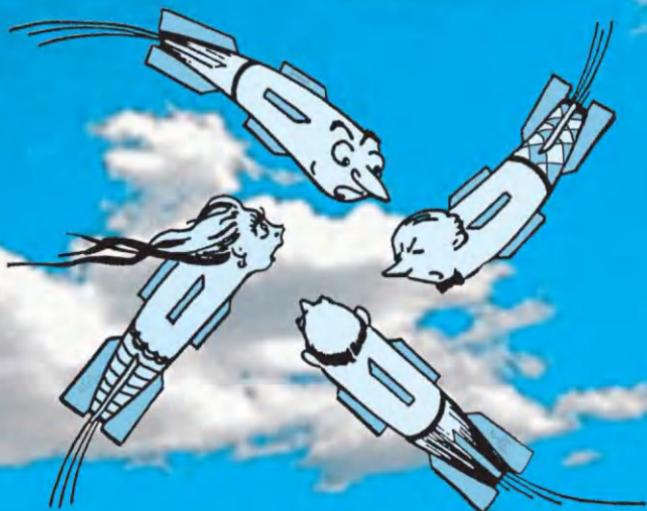


Т. ТАМОВ

М. СТЕРН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА



R&C
Dynamics

*Теодору фон Карману —
большому любителю задач-головоломок.*

GEORGE GAMOW, MARVIN STERN

PUZZLE-MATH

London
MacMillan & Co Ltd

1958

ГЕОРГИЙ ГАМОВ, МАРВИН СТЕРН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Перевод с английского
Ю. А. ДАНИЛОВА
Рисунки РЕБЕККИ ФАЙЛЗ
Графика ГЕОРГИЯ ГАМОВА

R&C
Dynamics

РХД

Москва • Ижевск

2001

УДК 518.95(088.6)

ББК 22.1я9

Г 186

Интернет-магазин

MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника

Внимание!

Новые проекты издательства РХД

- Электронная библиотека на компакт-дисках
<http://shop.rcd.ru/cdbooks>
 - Эксклюзивные книги — специально для Вас любая книга может быть отпечатана в одном экземпляре
<http://shop.rcd.ru/exclusive>
-

Гамов Г., Стерн М.

Занимательная математика. — Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 88 с.

Данная книга представляет из себя сборник интересных математических и физических задач-головоломок из различных областей науки. Каждая задача изложена в форме короткой истории. Сборник интересен не только школьникам старших классов, но и студентам младших курсов самых различных специальностей.

ISBN 5-7029-0341-2

ББК 22.1я9

- © Перевод на русский язык, Ю. А. Данилов, 2001
- © НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

Содержание

Предисловие к русскому изданию	7
Пролог. Как появилась на свет эта книга	10
1. Великий султан	13
Двенадцать и одна	14
Дела семейные	15
Сорок неверных жен	17
Казнь врасплох	20
Второе испытание Абдула	23
Скачки наоборот	25
2. Сэм-Игрок	27
Карточки в шляпе	28
Тузы	31
Вероятность случайного события	35
Бросание монет	36
Дни рождения	40
Теннисный турнир	41
Односторонняя игра	43
3. Старый машинист	47
Проходящие поезда	48
Встречные поезда	51
Шмель	54
Почтовые голуби	55
Летнее время	57
4. Путешествия расширяют кругозор	59
Три лица, испачканных сажей	60

Поцелуй в темноте	61
Хлебный рацион	62
5. Юный Николас	65
Домино на шахматной доске	66
Кирпичики	68
Разноцветные нити	71
6. Яхт-клуб	73
Под парусом в безветренную погоду	74
Лодка и бутылка	75
Джин и тоник	76
Баржа в шлюзе	78
7. Аэронавтика	79
Против ветра	80
Самонаводящиеся ракеты	82
Дозаправка	84
Эпилог. Мораль	86

Предисловие к русскому изданию

Жанр занимательной науки давно известен и любим в России. Предлагаемая вниманию читателя книга известного физика и популяризатора науки Георгия Антоновича Гамова (1904–1968) и сотрудника американской авиастроительной фирмы «Конвэр» Марвина Стерна — признанная жемчужина жанра. Она привлекает внимание оригинальностью, неожиданностью и красотой задач, сюжеты которых заимствованы авторами из научного фольклора, подсказаны учеными-коллегами, известными (астрофизиком Виктором Амазасповичем Амбарцумяном, специалистом по аэро- и гидродинамике Теодором фон Карманом и биохимиком Альбертом Сент-Дьерди) и не очень, а в большинстве своем придуманы авторами как бы специально для читателя.

Все задачи представлены в такой беллетризованной форме, что их с удовольствием могут (и, несомненно, будут) читать даже те, кто не любит математику. Никакой назидательности — полная благожелательность по отношению к читателю, юмор и блеск изложения отличают всю книгу от первой до последней страницы.

На русском языке книга Георгия Гамова и Марвина Стерна издается впервые.

1 марта 1999 г.

Ю. Данилов

Памяти Пат Ковичи

О волны, откройте мне вечную тайну,
Решите загадку, что мучила столько голов —
Голов в париках, ермолках, чалмах и беретах,
И сотни тысяч других, что ищут ответа и сохнут.
Скажите, что есть человек?
Откуда пришел он? Куда он идет?
И кто живет в вышине, на далеких сверкающих звездах?

Генрих Гейне, «Вопросы».
Из второго цикла «Северное море».
Пер. Ю. Очиченко

Пролог. Как появилась на свет эта книга

Летом 1956 года одному из нас (Г. Г.) приходилось часто бывать в Сан-Диего (Калифорния) в качестве консультанта самолетостроительной фирмы «Конвэр», в которой в качестве постоянного сотрудника работал другой из авторов (М. С.). Нам приходилось обсуждать множество (секретнейших!) проблем, а поскольку рабочий кабинет одного из нас (М. С.) находился на шестом этаже главного здания и был более комфортабельным, другой из нас (Г. Г.) обычно садился в лифт на втором этаже, где находился его рабочий кабинет. Для этого один из нас (Г. Г.) шел к лифту на втором этаже и нажимал кнопку, и первым обычно приходил лифт, который шел не в том направлении, которое было нужно, т. е. шел вниз. Примерно в пяти случаях из шести первым приходил лифт, который шел вниз, и только в одном случае — лифт, который шел вверх

— Послушайте, — сказал один из нас (Г. Г.) другому (М. С.), — вы что, непрерывно изготавливаете на крыше новые лифты и спускаете их на склад в подвале?

— Что за нелепая идея! — возмутился другой (М. С.). — Разумеется, ничего такого мы не делаем. Предлагаю вам подсчитать, сколько раз первым приходит лифт, идущий в нужном вам направлении, когда вы покинете мой кабинет на шестом этаже и будете возвращаться к себе на второй этаж.

Через несколько недель разговор снова зашел о лифтах, и один из нас (Г. Г.) вынужден был признать, что его первое замечание относительно лифтов было лишено смысла. Ожидая вызванного лифта на шестом этаже, он обнаружил, что примерно в пяти случаях из шести первым приходил лифт, идущий вверх, а не вниз. И Г. Г. быстро предложил объяснение этому загадочному явлению, противоположное первому: должно быть, компания «Конвэр» строила лифты в подвале и посылала готовые лифты на крышу, откуда производимые компанией самолеты доставляли их к месту назначения.

— Позвольте, — прервал его другой (М. С.), — я и не знал, что наша компания занимается производством лифтов... Разумеется, — продолжал он, — настоящее объяснение очень просто. Но позвольте мне преж-

де заметить, что если бы я и не знал, сколько этажей в этом здании, то теперь, располагая той информацией, которую вы мне сообщили, смог бы сказать, что в здании семь этажей.

— Но я ничего не говорил о высоте здания. Я только сообщил вам о том, с какими трудностями сталкиваюсь, поджидая лифт, идущий в нужном мне направлении.

— Верно, но разве вы не понимаете, что это классическая задача, которая лишь наглядно показывает, чем частота отличается от фазы?

Поразмыслив немного, мы нашли решение задачи (его вы найдете в истории «Проходящие поезда», стр. 48–51), но наши беседы позволили нам выяснить одно немаловажное обстоятельство: оказалось, что мы оба очень любим различного рода математические задачи-головоломки и каждый из нас знает превеликое множество их.

Поэтому мы решили собрать такие задачи в небольшой книжке, изложив каждую задачу в форме короткой истории. Та часть каждой истории, которая содержит условия задачи, напечатана обычным шрифтом, а та, которая содержит решение и ответ, — курсивом. Те из читателей, которые захотят испробовать свои силы и умение в решении задач-головоломок, должны прекращать чтение там, где начинается курсив.

Желаем удачи!

Лондеролл, Вудз Хоул, Массачусетс

*М. Стерн
Г. Гамов*

1.

Великий султан



Двенадцать и одна

Великий султан Квазиабабии ибн-аль-Каз сидел в своей сокровищнице, с удовольствием взирая на выстроенные в ряд у стены двенадцать больших кожаных мешков, набитых большими серебряными монетами. В мешках были подати, собранные эмиссарами султана в двенадцати провинциях, которыми он правил. На каждом мешке было отчетливо написано имя сборщика податей — эмиссара соответствующей провинции. Одна монета весила целый фунт¹, а так как все мешки были почти полными, то серебра было собрано много.

Внезапно дверь в сокровищницу отворилась, и стража ввела какого-то человека в лохмотьях, который бросился перед султаном на колени.

— Государь, — воскликнул он, воздев руку, — я пришел, чтобы сообщить тебе нечто очень важное.

— Говори, — повелел ибн-аль-Каз.

— Я состою на службе у одного из твоих эмиссаров, о, государь, и как твой верноподданный хочу сообщить о совершенном им предательстве и злодеянии. В мешке с присланными им податями каждая монета содержит на целую унцию меньше серебра, чем положено. Я сам был одним из тех, кто тер монеты грубой тканью до тех пор, пока каждая из них не полегчает ровно на одну унцию серебра. А поскольку мой хозяин несправедливо обошелся со мной, я решил поведать тебе истину.

— Кто твой хозяин? — спросил ибн-аль-Каз, грозно нахмурясь, — клянусь Аллахом, что завтра же ему отрубят голову, а ты получишь большую награду!

— Мой хозяин... — начал было человек в рубище. Но в этот момент кинжал, брошенный чей-то рукой, просвистел в воздухе и поразил говорившего в спину. Тот упал замертво.

Возможно, кому-нибудь покажется несложным делом определить, в котором из двенадцати мешков содержатся облегченные монеты, если бы у султана были достаточно точные весы, которые позволили бы отличить полновесные монеты в 16 унций серебра и облегченные монеты в 15 унций серебра. У султана, действительно, были такие весы, и

¹Принятые в Квазиабабии торговые единицы веса воспроизводят систему единиц, имевших хождение в Англии, США и Странах Содружества до введения метрической системы. В 1 торговом фунте 16 унций (453,59 г). В 1 унции 28,35 г. (Унция делилась на 16 драхм (по 1,77 г), драхма — на 3 скрупулы (по 0,59 г) и скрупула — на 10 гран (по 0,059 г)). — *Прим. перев.*

он их очень любил. Их изготовил по его заказу лучший специалист по точным измерительным приборам в Соединенных Штатах Америки, и были они сделаны по образу и подобию весов, которые в этой высокоразвитой индустриальной стране встречаются буквально на каждом шагу. У весов была платформа, на которую ставили взвешиваемый груз, и прорезь, в которую нужно было опустить монету в один пенни. Вместо того чтобы показывать вес стрелкой на шкале, весы отпечатывали чек с указанием точного веса в фунтах и унциях и полным предсказанием судьбы на обороте. Беда была в другом: среди всех сокровищ у султана ибн-аль-Каза была *только одна* американская монетка достоинством в один пенни. На платформу весов султан мог выложить серебряные монеты из всех мешков в любом ассортименте, но получить он мог только один чек с напечатанным точным весом всех монет на платформе.

Долго сидел султан, погруженный в глубокое раздумье, как вдруг ему в голову пришло решение. Если бы все монеты были одинакового веса, то весы всегда показывали бы целое число фунтов независимо от того, сколько монет положено на платформу из того или иного мешка. Но если среди монет окажется одна весом в 15 унций, то весы покажут общий вес во столько-то (целое число) фунтов и 15 унций, т. е. вес на 1 унцию меньший ближайшего целого числа фунтов. Если среди монет на платформе весов две, три или более облегченных, то показания весов будут, соответственно, на две, три и т. д. унции меньше ближайшего целого числа фунтов. Султан встал и, взяв из первого мешка одну монету, из второго — две монеты, из третьего — три монеты и т. д. вплоть до двенадцати монет — из двенадцатого мешка, сложил их столбиком на платформе весов и опустил монетку в один пенни в прорезь. На чеке оказался отпечатан вес: столько-то фунтов и 9 унций. Следовательно, в столбике было 7 облегченных монет. На седьмом мешке значилось: Али-бен-Узур, и на следующий день ранним утром голова Али-бен-Узура покатила на плату.

Дела семейные

Однажды великий султан ибн-аль-Каз столкнулся с поистине сложной проблемой. Его верховный визирь настаивал, чтобы султан издал соответствующие законы, дабы установить контроль над соотношением мужчин и женщин в будущем населении страны. Свои весьма настоячивые просьбы визирь обосновывал тем, что поскольку мальчиков и девочек рождается примерно поровну, представителям знатных,

но обедневших родов становится все труднее набирать гаремы, количество обитательниц которых соответствовало бы знатности рода. Сам султан был убежденным сторонником моногамии, но, разумеется, не мог становиться в оппозицию по отношению к визирю и тем более к господствовавшей в стране религии. Некоторое время султан молчал, погруженный в размышления, и только что-то бормотал себе под нос о случайных последовательностях. Наконец, на лице его появилась улыбка облегчения, означавшая, что головоломная задача решена, и султан обратился к визирю со словами:

— Решение проблемы очень просто! Я издам указ, по которому всем женщинам страны разрешается продолжать вынашивать очередного ребенка, только если до этого у них рождались девочки. Как только у женщины рождается первый сын, ей запрещается впредь рожать детей. За неповиновение этому закону наказанием будет изгнание за пределы Квазиабавии!

Все еще улыбаясь, султан продолжал:

— Этот закон, несомненно, возымеет до действие, о котором ты так печешься. Когда он будет объявлен и вступит в действие, ты увидишь женщин, у которых в семье будет четыре девочки и один мальчик, десять девочек и один мальчик, возможно, один-единственный мальчик и т. д. Отношение числа женщин к числу мужчин явно должно возрасти, как ты того и добивался.

Визирь, слушавший разъяснения султана по поводу будущего закона затаив дыхание, внезапно начал проявлять признаки понимания и встал в явно приподнятом настроении. Наконец-то он склонил султана к своему мнению! Визирь покинул султана и поспешил прочь: ему не терпелось распространить весть об одержанном им триумфе в формировании будущего страны.

Молодой принц невольно оказался свидетелем разговора и слышал формулировку нового закона. Со слезами на глазах он смиренно предстал перед отцом и, обращаясь к нему, воскликнул:

— О великий султан, неужели ты поддашься прихотям этого фанатика?

Султан засмеялся и знаком показал, чтобы сын приблизился:

— Я и не думал поддаваться этим дурацким требованиям.

— Но, отец, ведь ты...

— Хо-хо! — рассмеялся султан. — Позволь мне объяснить истинный смысл закона, который я только что издал. В действительности

мой закон будет по-прежнему поддерживать равную долю мужчин и женщин в населении моей страны.

— Но каким образом, отец? Я не понимаю.

— Проще всего это можно понять следующим образом, — ответил султан. — Предположим для простоты, что все женщины Квазиабави одновременно рожают своего первого ребенка. Девочек и мальчиков среди первенцев поровну — половина девочек и половина мальчиков. На этом этапе соотношение мужчин и женщин мы сохранили на прежнем уровне — один к одному.

Закон требует, чтобы половина женщин, родивших первенца — мальчика, больше не имела детей. Другая половина женщина родит по второму ребенку. Во втором «раунде» мальчиков и девочек будет поровну, т. е. мальчиков будет столько же, сколько девочек. Поэтому если мы объединим результаты первого и второго «раундов», то отношение количества мальчиков к количеству девочек окажется одним к одному.

После второго раунда половина женщин (т. е. те, кто родил второго ребенка — мальчика) выбывает, а оставшаяся половина женщин (те, кто родил второго ребенка — девочку) допускаются к участию в третьем «раунде». И опять одна половина родившихся младенцев окажется мальчиками, а другая половина — девочками.

Так что, сын мой, отношение между количеством мужчин и количеством женщин сохраняется. Поскольку каждый раз (в каждом «раунде») отношение количества мальчиков к количеству девочек остается один к одному, то при суммировании результатов всех раундов отношение один к одному сохраняется¹.

Сорок неверных жен²

Великий султан ибн-аль-Каз был очень обеспокоен большим количеством неверных жен среди жительниц столицы его государства. Сорок женщин открыто изменяли своим мужьям, но, как это часто бывает, хотя об их неверности знали все, их мужья оставались в полном неведении относительно поведения своих жен. Дабы наказать падших

¹ Великий султан предполагает в своих рассуждениях, что соотношение мальчиков и девочек равно. Это не вполне корректно с точки зрения биологии. — Прим. авт.

² Сюжет этой истории сообщил одному из нас (Г. Г.) проф. Виктор Амазаспович Абмарцумян. (Академик В. А. Амбарцумян — выдающийся астрофизик. — Прим. перев.)

женщин, султан издал указ, разрешавший мужьям неверных жен убивать их, разумеется, если мужья вполне уверены в измене нечестивиц. В указе султана ничего не говорилось о числе неверных жен и не назывались их имена. Говорилось только, что такие случаи в главном городе Квазиабабии известны, и предлагалось мужьям предпринять что-нибудь для неповторения супружеских измен впредь. Но к великому удивлению законопослушных подданных султана и всей городской полиции ни в день объявления указа, ни в последующие дни не стало известно ни об одном случае убийства неверной жены мужем. Прошел целый месяц — никаких результатов. Стало создаваться впечатление, что обманутые мужья не очень-то заботятся о том, чтобы спасти свою поруганную честь.

— О великий султан, не объявить ли нам имена сорока неверных жен, — предложил однажды визирь ибн-аль-Казу, — коль скоро мужья слишком ленивы, чтобы самим справиться со своими проблемами?

— Нет, — возразил султан, — подождем. Мои подданные ленивы, но они, несомненно, весьма хитроумны и очень мудры. Я совершенно уверен, что очень скоро последуют действия.

И, действительно, на сороковой день после оглашения указа действия внезапно последовали. В одну ночь были убиты сорок женщин. Как показало незамедлительно проведенное расследование, это были те самые сорок распутниц, которые, как всем было известно, изменяли своим мужьям.

— Не понимаю, — воскликнул пораженный случившимся визирь, — почему сорока обманутым мужьям потребовалось так много времени, чтобы предпринять решительные действия, и почему они предприняли, наконец, действия в один и тот же день?

