании, чем выше давления. Таким образом, происходит относительная перегруппировка электронов проводимости и атомных остовов, вследствие чего и возникает электрическое поле, которое играет определяющую роль в уравновешивании гравитационного воздействия на ионы. Из этого следует, что когда давления становятся порядка давления Ферми,  $p \sim p_F$ , параметр  $\alpha$  приближается к единице.

По-иному выглядит картина уравновешивания при  $p \ll p_F$ . Здесь кинетическая энергия электронов в каждой из атомных ячеек меньше их потенциальной энергии в кулоновском поле ядра (позволительно ограничиться квазиклассическим приближением), и поэтому при перемещении ядра под действием гравитационных сил вслед за ним почти как жесткое целое следуют и электроны атомной ячейки, так что эффект поляризации оказывается в этом случае сильно подавленным. Более детальный анализ [18] показывает, что ядру тем легче переместиться по отношению к электронному облаку, чем больше орбитальное квантовое число у относящихся к этому облаку электронов. Но даже в самых благоприятных для такой внутриатомной перестройки зарядов случаях та поляризация, которая обязана этой микроскопической перестройке, как уже говорилось выше, может привести к появлению лишь таких электрических полей, которые слишком слабы, чтобы уравновесить атомные ячейки. Конечно, ядро каждого атома удерживается от падения в гравитационном поле кулоновским полем электронов, но почти полностью — лишь электронов своего атома (мы это поле называли выше микроскопическим). Но что удерживает эти электроны, не дает им перемещаться вместе с ядром, с которым они так тесно связаны? То, что их подпирают электронные оболочки окружающих атомов. Но ведь эти взаимодействия обязаны именно принципу Паули. Таким образом, при  $p \ll p_F$  первостепенное значение в уравновешивании гравитационных сил приобретают «силы», определяемые принципом Паули, что надлежит истолковать таким образом: при  $\frac{p}{p_F} \rightarrow 0$  параметр  $\alpha \rightarrow 0$ .

Подводя итог, можно высказать следующее утверждение: безразмерный параметр  $\alpha$  является функцией отношения  $p/p_F$ .

Наиболее простой — полиномиальный — вариант этой зависимости:

$$\alpha = a_0 + a_1 \frac{p}{p_F} + \dots$$

Если остановиться на этом варианте, то оказывается, как это видно из приведенных выше рассуждений (а также и из того, что будет изложено ниже), что для первых оценок можно принять  $a_0 = 0$ . Если же учесть, что в дальнейшем условие механического равновесия будет почти исключительно использоваться для тех областей в планетах, где  $p/p_F \ll 1$ , то делается понятной возможность ограничиться одним лишь линейным по  $p/p_F$  членом:  $a_1 p/p_F$ . Множитель  $a_1$  можно принять равным единице. Чтобы показать это, обратимся вновь к условию термодинамического равновесия (2.6). Если интересоваться приповерхностными областями планеты, где давления  $p \ll p_F$  (поскольку обычно  $p_F$  имеет такой же порядок величины, что и упругий модуль  $B$ , можно записать и неравенство  $p \ll B$ ), то можно пользоваться для плотности «избыточной» энергии упрощенным выражением  $\mathcal{W} \approx p^2/2B$ . Для поверхностного слоя, толщина которого много меньше радиуса планеты, можно считать задачу о бароэлектрическом поле одномерной и пользоваться декартовыми координатами; условимся, что ось  $z$  при этом направлена вертикально и что давление зависит только от  $z$ . Тогда напряженность бароэлектрического поля запишется в виде  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_z E(z)$ , а условие (2.6) делается «одномерным»:

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{p^2}{2B} + \frac{E^2(z)}{8\pi} \right\} = 0. \quad (3.4)$$

Пользуясь гидростатическим условием механического равновесия  $\mathbf{f}_{гp} = \text{grad } p$  и переписывая уравнение Максвелла  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$  в виде  $\frac{dE(z)}{dz} = 4\pi\rho$ , получим из (3.4) условие

$$\frac{p}{B} (\mathbf{f}_{гp})_z + \rho E(z) = 0. \quad (3.5)$$

Поскольку и гравитационная, и электрическая силы имеют лишь по одной составляющей, направленной по оси  $z$ , можно придать



равенству (3.5) векторную форму, учитывая при этом, что  $\mathbf{f}_{эл} = \rho \mathbf{E}$ :

$$\frac{p}{B} \mathbf{f}_{гр} + \mathbf{f}_{эл} = 0. \quad (3.6)$$

Полученное условие отличается от (3.3) только тем, что на месте  $\alpha$  появился множитель  $p/B$ . Это и подтверждает приведенную выше аргументацию и, более того, позволяет еще раз убедиться, что множитель при отношении  $p/p_F$  в выражении для  $\alpha$  действительно можно положить равным единице. Таким образом, оба подхода, и энергетический и силовой, смыкаются, т. е. выявляется, что в указанных выше условиях постановки физической задачи они эквивалентны.

По мере уменьшения давления, как показывает проведенный выше анализ, роль электрического поля в установлении макроскопического механического равновесия делается все менее заметной. Здесь следует подчеркнуть слово «макроскопического»: именно оно указывает, что речь идет об усредненной макроскопической напряженности электрического поля. Уместно, однако, еще раз напомнить, что этот анализ относится только к тем областям, где  $p \ll B$ .

Подводя итог обсуждению вопроса о «силовом» условии механического равновесия, вернемся снова к соотношению  $E = \frac{M}{e} g$ , которое приводилось выше. Если понимать  $E$  как напряженность макроскопического электрического поля — того, которое может поддерживать каждую из атомных ячеек, то  $e$  придется истолковывать отнюдь не как модуль заряда электрона (или кратной величины), а именно как эффективный заряд ячейки. Этот заряд при нулевом давлении равен нулю — ячейка является электронейтральной, все электроны этой ячейки составляют с ее ядром единое достаточно жесткое целое. Если же ячейка находится в области ненулевого давления, то с некоторой вероятностью, которая возрастает с увеличением давления, ячейка может лишиться электрона, которому энергетически выгодно перейти в область меньших давлений, и тогда ячейка перестает быть электронейтральной. Возникающий у такой ячейки заряд, конечно, понимается тоже как усредненный, равный элементарному заряду, умноженному на вероятность потери электрона атомной ячейкой. Можно понимать эту вероятность и как относительную долю атомных ячеек, потерявших по электрону, и как ту относительную долю времени, в течении которой ячейка ионизирована.

Ниже будет показано, что даже в центральных областях планет, где давления максимальны, эффективный заряд на много порядков меньше элементарного. Из-за этого для напряженности электрического поля получаются оценки, значительно превосходящие бархилл-шиффовские.

Уместно отметить еще один пункт, касающийся химического потенциала. Химический потенциал, как известно, может выступать под внешне различающимися определениями. Так, в [19, с. 89] читаем: «Таким образом, химический потенциал тела, состоящего из одинаковых частиц, есть не что иное, как термодинамический потенциал, отнесенный к одной молекуле». В [20, с. 148]: «Производная  $\left(\frac{\partial \Psi^i}{\partial n_k^{(i)}}\right)_{V,T}$  называется химическим потенциалом  $k$ -го компонента в  $i$ -й фазе, она часто обозначается через  $\mu_k^{(i)}$ » (напомним, что в цитируемой книге М. А. Леонтовича  $\Psi^{(i)}$  обозначает свободную энергию  $i$ -й фазы системы). И. А. Квасников в [21] пишет: «У нас, таким образом, появилась новая термодинамическая величина  $\mu$ , смысл которой достаточно ясен: это изменение внутренней энергии  $\mathcal{E}$ , связанное с таким способом добавления одной частицы в систему, когда она при этом не совершает работы и не получает тепла. Эта величина была названа химическим потенциалом  $\mu$ ».

Подходя к определению химического потенциала с несколько различающихся позиций, все указанные авторы подчеркивают, что он зависит от изменения состояния при изменении числа частиц. Но каких именно «частиц»? В первом из приведенных определений речь идет о молекулах. У Леонтовича читаем: «Обозначим массу  $k$ -го компонента в  $i$ -й фазе, выраженную в грамах, или, что часто удобнее, в молях через  $n_k^{(i)}$ »; иначе говоря,  $n_k^{(i)}$  пропорционально числу частиц  $k$ -го компонента в  $i$ -й фазе. Квасников не уточняет, о какой «частице» он пишет, и это оправданно, так как в действительности можно говорить о различных химических потенциалах, фиксируя внимание на различных частицах. Полнее всего это обстоятельство нашло отражение у Леонтовича: понятие «компонента» можно толковать достаточно широко.

Что, однако, надлежит понимать под «частицей», когда дело касается бароэлектрического эффекта? Фактически, как видно из проводившегося выше обсуждения, наиболее важной для нас «частицей» оказывается при этом атомная ячейка и, по-

скольку она является носителем эффективного электрического заряда, речь должна уже идти не о химическом, а об электрохимическом потенциале, причем, добавим, об усредненном по физически бесконечно малым объемам. Этот электрохимический потенциал  $\mu_e$  отличается от химического  $\mu$  членом, который чаще всего записывается в виде произведения заряда «частицы» на потенциал электрического поля, возникающего благодаря наличию заряженных частиц или внешних источников (если таковые имеются). Однако, как хорошо известно, в электростатике энергия взаимодействия зарядов, или энергия зарядов в электрическом поле, или энергия электрического поля — это одна и та же величина, но только сформулированная то в терминах дальнего действия, то ближнего действия, то в промежуточном варианте описания. Это же относится и к плотности энергии: величина  $\rho\varphi_{el}/2$  отличается от  $\mathcal{E}^2/8\pi$  на выражение, имеющее вид дивергенции  $\operatorname{div} \frac{E\varphi}{8\pi}$ , которая при усреднении даже не по физически бесконечно малому объему, а по его малой части — по объему атомной ячейки — дает ноль.

Таким образом, если правильно учесть все особенности физической постановки задачи о бароэлектрическом поле, то и в рамках энергетического подхода, и основываясь на условии механического равновесия, получаем для  $E$  оценки, на много порядков превышающие барнхилл-шиффовские.

#### §4. Микроскопический подход

Подход, который базируется на применении методов квантовой теории и который поэтому естественно называть «микроскопическим», предполагает, что не используются никакие эмпирические данные о веществе, в том числе и те значения плотностей и упругих модулей, которые оказалось нужным привлекать при предыдущем подходе. Должен, конечно, задаваться химический состав среды, но в исходные уравнения не должны входить никакие величины, кроме универсальных постоянных и атомных номеров тех атомов, из которых построено вещество.

Полная реализация такой программы микроскопического описания на базе первых принципов встречает хорошо известные трудности: даже расчеты для изолированных многоэлектронных атомов требуют привлечения приближенных методов.

Задача, естественно, еще более усложняется, когда дело касается сплошной среды. Здесь не удастся обойтись без упрощающих моделей. Наиболее удобной для достижения поставленной

нами цели является модель среды как совокупности сферически симметричных атомных ячеек. В этой модели все атомные ячейки рассматриваются как электронейтральные, а распределение заряда в них — как сферически симметричное; такие ячейки не порождают электрического поля во внешней области, так что прямое электростатическое взаимодействие между ячейками попросту отсутствует. Очевидным преимуществом подобной модели является то, что расчеты для среды сводятся здесь к расчетам для отдельных ячеек.

Целью таких расчетов является определение энергии ячейки  $\mathcal{E}$  как функции ее радиуса  $b$ . Найдя такую зависимость и учитывая, что давление выражается в виде

$$p = -\frac{d\mathcal{E}}{dV} = -\frac{1}{4\pi b^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}, \quad (4.1)$$

можно найти и зависимость  $\mathcal{E}(b)$  энергии ячейки от давления, а значит, и избыточную плотность энергии

$$\mathcal{W}(p) = \frac{3}{4\pi b^3} \left\{ \mathcal{E}(p) - \mathcal{E}(0) \right\}.$$

При численном расчете энергии ячейки  $\mathcal{E}(b)$  используем метод Хартри–Фока–Слейтера (ХФС), предложенный в работе Слейтера [22] и реализованный Германом и Скиллманом [23]. Волновая функция электронов в каждой из элементарных атомных ячеек записывается как детерминант  $\Phi = \text{Det} \|\psi_i\|$ , построенный из одноэлектронных функций.

Указанная выше форма написания  $Z$ -электронной волновой функции  $\Phi$  посредством детерминанта (называемого детерминантом Слейтера) — известный прием, с помощью которого учитываются требования принципа Паули: если хотя бы два электрона оказались в одинаковом состоянии, то их одноэлектронные функции совпали бы, т.е. в детерминанте появились бы одинаковые строчки или столбцы, и, значит, детерминант обратился бы в нуль.

Полный потенциал электронного облака предполагается усредненным по углам, поэтому в волновой функции каждого из электронов переменные разделяются, а сами функции могут быть представлены в виде

$$\psi_i = R_i(r)Y_i(\theta, \varphi)u(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, Z, \quad (4.2)$$

где выражения для угловой  $Y_i(\theta, \varphi)$  и спиновой  $u(s_i)$  частей имеют стандартный вид. Остается найти только радиальную часть  $R_i(r)$ ; ее удобно записать ее как  $R_i = \frac{1}{r}\chi_i$ . Тогда уравнение для  $\chi_i(r)$ , если воспользоваться атомными единицами, записывается таким образом\*):

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l_i(l_i + 1)}{2r^2} - \frac{Z}{r} + (V_e + V_{ex} - \varepsilon_i) \right\} \chi_i = 0, \quad (4.3)$$

где

$$V_e = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(x)x^2 dx + 4\pi \int_r^b \rho(x)x dx, \quad (4.4)$$

$$V_{ex} = \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \rho^{1/3}.$$

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_i R_i^2 = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_i \chi_i^2(r).$$

Первые два члена в (4.3), а именно,  $-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2}$  и центробежный потенциал  $\frac{l_i(l_i + 1)}{2r^2}$ , в который входит орбитальное квантовое число  $l_i$ , порождаются оператором кинетической энергии; это орбитальное квантовое число, а также квантовое число  $m$  определяют угловую часть электронных волновых функций.

Постановка задачи, которую мы рассматриваем, такова, что в роли потенциальной энергии выступает величина, не зависящая от углов, и поэтому  $Y_i(\theta, \varphi)$  имеет тот же вид, что и в любой центрально-симметричной задаче.

Потенциальная энергия описывается тремя членами. Первый из них,  $-Z/r$ , есть потенциальная энергия электрона в кулоновском поле ядра. Член  $V_e$  описывает прямой потенциал самосогласованного поля электронного облака. Наконец,  $V_{ex}$  описывает так называемую обменную энергию; в отличие от метода

\*) За единицу заряда и массы принимаются при этом модуль заряда и масса электрона, за единицу действия принимается постоянная Планка. В этих единицах длина измеряется в боровских радиусах  $a_B = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.53 \cdot 10^{-8}$  см. Заметим, что при использовании атомных единиц физические постоянные в уравнение Шредингера не входят.

Хартри-Фока, в приближении ХФС нелокальный обменный потенциал заменен на локальный, общий для всех электронов атома и полученный [22] при усреднении в рамках модели свободных электронов.

После решения уравнений (4.3) полная энергия атомной ячейки находится по формуле

$$\mathcal{E}(b) = \sum_i \mathcal{E}_i - 2\pi \int_0^b \left\{ V_e(r) - \frac{1}{2} V_{ex}(r) \right\} \rho(r) r^2 dr. \quad (4.5)$$

Плотность заряда меняется внутри атомной ячейки непрерывно в зависимости от расстояния  $r$  от ядра и достигает экстремального значения на границе ячейки  $r = b$ . Этим определяются граничные условия

$$\left. \frac{d}{dr} R_i(r) \right|_{r=b} = 0. \quad (4.6)$$

Важную роль этих условий целесообразно подчеркнуть. Во-первых, при этом эффективным образом учитывается взаимодействие между ячейками, возникающее из-за ограниченности объема каждой из ячеек. Более того, это взаимодействие только так и учитывается. Во-вторых, это условие обеспечивает отсутствие потока электронов между ячейками и периодичность решения во всем пространстве.

Результаты приведенных расчетов приведены в приложении 2.

Учет переходов электронов из одних ячеек в другие, нарушающий электронейтральность, конечно, изменяет положение, но количественный вклад такого рода эффектов в интересующие нас значения объемной плотности энергии, как показывают приводимые ниже оценки, оказывается весьма малым и поэтому может не учитываться. Это дает основание и при микроскопическом описании, как при феноменологическом подходе, действовать таким образом: вначале находить энергии ячеек  $\mathcal{E}(b)$ , как если бы градиент давлений был нулевым (при этом, конечно, не было бы никакого перераспределения зарядов и, значит, не могло бы породиться электрическое поле), а затем, вычислив по этим  $\mathcal{E}(b)$  плотность избыточной энергии, подставляя это в (2.6), что позволит вычислить  $E$  уже при  $\text{grad } p \neq 0$ .

Первый шаг, таким образом, связан с определением  $\mathcal{E}(b)$ .

Для справок приведем некоторые соотношения между величинами в атомной системе единиц и в системе СГС: атомная единица энергии  $me^4/\hbar^2 = 4,36 \cdot 10^{-11}$  эрг, атомная единица давления (равная атомной единице плотности энергии)  $e^2/a_B^4 \approx 2,942 \cdot 10^{14}$  эрг/см<sup>3</sup>; атомная единица напряженности электрического и магнитного поля  $e/a_B^2 \approx 1,715 \cdot 10^7$  единиц абсолютной симметричной гауссовой системы.

Приведем графики зависимости энергии ячеек от давления и зависимости между давлением и радиусом ячейки для алюминия (все величины в атомных единицах).

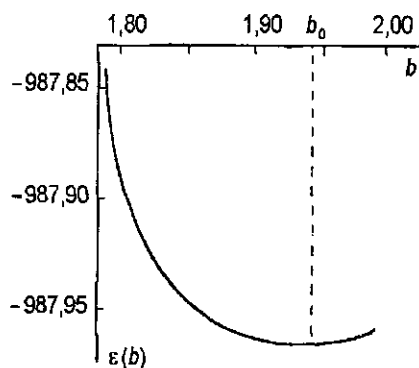


Рис. 1. Зависимость энергии атомной ячейки  $\mathcal{E}(b)$  от ее радиуса  $b$

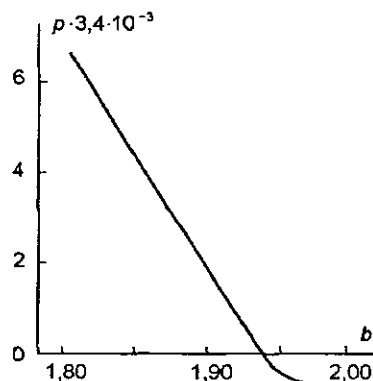


Рис. 2. Зависимость между давлением  $p$  и радиусом ячейки  $b$

Первый из этих графиков, на котором представлена зависимость энергии  $\mathcal{E}(b)$  атомной ячейки от ее радиуса, в частности, показывает, что энергия имеет минимальное значение при некотором радиусе  $b_0$ , отвечающем нулевому давлению, и довольно быстро увеличивается как при возрастании  $b$  по сравнению с  $b_0$ , что соответствует растяжению, так и при уменьшении  $b$ , т. е. при сжатии.

Второй график позволяет убедиться, насколько медленно изменяется радиус ячейки при изменении давления: изменение  $b$  всего на пол-процента, например, требует приложения дополнительного давления порядка  $10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>. Этот результат, кроме всего прочего, говорит о том, что в рамках используемого нам подхода, т. е. на базе модели ХФС, действительно можно получить реалистические оценки для модуля всестороннего сжатия, по крайней мере, по порядку величины.

Получаемые в виде таблиц данные не очень удобны, когда дело касается обсуждения аналитических зависимостей. Однако здесь есть хорошо известная простая возможность: можно воспользоваться полиномиальной интерполяцией зависимости энергии атомной ячейки от ее радиуса, что позволяет получать достаточно простые аналитические выражения. Так, пользуясь, например, кубической интерполяцией, запишем  $\mathcal{E}(b)$  в виде

$$\mathcal{E}(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3. \quad (4.7)$$

Постоянные  $a_0, \dots, a_3$  находятся по результатам численных вычислений на ЭВМ. Получаемые таким образом значения постоянных для нескольких элементов приводятся в табл. 1; там же указаны значения  $b_0$ , а также  $\mathcal{E}(b)$ .

Заметим, что в число элементов включен кремний, который при малых давлениях не является проводником первого рода. Позже мы вернемся к обсуждению того, к каким результатам это приводит, а сейчас мы обращаем на это внимание лишь для того, чтобы еще раз подчеркнуть, что модель сферически симметричных ячеек (если не касаться вопроса о проводимости и интересоваться лишь плотностью энергии при различных давлениях) приложима ко всем классам сред, но вопрос о перераспределении зарядов при  $\text{grad } p \neq 0$  решается для различных классов совершенно по-разному.

Таблица 1

| Эл-т | $a_0$     | $a_1$      | $a_2$     | $a_3$    | $b_0$  | $\mathcal{E}(b)$ |
|------|-----------|------------|-----------|----------|--------|------------------|
| Na   | -92,43267 | -1577,2954 | 1411,2904 | -418,233 | 1,0349 | -676,826         |
| Mn   | 3017,9074 | -8320,9732 | 6016,5058 | -1450,0  | 1,3731 | -817,862         |
| Al   | -960,6300 | -37,003934 | 16,364    | -2,34667 | 1,9414 | -987,964         |
| Si   | -1125,789 | -72,0594   | -30,4     | 2        | 1,8908 | -1180,3          |
| K    | -2349,943 | -91,417    | 15,261534 | 4,615384 | 1,6937 | -2438,57         |
| Ti   | -2728,212 | -1228,7066 | 702       | -133,333 | 1,6412 | -3443,34         |
| Fe   | -9363,431 | -2579,2166 | 1890      | -458,333 | 1,2580 | -5129,52         |
| Hg   | -66873,51 | -14748,191 | 10015,833 | -2266,67 | 1,4478 | -74074,3         |
| Pb   | -70549,84 | -14209,131 | 8430      | -1666,67 | 1,6582 | -78531,1         |



Пользуясь формулой (4.7) и указанными в табл. 1 значениями коэффициентов, можно подсчитать энергию ячеек с относительной погрешностью порядка  $10^{-4}$  вплоть до давлений порядка  $10^{10} \div 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>. Для более высоких давлений точность получается, естественно, меньшей, хотя это проявляется в неодинаковой мере для различных элементов.

Пользуясь предложенной интерполяционной формулой (4.7) для  $\mathcal{E}(b)$ , легко определить давление:

$$p = -\frac{1}{4\pi b^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b} = -\frac{1}{4\pi b^2} (a_1 + 2a_2 b + 3a_3 b^2). \quad (4.8)$$

Для дальнейшего, однако, представляется более интересным нахождение  $b$  как функции давления:

$$b = -\frac{a_2}{3a_3 + 4\pi p} \left\{ 1 - \sqrt{1 - a_1 \frac{3a_3 + 4\pi p}{a_2^2}} \right\}. \quad (4.9)$$

Плотность избыточной энергии

$$\mathcal{W} = \frac{3}{4\pi b^3} \{\mathcal{E}(b) - \mathcal{E}(b_0)\} = \frac{3}{4\pi b^3} (a_2 + 3a_3 b_0 + a_3 \delta) \delta^2, \quad (4.10)$$

поскольку, как то видно из (4.3),  $a_1 + 2a_2 b_0 + 3a_3 b_0^2 = 0$ . Даже при давлениях, приближающихся к фермиевским,  $\delta = b - b_0$  продолжает оставаться малым по сравнению с  $b_0$ ; это позволяет пренебречь в выражении для  $\mathcal{W}$  членом, пропорциональным  $\delta^3$ , после чего для  $\mathcal{W}$  получается приближенное выражение

$$\mathcal{W} \approx \frac{3}{4\pi b_0^3} (a_2 + 3a_3 b_0) \delta^2. \quad (4.11)$$

По поводу изложенного выше представляются уместными два замечания. Первое из них, очень короткое, касается кремния. Из всех элементов, представленных в табл. 1, это единственный элемент, не являющийся проводником первого рода и, одновременно, только для него  $a_2 + 3a_3 b_0$  получается отрицательным, а значит, применение обсуждаемого нами метода для исследования бароэлектрического поля встречает здесь препятствие. Данное обстоятельство вряд ли можно считать случайным совпадением, хотя выяснение этого момента требует более детального

рассмотрения, которое, однако, выходит за рамки интересующей нас задачи.

Последнее, что хотелось бы еще обсудить в настоящем параграфе — это вопрос о других, отличающихся от вышеизложенного, методах теоретического описания, некоторые из которых могут использоваться в рамках микроскопического подхода. Потребность выхода за пределы модели ХФС диктуется тем, что эта модель мало приспособлена для учета температурных эффектов и усложненного химического состава. Возникающие здесь затруднения можно преодолеть, но более удобен другой класс моделей, появившийся благодаря работам Томаса и Ферми [24–25] и затем развивавшийся и дополнявшийся рядом авторов [26–33]. Использование такого рода методов позволяет оценить влияние температурных эффектов на формирование электрических и магнитных полей за счет бароэлектрического эффекта и убедиться, что если и не для звезд, то для планет эти эффекты относительно малозначимы.

## БАРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ПЛАНЕТ И ЗВЕЗД

### §5. Описание модели

Постановка задачи, к рассмотрению которой мы переходим, такова: химически однородный массивный проводящий шар, имеющий нулевую температуру и не испытывающий внешних воздействий, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  как единое целое; найти напряженности электрического и магнитного полей, появляющихся благодаря бароэлектрическому эффекту и вращению.

Понятно, что такая модель достаточно далека от реальных звезд и планет, которые не являются ни химически однородными, ни холодными, которые испытывают внешние воздействия и вовсе не вращаются как единое целое. И, тем не менее, мы попытаемся здесь пояснить, почему указанная модель может быть принята — хотя бы для получения первых оценок.

Пункт, касающийся химической однородности: проводимые ниже расчеты показывают, что напряженности бароэлектрических полей в модели химически однородных шаров — «планет» — действительно зависят от того, каким считать химический состав этих шаров. Однако возникающий здесь разброс значений (как говорится, «при прочих равных условиях») таков, что все они лежат в пределах одного порядка величины.

Поправки, которые можно назвать «температурными», имеют двоякую физическую природу: здесь может проявляться как зависимость химического потенциала от давления и температуры, что может отразиться на оценках для бароэлектрического поля, так и эффекты, обусловленные градиентами температуры — термоэлектрические эффекты, как их обычно называют.

Если градиенты температур велики, т. е. заметно превосходят температуру Ферми, то вклад термоэлектрических полей может оказаться ощутимым. Для планет же, в частности для Земли, где даже в центральной области температура на два порядка меньше температуры Ферми, доля термоэлектрических полей относительно мала: как показывают оценки, эти поля на четыре порядка меньше бароэлектрических. Влияние конечности температур (т. е. такой модели планеты, когда температура во всех ее точках считается одинаковой, отличной от нуля) на оценки для напряженностей бароэлектрических полей также не является сильным, как то показали расчеты Калева на базе модели Томаса-Ферми [34].

Таким образом, полагая температуру планеты равной нулю, мы лишь незначительно огрубляем оценки для полей. Заметим, что, игнорируя термоэлектрический эффект, мы несколько занижаем значения для напряженностей электрических полей: поскольку температуры в центральных областях выше, чем в периферических, термоэлектрическое перераспределение зарядов проявляется в дополнительном выдавливании электронов из глубин планет к их поверхностям, что приводит к появлению полей того же направления, что и бароэлектрических.

По поводу внешних воздействий: наибольший интерес представляют здесь приливные воздействия, вызывающие перераспределение давлений в планете, а значит и изменяющих бароэлектрические поля. Обсуждение таких эффектов целесообразно перенести в тот раздел, который целиком посвящен учету нестационарных распределений давлений — в последнюю главу настоящей книги. Начать же уместно с рассмотрения стационарной модели.

Последнее предположение — об отсутствии внутренних дифференциальных движений, т. е. о вращении шара как жесткого целого, — привлекается не только ради упрощения задачи. Гораздо важнее, что благодаря такому предположению из рассмотрения исключаются магнитогидродинамические эффекты генерации (точнее, усиления) магнитного поля. Конечно, в реальных планетах и особенно в звездах магнитогидродинамические эффекты — «эффекты динамо» — не только существуют, но даже, как правило, играют ведущую роль в формировании магнитных полей, а бароэлектрические добавки к ним сравнительно малы. Однако именно эти добавки и являются предметом нашего изучения, и этим оправдывается наше обращение к такой

модели, в которой изначально исключаются эффекты порождения магнитных полей, коренящиеся в наличии дифференциальных движений в проводниках. Что же касается осесимметричных движений, которые, как известно, не приводят к генерации магнитных полей, то некоторые замечания, касающиеся таких движений, приводятся ниже.

## §6. Оценки для $E$ и $H$

### в рамках феноменологического подхода

Перейдем теперь к оценкам для тех бароэлектрических полей, которые должны появляться в рассматриваемых нами «модельных планетах». Будем предполагать, что вращение — медленное; это значит, что радиусы планет  $R$  и угловые скорости  $\omega$ , с которыми они вращаются, удовлетворяют условию  $\omega R \ll c$ ; ниже будет показано, что при выполнении этого условия можно вычислять напряженность электрического поля, не учитывая вращение.

Потенциал гравитационного поля  $\varphi_r$  планеты мы запишем в упрощенном виде, принимая, что механическая плотность  $\tau$  постоянна, и не учитывая вращение, т.е. пренебрегая вкладом центробежного поля:

$$\varphi_r = \frac{2\pi}{3} G \tau r^2 = \frac{1}{2R} g r^2 = \frac{GM}{2R^3} r^2, \quad (6.1)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная, а  $g = \frac{4\pi G \tau R}{3}$  — ускорение свободного падения на поверхности шара  $r = R$ , или, что то же самое, напряженность гравитационного поля на этой поверхности. В дальнейшем под  $\tau$  мы будем понимать усредненное значение плотности  $\tau = \frac{3M}{4\pi R^3}$ .

Потенциал, определяемый выражением (6.1) выглядит так, как если бы вещество планеты было несжимаемым. Конечно, это всего лишь упрощающий прием, причем использованный в таком пункте, который не может повлиять радикальным образом на интересующие нас оценки. В других же пунктах и, в первую очередь, при вычислении плотности «избыточной» энергии, учет сжимаемости имеет, конечно же, существенное значение.

Если использовать условия гидростатического равновесия  $\text{grad}(\tau\varphi_r + p) = 0$  и подставить для  $\varphi_r$  выражение (6.1), то получим в обсуждаемом приближении закон, по которому изменяется

давление в зависимости от расстояния  $r$  от центра:

$$p = \frac{1}{2}g\tau R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (6.2)$$

где

$$p_0 = \frac{1}{2}g\tau R = \frac{GM\tau}{2R}. \quad (6.3)$$

По мере уменьшения расстояния до центра реальных небесных тел давление увеличивается в них, конечно, быстрее, чем это описывается формулой (6.2), и далеко не так гладко. По геофизическим данным в наиболее употребительной модели Земли, например, ход давления  $p(r)$  представлен на рис. 3, где для сравнения пунктиром обозначена кривая, соответствующая (6.2); при этом все параметры подобраны так, чтобы обеспечить эмпирическое значение давления в центре Земли.

Понятно, что ожидать очень точного описания распределения давлений  $p(r)$  по (6.2) нельзя; однако такая упрощенная формула будет достаточной для оценок по порядку величины, которые и будут нашей целью в дальнейшем.

Перейдем теперь к оценкам для напряженности бароэлектрического поля. Принимая за основу условие равновесия (2.6) и пользуясь тем, что в используемой нами модели планеты предполагается сферическая симметрия, а это проявляется, в частности, в том, что бароэлектрическое поле направлено радиально, т. е.  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_r E(r)$ , можно записать

$$E(r) = \sqrt{8\pi \{W_0 - W(r)\}}. \quad (6.4)$$

Постоянная интегрирования  $W_0$  находится из условия  $E(0) = 0$ , обеспечивающего, заметим, и неотрицательность подкоренного выражения в (6.4). Эта постоянная может быть истолкована как

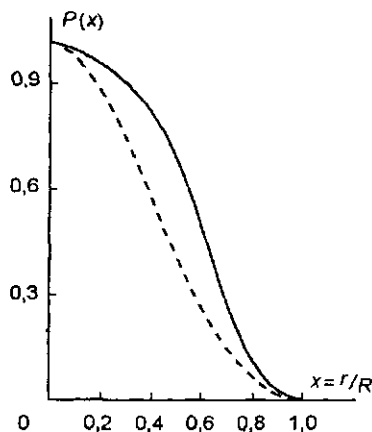


Рис. 3. Зависимость давления от расстояния до центра планеты. Пунктирная линия — по стандартной модели Земли, сплошная — по формуле (6.2)

та максимальная плотность избыточной энергии, которая достигается в центре планеты.

Пользуясь тем вариантом написания  $\mathcal{W}$ , который был принят выше в рамках феноменологического подхода (3.1) и учитывая, что в центре планеты давление  $p(0) = g\tau R/2$ , нетрудно найти, что

$$\mathcal{W}_0 = \frac{p_0^2}{2B + \nu p_0} = \frac{(g\tau R)^2}{4(2B + \frac{1}{2}\nu g\tau R)}. \quad (6.5)$$

Отсюда, учитывая (6.2), (6.4) и (6.5), находим выражение для напряженности поля в рамках феноменологического подхода:

$$\begin{aligned} E(x) &= x\sqrt{8\pi\mathcal{W}_0} \sqrt{\frac{2B(2-x^2) + \nu p_0(1-x^2)}{2B + \nu p_0(1-x^2)}} = \\ &= xg\tau R \sqrt{2\pi \frac{2B + (1-x^2)(2B + \frac{1}{2}\nu g\tau R)}{(2B + \frac{1}{2}\nu g\tau R)(\frac{1}{2}(1-x^2)\nu g\tau R + 2B)}}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где  $x = r/R$ .

По мере приближения к поверхности шара напряженность электрического поля монотонно увеличивается. У поверхности  $r = R$ , где давление  $p \rightarrow 0$ , поле  $E$  достигает наибольшего значения:

$$E_0 = E \Big|_{r \rightarrow R} = \sqrt{8\pi\mathcal{W}_0}. \quad (6.7)$$

Подставляя значения всех параметров для Земли (в единицах СГС), получим для  $g\tau R$  значение  $\approx 3,5 \cdot 10^{12}$ . Примерно такую же (или несколько большую) величину, чем  $\nu g\tau R$ , имеет и  $2B$ , так что напряженность поля у поверхности получается порядка  $10^6$  СГСЕ. Чтобы пояснить, насколько велико это поле, достаточно, например, напомнить, что типичная величина для напряженности внутриатомного электрического поля  $E_{ат} \approx e/a_B^2$ , что всего лишь примерно на порядок превышает полученное значение  $E \Big|_{r \rightarrow R}$ .

Таким образом, если обсуждаемая нами модель достаточно реалистична, она приводит к поистине озадачивающему, по крайней мере на первых порах, выводу, что в Земле, прямо под нашими ногами имеется колоссальное поле, уступающее внутриатомному всего лишь только на один-два порядка.

Если это так, то почему это поле остается незамеченным? И каким образом его можно обнаружить? Какие явления могут им обуславливаться? Такие вопросы, а их возникает множество, уместно обсудить позже. Пока же продолжим рассмотрение модельной планеты.

Электрическое поле во внешней области  $r \gg R$  отсутствует — мы полагаем, что полный заряд планеты равен нулю. Таким образом, на поверхности  $r = R$  напряженность электрического поля претерпевает разрыв, пропорциональный плотности поверхностных зарядов, равной

$$\rho_{\text{пов}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E \Big|_{R+0} - E \Big|_{R-0} \right\} = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{8\pi W_0} = -\frac{E_0}{4\pi}. \quad (6.8)$$

Плотность объемных зарядов определяется уравнением Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

что с учетом центральной симметрии дает

$$\rho = \frac{1}{4\pi R x^2} \frac{d}{dx} (x^2 E(x)); \quad x = \frac{r}{R}. \quad (6.9)$$

Положительный объемный заряд компенсируется отрицательным поверхностным, так что полный заряд планеты, как уже говорилось, принимается равным нулю. Наибольшего значения объемная плотность заряда достигает в центре шара, и она равна там

$$\rho(x) \Big|_{x=0} = \frac{3g\tau \sqrt{B + \frac{1}{8}\nu g\tau R}}{\sqrt{8\pi(B + \frac{1}{4}\nu g\tau R)}} = \frac{3E_0}{4\pi R} \sqrt{\frac{4B + \nu p_0}{2B + \nu p_0}}. \quad (6.10)$$

Получив это выражение, уместно вновь обратиться к поставленному выше вопросу о масштабах перераспределения зарядов между различными атомными ячейками. Определив плотность заряда и учитывая, что атомная ячейка имеет размеры порядка борковского радиуса, нетрудно получить оценку для заряда:

$$\Delta q \sim \frac{4\pi}{3} \rho a_B^3. \quad (6.11)$$



Разделив это на заряд электрона  $e$ , оценим число электронов, теряемых одним атомом:

$$\Delta n \sim \frac{\Delta q}{e}.$$

После подстановки численных значений величин, входящих в это выражение, нетрудно убедиться, что даже в центре шара, где  $\Delta n$  максимально, оно значительно меньше единицы:

$$\Delta n \Big|_{r=0} \sim 10^{-16} \div 10^{-17}.$$

Понимать это нужно таким образом, что даже в центре шара, т. е. в области, где плотность избыточной энергии наибольшая и откуда по этой причине больше всего выдавливаются электроны, лишь одна из  $10^{16} \div 10^{17}$  атомных ячеек теряет по одному электрону и оказывается заряженной положительно. Можно сказать о том же и следующим образом: относительная доля времени, в течении которого в атомной ячейке недостает одного электрона, порядка  $10^{-16} \div 10^{-17}$ ; такое истолкование в известной мере предпочтительно, так как оно косвенно подчеркивает обобщественность электронов проводимости в металлах. (Заметим, что отличные от нуля объемные плотности заряда могут являться следствием не только переходов электронов из одних атомных ячеек в другие, но также и перераспределения зарядов внутри ячеек; при макроскопическом описании все это учитывается уравнением Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ .)

Полученные для  $\Delta n$  оценки относятся к центру шара. Однако и в других областях, даже при  $r$  близких к  $R$ , оценки для  $\Delta n$  приводят к значениям, не намного меньшим, нежели приведенные выше: вся внутренняя область шара почти равномерно заполнена положительным зарядом, а поверхность — выдавленными из внутренней области электронами.

Поскольку относительная доля атомных ячеек, утративших электронейтральность, оказывается действительно очень малой, то это является подтверждением правомерности принятого нами метода расчета плотности избыточной энергии: мы вначале не учитывали бароэлектрического перераспределения зарядов, т. е. считали атомные ячейки электронейтральными, а теперь мы смогли убедиться, что действительно подавляющее число ячеек не теряет электронов, что и оправдывает используемый подход.

И еще одно небольшое замечание: повсюду, где в формулах появились квадратные корни, брались их арифметические значения. Выбор знака корня определяется указанной физической картиной явления: вытеснением электронов из внутренних областей на поверхность, о чем уже говорилось выше.

Перейдем теперь к рассмотрению того магнитного поля, которое появляется из-за вращения рассматриваемой нами модельной планеты и всех перераспределившихся в ней зарядов. Напомним, что плотности поверхностных и объемных зарядов мы находили, фактически игнорируя вращение, а это означает, что мы считаем бароэлектрическое поле одинаковым и в инерциальной системе отсчета, относительно которой вращается шар, и в собственной (вращающейся) системе отсчета этого шара; это, конечно, требует дополнительного обоснования, и такое, уже обещанное выше, обоснование будет подробно обсуждаться в дальнейшем. Что же касается магнитного поля, то здесь вращение играет определяющую роль.

Мы будем искать напряженность магнитного поля в той инерциальной системе отсчета, в которой центр масс шара покоится, а сам он вращается с угловой скоростью  $\omega$ ; для определенности направим  $\omega$  по оси  $Z$ .

Чтобы предупредить недоразумения, сразу же отметим следующее: как показано ниже, можно было бы проводить рассмотрение магнитного поля и в собственной (вращающейся) системе отсчета шара; хотя все заряды в этой системе отсчета являются покоящимися, но уравнения Максвелла, записанные во вращающейся системе отсчета, показывают, что они порождают магнитное поле, причем в случае медленного вращения (этот термин уже был пояснен выше) магнитное поле в инерциальной и в собственной системах отсчета получается одинаковым, если ограничиться линейным по  $v/c$  (где  $\mathbf{v} = [\omega \times \mathbf{r}]$ ) приближением.

Напряженность магнитного поля, порождаемого вращающимися зарядами, определяется уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Плотность объемных токов

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho [\omega \times \mathbf{r}], \quad (6.12)$$

где, как уже указывалось,  $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}$ .

Для того чтобы записывать все дальнейшее в более ясной, по возможности, форме, но так, чтобы проиллюстрировать метод рассмотрения, обратимся сначала к тому простейшему варианту написания плотности избыточной энергии  $\mathcal{W} = \rho^2/2B$ , который, как было указано выше, в действительности применим лишь при давлениях, значительно меньших фермиевских.

Подставляя данное выражение для  $\mathcal{W}$ , мы в таком «чисто гауссовом» варианте получим для величины напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(r)$  выражение

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{i}_r g \tau r \sqrt{\frac{\pi}{B} \left( 2 - \frac{r^2}{R^2} \right)}. \quad (6.13)$$

Плотность объемных зарядов

$$\rho = \frac{g\tau}{2R\sqrt{\pi B}} \frac{3R^2 - 2r^2}{\sqrt{2R^2 - r^2}}. \quad (6.14)$$

Плотность же поверхностных зарядов

$$\rho_{\text{пов}} = -\frac{g\tau R}{4\sqrt{\pi B}}. \quad (6.15)$$

Получив выражения для  $\mathbf{E}(r)$ ,  $\rho(r)$  и  $\rho_{\text{пов}}$ , еще раз обратим внимание на необходимость выбора знака выступающих в них корней. Этот выбор диктуется физическими соображениями: электроны вытесняются из центральных областей в периферические, так что объемные заряды должны иметь положительную, а поверхностные — отрицательную плотность, т. е. нужно брать арифметические корни.

Перепишем уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  в сферических координатах; полярную ось направим по  $\omega$ , а для  $\mathbf{H}$  примем выражение  $\mathbf{H} = \mathbf{i}_r H_r(r, \theta) + \mathbf{i}_\theta H_\theta(r, \theta)$ , диктуемое соображениями об осевой симметрии. Будем также пользоваться еще и тем, что  $\mathbf{j} = \mathbf{i}_\psi \rho \omega r \sin \theta$ .

Нетривиальной является лишь  $\psi$ -компонента этого векторного уравнения

$$(\text{rot } \mathbf{H})_\psi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right\} = \frac{4\pi}{c} \rho \omega r \sin \theta. \quad (6.16)$$

Уравнение же  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\theta) = 0. \quad (6.17)$$

Будем искать компоненты напряженности магнитного поля во внутренней области  $\mathbf{H}^{(i)}$  и во внешней области  $\mathbf{H}^{(e)}$ , вводя в рассмотрение новые функции:

$$\begin{aligned} H_\theta^{(i)} &= \frac{f_i(r)}{r} \sin \theta, & H_r^{(i)} &= F_i(r) \cos \theta, \\ H_\theta^{(e)} &= \frac{f_e(r)}{r} \sin \theta, & H_r^{(e)} &= F_e(r) \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Получающиеся для функций  $f_i$ ,  $F_i$ ,  $f_e$  и  $F_e$  уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d f_i}{d r} + F_i &= \frac{4\pi}{c} \rho \omega r^2, & \frac{d}{d r} (r^2 F_i) + 2 f_i &= 0, \\ \frac{d f_e}{d r} &= -F_e, & \frac{d}{d r} (r^2 F_e) + 2 f_e &= 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Исключая в (6.19)  $f_i$  и  $f_e$ , получаем

$$\frac{d u_i}{d r} + \frac{4}{r} u_i = -\frac{8\pi}{c} \rho \omega, \quad \frac{d u_e}{d r} + \frac{4}{r} u_e = 0, \quad (6.20)$$

где

$$u_i \equiv \frac{d F_i}{d r}, \quad u_e \equiv \frac{d F_e}{d r}.$$

Полученное для  $u_e$  уравнение имеет решение

$$u_e = \text{const } r^{-4}. \quad (6.21)$$

Поле  $\mathbf{H}^{(e)}$  вне шара получается, таким образом, чисто дипольным:

$$\mathbf{H}^{(e)} = \frac{3\mathbf{r}(\mathcal{M} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathcal{M}}{r^5}, \quad \mathcal{M} = \mathbf{i}_z \mathcal{M}, \quad (6.22)$$

где  $\mathcal{M}$  и  $\text{const}$  связаны соотношением  $\mathcal{M} = -\frac{\text{const}}{6}$ .

