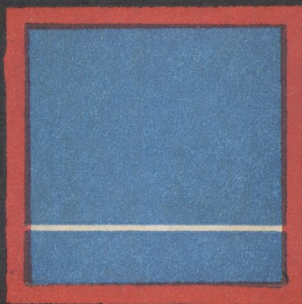


Р.Габасов,
Ф.М.Кириллова



МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1

ЧАСТЬ

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1

Р. Габасов,
Ф. М. Кириллова

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Часть I
ОБЩИЕ ЗАДАЧИ

МИНСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО БГУ им. В. И. ЛЕНИНА
1977

Рецензент доктор физико-математических наук,
профессор *И. В. Романовский*

Методы линейного программирования. Ч. 1. Общие задачи. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1977.

Излагаются методы решения разнообразных задач линейного программирования. Рассматриваются задачи, множество параметров которых не имеет специальной структуры. Обосновываются три группы методов: прямые, двойственные и комбинированные. В первой группе выделяются опорные и безопорные методы. Приведены модификации основных методов. Предложены новые методы решения вырожденных и квазивырожденных задач, методы анализа решений общих задач линейного программирования. При изложении основное внимание уделяется эффективному использованию всей информации, доступной специалистам, занятым исследованием физических прототипов рассматриваемых в книге математических моделей. Предложенные методы допускают останов после получения субоптимальных планов, с заданной точностью приближающихся к оптимальным.

Табл. 33, библи. 7.



30502-058
Г М 317-77 58-77

Scan AAW

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	7
<i>Глава I. ПРЯМОЙ ОПОРНЫЙ МЕТОД</i>	13
§ 1. Задача с односторонними ограниче- ниями	13
§ 2. Задача без ограничений на часть пере- менных	36
§ 3. Задача с двухсторонними ограниче- ниями	42
<i>Глава II. ДВОЙСТВЕННЫЙ ОПОРНЫЙ МЕТОД .</i>	51
§ 1. Задача с односторонними ограниче- ниями	52
§ 2. Задача с двухсторонними ограничениями	66
<i>Глава III. НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ</i>	71
§ 1. Первая модификация	73
§ 2. Вторая модификация	85
§ 3. Третья модификация	89
<i>Глава IV. БЕЗОПОРНЫЕ МЕТОДЫ</i>	91
§ 1. Метод одновременного решения прямой и двойственной задач	92
§ 2. Двойственный метод	102
§ 3. Прямой метод	107
<i>Глава V. КОМБИНИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ</i>	112
§ 1. Метод двухсторонних оценок	112
§ 2. Комбинированный опорный метод . . .	119
§ 3. Опорно-безопорный метод	121
§ 4. Безопорно-опорный метод	124
§ 5. Комбинированный безопорный метод . .	125

<i>Глава VI. ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ</i>	126
§ 1. Прямой метод	127
§ 2. Двойственный метод	134
§ 3. Другой подход к исследованию вырожденных задач	138
<i>Глава VII. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ</i>	142
§ 1. Вариация вектора стоимости	143
§ 2. Изменение вектора ограничений	151
§ 3. Вариация матрицы условий	158
§ 4. Измерение размеров задачи	162
<i>ЛИТЕРАТУРА</i>	172
<i>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ</i>	173

ПРЕДИСЛОВИЕ

Модели и методы линейного программирования имеют огромное прикладное значение и поэтому включаются в программы многих учебных заведений. Существует ряд монографий и пособий по линейному программированию, рассчитанных на аудиторию с самыми разными интересами. Появление в этой ситуации еще одной книги не может не вызвать определенных вопросов и поэтому требует соответствующего обоснования. Идея написания книги возникла у авторов после чтения студентам факультета прикладной математики БГУ лекций по избранным главам линейного программирования в дополнение к тем сведениям, которые были известны им из общих курсов. Мы обратили внимание на то, что в основных конечных методах линейного программирования (симплекс-методе и двойственном симплекс-методе) никак не используется дополнительная информация о планах и двойственных планах, которая, как правило, имеется у специалистов, занятых практическими задачами. Наконец, оказалось, что в классических методах отсутствуют критерии субоптимальности для останова процесса решения после достижения заданного приближения по целевой функции к оптимальному плану. Эти обстоятельства заставили нас взяться за разработку методов решения задач линейного программирования, в той или иной мере свободных от указанных недостатков.

В основе новых методов решения лежат понятия опорных планов и копланов. Эти объекты, являясь естественным обобщением классических понятий базисных планов прямой и двойственной задач из теории симплекс-метода, позволяют более гибко подходить к проблеме эффективного решения задач линейного программирования. Изменение основных понятий симплекс-метода вызвало принципиальные изменения и обобщения других методов, так или иначе связанных с ним. Основные результаты этой работы включены в данную книгу. Книга разбита на три части (1. Общие задачи; 2. Транспортные задачи; 3. Специальные задачи), традиционно содержащиеся почти во всех достаточно полных руководствах по линейному программированию.

Первая часть книги посвящена изложению методов решения задач планирования и управления, в которых множество параметров не имеет специальной структуры. Здесь в соответствии с типом априорной информации рассматриваются три группы методов оптимального планирования: прямые, двойственные и комбинированные. При этом различаются опорные и безопорные методы в зависимости от способов обработки начальной информации. Изложение максимально приближено к классическим образцам, хотя отдельно исследуются и модификации, не имеющие аналогов в классическом случае. Предложены новые методы исследования вырожденных и квазивырожденных задач. Много внимания уделяется анализу решения — проблеме, которая имеет исключительное практическое значение для задач управления, но недостаточно полно представлена в учебной литературе.

Во второй части книги рассматриваются транспортные задачи: классическая матричная задача, задача о потоке минимальной стоимости, обобщенная транспортная задача и их модификации. Методы первой части детализируются с учетом специфики новых задач. При этом естественно появляются такие эффективные методы, которые для общих задач выглядят безнадежными.

В третьей части книги приводятся методы решения задач линейного программирования и связанных с ними задач нелинейного программирования, имеющих специальную структуру множества параметров. Исследуются задачи блочного, дискретного, стохастического, кусочно-линейного, квадратичного программирования и др.

Материал, как правило, излагается в векторно-матричной форме. Используются традиционные обозначения. Векторы обозначаются строчными латинскими буквами, матрицы — прописными. Греческими буквами чаще всего обозначаются скалярные величины. Каждый вектор, участвующий в операциях, мыслится записанным в виде столбца; для получения вектор-строки используется символ ' (штрих) — транспонирование. Все символы поясняются при их введении.

При подготовке к печати первой части книги нам большую помощь оказали В. П. Кирлица и О. И. Костюкова. А. Я. Каменецкий предоставил в наше распоряжение свои результаты по комбинированному методу (§ 2 гл. V) и методам решения вырожденных задач (§ 1—2 гл. VI). Пользуясь случаем, выражаем им искреннюю благодарность.

АВТОРЫ

ВВЕДЕНИЕ

1. Среди современных методов оптимизации теоретически наиболее разработанными и практически наиболее тщательно проверенными являются методы линейного программирования. В данной книге обосновывается новый подход к численному решению. В сущности, этот подход занимает промежуточное положение между конечными и итерационными методами решения задач линейного программирования. Предлагаемая процедура решения может начинаться с любого плана, что позволяет эффективно использовать имеющийся опыт, экспертные догадки и т. п. Процесс решения можно вести или до получения оптимального плана, или остановить на субоптимальном плане, отклонение которого от оптимального по целевой функции не превосходит заданной величины. По форме излагаемый подход максимально приближен к классическому симплекс-методу.

Линейное программирование как раздел математики, связанный с оптимизацией линейных функций на множествах, заданных линейными уравнениями и неравенствами, оформился в 40—50-х гг. текущего столетия. Исключительное практическое значение задач, описываемых моделями линейного программирования, было главной причиной большого интереса к новой науке. История возникновения и пути развития линейного программирования подробно описаны в трудах Л. В. Канторовича и монографии Дж. Данцига [1].

2. Известно [1], что *общую задачу* линейного программирования можно свести к *нормальной форме*

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (1)$$

где x , c — n -векторы, b — m -вектор, A — $m \times n$ -матрица.

В теории линейного программирования важную роль играет задача, *двойственная* к (1):

$$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c, y \geq 0, \quad (2)$$

где y — m -вектор.

Задачу (1) называют *прямой задачей* линейного программирования. Она является, в свою очередь, двойственной к (2).

Основные факты теории линейного программирования содержатся в следующих утверждениях.

Теорема двойственности. Для того чтобы прямая задача (1) имела решение x^0 , необходимо и достаточно, чтобы имела решение y^0 двойственная задача (2). Значения *целевых функций задач* (1), (2) на решениях x^0, y^0 равны между собой:

$$c'x^0 = b'y^0.$$

Теорема существования. Для того чтобы задачи (1), (2) имели решения, необходимо и достаточно, чтобы ограничения обеих задач были совместны.

Следствия. 1) Если n -вектор x удовлетворяет ограничениям прямой задачи (1), а m -вектор y — ограничениям двойственной задачи (2), то $c'x \leq b'y$.

2) Если при условиях предыдущего следствия выполняется равенство $c'x = b'y$, то x, y — решения задач (1), (2) (достаточное условие оптимальности).

3) Если найдутся векторы $y^k, k=1, 2, \dots$, которые удовлетворяют ограничениям задачи (2) и вдоль которых $b'y^k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$, то ограничения задачи (1) несовместны.

4) Если на решении x^0 задачи (1) i -е ограничение в $Ax \leq b$ выполняется со знаком строгого неравенства, то i -я компонента y_i^0 решения y^0 задачи (2) равна нулю. Если же $y_i^0 > 0$, то $[Ax^0]_i = b_i$ (*условие дополняющей нежесткости*).

3. Основным вычислительным методом линейного программирования является *симплекс-метод*, предложенный Дж. Данцигом в 1947 г. Стандартная процедура симплекс-метода и его основных модификаций разработана для общей задачи линейного программирования в канонической форме

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0 \quad (b \geq 0). \quad (3)$$

Каждую задачу линейного программирования можно свести к форме (3). Переход от (1) к (3) осуществляется введением *свободных переменных*.

Любой n -вектор x , удовлетворяющий ограничениям задачи (3), называется *планом* (допустимым решением — feasible solution [1]). Основную роль в симплекс-методе играет понятие *базисного плана* (базисного допустимого решения — basis feasible solution [1]). По определению, план x является базисным, если у него $n-m$ компонент равны нулю, а остальным $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$, называемым базисными переменными, соответствуют линейно-независимые *векторы условий*

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m} \quad (4)$$

столбцы матрицы A . Векторы (4) составляют *базис* базисного плана. Базисный план называют *невыврожденным*, если все его базисные переменные положительны. Задача (3), все базисные планы которой невырождены, тоже носит название *невыврожденной*. Стандартная процедура симплекс-метода разработана для невырожденных задач.

Все итерации симплекс-метода проводятся по базисным планам. Для построения начального базисного плана предложено два общих метода: *М-метод* [2] и *двухфазный* [1]. В *М-методе* задача (3) заменяется на *М-задачу*

$$c'x - Me'x_u \rightarrow \max, Ax + x_u = b, x \geq 0, x_u \geq 0, \quad (5)$$

где x_u — m -вектор *искусственных* переменных, e — m -вектор, все компоненты которого равны единице, M — положительное число. Можно доказать [2], что при достаточно больших M вся информация о решениях задачи (3) получается в результате решения задачи (5). В задаче (5) $n+m$ -вектор $\bar{x} = \{0, b\}$ является, очевидно, базисным планом с базисом

$$e_1, e_2, \dots, e_m, \quad (6)$$

где e_i — единичный m -вектор, i -я компонента которого равна единице, остальные суть нули.

В двухфазном методе на *первой фазе* решается вспомогательная задача

$$-e'x_u \rightarrow \max, Ax + x_u = b, x \geq 0, x_u \geq 0,$$

начальный базисный план которой очевиден: $\{x, x_u\} = \{0, b\}$. Первая фаза обнаруживает несовместность ограничений задачи (3) (если $x_u^0 \neq 0$) или дает начальный базисный план (при $x_u^0 = 0$) для *второй фазы*, которая состоит в решении задачи (3) исходя из полученного базисного плана.

Как в *М-методе*, так и в двухфазном методе все вычисления ведутся согласно стандартной процедуре симплекс-метода.

Общую итерацию стандартной процедуры симплекс-метода опишем на языке задачи (3) (рассмотрение задачи (5) усложняет запись, но не вносит принципиальных изменений). Пусть x — базисный план с базисом (4). Составим *симплексную таблицу*, где числа c_1, \dots, c_n — компоненты вектора c , числа x_1, \dots, x_n — компоненты вектора x , m -векторы a_1, \dots, a_n — столбцы матрицы A . В таблице вторая строка и столбец заполняются символами, остальные клетки — числами. Число x_{ij} равно i -й координате вектора a_j в базисе (4). Для начального базисного плана с единичным базисом (6) числа x_{ij} равны, очевидно, элементам матрицы $\{A, E\}$ из ограничений задачи (5). Зная x_{ij} для одной итерации, легко построить \bar{x}_{ij} для следующей (правила формулы приводятся ниже).

c_0	c			c_1	\dots	\dots	c_n	
	θ, a_j	b	a_1	\dots	\dots	a_n	Θ	
	базис							
c_{i_1}	a_{i_1}	x_{i_1}	$x_{i_1 1}$	\dots	\dots	$x_{i_1 n}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
c_{i_m}	a_{i_m}	x_{i_m}	$x_{i_m 1}$	\dots	\dots	$x_{i_m n}$		
z			z_1	\dots	\dots	z_n		
Δ			Δ_1	\dots	\dots	Δ_n		

Предположим, что для рассматриваемого базисного плана x таблица заполнена полностью, за исключением z -, Δ -строк и Θ -столбца. Элементы z_j из z -строки вычисляются по формуле

$$z_j = \sum_{s=1}^m c_{i_s} x_{i_s j}, \quad j = \overline{1, n},$$

т. е., чтобы найти z_j , нужно составить сумму произведений элементов из c_0 -столбца и a_j -столбца. Строка Δ заполняется числами Δ_j : $\Delta_j = z_j - c_j$, $j = \overline{1, n}$, которые получаются из элементов c -строки и z -строки. Подготовительная работа для базисного плана x на этом заканчивается. Теперь можно ответить на вопросы: является ли план x решением задачи (3)?; не ограничена ли целевая функция задачи на планах?; как найти новый план, если ответы на предыдущие вопросы не являются утвердительными?

Можно доказать [1, 2], что невырожденный базисный план x является решением задачи (3) (оптимальным планом) тогда и только тогда, когда Δ -строка таблицы состоит из неотрицательных чисел.

Далее, если в Δ -строке найдется хотя бы одно отрицательное число $\Delta_j < 0$ такое, что неположительны все числа $x_{i_1 j}, \dots, x_{i_m j}$, стоящие над ним в a_j -столбце, то целевая функция задачи не ограничена сверху на планах задачи, т. е. задача (3) не имеет решения.

Наконец, если условия предыдущих утверждений не выполнены, то можно построить новый базисный план \bar{x} , на котором значение

целевой функции задачи (3) не меньше (в случае невырожденности — строго больше), чем на рассматриваемом плане. Порядок действий следующий. В Δ -строке находим минимальный элемент

$$\Delta_{j_0} = \min \Delta_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

В силу сделанных предположений обязательно $\Delta_{j_0} < 0$. Среди чисел $x_{i_1 j_0}, x_{i_2 j_0}, \dots, x_{i_m j_0}$ отмечаем положительные (они обязательно найдутся) и для них составляем отношения

$$\Theta_i = \frac{x_i}{x_{i j_0}}.$$

Эти числа заносим в соответствующие строки Θ -столбца таблицы. Выделяем минимальное число $\Theta_{i_0} = \min \Theta_i$. Индекс j_0 указывает на вектор a_{j_0} , который войдет в число базисных векторов нового плана \bar{x} . Вектор a_{i_0} с найденным индексом i_0 выйдет из числа базисных. Таким образом, базисы планов x и \bar{x} отличаются друг от друга лишь одним вектором.

Составим новую симплексную таблицу. Сначала в базис-столбец заносим символы нового базиса. По ним заполняем c_b -столбец. Элементы b -, a_1, \dots, a_n -столбцов (до z -строки) — основная часть симплексной таблицы — вычисляются по формулам

$$\bar{x}_{j_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}}, \quad \bar{x}_{j_0 j} = \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$\bar{x}_i = x_i - \frac{x_{i_0} x_{i j_0}}{x_{i_0 j_0}}, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_m, \quad i \neq j_0; \quad (8)$$

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i_0 j} x_{i j_0}}{x_{i_0 j_0}}, \quad i \neq j_0, \quad i = i_1, \dots, i_m, \quad j = \overline{1, n}.$$

Формулы (8) допускают простую геометрическую интерпретацию на таблице, которая называется *правилом прямоугольника*.

Заполнив числами (7), (8) новую таблицу и найдя по ним элементы z - и Δ -строк, приступаем к анализу нового базисного плана \bar{x} .

Для каждой невырожденной задачи (3) число итераций (переходов от одного базисного плана к другому), необходимых для того чтобы получить решение или убедиться, что его нет, конечно [1, 2].

Стандартная процедура симплекс-метода допускает наглядную геометрическую интерпретацию, согласно которой каждая итерация означает переход от одной крайней точки множества векторов, удовлетворяющих ограничениям задачи, к другой.

4. В симплекс-методе из всевозможных типов планов используются только весьма специфические базисные планы. Трудно ожидать, чтобы реальный план, предложенный экспертами или полученный из практического опыта, содержал бы ровно столько ненулевых компонент, сколько ограничений в задаче. Как правило, число таких

компонент оказывается бóльшим и поэтому план не является базисным. В симплекс-методе не предусмотрено использование небазисных планов, т. е. в нем не находит применения накопленный опыт, интуиция людей, занятых практической задачей, математическая модель которой имеет вид (3). Этот недостаток отмечался уже давно [1, 3, 4].

Приведем цитату из монографии Дж. Данцига [1]. «В юмористической пародии Пола Гантера, озаглавленной «Применение линейного программирования к финансированию», упоминалось, что миссис Эффективность удивлялась, почему мистер Исследование операций не начинал с хороших догадок». Далее Дж. Данциг, следуя предложению миссис Эффективность, в одной из задач выбирает в качестве начального плана решение задачи, близкой к исходной, а не проходит «через случайное использование искусственных переменных и фазу I симплекс-процесса». К счастью, решение вспомогательной задачи оказалось базисным планом и поэтому никаких трудностей для применения симплекс-метода не возникло. А что делать, если начальный план не является базисным? В симплекс-методе рекомендуется вводить искусственные переменные, причем независимо от ситуации процесс всегда начинается с одного и того же базисного плана.

Первая особенность подхода, который излагается в данной книге, состоит в том, что вместо понятия «базисный план» введено новое — *опорный план**, который позволяет преодолеть отмеченный выше недостаток базисного плана. Опорный план не является отрицанием базисного, скорее, это некоторое его обобщение. Он содержит и элементы базисного плана. Обобщение базисного плана проводится так, чтобы на опорных планах можно было построить алгоритм решения, обладающий достоинствами симплекс-алгоритма (простота, конечность и т. д.).

Итерации в симплекс-методе (п. 3) ведутся на планах задачи. Следовательно, вычисления можно прекратить на любом шаге и получить некоторый план. В этом одно из достоинств прямого симплекс-метода. Однако, имея на каждой итерации план, в симплекс-методе нельзя оценить его отклонение от оптимального. Поэтому практически вычисления нужно вести до получения оптимального плана. Увеличение же числа итераций нежелательно из-за накопления ошибок округления, в силу чего последние итерации в больших задачах фактически идут по векторам, не имеющим отношения к рассматриваемой задаче.

* В отечественной литературе часто опорным называется базисный план. В данной книге эти понятия существенно различаются.

С другой стороны, во многих задачах основной прирост целевой функции приходится на первые итерации, а последние итерации «выбирают» малые проценты либо доли процента разности между значениями целевой функции на текущем и оптимальном планах. Ясно, что в этой ситуации нужен *критерий субоптимальности*, позволяющий остановить процесс вычислений после достижения заданной точности по целевой функции.

Вторая особенность предлагаемого подхода состоит в том, что наряду с критерием оптимальности опорного плана доказывается и широко используется критерий его субоптимальности.

Указанные особенности могут быть весьма полезными при решении больших задач линейного программирования.

5. Симплекс-метод Дж. Данцига породил много модификаций и обобщений (метод обратной матрицы, мультипликативная форма метода обратной матрицы, двойственный симплекс-метод, метод одновременного решения прямой и двойственной задач). Для каждого из этих методов в книге будут предложены аналоги, в которых так или иначе реализуются те особенности, о которых шла речь в предыдущем пункте.

Глава I

ПРЯМОЙ ОПОРНЫЙ МЕТОД

Симплекс-метод, основные операции которого описаны во введении, в данной главе обобщается на небазисные планы. При обосновании метода используются общие результаты выпуклого программирования и теории двойственности, что, на наш взгляд, позволяет глубже понять существо предлагаемых методов оптимизации.

§ 1. Задача с односторонними ограничениями

Изложение метода удобно начать с задачи линейного программирования, в которой *прямые* ограничения на переменные носят *односторонний* характер.

1. Постановка задачи. Опорные планы. Рассмотрим общую задачу линейного программирования с односторонними ограничениями в канонической форме

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0, \quad (1)$$

где x, c — n -векторы, b — m -вектор, $m \leq n$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — $m \times n$ -матрица, $\text{rang } A = m$, a_1, \dots, a_n — m -векторы.

Каждый n -вектор x , удовлетворяющий уравнению $Ax = b$ (основное ограничение задачи (1)), назовем *псевдопланом* задачи (1). Псевдоплан x называется *планом* задачи (1), если дополнительно выполняется прямое ограничение $x \geq 0$.

План x^0 будет называться *оптимальным* планом задачи (1), если

$$c'x^0 = \max c'x,$$

где максимум берется по всем планам задачи.

О п р е д е л е н и е 1. Совокупность векторов условий

$$A_{\text{оп}} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} \quad (2)$$

назовем *опорой задачи* (1), если уравнение $\sum_{s=1}^k a_{i_s} x_{i_s} = 0$

имеет только нулевое решение $x_{i_s} = 0, s = \overline{1, k}$, но для любого вектора $a_i, i = \overline{1, n}, i \neq i_s, s = \overline{1, k}$, уравнение

$\sum_{s=1}^k a_{i_s} x_{i_s} + a_i x_i = 0$ имеет ненулевое решение.

Число k элементов опоры (число столбцов матрицы $A_{\text{оп}}$) равно рангу матрицы A . При сделанных предположениях матрица $A_{\text{оп}}$ имеет размеры $m \times m$ и является неособой.

Индексы i_s векторов опоры (2) — опорных векторов условий — назовем *опорными*. Пусть $I_{\text{оп}} = \{i_1, \dots, i_m\}$ — множество опорных индексов.

О п р е д е л е н и е 2. Пару $\{x, A_{\text{оп}}\}$ из плана и опоры задачи (1) назовем *опорным планом*. Компоненты плана

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \quad (3)$$

с опорными индексами называются *опорными*. Остальные компоненты $x_i, i \in I_{\text{н}},$ — *неопорные*, $I_{\text{н}} = I \setminus I_{\text{оп}}, I = \{1, \dots, n\}$. Аналогично $a_i, i \in I_{\text{н}},$ — *неопорные векторы условий*.

Опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ назовем *невыврожденным*, если все его опорные компоненты положительны. (Задача (1) с вырожденными опорными планами рассматривается в гл. VI.)

Отличие опорного плана от базисного [1] (см. введение) состоит в том, что неопорные компоненты x_i , $i \in I_{\text{н}}$, опорного плана не обязательно равны нулю. Если в невырожденном базисном плане ровно m компонент положительны, то в невырожденном опорном плане положительных компонент не меньше m (m — число основных ограничений задачи (1)). Понятно, что последнее свойство существенно упрощает нахождение невырожденного опорного плана.

2. Критерий оптимальности опорного плана. Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный опорный план задачи (1) с опорой

$$A_{\text{оп}} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}. \quad (4)$$

Замена опоры (2) на опору (4), очевидно, не уменьшает общности.

Введем следующие разбиения векторов x , c и матрицы A на компоненты

$$\begin{aligned} x &= \{x_{\text{оп}}, x_{\text{н}}\}, \quad x_{\text{оп}} = \{x_i, i \in I_{\text{оп}}\}, \quad x_{\text{н}} = \{x_i, i \in I_{\text{н}}\}; \\ c &= \{c_{\text{оп}}, c_{\text{н}}\}, \quad c_{\text{оп}} = \{c_i, i \in I_{\text{оп}}\}; \\ A &= \{A_{\text{оп}}, A_{\text{н}}\}, \quad A_{\text{н}} = \{a_i, i \in I_{\text{н}}\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Задачу (1) запишем в новой форме

$$c'_{\text{оп}}x_{\text{оп}} + c'_{\text{н}}x_{\text{н}} \rightarrow \max, \quad (6)$$

$$A_{\text{оп}}x_{\text{оп}} + A_{\text{н}}x_{\text{н}} = b, \quad x_{\text{оп}} \geq 0, \quad x_{\text{н}} \geq 0. \quad (7)$$

Согласно общему критерию оптимальности выпуклого программирования [5], план x в задаче (1) оптимален тогда и только тогда, когда производная целевой функции $c'x$ по любому допустимому направлению l из точки x неположительна:

$$\partial c'x / \partial l \leq 0. \quad (8)$$

Для получения из (8) эффективного критерия оптимальности опорного плана задачи (1) опишем сначала множество допустимых направлений. Вектор l называется допустимым направлением из точки (плана) x задачи (1), если найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что все векторы $x(\varepsilon) = x + \varepsilon l$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, являются планами задачи (1). Вспомнив определение плана и разбив по аналогии с (5) векторы $x(\varepsilon)$, l на компоненты, придем к соотношениям

$$\begin{aligned} &A_{\text{оп}}x_{\text{оп}}(\varepsilon) + A_{\text{н}}x_{\text{н}}(\varepsilon) = \\ &= A_{\text{оп}}(x_{\text{оп}} + \varepsilon l_{\text{оп}}) + A_{\text{н}}(x_{\text{н}} + \varepsilon l_{\text{н}}) = b, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x_{оп}(\varepsilon) &= x_{оп} + \varepsilon l_{оп} \geq 0, \\ x_{н}(\varepsilon) &= x_{н} + \varepsilon l_{н} \geq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

которые полностью характеризуют допустимое направление.

По предположению, x — план задачи (1), следовательно, для него выполняются соотношения (7). Поскольку $\{x, A_{оп}\}$ — невырожденный опорный план, то

$$x_{оп} > 0. \quad (11)$$

Первое предположение ведет к тому, что из (9) получается равенство

$$A_{оп} l_{оп} + A_{н} l_{н} = 0. \quad (12)$$

Из (11) следует, что для каждого l найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $x_{оп} + \varepsilon l_{оп} \geq 0$ при всех ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Значит, первое неравенство в (10) не накладывает ограничений на выбор допустимого направления l .

Для дальнейшего анализа уточним структуру компоненты $x_{н}$ плана x . Будем считать, что первые s , $0 \leq s \leq n-m$, компонент вектора $x_{н}$ положительны и образуют вектор $x_{н+}$, остальные компоненты равны нулю и составляют вектор $x_{н0}$. Таким образом, $x_{н} = \{x_{н+}, x_{н0}\}$. В соответствии с этим разбиением введем компоненты $A_{н+}$, $A_{н0}$, $l_{н+}$, $l_{н0}$.

В новых обозначениях второе неравенство в (10) принимает вид

$$x_{н+} + \varepsilon l_{н+} \geq 0, \quad x_{н0} + \varepsilon l_{н0} \geq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (13)$$

Поскольку $x_{н+} > 0$, то, как и в случае с $x_{оп}$, первое неравенство в (13) не накладывает ограничений на компоненту $l_{н+}$ допустимого направления (возможно, уменьшится при этом ε_0 , но это не существенно). По предположению, $x_{н0} = 0$. Значит, из (13) получаем одно неравенство

$$l_{н0} \geq 0, \quad (14)$$

которое эквивалентно всем ограничениям, наложенным на допустимое направление l соотношениями (10).

Соотношения (9), (10), которыми определялись допустимые направления, свелись к равенству (12) и неравенству (14). Матрица $A_{оп}$ по построению — неособая. Следовательно, равенство (12) эквивалентно

$$l_{оп} = -A_{оп}^{-1} A_{н} l_{н} = -A_{оп}^{-1} A_{н+} l_{н+} - A_{оп}^{-1} A_{н0} l_{н0}. \quad (15)$$

Окончательно, вектор $l = \{l_{оп}, l_{н+}, l_{н0}\}$ является допустимым направлением из невырожденного опорного плана $\{x, A_{оп}\}$ задачи (1) тогда и только тогда, когда для него выполняются соотношения (14), (15).

Теперь нетрудно подсчитать производную функции $c'x$ по допустимому направлению l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c'x}{\partial l} &= c'l = c'_{оп}l_{оп} + c'_{н+}l_{н+} + c'_{н0}l_{н0} = \\ &= -(c'_{оп}A_{оп}^{-1}A_{н+} - c'_{н+})l_{н+} - (c'_{оп}A_{оп}^{-1}A_{н0} - c'_{н0})l_{н0} = \\ &= -\Delta'_{н+}l_{н+} - \Delta'_{н0}l_{н0}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\Delta'_{н+} = c'_{оп}A_{оп}^{-1}A_{н+} - c'_{н+}, \quad \Delta'_{н0} = c'_{оп}A_{оп}^{-1}A_{н0} - c'_{н0}. \quad (17)$$

При вычислении производной (16) ограничение (15) на допустимое направление уже использовано. Осталось единственное ограничение (14). Поэтому, согласно (8), (16), невырожденный опорный план оптимален тогда и только тогда, когда неравенство $\Delta'_{н+}l_{н+} + \Delta'_{н0}l_{н0} \geq 0$ выполняется для всех $l_{н0} \geq 0, l_{н+}$. Последнее возможно, очевидно, лишь при условии

$$\Delta_{н+} = 0, \quad \Delta_{н0} \geq 0. \quad (18)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1 (*критерий оптимальности невырожденного опорного плана*). Для оптимальности плана x задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (18).

Критерий (18) отличается от классического критерия оптимальности невырожденного базисного плана x наличием соотношения типа равенства. Это соотношение обязано своим появлением положительным неопорным переменным, которые могут быть у опорного плана, но исключены у базисных планов. Понятно, что критерий оптимальности (18) является прямым обобщением своего классического аналога из теории симплекс-метода.

Доказательство теоремы 1 отличается от традиционных доказательств критериев оптимальности в линейном программировании и основано, как и доказательства многих теорем нелинейного программирования, на принципе допустимых направлений. Этим не в ущерб простоте доказательств подчеркивается единство методов линейного программирования и общих методов оптимизации.

Как и в симплекс-методе, проверку опорного плана на оптимальность удобно вести на специальных таблицах. Исходя из опоры (4), составим табл. I.1, которая отличается от симплексной таблицы дополнительными x -строкой и $x_{\text{оп}}$ -столбцом, но в ней нет b -столбца. В x -строку заносятся компоненты опорного плана, в $x_{\text{оп}}$ -столбец — опорные компоненты. Остальные клетки табл. I.1 заполняются по правилам симплекс-метода. Нетрудно проверить, что Δ -строка табл. I.1 состоит из элементов вектора $\Delta = \{\Delta_{\text{оп}}, \Delta_{\text{н+}}, \Delta_{\text{н0}}\}$, где $\Delta_{\text{оп}} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m\} = 0$, а векторы $\Delta_{\text{н+}}$ и $\Delta_{\text{н0}}$ вычисляются по формулам (17), которые в координатной записи имеют такой же вид, как и в симплекс-методе.

На языке табл. I.1 критерий оптимальности невырожденного плана звучит следующим образом: для оптималь-

Таблица I.1

$\begin{array}{c} c \\ c_{\text{оп}} \end{array}$			c_1	c_2	\dots	c_j	\dots	c_n	
	$\begin{array}{c} x \\ x_{\text{оп}} \end{array}$		x_1	x_2	\dots	x_j	\dots	x_n	$c'x$
		$\begin{array}{c} a_j \\ \text{опора} \end{array}$	a_1	a_2	\dots	a_j	\dots	a_n	
c_1	x_1	a_1	x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1j}	\dots	x_{1n}	
c_i	x_i	a_i	x_{i1}	x_{i2}	\dots	x_{ij}	\dots	x_{in}	
c_m	x_m	a_m	x_{m1}	x_{m2}	\dots	x_{mj}	\dots	x_{mn}	
z			z_1	z_2	\dots	z_j	\dots	z_n	
Δ			Δ_1	Δ_2	\dots	Δ_j	\dots	Δ_n	

ности плана x необходимо и достаточно, чтобы каждому положительному элементу x_j из x -строки соответствовал нулевой элемент Δ_j из Δ -строки и каждому нулевому элементу x_k из x -строки — неотрицательный элемент Δ_k из Δ -строки.

3. Достаточное условие субоптимальности. Если опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ удовлетворяет критерию оптимальности (18), то процесс решения задачи (1) прекращается. С практической точки зрения особо важное значение имеют правила останова процесса решения после достижения заданной окрестности оптимального плана. Удобной характеристикой отклонения плана от оптимального плана является разность между значениями целевой функции на оптимальном плане x^0 и на рассматриваемом плане x : $c'x^0 - c'x$. Исходя из этого, введем

Определение 3. План x^e назовем ε -оптимальным (субоптимальным) планом, если

$$c'x^0 - c'x^e \leq \varepsilon. \quad (19)$$

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — опорный план с опорой (4) и

$$\Delta' = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A - c'. \quad (20)$$

Тогда справедлива

Теорема 2 (достаточное условие субоптимальности опорного плана). Для того чтобы план x был ε -оптимальным планом задачи (1), достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\Delta \geq 0, \Delta'x \leq \varepsilon. \quad (21)$$

Доказательство. Из (20), (21) имеем

$$\Delta' = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A - c' \geq 0. \quad (22)$$

Значит, вектор $y' = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}$ удовлетворяет ограничению задачи

$$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c,$$

которая двойственна задаче (1). Следствие 1 из теории двойственности (см. введение) гласит:

$$c'x^0 \leq b'y. \quad (23)$$

Умножим (22) на x , воспользуемся равенством $Ax = b$ и неравенством (23):

$$\begin{aligned}\Delta'x &= c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} Ax - c'x = \\ &= y'Ax - c'x = y'b - c'x \geq c'x^0 - c'x.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом второго неравенства из (21) заключаем, что x — ε -оптимальный план задачи (1). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Можно доказать и обратное утверждение: если x — ε -оптимальный план, то при некоторой (лучшей для x) опоре $A_{\text{оп}}$ выполняются неравенства (21).

Проверка критерия субоптимальности на табл. I.1 сводится к проверке элементов Δ -строки на знак и к вычислению скалярного произведения векторов x и Δ , компоненты которых расположены в x - и Δ -строках таблицы.

З а м е ч а н и е. При использовании оценок всегда возникает вопрос о точности этих оценок. В частности, если на опорном плане $\{x, A_{\text{оп}}\}$ выполняются соотношения $\Delta \geq 0$, $\Delta'x = \varepsilon$, то когда $c'x^0 - c'x = \varepsilon$? Ответ на этот вопрос будет дан в гл. II при исследовании двойственного опорного метода.

4. Неограниченность целевой функции. Как и в симплекс-методе, процесс решения задачи (1) может прекратиться, если на некоторой итерации обнаружится, что целевая функция $c'x$ не ограничена сверху на множестве планов задачи. Найдем условие неограниченности.

Согласно вычислениям п. 2, производная $c'x$ по допустимому направлению l равна

$$\frac{\partial c'x}{\partial l} = -\Delta'_{n+} l_{n+} - \Delta'_{n0} l_{n0}, \quad l_{n0} \geq 0.$$

Следовательно, допустимое направление, вдоль которого $c'x$ возрастает, найдется тогда и только тогда, когда вектор Δ_{n+} отличен от нуля: $\Delta_{n+} \neq 0$, или среди компонент вектора Δ_{n0} есть отрицательные: $\Delta_k < 0$. Движение из x вдоль допустимого направления при постоянной скорости $\partial c'x / \partial l$ только в том случае ведет к неограниченному росту функции $c'x$ на планах задачи (1), если это движение не выходит из множества планов задачи, т. е. если

$$x + \varepsilon l \geq 0 \quad \text{при всех } \varepsilon \geq 0. \quad (24)$$

Найдем явные условия, когда эта ситуация возникает.

Предположим, что среди компонент вектора Δ_{n+} есть положительная: $\Delta_j > 0$. Построим направление

$$l = \{l_{\text{оп}}, -e_j, 0\}, \quad l_{\text{оп}} = A_{\text{оп}}^{-1} A_{n+} e_j = A_{\text{оп}}^{-1} a_j, \quad (25)$$

где e_j — единичный вектор $\{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$ с единицей на j -м месте. Ясно (см. п. 2), что направление l допустимо. Движение вдоль (25) идет по векторам $x(\varepsilon) = x + \varepsilon l$ с компонентами

$$\begin{aligned}x_{\text{оп}}(\varepsilon) &= x_{\text{оп}} + \varepsilon A_{\text{оп}}^{-1} a_j, \\x_{\text{н+}}(\varepsilon) &= x_{\text{н+}} - \varepsilon e_j, \quad x_{\text{н0}}(\varepsilon) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что при любом $x_{\text{н+}}$ с увеличением ε обязательно наступит момент, когда $x_{\text{н+}}(\varepsilon) < 0$. Вывод: движение вдоль направления (25) обязательно выводит из множества планов задачи.