— Все очень просто, мой дорогой Ватсон, — засмеялся султан. — Должен признаться, я ожидал, что добрая весть придет именно в тот день, когда она пришла. Мои подданные, как я уже говорил, может быть, очень ленивы, чтобы организовывать слежку за женами и устанавливать их верность или неверность, но они показали, что достаточно умны, чтобы разрешить возникшую проблему путем чисто логического анализа.

— Боюсь, что не понимаю тебя, о великий султан, — промолвил визирь.

— Немного терпенья. Предположим, что неверных жен не сорок, а всего лишь одна. В этом случае все, за исключением одного-единст-

венного человека — ее мужа, знают о ее прелюбодеянии. Но ее муж, пребывая в убеждении, что его жена верна ему, и оставаясь в неведении относительно других случаев нарушения супружеской верности (о чем он, несомненно, слышал бы), был бы в полном убеждении, что все жены в городе, в том числе и его собственная жена, верны своим мужьям. Если бы он прочитал мой указ, в котором говорится о том, что в городе есть неверные жены, то понял бы, что речь может идти только о его собственной жене. И тогда он убил бы ее в самую первую ночь после объявления моего указа, ты согласишься за ходом моих рассуждений?

— Да, государь, — отвечивал визирь.

— Предположим теперь, — продолжал султан, — что обманутых мужей двое. Назовем их Абдулой и Хаджибабой. Абдула знает, что жена Хаджибабы изменяет своему мужу, а Хаджибаба располагает аналогичными сведениями о жене Абдулы. Но каждый из них считает, что его собственная жена ему верна.

В день обнародования моего указа Абдула говорит себе:

— Ага. Сегодня ночью Хаджибаба убьет свою жену. С другой стороны, Хаджибаба думает то же самое об Абдуле. Но то, что на следующее утро жены того и другого все еще живы, доказывает и Абдуле, и Хаджибабе, что они ошибались, думая, будто их жены им верны. И тогда на вторую ночь оба пустили бы в ход кинжалы, и жены обоих были бы убиты.

— До сих пор я проследил за ходом твоих рассуждений, о великий султан, — заверил своего повелителя визирь, — но как быть, если неверных жен три или больше?

— В этом случае нам придется прибегнуть к тому, что принято называть математической индукцией. Я только что доказал тебе, что если бы в городе было только две неверные жены, то мужья в силу чисто логической дедукции должны были бы убить их на вторую ночь после обнародования моего указа. Но предположим, что теперь неверные жены у трех моих подданных, назовем их Абдулой, Хаджибабой и Фаруком. Фарук, разумеется, знает, что жены Абдулы и Хаджибабы неверны своим мужьям, и ожидает, что Абдула и Хаджибаба убьют своих жен на вторую ночь. Но те почему-то этого не делают. Почему? Разумеется, потому, что его, Фарука, жена изменяет ему. И Фарук пускает в ход кинжал, равно как и двое других обманутых мужей.

— О великий султан! — вскричал визирь. — Ты раскрыл мне глаза на всю проблему. Если бы в городе было четыре неверные жены, то

каждый из четырех обманутых мужей свел бы проблему к случаю трех неверных жен и не убил бы свою жену до четвертого дня. И так далее, и тому подобное вплоть до сорока неверных жен.

— Я рад, — сказал султан, — что ты, наконец, понял суть дела. Приятно иметь визиря, ум которого настолько превосходит уровень умственного развития среднего подданного. Но что если я поведаю тебе, что неверных жен в городе, как стало достоверно известно, в действительности сорок одна?

Казнь врасплох

За кражу каравая хлеба визирь приговорил Абдула Касима к смертной казни через повешение.

Визирь давно собирался казнить Абдула и воспользовался сущей безделицей просто как предлогом. Правда, к великой досаде визиря, по закону осужденный на смертную казнь мог в последнюю минуту обратиться к султану с просьбой о помиловании. Воззвать к милосердию владыки преступник мог только в день казни.

Не сомневаясь в том, что султан ибн-аль-Каз, узнав о смертном приговоре Абдулу, непременно отменит его, визирь придумал хитроумную уловку, позволявшую (как ему казалось) обойти закон и избежать обращения осужденного к султану с просьбой о помиловании. В присутствии Абдула визирь сообщил начальнику тюрьмы, что тому предстоит в течение недели привести в исполнение смертный приговор, но не назначил точную дату казни, ограничившись указанием, что повесить Абдула надлежит в течение недели, но в такой день, который застал бы его врасплох (чтобы Абдул не мог заранее знать, что его должны повесить именно в этот день).

— Каждое утро ты будешь приносить Абдулу его завтрак, — продолжал визирь наставлять начальника тюрьмы в присутствии осужденного. — Как я уже сказал, день казни тебе надлежит выбрать так, чтобы для Абдула он оказался совершенно неожиданным. Помни, что если ты принесешь Абдулу завтрак в день, который назначен тобой для казни, и Абдул встретит тебя заявлением, что знает о предстоящей в тот день казни и представит разумные доводы, объясняющие, как ему удалось установить день казни, то по закону ты должен немедленно передать султану прошение Абдула о помиловании. Если же в день казни ты принесешь Абдулу завтрак, а он промолчит или не сможет разумно объяснить, почему он считает, что его должны казнить именно в тот

день, то Абдул лишается права на обжалование приговора, и ты можешь повесить его в тот же день в полдень.

Визирь отбыл к себе, а Абдул и начальник тюрьмы (разумеется, каждый в отдельности — Абдул в камере смертников, а начальник тюрьмы в своем рабочем кабинете) принялись ломать голову над наиболее вероятным днем казни. Для начальника тюрьмы проблема осложнялась еще и тем, что день казни ему необходимо было определить заранее, чтобы успеть распорядиться о необходимых приготовлениях.

О гнусном плане визиря, практически лишившем Абдула права на подачу прошения о помиловании из-за неожиданности дня казни, прослышал юный принц, который поведал о нем отцу. Султан вызвал начальника тюрьмы.

— Дошло до меня, — сказал султан, — что визирь приговорил Абдула к повешенью и что приговор составлен так, что лишает Абдула возможности подать прошение о помиловании, которая предусмотрена законом. Так ли это?

— Так, о великий султан, — признал начальник тюрьмы, — но поверь, я не имею к вынесению приговора никакого отношения. Более того, Абдул мне очень симпатичен, и я был бы счастлив сделать все, что в моих силах, чтобы помочь ему, но, как ты понимаешь, руки мои связаны.

— Я вижу, — заметил султан, — ты человек весьма ученый.

— О нет, великий султан. Мне случалось читать сочинения мудрецов и я очень люблю логику, в которой они так сильны, но я лишь в меру своего слабого разума пытаюсь постичь смысл их теорий и еще очень многого не знаю.

— Самое интересное у тебя еще впереди, — заверил султан начальника тюрьмы. — А известен ли тебе принцип конечной индукции?

— Известен, о великий султан.

— Прекрасно, но оставим его на миг и вернемся к несчастному Абдулу. Выбрал ли ты день казни?

— Пока еще не выбрал. Продолжаю размышлять над тем, как это можно было бы сделать лучше всего.

— Насколько я понимаю, — продолжал султан, — ты можешь повесить Абдула только в один из дней назначенной визирем недели — от воскресенья до воскресенья. Вот мне и хотелось бы узнать, можешь ли ты отложить казнь Абдула на последний день недели, т. е. повесить его в субботу?

Начальник тюрьмы поразмыслил немного и медленно ответил:

— Нет. Думаю, что не могу. Видишь ли, о великий султан, Абдул человек умный. Поскольку ему известно, что казнь должна быть неожиданной, он, дожив до утра субботы, встретит меня, когда я принесу ему завтрак, словами:

— Я знаю, начальник, что ты собираешься повесить меня сегодня, так как сегодня — последний из дней той недели, в течение которой меня должны повесить.

— И это действительно было бы так, — продолжал начальник тюрьмы. — Ведь если бы он дождался до утра субботы, последнего из дней недели, в течение которой я должен его повесить, то заведомо знал бы, что казнь должна свершиться только в тот день, и встретил бы меня заявлением об этом. И тогда Абдул обрел бы право на прошение о помиловании.

— Понимаю, — кивнул султан. — Согласен, что, зная условия приговора, и ты, и Абдул должны были догадаться, что казнь не может состояться в субботу.

— Ты прав, о великий султан, — подтвердил начальник тюрьмы слова владыки. — Приговор составлен так, что я могу повесить Абдула только в один из дней с воскресенья по пятницу. В субботу казнь никак не может состояться.

— А это означает, — продолжал султан, — что и ты, и Абдул можете преспокойно вычеркнуть субботу из своих календарей. Ты мог бы привести приговор в исполнение только с воскресенья по пятницу, и таким образом, пятница — последний из дней недели, когда Абдул мог бы быть повешен.

— Ты прав, как всегда, — не мог не признать начальник тюрьмы.

— А мог бы ты отложить казнь до пятницы? — поинтересовался султан.

Поразмыслив, начальник тюрьмы ответил:

— Думаю, что не мог бы. Так как и Абдул, и я знаем, что пятница — последний день, когда его можно повесить, то если бы Абдул дождался до утра пятницы, он непременно встретил бы меня заявлением, что его казнят сегодня.

— Я тебя понял, — кивнул султан. — Ты хочешь сказать, что можешь повесить Абдула только в один из дней с воскресенья по четверг и что Абдул не может не понимать этого?

— Безусловно, — с уверенностью ответил визирь.

— Но коль скоро это так, — продолжал султан, — и четверг становится последним днем недели, когда может свершиться казнь, то не можем ли мы, продолжив то же самое рассуждение, исключить и четверг?

— Разумеется, можем, — воскликнул начальник тюрьмы. — Тогда последним днем недели, когда может свершиться казнь, станет среда, которую в свою очередь также придется исключить, и так станет с любым из остальных дней недели. Следовательно, привести смертный приговор Абдулу в исполнение невозможно!

Поистине мы имеем дело с применением принципа конечной индукции. То, что мы действительно доказали, сводится к следующему: в последний из дней недели, в который можно казнить Абдула, казнить Абдула автоматически становится невозможным.

— Ты прав, — смеясь, подтвердил султан. — А из доказанного следует, что осужденного невозможно казнить врасплох не только в течение недели, но и в течение любого конечного числа дней. Какое счастье, однако, что и ты, и Абдул обладаете одинаково острым разумом. Если любой из вас не понял, к чему приводит принцип конечной индукции, то он не работал бы на практике.

Второе испытание Абдула¹

Едва успев благополучно выпутаться из предыдущей истории, Абдул снова попал в беду. На этот раз его обвинили в торговле рабынями на черном рынке, недавно строжайше запрещенной султаном ибн-аль-Казом. На этот раз Абдул предстал перед судом присяжных — новинкой, введенной просвещенным властителем Квазиабабии, стремившимся превратить свою страну в современное государство. При вынесении вердикта мнения присяжных, шести мужчин и шести женщин, разделились: все шесть женщин сочли Абдулу виновным и потребовали для него смертной казни, а все шесть мужчин склонились к мнению «невиновен».

Выслушав присяжных, судья вынес решение, что судьбу Абдула — жить ему или умереть — должен решить с равными шансами на жизнь и на смерть случай — шар, извлекаемый наугад из урны. Для вынесения приговора столь необычным методом в суд были доставлены две

¹ Сюжет этой истории сообщил одному из нас (Г. Г.) проф. Альберт Сент-Дьерди. (Известный биохимик, один из основоположников биоэнергетики. — Прим. перев.)

большие урны с двадцатью пятью белыми и двадцатью пятью черными шарами в каждой. Подсудимому должны были завязать глаза, предложить вытянуть руки и, выбрав наугад одну из урн, извлечь из нее шар. Черный шар означал смерть, белый — жизнь. Урны долго переставляли, а шары тщательно перемешали.

— О великий судья, — воскликнул Абдул, падая на колени перед скамьей, на которой восседал судья. — Молю тебя исполнить мою последнюю просьбу. Позволь перед тем, как мне завяжут глаза, по-своему переложить шары из урны в урну. После этого я готов вслепую выбрать урну и извлечь из нее шар.

— Может ли это увеличить шанс преступника избежать наказания о великий визирь? — почтительно обратился судья к сидевшему с ним рядом визирю.

— Не думаю, — ответствовал визирь, считавший себя большим знатоком по части математических проблем. — Всего имеется пятьдесят черных шаров и пятьдесят белых шаров, а поскольку подсудимый будет извлекать шар вслепую, шансы извлечь черный или белый шар остаются прежними, как бы он ни перекладывал шары из урны в урну или ни распределял шары по любому числу урн.

— В таком случае, — решил судья, — раз перекладывание шаров ничего не меняет, почему бы нам не исполнить последнюю просьбу подсудимого? Это следует сделать хотя бы для того, чтобы продемонстрировать нашему великому султану, что вновь назначенный им суд в соответствии с пожеланиями нашего владыки придерживается либеральных тенденций при вынесении приговоров.

— Будь по-твоему, — разрешил судья Абдулу, все еще стоявшему перед ним на коленях. — Можешь перекладывать шар, как сочтешь нужным.

Поднявшись с колен и подойдя к столу, на котором стояли урны, Абдул приступил к делу. Сначала он пересыпал все шары из одной урны в другую, а затем, выбрав один белый шар, переложил его в первую (пустую) урну. Эта нехитрая операция повысила его шансы остаться в живых с 50% почти до 75%. После того как ему завязали глаза, он с вероятностью 50% мог выбрать урну с одним белым шаром, а если бы он выбрал другую («не ту») урну, то у него все же было бы 49 из 99 шансов (т. е. почти 50%) извлечь из нее не черный, а белый шар.

История умалчивает о том, позволило ли Абдулу такое увеличение благоприятных шансов спасти свою жизнь.

Скачки наоборот

Однажды в солнечный день (как, впрочем, все дни в той части земного шара) один англичанин сидел на камне посреди пустыни во владениях султана ибн-аль-Каза. Он умирал от скуки, так как делать ему было абсолютно нечего, хотя денег у него в карманах было достаточно для того, чтобы заплатить за любое развлечение. И когда англичанин к великому своему удовольствию увидел проезжавших мимо верховых бедуинов, он знаком попросил их приблизиться.



— Друзья, — обратился к бедуинам англичанин, показывая им сверкающую на солнце золотую гинею, — не окажите ли вы мне любезность проскакать вон до той пальмы. Тот, чья лошадь придет последней, получит в награду эту золотую монету.

— Чья лошадь придет последней? — воскликнули бедуины, которые оба знали английский.

— Именно! И понимаю, что условие состязания необычно, но такова моя прихоть. А теперь — внимание, на старт, марш!

Желая получить в награду золотую гинею, бедуины пустились было к видневшейся вдалеке пальме, но поскольку каждый из них стремился сдержать свою лошадь, оба всадника почти не двигались с места. Когда оба бедуина уже были готовы отказаться от участия в состязании, перед ними внезапно возник дервиш. Оба всадника спрыгнули с коней и распростерлись перед ним на горячем песке пустыни.

— Что вас тревожит, дети мои? — спросил дервиш низким голосом. И бедуины объяснили ему необычное условие скачек.

— Может быть, нам нужно разделить приз между собой или условиться, что тот, кто выиграет скачку, если его лошадь придет последней, отдаст золотую гинею другому, — предложил один из бедуинов.

— О нет! — возразил дервиш. — Нужно быть честным во всех своих деяниях, даже если речь идет об уговорах с англичанами. Вам нужно просто... — и дервиш прошептал свой совет бедуинам.

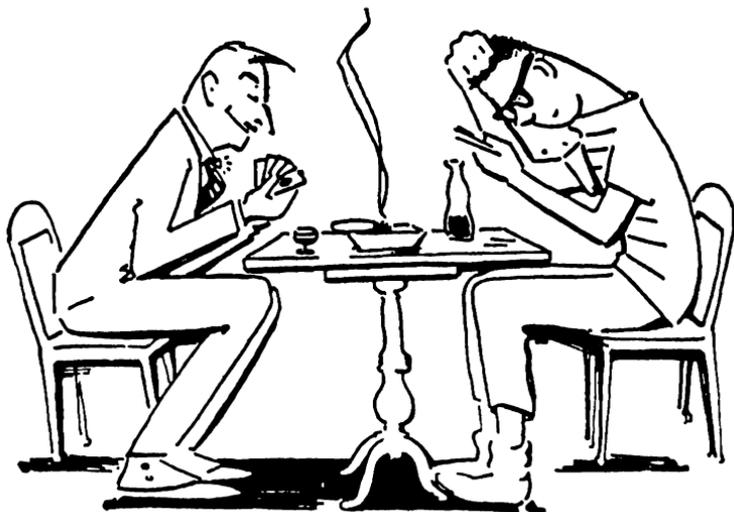
— Да благословит тебя Аллах! — воскликнули бедуины, вскочили в седла и пришпорили лошадей.

Быстрее ветра они понеслись к пальме. Судьба скачек была решена в считанные минуты, и англичанину пришлось уплатить гинею победителю. Что посоветовал дервиш бедуинам?

Дервиш дал бедуинам очень простой совет: поменяться лошадьми.

2.

Сэм-Игрок



Карточки в шляпе

Объяснить в два слова, кто такой Сэм-Игрок, проще всего, назвав его «живым компьютером».

Способность Сэма честно зарабатывать свой хлеб основана на его непостижимой способности оценивать шансы на выигрыш и проигрыш в любой азартной игре, которая когда-либо была изобретена человеком. Разумеется, умение Сэма молниеносно подсчитывать шансы «за» и «против» целиком опирается на его замечательную память и отнюдь не свидетельствует о его аналитических способностях.

Другая отличительная черта Сэма-Игрока — его доброе отзывчивое сердце. Матери Сэма-младшего Сэм-старший дал слово, что сын вырастет уважаемым человеком. И Сэм-Игрок сдержал свое обещание. Он рассудил, что Сэм-младший должен хотя бы частично унаследовать способности отца просчитывать комбинации. А что, скажите на милость, в наши дни может пользоваться большим уважением, чем математик, способный производить сложнейшие расчеты?

И Сэм-младший был отправлен в колледж. Правда, по окончании колледжа он мог бы до конца жизни ездить на работу и с работы в городском автобусе, а не за рулем собственного «кадиллака», как Сэм-старший. И хотя у Сэма-младшего могло появиться немало умных книг, он вполне мог так и не обзавестись маленькой черной записной книжечкой с именами и адресами всех хористок в городе. Но главное было бы достигнуто: Сэм-младший непременно стал бы уважаемым человеком.

Нужно сказать, что Сэм-старший очень гордился своими профессиональными способностями. Когда Сэм-младший был на последнем курсе колледжа, Сэм-старший узнал из беседы с сыном, что современные физики широко используют во многих вычислениях методы теории вероятностей. Желая показать сыну, что и по части новой для него теории он многих заткнет за пояс, Сэм-Игрок написал обширный трактат, чтобы продемонстрировать свое искусство в вычислении вероятностей.

Сэм-младший попытался было объяснить отцу, что теория вероятностей далеко не исчерпывается вычислением вероятностей и что в ней разработаны весьма тонкие математические методы.

Сэм-младший усомнился даже в том, понимает ли Сэм-старший настоящему глубоко фундаментальные принципы теории вероятностей даже в простейших случаях вычисления благоприятных и неблагоприятных шансов, в чем Сэм-старший мнил себя непревзойденным знатоком.