Поле внутри шара определяется распределением объемных зарядов. Действительно, мы получили для  $u_i$  уравнение  $\frac{d u_i}{d r} + \frac{4}{r} u_i = q(r)$ , где  $q(r) = -\frac{8\pi}{c} \omega \rho$ . Решение этого уравнения есть

$$u_i = e^{-A(r)} \left\{ \eta + \int_{\xi}^r dy q(y) e^{A(y)} \right\}, \quad (6.23)$$

где  $A(r) = \int_{\xi}^r \frac{4}{y} dy = 4 \ln \frac{r}{\xi}$ , так что  $u_i(\xi) = \eta$ .

Подставляя выражение для  $\rho$  (6.14) и учитывая, что в обсуждаемой нами задаче  $\eta = 0$ , находим

$$u_i = -\frac{4g\omega\tau}{cRr^4} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \int_0^r dy y^4 \frac{3R^2 - 2y^2}{\sqrt{2R^2 - y^2}}. \quad (6.24)$$

После интегрирования получаем отсюда  $F_i$ :

$$\begin{aligned} F_i &= \\ &= \frac{4g\omega\tau}{cR} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \left\{ -\frac{R^6}{6r^3} \arcsin \frac{r}{R\sqrt{2}} + \left( \frac{R^4}{12r^2} + \frac{5R^2}{36} - \frac{r^2}{9} \right) \sqrt{2R^2 - r^2} \right\} + \\ &\quad + \text{const}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Постоянная интегрирования  $\text{const}$  определяется из граничного условия непрерывности нормальной компоненты  $\mathbf{H}$ , т.е.  $H_r$  на поверхности планеты  $r = R$  равно:

$$F_i(R) \cos \theta = -2 \frac{|\mathcal{M}|}{R^3} \cos \theta. \quad (6.26)$$

Полный магнитный момент  $\mathcal{M}$  можно разделить на части  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{об}} + \mathcal{M}_{\text{пов}}$ , первая из которых обуславливается вращением объемных, а вторая — поверхностных зарядов:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{об}} &= \frac{1}{2c} \int \rho [\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] dV = \frac{4\pi}{3c} \boldsymbol{\omega} \int_0^R dr r^4 \rho(r); \quad (6.27) \\ \mathcal{M}_{\text{пов}} &= \frac{4\pi R^4}{3c} \boldsymbol{\omega} \rho_{\text{пов}}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (6.14) и (6.15) для плотностей объемных и поверхностных зарядов и учитывая из (6.3)  $g\tau = \frac{3GM^2}{4\pi R^5}$ , получаем

$$\mathcal{M} = -\frac{3\pi - 4}{36c} \omega g \tau R^5 \sqrt{\frac{\pi}{B}}. \quad (6.28)$$

Поверхностные (отрицательные) заряды определяют доминирующий вклад в магнитный момент, и из-за этого  $\mathcal{M}$  оказывается направленным противоположно  $\omega$ .

Подставляя найденное выражение для  $\mathcal{M}$  в граничное условие, получим для  $F_i$  выражение

$$F_i = \frac{4\omega\tau g R^2}{c} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \left\{ -\frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}}{6x^3} + \left( \frac{5}{36} - \frac{x^2}{9} + \frac{1}{12x^2} \right) \sqrt{2-x^2} - \frac{1}{18} \right\}. \quad (6.29)$$

Перейдем теперь к рассмотрению горизонтальной компоненты  $H_\theta^{(i)}$  в толще шара. Она определяется функцией  $F_i$ :

$$H_\theta^{(i)} = \frac{f_i}{r} \sin \theta = -\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 F_i) \sin \theta. \quad (6.30)$$

После подстановки находим  $H_\theta^{(i)} = -L P(x) \sin \theta$ , где

$$L = \frac{2\omega\tau g R^2}{c} \sqrt{\frac{\pi}{B}},$$

$$P(x) = \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}}{6x^3} - \frac{1}{9} + \frac{5x^4 - \frac{47x^2}{36} + \frac{17}{36} - \frac{1}{6x^2}}{\sqrt{2-x^2}}. \quad (6.31)$$

Полученные результаты проиллюстрируем графиками. Для этого компоненты  $H_r^{(i)}$  и  $H_\theta^{(i)}$  напряженности магнитного поля удобно представить в виде

$$H_r^{(i)} = 2LQ(x) \cos \theta, \quad H_\theta^{(i)} = -LP(x) \sin \theta. \quad (6.32)$$

Зависимости  $Q(x)$  и  $P(x)$  удобнее представить в виде графиков, которые приведены на рис. 4 и 5. Как показывает первый из этих рисунков, при любом фиксированном  $\theta \neq \pi/2$  радиальная компонента  $H_r^{(i)}$  по мере увеличения глубины вначале убывает

по модулю, затем, пройдя через нулевое значение на расстоянии  $\approx 0,75R$  от центра, изменяет знак, начинает возрастать (хотя и не монотонно) вплоть до центра шара.

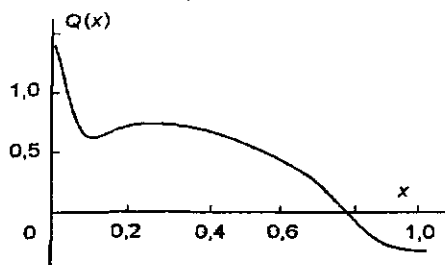


Рис. 4. Функция  $Q(x)$ , определяющая вертикальную компоненту напряженности магнитного поля внутри планеты в соответствии с (6.32)

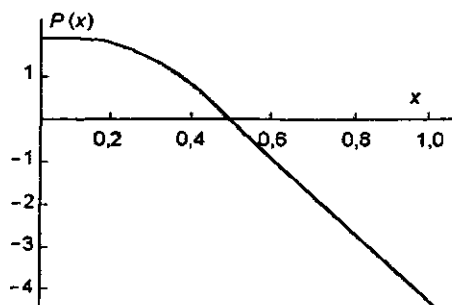


Рис. 5. Функция  $P(x)$ , определяющая горизонтальную компоненту напряженности магнитного поля внутри планеты в соответствии с (6.32)

Как показывает наш анализ, магнитное поле, появляющееся благодаря бароэлектрическому эффекту, оказывается дипольным во внешней, но отнюдь не во внутренней области.

Как уже говорилось, магнитное поле в реальных объектах складывается из частей, имеющих различную физическую природу, из которых часто наибольший вес имеют поля магнитогидродинамического происхождения. На следующем за ними месте, по нашему мнению, стоят баромагнитные поля, т. е. магнитные поля, порождаемые вращением зарядов бароэлектрической природы. Полная картина зависимости напряженности магнитного поля от глубины оказывается не простой: магнитогидродинами-

Горизонтальная же компонента по мере увеличения глубины убывает по модулю, на глубине  $\approx 0,5R$  обращается в нуль, а затем, изменив знак, монотонно увеличивается вплоть до центра шара  $r = 0$ .

Вполне очевидно, что такое поле вовсе не похоже на дипольное. В то же время, говоря о магнитном поле Земли, часто рассматривают его как примерно дипольное не только вне, но и внутри Земли, приписывая его источнику — диполю — относительно малого размера и помещая его вблизи центра Земли. Такая позиция естественна, если причину появления геомагнитного поля усматривать исключительно в магнитогидродинамических процессах, протекающих в ядре Земли. Но, как показывает наш анализ, магнитное поле, появляющееся благодаря бароэлектри-

ческая часть поля, по-видимому, возрастает, а баромагнитная — убывает с глубиной (при не слишком больших глубинах).

Известно, что были попытки исследовать эти вопросы экспериментально, но результаты оказались разноречивыми, да и достигавшиеся глубины были недостаточными для получения убедительных данных.

Полезно отметить, наконец, и еще одно, почти очевидное обстоятельство: в приповерхностной области напряженности электрического и магнитного полей связаны соотношением

$$E \approx \frac{v}{c}H; \quad (v = \omega R).$$

## §7. Оценки для $E$ и $H$

### в рамках микроскопического подхода

Переходя к обсуждению вопросов, указанных в наименовании настоящего параграфа, мы изменим образ наших действий только в одном пункте: плотность избыточной энергии  $W$ , которую нужно будет подставлять в (6.4) для нахождения напряженности бароэлектрического поля, теперь уже не будет вычисляться по феноменологической формуле (3.1), а должна получаться на базе методов квантовой теории.

По-прежнему мы будем рассматривать планету как электронейтральный, холодный (во всяком случае, когда будет использоваться метод Хартри-Фока-Слейтера), химически однородный и вращающийся как единое целое шар. Распределение давлений, как и раньше, будем описывать формулой (6.2), причем независимо от того, какой химически состав приписывается планете, множитель  $\frac{1}{2}g\tau R$  всегда будет полагаться таким же, каков он для реальной Земли:  $\approx 1,75 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>  $\approx 6 \cdot 10^{-3}$  а. е.

Поскольку у поверхности  $r = R$  давление  $p = 0$ , а значит, и избыточная плотность энергии обращается в нуль, из (6.7) вытекает, что напряженность бароэлектрического поля определяется на этой поверхности только давлением  $p_0$  в центре планеты, через которое выражается  $W$ :

$$E(R) = \sqrt{8\pi W_0}. \quad (7.1)$$

В табл. 2 приведены значения  $E(r)$  для «планет» из тех элементов, которые включены в табл. 1.



Таблица 2

| Элемент | $E(R), \text{а. е.}$  |
|---------|-----------------------|
| Na      | $2,810 \cdot 10^{-3}$ |
| Mn      | $2,276 \cdot 10^{-2}$ |
| Al      | $7,025 \cdot 10^{-2}$ |
| K       | $1,926 \cdot 10^{-2}$ |
| Ti      | $1,941 \cdot 10^{-2}$ |
| Fe      | $8,174 \cdot 10^{-3}$ |
| Hg      | $3,26 \cdot 10^{-5}$  |

Таблица 3

| Элемент | $E(R), \text{а. е.}$ |
|---------|----------------------|
| Na      | $2,48 \cdot 10^{-3}$ |
| Mn      | $1,01 \cdot 10^{-2}$ |
| Al      | $1,81 \cdot 10^{-2}$ |
| K       | $4,62 \cdot 10^{-4}$ |
| Ti      | $1,29 \cdot 10^{-2}$ |
| Fe      | $1,64 \cdot 10^{-2}$ |
| Hg      | $5,05 \cdot 10^{-2}$ |
| Pb      | $4,03 \cdot 10^{-2}$ |

Поскольку при составлении табл. 2 мы считали давления в центре всех планет одинаковыми, нам пришлось приписать этим планетам различные радиусы, так как из-за различия химического состава плотности также оказываются различными.

Можно привести еще одну иллюстрацию зависимости бароэлектрического поля от химического состава. Помещенные в табл. 3 данные показывают, какие значения принимает  $E(R)$  для планет с различным химическим составом, если приписывать им одинаковые радиусы, равные радиусу Земли (разумеется,  $p_0$  при этом получается для разных планет неодинаковым).

Результаты, нашедшие отражение в табл. 2 и 3, показывают, что действительно существует определенная зависимость напряженности бароэлектрического поля от химического состава планеты. Если бы мы располагали возможностью вычислять напряженности этих полей не только по порядку величины, чем мы вынуждены пока ограничиваться, а более точно, влияние химического состава оказалось бы существенным. Но и упрощенная модель, которой мы здесь пользуемся, и те заведомо огрубляющие предположения, которые нам по ходу рассмотрения пришлось ввести — все это исключает пока подобную возможность. Посмотрев под таким углом зрения на данные табл. 2 и 3, мы вынуждены признать, что более детализированный учет химического состава планет не соответствовал бы доступному для нас уровню точности и поэтому вряд ли целесообразен.

Полученные в рамках феноменологического и более точного подхода на основании модели Хартри-Фока-Слейтера оценки для бароэлектрического поля в планетах следует, конечно, сравнить. Однако такое сравнение несколько затруднительно, так

как не вполне ясно, какие значения следует приписывать упругому модулю  $B$ , который надлежит подставлять в феноменологические формулы; обычные табличные значения вряд ли подходят для условий в недрах планет (существуют основания считать их заниженными). Но тенденция просматривается явственно: получаемые в рамках феноменологического подхода оценки, если пользоваться значениями упругих модулей, полученными из опытов при весьма низких давлениях, превосходят микроскопические примерно на порядок. Это можно проиллюстрировать кривыми значений  $E(x)$ , полученными различными методами.

На рис. 6 приведены такие кривые для алюминиевой и свинцовой планет, причем пунктирные линии рассчитаны в рамках феноменологического, а сплошные — микроскопического подходов. Давление в центре планет принимается везде одинаковым, таким же, как в центре Земли. Эти кривые показывают, что феноменологический подход действительно дает для напряженностей бароэлектрического поля значения примерно на порядок более высокие, чем модель Хартри—Фока—Слейтера, хотя качественный ход кривых различается, в общем, не сильно. В глубинных участках зависимость  $E(x)$  почти линейна, что объясняется довольно значительными здесь давлениями. Благодаря этому плотность избыточной энергии позволительно записывать в виде  $W \approx p/\nu$ . Из (6.8) следует, что плотность заряда получается здесь постоянной, а значит, зависимость  $E(x)$  от  $x$  — линейной.

Пользуясь методами обобщения уравнений типа Томаса—Ферми на случай ненулевых температур, а также рассматривая планеты с определенным заданным распределением температур, можно [34], подсчитывая плотность избыточной энергии уже как функцию двух параметров, а именно давления и температуры, теоретически исследовать бароэлектрические поля уже в более реалистических моделях небесных тел.

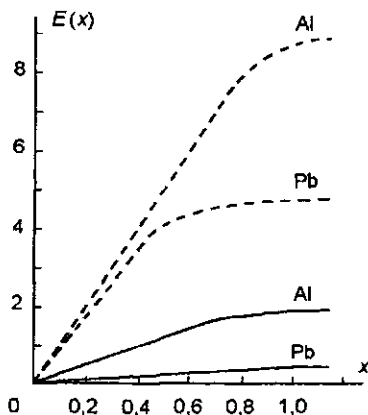


Рис. 6. Зависимость  $E(x)$  в рамках «феноменологического» (пунктир) и «микроскопического» (сплошная линия) подходов

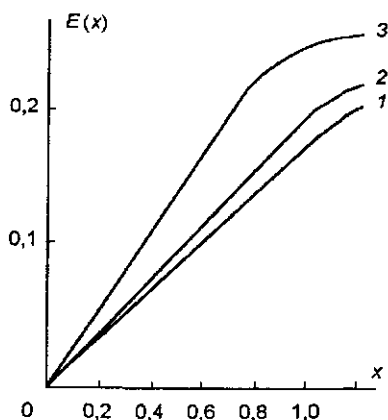


Рис. 7. Кривые напряженностей бароэлектрического поля при различных температурах

Наконец, кривая 3 построена в предположении, что температура меняется по линейному закону  $T(x) = T_0 + x(T_1 - T_0)$ , где для  $T_1$  и  $T_0$  приняты значения 300 и 6000° К, а давление по-прежнему предполагается меняющимся по квадратичному закону. Вполне естественно, что в последнем варианте поле оказывается больше, чем в первых двух: бароэлектрическое поле складывается с термоэлектрическим.

Можно привести и оценки, опирающиеся на модель невзаимодействующих электронов, которая, кстати, оказывается более реалистичной именно в центральных областях, где велики и температуры. При температурах, много меньше температуры Ферми, плотность избыточной энергии может быть приближенно записана в виде  $W(p, T) = W(p, 0) + \Delta W$ , где  $W(p, 0)$  — плотность избыточной энергии при  $T = 0$ , а  $\Delta W = n\pi\Theta^2/4\mathcal{E}_F$ , где  $\mathcal{E}_F$  — энергия Ферми,  $\Theta = kT$ , а  $n$ , как и прежде, обозначает электронную плотность.

Поле в приповерхностной области приобретает температурную поправку: можно представить  $E(R, T)$  в виде

$$E(R, T) = E(R, 0) + \frac{n\nu\Theta^2}{8p\mathcal{E}_F} \approx 1 + 3,3 \cdot 10^{-4} E(R, 0). \quad (7.2)$$

Таким образом, оценка, основанная на модели невзаимодействующих электронов, говорит о том, что температурная поправка составляет лишь сотые доли процента от от полной

На рис. 7 показано, каким образом температура отражается на электрическом поле. Кривая 1 на этом рисунке относится к тому бароэлектрическому полю, которое было бы в алюминиевой планете, если бы она имела температуру равную нулю и такое же давление в центре, как у Земли. Кривая 2 построена в предположении, что во всех точках такой планеты температура одинакова и равна 6000 К; заметим, что и здесь поле остается чисто бароэлектрическим, без термоэлектрических добавок, поскольку температурные градиенты принимаются равными нулю.

напряженности бароэлектрического поля в приповерхностной области. Такая оценка является, конечно, заниженной; истинный же масштаб поправки должен лежать где-то между этим и томас-фермиевским значением. Но, даже если брать именно это последнее, видно, что для планет, подобных Земле, электрическое поле, порождаемое градиентами давлений, безусловно доминирует.

Перейдем теперь к рассмотрению магнитного поля. Здесь удобно воспользоваться тем, что микроскопические расчеты указывают на возможность весьма простой корректировки тех результатов, которые получаются при феноменологическом описании; это позволяет сохранить то преимущество, что рассмотрение здесь является аналитическим. Нужно только учесть, что микроскопический подход дает для напряженностей электрического поля, а значит, и для плотностей электрических зарядов (напомним, если пользоваться стандартными табличными значениями из справочников для значений упругих констант) значения, завышены примерно на порядок по сравнению с теми, которые получаются на базе микроскопической теории. Последняя, конечно, является более точной, но здесь затруднено аналитическое описание. Естественно поэтому и здесь избрать такой путь: использовать аналитические выражения, получаемые при феноменологическом подходе, но везде, где появляются плотности зарядов или линейно связанные с ними величины, вводить поправочный коэффициент  $\sim 0,1$ .

Появится такой коэффициент, разумеется, и в выражении для магнитного момента. Поэтому взамен формулы (6.12) мы будем теперь писать:

$$M_1 = -\frac{3\pi - 4}{480\pi c} \omega \sqrt{\frac{\pi}{B}}, \quad (7.3)$$

$$M_{об} \approx -\frac{1}{40c} \omega \sqrt{\frac{\pi}{B}} GM^2. \quad (7.4)$$

Для численных оценок примем  $\sqrt{\pi/B} \approx 10^{-7}$  СГС  $\approx 1,7$  а. е.; заметим, что упругий модуль лишь при давлениях, меньших чем давление Ферми, может считаться постоянным, а в области высоких давлений он возрастает с ростом  $p$  примерно по линейному закону. Если в значительной части объема небесного тела давления так высоки, что формула (3.1) принимает вид  $W(p) \approx p/\nu$ ,

то

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{MR^2}{25c} \omega \sqrt{\frac{G}{6\nu}}. \quad (7.5)$$

Подробнее остановимся на варианте, непосредственно базирующемся на микроскопических оценках. Как и раньше, запишем магнитный момент в виде  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{об} + \mathcal{M}_{пов}$ . Та его часть, которая обязана вращению объемных зарядов, с учетом уравнения Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$  переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{об} &= \frac{1}{2c} \int \rho [\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] dV = \frac{\omega}{3c} \int_0^R r^2 \frac{d}{dr} (r^2 E) dr = \\ &= \frac{\omega}{3c} R^4 E(R) - \frac{2\omega}{3c} \int_0^R r^3 E(r) dr. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Поверхностные же заряды дают вклад в магнитный момент, равный

$$\mathcal{M}_{пов} = \frac{4\pi}{3c} R^4 \omega \rho_{пов} = \frac{\omega}{3c} R^4 E(R). \quad (7.7)$$

Полный магнитный момент, таким образом, есть

$$\mathcal{M} = -\frac{2\omega R^4}{3c} \mathcal{I}. \quad (7.8)$$

Входящий в это выражение интеграл  $\mathcal{I} = \int_0^1 x^3 E(x) dx$  нужно вычислять по тем значениям  $E(x)$ , которые находятся по микроскопической теории.

Естественно, результат оказывается зависящим от того, каким считать химический состав планеты. Но эта зависимость, как то было установлено выше, не слишком сильна — имеет разброс в пределах одного порядка. Поэтому допустимо пользоваться для грубых оценок неким усредненным подходом, который результативно приводит к оценкам, вдвое меньшим того, что определяется формулой (7.5). Такое усреднение, естественно, неизбежно огрубляет оценки.

Попытаемся теперь сопоставить реальные значения магнитных моментов некоторых небесных тел с тем, что дает наша заведомо упрощенная модель. В табл. 4 приводятся массы  $M$  этих

тел, угловые скорости их вращения  $\omega$ , радиусы  $R$ , а также округленные эмпирические значения для средних дипольных магнитных моментов  $M$ .

Здесь имеются в виду средние по достаточно большому промежутку времени; это замечание имеет существенное значение, так как магнитные поля небесных тел, особенно звезд, в частности Солнца, весьма бурно и прихотливо меняются, что определяется теми магнитогидродинамическими эффектами, которые обязаны внутренним дифференциальным движениям. В каждый момент магнитные поля могут быть вовсе не похожими на дипольные, но усредненная по времени картина, во всяком случае, если судить по примеру Солнца, удивительным образом обретает дипольные черты. К сожалению, данные наблюдений для большинства небесных тел пока еще слишком неполны.

Параметры, относящиеся к объектам, включенным в табл. 4, варьируются в широких пределах. Так, масса Луны почти в сто миллионов раз меньше массы Вирджинии, разброс в угловых скоростях — до шести порядков, и тем более примечательно, что отличие бароэлектрических магнитных моментов (мы далее часто будем именовать их «баромагнитными») не столь уж велики.

Конечно, значение последнего обстоятельства нельзя преувеличивать. Для планет-гигантов, например для Юпитера, абсолютные значения баромагнитных и наблюдаемых магнитных моментов получаются довольно близкими, но не нужно забывать, что магнитное поле этой планеты «находится в инверсии», т. е. ее магнитный момент направлен почти так же, как и механический, тогда как обсуждаемая нами модель диктует антипараллельность этих моментов.

Кстати, раз мы уже упомянули о механическом моменте, уместно вспомнить о правиле Блеккета. Опираясь на эмпирические данные, Блеккет [35] выдвинул утверждение о том, что магнитные моменты небесных тел пропорциональны их моментам количества движения. Это правило нередко воспринималось как случайное совпадение. Однако, пользуясь вариантом (7.5) вычисления магнитного момента, легко получить для его отношения к модулю механического момента  $\mathcal{N}$  выражение

$$\frac{M_2}{\mathcal{N}} = \frac{M_2}{0,3MR^2\omega} \approx \frac{1}{10c} \sqrt{\frac{G}{\nu}}. \quad (7.9)$$

Постоянство этого отношения является, разумеется, приближенным. Как явствует из вышеизложенного, правило Блеккета выполняется тем лучше, чем в большей мере физические условия в недрах небесных тел оправдывают применение модели невзаимодействующих электронов.

Таблица 4

| Объект       | $M$                 | $\omega$            | $R$                 | $M_{\text{эмфир}}$  | $M_1$               | $M_2$             |
|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------------|
| Солнце       | $2 \cdot 10^{33}$   | $2,8 \cdot 10^{-6}$ | $7 \cdot 10^{10}$   | $10^{34}$           | $10^{34}$           | $6 \cdot 10^{33}$ |
| Меркурий     | $3,3 \cdot 10^{26}$ | $1,3 \cdot 10^{-6}$ | $2,4 \cdot 10^{10}$ | $10^{22}$           | $10^{21}$           | $3 \cdot 10^{21}$ |
| Венера       | $4,9 \cdot 10^{27}$ | $3 \cdot 10^{-7}$   | $6,1 \cdot 10^8$    | $5 \cdot 10^{21}$   | $5,7 \cdot 10^{21}$ | $6 \cdot 10^{22}$ |
| Земля        | $6 \cdot 10^{27}$   | $7,3 \cdot 10^{-5}$ | $6,4 \cdot 10^8$    | $8,3 \cdot 10^{25}$ | $2,1 \cdot 10^{25}$ | $2 \cdot 10^{25}$ |
| Луна         | $7 \cdot 10^{25}$   | $2,7 \cdot 10^{-6}$ | $1,4 \cdot 10^8$    | $10^{20}$           | $10^{20}$           | $4 \cdot 10^{20}$ |
| Марс         | $6,4 \cdot 10^{26}$ | $2,7 \cdot 10^{-5}$ | $3,4 \cdot 10^8$    | $10^{22}$           | $2,3 \cdot 10^{23}$ | $6 \cdot 10^{23}$ |
| Юпитер       | $1,9 \cdot 10^{30}$ | $1,8 \cdot 10^{-4}$ | $7,1 \cdot 10^9$    | $10^{30}$           | $5 \cdot 10^{30}$   | $2 \cdot 10^{30}$ |
| Сатурн       | $5,7 \cdot 10^{29}$ | $1,7 \cdot 10^{-4}$ | $6 \cdot 10^9$      | $4 \cdot 10^{28}$   | $4,4 \cdot 10^{29}$ | $4 \cdot 10^{29}$ |
| Уран         | $8,7 \cdot 10^{28}$ | $1,6 \cdot 10^{-4}$ | $2,5 \cdot 10^9$    | $10^{27}$           | $10^{28}$           | $6 \cdot 10^{29}$ |
| Нептун       | $10^{27}$           | $1,1 \cdot 10^{-4}$ | $2,5 \cdot 10^9$    | $10^{28}$           | $10^{24}$           | $8 \cdot 10^{25}$ |
| Плутон       | $10^{27}$           | $1,2 \cdot 10^{-6}$ | $3,2 \cdot 10^8$    | ?                   | $10^{23}$           | $10^{23}$         |
| Вирджиния-78 | $5 \cdot 10^{33}$   | $10^{-4}$           | $10^{11}$           | $10^{36}$           | $10^{37}$           | $6 \cdot 10^{35}$ |
| Пульсар      |                     |                     |                     |                     |                     |                   |
| Геркулес-X   | $4 \cdot 10^{33}$   | 5,1                 | $10^6$              | $6 \cdot 10^{30}$   | $6 \cdot 10^{41}$   | $2 \cdot 10^{30}$ |

Все величины в табл. 4 даны в симметричной абсолютной гауссовой системе единиц. Данные о магнитных моментах почерпнуты из [36–41]. Как видно, баромагнитные поля образуют довольно заметную долю от общих магнитных полей. Для Земли эта доля близка к 10%, для некоторых других планет Земной группы, возможно, этот процент еще выше.

Одна из важнейших особенностей обсуждаемых здесь полей — как бароэлектрического, так и баромагнитного — это их «безваттность»: для поддержания этих полей не требуется затрат энергии. В этом их важное отличие от магнитных полей, возникновение которых связано с динамо-эффектом: чтобы последние не исчезали в результате диссипативных процессов, нужна постоянная подкачка энергии.

Баромагнитные поля, интересные сами по себе, могут представлять и дополнительный интерес как затравочные для полей, порождаемых в процессах динамо-генерации, с которыми они складываются.

## §8. О роли рельефа поверхности планеты

Планета, модель которой была использована нами, представлялась большой жидкой каплей. Исследования фигуры Земли в общем укладываются в рамки таких представлений, если не учитывать реальных деталей рельефа. Однако эти детали существуют, и потому нельзя обойти вопрос о том, как они сказываются на бароэлектрическом поле. Если, например, бароэлектрические поля простирались бы в толщу гор, то, поскольку тангенциальная составляющая напряженности электрического поля не испытывает разрыва на границе раздела сред, это поле должно было бы непременно обнаруживаться и над поверхностью склона горы, что, по-видимому, не наблюдается (точнее, если наблюдается, то в весьма подавленном виде). Можно поставить вопрос еще острее: а не проникает ли то громадное бароэлектрическое поле, которое по нашим оценкам должно существовать в приповерхностных областях Земли, внутрь какого-либо твердого тела, если положить его на Землю?

Поверить, что такое возможно, не позволяет хотя бы самый примитивный здравый смысл. Но провести здесь полноценный теоретический анализ не позволяет нам пока и то важное обстоятельство, что еще не разработаны методы теоретического исследования бароэлектрических полей в твердых телах. Единственное, что мы пока учитывали — это упругость объема, но не формы.

Последняя фраза может быть воспринята как увертка, как простая попытка уйти от поставленного вопроса: «умеет пока, дескать, описывать лишь жидкую планету, а на ней ни гор, ни оврагов быть не может...»

Понятна цена такой аргументации.

В конце концов, если уж это так важно, надлежало бы разработать и методы учета упругости формы. В рамках феноменологического подхода это потребовало бы представления плотности избыточной энергии через компоненты тензора напряжений. Есть и теоретический метод квантово-механического расчета этой плотности, учитывающий наличие кристаллической решетки в твердом теле [42], так что можно действовать и в рамках микроскопического подхода. Конечно, здесь возникли бы значительные трудности даже на «подготовительном» уровне, при обсуждении задач из области механики сплошных сред, но в принципе пути такого обобщения теории можно наметить. Почему же тогда мы не направили все усилия на такое обобщение?



По меньшей мере, по двум причинам. Первая из них заключается в том, что ожидать больших изменений в оценках для бароэлектрического поля от того, что в рассмотрение будет включена и упругость формы, нет глубоких оснований: ведь по порядку величины все упругие модули довольно близки. Но вторая причина более важна. Она — в хорошо известном геофизикам явлении *изостазии* (см., например, [43]). Явление это заключается в том, что экспериментальное исследование внешнего потенциала силы тяжести (геопотенциала), который складывается из гравитационного потенциала и центробежного потенциала, обусловленного вращением Земли, обнаруживает удивительное сходство его с тем, каким был бы полный потенциал в случае, если бы Земля была жидкой и равновесной. Впрочем, этому сходству не следует чрезмерно удивляться: оно обуславливается тем, что (цит. по [43]) «легкая кора, состоящая из гранита и базальта, изостатически уравновешена на более тяжелой мантии. . .»; для нас, впрочем, важна даже не столько причина изостазии, а само ее наличие. Ведь из условия равновесия (2.5) при достаточно либеральном предположении о постоянстве плотности вытекает, что поверхности постоянных значений полного потенциала являются и изобарами, а значит, и поверхностями постоянных потенциалов электрического поля.

Иначе говоря, картина распределения бароэлектрического поля в реальной планете и в ее «жидкой модели» похожи: в «жидкой модели» над поверхностью жидкости поле отсутствует, а в реальной планете оно испытывает скачок на поверхности максимального полного потенциала, становясь нулевым (или, по крайней мере, близким к нулю) над этой поверхностью.

А какое же поле будет в камне, если положить его на Землю? Явление изостазии проявится здесь в том, что поверхность постоянного потенциала не изменится (или изменится пренебрежимо мало), так что бароэлектрическое поле не будет выдавлено из Земли и не заполнит все пространство внутри камня. Но вот концентрационное поле, порождаемое перераспределением плотности в камне, положенном на опору, под действием его собственного веса (если, конечно, камень — проводник) должно возникать, и по своим чертам оно проявиться как поле Бархилла-Шиффа (см. Приложение 1).

Различие между концентрационным и бароэлектрическим полями видно хотя бы на примере подвешенного за верхний конец стержня: здесь даже направления полей противоположны.

## §9. Бароэлектрический эффект в звездах

По мнению подавляющего числа авторов теоретических исследований, посвященных звездам, внутризвездная плазма является квазинейтральной и, значит, электростатические поля в ней отсутствуют. Однако в действительности утверждение об эквипотенциальности проводников, как уже говорилось выше, верно лишь если проводники однородны и химически, и физически.

Бароэлектрический эффект существует не только в конденсированных средах, но и в плазменных образованиях, каковыми являются звезды.

Но в ряде пунктов при рассмотрении бароэлектрических полей в звездах проявляется отличие от того, что относится к твердотельным планетам Земной группы, где перераспределение зарядов выглядит как вытеснение электронов из внутренних областей на имеющуюся у этих небесных тел четко выраженную поверхность, отсутствующую у звезд.

Для объяснения всех процессов бароэлектрического перераспределения зарядов было предложено несколько подходов. Начнем с одного из них, который может быть назван динамическим (или силовым).

В звездной плазме благодаря высокой температуре атомные ячейки разрушаются, т. е. происходит ионизация. Однако связи между ионами и электронами сохраняются в видоизмененном виде — появляются дебаевские ячейки из ионов и электронов, экранирующих кулоновское поле ионов. В некотором смысле можно сказать, что на место атомных ячеек конденсированных сред в плазме следует поставить дебаевские ячейки.

Для получения оценок электрического поля, которое возникает в звездной плазме, обратимся к подходу, основанному на использовании условия механического равновесия дебаевских ячеек. Для простоты примем, что плазма имеет только две компоненты — электронную и протонную. Гравитационная сила, действующая на протон в каждой ячейке (значительно более слабое гравитационное воздействие на электроны можно не учитывать), равна

$$\mathbf{F}_g = -\mathbf{i}_r m_p g(r), \quad (9.1)$$

где  $m_p$  — масса протона,  $g(r)$  — модуль напряженности гравитационного поля на расстоянии  $r$  от центра звезды.

Под действием электрического поля напряженности  $\mathbf{E}$  ячейка приобретает электрический дипольный момент  $\mathbf{d} \approx b^3 \mathbf{E}$ , где

$b$  — дебаевский радиус, для которого можно принять известное приближенное выражение

$$b = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}}, \quad (9.2)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $n$  — число электронов в единице объема; в очень хорошем приближении плазма является квазинейтральной, так что можно отождествить концентрации электронов и протонов.

Температура и концентрация не являются константами, в модели сферически симметричной звезды они зависят от расстояния  $r$  от ее центра.

Условие равновесия дебаевской ячейки — равенство нулю суммарной действующей на нее гравитационной и электрической силы — обеспечивает выполнение макроскопического условия равновесия, которое поэтому можно представить в виде

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_d = 0, \quad (9.3)$$

где гравитационная сила  $\mathbf{F}_g = -\mathbf{i}_r m_p g(r)$ , электрическая сила  $\mathbf{F}_e = (d\nabla)\mathbf{E} = \mathbf{i}_r \frac{b^3}{2} \frac{d}{dr} E^2$ , а  $\mathbf{F}_d$  можно назвать архимедовой силой, создаваемой перепадами давлений. Поскольку гравитационная сила направлена к центру звезды, а остальные — от центра, условие механического равновесия можно записать следующим образом:

$$m_p g(r) = \frac{b^3}{2} \frac{d}{dr} E^2 + F_d = 0. \quad (9.4)$$

Если обозначить  $M(r)$  часть массы звезды внутри области радиуса  $r$ , то  $g(r) = GM(r)/r^2$  ( $G$  — гравитационная постоянная), и если роль  $\text{grad } p$  незначительна, то выражение для  $E(r)$  принимает вид

$$E(r) = \left( 2m_p \int_0^r \frac{g(r)}{b(r)^3} dr \right)^{1/2}. \quad (9.5)$$

Пользуясь формулой (9.5) и привлекая эмпирические данные о параметрах звезд, можно получить оценки для напряженностей электрических полей в их недрах. Если принять, что можно пользоваться сферически симметричной моделью, то эти напряженности направлены по радиусу, и их величина вначале довольно быстро, а по мере дальнейшего увеличения  $r$  — монотонно,

но все более медленно возрастает, достигая, например у Солнца, максимального значения  $\approx 10^8$  (в абсолютных гауссовых единицах). Эта оценка должна быть несколько понижена при учете действия силы  $-\text{grad } p$ .

На приводимом рис. 8 представлен несколько сглаженный график зависимости напряженности электрического поля от  $x = r/R_{\odot}$ , полученный на основе формулы (9.5).

Для  $x \sim 1$  эмпирические данные, да и сам используемый теоретический подход утрачивают надежность, хотя качественная картина понятна: у поверхности хромосферы и частично в короне, т. е. в тех областях, в которые вытесняются из недр Солнца электроны, напряженность электрического поля быстро падает (до нуля, если Солнце в целом электронейтрально).

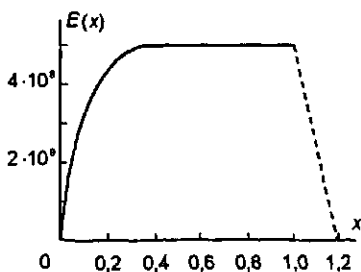


Рис. 8

После того, как найдена напряженность электрического поля, можно вычислить объемную плотность зарядов. В рамках рассматриваемой предельно упрощенной модели распределение зарядов получается не зависящим от времени и сферически симметричным. По отношению к реальной картина такого распределения может пониматься как усредненная по времени.

Эта картина несколько отличается от распределения зарядов в планетах Земной группы. Там объемная плотность зарядов получалась положительной и примерно постоянной внутри планеты, а электронейтральность планеты обеспечивалась отрицательными поверхностными зарядами. В звездах же положительная объемная плотность зарядов оказывается, как видно на рис. 9, довольно быстро падающей по мере удаления от центра звезды, а вблизи ее поверхности делается отрицательной и убывающей по модулю.

Закон этого убывания определяется распределением температуры и плотности плазмы в периферической области звезды, и о нем можно лишь сказать, что оно захватывает области внешней части хромосферы и внутренней и средней частей короны.

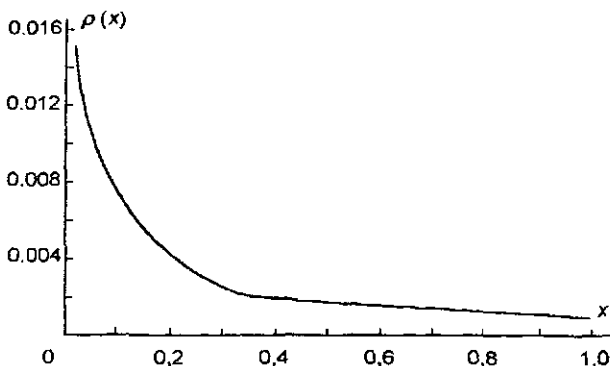


Рис. 9

Таким образом, плазма в недрах Солнца, и, в том числе, в его приповерхностной области, оказывается в электрическом поле, напряженность которого  $\sim 10^8$  [СТЭСЭ] обеспечивает возможность электрокинетического флуктуационного ударного нагрева (за счет перехода энергии, накапливаемой ионом в электрическом поле за время свободного пробега) до регистрируемых в короне температур в миллионы градусов\*). Это можно проиллюстрировать простой оценкой. При длине свободного пробега  $l$  в электрическом поле с напряженностью  $E$  ион заряда  $q$  приобретает энергию  $qEl$ , и если при столкновении с частицей плазмы эта энергия переходит в тепловую порядка  $kT$ , то это дает для температуры оценку  $T \sim qEl/k$ . Подставляя численные значения  $q = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ ,  $E \sim 10^8$ , получаем, что при  $l \approx 10^{-8} \div 10^{-9}$  см температура получается  $10^6 \div 10^7$  К, т. е. такого порядка, что и дают измерения.

Для полноты рассмотрения уместно обратиться и к подходу, названному выше энергетическим. При этом потребуются уточнение выражения для объемной плотности избыточной энергии.

Внутризвездную плазму можно рассматривать как идеальный газ, для которого давление  $P$ , объем  $V$  и температура  $T$  связаны соотношением  $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$ . Сравнив это с соотношением  $\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{K}$  (которое можно рассматривать как определение модуля всестороннего сжатия  $K$  при упругих деформациях),

\*) В отсутствие флуктуаций безваттное бароэлектрическое поле не может вызывать ударного нагрева плазмы.

убеждаемся, что  $K \rightarrow P/f(P)$ , где  $f(P) = 1 - \frac{d \ln T}{d \ln P}$ . Это позволяет представить «квазиупругий» аналог той плотности избыточной энергии при сжатии, которая выступает при рассмотрении упругих сред как  $W_{\text{упр}} = p^2/2K$ , в виде

$$W_1 = \frac{1}{2} p \left( 1 - \frac{p}{T} \frac{dT}{dp} \right). \quad (9.6)$$

Однако это выражение включает лишь часть плотности избыточной энергии. Нужно еще учесть зависящую от давления энергию электронов в дебаевских ячейках. Энергия электрона в одной такой ячейке порядка  $-e^2/b$ , где  $b$  — дебаевский радиус. Это вносит в выражение для объемной плотности избыточной энергии еще одну часть:

$$W_2 = -\frac{ne^2}{b} = -\sqrt{4\pi} e^3 n^{3/2} (kT)^{-1/2}. \quad (9.7)$$

Еще одна часть объемной плотности избыточной энергии  $W_3 = \frac{1}{8\pi} E^2$  приходится на долю того бароэлектрического поля, которое возникает благодаря переходам (относительно немногочисленным) электронов из одних дебаевских ячеек в другие.

Условие равновесия  $\text{grad}(W_1 + W_2 + W_3) = 0$  принимает, таким образом, вид

$$\text{grad} \left\{ \frac{1}{2} p \left( 1 - \frac{p}{T} \frac{dT}{dp} \right) - \sqrt{4\pi} e^3 n^{3/2} (kT)^{-1/2} + \frac{1}{8\pi} E^2 \right\} = 0. \quad (9.8)$$

Пользуясь (9.8), учитывая, что рассматриваемая модель предполагается сферически симметричной, так что напряженность бароэлектрического поля имеет лишь радиальную компоненту, зависящую только от  $r$ , причем в центре Солнца  $E(0) = 0$ , и, подставляя эмпирические табличные значения параметров  $p(r)$ ,  $T(r)$ ,  $n(r)$ , находим

$$E(r) \approx 2 \sqrt{\pi \left\{ 3,28 \cdot 10^{17} - p \left( 1 - \frac{p}{T} \frac{dT}{dp} \right) - 9,22 \cdot 10^{-55} \left( \frac{n}{kT} \right)^2 \right\}}. \quad (9.9)$$

Используя (9.9), вновь убеждаемся, что по мере увеличения  $r$   $E(r)$  быстро возрастает от нулевого значения в центре Солнца до  $\sim 10^9$ , затем очень медленно растет вплоть до области

средней короны. Это обуславливает действенность того электрокинетического механизма нагревания короны, который был описан выше.

Но с дальнейшим увеличением  $r$  величина  $E(r)$  начинает спадать и при некотором  $r_0$  обращается в нуль. Недостаточно точное знание эмпирических параметров Солнца, а также и заведомая упрощенность теоретического описания не позволяют более точно оценить  $r_0$ . Однако, хотя численное значение радиуса  $r_0$ , при котором напряженность электрического поля обращается в нуль, можно установить лишь с некоторой долей неопределенности, сам факт наличия поверхности, ограничивающей ту область в Солнце, полный заряд которой равен нулю (а значит, и предположение о глобальной электронейтральности Солнца), следует из формулы (9.9).

Вычислив объемную плотность заряда  $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}$ , найдем, что относительно небольшая центральная часть Солнца получается заряженной положительно, плотность заряда в более далекой от центра области остается положительной, но значительно меньшей, чем в центре, а в средней короне электроны, вытесненные за счет бароэлектрического эффекта из областей высокого давления, образуют тонкий отрицательно заряженный слой, за пределами которого бароэлектрическое поле проявляется лишь благодаря локальным сферической симметрии. В числе таких нарушений важную роль играют, в частности, нарушения, обязанные локальным флуктуациям. Итак, энергетический подход также приводит к выводу, что, несмотря на отсутствие в звездах резко выраженной поверхностной границы, картина распределения бароэлектрического поля оказывается довольно похожей на ту, с которой мы сталкиваемся, рассматривая твердотельные планеты.

Оценки для напряженности электрического поля в области средней короны, получаемые в рамках как динамического, так и энергетического подхода, оказываются довольно близкими, что позволяет укрепиться во мнении, что роль электрокинетического механизма нагревания короны Солнца можно считать существенной. Более определенные выводы здесь затрудняются из-за отсутствия более точных эмпирических данных.

## ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ БАРОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

### §10. Опыты П. Н. Лебедева

П. Н. Лебедевым в 1911 г. были опубликованы [44] результаты экспериментального исследования того, порождается ли магнитное поле из-за вращения электронейтральных тел. И хотя придется сразу сказать, что эксперимент не привел к обнаружению искомого эффекта «намагничивания вращением», целесообразно остановиться на этой замечательной работе, положительные результаты которой могли бы стать существенной вехой в гео- и астрофизике.

Побудительной причиной исследования Лебедева явились уже упоминавшиеся нами работы Сазерленда [4], выдвинувшего гипотезу о том, «... что в каждом нейтральном атоме центры тяжести его разноименных зарядов не совпадают и так сдвинуты друг относительно друга, что центры отрицательных зарядов описывают большие пути, чем положительные...», как написано в [44] о физических причинах появления магнитного поля из-за вращения. Физическая же причина смещения зарядов по гипотезе Сазерленда — гравитационное воздействие. Механизм этого воздействия оставался нераскрытым, да он и не мог получить последовательного и достаточно полного объяснения в тот доквантовый период, в 1903–1904 гг. По существу Сазерленд попросту пытался подобрать такую зависимость между электрической поляризацией и напряженностью гравитационного поля, которая позволила бы получить наблюдаемые значения для магнитных полей небесных тел, в первую очередь Солнца.