Допустим теперь, что среди компонент вектора $\Delta_{\text{н+}}$ есть отрицательная: $\Delta_j < 0$. Построим направление

$$l = \{l_{\text{оп}}, e_j, 0\}, \quad l_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н+}} e_j = -A_{\text{оп}}^{-1} a_j,$$

которое также допустимо. Вдоль этого направления имеем

$$x_{\text{оп}}(\varepsilon) = x_{\text{оп}} - \varepsilon A_{\text{оп}}^{-1} a_j, \quad x_{\text{н+}}(\varepsilon) = x_{\text{н+}} + \varepsilon e_j, \quad x_{\text{н0}}(\varepsilon) = 0. \quad (26)$$

Отсюда видно, что $x_{\text{н+}}(\varepsilon) > 0$ при всех $\varepsilon \geq 0$. Неравенство (24) может нарушиться лишь по компоненте $x_{\text{оп}}(\varepsilon)$. Найдем условие, когда этого не произойдет. Поскольку m -вектор $A_{\text{оп}}^{-1} a_j$ состоит из координат x_{ij} , $i = \overline{1, m}$, разложения вектора a_j по опоре (4), то первую формулу из (26) можно записать так:

$$x_i(\varepsilon) = x_i - \varepsilon x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Теперь ясно, что при

$$x_{ij} \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (27)$$

ни одно из чисел $x_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, m}$, для любого $\varepsilon \geq 0$ не может быть отрицательным.

Таким образом, если некоторая компонента Δ_j вектора $\Delta_{\text{н+}}$ отрицательна и выполняются неравенства (27), то целевая функция $c'x$ не ограничена сверху на планах задачи (1).

Аналогично исследуется случай, когда имеются отрицательные компоненты у вектора $\Delta_{\text{н0}}$. Сформулируем результат.

Теорема 3 (достаточные условия несуществования оптимального плана). Пусть для опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ составлена табл. I.1. Если хотя бы для одного индекса j_* ,

$1 \leq j_* \leq n$, и всех индексов i , $1 \leq i \leq m$, опорных компонент выполняются неравенства $\Delta_{j_*} < 0$, $x_{ij_*} \leq 0$, то целевая функция задачи (1) не ограничена сверху на множестве планов.

Нетрудно заметить, что доказанное условие полностью совпадает с аналогичным условием симплекс-метода.

5. Итерация. Если при решении задачи (1) останов не произошел в пп. 2—4, то неизбежен переход к новому опорному плану. Для решения задачи нужна новая итерация. Оставшийся неисследованным случай можно охарактеризовать таким образом.

Пусть $\{x, A_{оп}\}$ — опорный план задачи (1), для которого составлена табл. I.1. Для плана x имеются допустимые направления, вдоль которых целевая функция возрастает, но движение вдоль них обязательно приводит на границу множества планов задачи (1). В этой ситуации естествен алгоритм прямого метода: 1) выбираем допустимое направление, вдоль которого скорость возрастания целевой функции максимальна; 2) вдоль выбранного направления движемся до границы множества планов.

Скорость изменения функции $c'x$ вдоль направления $l = \{l_{оп}, l_{н+}, l_{н0}\}$ подсчитана в п. 2:

$$\frac{\partial c'x}{\partial l} = -\Delta'_{н+} l_{н+} - \Delta'_{н0} l_{н0}. \quad (28)$$

Условие допустимости направления l имеет вид (см. п. 2)

$$l_{н0} \geq 0. \quad (29)$$

Функция (28) однородна по $l_{н+}$, $l_{н0}$, и поэтому в рассматриваемом случае она не имеет максимума при условии (29) (максимум равен бесконечности). Для сравнения допустимых направлений нужно ввести какое-нибудь *нормировочное условие*. Следуя симплекс-методу [1, 5], это условие возьмем в виде

$$\sum_{j=m+1}^n |l_j| = 1. \quad (30)$$

Максимум функции (28) при условиях (29), (30) равен

$$\max \frac{\partial c'x}{\partial l} = \max_{x_j > 0} \{ \max |\Delta_j|, \max_{x_j = 0} -\Delta_j \} \quad (31)$$

и в данном случае положителен.

Обозначим через j_0 индекс элемента Δ_{j_0} , на котором достигается максимум в правой части равенства (31). Рассмотрим две возможности.

Пусть $\Delta_{j_0} < 0$. Согласно (28) и (15), это означает, что направление $l = \{l_{\text{оп}}, l_{\text{н}}\}$, на котором достигается максимум функции (28) и которое удовлетворяет ограничениям (29), (30), имеет компоненты $l_{\text{н}} = e_{j_0}$, $l_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} e_{j_0} = -A_{\text{оп}}^{-1} a_{j_0}$. Движение из точки x вдоль направления l идет по векторам $x(\varepsilon) = \{x_{\text{оп}}(\varepsilon), x_{\text{н}}(\varepsilon)\}$, где

$$\begin{aligned} x_{\text{оп}}(\varepsilon) &= x_{\text{оп}} + \varepsilon l_{\text{оп}} = x_{\text{оп}} - \varepsilon A_{\text{оп}}^{-1} a_{j_0}, \\ x_{\text{н}}(\varepsilon) &= x_{\text{н}} + \varepsilon l_{\text{н}} = x_{\text{н}} + \varepsilon e_{j_0}. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда видно, что компонента $x_{\text{н}}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$ никогда не станет отрицательной. Опасность выхода за границу множества планов связана только с компонентой $x_{\text{оп}}(\varepsilon)$. В координатной записи первое равенство (32) имеет вид

$$x_i(\varepsilon) = x_i - \varepsilon x_{ij_0}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Среди чисел x_{ij_0} , $i = \overline{1, m}$, обязательно найдется положительное (случай $x_{ij_0} \leq 0$, $i = \overline{1, m}$, рассмотрен в п. 4). Значит, при увеличении ε неизбежно наступит момент, когда одно из чисел $x_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, m}$, обратится в нуль. Нетрудно сообразить, что максимально допустимый шаг Θ^0 , при котором $x_i(\Theta^0) \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, вычисляется по формулам

$$\Theta^0 = \min_{x_{ij_0} > 0} \Theta_i = \Theta_{i_0}, \quad \Theta_i = \frac{x_i}{x_{ij_0}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Сделав вдоль выбранного направления шаг Θ^0 , от плана x перейдем к плану \bar{x} :

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i - \Theta^0 x_{ij_0} = x_i - \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} x_{ij_0}, \quad i = \overline{1, m}; \\ \bar{x}_{j_0} &= x_{j_0} + \Theta^0 = x_{j_0} + \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}}; \quad \bar{x}_i = x_i, \quad i \neq \overline{1, m}; \quad i \neq j_0. \end{aligned} \quad (33)$$

Переменная $x_{i_0} = 0$, поэтому ее удаляем из числа опорных, вместо нее вводим переменную $\bar{x}_{j_0} > 0$. Если сравнить (33) с правилами преобразования компонент базисного плана в симплекс-методе (см. введение, (7)), то нетрудно заметить, что все опорные переменные, за исключением новой \bar{x}_{j_0} , преобразуются по одному правилу. Новая опор-

ная переменная отличается от аналогичной в симплекс-методе слагаемым x_{j_0} . Неопорные переменные нового плана \bar{x} , за исключением \bar{x}_{i_0} , остаются прежними как в излагаемом методе, так и в симплекс-методе. Отличие здесь в том, что в симплекс-методе они всегда равны нулю, теперь же среди них могут быть и положительные. Неопорная переменная \bar{x}_{i_0} нового плана в обоих методах равна нулю.

Введение в число опорных переменных нового плана переменной \bar{x}_{j_0} вместо \bar{x}_{i_0} сопровождается заменой в опоре вектора a_{i_0} на вектор a_{j_0} . Эта операция полностью совпадает с аналогичной операцией симплекс-метода [1, 5]. Поэтому остальные клетки основной части табл. I.1 для плана \bar{x} заполняются по правилу прямоугольника (см. введение, (8)):

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i_0j}x_{i_0j_0}}{x_{i_0j_0}}, \quad i \neq j_0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n},$$

$$\bar{x}_{j_0j} = \frac{x_{i_0j}}{x_{i_0j_0}}, \quad \bar{x}_{j_0j_0} = 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

После заполнения основной части табл. I.1 для плана \bar{x} одна итерация прямого метода заканчивается. Дальнейшие операции, связанные с анализом полученного плана, проводятся по аналогии с планом x .

Значение целевой функции за итерацию $x \rightarrow \bar{x}$ возрастает на величину $\Delta_{j_0} \frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}} > 0$.

Теперь исследуем второй возможный случай при вычислении (31): $\Delta_{j_0} > 0$, который в симплекс-методе невозможен. Нетрудно понять, что максимум функции (28) при условиях (29), (30) достигается на векторе $l = \{l_{\text{оп}}, l_{\text{н}}\}$, где

$$l_{\text{н}} = -e_{j_0}, \quad l_{\text{оп}} = A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}e_{j_0} = A_{\text{оп}}^{-1}a_{j_0}.$$

Движение вдоль полученного направления идет по векторам $x(\epsilon) = \{x_{\text{оп}}(\epsilon), x_{\text{н}}(\epsilon)\}$, где

$$\begin{aligned} x_{\text{оп}}(\epsilon) &= x_{\text{оп}} + \epsilon l_{\text{оп}} = x_{\text{оп}} + \epsilon A_{\text{оп}}^{-1}a_{j_0}, \\ x_{\text{н}}(\epsilon) &= x_{\text{н}} + \epsilon l_{\text{н}} = x_{\text{н}} - \epsilon e_{j_0}. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (34) видно, что при увеличении ϵ отрицательные компоненты могут появляться как у вектора $x_{\text{оп}}(\epsilon)$, так и

у вектора $x_H(\epsilon)$. Максимально допустимый шаг по компоненте $x_{оп}(\epsilon)$ вычисляется так же, как и в предыдущем случае:

$$\Theta_{i_0} = \min_{x_{ij_0} < 0} \Theta_i, \quad \Theta_i = -\frac{x_i}{x_{ij_0}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Максимально допустимый шаг по компоненте $x_H(\epsilon)$ очевиден из (34): $\Theta = x_{j_0}$.

Таким образом, вдоль выбранного направления можно сделать максимальный шаг

$$\Theta^0 = \min \{\Theta_{i_0}, \Theta\}, \quad (35)$$

при котором точка $x(\Theta^0)$ еще остается планом задачи (1).

Если

$$\Theta^0 = \Theta_{i_0} = -\frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}}, \quad (36)$$

то новый план $\bar{x} = x(\Theta^0)$ имеет, согласно (34), (36), следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i + \Theta^0 x_{ij_0} = x_i - \frac{x_{i_0} x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \bar{x}_{j_0} &= x_{j_0} - \Theta^0 = x_{j_0} + \frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}}, \quad \bar{x}_i = x_i, \quad i \neq \overline{1, m}; \quad i \neq j_0. \end{aligned} \quad (37)$$

Полученные формулы (37) совпадают с формулами (33). Следовательно, в случае (36) правило преобразования компонент опорного плана остается правилом прямоугольника с одним изменением, касающимся координаты \bar{x}_{j_0} .

Остальные клетки основной части табл. I.1 для нового плана \bar{x} заполняются так же, как в симплекс-методе. Целевая функция при переходе $x \rightarrow \bar{x}$ возрастает на величину $-\Delta_{j_0} \frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}} > 0$.

Если при вычислении шага Θ из формулы (35) окажется, что $\Theta^0 = \Theta = x_{j_0}$, то, согласно (34), компоненты нового плана \bar{x} равны

$$\bar{x}_i = x_i + x_{j_0} x_{ij_0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (38)$$

$$\bar{x}_{j_0} = 0, \quad \bar{x}_i = x_i, \quad i \neq \overline{1, m}; \quad i \neq j_0. \quad (39)$$

В этом случае ни одна из переменных $\bar{x}_i, i = \overline{1, m}$, не обращается в нуль и поэтому индексы опорных переменных

нового плана совпадают с индексами опорных переменных старого плана. Неопорная переменная \bar{x}_{j_0} становится нулем, остальные — не меняются. Опорные переменные преобразуются по формуле (38): к старым переменным x_i добавляются произведения элементов x_{j_0} , $x_{i j_0}$ из *ведущего столбца*. Поскольку индексы опорных переменных при переходе от x к \bar{x} не изменились, то не меняется и опора нового плана, т. е. остальные клетки основной части табл. I.1 для плана \bar{x} такие же, как и для плана x . Значение целевой функции за одну итерацию $x \rightarrow \bar{x}$ возрастает на величину $\Delta_{j_0} x_{j_0} > 0$.

На этом исследование всех возможных случаев при переходе от старого опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ к новому $\{\bar{x}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ завершается. Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Прямой метод за конечное число итераций приводит от любого опорного плана к оптимальному плану невырожденной задачи (1).

Доказательство. Выше было показано, что значение целевой функции при переходе от невырожденного опорного плана к следующему плану строго возрастает. Следовательно, прямой метод на невырожденных задачах ведет к монотонному увеличению значения целевой функции, в силу чего ни один опорный план на итерациях прямого метода не встретится дважды. Через конечное число итераций появляется по крайней мере одна новая нулевая неопорная переменная. Поэтому, если процесс решения не закончится на опорном плане, он обязательно приведет к невырожденному базисному плану. После этого итерации прямого метода, очевидно, совпадают с итерациями симплекс-метода. Конечность прямого метода в этом случае вытекает из конечности симплекс-метода для невырожденных задач. Теорема доказана.

6. Построение начального опорного плана. До сих пор рассматривались ситуации, когда хотя бы один опорный план задачи (1) известен. Поскольку успех в решении задачи во многом зависит от умелого построения исходного плана, один из путей улучшения методов решения сложных задач состоит в построении новых эффективных правил нахождения начальных планов. На этом этапе естественной представляется мысль об использовании всей информации о решаемой задаче, учете опыта, накопленного специалистами по задачам, в той или иной степени близким к рассматриваемой. Вопрос этот очень сложен. В данном пункте приводятся лишь первые ре-

зультаты. Теперь станет более отчетливой связь между введением нового понятия опорного плана (п. 1) и попыткой улучшить метод решения задачи (1) в целом.

Исследование методов построения начальных опорных планов начнем с общей задачи линейного программирования в нормальной форме

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (40)$$

где параметры c, x, b, A имеют такой же смысл, что и в задаче (1). Хотя любую задачу линейного программирования можно свести к форме (40), речь пойдет не о предварительном сведении*, а о том, что физическая задача в исходной постановке имеет форму (40). Класс таких задач достаточно обширен. Сюда относятся многие задачи: производственная о диете, смесях, сплавах и т. д.

В симплекс-методе [1] процесс решения задач типа (40) можно начать, если $b \geq 0$. Введя вектор свободных переменных $x_{св}$

$$Ax + x_{св} = b, x_{св} \geq 0,$$

получим начальный базисный план — $n + m$ -вектор $\{0, b\}$. Этот прием позволяет начать решение задачи (40) $\{b \geq 0\}$ симплекс-методом, однако его недостаток очевиден: начальный базисный план не зависит от наличия дополнительной информации о планах задачи (40).

Этого недостатка лишен прямой метод. В нем знание любого плана задачи (40) позволяет и в общем случае (без предположения о неотрицательности вектора b) построить начальный опорный план. Действительно, если x^1 — некоторый план задачи (40), то план $\{(x^1, b - Ax^1), A_{оп}\}$ будет опорным с единичным базисом $a_{n+1} = e_1, \dots, a_{n+m} = e_m$ для задачи

$$c'x \rightarrow \max, Ax + x_{св} = b, x \geq 0, x_{св} \geq 0,$$

которая эквивалентна задаче (40). Естественно ожидать, что при удачном плане x^1 процесс решения задачи (40) до получения оптимального или субоптимального планов окажется короче, чем в случае, когда никакая информация не используется.

З а м е ч а н и е. Построенная опора для начального плана не будет обязательно лучшей. Часто лучшая опора (см. п. 3) состоит из

* Если ограничения $Ax = b$ заменить на $Ax \leq b, -Ax \leq -b$, то размерность задачи увеличится вдвое.

столбцов исходной матрицы условий. Однако для нее требуется предварительно разложить векторы условий по опорным векторам. Эти операции неявно присутствуют в прямом методе при указанном выше выборе начальной опоры.

Случай, когда исходная формулировка физической задачи имеет каноническую форму (1), причем о структуре матрицы A нет никаких специальных сведений, будет исследован в § 3.

7. Производственная задача. На предприятии выпускают изделия n типов. Изделия проходят обработку на m типах операций. Стоимость обработки одного изделия i -го типа на j -й операции равна a_{ij} . Ресурсы по j -й операции равны b_j . Прибыль от одного изделия i -го типа равна c_i . Найти план производства, при котором прибыль предприятия максимальна.

Решим числовой пример с данными из табл. 1.2. Обозначим через x_i количество изделий i -го типа, планируемых к выпуску. Тогда математическая модель задачи примет вид

$$\begin{aligned} 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 &\rightarrow \max, \\ 5x_1 + 35x_2 + 5x_3 + 20x_4 &\leq 1000, \\ 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 5x_4 &\leq 500, \\ 8x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 &\leq 700, \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (41)$$

Перейдем к канонической форме задачи (41)

$$\begin{aligned} 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 &\rightarrow \max, \\ 5x_1 + 35x_2 + 5x_3 + 20x_4 + x_5 &= 1000, \\ 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 5x_4 + x_6 &= 500, \\ 8x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + x_7 &= 700, \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, 7}. \end{aligned}$$

Приписав к начальному плану $\{10, 20, 10, 10, 0, 0, 20\}$ опору $A_{оп} = \{a_5, a_6, a_7\} = E$, получим начальный опорный план (табл. 1.3, а). Он вырожденный и не удовлетворяет неравенствам (18). Выбрав в качестве *ведущего элемента* x_{52} и осуществив итерацию прямого метода ($\Theta^0 = 0$), получим табл. 1.3, б. Сделав еще одну итерацию, перейдем к табл. 1.3, в. Две итерации были использованы для ввода в опору столбцов исходной матрицы условий без изменения плана. План из табл. 1.3, в невырожденный. Он не удовлетворяет критерию оптимальности. Проверим на нем критерий субоптимальности

$$c'x^0 - c'x \leq \Delta'x = 80/19 \cdot 10 + 25/19 \cdot 10 = 1050/19.$$

Таким образом, прибыль при использовании начального плана производства отличается от максимально возможной прибыли не более чем на 5,3% ($((1050/19 : c'x) \cdot 100\% = (1050/19 : 1050) \cdot 100\% < 5,3\%$).

Улучшим начальный план с помощью прямого метода. В табл. 1.3, в ведущим является столбец a_1 . Поскольку $\Delta_1 > 0$ и в столбце a_1 нет отрицательных элементов, то столбец Θ не запол-

Таблица 1. 2

Тип изделия Тип операции	1	2	3	4	Ресурсы
1	5	35	5	20	≤ 1000
2	10	10	15	5	≤ 500
3	8	20	10	10	≤ 700
Прибыль на изделие	10	30	20	15	
Текущий план	10	20	10	10	

няется и $\Theta^0 = \Theta_1 = x_1 = 10$. Новый план (табл. 1.4) получается без изменения опоры. Прибыль возросла на $\Delta_1 \Theta^0 = 800/19$ единиц, т. е. более чем на 4%. По табл. 1.4 легко подсчитать, что еще одна итерация увеличивает прибыль на 250/19 единиц. В совокупности две последние итерации увеличивают прибыль на максимально возможное значение. По табл. 1.4 подсчитаем оптимальный план $x^0 = \{0, 500/19, 300/19, 0, 0, 0, 300/19\}$.

8. Метод обратной матрицы. Стандартная процедура симплекс-метода (см. введение) удобна при ручном счете, поскольку из-за простой табличной реализации она мало подвержена случайным ошибкам. Однако эта процедура при машинном счете обладает существенными недостатками. Во-первых, на каждой итерации преобразуется вся симплексная таблица, что требует хранения в оперативной памяти всей информации. Во-вторых, на текущей итерации используется только таблица, полученная из предыдущей итерации, что, с одной стороны, ведет к накоплению ошибок округления, с другой — не позволяет эффективно использовать специальную структуру матрицы условий A , которая во многих прикладных задачах имеет большой процент нулей. При итерациях эти нули, как правило, исчезают, что ведет к увеличению количества операций, а значит, и ошибок округления. Для задач большого размера, требующих много итераций, отмеченные недостатки особенно существенны. На основе симплекс-метода были предложены *модификации*, в которых указанные недостатки ослабляются [1]. Модифика-

Таблица 1.3

а

c $c_{оп}$			10	30	20	15	0	0	
	x $x_{оп}$		10	20	10	10	0	0	
		a_j опора	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	Θ
0	0	a_5	5	35	5	20	1	0	0
0	0	a_6	10	10	15	5	0	1	0
0	20	a_7	8	20	10	10	0	0	1
		Δ	-10	-30	-20	-15	0	0	

б

30	20	a_2	1/7	1	1/7	4/7	1/35	0	140
0	0	a_6	60/7	0	95/7	-5/7	-2/7	1	0
0	20	a_7	36/7	0	50/7	-10/7	-4/7	0	14/5
Δ			-40/7	0	-110/7	15/7	6/7	0	

в

30	20	a_2	1/19	1	0	11/19	3/95	-1/95	
20	10	a_3	12/19	0	1	-1/19	-2/95	7/95	
0	20	a_7	12/19	0	0	-20/19	-8/19	-10/19	
Δ			80/19	0	0	25/19	10/19	22/19	

Таблица 1.4

$\begin{array}{c} c \\ \swarrow \\ c_{\text{оп}} \end{array}$			10	30	20	15	0	0	
	$\begin{array}{c} x \\ \swarrow \\ x_{\text{оп}} \end{array}$		0	390/19	310/19	10	0	0	
		$\begin{array}{c} a_j \\ \swarrow \\ \text{опора} \end{array}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	Θ
30	390/19	a_2	1/19	1	0	11/19	3/95	-1/95	
20	310/19	a_3	12/19	0	1	-1/19	-2/95	7/95	310
0	500/19	a_7	12/19	0	0	-20/19	-8/19	-10/19	25
Δ			80/19	0	0	25/19	10/19	22/19	

ции не затрагивают существа симплекс-метода, а представляют собой другую форму реализации его основных операций. Это позволяет без труда распространить известные модификации симплекс-метода на прямой метод.

Основные операции, сопутствующие одной итерации, связаны с вычислением величин

$$\Delta_{m+1}, \dots, \Delta_n; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m; x_i, x_{ij}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \quad (42)$$

Чтобы предложить новые операции по вычислению этих величин, вернемся к исходным формулам, полученным в п. 2. Согласно п. 2, имеем:

$$\Delta_j' = c_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{оп}}^{-1} a_j - c_j', \quad j = \overline{m+1, n}; \quad \Theta_i = \pm \frac{x_i}{x_{ij_0}}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}\} = A_{\text{оп}}^{-1} a_j, \quad (43)$$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_m\}' = A_{\text{оп}}^{-1} b - A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} x_{\text{н}}.$$

Отсюда видно, что главную роль в осуществлении одной итерации играет обратная матрица $A_{\text{оп}}^{-1}$. Именно она (и вектор $x_{\text{н}}$) в формулах (43) меняется при переходе к новому плану и новой опоре. Остальные элементы c , A , b формул (43) представляют собой исходные данные. Поэтому естественна мысль [1] вместо правил перехода от

А к \bar{A} найти правила перехода от матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}$ к матрице $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$, связанной с новой опорой, а затем по простым формулам (43) подсчитать величины, нужные для осуществления итерации. Экономия при этом получается двоякой: а) матрица $A_{\text{оп}}$ имеет размеры $m \times m$ по сравнению с размером $m \times n$ матрицы A , что существенно (при $n \gg m$) уменьшает количество вновь вычисляемых величин и экономит оперативную память ЭВМ; б) при вычислении величин (42) по формулам (43) постоянно используется исходная информация, что позволяет полностью учесть особенности конкретных задач и сэкономить количество арифметических операций (за счет исключения операций умножения на нуль). Постоянное использование исходной информации вместо информации, полученной после преобразований, препятствует накоплению ошибок округления.

Для реализации обсуждаемой идеи, которая в силу особой роли матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}$ получила название *метода обратной матрицы*, построим формулы, связывающие матрицу $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$ нового опорного плана с матрицей $A_{\text{оп}}^{-1}$ старого опорного плана.

Как показано в п. 2, опоры планов x и \bar{x} отличаются между собой только одним вектором: в опоре плана \bar{x} вместо вектора a_{i_0} , имеющегося в опоре плана x , стоит вектор a_{j_0} ; остальные векторы опор для x и \bar{x} одинаковы. Таким образом, задача состоит в том, чтобы, зная две матрицы

$$A_{\text{оп}} = \{a_1, \dots, a_{i_0-1}, a_{i_0}, a_{i_0+1}, \dots, a_m\};$$

$$\bar{A}_{\text{оп}} = \{a_1, \dots, a_{i_0-1}, a_{j_0}, a_{i_0+1}, \dots, a_m\},$$

выразить элементы \bar{u}_{ij} матрицы $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$ через элементы u_{ij} матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}$. По определению, $A_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} = E$, $\bar{A}_{\text{оп}} \bar{A}_{\text{оп}}^{-1} = E$. Значит, для каждого $j = \overline{1, m}$ выполняются равенства

$$\sum_{i=1, i \neq i_0}^m a_i u_{ij} + a_{i_0} u_{i_0 j} = e_j;$$

$$\sum_{i=1, i \neq i_0}^m a_i \bar{u}_{ij} + a_{j_0} \bar{u}_{j_0 j} = e_j. \quad (44)$$

Как и в стандартной процедуре, координаты вектора a_{j_0} в опоре плана x обозначим через $x_{1j_0}, \dots, x_{mj_0}$:

$$a_{j_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^m a_i x_{i j_0} + a_{i_0} x_{i_0 j_0}. \quad (45)$$

Поскольку ведущий элемент $x_{i_0 j_0}$ при всех преобразованиях опоры отличен от нуля, то из (45) найдем

$$a_{i_0} = a_{j_0} \cdot \frac{1}{x_{i_0 j_0}} - \sum_{i=1, i \neq i_0}^m a_i \frac{x_{i j_0}}{x_{i_0 j_0}}$$

и подставим это выражение в первое уравнение (44)

$$\sum_{i=1, i \neq i_0}^m a_i \left(u_{ij} - \frac{u_{i_0 j} x_{i j_0}}{x_{i_0 j_0}} \right) + a_{j_0} \frac{u_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}} = e_j.$$

Сравнив это равенство со вторым уравнением (44), получим искомые соотношения

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ij} &= u_{ij} - u_{i_0 j} \frac{x_{i j_0}}{x_{i_0 j_0}}, \quad i = \overline{1, m}; \quad i \neq i_0; \\ \bar{u}_{i_0 j} &= u_{i_0 j} \cdot \frac{1}{x_{i_0 j_0}}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (46)$$

Для удобства вычислений по формулам (43) в методе обратной матрицы вводится [1] новый вектор $\pi' = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}$, компоненты π_j , $j = \overline{1, m}$, которого назовем *потенциалами*. Если в дополнение к обозначениям столбцов u_j матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}$ ввести обозначения v_i для строк

$$A_{\text{оп}}^{-1} = \{u_1, \dots, u_m\} = \begin{Bmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_m \end{Bmatrix},$$

то, согласно (43), алгоритм метода обратной матрицы для задачи (1) сведется к следующим операциям.

1) Зная матрицу $A_{\text{оп}}^{-1}$ для опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$, вычисляем потенциалы

$$\pi_j = c'_{\text{оп}} u_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

2) Находим оценки $\Delta_j = \pi' a_j - c_j$, $j = \overline{m+1, n}$.

3) Если выполняются соотношения

$$\Delta_j = 0 \text{ при } x_j > 0; \quad \Delta_j \geq 0 \text{ при } x_j = 0, \quad j = \overline{m+1, n},$$

то план x оптимален.

4) Если выполняются соотношения

$$\Delta_j \geq 0, \quad j = \overline{m+1, n}, \quad \sum_{j=m+1}^n x_j \Delta_j \leq \varepsilon,$$

то план x является ε -оптимальным.

5) Для отрицательных величин $\Delta_{j_*} < 0$ находим числа

$$x_{ij_*} = v'_i a_{j_*}, \quad i = \overline{1, m}.$$

6) Если среди чисел $\overline{m+1, n}$ найдется такой индекс j_* , что

$$\Delta_{j_*} < 0, \quad x_{ij_*} \leq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

то задача (1) не имеет решения — целевая функция не ограничена сверху на множестве планов.

7) Если процесс решения не остановился на предыдущих операциях, то находим индекс j_0 . Этот индекс имеет число Δ_{j_0} , доставляющее максимум выражению

$$\max \left\{ \max_{\substack{x_j > 0, \\ j = \overline{m+1, n}}} |\Delta_j|, \max_{\substack{x_j = 0, \\ j = \overline{m+1, n}}} -\Delta_j \right\}.$$

8) Если $\Delta_{j_0} < 0$, то вычисляем $x_{ij_0} = v'_i a_{j_0}$, $i = \overline{1, m}$. Среди этих чисел обязательно найдутся положительные.

9) Для положительных чисел $x_{i_* j_0} > 0$ находим $\Theta_{i_*} = x_{i_*} / x_{i_* j_0}$.

10) Найдим индекс i_0 , который принадлежит минимальному Θ_{i_0} из чисел Θ_{i_*} : $\Theta_{i_0} = \min \Theta_{i_*}$.

11) Из опоры плана x удаляем вектор a_{i_0} и добавляем вектор a_{j_0} . Новая совокупность векторов образует опору нового плана \bar{x} .

12) Компоненты \bar{x}_i , $i = \overline{1, n}$, нового плана вычисляем по формулам

$$\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}}; \quad \bar{x}_i = x_i - \frac{x_{i_0} x_{i j_0}}{x_{i_0 j_0}}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\bar{x}_i = x_i, \quad i = \overline{m+1, n}; \quad i \neq j_0,$$

или (после операции 13) по формулам

$$\bar{x}_i = \bar{v}'_i b - \bar{v}'_i \bar{b}_H, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\bar{b}_H = \bar{A}_H x_H, \quad \bar{x}_i = x_i, \quad i = \overline{m+1, n}; \quad i \neq j_0,$$

где $(n-m)$ -вектор \bar{x}_H отличается от вектора $x_H = \{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ тем, что у него отсутствует компонента x_{j_0} , но добавляется $x_{i_0} = 0$.

13) По формулам (46) вычисляются элементы \bar{u}_{ij} новой обратной матрицы $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$. На этом одна итерация для случая $\Delta_{j_0} < 0$ заканчивается.

14) Если $\Delta_{j_0} > 0$, то вычисляем $x_{ij_0} = v'_i a_{j_0}$, $i = \overline{1, m}$, и для отрицательных $x_{i_* j_0}$ находим $\Theta_{i_*} = -\frac{x_{i_*}}{x_{i_* j_0}}$.

15) Отмечаем индекс i_0 , принадлежащий минимальному Θ_{i_0} : $\Theta_{i_0} = \min \Theta_{i_*}$.

16) Если $\Theta_{i_0} < x_{j_0}$, то повторяем операции 11)–13).

17) Если $\Theta_{i_0} \geq x_{j_0}$, то для нового плана компоненты \bar{x}_i вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\bar{x}_i &= x_i + x_{j_0} x_{ij_0}, \quad i = \overline{1, m}; \quad \bar{x}_{j_0} = 0; \\ \bar{x}_i &= x_i, \quad i = \overline{m+1, n}, \quad i \neq j_0.\end{aligned}$$

18) Обратная матрица $A_{\text{оп}}^{-1}$ не меняется: $\bar{u}_{ij} = u_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, m}$. На этом операции для одной итерации (перехода от старого плана к новому) метода обратной матрицы заканчиваются.

9. Мультипликативный метод. Элементы u_{ij} и \bar{u}_{ij} двух обратных матриц связаны формулами (46). Оказывается, матрица D_{i_0} , осуществляющая эту связь,

$$\bar{A}_{\text{оп}}^{-1} = D_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1}, \quad (47)$$

имеет очень простую структуру, что позволяет улучшить метод обратной матрицы. Прямым подсчетом проверяется, что $m \times m$ -матрица

$$D_{i_0} = \begin{matrix} i_0 - 1 \\ \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & \dots & 0 & -\frac{x_{1j_0}}{x_{i_0 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 1 & -\frac{x_{i_0-1, j_0}}{x_{i_0 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{x_{i_0 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{x_{i_0+1, j_0}}{x_{i_0 j_0}} & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{x_{mj_0}}{x_{i_0 j_0}} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\} \end{matrix} \quad (48)$$

удовлетворяет (47).

Из (48) видно, что D_{i_0} лишь одним (i_0 -м) столбцом отличается от единичной диагональной матрицы E_m . Поэтому для записи информации о матрице D_{i_0} достаточно знать $m+1$ величину

$$i_0, -\frac{x_{1j_0}}{x_{i_0j_0}}, \dots, -\frac{x_{i_0-1, j_0}}{x_{i_0j_0}}, \frac{1}{x_{i_0j_0}}, \\ -\frac{x_{i_0+1, j_0}}{x_{i_0j_0}}, \dots, -\frac{x_{mj_0}}{x_{i_0j_0}}. \quad (49)$$

Зная эти величины, можно, согласно (47), с помощью арифметических операций полностью получить обратную матрицу $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$ для нового плана. В результате вместо запоминания m^2 элементов \bar{u}_{ij} матрицы $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$ достаточно запомнить $m+1$ число (49). Поскольку оперативная память ЭВМ является узким местом, то использование представления (47) с целью экономии оперативной памяти можно считать улучшением метода обратной матрицы.

Обратная матрица $\bar{A}_{\text{оп}}^{-1}$, согласно (47), имеет вид произведения (*мультипликативную форму*), поэтому новый метод организации вычислений на ЭВМ по решению задачи (1) называется мультипликативной формой метода обратной матрицы (*мультипликативным методом*).

Представление (47) можно развить. Если обозначить через U_k обратную матрицу на k -й итерации, через i_1, i_2, \dots, i_{k-1} — индексы ведущих строк на предыдущих итерациях, то, используя каждый раз на итерациях представление (47), получаем

$$U_k = D_{i_{k-1}} D_{i_{k-2}} \dots D_{i_1} U_1,$$

где U_1 — обратная матрица на первой итерации. Поскольку, как правило, на первой итерации прямого метода используется единичная опора, то $U_1 = E$.

Значит, для вычисления обратной матрицы U_k на k -й итерации имеем формулу

$$U_k = D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1}.$$

Можно считать, что именно эта форма обратной матрицы дала название мультипликативному методу.

§ 2. Задача без ограничений на часть переменных

В данном параграфе прямой опорный метод распространяется на задачи линейного программирования, в которых часть переменных не имеет прямых ограничений.

1. Постановка задачи. Опорные планы. Задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x = \{x_{(1)}, x_{(2)}\}, x_{(1)} \geq 0, \quad (1)$$

где x, c — n -векторы, b — m -вектор, $m \leq n$, A — $m \times n$ -матрица, $\text{rank } A = m$, $x_{(1)}$ — p -вектор, $x_{(2)}$ — q -вектор, $p + q = n$, назовем общей задачей линейного программирования без ограничений на часть переменных в канонической форме.

Условие $Ax = b$ — *основное ограничение* задачи, а каждый n -вектор x , удовлетворяющий ему, — псевдоплан задачи (1). План задачи (1) — это псевдоплан $x = \{x_{(1)}, x_{(2)}\}$, у которого $x_{(1)} \geq 0$. Оптимальный план x^0 определяется равенством $c'x^0 = \max c'x$, где справа максимум берется по всем планам x задачи (1).

Опора $A_{\text{оп}}$ вводится так же, как в § 1. Пара $\{x, A_{\text{оп}}\}$, где x — план, называется опорным планом.

Опорный план называется невырожденным, если все опорные компоненты вектора $x_{(1)}$ положительны. В данном параграфе исследуются только невырожденные задачи (1), при решении которых не встречаются опорные вырожденные планы.

2. Критерий оптимальности. Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — опорный план задачи (1), $A_{\text{оп}} = \{a_1, \dots, a_m\}$. Проведем следующее разбиение вектора x : совокупность опорных компонент плана обозначим через вектор $x_{\text{оп}}$, неопорных компонент — через вектор $x_{\text{н}}$, среди неопорных переменных выделим те, которые принадлежат вектору $x_{(1)}$, и будем считать, что они являются первыми компонентами вектора $x_{\text{н}}$. Объединив их в вектор $x_{\text{н}(1)}$, получим $x_{\text{н}} = \{x_{\text{н}(1)}, x_{\text{н}(2)}\}$. Далее вектор $x_{\text{н}(1)}$ разобьем на две компоненты $x_{\text{н}(1)} = \{x_{\text{н}(1)+}, x_{\text{н}(1)0}\}$, объединив в вектор $x_{\text{н}(1)+}$ все положительные компоненты вектора $x_{\text{н}(1)}$. В соответствии с разбиением вектора x будем выделять компоненты и у других векторов и матриц.