— Рассмотрим в качестве примера, — предложил Сэм-младший, — хотя бы следующую игру. Я кладу в шляпу три карточки: одну красную с обеих сторон, одну белую с обеих сторон и одну красную с одной стороны и белую с другой.

Предположим, что я извлекаю из шляпы одну карточку. Вынутая мной карточка обращена к нам красной стороной, какого цвета у нее другая сторона, мы не знаем.

— Ты хочешь, чтобы я догадался, какого цвета другая сторона? — спросил Сэм-Игрок.

— Совершенно верно, — согласился Сэм-младший. — Точнее говоря, ты должен сообщить мне, какова вероятность того, что у вынутой мною карточки другая сторона красная. Раз у вынутой мной карточки одна сторона красная, то она может быть только одной из двух карточек: либо красно-красной, либо красно-белой. Ты согласен?

— Согласен.

— Вот я и спрашиваю, какова вероятность того, что извлеченная мной карточка оказалась красно-красной? — заявил Сэм-младший.

— Мог бы придумать задачу и посложнее, — проворчал Сэм-старший. Простота предложенной сыном задачи вызывала у него отвращение. — Ты мог извлечь из шляпы только две карточки, поэтому вероятность того, что у тебя в руке красно-красная карточка, равна одной второй.

— Я знал, что ты так и скажешь, — кивнул Сэм-младший, — но твой ответ неверен!

— Подумать только! И для этого твоя мать хотела, чтобы я послал тебя учиться в колледж! — воскликнул Сэм-старший. — Уж не думаешь ли ты, что разбираешься в вероятностях лучше моего? Чтобы оценивать шансы «за» и «против», никакой математики не требуется. Необходим лишь здравый смысл.

— *Не сердись, — терпеливо увещевал разбушевавшегося родителя Сэм-младший. — Все дело в правильном определении вероятности. Твой ответ подразумевает, что извлечена одна из двух возможных карточек, и что поэтому вероятность равна одной второй, но ты совсем не учишь условия задачи. Я сказал, что извлек из шляпы карточку с красной «лицевой» стороной. Чтобы вычислить вероятность того, что извлечена красно-красная карточка, я должен сначала спросить себя, сколькими способами я могу извлечь из шляпы карточку с красной стороной.*

— Все это так, — согласился Сэм-старший, — но почему это меняет ответ?

— А вот почему, — терпеливо продолжал Сэм-младший. — У карточек в шляпе всего три красные стороны, а именно: две красные стороны у красно-красной карты и одна красная сторона у красно-белой карточки.

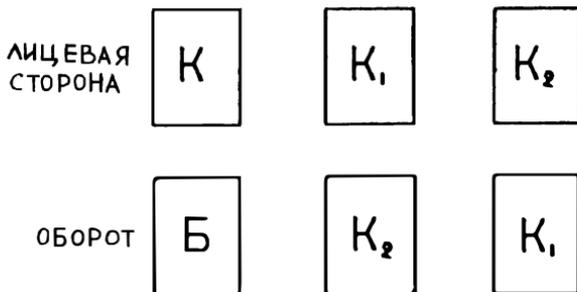
— А кто спорит? — возразил Сэм-старший.

— Но тогда ты должен признать, что существует три способа вытянуть карточку с красной лицевой стороной.

— Согласен.

— Прекрасно! А теперь рассмотрим подробнее те три способа, которыми я могу извлечь карточку с лицевой красной стороной. При одном способе оборотная сторона карточки белая, т. е. я извлек красно-белую карточку, в двух других случаях оборотная сторона карточки красная, т. е. в каждом случае я извлекаю красно-красную карточку. Таким образом, из трех возможных способов извлечь карточку с красной лицевой стороной в двух случаях оборотная сторона карточки оказывается красной и только в одном случае белой. Следовательно, вероятность того, что у извлеченной карточки оборотная сторона красная, равна двум третьим.

— Постой, постой! — усомнился Сэм-старший. — Говоришь ты складно, но слишком быстро, и я не успеваю следить за твоими рассуждениями.



— Попробую доказать свое рассуждение иначе, — невозмутимо продолжал Сэм-младший. — Ты согласился сыграть со мной в эту игру в предположении, что я извлек из шляпы карточку с красной лицевой стороной, но с тем же успехом мы могли бы сыграть в эту игру в предположении, что я извлек карточку с белой лицевой стороной.

— Разумеется, — кивнул Сэм-старший, — разницы никакой.

— Условимся теперь сыграть в новую игру, — продолжал Сэм-младший. — Если я извлеку карточку с красной лицевой стороной, то ты должен будешь определить вероятность того, что извлечена красно-красная карточка, а если я извлеку карточку с белой лицевой стороной, то ты должен будешь определить вероятность того, что извлечена бело-белая карточка. Суть проблемы на этом примере особенно ясна. Игра остается одной и той же, играем ли мы «на красное» или «на белое». Поэтому, играя на красное или на белое, мы получаем ту же самую вероятность, которую получили бы, играя только на красное или только на белое. А вот если бы мы вздумали играть на красное и на белое, то ответ был бы иным. Вопрос, который я задаю в действительности, звучит так: какова вероятность извлечь из трех карточек в шляпе карточку, обе стороны которой одного цвета, по сравнению с вероятностью извлечь карточку, стороны которой различного цвета? Ответ задачи в этом случае гласит, что вероятности относятся как 2 : 1, поскольку две карточки из трех имеют обе стороны одного цвета.

Тузы

— Подумаешь! — произнес Сэм-старший, явно желая оправдать свою неудачу. — Ты просто придумал задачу-уродца. Такой место в кунсткамере. Я уверен, что на практике необходимость использовать строгое определение вероятности при решении настоящих задач никогда не возникает. К тому же никто не играет в игры с какими-то дурацкими карточками!

— В этом я как раз не уверен, — возразил Сэм-младший. — Я могу привести аналогичный пример с настоящими игральными картами.

— Великолепно! Действительно, почему бы нам не попробовать сыграть настоящими картами?

— Договорились. Предположим, что у тебя на руках обычная взятка из карт для игры в бридж. Одна карта во взятке — туз пик, остальные двенадцать карт совершенно случайны.

— Ты хочешь сказать, — уточнил Сэм-старший, — что мы рассматриваем взятку только в том случае, если в ней есть туз пик?

— Совершенно верно, — подтвердил Сэм-младший. — Если взятка не содержит туза пик, мы ее просто не рассматриваем, а перетасовы-

ваем колоду и сдаем другую взятку. Мы играем в нашу игру только в том случае если во взятке есть туз пик.

— Понял. Продолжай.

— Среди двенадцати остальных карт во взятке могут быть тузы других мастей, присутствие туза пик гарантировано, но существует ненулевая вероятность того, что в колоде в действительности два или больше тузов.

— Пока все понятно, — кивнул Сэм-старший.

— Тогда рассмотрим другую ситуацию, — продолжил Сэм-младший — На этот раз предположим, что у тебя на руках другая взятка карт для игры в бридж. Но теперь мы знаем лишь, что во взятке есть туз — какой-то масти. Если тузов во взятке нет, то такую колоду мы просто не рассматриваем. Вторую взятку мы допускаем к рассмотрению только в том случае, если в ней есть по крайней мере один туз. И в этом случае среди остальных двенадцати карт взятки могут быть и другие тузы, и существует отличная от нуля вероятность того, что во взятке два или более тузов.

Я хочу, чтобы ты сравнил вероятности обнаружить два или более тузов в этих двух случаях. Напомню, что в первом случае во взятке непременно есть туз пик, а во втором случае — туз какой-то масти. Как отличаются друг от друга вероятности обнаружить в колодах два или более тузов в этих случаях?

— Послушай-ка, сынок, — произнес Сэм-старший, терпеливо выслушав условия задачи. — Я играл в карты, когда тебя еще и на свете не было. Поверь мне, никакой разницы между тузом пик и тузом любой другой масти нет. Гарантировать, что во взятке есть туз пик, то же самое, что гарантировать, что во взятке есть туз какой-то масти, как ты изволил выразиться. И в обоих случаях вероятность того, что среда остальных двенадцати карт есть еще один или несколько тузов, в точности одна и та же.

— Ты хочешь сказать, что по-твоему вероятность иметь во взятке два или более тузов в первом и во втором случаях одинакова?

— Именно это я и сказал.

— Тогда ты опять заблуждаешься, — улыбнулся Сэм-младший, — причем по той же причине, что и прежде.

— Тебе придется очень постараться, чтобы убедить меня в этом.

— *Позволь, я попытаюсь сформулировать из сказанного более простую задачу, — предложил Сэм-младший. — Чтобы основные идеи те-*

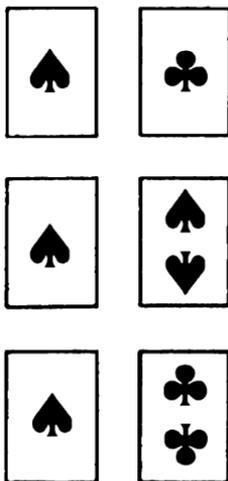
ории вероятностей стали видны более отчетливо, возьмем взятку, состоящую только из четырех карт: туза пик, туза треф и двойки пик, двойки треф. Из такой уменьшенной взятки ты получаешь взятки только из двух карт. Все остальные условия остаются прежними, т. е. в первом случае гарантируется, что из двух карт у тебя на руках одна — туз пик, а другая — какая-то. Во втором случае из двух карт одна заведомо туз какой-то масти, а другая — любая.

Полагаю, ты согласишься, что сравнение вероятностей в уменьшенных взятках более наглядно и поучительно, чем сравнение вероятностей в полных взятках для игры в бридж?

— Не спорю, — согласился Сэм-старший. — Числа получатся другими, но отношение вероятностей для упрощенной игры покажет, каким должен быть ответ в случае полных взятки для игры в бридж.

— Прекрасно! В таком случае ответ, пожалуйста, какие возможные взятки могут оказаться у тебя в упрощенной задаче с непременным тузом пик?

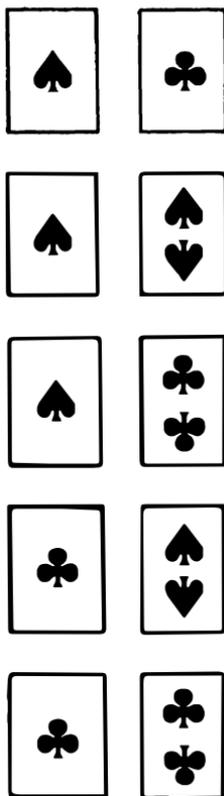
— Проще простого! Вот они:



И разумеется, вероятность получить взятку с двумя тузами из трех взятки с непременным тузом пик равна $2/3$.

— Правильно, — подтвердил Сэм-младший. — А каковы возможные взятки во втором случае, когда требуется, чтобы в колоде непременно был какой-нибудь козырь?

— И в этом случае ответ очень прост:



На этот раз мы получаем пять возможных взяток, а из этих пяти только в одной взятке два туза, что дает вероятность, равную только $1/5$. Но почему так?

Сэм-младший рассмеялся и объяснил:

— Вероятность благоприятного исхода по определению равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу испытаний. И в первой, и во второй рассмотренной нами задаче в заблуждение вводит общее число возможных испытаний.

В упрощенной задаче ограничение на масть туза (то обстоятельство, что в колоде непременно должен быть туз пик) приводило только к уменьшению общего числа возможных раскладов колоды. Но это условие ничуть не изменило число благоприятных исходов, т. е. благоприят-

ных раскладов взятки, удовлетворяющих условиям задачи. Разумеется, в задаче о «полновесной» взятке, в настоящей, а не упрощенной игре в бридж, числитель дроби, выражающей требуемую вероятность, т. е. число благоприятных исходов, будет ограничен условием неперменного присутствия туза определенной масти, но общее число возможных взяток с тузом пик будет ограничено гораздо сильнее. Вероятность в этом случае оказывается больше, чем в случае, когда во взятке непременно должен быть туз какой-то масти.

Вероятность случайного события

— Ты начинаешь убеждать меня, — вздохнул Сэм. — Может быть, нам лучше перейти к бросанию монеты или чему-нибудь в том же духе?

— По правде говоря, я не собирался заходить так далеко, но ты напомнил мне одну интересную историю. Когда я учился на последнем курсе в колледже, нам пришлось прослушать один дурацкий курс, который не дал ровно ничего нашему образованию. Должно быть, этот курс был включен в программу в незапамятные времена, и о нем просто-напросто забыли. Лектор чувствовал себя очень неловко и всячески давал нам понять, что ему очень неловко попусту тратить наше время. В утешение в начале семестра он сообщил нам, что поставит всем только отличные и хорошие оценки, поэтому нам следует беспокоиться не об успеваемости, а только о напрасно потраченном времени.

Лектор был человеком, помешанным на честности, и когда ему в конце семестра пришлось выставлять оценки, не обошлось без небольшой проблемы. Дело в том, что он всем собирался поставить только хорошие и отличные оценки, распределив их среди студентов случайным образом: каждый, прослушавший курс, мог с вероятностью $1/2$ получить оценку «отлично» и с такой же вероятностью — оценку «хорошо».

Наш лектор намеревался пройтись по списку студентов и, останавливаясь на каждой фамилии, бросать монетку: орел означал бы «отлично», а решка — оценку «хорошо». Но прежде чем он приступил к бросанию монеты, его пронзила ужасная мысль: что если монета слегка несимметрична? Ведь тогда вероятности выпадения орла и решки окажутся смещенными, и оценки будут распределяться нечестно!

Проблема, с которой столкнулся наш лектор, состояла в следующем: если монета несимметрична, то можно ли случайным образом распределить оценки среди студентов, прослушавших курс, так, чтобы

каждый из них с одинаковой вероятностью мог получить и отличную, и хорошую оценку?

Сэм-старший издал короткий смешок и заметил:

— Я всегда знал, что оценки ставятся наобум, но не думал, что кому-нибудь понадобится исключать эффект возможной асимметрии монеты. Все же, как мне кажется, я знаю, что нужно сделать. Что если лектор станет бросать монету дважды? Разве не верно, что независимо от смещения вероятность выпадения сначала орла, а потом решки в точности равна вероятности выпадения сначала решки, а потом орла?

Сэм-младший тоже рассмеялся:

— Что верно, то верно! А если оба бросания завершатся одинаковыми исходами, то их нужно просто исключить и бросать монетку снова два раза подряд. В зачет идут только те бросания, при которых сначала выпадает орел, а потом решка, или сначала решка, а потом орел. Тогда лектор выставляет оценку «отлично», если первым выпадает орел, и «хорошо», если первой выпадает решка.

— Причина, по которой такая тактика дает правильный результат, очень любопытна, — продолжал Сэм-младший, — и я хотел бы пояснить, в чем тут дело.

Пусть p — вероятность выпадения орла при первом или втором бросании. Тогда вероятность выпадения решки равна $1 - p$. Следовательно, вероятность выпадения в первом бросании орла, а во втором решки равна произведению p и $1 - p$, т. е. $p(1 - p)$.

Точно так же вероятность выпадения при первом бросании решки, а при втором орла равна $(p - 1)p$.

Но так как умножение обыкновенных чисел коммутативно, т. е. произведение не зависит от порядка сомножителей, оба произведения равны:

$$p(1 - p) = (1 - p)p.$$

Поэтому твой ответ правилен.

Бросание монет

Сэм-старший улыбнулся и сказал:

— Я знал, что когда дело дойдет до денег, я смогу показать тебе, что разбираюсь в своем деле.

— Никогда в этом не сомневался, — заверил отца Сэм-младший. — Я только хотел обратить твое внимание на некоторые тонкости в простейших понятиях теории вероятностей. В том деле, которым ты занимаешься, приходится думать не только о вероятностях, но и о многом другом, например основательно разбираться в теории игр: ведь то, что ты делаешь, по существу сводится к разработке стратегий.

— Ничего подобного! — запротестовал Сэм-старший. — Просто у меня большой опыт в тех делах, которыми я занимаюсь, только и всего.

— Никто не спорит и не ставит под сомнение, что ты можешь действовать интуитивно. Но твои приемы есть не что иное как методы теории игр. Если не возражаешь, я попытаюсь продемонстрировать это на очень простом примере.

Предположим, что мы играем с тобой в нехитрую игру. Каждый из нас бросает свою монету. Если обе монеты выпадают вверх орлами или вверх решками, то выигрываешь ты. Если монеты выпадают по-разному, одна вверх орлом, другая вверх решкой, то выигрываю я, причем безразлично, чья именно монета выпадает вверх орлом, а чья — вверх решкой. А теперь сделаем игру более интересной.

Если выигрываешь ты, то я плачú тебе 9 пенсов за два орла и 1 пенс за две решки. Если же выигрываю я, то при любом раскладе, т. е. независимо от того, выпадает ли комбинация «орел-решка» или «решка-орел», ты платишь мне 5 центов.

Перед игрой и даже во время игры ты можешь как угодно менять свои монеты на фальшивые.

Как видишь, все сказанное делает игру с бросанием монет гораздо интереснее. Она позволяет выработать удобную стратегию. Поскольку наибольший выигрыш тебе сулит выпадение комбинации «орел-орел», ты можешь предпочесть заменить свои монеты такими, которые чаще выпадают вверх орлом. Но поскольку мне об этом известно, я могу пойти на замену своих монет такими, которые чаще выпадают вверх решкой, так как я выигрываю при выпадении комбинаций «орел-решка» и «решка-орел».

Таким образом, перед каждым из нас возникает проблема: как лучше всего построить схему замены своих монет фальшивыми, если известно, что партнер вырабатывает для себя аналогичную схему.

— Что и говорить, звучит заманчиво, — вынужден был признать Сэм. — Так как в среднем я мог бы каждый раз выиграть среднее между девятью центами и одним центом, а ты — среднее между пя-

тью и пятью центами, т.е. столько же, сколько и я, мы имеем равные шансы на выигрыш, и я считаю игру честной. Я готов сыграть с тобой и уверен, что сумею заменить свои монеты фальшивыми так, чтобы перехитрить тебя и научить хотя бы немного уважать старших.

Сэм-младший покачал головой.

— Не сердись, но я не возьму твоих денег. Дело в том, что игра, которую я тебе предлагаю, мошенническая: я могу выбрать такую стратегию замены монет фальшивыми, что при достаточно длинной серии бросаний ты можешь лишь надеяться свести проигрыш до минимума. Но ты непременно проиграешь, а я выиграю. Более того, я могу математически вычислить, какую долю бросаний у меня составит выпадение орла независимо от того, выпадает у тебя орел или решка. Из вычислений я могу узнать, сколько смогу выиграть при достаточно длинной серии бросаний.

Я покажу тебе, как производятся такие вычисления, хотя ты можешь поверить мне на слово. Просто мне кажется, что тебе будет интересно. Вот как это делается.

Напомним, что я хочу вычислить долю бросаний, в которых у меня должен был бы выпасть орел. Обозначим ее через x , а размеры моего платежа через P .