П. Н. Лебедев выдвинул предположение, что аналогичное смещение зарядов должно возникать под действием не только



гравитационных, но и центробежных сил. Поставленные им эксперименты и имели целью проверку этого предположения.

Уместно подчеркнуть, что эта проблема имела принципиальное значение: обнаружение центробежной поляризации могло бы явиться ключом к пониманию гравитационной поляризации и того значения, которое последняя имеет для формирования магнитных полей планет и звезд.

Ни эксперименты Лебедева, ни более поздние попытки американских физиков [45], пытавшихся повторить эти опыты, повысив чувствительность аппаратуры, не привели к обнаружению ожидавшегося эффекта. Последствия этого очевидны: поляризационная гипотеза, не имеющая надежного теоретического обоснования и не подтвержденная экспериментально, стала восприниматься все более скептически, а затем попросту забылась. К тому времени уже появились важные работы, посвященные динамо-механизму генерации магнитных полей, и постепенно укоренилось убеждение, что этот механизм является основным, если не единственным. И хотя мысль о том, что возникновение магнитного поля может быть, хотя бы частично, обусловлено вращением перераспределившихся зарядов, не была окончательно забыта, но непонимание физических причин, могущих вызывать такое перераспределение, направило поиски по другим направлениям. Однако после всего того, что было пояснено выше, естественно попытаться понять, почему же все-таки опыты Лебедева, проницательность которого не изменила ему и в этот раз, не дали положительных результатов.

Постановка опытов Лебедева, если не входить в детали, была такова: кольца из различных материалов — проводников и диэлектриков, жидких и твердых — приводились в быстрое вращение, и делались попытки обнаружить и даже измерить магнитное поле. При этом обеспечивалась электронейтральность колец.

Для калибровки магнитометра на таком же расстоянии от него, что и кольца, располагалась «проволочная модель» — эбонитовый диск с проточенными в нем канавками, в которые укладывались витки проволоки с таким расчетом, чтобы имитировать распределение токов, соответствующих гипотезе Сазерленда. По оценкам Лебедева магнитное поле от вращающихся колец должно было быть таким же, как при токе  $I$  порядка  $10^{-3}$  А в проволочной модели. При таком токе стрелка магнитометра отклонялась на 10 делений, т. е. можно считать, что чувствитель-

ность магнитометра соответствовала эквивалентной силе тока порядка 0,001–0,0001 А. Магнитный момент проволоочной модели был равен  $84I/c$  [А · см · с]. Таким образом, легко оценить тот минимальный магнитный момент, который мог быть замечен Лебедевым:

$$|M_{\min}| \approx \frac{84(10^{-3} \div 10^{-4})}{c} \text{ А} \cdot \text{см} \cdot \text{с} = 8,4(10^{-3} \div 10^{-4}) [\text{ГСМ}]. \quad (10.1)$$

Как показывают приводимые ниже оценки, чувствительность установки в действительности была недостаточна, чтобы обнаружить возникавшие при вращении колец магнитные поля. Тот же факт, что эти поля действительно должны были порождаться, непосредственно вытекает из общих положений теории БЭ.

Действительно, благодаря вращению в образцах возникают перепады давления, а значит, происходит перегруппировка зарядов. Вращение же этих перегруппированных зарядов должно породить магнитное поле.

Пользуясь развитыми методами исследования БЭ, попытаемся получить оценки для этого поля, которое могло проявиться в опытах П. Н. Лебедева.

Первым делом, обратимся к рассмотрению такой задачи: жидкий цилиндр (ртуть, например), помещенный в жесткую оболочку, вращается с угловой скоростью  $\omega$ ; радиус цилиндра  $R$  значительно меньше его длины — это позволяет пренебречь краевыми эффектами.

Давление в таком вращающемся цилиндре можно записать в виде

$$p = \frac{1}{4} \tau \omega^2 (2r^2 - R^2), \quad (10.2)$$

где  $r$  — расстояние от оси вращения, а  $\tau$  по-прежнему обозначает плотность, которая предполагается постоянной. Предположение о несжимаемости жидкости, упрощающее вывод этой формулы, естественно, перестает использоваться при вычислении  $W$ .

Подставляя значения порядков величин для входящих в эту формулу параметров, относившихся к опытам Лебедева, а именно  $\tau \sim 10 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega_{\max} \sim 10^4 \text{ с}^{-1}$ ,  $R \sim 1 \text{ см}$ , находим, что максимальное давление порядка  $p_{\max} \sim 10^8 \text{ дин/см}^2$ . Пользуясь этой оценкой для  $p_{\max}$ , можно упростить некоторые нужные нам формулы. Обратимся, в первую очередь, к формуле (4.9), связывающей радиус атомной ячейки с давлением.

Поскольку для всех рассмотренных нами элементов  $1 - \frac{3a_1 a_3}{a_2^2}$  примерно на пять порядков больше чем  $\frac{4\pi a_1 p_{\max}}{a_2^2}$ , можно ограничиться линейным по  $p$  членом:

$$\delta \equiv b - b_0 \approx -p \frac{2\pi b_0^2}{a_2 + 3a_3 b_0}. \quad (10.3)$$

Поскольку к тому же  $\delta \ll b_0$ , выражение для плотности избыточной энергии заметно упрощается:

$$W \approx Ap^2; \quad A \equiv \frac{3\pi b_0}{a_2 + a_3 b_0}. \quad (10.4)$$

Подставляя это выражение в (2.6) и учитывая, что в силу осевой симметрии задачи напряженность электрического поля может иметь только лишь перпендикулярную к оси вращения и зависящую только от  $r$  компоненту  $E(r) = \hat{i}_r E(r)$ , находим

$$E(r) = \pm gr \sqrt{R^2 - r^2}, \quad g \equiv \tau \omega^2 \sqrt{2\pi A}. \quad (10.5)$$

Постоянная интегрирования выбрана так, чтобы обеспечить выполнение условия  $E(0) = 0$ .

Подробнее обсудим знак перед корнем в полученном выражении. Он опять-таки диктуется физическими соображениями о том, что электроны вытесняются из областей с более высокими давлениями в области, где эти давления меньше. В периферической части цилиндра, где  $r \geq R/\sqrt{2}$ , это приводит к вытеснению электронов вглубь цилиндра. Но в области  $r < R/\sqrt{2}$ , где  $p < 0$ , т.е. цилиндр работает на растяжение, плотность избыточной энергии  $W$  увеличивается по мере уменьшения  $r$ , т.е. электроны должны перераспределяться так, чтобы приосевые участки оказались заряженными положительно, причем плотность заряда должна уменьшаться по мере роста  $r$ .

Получается, таким образом, что в области цилиндра  $r > R/\sqrt{2}$  напряженность поля направлена к оси, а при  $r < R/\sqrt{2}$  — от оси цилиндра, так что

$$E(r) = \begin{cases} -gr \sqrt{R^2 - r^2}, & r > R/\sqrt{2}, \\ +gr \sqrt{R^2 - r^2}, & r < R/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (10.6)$$

Поверхность  $r = R/\sqrt{2}$ , где  $E(r)$  терпит разрыв, заряжена отрицательно; плотность отрицательных зарядов на этой поверхности

$$\rho_{\text{пов}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E(R/\sqrt{2} + 0) - E(R/\sqrt{2} - 0) \right\} = -\frac{gR^2}{4\pi}. \quad (10.7)$$

Плотность же объемных зарядов

$$\rho_{\text{об}} = \begin{cases} +\frac{g}{4\pi} \frac{3r^2 - 2R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}, & r > R/\sqrt{2}, \\ -\frac{g}{4\pi} \frac{3r^2 - 2R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}, & r < R/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (10.8)$$

Полный заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра, — нулевой:

$$Q = Q_{\text{об}} + Q_{\text{пов}} = 2\pi \int_0^R r dr \rho_{\text{об}}(r) + 2\pi \rho_{\text{пов}} R/\sqrt{2} = 0.$$

Поскольку цилиндр предполагается электронейтральным, на его поверхности заряд получается нулевым.

Полный магнитный момент, приходящийся на единицу длины цилиндра,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{об}} + \mathcal{M}_{\text{пов}}$ , где части магнитного момента, обязанные вращению объемных и поверхностных зарядов, даются выражениями

$$\mathcal{M}_{\text{об}} = \frac{\pi\omega}{c} \int_0^R r dr \rho_{\text{об}}(r), \quad (10.9)$$

и

$$\mathcal{M}_{\text{пов}} = \frac{\pi}{2c} \omega R^2 \rho_{\text{пов}} = -\omega \frac{gR^5}{8c\sqrt{2}}. \quad (10.10)$$

После интегрирования получаем

$$\mathcal{M} = \omega \frac{gR^5}{c} \left( \frac{7\sqrt{2}}{120} + \frac{1}{15} \right) \approx 0,15 \frac{gR^5}{c} \omega. \quad (10.11)$$

Подставим теперь численные значения входящих в это выражение параметров:  $\tau \sim 10$ ,  $\omega \sim 3 \cdot 10^3$ ; для ртути  $A \sim 2,4 \cdot 10^3$  (чтобы перейти в систему СГС, следует разделить это на  $2,93 \cdot 10^{14}$ , так как  $A$  имеет размерность, обратную давлению). Таким образом, магнитный момент, приходящийся на единицу длины цилиндра,  $M \sim 2 \cdot 10^{-7}$  в абсолютных гауссовых величинах. Эта величина примерно на пять порядков меньше той, которая могла быть замечена в опытах Лебедева. Только этим, а отнюдь не отсутствием эффекта вообще, объясняются отрицательные результаты его эксперимента.

Напряженность магнитного поля, возникающего благодаря вращению перераспределившихся в цилиндре зарядов, определяется уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{об}}, \quad \mathbf{j} = \rho_{\text{об}} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i}_\alpha \omega r, \quad \rho_{\text{об}} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (10.12)$$

Вектор  $\mathbf{H}$  имеет одну только  $Z$ -компоненту, так что записав  $\mathbf{H} = \mathbf{i}_Z H(r)$ , можно представить (10.12) в виде

$$-\frac{dH}{dr} = \frac{\omega}{c} \frac{d}{dr} (rE(r)), \quad (10.13)$$

после чего получаем

$$H(r) = -\frac{\omega}{c} rE(r) + \text{const}. \quad (10.14)$$

Поскольку цилиндр в целом электронейтрален и на его внешней поверхности заряды отсутствуют, поле  $H$  при  $r = R$  обращается в нуль, так что постоянная интегрирования  $\text{const} = \frac{\omega}{c} RE(R)$  и

$$H(r) = \frac{\omega}{c} \{ RE(R) - rE(r) \} = -\frac{\omega}{c} rE(r). \quad (10.15)$$

Подставляя приведенные выше выражения для  $E(r)$ , получаем

$$H(r) = \begin{cases} +\frac{\omega}{c} gr^2 \sqrt{R^2 - r^2} & \text{при } r > R/\sqrt{2}, \\ -\frac{\omega}{c} gr^2 \sqrt{R^2 - r^2} & \text{при } r < R/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (10.16)$$

Поверхность  $r = R/\sqrt{2}$  внутри цилиндра выстлана отрицательными зарядами; их вращение дает «поверхностный ток» (кавычки здесь оправдываются тем, что и «поверхностные заряды», и

«поверхностный ток» довольно необычны: они не лежат на поверхности раздела каких-либо сред) с плотностью

$$\mathbf{j}_{\text{пов}} = \mathbf{i}_\alpha \omega \frac{R}{\sqrt{2}} \rho_{\text{пов}} = -\mathbf{i}_\alpha \omega g \frac{R^3}{4\pi\sqrt{2}}. \quad (10.17)$$

На поверхности  $r = R/\sqrt{2}$  тангенциальная (единственная ненулевая) компонента  $\mathbf{H}$  испытывает разрыв, который, как легко убедиться, равен  $\Delta H_z = \frac{4\pi}{c} (j_{\text{пов}})_\alpha$ , что находится в соответствии с уравнением Максвелла.

Поток напряженности магнитного поля через всю площадь поперечного сечения цилиндра получается следующим:

$$\Phi_H = 2\pi \int_0^R r dr H(r) = \frac{7\pi\tau\omega^3 R^5}{30c} \sqrt{\pi A}. \quad (10.18)$$

Он оказывается пропорциональным кубу частоты вращения, что вполне понятно: центробежное ускорение (которое можно назвать напряженностью центробежного поля) пропорционально  $\omega^2$ , а значит, и индуцированная этим полем электрическая поляризация, а следовательно, и плотность перераспределившихся зарядов, также пропорциональна  $\omega^2$ , а скорость —  $v \sim \omega$ , т. е.  $j \sim \omega^3$ , что и определяет зависимость  $\Phi$  от  $\omega$ . Это обстоятельство мы отмечаем здесь по той причине, что в дальнейшем, при обсуждении значительно более поздней реализации замыслов П. Н. Лебедева, нам еще предстоит вернуться к этому вопросу.

Перейдем теперь к рассмотрению вращающихся твердых цилиндров. Чтобы избежать необходимости учитывать краевые эффекты (что значительно усложнило бы механическую часть задачи, хотя и привело бы в конечном итоге лишь к возникновению несущественных для нас поправочных множителей порядка единицы), будем считать, что длина цилиндра существенно больше его радиуса. Будем рассматривать полый цилиндр с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним  $R_2$ . Условия опытов Лебедева были такими, что для расчетов напряжений вполне можно было пользоваться упругим приближением механики сплошных сред. В интересующем нас случае вектор смещения  $\mathbf{u}$  является безвихревым, т. е.  $\text{rot} \mathbf{u} = 0$ , так что для него можно записать уравнение [46]:

$$\mathbf{T} \text{grad div} \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0. \quad (10.19)$$

Плотность центробежной силы  $\mathbf{F}$  имеет лишь одну, перпендикулярную к оси вращения составляющую  $\mathbf{F} = \mathbf{i}_r \tau r \omega^2$ , что позволяет переписать (10.19) в виде

$$T \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right\} + \tau \omega^2 r = 0. \quad (10.20)$$

Заметим, что мы пользуемся традиционным приемом: при написании уравнения мы не учитываем, что плотность несколько изменится при изменении давления. В (10.20) использовано обозначение

$$T \equiv \frac{\mathcal{E}(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad (10.21)$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $\mathcal{E}$  — модуль Юнга.

Полагая, что и внутренняя, и внешняя поверхности полого цилиндра являются незакрепленными, запишем граничные условия:

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R_1} = \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R_2} = 0. \quad (10.22)$$

Подставим в (10.22) решение уравнения (10.19) в виде

$$u = -\frac{\tau \omega^2}{8T} r^3 + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (10.23)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из граничных условий:

$$C_1 = \frac{3\tau \omega^2}{8T} (R_1^2 + R_2^2), \quad C_2 = \frac{3\tau \omega^2}{8T} R_1^2 R_2^2. \quad (10.24)$$

Таким образом,

$$u = \frac{\tau \omega^2}{8T} \left\{ -r^3 + 3r(R_1^2 + R_2^2) + \frac{3R_1^2 R_2^2}{r} \right\}. \quad (10.25)$$

Давление в цилиндре

$$p = -B \operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{B}{r} \frac{d}{dr} (ru), \quad (10.26)$$

где модуль всестороннего сжатия  $B$  связан с  $T$  соотношением

$$B = T \frac{1 + \sigma}{3(1 - \sigma)} = \frac{\mathcal{E}}{3(1 - 2\sigma)}. \quad (10.27)$$

Подставляя для  $u$  выражение (10.25), находим

$$p = \frac{\tau\omega^2(1 + \sigma)}{12(1 - \sigma)} \{2r^2 - 3(R_1^2 + R_2^2)\} < 0, \quad (10.28)$$

поскольку  $2r^2 < 3(R_1^2 + R_2^2)$ .

Давление отрицательно при всех  $R_2 \geq r \geq R_1$ , т. е. цилиндр работает на растяжение во всех его участках, причем это растяжение падает по мере увеличения  $r$ . Поэтому плотность избыточной энергии  $W$ , пропорциональная  $p^2$ , также уменьшается по мере удаления от оси, и поэтому электроны выдавливаются из внутренних областей в периферические. Напряженность электрического поля при  $R_2 \geq r \geq R_1$  направлена перпендикулярно к оси цилиндра, параллельно  $z$ . Внутренняя поверхность  $r = R_1$  является незаряженной, внешняя же поверхность  $r = R_2$  несет заряд, причем поверхностная плотность заряда здесь не положительна, как в предыдущем варианте, а отрицательна:

$$\rho_{\text{пов}} = -\frac{1}{4\pi} E(R_2) = -\frac{\tau\omega^2(1 + \sigma)}{6(1 - \sigma)} \sqrt{\frac{A}{T}(R_2^4 - R_1^4)}. \quad (10.29)$$

Пользуясь опять тем, что  $\mathbf{H} = \mathbf{i}_z H(r) = -\mathbf{i}_z \frac{\omega}{c} r E(r)$ , находим

$$\mathbf{H} = -\omega \frac{\tau\omega^2(1 + \sigma)}{3c(1 - \sigma)} r \sqrt{2\pi A(r^2 - R_1^2)(2R_1^2 + 3R_2^2 - r^2)}. \quad (10.30)$$

Поле  $\mathbf{H}$ , таким образом, оказывается теперь направленным противоположно  $\omega$ . Во внутренней полости  $r < R_1$ , а также при  $r > R_2$  оно отсутствует, а в толще цилиндра напряженность магнитного поля монотонно возрастает от нулевого значения при  $r = R_1$  до

$$H(R_2) = -\frac{2\tau\omega^3(1 + \sigma)}{3c(1 - \sigma)} R_2 \sqrt{A(R_2^4 - R_1^4)} \quad (10.31)$$



при  $r = R_2$ , а затем скачком обращается в нуль при переходе через границу  $r = R_2$ , что соответствует наличию поверхностного тока  $j_{\text{пов}} = \omega R_2 \rho_{\text{пов}}$  на этой границе.

Подсчет потока напряженности магнитного поля  $\Phi_H$  показывает, что при прочих равных условиях, т. е. если принять  $\tau$  и  $\omega$  такими же, как для жидкого цилиндра, а для твердотельного цилиндра взять  $R_1 = 0$  и  $R_2 = R$ , этот поток  $\Phi_H$  получается почти таким же, как и для жидкого цилиндра (примерно в полтора раза больше). Что же дает эксперимент?

Первые экспериментальные подтверждения эффекта намагничивания вращением были получены Б. В. Васильевым в 1984 г. в Дубне [47]. По идее опыты были близки к тем, которые задумал и провел П. Н. Лебедев, но экспериментальная техника претерпела качественные изменения: если Лебедев для исключения влияния геомагнитного поля пользовался компенсирующими катушками Гельмгольца, то у Васильева к этому добавлялся сверхпроводящий экран; измерения магнитного потока осуществлялось при помощи высокочувствительной магнитометрической аппаратуры (сверхпроводящий трансформатор, сквид), запись и обработка результатов измерений были автоматизированы.

По оценкам Б. В. Васильева удалось добиться того, что «после подавления  $\langle \dots \rangle$  помех чувствительность установки была не хуже  $10^{-2} \Phi_0$ », где  $\Phi_0$  — квант потока ( $\Phi_0 \approx 2 \times 10^{-7} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$ ).

В экспериментах Васильева во вращение приводилась ампула — цилиндр из титана, заполненный исследуемым материалом. Вращение передавалось через прочную тонкую немагнитную проволоку. И ампула, и привод помещались в антикриостат, т. е. в теплый объем внутри гелиевого криостата, так что испытываемые материалы (ртуть, свинец и т. д.) удавалось сохранять при комнатной температуре. Высокочувствительный сквид и связывавший его с измеряемым объемом сверхпроводящий трансформатор защищались от внешних полей пермалоевым и сверхпроводящим экранами.

По-видимому, из числа помех в дубнинских экспериментах наиболее важными были те, что обуславливались остаточным магнитным полем в рабочем объеме установки. Перед заливкой гелия в криостат магнитное поле Земли подавлялось примерно на три порядка с помощью двух систем из полутораметровых колец Гельмгольца, а также при помощи пермалоевого экрана.

Однако полного исключения магнитного поля в рабочем объеме достигнуть затруднительно. Здесь оказывается важным даже такой, казалось бы незначительный эффект: в процессе заливки гелия в свинцовом экране создаются термоэлектрические токи и порождаемое ими магнитное поле оказывается замороженным в рабочем объеме. Вращение же проводника в таком поле приводит к магнитогидродинамическому его усилению, и это паразитное магнитное поле маскирует изучаемый эффект. В известной мере, неконтролируемым может оказаться и положение испытуемого образца внутри титановой ампулы, что может вызвать даже и невоспроизводимость экспериментальных результатов, которая действительно проявлялась в различных сериях опытов. То обстоятельство, что ампула вращалась не в вакууме, а в воздухе, также могло породить паразитные эффекты.

По мнению самого Б. В. Васильева его установка позволила обнаружить эффект, но для его количественного изучения следует добиваться дальнейшего увеличения чувствительности: после первых опытов 1984 г. установка была модернизирована, и следующая серия измерений подтвердила сомнения в количественной стороне получавшихся ранее результатов.

Позволительно здесь отметить, что необходимость дальнейшего уточнения подтверждается и нашими расчетами: магнитный поток получается у нас на три порядка меньше, чем указывалось в [47], хотя качественно эффект действительно лежал в пределах обнаружимого в тех опытах Б. В. Васильева.

## §11. Транспортировка ионов

Полученные нами в гл. 2 оценки говорят о том, что в Земле электрическое поле в приповерхностной области весьма значительно: оно всего лишь на один-два порядка уступает полю атомных масштабов.

Первая реакция на утверждение о существовании такого большого поля оказывается, как правило, скептической. «Если такое поле существует, то оно должно проявлять себя, оно должно наблюдаться! Почему же мы его не замечаем?!» Такие вопросы вполне резонны. И ответ на них может быть только один: нужно указать, какие эффекты могли бы явиться прямым подтверждением факта наличия такого поля. Об одном из таких эффектов и пойдет речь в этом параграфе.

Проводившиеся в различных регионах исследования позволили установить, что над рудными (золото, серебро, медь, свинец и др.) месторождениями в атмосфере наблюдается повышенная концентрация ионов тех химических элементов, которые в эти месторождения входят [48]. При помощи описанных в [48] ионных ловушек проводились исследования химического состава, картина распространенности элементов по поверхности Земли и зависимость их концентрации от высоты. Эта последняя весьма примечательна: зависимость концентрации от высоты не описывается барометрической формулой. По мере увеличения высоты концентрация возрастает, достигает максимума на высоте порядка 10 см, а затем спадает, как это показано на рис. 10.

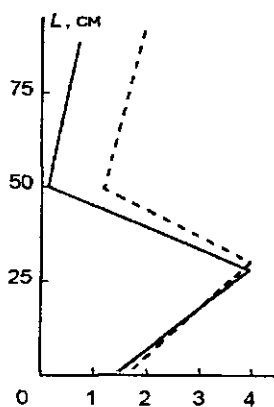


Рис. 10. Типичные схематизированные распределения числа ионов, накапливающихся в ловушках, помещенных на различных высотах

На основании проведенных наблюдений авторы [48] пришли к выводу, что из поверхности Земли над рудными телами вылетают ионы металлов, которые и обнаруживаются при помощи ловушек. Здесь было бы неуместно обсуждать чисто геологические аспекты данной проблемы и вопросы прикладной значимости эффекта; мы будем фиксировать свое внимание на физической стороне дела.

Появление ионов в толще Земли может обуславливаться рядом причин — от возникновения  $\alpha$ -частиц при радиоактивных распадах до образования положительно заряженных ионов металлов в процессах растворения. Здесь мы постараемся обсудить, какое воздействие на образовавшиеся положительные ионы может оказать бароэлектрическое поле.

Это влияние является двояким.

*Первое:* находящийся в электрическом поле ион движется направленно под действием этого поля\*). Однако, поскольку движение иона происходит в среде, ион, сталкиваясь с атомами, передает им накопленную в поле энергию; иначе об этом можно сказать как о движении с трением, благодаря которому уравнивается воздействие бароэлектрического

\*) Процесс передачи энергии иону от бароэлектрического поля не противоречит безватности последнего, так как сами процессы возникновения ионов нарушают равновесность системы.

поля, и движение иона из глубины Земли к ее поверхности при усредненном описании можно рассматривать как равномерное. В часто используемом и наиболее удобном и простом «приближении времени релаксации» скорость этого движения  $u$  можно найти из условия  $\frac{m}{\tau}u - F = 0$ , где  $F$  есть сила, действующая на ион со стороны бароэлектрического поля.

Порядок величины времени релаксации  $\tau$ , как и всегда, определяется длиной свободного пробега  $l$  и средней скоростью (заметим, что последняя почти целиком относится к направленному движению ионов, а поправка, учитывающая тепловое движение, может и не учитываться). Для первой оценки можно попросту принять, что  $\tau \approx l/u$ .

Таким образом, под действием бароэлектрического поля ион движется из недр Земли к ее поверхности со средней кинетической энергией

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{1}{2}elE. \quad (11.1)$$

Помимо того что бароэлектрическое поле выталкивает положительные ионы из недр Земли, оно играет и еще одну роль: оно препятствует рекомбинации ионов, уменьшает вероятность захвата ими электронов. Как было показано выше, напряженность бароэлектрического поля в приповерхностной области Земли велика: она только примерно на два порядка меньше напряженности того поля, которое действует на внешние электроны в атоме. Понятно, что если бы внешнее электрическое поле было таким же, как и внутриатомное, рекомбинация была бы вообще невозможной; те же поля, в которых оказываются ионы в приповерхностной области Земли, не полностью исключают, но все же значительно замедляют рекомбинацию. В этом и заключается второй из указанных аспектов влияния на ионы поля в приповерхностных областях Земли.

После того как ион выталкивается бароэлектрическим полем из недр Земли, он попадает в новое электрическое поле, находящееся над поверхностью Земли, которое называют обычно «полем ясной погоды». К обсуждению вопроса о его физической природе мы еще вернемся.

Напряженность этого поля порядка 100 В/м; оно обычно считается направленным вертикально вниз, или по крайней мере имеет вертикальную составляющую указанного порядка величины. Экспериментально обнаружены вариации этого поля, в том числе и регулярные, т. е. периодически повторяющиеся.

Попадая в поле ясной погоды, вылетевший из Земли положительный ион начинает тормозиться им. Теряя энергию, ион может подняться на максимальную высоту, которая определяется условием

$$\frac{1}{2}e\ell E = eL\mathcal{E}, \quad (11.2)$$

где  $\mathcal{E}$  — величина напряженности поля ясной погоды. Подставляя численные значения  $E \approx 10^8$  В/см,  $\mathcal{E} \approx 1$  В/см,  $\ell \approx 10^{-7}$  см, получаем оценку для  $L \approx 10$  см.

Отметим, что  $L$  оказывается не зависящей ни от заряда, ни от массы иона; последнее согласуется с результатами наблюдений [48]. Заметим, что действием гравитационного поля на ион можно пренебречь.

Понятно, что имеет смысл говорить лишь о средней высоте поднятия. По мере приближения к этой высоте ионы все более термализуются, т.е. вовлекаются в тепловое движение, и уже одно это порождает размывание  $L$ .

Поднимаясь, ионы теряют кинетическую энергию из-за тормозящего действия поля ясной погоды, потом, достигнув максимальной высоты, ион начинает двигаться вниз, причем на это направленное движение накладывается и тепловое. Вероятность обнаружения иона на той или иной высоте определяется тем, насколько быстро происходит движение на этой высоте: чем больше скорость направленного движения, тем меньше эта вероятность; следствием оказывается то, что распределение по высоте частиц, участвующих как в беспорядочном тепловом, так и в направленном движении, не подчиняется барометрическому закону, что максимум концентрации приходится не на нулевую высоту, а на высоту порядка  $L$ . На рис. 10 показана обнаруженная экспериментально зависимость концентрации ионов различных металлов от высоты. Надлежит отметить, что все кривые сглажены и схематизированы.

Полезно добавить к вышеизложенному, что время рекомбинации иона, летящего в атмосфере, как показывают теоретические и экспериментальные исследования (см., например, [49]), на много порядков больше того времени, за которое ион поднимается на высоту  $L$  и затем вновь опускается на поверхность Земли.

По нашему мнению описанные выше черты эффектов, связанных с вылетом ионов из Земли, являются проявлениями наличия в ней бароэлектрического поля. Но все это, конечно, следует считать лишь косвенным подтверждением того, что такое поле

существует. Попытки прямого обнаружения электрического поля в недрах Земли пока еще фактически не предпринимались. Чтобы понять, почему такие исследования встречают определенные трудности, полезно еще раз вспомнить об уже не раз отмечавшейся аналогии между двумя полями — бароэлектрическим и контактным.

Хорошо известно, что если, например, прижать цинковый брусок к медному, между этими металлами возникнет контактная разность потенциалов, а если попытаться обнаружить эту разность потенциалов, попросту замыкая цепь, подсоединяя к этим брускам при помощи проводов гальванометр, то последний не регистрирует тока: по правилу Вольты ток в замкнутой цепи, из каких бы разнородных металлов она ни состояла, за счет контактных разностей потенциалов возникать не может, полное падение потенциала в такой цепи всегда равно нулю. По этому поводу часто говорят: обязанное химическим неоднородностям электрическое поле является безваттным. Этим подчеркивается важный энергетический аспект вопроса — невозможность поддержания тока только за счет контактных разностей потенциалов видна непосредственно из закона сохранения энергии.

Поэтому для обнаружения контактных разностей потенциалов нужны методы, предполагающие энергетические затраты. Одним из весьма показательных методов такого рода является, например, метод Кельвина. Напомним, в чем состоит его сущность.

Пусть имеются два химически разнородных металла, расположенных так, что они образуют плоский конденсатор. Если разность потенциалов между металлами равна  $V$ , а расстояние между ближайшими гранями  $d$ , как показано на рис. 11, то на обкладках такого конденсатора имеются поверхностные заряды, плотность которых  $\sigma = E/4\pi = V/4\pi d$ . Если менять  $d$ , то по цепи через гальванометр пойдет ток  $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\sigma S$ .

Почти такая же методика может позволить исследовать и разность потенциалов, появляющуюся благодаря бароэлектрическому эффекту, но только теперь уже обкладки могут быть и химически однородными, но находиться под разными давлениями. Такой экспе-

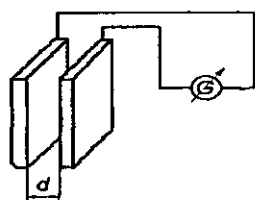


Рис. 11. Принципиальная схема измерения контактной разности потенциалов методом Кельвина

римент был действительно выполнен Крейгом [50]. На рис. 12 воспроизведен чертеж из его работы. В исследовавшихся им металлах, в частности в алюминии, меди, бронзе и золоте, были измерены значения  $\Delta V/\Delta p$ , где  $\Delta V$  связано с изменением работы выхода электронов из металла  $\Delta A$  соотношением  $e\Delta V = \Delta A$  ( $e$  — модуль заряда электрона). Для  $\Delta V/\Delta p$  были получены значения порядка нескольких  $\text{мкВ} \cdot \text{см}^2/\text{кг}$ . Это хорошо согласуется с полученными нами ранее оценками. Действительно: изменение работы выхода связано с изменением плотности избыточной энергии очевидным равенством  $\Delta A = W/\mathcal{N}$ , где  $\mathcal{N}$  — число электронов в единице объема. Как уже неоднократно отмечалось выше, при малых давлениях  $p \ll B$  можно пользоваться для  $W$  выражением  $p^2/2B$ , так что  $\Delta A \approx p^2/2B\mathcal{N}$ . Подставляя значения  $B \approx 10^{12}$ ,  $\mathcal{N} \approx 10^{23}$ ,  $e \approx 4,8 \cdot 10^{-10}$  (все в единицах СГС), мы получаем, что при  $p = 1 \text{ кг}/\text{см}^2 \approx 10^6 \text{ дин}/\text{см}^2$  отношение  $p^2/2B\mathcal{N}e$  оказывается порядка  $10^{-14}$ . Поскольку  $1 \text{ мкВ} \cdot \text{см}^2/\text{кг} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-14} [\text{СГСЕ}]$ , это дает значение  $\Delta V/\Delta p \approx 3 \text{ мкВ} \cdot \text{см}^2/\text{кг}$ , что находится в согласии с данными опыта Крейга. Отметим еще, что поскольку также разброс значений  $B$  и  $\mathcal{N}$  для различных металлов сравнительно невелик, небольшим должен быть и разброс значений  $\Delta V/\Delta p$ , что также наблюдалось на опыте.

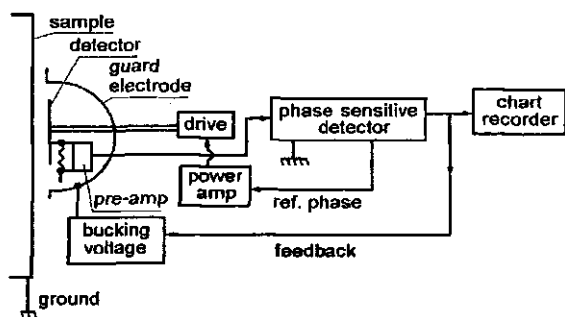


Рис. 12. Принципиальная схема установки из статьи Крейга

Появление тока, протекающего через гальванометр при изменении  $d$ , происходит благодаря той работе, которая затрачивается на изменение зазора между обкладками. Нечто подобное обнаружению барозлектрической разности потенциалов в недрах Земли благодаря эффекту Кельвина можно усмотреть в следую-

щем сообщении [51]: «Измерения проводились <...> в скважине, пробуренной вблизи плейстоценовой области (район Ташкента) на глубину 500 м. В забое скважины был заилен электрод в виде металлической трубы диаметром 0,1 и длиной 4 м. Вторым электродом являлась обсадная стальная труба длиной 40 м в устье скважины. Электроды были связаны коаксиальным кабелем.

При активизации сейсмической деятельности обнаружено интенсивное стекание электрических зарядов с внешних концов кабеля на поверхность Земли. Разность потенциалов между электродами, судя по нарушению изоляции кабеля, достигала  $5 \div 10$  кВ».

Это любопытное сообщение, не подтвержденное, к сожалению, более полными последующими исследованиями, не является единственным. О появлении значительных электрических полей в периоды, непосредственно предшествующие землетрясениям, имеется так много данных, что делаются попытки использовать этот эффект для прогнозирования землетрясений. Более подробно к обсуждению этого вопроса мы вернемся в последней главе.

## §12. Другие лабораторные исследования

50-е годы XX в. были временем активизации исследований эффектов, которые были известны и ранее — эффектов возникновения электромагнитных полей, а также различных эмиссионных явлений, наблюдаемых в процессе разрушения твердых тел. Почти во всех этих исследованиях [51–57] появление электрического поля, возникновение электронной эмиссии, электромагнитное излучение и некоторые другие эффекты связываются непосредственно с образованием трещин. Механизм процесса выглядит почти очевидным: в процессе образования трещин высвобождается энергия, которая и тратится на эмиссионные процессы. Появление значительных электрических полей связывается с разделением зарядов — на противоположных поверхностях трещин возникают заряды противоположных знаков, что и приводит к возникновению внутри трещин полей, которые по оценкам [57] достигают порядка  $10^6 \div 10^7$  В/см. Такие большие поля, а также тепловые эффекты, сопровождающие образование трещин, способствуют электронной эмиссии. Поскольку все эти процессы сугубо нестационарны, должны существовать — и действительно наблюдаются — эффекты электромагнитного излучения. Наблюдается также эмиссия отрицательных и положительных ионов. Естественно, что процессы эмиссии заряженных



частиц и процессы электромагнитного излучения взаимосвязаны. Более подробное освещение всех этих вопросов здесь вряд ли уместно, и мы поэтому ограничимся тем, что процитируем «Выводы» из [52]:

«Исследования эмиссионных явлений проводились в различных веществах: кристаллических изоляторах, стеклах, металлах, графитовых нитях, полимерах, алюминиевых фольгах, покрытых окисью и т.д. Из < ... > анализа экспериментальных данных видно, что все эмиссионные явления < ... > имеют общую причину образования, связанную с концентрацией энергии связи атома в локальном объеме у вершины трещины при деформации и разрушении материалов. Интенсивность ФЭ (физической эмиссии) определяется только энергией межатомного взаимодействия и скоростью ее выделения. За короткий промежуток времени, соответствующий времени скачка трещины, выделяется энергия межатомных связей: локальное тепло в виде инфракрасных фотонов, электромагнитное излучение, электрическое поле, эмиссия заряженных частиц и акустическая эмиссия».

Другие авторы, основываясь на изучении развития процесса во времени, делают вывод о том, что эмиссионные процессы обуславливаются именно появлением и развитием трещин. Что касается электрического поля, то экспериментальные данные о времени возникновения и последующих этапах его эволюции еще не получены. Следует, однако, подчеркнуть, что это поле заведомо возникает еще до образования трещин, если только, конечно, имеются неоднородные напряжения в проводнике. На этот счет существуют и прямые экспериментальные указания. В частности, поля были обнаружены при прохождении ударных волн через вещества, в том числе и через металлы, причем в таких условиях, когда еще не возникали разрушения [58]. Однако оценки для напряженности поля, возникающего при таких быстротечных процессах, проведенные изложенными выше теоретическими методами, были бы некорректными, поскольку перегруппировка зарядов протекает здесь за малые времена, в условиях быстроменяющихся в пространстве и во времени давлений.

Интересный цикл работ, направленных на изучение электромагнитных процессов при возникновении неоднородных напряжений и разрушений в твердых телах, был проведен в ИФЗ [59, 60]. Эти работы по исследованию физической природы электромагнитных предвестников землетрясений мы обсудим ниже.

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МЕДЛЕННО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ

### §13. Общековариантная запись уравнений Максвелла

Поставленный в начале книги вопрос: можем ли мы, покоящиеся относительно Земли наблюдатели, заметить магнитное поле, порождаемое зарядами, также покоящимися относительно Земли, является частью более общего вопроса: какова электродинамика медленно вращающегося наблюдателя? А это, в свою очередь, упирается в проблему обобщения электродинамики, т. е. уравнений Максвелла на неинерциальные системы отсчета. Метод решения этой проблемы известен (см., например, [61]): нужно перейти к общековариантной записи уравнений Максвелла. Уместно напомнить, как это делается.

В инерциальных системах отсчета, т. е. в плоском пространстве уравнения электродинамики (вначале микроскопической) таковы:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{e} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e} &= 4\pi \rho, & \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, \end{aligned} \quad (13.1)$$

где  $\mathbf{e}$  — напряженность микроскопического электрического,  $\mathbf{h}$  — магнитного поля.

Потенциалы вводятся на основании однородных уравнений

$$\mathbf{e} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}; \quad \mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{a}. \quad (13.2)$$

Переход от трехмерной к четырехмерной форме записи осуществляется так: вводится четырехвектор-потенциал, контравариантные компоненты которого  $a^0 = \varphi$ ,  $a^1 = a_x$ ,  $a^2 = a_y$ ,  $a^3 = a_z$  определяются условием Лоренца  $\text{div } \mathbf{a} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  (в трехмерных обозначениях), или  $\frac{\partial}{\partial x^n} a^n = 0$ . Переход к ковариантному четырехвектору-потенциалу, т. е. опускание индекса производится стандартным образом с помощью метрического тензора:  $a_n = g_{nm} a^m$ . Мы будем записывать в плоском псевдоевклидовом пространстве-времени компоненты метрического тензора таким образом:  $\bar{g}_{00} = 1$ ,  $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = \bar{g}_{33} = -1$  (остальные равны нулю). Черта над любой буквой здесь и далее показывает, что обозначаемая этой буквой величина рассматривается в плоском мире.

Очевидно, что компоненты ковариантного четырехвектора-потенциала  $a_n = \{\varphi, -a_x, -a_y, -a_z\}$ . Пользуясь этими величинами, можно построить ковариантный тензор поля:

$$f_{nm} = \frac{\partial a_n}{\partial x^m} - \frac{\partial a_m}{\partial x^n} = -f_{mn}. \quad (13.3)$$

Компоненты этого тензора выявляются из сравнения с (13.1):  $\bar{f}_{01} = -e_x$ ,  $\bar{f}_{02} = -e_y$ ,  $\bar{f}_{03} = -e_z$ ,  $\bar{f}_{12} = h_z$ ,  $\bar{f}_{13} = -h_y$ ,  $\bar{f}_{23} = h_x$ . Компоненты контравариантного тензора поля получаются поднятием индексов при помощи контравариантного метрического тензора:

$$f^{nm} = g^{nk} g^{mp} f_{kp}. \quad (13.4)$$

Заметим, что и в общем случае ко- и контравариантные метрические тензоры подчинены условиям  $g_{nm} g^{mk} = \delta_n^k$ .

Перепишем неоднородные уравнения Максвелла в четырехмерных обозначениях:

$$\frac{\partial \bar{f}^{nm}}{\partial x^m} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}^n; \quad \bar{j}^n = \{c\rho, j_x, j_y, j_z\}. \quad (13.5)$$

Переход к общековариантному обобщению уравнений Максвелла осуществляется известным образом: везде в уравнениях нужно заменить частные производные на ковариантные. При этом вид соотношений, определяющих тензор поля  $f^{mn}$ , остается неизменным, так как члены, содержащие символы Кристоффеля, взаимно уничтожаются. Заметим, это означает, что вид однородных уравнений Максвелла одинаков во всех, в том числе и неинерциальных системах отсчета.

Неоднородные же уравнения переписываются в виде

$$f_{;m}^{nm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \{ \sqrt{-g} f^{nm} \} = \frac{4\pi}{c} j^n, \quad (13.6)$$

где  $g$  — детерминант, построенный из компонент метрического тензора. Таким образом, задача написания обобщенных уравнений Максвелла для неинерциальных систем отсчета сводится, в первую очередь, к нахождению метрического тензора  $g_{nm}$ , а также  $g^{nm}$ , затем к построению контравариантного тензора поля

$$f^{nm} = g^{nk} g^{mp} f_{kp}, \quad (13.7)$$

после чего, задавая компоненты четырехвектора плотности заряда-тока, остается при помощи уравнения (13.6) искать компоненты тензора поля. Такова рецептура общековариантного обобщения в микроскопической электродинамике.

Перейдем теперь к рассмотрению макроскопической электродинамики. Здесь добавляется новое принципиально важное положение об усредненном описании. Усреднение производится по физически бесконечно малым объемам в окрестностях всех точек. Под физически бесконечно малыми понимаются области, размеры которых значительно больше параметра, определяющего масштаб наибольшей из микроскопических неоднородностей и одновременно меньше наименьшего из масштабов макроскопических неоднородностей. Последнее означает, в частности, что в пределах каждой из физически бесконечно малых областей внешнее электромагнитное поле можно рассматривать как однородное. При обсуждении общековариантного обобщения уравнений электродинамики это дополняется требованием постоянства напряженности гравитационного поля внутри каждого из физически бесконечно малых объемов. Будем всегда в дальнейшем предполагать, что условия, обеспечивающие возможность усредненного описания, выполнены.