Повторив рассуждения п. 2 § 1, нетрудно показать, что множество допустимых направлений $l = \{l_{\text{оп}}, l_{\text{н}(1)+}, l_{\text{н}(1)0}, l_{\text{н}(2)}\}$ (определение из § 1 сохраняется) из опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ задачи (1) описывается соотношениями

$$l_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}(1)+}l_{\text{н}(1)+} - A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}(1)0}l_{\text{н}(1)0} - \\ - A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}(2)}l_{\text{н}(2)}, \quad l_{\text{н}(1)0} \geq 0.$$

Это позволяет записать производную целевой функции $c'x$ по допустимому направлению l в виде

$$\frac{\partial c'x}{\partial l} = -\Delta'_{H(1)+} l_{H(1)+} - \Delta'_{H(1)0} l_{H(1)0} - \Delta'_{H(2)} l_{H(2)}, \quad l_{H(1)0} \geq 0,$$

где

$$\begin{aligned}\Delta'_{H(1)+} &= c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{H(1)+} - c'_{H(1)+}, \\ \Delta'_{H(1)0} &= c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{H(1)0} - c'_{H(1)0}, \\ \Delta'_{H(2)} &= c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{H(2)} - c_{H(2)}.\end{aligned}$$

Из этой формулы и неравенства (8) из § 1 следует

Теорема 1 (критерий оптимальности невырожденного опорного плана задачи (1)). Для оптимальности плана x необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\Delta_{H(1)+} = 0, \quad \Delta_{H(1)0} \geq 0, \quad \Delta_{H(2)} = 0. \quad (2)$$

Несмотря на кажущуюся сложность, критерий (2) допускает простую проверку на табл. I.5 прямого метода, где строки и столбцы, содержащие переменные, на которые не наложено ограничений, помечены *. Для оптималь-

Таблица I.5

c			c_1	\dots	c_p	c_{p+1}	\dots	c_n		
$c_{\text{оп}}$										
	x		x_1	\dots	x_p	x_{p+1}	\dots	x_n	$c'x$	
	$x_{\text{оп}}$									
		a_j	a_1	\dots	a_p	a_{p+1}	\dots	a_n	Θ	
		опора								
c_1	x_1	a_1	x_{11}	\dots	x_{1p}	$x_{1,p+1}$	\dots	x_{1n}		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
c_m	x_m	a_m	x_{m1}	\dots	x_{mp}	$x_{m,p+1}$	\dots	x_{mn}		
z			z_1	\dots	z_p	z_{p+1}	\dots	z_n		
Δ			Δ_1	\dots	Δ_p	Δ_{p+1}	\dots	Δ_n		

ности плана x необходимо и достаточно, чтобы в Δ -строке все элементы Δ_j , стоящие в помеченных столбцах, были равны нулю; среди остальных элементов должны быть неотрицательными элементы Δ_k , соответствующие нулевым элементам x_k из x -строки, и равны нулю числа Δ_l , соответствующие положительным числам x_l .

3. Достаточное условие субоптимальности. Определение субоптимального (ε -оптимального) плана сохраняется таким же, как в § 1. Напомним: $\Delta = \{\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}\}$,

$$\Delta'_{(1)} = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{(1)} - c'_{(1)}, \quad \Delta'_{(2)} = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{(2)} - c'_{(2)}. \quad (3)$$

Теорема 2 (*критерий субоптимальности опорного плана задачи (1)*). Для того чтобы план x был ε -оптимальным планом задачи (1), достаточно выполнения условий

$$\Delta_{(1)} \geq 0, \quad \Delta_{(2)} = 0, \quad \Delta'_{(1)} x_{(1)} \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Доказательство. Задача, двойственная к (1), имеет вид

$$b'y \rightarrow \min, \quad A'_{(1)} y \geq c_{(1)}, \quad A'_{(2)} y = c_{(2)}. \quad (5)$$

Следовательно, в силу первых двух соотношений из (4) и равенств (3) вектор $y' = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}$ является планом задачи (5). Согласно теории двойственности (см. следствие 1 из введения), для каждой пары планов x^0 , y прямой (1) и двойственной (5) задач выполняется неравенство

$$c'x^0 \leq b'y. \quad (6)$$

После умножения первого равенства из (3) на $x_{(1)}$ получим

$$\Delta'_{(1)} x_{(1)} = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{(1)} x_{(1)} - c'_{(1)} x_{(1)}. \quad (7)$$

Из (1) следует $A_{(1)} x_{(1)} = b - A_{(2)} x_{(2)}$. Учитывая это равенство и неравенство (6), из (7) можно получить

$$\begin{aligned} \Delta'_{(1)} x_{(1)} &= c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} b - c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_{(2)} x_{(2)} - c'_{(1)} x_{(1)} = \\ &= y'b - y'A_{(2)} x_{(2)} - c'_{(1)} x_{(1)} = \\ &= y'b - c'_{(2)} x_{(2)} - c'_{(1)} x_{(1)} = b'y - c'x \geq c'x^0 - c'x. \end{aligned}$$

Теперь использование второго неравенства из (4) ведет к утверждению теоремы 2. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Верно утверждение, обратное приведенному в теореме 2.

Проверка критерия субоптимальности на табл. I.5 проводится так же, как и аналогичная операция в задаче (1) из § 1. Усложняются лишь условия, при которых критерий субоптимальности можно использовать: нужно добиться сначала выполнения двух первых соотношений из (4), а затем вычислить третье.

4. Неограниченность целевой функции. Продолжая переносить результаты из § 1 на задачу данного параграфа, рассмотрим следующие случаи: а) среди элементов Δ -строки найдется такой, что $\Delta_{j_*} < 0$, $x_{ij_*} \leq 0$ для всех опорных i среди $1 \leq i \leq p$, т. е. среди индексов $\overline{1, m}$, принадлежащих переменным, на знак которых наложено ограничение; б) среди элементов Δ -строки найдется такой, что $\Delta_{j_*} > 0$, $j_* \in \{p+1, \dots, n\}$, $x_{ij_*} \geq 0$ для всех i , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i \leq p$.

Первый случай отличается от аналогичного, рассмотренного в § 1, тем, что неравенства $x_{ij_*} \leq 0$ проверяются только для тех опорных индексов i , которые принадлежат переменным x_i , имеющим в задаче (1) ограничение $x_i \geq 0$. В п. 4 § 1 показано, что при выполнении случая а) отмеченные переменные не будут препятствовать движению вдоль допустимого направления, заданного индексом j_* , и вдоль которого целевая функция возрастает. Величины x_{ij_*} по остальным индексам i из опорного множества могут быть произвольными, ибо на соответствующие им опорные переменные x_i ограничений в задаче (1) не наложено. Таким образом, в случае а) задача (1) не имеет решения.

Рассмотрим случай б). И здесь найдется допустимое направление, вдоль которого целевая функция задачи возрастает. В § 1 это возрастание не могло быть неограниченным, ибо одна из неопорных переменных x_{j_*} обязательно становилась со временем отрицательной. Теперь же индекс j_* принадлежит переменной, на которую в задаче (1) не наложено ограничений типа $x_i \geq 0$. Поэтому причины, в силу которой останавливалось движение в § 1, здесь нет. Однако в случае б) движение вдоль допустимого направления могло выйти на границу множества планов и потому, что некоторые опорные переменные со временем стали отрицательными. В действительности же этого не произойдет, если выполнены все условия случая б). Вторая группа неравенств в б) гарантирует, что соответствующие опорные переменные x_i , $i = \overline{1, p}$, вдоль допустимого направления возрастают. Остальные опорные переменные x_i ,

$i = \overline{p+1, n}$, согласно условиям задачи могут быть произвольными. Таким образом, установлена

Теорема 3 (достаточное условие несуществования решения задачи (1)). Если выполнены условия одного из приведенных выше случаев, то целевая функция $c'x$ задачи (1) неограниченно возрастает вдоль планов задачи.

Проверка достаточного условия несуществования решения задачи (1) просто осуществляется на табл. I.5. Теперь удобно отмечать * и a_i -строки, в которых стоят опорные переменные без ограничений типа $x_i \geq 0$.

5. Итерация. После пп. 2—4 остались нерассмотренными случаи, когда для текущего опорного плана имеются допустимые направления, вдоль которых целевая функция возрастает, а движение вдоль них обязательно приводит на границу множества планов задачи (1). Необходимые вычисления уже проведены в п. 5 § 1. Для обоснования правил перехода в условиях задачи (1) достаточно в аналогичные правила § 1 внести изменения, вызванные тем, что теперь на некоторые переменные x_i ограничений $x_i \geq 0$ не наложено.

Сначала найдем среди Δ_j , $j = \overline{1, n}$, на которых критерий оптимальности не выполняется, элемент Δ_{j_0} с наибольшим модулем. Возможны два случая: а) $\Delta_{j_0} < 0$; б) $\Delta_{j_0} > 0$ (в случае $\Delta_{j_0} = 0$ план оптимален (см. п. 2)).

Пусть имеет место случай а). По положительным элементам $x_{ij_0} > 0$, $i \in \{p+1, \dots, n\}$, столбца a_{j_0} , стоящим в непомеченных строках, составим отношения $\Theta_i = x_i/x_{ij_0}$. Среди чисел Θ_i найдем минимальное. Элемент $x_{i_0j_0}$ берем за ведущий. Преобразуем табл. I.5. Опора нового плана состоит из векторов опоры старого, за исключением вектора a_{i_0} , вместо которого войдет вектор a_{j_0} . Компонента нового плана $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + x_{i_0}/x_{i_0j_0}$. Остальные компоненты плана \bar{x} и элементы основной части табл. I.5 вычисляются по правилу прямоугольника симплекс-метода.

Пусть реализуется случай б): $\Delta_{j_0} > 0$. Здесь возможны два подслучая: б₁) элемент Δ_{j_0} находится в непомеченном столбце; б₂) элемент Δ_{j_0} — в помеченном. В первом подслучае табл. I.5 преобразуется с ведущим элементом $x_{i_0j_0}$, как и в § 1 для $\Delta_{j_0} > 0$. Во втором подслучае поступаем, как в § 1 для $\Delta_{j_0} > 0$, $x_{j_0} > \Theta_{i_0}$.

§ 3. Задача с двухсторонними ограничениями

В приложениях большой удельный вес занимают задачи линейного программирования, на переменные которых наложены ограничения типа $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$. Включать подобные ограничения в число основных нецелесообразно, так как это увеличивает размеры задачи. Ниже показывается, что при небольших изменениях в процедуре прямого опорного метода их можно оставить в числе прямых.

1. Постановка задачи. Опорные планы. Общей задачей линейного программирования с *двухсторонними ограничениями* в канонической форме называется задача

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

где c, x, d — n -векторы, b — m -вектор, A — $m \times n$ -матрица, $m \leq n$, $\text{rank } A = m$, $\|d\| < +\infty$, $d > 0$.

Если вместо ограничения $0 \leq x \leq d$ присутствует ограничение $\underline{d} \leq x \leq \bar{d}$, то, полагая $z = x - \underline{d}$, получим относительно z задачу в канонической форме

$$c'z + c'\underline{d} \rightarrow \max, Az = b - A\underline{d}, 0 \leq z \leq \bar{d} - \underline{d}.$$

К задаче (1) сводятся и задачи линейного программирования, содержащие ограничения $\underline{b} \leq Ax \leq \bar{b}$. В этом случае для z получим эквивалентные ограничения в канонической форме $Ax + z = \bar{b}$, $0 \leq z \leq \bar{b} - \underline{b}$.

В задаче (1) *планом* называется каждый n -вектор x , удовлетворяющий $Ax = b$, $0 \leq x \leq d$. (*Псевдоплан* — вектор, удовлетворяющий только основному ограничению $Ax = b$, *квазиплан* — вектор, удовлетворяющий только прямому ограничению $0 \leq x \leq d$.) *Оптимальный план* x^0 задачи (1), по определению, доставляет наибольшее значение целевой функции: $c'x^0 = \max c'x$.

Определение опоры $A_{\text{оп}}$, опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ сохраняется таким же, как в § 1.

Опорный план задачи (1) называется невырожденным, если его опорные компоненты удовлетворяют неравенствам $0 < x_i < d_i$, $i \in I_{\text{оп}}$.

Неопорные компоненты опорного плана могут принимать граничные значения $(0, d_i)$ и находиться между границами, в то время как у базисного плана задачи (1) (основного понятия симплекс-метода) все небазисные компоненты принимают только граничные значения.

2. Критерий оптимальности. Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — опорный план. По опоре $A_{\text{оп}}$ построим m -вектор потенциалов u

$$u'A_{\text{оп}} - c'_{\text{оп}} = 0,$$

где $c_{\text{оп}} = \{c_i, i \in I_{\text{оп}}\}$. Вычислим оценки Δ_j неопорных векторов условий $a_j, j \in I_{\text{н}}$:

$$\Delta_j = u'a_j - c_j, j \in I_{\text{н}}.$$

Пусть для рассматриваемого опорного плана выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_j &\geq 0 \text{ при } x_j = 0; \\ \Delta_j &\leq 0 \text{ при } x_j = d_j; \\ \Delta_j &= 0 \text{ при } 0 < x_j < d_j, j \in I_{\text{н}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда, обозначив $\Delta' = u'A - c'$, получим

$$\begin{aligned} c'x &= -\Delta'x + u'Ax = -\sum_{j \in I_{\text{н}}} \Delta_j x_j + u'b = \\ &= -\sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j d_j + b'u. \end{aligned} \quad (3)$$

Положим

$$\begin{aligned} y_i &= u_i, i \in I_{\text{оп}}; \omega_j = -\Delta_j \text{ при } \Delta_j < 0; \\ \omega_j &= 0 \text{ при } \Delta_j \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что вектор $\{y, \omega\}$ с компонентами (4) является планом двойственной задачи

$$b'y + d'\omega \rightarrow \min, A'y + \omega \geq c, \omega \geq 0. \quad (5)$$

Из (3), (4) следует $c'x = \sum_{\Delta_j < 0} \omega_j d_j + b'y = b'y + d'\omega$, т. е.,

согласно теории двойственности, опорный план, удовлетворяющий соотношениям (2), является оптимальным планом задачи (1).

Используя теорию двойственности, легко показать, что соотношения (2) необходимы для оптимальности невырожденного опорного плана. Таким образом, справедлив

Критерий оптимальности. Соотношения (2) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана.

При машинном решении задачи критерий оптимальности проверяется так же, как в мультипликативном ме-

тоде. При ручном счете используются таблицы (табл. I.6), почти совпадающие с симплексными.

З а м е ч а н и е. В терминах гл. II совокупность чисел $\Delta = \{\Delta_i, i \in I\}$ образует базисный квазикоплан задачи (1). Операции прямого опорного метода заканчиваются получением оптимального плана, как только базисный квазикоплан становится копланом. Общий случай, когда в прямом опорном методе используются опорные квазикопланы, будет рассмотрен в гл. VI.

Таблица I.6

$\begin{array}{c} c \\ \hline c_{оп} \end{array}$				c_1	\dots	c_{m+1}	\dots	c_n	
$\begin{array}{c} d \\ \hline d_{оп} \end{array}$				d_1	\dots	d_{m+1}	\dots	d_n	
	$\begin{array}{c} x \\ \hline x_{оп} \end{array}$			x_1	\dots	x_{m+1}	\dots	x_n	$c'x$
		$\begin{array}{c} a_j \\ \hline \text{опора} \end{array}$		a_1	\dots	a_{m+1}	\dots	a_n	Θ
c_1	d_1	x_1	a_1	1	\dots	$x_{1,m+1}$	\dots	x_{1n}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots			
c_m	d_m	x_m	a_m	0	\dots	$x_{m,m+1}$	\dots	x_{mn}	
z				z_1	\dots	z_{m+1}	\dots	z_n	
Δ				Δ_1	\dots	Δ_{m+1}	\dots	Δ_n	

3. Достаточное условие субоптимальности. Во многих задачах по ряду причин нахождение оптимального плана не обязательно. Можно ограничиться приближенным решением, если известно его отклонение по целевой функции от оптимального плана. Своевременный останов процесса решения после достижения требуемой точности особенно важен для задач со значительным числом итераций.

Покажем, что справедливо

Достаточное условие субоптимальности. Если для опорного плана выполняется равенство

$$\sum_{\Delta_j > 0} \Delta_j x_j - \sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j (d_j - x_j) = \varepsilon,$$

то x является ε -оптимальным планом.

Действительно, утверждение получается с помощью обозначений (4), цепочки равенств

$$\begin{aligned} c'x &= -\Delta'x + u'Ax = -\sum_{\Delta_i > 0} \Delta_i x_i - \sum_{\Delta_i < 0} \Delta_i x_i + b'u = \\ &= b'y - \sum_{\Delta_i < 0} \Delta_i d_i + \sum_{\Delta_i < 0} \Delta_i (d_i - x_i) - \sum_{\Delta_i > 0} \Delta_i x_i = \\ &= b'y + \sum_{\Delta_i < 0} w_i d_i - \sum_{\Delta_i > 0} \Delta_i x_i + \sum_{\Delta_i < 0} \Delta_i (d_i - x_i) = \\ &= b'y + d'w - \sum_{\Delta_i > 0} \Delta_i x_i + \sum_{\Delta_i < 0} \Delta_i (d_i - x_i) \end{aligned}$$

и неравенства $c'x^0 \leq b'y + d'w$, следующего из теории двойственности.

Проверка опорного плана на субоптимальность легко осуществляется по элементам x и Δ -строк табл. I.6.

4. Улучшение опорного плана. Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — опорный план, $\tilde{x} = x + \Delta x$ — другой план. Вектор Δx удовлетворяет уравнению $A\Delta x = 0$ и вызывает изменение целевой функции

$$c'\Delta x = -\Delta'\Delta x + u'A\Delta x = -\sum_{i \in I_{\text{н}}} \Delta_i \Delta x_i. \quad (6)$$

Отсюда видно, что изменение неопорных переменных у плана, который не удовлетворяет соотношениям (2), может увеличивать целевую функцию. Число Δ_i , взятое с обратным знаком, характеризует скорость изменения целевой функции при изменении i -й компоненты плана.

Опорный план в отличие от классического базисного плана [1] допускает различные способы изменения неопорных переменных (см. гл. III). В данном параграфе с целью максимального приближения к классическому симплекс-методу будем на каждой итерации менять лишь одну неопорную переменную плана.

Среди оценок Δ_j , $j \in I_{\text{н}}$ (см. табл. I.6), не удовлетворяющих соотношениям (2), найдем оценку Δ_{j_0} , максимальную

по модулю. В табл. I.6 столбец a_{j_0} *ведущий*. Возможны два случая: а) $\Delta_{j_0} < 0$; б) $\Delta_{j_0} > 0$.

Пусть $\Delta_{j_0} < 0$. Из (6) видно, что увеличение ($\Delta x_{j_0} > 0$, $\Delta x_j = 0$, $j \neq j_0$, $j \in I_{\text{н}}$) только j_0 -й неопорной компоненты плана ведет к увеличению целевой функции. Ясно, что максимально допустимый шаг Θ^0 зависит от изменения переменной x_{j_0} , опорных переменных x_j , $j \in I_{\text{оп}}$:

$$\Theta^0 = \min \{d_{j_0} - x_{j_0}, \Theta_{i_0}^1, \Theta_{i_0}^2\},$$

где

$$\Theta_{i_0}^1 = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} = \min_{x_{i j_0} > 0} \frac{x_i}{x_{i j_0}}; \quad \Theta_{i_0}^2 = -\frac{d_{i_0} - x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} = \min_{x_{i j_0} < 0} -\frac{d_i - x_i}{x_{i j_0}}.$$

Если $\Theta^0 = d_{j_0} - x_{j_0}$, то опора плана не меняется, а компоненты нового плана подсчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j_0} &= x_{j_0} + \Theta^0, \quad \bar{x}_j = x_j, \quad j \neq j_0, \quad j \in I_{\text{н}}; \\ \bar{x}_i &= x_i - \Theta^0 x_{i j_0}, \quad i \in I_{\text{оп}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $\Theta^0 = \Theta_{i_0}^1$ или $\Theta^0 = \Theta_{i_0}^2$, то в опоре плана x вектор a_{i_0} заменяется на вектор a_{j_0} . Новая совокупность векторов становится опорой нового плана \bar{x} с компонентами (7). В табл. I.6 строка a_{i_0} и элемент $x_{i_0 j_0}$ *ведущие*. Таблица для нового опорного плана \bar{x} получается по правилам симплекс-метода с одним исключением для компоненты \bar{x}_{j_0} (см. § 1).

Рассмотрим случай $\Delta_{j_0} > 0$. Из (6) следует, что увеличения целевой функции можно добиться при уменьшении компоненты x_{j_0} , не изменяя других неопорных переменных плана. Максимально допустимое изменение компоненты x_{j_0}

$$\Theta^0 = \min \{x_{j_0}, \Theta_{i_0}^1, \Theta_{i_0}^2\},$$

где

$$\Theta_{i_0}^1 = -\frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} = \min_{x_{i j_0} < 0} -\frac{x_i}{x_{i j_0}}; \quad \Theta_{i_0}^2 = \frac{d_{i_0} - x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} = \min_{x_{i j_0} > 0} \frac{d_i - x_i}{x_{i j_0}}.$$

Если $\Theta^0 = x_{j_0}$, то опора нового плана совпадает с опорой старого. Компоненты нового плана вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j_0} &= x_{j_0} - \Theta^0, \quad \bar{x}_j = x_j, \quad j \neq j_0, \quad j \in I_{\text{н}}; \\ \bar{x}_i &= x_i + \Theta^0 x_{i j_0}, \quad i \in I_{\text{оп}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $\Theta^0 = \Theta_{i_0}^1$ или $\Theta^0 = \Theta_{i_0}^2$, то опора нового плана получается из опоры старого путем замены вектора a_{i_0} на вектор a_{j_0} . Компоненты нового плана вычисляются по формулам (8).

Для невырожденного опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ всегда $\Theta^0 > 0$. За одну итерацию $x \rightarrow \bar{x}$ целевая функция задачи (1) возрастает на величину $\Theta^0 |\Delta_{j_0}|$.

Так же, как в § 1, доказывается

Теорема. Если построенные в ходе итераций опорные планы невырождены, то через конечное число итераций получается оптимальный план задачи (1).

5. Начальная информация и начальный опорный план. Перед началом решения практической задачи возможны три ситуации: кроме параметров задачи нет никакой информации о планах задачи; в дополнение к параметрам задачи известен план; имеется совокупность чисел, предложенных специалистами в качестве компонент плана, но не составляющих плана задачи.

Рассмотрим каждую ситуацию в отдельности. Первая ситуация типична для симплекс-метода. Общее правило построения начального опорного плана состоит в расширении задачи (1) путем введения искусственных переменных [1, 2, 5]. В этом случае опорный план совпадает с базисным планом из симплекс-метода, а операции прямого метода полностью повторяют аналогичные операции симплекс-метода.

Пусть к началу решения задачи (1) известен некоторый план x^1 . Для использования прямого опорного метода нужно указать опору плана x^1 . Ее можно выбрать случайно, можно использовать опыт специалистов, т. е. в число опорных переменных включить наиболее удобные с точки зрения коррекции, управления, в частности такие, которые не принимают граничных значений. После выбора опоры различными способами линейной алгебры вычисляются коэффициенты x_{ij} , $i \in I_{\text{оп}}$, $j \in I_{\text{н}}$, разложения неопорных векторов a_j по векторам a_i опоры. И наконец, согласно общему правилу построения опоры, можно ввести фиктивные переменные $x_{\Phi} = \{x_{\Phi 1}, \dots, x_{\Phi m}\}$ и рассмотреть задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax + x_{\Phi} = b, 0 \leq x \leq d, 0 \leq x_{\Phi} \leq d_{\Phi}, d_{\Phi} = 0. \quad (9)$$

План новой задачи имеет вид $\{x^1, 0\}$, его опора состоит из векторов $a_{n+i} = e_i$, $i = \overline{1, m}$. На первой фазе

(исключение из опоры фиктивных векторов) план задачи не меняется, и поэтому в конкретных случаях вычисления могут существенно упроститься.

Рассмотрим, наконец, третью ситуацию, которая типична при использовании рекомендаций различных специалистов, знакомых с частями большой практической задачи. Имеется совокупность чисел $0 \leq x_i^1 \leq d_i$, $i = \overline{1, n}$ (квазиплан задачи), для которой отличен от нуля вектор $\beta = b - Ax^1$.

Вместо задачи (1) рассматриваем задачу

$$c'x - Me'x_u \rightarrow \max, \\ Ax + x_u \operatorname{sign} \beta = b, \quad 0 \leq x \leq d, \quad x_u \geq 0, \quad M > 0, \quad (10)$$

где $x_u \operatorname{sign} \beta = \{x_{n+1} \operatorname{sign} \beta_1, \dots, x_{n+m} \operatorname{sign} \beta_m\}$, $e = \{1, \dots, 1\}$. Начальный план задачи (10) имеет вид $\{x^1, |\beta|\}$, где $|\beta| = \{|\beta_1|, \dots, |\beta_m|\}$. Опора состоит из векторов $a_{n+i} = e_i \operatorname{sign} \beta_i$, $i = \overline{1, m}$.

Решая задачу (10) прямым опорным методом при достаточно больших M , получим оптимальный (субоптимальный) план исходной задачи ($x_u = 0$) или обнаружим отсутствие планов у этой задачи ($x_u \neq 0$).

В конкретных задачах могут встретиться комбинации из трех рассмотренных ситуаций. Нетрудно внести изменения в приведенные конструкции, чтобы полностью использовать имеющуюся информацию.

В заключение отметим, что при решении прямым опорным методом задач в нормальной форме $c'x \rightarrow \max$, $Ax \leq b$, $0 \leq x \leq d$, проблема построения опоры для начального плана не возникает, ибо после введения свободных переменных получаем задачу $c'x \rightarrow \max$, $Ax + x_{св} = b$, $0 \leq x \leq d$, $x_{св} \geq 0$, с начальным планом $\{x^1, b - Ax^1\}$ и опорной $a_{n+i} = e_i$, $i = \overline{1, m}$.

Предложенный подход заметно меняет представление о решении задачи (1). Основной целью становится не получение оптимального плана, а улучшение (до любой степени, в частности до оптимального) известного. Конкретные планы задач могут быть известны в связи с различными обстоятельствами. Если исследуемая модель составлена для реальной функционирующей системы, то известный план будет отражать опыт работы этой системы. В случае, когда модель (1) составляется для новой системы, то в качестве известного плана можно взять

предложения экспертов, специалистов, имеющих опыт работы с аналогичными системами и занятых их проектированием. Другими словами, предположение о том, что к началу решения задачи (1) известен некоторый план, вносит в общую задачу оптимизации конкретной физической системы дополнительный элемент «человеческий опыт» и делает метод решения в известной степени «человеко-машинным».

6. Локальная оптимизация. Алгоритмы решения задачи с двухсторонними ограничениями можно использовать для *локальной оптимизации* в задачах, где двухсторонних ограничений нет. Рассмотрим, например, задачу

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0. \quad (12)$$

План x^* назовем локально оптимальным, если при заданных n -векторах \underline{d} , \bar{d} выполняется неравенство $c'x^* \geq c'x$ для всех планов x таких, что

$$\underline{d} \leq x - x^* \leq \bar{d}. \quad (13)$$

Полагая группы координат векторов \underline{d} , \bar{d} равными друг другу, получим своеобразный метод декомпозиции задачи (12) на ряд задач меньшего размера. Подробно эти вопросы будут рассматриваться в третьей части книги.

7. Производственная задача с двухсторонними ограничениями. Вернемся к задаче, рассмотренной в п. 7 § 1. В дополнение к модели, полученной из физической постановки, введем еще ограничения

$$x_i \leq d_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

физический смысл которых состоит в том, что при $d_i < +\infty$ потребность в i -м изделии не превышает d_i . Другая причина введения ограничений (14): при больших значениях переменных математическая модель из § 1 неточно отражает реальную задачу. Например, параметры задачи приняты постоянными в предположении, что переменные изменяются в достаточно малой области.

Для конкретных вычислений обратимся к табл. I.4. В этой таблице находится субоптимальный план задачи (41) § 1. В формулировку этой задачи внесем одно дополнение. Будем считать, что на переменные x_i наложены ограничения $0 \leq x_1 \leq 10$, $0 \leq x_2 \leq 25$, $0 \leq x_3 \leq 20$,

$0 \leq x_4 \leq 5$. План из табл. I.4 не удовлетворяет этим ограничениям. Однако естественно использовать табл. I.4 для решения новой задачи. Простейшая мысль состоит в том, чтобы избыток $10 - 5 = 5$ переменной x_4 распределить между остальными переменными. Проще всего для этого использовать опорные переменные x_2, x_3, x_7 . Из табл. I.4 находим новые значения

$$(x_2)_{\text{нов}} = 390/19 + 5 \cdot 11/19 = 445/19;$$

$$(x_3)_{\text{нов}} = 310/19 - 5 \cdot 1/19 = 305/19;$$

$$(x_7)_{\text{нов}} = 500/19 - 5 \cdot 20/19 = 400/19.$$

Таким образом, начальная таблица для рассматриваемой задачи с двухсторонними ограничениями имеет вид табл. I.7. Помещенный в ней опорный план задачи не

Таблица I.7

c				10	30	15	0	0	
$c_{\text{оп}}$									
	d			10	25	5	∞	∞	
	$d_{\text{оп}}$								
		x		0	445/19	5	0	0	
		$x_{\text{оп}}$							
			a_j	a_1	a_2	a_4	a_5	a_6	Θ
			опора						
30	25	445/19	a_2	1/19	1	11/19	3/95	-1/95	30/11
20	20	305/19	a_3	12/19	0	-1/19	-2/95	7/95	305
0	∞	400/19	a_7	12/19	0	-20/19	-8/19	-10/19	20
Δ				80/19	0	25/19	10/19	22/19	

является оптимальным, поскольку $\Delta_4 = 25/19 > 0$. Перейдем к новому плану. В табл. I.7 столбец a_4 ведущий. Заполняем Θ -столбец. Минимальный в нем элемент 30/11 меньше $\Theta_{j_0} = x_{j_0} = x_4 = 5$. Значит, строка a_2 ведущая, а над ведущим столбцом записываем число 30/11. Теперь можно

заполнить табл. I.8. Последняя удовлетворяет критерию оптимальности. Оптимальный план, выписанный из x -строки, имеет вид $x^0 = \{0, 25, 175/11, 25/11, 0, 0, 200/11\}$.

Таблица I.8

c $c_{оп}$				10	30	20	15	0	0
d $d_{оп}$				10	25	20	5	∞	∞
x $x_{оп}$				0	25	175/11	25/11	0	0
			a_j опора	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
15	5	25/11	a_4	1/11	19/11	0	1	3/55	-1/55
20	20	175/11	a_3	7/11	1/11	1	0	-1/55	4/55
0	∞	200/11	a_7	8/11	20/11	0	0	-4/11	-6/11
Δ				45/11	-25/11	0	0	5/11	247/209

Глава II

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОПОРНЫЙ МЕТОД

Наряду с симплекс-методом в линейном программировании широко используется *двойственный симплекс-метод*. Этот метод особенно эффективен для специальных задач. Кроме того, значение двойственного метода полностью выявляется при анализе чувствительности решения, анализе влияния на решение задачи изменения ее параметров (см. гл. VII). В данной главе излагается метод решения общей задачи линейного программирования, который в известном смысле является двойственным к прямому опорному методу. Снова будем рассматривать такую модификацию классического двойственного симп-

лекс-метода, когда можно использовать любую информацию о начальном плане, можно остановить процесс решения задачи после получения субоптимального плана.

При решении практических задач, кроме информации о компонентах плана, может быть доступна и другая информация. Например, специалист, работающий с реальной системой, имеет возможность указать степень дефицитности с точки зрения оптимального значения целевой функции того или иного ресурса или степень существенности ограничений на компоненты плана. Если вспомнить [1, 2, 5] физический смысл двойственных переменных $\{y, w\}$, то ясно, что речь идет об оценках компонент оптимального двойственного плана. Оптимальный двойственный план в силу соотношения двойственности можно использовать для получения оптимального плана прямой задачи. Специалисты также могут оценить парциальное влияние изменения Δx_i компоненты плана на оптимальное значение целевой функции. Поскольку $A\Delta x = 0$, то $c'\Delta x = -\delta\Delta x$, где $\delta = A'y - c$. Следовательно, во втором случае речь идет о возможном доступе к информации о векторе δ . Вектор δ тесно связан с вектором y , с помощью которого формируется двойственная задача. Появляется возможность получения оптимального плана прямой задачи через решение двойственной задачи с использованием информации о ее планах.

§ 1. Задача с односторонними ограничениями

Как и в случае прямого опорного метода, знакомство с двойственным методом удобно начать с задачи с односторонними ограничениями. Это значительно упростит вычисления и полученные результаты. Кроме того, задачи с односторонними ограничениями достаточно распространены, чтобы оправдать построение для них самостоятельной теории.

1. Постановка задачи. Двойственный симплекс-метод. Опорные копланы. Рассмотрим общую задачу линейного программирования (см. гл. I)

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0, \quad (1)$$

где x, c — n -векторы, b — m -вектор, A — $m \times n$ -матрица, $\text{rank } A = m$.

Задачей, двойственной к задаче (1), называется задача линейного программирования

$$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c, \quad (2)$$

где y — m -вектор (см. введение).

Каждый m -вектор y , удовлетворяющий ограничению задачи (2)

$$A'y \geq c, \quad (3)$$

называется *планом* двойственной задачи (2) (*двойственным планом*). Если для плана y^0 выполняется соотношение $b'y^0 = \min b'y$, где минимум берется по всем планам двойственной задачи, то y^0 называют *оптимальным планом* двойственной задачи.

Между решениями x^0 и y^0 прямой (1) и двойственной (2) задач существует тесная связь (см. введение). Если решить задачу (1) симплекс-методом, то вектор $z^0 = c_0 A_0^{-1}$, составленный из компонент z -строки таблицы для x^0 , стоящих в столбцах с единичными векторами условий, будет оптимальным планом задачи (2). И наоборот, если решить задачу (2), то из последней симплексной таблицы можно извлечь решение задачи (1). Двойственный симплекс-метод возник при реализации этой идеи. Оказалось, что все операции решения задачи (2) можно осуществлять на симплексной таблице прямой задачи (1).

В основе двойственного симплекс-метода лежит понятие *невыврожденного базисного двойственного плана*. На этом плане, по определению, ровно m неравенств в (3) обращаются в равенства и m векторов условий a_j (*базисные векторы* двойственного плана) из этих равенств линейно-независимы.

Пусть y — невырожденный базисный двойственный план с базисом a_1, \dots, a_m . Для этого базиса составим симплексную табл. II.1. По определению невырожденного базисного двойственного плана, в δ -строке все элементы δ_j (компоненты вектора $\delta = A'y - c$) неотрицательны, причем $\delta_j = 0, j = 1, m; \delta_j > 0, j = m+1, n$. В отличие от прямого симплекс-метода теперь в b -столбце среди чисел $x_i, i = 1, m$, могут быть отрицательные. Однако для оптимальности невырожденного базисного двойственного плана y необходимо и достаточно, чтобы все эти числа были неотрицательными. Если такое условие выполняется, числа $x_i, i = 1, m$, являются базисными переменными оптимального базисного плана x^0 прямой задачи.

В случае, когда *критерий оптимальности* для табл. II.1

δ	δ_1	\dots	δ_j	\dots	δ_n	
b, a_j базис	a_1	\dots	a_j	\dots	a_n	b
a_1	1	\dots	x_{1j}	\dots	x_{1n}	κ_1
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
a_i	0	\dots	x_{ij}	\dots	x_{in}	κ_i
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
a_m	0	\dots	x_{mj}	\dots	x_{mn}	κ_m
σ						

не выполнен, на ней проверяется *критерий отсутствия планов прямой задачи*: если при некотором i_* , $1 \leq i_* \leq m$, выполняются соотношения $\kappa_{i_*} < 0$, $x_{i_*j} \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, то прямая задача (1) не имеет планов (ограничения прямой задачи противоречивы).

Если останов не произошел после проверки перечисленных критериев, то от двойственного плана y переходят к новому двойственному плану \bar{y} , на котором выполняется неравенство $b'\bar{y} < b'y$. Переход содержит следующие операции:

1) среди чисел κ_i , $i = \overline{1, m}$, из b -столбца находят минимальное κ_{i_0} (отрицательное число с наибольшим модулем); *строка a_{i_0} ведущая*;

2) для отрицательных чисел x_{i_0j} ведущей строки вычисляются отношения $\sigma_j = -\delta_j/x_{i_0j}$, $x_{i_0j} < 0$, числа σ_j заносятся в σ -строку;

3) среди элементов σ -строки находят минимальный $\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min \sigma_j$, $x_{i_0j} < 0$; *столбец a_{j_0} ведущий*;

4) табл. II.1 преобразуется по правилу прямоугольника с *ведущим элементом $x_{i_0j_0}$* (см. введение); по пра-

вину прямоугольника можно преобразовать и δ -строку. После этих операций получится симплексная таблица с базисом $a_1, \dots, a_{i_0-1}, a_{j_0}, a_{i_0+1}, \dots, a_m$, δ -строка которой также состоит из неотрицательных чисел. Через конечное число *итераций* (переходов от старой таблицы к новой) процесс решения задачи (1) заканчивается: или обнаружится, что задача не имеет планов, или будет построен оптимальный план x^0 .

Такова схема классического двойственного симплекс-метода. Отметим две ее особенности: а) чтобы начать процесс решения, нужно иметь двойственный план y , на котором обращаются в равенство ровно m неравенств из (3) и участвующие в них векторы условий линейно-независимы; б) процесс решения идет до получения оптимального плана (предполагается, что задача (1) имеет решение), получить субоптимальный план на промежуточных итерациях невозможно. С целью смягчения этих ограничений в данной главе излагается двойственный опорный метод, который можно рассматривать как модификацию классического двойственного симплекс-метода. В основе двойственного опорного метода лежит понятие невырожденного опорного коплана задачи.

О п р е д е л е н и е 1. Вектор $\delta = A'y - c$, вычисленный по двойственному плану y задачи, называется *копланом* задачи (1).

Введем понятие опоры $A_{\text{оп}}$ так же, как в § 1 гл. I.