Рассмотрим сначала, что происходит, когда у тебя выпадают орлы. Всякий раз, когда моя монета падает вверх орлом и у тебя выпал орел, я теряю 9 центов. Так как доля орлов составляет x от общего числа бросаний, это означает, что в моей платежной функции есть член $-9x$. Аналогичным образом, всякий раз, когда у меня выпадают решки, а у тебя орлы, я выигрываю 5 центов. Так как решки составляют $(1-x)$ часть от всех бросаний, в моей платежной функции должен быть член $5(1-x)$.

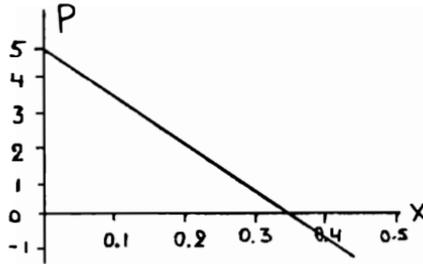
Таким образом, если я запишу мою полную платежную функцию для тех случаев, когда у тебя выпадают орлы, то она окажется

$$P_{\text{орлы}} = -9x + 5(1-x),$$

или просто

$$P_{\text{орлы}} = -14x + 5.$$

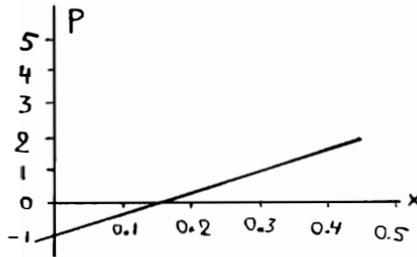
Вот ее график:



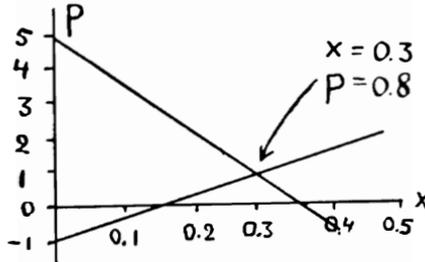
Рассмотрим теперь, что происходит, когда у тебя выпадают решки. Действуя так же, как прежде, я получаю платежную функцию

$$P_{\text{решки}} = +5x - 1(1 - x),$$

$$P_{\text{решки}} = 6x - 1.$$



Накладывая оба графика один на другой, мы находим, что они пересекаются при $x = 0,3$ и $P = 0,8$.



Это означает, что если я заменю $3/10$ моих монет на фальшивые и случайным образом распределю фальшивые монеты среди моих монет, то в достаточно длинной серии бросаний я буду в среднем вы-

игрывать 0,6 цента всякий раз, когда твоя и моя монеты выпадут обе либо вверх орлами, либо вверх решками.

Дни рождения

— Придуманно хитро, хотя, должен признаться, я никак не возьму в толк, как же все получается, — признался Сэм-старший. — Сегодня вечером я собираюсь заглянуть в клуб. Кстати, нет ли у тебя подходящей математической задачки с неожиданным решением? Мне бы хотелось немного позабавиться и позабавить членов клуба.

— Как не быть! — улыбнулся Сэм-младший. — Но сначала скажи мне, пожалуйста, сколько членов клуба соберется сегодня вечером.

— Человек эдак тридцать, — прикинул Сэм-старший.

— Великолепно! Дело в том, что я хочу рассказать тебе об одной задаче о днях рождения, а для нее людей должно быть достаточно много. Представь себе, что тебе известны дни рождения всех членов клуба, которые соберутся сегодня, какова по-твоему вероятность совпадения дней рождения двух членов клуба? Под днем рождения я имею в виду не год, а только месяц и день.

— Мне кажется, что вероятность совпадения дней рождения у двух из тридцати случайным образом собравшихся людей должна быть что-нибудь около 0,05, но я готов держать пари из расчета 5 к 1.

— Охотно принимаю пари, — согласился Сэм-младший, — а заодно предлагаю тебе заключить пари с кем-нибудь из членов клуба. Даже если кто-нибудь из них предложит тебе пари из расчета 1 к 1, то рекомендую тебе принять такое пари.

— А вот этого я решительно не понимаю! — воскликнул Сэм-старший.

— *Между тем перед тобой один из примеров того, что мы называем «мультипликативной природой независимых вероятностей». Ты опрашиваешь членов клуба об их днях рождения до тех пор, пока чей-нибудь день рождения не повторится, и в худшем случае тебе придется опросить всех тридцать членов клуба. Так как опрос продолжается только в том случае, если день рождения очередного члена клуба не совпадает с днем рождения ни одного из ранее опрошенных членов клуба, вероятности, которые требуется перемножить, — это вероятности несовпадения дня рождения каждого из вновь опрошенных. А вероятность совпадения дней рождения, разумеется, равна единице минус полученная вероятность несовпадения дней рождения.*

Иначе говоря, день рождения второго из опрошенных тобой членов клуба с вероятностью $364/365$ не совпадает с днем рождения первого из опрошенных. Что же касается третьего из опрошенных, то его день рождения может совпадать с днями рождения любого из первых двух опрошенных, поэтому вероятность того, что его день рождения не совпадает с их днями рождения, составляет $363/365$.

Это означает, что после того, как ты опросил трех членов круга об их днях рождения, вероятность совпадения дней рождения у двух из трех опрошенных стала равна $1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$.

А когда ты опросишь всех 30 членов клуба, вероятность совпадения дней рождения у двух из них окажется равной

$$1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{336}{365}.$$

Оценить это число можно различными способами, но ответ, разумеется, будет одинаков. Он означает, что вероятность совпадения двух дней рождения составляет примерно 0,7, т. е. ты можешь заключить пари на то, что у кого-то из 30 членов клуба дни рождения совпадают с шансами на выигрыш, более высокими, чем 2 к 1.

— Поразительно! — не мог не признать Сэм-старший. — А сколько людей следовало бы опросить, чтобы я мог, заключить пари 1 к 1 на то, что у двух из них дни рождения совпадают?

— Примерно 24 человека. Интересно, что после 24 шансы на выигрыш такого пари быстро возрастают.

Теннисный турнир

— Думаю, что пока задач на вероятности хватит, — сказал Сэм-старший. — Мне и с тем, что ты мне сообщил, придется разбираться несколько недель. Насколько я знаю, ты собираешься этим летом хорошенько подзаняться теннисом и забудешь про всякую математику.

— Я действительно хочу поиграть в теннис, — подтвердил Сэм-младший, — но, как ни странно, именно в связи с теннисом я столкнулся с одной задачей, которую никак не могу решить, несмотря на всю мою математическую подготовку.

— А какое отношение имеет математика к теннису? — удивился Сэм-старший. — Поясни!

— Речь идет не о применении математики в теннисе, хотя и такое в принципе возможно, — ответил Сэм-младший. — Но в данном случае речь идет о другом. Я провожу турнир юных теннисистов и никак не могу сосчитать, сколько упаковок теннисных мячей мне понадобится для того, чтобы полностью обеспечить участников. При проведении турнира мы берем всех участников и разбиваем их на пары в играх первого тура. Затем мы берем победителей, разбиваем их на пары для второго тура и продолжаем в том же духе до тех пор, пока не останется один-единственный победитель.

Проблема состоит в том, что для каждой встречи между двумя игроками я должен приготовить упаковку новеньких теннисных мячей. Если в каком-нибудь туре соревнования выходит нечетное число игроков, то один из них при жеребьевке вытягивает билетик с надписью «Всего хорошего!» и не участвует в очередном туре, но если возможно, его допускают к участию в следующем туре.

Мои расчеты затрудняет возможность появления «нечетных» игроков в конце то одного, то другого тура — тех, кто вытягивает билетик с надписью «Всего хорошего!» Я никак не могу сосчитать полное количество встреч, которые будут сыграны, если число участников турнира считать известным и принять во внимание тех, кто, вытащив билетик с надписью «Всего хорошего!», может пропустить один тур и оказаться в следующем.

Сэм-старший рассмеялся;

— На этот раз я могу помочь твоей беде. Позабудь о том, что в конце любого тура число победителей может оказаться нечетным. Вместо того чтобы подсчитывать число встреч, которые могут состояться тур за туром с учетом того, что отдельные игроки могут, минуя очередной тур, переходить в следующий, гораздо проще посмотреть на весь турнир в целом. Если отвлечься от деталей, то можно с уверенностью сказать, что при каждой встрече один участник вылетает. Следовательно, если исходное число участников турнира равно n , а после финальной встречи должен остаться один-единственный победитель турнира, то $n - 1$ участников должны выбыть. Для этого необходимо провести $n - 1$ встреч. Следовательно, тебе необходимо позаботиться о $n - 1$ упаковках теннисных мячей.

Односторонняя игра

Как-то раз Сэм-старший и его сын, начинающий вкушать плоды математического просвещения, поспорив по какому-то малозначительному поводу, заключили пари, и Сэм-младший предложил отцу, чтобы проигравший не платил выигравшему обычную ставку в несколько долларов, а сыграл с ним в игру, которая бы и определила, сколько нужно уплатить.

— Игра очень простая, — убеждал отца Сэм-младший, — мы просто бросим монету. Предположим, что ты проиграл пари. Мы бросаем монету, и если ты угадываешь исход бросания, то на этом все и кончается, и ты мне ничего не должен. С другой стороны, если исход бросания предсказан тобой неверно, то ты платишь мне 2 доллара, и мы бросаем монету второй раз. Если ты правильно угадываешь исход второго бросания, то игра на этом заканчивается и ты мне ничего больше не платишь. Таким образом, в этом случае я получаю от тебя всего 2 доллара. Если же исход второго бросания угадан тобой неверно, то ты платишь мне еще 4 доллара и т. д. Каждый раз, когда ты не угадываешь исход бросания, тебе придется уплатить мне вдвое больше, чем в предыдущий раз.

Игра продолжается лишь до тех пор, пока ты неверно предсказываешь исход бросания монеты. Как только ты угадываешь исход бросания, игра прекращается, и ты больше мне ничего не платишь. Идет?

— Идет! — согласился Сэм-старший, в котором проснулся азарт игрока. — Даже если я проиграю пари, то у меня останется шанс пятьдесят на пятьдесят остаться при своих, а если я не угадаю исход первого бросания, то затем мне вскоре все равно удастся правильно предсказать исход другого бросания, и я все же выиграю.

На следующий день выяснилось, что Сэм-старший проиграл пари. Пришлось бросать монету, чтобы выяснить, сколько он должен уплатить Сэму-младшему.

— А почему бы нам не оценить математически, сколько ты мне должен, вместо того чтобы по-настоящему бросать монету? Если ты против, я охотно все подсчитаю. Ведь ты же сам хотел, чтобы я изучал математику, так почему бы мне не воспользоваться тем, чему меня научили?

— Валяй, — неохотно согласился Сэм-старший. Разумеется, он предпочел бы попросту, без затей, бросать монету. — Только объясни мне понятно, как ты делаешь все эти математические вычисления,

чтобы определить, сколько я тебе должен. Если все будет правильно, то я, конечно, заплачу сколько надо.

— Не бойся, все очень просто, и ты легко поймешь суть дела без всякой математики. При первом бросании я могу с одинаковыми шансами не получить ничего или выиграть 2 доллара. Поэтому я поступлю честно, если попрошу тебя уплатить мне 1 доллар вместо того, чтобы бросать монету.

— Достаточно честно, — подтвердил Сэм-старший.

— Хорошо! А что ты скажешь по поводу второго бросания? Ведь если я выиграю, то получу 4 доллара. Существует 1 шанс против 2, что монету вообще придется бросать второй раз, поскольку это произойдет только в том случае, если ты не угадаешь исход первого бросания. Но если нам все же придется бросать монету во второй раз, то существует 1 шанс против 2, что я выиграю и получу от тебя 4 доллара. Следовательно, только в 1 случае из 4 я получу эти 4 доллара, если мы «по-настоящему» станем бросать монету. Поэтому предлагаю тебе уплатить мне четвертую часть от 4 долларов, т. е. 1 доллар, чтобы мы обошлись без бросания монеты.

— Гм, — забеспокоился Сэм-старший, — за то, что мы не будем бросать монету по-настоящему во второй раз, я должен уплатить тебе 1 доллар. А что ты скажешь о третьем бросании? Оно тоже обойдется мне в 1 доллар?

— Конечно, — подтвердил Сэм-младший. — За третье бросание я мог бы выиграть и 8 долларов, разумеется, если бы до него дошло дело, а это может случиться только в том случае, если я выиграю первые два бросания. Вероятность такого события (двух моих выигрышей) равна $1/4$. Кроме того, если мы бросим монету в третий раз, то я могу выиграть только с вероятностью $1/2$, поэтому вероятность выиграть 8 долларов равна $1/8$. Те же соображения остаются в силе и относительно любого последующего бросания, поэтому я могу попросить у тебя по 1 доллару за каждое из бесконечной серии бросаний. Разумеется, на твоём счете в банке нет такого количества долларов, но я человек не злой и обойдусь с тобой по-хорошему: ты дашь мне всего лишь 10 тысяч долларов, которые я хочу израсходовать на покупку нового спортивного автомобиля.

— Ничего себе «по-хорошему!» — взорвался от негодования Сэм-старший. — Да ты просто юный мошенник! Вот как ты используешь свое математическое образование! Впрочем, придется тебе подождать

до завтра — возможно, мне удастся найти слабое место в твоих рассуждениях.

Весь день до самого вечера Сэм снова и снова перебирал в уме рассуждения сына, но никак не мог обнаружить в них ошибки. Все выглядело так, словно он, Сэм-старший, действительно должен был платить сыну по 1 доллару за каждое последующее бросание монеты и таким образом отдать Сэму-младшему все свои деньги. Доведенный почти до отчаяния, Сэм-старший вдруг вспомнил, что частенько встречал в клубе невысокого седоголового человека, о котором говорили, что он отставной профессор математики.

— Ну разве мой сын не умница? — со смешанными чувствами подумал Сэм-старший. — Насколько мне помнится, тот пожилой джентльмен всегда проигрывал, несмотря на все свои познания в математике.

Отыскав имя и адрес профессора в книге регистрации членов клуба, Сэм-старший в тот же вечер постучал в дверь дома, где жил профессор.

— Хочу сделать вам предложение, — заявил Сэм профессору. — Я берусь оплатить все ваши долги в клубе, если вы можете мне решить одну математическую задачу.

И Сэм-старший поведал профессору свои затруднения.

— Очень любезно с вашей стороны, — ответил профессор, потирая руки. — Трюк, к которому прибег ваш сын, известен в теории вероятностей под названием Петербургского парадокса и был придуман швейцарским математиком Леонардом Эйлером, состоявшим в ту пору на службе при российском императорском дворе. Не считите за нескромность, но могу ли я спросить, сколько денег на вашем банковском счете?

— Но я вовсе не желаю выплачивать все свои деньги этому мальчишке!

— *А вам и не придется этого делать! Размеры вашего банковского счета необходимы мне для того, чтобы оценить, сколько раз вам придется сыграть в вашу игру.*

Суть дела заключается в следующем: хотя абсолютно верно, что за каждое последующее бросание монеты вы должны платить сыну по 1 доллару, учитывать вы должны только то количество бросаний, которое вам по силам оплатить до того, как вы полностью разоритесь и станете банкротом.

Если вы сыграете с сыном n игр, все время проигрывая, то вам

придется уплатить сыну $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n$ долларов. Это не что иное, как геометрическая прогрессия и ее сумма равна числу 2, умноженному на самого себя столько раз, сколько игр вы сыграете, плюс еще 1 раз, минус 2. Математически это можно записать как

$$2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2.$$

Это число очень быстро возрастает с числом бросаний монеты. Пример: если вы неправильно угадаете исходы 10 первых бросаний, то вам придется уплатить сыну $2^{n+1} - 2$ при $n = 10$, т. е. $2^{11} - 2 = 2046$ долларов. Думаю, что на вашем счете в банке денег больше?

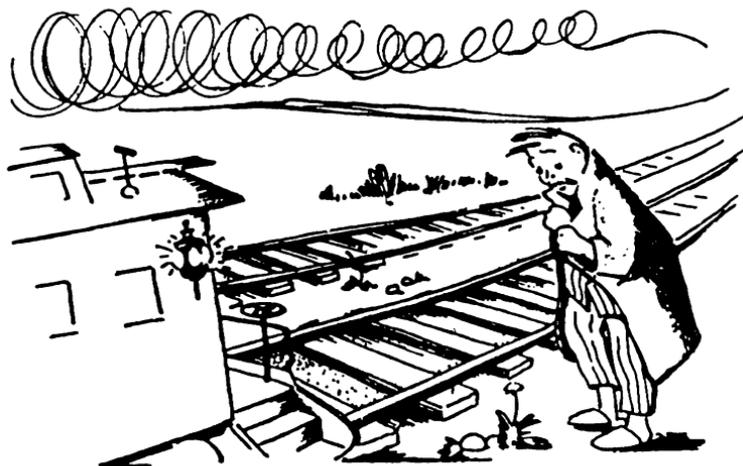
— Да, у меня около полумиллиона долларов, — откровенно признался Сэм.

— Чтобы проиграть полмиллиона долларов, вам потребуется подряд не угадать исходы 18 бросаний монеты. Если вы не угадаете исход 19-го бросания, то у вас не хватит денег, чтобы расплатиться. Поэтому ваш сын может рассчитывать не более чем на 18 бросаний, а вы должны уплатить ему 18 долларов. Можете сделать это завтра утром.

— Миллион благодарностей, профессор! — воскликнул Сэм-Игрок. — Жаль, что сын уже почти взрослый, и я не могу выпороть его ремнем! Восемнадцать долларов были бы очень кстати! Всего доброго, сэр! Буду счастлив оплатить все ваши долги в клубе!

3.

Старый машинист



Проходящие поезда

В небольшом городке на северо-западе США жил вышедший на пенсию машинист Уильям Джонсон. Железнодорожная магистраль, на которой он прослужил долгие годы, проходила через городок. Мистера Джонсона мучила бессонница и он частенько просыпался среди ночи и не мог заснуть до утра. Иногда в подобных случаях мистер Джонсон отправлялся на прогулку по пустынным улицам городка и неизменно приходил к переезду. Там он стоял, задумчиво глядя на рельсы, пока мимо, словно возникнув из ночной тьмы, не пронесся поезд. При виде мелькающих вагонов на душе у мистера Джонсона становилось легче, он брел к себе домой и с высокой вероятностью засыпал.

Спустя некоторое время мистер Джонсон сделал прелюбопытное наблюдение: большинство поездов, которые он видел на переезде, шли в восточном направлении и лишь немногие — в западном, между тем мистеру Джонсону было прекрасно известно, что на этой линии на восток и на запад ходило одинаковое количество поездов, причем восточные и западные поезда чередовались. Мистер Джонсон уже было решил, что ошибся в своих подсчетах и, чтобы избавиться от сомнений, обзавелся блокнотом, в котором стал отмечать буквами «В» и «З» проходившие мимо поезда в зависимости от того, в каком направлении они шли. К концу первой недели набралось пять «В» и только две «З». Наблюдения на следующей неделе дали такое же соотношение.

— Может быть, все дело в том, что я просыпаюсь ночью в одно и то же время, — подумал, мистер Джонсон, — и прихожу к переезду незадолго до прохождения поездов, идущих на восток?