Пусть  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по физически бесконечно малым объемам. Мы будем пользоваться традиционными обозначениями, а именно:

$$\mathbf{E} \equiv \langle \mathbf{e} \rangle \text{ — напряженность электрического поля,} \quad (13.8a)$$

$$\mathbf{H} \equiv \langle \mathbf{h} \rangle \text{ — индукция магнитного поля,} \quad (13.8б)$$

$$A_n \equiv \langle a_n \rangle \text{ — ковариантный четырехвектор-потенциал,} \quad (13.8в)$$

$$F_{nm} \equiv \langle f_{nm} \rangle \text{ — ковариантный тензор поля,} \quad (13.8г)$$

$$J^n \equiv \langle j^n \rangle \text{ — контравариантный четырехвектор} \\ \text{плотности полного заряда-тока.} \quad (13.8д)$$

Отметим, что

$$F_{nk} = A_{n;k} - A_{k;n} = \frac{\partial A_n}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^n}.$$

Поскольку операции усреднения и дифференцирования по  $x^m$  переставимы, усреднение уравнений (13.6) дает

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \{ \sqrt{-g} F^{nm} \} = \frac{4\pi}{c} J^n. \quad (13.9)$$

Переходя к рассмотрению плоского пространства-времени, можно переписать эти уравнения в нерелятивистских трехмерных векторных обозначениях:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{J}}, \quad \text{div } \bar{\mathbf{E}} = 4\pi \bar{\rho}, \quad (13.10)$$

поскольку

$$\bar{F}^{nm} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.11)$$

Полную плотность заряда  $\rho$  и полную плотность тока  $\mathbf{J}$  часто разбивают на две части, одна из которых относится к свободным, а другая — к связанным зарядам:  $\rho = \rho_{(f)} + \rho_{(b)}$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{(f)} + \mathbf{J}_{(b)}$ . Подобное разбиение, конечно, переносится и на четырехвектор плотности заряда-тока:

$$J^n = J_{(f)}^n + J_{(b)}^n. \quad (13.12)$$

Закон сохранения заряда при общековариантной формулировке имеет следующий вид:

$$J_{;n}^n = 0. \quad (13.13)$$

Подчеркнем, что, поскольку мы принимаем возможность разделения зарядов на два класса: свободных и связанных, закон сохранения заряда справедлив для каждого из этих классов по отдельности, т. е. в частности  $J_{(b);n}^n = 0$ . Мы тождественно удовлетворим этому условию, приняв, что

$$J_{(b)}^n = -c P_{(b);k}^{nk}, \quad (13.14)$$

где  $P_{(b)}^{nk}$  — некоторый антисимметричный контравариантный тензор. Действительно, тогда

$$J_{(b);n}^n = -c P_{(b);k;n}^{nk} = 0, \quad (13.15)$$

поскольку свертка симметричного тензора с антисимметричным равна нулю. Чтобы интерпретировать вводимый таким образом тензор  $P_{(b)}^{nk}$ , вновь перейдем к плоскому пространству-времени и выпишем (13.14) более подробно для различных значений индекса  $n$ :

$$n = 0, \quad \bar{J}_{(b)}^0 = c\rho_{(b)} = -c \frac{\partial \bar{P}_{(b)}^{0\alpha}}{\partial x^\alpha},$$

или

$$\rho_{(b)} = -\text{div } \mathcal{P}_{(b)}, \quad (\mathcal{P}_{(b)})_\alpha = \bar{P}_{(b)}^{0\alpha} \quad (13.16a)$$

(греческие индексы здесь и далее пробегают значения 1, 2, 3);

$$\begin{aligned} \bar{J}_{(b)}^1 &\equiv (\mathbf{J}_{(b)})_x = \\ &= -c \left\{ \frac{\partial \bar{P}_{(b)}^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{P}_{(b)}^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{P}_{(b)}^{13}}{\partial x^3} \right\} \equiv \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}_{(b)}}{\partial t} + c \text{rot } \mathcal{M}_{(b)} \right\}_x, \end{aligned} \quad (13.16b)$$

где

$$\bar{P}_{(b)}^{12} = -(\mathcal{M}_{(b)})_z, \quad \bar{P}_{(b)}^{13} = (\mathcal{M}_{(b)})_y, \quad \bar{P}_{(b)}^{23} = -(\mathcal{M}_{(b)})_x. \quad (13.17)$$

После этого становится понятным, что  $\mathcal{P}_{(b)}$  нужно истолковывать как усредненную плотность дипольного электрического момента, обусловленного связанными зарядами, а  $\mathcal{M}_{(b)}$  — как усредненную плотность магнитного дипольного момента, обусловленного связанными токами.

Переходя к традиционным обозначениям и наименованиям:

$$\mathbf{E} + 4\pi \mathcal{P}_{(b)} \equiv \mathcal{D}, \quad \text{— индукция электрического поля,} \quad (13.18a)$$

$$\mathbf{B} - 4\pi \mathcal{M}_{(b)} \equiv \mathcal{H}, \quad \text{— напряженность магнитного поля,} \quad (13.18b)$$

получим обычную форму макроскопических уравнений Максвелла; в трехмерных обозначениях и векторной записи:

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{(f)}, \quad \text{div } \mathcal{D} = 4\pi \rho_{(f)}. \quad (13.19)$$

Перепишем эти уравнения в четырехмерных обозначениях:

$$\frac{\partial \bar{G}^{nk}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{(f)}^n. \quad (13.20)$$

Тензор  $\mathbf{G}^{nk}$  имеет компоненты:

$$\bar{G}^{nk} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & \mathcal{H}_z & -\mathcal{H}_y \\ -D_y & -\mathcal{H}_z & 0 & \mathcal{H}_x \\ -D_z & \mathcal{H}_y & -\mathcal{H}_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.21)$$

В уравнения (13.19), как и в (13.20), входят только усредненные плотности свободных зарядов и токов, связанные же заряды и токи учитываются посредством тензора  $P_{(b)}^{nk}$ , как то видно из (13.14), или векторов поляризации  $\mathcal{P}_{(b)}$  и намагничивания  $\mathcal{M}_{(b)}$ .

Электромагнитное поле в макроскопической электродинамике описывается двумя парами векторов  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{H}$ , или двумя тензорами  $P^{nk}$  и  $G^{nk}$  (можно, конечно, пользоваться и ковариантными тензорами, поскольку метрический тензор предполагается известным).

Полевых уравнений для нахождения этих величин при заданных  $\rho_{(f)}$  и  $\mathbf{J}_{(f)}$ , очевидно, недостаточно. Эти полевые уравнения, поэтому, нужно дополнить материальными. Для простейшего случая, когда среда в инерциальной системе отсчета покоится, когда она линейна и изотропна и в ней не существует остаточной поляризации и намагничивания, эти материальные уравнения имеют хорошо известный вид

$$\mathcal{J}_{(f)}^{(0)} = \lambda \mathcal{E}^{(0)} \quad \mathcal{D}^{(0)} = \epsilon \mathcal{E}^{(0)} \quad \mathcal{B}^{(0)} = \mu \mathcal{H}^{(0)}, \quad (13.22a)$$

или

$$\mathcal{P}_{(b)}^{(0)} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathcal{E}^{(0)} \equiv \eta \mathcal{E}^{(0)}, \quad \mathcal{M}_{(b)}^{(0)} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathcal{H}^{(0)} \equiv \alpha \mathcal{B}^{(0)}. \quad (13.22b)$$

Индекс «(0)» указывает, что речь идет о покоящемся веществе.

Подчеркнем еще раз, что при написании материальных уравнений предполагается, помимо всего указанного выше, что вещество является физически и химически однородным, что, в частности, температура и давление в нем не меняются от точки к точке.

Переход к общековариантным обобщениям материальных уравнений будем осуществлять таким образом: ищем такие общековариантные соотношения, которые бы удовлетворяли требованиям принципа соответствия, т. е. при переходе из неинерциальной системы отсчета в инерциальную давали бы нужные материальные уравнения, в обсуждаемом нами случае — материальные уравнения Минковского. Выпишем два из них:

$$\mathcal{D} + [\beta \times \mathcal{H}] = \varepsilon \{ \mathcal{E} + [\beta \times \mathcal{B}] \}, \quad \mathcal{B} - [\beta \times \mathcal{E}] = \mu \{ \mathcal{H} - [\beta \times \mathcal{D}] \},$$

$$\beta \equiv \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (13.23)$$

Подробное обсуждение этого круга вопросов в рамках частной теории относительности можно найти во многих источниках, например в [62]. Мы постараемся показать, что общековариантное обобщение (13.23) имеет вид

$$G_{nm} = \frac{1}{\mu} (\delta_n^k + \varkappa_0 u_n u^k) (\delta_m^l + \kappa_0 u_m u^l) F_{kl}, \quad (13.24)$$

где

$$u^n = \frac{dx^n}{ds}, \quad \kappa_0 = \varepsilon \mu - 1.$$

Компоненты четырехвекторов скорости  $u^n$  и  $u_n$  в инерциальной системе отсчета равны

$$\bar{u}^n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}, \quad \bar{u}_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}. \quad (13.25)$$

Пропорциональный  $\varkappa_0^2$  член в (13.24) тождественно равен нулю, ибо в него входит свертка симметричного тензора  $u^k u^l$  и антисимметричного  $F_{kl}$ .

Приняв это во внимание, перепишем (13.24) в более удобном для дальнейшего виде:

$$G_{nm} = \frac{1}{\mu} (F_{nm} + \varkappa_0 u_m u^l F_{nl} + \varkappa_0 u_n u^k F_{km}). \quad (13.26)$$

Переходя в инерциальную систему отсчета и полагая  $n = 0$ ,  $m = 1$ , получим соотношение

$$\bar{G}_{01} = \frac{1}{\mu} \left( \bar{F}_{01} - \frac{\varkappa_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta_1 \bar{u}^l \bar{F}_{0l} + \frac{\varkappa_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \bar{u}^k \bar{F}_{k1} \right). \quad (13.27)$$



Переписывая это в нерелятивистских обозначениях, будем иметь

$$-\mathcal{D}_x = \frac{1}{\mu} \left\{ -\frac{\varepsilon\mu - \beta^2}{1 - \beta^2} E_x + \frac{\varepsilon_0}{1 - \beta^2} (\beta_x(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}]_x) \right\}, \quad (13.28)$$

что находится в точном соответствии с (13.23). Подобным же образом, перебирая другие значения индексов  $n$  и  $m$ , можно убедиться, что в случае, когда система отсчета инерциальна, (13.23) и (13.24) действительно полностью эквивалентны. В сопутствующей системе отсчета (13.23) переходит в (13.22).

Пока мы еще не касались закона Ома. Однако здесь уместно еще и такое замечание: мы молчаливо пользовались предположением, что поляризация и намагничивание вещества могут определяться напряженностями полей и скоростями, но не ускорениями среды. Это предположение является произвольным. В действительности влияние ускорения также должно учитываться. Это показывают простые физические рассуждения: если, например, сообщить диэлектрическому бруску ускорение, то в его собственной системе отсчета, где скорость равна нулю, появляются силы инерции, действующие на электроны (мы говорим о них, так как ионы решетки предполагаются движущимися как единое целое), что эквивалентно появлению действующего на эти электроны электрического поля  $\mathbf{E}_{\text{эф}} = \frac{m}{e} \mathbf{v}$ . Таким образом, например, вместо материального уравнения  $\mathcal{D}^{(0)} = \varepsilon \mathcal{E}^{(0)}$  в локально-лоренцевой сопутствующей системе отсчета нужно писать  $\mathcal{D} = \varepsilon (\mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}_{\text{эф}}^{(0)})$ , поскольку, хотя скорость в этой системе отсчета и равна нулю, ускорение может быть и ненулевым.

Путь построения таких материальных уравнений, которые бы учитывали влияние на электрическую поляризацию и намагничивание не только скорости среды, но и ее ускорения, определяется кроме принципа соответствия еще и тем, что в локально-лоренцевой сопутствующей системе отсчета рассматриваемого элемента среды эффективно меняется напряженность электрического поля:

$$\mathbf{E}^{(0)} \Rightarrow \mathbf{E}^{(0)} + \frac{m}{e} \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt. \quad (13.29)$$

Попытаемся показать, что искомое общеквариантное обобщение материальных уравнений, относящихся к поляризации и на-

магничиванию, можно записать в виде

$$G_{nm} = \frac{1}{\mu} (\delta_n^k + \alpha_0 u_n u^k) (\delta_m^l + \alpha_0 u_m u^l) \{F_{kl} + \Upsilon(u_k \dot{u}_l - u_l \dot{u}_k)\}. \quad (13.30)$$

Значение множителя  $\Upsilon$  будет выяснено ниже;  $\dot{u}_n \equiv du_n/ds$ .

Пользуясь тем, что  $u_k u^k = 1$  и  $\dot{u}^k u_k = 0$ , а также учитывая обращение в нуль свертков симметричных и антисимметричных тензоров, мы получаем возможность несколько упростить вид этого материального уравнения:

$$G_{nm} = \frac{1}{\mu} (F_{nm} + \alpha_{(0)} u_n u^k F_{km} + \alpha_{(0)} u_m u^k F_{nk}) + \varepsilon \Upsilon (u_n \dot{u}_m - u_m \dot{u}_n). \quad (13.31)$$

Полученное уравнение нужно обсудить. Для этого, как и раньше, запишем его для случая, когда система отсчета является инерциальной.

Положив  $n = 0$ ,  $m = 1$ , получаем

$$-\bar{G}_{01} \equiv D_x = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\varepsilon\mu - \beta^2}{1 - \beta^2} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{1 - \beta^2} ([\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}] - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})) \right\}_x + \frac{\Upsilon \varepsilon}{c^2 (1 - \beta^2)^{3/2}} (\mathbf{w})_x. \quad (13.32)$$

Подобным же образом, полагая  $n = 0$ ,  $m = 2, 3$ , мы получили бы и проекции входящих в последнее равенство величин на оси  $y$  и  $z$ .

Выбирая из всех инерциальных систем отсчета ту, в которой в данный момент скорость выбранного нами элемента объема веществ  $\mathbf{v} = 0$ , т. е. переходя в сопутствующую систему отсчета этого элемента, мы должны получить уже не раз упоминавшееся материальное уравнение  $\mathcal{D}^{(0)} = \varepsilon(\mathbf{E}^{(0)} + \frac{m}{e} \mathbf{w})$ .

Если сравнить это с тем, что получается из (13.32), то выясняется, что

$$\Upsilon = \frac{mc^2}{e}. \quad (13.33)$$

Посмотрим теперь, как отражается ускорение на намагничивании. Положим  $n = 1$ ,  $m = 2$ . Тогда

$$\bar{G}_{12} = H_z = \frac{1}{\mu} (\bar{F}_{12} + \alpha_0 \bar{u}_1 \bar{u}^k \bar{F}_{k2} + \alpha_0 \bar{u}_2 \bar{u}^k \bar{F}_{1k}) + \varepsilon \Upsilon (\bar{u}_1 \dot{\bar{u}}_2 - \bar{u}_2 \dot{\bar{u}}_1). \quad (13.34)$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение представляет собой проекцию на ось  $z$  векторного соотношения

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \left\{ \mathbf{B} + \frac{\varepsilon_0}{c(1-\beta^2)} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] + \frac{\varepsilon_0}{c^2(1-\beta^2)} [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]] \right\} + \frac{\varepsilon m}{ce(1-\beta^2)} [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]. \quad (13.35)$$

Первый член в правой части этого уравнения хорошо знаком — он получается непосредственно из материального уравнения (13.23). Последний же член отражает влияние ускорения. Этот член имеет наглядное физическое истолкование: если в сопутствующей системе отсчета появляется эффективное электрическое поле, пропорциональное ускорению, то в любой другой системе, движущейся относительно сопутствующей со скоростью  $-\mathbf{v}$ , должно появиться «эффективное» магнитное поле, напряженность которого пропорциональна  $[\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\text{эф}}] \sim [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$  (более точно  $\frac{e[\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\text{эф}}]}{\sqrt{1-\beta^2}}$  — еще один релятивистский корень в знаменателе возникает из-за массы).

Перебирая все остальные варианты выбора индексов  $n$  и  $m$ , мы получили бы проекции (13.23) на все оси. Таким образом, рассмотрение (13.30) в инерциальных системах позволяет убедиться, что требования принципов соответствия действительно выполняются.

Перейдем теперь к обсуждению вопроса об общековариантном обобщении закона Ома. Напомним, что в сопутствующей системе отсчета мы записывали его в виде  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}^{(0)}$ . Такое написание, заметим, не учитывает влияния на ток ускорения.

Покажем, что общековариантным обобщением этого является

$$J_{(f)}^n = -\lambda u_k F^{nk} + u^n u_k J_{(f)}^k. \quad (13.36)$$

По-прежнему проверку того, удовлетворяет ли записанное таким образом обобщение закона Ома принципу соответствия, мы будем осуществлять, переходя в инерциальную систему отсчета. Нетрудно убедиться, что, подставляя  $n = 0$ , мы придем к равенству, которое удобно записать в векторных обозначениях:

$$(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{j}_{(f)}) = \lambda(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \sqrt{1-\beta^2} + \beta^2 J_{(f)}^0. \quad (13.37)$$

Подстановки же  $n = 1, 2, 3$  удобно производить, заметив предварительно, что  $u_k J_{(f)}^k$  есть инвариант, равный  $c\rho_{(f)}^{(0)}$ , где  $\rho_{(f)}^{(0)}$  — инвариантная плотность заряда, т. е. плотность заряда в сопутствующей системе отсчета. Это позволяет записать:

$$\mathbf{J}_{(f)} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \lambda(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}]) + \mathbf{v}\rho_{(f)}^{(0)} \right\}. \quad (13.38)$$

Таким образом, проверка того, что (13.36) действительно переходит в известные соотношения, обобщающие закон Ома, завершена.

Учет влияния на ток ускорения легко произвести тем же способом, который уже использовался выше: он состоит в замене

$$F^{nk} \rightarrow F^{nk} + \Upsilon(\dot{u}^n \dot{u}^k - u^k \dot{u}^n).$$

Такое обобщение (13.36) позволяет включить в рассмотрение ряд хотя и довольно слабых, но доступных наблюдению эффектов, в частности эффекта Стюарта-Толмена.

Нас, однако, будут интересовать эффекты большего масштаба, к рассмотрению которых мы перейдем позже. А пока кратко остановимся на таком вопросе: всегда ли удобно разделять заряды на два класса — свободные и связанные? Хорошо известно, что это не только не всегда удобно, но даже и не всегда возможно: можно привести много примеров, когда происходят переходы зарядов из одного класса в другой. Поэтому представляет интерес обсуждение закона Ома для полного тока.

Используя уравнения Максвелла и закон Ома для свободного тока, можно записать в сопутствующей системе отсчета соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(0)} &= \mathbf{J}_{(f)}^{(0)} + \mathbf{J}_{(b)}^{(0)} = \\ &= \lambda \mathbf{E}^{(0)} + \frac{\partial \mathcal{P}_{(b)}^{(0)}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathcal{M}_{(b)}^{(0)} = \lambda \mathbf{E}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial t} (\eta \mathbf{E}^{(0)}) + c \operatorname{rot} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{B}^{(0)}. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Заметим, что мы здесь использовали также (13.22). Общековариантное обобщение этого уравнения (если  $\frac{\partial \eta}{\partial x^k} = 0$ ,  $\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial x^k} = 0$ ) имеет вид

$$J^n = \frac{1}{1-4\pi\boldsymbol{\alpha}} \left\{ -\lambda u_k F^{nk} + c(\boldsymbol{\alpha} + \eta) u_k u^m F_{;m}^{kn} + (1-4\pi\boldsymbol{\alpha}) u^n u_k J^k \right\}. \quad (13.40)$$

Посредством замены  $F^{nk} \rightarrow F^{nk} + \Upsilon(u^n \dot{u}^k - u^k \dot{u}^n)$  можно включить в рассмотрение также и влияние на ток ускорения.

Переход в сопутствующую систему отсчета позволяет убедиться, что требования принципа соответствия и в этом случае выполняются.

### §14. Поляризация и намагничивание при учете бароэлектрического эффекта

Перераспределение зарядов, т. е. электрическую поляризацию вещества, вызываемую действием ускорения или эквивалентного гравитационного поля, о чем речь шла выше, мы рассматривали без учета тех градиентов давлений, которые могут быть обусловлены этим полем; иначе говоря, мы пока еще не включили в рассмотрение БЭ. Мы попытаемся показать, как может быть восполнен этот пробел, воспользовавшись при этом наипростейшим вариантом феноменологического описания, базирующегося на предположении, что условие механического равновесия может быть записано в виде равенства (3.3), а для безразмерного множителя  $\alpha$  можно принять выражение  $\alpha = p/B$ .

Посмотрим, к каким оценкам для напряженности бароэлектрического поля и для магнитного момента модельной планеты приводит это условие.

Переписав его с учетом сферической симметрии задачи, означающей, в частности, что

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_r E(r), \quad \mathbf{f}_{эл} = \rho \mathbf{E} = \mathbf{i}_r \frac{E}{4\pi r^2} \frac{d}{dr}(r^2 E), \quad (14.1)$$

получим для радиальной (единственной) составляющей напряженности электрического поля уравнение

$$\frac{4\pi}{B} p \frac{dp}{dr} + \frac{E}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 E) = 0. \quad (14.2)$$

Если еще учесть, что зависимость давления от  $r$  описывается формулой (6.2), то для  $E(r)$  получается выражение

$$E(r) = g\tau r \sqrt{\frac{2\pi}{B} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{4R^2} \right)}. \quad (14.3)$$

Постоянная интегрирования вновь выбрана из условия  $E(0) = 0$ .  
Плотность объемных зарядов

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{g\tau}{4\pi R^2} \sqrt{\frac{2\pi}{B}} \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{4R^2}}}, \quad (14.4)$$

получается положительной при всех  $r < R$ , так что полный объемный заряд  $Q_{об} > 0$ . Шар вновь предполагается электронейтральным, так что его поверхность устлана отрицательными зарядами, а их поверхностная плотность

$$\rho_{пов} = -\frac{g\tau R}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{6B}}. \quad (14.5)$$

По порядку величины и  $E(r)$  и  $\rho(r)$ , получаемые в рамках обсуждаемого подхода, основанного на условии (3.3), оказываются близкими к тому, что было найдено выше на основе феноменологического энергетического (т.е. использующего условие постоянства полной плотности избыточной энергии) подхода, разве что только немного уступая последним. Близкими получаются и оценки для магнитного момента, который дается здесь выражением

$$\mathcal{M} = -\frac{4\pi g\tau R^5}{243c} \omega \sqrt{\frac{2\pi}{B}}, \quad (14.6)$$

в котором зависимость от  $g$ ,  $\tau$ ,  $R$  и  $\omega$  такая же, как и в (6.28); численные коэффициенты различаются примерно в два раза, что в пределах доступной при таких оценках — весьма невысокой — точности вполне удовлетворительно, так как речь можно вести только о порядках величин.

Вполне приемлемые результаты обсуждаемый метод дает и для задачи о вращающемся цилиндре. Если опять рассмотреть вращающийся жидкий цилиндрический проводник, помещенный в идеально жесткую оболочку, то и здесь для бароэлектрического и для баромагнитного полей получаются оценки, не слишком сильно отличающиеся от найденных нами выше. Покажем это.

Условие механического равновесия (3.3) с учетом осевой симметрии теперь принимает вид

$$\frac{p}{B} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{4\pi r} E \frac{d}{dr} (rE) = 0. \quad (14.7)$$

Подставляя для  $p(r)$  выражение (10.2), находим для напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_r E(r)$  распределение:

$$E(r) = \begin{cases} \omega^2 \tau r \sqrt{\frac{\pi}{2B} (R^2 - \frac{3}{4} r^2)}, & r < R/\sqrt{2}, \\ -\omega^2 \tau \sqrt{\frac{\pi}{2B} \left\{ r^2 (R^2 - \frac{4}{3} r^2) + \frac{R^6}{3r^2} \right\}}, & r > R/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (14.8)$$

Поверхность  $r = R/\sqrt{2}$  опять получается выстланный отрицательными зарядами, благодаря чему во внутренней области  $r < R/\sqrt{2}$  поле  $\mathbf{E}$  направлено от оси, во внешней — к оси вращения, а на поверхности раздела этих областей напряженность поля терпит разрыв. Полный заряд равен нулю.

Напряженность магнитного поля нетрудно определить, по-прежнему пользуясь (10.15).

Поток напряженности магнитного поля через полное сечение цилиндра для рассматриваемого случая оказывается положительным, хотя во внутренней области  $r > R/\sqrt{2}$  поле  $\mathbf{H}$  направлено антипараллельно  $\omega$ ; во внешней же области  $r > R/\sqrt{2}$  поле  $\mathbf{H}$  параллельно  $\omega$ , и оценка для полного потока напряженности магнитного поля дает:

$$\Phi_H \approx 0,09 \frac{\omega^3 \tau R^5}{c} \sqrt{\frac{\pi}{2B}}. \quad (14.9)$$

Это примерно на порядок превосходит значения, получаемые на базе проводившегося выше микроскопического рассмотрения. Учитывая, что феноменологический подход, как уже отмечалось, дает для напряженностей всех полей, а значит, и потока  $\Phi_H$ , оценки, примерно на порядок большие микроскопических, остается признать, что и в задаче о вращающемся цилиндре можно пользоваться как условием термодинамического, так и механического равновесия, принимая  $\alpha = p/B$ .

Перейдем теперь к обсуждению того варианта, который может реализоваться, когда давления достигают значений порядка давления Ферми. Параметр  $\alpha$  при этом приближается к единице, и представляет некоторый методический интерес обсуждение того, как описывается бароэлектрическое поле, если принять, что  $\alpha$  заменяется некоторым постоянным параметром  $\alpha_0$ . Конечно, при этом описание радикально упрощается.

Перепишем условие механического равновесия, вводя в рассмотрение потенциал гравитационного поля  $\Phi_g$  и электростатический потенциал  $\varphi$ . Они подчиняются уравнениям

$$\Delta\Phi_g = 4\pi G\tau, \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (14.10)$$

пользуясь которыми можно придать условию механического равновесия вид

$$\alpha_0 \nabla\Phi_g \Delta\Phi_g - G\nabla\varphi \Delta\varphi = 0. \quad (14.11)$$

Из этого уравнения непосредственно вытекает, что  $\Phi_g = -\sqrt{\frac{G}{\alpha_0}}\varphi$  и что плотность объемных зарядов  $\rho$  пропорциональна механической плотности  $\tau$ :

$$\rho = \sqrt{G\alpha_0}\tau. \quad (14.12)$$

Повторим, что такая зависимость между  $\rho$  и  $\tau$  непосредственно вытекает из (14.11)\* и что она не предполагает конкретизации вида потенциала  $\Phi_g$ . В такой же мере оказывается универсальной и зависимость между напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$  и градиентом давления. Действительно, подействовав оператором Гамильтона  $\nabla$  на левую и правую части равенства  $\Phi_g = -\sqrt{G/\alpha_0}\varphi$  и учитывая, что  $\nabla\varphi = -\mathbf{E}$ , а также что при равновесии  $\nabla p = -\tau\nabla\Phi_g$ , получаем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\alpha_0}{G}}\nabla p. \quad (14.13)$$

Последнее равенство мы и будем принимать за основу в том варианте обобщения материальных уравнений, который мы предполагаем использовать в качестве простейшей иллюстрации того, как можно учитывать при таких обобщениях бароэлектрический эффект. Еще раз подчеркнем, что этот вариант предполагает заведомо огрубленное описание и выбирается лишь из соображений простоты; обсуждение основных методических моментов при этом технически упрощается, но одновременно открываются возможности понять и пути включения в рассмотрение и более сложных (и реалистических) вариантов.

\*) Любопытно отметить, что еще в 1923 г. Вильсоном [63] была выдвинута гипотеза, согласно которой любая нейтральная движущаяся материя создает магнитное поле так, как если бы она имела плотность заряда, пропорциональную механической плотности. Основная формула Вильсона получается из (14.12), если положить  $\alpha_0 = 1$ .



Полезно остановиться еще и на таком моменте: говоря об усреднении микроскопических уравнений Максвелла, мы отметили выше, что деление зарядов на свободные и связанные не всегда удобно (и даже возможно), так что предпочтительным является рассмотрение исключительно полных зарядов и токов. При обсуждении БЭ это именно так: выдавливание электронов из одних областей проводника в другие можно истолковать именно как такое проявление процесса перевода части электронов из разряда связанных в разряд свободных. Поэтому мы будем далее пользоваться усредненными уравнениями Максвелла, в которые входят полные усредненные плотности зарядов и токов. В общеквариантной записи неоднородные уравнения Максвелла принимают при этом уже приводившуюся выше форму (13.9). Закон сохранения полного заряда  $J^n_{;n} = 0$  позволяет и в этом случае ввести в рассмотрение антисимметричный тензор  $P^{nm}$  подобно тому, как выше вводился тензор  $P^{nm}_{(b)}$ :

$$J^n = -cP^{nm}_{;m}, \quad (14.14)$$

компоненты которого в локально-лоренцевой сопутствующей системе отсчета допускают физическое истолкование, аналогичное тому, которое получалось выше на основании равенств (13.13) и (13.14), но только теперь речь идет о плотностях дипольного электрического и магнитного моментов, обусловленных полными зарядами и токами (усредненными, разумеется, по физически бесконечно малым объемам). При таком подходе электрическое и магнитное поля описываются только тензором  $F_{nm}$ , или, в векторных обозначениях, векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , а на месте тензора  $G^{nm} = F^{nm} + 4\pi P^{nm}$  возникает тривиальным образом тензор, имеющий все нулевые компоненты. Иначе говоря, вектор поляризации, обусловленный полным зарядом, отличается от  $\mathbf{E}$  только множителем  $-4\pi$ :  $\mathbf{E} = -4\pi\mathcal{P}$ , а вектор намагничивания «полными усредненными токами»  $\mathcal{M}$  определяет индукцию магнитного поля, т. е. усредненную по физически бесконечно малым объемам микроскопическую напряженность магнитного поля  $\mathbf{B} = -4\pi\mathcal{M}$ . Такой подход в известном смысле соответствует возвращению к первоначальной концепции Максвелла: главенствующая роль отводится полям, а заряды и токи выступают лишь через их посредство.

Перейдем теперь к обсуждению общеквариантного обобщения (14.13). Это уравнение определяет в сопутствующей системе отсчета то электрическое поле, которое в статическом случае

порождается градиентами давления. Пользуясь уже введенными ранее обозначениями, перепишем его в виде

$$\bar{F}_{0\alpha}^{(0)} = \gamma \frac{\partial p}{\partial x^\alpha}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\alpha_0}{G}}. \quad (14.15)$$

Заметим, что здесь и далее  $\tau$  — инвариантная плотность,  $p$  — инвариантное давление.

Покажем, что общековариантным обобщением последнего уравнения является

$$F_{nm} = \gamma \left( u_n \frac{\partial p}{\partial x^m} - u_m \frac{\partial p}{\partial x^n} \right). \quad (14.16)$$

Доказательством правомерности такого обобщения является (кроме очевидного требования одинаковости тензорной размерности всех членов) по-прежнему то многократно использовавшееся выше условие, чтобы при переходе в локально-лоренцовскую сопутствующую систему отсчета, в которой  $\bar{u}_0 = 1$  и  $\bar{u}_\alpha = 0$ , выполнялись бы требования принципа соответствия, т. е. (14.16) переходило бы в (14.15).

Подчеркнем, однако, что пока еще речь шла только о полях, которые порождаются градиентами давлений. Конечно, в общем случае следует учесть и поля, возникающие благодаря наличию внешних источников.

Полный тензор поля нужно записывать в виде

$$F_{nm}^{(\text{полн})} = F_{nm} + F_{nm}^{(\text{ext})}, \quad (14.17)$$

где  $F_{nm}^{(\text{ext})}$  как раз и описывает поля этих внешних источников. Впрочем, для тех задач, которые нас здесь интересуют, этот последний член несуществен.

Положение, однако, оказывается иным, если обратиться к рассмотрению того, каким образом надлежит обобщать закон Ома.

Понятно, что (14.16) определяет только ту часть тензора поля, которая обуславливается БЭ. Если давление  $p$  не зависит ни от координат, ни от времени, эта часть обращается в нуль, но остается, разумеется, та часть, о которой шла речь в §13, когда вклад БЭ вообще не учитывался. В общем случае эти два вклада

различной физической природы в общий ток суммируются, так что закон Ома при учете (13.40), (14.15), (14.16) принимает вид

$$J^n = \frac{1}{1 - 4\pi\alpha} \left\{ -\lambda u_k F^{nk} + c(\alpha + \eta) u_k u^m F_{;m}^{kn} + (1 - 4\pi\alpha) u^n u_k J^k \right\} + \frac{c\gamma}{4\pi} \left( u^n g^{ml} \frac{\partial p}{\partial x^l} - u^m g^{nk} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right)_{;m}. \quad (14.18)$$

Последний член в этом материальном уравнении отражает факт перераспределения зарядов благодаря БЭ; движение таких зарядов вносит вклад в полный ток. Тот принципиальный момент, что при учете БЭ плотность зарядов нельзя полагать равной нулю, проявляется, в частности, в магнитогидродинамических эффектах.

### §15. Медленное вращение

Перейдем теперь к более конкретным задачам. Из всех неинерциальных систем отсчета для нас наибольший интерес представляют медленно вращающиеся системы. Последнее нужно понимать в том смысле, что если система отсчета вращается (по отношению к инерциальной) с угловой скоростью  $\omega$ , то мы будем рассматривать область таких размеров  $L$ , что  $\omega L \ll c$ .

Условимся, что  $\omega$  направлено по оси  $Z$ . Пользуясь условием медленности вращения, можно ограничиться в выражении для метрического тензора  $g_{nm}$  членами, линейными по  $\beta = v/c$ , отбрасывая члены более высокого порядка по  $\beta$ . Тогда компоненты  $g_{nm}$  принимают вид

$$g_{nm} \approx \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega y}{c} & -\frac{\omega x}{c} & 0 \\ \frac{\omega y}{c} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega x}{c} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15.1)$$

В указанном линейном по  $\beta$  приближении  $g_{nm} = g^{nm}$ . Ковариантные компоненты тензора поля, как всегда, таковы:

$$F_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.2)$$

Поднятие же индексов при помощи  $g^{nm}$  дает для контравариантных компонент тензора поля выражения

$$F^{01} = g^{0k} g^{1m} F_{km} = -F_{01} + \left(\frac{\omega y}{c}\right)^2 F_{01} - \frac{\omega^2}{c^2} xy F_{20} + \frac{\omega x}{c} F_{21} \approx$$

$$\approx \left( \mathbf{E} - \frac{1}{c} [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}] \right)_x. \quad (15.3)$$

Подобным же образом находятся и все другие компоненты  $F^{nm}$ . Выпишем  $F^{nm}$  в виде таблицы:

$$F^{nm} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{E}_x & \tilde{E}_y & \tilde{E}_z \\ -\tilde{E}_x & 0 & \tilde{B}_z & -\tilde{B}_y \\ -\tilde{E}_y & -\tilde{B}_z & 0 & \tilde{B}_x \\ -\tilde{E}_z & \tilde{B}_y & -\tilde{B}_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (15.4)$$

где

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{E} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}], \quad \tilde{\mathbf{B}} \equiv \mathbf{B} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}], \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \frac{1}{c} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]. \quad (15.5)$$

Поправки к компонентам метрического тензора, обусловленные гравитационным полем в ньютоновском приближении, выражаются в заменах

$$g_{00} \rightarrow 1 + 2\frac{\Phi_g}{c^2}, \quad g^{00} \rightarrow 1 - 2\frac{\Phi_g}{c^2}.$$

Однако поправки к  $F^{nm}$  от гравитационного поля выходят за рамки интересующей нас точности поскольку  $\frac{2\Phi_g}{c^2} \leq (v/c)^2 E$ , ибо при заданном  $\Phi_g$  условие гравитационного удержания имеет вид  $v^2 \ll 2\Phi_g$ . Однако влияние гравитационного поля проявляется косвенно посредством БЭ; это поле вызывает в недрах планет появления градиента давлений.

Используя то, что в рассматриваемом приближении  $\sqrt{-g} \approx 1$ , можно записать уравнения Максвелла в более простом виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^m} F^{nm} = \frac{4\pi}{c} J^n. \quad (15.6)$$

Подстановка (15.4) позволяет придать этим уравнениям наглядную векторную форму

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} = 4\pi\rho. \quad (15.7)$$

Однородные же уравнения, напомним, сохраняют одинаковый вид во всех системах отсчета:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (15.8)$$

Последний вопрос, на котором нужно остановиться, касается физического истолкования тех величин, которыми мы описываем электромагнитное поле. Для решения этой задачи следует рассмотреть силы, действующие на заряд.

Пусть точечный заряд  $e$  движется в медленно вращающейся системе отсчета  $K$ ; его скорость  $\mathbf{v}$  относительно  $K$  будем опять-таки полагать малой, т. е.  $v/c \ll 1$ . Подсчитаем, какова сила, с которой на него действуют электрическое и магнитное поля.

Общековариантное уравнение движения релятивистской материальной точки с зарядом  $e$  и с массой покоя  $m$  во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$mc^2 \left\{ \frac{d^2 x^n}{ds^2} + \Gamma_{kl}^n u^k u^l \right\} = eu_l F^{ln}. \quad (15.9)$$

Пользуясь найденными выше выражениями для компонент  $g_{nl}$ , найдем в линейном по  $\beta$  приближении компоненты  $u_l$ :

$$u_l = (1, -\mathbf{V}/c), \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \quad \omega r \ll c. \quad (15.10)$$

Что же касается символов Кристоффеля, то в нашем случае те из них, которые отличны от нуля, таковы:

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{\omega}{c^3} (xG_x - yG_y), \quad \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 x/2 - G_x),$$

$$\Gamma_{02}^0 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 y/2 - G_y),$$

$$\Gamma_{03}^0 = -\frac{1}{c^2} G_z, \quad \Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{c^2} G_x, \quad \Gamma_{01}^1 = -\frac{\omega y}{c^3} G_x,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{02}^1 &= -\frac{\omega}{c} - \frac{\omega y}{c^3}, & \Gamma_{00}^2 &= -\frac{1}{c^2} \mathcal{G}_y, & \Gamma_{01}^2 &= \frac{\omega}{c} - \frac{\omega x}{c^3} \mathcal{G}_x, \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{\omega x}{c^3} \mathcal{G}_y, & \Gamma_{00}^3 &= -\frac{1}{c^2} \mathcal{G}_z, & \mathcal{G} &= -\nabla \Phi_g. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Положим в (15.9)  $n = 1$ . Тогда подстановка значений  $\Gamma_{kl}^1$ ,  $F^{1i}$  и  $u_i$  приводит (опять-таки в линейном по  $\omega r/c$  и  $v/c$  приближении) к уравнению

$$m \left( \frac{dv}{dt} \right)_x = \left( m\mathcal{G} + e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \right)_x + 2m[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}]_x. \quad (15.12)$$

Подставляя  $n = 2$  и  $n = 3$ , мы получили бы уравнения такого же типа, но при этом возникли бы проекции векторов, стоящих в левой и в правой частях на осях  $y$  и  $z$  соответственно.

Полученные уравнения имеют совершенно очевидный физический смысл. В левой части — произведение массы на ускорение (заметим, что в обсуждаемом приближении оно имеет нерелятивистский вид). В правой же части стоят силы. Первый член отражает воздействие на частицу гравитационного поля  $\mathcal{F}_g = m\mathcal{G}$ , а остальные — электромагнитного:

$$\mathcal{F}_{э-м} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (15.13)$$

Именно вид (15.13) позволяет интерпретировать  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  совершенно так же, как это делается в инерциальной системе отсчета;  $\mathbf{E}$  — сила, действующая на единичный положительный покоящийся заряд, а  $\mathbf{B}$  определяет воздействие магнитного поля на движущийся заряд. Таким образом, сила Лоренца сохраняет тот же вид, что и в инерциальной системе отсчета. Здесь, однако, требуется уточнение, поскольку покоящийся, например, относительно Земли заряд (для него  $\mathbf{v} = 0$ , но  $\mathbf{V} \neq 0$ ) должен испытывать воздействие магнитного поля Земли, так как  $[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \neq 0$ . Поэтому указанное сохранение вида силы Лоренца не снимает влияния вращения системы отсчета. К тому же, напомним, меняется и вид уравнений Максвелла: в неоднородных уравнениях вместо  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  выступают  $\tilde{\mathbf{E}}$  и  $\tilde{\mathbf{B}}$ .

Последний член в (15.12) есть сила Кориолиса; отметим, что в обсуждаемом нами приближении центробежная сила не учитывается.

### §16. Некоторые конкретные задачи

Первая задача, к рассмотрению которой мы обратимся, такова: точечный заряд  $q$  покоится относительно медленно вращающейся системы отсчета  $\mathcal{K}$ ; найдем напряженности электрического и магнитного полей, создаваемых этим зарядом в  $\mathcal{K}$ .

Положим для упрощения  $\epsilon = \mu = 1$ ; обсуждение влияния сред на поля нас пока интересовать не будет. Указанное упрощение позволяет не делать различия между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , а также  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ . Впрочем, этот момент не играет принципиальной роли.

Поля в  $\mathcal{K}$  для случая, который имеется в виду в поставленной задаче, являются статическими, токи отсутствуют; поэтому написание уравнений Максвелла несколько упрощается:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \{\mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}]\} &= 0, & \operatorname{div} \{\mathbf{E} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}]\} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \rho &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (16.1)$$

Первое и последнее из этих уравнений позволяют ввести два потенциала:

$$\mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}] = -\operatorname{grad} \psi, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (16.2)$$

Подставляя в оставшиеся уравнения выражения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  через потенциалы, найдем уравнения для последних:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \{-\nabla\varphi + [\boldsymbol{\beta} \times [\boldsymbol{\beta} \times \nabla\varphi]] + [\boldsymbol{\beta} \times \nabla\psi]\} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \{-[\boldsymbol{\beta} \times \nabla\varphi] - \nabla\psi\} &= 0. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Поскольку мы действуем в рамках линейного по  $\boldsymbol{\beta}$  приближения, в первом из этих уравнений члены  $[\boldsymbol{\beta} \times \nabla\psi]$  и  $[\boldsymbol{\beta} \times [\boldsymbol{\beta} \times \nabla\varphi]]$  должны быть исключены. Действительно, из того, что  $\Delta\psi = -\operatorname{div} [\boldsymbol{\beta} \times \nabla\varphi]$ , видно, что  $\psi$  по меньшей мере линейно по  $\boldsymbol{\beta}$ , так что  $[\boldsymbol{\beta} \times \nabla\psi]$  в линейном по  $\boldsymbol{\beta}$  приближении действительно выпадает. Уравнение для  $\varphi$  приобретает поэтому вид

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (16.4)$$

Получается, что потенциал  $\varphi$  в линейном по  $\boldsymbol{\beta}$  приближении оказывается вообще нечувствительным к вращению и переходит в обычное кулоновское выражение:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}}. \quad (16.5)$$

Потенциал же  $\psi$  определяется уравнением

$$\Delta\psi = -\operatorname{div}[\boldsymbol{\beta} \times \nabla\varphi] = \frac{2}{c}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}). \quad (16.6)$$

Это уравнение решается в квадратурах:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi c} \int dV' \frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}'))}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}}. \quad (16.7)$$

Подставляя сюда выражение для напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = q\mathbf{R}/R^3$ , можно найти  $\mathbf{H}$ . Однако мы пойдем более удобным путем: записав

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{q}{c} \frac{[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) \times \mathbf{R}]}{R^3}, \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \vec{r}_0, \quad (16.8)$$

покажем, что это есть решение указанных выше уравнений. Действительно:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= \frac{q}{c} \left\{ \frac{1}{r^3} (\nabla \cdot [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) \times \mathbf{R}]) - \frac{3}{R^5} (\mathbf{R} \cdot [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) \times \mathbf{R}]) \right\} = \\ &= -\frac{q}{cR^3} ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{R}) = 0. \end{aligned} \quad (16.9)$$

После этого остается только убедиться, что  $\mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}]$  есть градиент, что обеспечивает выполнение оставшегося уравнения Максвелла:

$$\mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}] = q \frac{[\boldsymbol{\beta}'_0 \times \mathbf{R}]}{R^3} - q \frac{[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}]}{R^3}, \quad \boldsymbol{\beta}'_0 = \frac{1}{c}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0]. \quad (16.10)$$

После простых преобразований получаем

$$\mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}] = \frac{q}{c} \frac{[\mathbf{R} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}]]}{R^3} = \operatorname{grad} q \frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R})}{cR}, \quad (16.11)$$

что и требовалось доказать.

Полученные здесь результаты не являются новыми. Однако мы нашли полезным остановиться на их обсуждении по нескольким причинам.



Первая из них такова: поскольку уравнения Максвелла линейны, то, найдя поле точечного заряда, не составляет труда найти также и поля любого стационарного распределения зарядов:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{R}'}{R^3}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \mathbf{R}']}{R^3},$$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \quad (16.12)$$

Запишем еще и выражение для напряженности магнитного поля, порождаемого в  $\mathcal{K}$  не меняющимся во времени распределением плотности дипольного электрического момента  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{H}_{\text{дип}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int dV' (\mathcal{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \frac{[(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \mathbf{R}']}{R^3}.$$

Последняя — по порядку, но не по важности — причина может быть названа психологической.

«Покоящийся заряд не порождает магнитного поля». Это утверждение, знакомое даже школьникам, настолько прочно укоренилось в сознании, что порой забывается, что оно оправдано, лишь если речь идет об инерциальных системах отсчета.

Действительно, заряд, покоящийся относительно инерциального наблюдателя, порождает только электрическое поле. Но если наблюдатель находится в неинерциальной системе отсчета, например, если он вращается вместе с Землей, то покоящийся относительно него заряд создает магнитное поле, как это было показано выше. Таким образом, встречающееся порой утверждение, что перераспределение зарядов в Земле не может породить магнитного поля ввиду того, что эти заряды неподвижны по отношению к Земле (и по отношению к наблюдателю), — эти утверждения попросту ошибочны, они основаны на неоправданном перенесении тех положений, которые относятся к инерциальным системам отсчета, на неинерциальные системы.

Порождаемые покоящимся относительно  $\mathcal{K}$  точечным зарядом  $q$  поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  убывают обратно пропорционально квадрату расстояния от источника до точки наблюдения, но если  $\mathbf{E}$  зависит лишь от модуля  $\mathbf{R}$ , то картина распределения  $\mathbf{H}$  по направлениям иная: на прямой  $[\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0)] = 0$ , т. е. на линии, проходящей через заряд в направлении его мгновенной скорости

(с точки зрения инерциального наблюдателя), магнитное поле вовсе отсутствует. Больше всего  $\mathbf{H}$  на плоскости, проходящей через заряд и перпендикулярной к этой линии. Таким образом, исследуя поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на поверхности шара, можно более надежно, чем по измерениям только лишь напряженности электрического поля, установить местоположение источника.