О п р е д е л е н и е 2. Пара $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ называется *опорным копланом*. Опорный коплан будет *невырожденным*, если его неопорные компоненты δ_i , $i \in I_{\text{н}}$, отличны от нуля.

В двойственном симплекс-методе рассматриваются только такие невырожденные опорные копланы (невырожденные базисные копланы), у которых все опорные компоненты равны нулю. В этой главе исследуются, как правило, невырожденные опорные копланы. Задачи с вырожденными копланами рассматриваются в гл. VI.

2. Критерий оптимальности. Пусть $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный опорный коплан, $A_{\text{оп}} = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\delta_i = 0$, $i = \overline{1, k}$, $k \leq m$.

Согласно общему условию оптимальности плана y (см. § 1 п. 2), производная функции $b'y$ по всем допустимым направлениям l задачи (2) неотрицательна:

$$\partial b'y / \partial l = b'l \geq 0. \quad (4)$$

Направление l из точки y называется допустимым в задаче (2), если найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что

$$A'(y + \varepsilon l) \geq c \text{ для всех } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (5)$$

Для детализации этого определения введем обозначения

$$\begin{aligned} A_{\text{оп}0} &= \{a_1, \dots, a_k\}, A_{\text{оп}1} = \{a_{k+1}, \dots, a_m\}, \\ A_{\text{н}} &= \{a_{m+1}, \dots, a_n\}; c_{\text{оп}0} = \{c_1, \dots, c_k\}, \\ c_{\text{оп}1} &= \{c_{k+1}, \dots, c_m\}, c_{\text{н}} = \{c_{m+1}, \dots, c_n\}. \end{aligned}$$

Теперь неравенство (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A'_{\text{оп}0}y - c_{\text{оп}0} + \varepsilon A'_{\text{оп}0}l &\geq 0, \\ A'_{\text{оп}1}y - c_{\text{оп}1} + \varepsilon A'_{\text{оп}1}l &\geq 0, \\ A'_{\text{н}}y - c_{\text{н}} + \varepsilon A'_{\text{н}}l &\geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку на двойственном плане y все неравенства из (3), начиная с $k+1$ -го, выполняются как строгие неравенства, то для каждого l найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что вторая и третья группы неравенств из (6) будут выполняться при всех ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Следовательно, направление l допустимо тогда и только тогда, когда выполняется первая группа неравенств в (6). Поскольку $A'_{\text{оп}0}y - c_{\text{оп}0} = 0$, то она эквивалентна неравенству

$$A'_{\text{оп}0}l \geq 0. \quad (7)$$

Таким образом, двойственный план y оптимален тогда и только тогда, когда для каждого вектора l , удовлетворяющего неравенству (7), выполняется неравенство (4). По теореме Фаркаша [5] о неравенствах-следствиях найдется такой неотрицательный вектор $\lambda \geq 0$, что

$$A_{\text{оп}0}\lambda = b. \quad (8)$$

Это равенство означает: для оптимальности двойственного плана необходимо и достаточно, чтобы координаты $\kappa_1, \dots, \kappa_k$ вектора b по опоре $A_{\text{оп}}$ были неотрицательны, а остальные координаты $\kappa_{k+1}, \dots, \kappa_m$ равнялись нулю.

Теорема 1 (критерий оптимальности невырожденного опорного коплана). Для оптимальности двойственного плана y необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\kappa_i \geq 0, \text{ если } \delta_i = 0; \kappa_i = 0, \text{ если } \delta_i > 0, i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Критерий оптимальности (9) легко проверяется на табл. II.2, которая отличается от таблицы прямого метода (см. табл. I.1) лишь незначительными деталями: в ней дополнительный b -столбец (вместо Θ -столбца) и дополнительная σ -строка. Для проверки двойственного плана y на оптимальность в табл. II.2 сравниваются элементы b -столбца и $\delta_{\text{оп}}$ -столбца. Если каждому нулевому элементу $\delta_j=0$ из $\delta_{\text{оп}}$ -столбца соответствует неотрицательный элемент $\kappa_j \geq 0$ из b -столбца, а каждому положительному элементу $\delta_j > 0$ — нулевой элемент $\kappa_j=0$, то план $x = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m, 0, \dots, 0\}$ оптимален. Верно и обратное утверждение. Сформулированный критерий отличается от критерия оптимальности двойственного симплекс-метода (см. п. 1) наличием второй группы соотношений в (9). Эти соотношения появились (см. доказательство) из-за того, что на двойственном плане y обращаются в равенства только k , $k < m$, неравенств из ограничений (3) задачи. Если $k=m$ (опорный двойственный план y является базисным), то $A_{\text{оп}0}=A_{\text{оп}}$ и из (4), (7) вместо (8) получается равенство $A_{\text{оп}}\lambda=b$, $\lambda \geq 0$, которое означает, что все координаты κ_i вектора b неотрицательны. Таким образом, приведенный критерий оптимальности содержит результат двойственного симплекс-метода в качестве частного случая.

3. Достаточное условие субоптимальности. Если для табл. II.2 выполняются соотношения

$$\kappa_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i \delta_i \leq \varepsilon, \quad (10)$$

то базисный план $x = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m, 0, \dots, 0\}$ является ε -оптимальным планом прямой задачи.

Доказательство. Из (10) имеем для $x_{\text{оп}} = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$:

$$\varepsilon \geq \delta'_{\text{оп}} x_{\text{оп}} = y' A_{\text{оп}} x_{\text{оп}} - c'_{\text{оп}} x_{\text{оп}} = y' b - c' x \geq c' x^0 - c' x. \quad (11)$$

Сравнивая крайние выражения в (11), убеждаемся в справедливости утверждения.

Условие субоптимальности (10) позволяет остановить процесс решения задачи (2) после получения достаточно хорошего приближения к оптимальному плану.

В связи с оценками, которые доставляет условие субоптимальности для отклонений значения целевой функ-

Таблица II.2

$\delta_{\text{оп}}$ \ δ		δ_1	\dots	δ_n	
	a_j, b опора	a_1	\dots	a_n	b
δ_1	a_1	x_{11}	\dots	x_{1n}	κ_1
\vdots	\vdots	\vdots			\vdots
δ_m	a_m	x_{m1}	\dots	x_{mn}	κ_m
	δ				

ции от оптимального значения, возникает вопрос о точности этих оценок. Другими словами, насколько оценка $\delta'x$ больше истинного отклонения $c'x^0 - c'x$? Этот вопрос можно было поставить и при изложении прямого метода. Однако он более естествен здесь, ибо уже подготовлен материал для ответа на него. При ответе на этот вопрос важную роль играет b -столбец.

Достаточное условие точности оценки субоптимальности. Оценка $\delta'x$, составленная для табл. II.2 двойственного опорного метода и плана x , является точной: $\delta'x = c'x^0 - c'x$, если $\kappa_i \geq 0$ при $\delta_i = 0$ и $\kappa_i = 0$ при $\delta_i > 0$, $i = 1, m$.

Доказательство. Согласно п. 2, при условиях доказываемого утверждения план y , для которого составлена табл. II.2, оптимален. Тогда по теореме двойственности (см. введение) $b'y = c'x^0$ и, значит, $\delta'x = (y'A - c')x = y'Ax - c'x = y'b - c'x = c'x^0 - c'x$, что и требовалось доказать.

Для таблиц прямого опорного метода проверка критерия точности оценок упрощается. В прямом опорном методе всегда $\delta_i = \Delta_i = 0$, $i = \overline{1, m}$. Значит, для того чтобы оценка $\Delta'x$ ($\Delta \geq 0$) была точной, в прямом методе необходимо и достаточно, чтобы элементы b -столбца, включенного в таблицу прямого метода,

$$\kappa_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

были неотрицательными. Интересно отметить, что как только в прямом опорном методе на некоторой итерации будут выполняться неравенства (12) и $\Delta_i \geq 0, i = \overline{1, n}$, то из таблицы этой итерации можно извлечь оптимальный базисный план $x^0 = \{x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0\}$ и ε -оптимальный план $x^\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$, где $\varepsilon = \Delta'x$. Выпуклая комбинация этих планов $x(\mu) = \mu x^0 + (1-\mu)x^\varepsilon, 0 \leq \mu \leq 1$, будет $(1-\mu)\varepsilon$ -оптимальным планом.

4. Достаточное условие отсутствия планов прямой задачи. Как и в двойственном симплекс-методе (см. п. 1), процесс решения может остановиться, если на некоторой итерации обнаружится, что функция $b'y$ не ограничена снизу на множестве двойственных планов. Согласно теории двойственности (см. введение), это означает, что прямая задача не имеет планов. Найдем условия, при которых $b'y \rightarrow -\infty$.

Теорема 2 (достаточное условие отсутствия планов прямой задачи). Прямая задача не имеет ни одного плана, если в табл. II.2 в b -столбце найдется такой элемент x_{i_*} , что

$$x_{i_*} < 0, x_{i_*j} \geq 0, j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $l' = e'_{i_*} A_{\text{оп}}^{-1}$, где e_{i_*} — единичный вектор с единицей на i_* -м месте. Поскольку $l' A_{\text{оп}0} = e'_{i_*} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{оп}0} = \{x_{i_*1}, \dots, x_{i_*k}\} \geq 0$, то, согласно (7), вектор l — допустимое направление. При движении вдоль этого направления для больших ε могут нарушиться вторая и третья группы неравенств в (6). Коэффициентами при ε в (6) являются векторы $A'_{\text{оп}1}l, A'_n l$. В рассматриваемом случае они имеют вид

$$l' A_{\text{оп}1} = e'_{i_*} A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{оп}1} = \{x_{i_*k+1}, \dots, x_{i_*m}\};$$

$$l' A_n = e'_{i_*} A_{\text{оп}}^{-1} A_n = \{x_{i_*m+1}, \dots, x_{i_*n}\}.$$

В силу (13) эти векторы неотрицательны. Значит, при увеличении ε и вторая и третья группы неравенств из (6) никогда не нарушатся. Другими словами, вектор $y(\varepsilon) = y + \varepsilon l$ является двойственным планом при любом $\varepsilon \geq 0$.

Подсчитаем:

$$\frac{db'y}{d\varepsilon} = b'l = l'b = e'_{i_*} A_{\text{оп}}^{-1} b = x_{i_*}. \quad (14)$$

Согласно (13), производная (14) постоянна и отрицательна. Значит, с учетом предыдущих вычислений функ-

ция $b'y$ вдоль двойственных планов $y(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow \infty$, неограниченно убывает. Теорема доказана.

По форме доказанный результат (13) аналогичен достаточному условию отсутствия планов прямой задачи в двойственном симплекс-методе (см. п. 1).

5. Переход к новому опорному коплану. Рассмотрим теперь случай, когда на коплане $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ не выполнено ни одно из условий пп. 2—4, в силу которых можно остановить процесс решения задачи (1).

Наибольшая скорость убывания по допустимым направлениям l , нормированном условием $e'A_{\text{оп}}l = 1$, $A_{\text{оп}}l \geq 0$, где $e = \{1, \dots, 1\}$, согласно формуле (14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial b'y}{\partial l} &= \min_{\substack{e'A_{\text{оп}}l=1, \\ A_{\text{оп}}l \geq 0}} l'b = \min_{\substack{e's=1, \\ s_i \geq 0, i=\overline{1, k}}} s'A_{\text{оп}}^{-1}b = \min_{\substack{e's=1, \\ s_i \geq 0, i=\overline{1, k}}} \sum_{i=1}^k s_i \kappa_i = \\ &= \min \left\{ \min_{i=\overline{k+1, m}} -|\kappa_i|, \min_{i=\overline{1, k}} \kappa_i \right\} = -|\kappa_{i_0}|. \end{aligned} \quad (15)$$

Минимум в (15) достигается на векторе $s = -e_{i_0} \text{sign } \kappa_{i_0}$ или на векторе $l' = -e_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} \text{sign } \kappa_{i_0}$.

Могут представиться следующие возможности: а) $\kappa_{i_0} < 0$; б) $\kappa_{i_0} > 0$. Найдем правила построения нового двойственного плана в каждом случае отдельно.

а) Если $\kappa_{i_0} < 0$, то минимум в (15) достигается на направлении $l'_0 = e_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1}$. Вдоль этого направления вектор $y(\varepsilon) = y + \varepsilon l'_0$ остается двойственным планом до тех пор, пока не нарушится ни одно из неравенств (6). Поскольку $l'_0 A_{\text{оп}} = e_{i_0}$, то первые две группы неравенств из (6) никогда не нарушатся. Третью группу неравенств запишем в координатной форме

$$\delta_j + \varepsilon x_{i_0 j} \geq 0, \quad j = \overline{m+1, n}. \quad (16)$$

Отсюда видно, что с увеличением ε нарушается каждое неравенство (16), у которого $x_{i_0 j} < 0$. Такие элементы хотя бы в одном неравенстве найдутся, ибо в противном случае будут выполняться условия п. 4. Нетрудно подсчитать, что максимальное ε , при котором все неравенства еще выполняются, равно

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min_{x_{i_0 j} < 0} \sigma_j, \quad \sigma_j = -\frac{\delta_j}{x_{i_0 j}}, \quad x_{i_0 j} < 0.$$

Новый двойственный план

$$\bar{y}' = y' + \sigma^0 l'_0 = y' + \sigma^0 e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1};$$

для него

$$\begin{aligned}\bar{\delta}' &= \bar{y}' A - c' = y' A + \sigma^0 e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} A - c' = \\ &= \delta + \sigma^0 e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} A\end{aligned}$$

или в координатной форме

$$\bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma^0 x_{i_0 j} = \delta_j - \delta_{j_0} \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Поскольку из (17) следует, что $\bar{\delta}_{j_0} = 0$, то вектор a_{j_0} становится опорным для коплана $\bar{\delta}$. Замена вектора a_{i_0} на a_{j_0} в таблице осуществляется, как известно, по правилу прямоугольника. На этом заполнение новой таблицы заканчивается. Заканчивается переход от двойственного плана y к плану \bar{y} , при котором целевая функция двойственной задачи уменьшается на $|\kappa_{i_0}| \sigma^0$.

б) Если $\kappa_{i_0} > 0$, то минимум в (15) достигается на направлении $l'_0 = -e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1}$, $k < i_0 \leq m$. Так как $l'_0 A_{\text{оп}} = -e'_{i_0}$, то вдоль направления l'_0 первая группа неравенств из (6) никогда не нарушится, во второй группе может нарушиться лишь неравенство $\delta_{i_0} - \varepsilon \geq 0$. Третья группа неравенств из (6) на векторе l_0 имеет вид

$$\delta'_n + \varepsilon l'_0 A_n = \delta'_n - \varepsilon e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} A_n \geq 0$$

или в координатной форме

$$\delta_j - \varepsilon x_{i_0 j} \geq 0, \quad j = \overline{m+1, n}. \quad (18)$$

Нетрудно подсчитать, что максимально допустимый шаг, при котором все неравенства (18) имеют место,

$$\sigma_{j_0} = \min \sigma_j, \quad \sigma_j = \frac{\delta_j}{x_{i_0 j}}, \quad x_{i_0 j} > 0, \quad j = \overline{m+1, n}.$$

Максимально допустимый шаг, при котором вектор $y + \sigma^0 l_0$ остается двойственным планом, равен

$$\sigma^0 = \min \{\sigma_{j_0}, \delta_{i_0}\}.$$

Если $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, то для нового плана $\bar{y} = y(\sigma_{j_0}) = y + \sigma_{j_0} l$ имеем

$$\bar{\delta}' = \delta' + \sigma_{j_0} l'_0 A = \delta' - \sigma_{j_0} e'_{i_0} A_{\text{оп}}^{-1} A$$

или в координатной форме

$$\bar{\delta}_j = \delta_j - \delta_{j_0} \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Согласно проведенным вычислениям, $\bar{\delta}_{j_0} = 0$. Значит, в новую опору входит вектор a_{j_0} вместо a_{i_0} , табл. II.2 пересчитывается по правилу прямоугольника. За итерацию целевая функция убывает на величину $|\kappa_{i_0}| \delta_{j_0}$.

Если $\sigma^0 = \delta_{i_0}$, то опора не меняется, пересчитывается только δ -строка по формуле

$$\bar{\delta}_j = \delta_j - \delta_{i_0} x_{i_0 j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (21)$$

За итерацию целевая функция убывает на величину $|\kappa_{i_0}| \delta_{i_0}$. На этом описание одной итерации двойственного опорного метода завершается.

Для невырожденных задач процесс решения завершается за конечное число шагов. Доказательство этого факта, как и в случае прямого опорного метода, основано на том, что в процессе решения опорные копланы приближаются к базисным, у них растет число нулевых опорных компонент. Из конечности двойственного симплекс-метода следует конечность описанного двойственного опорного метода.

6. Двойственный аналог мультипликативного метода. Метод обратной матрицы (в стандартной и мультипликативной формах) при решении прямой задачи был введен с целью экономии оперативной памяти ЭВМ в процессе преобразования симплексных таблиц. При реализации двойственного метода основная вычислительная работа связана с преобразованиями таблиц, сопутствующими замене одного вектора в опоре. Поэтому перенесение операций метода обратной матрицы на двойственный опорный метод не вызывает принципиальных трудностей. Детали оставляем в качестве полезного упражнения читателям.

7. Задача о смесях. Специальной задачей, для решения которой обычно рекомендуется двойственный симплекс-метод, является *классическая задача о диете*. Требуется указать количество покупаемых продуктов для приготовления пищи, которая была бы минимальна по стоимости и содержала полезные вещества не ниже заданных пределов. К классической задаче о диете сводится ряд задач о сплавах, смесях и т. п. Поскольку для клас-

сической задачи о диете легко строится начальный двойственный план [1], решать ее рекомендуется двойственным симплекс-методом.

Если в задаче о диете наложить ограничения на содержание в пище не только полезных веществ, но и вредных (количество которых ограничивается, естественно, сверху), то соответствующая ей математическая модель уже не будет удовлетворять упомянутому выше условию и поэтому для построения начального двойственного плана приходится прибегать к искусственным приемам.

Неформальная (физическая) формулировка задачи о смесях состоит в следующем. Имеется несколько веществ. При их смешении (необязательно механическом) в различных пропорциях получается различный материал (смесь), обладающий рядом характеристик, которые можно оценить численно. Одни из них положительны (отражают желательные свойства), другие — отрицательны (нежелательные). Для каждой характеристики указаны допустимые пределы: нижние — для положительных, верхние — для отрицательных. Требуется указать такие пропорции веществ в смеси, при которых характеристики полученного материала не выходят за заданные пределы, а цена его минимальна.

Составим математическую модель задачи о смесях. Введем обозначения: n — число различных веществ; m — число характеристик для оценки качества смеси; c_i — стоимость единицы веса i -го вещества; $i = \overline{1, n}$; b_j — предел для j -й характеристики; $j = \overline{1, m}$, причем $b_j, j = \overline{1, m_1}$ — пределы положительных характеристик; $b_j, j = \overline{m_1 + 1, m}$ — пределы отрицательных характеристик; a_{ji} — величина j -й характеристики при внесении в смесь единицы веса i -го вещества.

Пусть x_i — количество i -го вещества, которое предполагается внести в смесь, $i = \overline{1, n}$. У смеси из этих количеств веществ j -я характеристика равна $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i$. По условиям задачи положительные характеристики должны удовлетворять неравенствам $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \geq b_j, j = \overline{1, m_1}$, отри-

цательные — $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq b_j, j = \overline{m_1+1, m}$. Стоимость израсходованных веществ равна $\sum_{i=1}^n c_i x_i$. Если учесть, что переменные $x_i, i = \overline{1, n}$, не могут быть отрицательными, то задача о смесях получит следующую математическую формулировку:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \geq b_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \\ \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq b_j, \quad j = \overline{m_1+1, m}, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Ясно, что получилась задача линейного программирования. Легко привести ее к нормальной форме

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max, \quad - \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq -b_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \\ \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq b_j, \quad j = \overline{m_1+1, m}, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим числовой

Пример. Пусть некоторая практическая задача о смеси четырех веществ для получения материала, оцениваемого двумя характеристиками (положительной и отрицательной), свелась к следующей задаче:

$$\begin{aligned} -14x_1 - 9x_2 - x_3 - 5x_4 &\rightarrow \max, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 &\leq -1/4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &\leq 1, \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

Составим двойственную задачу

$$\begin{aligned} -1/4 y_1 + y_2 \rightarrow \min, \quad -3y_1 + y_2 \geq -14, \quad -2y_1 + y_2 \geq -9, \\ -y_1 + 3y_2 \geq -1, \quad -2y_1 + 4y_2 \geq -5, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

В качестве начального двойственного плана возьмем вектор $y = \{4, 1\}$. На нем $\delta_1=3, \delta_2=2, \delta_3=0, \delta_4=1, \delta_5=4, \delta_6=1$. Следуя результатам п. 5, составим начальную табл. II.3. Ведущими в ней являются a_6 -строка и a_3 -столбец. После преобразования табл. II.3 получим табл. II.4. Она не удовлетворяет критерию оптимальности ($\kappa_5 = -1/12 \neq 0$ при $\delta_5=4>0$), но к ней можно применить критерий субоптимальности (п. 3). Поскольку $\kappa_5 \delta_5 = 4/12 = 1/3$, то вектор

Таблица II.3

$\delta_{\text{оп}}$ \ δ		3	2	0	1	4	1	
	a_j, b опора	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
4	a_5	-3	-2	-1	-2	1	0	-1/4
1	a_6	1	1	3	4	0	1	1
	σ	3	2	0	1/4		1	

Таблица II.4

$\delta_{\text{оп}}$ \ δ		3	2	0	1	4	1	
	a_j, b опора	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
4	a_5	-8/3	-5/3	0	-2/3	1	1/3	1/12
0	a_3	1/3	1/3	1	4/3	0	1/3	1/3
	σ					4	3	

Таблица II.5

$\delta_{\text{оп}}$ \ δ		11	7	0	3	1	0	
	a_j, b опора	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
0	a_6	-8	-5	0	-2	3	1	1/4
0	a_3	3	2	1	2	-1	0	1/4

$x = \{0, 0, 1/12, 0\}$ является $1/3$ -оптимальным планом прямой задачи. Табл. II.5 удовлетворяет критерию оптимальности. Оптимальный план имеет вид $x^0 = \{0, 0, 1/4, 0\}$, т. е. оптимальная смесь составляется только из третьего вещества, взятого в количестве $x_3^0 = 1/4$. Из табл. II.5 можно извлечь оптимальные значения двойственных переменных, которые находятся в δ -строке и a_5 -, a_6 -столбцах (обоснование см. в п. 1): $y_1^0 = 1$, $y_2^0 = 0$. Физическая интерпретация: на оптимальном плане первое ограничение существенно, второе — нет.

§ 2. Задача с двухсторонними ограничениями

Оставим в качестве упражнения задачу линейного программирования, где на часть переменных не наложено прямых ограничений. В данном параграфе исследуется двойственным опорным методом общая задача линейного программирования, все переменные которой имеют двухсторонние прямые ограничения. Обоснование метода отлично от приведенного в § 1.

1. Постановка задачи. Опорные копланы. Общая задача линейного программирования с двухсторонними ограничениями в канонической форме имеет вид (см. § 3 гл. I)

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

где c, x, d — n -векторы, b — m -вектор, A — $m \times n$ -матрица; $n \geq m$, $\text{rank } A = m$, $d > 0$, $\|d\| < \infty$. В § 3 гл. I она исследована прямым опорным методом. Цель настоящего параграфа — построение двойственного опорного метода для решения задачи (1).

Задачу (1) запишем в виде

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \leq d, x \geq 0. \quad (2)$$

В такой форме она является задачей линейного программирования с односторонними ограничениями. Поэтому, согласно правилу составления двойственных задач (см. введение), двойственная задача для задачи (2) имеет вид

$$b'y + d'w \rightarrow \min, A'y + w \geq c, w \geq 0, \quad (3)$$

где w — n -вектор, учитывающий дополнительное ограничение задачи (2).

Двойственным планом (или планом задачи (3)) называется $m+n$ -вектор $\{y, w\}$, удовлетворяющий ограниче-

ниям задачи (3). Вектор $\delta = A'y - c$, как и в § 1, назовем копланом. Из вида двойственной задачи следует, что, если не выполняются соотношения

$$w_i = 0 \text{ при } \delta_i \geq 0; \quad w_i = -\delta_i \text{ при } \delta_i < 0, \quad (4)$$

то, уменьшая соответствующие значения w_i , можно без изменения вектора y уменьшить значение двойственной целевой функции. Поскольку нас интересуют решения задачи (3), то будем считать, что соотношения (4) выполняются для каждого двойственного плана.

Опора $A_{\text{оп}}$ вводится таким же образом, как в § 1 гл. I. Совокупность $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ коплана и опоры задачи (1) называется опорным копланом. Компоненты δ_i с опорными индексами — опорные переменные коплана, остальные компоненты — неопорные. Коплан, неопорные компоненты которого отличны от нуля, называется невырожденным. Коплан δ^0 , построенный по оптимальному двойственному плану, называется оптимальным копланом.

2. Критерий оптимальности. По опорному коплану $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ построим базисный псевдоплан κ задачи (1). Неопорные переменные κ_i , $i \in I_{\text{н}}$, найдем по формулам

$$\kappa_i = 0, \text{ если } \delta_i \geq 0; \quad \kappa_i = d_i, \text{ если } \delta_i < 0, \quad i \in I_{\text{н}}. \quad (5)$$

Опорные компоненты κ_i , $i \in I_{\text{оп}}$, найдутся однозначно из уравнения

$$\sum_{i \in I_{\text{оп}}} a_i \kappa_i + \sum_{i \in I_{\text{н}}} a_i \kappa_i = b. \quad (6)$$

Предположим, что опорные переменные построенного псевдоплана удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} 0 \leq \kappa_i \leq d_i \text{ при } \delta_i = 0; \quad \kappa_i = 0 \text{ при } \delta_i > 0; \\ \kappa_i = d_i \text{ при } \delta_i < 0, \quad i \in I_{\text{оп}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (5)—(7) следует, что рассматриваемый псевдоплан является планом прямой задачи (1). Далее,

$$c'\kappa = -\delta'\kappa + y'A\kappa = b'y + d'w - (\delta + w)'\kappa - (d - \kappa)'w. \quad (8)$$

Из (4), (5), (7) следует $(\delta + w)'\kappa + (d - \kappa)'w = 0$. Таким образом, значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают. Это, согласно теории двойственности, означает, что δ — оптимальный коплан, а построенный псевдоплан с компонентами (5), (7) является оптимальным планом прямой задачи.

С помощью теории двойственности нетрудно показать,

что соотношения (7) необходимы для оптимальности невырожденного опорного коплана.

Критерий оптимальности. Соотношения (7) достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного коплана.

Проверка соотношений (7) при машинном счете с использованием обратной матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}$ очевидна. При ручном счете используется табл. II.6. В столбце b помещены координаты x_i вектора b в базисе из векторов опоры.

3. Достаточное условие субоптимальности. Пусть опорные переменные псевдоплана, построенного в п. 2, удовлетворяют неравенствам $0 \leq \kappa_i \leq d_i$, $i \in I_{\text{оп}}$.

Подсчитаем число

$$\varepsilon = \sum_{\delta_i > 0, i \in I_{\text{оп}}} \delta_i \kappa_i - \sum_{\delta_i < 0, i \in I_{\text{оп}}} \delta_i (d_i - \kappa_i).$$

Из формулы (8) следует, что рассматриваемый псевдоплан является ε -оптимальным планом прямой задачи (1).

Проверка условия субоптимальности осуществляется по элементам $\delta_{\text{оп}}$, $d_{\text{оп}}$ и $\kappa_{\text{оп}}$ -столбцов табл. II.6.

Таблица II.6

$\delta_{\text{оп}}$ \ δ				δ_1	\dots	δ_n	
	$d_{\text{оп}}$ \ d			d_1	\dots	d_n	
		$\kappa_{\text{оп}}$ \ κ		κ_1	\dots	κ_n	
			a_j, b \ опора	a_1	\dots	a_n	b
δ_{i_1}	d_{i_1}	κ_{i_1}	a_{i_1}	$x_{i_1 1}$	\dots	$x_{i_1 n}$	x_{i_1}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
δ_{i_m}	d_{i_m}	κ_{i_m}	a_{i_m}	$x_{i_m 1}$	\dots	$x_{i_m n}$	x_{i_m}
			σ	σ_1	\dots	σ_n	

4. Улучшение опорного коплана. Пусть $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ — опорный коплан, $\tilde{\delta} = \delta + \Delta\delta$ — другой коплан, соответствующий двойственному плану $\{\tilde{y}, \tilde{w}\}$, $\tilde{y} = y + \Delta y$, $\tilde{w} = w + \Delta w$, в котором вектор \tilde{w} согласован с копланом $\tilde{\delta}$ (см. (4)).

Подсчитаем изменение двойственной целевой функции:

$$b'\Delta y + d'\Delta w = \Delta y' A \kappa + d'\Delta w = \Delta\delta' \kappa + d'\Delta w. \quad (9)$$

Найдем вклад в приращение (9) неопорных компонент коплана. Из определения неопорных компонент псевдоплана (5) и условия согласования (4) следует:

- 1) если $\delta_i \geq 0$, $\tilde{\delta}_i > 0$, то $\kappa_i = 0$, $\Delta w_i = 0$;
- 2) если $\delta_i \geq 0$, $\tilde{\delta}_i < 0$, то $\kappa_i = 0$, $\Delta\delta_i = \tilde{\delta}_i - \delta_i$, $\Delta w_i = -\tilde{\delta}_i$;
- 3) если $\delta_i < 0$, $\tilde{\delta}_i > 0$, то $\kappa_i = d_i$, $\Delta\delta_i = \tilde{\delta}_i - \delta_i$, $\Delta w_i = \delta_i$;
- 4) если $\delta_i < 0$, $\tilde{\delta}_i \leq 0$, то $\kappa_i = d_i$, $\Delta\delta_i = \tilde{\delta}_i - \delta_i$, $\Delta w_i = -\Delta\delta_i$.

Подставив эти значения в (9), получим формулу приращения двойственной целевой функции

$$b'\Delta y + d'\Delta w = \sum_{i \in I_{\text{оп}}} (\kappa_i \Delta\delta_i + d_i \Delta w_i) + \sum_{\delta_i < 0, \tilde{\delta}_i > 0, i \in I_{\text{н}}} d_i \tilde{\delta}_i - \sum_{\delta_i > 0, \tilde{\delta}_i < 0, i \in I_{\text{н}}} d_i \tilde{\delta}_i. \quad (10)$$

Сравнив это выражение с соотношениями (7), легко обнаружить, что приращение (10) можно сделать отрицательным, если соотношения (7) не выполняются.

Структура опорного коплана позволяет использовать разнообразные вариации опорных переменных коплана (см. гл. III), что невозможно для базисного двойственного плана в двойственном симплекс-методе. Однако в данном параграфе с целью максимального приближения алгоритма к классическому будем на каждой итерации варьировать только одну опорную переменную коплана.

Если $\delta_i > 0$ или $\delta_i = 0$, $\kappa_i < 0$, $i \in I_{\text{оп}}$, то отметим число κ_i . Если $\delta_i < 0$ или $\delta_i = 0$, $\kappa_i > d_i$, $i \in I_{\text{оп}}$, то отметим число $\kappa_i - d_i$. Обозначим через v^0 отмеченное число

с наибольшим модулем. Пусть i_0 — индекс этого числа. Из формулы (10) следует, что при

$$\Delta \delta_{i_0} = -\sigma \operatorname{sign} v^0, \quad \sigma \geq 0, \quad (11)$$

двойственная целевая функция уменьшается со скоростью $|v^0|$.

Исследовав формулу (10), легко получить максимальный шаг σ , при котором двойственная целевая функция убывает, а вектор δ остается копланом. Так как получаемые выражения громоздки (убедитесь самостоятельно!), ограничимся более простым случаем с невырожденным копланом $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$. Шаг σ увеличиваем до тех пор, пока одна из неопорных компонент коплана δ не обратится в нуль или пока не выполнится критерий оптимальности для i_0 -й компоненты.

Ограничение на шаг по компоненте δ_{i_0} равно

$$\sigma_{i_0} = \begin{cases} |\delta_{i_0}|, & \text{если } 0 \leq x_{i_0} \leq d_{i_0}, \delta_{i_0} \neq 0, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку $\Delta \delta = A' \Delta y$, $\Delta y' = \Delta \delta'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}$, $\Delta \delta'_H = \Delta \delta'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_H$, то $\Delta \delta_j = -\sigma x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0$, $j \in I_H$, и ограничение на шаг по компоненте $\delta_j \neq 0$ равно

$$\sigma_j = \begin{cases} \delta_j / x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0 & \text{при } \delta_j x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0 > 0, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Минимальное из чисел σ_{i_0} , σ_j , $j \in I_H$, обозначим через $\sigma^0 = \sigma_{i_*}$. Если $\sigma^0 = \infty$, то задача (1) не имеет планов.

При $\sigma_0 < \infty$ переходим к новому коплану $\tilde{\delta}$. Его компоненты

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{i_0} &= \delta_{i_0} - \sigma^0 \operatorname{sign} v^0, \quad \tilde{\delta}_i = \delta_i, \quad i \neq i_0, \quad i \in I_{\text{оп}}; \\ \tilde{\delta}_j &= \delta_j - \sigma^0 x_{i_0 j} \operatorname{sign} v^0, \quad j \in I_H. \end{aligned}$$

При $i_* = i_0$ опора сохраняется; если $i_* \neq i_0$, то новая опора $\tilde{A}_{\text{оп}}$ получается из старой $A_{\text{оп}}$ путем замены вектора a_{i_0} на a_{i_*} . За итерацию $\delta \rightarrow \tilde{\delta}$ значение двойственной целевой функции уменьшается на величину $\sigma^0 |v^0|$.

З а м е ч а н и е. В данном параграфе по опорному коплану строится базисный псевдоплан κ (у него все неопорные компоненты принимают граничные значения). Общий случай опорного псевдоплана будет рассмотрен в гл. VI.

5. Построение начального опорного коплана. Из (3) следует, что для любого m -вектора y вектор $\{y, \omega\}$, где $\omega_i = 0$ при $\delta_i \geq 0$ и $\omega_i = -\delta_i$ при $\delta_i < 0$, является двойственным планом, а вектор $\delta = A'y - c$ — копланом. Таким образом, построение коплана в задаче с двухсторонними ограничениями не вызывает трудности. Существует простой прием построения коплана и в задаче с односторонними ограничениями (см. гл. IV). Эффективность двойственного опорного метода зависит от того, насколько вектор y близок к y^0 , т. е. насколько ценна информация, использованная при составлении вектора y .

При составлении опоры $A_{оп}$ следует выбирать те векторы a_i , которым соответствует наиболее надежная информация δ_i .

При решении двойственным методом задачи линейного программирования в нормальной форме проблема построения опоры решается тривиально. Двойственная задача имеет вид

$$b'y + d'\omega \rightarrow \min, \quad A'y + \omega \geq c, \quad y \geq 0, \quad \omega \geq 0.$$

Если $\{y^1, \omega^1\}$ — начальный двойственный план, то начальный коплан $\{\delta^1, \delta_{св}^1\}$, где $\delta^1 = A'y^1 - c$, $\delta_{св}^1 = y^1$. Опора его состоит из векторов $a_{n+i} = e_i$, $i = \overline{1, m}$.

Глава III

НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ

Симплекс-метод, двойственный симплекс-метод и их обобщения, изложенные в гл. I—II, в задачах оптимизации [1, 5] основаны на методе исключения. Суть этого метода, как известно, состоит в следующем. Пусть требуется минимизировать скалярную функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

Из уравнений (2) находим переменные x_1, \dots, x_m (в симплекс-методе они называются базисными):

$$x_j = h_j(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

и результат подставляем в функцию (1)

$$F(x_{m+1}, \dots, x_n) = f(h_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, h_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Таким образом, задача на *условный минимум* (1)—(3) сводится к задаче минимизации функции $F(x_{m+1}, \dots, x_n)$ с учетом неравенств (3).

Существует много методов решения задач на *безусловный минимум*. Поскольку в линейном программировании имеют дело лишь с линейными функциями и всю информацию о их поведении можно получить из первых производных (коэффициентов и свободных членов), то при решении задач на безусловный минимум из линейного программирования используются только *методы первого порядка*.

Симплекс-метод является методом первого порядка, т. е. методом градиентного типа. Точнее, это одна из реализаций *метода наискорейшего подъема*. Особенность ее состоит в том, что при выборе направления наискорейшего подъема всегда используется специальная нормировка небазисных переменных x_{m+1}, \dots, x_n , которая сводит метод наискорейшего подъема к *методу по координатного подъема* в текущей системе координат. Другими словами, у функции $F(x_{m+1}, \dots, x_n)$ фиксируются все аргументы, кроме одного x_j , и выбирается индекс j_0 так, что величина (скорость изменения вдоль оси ox_{j_0}) $\partial F / \partial x_{j_0}$ максимальна. После выбора координатной оси ox_{j_0} наискорейшего подъема изменяем только одну небазисную переменную x_{j_0} до тех пор, пока одна из базисных переменных x_{i_0} в (4) не обратится в нуль (см. ограничения (3)). Затем путем перевода старой базисной переменной в небазисные (базисной становится переменная x_{j_0}) меняем систему координат. Все эти операции удобно реализуются на симплексных таблицах.

Специфика симплекс-метода состоит в том, что дополнительно перед каждым выбором координатной оси наискорейшего подъема предполагается, что все небазисные переменные равны нулю. Из описания ясно, что если однажды (например, в начале процесса решения) это предположение выполняется, то оно будет выполняться и всегда в силу отмеченного правила замены системы координат. Таким образом, можно сказать, что симплекс-метод — это метод наискорейшего подъема по специаль-

ным точкам пространства переменных (эти точки называются базисными планами).