Озадаченный, мистер Джонсон решил предпринять строгое статистическое изучение проблемы и распространить наблюдения на дневное время. Он попросил своего приятеля составить для него длинный перечень произвольно выбранных моментов времени, например 9.35 утра, 12.00 — полдень, 3.07 дня и т. д., и, стоя у железнодорожного переезда, скрупулезно отмечал поезда, проходившие в указанное в перечне время на восток или на запад. Но все было тщетно: результат оказался тем же, что и прежде. Из ста поездов, проследовавших через переезд мимо мистера Джонсона, около семидесяти пяти шли на восток и только двадцать пять — на запад. В отчаянии мистер Джонсон даже позвонил в депо ближайшего большого города, пытаясь выяснить, не направлялись ли восточные поезда по какой-нибудь другой линии, но его заверили, что ничего подобного не происходило, все поезда следуют точно

по расписанию и что поездов, идущих в восточном направлении, ровно столько же, сколько идущих на запад. Таинственное предпочтение поездов к направлению на восток довело мистера Джонсона до отчаяния. Он совсем потерял сон и тяжело заболел.

Местный врач, к которому обратился мистер Джонсон, был большим любителем математики и на досуге собирал задачи-головоломки.

— Это что-то новенькое, — заключил он, когда мистер Джонсон поведал ему о причинах своих тревожений. — Впрочем, минуту! Ведь должно же существовать какое-то рациональное объяснение!

И, поразмыслив несколько минут, врач дал правильное объяснение мучившей мистера Джонсона головоломке.

— Видите ли, — начал врач свое объяснение, — все дело именно в том, что поезда идут строго по расписанию, хотя вы и приходите к железнодорожному переезду в случайно выбранные моменты времени. Предположим, что поезда, идущие на восток, проходят через переезд в начале каждого часа, а поезда, идущие на запад, — каждый час с четвертью. Пусть число поездов, идущих на восток и на запад, будет одинаковым. Выясним теперь, какой поезд первым пройдет мимо вас, когда вы встанете у переезда. Если вы прибудете после начала часа, но не позже, чем час с четвертью, скажем, между 1.00 и 1.15, то первым мимо вас проследует поезд на запад, т. е. поезд, проходящий в 1.15. Но если вы опоздаете к этому поезду, то следующий поезд пройдет в 2.00 на восток.

Так как вы приходите на переезд в случайно выбранные моменты времени, то вероятность того, что вы прибудете в первую четверть часа, в три раза меньше, чем вероятность, что вы прибудете в остальные три четверти часа. Следовательно, вероятность, что первый поезд пройдет на восток, в три раза больше, чем вероятность, что он пройдет на запад. Именно это вы и наблюдали.

— Но я не понимаю, — возразил мистер Джонсон. — Если вероятность встретить поезд, идущий на восток, в три раза больше вероятности встретить поезд, идущий на запад, то разве не следует из этого математически, что поездов, идущих на восток, должно быть больше? Я не очень силен в математике, но такой вывод представляется мне естественным.

— Нет, вы заблуждаетесь, — улыбнулся врач. — Ну как вы не поймете? Первый поезд с большей вероятностью пройдет мимо вас на восток потому, что вероятность вашего появления на переезде в промежутке между поездом на запад и поездом на восток больше, чем веро-

ятность появления в промежутке между поездом на восток и поездом на запад. Правда, ждать поезда в первом случае вам придется гораздо дольше, чем во втором.

— Как так? — воскликнул окончательно запутавшийся машинист. — Что значит «ждать дольше»?

— Сейчас вам все станет ясно, — терпеливо продолжал объяснять врач. — Если вы приходите к переезду в первую четверть часа, то первым мимо вас проходит поезд на запад и ждать вам придется не более пятнадцати минут. Более того, реальное время ожидания составит в среднем всего лишь семь с половиной минут. С другой стороны, если вы опоздаете к поезду, идущему на запад, то вам придется в течение почти сорока пяти минут ждать, пока пройдет поезд на восток. Таким образом, хотя вероятность, что первым мимо вас проследует поезд на восток, в три раза больше, чем вероятность, что первым пройдет поезд на запад, поезда на восток вам придется ждать втрое дольше, что в какой-то мере уравнивает шансы.

Может быть, отношение числа поездов, идущих на восток, к числу поездов, идущих на запад, и не будет в точности совпадать с отношением четверти часа к трем четвертям, но я ничуть не сомневаюсь, что, просмотрев свой перечень случайно выбранных моментов времени, вы обнаружите отношение, близкое к названному. Такова общая схема событий. Если количество поездов, идущих на восток и на запад, одинаково, то ваши наблюдения, производимые достаточно долго, могут привести только к одному результату: поезда, идущие в восточном направлении, будут встречаться чаще, чем поезда, идущие в западном направлении. Лишь бы интервал от каждого поезда, идущего на восток, до поезда, идущего на запад, был короче, чем интервал от каждого поезда, идущего на запад, до поезда, идущего на восток.

— Мне нужно хорошенько все это обдумать, — произнес мистер Джонсон, почесав в затылке. — Значит, по-вашему, все дело в расписании поездов?

— Если хотите, разгадку мучившей вас загадки можно изложить иначе, не упоминая ни словом о расписании, — предложил врач¹. — Возьмем, например, один-единственный поезд «Суперчиф», курсирующий между Чикаго и Лос-Анджелесом. Предположим, что мы находимся в пятистах милях от Чикаго и в тысяче пятистах милях от Лос-

¹В предлагаемом варианте объяснение непосредственно применимо и к задаче о лифтах, о которой шла речь в прологе.

Анджелеса¹ и что вы приходите к переезду в случайно выбранные моменты времени. Где с наибольшей вероятностью находится в этот момент поезд?

Так как до Лос-Анджелеса втрое дальше, чем до Чикаго, то шансы 3 : 1 за то, что поезд находится к западу от вас, а не к востоку. А коль скоро он находится к западу от вас, то впервые поезд пройдет мимо вас, двигаясь на восток. Разумеется, если между Чикаго и Калифорнией курсирует не один, а много поездов, как это и происходит в действительности, то ситуация не изменится, и первый поезд, который проследует мимо нашего городка в любой момент времени, вероятнее всего будет двигаться на восток.

— Весьма вам признателен, доктор, — произнес мистер Джонсон, встав с кресла и взяв шляпу. — Вы излечили меня без всяких лекарств.

Встречные поезда

Через несколько дней после того, как мистер Джонсон нанес визит врачу, тот позвонил ему по телефону.

— Не могли бы вы заглянуть сегодня ко мне в приемную? — спросил врач. — Мне очень хотелось бы обсудить с вами еще один вопрос относительно железной дороги.

— С удовольствием, — охотно согласился мистер Джонсон, у которого после выхода на пенсию свободного времени стало хоть отбавляй.

— Я хочу предложить вашему вниманию одну задачку, о которой узнал от моего пациента, — сообщил доктор, когда мистер Джонсон устроился в кресле и вопросительно посмотрел на хозяина кабинета. — В разговоре с ним я рассказал о тех треволнениях, которые вам пришлось пережить из-за поездов, идущих на восток и на запад. В ответ пациент сообщил мне, что когда он едет в своей автомашине на работу, ему приходится пересекать железную дорогу — однокорейку, по которой в основном курсируют товарные поезда. Каждый такой поезд насчитывает много вагонов и тащится через переезд необычайно медленно. Моему пациенту приходится подолгу простаивать перед закрытым шлагбаумом, глядя на мерцающие сигнальные огни и еле движущуюся вереницу вагонов. Мой пациент мечтает о прокладке еще одной,

¹Так как для рассуждения важны не абсолютные, а относительные расстояния, единицы длины не существенны (при условии, что оба расстояния измеряются в одних и тех же единицах). — *Прим. перев.*

второй, колеи. Это позволило бы, по его мнению, товарным поездам идущим на восток и на запад, лишь иногда встречаться на переезде, отчего общее время ожидания для водителей автомашин сократилось бы. А как по-вашему, сократилось бы время ожидания для автотранспорта от прокладки второй колеи?

— Разумеется, сократилось бы, — подтвердил старый машинист. — Если общее число поездов останется неизменным, то из-за случайных перекрытий встречных поездов у переезда средняя продолжительность простоя автотранспорта у переезда должна сократиться. Ведь это так ясно! Если два поезда минуют переезд одновременно, то время, которое потратил бы автомобилист, пропуская их, сократилось бы вдвое — до времени, которое ему пришлось бы ждать у шлагбаума, пока пройдет один поезд.

— Но так было бы только в том случае, если бы оба поезда в точности «перекрылись», т. е. одновременно въезжали на переезд и одновременно покидали его. В другом предельном случае ситуация была совершенно другой. Представьте себе, что локомотив одного въезжает на переезд в тот самый момент, когда его покидает тормозная площадка последнего вагона другого поезда. Что тогда?

— Ничего особенного. Мне кажется, этот случай ничем не отличается от того, когда оба поезда вообще не перекрываются.

— *О нет! Тут вы, мистер Джонсон, глубоко заблуждаетесь. Я могу доказать это вам с помощью нехитрой арифметики. Предположим, что в среднем в каждом направлении за один час проходит один поезд и что каждый поезд минует переезд за 6 минут, и вычислим, сколько приходится ждать автомобилисту у закрытого шлагбаума в этом случае. Вероятность прибыть к закрытому шлагбауму (во время прохождения поезда через переезд) и любоваться мерцающими красными фонарями равна $1/10$. Поскольку автомобилист с равной вероятностью может прибыть к переезду, когда поезд только выезжает на переезд или покидает его, то среднее время ожидания у закрытого шлагбаума составляет 3 минуты. Таким образом, в этом случае ждать в среднем, пока поезд минует переезд, придется 3 минуты.*

Предположим теперь, что встречные поезда всегда немного перекрываются, минуя переезд — локомотив одного поезда чуть-чуть заходит за тормозную площадку последнего вагона другого. Как нетрудно понять, в этом случае все происходит так, как если бы поездов было вдвое меньше, но каждый поезд стал бы вдвое длиннее.

— Какая разница? — возразил мистер Джонсон.

— Разница есть, причем большая! Разумеется, вероятность подъехать к закрытому шлагбауму на переезде остается прежней. Но ждать у закрытого шлагбаума в этом случае пришлось бы вдвое дольше.

Таким образом, подъезжая к переезду и увидев, что встречные поезда перекрылись только локомотивами, автомобилист вынужден будет ждать вдвое дольше.

— Понимаю, — задумчиво проговорил старый машинист, — если бы между поездами был промежуток в несколько минут, то автомобилист, пропустив один поезд, мог бы миновать переезд до того, как другой поезд прибудет к переезду, а если поезда перекрываются, то никакого промежутка между ними не получается.

— Рад, что вы обратили внимание на это важное обстоятельство, — улыбнулся врач. — Итак, мы пришли к заключению, что в случае точного перекрытия встречных поездов среднее время ожидания у переезда сокращается вдвое, а если поезда едва перекрываются, то время ожидания удваивается.

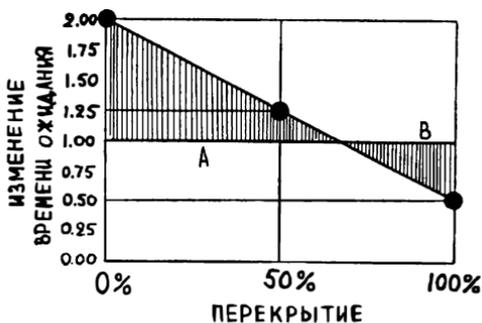
— А что происходит, если поезда на переезде перекрываются ровно наполовину? — поинтересовался мистер Джонсон.

— Давайте выясним. В этом случае поездов становится как будто вдвое меньше, но длина каждого поезда увеличивается на 50%, т. е. поезд как бы становится в полтора раза длиннее. В этом случае вероятность подъехать к переезду, когда через него проходит поезд, нужно умножить на $\frac{1,5}{2}$, а среднее время ожидания увеличивается в полтора

раза. Итого: среднее время ожидания изменится в $\frac{1,5}{2} \cdot 1,5 = 1,125$ раза. Таким образом, если встречные поезда на переезде перекрываются наполовину, то время ожидания увеличивается на 12,5%.

— Подумать только! — с удивлением заметил мистер Джонсон. — Даже когда поезда перекрываются наполовину, автомобилисту приходится ждать дольше.

— Как видите, мистер Джонсон, время ожидания существенно зависит от того, насколько перекрываются встречные поезда на переезде. Давайте построим график, ведь теперь мы знаем, во сколько увеличивается время ожидания при полном перекрытии поездов, при их перекрытии наполовину и при едва начавшемся перекрытии, — предложил врач, доставая карандаш. — Как видите, полная площадь, соответствующая увеличению среднего времени ожидания (треугольник А),



гораздо больше, чем полная площадь, соответствующая уменьшению среднего времени ожидания (треугольник В). Отсюда следует, что в среднем перекрытие встречных поездов заставляет автомобилистов ждать у переезда дольше, чем в том случае, когда одно и то же количество поездов курсирует по однопутному пути в обоих направлениях.

Шмель

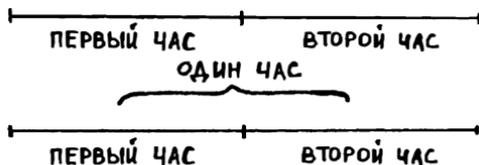
— А еще какие-нибудь задачи про поезда вы знаете? — немного помолчав, спросил старый машинист.

— Знаю еще одну, только она очень простая. Два поезда выйдут одновременно навстречу другу друга со станций А и В, разделяемых расстоянием в 100 миль¹. Каждый из поездов движется со скоростью 50 миль/ч. Вместе с поездами со станции А по направлению к станции В вдоль железной дороги вылетает шмель, развивающий в полете скорость 70 миль/ч. Долетев до поезда, идущего со станции В, шмель в испуге поворачивает назад и летит к станции А, пока не встретит поезд, идущий к станции В, и т. д. Так он летает туда и обратно между сближающимися поездами. Когда же те, наконец, встречаются, шмель при виде мчащихся с двух сторон железных чудовищ пугается настолько, что замертво падает на землю.

Спрашивается, какое расстояние успевает пролететь шмель?

— Сейчас узнаем, — пробормотал себе под нос мистер Джонсон. — Задача, действительно, не очень трудная. Если два поезда движутся навстречу друг другу со скоростью 50 миль/ч каждый и отправляются

¹Задачу можно решать и в милях, не переводя их в привычные километры. Для тех читателей, кто захочет «ощутить» полученный ответ, сообщаем, что 1 миля = =1609,315 метра. (Это так называемая английская («сухопутная») миля. Ее не нужно смешивать с более длинной морской милей (1852 м).) — Прим. перев.



одновременно со станций, расположенных в 100 милях одна от другой, то поезда должны встретиться через час после отправления посередине пути. С какой скоростью, вы говорили, летел шмель?

— Семьдесят миль в час.

— Значит, он успел пролететь семьдесят миль. Правильно?

— Абсолютно правильно! — воскликнул врач. — Но то, что вы так легко решили эту задачу, свидетельствует о том что вы не математик! Настоящий математик стал бы искать решения в виде бесконечного ряда, суммируя времена, за которые шмель покрывает отрезки своего пути, совершая полеты туда и обратно между поездами. При таком подходе решение задачи становится весьма трудным, так как члены суммируемого ряда имеют достаточно сложный вид. Мне рассказывали, что Джон фон Нейман¹, один из величайших математиков XX века, задумавшись на несколько секунд, дал правильный ответ — 70 миль.

— О! — воскликнул человек, задавший ему эту задачу. — Вы все-таки нашли простое решение, а я думал, что вы станете суммировать в уме бесконечный ряд.

— А я и просуммировал ряд, — спокойно ответил Джон фон Нейман, который был известен своей способностью производить в уме сложнейшие вычисления со скоростью, уступавшей только электронным компьютерам, в развитие которых он внес существенный вклад.

Почтовые голуби

Однажды мистер Джонсон поведал своему приятелю с математическим складом ума об одной трудной задаче, с которой ему пришлось столкнуться, когда он служил машинистом на железной дороге. Войскам связи настоятельно потребовалось провести испытание почтовых голубей, и представители командования этого рода войск обратились к

¹Джон фон Нейман — выдающийся математик современности, внесший значительный вклад в развитие многих областей математики, теоретической физики и вычислительной техники. — *Прим. перев.*

мистеру Джонсону с просьбой выпустить двух почтовых голубей в точках маршрута, отстоящих на расстоянии ровно 50 миль¹ и разделенных по времени ровно на 1 час.

На одном из участков маршрута был прямолинейный отрезок длиной 100 миль. По расписанию поезд должен был преодолеть эти 100 миль ровно за 2 часа, т.е. двигаться в течение 2 часов со средней скоростью 50 миль/ч. Но на этом стомильном отрезке было немало станций. Продолжительность стоянок, естественно, определялась расписанием, в котором было указано время прибытия поезда на каждую станцию и время отправления. Машинист мог нагнать потерянное время, двигаясь с более высокой скоростью, и ему всегда удавалось уложиться на стомильном отрезке в требуемые два часа.

— Но именно потому, что я покрываю 100 миль за 2 часа, — сказал мистер Джонсон своему приятелю, — нет никаких оснований предполагать, что в течение этих 2 часов непременно найдется часовой промежуток времени, на протяжении которого я двигаюсь со средней скоростью 50 миль/ч.

— *Не хотелось бы огорчать вас, но, к сожалению, вы заблуждаетесь, — засмеялся врач. — Нетрудно доказать, что независимо от того, как менялась скорость поезда в течение 2 часов, за которые вы преодолеваете отрезок в 100 миль, непременно найдется по крайней мере один одночасовой промежуток времени, за который вы проезжаете ровно 50 миль. Проще всего в этом можно убедиться следующим образом. Представим себе, что 2 часа разделены на 2 последовательных промежутка времени продолжительностью 1 час каждый.*

Предположим также, что ни за первый, ни за второй час вы не проезжаете ровно 50 миль, так как в противном случае задача была бы решена. Мы можем также, не ограничивая общности, предположить, что средняя скорость за первый час меньше 50 миль/ч, а за второй час — больше 50 миль/ч. Как вы увидите из дальнейшего, мои рассуждения не зависят от того, в который из часовых промежутков, в первый или во второй, средняя скорость была больше.

Мысленно представим себе промежуток времени продолжительностью в 1 час, непрерывно движущийся вдоль шкалы времени, на которой отложены один за другим первый и второй часы движения поезда. В начальном положении наш промежуток времени полностью совпадает с первым часом, в конечном положении — со вторым часом. Рассмот-

¹См. примечание на стр. 54. — *Прим. перев.*

рим среднюю скорость поезда за часовой промежуток, скользящий вдоль шкалы времени. Так как в начальном положении наш часовой промежуток полностью перекрывается с первым часом, то средняя скорость за этот промежуток в самом начале меньше, чем 50 миль/ч. Непрерывно перемещая его направо, мы в конце концов совместим его со вторым часом, и тогда средняя скорость за скользящий часовой промежуток станет больше, чем 50 миль/ч.