По формулам (16.12) можно найти  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  при заданном распределении плотности зарядов  $\rho$ , производя интегрирование. Однако иногда удобнее опираться непосредственно на уравнения Максвелла в  $\mathcal{K}$ . Покажем это на примере двух задач.

Постановка первой из них такова:

По всему объему шара радиуса  $R$  равномерно распределен заряд, т.е. плотность объемных зарядов  $\rho$  постоянна; шар в целом электронеутрален, т.е. имеется и поверхностный заряд. Примем, что его плотность постоянна  $\rho_{\text{пов}} = -\frac{\rho R}{3}$ . Шар и все находящиеся на нем заряды вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти напряженности полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в собственной системе отсчета шара, вновь предполагая, что вращение медленное. Примем опять  $\epsilon = \mu = 1$ . Уравнения Максвелла при такой постановке задачи принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}]) &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot}(\mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}]) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Если учесть, как это было показано выше, что в линейном по  $\boldsymbol{\beta}$  приближении электрическое поле получается таким же, как и при  $\omega = 0$ , то в этой задаче поле  $\mathbf{E}$  таково:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{r} & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

Подставляя это  $\mathbf{E}$ , легко убедиться, что  $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}] = \frac{4\pi}{c}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ . Поэтому уравнения для  $\mathbf{H}$  принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\rho[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \quad \text{при } r \leq R, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (16.14)$$

Но эти уравнения имеют совершенно такой же вид, как если бы мы записали их в инерциальной системе отсчета, в которой центр масс шара покоится. Действительно, при этом заряды окажутся движущимися, появится ток, плотность которого  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} = \rho[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ .

Условимся обозначать  $\mathbf{H}_1$  напряженность магнитного поля в области  $r \leq R$  и  $\mathbf{H}_2$  — в области  $r \geq R$ , т. е. вне шара. Будем искать  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  в виде

$$\mathbf{H}_1 = C_1 \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) + C_2 r^2 \boldsymbol{\omega} + C_0 R^2 \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{H}_2 = C_3 \frac{3\mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \boldsymbol{\omega}}{r^5}. \quad (16.15)$$

Постоянные  $C_0, C_1, C_2, C_3$  находятся из уравнений и из условий на поверхности раздела  $r = R$ . Уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{H}_1 = 0$  дает  $4C_1(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) + 2C_2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = 0$ , или  $2C_1 + C_2 = 0$ . Заметим, что  $\mathbf{H}_2$  имеет дипольный вид и условие  $\operatorname{div} \mathbf{H}_2 = 0$  выполняется всегда, независимо от значения  $C_3$ .

Уравнение  $\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \frac{4\pi}{c} \rho[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$  приводит к условию  $C_1 - 2C_2 = \frac{4\pi}{c} \rho$ . На поверхности  $r = R$  имеется поверхностный заряд; с точки зрения инерциального наблюдателя он вращается, так что существует ток, что вызывает разрыв тангенциальной компоненты напряженности магнитного поля  $\delta H_\tau = \frac{4\pi}{c} \rho_{\text{пов}} \omega R \sin \theta$ . В системе отсчета  $\mathcal{K}$  поверхностные заряды неподвижны, поверхностного тока нет, но здесь из уравнения

$$\operatorname{rot} \{ \mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}] \} = 0$$

следует, что непрерывной является тангенциальная компонента вектора  $\mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}]$ . Если подставить полученные выше выражения для напряженностей электрических полей  $\mathbf{E}_1 = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{r}$  и  $\mathbf{E}_2 = 0$ , то последнее граничное условие совпадает с тем, которое справедливо в инерциальной системе отсчета. Граничное условие для  $H_\tau$  налагает на искомые постоянные требование

$$\frac{C_3}{R^5} + C_2 + C_0 = -\frac{4\pi}{3c} \rho. \quad (16.16)$$

Последнее условие — требование непрерывности нормальных компонент  $\mathbf{H}$  — дает

$$C_1 + C_2 + C_0 = \frac{2C_3}{R^5}. \quad (16.17)$$

Постоянные, определенные указанными условиями, таковы:

$$C_1 = \frac{4\pi}{5c} \rho, \quad C_2 = -\frac{8\pi}{5c} \rho, \quad C_3 = -\frac{8\pi}{45c} \rho R^5, \quad C_0 = \frac{4\pi}{9c} \rho. \quad (16.18)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{4\pi}{5c} \rho \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \frac{8\pi}{5c} \rho r^2 \boldsymbol{\omega} + \frac{4\pi}{9c} \rho R^2 \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{8\pi}{45cr^3} \rho R^5 \boldsymbol{\omega} - \frac{8\pi}{15cr^5} \rho R^5 \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (16.19)$$

Поле  $\mathbf{H}_2$  во внешней области, как уже говорилось, является дипольным, и  $C_3 \boldsymbol{\omega}$  есть дипольный магнитный момент:

$$\mathbf{M} = -\frac{8\pi}{45c} \rho R^5 \boldsymbol{\omega}. \quad (16.20)$$

Плотность объемных зарядов принимается в рассмотренной задаче постоянной. Однако это не только упрощающий прием. Как было показано выше, в значительной части глубинных областей модельных планет напряженность электрического поля действительно меняется почти по линейному закону, и это делает приближение постоянной плотности электрических зарядов приемлемым. Как уже отмечалось, это приближение тем лучше, чем успешнее работает модель невзаимодействующих электронов, т. е. чем выше давления. Если к тому же учесть немаловажное обстоятельство — простоту описания в таком приближении, позволяющую фиксировать внимание на существенных для дальнейшего сторонах вопросов, то делается еще более понятной причина привлекательности такого описания. Мы будем придерживаться его и еще в одной задаче: — о двухслойном вращении.

Постановка этой задачи такова: мы вновь рассмотрим массивный шар, по объему которого равномерно распределен заряд  $Q$  а по поверхности — заряд  $-Q$ , так что шар в целом электронейтрален, но теперь положим, что шар уже не вращается как единое целое: внутренняя область I (мы будем помечать все относящиеся к ней величины индексом «1») вращается по отношению к внешней (область II,  $R_2 \geq r \geq R_1$ ) с угловой скоростью  $\Omega$ , а сама внешняя область II по отношению к инерциальной системе отсчета, в которой центр шара покоится, вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Область вне шара  $r > R$  — область III.

Полагая вновь, что вращение медленное,  $\omega r \ll c$ ;  $\Omega r \ll c$ , будем искать решение уравнений Максвелла для каждой из областей:

область I:

$$\operatorname{rot} \left\{ \mathbf{B}_1 - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1] \right\} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{V}, \quad \operatorname{div} \left\{ \mathbf{E}_1 - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1] \right\} = 4\pi \rho,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = 0, \quad \mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \quad \mathbf{V} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}];$$
(16.21a)

область II:

$$\operatorname{rot} \left\{ \mathbf{B}_2 - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}_2] \right\} = 0, \quad \operatorname{div} \left\{ \mathbf{E}_2 - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_2] \right\} = 4\pi \rho,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_2 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = 0;$$
(16.21б)

область III:

$$\operatorname{rot} \left\{ \mathbf{B}_3 - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}_3] \right\} = 0, \quad \operatorname{div} \left\{ \mathbf{E}_3 - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_3] \right\} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_3 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_3 = 0.$$
(16.21в)

По-прежнему будем ограничиваться линейным по  $\beta$  приближением. Поэтому, как и в предыдущей задаче, электрическое поле имеет чисто кулоновский вид:

$$\mathbf{E}_{1,2} = \frac{4\pi\rho}{3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{E}_3 = 0. \quad (16.22)$$

Подставляя эти  $\mathbf{E}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в уравнения (16.21), можно переписать последние в такой форме:

$$\operatorname{rot} \left\{ \mathbf{B}_1 - \frac{1}{c} [(\mathbf{v} + \mathbf{V}) \times \mathbf{E}_1] \right\} = 0, \quad \operatorname{rot} \left\{ \mathbf{B}_2 - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}_2] \right\} = 0,$$

поскольку  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_3 = 0,$  (16.23)

$$\operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{1,2}] = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{1,2}] = 4\pi\rho\mathbf{V}. \quad (16.24)$$

Введем опять потенциалы

$$\mathbf{B}_1 - \frac{1}{c} [(\mathbf{v} + \mathbf{V}) \times \mathbf{E}_1] = -\operatorname{grad} \psi_1, \quad \mathbf{B}_2 - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}_2] = -\operatorname{grad} \psi_2,$$

$$\mathbf{B}_3 = -\operatorname{grad} \psi_3. \quad (16.25)$$

Потенциалы  $\psi_{1,2,3}$  удовлетворяют уравнениям, которые получаются из того, что  $\operatorname{div} \mathbf{B}_{1,2,3} = 0$  при учете равенств

$$\operatorname{div} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}), \quad \operatorname{div} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}] = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{E}). \quad (16.26)$$

Поддействовав на все члены в (16.25) оператором  $\operatorname{div}$  и учитывая последние равенства, находим

$$\Delta \psi_1 = \frac{2}{c} ((\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{E}_1), \quad \Delta \psi_2 = \frac{2}{c} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}_2), \quad \Delta \psi_3 = 0. \quad (16.27)$$

Пользуясь тождеством  $\Delta \{r^2(\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\} = 10(\mathbf{r} \cdot \mathbf{U})$  при любом постоянном  $\mathbf{U}$ , можно убедиться, что уравнениям (16.27) удовлетворяют выражения

$$\psi_1 = \frac{r^2}{5c} ((\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{E}_1) + \psi_1^{(0)}, \quad \psi_2 = \frac{r^2}{5c} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}_2) + \psi_2^{(0)}, \quad \psi_3 = \psi_3^{(0)}, \quad (16.28)$$

где  $\psi_i^{(0)}$  — решения уравнения Лапласа  $\Delta \psi_i^{(0)} = 0$ . Эти решения ищем в виде

$$\begin{aligned} \psi_1^{(0)} &= a_1(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) + b_1(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}), \\ \psi_2^{(0)} &= a_2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) + b_2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) + h_2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})}{r^3} + g_2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{r^3}, \\ \psi_3^{(0)} &= h_3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})}{r^3} + g_3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{r^3}. \end{aligned} \quad (16.29)$$

Первое из выражений (16.29) записано при условии конечности потенциала  $\psi_1^{(0)}$  при  $r = 0$ , последнее — ограниченности  $\psi_3^{(0)}$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Подставляя указанные выражения в уравнения для потенциалов, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{4\pi}{5c} \rho r ((\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{r}) - \frac{8\pi}{5c} \rho r^2 (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) - a_1 \boldsymbol{\omega} - b_1 \boldsymbol{\Omega}, \\ \mathbf{B}_2 &= \frac{4\pi}{5c} \rho r (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \frac{8\pi}{5c} \rho r^2 \boldsymbol{\omega} - a_2 \boldsymbol{\omega} - b_2 \boldsymbol{\Omega} - h_2 \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} + 3h_2 \mathbf{r} \frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \\ &\quad - g_2 \frac{\boldsymbol{\Omega}}{r^3} + 3g_2 \mathbf{r} \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})}{r^5}, \\ \mathbf{B}_3 &= -h_3 \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} + 3h_3 \mathbf{r} \frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - g_3 \frac{\boldsymbol{\Omega}}{r^3} + 3g_3 \mathbf{r} \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})}{r^5}. \end{aligned} \quad (16.30)$$

Постоянные, входящие в (16.30), нужно находить из граничных условий. Первая пара этих условий — непрерывность радиальных компонент  $(\mathbf{B}_i)_r$  как на границе областей I и II, так и на поверхности  $r = R_2$ , которая разграничивает области II и III.

Поскольку в выражения для  $\mathbf{B}_i$  входят независимые векторы  $\omega$  и  $\Omega$ , нужно приравнять по отдельности множители при  $\omega_r$  и  $\Omega_r$ ; аналогичное замечание можно высказать и по поводу приравнивания множителей при  $\omega_\theta$  и  $\Omega_\theta$ , которые появятся, когда мы будем записывать условия для тангенциальных компонент  $(\mathbf{B}_i)_\theta$ .

Потребовав выполнения условий

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \Big|_{r=R_1} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \Big|_{r=R_1}, \quad (16.31)$$

где  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{R}_1/R_1$ , получим, учитывая вышеизложенное:

$$a_1 = a_2 - \frac{2h_2}{R_1^3}, \quad \frac{4\pi}{5c} \rho R_1^2 + b_1 = b_2 - \frac{2}{R_1^3} g_2. \quad (16.32a)$$

Аналогичное условие при  $r = R_2$  дает

$$-\frac{4\pi}{5c} \rho R_2^2 - a_2 + \frac{2h_2}{R_2^3} = \frac{2}{R_2^3}, \quad -b_2 + \frac{2g_2}{R_2^3} = \frac{2g_3}{r_2^3}. \quad (16.32b)$$

Перейдем теперь к обсуждению условий для тангенциальных компонент  $(\mathbf{B}_i)_\theta$ . Поверхностных зарядов на границе между областями I и II нет; поэтому  $(\mathbf{B}_i)_\theta$  не испытывает разрыва, что дает условия

$$a_1 = a_2 + \frac{h_2}{R_1^3}, \quad \frac{8\pi}{5c} \rho R_1^2 + b_1 = b_2 + \frac{g_3}{R_1^3}. \quad (16.32b)$$

Поверхность же  $r = R_2$  несет поверхностный заряд: его поверхностная плотность равна  $\rho_{\text{пов}} = -\rho R_2/3$ . Как уже обсуждалось в предыдущей задаче, это отражается на граничном условии

$$(\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_2)_\theta \Big|_{r=R_2} = -\frac{4\pi}{3c} \rho R_2^2 \omega_\theta,$$

где  $\omega_\theta = -\omega \sin \theta$ . Это приводит к двум уравнениям для искомых постоянных:

$$-\frac{h_3}{R_2^3} + \frac{8\pi}{5c} \rho R_2^2 + a_2 + \frac{h_2}{R_2^3} = \frac{4\pi}{3c} \rho R_2^2, \quad -\frac{g_3}{R_2^3} + b^2 + \frac{g_2}{R_2^3} = 0. \quad (16.32r)$$

Постоянные, определяемые граничными условиями (16.32), называются такими:

$$a_1 = a_2 = -\frac{4\pi}{9c} \rho R_2^2, \quad b_1 = -\frac{4\pi}{3c} \rho R_1^2, \quad b_2 = h_2 = 0,$$

$$g_2 = g_3 = \frac{4\pi}{15c} \rho R_1^5, \quad h_3 = -\frac{8\pi}{45c} \rho R_2^5.$$

Подставляя значения этих постоянных, находим

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4\pi}{5c} \rho r ((\omega + \Omega) \cdot r) - \frac{8\pi}{5c} \rho r^2 (\omega + \Omega) + \frac{4\pi}{9c} \rho R_2^2 \omega + \frac{4\pi}{3c} \rho R_1^2 \Omega, \\ B_2 &= \frac{4\pi}{5c} \rho r (\omega \cdot r) - \frac{8\pi}{5c} \rho r^2 \omega + \frac{4\pi}{9c} \rho R_1^2 \omega - \frac{4\pi}{15cr^3} \rho R_1^2 \Omega + \frac{12\pi}{15cr^5} \rho R_1^5 r (r \cdot \omega), \\ B_3 &= \frac{8\pi}{45cr^3} \rho R_2^5 \omega - \frac{24\pi}{45cr^5} \rho R_2^5 r (\omega \cdot r) - \frac{4\pi}{15cr^3} \rho R_1^5 \Omega + \frac{12\pi}{15cr^5} \rho r (\Omega \cdot r). \end{aligned} \quad (16.33)$$

Обсудим полученные выражения.

Положения магнитных полюсов определяется условием

$$[B_3 \times R_2] = 0,$$

т. е. условием, что магнитное поле у поверхности имеет лишь вертикальную компоненту. Подставляя  $B_3$  из (16.7), находим, что положение полюсов  $R_p$  определяется равенством  $2R_2^5[\omega \times R_p] = 3R_1^5[\Omega \times R_p]$  или

$$[(q\omega - \Omega) \times R_p] = 0, \quad q \equiv \frac{2R_2^5}{3R_1^5}.$$

Таким образом, полюсы находятся на концах диаметра, параллельного вектору  $q\omega - \Omega$ . Только когда  $\omega$  и  $\Omega$  направлены вдоль одной прямой, положение географических и магнитных полюсов



может быть одинаковым, во всех же остальных случаях они не совпадают.

Поле  $\mathbf{B}_3$ , как уже было показано, является чисто дипольным; при этом полный магнитный дипольный момент

$$\mathbf{M} = -\frac{8\pi}{45c} \rho R_2^5 \boldsymbol{\omega} + \frac{4\pi}{15c} \rho R_1^5 \boldsymbol{\Omega}.$$

Первый член этого выражения показывает, какой магнитный момент получился бы, если бы все заряды вращались как целое с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Эта часть магнитного момента направлена противоположно  $\boldsymbol{\omega}$ , что обусловлено преобладающим вкладом в магнитный момент отрицательного поверхностного заряда по сравнению с вкладом положительных объемных зарядов. Второй же член обязан вращению внутренней области I. Так как поверхность этой области не несет заряда, этот член параллелен  $\boldsymbol{\Omega}$ .

## БАРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАДИЕНТАХ ДАВЛЕНИЙ

### §17. Упрощающие предположения

Переходя к рассмотрению бароэлектрических полей, возникающих, когда градиенты давлений в проводнике меняются во времени, мы прежде всего попытаемся очертить тот круг вопросов, которые явятся предметом рассмотрения; по существу дело сводится к пояснению тех упрощающих предположений, которые будут использоваться ниже.

Первое и наиболее важное из этих предположений можно определить как условие механической квазиравновесности. Это означает, что за то время, за которое при нестационарном распределении давлений происходит перераспределение зарядов, механическими перемещениями различных участков проводника можно пренебречь. Это допущение о том, что механическое время релаксации значительно больше электрического, в действительности не является очень жестким, так как электрическая релаксация происходит за время порядка  $1/\lambda$ , а проводимость  $\lambda$  для типичных проводников такова, что за стотысячные доли секунды успевают перераспределиться заряды в макроскопических областях. Однако есть, конечно, и такие задачи, для рассмотрения которых это приближение недостаточно; так, например, оно не позволяет дать адекватного описания экспериментально наблюдавшегося [58] порождения электрических полей при распространении ударных волн в проводниках, хотя некоторые качественные черты эффекта можно уловить и здесь.

Принимая условие механической квазистационарности, мы, естественно, ограничиваем область применения теории, но зато

получаем важное преимущество: многие из положений, обсуждавшихся выше для случая стационарных градиентов давлений, мы можем перенести и на задачи, где эти градиенты зависят от времени. Это, в первую очередь, означает, что те условия, которые при равновесии определяют зависимость напряженности бароэлектрического поля от распределения давлений, предполагаются приближенно верными и в случае, когда эти распределения не являются стационарными.

Мы будем в дальнейшем пользоваться двумя вариантами описания, которые обсуждались выше.

Первый из них реализуется в области больших давлений, когда использование модели невзаимодействующих электронов оправдано и когда можно пользоваться соотношением (14.3), связывающим напряженность бароэлектрического поля  $\mathbf{E}$  и градиент давления:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\alpha_0}{G}} \nabla p. \quad (17.1)$$

Напомним, что при получении этой формулы не использовалось предположение о постоянстве механической плотности.

Наоборот, другой вариант предпочтителен, когда давления невелики. В частности, у поверхностей планет давления заведомо значительно меньше фермиевских, и первый вариант перестает быть корректным, следовательно, надлежит пользоваться вторым.

Во втором варианте мы будем применять, в частности, условие механического равновесия, которое мы здесь выпишем еще раз:

$$\frac{p}{p_F} \mathbf{f} + \rho \mathbf{E} = 0. \quad (17.2)$$

Здесь  $p_F$  — давление Ферми, которое, напомним, по величине близко к модулю всестороннего сжатия  $B$ , так что в дальнейшем мы в ряде случаев будем писать  $p/B$  вместо  $p/p_F$ ; объемная плотность силы (внешней) предполагается изменяющейся со временем достаточно медленно, чтобы условие механической квазистационарности могло полагаться выполненным.

Первый из указанных вариантов описания был использован нами ранее при обсуждении общековариантного обобщения закона Ома при учете БЭ. Мы начнем здесь с того, что продолжим сейчас рассмотрение в этом же плане.

Чтобы отвлечься от малоинтересных для нас эффектов обычной поляризации и намагничивания, положим  $\epsilon = \mu = 1$ ,

или, что эквивалентно,  $\varkappa = \eta = 0$ , а также обратимся к рассмотрению только тех электрических полей, которые порождаются зарядами, перераспределяющимися из-за градиентов давления. Тогда можно переписать (14.6) в виде

$$J^n = \frac{c\gamma}{4\pi} \left\{ (u^n g^{ml} - u^m g^{nl}) \frac{\partial p}{\partial x^l} \right\}_{;m}. \quad (17.3)$$

### §18. Покоящийся относительно инерциального наблюдателя проводник

Подставляя в (17.3) значения  $u^n = (1, 0, 0, 0)$ ,  $g^{nm} = \bar{g}^{nm}$ , т. е.  $g_{00} = g^{00} = 1$ ,  $g^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha} = -1$  (остальные компоненты нулевые) и учитывая, что ковариантная производная превращается в частную, мы получаем

$$J^n = \frac{c\gamma}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( u^n \frac{\partial p}{\partial x^0} - u^0 g^{nn} \frac{\partial p}{\partial x^n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( -u^n \frac{\partial p}{\partial x^\nu} - u^\nu g^{nn} \frac{\partial p}{\partial x^n} \right) \right\}. \quad (18.1)$$

По греческому индексу нужно просуммировать от 1 до 3, индекс же  $n$  фиксирован. Полагая  $n = 0$ , найдем выражение для той плотности заряда, которая обусловлена БЭ:

$$J^0 \equiv c\rho = -\frac{c\gamma}{4\pi} \Delta p. \quad (18.2)$$

Заметим, что если давление  $p$  зависит от времени, то переменной оказывается и плотность заряда  $\rho$ .

Полагая  $n = 1$ , получим

$$J^1 = -\frac{\gamma}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x^1} g^{11} = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla p)_x. \quad (18.3)$$

Полагая  $n = 2$  и  $n = 3$ , мы пришли бы к аналогичным равенствам; можно переписать их в векторном виде:

$$\mathbf{J} = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } p. \quad (18.4)$$

Таким образом, «бароэлектрические токи» действительно получаются отличными от нуля, только если градиенты давлений меняются во времени.

Постоянный ток, который порождался бы только не зависящими от времени градиентами давлений, невозможен — это, как уже говорилось, противоречило бы второму началу термодинамики; здесь, впрочем, возник бы конфликт и с законом сохранения энергии. Однако когда градиенты давлений меняются во времени, барозлектрический ток становится возможным и никаких противоречий с законом сохранения энергии не возникает, хотя бы уже потому, что систему нельзя рассматривать как изолированную, ибо изменение градиентов давлений во времени обуславливается наличием переменных внешних воздействий, т. е. затратами энергии.

Заметим, что в задачах о проводниках конечных размеров условие (18.4) должно быть дополнено условием обращения в нуль нормальных компонент плотности тока на поверхности проводника.

Полученные выше результаты складываются в следующую качественную картину: если объемная плотность силы  $\mathbf{f}$  в некоторой области имеет отличную от нуля и меняющуюся во времени дивергенцию, то плотность зарядов в этой области тоже становится переменной: и при повышении и при понижении давления в этой области электроны вытесняются из нее. Вытеснение электронов происходит как во внутренние области проводника, где напряжения меньше, так и на его поверхность. Те электрические поля, которые порождаются таким перераспределением зарядов, могут, вообще говоря, проникать и за пределы проводника, так что положение здесь оказывается иным, чем в рассмотренных выше задачах о модельных планетах, где предполагалась центральная симметрия и статичность давления.

## §19. Воздействия приливного типа

Перейдем теперь к рассмотрению конкретного примера: примем, что переменное и неоднородное распределение давлений вызывается приливыми воздействиями.

Постановка задачи такова: будем вначале считать, что приливное воздействие на планету массы  $M$  вызывается единственным ее спутником массы  $m$ , причем соотношение масс планеты и спутника ( $M \gg m$ ) таково, что движением первой можно пренебречь (что, впрочем, не имеет принципиального значения и принимается лишь ради технического упрощения). Будем предполагать, что расстояние между центрами планеты и спутника

существенно больше их радиуса и что период обращения спутника вокруг планеты значительно больше периода ее суточного обращения.

Плотность приливной силы в системе центра масс планеты можно записать в виде

$$\mathbf{f}_n = Gm\tau \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}}{R_0^3}, \quad (19.1)$$

где, как и прежде,  $G$  — гравитационная постоянная,  $\tau$  — усредненная плотность вещества планеты в точке, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , отсчитываемым от ее центра,  $\mathbf{R}_0$  — вектор, соединяющий центры спутника и планеты,  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{R}_0/R_0$ .

Давления вновь будут определяться при помощи квазиравновесного условия  $\mathbf{f} = \nabla p$ .

В гл. 2 мы обсуждали задачу о бароэлектрических полях в звездах и планетах, основываясь на сферически симметричной модели. Бароэлектрическое поле во внешней области оказывалось при этом нулевым. Однако это поле должно проникать и во внешнюю область, если нарушается сферическая симметрия, причем эти нарушения могут вызываться как строением самой планеты, в том числе, и рельефа ее поверхности, так и несимметричностью внешних воздействий. Именно с последним мы и встречаемся, рассматривая приливные силы.

Чтобы выделить «электроприливные эффекты» в чистом виде, будем по-прежнему пользоваться описанной выше в §5 моделью планеты, так что нарушение симметрии задачи возникает только за счет внешнего воздействия.

Поскольку условие квазиравновесности при рассмотрении приливных эффектов заведомо выполняется, можно для нахождения напряженностей бароэлектрического поля пользоваться теми же методами, какие применялись в равновесных задачах.

Напомним, что использовались три метода. Первый из них, опирающийся на условие постоянства электрохимического потенциала, привел нас к соотношению (2.6), представляющему собой требование постоянства плотности полной избыточной энергии; нам удобно переписать его здесь еще раз:

$$\text{grad} \left\{ W + \frac{1}{8\pi} E^2 \right\} = 0. \quad (19.2a).$$

Для нахождения напряженности бароэлектрического поля в приповерхностных областях планеты, где давления относительно

невелики  $p \ll p_F$ , и где поэтому для  $W$  можно использовать выражение  $W = p^2/2B$ , иногда удобнее искать  $\mathbf{E}$ , опираясь на условие механического равновесия, которое мы здесь также перепишем еще раз:

$$\frac{p}{B} \nabla p + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (19.25)$$

Наконец, если можно довольствоваться совсем грубыми, однако и очень простыми и полезными для качественного рассмотрения оценками, можно опираться на соотношение (14.4), которое мы также приведем здесь:

$$\mathbf{E} = -\gamma \nabla p. \quad (19.2\text{в})$$

В зависимости от того, что будет в центре нашего внимания, мы будем пользоваться одним из этих трех вариантов и, конечно, сравнивать результаты.

Полное давление в недрах планеты можно разбить на две части:

$$p = p_r + p_n. \quad (19.3)$$

Первая из них  $p_r$  обусловлена собственным гравитационным полем планеты; как и выше (см. §6), будем считать, что  $p_r = \frac{GMr}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2} g r R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ .

Порождаемую приливным воздействием добавку к  $p_r$  можно записать в виде

$$p_n = \frac{G\tau m}{2R_0^3} \{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2 - r^2\} \approx \frac{3GMm}{8\pi R_0^3 R^3} \{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2 - r^2\}, \quad (19.4)$$

если, как то обычно делается, предполагать, что выполняется равновесное условие  $\mathbf{f}_n = \operatorname{grad} p_n$ .

Поскольку в обсуждаемой здесь задаче нелинейные эффекты заведомо малы, можно и полную напряженность бароэлектрического поля представить как  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_n$ , где  $\mathbf{E}_r$  создается благодаря гравитационному полю самой планеты, а  $\mathbf{E}_n$  — благодаря приливным воздействиям. Выпишем здесь выражения для  $\mathbf{E}_r$ , полученные выше на базе условий (19.2):

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{i}_r E(r), \quad E(r) = \frac{3GM^2 r}{4\pi R^5} \sqrt{\frac{\pi}{B} \left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right)}, \quad (19.5a)$$

$$E(r) = \frac{3GM^2 r}{4\pi R^5} \sqrt{\frac{\pi}{B} \left( \frac{2}{3} - \frac{r^2}{R^2} \right)}, \quad (19.25)$$

$$E(r) = \gamma \frac{3GM^2 r}{4\pi R^5}. \quad (19.2в)$$

Напомним, что эти оценки, особенно последняя, не могут претендовать на высокую точность, хотя они дают порядки величин, завышенные по сравнению с тем, что получается в рамках микроскопического подхода, довольно незначительно (на один порядок).

Выражения (19.5) относятся, естественно, к напряженности бароэлектрического поля внутри планет. Поле над поверхностью планеты-шара в обсуждаемой нами модели отсутствует, поскольку шар предполагается электронейтральным.

Если же включить в рассмотрение приливные силы, то они приведут еще и к созданию «приливного» бароэлектрического поля  $E_n$ , которое захватывает и внешнюю область. Пользуясь условием (19.5а) и подставляя для  $W$  упрощенное выражение  $\frac{p^2}{2B}$ , приходим к равенству

$$\text{grad} \left\{ \frac{p_n^2}{2B} + \frac{p_n p_r}{B} + \frac{(E_n \cdot E_r)}{4\pi} + \frac{E_n^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (19.6)$$

поскольку

$$\text{grad} \left\{ \frac{p_r^2}{2B} + \frac{E_r^2}{8\pi} \right\} = 0.$$

Члены  $E_n^2/\pi$  и  $p_n^2/2B$  можно отбросить как малые поправки. Последнее, впрочем, нуждается в некотором разъяснении. Дело в том, что  $p_n$  возрастает при  $r \rightarrow R$ , тогда как  $p_r$ , наоборот, убывает и обращается в нуль при  $r = R$ . Однако уже на ничтожно малых глубинах порядка нескольких межатомных расстояний произведение  $p_n p_r$  становится существенно большим, чем  $p_n^2/2$ , что и позволяет пренебрегать членом  $p_n^2/2B$ . Поэтому можно записать

$$(E_r \cdot E_n) \equiv E_r (E_n)_r = 4\pi \left\{ \text{const} - \frac{p_r p_n}{B} \right\}. \quad (19.7)$$

Постоянную интегрирования  $\text{const}$  нужно положить равной нулю, так как  $E_r$  и  $p_r p_n$  обращаются в нуль при  $r = 0$ . Отсюда

$$(E_n)_r \equiv \varepsilon_r = -\frac{4\pi}{E_r B} p_r p_n. \quad (19.8)$$



Подставляя выражения для  $E_r$  и  $p_r p_n$ , получим

$$\mathcal{E}_r = -\frac{3GMm\alpha(1-x^2)}{4R_0^3 R \sqrt{\pi B(2-x^2)}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (19.9)$$

где  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/R$ ,  $\cos \theta = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$ ,  $r \leq R$ , т. е. полученное выражение относится к области внутри планеты.

Перейдем теперь к нахождению горизонтальной компоненты напряженности приливного бароэлектрического поля внутри планеты. Зададим положение точки в планете с помощью сферических координат  $r$ ,  $\theta$ ,  $\chi$ . Учтем, что из соображений симметрии

$$(\mathbf{E}_n)_\chi = 0, \quad \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_r(r, \theta), \quad \mathcal{E}_\theta = \mathcal{E}_\theta(r, \theta)$$

и запишем в этих координатах уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E}_n = 0$  в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{E}_\theta) = \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \theta},$$

Проинтегрировав его и выбирая постоянную интегрирования так, чтобы  $\mathcal{E}_\theta$  было конечным при  $r = 0$ , получим

$$\mathcal{E}_\theta = \frac{3GMm}{2R_0^3 R x \sqrt{\pi B}} \left\{ (1+x^2)\sqrt{2-x^2} - \sqrt{2} \right\} \sin \theta \cos \theta. \quad (19.10)$$

Похожий результат мы получили бы, беря за основу условие (19.26). Перепишем это условие, учитывая, что

$$\nabla \left( \frac{p_r^2}{2B} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_r \text{div } \mathbf{E}_r = 0$$

и отбрасывая члены  $\nabla \left( \frac{p_n^2}{2B} \right)$  и  $\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_n \text{div } \mathbf{E}_n$  как малые поправки:

$$\nabla \left( \frac{p_n p_r}{B} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_r \text{div } \mathbf{E}_n + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_n \text{div } \mathbf{E}_r = 0. \quad (19.11)$$

Подставляя для  $\mathbf{E}_r$  выражение (19.26) и приравнивая по отдельности радиальные и  $\theta$ -компоненты, получим

$$\frac{3GMm}{2R_0^3 R \sqrt{2\pi B}} x(1-2x^2)(3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1-x^2}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{4}}} \mathcal{E}_r + x \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{4}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \mathcal{E}_r) + \frac{9GMm}{2R_0^3 R \sqrt{2\pi B}} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{4}} (3 \cos^2 \theta - 1) \right\} = 0 \quad (19.12)$$

и

$$\frac{54G^2 M^3 m}{64\pi^2 R_0^3 R^6 B} x(1-x^2) \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{4\pi} \mathcal{E}_\theta \frac{3GM^2(1-x^2)}{2R^5 \sqrt{2\pi B} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{4}\right)} = 0. \quad (19.13)$$

Последнее уравнение особенно интересно: оно дает возможность непосредственно определить горизонтальную компоненту напряженности приливного поля  $E_n^{\text{гориз}} \equiv \mathcal{E}_\theta$ :

$$\mathcal{E}_\theta = \frac{9GMmx \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{4}}}{2R_0^3 R \sqrt{2\pi B}} \sin \theta \cos \theta. \quad (19.14)$$

Поскольку горизонтальная компонента имеется только у  $E_n$  и поскольку эта — тангенциальная — компонента напряженности непрерывна, то непосредственно над поверхностью планеты

$$\mathcal{E}_\theta \Big|_{R+0} = \frac{9GMm}{4R_0^3 R \sqrt{6\pi B}} \sin \theta \cos \theta. \quad (19.15)$$

Полученная таким образом зависимость от угла  $\theta$  свидетельствует о том, что в области над поверхностью планеты «приливное» электрическое поле имеет квадрупольную структуру. Если к тому же учесть, что поле  $E_r$  вообще не проникает во внешнюю область, т.е. над поверхностью планеты остается только поле  $E_n$ , то напряженность общего электрического поля над поверхностью планеты можно представить в виде

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathcal{K} \left\{ \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}}{r^5} - 5\mathbf{r} \left( \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2 - r^2}{2r^7} \right) \right\}. \quad (19.16)$$

Постоянная  $\mathcal{K}$  находится из (19.15). Действительно, учитывая, что  $n_\theta = -\sin \theta$ ,  $n_r = \cos \theta$ , можно записать

$$(\mathbf{E}_{\text{ext}}(R+0))_\theta = -\frac{3\mathcal{K}}{R^4} \sin \theta \cos \theta. \quad (19.17)$$

Поэтому

$$\mathcal{K} = -\frac{3GMmR^3}{4R_0^3\sqrt{6\pi B}}. \quad (19.18)$$

Непосредственно над поверхностью планеты вертикальная и горизонтальная компоненты «приливного» электрического поля таковы:

$$E_{\text{ext}}^{\text{верт}} = -\frac{3\mathcal{K}}{2R^4}(3\cos^2\theta - 1); \quad E_{\text{ext}}^{\text{гориз}} = -\frac{3\mathcal{K}}{2R^4}\sin 2\theta. \quad (19.19)$$

Первый из рассматривавшихся выше вариантов дал бы для  $E_{\text{ext}}$  выражение, почти не отличающееся от (19.18) — различие лишь в  $\frac{3}{4\sqrt{6}}$  раза в коэффициенте  $\mathcal{K}$ , что при достижимой в наших оценках точности (только лишь по порядку величины) несущественно.

Полученные выражения для напряженности «приливного» электрического поля основываются на использовании «феноменологического» подхода, который, как отмечалось выше, приводит к оценкам для  $E_{\text{п}}$ , завышенным примерно на один порядок по сравнению с более точными квантовыми оценками. Поэтому уместно ввести корректирующий множитель порядка  $10^{-1}$ . Введение такого множителя можно оправдать также и тем, что модуль всестороннего сжатия, который выше для простоты считался постоянным, в действительности возрастает по мере приближения к центру планеты.

Перейдем теперь к этим оценкам. Подставляя округленные значения нужных параметров: масса Земли  $M_{\oplus} \approx 6 \cdot 10^{27}$  г, масса Солнца  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33}$  г, масса Луны  $\approx 3,75 \cdot 10^{25}$  г, радиус Земли  $R_{\oplus} \approx 6,4 \cdot 10^8$  см, радиус Луны  $\approx 1,788 \cdot 10^7$  см, расстояние от Луны до Земли  $\approx (3,84 \pm 0,22) \cdot 10^{10}$  см, расстояние от Солнца до Земли  $\approx (1,496 \pm 0,025) \cdot 10^{13}$  см, получаем для отношения  $3\mathcal{K}/(2R^4)$  значения:

- для Земли благодаря приливному воздействию Солнца  $(126 \pm 6)$  В/м;
- для Земли благодаря приливному воздействию Луны  $(142 \pm 23)$  В/м;
- для Луны благодаря приливному воздействию Земли  $(5\,238 \pm 857)$  В/м.

Поправка к напряженности поля на Луне, обусловленная приливным воздействием Солнца составляет всего лишь  $\sim 5\%$ , и мы ее поэтому учитывать не будем.

Поле над поверхностью Земли, вызванное приливным воздействием как Солнца, так и Луны, является переменным. Наиболее быстрые изменения связаны с суточным вращением Земли, из-за которого меняется со временем направление вектора  $\mathbf{n}$  по отношению к земному наблюдателю. Для начала посмотрим, как выглядели бы эти изменения, если бы мы учитывали только поле, вызываемое воздействием Луны. Введем такие обозначения:  $\theta_0$  — угол между направлениями векторов  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ ;  $\alpha$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{r}$ , определяющего положение точки наблюдения, и направлением  $\boldsymbol{\omega}$  (угол широты, который, однако, в отличие от принятого в географии, отсчитывается не от плоскости экватора, а от полярной оси);  $\psi$  — угол долготы, который удобно определять так, чтобы при  $t = 0$  вектор  $\mathbf{n}$  лежал в плоскости  $\psi = 0$ . Тогда

$$\cos \theta = \sin \theta_0 \sin \alpha \cos(\omega t + \psi) + \cos \theta_0 \cos \alpha. \quad (19.20)$$

Подставляя это выражение, выпишем  $E_{\text{ext}}^{\text{берт}}$  на основе (19.15) и (19.18):

$$\begin{aligned} E_{\text{ext}}^{\text{берт}}(R) &= \\ &= \frac{9GMm}{8R_0^3 R \sqrt{6\pi B}} \left\{ 3(\sin \theta_0 \sin \alpha \cos(\omega t + \psi) + \cos \theta_0 \cos \alpha)^2 - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (19.21)$$

Вертикальная компонента напряженности приливного поля имеет постоянную часть, т. е. часть, не зависящую ни от времени, ни от положения точки наблюдения, направленную вниз и имеющую величину порядка  $10^2$  В/м. Но и эта часть может быть названа постоянной лишь с оговорками: она подвержена относительно медленным изменениям во времени, связанным с изменением расстояния  $R_0$  от Земли до источника приливной силы. Иначе говоря, помимо суточных изменений приливного поля, имеющих как одинарную  $\omega$ , так и двойную  $2\omega$  частоты, существуют еще и вариации  $E_{\text{ext}}$  с периодами в один лунный месяц и в один земной год из-за изменений  $R_0$ . Последние таковы, что нашей зимой, когда Земля ближе к Солнцу, поле должно быть больше, чем летом, на  $\sim 10\%$ . Это наиболее отчетливо показано в работе Н. А. Парамонова (см. [65]). Еще значительней — порядка  $24\%$  — вариации поля из-за изменения расстояния между Землей и Луной. Зависимым от времени оказывается и угол  $\theta_0$ , что также дает вклад в изменения  $E_{\text{ext}}$ .

Горизонтальная составляющая  $E_{\text{ext}}^{\text{гориз}}$  не имеет не зависящей от  $t$  части, так что в среднем по времени она везде равна нулю, хотя в каждый фиксированный момент она может быть отличной от нуля и зависит от положения точки наблюдения. Здесь напрашивается вопрос о связи с теллурическими токами и полями, что, однако, требует особого рассмотрения.

Первым делом отметим, что нередко различные (а порой одни и те же) авторы утверждают, что геоэлектрические поля над поверхностью Земли имеют лишь нормальную (радиальную) компоненту, а напряженность электротеллурического поля — горизонтальную. Такие утверждения несовместимы, поскольку тангенциальная составляющая напряженности электрического поля, как известно, непрерывна на границах раздела сред.

В действительности же как и над, так и под поверхностью Земли эта горизонтальная компонента одинакова, но было бы ошибочным привлекать непосредственно закон Ома для вычисления плотности теллурических токов. Как уже многократно подчеркивалось выше, этот закон неприменим для безваттных бароэлектрических полей.

Согласно правилу Вольты такие поля могут порождать токи только в тех случаях, когда существуют нестационарные сторонние источники воздействий, т. е. если поле нестационарно.

Как видно из (19.10), из-за суточного вращения Земли  $E_{\theta}$  зависит от времени, так что токи индуцируются, но, повторим, их плотность не связана с напряженностью электрического поля законом Ома.

В силу закона сохранения заряда  $\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j}_n$  зависимость от времени той части плотности заряда  $\rho_n$ , которая обусловлена приливными воздействиями (а от времени зависит только она), связана с «приливыми» токами плотности  $\mathbf{j}_n$ . Поскольку от времени зависит только  $\rho_n$ , приливно-индукционная часть плотности тока совпадает с полной плотностью  $\mathbf{j}$ .

Для нахождения  $\mathbf{j}$  проще всего двигаться таким путем. Вспомним, что в линейном по  $\beta$  приближении плотность заряда  $\rho_n$  одинакова как в системе отсчета, вращающейся вместе с планетой, так и в инерциальной системе, в которой скорость центра массы планеты равна нулю. Но в последней вектор  $\mathbf{n}$  постоянен (если не учитывать медленного изменения взаимного расположения планеты и спутника — источника приливной силы), так что приливных токов в этой системе не существует. Для земного же наблюдателя все приливное распределение зарядов вращает-

ся с угловой скоростью  $-\omega$ , т.е. существуют токи, плотность которых (опять-таки, в линейном по  $\beta$  приближении)

$$\mathbf{j}_n = \rho_n[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}] \approx \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}_n[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (19.22)$$

Учитывая (19.9) и (19.10), получим:

$$\rho_n = \frac{3GMm}{4\pi R_0^3 R^2 \sqrt{\pi B}} \times \left\{ -\frac{3 - 6x^2 + 2x^4}{(2 - x^2)^{3/2}} + \frac{(1 + x^2)\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{2}}{x} \right\} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (19.23)$$

Заметим, что это выражение остается конечным при всех  $x$ , а при  $x \rightarrow 1$  имеет пределом

$$\rho_n \Big|_{x \rightarrow 1} = \frac{3GMm(3 - \sqrt{2})}{4\pi R_0^3 R^2 \sqrt{\pi B}} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (19.24)$$

Таким образом, вблизи поверхности планеты часть плотности зарядов, обязанная приливному воздействию, оказывается положительной, если  $\cos^2 \theta > 1/3$  и отрицательной при остальных значениях  $\theta$ .

Кроме объемных, существуют и поверхностные заряды, а следовательно, и поверхностные токи. Плотность этих поверхностных токов  $\mathbf{J}_{\text{пов}} = \rho_{\text{пов}}[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}]$ , где поверхностная плотность зарядов  $\rho_{\text{пов}}$  определяется скачком нормальной составляющей напряженности электрического поля на поверхности планеты.

Еще один подход к вопросу о теллурических токах можно непосредственно связать с тем, как они исследуются экспериментально.

В землю помещаются (обычно на сравнительно небольшую глубину) два электрода, и измеряется электрический ток, протекающий по соединяющему их проводу. Чтобы вычислить силу этого тока, необходимо, вообще говоря, знать сопротивление заземления электродов и сравнить его с сопротивлением всей наземной части установки (проводов и измерительной аппаратуры). Если, как это часто бывает, это внешнее сопротивление значительно меньше сопротивления заземления, то первым вообще можно пренебречь. Тогда для нахождения тока во внешней

цепи установки нужно вычислить заряды на электродах и определить, как они меняются за единицу времени.