Нетрудно сообразить, что именно специальный характер базисных планов вынуждает среди всех видов нормировки небазисных переменных выбрать единственную, которая ведет к покоординатному подъему. Следует подчеркнуть значение замены на каждой итерации системы координат в пространстве небазисных переменных. Именно этот прием обеспечивает конечность симплекс-метода для невырожденных задач.

При изложении прямого опорного метода (см. гл. I) мы точно следовали описанной выше схеме симплекс-метода, однако при выборе координатной оси наискорейшего подъема мы не предполагали, что все небазисные переменные равны нулю. В силу этого можно сказать, что прямой метод — это метод наискорейшего подъема, который имеет нормировку симплекс-метода, но осуществляется по произвольным точкам пространства переменных x_1, \dots, x_n . Поскольку в прямом методе можно и не использовать специальные точки, то возникает мысль не ограничиваться только определенной нормировкой, а привлекать и другие типы нормировочных условий.

Две модификации прямого опорного метода, изложенные в данной главе, основаны на новых нормировках, которые распространены в градиентных методах. В третьей модификации сокращено число преобразований таблиц при решении задач линейного программирования. В параграфах приводятся и модификации двойственного метода.

§ 1. Первая модификация

Использование опорных планов позволяет строить методы наискорейшего подъема со стандартным условием нормировки, основанным на евклидовой норме. В результате движение во множестве планов, порождающее увеличение целевой функции, происходит не по координатным осям (элементарным направлениям), а по градиенту целевой функции (вдоль линейной комбинации элементарных направлений). В этом суть первой модификации прямого метода. По такому же принципу строится первая модификация двойственного метода. Предварительно доказываются общие теоремы существования решений.

1. Первая теорема существования. Рассмотрим об-

щую задачу линейного программирования с односторонними ограничениями (§ 1 гл. I)

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

где c, x — n -векторы, b — m -вектор, A — $m \times n$ -матрица, $\text{rank } A = m$.

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный опорный план задачи (1),

$$A_{\text{оп}} = \{a_1, \dots, a_m\} \quad (2)$$

опора, $A_{\text{н}}$ — матрица из остальных столбцов матрицы A . Каждое допустимое направление l из точки x имеет вид (см. § 1 гл. I)

$$l = \{l_{\text{оп}}, l_{\text{н}}\}, \quad l_{\text{оп}} = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l_{\text{н}}, \quad l_{\text{н}} = \{l_{\text{н}+}, l_{\text{н}0}\}, \quad l_{\text{н}0} \geq 0, \quad (3)$$

где $l_{\text{н}+}$ — компонента вектора $l_{\text{н}}$, состоящая из координат l_i , соответствующих положительным координатам вектора x , вектор $l_{\text{н}0}$ составлен из тех координат l_i вектора $l_{\text{н}}$, которые соответствуют нулевым координатам вектора x .

В координатной форме условия (3) допустимости направления $l = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ имеют вид

$$\alpha_i = - \sum_{j \in I_{\text{н}}} x_{ij} \alpha_j, \quad i \in I_{\text{оп}}, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j \in I_{\text{н}0},$$

где x_{ij} — i -я координата вектора a_j в опоре (2), $I_{\text{н}}$ — множество неопорных индексов, $I_{\text{оп}}$ — множество опорных индексов, $I_{\text{н}0}$ — подмножество неопорных индексов, для которых $x_i = 0$.

В силу выпуклости множества планов задачи (1) для каждого плана \bar{x} найдутся допустимое направление l и число ε такие, что

$$\bar{x} = x(\varepsilon) = x + \varepsilon l. \quad (4)$$

Производная от $c'x$ по направлению l из точки x

$$\frac{\partial c'x}{\partial l} = c'l = \sum_{j \in I} c_j \alpha_j, \quad I = \{1, 2, \dots, n\},$$

и не зависит от x .

В § 1 гл. I показано, что

$$\sum_{j \in I} c_j \alpha_j = - \sum_{j \in I_n} \Delta_j \alpha_j,$$

где Δ_j — координаты вектора

$$\Delta' = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A - c'. \quad (5)$$

Теорема 1. Для существования оптимального плана x^0 задачи (1) с известным невырожденным опорным планом $\{x, A_{\text{оп}}\}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие неотрицательные числа λ_i , $i \in I_{\text{оп}}$; μ_j , $j \in I_n$, при которых выполняются равенства

$$\Delta_j = \mu_j - \sum_{i \in I_{\text{оп}}} \lambda_i x_{ij}, \quad j \in I_n. \quad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (1) имеет решение. Тогда для допустимого направления $l = \{l_{\text{оп}}, l_n\}$ из x , удовлетворяющего условиям

$$A_{\text{оп}}^{-1} A_n l_n \leq 0, \quad l_n \geq 0, \quad (7)$$

должно выполняться неравенство

$$c' l = -\Delta'_n l_n \leq 0. \quad (8)$$

Неравенство (8), таким образом, является следствием неравенств (7). Применив теорему Фаркаша [5], получим утверждение (6).

Достаточность. В векторной форме равенства (6) имеют вид

$$\Delta'_n = \mu'_n - \lambda'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_n.$$

Подставим сюда значение Δ из (5):

$$(c_{\text{оп}} + \lambda_{\text{оп}})' A_{\text{оп}}^{-1} A_n = c'_n + \mu'_n. \quad (9)$$

Положим $y' = (c_{\text{оп}} + \lambda_{\text{оп}})' A_{\text{оп}}^{-1}$. Из (9) видно, что этот вектор удовлетворяет соотношениям $y' A_{\text{оп}} \geq c'_{\text{оп}}$, $y' A_n \geq c'_n$, т. е. является двойственным планом. По теореме существования теории двойственности (см. введение) прямая задача имеет решение.

Теорема 1 доказана.

Теорема 1 сформулирована в терминах таблицы прямого метода. В общем случае ее проверка сводится к ре-

шению задачи линейного программирования. Как видно из доказательства, теорема является табличной реализацией теоремы существования из теории двойственности (см. введение).

Приведем без доказательства критерий неограниченности: для неограниченности целевой функции прямой задачи необходимо и достаточно, чтобы для некоторых неотрицательных чисел α_j , $j \in I_H$, выполнялись неравенства

$$\sum_{j \in I_H} x_{ij} \alpha_j \leq 0, \quad i \in I_{оп}; \quad \sum_{j \in I_H} \alpha_j \Delta_j < 0. \quad (10)$$

Из этого критерия можно получить ряд простых достаточных условий неограниченности сверху формы $c'x$. В частности, из него легко следуют все достаточные условия неограниченности из гл. I.

2. Модификация прямого метода. Пусть $\{x, A_{оп}\}$ — невырожденный опорный план. В § 1 гл. I показано, что множество допустимых направлений l описывается соотношениями (3). Вдоль допустимого направления производная целевой функции

$$\frac{\partial c'x}{\partial l} = -\Delta'_H l_H, \quad \Delta'_H = c'_{оп} A_{оп}^{-1} A_H - c'_H, \quad l_{H_0} \geq 0. \quad (11)$$

В координатной форме соотношения (3), (11) имеют вид

$$l_i = - \sum_{j \in I_H} x_{ij} \alpha_j, \quad i \in I_{оп}, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j \in I_{H_0}; \quad (12)$$

$$-\frac{\partial c'x}{\partial l} = \sum_{j \in I_H} \Delta_j \alpha_j. \quad (13)$$

Здесь $I_{оп}$, I_H , I_{H_0} — множества индексов векторов-столбцов матриц $A_{оп}$, A_H , A_{H_0} , α_j — координаты вектора $l_H: l_H = \sum_{j \in I_H} \alpha_j e_j$.

Найдем допустимое направление, вдоль которого скорость возрастания целевой функции из точки x максимальна. В отличие от § 1 гл. I введем новое условие нормировки вектора l :

$$\sum_{j \in I_H} \alpha_j^2 \leq \gamma, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j \in I_{H_0}, \quad (14)$$

где γ — некоторое положительное число (в дальнейшем будет выбрано в удобной для вычисления форме).

Пусть I_+ — подмножество индексов из I_n , которые принадлежат столбцам таблицы прямого метода, не удовлетворяющим критерию оптимальности:

$$I_+ = \{j: \Delta_j < 0, \text{ если } x_j = 0 \text{ и } \Delta_j \neq 0, \text{ если } x_j > 0\}. \quad (15)$$

При $\alpha_j \geq 0$, $j \in I_{n0}$, очевидны неравенства

$$\begin{aligned} - \sum_{j \in I_n} \Delta_j \alpha_j &= - \sum_{j \in I_+} \Delta_j \alpha_j - \sum_{j \in \bar{I}_+} \Delta_j \alpha_j \leq - \sum_{j \in I_+} \Delta_j \alpha_j \leq \\ &\leq \left(\sum_{j \in I_+} \Delta_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in I_+} \alpha_j^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

которые обращаются в равенства при $\alpha_j = 0$, $j \in \bar{I}_+$; $\alpha_j = -\beta \Delta_j$, $j \in I_+$, $\beta > 0$. Указанные компоненты α_j , $j \in I_n$, должны удовлетворять неравенству (14). Поэтому $\beta^2 \leq \gamma \left(\sum_{j \in I_+} \Delta_j^2 \right)^{-1}$. Положим $\gamma = \sum_{j \in I_+} \Delta_j^2$, тогда, очевидно,

$\beta \leq 1$. Значит, максимум функции (13) на множестве (14) достигается при $\alpha_j = 0$, $j \in \bar{I}_+$, $\alpha_j = -\Delta_j$, $j \in I_+$. Координаты компоненты l_n допустимого направления с наибольшей скоростью роста целевой функции найдены. Компоненты $l_{оп}$ вычисляются по формулам (12). Таким образом, вдоль построенного направления координаты вектора (4) изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_j(\varepsilon) &= x_j, \quad j \in \bar{I}_+, \quad j \in I_n; \\ x_j(\varepsilon) &= x_j - \varepsilon \Delta_j, \quad j \in I_+; \\ x_i(\varepsilon) &= x_i + \varepsilon \sum_{j \in I_+} x_{ij} \Delta_j, \quad i \in I_{оп}, \end{aligned} \quad (16)$$

а скорость возрастания целевой функции

$$\frac{\partial c'x}{\partial l} = \sum_{j \in I_+} \Delta_j^2. \quad (17)$$

Отсюда видно, что невырожденный опорный план x оптимален тогда и только тогда, когда $I_+ = \emptyset$. Из определения (15) множества I_+ следует эквивалентность полученного критерия оптимальности критерию из § 1 гл. I.

При $I_+ \neq \emptyset$, согласно (17), всегда существует допустимое направление, вдоль которого целевая функция прямой задачи возрастает. Из (16) видно, что $c'x(\varepsilon) \rightarrow \infty$, если

$$\Delta_j < 0, j \in I_+, \sum_{j \in I_+} x_{ij} \Delta_j \geq 0, i \in I_{\text{оп}}. \quad (18)$$

Достаточное условие (18) несуществования решения задачи (1) отличается от аналогичного из § 1 гл. I и является частным случаем критерия неограниченности из п. 1.

Для проверки условия (18) составим табл. III.1, которая отличается от таблицы прямого опорного метода дополнительным ξ -столбцом, куда заносятся числа

Таблица III.1
+ Θ^0

$\begin{array}{c} c \\ \swarrow \\ c_{\text{оп}} \end{array}$			c_1	\dots	c_n		
	$\begin{array}{c} x \\ \swarrow \\ x_{\text{оп}} \end{array}$		x_1	\dots	x_n	$c'x$	
		$\begin{array}{c} a_j \\ \swarrow \\ \text{опора} \end{array}$	a_1	\dots	a_n	ξ	Θ
c_1	x_1	a_1	x_{11}	\dots	x_{1n}	ξ_1	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	
c_m	x_m	a_m	x_{m1}	\dots	x_{mn}	ξ_m	
Δ			Δ_1	\dots	Δ_n		
\overline{x}							

$\xi_i = \sum_{j \in I_+} x_{ij} \Delta_j, i \in I_{\text{оп}}$. Для удобства подсчета этих чисел все элементы Δ -строки, не удовлетворяющие критерию оптимальности, подчеркиваются.

Если все подчеркнутые элементы в Δ -строке отрицательны и все элементы ξ -столбца неотрицательны, то задача (1) не имеет решения.

В случае, когда останов не произошел из-за оптимальности плана x или из-за неограниченности формы $c'x$, строим новый план. Для этого найдем максимально допустимый шаг вдоль выбранного направления, при котором все числа (16) неотрицательны. Из (16) видно, что число $x_j/\Delta_j > 0$ равно максимально допустимому шагу по переменной $x_j(\epsilon)$, $j \in I_+$; число Θ_{i_0} , где

$$\Theta_{i_0} = \min_{\xi_i < 0} \Theta_i, \quad \Theta_i = -\frac{x_i}{\xi_i}, \quad i \in I_{\text{оп}}, \quad (19)$$

равно максимально допустимому шагу по третьей группе переменных в (16). Значит, максимально допустимый шаг по всем переменным (16) $\Theta^0 = \min \{\Theta_{i_0}, x_j/\Delta_j, \Delta_j > 0, j \in I_+\}$. Ясно, что $\Theta^0 > 0$, если опорный план x невырожден.

Пусть $\Theta^0 = \Theta_{i_0}$. В этом случае переменная $x_{i_0}(\Theta^0)$ становится нулем и поэтому для сохранения невырожденности следующего плана $\bar{x} = x(\Theta^0)$ из опоры удаляется вектор a_{i_0} . Возникает вопрос: какой вектор следует ввести в опору? Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее. В симплекс-методе из неопорных столбцов выбираем тот, в котором находился минимальный элемент из Δ -строки. Это обеспечивало максимальную скорость возрастания целевой функции. В рассматриваемой модификации прямого метода все столбцы, не удовлетворяющие критерию оптимальности с изложенной точки зрения, равноценны, ибо, согласно (17), скорость роста целевой функции не зависит от выбора направляющего столбца. Будем следовать такому правилу: согласно (16), вычислим в старой таблице координаты нового плана \bar{x} с неопорными индексами

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= x_j(\Theta^0) = x_j - \Theta^0 \Delta_j, \quad j \in I_+; \\ \bar{x}_j &= x_j, \quad j \in I_+, \quad j \in I_{\text{н}}, \end{aligned} \quad (20)$$

и найдем среди них максимальное число $\bar{x}_{j_0} (x_{i_0 j_0} \neq 0)$. Вектор a_{j_0} введем в опору. Остальные координаты нового плана, согласно (16),

$$\bar{x}_i = x_i(\epsilon) = x_i + \Theta^0 \xi_i = x_i - \frac{x_{i_0} \xi_i}{\xi_{i_0}}, \quad i \in I_{\text{оп}}. \quad (21)$$

Пусть $\Theta^0 \neq \Theta_{i_0}$. Тогда ни одна из переменных $x_i(\Theta^0)$, $i \in I_{\text{оп}}$, не обращается в нуль. Поэтому новый план будет

опорным невырожденным со старой опорой. Координаты нового плана \bar{x} подсчитываем по формулам

$$\begin{aligned}\bar{x}_j &= x_j, \quad j \in I_+; \quad \bar{x}_j = x_j - \Theta^0 \Delta_j, \quad j \in I_+, \quad j \in I_n; \\ \bar{x}_i &= x_i + \Theta^0 \xi_i, \quad i \in I_{оп}.\end{aligned}$$

С помощью элементов $x_{оп}$ -столбца и отрицательных элементов ξ -столбца табл. III.1 вычисляем, согласно (19), числа Θ_i и заносим их в Θ -столбец. Минимальное число Θ_{i_0} из Θ -столбца указывает на ведущую строку a_{i_0} . Пусть Θ_{i_0} меньше x_j/Δ_j для всех подчеркнутых положительных элементов Δ_j из Δ -строки. Число Θ_{i_0} записываем справа от Δ -строки и по формулам (20) находим числа \bar{x}_j , $j \in I_n$, которые заносим в \bar{x} -строку. Столбец a_{j_0} с максимальным \bar{x}_{j_0} ($x_{i_0 j_0} \neq 0$) является ведущим. Переменная \bar{x}_{j_0} становится опорной, остальные переменные \bar{x}_i , $i \in I_{оп}$, $i \neq i_0$, вычисляются по формуле (21). Если $\Theta^0 \neq \Theta_{i_0}$, то опора нового опорного плана остается прежней, компоненты его пересчитываются по формулам (16) ($\varepsilon = \Theta^0$).

З а м е ч а н и е. Приведенная модификация не является градиентным методом в классическом смысле. Она являлась бы градиентным методом, если бы при выборе допустимого направления наискорейшего подъема не учитывались ограничения $a_j \geq 0$, $j \in I_{н0}$. Учет этих ограничений означает проектирование градиента целевой функции на множество $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\alpha_j \geq 0$, $j \in I_{н0}$. Таким образом, построенная модификация прямого метода представляет собой сочетание метода исключения с *методом проекции градиента* (напомним: прямой метод опирается на метод исключения и метод покоординатного подъема). Поскольку в изложенной модификации осуществляется проектирование градиента на множество, содержащее в качестве подмножества множество, на которое проектируется градиент в прямом опорном методе, то при выборе направления движения модификация имеет преимущества перед прямым методом. Однако качество метода зависит и от величины максимально допустимого шага. Поэтому отдать предпочтение одному из методов, по-видимому, невозможно.

3. Вторая теорема существования. Наряду с прямой задачей (1) рассмотрим двойственную к ней задачу

$$b'y \rightarrow \min, \quad A'y \geq c. \quad (22)$$

Пусть y — двойственный план невырожденного опорного коплана $\{\delta, A_{оп}\}$ (см. § 1 гл. II). Любой другой двойственный план \bar{y} можно записать в виде

$$\bar{y} = y + \varepsilon l, \quad (23)$$

где l — m -вектор — допустимое направление, ε — поло-

жительное число. Положим $l' = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i' A_{\text{оп}}^{-1}$. Найдем условия на α_i , при которых вектор l является допустимым направлением. Пусть $A_{\text{оп}} = \{a_1, \dots, a_m\}$; $A_{\text{оп}1} = \{a_i, i \in I_{\text{оп}1}\}$; $A_{\text{оп}0} = \{a_i, i \in I_{\text{оп}0}\}$, где $I_{\text{оп}0}$ — подмножество индексов i из $1, 2, \dots, m$ таких, что $\delta_i = a_i' y - c_i = 0$. Подставив (23) в (22), получим необходимое и достаточное условие того, что вектор l является допустимым направлением:

$$\alpha_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}0}. \quad (24)$$

Движение вдоль допустимого направления тогда и только тогда не выйдет на границу множества двойственных планов, когда

$$\alpha_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}1}; \sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i x_{ij} \geq 0, j \in I_{\text{н}}. \quad (25)$$

Производная целевой функции двойственной задачи по допустимому направлению

$$\frac{\partial b'y}{\partial l} = l'b = \sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i e_i' A_{\text{оп}}^{-1} b = \sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i \kappa_i,$$

где κ_i — координаты вектора b в опоре (2).

Теорема 2. Для того чтобы прямая задача (1) с известным невырожденным опорным копланом $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ имела решение, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неотрицательные числа $\mu_i, i \in I_{\text{оп}}, \lambda_j, j \in I_{\text{н}}$, что

$$\kappa_i = \mu_i + \sum_{j \in I_{\text{н}}} x_{ij} \lambda_j, i \in I_{\text{оп}}. \quad (26)$$

Доказательство. Необходимость. Если задача (1) имеет решение, то, согласно теории двойственности, целевая функция двойственной задачи ограничена снизу. Это значит, что для всех чисел $\alpha_i, i \in I_{\text{оп}}$ удовлетворяющих (24), (25), выполняется неравенство $\sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i \kappa_i \geq 0$.

Применив теорему Фаркаша, получим (26).

Достаточность. В векторной форме равенство (26) имеет вид $A^{-1}b = \mu + A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}\lambda$. После умножения на $A_{\text{оп}}$ получим $b = A_{\text{оп}}\mu + A_{\text{н}}\lambda$. Таким образом, n -вектор $x = \{\mu, \lambda\}$ является планом прямой задачи. По теореме

существования (см. введение) задача (1) имеет и оптимальный план. Теорема доказана.

Из теоремы 2 нетрудно получить

Критерий несовместности. Прямая задача не имеет планов тогда и только тогда, когда найдутся такие неотрицательные числа α_i , $i \in I_{\text{оп}}$, что

$$\sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i x_{ij} \geq 0, j \in I_{\text{н}}; \quad \sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i \kappa_i < 0. \quad (27)$$

Из этого критерия получается ряд достаточных условий несовместности ограничений прямой задачи. Например, достаточное условие несуществования планов прямой задачи в § 1 гл. II есть частный случай приведенного критерия.

4. Модификация двойственного метода. По известному невырожденному опорному коплану $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ найдем другой коплан $\{\bar{\delta}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$, на котором линейная форма $b'y$ принимает меньшее значение, чем на предыдущем. Для этого сначала найдем допустимое направление наискорейшего убывания функции $b'y$. Согласно вычислениям п. 3, для этого нужно найти минимум функции

$$\frac{\partial b'y}{\partial l} = \sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i \kappa_i \quad (28)$$

при условиях (24).

Чтобы исключить значения $-\infty$ функции (28), введем условие нормировки

$$\sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i^2 \leq \gamma. \quad (29)$$

Пусть I_+ — множество индексов строк таблицы двойственного метода, не удовлетворяющих критерию оптимальности $I_+ = \{i: \kappa_i < 0 \text{ при } \delta_i = 0 \text{ и } \kappa_i \neq 0 \text{ при } \delta_i > 0\}$. По аналогии с п. 2 нетрудно показать, что минимум функции (28) на множестве (24), (29) $(\gamma = \sum_{i \in I_+} \kappa_i^2)$ достигается при

$$\alpha_i = 0, i \in \bar{I}_+, i \in I_{\text{оп}}; \quad \alpha_i = -\kappa_i, i \in I_+ \quad (30)$$

и равен

$$\min \frac{\partial b'y}{\partial l} = - \sum_{i \in I_+} \kappa_i^2.$$

Отсюда видно, что допустимое направление убывания функции $b'y$ существует тогда и только тогда, когда $I_+ \neq \emptyset$.

Вдоль направления (23) координаты вектора $\delta'(\varepsilon) = y'(\varepsilon)A - c'$ меняются по формулам

$$\begin{aligned}\delta_j(\varepsilon) &= y'(\varepsilon)a_j - c_j = y'a_j - c_j + \varepsilon l'a_j = \\ &= \delta_j + \varepsilon \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (31)$$

Поскольку $x_{ij} = 1$ при $i = j$, $x_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i \in I_{\text{оп}}$, $j \in I_{\text{оп}}$, то соотношения (31) можно записать по группам

$$\delta_i(\varepsilon) = \delta_i + \varepsilon \alpha_i, \quad i \in I_{\text{оп}};$$

$$\delta_j(\varepsilon) = \delta_j + \varepsilon \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ij}, \quad j \in I_{\text{н}}.$$

Если подставить сюда параметры (30), то получим

$$\delta_i(\varepsilon) = \delta_i, \quad i \in \overline{I_+}, \quad i \in I_{\text{оп}};$$

$$\delta_i(\varepsilon) = \delta_i - \varepsilon \kappa_i, \quad i \in I_+; \quad (32)$$

$$\delta_j(\varepsilon) = \delta_j - \varepsilon \sum_{i \in I_+} \kappa_i x_{ij}, \quad j \in I_{\text{н}}.$$

При значениях (30) функция (28) имеет вид

$$\frac{\partial b'y}{\partial l} = - \sum_{i \in I_+} \kappa_i^2. \quad (33)$$

Из (32), (33) видно, что целевая функция двойственной задачи неограниченно убывает, если

$$I_+ \neq \emptyset, \quad \kappa_i < 0, \quad i \in I_+; \quad \sum_{i \in I_+} \kappa_i x_{ij} \leq 0, \quad j \in I_{\text{н}}. \quad (34)$$

Соотношения (34) представляют достаточное условие отсутствия планов прямой задачи.

Если условия (34) не выполняются, то найдем максимально допустимый шаг вдоль выбранного направления, который оставляет точку $y(\varepsilon)$ еще во множестве двойственных планов. Вычислим

$$\sigma_{j_0} = \min_{\eta_j > 0} \sigma_j, \quad \sigma_j = \frac{\delta_j}{\eta_j}, \quad \eta_j = \sum_{i \in I_+} \kappa_i x_{ij}, \quad j \in I_{\text{н}};$$

$$\sigma_{i_0} = \min_{\kappa_i > 0} \sigma_i, \quad \sigma_i = \frac{\delta_i}{\kappa_i}, \quad \kappa_i > 0, \quad i \in I_+.$$

Максимально допустимый шаг $\sigma^0 = \min\{\sigma_{j_0}, \sigma_{i_0}\}$. Пусть $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, $j_0 \in I_{\text{н}}$. Тогда компонента $\bar{\delta}_{j_0}$ нового коплана равна нулю и поэтому (для сохранения невырожденности) вектор a_{i_0} введем в опору. Из опоры удалим вектор a_{i_0} , индекс i_0 которого принадлежит наибольшей компоненте $\bar{\delta}_{i_0}$ среди $\bar{\delta}_i$ ($x_{i_0} \neq 0$), $i \in I_{\text{оп}}$, нового коплана. Из (32) находим

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_i &= \delta_i, \quad i \in \bar{I}_+, \quad i \in I_{\text{оп}}, \quad \bar{\delta}_i = \delta_i - \sigma^0 \kappa_i = \\ &= \delta_i - \frac{\delta_{j_0}}{\eta_{j_0}} \kappa_i, \quad i \in I_+.\end{aligned}\quad (35)$$

Остальные $\bar{\delta}_j$, $j \in I_{\text{н}}$, вычисляются по формулам

$$\bar{\delta}_j = \delta_j - \sigma^0 \eta_j, \quad j \in I_{\text{н}}. \quad (36)$$

Пусть $\sigma^0 = \sigma_{i_0}$, $i_0 \in I_{\text{оп}}$. В этом случае неопорные компоненты нового коплана отличны от нуля. Поэтому опору сохраняем, а компоненты $\bar{\delta}$ вычисляем по формулам

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_i &= \delta_i, \quad i \in \bar{I}_+, \quad i \in I_{\text{оп}}; \quad \bar{\delta}_i = \delta_i - \sigma_{i_0} \kappa_i, \quad i \in I_+; \\ \bar{\delta}_j &= \delta_j - \sigma_{i_0} \eta_j, \quad j \in I_{\text{н}}.\end{aligned}\quad (37)$$

Полученные правила перехода $\{\delta, A_{\text{оп}}\} \rightarrow \{\bar{\delta}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ легко реализуются на табл. III. 2. По известному опорному коплану $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ заполняются клетки в строках a_1, \dots, a_m , δ и столбцах $a_1, \dots, a_n, b, \delta_{\text{оп}}$. В b -столбце подчеркиваются элементы, не удовлетворяющие критерию оптимальности, причем двойной чертой подчеркиваются положительные элементы. С помощью строк с подчеркнутыми элементами κ_i вычисляются числа $\eta_j = \sum_{i \in I_+} \kappa_i x_{ij}$, $j \in I_{\text{н}}$,

которые заносятся в η -строку. Далее заполняется σ -строка числами $\sigma_j = \delta_j / \eta_j$ для $\eta_j > 0$, $j \in I_{\text{н}}$, и $\sigma_{\text{оп}}$ -столбец числами $\sigma_i = \delta_i / \kappa_i$ для $\kappa_i > 0$.

Максимально допустимый шаг σ^0 равен минимальному элементу среди элементов σ -строки $\sigma_{\text{оп}}$ -столбца. Если элемент σ^0 оказался в $\sigma_{\text{оп}}$ -столбце, то опора не меняется, а пересчитывается по формулам (37) только коплан δ . В случае, когда элемент $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$ оказался в σ -строке, то в опору вводится a_{j_0} -столбец. Для нахождения вектора, удаляемого из опоры, по формулам (35) заполняется $\bar{\delta}_{\text{оп}}$ -столбец. Строка a_{i_0} , содержащая наибольшее число $\bar{\delta}_{i_0}$, $x_{i_0 j_0} \neq 0$, является ведущей, вектор a_{i_0} удаляется из

$\delta_{\text{оп}}$ \diagup δ		δ_1	\dots	δ_n				
	$\diagdown a_j, b$ опора	a_1	\dots	a_n	b			
δ_1	a_1	x_{11}	\dots	x_{1n}	x_1			
\vdots	\vdots			\vdots	\vdots			
δ_m	a_m	x_{m1}	\dots	x_{mn}	x_m			
						η		
						σ \diagup $\sigma_{\text{оп}}$		
							$\diagdown \bar{\delta}_{\text{оп}}$ $\bar{\sigma}$	

опоры. Новый коплан $\bar{\delta}$ вычисляется по формулам (35), (37). Основная часть табл. III. 2 преобразуется по правилу прямоугольника с ведущим элементом $x_{i_0 j_0}$. Для удобства подсчета нового коплана $\bar{\delta}$ в табл. III. 2 число σ^0 записывается над $\sigma_{\text{оп}}$ -столбцом и справа от η -строки.

§ 2. Вторая модификация

Главная особенность первой модификации состоит в том, что при переходе к новому двойственному плану в общем случае изменяются одновременно несколько неопорных координат δ_i , а не одна-единственная, как это было в симплекс-методе и в прямом опорном методе. Как уже отмечалось, в симплекс-методе из-за специфики базисных планов принципиально невозможно изменить более одной небазисной переменной. С другой стороны, при использовании опорных планов метод изменения нескольких переменных, изложенный в § 1, не является единственно возможным. С каждым новым условием нормировки появляются новые правила перехода. В дан-

ном параграфе для нормировки используется функция, лежащая в основе нормы $\|x\| = \sup |x_i|$, которая широко распространена наряду с нормами $\|x\| = \sum |x_i|$, $\|x\|^2 = \sum x_i^2$, уже использованными в гл. I, II и в § 1 данной главы.

В качестве упражнения предлагается для задачи с двухсторонними ограничениями рассмотреть нормировочное условие

$$0 \leq x_j + \alpha_j \leq d_j, \quad j \in I_{\Pi}.$$

1. Модификация прямого метода. Рассмотрим задачу

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

где c, x — n -векторы, b — m -вектор, A — $m \times n$ -матрица, $\text{rank } A = m$. Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный опорный план задачи (1),

$$A_{\text{оп}} = \{a_1, \dots, a_m\}. \quad (2)$$

В § 1 показано, что производная целевой функции $c'x$ по допустимому направлению $l = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$

$$\frac{\partial c'x}{\partial l} = - \sum_{j \in I_{\Pi}} \Delta_j \alpha_j, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j \in I_{\Pi}.$$

(Смысл новых символов пояснен в § 1.) Чтобы найти допустимое направление наискорейшего возрастания целевой функции, вычислим максимум функции $\partial c'x / \partial l$ при условиях

$$|\alpha_j| \leq 1, \quad j \in I_{\Pi}; \quad \alpha_j \geq 0, \quad j \in I_{\Pi}.$$

По аналогии с § 1 нетрудно показать, что искомый максимум достигается при

$$\alpha_j = 0, \quad j \in I_+, \quad j \in I_{\Pi}; \quad \alpha_j = -\text{sign } \Delta_j, \quad j \in I_+. \quad (3)$$

Символ I_+ имеет тот же смысл, что и в § 1.

Таким образом, вдоль допустимого направления с параметрами (3) движение осуществляется по точкам $x(\varepsilon)$ с координатами

$$\begin{aligned} x_j(\varepsilon) &= x_j, \quad j \in I_+, \quad j \in I_{\Pi}; \\ x_j(\varepsilon) &= x_j - \varepsilon \text{sign } \Delta_j, \quad j \in I_+; \\ x_i(\varepsilon) &= x_i + \varepsilon \sum_{j \in I_+} x_{ij} \text{sign } \Delta_j, \quad i \in I_{\text{оп}}, \end{aligned} \quad (4)$$

и целевая функция возрастает со скоростью

$$\frac{\partial c'x}{\partial t} = \sum_{j \in I_+} |\Delta_j|. \quad (5)$$

Из (5) видно, что $c'x(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$, если

$$I_+ \neq \emptyset, \Delta_j < 0, j \in I_+, \sum_{i \in I_+} x_{ij} \leq 0, i \in I_{\text{оп}}. \quad (6)$$

В противном случае максимально допустимый шаг

$$\begin{aligned} \Theta^0 &= \min \{ \Theta_{i_0}, \Theta_{j_0} \}; \\ \Theta_{i_0} &= \min_{\xi_i < 0} \Theta_i, \quad \Theta_i = -\frac{x_i}{\xi_i}, \\ \xi_i &= \sum_{j \in I_+} x_{ij} \operatorname{sign} \Delta_j, \quad i \in I_{\text{оп}}; \\ \Theta_{j_0} &= \min \Theta_j, \quad \Theta_j = x_j, \quad j \in I_+. \end{aligned}$$

Если $\Theta^0 = \Theta_{i_0}$, то вектор a_{i_0} удаляется из опоры (2), новый опорный план \bar{x} имеет координаты

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= x_j, \quad j \in I_+, \quad j \in I_{\text{н}}; \\ \bar{x}_j &= x_j - \Theta^0 \operatorname{sign} \Delta_j, \quad j \in I_+; \\ \bar{x}_i &= x_i + \Theta^0 \xi_i, \quad i \in I_{\text{оп}}. \end{aligned} \quad (7)$$

В опору вводится вектор a_{j_0} , соответствующий максимальному числу \bar{x}_{j_0} среди \bar{x}_j , $x_{i_0j} \neq 0, j \in I_{\text{н}}$. Если $\Theta^0 = \Theta_{j_0}$, то опора (2) сохраняется и координаты нового опорного плана вычисляются по формулам (4).

Табличная реализация второй модификации имеет такой же вид, как и первой (см. п. 2 § 1). Изменяются лишь формулы вычисления элементов ξ -столбца, \bar{x} -строки и Θ -столбца. Процесс решения заканчивается или получением оптимального плана ($I_+ = \emptyset$, выполнен критерий оптимальности из § 1 гл. I), или получением субоптимального плана (выполнен критерий субоптимальности из § 1 гл. I), или, наконец, доказательством того, что целевая функция прямой задачи не ограничена сверху (выполнены условия (6)).

З а м е ч а н и е. В отличие от первой во второй модификации сокращается число умножений и результаты операций менее чувствительны к изменениям параметров таблиц.

2. Модификация двойственного метода. Опять будем следовать общей схеме § 1, внося необходимые изменения, вызванные спецификой новой модификации. Пусть $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный опорный коплан с опорой (2). В § 1 подсчитана производная целевой функции двойственной задачи по допустимому направлению из точки y :

$$\frac{\partial b'y}{\partial l} = \sum_{i \in I_{\text{оп}}} \alpha_i \kappa_i, \quad (8)$$

причем там показано, что направление l допустимо тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i \geq 0, \quad i \in I_{\text{оп}}. \quad (9)$$

(Смысл символов объяснен в пп. 3—4 § 1.)

Дополним условие (9) новым

$$|\alpha_i| \leq 1, \quad i \in I_{\text{оп}}, \quad (10)$$

которое назовем условием нормировки. Как обычно, оно вводится для того, чтобы задача нахождения допустимого направления наискорейшего убывания функции $b'y$ имела решения. Минимум функции (8) при условиях (9), (10) достигается на элементах

$$\alpha_i = 0, \quad i \in \overline{I_+}, \quad i \in I_{\text{оп}}, \quad \alpha_i = -\text{sign } \kappa_i, \quad i \in I_+, \quad (11)$$

которые характеризуют направление наискорейшего убывания целевой функции двойственной задачи.

Координаты $\delta_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$, вектора $\delta = A'y(\varepsilon) - c(y(\varepsilon) = y + \varepsilon l)$ вдоль найденного направления меняются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_i(\varepsilon) &= \delta_i, \quad i \in \overline{I_+}, \quad i \in I_{\text{оп}}; \\ \delta_i(\varepsilon) &= \delta_i - \varepsilon \text{sign } \kappa_i, \quad i \in I_+; \\ \delta_j(\varepsilon) &= \delta_j - \varepsilon \eta_j, \quad j \in I_{\text{н}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\eta_j = \sum_{i \in I_+} x_{ij} \text{sign } \kappa_i$, $j \in I_{\text{н}}$. Кроме того, из (8), (11) следует

$$\frac{\partial b'y}{\partial l} = - \sum_{i \in I_+} |\kappa_i|.$$

Значит, функция $b'y(\varepsilon)$ неограниченно убывает, если

$$I_+ \neq \emptyset, \quad \kappa_i < 0, \quad i \in I_+; \quad \sum_{i \in I_+} x_{ij} \text{sign } \kappa_i \leq 0, \quad j \in I_{\text{н}}. \quad (13)$$

Соотношения (13) доставляют новое достаточное условие отсутствия планов прямой задачи. Если они не имеют места, то из (12) нетрудно найти максимально допустимый шаг, оставляющий точку $y(\varepsilon)$, $\varepsilon = \sigma^0$, во множестве двойственных планов:

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \min \{\sigma_{j_0}, \sigma_{i_0}\}; \\ \sigma_{j_0} &= \min_{\eta_j > 0} \sigma_j, \quad \sigma_j = \frac{\delta_j}{\eta_j}, \quad j \in I_{\text{н}}; \\ \sigma_{i_0} &= \min_{\kappa_i > 0} \sigma_i, \quad \sigma_i = \delta_i, \quad i \in I_{+}.\end{aligned}$$

Если $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, то небазисная оценка $\bar{\delta}_{j_0} = 0$. Поэтому для сохранения невырожденности вектор a_{j_0} вводим в опору. Чтобы найти удаляемый из опоры вектор a_{i_0} , подсчитаем опорные координаты $\bar{\delta}$:

$$\bar{\delta}_i = \delta_i, \quad i \in I_{+}, \quad i \in I_{\text{оп}}; \quad \bar{\delta}_i = \delta_i - \sigma^0 \operatorname{sign} \kappa_i, \quad i \in I_{+}, \quad (14)$$

индекс i_0 максимального из чисел $\bar{\delta}_i$ ($\kappa_{i_0} \neq 0$) является индексом удаляемого вектора a_{i_0} . Остальные координаты вектора $\bar{\delta}$ вычисляются по формулам

$$\bar{\delta}_j = \delta_j - \sigma^0 \eta_j, \quad j \in I_{\text{н}}. \quad (15)$$

Если $\sigma^0 = \sigma_{i_0}$, то опора не меняется, а $\bar{\delta}$ вычисляется по формулам (14), (15).