Таким образом, непрерывно сдвигая часовой промежуток слева направо, мы непрерывным же образом изменяем среднюю скорость от значения, меньшего 50 миль/ч, до значения, большего 50 миль/ч. Следовательно, в некотором промежуточном положении часового промежутка средняя скорость за этот час должна быть в точности равна 50 милям/ч. Тем самым мое утверждение доказано.

Машинист вздохнул и заметил:

— Думаю, что вы правы, хотя войскам связи от этого не легче, так как я мог заранее знать, когда именно поезд начнет проходить тот самый участок, на котором он развивает среднюю скорость в 50 миль/ч, и поэтому не мог установить, когда мне следовало бы выпустить почтовых голубей. Но пока я размышляю над этим, мне хотелось бы предложить вам одну практическую задачку, которая может вас заинтересовать.

— Предлагайте, — охотно согласился доктор, — хотя я не очень силен в практических задачах.

Летнее время

— Как вы знаете, — начал мистер Джонсон, — я долгие годы водил поезда на одной и той же дистанции. Каждый вечер я прибывал в свой родной город точно по расписанию в одно и то же время и передавал поезд другому машинисту, которому предстояло вести его дальше.

— Это мне известно, — подтвердил доктор.

Поскольку железнодорожное расписание выдерживалось с идеальной точностью, моя жена точно знала, когда я прибываю в город, и подъезжала на автомобиле к вокзалу, чтобы отвезти меня домой. Каждый вечер она подъезжала к вокзалу в ту самую минуту, когда мой поезд останавливался, и забирала меня.

— Заботливая у вас женушка, — заметил доктор.

— Так вот, — продолжал машинист, — как сейчас помню, однажды между несколькими штатами разгорелся спор относительно того,

следует ли переходить на летнее время. Случилось так, что мой штат не перешел на летнее время, а поскольку дистанция, на которой я водил поезда, начиналась в соседнем штате, перешедшем на летнее время, расписание было нарушено, и я прибыл на станцию в свой родной город в первый же вечер после введения летнего времени на час раньше (по часам в моем городе). И только тогда я вдруг понял, что моя жена заедет за мной только через час. Помню также, что мой сменщик-машинист, которому предстояло вести поезд дальше, сломал свои наручные часы, переводя их то на час вперед, то на час назад, и мне пришлось одолжить ему мои часы.

Так как мне предстояло прождать целый час, я счел за благо отправиться домой пешком. Так я и шел, пока не встретил по дороге жену, ехавшую, чтобы подобрать меня после рейса и доставить домой. Я сел в автомобиль, и мы поехали домой. По прибытии я взглянул на настенные часы и увидел, что хотя изрядный отрезок пути я прошел пешком, жена доставила меня домой на 20 минут раньше обычного. Часов у меня, как я уже говорил, не было, но пешком я шел довольно долго. Я попытался было вычислить, сколько времени я шел пешком, но запутался и бросил выкладки. Может быть, вы могли бы сказать мне, как долго я шел пешком?

— *Разумеется, — кивнул доктор. — Проще всего вычислить, как долго вам пришлось идти пешком, если «позабыть» о вас и сосредоточиться только на пути, который пришлось проделать в тот вечер вашей жене. Из сказанного вами нам известно, что ваша жена выехала из дому в обычное время, но вернулась на 20 минут раньше, чем обычно. Чтобы сэкономить 20 минут на пути до станции и обратно, ваша жена должна была сократить на 10 минут путь от дома на станцию и на 10 минут путь от станции домой. Иначе говоря, ваша жена подобрала вас за 10 минут до того, как она прибыла бы на станцию до введения летнего времени в соседнем штате. Но она прибыла бы на станцию через час после того, как вы отправились домой пешком. Следовательно, вы шли пешком все время, составляющее разность между 10 минутами и 1 часом, т. е. 50 минут.*

4.

Путешествия расширяют кругозор



Три лица, испачканных сажей

Всякий, кому случалось путешествовать по Европе, отлично знает, что пассажиры в британских поездах имеют обыкновение держать окна в купе открытыми, чтобы дышать свежим воздухом. Разумеется, вместе со свежим воздухом в купе попадает изрядное количество дыма, изрыгаемого локомотивом, в котором по британскому обычаю в качестве топлива используется уголь.

Однажды клубы дыма через открытое окно попали в купе, в котором чинно сидели трое благовоспитанных жителей туманного Альбиона — леди и два джентльмена. В результате этого незначительного происшествия лица всех трех пассажиров оказались испачканными сажей и являли забавный контраст с их безупречными костюмами и снобистскими манерами. Леди (ее звали мисс Аткинсон) оторвала глаза от книги, которую читала, и, несмотря на все свое великолепное воспитание, не смогла удержаться от смеха при виде открывшегося ей нелепого зрелища. Но ее спутники, джентльмены, также рассмеялись.

При этом (возможно, в силу свойств истинно британского характера) каждый из трех пассажиров полагал, что его (или ее) лицо не испачкано и что двое пассажиров смеются, глядя, как выпачканы сажей их лица (правила хорошего тона запрещали каждому открыто уставиться на предметы своего интереса, поэтому угадать, над кем смеется каждый из пассажиров, было решительно невозможно).

Так продолжалось несколько минут. Затем мисс Аткинсон, получившая более основательное образование, чем ее спутники, и работавшая учительницей в школе, поняла, что сажей испачканы не только лица ее спутников, но и ее, по-видимому, собственное лицо. Она достала носовой платок и тщательно вытерла свое лицо. При взгляде на носовой платок мисс Аткинсон убедилась, что ее предположение было правильным. Как она пришла к заключению, что ее лицо испачкано сажей?

Мисс Аткинсон решила проблему без особого труда, приняв в качестве исходного разумное предположение о том, что ее попутчики, хотя и не столь умны и образованы, как она сама, но все же не полные идиоты.

— *Предположим, — подумала мисс Аткинсон, что мое лицо не испачкано сажей (надеюсь, что так оно и есть на самом деле!) и что эти два джентльмена смеются, поскольку каждый из них видит испачканное сажей лицо соседа по купе. Как мог бы рассуждать в этом случае*

каждый из джентльменов? Естественно, он должен был бы спросить себя, почему смеется его сосед, а поскольку он увидел бы, что мое лицо не испачкано сажей, то сразу бы понял, что тот может смеяться по одной-единственной причине, а именно потому, что его собственное лицо испачкано сажей. Такое заключение элементарно, а поскольку ни один из моих попутчиков не пришел к нему, то это означает, что мое исходное предположение (о том, что мое лицо не испачкано сажей) неверно. Следовательно, мне нужно стереть сажу с лица, чтобы не выглядеть смешной.

Логическое умозаключение мисс Аткинсон допускает обобщение на случай, когда в купе находятся более трех пассажиров и лица у всех испачканы сажей. Действительно, четвертый пассажир, обладающий еще более развитыми способностями к логическому мышлению, чем мисс Аткинсон, мог бы рассуждать следующим образом:

— Если мое лицо не испачкано сажей, то трое моих попутчиков должны смеяться друг над другом. Но по крайней мере у одного из них хватит ума, чтобы сообразить, что если бы его лицо не было испачкано сажей, то двое других пассажиров смеялись бы друг над другом и, если они не круглые идиоты, должны были бы понять, что их лица испачканы сажей.

И т. д., и т. д.

Поцелуй в темноте

Во время нацистской оккупации Франции в купе поезда, шедшего из Парижа в Марсель, ехало четверо пассажиров. Компания подобралась пестрая: молодая очень красивая девушка, пожилая почтенная дама, немецкий офицер и француз средних лет неопределенной профессии. Все четверо не были знакомы друг с другом, и в купе поезда, мчавшегося на юг, царило молчание. Когда поезд въехал в туннель, свет в купе погас, и на несколько минут четверо пассажиров оказались в кромешной темноте,

Внезапно раздался звук поцелуя, за которым послышался мощный удар: судя по всему, кто-то из пассажиров основательно «приложил» кого-то из попутчиков. Когда поезд вырвался из туннеля, все четверо пассажиров с невозмутимым видом сидели на своих местах, и только у немецкого офицера под глазом наливался огромный синяк.

— Так ему и надо, — подумала пожилая дама. — А девчонка мо-

лодец! Настоящая французская девушка, умеющая постоять за себя и дать отпор этим наглым бошам! Побольше бы таких девушек!

— Странный вкус у этого немецкого офицера, — размышляла молодая француженка. — Вместо того чтобы поцеловать меня, он предпочел поцеловать эту старую гримзу! Непостижимо!

Немецкий офицер, прижимая носовой платок к пострадавшему глазу, над которым назревал огромный синяк, также не мог никак понять, что произошло в темноте.

— По-видимому, этот француз попытался поцеловать девушку, — подумал он, — а та в темноте промахнулась и ударила меня.

Спрашивается, что думал француз и что произошло в действительности?

Хотя некоторые читатели, возможно, сочтут, что эта задача не может быть отнесена к числу математических задач-головоломок, тем не менее она допускает единственное решение. Француз, бывший членом одной из подпольных групп Сопротивления, был очень горд своей выдумкой.

— Спору нет, немцы очень умны, — размышлял он, — но офицер ни за что не догадается, что я поцеловал тыльную сторону своей руки, а потом вмазал бошу кулаком по его мерзкой рожке!

Хлебный рацион¹

После того, как Германия проиграла войну, экономическая ситуация в стране стала быстро ухудшаться. Все продукты были строго нормированы, а самый главный продукт питания, хлеб, выдавался из расчета 200 г на душу населения в день. Все пекари получили строжайшую инструкцию изготовить специальные формы для выпечки 200-граммовых хлебцев — по 1 хлебцу в день на каждого из окрестных жителей.

Старый профессор Карл Z. каждое утро по дороге в университет заходил в булочную, чтобы купить дневную порцию хлеба. Однажды он заявил булочнику:

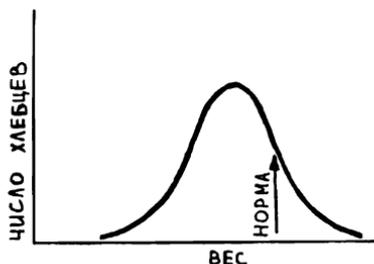
— Бесчестный вы человек! Вы обманываете своих покупателей! Ваши формы на 5% меньше, чем должны быть для выпечки 200-граммовых хлебцев, а сэкономленную муку вы продаете на черном рынке!

¹Об этом случае, действительно происшедшем после второе мировой войны в Гамбурге, автору сообщил доктор Карл Геде.



— Помилуйте, герр профессор! — возразил булочник. — Никто и никогда не выпекал хлебцы одного и того же размера. Одни хлебцы получаются на несколько процентов меньше нормы, другие — на несколько процентов больше.

— Вот именно! — подтвердил профессор. — В течение нескольких месяцев я ежедневно взвешивал хлебцы, которые покупал у вас, на точных весах в моей лаборатории. Разумеется, результаты взвешивания дали естественный разброс. Вот график, на котором показано число хлебцев различного веса по сравнению с правильным весом (нормой).



Как видите, одни хлебцы весят всего 185 г, другие — целых 205 г, но средний вес (среднее арифметическое всех измерений) равен 195 г, вместо положенных 200 г. Вам нужно срочно изготовить новые формы для хлебцев правильных размеров, иначе я буду вынужден сообщить о вас властям.

— Разумеется, я изготовлю новые формы завтра же, герр профессор! — пообещал перепуганный булочник. — Смее заверить вас, что ошибка больше не повторится.

Через несколько месяцев профессор Z. снова обратился к булочнику.

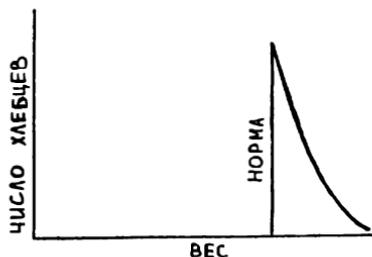
— Я сообщил о вас властям сегодня, — сказал профессор. — Вы не изменили формы и продолжаете обманывать своих покупателей.

— Но герр профессор! — воскликнул булочник. — Уж теперь-то вы не можете обвинять меня в том, что я обманываю покупателей. Разве в хлебцах, которые вы покупали у меня за последние несколько месяцев, был недовес?

— Недовеса не было. Все хлебцы были весом в 200 г или тяжелее. Но объяснялось это не тем, что вы изготовили формы больших размеров, а тем, что отбирали для меня хлебцы покрупнее.

— Ну, этого вы никогда не сможете доказать! — презрительно процедил булочник.

— *Еще как смогу!* — возразил профессор Z. — *Вот какое статистическое распределение я получил, взвешивая хлебцы, купленные у вас за последние несколько месяцев:*

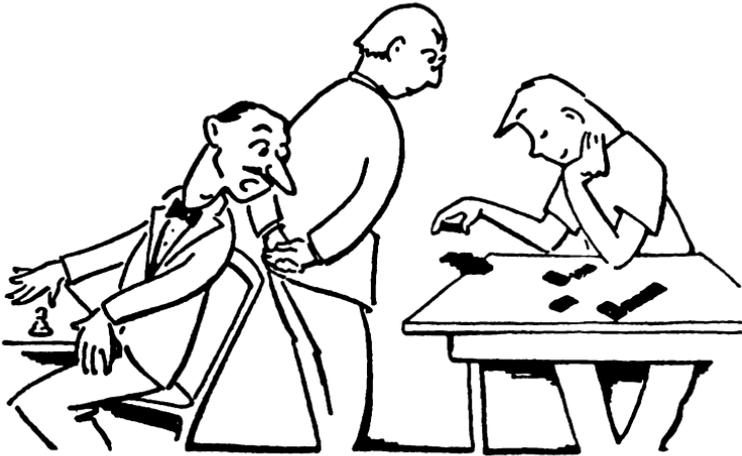


Вместо стандартного распределения ошибок, открытого великим немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом, получилась сильно искаженная кривая, обрезанная слева и медленно спадающая справа. Статистические отклонения от среднего не могут привести к такому распределению. Ясно, что оно создано искусственно — тем, что вы отбирали для меня хлебцы весом от 200 г и более. Кривая, которую вы видите, — хвост гауссова распределения, т. е. того самого распределения, которое я получил, взвешивая хлебцы перед нашим первым разговором. Не сомневаюсь, что власти, отвечающие за распределение продуктов, прислушаются к моему сообщению.

И повернувшись на каблучках, профессор Z. вышел из булочной.

5.

Юный Николас



Домино на шахматной доске

Юный Николас очень хотел стать членом «Клуба любителей шахмат и шашек» своего города, но в клуб принимали только взрослых. Ему же неизменно отказывали в приеме, считая, что он еще не дорос. По мнению знатоков, составлявших славу и гордость клуба, столь юный претендент на звание члена клуба еще не может обладать в должной мере развитым воображением, способностью мысленно представлять расположение шахматных фигур или шашек на доске и обладать другими качествами, необходимыми истинному любителю шахмат и шашек.

Знатоки пребывали в полной уверенности, что они правы, хотя юный Николас, несмотря на свой возраст, уже проявил себя как весьма неординарный игрок в шахматы и шашки.

Однажды вечером юный Николас по обыкновению торчал в клубе, наблюдая за игрой мастеров. В ответ на робкую просьбу разрешить и ему сыграть партию, Николасу с насмешкой посоветовали научиться сначала играть в детскую игру домино.

— Простите, сэр, — возразил юный Николас, — но я не понимаю, каким образом умение играть в домино будет способствовать повышению моей шахматной или шашечной квалификации.

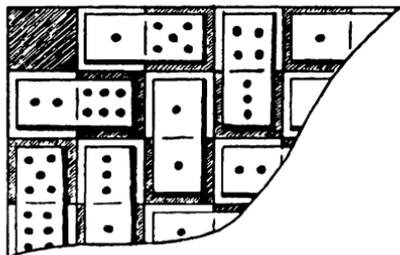
— А ты попробуй, тогда поймешь.

Через несколько дней юный Николас сообщил одному из завсегда-таев клуба, что, занимаясь, как ему было сказано, изучением игры в домино, он натолкнулся на одну интересную задачу, устанавливающую связь между игрой в домино и шахматами.

Не скрывая насмешливых улыбок, присутствовавшие при разговоре члены клуба окружили Николаса и с интересом выслушали его сообщение.

— Как хорошо известно каждому из нас, — начал Николас солидным тоном, — шахматная доска состоит из 64 квадратных полей, по 8 полей вдоль каждой из сторон. Если бы мы попытались покрыть всю шахматную доску домино, то, так как каждый камень домино имеет форму прямоугольника шириной в одно поле и длиной в два поля, нам для этого понадобилось бы 32 домино. Предположим, что у нас всего лишь 31 домино. Тогда независимо от того, как мы будем располагать их на шахматной доске, два поля останутся непокрытыми. Если я начну укладывать домино на шахматную доску, оставив непокрытым поле в левом верхнем углу доски, и буду укладывать домино вплотную друг к другу, пока не исчерпаю весь запас из 31 камней, ясно, что еще одно

поле должно остаться непокрытым. Задача состоит в том, чтобы это непокрытое поле оказалось в правом нижнем углу доски.



Мне кажется, джентльмены, что эта одна из задач на умение мысленно представить себе расположение фигур на шахматной доске, в решении которых вы достигли таких вершин.

Завсегдатаи клуба переглянулись и согласились, что предложенная юным Николасом задача действительно интересна. Затем любители шахмат и шашек приступили к решению. Они раздобыли комплект из 31 домино и принялись усердно выкладывать их на шахматную доску то одним, то другим способом, но, как ни бились, покрыть доску домино так, чтобы поле в правом нижнем углу доски осталось свободным, им не удавалось.

Через несколько дней они официально уведомили юного Николаса, что покрыть шахматную доску так, чтобы поле в правом нижнем углу доски осталось свободным, невозможно. Тем самым задача была решена.

— Но откуда вы знаете, что задача неразрешима? — спросил Николас.

— А как же? — удивился один из завсегдатаев клуба. — Мы перепробовали укладывать домино на шахматную доску всевозможными способами, и ни один из них не привел к желаемому результату, поэтому решение невозможно.

— Думаю, что вы правы, — признал юный Николас, — хотя и не объяснили, почему задача неразрешима.

— Как почему? — в один голос воскликнули завсегдатаи клуба. — Потому что нам не удалось найти его.

— Мне бы хотелось, джентльмены, получить более обоснованный ответ, — мягко возразил юный Николас.

— А какой ответ может быть более обоснованным? — искренне удивились члены клуба.

— *Хотя бы следующий*, — пояснил юный *Николас*. — Я бы предложил рассматривать задачу с такой точки зрения. Поскольку на любой шахматной доске число черных и белых полей одинаково, а каждый камень домино покрывает ровно одно черное и одно белое поле, то два поля, оставшиеся непокрытыми, должны быть различного цвета. Между тем угловые поля, стоящие на противоположных концах диагонали, — одного цвета. Следовательно, как бы вы ни покрывали шахматную доску камнями домино, вам не удастся расположить домино так, чтобы угловые поля на одной диагонали остались свободными. Перед нами, джентльмены, любопытный образчик задачи, в которой введение на первый взгляд ничего не значащего условия упрощает решение. В действительности же все, что необходимо для формулировки задачи, это квадрат (доска), разлинованная «в клеточку» на 8×8 меньших квадратов. Шахматная раскраска меньших квадратов здесь ни при чем — все квадраты могут быть одного цвета. Другое дело, что для решения задачи нам придется разделить квадраты на две группы — одни могут быть черными, а другие белыми. И такое разделение позволяет легко и просто решить задачу!