Опять повторим, что этот ток отнюдь не определяется непосредственно разностью потенциалов электродов. Если, например, эта разность потенциалов не равна нулю, но не зависит от времени, то никакого тока не возникает, что является прямым проявлением действия правила Вольты.

Для определения силы тока  $I$  в соединяющем электроды проводе нужно найти заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  на первом и втором электродах и, если известна зависимость этих зарядов от времени, то

$$I = \frac{dQ_1}{dt} - \frac{dQ_2}{dt}.$$

Если принять, что емкости электродов порядка их размеров  $l_1$  и  $l_2$  и, к тому же, эти размеры много меньше расстояния между электродами и пространственного масштаба неоднородности приливного бароэлектрического поля, то величины зарядов на электродах можно оценить как  $Q_{1,2} \approx l_{1,2} \rho_{1,2}$ , где  $\rho_1, \rho_2$  — плотности зарядов в тех местах, где помещены электроды. При этом, конечно, вклад в  $I$  дают только те части плотностей зарядов, которые зависят от времени; следовательно, та часть плотности заряда, которая связана с воздействием собственного гравитационного поля планеты, может не учитываться вовсе, так что можно считать  $\rho = \rho_{\text{п}}$ .

Пользуясь уравнением Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ , вновь получим для плотности заряда выражение (19.23). Вблизи поверхности планеты, т. е. при  $x \rightarrow 1$ ,  $\rho_{\text{п}}$  определяется формулой (19.24). В выражениях для  $Q_1$  и  $Q_2$  от положения точки наблюдения (точки 1 или 2) зависят только значения  $\cos \theta$ . Таким образом,

$$\frac{dQ_{1,2}}{dt} \sim \frac{\partial}{\partial t} \cos^2 \theta_{1,2}. \quad (19.25)$$

Обсудим два варианта: в первом из них электроды располагаются в меридиональной плоскости, во втором — на одинаковой широте. Если обозначить географическую широту и долготу соответственно  $\alpha$  и  $\psi$  (при этом  $\alpha$  отсчитывается не от плоскости экватора, а  $\psi$  от направления вектора угловой скорости  $\omega$  планеты), то в первом варианте различными являются широты точек расположения электродов, а во втором — их долготы.

Поскольку  $\cos \theta = \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} \right)$ , при координатах  $\alpha, \psi$  точки наблюдения

$$\cos \theta = \sin \theta_0 \sin \alpha \cos(\omega t + \psi) + \cos \theta_0 \cos \alpha$$

(где  $\theta_0$  — угол между направлениями векторов  $\omega$  и  $n$ ). Это соответствует уже упоминавшемуся предположению о постоянстве вектора  $R$ .

Полагая, что расстояние между электродами много меньше  $R$ , можно записать в первом и втором варианте токи

$$I^{(I)} = K \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \cos^2 \theta}{\partial \alpha} =$$

$$= -K\omega \{ \sin^2 \theta_0 \sin 2\alpha \sin 2(\omega t + \psi) + \sin 2\theta_0 \cos 2\alpha \sin(\omega t + \psi) \}, \quad (19.26a)$$

$$I^{(II)} = K \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \cos^2 \theta}{\partial \psi} d\psi =$$

$$= K\omega \left\{ 2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \alpha \cos(2(\omega t + \psi)) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \sin 2\alpha \cos(\omega t + \psi) \right\}, \quad (19.26b)$$

где  $K = 9GMmV(3 - \sqrt{2}) / (2\pi R_0^3 R^2 \sqrt{\pi B})$ .

Отметим, что в выражениях для  $I^I$  и  $I^{II}$  есть члены, изменяющиеся как с частотой  $\omega$ , так и с частотой  $2\omega$ . Это обстоятельство уже давно было установлено наблюдениями (см., например, [64]). Частоты более высокой кратности, как показывают эти наблюдения, дают относительно малые вклады. При нашем упрощенном рассмотрении они вообще не учитываются.

Вся картина распределения меридиональных и широтных токов получается перемещающейся относительно земного наблюдателя в восточном направлении, что также известно из наблюдений [65]. Находит отражение и известный факт зависимости токов от широты  $\alpha$  точки наблюдения.

Проведенное выше рассмотрение теллурических токов является заведомо неполным, оно преследует лишь методический интерес и поэтому не учитывает ряда факторов (приливного воздействия Солнца, локальных погодных эффектов и т. д.).

Перечисленные выше особенности приливного электрического поля на Земле естественно наводят на мысль о «поле ясной погоды». Повторим, что оно традиционно объясняется наличием у Земли электрического (отрицательного) заряда. Изложенное выше показывает, что необходимости в привлечении к рассмотрению гипотезы о таком заряде нет: мы пользовались моделью, в которой планета предполагается электронейтральной.

Конечно же, эта модель во многом упрощенная. В ней, в частности, не учитывается атмосфера Земли и те процессы в



ней, которые влияют на геоэлектрическое поле. Это, кстати, еще раз говорит о том, что никаких «генераторов заряда» на Земле мы не рассматриваем, в чем, впрочем, обсуждаемый нами подход и не нуждается: полный заряд остается постоянно нулевым. Заметим, что именно поле ясной погоды в наименьшей мере подвержено влиянию процессов, протекающих в атмосфере, так что обсуждение, основанное на принятой нами модели, подходит более всего именно для поля ясной погоды. Чтобы подкрепить это утверждение, приведем несколько цитат:

1. «Результаты измерений суточных вариаций градиента потенциала в хорошую погоду существенно отличаются друг от друга в разных частях земного шара < ... > На большинстве наземных станций время максимумов и минимумов градиента потенциала зависит от местного времени < ... > Во многих случаях имеются двойные колебания градиента потенциала ...» [49, с. 130–131]. «Суточный ход напряженности поля над континентами имеет вид двойной волны. Величина максимумов и минимумов поля и его средние значения различны для разных станций» [65, с. 596]. Эти факты находят объяснение в изложенном выше.

2. «Суточный ход напряженности поля над океанами и полярными областями имеет вид одинарной волны, причем изменения поля в разных точках происходят синхронно, по единому универсальному времени с относительно постоянными амплитудами и средними значениями» [65].

Указанные особенности временного хода напряженности поля ясной погоды над океанами, насколько нам известно, еще не получили объяснения. Попытаемся его предложить.

Обсуждавшаяся выше модель рассматривает Землю как проводящий шар. Но поверхность планеты состоит из твердых материков и жидких океанов. Рассмотрим, какие изменения в рассмотренной картине привносятся учетом океанов. Покажем, что простейшая модель, учитывающая наличие океана, покрывающего часть поверхности планеты, способна отразить существенные черты процесса формирования поля ясной погоды.

Примем для простоты, что океан покрывает половину поверхности планеты. Как это повлияет на бароэлектрическое поле над планетой?

Под действием горизонтальной составляющей бароэлектрического поля над поверхностью планеты (а значит, ввиду непрерывности тангенциальной компоненты напряженности, и в при-

поверхностной области планеты), возникают силы, создающие горизонтальные потоки проводящей воды в океанах. Хотя эти силы меняются со временем довольно медленно (с полусуточным периодом), возникающие потоки жидкости успевают привести к тому, что горизонтальные градиенты давлений исчезают. К тому же, из-за горизонтального бароэлектрического поля, имеющего место до установления динамического равновесия, возникают и ионные электрические токи, что также приводит к ослаблению, а затем и к исчезновению горизонтальной компоненты напряженности бароэлектрического поля. Остающаяся же вертикальная компонента (при нулевой горизонтальной!) приводит к тому, что заряды оказываются распределенными по поверхности равномерно, так что напряженность электрического поля над всеми участками океана оказывается одинаковой.

Одинаковой, но не постоянной! Дело в том, что переменной является плотность поверхностных зарядов части планеты, покрытой океанами. Поясним это.

Полный заряд планеты, напомним, принят равным нулю, поэтому полный заряд на поверхности океанов по модулю равен, а по знаку противоположен заряду на поверхности континентов. Поскольку распределение приливных давлений внутри континентов можно считать слабо зависящим от наличия океанов, поверхностную плотность зарядов можно по-прежнему определять по приведенным выше формулам. Полный заряд на поверхности континента в обсуждаемой модели равен

$$Q = R^2 \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha \int_0^\pi d\psi \sigma(\alpha, \psi). \quad (19.27)$$

Поле, порождаемое равномерно распределенными по поверхности зарядами, над океанами получается имеющим только вертикальную составляющую, (приближенно равную  $-Q/2r^2$ ), синхронно изменяющуюся с частотой  $\omega$  — то, что часто именуют «простой волной». Над континентами же вертикальная составляющая напряженности приливного поля имеет как постоянную часть, не зависящую ни от времени, ни от координат точки наблюдения и направленную вниз, так и переменные части, меняющиеся с частотами  $\omega$  и  $2\omega$  (простая и двойная волна); их амплитуды зависят от положения точки наблюдения.

Отметим в заключение, что наличие корреляций между изменениями поля ясной погоды и грозовой активностью вряд ли

можно считать доказательством грозовой природы регенерации заряда Земли (в нашем рассмотрении этот заряд нулевой), скорее наоборот, изменение грозовой активности следует рассматривать как следствие вариации геоэлектрического поля.

Перейдем к рассмотрению селеноэлектрического поля.

Поле, возникающее над поверхностью Луны из-за приливного действия Земли, во многом непохоже на земное. Прежде всего, его максимальная напряженность на порядок больше, чем на Земле. Почти на два порядка больше там и амплитуда изменений напряженности электрического поля, вызываемых то приближением, то удалением Луны от Земли. Далее, из-за того, что Луна обращена к Земле всегда одной и той же стороной, отсутствуют суточные вариации электрического поля, поскольку по отношению к наблюдателю в собственной системе отсчета Луны направление вектора  $\mathbf{n}$  не меняется.

Вернемся, однако, к «приливному» электрическому полю над поверхностью Земли.

Поля, возникающие благодаря приливным влиянием Луны и Солнца, дают в сумме довольно сложную и прихотливо изменяющуюся со временем общую картину. Наклонение экватора Земли к ее орбите примерно  $23,5^\circ$ , что определяет «солнечное» значение угла  $\theta_0$ . Наклонение орбиты Луны к эклиптике  $\sim 5^\circ$ , так что «лунное» значение угла  $\theta_0$  получается переменным — оно зависит от времени лунного месяца и изменяется в пределах (округленно) от  $18,5$  до  $28,5^\circ$ .

Вопрос о бароэлектрических полях, возникающих над поверхностью планет благодаря испытываемым ими приливным воздействиям более подробно рассматривается в §24.

Если на планету массы  $M$  и радиуса  $R$  действует приливно-сила со стороны единственного источника приливно-воздействия — тела массы  $m$ , расстояние  $R_0$  от центра которого до планеты значительно больше ее радиуса, то вызываемое приливным воздействием перераспределение давлений в недрах планеты порождает непосредственно над поверхностью планеты электрическое поле, вертикальная и горизонтальная составляющие которого (без учета влияния атмосферы) равны соответственно

$$E_r = T \frac{Mm}{R_0^3 R} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad E_\theta = T \frac{Mm}{R_0^3 R} \sin 2\theta. \quad (19.28)$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{R}_0$ , соединяющего центры спутника и центру планеты, и вектора  $\mathbf{r}$ , определяющего положение точки наблюдения на поверхности планеты.

Множитель  $T$  выражается через гравитационную постоянную и упругий модуль  $B$  (см. формулу (19.19)), и по этой причине он различен для разных планет. Но поскольку это различие — в пределах одного порядка величины, можно для первых, пусть достаточно грубых оценок принять для  $T$  усредненное значение  $T \sim 10^{-17}$  (в абсолютной гауссовой системе единиц).

Приведенные формулы показывают, что и вертикальная, и горизонтальная компоненты напряженности приливного бароэлектрического поля над поверхностью планеты зависят от положения точки наблюдения и, если учесть вращение планеты, от времени.

Имеются и изменения компонент напряженности, определяемые зависимостью  $R_0$  от времени. Правда, у вертикальной составляющей напряженности  $E_r$  есть и постоянная (не зависящая ни от времени, ни от места наблюдения) часть, направленная вниз, как если бы поле порождалось отрицательным электрическим зарядом, равномерно распределенным по поверхности планеты. Именно только она и остается, если иметь в виду усредненные по времени компоненты напряженности поля.

Вполне понятно, что приливные электрические поля тем больше, чем массивнее источник приливного воздействия и чем ближе он расположен. Если таких источников несколько, то порождаемые их действием электрические поля накладываются, а нелинейные эффекты обычно можно не учитывать.

Как хорошо видно, в частности, на примере Земли и Луны, или Юпитера и его ближайшего спутника Ио, процесс приливного индуцирования электрических полей является в определенной мере взаимным. Этот процесс затрагивает не только планеты, но и звезды.

Задача изучения электрических полей небесных тел до настоящего времени никем не решалась. Более того, такая задача фактически даже никем и не формулировалась. Одна из наших целей — привлечь внимание физиков, планетологов, астрофизиков, а также исследователей в области космонавтики к многочисленным открывающимся здесь научным и техническим проблемам. Пока еще не предпринимаются попытки исследований электрических полей хотя бы на некоторых ближайших к Земле небесных телах прямыми методами, т. е. при помощи приборов, доставленных космическими аппаратами на поверхность этих тел, уместно обсудить возможности дистанционных методов исследования. К этому вопросу мы вернемся ниже.

Параграф, посвященный приливным эффектам, мы дополним обсуждением еще одного любопытного наблюдения.

В работе Э. С. Казимировского и Г. К. Матафанова [69] приведены полученные в результате спутниковых наблюдений оригинальные данные о неоднородностях распределения общего содержания озона над поверхностью Земли. По этим данным в областях, простирающихся полосами вдоль береговых линий континентов, отмечается заметное понижение общего содержания озона. Замеченные авторами [69] факты не получали ранее теоретического объяснения и даже воспринимались порой с сомнением. Здесь мы предлагаем не только вариант качественного объяснения фактора указанной неоднородности распределения озона, но и его связи с давно и надежно установленными явлениями, касающимися геоэлектрического поля.

Как уже отмечалось выше, поле ясной погоды над континентами и над океанами меняется со временем по-разному: над континентами — двойная волна, над океанами — одинарная. Благодаря этому различию на границах между континентами и океанами возникают направленные горизонтально и зависящие от времени градиенты напряженности электрического поля, а значит, и направленные горизонтально силы, действующие на неионизированные атомы и молекулы (в том числе, и молекулы озона, обладающие, заметим, дипольным электрическим моментом порядка  $2 \cdot 10^{-30}$  Кл · м).

Благодаря этому озон должен частично «выдуться» из тех пограничных между континентами и океанами областей, где такие направленные горизонтально силы проявляются в наибольшей степени.

Над поверхностью Земли амплитуда изменений горизонтальной компоненты напряженности приливного электрического поля — порядка  $10^2$  В/м. Напряженность этого поля по (19.16) убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния от центра Земли. Согласно наблюдениям, озоновый слой располагается на высоте  $h \approx 30 \div 35$  км, так что напряженность электрического поля уменьшается по сравнению с приповерхностной всего лишь примерно в  $1 - 4h/R$  раз, т. е. на 0,5%.

Таким образом, в качестве одной из причин возникновения географических неоднородностей в распределении общего содержания озона может выступать отмеченное выше различие в зависимости от времени геоэлектрических полей над континентами и океанами.

## §20. Приливные вариации магнитного поля

Как было показано выше, для напряженности электрического поля над поверхностью планеты рассмотренные нами варианты описания дают близкие выражения, которые мы запишем в виде

$$\mathbf{E} = \mathcal{K} \left\{ \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}}{r^5} - \frac{5}{2} \mathbf{r} \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2 - r^2}{r^7} \right\}, \quad \text{где } \mathcal{K} \approx \frac{9GMmR^3}{4\pi R_0^3 \sqrt{B}}. \quad (20.1)$$

Знак приближенного равенства напоминает, что оценки и здесь довольно грубы, так что уместно говорить лишь о порядках величин.

«Приливные» вариации магнитного поля проще всего исследовать, используя законы преобразования напряженностей электрического и магнитного полей.

Напомним, что усредненные по физически бесконечно малым объемам напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей (ранее мы обозначали последнее как вектор  $\mathbf{B}$ , но теперь изменим обозначение, чтобы не нарушать связи с предыдущим текстом) объединяются в ковариантный тензор поля

$$F_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (20.2)$$

При переходе из собственной (вращающейся) системы отсчета  $\mathcal{K}'$  планеты в систему отсчета ее центра масс  $\mathcal{K}$  (мы будем считать ее инерциальной) координаты и время преобразуются таким образом:

$$\begin{aligned} x^1 &= x'^1 \cos \alpha' - x'^2 \sin \alpha', & x^2 &= x'^1 \sin \alpha' + x'^2 \cos \alpha', \\ x^3 &= x'^3, & x^0 &= ct = ct' = x'^0, \\ x'^1 &= x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha, & x'^2 &= -x^1 \sin \alpha + x^2 \cos \alpha, \\ \alpha &= \frac{\omega}{c} x^0, & \alpha' &= \frac{\omega}{c} x'^0. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Выпишем еще формулы преобразования компонент ко- и контравариантного тензора поля, учитывая, что в  $\mathcal{K}$  магнитное поле отсутствует, т. е.  $\mathbf{H} = 0$ .

Компоненты ковариантного тензора поля:

$$\begin{aligned}
 F'_{11} = F'_{22} = F'_{33} = F'_{00} = 0, \quad F'_{nm} = -F'_{mn}, \\
 F'_{10} = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha, \quad F'_{20} = -E_x \sin \alpha + E_y \cos \alpha, \\
 F'_{30} = E_z, \quad F'_{12} = F'_{13} = F'_{23} = 0. \quad (20.4)
 \end{aligned}$$

Компоненты контравариантного тензора поля:

$$\begin{aligned}
 F'^{11} = F'^{22} = F'^{33} = F'^{00} = 0, \quad F'^{nm} = -F'^{mn}, \\
 F'^{10} = F'_{10}, \quad F'^{20} = F'_{20}, \quad F'^{30} = F'_{30}, \\
 F'^{31} = \frac{1}{c} [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}]_y, \quad F'^{23} = \frac{1}{c} [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}]_x. \quad (20.5)
 \end{aligned}$$

Получить (20.5) можно было бы и по-иному, а именно, поднимая индексы по известному правилу и подставляя для контравариантного метрического тензора  $g'^{nm}$  уже известное нам приближенное выражение:

$$\begin{aligned}
 g'^{00} = 1, \quad g'^{11} = g'^{22} = g'^{33} = -1, \quad g'^{01} = g'^{10} = \frac{\omega}{c} x'^2, \\
 g'^{02} = g'^{20} = -\frac{\omega}{c} x'^1, \quad g'^{03} = g'^{30} = g'^{31} = g'^{13} = g'^{23} = g'^{32} = 0. \quad (20.6)
 \end{aligned}$$

Поскольку компоненты вектора  $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$  уже найдены, остается, подставив для напряженности «приливного» поля выражение

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c} [\mathbf{E} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})], \quad (20.7)$$

получить

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}' = \frac{\mathcal{P}}{c} \left\{ -\frac{9\omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^5} - \frac{3r(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \frac{3\boldsymbol{\omega}}{2r^3} - \frac{3r(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}{2r^5} + \right. \\
 \left. + \frac{15r(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^7} \right\}. \quad (20.8)
 \end{aligned}$$

По отдельности выпишем вертикальную  $H'_r$  и горизонтальную  $H'_\theta$  компоненты напряженности «приливного» магнитного поля над поверхностью планеты:

$$\begin{aligned} H'_r &= \frac{3P\omega}{cr^3} \{ \cos \alpha \cos^2 \theta - \cos \theta_0 \cos \theta \}, \\ H'_\theta &= -\frac{3P\omega}{2cr^3} \{ 3 \cos^2 \theta - 1 \} \sin^2 \alpha, \end{aligned} \quad (20.9)$$

где использованы уже применявшиеся выше обозначения.

Из (20.9) видно, что обе компоненты зависят от положения точки наблюдения, причем постоянная, т. е. не зависящая от времени часть есть только у горизонтальной компоненты, тогда как вертикальная компонента включает части, меняющиеся как с суточным, так и полусуточным периодами. Если же учесть и приливное воздействие на Землю Солнца, общая картина приобретает еще более прихотливый вид.

Подставляя численные значения всех необходимых параметров, можно оценить амплитуду «приливных» вариаций магнитного поля. Из таких оценок видно, что эта амплитуда оказывается порядка  $10^{-7} \div 10^{-8}$  Э. Наблюдаемые же суточные и полусуточные вариации магнитного поля на один-два порядка больше. Отсюда следует, что помимо рассмотренного существенную и даже доминирующую роль играют и другие механизмы возникновения этих вариаций. В действительности таких «механизмов» несколько, в том числе связанных с наличием у Земли приповерхностных областей ионной проводимости, с процессами в атмосфере, а также с влиянием приливных воздействий на дифференциальные внутренние движения в планете.

## §21. Об электромагнитных предвестниках землетрясений

Первые высказывания о том, что между землетрясениями и электромагнитными явлениями существует взаимосвязь, имеют почти уже вековую давность. Впрочем, если учесть, что свечение атмосферы перед землетрясениями было отмечено еще в древнем Риме в 373 г. до н. э., этот период времени существенно удлиняется. Однако эти давно замеченные явления все еще не нашли достаточно полного истолкования. Мы здесь попытаемся показать, какое отношение к этим явлениям может иметь бароэлектрический эффект.



Планета, модель которой была использована выше, предполагалась сферически симметричной. В реальной ситуации такая симметрия, конечно, нарушается и, если не ограничиваться наиболее грубым первым приближением, это обстоятельство должно учитываться. Некоторые из проявлений асимметрии сравнительно стабильны: примером тому могут быть гравитационные аномалии, распределение которых на Земле достаточно устойчиво. Особенности рельефа поверхности Земли также не подвержены, как правило, быстрым изменениям, но имеются другие быстрые изменения. В первую очередь, нужно упомянуть о тех, которые касаются распределения напряжений в земной коре, — это особенно важно для сейсмических событий.

Естественно, это отступление от сферической симметрии отражается и на форме изобар, что должно приводить к наблюдаемым и над земной поверхностью вариациям электрического и магнитного поля. Наиболее существенно здесь следующее: несферичность эквипотенциальных поверхностей, определяемая несферичностью изобар, может привести к возникновению у бароэлектрического поля внутри планеты не только вертикальной, но также и горизонтальной составляющей. Плотность электрических зарядов, возникающих благодаря БЭ, становится в этом случае функцией переменных  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\psi$ , а не только  $r$ , как то предполагалось выше. Это изменение важно хотя бы уже потому, что электрическое поле, порождаемое таким распределением зарядов, захватывает и область над поверхностью планеты, тогда как в сферически симметричном варианте, напомним, бароэлектрическое поле существует только внутри планеты и скачком обращается в нуль за ее пределами.

Локальное повышение (впрочем, и понижение) давления приводит к тому, что «избыточная» плотность энергии электронов в некоторой области увеличивается, что порождает переходы электронов из этой области в окружающие. Такое перераспределение зарядов только в одном случае — когда сохраняется центральная симметрия — не приводит к проникновению электрического поля в область над поверхностью планеты. Во всех остальных случаях появляющийся в таких локальных областях положительный заряд и отрицательные заряды окрестных областей, куда «выдавливаются» электроны, должны создавать электрическое поле, которое проявляется и над поверхностью планеты.

Появление областей «аномального» давления должно отражаться не только на бароэлектрических, но и на «баромагнитных» полях. Если локализованная область аномальных давлений покоится относительно планеты, то связанные с ней «избыточные» электрические заряды порождают в собственной системе отсчета планеты магнитное поле, которое может быть рассчитано по формулам (16.12). Заметим, что вклад в магнитное и электрическое поле от каждого заряда (как и электрическое поле, впрочем) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда, но угловые зависимости для  $E$  и  $H$  различны.

К сожалению, продвижение в этом направлении пока еще недостаточно: если слежение за магнитным полем проводится регулярно во многих пунктах, то с измерениями электрического поля дело обстоит совсем не так хорошо. Хотелось бы надеяться, что это положение в обозримом будущем исправится, на что кстати, даже не потребуются значительных затрат.

Мы упоминали выше о гравитационных аномалиях. В свете сказанного понятно, что должны существовать и коррелированные с ними магнитные и электрические аномалии. Корреляции между гравитационными и магнитными аномалиями действительно обнаружены уже довольно давно (см., например, [70–73]). Данные о корреляциях между гравитационными аномалиями и аномалиями в распределении электрического поля нам не встречались. Есть основания предполагать, что здесь опять проявляется уже упомянутая выше неполнота информации о геоэлектрическом поле вообще, хотя нужно указать и другую причину: такие исследования требуют довольно сложных методов обработки результатов измерений, поскольку напряженность электрического поля достаточно прихотливо меняется со временем.

Упомянув о гравитационных аномалиях, уместно заметить, что они часто выглядят статичными, т. е. если и меняющимися со временем, то весьма медленно. Аналогично, статичными выглядят и коррелирующие с ними магнитные (и, как вытекает из наших рассуждений, — и электрические) аномалии. Такие корреляции, по-видимому, несколько затруднительно объяснять в рамках моделей динамо, тогда как теория БЭ позволяет дать им естественное и наглядное истолкование. Упомянем в этой связи и еще об одном наблюдавшемся явлении: о локальных изменениях магнитного поля в окрестностях затопляемых водохранилищ (сведения об измерениях аналогичных изменениях электрического поля отсутствуют).

Если распределение давлений нестационарно, физические процессы, приводящие к появлению вариаций электромагнитных полей, можно разбить на две группы: к первой можно отнести «квазиравновесные» по введенной выше терминологии перераспределения зарядов, вызываемые градиентами давлений — эти перераспределения ответственны за «бароэлектрические» вариации полей; ко второй группе отнесем магнитогидродинамические механизмы появления вариаций магнитного поля, обусловленных вариациями внутренних дифференциальных движений в проводнике (мы выше фактически игнорировали эти процессы). Заметим, что электрическое поле, возникающее благодаря второй из указанных групп явлений, чаще всего выступает как вихревое, порождаемое изменениями магнитного поля, а не непосредственно зарядами, в отличие от полей кулоновского типа; такие вихревые электрические поля, порождаемые релятивистским движением  $v$ , в магнитном поле  $H$  имеют напряженность порядка  $\frac{v}{c}H$ , что может достигнуть ощутимых значений только при нереальных (для Земли, например) значениях  $v/c$ . Если же рассматривать БЭ, то здесь доминирующим становится именно электрическое поле кулоновского типа, и соотношение между  $E$  и  $H$  принимает вид  $E \approx \frac{v}{c}H$ . Указанное обстоятельство открывает путь к экспериментальному исследованию физической природы вариаций полей. Многочисленные данные, касающиеся электромагнитных предвестников землетрясений, уже дают нам важную информацию. Появление в качестве одного из предвестников электрического поля во многих случаях не вызывает сомнений. Иногда это поле оказывается столь значительным, что может даже вызывать свечение атмосферы.

Перед землетрясениями напряженности полей (здесь опять более полные данные относятся к магнитным полям) часто изменяются таким образом: вначале поле начинает возрастать, причем это возрастание происходит медленно и может значительно опережать сейсмическое событие, а непосредственно перед ним резко спадает. Такой временной ход нетрудно объяснить, если принять бароэлектрический механизм появления предвестников: постепенное локальное повышение внутренних напряжений, а затем их быстрое снятие, сопровождающееся сейсмическим событием, должно вызывать именно такую картину изменения полей во времени. И здесь уместно отметить, что объяснение этой картины при помощи других механизмов появления предвестников довольно затруднительно.

Довольно распространенным является мнение, что появление полей обязано эффектам типа пьезоэлектрических. Хотя прямой пьезоэлектрический эффект проявляется, как известно, лишь в определенных анизотропных диэлектриках, причем лишь при должным образом приложенных напряжениях, что делает маловероятной реализацию всех таких условий в природе, все же полностью сбрасывать со счетов такой механизм не следует. Более того, обсуждаемый нами бароэлектрический эффект можно — хотя это и некоторая вольность — воспринимать как «пьезоэлектрический эффект в неоднородно напряженных проводниках».

По поводу же электрических явлений, возникающих при разрушении твердых тел, хотелось бы добавить к сказанному выше следующее. То что при образовании трещин возникают перераспределения зарядов и в трещинах образуются значительные электрические поля, — все это, конечно, весьма важно для прогнозирования землетрясений; но такое прогнозирование, по видимому, чаще всего окажется кратковременным. Для долговременного прогнозирования нужно научиться замечать накопление локальных внутренних напряжений в толще Земли в тот период, когда эти напряжения еще не доходят до предела прочности, т. е. когда разрушения не начались, когда еще не возникают трещины, так что и не могут проявляться электрические процессы, сопровождающие их появление и развитие. По нашему мнению, роль БЭ делается при этом ведущей. Но и позже, когда дело уже доходит до разрушений, значение БЭ как источника полей-предвестников не уменьшается. Добавим, что экспериментальное и теоретическое исследование роли БЭ в формировании тех электродинамических процессов, которые проявляют себя на различных стадиях подготовки и протекания разрушений, пока еще даже не начиналось.

В свете сказанного выше понятно, какое большое значение могут иметь лабораторные исследования электромагнитных явлений, сопровождающих разрушение земной коры, проводимые, в частности, в ИФЗ по инициативе М. А. Садовского, равно как и работы по взрывному моделированию источников электромагнитных предвестников землетрясений. Полученные в этих направлениях результаты нашли отражение во многих публикациях, в частности они отражены в компактном виде в [60].

Появление трещин и разломов при сейсмических событиях могут вызывать проявления и еще одного эффекта, который

нужно хотя бы кратко обсудить. Как уже отмечалось выше, бароэлектрическое поле является «безваттным» и потому в статических ситуациях оно не может порождать токов. Однако если под действием внешних сил в среде возникают движения, если, в частности, одни стенки трещин начинают перемещаться относительно других, то создаются условия, напоминающие то, о чем мы выше говорили, обсуждая метод Кельвина для измерения контактных разностей потенциалов. Тогда мы пытались подчеркнуть, что даже «безваттное» электрическое поле порождает токи, если существует приток энергии в систему извне.

Бароэлектрические поля у поверхности планет, как мы постарались показать в гл. 2, весьма значительны, так что легко понять, что токи, могущие создаваться за счет движений в проводнике, пронизанном таким бароэлектрическим полем, также могут (при достаточно энергичных движениях) оказаться большими. Внешне это даже может быть подобно явлению пробоя, напоминающего подземную грозу. (Идея о подземных грозах была высказана еще в начале века. Тогда же появилась и довольно фантастическая гипотеза о том, что они могут не только сопровождать землетрясения, но и стать их причиной; согласно изложенному выше, авторы этой гипотезы меняют местами причину и следствие). «Магнитное эхо» такой «грозы» может быть замечено и над поверхностью Земли.

Помимо того, что предвестники землетрясений могут проявляться как нерегулярные вариации электрических и магнитных полей, сейсмические процессы могут сопровождаться (и иметь предшественниками) электромагнитными излучениями. Хотя сам по себе факт возникновения электромагнитных волн вполне очевиден (например, дипольное электрическое излучение, имеющее интенсивность  $I = \frac{2}{3c^3} \ddot{P}^2$  должно появляться по целому ряду причин, обуславливающих изменение во времени электрического дипольного момента  $P$ ), количественное описание этого излучения достаточно нетривиально: здесь наслаиваются и эффекты, связанные с изменением бароэлектрических полей при изменениях напряжений в коре, и уже упоминавшиеся эмиссионные процессы при образовании трещин, и, наконец, даже тонкие процессы излучения в нестационарных средах [74]. Впрочем, даже беглое перечисление затрагивает — хотя бы на уровне упоминания — далеко не все. Нельзя не напомнить, например, об электромагнитных процессах в атмосфере, заведомо дающих весьма весомый вклад в регистрируемые приемниками излучения.

Не пытаясь даже перечислить все источники электромагнитных излучений, мы хотели бы лишь обратить внимание на один из таких источников — нестационарность бароэлектрического перераспределения зарядов, которая проявляется в периоды, предшествующие сейсмическим событиям, поскольку такой эффект, насколько нам известно, ранее не обсуждался.

Протекающие в недрах Земли процессы, приводящие в конечном итоге к землетрясениям, в частности и те градиенты давлений, которые при этом возникают, могут быть весьма разнообразными, как по их временному протеканию, так и по пространственному распределению. Поэтому невозможно указать единую и универсальную «карту полей-предвестников» всех землетрясений. Однако, опираясь на представления о БЭ, можно указать некоторые общие качественные черты этих предвестников: появление постепенно и регулярно нарастающих полей  $E$  и  $H$ , а затем их резкое уменьшение. Еще раз подчеркнем, что измерения векторов  $E$  и  $H$  должны проводиться в единой шкале времени.

В завершение этого параграфа остановимся на обсуждении возможностей поляриметрических методов прогнозирования землетрясений. Поскольку такие методы прежде никем не рассматривались, остановимся на этом пункте подробнее.

Поляриметрические исследования небесных тел начались еще в XIX в., когда Доминик Франсуа Араго (см., например [75]) обнаружил, что свет Солнца, отраженный от поверхности Луны, частично поляризован, и приступил к более детальному изучению этого явления. Последующие исследования (см., например, [76–78]) поляризации при отражении от Луны, а также ряда других небесных тел (деталей Марса, Венеры, Юпитера, Сатурна и некоторых их спутников) позволили получить дополнительно весьма обширную и ценную информацию.

Поляризация при отражении от зеркальных поверхностей описывается формулами Френеля. Степень поляризации (для краткости — просто поляризация) описывается величиной

$$P = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}, \quad (21.1)$$

$I_s$  и  $I_p$  — интенсивности отраженных волн, с направлениями векторов напряженности электрического поля, перпендикулярными плоскости падения и лежащими в этой плоскости.

Поляризация света, отраженного от Луны, зависит от ее фазы и, как показывают наблюдения, может быть и отрицательной (рис. 13 и 14)

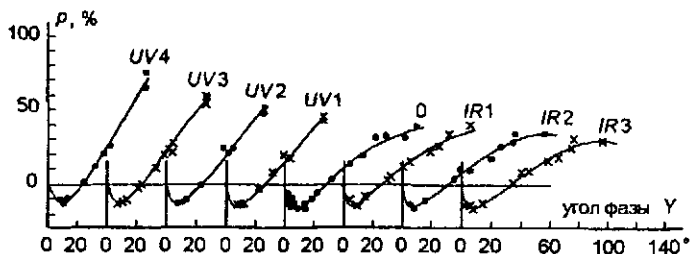


Рис. 13. Эмпирические кривые зависимости поляризации от фазы Луны для восьми значений длин волн из [76]. Область Океана Бурь (горизонтальные шкалы сдвинуты)

В настоящей работе выдвигается утверждение, что одной из основных причин этого является квадратичный эффект Керра, обусловленный существованием на Луне довольно сильного электрического поля.

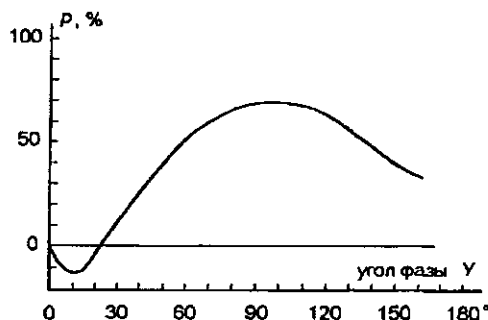


Рис. 14. Зависимость поляризации интегрального лунного света от угла фазы: (воспроизводится по [76, гл. 5, с. 159])

Такие подтверждения были бы весьма важны не только для физики планет, но и для всей проблемы барозлектричества, как прямые проверки основных ее положений.

У поверхности Луны напряженность главного барозлектрического поля  $E(R)$  получается порядка  $10^4$  ед. СГСЕ, что примерно в 100 раз меньше аналогичного значения для Земли.

Однако барозлектрическое поле проникает и во внешнюю область, если сферическая симметрия нарушается. Одной из основных причин такого нарушения являются приливные воздействия, и обусловленная ими часть барозлектрического поля может именоваться «приливной».

Первые теоретические указания на то, что благодаря барозлектрическому эффекту у планет и их спутников должны существовать электрические поля, появились в 1995 г. [67]. Однако тогда еще не было понято, как, находясь далеко от Луны, можно получить экспериментальные подтверждения обоснованности этих утверждений.

Общее поле складывается из главной и приливной частей.

Численные оценки показывают, что непосредственно под поверхностью Луны основной вклад дает главное бароэлектрическое поле, а приливные добавки малы, и при первых оценках их можно не учитывать, хотя детальное рассмотрение этого вопроса, в частности, в плане возможностей его прямого экспериментального изучения и использования, представляет несомненный интерес.

Поверхность Луны, как показывают многочисленные, в первую очередь оптические исследования, чрезвычайно пориста и, кроме того, покрыта обломками вулканических пород или многочисленными пересекающимися трещинами. Поэтому рассеяние света носит диффузный характер, т. е. в любом месте поверхности Луны всегда найдутся частички, которые ориентированы так, чтобы идущие от Солнца лучи отражались от них на Землю. Именно эти лучи и определяют вид Луны с Земли. Случайность ориентации частичек на любом участке поверхности Луны во многом определяет этот вид.

Благодаря действию главного бароэлектрического поля на породы Луны, в частности, и на выстилающие ее поверхность, они приобретают оптическую анизотропию (квадратичный эффект Керра); главная оптическая ось направлена по полю, т. е. радиально от центра Луны.

Обратимся к рассмотрению задачи о влиянии этой анизотропии на отражение солнечного света от Луны [84].

Используем следующие обозначения: индексы  $(0)$ ,  $(r)$ ,  $(g)$  относятся к величинам, описывающим падающую, отраженную и преломленную волны соответственно.

Как это обычно делается, представим падающую волну в виде наложения двух волн, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. В одной из них ( $s$ -волне) вектор напряженности электрического поля  $E^{(0)}$  перпендикулярен к плоскости падения. В другой ( $p$ -волне) вектор  $E^{(0)}$  лежит в плоскости падения.

Для количественного описания поляризации используется, как уже было указано выше, величина (21.1), которую, следуя Араго, называют степенью поляризации.

Если отражение происходит от поверхности изотропного вещества, то всегда  $I_s \geq I_p$ , т. е.  $P$  не может быть отрицательным. Действительно, при нормальном падении  $I_s = I_p$ , так что  $P = 0$ ,



а по мере увеличения угла падения  $I_s$  монотонно возрастает, тогда как  $I_p$  вначале уменьшается, достигая нулевого значения при угле падения, равном углу Брюстера, а только потом вновь начинает расти, оставаясь меньше  $I_s$ .

Положение меняется, если отражение происходит от поверхности анизотропного вещества. Попытаемся пояснить это.

Если искать решение уравнений Максвелла в однородной среде в виде плоских электромагнитных волн  $E, H \sim \exp(kr - \omega t)$ , то дифференциальные уравнения переходят в алгебраические:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H} \times \mathbf{n}] = \mathbf{D}; \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{H}; \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) = 0; \quad (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ : \end{aligned} \quad (21.2)$$

где  $\mathbf{n}$  связан с частотой  $\omega$  и с волновым вектором  $\mathbf{k}$  соотношением  $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}$ ;  $n = |\mathbf{n}|$  называется коэффициентом преломления.

Учитывая материальные уравнения в анизотропном веществе  $D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$  (в анизотропном веществе векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  уже не параллельны!), получим систему уравнений

$$(\varepsilon_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta - n^2 \delta_{\alpha\beta}) E_\beta = 0. \quad (21.3)$$

Для интересующих нас целей ограничимся частным случаем, когда падающий, отраженный и преломленный лучи, а также главная оптическая ось (направленная из центра Луны в точку отражения) лежат в плоскости падения. Это соответствует отражению солнечных лучей от участков поверхности, лежащих на лунном экваторе.

Рассмотрим элемент поверхности на Луне, который ориентирован так, что в данный момент отраженный от него солнечный свет попадает к земному наблюдателю. Пусть положение точки отражения описывается углом  $\Phi$  (это долгота точки на лунном экваторе, отсчитываемая от направления на Землю), а угол падения (равный углу отражения) равен  $\Theta$ . При этом фаза Луны равна  $\psi = 2\Theta$ , а угол между главной оптической осью (т. е. лунным радиусом) и нормалью к отражающей поверхности равен  $\alpha = \Theta - \Phi$ . При заданном  $\Phi$  точка на Луне является освещенной при  $\Phi - \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \Phi + \frac{\pi}{2}$ .

Введем такую систему координат  $(x, y, z)$ , что плоскость  $y = 0$  есть плоскость падения, а ось  $z$  проходит через центр Луны, т. е. совпадает с главной оптической осью. При этом тензор диэлектрической проницаемости принимает диагональный

вид с главными значениями  $\epsilon_{zz}$  и  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$ , а волновой вектор лежит в плоскости  $(x, z)$ .

В этой системе координат наиболее просто записывается связь компонент векторов электрического поля  $\mathbf{E}$  и электрической индукции  $\mathbf{D}$ . Учитывая (21.3), можно записать для преломленной волны

$$\begin{aligned} (\epsilon_{xx} - n_z^2)E_x + n_x n_z E_z &= 0, & (\epsilon_{yy} - n^2)E_y &= 0, \\ n_x n_z E_x + (\epsilon_{zz} - n_x^2)E_z &= 0. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Условие нетривиальной разрешимости (равенство нулю детерминанта) позволяет получить соотношения, связывающие коэффициенты преломления с диэлектрической проницаемостью.

Запишем их отдельно для *s*- и *p*-поляризации:

а) *s*-поляризация:  $n^2 = \epsilon_{yy}$ ,  $E_x = E_z = 0$ ,  $E_y \neq 0$ , т.е.  $n_s^2 = \epsilon_{yy}$ ;

б) *p*-поляризация:  $E_y = 0$ ,  $E_{x,z} \neq 0$ ,

$$\epsilon_{xx} n_x^2 + \epsilon_{zz} n_z^2 - \epsilon_{xx} \epsilon_{zz} = 0. \quad (21.5)$$

Из этого уравнения можно найти коэффициент преломления  $n_p$  для *p*-поляризации. Заметим, что он зависит от направления распространения волны.

Коэффициенты отражения можно определить как квадраты модулей отношений нормальных компонент напряженностей электрических полей в отраженной и падающей волне. При расчете амплитуд надо записать граничные условия на отражающей плоскости: тангенциальные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей, а также волновых векторов, должны быть непрерывны. Для этого удобно перейти в систему координат  $(x', y', z')$ , повернутую вокруг оси  $Y$  на угол  $\alpha = \Theta - \Phi$ . Тогда ось  $Z'$  будет направлена по нормали к отражающей плоскости, падающий луч лежит в плоскости  $(x', z')$ , граничные условия записываются на поверхности  $z' = 0$ . Разрешая полученную систему уравнений, находим коэффициенты отражения для *s*- и *p*-поляризованных волн.

Если вектор напряженности электрического поля в падающей волне перпендикулярен к плоскости падения, то и в отраженной, и в преломленной волне вектор напряженности и вектор индукции электрического поля имеют только *s*-компоненты.

При этом преломленная волна является обыкновенной, наведенная действием бароэлектрического поля анизотропия не сказывается вовсе, и коэффициент отражения  $I_s$  получается таким же, как и при отсутствии бароэлектрического поля:

$$I_s = \left| \frac{E_r^{(s)}}{E_0^{(s)}} \right|^2 = \left| \frac{\cos \Theta - \sqrt{\varepsilon_{yy} - \sin^2 \Theta}}{\cos \Theta + \sqrt{\varepsilon_{yy} - \sin^2 \Theta}} \right|^2. \quad (21.6)$$

Однако зависимость от бароэлектрического поля проявляется при  $p$ -поляризации. В анизотропной среде преломленный луч становится «необыкновенным», оптический коэффициент преломления  $n_p$  зависит от направления. Довольно громоздкие вычисления приводят к:

$$I_p = \left| \frac{E_r^{(p)}}{E_0^{(p)}} \right|^2 = \left| \left\{ 2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} \cos \Theta - (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) \sin \Theta \sin 2\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(\varepsilon_{zz} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{xx} \sin^2 \alpha) \sqrt{n_p^2 - \sin^2 \Theta} \right\} / \left\{ 2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} \cos \Theta + \right. \right. \\ \left. \left. + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) \sin \Theta \sin 2\alpha + 2(\varepsilon_{zz} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{xx} \sin^2 \alpha) \sqrt{n_p^2 - \sin^2 \Theta} \right\} \right|^2. \quad (21.7)$$

Входящий в эту формулу оптический показатель преломления  $n_p$  находится при численном решении биквадратного уравнения

$$n_p^2(\varepsilon_{xx} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{zz} \cos^2 \alpha) + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) \sqrt{n_p^2 - \sin^2 \Theta} \sin \Theta \sin 2\alpha + \\ + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz}) \sin^2 \Theta \cos 2\alpha - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} = 0.$$

Если ограничиться наиболее распространенными случаями, когда постоянная Керра положительна, то показатель преломления  $n^*$ ) для необыкновенного луча может оказаться больше, чем то было бы в отсутствие электрического поля. А так как коэффициент отражения при прочих равных условиях тем больше,

\*) Напомним, что в анизотропной среде показатель преломления  $n = |n|$  зависит от направления распространения волны.