Табличная реализация второй модификации двойственного метода отличается от реализации первой модификации (см. п. 4 § 1) лишь деталями и оставляется читателям в качестве упражнения.

§ 3. Третья модификация

Нормировочные условия, порождающие модификации методов решения задач линейного программирования, могут быть самыми разнообразными. Возникает вопрос: нет ли среди них наилучшего условия (возможно меняющегося по итерациям), использующего результаты текущей или предыдущих итераций?

Оставив вопрос открытым, перейдем к объяснению третьей модификации методов, изложенных в гл. I, II. Сохраним классическое нормировочное условие, т. е. будем оставаться в рамках прямого и двойственного опорных методов, внося в процедуру перехода лишь одно

изменение. В прямом методе после вычисления максимально допустимого шага, как правило (см. гл. I, II), производилась замена опоры и пересчет всей таблицы. Иногда же можно и далее улучшить план, сохранив прежнюю опору. Грубо говоря, эта возможность опирается на перебор всех координатных осей в пространстве неопорных переменных, вдоль которых целевая функция возрастает (убывает в двойственном методе). Напомним, что в прямом методе движение осуществляется только вдоль одной координатной оси, вдоль которой скорость максимальна. В отличие от модификаций, описанных в § 1, 2, в третьей модификации движение будет происходить не одновременно вдоль нескольких осей (меняются одновременно несколько неопорных переменных), а последовательно вдоль (на каждом этапе меняется только одна неопорная переменная) каждой оси, позволяющей улучшить план.

1. Прямой метод. Рассмотрим задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0, \quad (1)$$

где c, x — n -векторы, b — m -вектор, A — $m \times n$ -матрица, $\text{rank } A = m$. Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — опорный план задачи (1),

$$A_{\text{оп}} = \{a_1, \dots, a_m\}. \quad (2)$$

Составим таблицу прямого метода. По правилам прямого метода (см. § 1 гл. I) найдем ведущие столбец a_{j_0} и строку a_{i_0} . Координаты нового плана x^1 вычисляются по формулам (см. § 1 гл. I)

$$\begin{aligned} x_i^1 &= x_i + \Theta^0 x_{i j_0} \text{sign } \Delta_{j_0}, \quad i = \overline{1, m}; \\ x_{j_0}^1 &= x_{j_0} - \Theta^0 \text{sign } \Delta_{j_0}; \\ x_j^1 &= x_j, \quad j \neq j_0, \quad j = \overline{m+1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где Θ^0 — максимально допустимый шаг.

Заменим числа $x_j, j = \overline{1, n}$, в $x_{\text{оп}}$ -столбце и x -строке числами $x_j^1, j = \overline{1, n}$, из (3). Среди столбцов $a_j, j \neq j_0$, выберем ведущий a_{j_1} , составим Θ^1 -столбец по элементам $x_{\text{оп}}^1, a_{j_1}$ -столбцов. Если $\Theta^{10} = 0$ (минимальный шаг равен нулю), то ищем ведущий столбец a_{j_2} среди $a_j, j \neq j_0, j_1$. Если $\Theta^{10} \neq 0$, то вычисляем $x_j^2, j = \overline{1, n}$, по формулам (3). Далее, ведущий столбец a_{j_2} находим среди $a_j, j \neq j_1$ (теперь столбец a_{j_0} можно учитывать) и т. д. Продолжая этот процесс, мы или будем увеличивать значение целевой

функции (без изменения опоры), или остановимся, так как $\Theta^{k0} = 0$. Остановить процесс можно и тогда, когда приращения целевой функции станут незначительными. В этом случае по последним ведущим столбцу и строке меняем опору и повторяем процесс. Таким образом, модификация прямого метода состоит из *большой итерации прямого опорного метода и малых итераций* с постоянной опорой. Если на каждой большой итерации задать верхний предел для числа малых итераций, то получим конечный алгоритм решения невырожденных задач.

2. Двойственный метод. Пусть $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный опорный коплан задачи (1). Составим таблицу двойственного метода. По элементам b - и $\delta_{\text{оп}}$ -столбцов находим ведущую строку a_{i_0} (см. § 1 гл. II), затем заполняем σ -строку (по элементам ведущей и δ -строки) и находим ведущий столбец a_{j_0} . В результате строим компоненты δ_j^1 нового опорного коплана δ^1 (см. § 1 гл. II). С помощью δ и элементов $x_i, i \neq i_0$, из b -столбца находим новую ведущую строку a_{i_1} , по ее элементам и по новым δ_j^1 выделяем новый ведущий столбец. Это позволяет вычислить δ_j^2 еще одного коплана δ^2 . По элементам $x_i, i \neq i_1, \delta_i^2, i = \overline{1, m}$, находим ведущую строку a_{i_2} и т. д. Переход от коплана δ^k к коплану δ^{k+1} без изменения опоры назовем *малой итерацией*. Если при переходе $\delta^k \rightarrow \delta^{k+1}$ меняется и опора, то итерация называется *большой*. Использование малых итераций целесообразно также и в случае, когда выполнены условия критерия субоптимальности (см. § 1 гл. II), ибо это может сэкономить количество вычислений, связанных с преобразованиями опоры.

Г л а в а IV

БЕЗОПОРНЫЕ МЕТОДЫ

В основу методов, рассматриваемых в данной книге, положено построение *подходящих* направлений, т. е. таких допустимых направлений, вдоль которых целевая функция прямой задачи возрастает, а двойственной — убывает. В гл. I—III построение подходящих направлений велось с помощью опор. В гл. IV вводятся вспомога-

тельные (*производные*) задачи, по решению которых строятся подходящие направления.

Изложение начинается с *метода одновременного решения прямой и двойственной задач* [1] — классического прототипа последующих методов.

§ 1. Метод одновременного решения прямой и двойственной задач

Следует обратить внимание на то, что в методе рассматриваются исходная прямая задача и задача, двойственная к некоторой задаче, не являющейся исходной.

1. Критерий оптимальности. Сущность метода. Рассмотрим задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0, \quad (1)$$

где c' , x — n -векторы, b — m -вектор, $b \geq 0$, A — $m \times n$ -матрица, $\text{rank } A = m$. Двойственной к (1) является задача

$$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c, \quad (2)$$

где y — m -вектор.

Пусть x — план задачи (1), y — план задачи (2) (двойственный план задачи (1)). Если ввести коплан

$$\delta = A'y - c, \quad (3)$$

то можно получить формулу

$$\delta'x = b'y - c'x. \quad (4)$$

Действительно, из (1) — (3) имеем

$$\delta'x = y'Ax - c'x = b'y - c'x.$$

Формула (4) остается, очевидно, верной и в случае, когда y — произвольный m -вектор, а x — псевдоплан, т. е. $Ax = b$ (но не обязательно $x \geq 0$).

На формуле (4) основан следующий

Критерий оптимальности. Для того чтобы n -вектор x и m -вектор y были оптимальным планом и оптимальным двойственным планом задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы 1) x был планом, т. е. $Ax = b$, $x \geq 0$; 2) y — двойственным планом $A'y \geq c$; 3) выполнялось равенство

$$\delta'x = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Необходимость. Если x и y — оптимальные план и двойственный план, то условия 1),

2) очевидны. Условие 3) в силу формулы (4) — следствие теоремы двойственности (см. введение).

Достаточность следует из достаточного условия оптимальности теории двойственности (см. введение).

Проанализируем с точки зрения доказанного критерия оптимальности сущность симплекс-метода и двойственного симплекс-метода.

Поскольку итерации симплекс-метода осуществляются на планах задачи (1), то условие 1) всегда выполняется. Далее, из-за того что указанные планы специальные (базисные), то $x = \{x_б, x_н\}$ и $x_н = 0$. Если с каждым базисным планом связать m -вектор $y' = c_б A_б^{-1}$, то вектор оценки Δ для него можно разбить на компоненты $\Delta = \{\Delta_б, \Delta_н\}$, причем $\Delta_б = 0$. Следовательно, на итерациях симплекс-метода особо следят за выполнением условия 1), при этом автоматически выполняется и условие 3) на базисном плане x . Условие 2) на промежуточных итерациях не выполняется. Как только это условие будет выполнено, т. е. $\Delta \geq 0$, процесс решения заканчивается.

В двойственном симплекс-методе на каждой итерации следят за тем, чтобы выполнялось условие 2). Поскольку итерации двойственного симплекс-метода осуществляются на специальных двойственных планах y , то на них и на векторе $x = \{x_б, x_н\}$, $x_б = A_б^{-1}b$, $x_н = 0$, автоматически выполняется и условие 3). (Действительно, на базисном двойственном плане y коплан $\delta = \{\delta_б, \delta_н\}$, $\delta_б = 0$, поэтому равенство (5) очевидно.) Условие 1) на промежуточных итерациях не выполняется. Процесс решения (если задача (1) имеет решение) заканчивается, как только выполнится условие 1), т. е. $x_б \geq 0$.

Таким образом, из трех условий два уже положены в основу специальных методов. При этом итерации строятся так, чтобы эти условия выполнялись в первую очередь. В методе одновременного решения прямой и двойственной задач в основу построения итераций кладется условие 3) (дополнительно используется и условие 2)).

2. Итерация. Пусть y — некоторый двойственный (не обязательно базисный) план с копланом δ . Нулевые координаты $\delta_j = 0$ вектора δ объединим в вектор δ_0 , положительные $\delta_j > 0$ — в вектор δ_+ . Таким образом, $\delta = \{\delta_0 \delta_+\}$. В соответствии с этим разбиением выделим компоненты x_0 и x_+ у произвольного n -вектора $x = \{x_0, x_+\}$. Аналогично

будем выделять компоненты и у других объектов, участвующих в операциях с δ, x .

Рассмотрим псевдоплан x , у которого $x_+ = 0$. Поскольку формула (4) верна для любого псевдоплана, то $\delta'x = \delta'_0x_0 + \delta'_+x_+ = 0$, ибо $\delta_0 = 0, x_+ = 0$.

Следовательно, для произвольного двойственного плана и произвольного псевдоплана x с $x_+ = 0$ выполняются условия 2), 3). Если для данного y среди псевдопланов x с $x_+ = 0$ найдется такой, что

$$x_0 \geq 0, \quad (6)$$

то, согласно критерию оптимальности из п. 1, вектор $x = \{x_0, 0\}$ будет оптимальным планом задачи (1) (вектор y — оптимальный двойственный план).

Нетрудно понять, что псевдоплан $x = \{x_0, x_+\}$ с $x_+ = 0$ удовлетворяет условию (6) тогда и только тогда, когда существует вектор x_0 , удовлетворяющий соотношениям $A_0x_0 = b, x_0 \geq 0$. Задача о совместности этих соотношений является, как известно (см. введение), основной задачей первой фазы двухфазного метода. Она эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$-e's_u \rightarrow \max, A_0s + s_u = b, s \geq 0, s_u \geq 0, \quad (7)$$

где e, s_u — m -векторы. Поскольку в задаче (7) матрица A_0 является подматрицей матрицы A , то задачу (7) называют *ограниченной прямой задачей* (соответствующей двойственному плану y).

Решим задачу (7) симплекс-методом с начальным базисным планом $\{s, s_u\} = \{0, b\}$. Задача (7) всегда имеет решение $\{s^0, s_u^0\}$. Если $s_u^0 = 0$, то вектор $x = \{s^0, 0\}$ является, очевидно, оптимальным планом задачи (1).

При $s_u^0 \neq 0$ ($e's_u^0 > 0$) двойственный план y следует заменить на другой двойственный план \bar{y} . Если прямая задача (1) имеет план, то, согласно симплекс-методу, всегда найдется y , для которого $s_u^0 = 0$. Поскольку $b'y^0 = \min b'y$, то оптимальный двойственный план y^0 будем искать итеративно, строя двойственные планы y^1, y^2, \dots так, чтобы $b'y > b'y^1 > b'y^2 > \dots$. Для построения вектора y^1 используем результаты решения ограниченной прямой задачи (7). Как известно (см. введение), из последней ее симплексной таблицы можно извлечь вектор v^0 , являющийся решением задачи, двойственной к ограниченной прямой:

$$b'v \rightarrow \min, A'_0v \geq 0, v \geq -e. \quad (8)$$

Так как по теореме двойственности

$$b'v^0 = -e's_u^0 < 0, \quad (9)$$

то из (8), (9) следует:

1) вектор v^0 является допустимым направлением из точки y во множестве двойственных планов задачи, ибо в силу $\delta_+ > 0$ найдется число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$A'(y + \varepsilon v^0) = \begin{cases} A'_0 y + \varepsilon A'_0 v^0 \geq A'_0 y \geq c_0, \\ A'_+ y + \varepsilon A'_+ v^0 = \delta_+ + c_+ + \varepsilon A'_+ v^0 \geq c_+ \end{cases} \quad (10)$$

при всех ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;

2) вдоль направления v^0 целевая функция двойственной задачи (2) убывает, ибо $db' y/dv^0 = b'v^0 < 0$.

Если

$$A'_+ v^0 \geq 0, \quad (11)$$

то $b'(y + \varepsilon v^0) \rightarrow -\infty$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$ и прямая задача (1) не имеет планов. Значит, неравенство (11) является достаточным условием отсутствия планов прямой задачи.

Пусть неравенство (11) не выполняется. Тогда движение вдоль направления v^0 с увеличением ε выйдет на границу множества двойственных планов. Максимально допустимый шаг σ^0 найдем из (10).

Обозначим: \bar{A}_{06} — матрица, составленная из базисных векторов последней симплексной таблицы ограниченной задачи (1); \bar{c} — вектор стоимости ограниченной задачи ($\bar{c} = \{0, -e\}$); \bar{c}_{06} — вектор из координат вектора \bar{c} , имеющих базисные индексы ограниченной задачи; I_+ — множество индексов вектора δ_+ .

По построению вектор v^0 — решение задачи (8). Следовательно, его можно найти по z -строке последней симплексной таблицы ограниченной задачи (7) и он равен (см. введение) $v^{0'} = \bar{c}'_{06} \bar{A}_{06}^{-1}$. Таким образом, неравенство из (10), которое с увеличением ε может нарушиться, имеет вид $\delta'_+ + \varepsilon \bar{c}'_{06} \bar{A}_{06}^{-1} A'_+ \geq 0$ или в координатной форме

$$\delta_j + \varepsilon z_j \geq 0, \quad j \in I_+. \quad (12)$$

Здесь z_j , $j \in I_+$, — компоненты вектора $\bar{c}'_{06} \bar{A}_{06}^{-1} A'_+$. Из (12) получаем максимально допустимый шаг σ^0 при движении вдоль вектора v^0 в пространстве двойственных планов:

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0}, \quad \sigma_{j_0} = \min_{z_j < 0} \sigma_j, \quad \sigma_j = -\frac{\delta_j}{z_j}, \quad j \in I_+. \quad (13)$$

Новый двойственный план $\bar{y} = y + \sigma^0 v^0$. Вектор $\bar{\delta}$ на плане \bar{y} имеет вид

$$\bar{\delta}' = \bar{y}'A - c' = y'A + \sigma^0 v^0 A - c' = \delta' + \sigma^0 \bar{c}'_{00} \bar{A}_{00}^{-1} A$$

или в координатной форме

$$\bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma^0 z_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где $z_j, j = \overline{1, n}$, — компоненты вектора $\bar{c}'_{00} \bar{A}_{00}^{-1} A$.

Таким образом, вместо начального двойственного плана y построен новый двойственный план \bar{y} . На этом операции одной итерации метода одновременного решения прямой и двойственной задач заканчиваются.

Теорема. Каждая невырожденная прямая задача (1) методом одновременного решения прямой и двойственной задач решается за конечное число итераций.

Доказательство. Если прямая задача (1) невырождена, то невырожденной является, очевидно, и ограниченная прямая задача (7). Следовательно, для каждого двойственного плана y ограниченная прямая задача решается симплекс-методом за конечное число итераций. При переходе от двойственного плана y к двойственному плану \bar{y} возможны три случая: 1) $s_u^0 = 0$; 2) $s^0 \neq 0, A_+ v \geq 0$; 3) $s_u^0 \neq 0, A_+ v \not\geq 0$. В первом случае n -вектор $x = \{s^0, 0\}$ является оптимальным планом задачи (1). В случае 2) задача (1) не имеет планов. В третьем случае целевая функция двойственной задачи (2) уменьшается на величину

$$\sigma^0 e' s_u^0 > 0. \quad (15)$$

В первых двух случаях на двойственном плане y процесс решения заканчивается, в третьем — продолжается. Но продолжаться бесконечное число итераций он не может, ибо, во-первых, неравенство (15) гарантирует, что в ограниченной прямой задаче (7) базис из последней таблицы не может повториться, во-вторых, каждый базис ограниченной прямой задачи составляется из вектор-столбцов матриц A, E , а число различных комбинаций из m линейно-независимых столбцов этих матриц конечно. Теорема доказана.

Чтобы продолжить процесс решения, у вектора $\bar{\delta}$ выделим нулевую $\bar{\delta}_0$ и положительную $\bar{\delta}_+$ компоненты. Пусть \bar{I}_0 — множество индексов компоненты $\bar{\delta}_0$, \bar{I}_{00} —

множество индексов компоненты δ_0 , принадлежащих базисным векторам последней таблицы задачи (7) для двойственного плана y . Покажем, что $I_{06} \subset \bar{I}_0$.

Действительно, если $\delta_j = 0$, $j \in I_{06}$, то

$$\bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma^0 z_j = \sigma^0 \sum_{i \in I_{06}} \bar{c}_i x_{ij} = \sigma^0 \bar{c}_j = 0,$$

так как $\bar{c}_j = 0$.

Значит, базис, полученный в результате решения ограниченной задачи (7) для двойственного плана y , можно использовать в качестве начального базиса при решении ограниченной задачи, соответствующей двойственному плану \bar{y} .

Далее, множество \bar{I}_0 содержит по крайней мере один новый элемент по сравнению с множеством I_0 индексов вектора δ_0 . Действительно, согласно определению σ^0 из (13), оценка $\bar{\delta}_{j_0} = 0$, хотя $\delta_{j_0} > 0$. Поэтому в матрице \bar{A}_0 ограниченной задачи

$$-e's_u \rightarrow \max, \bar{A}_0 \bar{s} + s_u = b, \bar{s} \geq 0, s_u \geq 0. \quad (16)$$

соответствующей двойственному плану \bar{y} , появится хотя бы один столбец a_{j_0} , которого не было у матрицы A_0 . Если в качестве начального базиса при решении задачи (16) взять последний базис, полученный при решении задачи (1), то конечное значение целевой функции задачи (7) совпадает с начальным значением целевой функции задачи (16). Однако в силу невырожденности задачи (16) и в силу того что ее начальный план заведомо неоптимален (в Δ -строке ограниченной задачи находится элемент $\bar{\Delta}_{j_0} = z_{j_0} < 0$), оптимальное значение целевой функции задачи (16) будет строго меньше, чем ее начальное значение, а значит, и строго меньше, чем оптимальное значение целевой функции задачи (7). Это свойство метода одновременного решения прямой и двойственной задач дает основание назвать метод *методом последовательного сокращения невязок*. Действительно, из (7) имеем

$$e's_u^0 = \min_{\substack{s \geq 0, \\ b - A_0 s \geq 0}} e's_u = \min e'(b - A_0 s) = \min_{\substack{x_0 \geq 0, x_+ = 0, \\ b - A x \geq 0}} e'(b - A x).$$

Следовательно, величина $e's_u^0$ характеризует меру несовместности (невязку) ограничений задачи (1) на векторе $x = \{x_0, x_+\}$, $x_+ = 0$. Согласно доказанному, в ходе ите-

раций метода одновременного решения прямой и двойственной задач получаются n -векторы x , \bar{x} и т. д., на которых невязка убывает.

Приведем табличную реализацию метода. Для начального двойственного плана y вычислим вектор δ . По искусственному базису $a_{n+1}=e_1, \dots, a_{n+m}=e_m$ составим начальную табл. IV.1. Подчеркнем элементы z_j с индек-

Таблица IV.1

δ			δ_1	\dots	δ_n		σ^0
$\bar{c}_{оп}$	b, a_j опора	b	a_1	\dots	a_n	Θ	
\bar{c}_{i_1}	a_{i_1}	x_{i_1}	$x_{i_1 1}$	\dots	$x_{i_1 n}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		
\bar{c}_{i_m}	a_{i_m}	x_{i_m}	$x_{i_m 1}$		$x_{i_m n}$		
z			z_1	\dots	z_n		
σ							
$\bar{\delta}$							

сами j нулевых оценок δ_j . Если таковых нет, то переходим к проверке достаточного условия отсутствия планов.

Симплекс-методом будем преобразовывать табл. IV.1. При выборе ведущего столбца (по элементам строки, совпадающей с Δ -строкой) будем принимать во внимание только помеченные столбцы. Через конечное число итераций (для невырожденной задачи) все элементы z_j из помеченных столбцов станут неотрицательными, и получится табл. IV.1, где $\bar{c}_t=0$, если $1 \leq t \leq n$; $\bar{c}_t=-1$, если $t > n$. Если элементы b -столбца удовлетворяют условиям

$$x_t \geq 0 \text{ при } 1 \leq t \leq n; x_t = 0, t > n, \quad (17)$$

то процесс решения заканчивается. Вектор с координатами $x_t^0 = x_t$, $t = i_1, \dots, i_m$; $x_i^0 = 0$, $i \neq i_1, \dots, i_m$, является оптимальным планом задачи.

Если условия (17) не выполняются и

$$z_j \geq 0 \text{ для всех немеченных столбцов } a_j, \quad (18)$$

то задача (1) не имеет планов.

Если условия (17), (18) не выполняются, то заполняем σ -строку числами

$$\sigma_j = - \frac{\delta_j}{z_j} \quad (19)$$

для всех немеченных столбцов с $z_j < 0$. Среди элементов σ -строки находим минимальный σ_{j_0} . Это позволяет подсчитать по формуле (14) числа $\bar{\delta}_j$ для нового двойственного плана \bar{y} (при этом число $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$ удобно записывать справа от z -строки). По элементам $\bar{\delta}$ -строки заново подчеркиваем элементы z_j и приступаем к решению новой ограниченной задачи (на промежуточных итерациях строки δ , σ , $\bar{\delta}$ не используются).

3. Пример. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 15, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 4. \end{aligned}$$

Составим двойственную задачу

$$\begin{aligned} 10y_1 + 15y_2 &\rightarrow \min, \\ 2y_1 + y_2 &\geq 3, \\ y_1 + 2y_2 &\geq 2, \\ 3y_1 - y_2 &\geq 2, \\ -y_1 + 2y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что вектор $y = \{1, 1\}$ является двойственным планом с $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 0$, $\delta_4 = 1$. Составим табл. IV.2, а. Столбцы a_1 и a_3 подчеркнуты, ибо $\delta_1 = \delta_3 = 0$. Из них ведущим является a_1 -столбец с минимальным элементом $z_1 = -3$ из z -строки (которая в случае ограниченной задачи совпадает с Δ -строкой). Строка a_5 ведущая.

Таблица IV.2

а

δ			0	1	0	1	
$\overline{c_{оп}}$	$\begin{array}{c} b, a_j \\ \text{опора} \end{array}$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	Θ
-1	a_5	10	<u>2</u>	1	3	-1	5
-1	a_6	15	1	2	-1	2	15
z			<u>-3</u>	-3	<u>-2</u>	-1	
Δ			0	1	0	1	

б

0	a_1	5	1	1/2	3/2	-1/2	
-1	a_6	10	0	3/2	-5/2	<u>5/2</u>	4
z			<u>0</u>	-3/2	<u>5/2</u>	<u>-5/2</u>	2/5
σ				2/3		2/5	
$\overline{\delta}$			0	2/5	1	0	

в

0	a_1	7	1	4/5	1	0	
0	a_4	4	0	3/5	-1	1	
z			0	0	0	0	

Результат первой итерации представлен в табл. IV.2, б. Подчеркнутые элементы z_j здесь неотрицательны. Значит, ограниченная прямая задача для начального двойственного плана решена. Критерий оптимальности не выполнен: вторая искусственная переменная $10 \neq 0$. Достаточное условие отсутствия планов (18) прямой задачи также не выполняется ($z_2 = -3/2 \geq 0$). По элементам δ -строки и неподчеркнутым отрицательным элементам z -строки из табл. IV.2, а составляем отношения (19) и заполняем σ -строку. Получив минимальный элемент $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, по формуле (14) вычислим новые $\bar{\delta}_j$ и заполняем δ -строку. Элементы z -строки, соответствующие элементам $\bar{\delta}_j = 0$, подчеркиваем двойной чертой. Далее табл. IV.2, б преобразуем таким образом, как и табл. IV.2, а. Получим табл. IV.2, в, которая удовлетворяет критерию оптимальности. Оптимальный план $x^0 = \{7, 0, 0, 4\}$.

4. Построение начального двойственного плана. Ниже будем рассматривать обобщение метода одновременного решения прямой и двойственной задач на случай, когда начальный двойственный план y неизвестен.

Наряду с прямой задачей (1) рассмотрим *расширенную задачу*

$$c'x \rightarrow \max, \quad e'x \leq b_0, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (20)$$

в которой b_0 — положительное число.

Если задача (1) имеет решение x^0 , то найдется такое $M < \infty$, что при $b_0 \geq M$ задача (20) также имеет решение x^0 . Доказательство очевидно. Нетрудно доказать и обратное утверждение: если задача (20) имеет решение x^0 при всех $b_0 \geq M$, то x^0 — решение задачи (1).

Таким образом, задачи (1) и (20) эквивалентны. Введя свободную переменную x_0 , запишем расширенную задачу (20) в канонической форме

$$c'x \rightarrow \max, \quad e'x + x_0 = b_0, \quad Ax = b, \quad x \geq 0.$$

Задача, двойственная к ней, имеет вид

$$b_0 y_0 + b'y \rightarrow \min, \quad e y_0 + A'y \geq c, \quad y_0 \geq 0, \quad (21)$$

где y_0 — скаляр.

Замена задачи (1) задачей (20) объясняется тем, что для задачи (20) легко построить двойственный план. Пусть

$$y_0 = \max \{0, c_1, \dots, c_n\} \geq 0.$$

Тогда $(m+1)$ -вектор $\{y_0, 0\}$ является двойственным планом задачи (20). Действительно,

$$ey_0 + A'y = ey_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \max c_i \\ \vdots \\ \max c_i \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c.$$

На построенном двойственном плане имеем $\delta_{i_0} = 0$, если $y_0 = c_{i_0}$.

Используем для расширенной задачи (20) метод одновременного решения прямой и двойственной задач, считая b_0 достаточно большим положительным числом и вводя $(m+1)$ -вектор $a_0 = \{1, 0, \dots, 0\}$ в базис. Возможны три случая:

- 1) задача (20) имеет решение $\{x_0, x^0\}$, причем $z_0 = y_0^0 = 0$;
- 2) задача (20) имеет решение $\{x_0, x^0\}$, причем $z_0 = y_0^0 \neq 0$;
- 3) задача (20) не имеет решения.

В случае 1) вектор x^0 — оптимальный план задачи (1), в случаях 2), 3) задача (1) не имеет решения. Первое утверждение очевидно. В случае 2) $z_0 = y_0^0 \neq 0$, и поэтому на оптимальном двойственном плане $\{y_0^0, y^0\}$ задачи (20) целевая функция $b_0 y_0^0 + b' y^0$ неограниченно возрастает при $b_0 \rightarrow \infty$. В силу теоремы двойственности

$$c'x^0 = b_0 y_0^0 + b'y^0 \rightarrow \infty \text{ при } b_0 \rightarrow \infty.$$

Третье утверждение следует из эквивалентности задач (1) и (20).

5. Задача с двухсторонними ограничениями. В качестве упражнения оставим читателю разработку метода одновременного решения прямой и двойственной задач для случая двухсторонних ограничений (см. § 3 гл. I).

§ 2. Двойственный метод

Непосредственным аналогом *безопорного метода* из § 1 является метод данного параграфа.

Рассмотрим задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

при условиях § 3 гл. I.

Предположим, что наряду с параметрами c, A, b, d

к началу решения известен план $\{y, w\}$ двойственной к (1) задачи:

$$b'y + d'w \rightarrow \min, A'y + w \geq c, w \geq 0,$$

где y — m -вектор, w — n -вектор. По начальному двойственному плану $\{y, w\}$ построим начальный коплан $\delta = A'y - c$ и будем считать, что компонента w удовлетворяет соотношениям $w_i = 0$ при $\delta_i \geq 0$; $w_i = -\delta_i$ при $\delta_i < 0$.

Для начального коплана δ и выбранного числа $\varepsilon_0 \geq 0$ построим два множества индексов:

$$I_* = \{i: |\delta_i| \leq \varepsilon_0\}; I_0 = \{i: |\delta_i| > \varepsilon_0\},$$

в соответствии с которыми выделим компоненты векторов и матриц. Например, $x_0 = \{x_i, i \in I_0\}$, $A_0 = \{a_i, i \in I_0\}$.

Введем задачу

$$\begin{aligned} & -e'x_u \rightarrow \max, \\ & A_*x_* + x_u = b - A_0x_0, 0 \leq x_* \leq d_*, x_u \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $e = \{e_i, e_i = 1, i = \overline{1, m}\}$, x_u — m -вектор, вектор x_0 имеет компоненты

$$x_i = 0, \text{ если } \delta_i > \varepsilon_0; x_i = d_i, \text{ если } \delta_i < -\varepsilon_0, i \in I_0. \quad (3)$$

Теорема. Если для коплана δ существует решение $\{x_*, x_u\}$ задачи (2) с $x_u = 0$, то вектор $x = \{x_*, x_0\}$ является ε -оптимальным планом задачи (1), где

$$\varepsilon = \sum_{\delta_i > 0, i \in I_*} \delta_i x_i^* - \sum_{\delta_i < 0, i \in I_*} \delta_i (d_i - x_i^*). \quad (4)$$

Доказательство следует из соотношений

$$\begin{aligned} c'x &= y'Ax - S'x = b'y + d'w - \\ & \sum_{\delta_i > 0, i \in I_*} \delta_i x_i^* + \sum_{\delta_i < 0, i \in I_*} \delta_i (d_i - x_i^*) \geq c'x^0 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема допускает обращение в следующем смысле. Если x^ε — ε -оптимальный план, то существуют и оптимальные планы $x^0, \{y^0, w^0\}$ прямой и двойственной задач. Задача (2), построенная для коплана δ^0 с $\varepsilon_0 = 0$, имеет решение, в котором $x_u = 0$.

Если задача (2) имеет решение $\{x_*, 0\}$, но число ε , подсчитанное по формуле (4), велико, то уменьшаем число ε_0 и вновь решаем задачу (2).

Пусть в решении $\{x^*, x_u\}$ задачи (2) вектор $x_u \neq 0$. В этом случае начальный двойственный план $\{y, w\}$, а следовательно, и начальный коплан δ заменяются на новые $\{\bar{y}, \bar{w}\}$, $\bar{\delta}$. Итерация состоит из следующих операций.

Обозначим через $\{y^*, w^*\}$ решение задачи

$$(b - A_0 x_0)' y + d' w \rightarrow \min, A' y + w \geq 0, y \geq -e, w \geq 0,$$

которая является двойственной к задаче (2). Построим вектор w_0^* с компонентами

$$w_i^* = -a_i' y^*, \text{ если } \delta_i < -\varepsilon_0; w_i^* = 0, \text{ если } \delta_i > \varepsilon_0, i \in I_0.$$

Вектор $\{y^*, w^*\}$, где $w^* = \{w^*, w_0^*\}$, ε_0 мало, является подходящим направлением для двойственного плана $\{y, w\}$, т. е. он составляет допустимое направление во множестве двойственных планов. Производная двойственной целевой функции по этому направлению отрицательна. Поэтому новый двойственный план будем искать в виде

$$\bar{y} = y(\sigma^0) = y + \sigma^0 y^*, \bar{w} = w(\sigma^0) = w + \sigma^0 w^*,$$

где σ^0 — максимально допустимый шаг.

При увеличении шага σ могут нарушиться только два соотношения, характеризующие двойственные планы:

$$A_0' y + w_0 + \sigma (A_0' y^* + w_0^*) \geq 0, w_0 + \sigma w_0^* \geq 0.$$

Отсюда находим число σ^0 :

$$\sigma^0 = \min \{\sigma^1, \sigma^2\}; \sigma^1 = \min \left(-\frac{\delta_i}{a_i' y^*} \right), \delta_i > \varepsilon_0, a_i' y^* < 0, i \in I_0;$$

$$\sigma^2 = \min (-\delta_i / a_i' y^*), \delta_i < -\varepsilon_0, a_i' y^* > 0, i \in I_0.$$

Если число σ^0 подсчитать невозможно (необходимое множество элементов пусто), то задача (1) не имеет планов. Числа $\delta_i^* = a_i' y^*$, $i \in I_0$, участвующие в вычислении σ^0 , получаются автоматически при решении задачи (2) симплекс-методом. Поэтому все операции рассматриваемого метода удобно реализуются на симплексных таблицах, куда дополнительно вносится информация о текущих копланах.

За одну итерацию $\delta \rightarrow \bar{\delta}$ значение целевой функции двойственной задачи уменьшается на величину $\sigma^0 e' x_u$.

Вектор стоимости задачи (2) выбран единичным, хотя из приведенного обоснования видно, что достаточно взять любой отрицательный вектор. В связи с этим возникает

проблема использования начальной информации о двойственных планах.

Задача (2) для специальных задач линейного программирования может принимать весьма простую структуру, позволяющую использовать специальные методы ее решения.

Из описания метода достаточно четко видна его *декомпозиционная* сущность: каждый коплан δ выступает как *координирующий вектор* для построения специальных *подзадач* (2), решения которых, в свою очередь, используются для изменения координирующего вектора δ .

В заключение покажем, что методы § 1, 2 представляют реализацию принципа допустимых направлений.

Для двойственного плана $\{y, w\}$ *допустимым направлением* относительно ограничений задачи (1) называется каждый $(m+n)$ -вектор $\{s, t\}$, для которого существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, вектор $\{y + \varepsilon s, w + \varepsilon t\}$ остается двойственным планом. Пусть $I^- = \{i: \delta_i < 0\}$, $I^+ = \{i: \delta_i > 0\}$, $I^* = \{i: \delta_i = 0\}$, $\delta = A'y - c$, $t = \{t_i, i \in I^-\}$ и т. п. Нетрудно показать, что множество допустимых направлений описывается соотношениями

$$A's + |t^-| \geq 0, A^*s + t^* \geq 0, t^+ \geq 0, t^* \geq 0.$$

Допустимое направление называется *подходящим* в задаче (1), если $b's + d't < 0$. Подходящее направление будет оптимальным, если на нем функция $b's + d't$ принимает наименьшее значение. *Регулярная задача* (т. е. задача, имеющая решение) построения оптимального направления — *производная задача*. Из множества способов *регуляризации* выберем *способ нормировки* с условием $s \geq g$, $g < 0$. Тогда производная задача имеет вид

$$b's + d't \rightarrow \min,$$

$$A's + t^- \geq 0, A^*s + t^* \geq 0, t^+ \geq 0, t^* \geq 0, s \geq g.$$

Двойственной к ней является задача

$$g'z \rightarrow \max, A^*l^* + z = b - A'd^-, 0 \leq l^* \leq d^*, z \geq 0. \quad (5)$$

Если последняя задача имеет решение $\{l^*, z^* = 0\}$, то вектор $x = \{l^*, d^-, x^+ = 0\}$ является оптимальным планом задачи (1). Нетрудно заметить, что при $g = -e$ задача (5) совпадает с ограниченной прямой задачей метода одновременного решения прямой и двойственной задач (см. § 1).