Кирпичики

На одного из завсегдаев клуба логика рассуждений *Николаса* произвела столь сильное впечатление, что он предложил принять *Николаса* в члены клуба и предоставить тем самым юному дарованию возможность играть в шашки. Другой завсегдаей клуба решительно возражал против принятия *Николаса* в члены клуба, ссылаясь на то, что тот «еще мал для этого» и что ему более пристало по возрасту играть в детские игры.

— Лучше всего в кубики, — с презрительной усмешкой добавил он.

Другой член клуба, относившийся к юному *Николасу* с большой симпатией, заметил:

— Кстати, о кубиках, джентльмены. Я вспомнил об одной задачке. Требуется возвести некоторое сооружение, используя в качестве кирпичей домино. Мне кажется, что эта задачка могла бы представить для вас определенный интерес.

— Не думаю, чтобы нам стоило тратить время и выслушивать какие-то задачки о возведении игрушечных сооружений из домино, — возразил другой член клуба с плохо скрытым отвращением.

— Но почему бы вам не выслушать задачку? — настаивал первый. — Вдруг она вам понравится.

Предположим, что у вас имеется неограниченный запас домино. Задача состоит в том, чтобы построить из домино столбик, верх которого образует как можно длинный «kozyрек», т. е. смещен на максимальное расстояние относительно основания. Вы вольны сдвигать каждое домино относительно предыдущего на сколько угодно большое или малое расстояние. Важно лишь, чтобы весь столб был устойчив и не опрокидывался.

Сразу же было высказано несколько догадок относительно того, сколь велик может быть «kozyрек». Оценки колебались от половины до целого домино (по длине).

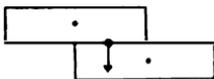
— Должен огорчить вас, джентльмены, — заявил с улыбкой член клуба, отстаивавший Николаса, — но я не слышу ни одного правильного ответа.

— А какой же, по-вашему, длины может быть козырек? — спросили его с нетерпением завсегдатаи клуба.

— Как ни странно это звучит, джентльмены, — последовал невозмутимый ответ, — но козырек можно построить любой длины.

— Не верим! — в один голос воскликнули присутствовавшие. — Докажите!

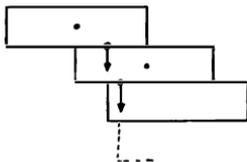
— А что ты думаешь по этому поводу, Николас? — спросил у юного Николаса его сторонник.



— Задача решается очень просто, — ответил юный Николас. — Устойчивость в столбике можно анализировать начиная с верхнего домино и постепенно, шаг за шагом, спускаясь ниже. Максимальный сдвиг верхнего домино относительно домино, лежащего непосредственно под ним (второго сверху), равен половине домино, поэтому центр тяжести верхнего домино приходится на грань второго сверху домино.

Итак, сдвиг на половину длины домино у нас уже есть. Выясним теперь, где находится центр тяжести двух верхних домино. Если мы попытаемся водрузить два верхних домино поверх третьего, то обнару-

жим, что общий центр тяжести находится на расстоянии, равном $1/4$ длины домино, от покрытого сверху конца среднего домино. Поэтому два верхних домино мы можем водрузить поверх третьего сверху домино с дополнительным сдвигом, равным $1/4$ длины домино.



Вычислив центр тяжести трех верхних домино, мы обнаружим, что он находится на расстоянии, равном $1/6$ от покрытого двумя верхними домино конца третьего домино. Продолжая этот процесс, мы обнаружим, что полный сдвиг оказывается равным

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

и т. д. до бесконечности.

— Все ли здесь корректно математически? — спросил один из завсегдатаев клуба у того члена клуба, который сформулировал задачу и, как оказалось, был математиком.

— Все корректно, — заверил математик других членов клуба. — Написанную Николасом формулу можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right].$$

Сумма в квадратных скобках известна под названием гармонического ряда. Он расходится; под этим я имею в виду, что, суммируя ряд, мы можем превзойти любое наперед заданное число. Проще всего убедиться в этом, объединив члены ряда в группы, сумма членов в каждой из которых больше $1/2$. Действительно, разобьем члены ряда на группы следующим образом:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots$$

Нетрудно видеть, что сумма членов в каждой группе больше $1/2$, т. е. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ больше, чем $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ больше, чем $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ и т. д.

Вы видите, джентльмены, что, задав длину «козырька», т. е. величину сдвига, вы можете без особого труда вычислить из скольких домино вам придется возвести столб, если воспользуетесь формулой, предложенной юным Николасом. Я вел свои расчеты сверху вниз, но строить столб из домино вам, разумеется, придется как обычно, снизу вверх.

Разноцветные нити

Задачи о покрытии шахматной доски домино и о сооружении «козырька» из домино настолько захватили членов «Клуба любителей шахмат и шашек», что они стали посматривать друг на друга, не найдется ли у кого-нибудь еще интересной задачки. Молчание решил прервать юный Николас.

— У меня есть еще одна задача, которая, возможно, заинтересует вас, джентльмены, — произнес он.

— Выкладывай свою задачку, тебе слово, — предложили члены клуба. На этот раз они явно поверили в способности юного Николаса.

— Предположим, что в каждую из четырех стен этой комнаты вбито по одному гвоздю и что, кроме того, по одному гвоздю вбито в ее пол и потолок. Между этими гвоздями требуется натянуть нити. От каждого гвоздя ко всем другим должно быть протянуто по нити. Нити имеются двух цветов — красные и синие. Каждая нить, натянутая между любыми двумя гвоздями, либо красная, либо синяя.

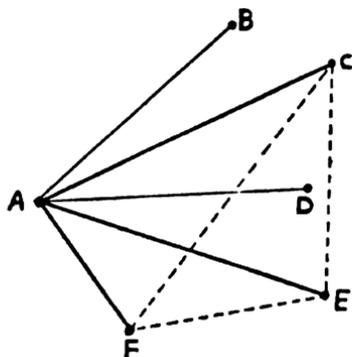
Нити образуют много треугольников, т. е. любые три гвоздя можно рассматривать как вершины некоторого треугольника, а нити, натянутые между этими тремя гвоздями, — как стороны треугольника. Задача заключается в том, чтобы выяснить, можно ли выбрать цвета нитей так, чтобы ни у одного треугольника все три стороны не были одного цвета.

— Очень трудная задача, — задумчиво произнес математик. — Необходимо произвести комбинаторные расчеты, вычислить перестановки, сочетания и т. п. Не думаю, чтобы ты основательно разобрался во всей этой алгебре, Ник.

— А я и не разбираюсь, сэр, — почтительно ответил юный Ник, — но тем не менее могу решить эту задачу.

— Может быть, — согласился математик. — Тогда расскажи нам, как она решается.

— На самом деле задача решается очень просто, — ответил юный Николас. — Необходимо только знать, с чего начать.



Прежде всего скажу вам ответ задачи: всегда найдется по крайней мере один треугольник, все стороны которого одного цвета. Попробую доказать, почему это так.

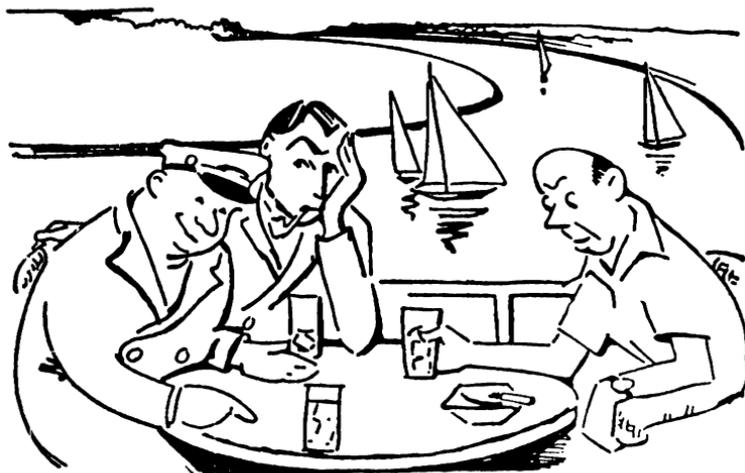
Рассмотрим любой гвоздь. От него к другим гвоздям должны быть протянуты пять нитей. Какие бы цвета вы ни выбрали, по крайней мере три из них должны быть одного цвета, так как нити могут быть только двух цветов — либо синие, либо красные. Для конкретности предположим, что три нити красные.

Рассмотрим теперь те три гвоздя, которые образуют вершины треугольника, между которыми протянуты эти нити.

Если мы хотим, чтобы три стороны любого треугольника не были одного цвета, то нити, натянутые между этими тремя гвоздями, не должны быть одного цвета. Попросту говоря, все стороны треугольника, к вершинам которого протянуты три красные нити, не могут быть синими. По крайней мере одна из сторон должна быть красной. Но тогда она замыкает треугольник, все стороны которого красные, а одна из вершин совпадает с исходным гвоздем.

6.

Яхт-клуб



Под парусом в безветренную погоду

Однажды летом в жаркий безветренный полдень на веранде яхт-клуба собралось несколько яхтсменов. Они потягивали джин с тоником и лениво переговаривались между собой.

— Без ветра под парусом особенно не походишь, — философски заметил один из них.

— Не скажи! Иногда и в безветрие можно исхитриться, — возразил другой яхтсмен. — Как сейчас помню, однажды я прошел под парусом в полный штиль довольно приличную дистанцию.

— Штиль действительно был полным? Ни малейшего дуновения ветерка?

— Именно так!

— А как же ты управлялся с парусом?

— Как обычно.

— Может быть, ты дул себе в парус? Что ты делал?

— Ничего особенного. Я же говорю, что шел под парусом, как обычно. Чтобы было понятнее, я скажу несколько слов об обстановке. Я находился на небольшой яхте посередине реки, когда ветер внезапно упал. Ни весел, ни двигателя на яхте не было, и меня стало сносить по течению. Примерно в ста ярдах¹ прямо по курсу я увидел небольшую гребную лодку. Весла торчали по обе стороны ее корпуса, но сама лодка была пуста. Если бы мне удалось добраться до этой лодки, то я смог бы отбуксировать яхту в то место, куда направлялся. Но как преодолеть эти сто ярдов? Так как наступил полный штиль, лодку и яхту сносило вниз по течению реки с одинаковой скоростью, и расстояние между ними не сокращалось ни на дюйм².

— И что же ты сделал?

— Попробуй догадаться.

— Не знаю, что и думать. Вроде бы в полный штиль без весел нельзя плыть по течению быстрее, чем само течение.

— *Оказывается, можно. Я сказал, что стоял полный штиль, имея в виду, что воздух был неподвижен относительно суши. Но поскольку яхту сносило вниз по течению, относительно яхты дул едва заметный бриз, направленный против течения. Ситуация была такой же, как если бы я находился на озере, а легкий ветер дул со стороны неподвижной*

¹ 1 ярд, или 3 фута, составляет 0,914 м. — Прим. перев.

² 1 дюйм составляет 25,4 мм. — Прим. перев.

гребной лодки. Поэтому я стал галсировать против встречного ветра и благополучно добрался до лодки.

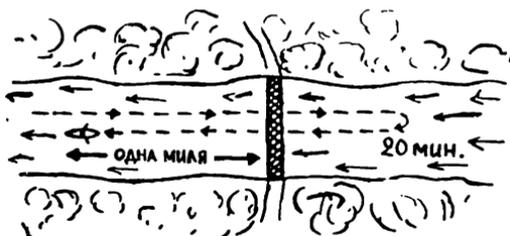
Лодка и бутылка

— Твое решение задачи о лодке звучит прямо как специальная теория относительности Эйнштейна, — заметил один из яхтсменов.

— Речь идет всего лишь об относительном движении. В этом ты прав, но до специальной теории относительности очень далеко, — возразил другой яхтсмен, большой любитель научно-популярной литературы. — Но этот случай напомнил мне другую историю, в которой важную роль играет, какую систему координат выбрать для описания явлений.

Однажды некто греб в лодке по реке против течения. На носу лодки стояла наполовину уже пустая бутылка отличного виски. Когда гребец проплывал под мостом, лодку слегка качнуло, и бутылка упала за борт. Не заметив пропажи, человек в лодке продолжал грести против течения, а бутылка между тем поплыла по течению. Через 20 минут человек заметил, что бутылка исчезла, повернул назад (временем, необходимым для совершения поворота, можно пренебречь) и поплыл вдогонку за бутылкой. Будучи от природы флегматичным, он продолжал грести в том же темпе, в каком греб против течения, но если его скорость относительно берегов до поворота была равна разности между скоростью лодки и скоростью течения, то теперь она стала равна сумме тех же скоростей. По прошествии некоторого времени гребец увидел бутылку и подобрал ее в одной миле¹ от моста (ниже его по течению).

Может ли кто-нибудь на основе этих данных сказать, какой была скорость течения?



¹ Как всякий «водоплавающий», моряк или речник, рассказчик использует не английскую милю (1609,315 м), как все «сухопутные крысы» в странах английского языка, а морскую милю (1852 м). — *Прим. перев.*

Несколько членов клуба, любители математики, принялись решать задачу, а один из них даже составил алгебраическое уравнение, связывавшее две неизвестные величины: скорость лодки относительно воды и скорость течения реки. Но ни прямой, ни алгебраический подход не позволили решить задачу, и в конце концов знатоки пришли к заключению, что данных просто недостаточно.

— *И все же решение задачи существует, причем очень простое, — заявил яхтсмен, предложивший задачу. — Необходимо лишь рассматривать задачу в системе координат, движущейся вместе с водой в реке. В такой системе координат вода в реке как бы останавливается (река превращается в озеро), а берега и мост движутся относительно системы координат. Если вы плывете на гребной лодке по озеру, уронили что-нибудь в воду и подобрали пропажу через 20 минут после того, как заметили ее, то вам понадобится ровно 20 минут, чтобы вернуться в то место, откуда вы устремились вслед за пропажей. Таким образом, бутылка пробыла в воде 40 минут, а за это время мост переместился относительно воды на 1 милю. Следовательно, скорость моста относительно воды или, что то же самое, скорость течения относительно моста и берегов составляет 1 милю за 40 минут, или 1,5 мили в час. Просто, не правда ли?*

— *Но вы не можете таким же способом найти скорость лодки, — заметил яхтсмен, пытавшийся решить задачу с помощью алгебраического уравнения. — Ведь в задаче две неизвестные величины.*

— *Вы правы, но скорость лодки относительно воды не имеет отношения к задаче, и я не просил найти ее. Трудность, с которой вы столкнулись, пытаясь решить задачу алгебраически, связана с тем, что вы пытались найти две неизвестные величины, располагая лишь одним уравнением. В действительности вторая неизвестная величина выпадает, но уравнение выглядело таким сложным, что вы этого не заметили.*

ДЖИН И ТОНИК

— А вот еще одна задачка для вас, — произнес один из яхтсменов, потягивая джин с тоником. — Предположим, что перед вами два бокала, наполненные вровень один неразбавленным джином, другой — чистым тоником. Вы отливаете в мерный стаканчик джин из первого бокала и переливаете его во второй бокал, хорошенько перемешиваете содержимое второго бокала, после чего наполняете смесь мерный стаканчик и переливаете смесь в первый бокал.

Вопрос заключается в следующем. Чего больше: джина в бокале с тоником или тоника в бокале с джином?

— Разумеется, больше джина в стакане с тоником, — заметил другой яхтсмен, — ведь вы налили в бокал с тоником мерный стаканчик неразбавленного джина, а влили в бокал с джином мерный стаканчик смеси тоника с джином.

— *Насколько я могу судить, вы совершенно уверены в этом, но вынужден вас разочаровать: ваш ответ совершенно неверен. Подумайте сами. Вы переливаете мерный стаканчик жидкости из первого бокала во второй, а затем мерный стаканчик жидкости возвращаете из второго бокала в первый. Так как первоначально оба бокала были налиты вровень, они остаются налитыми вровень и после переливаний. Это означает, что джин, отлитый из первого бокала, восполнен тоником из второго бокала и находится во втором бокале, восполняя убыль тоника. Следовательно, джина в бокале с тоником ровно столько же, сколько тоника — в бокале с джином.*

— Признаться, я все еще не понимаю.



— *О'кей. Попробуем разобраться во всем с числами. Предположим, что в каждом из бокалов первоначально содержалось по 3 унции жидкости¹ и что мерный стаканчик вмещает 1 унцию жидкости. Вы берете треть джина, или 1 его унцию, и переливаете в бокал с тоником, в котором в результате оказывается 4 унции жидкости. Во втором бокале теперь содержится три четверти тоника и одна четверть джина. Вы тщательно перемешиваете содержимое второго бокала и отливаете из него в мерный стаканчик 1 унцию смеси. Эта смесь содержит три четверти тоника и одну четверть джина. После того как вы переливаете мерный стаканчик такой смеси в первый бокал, баланс по количеству жидкости восстанавливается, но теперь у вас в первом бокале 2 1/4 унции джина и 3/4 унции тоника. А оставшиеся в бокале с тоником 3/4 унции джина заменяют перелитые в бокал с джином 3/4 унции тоника. Понятно?*

¹ Торговая единица веса, равная 28,35 г. — Прим. перев.

Если бы было так, как думали вы, и джина во втором бокале после двух переливаний оказалось больше, чем тоника в бокале с джином, то это означало бы, что общее количество джина увеличилось, а общее количество тоника — уменьшилось. Неплохой способ превращать воду в вино!

Баржа в шлюзе

— Вернемся к задачам, связанным с водной стихией, — вмешался в разговор еще один яхтсмен. — Вот одна неплохая задачка для вас. Я задавал ее в свое время нескольким физикам, и ни один из них не смог правильно решить ее. Баржа с грузом металлолома на борту вошла в шлюз. По какой-то неизвестной причине матросы на барже начали сбрасывать металлолом в воду и занимались этим до тех пор, пока полностью не опустошили трюмы баржи. Вопрос заключается в том, что произойдет с уровнем воды в шлюзе?

— Ничего, уровень воды в шлюзе не изменится, — сказал один из яхтсменов.

— Нет, уровень воды в шлюзе поднимется, — настаивал другой.