чем выше показатель преломления, то возникает возможность отрицательной поляризации.

Применяя изложенное выше для количественного нахождения поляризации, удобно представить получающиеся результаты графически.

На рис. 15 приведены результаты расчетов зависимости поляризации от фаз Луны для точки на экваторе Луны в области Океана Бурь ( $\Phi = +30^\circ$ ).

Поскольку численное значение постоянной Керра пород у поверхности Луны неизвестны, приведены кривые для пяти вариантов этой постоянной (что отвечает пяти вариантам значений  $\epsilon_{zz}$  \*). Вполне очевидно, что чем явственнее выражена анизотропия, тем далее простирается (и отчетливее выражена) область отрицательной поляризации.

На рис. 13, взятом из работы О. Дольфюса [76], приведены экспериментальные кривые для той же области. Зависимость вида кривых от длины волны является естественным следствием существования дисперсии. На рис. 14 приведены кривые изменения поляризации интегрального лунного света с изменением фазы Луны.

Постановка экспериментов в лабораторных условиях, направленных на исследование влияния электрического поля на степень поляризации отраженного света представляется желательной и реализуемой.

Говоря о возможных дальнейших экспериментальных исследованиях, нельзя не остановиться на таком удивительном факте: похоже, что никому еще не приходило в голову провести детальные поляриметрические исследования нашей планеты, Земли, хотя технические возможности для этого уже давно имеются.

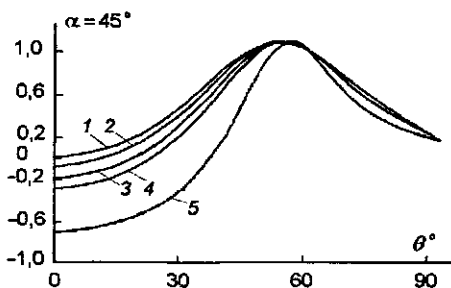


Рис. 15. Теоретические кривые зависимости степени поляризации от фазы Луны  $P(\psi)$  при различных значениях показателя преломления. Область Океана Бурь

\*) Если определение постоянной Керра для доставленных на Землю образцов пород с Луны еще не производилось, целесообразно это сделать.

Правда, решение этой задачи (если вести наблюдения с аппаратов на околоземных орбитах) может осложняться процессами в атмосфере, но итоги ее решения могут иметь не только научное, но и прикладное значение.

Перед землетрясениями напряженности полей часто изменяются таким образом: вначале поле начинает возрастать, причем это возрастание происходит медленно и может значительно опережать сейсмическое событие, а непосредственно перед ним резко спадает. Такой временной ход нетрудно объяснить, если принять бароэлектрический механизм появления предвестников: постепенное локальное повышение внутренних напряжений, а затем их быстрое снятие, сопровождающееся сейсмическим событием, должно вызывать именно такую картину изменения полей во времени.

Для долговременного прогнозирования нужно научиться замечать накопление локальных внутренних напряжений в толще Земли в тот период, когда эти напряжения не доходят до предела прочности, т. е. когда разрушения еще не начинаются, когда еще не возникают трещины, так что и не могут проявляться электрические процессы, сопровождающие их появление и развитие. По нашему мнению, роль бароэлектрического эффекта делается при этом ведущей.

Однако электромагнитное прогнозирование землетрясений встречает определенные трудности: ведь измерения напряженностей магнитного (и, особенно, электрического) поля производятся далеко не постоянно и не повсеместно. Тем важнее методы исследования, которые позволили бы обойти эти трудности. Один из таких оригинальных методов предлагается в настоящей работе. Он состоит в систематическом поляриметрическом исследовании со спутников поляризации света Солнца, отраженного от поверхности Земли.

Основная идея метода состоит в следующем: под влиянием бароэлектрического поля породы у поверхности Земли приобретают оптическую анизотропию (квадратичный эффект Керра), что сказывается на поляризации отражаемого света. Таким образом, проводимые в непрерывном режиме поляриметрические исследования поверхности Земли позволили ли бы заметить и развитие поляриметрических аномалий на невозмущенном фоне — предвестников сейсмических событий.

Электрическое поле вблизи поверхности Земли складывается из нескольких частей, самой значительной из которых явля-

ется главное бароэлектрическое поле. Можно принять, что оно почти не зависит от времени, как и локальные добавки к нему, обусловленные особенностями рельефа Земли. Эти добавки сравнительно невелики, что является, напомним, следствием эффекта изостазии.

Электрическое поле Земли имеет и меняющиеся со временем составляющие. Из них укажем, прежде всего те, что вызываются вызываемыми приливными воздействиями на Землю со стороны Луны и Солнца; нестационарность таких «приливных» полей обуславливается, в основном, суточным вращением Земли и, в определенном смысле, может быть названа регулярной. Под поверхностью Земли величина напряженности такого поля пренебрежимо мала: порядка десятиллионной доли от величины напряженности главного бароэлектрического поля.

Гораздо значительней могут быть вклады от электрических полей, порождаемых локальными напряжениями в коре Земли, связанными с землетрясениями. Однозначно оценить величину достигаемых здесь давлений затруднительно, но значение такой оценки очевидно: как видно, например, из приведенных на рис. 15 графиков (относящихся к поляризации света, отражаемого от экваториального участка поверхности на широте порядка  $30^\circ$ ), проявления отрицательной поляризации тем значительнее, чем больше напряженность электрического поля, а значит, и масштаб индуцируемой им анизотропии, т.е. значения диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ax}$ .

Типичные локальные аномальные давления, судя по тому, что они способны вызывать разломы и другие разрушения земных пород, порядка  $10^8$  Па.

Как уже отмечалось выше, добавка  $E_{\text{доб}}$  к напряженности главного бароэлектрического поля  $E_{\text{гл}}$ , вызванная локальным изменением давления, предшествующими землетрясениям, направлена радиально, как и напряженность главного бароэлектрического поля.

Если вертикальная протяженность области вариаций давлений заметно меньше горизонтальной, то для нахождения напряженности дополнительного поля вблизи поверхности Земли можно ограничиться рассмотрением одномерной задачи, и тогда она определяется лишь значением максимального дополнительного давления  $p_{\text{max}}$ :  $E_{\text{доб}} \approx \sqrt{4\pi p_{\text{max}}^2 / K}$ . Оценить влияние этой добавки на формирование отрицательной поляризации можно, принимая во внимание, что эффект Керра является квадратич-

ным, т. е. пропорциональным  $(E_{\text{гл}} + E_{\text{доб}})^2 \approx E_{\text{гл}}^2 + 2(E_{\text{гл}} \cdot E_{\text{доб}})$ . Поскольку величина напряженности добавочного поля на четыре порядка меньше напряженности главного бароэлектрического поля, основное влияние на формирование локальных достаточно быстро изменяющихся областей отрицательно поляризованного отраженного света определяется именно вторым слагаемым (первое не меняется со временем, последнее существенно меньше). Это второе слагаемое порядка  $10^6 \cdot 10^2 = 10^8$ , т. е. такого же порядка, что и квадрат напряженности электрического поля под поверхностью Луны. Но поляриметрические исследования Луны надежно установили наличие отрицательной поляризации (см., например, [77]); на рис. 14 приведена полученная из наблюдений кривая зависимости интегральной, т. е. учитывающей вклад всех оптических частот, поляризации при различных фазах Луны, на рис. 13 — кривые зависимости поляризации от фазы при различных частотах, отражающие эффект дисперсии.

Учитывая, что все планеты Земной группы, в частности и Луна, имеют сходный химический состав, а значит, и близкие значения постоянной Керра, есть все основания ожидать эффективности предлагаемого метода поляриметрического прогнозирования землетрясений при помощи поляриметрического мониторинга поверхности Земли.

## §22. Неравномерность вращения планеты и вариации магнитного поля

Публикации, посвященные корреляциям между вариациями магнитного поля и изменениями периода обращения Земли, начали появляться уже довольно давно (см., например, [79–82]). Авторы обсуждали ряд механизмов возникновения таких корреляций, но при этом один из возможных механизмов остался незамеченным. Представляется целесообразным остановиться на нем, тем более, что мы в первый раз столкнемся здесь с тем, что определяющую роль приобретают дифференциальные движения в недрах планеты, которые выше, как правило, игнорировались.

Постановка задачи и модель, к обсуждению которых мы переходим, таковы: планета рассматривается как проводящий шар постоянной плотности  $\tau$  (что, впрочем, не играет принципиальной роли: можно понимать под  $\tau$  усредненную плотность); поверхность шара  $r = R$  вращается как целое с угловой скоростью

$\omega$ , тогда как внутри шара существуют дифференциальные движения, т. е. угловые скорости  $\Omega$  внутренних областей являются функциями координат и времени. Нужно найти зависимость между изменениями  $\omega$  и магнитного момента, обязанного БЭ.

Полный момент количества движения планеты  $\mathcal{N}$  предполагается постоянным, т. е. суммарный момент внешних сил принимается равным нулю:

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \frac{d}{dt} \int dV \tau [\mathbf{r} \times [\Omega \times \mathbf{r}]] = 0. \quad (22.1)$$

Пользуясь вновь тем простейшим вариантом описания бароэлектрических полей, который исходит из предположения, что их напряженность попросту пропорциональна градиенту давлений, мы получаем (см. гл. 2) следующее соотношение между механической плотностью  $\tau$  и плотность электрических зарядов:  $\rho = b\tau$ , если вновь считать, что сила имеет гравитационную природу.

Нетрудно убедиться, что та часть магнитного момента, которая обязана вращению объемных «бароэлектрических» зарядов, должна получиться тогда постоянной:

$$\frac{d\mathcal{M}_{об}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2c} \int dV \rho [\mathbf{r} \times [\Omega \times \mathbf{r}]] = \frac{b}{2c} \frac{d}{dt} \mathcal{N} = 0. \quad (22.2)$$

Поверхностные же заряды обуславливают вклад в магнитный момент, равный

$$\mathcal{M}_{пов} = \omega \frac{\rho_{пов} R^4}{2c}, \quad (22.3)$$

если принимать, что механическая плотность  $\tau$  или постоянна, или распределена сферически симметрично,  $\tau = \tau(r)$ . Еще одно предположение, необходимое для получения (22.3), заключается в том, что наличие внутренних дифференциальных движений лишь в незначительной мере отражается на распределении давлений, так что доминирующим фактором для этого распределения остается гравитационное поле.

Плотность поверхностных зарядов при указанных предположениях, касающихся  $\tau$ , такова:

$$\rho_{пов} = -\frac{1}{4\pi R^2} \int dV \rho = -\frac{b}{4\pi R^2} \int dV \tau = -\frac{Mb}{4\pi R^2}, \quad (22.4)$$



где  $M$  — масса планеты,  $b$  — среднее значение отношения объемной плотности электрических зарядов  $\rho$  к механической плотности  $\tau$ . Подставляя это в (22.3), получим

$$M_{\text{пов}} = -\frac{MR^2b}{8\pi c}\omega. \quad (22.5)$$

Постоянство полного момента количества движения, разумеется, не означает постоянства  $\omega$ ; более того, если есть внутренние движения, то постоянство  $\mathcal{M}$  как раз и обуславливает переменность  $\omega$ .

Поскольку полный магнитный момент равен

$$\mathcal{M} = M_{\text{пов}} + M_{\text{об}}, \quad (22.6)$$

а  $M_{\text{об}}$  остается постоянным, можно записать

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \frac{dM_{\text{пов}}}{dt} = -\frac{MR^2b}{8\pi c} \frac{d\omega}{dt}. \quad (22.7)$$

Подставляя параметры для Земли:  $b \approx 10^{-4}$ ,  $R \approx 6,4 \cdot 10^8$ ,  $M \approx 6 \cdot 10^{27}$ , (все в единицах СГС), получаем  $MR^2b/8\pi c \approx 10^{29}$ , т. е.

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} \approx -10^{29} \frac{d\omega}{dt}. \quad (22.8)$$

Поле над поверхностью планеты в рассматриваемой нами модели является чисто дипольным, а его напряженность равна

$$\mathbf{H} = \frac{3\mathbf{r}(\mathcal{M} \cdot \mathbf{r}) - \mathcal{M}r^2}{r^5}. \quad (22.9)$$

Поле, естественно, оказывается переменным и при  $r \rightarrow R$ :

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{3\mathbf{R}(\dot{\mathcal{M}} \cdot \mathbf{R}) - \dot{\mathcal{M}}R^2}{R^5} \approx \frac{10^{29}}{R^3} \{3\mathbf{f}(\dot{\omega} \cdot \mathbf{f}) - \dot{\omega}\}, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{R}/R. \quad (22.10)$$

В частности, если  $\omega$  изменяется только по величине, оставаясь неизменным по направлению, это приводит к следующим выражениям для производных по времени для горизонтальных и вертикальных составляющих  $\mathbf{H}$ :

$$\frac{dH^{\text{гориз}}}{dt} \approx -380 \sin \theta \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{dH^{\text{вер}}}{dt} \approx -760 \cos \theta \frac{d\omega}{dt}, \quad (22.11)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями  $\omega$  и  $\mathbf{f}$ .

## §23. О влиянии магнитных полей на дифференциальные потоки в планетах и звездах

Учет бароэлектрического эффекта вносит в картину формирования магнитного (а также и электрического) поля планет и звезд принципиально новые черты.

До появления теории бароэлектрического эффекта обычно при рассмотрении электромагнитных полей планет и звезд принималось, что в их недрах плотность зарядов (а значит, и напряженность электрических полей) равна нулю.

Физические условия в недрах звезд, в частности Солнца, таковы, что первое слагаемое в знаменателе формулы (3.1) почти всюду много меньше второго,  $B \ll p$ , и им можно пренебречь. Это приводит к известному выражению для плотности энергии в модели полностью вырожденного газа невзаимодействующих электронов,  $W = p/\nu$ .

Основным фактором, определяющим распределение давлений в звездах и планетах, является их собственное гравитационное поле, создаваемое распределением их масс. Для самых простых и грубых оценок мы обратимся вначале к простейшей модели: будем считать, что звезда вращается как единое целое с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , причем вращение — медленное, все участки тела движутся со скоростями, значительно меньшими световой, т.е. угловая скорость  $\omega$  и радиус тела  $R$  удовлетворяют соотношению

$$\omega R \ll c,$$

где  $c$  — скорость света.

Тогда, если ограничиться линейным по  $\beta = V/c$  приближением, выражение для вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  оказывается одинаковым как в собственной (вращающейся), так и в инерциальной системе отсчета и не зависящим от  $\omega$  (см., например, гл. 4).

Вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  в этих двух системах отсчета также имеет одинаковый вид, и в рамках указанного линейного по  $\beta$  приближения он линейно зависит от  $\omega$ .

Все векторы, описывающие электромагнитное поле — усредненные по физически бесконечно малым объемам, как и полная плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  (без разделения зарядов на свободные и связанные).

Уравнения Максвелла, определяющие напряженности этих полей в указанном линейном по  $\beta$  приближении, имеют общеизвестный вид, и остается только конкретизировать выражения для плотностей зарядов и токов.

Если принять для простоты, что плотность вещества в звезде постоянна, то согласно (6.2)

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

где

$$p_0 = \frac{1}{2} g \tau R = \frac{GM\tau}{2R} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4},$$

согласно (6.4) напряженность бароэлектрического поля внутри звезды линейно зависит от  $r$ :

$$E = E_r = \sqrt{\frac{8\pi p_0}{\nu}} \frac{r}{R}, \quad (23.1)$$

по объему распределен заряд  $+q$  с постоянной, не зависящей от координат объемной плотностью

$$\rho = \frac{3}{R} \sqrt{\frac{p_0}{2\pi\nu}}, \quad (23.2)$$

а по поверхности — отрицательный заряд  $-q$  с поверхностной плотностью

$$\rho_{\text{пов}} = -\frac{1}{3} R \rho = -\sqrt{\frac{p_0}{2\pi\nu}}. \quad (23.3)$$

Возникающие при вращении такой звезды объемные и поверхностные токи, пропорциональные  $[\omega \times r]$ , создают соответственно магнитные дипольные моменты

$$\mathcal{M}_V = \frac{4\pi R^5 \rho}{15c} \omega = \frac{qR^2}{5c} \omega, \quad (23.4a)$$

$$\mathcal{M}_S = \frac{4\pi R^4 \rho_{\text{пов}}}{3c} \omega = -\frac{qR^2}{3c} \omega, \quad (23.4b)$$

где  $q = \frac{4\pi R^3}{3} \rho = -4\pi R^2 \rho_{\text{пов}}$ .

В рамках обсуждаемой нами модели в область над поверхностью тела главное бароэлектрическое поле не проникает, а главное баромагнитное поле, порождаемое вращением этого тела как целого, оказывается чисто дипольным, причем магнитный дипольный момент получается равным

$$\mathcal{M} = -\frac{2qR^2}{15c}\omega. \quad (23.5)$$

Можно показать, что напряженность магнитного поля во внутренней области имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{int}} &= \frac{2\mathcal{M}_S}{R^3} + \frac{(5R^2 - 6r^2)\mathcal{M}_V + 3(\mathcal{M}_V\mathbf{r})\mathbf{r}}{R^5} = \\ &= \frac{q}{15cR^3}(5R^2 - 18r^2)\omega + 9(\mathbf{r}\omega)\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (23.6)$$

На рис. 16 изображена схема силовых линий в меридиональной плоскости одного из полушарий, как для магнитного поля во внутренней области, описываемого формулой (23.6), так и во внешней области.

Вид этих силовых линий, как уже отмечалось, должен отражаться на распределении дифференциальных потоков\*). Благодаря внутрипланетным (или внутризвездным) дифференциальным потокам главное баромагнитное поле приобре-

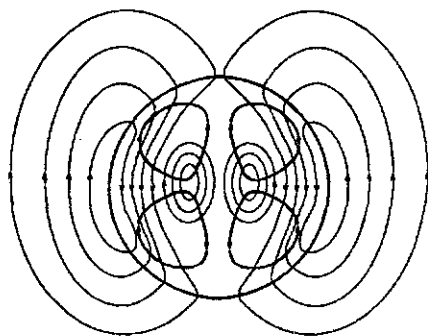


Рис. 16. Упрощенная схема распределения магнитных силовых линий (тонкие линии) и линий тока (жирные линии) во внутренней I и внешней II областях Солнца

\*) Упрощающие предположения, в частности, касающиеся постоянства плотности объемных зарядов, не являются в действительности нереалистичными. Если учесть, что условие  $p \gg B$  не выполняется в приповерхностных областях, так что для  $W(p)$  нужно либо брать более общее феноменологическое выражение, либо вообще переключаться на квантово-механические оценки, но это приведет лишь к не очень существенным изменениям выражения для  $\rho$  при  $r \rightarrow R$ .

тает добавки, которые вместе с магнитогидродинамическими и формируют наблюдаемое магнитное поле. Добавки первого типа явились предметом рассмотрения во многих работах. Первое упоминание о необходимости учитывать и добавки второго типа, т. е. оценивать влияние дифференциального движения электрических зарядов в недрах небесных тел на их результирующее магнитное поле, содержится, по-видимому, в работе [84].

Но магнитное поле, в свою очередь, также оказывает воздействие на дифференциальные потоки. Один из механизмов этого воздействия хорошо известен — это то, что называют магнитной упругостью: чем выше проводимость, тем в большей мере проявляется «эффект вмораживания».

Другая причина, по которой преимущественным является движение внутризвездного вещества вдоль, а не поперек магнитных силовых линий, связана с наличием объемных зарядов, при движении которых в магнитном поле проявляется сила Лоренца. Поскольку об этих зарядах исследователи прежде не упоминали, естественно, не фигурировала и эта вторая причина.

Конвективные потоки, обусловленные градиентами температур, имеются и в недрах планет, в частности Земли, и внутри звезд. Конвекции на Солнце, например, посвящена обширная литература. Нет, по-видимому, ни одной книги о физике Солнца, в которой бы не обсуждался этот вопрос.

Однако, хотя связь между конвективными движениями и магнитными полями уже давно стала предметом исследования, некоторые, даже качественные черты процессов еще нуждаются в дополнительном обсуждении. Преимущественно это относится к доминирующей тенденции движения внутри звездного вещества вдоль, а не поперек магнитных силовых линий, что должно (если иметь в виду крупномасштабные черты движения) приводить к тому, что конвективные потоки из недр должны, в основном, быть направлены к полюсам (см. рис. 16), от них, охлаждаясь, растекаться в приповерхностных областях в направлении к экватору, а затем вновь опускаться вглубь звезды.

Таким образом, должны возникать меридиональные приповерхностные потоки от полюсов к экватору.

Действие на приповерхностные потоки вещества сил Кориолиса приводит к появлению широтных составляющих скорости, направленных таким образом, что это приводит к замедлению вращения приповерхностных слоев, причем это замедление сказывается больше в приполярных, чем в экваториальных облас-

тях, поскольку эти силы убывают по мере приближения к экватору. В результате в меридиональных плоскостях в северном и южном полушариях должны возникать симметричные циркулярные потоки, о чем говорилось в ряде работ (например, [85]).

Зависимость частоты обращения участков поверхности Солнца от их широты описывается эмпирической приближенной формулой Говарда и Харвея (см. [86]). В единицах СГС в сферической системе координат она записывается в виде

$$\omega(\alpha) = 2,8 \cdot 10^{-6} \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{8} - \frac{\sin^4 \alpha}{6} \right) \text{ с}^{-1}, \quad (23.7)$$

где угол  $\alpha$  — гелиографическая широта, он отсчитывается от плоскости экватора (т.е.  $\alpha = \pi/2 - \theta$ ).

Вектор линейной скорости поверхности Солнца имеет только широтную компоненту  $V_\psi$ , равную

$$V_\psi = \omega(\alpha) R \cos \alpha. \quad (23.8)$$

Градиент этой величины достигает максимума при  $\alpha \approx 60^\circ$ .

Там, где градиент скоростей наибольший, т.е. где относительные скорости соседних слоев особенно велики, возникновение вихрей и связанных с ними солнечных пятен наиболее вероятно. Это находится в довольно близком соответствии с данными наблюдений. Действительно, области, в которых пятна появляются в начале цикла «находятся обычно на широтах  $\pm 40^\circ$ , а затем перемещаются к экватору» [86, с. 61].

Если принять положение о вихревой природе солнечных пятен, открывается возможность для некоторых оценок магнитных полей в них. Конечно, вряд ли нужно пояснять, что ввиду сугубой приближенности модели речь пока может идти лишь о самых первых грубых прикидках.

Во вращательном движении вещества в солнечном пятне вовлекаются как поверхностные, так и объемные заряды, возникающие благодаря БЭ. Вращение этих зарядов порождает магнитное поле. Оно локализовано в области пятна, и его силовые линии направлены почти перпендикулярно к его поверхности, что также соответствует данным наблюдений.

Основной вклад в напряженность этого магнитного поля вносит движение приповерхностных зарядов. Для первых, достаточно грубых оценок можно считать (гл. 2), что отрицательные поверхностные заряды образуют тонкий слой. Поверхностная плотность таких зарядов  $\rho_{\text{пов}}$  (в предположении, что полный

электрический заряд Солнца равен нулю), находится по формуле  $\rho_{\text{пов}} = -\sqrt{W_0/2\pi}$ , где  $W_0$  — плотность избыточной энергии в центре Солнца, для которой, в соответствии с вышеизложенным, может быть принято выражение  $W_0 \approx p_0$ .

Давление в центре Солнца, по общепринятым оценкам, порядка  $2,5 \cdot 10^{11}$  атм, или  $10^{17}$  ед. СГС, которыми мы преимущественно пользуемся. Это приводит к значению  $|\rho_{\text{пов}}| \approx 2 \cdot 10^8$ .

Заряды, равномерно распределенные по поверхности круга радиуса  $L$ , вращающегося с угловой скоростью  $\Omega$ , порождают над центром этого круга магнитное поле, нормальное к поверхности и равное по модулю

$$H = \frac{2\pi\rho_{\text{пов}}\Omega L}{c}. \quad (23.9)$$

Произведение  $\Omega L$ , которое имеет смысл относительной скорости движения противоположных краев пятна, можно оценить как  $|\text{grad } V_\psi|_{\text{max}} L$ .

Для  $|\text{grad } V_\psi|_{\text{max}}$  на основании (23.8) получается значение  $\approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$ . Что же касается размера пятен, то он часто порядка  $10^9 \div 10^{10}$  см. Подставив это в (23.9), находим  $H \approx 10^3 \div 10^4$  Э.

Конечно, приведенные выше соображения являются не более чем предварительными, и их можно считать лишь наметками обширной программы дальнейших, как теоретических, так и экспериментальных исследований.

В заключение настоящего параграфа коснемся, если не на уровне количественного, то хотя бы качественного рассмотрения одного круга явлений, где переплетаются влияния магнитогидродинамических и бароэлектрических эффектов. Вопрос, о котором идет речь, уже кратко упоминался, когда рассматривалась транспортировка ионов. Но тогда из поля зрения как бы выпало правило Вольта, согласно которому безваттное бароэлектрическое поле не может порождать токов, т. е. сообщать энергию заряженным частицам. Но нужно учесть, что это правило распространяется только на равновесные стационарные системы. Если же стационарность нарушается, то запрет Вольта снимается. Иллюстрацией тому можно назвать метод Кельвина для определения работы выхода, рассматривавшийся выше в связи с опытами Крейга. Кратко говоря, безваттные электрические поля могут стать посредниками в передаче энергии заряженным частицам от внешнего нестационарного источника этой энергии.

Возникновение такого источника энергии как раз и может быть связано с дифференциальными внутризвездными или внутрпланетными потоками. Из этого сразу можно сделать вывод, доступный экспериментальной проверке. Напомним, что динамо-механизм формирования магнитных полей небесных тел основан на преобразовании кинетической энергии дифференциального движения проводящего вещества в недрах этих тел в энергию магнитного поля. Но эти же движения связаны с отступлениями от стационарного, не меняющегося со временем распределения давлений в среде, что создает предпосылки для отступлений от правила Вольты для ускорения ионов бароэлектрическим полем. Таким образом, должна наблюдаться корреляция между вариациями полей магнитогидродинамического происхождения и интенсивностью радиальных корпускулярных потоков.

На Земле, где наблюдается «небарометрическая» зависимость концентрации положительных ионов от высоты (см. гл. 3), изменение положения максимума этой концентрации также должно быть связано с вариациями геомагнитного поля.

## §24. Электрические поля небесных тел

Планеты и звезды, как хорошо известно, обладают магнитными полями. Порождение этих полей, по мнению большинства исследователей, обусловлено эффектами магнитогидродинамического перехода кинетической энергии внутренних дифференциальных движений в энергию магнитного поля («эффект динамо»; о необходимости также учитывать добавки бароэлектрической природы подробно говорилось выше).

Что же касается потенциальных электрических полей кулоновского типа, то, как правило, считается, что таковых не существует. Это мотивируется тем, что небесные тела, в частности звезды, являются проводниками, а в проводниках, как многие привыкли считать, электростатического поля существовать не может.

Мнение об отсутствии у планет и звезд электрических полей кулоновского типа ошибочно. Всегда в толще планет и звезд, а в ряде случаев — и над их поверхностями, такие электрические поля должны существовать. Физической причиной их возникновения является бароэлектрический эффект, т. е. эффект перераспределения электрических зарядов, создаваемого перепадами давлений в среде.



Методы теоретического описания бароэлектрического эффекта изложены выше, так что здесь можно ограничиться лишь краткими напоминаниями.

Проводник, повторим еще раз, является эквипотенциальным вовсе не всегда, а лишь при отсутствии химических и (или) физических неоднородностей. Так, химические неоднородности порождают контактные разности потенциалов, градиенты температур — термо-ЭДС, и т. д.

Перераспределение зарядов и, как следствие, возникновение электрического поля вызываются и неоднородностями внутренних напряжений в средах. Если иметь в виду жидкости, то вместо тензора напряжений достаточно рассматривать давления, что несколько упрощает описание без потери качественно важных деталей эффекта. Уместно подчеркнуть, что обусловленное градиентами давления поле (его естественно именовать «бароэлектрическим») должно существовать и при стационарных распределениях давлений, причем для его поддержания не требуется затрат энергии.

При обсуждении бароэлектрических полей небесных тел (планет, в дальнейшем речь будет идти именно о них) используется простейшая модель: планета рассматривается как химически однородный, холодный, электронейтральный шар. За счет его собственной гравитации в недрах такого шара возникают перепады давлений, и электроны частично вытесняются из внутренних областей на поверхность. Возникающее в результате перераспределения зарядов бароэлектрическое поле занимает лишь внутреннюю область шара; за его поверхность, если не нарушена сферическая симметрия, это поле не проникает.

Нарушения же сферической симметрии могут возникать по различным причинам, из которых особый интерес представляют испытываемые планетой приливные воздействия, что детально обсуждалось выше и рассматривалось в ряде публикаций. Здесь мы ограничимся только приведением основных результатов.

Если на планету массы  $M$  и радиуса  $R$  действует приливная сила со стороны единственного источника приливного воздействия — тела массы  $m$ , расстояние  $R_0$  от центра которого до планеты значительно больше ее радиуса, то вызываемое приливым воздействием перераспределение давлений в недрах планеты порождает непосредственно над поверхностью планеты электрическое поле, вертикальная и горизонтальная составляющая которого (без учета влияния атмосферы) равны соответственно

$$E_r = T \frac{Mm}{R_0^3 R} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad E_\theta = T \frac{Mm}{R_0^3 R} \sin 2\theta.$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением вектора  $R_0$ , соединяющего центры спутника и центра планеты, и вектора  $r$ , определяющего положение точки наблюдения на поверхности планеты. Множитель  $T$  выражается через гравитационную постоянную и упругий модуль  $B$  (см. §19) и по этой причине он различен для разных планет, но поскольку это различие лежит в пределах одного порядка величины, можно для первых, пусть достаточно грубых, оценок принять для  $T$  усредненное значение  $T \sim 10^{-17}$  (в абсолютной гауссовой системе единиц). Приведенные формулы показывают, что и вертикальная, и горизонтальная компоненты напряженности «приливного» бароэлектрического поля над поверхностью планеты зависят от положения точки наблюдения и, если учесть вращение планеты, — от времени.

Имеются и изменения компонент напряженности, определяемые зависимостью  $R_0$  от времени. У вертикальной составляющей напряженности  $E_r$ , правда, есть и постоянная (не зависящая ни от времени, ни от места наблюдения) часть, направленная вниз, как если бы поле порождалось отрицательным электрическим зарядом, равномерно распределенным по поверхности планеты. Именно только она и остается, если иметь в виду усредненные по времени компоненты напряженности поля.

Порождаемые приливными воздействиями бароэлектрические поля должны быть не только у Земли и Луны, но и над поверхностями многих других небесных тел. О масштабах бароэлектрических полей планет Солнечной системы и их спутников можно составить представление по величине  $A = TMm/R_0^3 R$ .

В табл. 5 приводятся значения необходимых параметров и величины  $A$  ( $M$  и  $m$  в граммах,  $R$  и  $R_0$  в сантиметрах; значения округлены). В приведенный перечень включены только те объекты, для которых  $A \geq 1$  В/м.

Вполне понятно, что «приливные» электрические поля тем больше, чем массивнее и ближе расположен источник приливного воздействия. Если источников несколько, то порождаемые их действием электрические поля накладываются, а нелинейные эффекты обычно можно не учитывать. Конечно, как то хорошо видно, в частности, на примере Земли и Луны или Юпитера и его ближайшего спутник Ио, процесс приливного индуцирования электрических полей является в определенной мере взаимным. Этот процесс затрагивает не только планеты, но и звезды.

Таблица 5

| Объект    | $M$ , г              | $R$ , см          | Источник влияния | $m$ , г              | $R_0$ , см           | $A$ , В/м        |
|-----------|----------------------|-------------------|------------------|----------------------|----------------------|------------------|
| Меркурий  | $3,3 \cdot 10^{25}$  | $2,4 \cdot 10^8$  | Солнце           | $2 \cdot 10^{33}$    | $5,8 \cdot 10^{12}$  | $2,5 \cdot 10^2$ |
| Венера    | $4,9 \cdot 10^{27}$  | $6,1 \cdot 10^8$  | Солнце           | $2 \cdot 10^{33}$    | $1,08 \cdot 10^{13}$ | $2,2 \cdot 10^2$ |
| Земля     | $6 \cdot 10^{27}$    | $6,4 \cdot 10^8$  | Солнце           | $2 \cdot 10^{33}$    | $1,5 \cdot 10^{13}$  | 90               |
| Земля     | $6 \cdot 10^{27}$    | $6,4 \cdot 10^8$  | Луна             | $3,75 \cdot 10^{25}$ | $3,84 \cdot 10^{10}$ | $10^2$           |
| Луна      | $3,75 \cdot 10^{25}$ | $1,4 \cdot 10^8$  | Земля            | $6 \cdot 10^{27}$    | $3,84 \cdot 10^{10}$ | $5 \cdot 10^3$   |
| Марс      | $6,4 \cdot 10^{26}$  | $3,4 \cdot 10^8$  | Солнце           | $2 \cdot 10^{33}$    | $2,28 \cdot 10^{13}$ | 5,6              |
| Андрастея | $5,7 \cdot 10^{19}$  | $2 \cdot 10^7$    | Юпитер           | $1,9 \cdot 10^{30}$  | $1,28 \cdot 10^{10}$ | 60               |
| Амальтея  | $1,9 \cdot 10^{22}$  | $1,35 \cdot 10^7$ | Юпитер           | $1,9 \cdot 10^{30}$  | $1,81 \cdot 10^{10}$ | $10^4$           |
| Фива      | $5,7 \cdot 10^{20}$  | $4 \cdot 10^6$    | Юпитер           | $1,9 \cdot 10^{30}$  | $2,21 \cdot 10^{10}$ | $5,6 \cdot 10^2$ |
| Ио        | $7,3 \cdot 10^{25}$  | $1,8 \cdot 10^8$  | Юпитер           | $1,9 \cdot 10^{30}$  | $4,22 \cdot 10^{10}$ | $1,8 \cdot 10^5$ |
| Европа    | $4,8 \cdot 10^{25}$  | $1,48 \cdot 10^8$ | Юпитер           | $1,9 \cdot 10^{30}$  | $6,71 \cdot 10^{10}$ | $3,6 \cdot 10^4$ |
| Ганимед   | $1,54 \cdot 10^{26}$ | $2,6 \cdot 10^8$  | Юпитер           | $1,9 \cdot 10^{30}$  | $6,71 \cdot 10^{10}$ | $1,6 \cdot 10^4$ |
| Каллисто  | $9,5 \cdot 10^{25}$  | $2,36 \cdot 10^8$ | Юпитер           | $1,9 \cdot 10^{30}$  | $1,88 \cdot 10^{10}$ | $2 \cdot 10^3$   |
| Мимас     | $4 \cdot 10^{22}$    | $2,7 \cdot 10^7$  | Сатурн           | $5,7 \cdot 10^{29}$  | $1,86 \cdot 10^{10}$ | $2,3 \cdot 10^3$ |
| Энцелада  | $8 \cdot 10^{22}$    | $3 \cdot 10^7$    | Сатурн           | $5,7 \cdot 10^{29}$  | $2,38 \cdot 10^{10}$ | $2 \cdot 10^3$   |
| Тефия     | $6,4 \cdot 10^{23}$  | $5 \cdot 10^7$    | Сатурн           | $5,7 \cdot 10^{29}$  | $2,95 \cdot 10^{10}$ | 5                |
| Диона     | $1,1 \cdot 10^{24}$  | $4,8 \cdot 10^7$  | Сатурн           | $5,7 \cdot 10^{29}$  | $3,8 \cdot 10^9$     | $4,3 \cdot 10^3$ |
| Рей       | $2,3 \cdot 10^{24}$  | $6,5 \cdot 10^7$  | Сатурн           | $5,7 \cdot 10^{29}$  | $5,27 \cdot 10^{10}$ | $2,4 \cdot 10^3$ |
| Титан     | $1,36 \cdot 10^{26}$ | $2,44 \cdot 10^8$ | Сатурн           | $5,7 \cdot 10^{29}$  | $1,2 \cdot 10^{11}$  | $3 \cdot 10^3$   |
| Гиперион  | $10^{23}$            | $2,2 \cdot 10^7$  | Сатурн           | $5,7 \cdot 10^{29}$  | $1,48 \cdot 10^{11}$ | 14               |
| Япет      | $1,1 \cdot 10^{24}$  | $5,6 \cdot 10^7$  | Сатурн           | $5,7 \cdot 10^{29}$  | $3,56 \cdot 10^{11}$ | 4,5              |
| Ариэль    | $1,3 \cdot 10^{24}$  | $5,6 \cdot 10^7$  | Уран             | $8,7 \cdot 10^{28}$  | $1,92 \cdot 10^{10}$ | $8 \cdot 10^3$   |
| Умбриэль  | $5 \cdot 10^{23}$    | $2,5 \cdot 10^7$  | Уран             | $8,7 \cdot 10^{28}$  | $2,6 \cdot 10^{10}$  | $1,6 \cdot 10^3$ |
| Титания   | $4,3 \cdot 10^{24}$  | $5 \cdot 10^7$    | Уран             | $8,7 \cdot 10^{28}$  | $4,38 \cdot 10^{10}$ | $1,5 \cdot 10^3$ |
| Оберон    | $2,6 \cdot 10^{24}$  | $4,5 \cdot 10^7$  | Уран             | $8,7 \cdot 10^{28}$  | $5,86 \cdot 10^{10}$ | $4,4 \cdot 10^3$ |
| Миранда   | $10^{23}$            | $1,2 \cdot 10^7$  | Уран             | $8,7 \cdot 10^{28}$  | $1,2 \cdot 10^7$     | $5,8 \cdot 10^4$ |
| Тритон    | $10^{26}$            | $1,9 \cdot 10^8$  | Нептун           | $1,87 \cdot 10^{29}$ | $3,55 \cdot 10^{10}$ | $3 \cdot 10^2$   |
| Харон     | $6,4 \cdot 10^{25}$  | $6,5 \cdot 10^7$  | Плутон           | $10^{27}$            | $1,7 \cdot 10^9$     | $5,2 \cdot 10^6$ |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Почему Земля — магнит? Почему магнитные поля есть и у других планет, а также и у звезд? Такой «детский» вопрос, появление которого относится еще к ранним этапам классического естествознания, появился уже в начале этой книги.

По-видимому, для большинства исследователей, занимающихся этой проблемой, ответ представляется однозначным: магнитные поля небесных тел возникают благодаря магнитогидродинамическим эффектам — «эффектам динамо». Мы попытались здесь привлечь внимание еще к одному классу эффектов, могущих дать ощутимый вклад в магнитные поля планет и звезд. Эти эффекты связаны с перераспределением зарядов, порождаемом перепадами давлений в проводниках.

Первая глава целиком посвящена обсуждению этого явления, именуемого барозлектрическим эффектом, и вариантов его теоретического описания.

Этому эффекту была уготована довольно сложная научная судьба. Как уже говорилось, гипотеза Сазерленда о перераспределении зарядов в небесных телах под действием их гравитации была встречена довольно скептически, причем неудачные попытки П. Н. Лебедева (а позже и других исследователей) найти в лабораторных экспериментах подтверждение этой гипотезы, усугубили скептицизм.

Прошло почти 100 лет, и в 1996 г. в журнале «Астрофизика» появилась заметка под названием «Об электризации, вызванной тяготением массивного тела» [87]. Заметка имела резко выраженную полемическую направленность, что видно уже из первых ее фраз:

«До последнего времени продолжает привлекать к себе внимание старая проблема связи вращательных и магнитных характеристик небесных тел. Одним из аспектов этой проблемы

служит вопрос о нарушении квазинейтральности вещества тела (нейтральности в среднем по масштабам, превышающим параметр решетки или радиус Дебая) под действием сил тяготения тела. Они не только уплотняют вещество тела, но и создают избыток положительного заряда в центре и отрицательного на периферии тела, сильнее действуя на тяжелые ядра, чем на легкие электроны.

И далее: «Вращаясь вокруг своей оси, такое тело, благодаря перераспределению его заряда, должно приобрести магнитный момент. До последнего времени делаются попытки объяснить, с помощью обсуждаемого механизма, магнитные свойства небесных тел. Цель данной заметки состоит в доказательстве безнадежности таких попыток из-за крайней малости самого эффекта перераспределения заряда».

Интерес к кругу вопросов, касающихся воздействия гравитации на заряды в твердом теле, наметился в 60-е гг. XX в. (см., например, [10–16]). Хотя об этом уже была речь выше, напомним еще раз о «поле Барнхилла–Шиффа» и приведем простейшую оценку, которая фактически и послужила решающим аргументом для категорического высказывания о «безнадежности попыток».

Пусть в центре атома в отсутствии гравитации находится ядро заряда  $Ze$ , окруженное облаком электронов. Благодаря тому, что давление Ферми обратно пропорционально массе, а масса ядер  $M$  более чем на три порядка превосходит массу электрона, электронное распределение в твердом теле обладает значительной жесткостью\*), так что если ядро атомной ячейки смещается под действием гравитационного поля напряженности  $g$ , этому перемещению препятствует электрическое поле, порождаемое электронами. Равновесие наступает, когда гравитационная сила  $Mg$ , действующая на ядро, уравнивается электрической силой  $ZeE$ , где  $E$  — напряженность электрического поля, создаваемого окружающими ядро электронами. Отсюда следует элементарная оценка для величины напряженности этого поля:

$$E = \frac{Mg}{Ze}$$

\*) Достаточно напомнить, что значения упругих модулей металлов, вычисленные в рамках модели невзаимодействующих электронов, близки к наблюдаемым на опыте [17].

Если подставить для численной оценки значения  $M \sim 10^{-24}$ ;  $g \sim 10^3$ ;  $Ze \sim 10^{-9}$  (все в единицах системы СГС), то получаем  $E \sim 10^{-12}$  СГСЕ.

Это ничтожно малая напряженность, и если опираться на такую оценку, то было бы действительно безнадежно ожидать заметного вклада поляризационных эффектов в формирование магнитных полей планет и звезд, как о том совершенно справедливо говорится в [87].

Однако, обсуждая вопрос о бароэлектрическом поле, имеют в виду не это микроскопическое поле, проявляющееся в областях атомных размеров, а макроскопическое электрическое поле, порождаемое макроскопическим перераспределением зарядов.

При помощи написанной выше формулы оценивается напряженность того микроскопического поля, которое действует на сместившееся под действием гравитации ядро атомной ячейки, а вовсе не то макроскопическое электрическое поле, которое вызывается действием гравитации.

Пусть ядро в атомной ячейке перемещается под действием гравитации на расстояние  $h$ , зависящее от напряженности гравитационного поля и электронной структуры атомной ячейки. (Как показывают оценки в [18],  $h$  существенно зависит от квантовых чисел электронов ячейки.)

Ячейка приобретает электрический дипольный момент порядка  $Ze\hbar$ , а величина вектора поляризации  $\mathbf{P}$  оказывается  $|\mathbf{P}| \sim NZe\hbar$ , где  $N$  — число атомных ячеек в единице объема.

Если и вещество, и гравитационное поле однородны, т. е. ни  $N$ , ни  $h$ , определяемое напряженностью гравитационного поля, не зависят от координат, то макроскопическая, т. е. усредненная по физически бесконечно малым объемам плотность заряда  $\rho = -\text{div } \mathbf{P} = 0$ , из-за чего и напряженность макроскопического электрического поля, порождаемого такой поляризацией под действием гравитации, оказывается нулевой. Это позволяет подчеркнуть, что не само по себе гравитационное поле, а порождаемые им физические неоднородности в веществе приводят к появлению макроскопических (т. е. имеющих масштабы, значительно превосходящие атомные) электрических полей.

Приведем в качестве иллюстрации еще одну простую оценку. Перепад напряженности гравитационного поля между поверхностью Земли и ее центром  $\delta g \approx 10^3$ . Примем, что  $Ze \approx 10^{-9}$ ,  $h \approx 10^{-9}$ , среднее число атомов в единице объема  $N \approx 10^{24}$  (все в гауссовой системе единиц); тогда для  $\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{P}$

получается значение, близкое к  $10^6$ , которое было найдено выше совершенно иным способом.

Представляется правдоподобным, что нередко проявляющееся негативное восприятие самого существования бароэлектрического эффекта обязано влиянию уже упоминавшемуся в начале книги ошибочного утверждения из весьма авторитетного руководства по электродинамике [2] о том, что «... неоднородность давления (или плотности) при постоянной температуре не может привести к возникновению поля (или тока) в проводнике».