Описанная реализация принципа допустимых направлений рассчитана на получение оптимального плана задачи (1). Приведем ее модификацию для получения субоптимальных планов. По коплану $\delta = A'y - c$, соответствующему двойственному плану $\{y, w\}$, и числу $\alpha \geq 0$ составим векторы $\delta(\alpha)$, $w(\alpha)$ с компонентами

$$\delta_i(\alpha) = \delta_i, \text{ если } 0 \leq \delta_i \leq \alpha; \delta_i(\alpha) = 0, \text{ если } \delta_i \in [0, \alpha];$$

$$w_i(\alpha) = -\delta_i, \text{ если } -\alpha \leq \delta_i \leq 0; w_i(\alpha) = 0, \text{ если } \delta_i \in [-\alpha, 0].$$

Вектор $\{s(\alpha), t(\alpha)\}$ назовем α -допустимым направлением для двойственного плана $\{y, w\}$, если существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, выполняются соотношения

$$A'(y + \varepsilon s) + w + \varepsilon t \geq c + \delta(\alpha), w + \varepsilon t \geq w(\alpha).$$

Пусть $I^-(\alpha) = \{i: \delta_i < -\alpha\}$, $I^+(\alpha) = \{i: \delta_i > \alpha\}$, $I^*(\alpha) = \{i: -\alpha \leq \delta_i \leq \alpha\}$, $t^- = \{t_i: i \in I^-(\alpha)\}$, $t^+ = \{t_i: i \in I^+(\alpha)\}$ и т. п. Множество α -допустимых направлений описывается соотношениями

$$A^{-\alpha'}s + t^- \geq 0, A^{*\alpha'}s + t^{*+} \geq 0, t^+ \geq 0, t^{*+} \geq 0.$$

Каждое α -допустимое направление $\{s, t\}$ будем называть α -подходящим, если $b's + d't < 0$. При нормировке $s \geq g$, $g < 0$, производная и двойственная к ней задачи для построения α -оптимального направления имеют вид

$$b's + d't \rightarrow \min, A^{-\alpha'}s + t^- \geq 0, A^{*\alpha'}s + t^{*+} \geq 0, t^+ \geq 0, t^{*+} \geq 0, s \geq g;$$

$$g'z \rightarrow \max, A^{*\alpha}l^{*\alpha} + z = b - A^{-\alpha}d^{-\alpha}, 0 \leq l^{*\alpha} \leq d^{*\alpha}, z \geq 0. \quad (6)$$

Если $\{l^{*\alpha}, z = 0\}$ — решение последней задачи, то вектор $x = \{l^{*\alpha}, d^{-\alpha}, x^{+\alpha} = 0\}$ является ε -оптимальным планом

$$\text{задачи (1) с } \varepsilon = \sum_{\delta_i > 0} \delta_i x_i - \sum_{\delta_i < 0} \delta_i (d_i - x_i).$$

Нетрудно заметить, что задача (6) при $g = -e$ совпадает с ограниченной задачей (2), построенной непосредственно по исходным данным. Этот факт вскрывает связь безопорного метода данного параграфа с принципом α -допустимых направлений.

В *безопорных методах*, суть которых состоит в сведении исходной задачи (1) к ряду производных, ограничения на нормировку мягче, чем в опорных методах. В опорных методах вводится такая нормировка неопорных пере-

менных допустимого направления, что получающаяся при этом производная задача легко решается с помощью опоры исходной задачи.

Подчеркнем еще раз, что безопорные методы эффективно применяются для решения многих специальных задач, для которых производные задачи в силу их простой структуры допускают применение специфических методов.

§ 3. Прямой метод

Построим теперь безопорный метод, основанный на преобразовании планов прямой задачи. Рассмотрим общую задачу линейного программирования

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d. \quad (1)$$

Предположим, что перед началом решения задачи (1) кроме параметров c, A, b, d известен некоторый план x . Требуется организовать процедуру преобразований вектора x так, чтобы получить оптимальный или субоптимальный план задачи (1).

Выберем некоторое число $\varepsilon_0 \geq 0$. Множество индексов $I = \{i: i = \overline{1, n}\}$ начального плана x разобьем на три подмножества:

$$I_1 = \{i: 0 \leq x_i \leq \varepsilon_0\}, I_2 = \{i: \varepsilon_0 < x_i < d_i - \varepsilon_0\}, \\ I_3 = \{i: d_i - \varepsilon_0 \leq x_i \leq d_i\}.$$

В соответствии с этими множествами будем выделять компоненты векторов и матриц. Например, $x_{(1)} = \{x_i, i \in I_1\}$, $A_1 = \{a_i, i \in I_1\}$.

Введем задачу

$$e'y_{(\cdot)} \rightarrow \min, A'_1 y + y_{(1)} \geq c_{(1)}, A'_2 y + y_{(2)}^+ - y_{(2)}^- = c_{(2)}, \\ A'_3 y - y_{(3)} \leq c_{(3)}, y_{(\cdot)} \geq 0, \quad (2)$$

где $y_{(\cdot)} = \{y_{(1)}, y_{(2)}^+, y_{(2)}^-, y_{(3)}\}$, $e = \{1, 1, \dots, 1\}$, $y = \{y_i, i = \overline{1, m}\}$.

Обозначим через $\{y, y_{(\cdot)}\}$ решение задачи (2). Для каждого решения вида $\{y, 0\}$ построим вектор (коплан) $\delta = A'y - c$.

Теорема. Если для плана x задача (2) имеет решение с $y_{(\cdot)} = 0$, то x является ε -оптимальным планом, причем

$$\varepsilon = \delta'_{(1)} x_{(1)} - \delta'_{(3)} (d_{(3)} - x_{(3)}).$$

Доказательство следует из соотношений

$$c'x = y'Ax - \delta'x = b'y - \delta'_{(1)}x_{(1)} - \delta'_{(3)}x_{(3)} = \\ = b'y + d'w - \delta'_{(1)}x_{(1)} + \delta'_{(3)}(d_{(3)} - x_{(3)}) \geq c'x^0 - \varepsilon,$$

где $\{y, w\}$ — двойственный план задачи (1) со свойством:

$$w_i = 0, \text{ если } \delta_i \geq 0; w_i = -\delta_i, \text{ если } \delta_i < 0. \quad (4)$$

Теорема допускает обращение в следующем смысле. Если x^ε является ε -оптимальным планом, то существует и оптимальный план x^0 . Для плана x^0 с $\varepsilon_0 = 0$ задача (2) имеет решение вида $\{y^0, 0\}$.

Предположим, что для начального плана x и числа ε_0 задача (2) имеет решение $\{y, 0\}$, но число ε , подсчитанное согласно (3), велико. В этом случае уменьшаем число ε_0 и вновь решаем задачу (2).

Рассмотрим теперь случай, когда для начального плана x и числа ε_0 задача (2) имеет решение $\{y, y_{(1)}\}$, где $y_{(2)} \neq 0$. Начальный план x заменяем на новый \bar{x} , который «лучше» старого: $c'\bar{x} > c'x$. Процедура замены (итерация) состоит в следующем.

Обозначим через $x^* = \{x_{(1)}^*, x_{(2)}^*, x_{(3)}^*\}$ решение задачи

$$c'x \rightarrow \max, Ax = 0,$$

$$0 \leq x_{(1)} \leq e, \quad -e \leq x_{(2)} \leq e, \quad -e \leq x_{(3)} \leq 0, \quad (5)$$

которая является двойственной к задаче (2). Во многих методах задача (5) не требует специального решения, так как вектор x^* получается при решении задачи (2).

Вектор x^* (ε_0 мало) составляет подходящее направление в точке x множества планов задачи (1). Действительно, при достаточно малых $\Theta > 0$ вектор $x(\Theta) = x + \Theta x^*$ является планом задачи (1) и $\partial c'x(\Theta)/\partial x^* = c'x^* = e'y_{(1)} > 0$.

Поэтому полагаем $\bar{x} = x + \Theta^0 x^*$, где Θ^0 — максимально допустимый шаг, найденный из условия $0 \leq x(\Theta) \leq d$. Легко подсчитать, что

$$\Theta^0 = \min \{\Theta^1, \Theta^2\}; \quad \Theta^1 = \min (-x_i/x_i^*), \quad x_i^* < 0;$$

$$\Theta^2 = \min (d_i - x_i)/x_i^*, \quad x_i^* > 0.$$

При замене плана x на план \bar{x} значение целевой функции задачи (1) возрастает на величину $\Theta^0 e'y_{(1)}$.

Изложенный метод допускает простую реализацию на таблицах. Задача (2), лежащая в основе метода, решается с помощью двойственного симплекс-метода (см. § 1 гл. V). Одновременно строится и вектор x^* . Числа Θ^1 ,

Θ^2 подсчитываются на симплексных таблицах, куда занесены данные о текущем плане x .

Вектор стоимости задачи (2) выбран единичным, хотя, очевидно, обоснование метода не изменится при замене вектора на другой положительный вектор.

Экстремальная сущность приведенного метода раскрывается при его трактовке как одной из реализаций принципа допустимых направлений [6]. Этот принцип явно использовался в [5] при изложении симплекс-метода, в гл. I—III при построении прямых методов и будет использован в гл. V, VI при построении комбинированных методов и исследовании вырожденных задач. Он является стержнем всех методов, изложенных в пособии [5] и данной книге. Принцип допустимых направлений представляет собой естественное обобщение на задачи оптимизации с ограничениями принципа наискорейшего спуска (подъема). Согласно этому принципу, поиск оптимальных планов состоит из следующих этапов: 1) нахождение начального плана x ; 2) построение подходящего направления l в точке x ; 3) замена старого плана x новым $\bar{x} = x + \Theta l$, $\Theta \geq 0$; 4) переход к 2), если l существует, в противном случае поиск окончен.

Определение допустимого направления дано в § 1 гл. I. Повторим его для задачи (1). *Допустимым направлением* для плана относительно ограничений задачи (1) называется n -вектор l , для которого существует такое число $\epsilon_0 > 0$, что при всех ϵ , $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, вектор $x + \epsilon l$ остается планом задачи (1). Введем обозначения: $I^{\pi} = \{i: x_i = 0\}$, $I^{\pi} = \{i: x_i = d_i\}$, $I^{\pi} = \{i: 0 < x_i < d_i\}$, $l^{\pi} = \{l_i, i \in I^{\pi}\}$ и т. п. Легко показать (см. § 1 гл. 1), что множество допустимых направлений описывается соотношениями

$$Al = 0, l^{\pi} \geq 0, l^{\pi} \leq 0. \quad (6)$$

Допустимое направление в задаче (1) называется *подходящим*, если $c'l > 0$. Во многих реализациях принципа допустимых направлений среди подходящих направлений выбирается *оптимальное* l^0 , на котором функция $c'l$ принимает наибольшее значение. Поскольку для неоптимального плана x задача поиска оптимального направления не имеет решения, то ее предварительно *регуляризуют*.

Регулярную задачу построения оптимального направления назовем производной задачей. Существуют различные способы регуляризации, например способ нормировки,

когда к (6) добавляется дополнительное нормировочное условие; введение регуляризаторов, когда к функции $c'l$ добавляется дополнительное слагаемое (например $l'l$). В данной книге используется первый способ регуляризации. Каждая регуляризующая нормировка порождает конкретную производную задачу и, следовательно, конкретный метод решения задачи (1). Как правило, регуляризуемость той или иной нормировки легко проверяется по задаче, двойственной к производной. Если к условиям (6) добавить ограничения $l^H \leq f^H$, $l^B \geq -f^B$, $-f^H \leq l^H \leq f^H_+$, то получим следующую производную задачу:

$$c'l \rightarrow \max, \quad Al=0, \quad 0 \leq l^H \leq f^H, \quad -f^H_- \leq l^H \leq f^H_+, \quad -f^B \leq l^B \leq 0, \quad (7)$$

двойственная к которой имеет вид

$$\begin{aligned} f'z \rightarrow \min, \quad A^H s + z_H \geq c^H, \quad A^B s - z_B \leq c^B, \\ A^H s + z^+_H - z^-_H = c^H, \quad z \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$z = \{z_H, z^+_H, z^-_H, z_B\}, \quad f = \{f^H, f^H_+, f^H_-, f^B\}.$$

Из последней задачи очевидно, что при $f > 0$ задача (7) регулярна. Выбор вектора f можно согласовать с планом x . Например, $f_i = \min\{x_i, d_i - x_i\}$, $i \in I^n$.

Если план x оптимален, то подходящих направлений не существует. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что двойственная производная задача (8) имеет решение $\{s, z=0\}$.

Описанная реализация принципа допустимых направлений рассчитана на получение оптимального плана задачи (1). Приведем ее модификацию, предназначенную для поиска субоптимальных планов. По плану x и числу $\alpha \geq 0$ построим векторы $x^1(\alpha)$, $x^2(\alpha)$ с компонентами $x^1_i(\alpha) = 0$, если $x_i > \alpha$; $x^1_i(\alpha) = x_i$, если $0 \leq x_i \leq \alpha$; $x^2_i(\alpha) = d_i$, если $d_i - x_i > \alpha$; $x^2_i(\alpha) = x_i$, если $d_i - x_i \leq \alpha$.

Вектор $l(\alpha)$ назовем α -допустимым направлением для плана x относительно ограничений задачи (1), если он является допустимым направлением относительно ограничений $Ax=b$, $x^1(\alpha) \leq x \leq x^2(\alpha)$. Пусть $I^H(\alpha) = \{i: 0 \leq x_i \leq \alpha\}$; $I^B(\alpha) = \{i: d_i - \alpha \leq x_i \leq d_i\}$; $I^n = \{i: \alpha < x_i < d_i - \alpha\}$; $I^H(\alpha) = \{l_i, i \in I^H(\alpha)\}$. Множество α -допустимых направлений задается соотношениями

$$Al=0, \quad l^H(\alpha) \geq 0, \quad l^B(\alpha) \leq 0.$$

Аналогично, α -допустимое направление $l(\alpha)$ называется α -подходящим в задаче (1), если $c'l(\alpha) > 0$. При нормировке $l^H(\alpha) \leq f^H(\alpha)$, $l^B(\alpha) \geq -f^B(\alpha)$, $-f_{+}^{\Pi(\sigma)} \leq l^{\Pi(\sigma)} \leq f_{+}^{\Pi(\sigma)}$ производная и двойственная к ней задачи для α -оптимального направления имеют вид

$$\begin{aligned} c'l &\rightarrow \max, \quad Al = 0, \quad 0 \leq l^H(\alpha) \leq f^H(\alpha), \\ -f_{+}^{\Pi(\sigma)} &\leq l^{\Pi(\sigma)} \leq f_{+}^{\Pi(\sigma)}, \quad -f^B(\alpha) \leq l^B(\alpha) \leq 0; \\ f'z &\rightarrow \min, \quad A^{H(\alpha)}s + z_{H(\sigma)} \geq c^{H(\sigma)}, \quad A^{B(\alpha)}s - z_{B(\sigma)} \leq c^{B(\sigma)}, \\ A^{\Pi(\sigma)}s + z_{\Pi(\sigma)}^{+} - z_{\Pi(\sigma)}^{-} &= c^{\Pi(\sigma)}, \quad z \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$z = \{z_{\Pi(\sigma)}, z_{\Pi(\sigma)}^{+}, z_{\Pi(\sigma)}^{-}, z_{B(\sigma)}\}, \quad f = \{f^H(\alpha), f_{+}^{\Pi(\sigma)}, f_{-}^{\Pi(\sigma)}, f^B\}.$$

Если получено решение $\{s, z(\alpha) = 0\}$ задачи (9), то план x является ε -оптимальным, где $\varepsilon = \sum_{\delta_i > 0} \delta_i x_i - \sum_{\delta_i < 0} \delta_i (d_i - x_i)$,

$$\delta = A's - c.$$

Нетрудно проверить, что описанный в данном параграфе безопорный метод представляет собой реализацию принципа α -допустимых направлений, в которой непосредственно по условиям задачи составляется двойственная производная задача (9) с $f=e$.

Производная задача является задачей линейного программирования и поэтому решается в этом параграфе с помощью опорных методов, изложенных в предыдущих главах. Поскольку опора плана x не используется, то методы называются безопорными. В опорных методах (см. гл. I—III) вводится такая нормировка, при которой решение производной задачи легко получается с помощью опоры $A_{\text{оп}}$.

Суть безопорного метода в переходе от исходной задачи (1) к ряду производных без указания конкретного способа решения последних, ценность которого полностью выявляется при исследовании специальных задач линейного программирования (они будут рассмотрены в последующих частях книги). Большая свобода при формировании и решении производных задач делает безопорные методы весьма перспективными, позволяющими полностью учесть как опыт и интуицию специалистов, так и структуру исследуемых задач.

КОМБИНИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ

Комбинированными (прямо-двойственными) методами называются методы одновременного преобразования планов прямой и двойственной задач с целью получения оптимальных или субоптимальных планов прямой задачи. В предыдущих главах были рассмотрены методы преобразования для случаев, когда имеющаяся информация касалась планов или только прямой задачи, или только двойственной. Ниже обосновываются методы, использующие одновременно как прямые планы задачи, так и двойственные. Аналогом одного из предложенных методов (§ 3)* является метод двухсторонних оценок [2]. Отдельно рассматриваются методы, где наряду с планами используются опоры задачи и методы, для реализации которых знание опор не обязательно.

§ 1. Метод двухсторонних оценок

Этот метод предполагает, что к началу процесса решения задачи линейного программирования известен некоторый базисный план прямой задачи и некоторый (не обязательно базисный) план двойственной задачи.

1. Критерий оптимальности. Пусть требуется решить задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0. \quad (1)$$

Предположим, что известны базисный план x задачи (1) и некоторый план y двойственной задачи

$$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c, \quad (2)$$

где y — m -вектор.

Обозначим $\delta = A'y - c$.

В § 1 гл. IV показано, что для плана x и двойственного плана y справедлива формула

$$b'y - c'x = \delta'x.$$

Определен критерий оптимальности, частным случаем которого является следующий

* Для случая ($\varepsilon_0 = 0, d = \infty$) он был исследован А. Я. Каменецким.

Критерий оптимальности. Для оптимальности планов x и y задач (1) и (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\delta'x=0$. Этот критерий положен в основу *метода двухсторонних оценок*, а также его модификации, которая будет изложена в § 3.

2. Итерация. Пусть x — базисный план задачи (1), y — двойственный план с копланом δ , причем

$$\delta'x > \varepsilon, \quad (3)$$

где ε — заданное допустимое отклонение разности $c'x^0 - c'x$. Найдем пару \bar{x}, \bar{y} , составленную из планов задач (1), (2), на которой $\bar{\delta}'\bar{x} < \delta'x$ ($\bar{\delta} = A'\bar{y} - c$). Вектор δ разобьем на компоненты: $\delta = \{\delta_0, \delta_+\}$, $\delta_0 = 0$, $\delta_+ > 0$. Пусть I_0 — множество индексов координат вектора δ_0 . Матрицу, столбцами которой являются базисные векторы a_i плана x , обозначим через $A_\delta = \{a_i, i \in I_\delta\}$, I_δ — множество базисных индексов базисного плана x .

Положим

$$I_{\delta_0} = \{i : i \in I_\delta \cup I_0\}, \quad A_{\delta_0} = \{a_i, i \in I_{\delta_0}\}.$$

Рассмотрим *ограниченную задачу*

$$\delta'_{\delta_0}s \rightarrow \min, \quad A_{\delta_0}s = b, \quad s \geq 0, \quad (4)$$

где $s = \{s_i, i \in I_{\delta_0}\}$, $\delta_{\delta_0} = \{\delta_i, i \in I_{\delta_0}\}$.

Если x — базисный план задачи (1), то вектор s с координатами $s_i = x_i$, $i \in I_{\delta_0}$, является базисным планом задачи (4) с теми же, что и у x , базисными векторами. Значит, задачу (4) можно решить симплекс-методом, и пусть s^0 — оптимальный план.

Если $\delta'_{\delta_0}s^0 = 0$, то y — оптимальный двойственный план, а n -вектор \bar{x} с координатами $\bar{x}_i = s_i^0$, $i \in I_{\delta_0}$, $\bar{x}_i = 0$, $i \notin I_{\delta_0}$, $i = \overline{1, n}$, является оптимальным планом прямой задачи.

Пусть

$$\delta'_{\delta_0}s^0 \neq 0. \quad (5)$$

Тогда процесс решения задачи (1) продолжается.

Введем задачу, двойственную к ограниченной (4):

$$b'v \rightarrow \min, \quad A'_{\delta_0}v \geq -\delta_{\delta_0}, \quad (6)$$

где v — m -вектор. Пусть v^0 — оптимальный план задачи (6). Каждый план v задачи (6) является допустимым направлением из точки y во множестве двойственных пла-

нов задачи (2), ибо, с одной стороны, если $j \in I_0$, то $\delta_j = 0$,

$$a'_j(y + \varepsilon v) - c_j = \delta_j + \varepsilon a'_j v \geq 0 \text{ при всех } \varepsilon \geq 0, \quad (7)$$

и, с другой, если $j \in I_0$, то

$$a'_j(y + \varepsilon v) - c_j = \delta_j + \varepsilon a'_j v \geq \delta_j - \varepsilon \delta_j \geq 0 \text{ при } 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Аналогично, если $j \in \bar{I}_0$, то $\delta_j > 0$ и для достаточно малых $\varepsilon \geq 0$

$$a'_j(y + \varepsilon v) - c_j = \delta_j + \varepsilon a'_j v \geq 0.$$

Значит, и v^0 — допустимое направление. Кроме того, согласно теореме двойственности (см. введение), имеем

$$b'v^0 = -\delta_{00} s^0 < 0,$$

т. е. производная функция $b'y$ вдоль направления v^0 отрицательна:

$$\frac{\partial b'y}{\partial v^0} = b'v^0 < 0. \quad (8)$$

Сделаем вдоль направления v^0 максимально допустимый шаг σ^0 . Число σ^0 равно максимальному ε , удовлетворяющему неравенствам

$$a'_j(y + \varepsilon v^0) - c_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Из (7) видно, что при $j \in I_0$ неравенства (9) не нарушаются для любых $\varepsilon \geq 0$. Могут нарушиться при $\varepsilon \rightarrow \infty$ лишь неравенства с номерами $j \in \bar{I}_0$. Уже неоднократно показывалось (см. § 1 гл. IV), что $a'_j v^0 = z_j$, где z_j — элементы z -строки симплексной таблицы. Следовательно, интересующие нас неравенства из (9) можно записать в виде

$$\delta_j + \varepsilon z_j \geq 0, \quad j \in \bar{I}_0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0}, \quad \sigma_{j_0} = \min_{z_j < 0} \sigma_j, \quad \sigma_j = -\frac{\delta_j}{z_j}, \quad j \in \bar{I}_0, \quad j = \overline{1, n},$$

причем $\sigma^0 > 0$, ибо в противном случае $\delta_j \equiv 0, j = \overline{1, n}$, вопреки (5).

Из (9) получаем числа $\bar{\delta}_j$ для нового двойственного плана $\bar{y} = y + \sigma^0 v^0$:

$$\bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma^0 z_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Таким образом, вместо исходных векторов x, y построены новые планы \bar{x}, \bar{y} задач (1), (2). Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\bar{\delta}'\bar{x} &= \delta'\bar{x} + \sigma^0 z'\bar{x} = \delta'_{60}s^0 + \sigma^0 v^{0'} A\bar{x} = \\ &= \delta'_{60}s + \sigma^0 v^{0'} b \leq \delta'x + \sigma^0 b'v^0 < \delta'x.\end{aligned}$$

Следовательно, векторы \bar{x}, \bar{y} удовлетворяют неравенству $\bar{\delta}'\bar{x} < \delta'x$ ($\bar{\delta} = A'\bar{y} - c$).

Конечность метода двухсторонних оценок следует из (8) и обосновывается теми же рассуждениями, которые были использованы в § 1 гл. IV для доказательства конечности метода одновременного решения прямой и двойственной задач.

З а м е ч а н и я. 1. Свое название метод получил в силу следующего обстоятельства. Если x, y — планы задач (1), (2), то для оптимального значения целевой функции прямой задачи, согласно теории двойственности, выполняются неравенства (*двухсторонние оценки*)

$$c'x \leq c'x^0 \leq b'y. \quad (11)$$

В процессе итераций по методу двухсторонних оценок верхняя ($b'y$) и нижняя ($c'x$) оценки сближаются.

2. В ходе решения ограниченной задачи (4) базис может меняться, но подчеркнутыми остаются элементы Δ_j прежних столбцов. Смена черточек происходит лишь при замене двойственного плана y на новый \bar{y} , т. е. при замене одной ограниченной задачи на другую.

Опишем табличную реализацию метода. Пусть a_1, \dots, a_m — базис начального базисного плана, $\delta_1, \dots, \delta_n$ — компоненты начального коплана. По этим данным и параметрам задачи (1) составим табл. V. 1, где $z_0 = \sum_{i=1}^m \delta_i x_i$. В

Δ -строке подчеркнем элементы Δ_j с базисными индексами j и такие Δ_j , что $\delta_j = 0$. Совокупность столбцов с подчеркнутыми элементами Δ_j составляет подтаблицу ограниченной задачи (4). Возможны такие случаи: 1) все Δ_j неотрицательны; 2) среди Δ_j есть отрицательные.

Случай 1) означает, что ограниченная задача решена. Если $z_0 = 0$, то процесс решения задачи (1) окончен. Из b -столбца выписываем базисные переменные оптимального плана x^0 . При $z_0 \neq 0$ элементы b -столбца являются базисными переменными нового плана \bar{x} прямой задачи. В z -строке подчеркиваем элементы $z_j < 0$ с такими индексами, что $\delta_j \neq 0$. По подчеркнутым элементам и элементам δ -строки вычисляем отношения

$\begin{array}{c} -\delta \\ \hline -\delta_{оп} \end{array}$			$-\delta_1$	\dots	$-\delta_n$	
$\begin{array}{c} b, a_j \\ \hline опора \end{array}$	b	a_1	\dots	a_n	Θ	
$-\delta_1$	a_1	x_1	x_{11}	\dots	x_{1n}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
$-\delta_m$	a_m	x_m	x_{m1}	\dots	x_{mn}	
z		z_0	z_1	\dots	z_n	σ_0
Δ						
σ						
$\bar{\delta}$			$\bar{\delta}_1$	\dots	$\bar{\delta}_n$	

$\sigma_j = -\delta_j/z_j$ и числа σ_j помещаем в σ -строку. Среди элементов σ -строки находим минимальный $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$. Записав число σ^0 справа от z -строки, по формуле (10) подсчитываем новые оценки $\bar{\delta}_j$, которые заносим в $\bar{\delta}$ -строку. На этом одна *большая итерация* (переход от x, y к \bar{x}, \bar{y}) завершается.

В случае 2) ограниченная задача еще не решена. Решаем ее симплекс-методом. Через конечное число итераций (*малых итераций*), при которых двойственный план y не изменяется, приходим к случаю 1).

3. Пример. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 &\rightarrow \max, \\
 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 10, \\
 x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 &= 25, \\
 x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, 5}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что вектор $x = \{0, 0, 0, 10, 25\}$ является базисным планом задачи, а вектор $y = \{1, 2\}$ — двойственным планом с $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 2, \delta_4 = 1, \delta_5 = 2$. По этим данным составим табл. V.2. В ней подчеркиваются элементы $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_5$. Среди подчеркнутых элементов Δ_j единственный отрицательный $\Delta_2 = -7$. Столбец a_2 ведущий. Заполняем Θ -столбец. Строка a_5 ведущая. Осуществляем малую итерацию и получаем табл. V.3, в которой все подчеркнутые элементы из Δ -строки неотрицательны. Значит, ограниченная задача для начального двойственного плана y решена. Новый базисный план \bar{x} выписываем из b -столбца: $\bar{x} = \{0, 25/3, 0, 5/3, 0\}$. Он не является оптимальным, так как $z_0 = \delta'x = 5/3 \neq 0$. Его отклонение от оптимального по целевой функции не превосходит $z_0 = 5/3$, т. е. он является $5/3$ -оптимальным планом задачи.

Таблица V.2

$\begin{array}{c} -\delta \\ -\delta_{\text{оп}} \end{array}$			-1	0	-2	-1	-2	
$\begin{array}{c} b, a_i \\ \text{опора} \end{array}$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	Θ	
-1	a_4	10	2	1	5	1	0	10
-2	a_5	25	1	3	2	0	1	25/3
z		60	-4	-7	-9	-1	-2	
Δ			-3	-7	-7	$\underline{0}$	$\underline{0}$	

Продолжим процесс решения задачи. Поскольку $z_0 \neq 0$, то в z -строке подчеркиваем отрицательные элементы z_j , для которых $\delta_j \neq 0$. Заполняем σ -строку. Минимальный элемент $\sigma_3 = 6/13$. По формуле (10) подсчитываем новые оценки $\bar{\delta}_j$, которые помещаем в $\bar{\delta}_j$ -строку. Большая итерация закончена, получены оценки $\bar{\delta}_j$ нового двойственного плана \bar{y} . Первые вычисления следующей итерации можно было бы осуществить на табл. V. 3, однако для пары \bar{x}, \bar{y} лучше составить табл. V. 4.

Таблица V.3

$\begin{array}{c} -\delta \\ -\delta_{\text{оп}} \end{array}$			-1	0	-2	-1	-2	
	$\begin{array}{c} b, a_j \\ \text{опора} \end{array}$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	Θ
-1	a_4	5/3	5/3	0	13/3	1	-1/3	
0	a_2	25/3	1/3	1	2/3	0	1/3	
z		5/3	-5/3	0	-13/3	-1	1/3	6/13
Δ			-2/3	<u>0</u>	-7/3	<u>0</u>	7/3	
σ			3/5		6/13			
$\bar{\delta}$			3/13	0	0	7/13	28/13	

Таблица V.4

$\begin{array}{c} -\delta \\ -\delta_{\text{оп}} \end{array}$			-3/13	0	0	-7/13	-28/13	
	$\begin{array}{c} b, a_j \\ \text{опора} \end{array}$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	Θ
-7/13	a_4	5/3	5/3	0	<u>13/3</u>	1	-1/3	5/13
0	a_2	25/3	1/3	1	2/3	0	1/3	25/2
z		35/39	-35/39	0	-7/3	-7/13	7/39	
Δ			-26/39	<u>0</u>	-7/3	<u>0</u>	91/39	

Из нее видно, что $z_0 = 35/39$, т. е. план \bar{x} является 35/39-оптимальным. В Δ -строке среди подчеркнутых один отрицательный элемент $\Delta_3 = -7/3$. Малая итерация при-

водит к табл. V. 5, в которой все подчеркнутые элементы Δ -строки неотрицательны. Значит, ограниченная задача для двойственного плана \bar{y} решена. Поскольку $z_0 = 0$, то этот двойственный план оптимален. Оптимальный план x^0 прямой задачи выписываем из b -столбца табл. V. 5: $x^0 = \{0, 315/39, 5/13, 0, 0\}$.

Таблица V.5

$\begin{array}{c} -\delta \\ -\delta_{\text{оп}} \end{array}$			$-3/13$	0	0	$-7/13$	$-28/13$
$\begin{array}{c} b, a_j \\ \text{опора} \end{array}$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
0	a_3	5/13	5/13	0	1	3/13	$-1/13$
0	a_2	315/39	1/13	1	0	$-2/13$	15/39
z		0	0	0	0	0	0
Δ			3/13	<u>0</u>	<u>0</u>	7/13	28/13

§ 2. Комбинированный опорный метод

Рассмотрим общую задачу линейного программирования

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d. \quad (1)$$

Предположим, что к началу решения задачи (1) известны опорные план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ и коплан $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ с общей опорой

$$A_{\text{оп}} = \{a_i, i \in I_{\text{оп}}\}. \quad (2)$$

При заданном числе $\varepsilon > 0$ требуется построить процедуру улучшения плана x и коплана δ , ведущую к ε -оптимальному плану задачи (1).

Коплану $\delta = A'y - c$ соответствует план $\{y, w\}$ двойственной задачи

$$b'y + d'w \rightarrow \min, A'y + w \geq c, w \geq 0, \quad (3)$$

причем

$$w_i = 0, \text{ если } \delta_i \geq 0; w_i = -\delta_i, \text{ если } \delta_i < 0. \quad (4)$$

Нетрудно подсчитать, что значения целевых функций задач (1), (3) связаны соотношением

$$b'y + d'w - c'x = \delta'x + d'w = \sum_{\delta_i > 0} \delta_i x_i - \sum_{\delta_i < 0} \delta_i (d_i - x_i). \quad (5)$$

Поэтому для начальных плана x и коплана δ прежде всего подсчитаем число $\alpha = \delta'x + d'w$. Поскольку из (5) следует неравенство $c'x^0 - c'x \leq \alpha$, то процесс решения задачи (1) останавливается, если $\alpha \leq \varepsilon$.

Рассмотрим случай, когда начальная информация x , δ еще не достаточно хороша: $\alpha > \varepsilon$. Введем вектор u потенциалов u_i , $i = \overline{1, m}$; $A'_{\text{оп}} u = c_{\text{оп}}$, где $c_{\text{оп}} = \{c_i, i \in I_{\text{оп}}\}$.

Подсчитаем оценки Δ_j неопорных векторов a_j , $j \in I_{\text{н}}$, $I_{\text{н}} = \{1, \dots, n\} \setminus I_{\text{оп}}$: $\Delta_{\text{н}} = A'_{\text{н}} u - c_{\text{н}}$.

С помощью этих оценок и начального плана x подсчитаем число

$$\varepsilon_1 = \sum_{\Delta_j > 0, j \in I_{\text{н}}} \Delta_j x_j - \sum_{\Delta_j < 0, j \in I_{\text{н}}} \Delta_j (d_j - x_j). \quad (6)$$

В гл. I показано, что план x является ε_1 -оптимальным. Если $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$, то процесс решения задачи (1) прекращается. Если $\varepsilon_1 < \alpha$, то коплан Δ лучше коплана δ .

Предположим, что приближение к оптимальному плану с точностью ε_1 (по целевой функции) нас не устраивает: $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Тогда продолжим анализ начальной информации. По коплану δ строим псевдоплан $\kappa = \{\kappa_i, i = \overline{1, n}\}$:

$$\kappa_i = 0, \text{ если } \delta_i \geq 0; \kappa_i = d_i, \text{ если } \delta_i < 0, i \in I_{\text{н}};$$

$$\kappa_i = [A_{\text{оп}}^{-1} (b - \sum_{j \in I_{\text{н}}} a_j \kappa_j)]_i, i \in I_{\text{оп}}.$$

Если опорные компоненты псевдоплана удовлетворяют соотношениям $0 \leq \kappa_i \leq d_i$, $i \in I_{\text{оп}}$, то подсчитываем число

$$\varepsilon_2 = \sum_{\delta_i > 0, i \in I_{\text{оп}}} \delta_i \kappa_i - \sum_{\delta_i < 0, i \in I_{\text{оп}}} \delta_i (d_i - \kappa_i). \quad (7)$$

Если $\varepsilon_2 \leq \varepsilon$, то построенный псевдоплан является искомым субоптимальным планом. При $\varepsilon < \varepsilon_2 < \alpha$ план κ лучше начального плана x .

Таким образом, после предварительного анализа плана x и коплана δ получили еще план κ и коплан Δ . Среди них можно выбрать лучшую пару. Пусть это будет пара x, δ .

Среди чисел Δ_j , которым в правой части (6) соответствуют положительные слагаемые, найдем число Δ_{j_0} , максимальное по модулю. Среди чисел $\kappa_i, \kappa_i - d_i$ по правилам двойственного опорного метода найдем число v_{i_0} , максимальное по модулю.

Построим новую опору, заменив в старой опоре (2) вектор a_{i_0} на a_{j_0} при условии $x_{i_0 j_0} \neq 0$.

Найдем числа Θ^0 по правилам прямого опорного метода, σ^0 — по правилам двойственного опорного метода. Заменим векторы x, δ на новые $\bar{x}, \bar{\delta}$:

$$\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \Theta^0 \text{sign} \Delta_{j_0}, \quad \bar{x}_j = x_j, \quad j \neq j_0, \quad j \in I_n;$$

$$\bar{x}_i = x_i + \Theta^0 [A_{\text{оп}}^{-1} a_{j_0}]_i \text{sign} \Delta_{j_0}, \quad i \in I_{\text{оп}};$$

$$\bar{\delta}_{i_0} = \delta_{i_0} - \sigma^0 \text{sign} v_{i_0}, \quad \bar{\delta}_i = \delta_i, \quad i \neq i_0, \quad i \in I_{\text{оп}};$$

$$\bar{\delta}_j = \delta_j - \sigma^0 [A_{\text{оп}}^{-1} a_j]_{i_0} \text{sign} v_{i_0}, \quad j \in I_n.$$

Из результатов гл. I, II следует $\bar{\delta}'\bar{x} = \delta'x - \theta^0 |\Delta_{j_0}| - \sigma^0 |v_{i_0}| \leq \alpha$, т. е. новая пара не хуже старой и лучше ее, если или план x , или коплан δ были невырожденными*.

Операции приведенного метода легко реализуются на симплексных таблицах (см. гл. I, II).

§ 3. Опорно-безопорный метод

Теперь предположим, что перед началом решения задачи (1) из § 2 кроме параметров c, A, b, d известен опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ и коплан δ (неопорный).

Из формулы (5) § 2 и неравенств

$$\begin{aligned} c'x &\leq c'x^0 \leq b'y + d'w, \\ c'x^0 - c'x &\leq b'y + d'w - c'x = \delta'x + d'w \end{aligned}$$

видно, что при фиксированном коплане δ оценка для оптимального плана x^0 тем точнее, чем меньше число $\delta'x$.

Поэтому при $\delta'x + d'w > \varepsilon$ естественно рассмотреть задачу

$$-\delta'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

* Вырожденные задачи будут рассмотрены в гл. VI.

которую можно решить прямым опорным методом исходя из известного начального опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$. Поскольку $\delta = A'y - c$, $-\delta'x = c'x - y'Ax = c'x - b'y$, то задача (1) эквивалентна исходной задаче (1) § 2. Введение задачи (1) может быть оправдано тем, что появляется новое правило останова на k -й итерации x^k , если $\delta'x^k + d'w \leq \varepsilon$. Однако в данном параграфе значение формы (1) задачи (1) § 2 состоит в другом.

Задача, двойственная к (1), имеет вид

$$b'y^* + d'w^* \rightarrow \min, \quad A'y^* + w^* \geq -\delta, \quad w^* \geq 0.$$

Нетрудно проверить, что вектор $\{y^*, w^* - w\}$ задает подходящее направление в точке $\{y, w\}$ множества двойственных планов. Это позволяет упростить задачу (1) и построить процедуру улучшения начальных опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ и коплана δ .