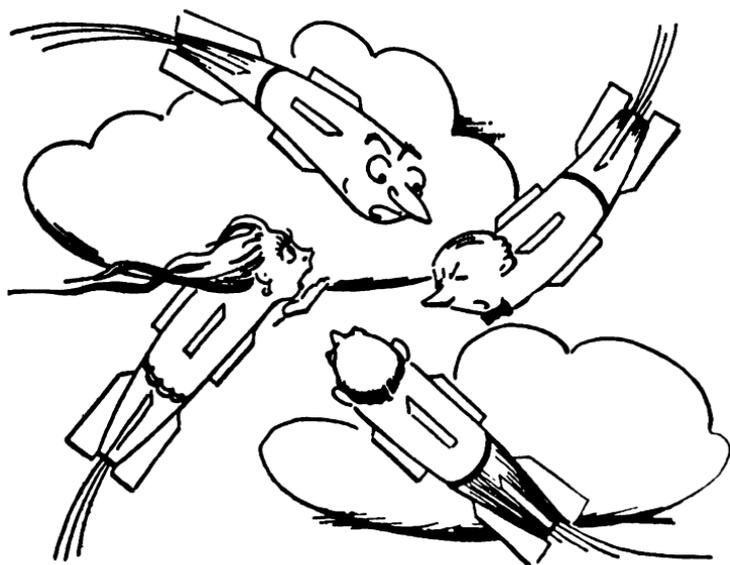
— Именно такие ответы я получал от физиков, — заметил первый яхтсмен. — Но в действительности ни тот, ни другой ответ не верен. Уровень воды в шлюзе понизится. Дело в том, что по закону Архимеда любое плавающее тело вытесняет объем воды, вес которого равен весу тела. Так как железо гораздо тяжелее воды, объем вытесняемой воды, когда железо находится на плаву, в трюме баржи, гораздо больше объема железа. Когда же железо оказывается в воде на дне шлюза, оно вытесняет лишь то количество воды, которое соответствует его объему. Следовательно, уровень воды в шлюзе, после того как железо выброшено за борт, должен понизиться.

— Мне не совсем ясно, — запротестовал один из слушателей.

— Давайте рассуждать иначе. Астрономы утверждают, что некоторые звезды, например белый карлик Сириус Б, состоят из вещества, которое в миллион раз плотнее воды. Кубический сантиметр такого вещества весил бы несколько тонн. Если столь тяжелый кубик поместить на баржу, то баржа осядет в воде очень глубоко и уровень воды в шлюзе поднимется. Если же кубический сантиметр звездного вещества покоится на дне, то он вытесняет всего лишь 1 кубический сантиметр воды, т. е. практически ничего, и уровень воды в шлюзе понижается. В случае с металлоломом получится то же самое, только различие в уровнях воды будет не столь заметно.

7.

Аэронавтика



Против ветра

Как-то раз группа офицеров ВВС США сидела в столовой при аэродроме, попивала кофе и разглядывала последние выпуски юмористических журналов.

— Послушай-ка, Джек, — спросил один из летчиков, — ты, кажется, собирался сегодня слетать на базу N и вернуться к обеду?

— Я изменил свои планы, — ответил Джек. — База N находится к востоку отсюда, а сегодня дует сильный восточный ветер, который намного уменьшит мою скорость. Я предпочитаю слетать на базу завтра. Метеорологи предсказывают на завтра тихую погоду.

— Но если ты планировал вернуться сегодня же, то ветер никак не скажется на продолжительности полета, — удивился первый офицер. — Ветер вряд ли утихнет сегодня до заката и на обратном пути станет попутным. Сколько времени проиграешь по пути на базу, столько наверстаешь на обратном пути.

— Разве? — усомнился Джек.

— Конечно. Какие могут быть сомнения?

— Сразу видно, что летный стаж у тебя не особенно велик, — заметил Джек, — и в специальной теории относительности ты не силен.

— А при чем здесь специальная теория относительности?

— Так уж случилось, приятель, что именно она стала теоретической основой эксперимента Майкельсона, с помощью которого тот пытался обнаружить так называемый «эфирный ветер», вызываемый движением Земли в космическом пространстве...

Но прежде всего мне хотелось бы решить задачу, связанную с моим полетом на базу N. На тот случай, если ты не слишком силен в математике, я попытаюсь сначала объяснить суть решения на словах. Как тебе известно, из-за встречного ветра скорость самолета уменьшается, поэтому на путь туда времени затрачивается больше, а из-за попутного ветра скорость самолета увеличивается, поэтому на обратный путь времени уходит меньше. Это означает, что сопротивление воздуха, или уменьшение скорости, оказывают на тебя более длительное воздействие, а с повышенной скоростью ты летишь более короткое время. Следовательно, «потери» больше, чем «прибыль». Понятно?

Но если по математике у тебя было «отлично», то убедить тебя в правильности решения может лишь формула. Пусть V — скорость моего самолета (я хочу сказать, скорость в полете относительно земли), а v — скорость ветра. Если расстояние до базы N равно L , то

полетное время при встречном ветре равно $\frac{L}{(V - v)}$, а при попутном ветре $\frac{L}{(V + v)}$. Следовательно, на полет туда и обратно я затрачу время

$$\frac{L}{(V - v)} + \frac{L}{(V + v)} = \frac{2LV}{(V^2 - v^2)} = \frac{2L}{V} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{V^2}}.$$

Так как $\frac{2L}{V}$ — время на полет туда и обратно в безветренную погоду, мы заключаем, что в ветреный день полетное время туда и обратно всегда больше. Например, если скорость ветра была бы равна половине скорости самолета $\frac{v}{V} = \frac{1}{2}$, то продолжительность полета увеличилась бы в $\frac{1}{(1 - \frac{1}{4})} = \frac{4}{3}$ раза по сравнению с продолжительностью по-

та при отсутствии ветра. А если бы скорость ветра была лишь чуть-чуть меньше скорости самолета, то на то, чтобы преодолеть даже короткие расстояния против ветра, потребовался бы не один день; а если бы V оказалась равной скорости ветра v , то время в полете обратилось бы в бесконечность. Разумеется, для реактивного самолета, на котором я летаю, скорость ветра особого значения не имеет, и когда я сослался на ветреную погоду, то сделал это нарочно, чтобы только удивить тебя. В действительности же мне позвонили и сообщили, что человек, с которым я должен был встретиться, прибудет завтра.

— Прекрасно! Если ты не спешишь, то расскажи мне об эксперименте Майкельсона.

— Охотно. Проблема состояла в следующем. Чтобы объяснить, как свет распространяется в пространстве, некоторые ученые предположили, что существует некая субстанция, названная ими эфиром, которая заполняет всю Вселенную. Майкельсону пришла мысль, что если бы эфир существовал, то можно было бы обнаружить эфирный ветер, обдувающий Землю, когда она движется в космическом пространстве. Земля обращается вокруг Солнца со скоростью около 29,8 км/с, поэтому эфирный ветер мы должны ощущать так же, как ты ощущаешь ветер, дующий тебе в лицо, когда ты летишь в открытой кабине.

В своем эксперименте Майкельсон послал два пучка света, один — в направлении гипотетического эфирного ветра, другой — в перпен-

дикулярном направлении. В конце пути каждый из пучков отражался назад, к источнику, где оба пучка сравнивались, Майкельсон ожидал, что пучок, распространяющийся в направлении эфирного ветра и против него, вернется к источнику с опозданием, как это было бы с моим самолетом, если бы я слетал в ветреный день на базу N и обратно, а пучок, распространяющийся перпендикулярно эфирному ветру, также запаздывал бы, но время запаздывания было бы другим. Сравнивая времена запаздывания пучков. Майкельсон надеялся обнаружить движение Земли сквозь световой эфир.

— И ему удалось обнаружить эфирный ветер?

— Нет. Оказалось, что оба пучка возвращались к источнику одновременно и без какого бы то ни было запаздывания. Отрицательный результат эксперимента Майкельсона очень озадачил физиков, пока Эйнштейн не объяснил его, создав свою знаменитую специальную теорию относительности, перевернувшую старые представления о пространстве и времени. Должен признаться, что я никогда не думал, что предстоящий полет на базу N приведет меня к этому небольшому экскурсу по поводу теории относительности Эйнштейна. Забавно, как задача о полете против ветра и возвращении с попутным ветром может ввести в заблуждение. На первый взгляд кажется, что проигрыш во времени при полете против ветра полностью компенсируется выигрышем во времени при полете с попутным ветром на обратном пути.

Самонаводящиеся ракеты

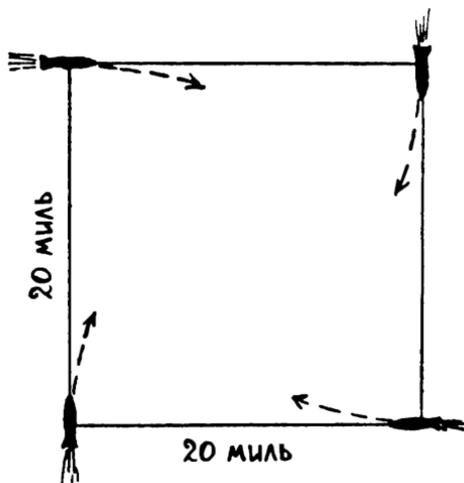
— Раз ты так лихо решаешь головоломные задачи, — заметил первый офицер, — я хочу предложить тебе одну весьма замысловатую задачку, которую недавно услышал от приятеля. Представь себе четыре самонаводящиеся ракеты, первоначально расположенные в вершинах квадрата со стороной 20 миль¹. Каждая ракета, как видно из рисунка, нацелена на другую — в соседней вершине квадрата, если вершины обходить по часовой стрелке.

Говоривший на минуту остановился и набросал в блокноте небольшой чертеж, который вы видите на рисунке, после чего продолжал:

— Скорость ракет пусть будет, скажем, 1 миля в секунду. При таком расположении все четыре ракеты после запуска будут постепенно

¹Это круглое число указано для удобства решения. Без ущерба смыслу задачи можно считать, что длина стороны квадрата равна 20 км. — *Прим. перев.*

поворачиваться вправо по часовой стрелке, держа курс на свою цель, и в конце концов столкнутся в центре квадрата. Требуется определить, какое расстояние успеют пролететь ракеты от запуска до столкновения.



— Это очень трудная математическая задача, — задумчиво произнес Джек. — Для решения ее, по-видимому, придется ввести полярные координаты с началом в центре квадрата, тогда я смогу написать дифференциальное уравнение для траекторий ракет. Но, разумеется, я не могу сделать это, не сходя с места.

— В этом-то все и дело. Всякий, кто знает высшую математику, может решить эту задачку, но вся соль в том и состоит, чтобы найти ее решение, настолько простое, что понять его смог всякий.

— Не думаю, чтобы такое решение можно было найти. Мне кажется, что траектории ракет имеют форму весьма замысловатых геометрических фигур.

— *Вся хитрость в том и состоит, что знать траектории ракет тебе совсем не нужно. Все, что необходимо иметь в виду для решения, — простой и очевидный факт: во время полета четыре ракеты располагаются в вершинах квадрата, который сжимается и поворачивается по часовой стрелке. Забудем о вращении и сосредоточим внимание только на сжатии квадрата. Так как ракеты нацелены друг на друга, скорость каждой ракеты всегда направлена вдоль одной из сторон сжимающегося квадрата на ракету, расположенную в соседней верши-*

не. Следовательно, скорость, с которой сжимаются стороны квадрата, равна скорости ракет, т. е. составляет 1 милю в секунду. А так как первоначально каждая ракета находилась на расстоянии 20 миль от цели, от запуска до столкновения ракет проходит 20 секунд.

— Очень, очень интересно, — произнес Джек. — Надо будет как-нибудь на маневрах проверить решение на четырех истребителях. Вот потеха получится!

Дозаправка

— А вот еще одна задача, которая, возможно, заинтересует вас, друзья, — вмешался в разговор другой летчик. — Предположим, что вы получили задание доставить бомбу в некоторую удаленную точку земного шара, расстояние до которой во много раз превосходит дальность полета без дозаправки имеющегося в вашем распоряжении самолета. Вам не остается ничего другого, как воспользоваться методом дозаправки в воздухе. Предположим, что одновременно с одного и того же аэродрома взлетают несколько одинаковых самолетов, которые дозаправляют друг друга в воздухе и постепенно, один за другим, прекращают полет.

Сколько самолетов понадобится вам для выполнения задания? Для простоты мы будем предполагать, что расход топлива измеряется в милях на галлон¹ и не зависит от нагрузки самолета.

— Знаешь, мы все слишком устали, чтобы решать такие сложные задачи, поэтому ты просто сообщи нам решение, — предложил один из летчиков.

— Будь по-вашему. Предположим, что первоначально в вашем распоряжении имеется n одинаковых самолетов, включая тот, на борту которого находится бомба, и что топливные баки всех самолетов перед вылетом полностью заправлены. В полете наступает такой момент, когда в баках любого из n самолетов топлива остается ровно столько, сколько необходимо для полной заправки топливных баков всех $(n - 1)$ остальных самолетов. Например, если с аэродрома в полет отправились 10 самолетов и каждый нес в топливных баках 10 000 галлонов топлива, то они летят до тех пор, пока у каждого не останется по 9000 галлонов топлива. В этот момент все топливо, находящееся на борту одного из 10 самолетов, используется для дозаправки 9

¹Единица объема. В США, где происходит действие этой задачи, 1 галлон для жидкости (топлива) равен 3,78543 дм³. — Прим. перев.

остальных самолетов, самолет с опустошенными баками прекращает полет, а остальные самолеты продолжают полет с полностью заправленными топливными баками. Следующая дозаправка производится, когда запас топлива в баках каждого самолета уменьшится на $1/9$. Самолет-заправщик, отдав все имевшееся у него топливо, совершает посадку, а остальные 8 самолетов с полностью заправленными топливными баками продолжают полет. Следующие дозаправки производятся, когда запас топлива в баках каждого самолета уменьшится на $1/8$, $1/7$ и т. д., пока не останется один-единственный самолет, на борту которого находится бомба. Израсходовав все топливо до последней капли, он достигает цели и сбрасывает бомбу.

Обозначив дальность полета без дозаправки через R , количество самолетов — через n , мы получаем формулу для расстояния до цели, которое может преодолеть самолет — носитель бомбы:

$$\begin{aligned} D &= \frac{R}{n} + \frac{R}{(n-1)} + \frac{R}{(n-2)} + \dots + \frac{R}{3} + \frac{R}{2} + R = \\ &= R \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Например, при $n = 10$ сумма в квадратных скобках равна 2,929. Это означает, что при такой схеме дозаправки, о которой я только что рассказал, можно долететь до цели, находящейся почти втрое дальше, чем позволяет дальность полета отдельно взятого самолета¹.

¹Читатель, должно быть, уже заметил, что в квадратных скобках стоит тот же бесконечный ряд, с которым мы уже сталкивались в задаче о наклонном столбике из домино (стр. 70).

Эпилог. Мораль

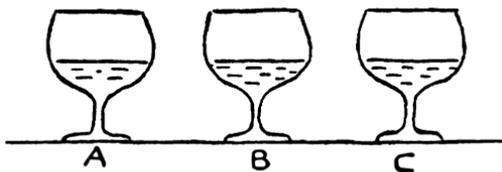
Книга была написана. Мы втроем, Гамов, Стерн и еще один любитель задач-головоломок Теодор фон Карман¹, сидели в ресторанчике в Вудз Хоул за бутылкой сливовицы. Возник вопрос, поровну ли поделен крепкий напиток.

— Предположим, что все трое из нас — законченные эгоцентристы. Можем ли мы разделить сливовицу так, чтобы каждый из нас был удовлетворен, если ему достанется не меньше сливовицы, чем любому другому? — спросил Гамов. — Мы хорошо знаем, как решается эта задача в случае, когда спорят двое завистливых детей. Один из спорщиков делит предмет спора на две части, которые он считает равноценными, а другой получает право выбрать любую из двух частей по своему усмотрению. Как следовало бы обобщить эту задачу о справедливом разделе на случай трех участников спора?

Фон Карман, улыбнувшись, обратился к Стерну:

— Позвольте мне слегка переформулировать задачу, после чего вы, я в этом просто уверен, не сможете не решить ее. Рассмотрим задачу, которая ставится так: каждый из нас должен быть удовлетворен, если ему достанется по крайней мере причитающаяся ему доля сливовицы (т. е. по крайней мере $1/3$ содержимого бутылки). Теперь для вас не составит труда решить задачу.

— *Действительно, кажется, я понял, как решить задачу, — сказал Стерн. — Фон Карман делит сливовицу на три порции, которые он считает равными, и поэтому будет удовлетворен, получив любую из них.*



¹Теодор фон Карман — выдающийся специалист в области аэродинамики.

Если Гамов считает, что в рюмке А сливовицы больше, чем в В или С, а я считаю, что больше всего сливовицы налито в рюмку В, то никаких осложнений не возникает. Гамов берет себе рюмку А, я — рюмку В, а фон Карман получает рюмку С. Затруднение может возникнуть только в том случае, если и Гамов, и я сочтем, что больше всего сливовицы оказалось налитой в рюмку А. Но и в этом случае, если мы оба согласимся, что в рюмке В сливовицы больше, чем в рюмке С, то задача существенно упрощается. Гамову и мне необходимо разделить содержимое рюмок В и С так, как это делают двое детей в задаче о честном разделе, а фон Карману достанется рюмка С.

Единственная трудность возникает в том случае, когда и Гамов и я сочтем, что больше всего сливовицы в рюмке А, но при этом Гамову будет казаться, что в рюмке В сливовицы больше, чем в рюмке С, а мне — что в рюмке С сливовицы больше, чем в рюмке В. В этом случае я предоставлю Гамову разделить содержимое рюмок А и В так, как ему кажется будет поровну. При этом он перельет часть сливовицы из рюмки А в рюмку В.

Если после переливания я буду по-прежнему думать, что в рюмке А сливовицы больше, чем в любой из двух остальных рюмок, и возьму ее себе, то Гамову не останется ничего другого, как выбрать рюмку В, поскольку до переливания он считал, что меньше всего сливовицы в рюмке С, а это означает, что в С заведомо меньше $1/3$ всей сливовицы. Разумеется, фон Карман предпочел бы выбрать рюмку В, так как после того, как он разлил поровну (как ему казалось) сливовицу по трем рюмкам, Гамов добавил в В сливовицы из рюмки А. Но поскольку задача сформулирована так, что каждый из нас должен быть удовлетворен, если получит по крайней мере причитающуюся ему долю спиртного, т. е. $1/3$ всей сливовицы, фон Карман не сможет протестовать, даже если Гамов выберет рюмку В.

Если же после того, как Гамов отольет сливовицу из рюмки А в рюмку В, то в силу тех же соображений я бы выбрал рюмку В, Гамов довольствовался бы рюмкой А, а фон Карману досталась бы рюмка С.

Если бы после переливания я решил выбрать рюмку С, то фон Карман мог бы взять рюмку В, а Гамов должен был бы взять рюмку А.

Вслушав решение, фон Карман улыбнулся:

— Теперь вы понимаете, почему я слегка изменил условия задачи? Вместо того чтобы каждый из нас считал себя удовлетворенным, если ему досталось по крайней мере столько же сливовицы, сколько любо-

му из остальных, я предложил, чтобы каждый из нас довольствовался, получив не менее причитающейся ему честной доли — 1/3 сливовицы. Один из этапов вашего решения показывает, что задача в первоначальной формулировке неразрешима.

Эту головоломку, мне кажется, можно по праву отнести к проблемам с моралью из области человеческих отношений.

Георгий Гамов, Марвин Стерн

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Дизайнер К. В. Шащенко

Технический редактор А. В. Ширококов

Корректор Е. Ф. Осипова

Подписано в печать 03.08.01. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,12. Уч. изд. л. 5,53.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 2.

Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ФГУП «Полиграф-ресурсы».
101429, г. Москва, ул. Петровка, 26.