Физическая причина возникновения бароэлектрических полей, повторим еще раз, — в зависимости работы выхода от давления. Если распределение давлений в проводнике неоднородно, то электроны переходят из областей, где работа выхода меньше в те, где она больше. Такое перераспределение электронов и порождает бароэлектрические поля.

Таким образом, вопреки тому, что утверждается в [2 и 87], поляризионный механизм формирования бароэлектрического (и «баромагнитного», образующегося при движении обремененных бароэлектрическому эффекту зарядов) полей играет существенную роль. Бароэлектрические эффекты играют тем более заметную роль, чем значительнее перепады давлений. Именно поэтому важным примером их проявления являются такие объекты, как планеты и звезды.

Как показывают полученные выше оценки, около 10% магнитного момента планет земной группы обязано перераспределению зарядов, создаваемому в результате действия их собственного тяготения и вращения.

Та же часть давления, которая обязана действию приливных сил, ответственна за создание электрических полей над поверхностью планет. В частности, наблюдаемые черты поля ясной погоды над поверхностью Земли [65, 49, 8], (и не только качественно, но и количественно) объясняются не как результат действия «грозового механизма», а как следствие действия приливных сил со стороны Луны и, в меньшей мере, Солнца.

Из сказанного выше и следует вывод о наличии электрических полей над поверхностями таких небесных тел, которые лишены атмосферы, но испытывают приливные воздействия, например над Луной [67].

Выше были детально изложены некоторые варианты теоретического описания бароэлектрического эффекта. Значительная группа этих вариантов базируется в конечном итоге на наиболее

общем условии термодинамического равновесия — условии постоянства электрохимического потенциала, и различаются они лишь подходами к вычислению плотности «избыточной» энергии в зависимости от давления. Наиболее надежные результаты дает «микроскопический» квантово-механический подход, основанный на использовании уравнений Хартри-Фока-Слейтера или квантово-статистического метода Томаса-Ферми и его обобщений. Более грубый «феноменологический» подход, равно как и динамическое рассмотрение условий равновесия, также полезно привлекать для описания; основное удобство здесь заключается в появлении возможности относительно простого аналитического исследования, а не только численных машинных расчетов. Правда, эта простота достигается ценой потери точности: феноменологические оценки для напряженностей бароэлектрических полей (если не учитывать возрастания упругих модулей по мере увеличения давления) получаются завышенными примерно на порядок по сравнению с более точными микроскопическими.

Здесь важно подчеркнуть, что методы теоретического описания БЭ, изложенные выше, основываются на первых принципах физики и не требуют привлечения дополнительных гипотез.

Естественно, мы пользуемся по ходу вычислений некоторыми упрощающими предположениями; например, при микроскопическом описании мы предполагаем, что атомные ячейки являются сферически симметричными. Однако такие упрощения можно даже назвать традиционными, они используются постоянно и, как показывает анализ, дальнейшие уточнения не приводят к радикальным изменениям результатов (по крайней мере, тех, которые для нас важны, плотности «избыточной» энергии, например). Это позволяет надеяться, что получаемые нами оценки для напряженностей полей дают правильные порядки величин.

Подчеркивая это обстоятельство, кроме всего прочего мы имеем в виду и чисто психологический фактор: дело в том, что электрическое поле, порождаемое благодаря БЭ в недрах Земли, по нашим расчетам получается вблизи ее поверхности громадным, оно приближается по масштабам к внутриатомному, уступая ему всего примерно два порядка. И хотя, как мы пытались объяснить выше, оно, подобно контактному полю, является безваттным, все же первое знакомство с этим утверждением порождает (и авторы сами не являются исключением) реакцию: «не может быть!» Но «получается то, что получается» — и



остается только повторить, что подгоночных параметров или произвольных гипотез, которые были бы ответственны за этот результат, в нашей работе нет. Более того, мы попытались показать, что имеется эффект (транспортировка ионов, в частности), подтверждающий, хотя и косвенно, наличие такого поля.

Переходя к оценкам для электрических и магнитных полей, которые порождаются благодаря БЭ в планетах и звездах, мы прежде всего описали те модели, которые здесь нами использовались. Эти модели могут показаться недопустимо упрощенными. Действительно, разве похож химически однородный шар постоянной плотности, имеющий нулевую температуру, да к тому же вращающийся как жесткое целое, на реальную планету и, тем более, на звезду? Конечно же — весьма отдаленно, и потому вполне правомерен вопрос: какую же пользу может дать изучение такой убогой модели?

Подход к выбору модели объекта исследования всегда определяется «физикой» исследуемого явления. Нашей целью было изучение того, как перераспределяются заряды и какие при этом возникают поля в массивных небесных телах благодаря тем градиентам давлений, которые создаются в них, в первую очередь, их собственным гравитационным полем. Первое, что здесь потребовалось — это оценка, пусть даже грубая, масштабов эффекта. Достигнуть этого и позволила упрощенная модель. Потом, однако, наступила очередь оценить также и роль температурных эффектов и влияние химического состава среды. Выяснено, что для планет, конкретно — для Земли, температурные эффекты лишь незначительно усиливают электрическое поле по сравнению с бароэлектрическим, поправки же на химические неоднородности могут быть более заметными. Мы получили о них представление, рассматривая «планеты» различного химического состава; результаты, которые иллюстрируют табл. 2 и 3, показывают, что разброс здесь примерно в пределах одного порядка величины. Учитывая, что все наши оценки вообще не могут претендовать на более высокую точность, было естественно отказаться от детального учета тех химических неоднородностей, которые есть в реальных планетах.

Особый вопрос — о дифференциальных внутренних движениях. Именно они ответственны за магнитогидродинамическую генерацию (точнее — усиление) магнитных полей, т. е. за те «эффекты динамо», которые по мнению большинства исследователей играют доминирующую роль. Палеомагнитные данные

о магнитном поле Земли и, конечно, наблюдения над магнитными полями Солнца и ряда звезд убедительно показывают, что эта роль действительно велика и что она тем заметнее, чем более интенсивны дифференциальные движения.

Чтобы выделить из общего магнитного поля ту часть его часть, которая обязана БЭ, остается только одно: обратиться к таким моделям, в которых дифференциальные движения либо вообще отсутствуют, либо являются аксиально симметричными, что и было нами проделано. Поскольку «магнитогидродинамические» и обязанные БЭ магнитные поля можно рассматривать как аддитивные (что получается, если градиенты давлений, порождаемые гравитационным полем, значительно превосходят те, которые обуславливают дифференциальные движения), такой прием позволяет выяснить относительные вклады полей этих двух типов. Отметим, что, чтобы отсепарировать поля, обязанные эффекту динамо, нужно исследовать усредненные по достаточно большим промежуткам времени (значительно превосходящим максимальные типичные времена изменений) значения магнитных полей; однако такой подход часто затруднен недостатком эмпирических данных.

Обсуждая БЭ, в случае стационарного распределения давлений мы не различали «плохих» и «хороших» проводников — проводимость вообще не фигурировала в полученных нами формулах, что может породить недоумение. Дело здесь в том, что проводимость приобретает определяющую роль только тогда, когда речь заходит о временах перераспределения зарядов: в хороших проводниках это перераспределение происходит быстрее, чем в плохих.

Понятно, что стационарное, т. е. равновесное распределение зарядов, которым мы интересовались, не может зависеть от времени перераспределения, а потому, следовательно, проводимость и выпадает из равновесных формул. Однако положение меняется, если мы переходим к неравновесным задачам. Так например, обсуждая приливные эффекты, нужно сравнивать их периоды с временами релаксации. Эти последние порядка обратной проводимости, так что для типичных проводников они пренебрежимо малы по сравнению с этими периодами, но для плохих проводников — а границу между ними и диэлектриками провести нельзя — положение оказывается иным, так что вклад в формирование приливного поля должны давать лишь те области, где проводимость достаточно велика.

Особого подхода требуют те участки (в основном — океаны), где доминирующую роль играет проводимость второго рода; к проводникам, где подвижными носителями зарядов являются ионы, полученные нами результаты неприменимы, здесь требуется особое рассмотрение, пока еще не проводившееся. (Хотя некоторые качественные черты отличия от той физической картины, которая обсуждалась выше, нетрудно усмотреть. В частности, это было проделано выше при обсуждении суточного хода поля ясной погоды над сушей и над океанами.)

Попытавшись придать модели планеты, в частности конкретно Земли, более реалистические черты, сталкиваешься с вопросом: какое место в планете занимают области ионной проводимости и какую они играют роль в формировании электрического и магнитного полей. Ионная проводимость доминирует, естественно, в приповерхностных участках планеты. Ионы, перегруппировываясь под действием бароэлектрического поля, приводят к его ослаблению и даже, возможно, полному занулению вблизи поверхности. В итоге приходится признать, что сделанное выше утверждение о значительном бароэлектрическом поле «прямо под нашими ногами» следует прокорректировать: в действительности отрицательно заряженная поверхность, под которой такое поле имеется, не совпадает с поверхностью планеты, а определяется границей между областями проводимости первого и второго рода.

Поскольку в действительности такой резкой границы нет, а есть некий более или менее размытый переходной слой, то это обстоятельство вносит в обсуждаемую картину распределения поля соответствующие коррекции.

Вопросы, касающиеся экспериментальных, в частности лабораторных, исследований БЭ, обсуждаются в гл. 3. После прочтения этой главы у читателя, возможно, останется впечатление, что работа в этом направлении еще почти не проводилась. Это действительно так. Несмотря на то, что перед экспериментаторами здесь открываются богатые возможности, они пока что остаются почти вовсе не использованными. Уместно напомнить, кстати, что БЭ в проводниках должен проявляться при наличии градиентов давлений, вне зависимости от того, какие физические причины вызывают появление этих градиентов. Непрерывность тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на границе раздела сред должна привести к тому, что электрическое поле может обнаруживаться и за

пределами неоднородно напряженного проводника. Конечно, при малых градиентах давления поле также будет мало. Однако, как показывают оценки, это поле доступно для экспериментального обнаружения, его напряженность может быть измерена даже при нагрузках, далеких от разрушающих.

Хотелось бы надеяться, что найдутся экспериментаторы, которые захотят воспользоваться имеющимися здесь интересными возможностями.

Впрочем, нельзя сказать, чтобы «электризация проводников давлением» совсем не изучалась экспериментально, мы говорили об этом выше. Однако, хотя пьезоэлектрические эффекты уже давно являются объектом тщательного экспериментального (и теоретического) исследования, основное внимание здесь уделяется диэлектрикам и полупроводникам. Что же касается проводников, в том числе и металлических поликристаллов, то на них подобные исследования почти не распространялись. Этому, по-видимому, есть две основных причины. Первая из них касается масштабов эффекта: при значениях давлений, типичных для исследований пьезоэлектрического эффекта, поля, обязанные БЭ, значительно меньше тех, которые наблюдаются в пьезоэлектриках классического типа; кроме того, БЭ определяется градиентом давления, а не давлением.

Вторая же причина — психологическая, и она, возможно, также могла сыграть определенную роль: кажется почти само собою разумеющимся, что электростатическое поле в проводнике отсутствует; впрочем, об этом уже говорилось.

Как бы то ни было, приходится только еще раз повторить, что как «полевые», так и лабораторные исследования бароэлектрических полей почти еще и не начаты. Польза же от таких исследований представляется несомненной. Кроме того, что БЭ интересен сам по себе как физическое явление, его изучение может, как мы пытались показать, иметь важные геофизические и астрофизические применения; оно может быть также полезным для изучающих физику проводников, что также представляет и общефизический, и прикладной интерес.

Пожелания можно адресовать и геофизикам. Действительно, бароэлектрическое поле доступно экспериментальным исследованиям, хотя здесь есть определенные тонкости и затруднения, порождаемые «безваттностью» этого поля. Таких прямых исследований пока еще не было, а они и действительно необходимы, и осуществимы.

Нельзя не отметить, раз уж затронута геофизика, что в проблемах геоэлектрики накопилось едва ли не наибольшее число неясных, а то и просто ошибочных положений.

О магнитных полях: здесь также имеется ряд вопросов, ожидающих решения. В частности, это касается магнитного поля внутри Земли. Как показано в гл. 2, часть магнитного поля в недрах Земли, обязанная БЭ, по ее изменению в зависимости от глубины радикально отличается от дипольного. Поэтому, если бы представилась возможность измерять как горизонтальную, так и вертикальную компоненты  $H$  на различных глубинах, это дало бы важную информацию. Заметим, что хотя попытки таких исследований уже предпринимались, результаты пока довольно противоречивы.

Пожелания касаются также и необходимости систематического слежения за вариациями как магнитного, так и электрического полей во многих пунктах и, что весьма важно, в единой шкале времени.

Магнитное поле уже давно является объектом постоянных исследований, а электрическое поле изучается несравненно менее обстоятельно, хотя для такого изучения не требуется дорогостоящей аппаратуры, и она могла бы быть установлена повсюду, где занимаются геомагнитными измерениями. Что это может дать, мы подробно обсуждали выше; здесь же уместно напомнить хотя бы о том, какое это может иметь значение для прогнозирования сейсмических событий.

Тщательное исследование электрического поля необходимо также и для уяснения того, каков вклад «приливных» эффектов в поле ясной погоды, что обсуждалось в гл. 5.

Безусловно, на геоэлектронное поле оказывают значительное влияние и процессы в атмосфере, которые мы вовсе не обсуждали, ограничившись лишь рассмотрением «приливных» бароэлектрических эффектов. Если говорить об экспериментальной реализации, это ближе всего соответствует ситуации на небесных телах, вовсе лишенных атмосферы. На Земле же эффекты различной природы наслаиваются и роль БЭ далеко не всегда является доминирующей.

Помимо отмеченных выше, еще многие другие вопросы, касающиеся как теоретического, так и экспериментального исследования, ждут еще пока разрешения, а то даже и постановки, и авторы вполне отчетливо понимают, что их книга — всего только первые шаги на этом пути.

Появление настоящей книги обязано, в основном, инициативе и профессиональному подходу одного из авторов: Е. В. Григорьева является геофизиком. Другие авторы ранее занимались вопросами теоретической физики, далекими от геофизики и даже не подозревали, какая это увлекательная наука. По мере того, как в течении полутора десятков лет накапливались все новые результаты, которые стало трудно вмещать в рамки журнальных публикаций, все явственнее делалась потребность объединить их — так появилось первое издание этой книги. Но за последующие годы накопилось значительное число новых результатов, в частности, касающихся электрических полей небесных тел, которые нашли отражение в этом втором издании.

Понимая, что многие ее места могут вызвать критическое отношение хотя бы уже из-за нетрадиционности постановки и решения ряда проблем, и будучи заранее признательными будущим критикам, авторы все же хотели бы надеяться, что эта книга может вызвать интерес и принести пользу.

Мы благодарны всем, чей интерес и внимание к работе очень помогали нам, в частности, профессору В. И. Денисову, А. А. Зубрило, В. А. Ильиной, П. К. Силаеву, А. П. Крыловой, В. Ф. Березницкой и Р. А. Бунатян.

Особо хотелось бы поблагодарить профессора В. И. Трухина и Ю. П. Гнедовского, поддержка которых имела для выхода этой книги решающее значение.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В конце гл. 2 было упомянуто о «концентрационном» электрическом поле. Для количественного описания этого поля удобно использовать квантово-статистический метод Томаса-Ферми.

Полная энергия электронов в модели Томаса-Ферми записывается в виде  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{кин} + \mathcal{E}_{пот}$  (модель относится к квазиклассическому приближению). Для кинетической энергии принимается выражение

$$\mathcal{E}_{кин} = \varkappa \int dV n^{5/3}(\mathbf{r}), \quad (\text{П1})$$

где

$$\varkappa = \frac{3}{10} a_B e^2 (3\pi^2)^{3/2}.$$

Потенциальная энергия

$$\mathcal{E}_{пот} = \frac{f}{2} \int dV \int dV' \frac{n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - Z \int dV \frac{n(\mathbf{r})}{r}. \quad (\text{П2})$$

Первый член относится к взаимодействию между электронами. В модели Томаса-Ферми множитель  $f = 1$ . Однако при этом не удается получить конечное значение для радиуса атомной ячейки при нулевом давлении. Этот недостаток устраняется, например, в том модифицированном варианте, который получил название метода Ферми-Амальди, где для  $f$  принимается выражение  $f = 1 - \frac{1}{N}$ . Этот прием позволяет, хотя и довольно грубым способом, исключить из рассмотрения собственную энергию электронов и приводит к конечным значениям для радиусов атомных ячеек при нулевом давлении. Число электронов в ячейке  $N$  в дальнейшем будет приниматься равным  $Z$ , т. е. ячейки, как и в методе Хартри-Слейтера-Фока, будут считаться электронейтральными.

Пользуясь вариационным методом и учитывая при этом, что число частиц  $N = \int dV n$  постоянно, можно записать

$$\delta(\mathcal{E} + e\lambda N) = 0. \quad (\text{П3})$$



Множитель Лагранжа удобно представить в виде  $\epsilon\lambda$ ; он имеет физический смысл химического потенциала с обратным знаком.

Вариационное условие (2) приводит к уравнению Ферми-Амальди, которое при наличии сферической симметрии, когда полный потенциал  $V(r)$  электронов в ячейке зависит только от расстояния  $r$  до ядра, получается таким:

$$\frac{d^2}{dr^2} \{r(V^* - \lambda)\} = 4\pi \left(\frac{3}{5\alpha}\right) \frac{f}{\sqrt{r}} \{r(V^* - \lambda)\}^{3/2}, \quad (\text{П4})$$

где

$$V^* = V(r) - \frac{1}{N} \int dV' \frac{n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{П5})$$

Помимо уравнений при рассмотрении распределения электронов в атомной ячейке радиуса  $b$  важную роль играют и граничные условия. Мы запишем их таким образом: при  $r \rightarrow b$

$$rV(r) = Z$$

и

$$\frac{dV}{dr} = 0.$$

Перераспределение зарядов при наличии градиента давлений может порождаться, помимо БЭ и еще одним, не рассматривавшимся выше эффектом: при появлении локальных областей повышенного давления возникает местное повышение концентрации положительно заряженных ионов — атомных остовов; такое уплотнение носителей положительных зарядов не может полностью компенсироваться (речь идет об электронейтральности) уплотнением облака валентных электронов ввиду наличия у последних некоторой дополнительной жесткости, обязанной, в основном, принципу Паули. Это также приводит к передавливанию электронов из областей больших в области меньших давлений. Этот эффект отличается от рассматривавшегося выше, так как он не исчезал бы, даже если бы плотность «избыточной» энергии была бы во всех точках одинаковой. Для описания электрических полей, которые также должны появляться благодаря указанному передавливанию, мы и используем модель Томаса-Ферми.

Полный макроскопический (т. е. усредненный по физически бесконечно малым объемам) потенциал есть  $V = V^{(+)} + V^{(-)}$ ,

где  $V^{(+)}$  — потенциал поля, порождаемого положительно заряженными атомными остовами, а  $V^{(-)}$  — «облаком» электронов проводимости.

Потенциал  $V^{(+)}$  определяется уравнением Пуассона

$$\Delta V^{(+)} = -4\pi\rho^{(+)} \quad (\text{П6})$$

Плотность положительных зарядов  $\rho^{(+)}$  может быть представлена в виде  $\rho^{(+)} = \frac{e}{M}\tau$ , где  $e$  — заряд одного остова,  $M$  — его масса. Ниже мы, как правило, будем полагать  $e = 1$ , но пока удобно не делать этой подстановки.

Плотность вещества зависит от давления:  $\tau = \tau(p)$ .

Потенциал поля, порождаемого электронным облаком, также задается уравнением Пуассона  $\Delta V^{(-)} = 4\pi en$ , где  $n$  обозначает электронную плотность. Учитывая уже указанную выше зависимость кинетической энергии электронов от  $n$ , пользуясь опять вариационным методом и учитывая уравнения Пуассона для  $V^{(+)}$  и  $V^{(-)}$ , можно записать для полного потенциала уравнение

$$\Delta V = 4\pi \left( \frac{3e}{5\alpha} (V - \lambda) \right)^{3/2} - \frac{4\pi e}{M} \tau \quad (\text{П7})$$

Удобно, произведя замену  $V - \lambda \rightarrow V$ , придать этому уравнению вид

$$\Delta V = 4\pi e \left( \frac{3e}{5\alpha} V \right)^{3/2} - \frac{4\pi e}{M} \tau \quad (\text{П8})$$

Поскольку возникновение поля связывается с наличием неоднородных плотностей, то при отсутствии таких неоднородностей, т.е. когда  $\tau = \tau_0$ , постоянное значение потенциала можно задать условием

$$4\pi e \left( \frac{3eV_0}{5\alpha} \right)^{3/2} = \frac{4\pi e}{M} \tau_0 \quad (\text{П9})$$

Потенциал, однако, перестает быть постоянным, если плотность меняется от точки к точке:  $\tau = \tau(r)$ ; при этом  $V_0$  уже не удовлетворяет уравнению (П8). Это положение вполне очевидно: эффект, который мы обсуждаем, как раз и состоит в том, что если возникают неоднородности плотности в проводнике, то создается электрическое поле. Заметим, что появление неоднородностей

плотности может быть вызвано неоднородностью внутренних напряжений в проводнике, чем бы эта последняя ни вызывалась: особенностью внешних воздействий или даже «историей приготовления» проводника (здесь уместно напомнить о «потенциале наклепа»).

Если давления невелики,  $p \ll p_F$ , то плотности отличаются от «невозмущенных» значений лишь на относительно малые величины  $\tau = \tau_0 + \tau_1$ , где  $\tau_1 \ll \tau_0$ . Естественно, что при этом малыми оказываются и возмущения потенциала, так что можно записать

$$V = V_0 + V_1; \quad V_1 \ll V_0; \quad V^{3/2} \approx V_0^{3/2} + \frac{3}{2} V_0^{1/2} V_1. \quad (\text{П10})$$

После такой линеаризации уравнение для  $V_1$  принимает вид

$$\Delta V_1 = 4\pi e \left( \frac{3e}{5\alpha} \right)^{3/2} \left\{ V_0^{3/2} + V_0^{1/2} V_1 \right\} - \frac{4\pi e}{M} \tau_0 - \frac{4\pi e}{M} \tau_1. \quad (\text{П11})$$

Пользуясь условием (П9), можно упростить это уравнение:

$$\Delta V_1 = A^2 V_1 - \frac{4\pi e}{M}, \quad (\text{П12})$$

$$A \equiv \frac{18\pi e^2}{5\alpha} \left( \frac{\tau_0}{M} \right)^{1/3}. \quad (\text{П13})$$

Обратимся к наиболее простому одномерному варианту, когда  $\tau_1 = \tau_1(x)$  и поэтому  $V_1$  также зависит только от  $x$ , так что можно переписать уравнение (П13) в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} V_1(x) = A^2 V_1 - \frac{4\pi e}{M} \tau_1. \quad (\text{П14})$$

Полученное уравнение для  $V_1$  имеет общее решение в квадратурах:

$$V_1(x) = \frac{4\pi e}{M} \left\{ \varphi_1 \int dx \frac{\varphi_2 \tau_1}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2} - \varphi_2 \int dx \frac{\varphi_1 \tau_1}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2} \right\} + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2, \quad (\text{П15})$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения  $V_1'' = A^2 V_1$ .

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в обсуждаемой нами задаче можно принять равными нулю, так как  $V_1 = 0$  при  $\tau_1 = 0$ .

Подставляя  $\varphi_{1,2} = \exp(\pm Ax)$ , получим

$$V_1 = \frac{2\pi e}{MA} \left\{ e^{-Ax} \int dx' \tau_1(x') e^{Ax'} - e^{Ax} \int dx' \tau_1(x') e^{-Ax'} \right\} \quad (\text{П16})$$

плюс постоянная интегрирования, которую мы также положим равной нулю.

Дальнейшая конкретизация требует задания вида  $\tau_1$ . Пусть, например, зависимость  $\tau_1(x)$  линейна:  $\tau_1 = ax$ . Если деформация, вызывающая появление неоднородностей плотности, подчиняется закону Гука, то множитель пропорциональности  $a$  должен быть обратно пропорционален модулю упругости  $B$  и прямо пропорционален объемной плотности силы, вызывающей деформацию; в данном случае, когда деформации упругие, а  $\tau_1 = ax$ , эта плотность постоянна и направлена по оси  $x$ . Множитель  $a$  пропорционален также невозмущенной плотности  $\tau_0$ , Потенциал при этом получается равным

$$V_1(x) = \frac{4\pi a e}{MA^2} x. \quad (\text{П17})$$

Поле, имеющее такой потенциал, однородно, а модуль его напряженности

$$|\mathbf{E}| = \frac{4\pi e a}{MA^2}.$$

Поле это направлено противоположно  $\nabla \tau_1$ . Это находится в соответствии с той качественной физической картиной, которая была обрисована выше, когда обсуждалось перераспределение зарядов. Нужно, однако, заметить, что поскольку электрическое поле получилось в обсуждаемом примере однородным, объемная плотность зарядов оказывается нулевой, так что поле порождается только поверхностными зарядами.

Экспериментальная реализация рассмотренной одномерной задачи, в которой  $\tau_1(x)$  меняется по линейному закону, вполне ясна: это просто плоско-параллельная плита, покоящаяся на жесткой горизонтальной опоре и испытывающая воздействие однородного гравитационного поля — это предполагает, что толщина плиты невелика, в частности, она много меньше ее горизонтальной протяженности.

Плотность объемной (гравитационной) силы при этом  $\mathbf{f}_g = g\tau_0$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. Тогда распределение плотности в плите можно записать так:

$$\tau = \tau_0 - \frac{g\tau_0^2}{B}x. \quad (\text{П18})$$

Постоянная  $a$  оказывается при этом равной  $-g\tau_0^2$ , а напряженность поля имеет величину

$$|E| = \frac{4\pi g\tau_0^2}{MA^2B} \approx 10^{-8} \text{ В/см.}$$

Попутно отметим, что  $|V_1/V_0| = 2g\tau_0 x/B \approx 10^{-7}x$ , что при обычных «лабораторных» масштабах  $x$  действительно много меньше единицы, как это и принималось выше.

Полученная нами оценка для напряженности электрического поля близка к той, которая устанавливалась для упоминавшегося нами поля Барнхилла-Шиффа, что и было отмечено в конце гл. 2.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Обозначения:

$b$  — радиус атомной ячейки;

$\mathcal{E}(b)$  — полная энергия ячейки при данном радиусе;

$p$  — давление, вычисляемое по формуле

$$p = -\frac{1}{4\pi b^2} \frac{\partial \mathcal{E}(b)}{\partial b}.$$

Все величины даются в атомных единицах.

Натрий  $Z = 11$

| $b$   | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                    |
|-------|------------------|------------------------|
| 1,036 | -676,8259236     | $-1,745 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,034 | -676,8259384     | $1,603 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,032 | -676,8250504     | $5,052 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,030 | -676,8232296     | $8,602 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,028 | -676,8204454     | $1,226 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,026 | -676,8167014     | $1,602 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,024 | -676,8119666     | $1,987 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,022 | -676,806235      | $2,385 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,020 | -676,7994856     | $2,793 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,018 | -676,7917066     | $3,211 \cdot 10^{-2}$  |

Магний  $Z = 12$

| $b$   | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                    |
|-------|------------------|------------------------|
| 1,370 | -817,8627668     | $9,948 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,371 | -817,8628314     | $5,291 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,372 | -817,8628518     | $1,016 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,373 | -817,8628254     | $-2,879 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,374 | -817,8627536     | $-6,609 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,375 | -817,8626372     | $-9,543 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,376 | -817,86248       | $-1,223 \cdot 10^{-2}$ |

Алюминий  $Z = 13$ 

| $b$   | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                    |
|-------|------------------|------------------------|
| 1,800 | -987,846         | $7,406 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,850 | -987,93972       | $1,282 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,900 | -987,95924       | $5,183 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,920 | -987,9628        | $2,560 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,930 | -987,96366       | $1,328 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,935 | -987,96392       | $7,352 \cdot 10^{-4}$  |
| 1,940 | -987,96402       | $1,554 \cdot 10^{-4}$  |
| 1,941 | -987,96402       | $4,106 \cdot 10^{-4}$  |
| 1,942 | -987,96402       | $-7,273 \cdot 10^{-5}$ |
| 1,965 | -987,96354       | $-1,504 \cdot 10^{-3}$ |

Кремний  $Z = 14$ 

| $b$   | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                   |
|-------|------------------|-----------------------|
| 1,860 | -1180,3790272    | $1,119 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,865 | -1180,3812512    | $9,291 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,870 | -1180,3830684    | $7,423 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,875 | -1180,3844854    | $5,589 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,880 | -1180,3855084    | $3,787 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,885 | -1180,3861428    | $2,018 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,886 | -1180,3862236    | $1,668 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,887 | -1180,3862888    | $1,319 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,888 | -1180,3863392    | $9,717 \cdot 10^{-4}$ |
| 1,889 | -1180,3863748    | $6,256 \cdot 10^{-4}$ |
| 1,890 | -1180,3863954    | $6,807 \cdot 10^{-4}$ |
| 1,891 | -1180,3864       | $6,807 \cdot 10^{-5}$ |
| 1,892 | -1180,3863894    | $4,053 \cdot 10^{-4}$ |
| 1,893 | -1180,3863654    | $7,464 \cdot 10^{-4}$ |

Калий  $Z = 19$ 

| $b$   | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                    |
|-------|------------------|------------------------|
| 1,682 | -2438,544224     | $2,545 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,684 | -2438,545804     | $2,106 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,685 | -2438,54648      | $1,887 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,687 | -2438,547598     | $1,451 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,688 | -2438,548052     | $1,270 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,689 | -2438,548438     | $1,016 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,691 | -2438,548992     | $5,874 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,692 | -2438,5492       | $3,677 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,693 | -2438,549234     | $1,524 \cdot 10^{-3}$  |
| 1,694 | -2438,549264     | $-6,244 \cdot 10^{-4}$ |
| 1,696 | -2438,5492       | $-4,909 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,698 | -2438,5486       | $-1,031 \cdot 10^{-2}$ |

Титан  $Z = 22$ 

| $b$  | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                   |
|------|------------------|-----------------------|
| 1,62 | -3443,259        | $1,209 \cdot 10^{-1}$ |
| 1,63 | -3443,2926       | $8,825 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,64 | -3443,3170       | $5,878 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,65 | -3443,3324       | $3,235 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,66 | -3443,3394       | $8,854 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,67 | -3443,3388       | $1,180 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,68 | -3443,3308       | $2,970 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,69 | -3443,3160       | $4,495 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,70 | -3443,2948       | $5,764 \cdot 10^{-2}$ |



Железо  $Z = 26$ 

| $b$   | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                    |
|-------|------------------|------------------------|
| 1,10  | -5123,5308       | $3,337 \cdot 10^2$     |
| 1,12  | -5125,2002       | $4,467 \cdot 10^0$     |
| 1,14  | -5126,5326       | $3,488 \cdot 10^0$     |
| 1,16  | -5127,57         | $2,689 \cdot 10^0$     |
| 1,18  | -5128,3506       | $1,906 \cdot 10^0$     |
| 1,20  | -5128,9078       | $1,283 \cdot 10^0$     |
| 1,22  | -5129,271        | $1,283 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,24  | -5129,4672       | $3,217 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,252 | -5129,514218     | $1,002 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,254 | -5129,51737      | $6,612 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,255 | -5129,518458     | $4,934 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,256 | -5129,519222     | $3,274 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,257 | -5129,51985      | $1,634 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,258 | -5129,519984     | $1,307 \cdot 10^{-4}$  |
| 1,26  | -5129,51937      | $-3,172 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,262 | -5129,517428     | $-6,283 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,264 | -5129,51437      | $-9,219 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,266 | -5129,510098     | $-1,228 \cdot 10^{-1}$ |
| 1,268 | -5129,50461      | $-1,517 \cdot 10^{-1}$ |
| 1,27  | -5129,498        | $-1,799 \cdot 10^{-1}$ |
| 1,28  | -5129,4482       | $-3,100 \cdot 10^{-1}$ |

Ртуть  $Z = 80$ 

| $b$   | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                    |
|-------|------------------|------------------------|
| 1,41  | -74074,0         | $8,998 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,42  | -74074,14        | $5,820 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,43  | -74074,26        | $3,202 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,44  | -74074,3         | $1,179 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,442 | -74074,31024     | $8,474 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,444 | -74074,31406     | $7,159 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,445 | -74074,31532     | $3,830 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,446 | -74074,31618     | $2,404 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,447 | -74074,3166      | $1,034 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,448 | -74074,3166      | $-2,803 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,449 | -74074,31618     | $-1,540 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,450 | -74074,316       | $-1,368 \cdot 10^{-2}$ |

Свинец  $Z = 82$ 

| $b$  | $\mathcal{E}(b)$ | $p$                    |
|------|------------------|------------------------|
| 1,63 | -78531,03        | $3,544 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,63 | -78531,182       | $1,992 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,63 | -78531,112       | $7,695 \cdot 10^{-2}$  |
| 1,63 | -78531,122       | $-1,350 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,63 | -78531,106       | $-1,330 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,63 | -78531,074       | $-1,034 \cdot 10^{-1}$ |

## Литература

1. Григорьев В. И., Григорьева Е. В., Ростовский В. С. Бароэлектрический эффект и электромагнитные поля планет и звезд. Изд-во Моск. ун-та, 1995.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
3. Яновский Б. М. Земной магнетизм. Изд-во Ленинградск. ун-та, 1978.
4. Sutherland W. // *Terrastr. Magn. planet Sci.* 1903. V. 2. P. 249; *Atm. Electr.* 1903. V. 8. P. 49.
5. Schlotka T. // *Zs. Geophys.* 1933. V. 9, № 1/2. P. 99.
6. Долгинов А. З. // УФН. 1982. Т. 152, вып. 2. С. 231.
7. Lagmor J. // *Rev. Brit. Assoc. / Adv. Sci.* 1910. P. 159.
8. Френкель Я. И. // *Изв. АН СССР. Сер. Физ.* 1947. Т. 11, № 6. С. 587; *Теория явлений атмосферного электричества.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. С. 587.
9. Зельдович Я. Б., Рузмайкин Ф. Ф. // УФН. 1982. Т. 152, вып. 2. С. 263.
10. Shiff L. I., Barnhill M. V. // *Phys. Rev.* 1966. V. 151. P. 1067.
11. Dressler L. I., Michel F. C., Rorschach H. E. // *Phys. Rev.* 1968. V. 162. P. 737.
12. Herring C. // *Phys. Rev.* 1968. V. 171. P. 1361.
13. Harrison W. A. // *Phys. Rev.* 1969. V. 180. P. 1806.
14. Rigel I. J. // *Phys. Rev.* 1970. V. 2, № 4. P. 825.
15. Leung M. C. // *Nuovo Cim.* 1972. № 2. P. 220.
16. Kumar N., Nadini R. // *Phys. Rev.* 1973. D, 7, № 12. P. 3586.
17. Ашкрофт Н., Мермин Н. *Физика твердого тела.* М.: Мир, 1979.
18. Григорьев В. И., Григорьева Е. В. // *Вестник Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астроном.* 1984. Т. 25, № 2. С. 40.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика.* М.: Наука, 1976.

20. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1976, 1983.
21. Квасняков И. А. Термодинамика и статистическая физика. Изд-во Моск. ун-та, 1991.
22. Slater J. // Phys. Rev. 1951. V. 81. P. 385.
23. Herman F., Skillman Sh. Atomic Structure calculations. New Jersey, 1963.
24. Fermi E. // Rend Lincei. 1926. V. 3. P. 145.
25. Fermi E. // Zs. f. Phys. 1926. V. 36. P. 902.
26. Гамбош П. Статистическая теория атома и ее применения. М.: ИЛ, 1951.
27. Киржниц Д. А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 1545.
28. Киржниц Д. А. и др. // УФН. 1975. Т. 117, № 1. С. 3.
29. Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В. // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 3. С. 768.
30. Cowan R. D., Ashkin J. // Phys. Rev. 1957. V. 105. P. 144.
31. Cody W. J., Thachtr H. C. // Math. of computations. 1967. V. 21, № 97. P. 30.
32. Никифоров А. Ф. Вычислительные методы решения задач квантовой механики. Изд-во Моск. ун-та, 1981.
33. Fermi E., Amaldi E. // Men. Acc. Italia. 1934. V. 6. P. 117.
34. Калев А. А. Препринт НИИЯФ МГУ. 1990. № 90-35/181 М.
35. Blacket M. B. // Nature. 1947. V. 159. P. 307; Phys. Trans. R. Soc. A. 1947. V. 245. P. 307.
36. Borra Ermanno F., Landstreet J. D. // J. Suppl. 1980. V. 42. P. 421.
37. Landolt-Bornstein Zahlen und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik. 1981.
38. Долгинов Ш. Ш. Магнетизм планет. Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ, 1982. С. 3.
39. Elder J. W. The structure of the Planets. USA Academic Press, 1987.
40. De Pater I. // Science News. 1988. V. 134, № 20. P. 310.
41. Материалы международного совещания по проблеме «Физика и эволюция звезд». Нижний Архыз, 12–27 октября 1988 г. Л., 1988.
42. Гандельман Г. М. // ЖЭТФ. 1962. Т. 23, вып. 1 (7). С. 131.
43. Жарков В. Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука, 1983.
44. Лебедев П. Н. // Журнал Русск. физ.-хим. о-ва. Физ. отд. 1911. Т. 43. С. 484.
45. Swann W., Lingacre F. G. // Franclin Inst. 1928. V. 205, № 4. P. 421.

46. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. // Теория упругости. М.: Наука, 1965.
47. Васильев Б. В. Препринт ОИЯИ № Р14-84-405. Дубна, 1984.
48. Григорьев В. И., Копин Е. М. Препринт ИГН-88. Арм.ССР, 1988.
49. Чалмерс Дж. Ф. Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
50. Craig P. // Phys. Rev. Letters. 1969. V. 22, № 14. P. 8.
51. Абдулбеков Г. Ф., Мигунов Н. И., Моргунов В. А., Пономарев А. В., Садовский М. Ф., Самохвалов М. А., Соболев Г. Ф., Уломов В. И., Усманов М. Т., Хусамиддинов С. С., Хромов А. А. Полевые наблюдения возмущений электромагнитного поля Земли. Препринт ИФЗ № 8. М., 1980.
52. Маслов Л. И., Сухаревский В. В. М. Деп. Ин-та металлургии АН СССР им. А. А. Байкова, 1987 / УДК 538-405.
53. Rosenblum B. Z., Braunlich P. F., Himmel L. J. // Appl. Phys. 1977. V. 48. P. 5262.
54. Dickinson J. T., Donaldson E. E., Park M. K. // J. Mater. Sci. 1981. V. 16. P. 2897.
55. Wollbrandt J., Linke E., Meyer K. // Phys. Stat. Sol. A. 1975. V. 27. P. 53.
56. Dickinson J. T., Jahan-Latibar A., Jensen L. C. // J. Mater. Sci. V. 20. P. 53.
57. Ключев В. А., Липсан А. Г., Топоров Ю. П., Алиев А. Д., Чалых А. Е., Дерягин Б. В. // ДАН СССР. Сер. Физ.-хим. 1984. Т. 297, № 2. С. 415.
58. Минеев В. Н., Иванов А. Г. // УФН. 1976. Т. 119. С. 75.
59. Гохберг М. Б., Гуфельд И. Л., Гершензон Н. И., Пилипенко В. А. // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1985. № 1. С. 72.
60. Электромагнитные предвестники землетрясений / Под ред. М. А. Садовского. М.: Наука, 1962.
61. Толмен Р. // Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974.
62. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. // Эйнштейновский сборник. М.: Наука, 1977; 1980.
63. Wilson H. A. // Proc. Roy. Soc. A. 1923. V. 104, № 727. P. 451.
64. Краев А. П. Основы геоэлектрики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
65. Имянитов М. И., Шифрин Л. С. // УФН. 1962. Т. 76, № 4. С. 593.
66. Григорьев В. И., Григорьева Е. В. // Вестник Моск. ун-та Сер.3. Физ. Астроном. 1991. Т. 32, № 5. С. 68.
67. Григорьев В. И., Григорьева Е. В. // Вестник Моск. ун-та. Сер.3. Физ. Астроном. 1995. Т. 36, № 1. С. 61.

68. Григорьев В. И., Григорьева В. И., Ростовский В. С. // Прикладная физика. 1995. № 3-4. С. 154.
69. Казимировский Э. С., Матафанов Г. К. // ДАН СССР. 1988. Т. 361, № 4. С. 544.
70. Hide R., Malin S. // *Natur.* 1970. V. 255, № 5233. P. 605.
71. Почтарев В. И. // Нормальное магнитное поле Земли. М.: Наука, 1984.
72. Гулельми А. В., Гохберг М. Б., Клайн Б. И., Русаков Н. Н. // ДАН СССР. 1987. Т. 293, № 4. С. 828.
73. Атлас корреляционных функций гравитационных и магнитных аномалий тел правильной формы / Под ред. Г. И. Каратаева. Ашхабад: ЫМЫМ, 1973.
74. Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Абасов И. И. // УФН. 1986. Т. 149, вып. 4. С. 709.
75. Луна / Сб. статей под ред. Г. А. Манаева. М.: ГИФМЛ, 1960.
76. Dollfus A. // *Ann. Astroph.* 1956. V. 19, № 2. P. 112.
77. Forell W. M., Kaiser M. L., Steinberger J. T., // *Geophys. Res. Lett.* (USA). 1997. V. 241. P. 1135.
78. Луна / Сб. статей под ред. С. Ранхорна, Г. Юри. М.: Мир, 1975.
79. Калинин Ю. Д. // Метрология и гидрология. 1949. № 3. С. 15.
80. Yestine E. H. // *J. Geoph. Res.* 1953. V. 58 P. 127.
81. Runcorn S. H., Benson A. C., Moore A. T., Griffiths D. H. // *Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1951. V. 244, № 878. P. 113.
82. Тихонов А. Н., Четаев Д. Н., Моргунов В. А. и др. // ДАН СССР. 1974. Т. 217, № 5. С. 1065.
83. Григорьева Е. В. // Физика Земли. 1990. Т. 10. С. 24.
84. Григорьев В. И., Ростовский В. С. // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астроном. 2000. № 3. С. 41.
85. Вандакуров Ю. В. // Конвекция на Солнце и 11-летний цикл. Л., 1976.
86. Howard R., Harvey J. // *Solar Physics.* 1970. V. 12, № 1. P. 21.
87. Киржниц Д. А., Шацкий А. А. // Астрофизика. 1966. Т. 39, вып. 3. С. 467; Киржниц Д. А. Собрание трудов. Т. 2. М.: Наука, 1996. С. 354.
88. Киржниц Д. А. // ЖЭТФ. 1954. Т. 27, вып. 1 (7). С. 6.

Научное издание

*ГРИГОРЬЕВ Владимир Иванович*  
*ГРИГОРЬЕВА Елена Владимировна*  
*РОСТОВСКИЙ Владимир Сергеевич*

**ВАРОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ  
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ПЛАНЕТ И ЗВЕЗД**

Редактор *Р.А. Бунатян*  
Оригинал-макет: *Р.А. Бунатян*  
Оформление переплета: *А.Ю. Алексина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 29.01.03.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 13,2. Заказ № 3284

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диалозитивов в ПФ «Полиграфист».  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.  
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.  
E-mail: form.pfp@votel.ru <http://www.vologda/~pfpv>

ISBN 5-9221-0391-1



9 785922 103916

69 В 2000–2002 годах

в издательстве «ФИЗМАТЛИТ» вышли из печати:

- 70  
71 *Волковський Л.И., Луц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории  
функций комплексного переменного: Учеб. пособие для вузов. — Изд.  
72 4-е, перераб.
- Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.  
Учебник для вузов. — Изд. 9-е, исправл.
- 73 *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Д., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие для вузов.  
Изд. 3-е, исправл.
- 74 *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Д., Шишкин А.А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие для вузов. — Изд. 2-е, исправл.
- 75 *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики: Учебник для вузов. — Изд. 2-е.
- 76 *Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А.* Решебник. Высшая математика.
- 77 *Карманов В.Г.* Математическое программирование — Изд. 5-е, исправл.
- 78 *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. В 3-х частях: Учебник для вузов. Изд. 2-е, исправл.
- 79 *Никольский С.Н.* Курс математического анализа: Учебник для вузов. Изд. 5-е, перераб.
- 80 *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. В 2-х томах: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, перераб.
- 81 *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. — Изд. 2-е, исправл. и дополн.
- 82 *Рябенский В.С.* Введение в вычислительную математику: Учеб. пособие. — Изд. 2-е, исправл.
- 83 *Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И. Кострикина.* — Изд. 3-е, исправл. и дополн.
- 84 *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Д.В. Беклемишева.* — Изд. 2-е, перераб.
- 85 *Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова.* — Изд. 4-е.
- 86 *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование. Учеб. пособие
- 87 *Треногин В.А.* Функциональный анализ: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, исправл.
- 88 *Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие. — Изд. 2-е, исправл. и дополн.
- Физтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. В 2-х томах: Учебник для вузов. — Изд. 7-е.