Выберем число $0 \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon$ и выделим множество индексов I_0 таких, что

$$\alpha_1 = \sum_{\delta_i > 0, i \in I_0} \delta_i x_i - \sum_{\delta_i < 0, i \in I_0} \delta_i (d_i - x_i) \leq \varepsilon_0.$$

Обозначим $I_* = \{i : i \notin I_0, i = \overline{1, n}\}$. В соответствии с этими множествами будем выделять компоненты векторов и матриц. Например, $x_* = \{x_i, i \in I_*\}$, $A_* = \{a_i, i \in I_*\}$.

Пусть для исходных плана x и коплана δ выполняется неравенство $\alpha = \delta'x + d'w > \varepsilon$. Рассмотрим задачу

$$-\delta_*'x_*^* \rightarrow \max, \quad A_*x_*^* = b - A_0x_0, \quad 0 \leq x_*^* \leq d_*. \quad (2)$$

Будем считать, что опорный план $\{x, A_{\text{оп}}\}$ и коплан δ согласованы, т. е. опора плана x содержится среди столбцов матрицы A_* . Для решения задачи (2) используем прямой опорный метод. Вычисления начинаем с известного опорного плана x . Если на k -й итерации окажется, что

$$\delta_*'(x_*)^k + d_*'w_* \leq \varepsilon - \alpha_1, \quad (3)$$

то $\bar{x} = \{x_0, (x_*)^k\}$ — искомый ε -оптимальный план задачи (1) § 2.

Предположим, что неравенство (3) не выполняется и на оптимальном плане задачи (2). Тогда переходим к улучшению коплана δ .

Обозначим через $\{y^*, w_*^*\}$ решение задачи

$$(b - A_0 x_0)' y^* + d_*' w_*^* \rightarrow \min, \quad A_*' y^* + w_*^* \geq -\delta_*, \quad w_*^* \geq 0,$$

которая двойственна к задаче (2). Положим $w_i^* = -(a_i' y^* + \delta_i)$; если $a_i' y^* + \delta_i < 0$; $w_i^* = 0$, если $a_i' y^* + \delta_i \geq 0$, $i \in I_0$; $w^* = \{w_0^*, w_*^*\}$. Новый коплан $\bar{\delta}$ построим по двойственному плану $\{y, \bar{w}\}$, который будем искать в виде

$$\bar{y} = y + \sigma^0 y^*, \quad \bar{w} = w + \sigma^0 (w^* - w).$$

Из приведенных ниже соотношений следует, что вектор $\{y^*, w^* - w\}$ задает допустимое направление в точке $\{y, w\}$ множества двойственных планов:

$$\begin{aligned} A_*' \bar{y} + \bar{w}_* - c_* &\geq (1 - \sigma) (\delta_* + w_*) \geq 0 \text{ при } 0 \leq \sigma \leq 1; \\ a_i' \bar{y} + \bar{w}_i - c_i &= (1 - \sigma) (\delta_i + w_i) \geq 0 \text{ при } a_i' y^* + \delta_i < 0, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad i \in I_0; \\ a_i' \bar{y} + \bar{w}_i - c_i &\geq (1 - \sigma) (\delta_i + w_i) \geq 0 \text{ при } a_i' y^* + \delta_i \geq 0, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad i \in I_0; \\ \bar{w}_i &= w_i + \sigma (w_i^* - w_i) = \sigma w_i^* \geq 0 \text{ при } \sigma \geq 0, \quad \delta_i \geq 0, \quad i \in I_*; \\ \bar{w}_i &= w_i + \sigma (w_i^* - w_i) = -\delta_i + \sigma (w_i^* + \delta_i) \geq 0 \text{ при } \\ \sigma &\geq 0, \text{ если } w_i^* + \delta_i \geq 0, \text{ при } 0 \leq \sigma \leq \delta_i / w_i^* + \delta_i, \quad (4) \\ &\text{если } w_i^* + \delta_i < 0, \quad \delta_i < 0, \quad i \in I_*; \\ \bar{w}_i &= \sigma w_i^* \text{ при } \sigma \geq 0, \quad \delta_i \geq 0, \quad i \in I_0; \\ \bar{w}_i &= -\delta_i + \sigma (-a_i' y^*) \geq 0 \text{ при } a_i' y^* + \delta_i < 0, \\ &0 \leq \sigma \leq 1, \quad \delta_i < 0, \quad i \in I_0; \\ \bar{w}_i &= -\delta_i + \sigma \delta_i \geq 0 \text{ при } a_i' y^* + \delta_i \geq 0, \quad \delta_i < 0, \\ &0 \leq \sigma \leq 1, \quad i \in I_0. \end{aligned}$$

Вдоль допустимого направления $\{y^*, w^* - w\}$ производная целевой функции двойственной задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial (b' y + d' w)}{\partial \{y^*, w^* - w\}} &= b' y^* + d' w^* - d' w < -\varepsilon + \\ &+ \sum_{z_i > 0, i \in I_0} z_i x_i - \sum_{z_i < 0, i \in I_0} z_i (d_i - x_i), \end{aligned} \quad (5)$$

где $z_i = a_i' y^* + \delta_i$, $i \in I_0$.

Увеличивая число столбцов матрицы A_* (например, за счет уменьшения числа ε_0), можно всегда добиться того, что выражение (5) станет отрицательным, ибо для предельного случая (1) оно отрицательно. При этом нет необходимости возвращаться к началу решения задачи (2). Как это принято при анализе чувствительности (см. гл. VII), процесс решения задачи (2) естественно продолжается после включения нового вектора условий. Пусть $\{y^*, w^* - w\}$ — вектор, на котором производная (5) отрицательна. Вдоль этого направления из (4) находим максимально допустимый шаг $\sigma^0 = \min \{\sigma^1, \sigma^2\}$, где

$$\sigma^1 = 1, (a'_{iy^*} + \delta_i) \delta_i \leq 0, i = \overline{1, n};$$

$$\sigma^2 = \min_{\delta_i a'_{iy^*} < 0} (-\delta_i / a'_{iy^*}), (a'_{iy^*} + \delta_i) \delta_i > 0, i = \overline{1, n};$$

При замене $\delta \rightarrow \bar{\delta}$ значение целевой функции двойственной задачи уменьшается на $\sigma^0 (b'y^* + d'(w^* - w))$. Новая итерация начинается с пары $\bar{x} = \{x_0, x_*^*\}$, $\bar{\delta}$, где x_*^* — решение задачи (2).

§ 4. Безопорно-опорный метод

Исследуем случай, когда начальная информация состоит из параметров c, A, b, d плана x (неопорного) и опорного коплана $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$.

Из формулы (5) § 2 следует

$$\delta'x + d'w = b'y + d'w - c'x \geq c'x^0 - c'x,$$

где $\{y, w\}$ — двойственный план, соответствующий коплану δ .

Если $\delta'x + d'w > \varepsilon$, то естественно для уточнения оценки оптимального плана x^0 при фиксированном x рассмотреть задачу

$$x'\delta + d'w \rightarrow \min, A'y - \delta = c, \delta + w \geq 0, w \geq 0, \quad (1)$$

которую можно решить двойственным опорным методом исходя из известного начального опорного коплана δ . Как и в § 3, нетрудно показать, что задача (1) эквивалентна задаче, двойственной к исходной задаче (1) § 2. В дальнейшем задача (1) непосредственно не решается, хотя понятно, что процесс решения задачи (1) можно остановить на k -й итерации, если $x'\delta^k + d'w^k \leq \varepsilon$. При этом окажется, что x — ε -оптимальный план задачи (1) § 2.

Введем задачу, двойственную к (1):

$$c'(x^* - x) \rightarrow \max, \quad Ax^* = Ax, \quad 0 \leq x^* \leq d.$$

Легко видеть, что вектор $x^* - x$, составленный из решения x^* последней задачи, является подходящим направлением в точке x множества планов задачи (1) § 2. Это обстоятельство позволяет построить метод решения исходной задачи, в котором вместо задачи (1) рассматривается более простая и происходит одновременное преобразование начальной информации x, δ . Выкладки оставим читателям в качестве упражнения.

§ 5. Комбинированный безопорный метод

Рассмотрим случай, когда к началу процесса решения задачи (1) § 2 кроме параметров известны безопорные план x и коплан δ .

По заданным плану x , коплану δ и числу $\varepsilon_0 > 0$ введем следующие множества индексов:

$$I_1 = \{i: 0 \leq x_i \leq \varepsilon_0\}, \quad I_2 = \{i: \varepsilon_0 < x_i < d_i - \varepsilon_0\}, \\ I_3 = \{i: d_i - \varepsilon_0 \leq x_i \leq d_i\}, \quad I_* = \{i: |\delta_i| \leq \varepsilon_0\}, \quad I_0 = \{i: |\delta_i| > \varepsilon_0\}.$$

Введем задачи:

$$\left. \begin{array}{l} \text{задачу (2) § 3 гл. IV} \\ \text{задачу (2) § 2 гл. IV} \end{array} \right\}, \quad (1)$$

которые решаются двойственным симплекс-методом и симплекс-методом соответственно до следующих ситуаций:

1) $y_{(2)}^k = 0, x_u^k \neq 0$; 2) $y_{(2)}^k \neq 0, x_u^k = 0$; 3) $y_{(2)}^k = 0, x_u^k = 0$; 4) $y_{(2)}^0 \neq 0, x_u^k \neq 0$; 5) $y_{(2)}^k \neq 0, x_u^0 \neq 0$. Здесь k — индекс k -й итерации, $\{y_{(2)}^0, x_u^0\}$ — решение (оптимальные планы) задач (1). Рассмотрим отдельно каждый случай.

1) По вектору y^k находим коплан $\delta^k = A'y^k - c$. Для этого коплана и исходного плана вычисляем $\alpha = \delta^{k'}x + d'w^k$. Если $\alpha \leq \varepsilon$, то x, δ^k искомая пара. При $\alpha > \varepsilon$ можно или уменьшить ε_0 , или продолжать решение второй задачи в (1).

2) По начальному коплану δ и вектору $\bar{x} = \{x_*, x_0\}$ находим $\alpha = \delta'\bar{x} + d'w$. Если $\alpha \leq \varepsilon$, то \bar{x} — ε -оптимальный план. При $\alpha > \varepsilon$ или уменьшаем ε_0 , или продолжаем решать первую задачу в (1).

3) По вектору y^k находим коплан $\delta^k = A'y^k - c$. Для него и вектора $\bar{x} = \{x_*^k, x_0\}$ вычисляем $\alpha = \delta^{k'}x + d'w^k$. Если $\alpha \leq \varepsilon$, то \bar{x} — ε -оптимальный план. При $\alpha > \varepsilon$ уменьшаем ε_0 и продолжаем решать задачи (1).

4) По правилам прямого безопорного метода улучшаем план x . Если для улучшенного плана \bar{x} и исходного коплана δ выполняется неравенство $\alpha = \delta'\bar{x} + d'w \leq \varepsilon$, то \bar{x} — ε -оптимальный план. При $\alpha > \varepsilon$ вновь решаем задачи (1).

5) По правилам двойственного безопорного метода улучшаем коплан δ . Пару $x, \bar{\delta}$ проверяем на субоптимальность. Процесс решения задачи (1) § 2 или останавливается, или вновь решаются задачи (1).

Глава VI

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Известно, что конечность симплекс-алгоритма удастся доказать лишь для невырожденных задач [1]. В вырожденных задачах симплекс-метод приводит к бесконечному числу итераций. Это явление, получившее название «зацикливание», было предметом изучения во многих работах. Хотя из «общих соображений» ясно, что вырожденные задачи должны встречаться редко, «тем не менее опыт, основанный на решении симплекс-методом тысяч практических задач линейного программирования, показывает, что почти каждая задача на некотором этапе решения оказывается вырожденной» [1, с. 225]. И все же, несмотря на то что вырождение происходит все время, ни одного случая зацикливания в практических задачах не наблюдалось.

Чисто математический интерес к вырожденным задачам диктуется стремлением завершить теорию симплекс-метода. Эта работа уже проделана [1], и к настоящему времени имеются специальные дополнения к симплекс-алгоритму, позволяющие в каждой задаче избежать зацикливания. Практическое значение исследований по вырожденным задачам состоит в том, что специальные методы решения вырожденных задач, возможно, окажутся полезными при решении задач, близких к вырожденным.

Среди методов выхода из цикла (избежания заикливания) отметим три [1]: *метод лексикографического упорядочения, метод возмущений и метод случайного выбора*. Два первых приводят к одинаковым правилам выбора ведущей строки, третий — при выборе ведущей строки использует случайный механизм.

Ни в одном из упомянутых методов решения вырожденных задач при построении правил выхода из цикла не ставится задача в каком-нибудь смысле оптимизировать процедуру. В данной главе излагается новый подход к решению вырожденных задач. Алгоритмы выхода из цикла основываются на специальных критериях оптимальности вырожденных планов.

§ 1. Прямой метод

Излагается обобщение прямого метода из гл. I на вырожденные задачи.

1. Критерий оптимальности. Рассмотрим общую задачу линейного программирования с односторонними ограничениями (см. § 1 гл. I):

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0. \quad (1)$$

Пусть $\{x, A_{оп}\}$ — опорный план с опорой

$$A_{оп} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}. \quad (2)$$

Определение. Опорный план $\{x, A_{оп}\}$ называется *вырожденным*, если некоторые его опорные переменные x_{i_1}, \dots, x_{i_m} равны нулю.

Напомним обозначения из § 1 гл. I: $A_{оп} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}$ — матрица, столбцами которой являются векторы опоры (2); $I_{оп}$ — множество опорных индексов i_1, \dots, i_m ; $I_{н}$ — совокупность остальных индексов из $1, 2, \dots, n$; $A_{н} = \{a_i, i \in I_{н}\}$; $x_{оп} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$; $c_{оп} = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_m}\}$; $x_{н} = \{x_i, i \in I_{н}\}$; $c_{н} = \{c_i, i \in I_{н}\}$.

Для исследования вырожденных задач потребуется более тонкое разбиение векторов и матриц на компоненты. Пусть $I_{оп0}$ — множество индексов, которые имеют опорные переменные, равные нулю: $I_{оп0} = \{i: x_i = 0, i \in I_{оп}\}$. Аналогично $I_{н0} = \{i: x_i = 0, i \in I_{н}\}$. Остальные индексы из $I_{оп}$, $I_{н}$ обозначим через $I_{оп+}$, $I_{н+}$. В соответствии с этим разбиением будем выделять компоненты у других объектов, участвующих в операциях с вектором x .

З а м е ч а н и е. Всюду в книге выделяются компоненты у векторов и матриц. При этом смысл символов «оп», «н», «0», «+» зависит от способа разбиения на компоненты. Используются два способа: 1) выделяются компоненты у плана x и в соответствии с этим разбиваются на компоненты другие объекты; 2) выделяются компоненты вектора δ , по которым разбиваются компоненты других объектов (о способе разбиения сказано в начале параграфа).

Для получения критерия оптимальности вырожденного плана используем метод, который в § 1 гл. I был применен для невырожденных планов.

Вектор x является планом задачи (1) тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

которые в компонентной форме имеют вид

$$\begin{aligned} A_{оп+}x_{оп+} + A_{н+}x_{н+} &= b, \quad x_{оп0} = 0, \quad x_{оп+} > 0, \\ x_{н0} &= 0, \quad x_{н+} > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если вектор

$$x(\epsilon) = x + \epsilon l \quad (5)$$

является планом при ϵ , $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$, то вектор l называется допустимым направлением из точки x во множестве планов задачи (1). Подставив вектор (5) в (3) и использовав соотношения (4), получим множество допустимых направлений $l = \{l_{оп0}, l_{оп+}, l_{н0}, l_{н+}\}$, которое описывается соотношениями

$$A_{оп0}l_{оп0} + A_{оп+}l_{оп+} + A_{н0}l_{н0} + A_{н+}l_{н+} = 0; \quad (6)$$

$$l_{оп0} \geq 0, \quad l_{н0} \geq 0. \quad (7)$$

Матрица $A_{оп} = \{A_{оп0}, A_{оп+}\}$ по построению неособая. Поэтому равенство (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} l_{оп0} \\ l_{оп+} \end{bmatrix} &= -A_{оп}^{-1} A_{н0}l_{н0} - A_{оп}^{-1} A_{н+}l_{н+} = \\ &= - \begin{bmatrix} T_{00} \\ T_{+0} \end{bmatrix} l_{н0} - \begin{bmatrix} T_{0+} \\ T_{++} \end{bmatrix} l_{н+}, \end{aligned} \quad (8)$$

где T_{00} , T_{+0} , T_{0+} , T_{++} — компоненты матриц $A_{оп}^{-1}A_{н0}$, $A_{оп}^{-1}A_{н+}$, построенные с учетом компонент в левой части равенства (8). Найдем из (8) вектор $l_{оп0}$ и, подставив его в (7), получим

$$\begin{aligned} l_{оп0} &= -T_{00}l_{н0} - T_{0+}l_{н+}, \quad l_{оп+} = -T_{+0}l_{н0} - T_{++}l_{н+}, \\ &\quad -T_{00}l_{н0} - T_{0+}l_{н+} \geq 0, \quad l_{н0} \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя соотношения (9), производную целевой функции $c'x$ по допустимому направлению l можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c'x}{\partial l} &= c'l = c'_{оп0}l_{оп0} + c'_{оп+}l_{оп+} + c'_{н0}l_{н0} + c'_{н+}l_{н+} = \\ &= -(c'_{оп0}T_{00} + c'_{оп+}T_{0+} - c'_{н0})l_{н0} - (c'_{оп0}T_{0+} + c'_{оп+}T_{++} - \\ &\quad - c'_{н+})l_{н+} = -\Delta'_{н0}l_{н0} - \Delta'_{н+}l_{н+}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta'_{н0} &= c'_{оп0}T_{00} + c'_{оп+}T_{0+} - c'_{н0}, \\ \Delta'_{н+} &= c'_{оп0}T_{0+} + c'_{оп+}T_{++} - c'_{н+}. \end{aligned}$$

Согласно общему критерию оптимальности выпуклого программирования, производная (10) неположительна на всех допустимых направлениях. Значит, для оптимального плана x из неравенств

$$\begin{aligned} T_{00}l_{н0} + T_{0+}l_{н+} &\leq 0; \\ -l_{н0} &\leq 0 \end{aligned}$$

должно следовать неравенство

$$-\Delta'_{н0}l_{н0} - \Delta'_{н+}l_{н+} \leq 0.$$

Применив теорему Фаркаша [5], получим

Критерий оптимальности вырожденного опорного плана. Для оптимальности плана x необходимо и достаточно существование таких неотрицательных векторов λ, μ (размерности векторов λ, μ равны размерностям векторов $x_{оп0}, x_{н0}$ соответственно), что

$$\lambda'T_{00} - \mu' = -\Delta'_{н0}, \quad \lambda'T_{0+} = -\Delta'_{н+}. \quad (11)$$

Для невырожденных планов матрицы T_{00}, T_{0+} отсутствуют. Поэтому из (11) можно получить критерий оптимальности невырожденного опорного плана:

$$\Delta_{н0} \geq 0, \quad \Delta_{н+} = 0. \quad (12)$$

Соотношения (12) остаются достаточными условиями оптимальности вырожденного опорного плана, ибо при $\lambda=0, \mu=\Delta_{н0}$ выполняются равенства (11).

Из (11) легко получается необходимое условие оптимальности вырожденного опорного плана: для каждой отрицательной координаты $\Delta_{j*} < 0$ вектора Δ существует по крайней мере один положительный элемент x_{ij*} в j_* -м

столбце матрицы $\{T_{00}, T_{0+}\}$ и для каждого положительного элемента $\Delta_{j_*} > 0$, $j_* \in I_{n+}$, существует по крайней мере один отрицательный элемент в j_* -м столбце матрицы T_{0+} .

Для проверки полученных условий оптимальности составим таблицу прямого опорного метода. Элементы c_i из $c_{оп}$ -столбца, лежащие в строках с $x_i = 0$, подчеркнем снизу. Совокупность строк с подчеркнутыми элементами $c_{оп}$ -столбца образует подматрицу $\{E, T_{00}, T_{0+}\}$. Если элементы Δ -строки удовлетворяют условиям $\Delta_j \geq 0$ при $x_j = 0$; $\Delta_j = 0$ при $x_j > 0$, то план $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ из x -строки оптимален (это табличная реализация соотношений (12)).

Если над некоторым отрицательным элементом $\Delta_{j_*} < 0$ из Δ -строки все элементы x_{ij_*} из подчеркнутых строк (строк с подчеркнутыми c_i) неположительны или над некоторым положительным элементом $\Delta_{j_*} > 0$ все элементы x_{ij_*} из подчеркнутых строк неотрицательны, то план x не является оптимальным (в этом состоит *табличная реализация* приведенного выше *необходимого условия оптимальности*).

Проверка полного критерия оптимальности (11) сводится к решению некоторой задачи линейного программирования (см. п. 2).

Достаточные условия субоптимальности и неограниченности сверху целевой функции невырожденных планов (см. § 1 гл. I) сохраняются и для вырожденных планов:

$$\Delta_n \geq 0, \Delta'_n x_n \leq \varepsilon \text{ и } \Delta_{j_*} < 0, x_{ij_*} \leq 0, i = i_1, \dots, i_m.$$

2. Итерация. Опасность заикливания в прямом опорном методе возникает каждый раз, как только появляются итерации, на которых целевая функция не возрастает. На таблице прямого опорного метода это соответствует тому, что Θ -столбец содержит хотя бы один нуль для каждого ведущего столбца, не удовлетворяющего критерию оптимальности. Это явление не реализуется для невырожденных опорных планов, но нельзя утверждать, что оно связано с каждым вырожденным планом. Если вырожденный план не удовлетворяет приведенному в п. 1 необходимому условию оптимальности, то найдется итерация прямого метода, ведущая к увеличению целевой функции. В связи с этим при построении итераций для вырожденных планов интерес представляют

лишь случаи, когда рассматриваемые вырожденные планы удовлетворяют необходимому условию оптимальности.

Можно указать по крайней мере два пути построения итерации на вырожденном плане. Во-первых, можно, следуя принятым до сих пор в книге правилам, строить допустимые направления наискорейшего возрастания целевой функции. Во-вторых, имея необходимые и достаточные условия оптимальности, можно организовать процедуры, ведущие к их выполнению.

Первый путь, согласно вычислениям п. 1, ведет к задаче

$$\begin{aligned} -\Delta'_{n0}l_{n0} - \Delta'_{n+}l_{n+} &\rightarrow \max, \\ T_{00}l_{n0} + T_{0+}l_{n+} &\leq 0, \\ -l_{n0} &\leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как в задаче (13) вектор ограничений нулевой, то если найдется ненулевой вектор $l_n = \{l_{n0}, l_{n+}\}$, удовлетворяющий ограничениям задачи (13) и доставляющий целевой функции $\Delta'_n l_n$ положительное значение, то вектор αl_n будет удовлетворять ограничениям задачи (13) при любом $\alpha > 0$. Поэтому в общем случае задача (13) не имеет решения. Чтобы сделать задачу (13) разрешимой и одновременно не сузить множество допустимых направлений, надо ввести нормировку направления l_n . Ее можно ввести различными способами. Наиболее естественным, пожалуй, является выбор l_n из единичного гиперкуба, т. е.

$$-e \leq l_n \leq e. \quad (14)$$

С учетом ограничений (14) задача (13) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta'_{n0}l_{n0} + \Delta'_{n+}l_{n+} &\rightarrow \min, \\ -T_{00}l_{n0} - T_{0+}l_{n+} &\geq 0, \\ l_{n0} &\geq 0, \\ -l_{n0} &\geq -e, \\ l_{n+} &\geq -e, \\ -l_{n+} &\geq -e. \end{aligned} \quad (15)$$

Решать задачу (15) с помощью прямого симплекс-метода не эффективно; во-первых, потому, что она не приведена к канонической форме, во-вторых, потому, что начальный базисный план задачи (15) будет вырожденным. Поэтому

наряду с задачей (15) рассмотрим двойственную к ней задачу, записанную в канонической форме:

$$\begin{aligned} & -e'\mu_2 - e'\mu_3 - e'\mu_4 \rightarrow \max, \\ & -T'_{00}\lambda + \mu_1 - \mu_2 = \Delta_{n0}, \\ & -T'_{0+}\lambda + \mu_3 - \mu_4 = \Delta_{n+}, \\ & \lambda \geq 0, \mu_i \geq 0, i = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (16)$$

Построим начальный базисный план. Разобьем векторы Δ_{n0} и Δ_{n+} в соответствии со знаками их компонент:

$$\begin{aligned} \Delta_{n0}^+ &= \{\Delta_j : \Delta_j \geq 0, j \in I_{n0}\}, \quad \Delta_{n0}^- = \{\Delta_j : \Delta_j < 0, j \in I_{n0}\}, \\ \Delta_{n+}^+ &= \{\Delta_j : \Delta_j \geq 0, j \in I_{n+}\}, \quad \Delta_{n+}^- = \{\Delta_j : \Delta_j < 0, j \in I_{n+}\}. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем нижние индексы соответствуют знакам компонент вектора x , верхние — знакам компонент вектора Δ .

Положим

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, \mu_1 = \{\Delta_{n0}^+, 0\}, \mu_2 = \{-\Delta_{n0}^-, 0\}, \\ \mu_3 &= \{\Delta_{n+}^+, 0\}, \mu_4 = \{-\Delta_{n+}^-, 0\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Запись $\{\Delta_{n0}^+, 0\}$ обозначает вектор размерности вектора μ_1 , состоящий из компонент вектора Δ_{n0}^+ и дополненный по остальным компонентам нулями. Аналогично надо понимать записи векторов μ_2, μ_3 и μ_4 .

План (17) будет базисным в задаче (16). Для решения задачи (16) можно воспользоваться основной симплекс-таблицей. Каждая итерация, необходимая для решения задачи (16), будет порождать итерацию на симплекс-таблице, которую в отличие от итерации основного алгоритма назовем малой.

Малая итерация. Для того чтобы по основной симплекс-таблице определить, является ли построенный базисный план (17) оптимальным в задаче (16), надо найти критерий оптимальности плана (17). Критерием оптимальности будет неотрицательность вектора δ :

$$\delta = -T'_{00}e + T'_{0+}e - T'_{0-}e.$$

Пусть критерий оптимальности не выполняется. Надо улучшить план (17). Для этого, согласно общим правилам симплекс-метода, находим направление скорейшего возрастания целевой функции задачи (16)

$$\delta_{i_0} = \min \delta_i, i \in I_{\text{оп0}}.$$

Затем вычисляем положительные отношения $-\Delta_j/x_{i_0j}$, $j \in I_H$ и находим

$$\min_{\Delta_j/x_{i_0j} < 0} (-\Delta_j/x_{i_0j}) = -\Delta_{j_0}/x_{i_0j_0}.$$

Пересчитываем основную симплекс-таблицу, элемент $x_{i_0j_0}$ ведущий. При этом план x задачи (1) не изменяется, а целевая функция задачи (16) возрастает на величину $\delta_{i_0}\Delta_{j_0}/x_{i_0j_0}$.

За конечное число малых итераций задача (16) будет решена, т. е. возникнет одна из следующих ситуаций: а) получена таблица, в которой $\delta \geq 0$; б) план x стал невырожденным; в) план x оптимален (субоптимален).

Большая итерация. Пусть возник случай а). В таблице $\delta \geq 0$. Решение l_H^0 двойственной задачи (15) можно получить из основной симплекс-таблицы.

Построим направление l_H следующим образом:

$$l_H = \{l_{H0}^+, l_{H0}^-, l_{H+}^+, l_{H+}^-\}, \quad l_{H0}^+ = 0, \quad l_{H0}^- = e, \\ l_{H+}^+ = -e, \quad l_{H+}^- = e.$$

Убедимся в том, что построенное направление l_H удовлетворяет ограничениям задачи (15). Действительно,

$$-T_{00}l_{H0} - T_{0+}l_{H+} = -T_{00}^-e + T_{0+}^+e - T_{0+}^-e = \delta \geq 0,$$

$$l_{H0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e \end{Bmatrix} \geq 0, \quad -l_{H0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -e \end{Bmatrix} \geq -e,$$

$$l_{H+} = \begin{Bmatrix} -e \\ e \end{Bmatrix} \geq -e, \quad -l_{H+} = \begin{Bmatrix} e \\ -e \end{Bmatrix} \geq -e.$$

Кроме того, подсчитав значения целевой функции задачи (15) на плане l_H и целевой функции задачи (16) на плане (17), убеждаемся, что они совпадают:

$$\Delta_{H0}'l_{H0} + \Delta_{H+}'l_{H+} = \Delta_{H0}^-e' - \Delta_{H+}^+e' + \Delta_{H+}^-e' = \\ = -e'\mu_2 - e'\mu_3 - e'\mu_4.$$

Значит, построенный вектор l_H есть решение задачи (15).

Строим новый план \bar{x} задачи (1) по формуле

$$\bar{x} = x + \Theta l, \quad (18)$$

где $l = \{l_{оп}, l_H\}$. Надо найти наибольшее положительное число Θ , при котором вектор (18) еще не отрицателен.

Обозначим его через Θ^0 . Тогда, вспомнив, что

$$l_{оп} = -Tl_H = -T_0l_{H0} - T_+l_{H+} = -T_0^-e' + T_+^+e' = \delta_{оп},$$

получим условие $\bar{x} = x + \Theta l \geq 0$, которое равносильно следующим двум условиям: $x_{\text{оп}} + \Theta \delta_{\text{оп}} \geq 0$, $x_{\text{н}+}^+ - \Theta e \geq 0$. Из этих неравенств находим

$$\Theta^0 = \min \left(\min_{\delta_i < 0, i \in I_{\text{оп}}} -\frac{x_i}{\delta_i}, \min_{\Delta_j > 0, x_j > 0} x_j \right).$$

Таким образом, новый план \bar{x} полностью определен. На плане \bar{x} , построенном по формуле (18), целевая функция $c'\bar{x}$ возрастает по сравнению с $c'x$ на величину

$$\begin{aligned} -\Theta_0 \Delta_{\text{н}}' l_{\text{н}} &= \Theta_0 (-\Delta_{\text{н}0}^- e' + \Delta_{\text{н}+}^+ l' - \Delta_{\text{н}+}^- e') = \\ &= \Theta_0 \left(-\sum_{\Delta_j < 0} \Delta_j + \sum_{\substack{\Delta_j > 0, \\ x_j > 0}} \Delta_j \right) > 0. \end{aligned}$$

§ 2. Двойственный метод

При решении задач линейного программирования с помощью двойственного симплекс-метода может встретиться явление зацикливания в том случае, когда двойственная задача вырождена [1].

Критерий оптимальности вырожденного опорного плана двойственной задачи получаем так же, как и в § 1 критерий оптимальности вырожденного опорного плана прямой задачи.

1. Критерий оптимальности. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0. \quad (1)$$

Запишем задачу, двойственную к (1)

$$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c. \quad (2)$$

Введем множества индексов

$$I_{\text{оп}} = \{i: i = i_1, \dots, i_m\}, \quad I = \{i: i = \overline{1, n}\}, \quad I_{\text{н}} = I \setminus I_{\text{оп}}.$$

Вырожденный опорный коплан $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ характеризуется тем, что среди неопорных компонент вектора δ есть нулевые. Рассмотрим вырожденный опорный коплан $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$. Введем множества индексов:

$$\begin{aligned} I_{\text{н}0} &= \{i: \delta_i = 0, i \in I_{\text{н}}\}, \quad I_{\text{н}+} = \{i: \delta_i > 0, i \in I_{\text{н}}\}, \\ I_{\text{оп}0} &= \{i: \delta_i = 0, i \in I_{\text{оп}}\}, \quad I_{\text{оп}+} = \{i: \delta_i > 0, i \in I_{\text{оп}}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с разбиением (3) множества I разобьем на компоненты вектор δ и матрицу A :

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{оп}} &= \{\delta_i, i \in I_{\text{оп}}\}, \delta_{\text{н}} = \{\delta_i, i \in I_{\text{н}}\}, \\
\delta_{\text{оп}0} &= \{\delta_i, i \in I_{\text{оп}0}\}, \delta_{\text{оп}+} = \{\delta_i, i \in I_{\text{оп}+}\}, \\
\delta_{\text{н}0} &= \{\delta_i, i \in I_{\text{н}0}\}, \delta_{\text{н}+} = \{\delta_i, i \in I_{\text{н}+}\}, \\
A_{\text{оп}} &= \{a_i, i \in I_{\text{оп}}\}, A_{\text{н}} = \{a_i, i \in I_{\text{н}}\}, \\
A_{\text{оп}0} &= \{a_i, i \in I_{\text{оп}0}\}, A_{\text{оп}+} = \{a_i, i \in I_{\text{оп}+}\}, \\
A_{\text{н}0} &= \{a_i, i \in I_{\text{н}0}\}, A_{\text{н}+} = \{a_i, i \in I_{\text{н}+}\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Направление l из точки y называется допустимым, если существует такое число $\Theta_0 > 0$, что при всех $0 \leq \Theta \leq \Theta_0$ выполняется условие

$$\delta + \Theta A' l \geq 0. \tag{5}$$

План y оптимален тогда и только тогда, когда для любого допустимого направления l из точки y выполняется условие

$$b' l \geq 0. \tag{6}$$

Неравенство (5) с использованием компонент (4) имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{оп}0} + \Theta A'_{\text{оп}0} l &\geq 0, \delta_{+} + \Theta A'_{+} l \geq 0, \\
\delta_{\text{н}0} + \Theta A'_{\text{н}0} l &\geq 0, \delta_{\text{н}+} + \Theta A'_{\text{н}+} l \geq 0.
\end{aligned}$$

Так как $\delta_{\text{оп}0} = 0$ и $\delta_{\text{н}0} = 0$, то первое и третье неравенства равносильны

$$A'_{\text{оп}0} l \geq 0, A'_{\text{н}0} l \geq 0. \tag{7}$$

Из $\delta_{\text{оп}+} > 0$ и $\delta_{\text{н}+} > 0$ следует существование для каждого направления l такого числа $\Theta_0 > 0$, что при $\Theta < \Theta_0$ второе и четвертое неравенства будут выполняться.

Для того чтобы выразить критерий оптимальности через элементы симплекс-таблицы, сделаем замену $A'_{\text{оп}} l = r$. Вектор r разбивается на компоненты в соответствии с разбиением матрицы $A_{\text{оп}}$: $A'_{\text{оп}0} l = r_0$, $A'_{\text{оп}+} l = r_{+}$. Аналогично разбиваем матрицу $T_0 = A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}0}$. Условия (7) и (6) примут вид

$$r_0 \geq 0, T'_{00} r_0 + T'_{0+} r_{+} \geq 0, \tag{8}$$

$$\kappa'_0 r_0 + \kappa'_+ r_{+} \geq 0, \tag{9}$$

где $\kappa = \{\kappa_0, \kappa_{+}\} = A_{\text{оп}}^{-1} b$ — псевдоплан задачи (1).

Применяя к (8), (9) теорему Фаркаша, получаем

Критерий оптимальности коплана. Для оптимальности вырожденного опорного коплана $\{\delta, A_{оп}\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неотрицательные векторы $\lambda \geq 0$ и $\mu \geq 0$, что

$$T_{00}\lambda + \mu = \kappa_0, \quad T_{0+}\lambda = \kappa_+. \quad (10)$$

Из условия (10) следуют простые достаточное и необходимое условия оптимальности:

а) Для оптимальности вырожденного опорного коплана достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\kappa_0 \geq 0, \quad \kappa_+ = 0. \quad (11)$$

З а м е ч а н и е. Условие (11) является необходимым и достаточным условием оптимальности опорного невырожденного коплана.

б) Для оптимальности вырожденного опорного коплана необходимо, чтобы для каждого $\kappa_i < 0$ существовал индекс j_* такой, что $j_* \in I_{н0}$ и $x_{ij_*} < 0$, и для каждого $\kappa_i > 0$, $i \in I_{оп+}$, существовал индекс $j_* \in I_{н0}$ такой, что $x_{ij_*} > 0$.

Будем считать, что для коплана выполнено необходимое условие оптимальности, так как в противном случае можно улучшить коплан за одну итерацию двойственного метода.

2. Итерация. Нетрудно показать, что, как и в § 1, поиск допустимого направления, вдоль которого целевая функция $b'y$ убывает с наибольшей скоростью, сводится к решению задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} \kappa'_0 r_0 + \kappa'_+ r_+ &\rightarrow \min, \\ T'_{00} r_0 + T'_{0+} r_+ &\geq 0, \\ r_0 &\geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для того чтобы сделать задачу (12) разрешимой, введем условие нормировки $-e \leq r \leq e$. Задача (12) с этими дополнительными ограничениями имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa'_0 r_0 + \kappa'_+ r_+ &\rightarrow \min, \\ T'_{00} r_0 + T'_{0+} r_+ &\geq 0, \\ r_0 &\geq 0, \\ -r_0 &\geq -e, \\ r_+ &\geq -e, \\ -r_+ &\geq -e. \end{aligned} \quad (13)$$

Решать задачу (13) с помощью прямого опорного метода неэффективно, так как, во-первых, она не приведена к каноническому виду, во-вторых, начальный базисный план вырожден. Поэтому наряду с задачей (13) рассмотрим двойственную к ней задачу, которую запишем в канонической форме:

$$\begin{aligned} -e'\mu_2 - e'\mu_3 - e'\mu_4 &\rightarrow \max, \\ T_{00}\lambda + \mu_1 - \mu_2 &= \kappa_0, \\ T_{0+}\lambda + \mu_3 - \mu_4 &= \kappa_+, \\ \lambda \geq 0, \mu_i &\geq 0, i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (14)$$

Построим начальный базисный план. Разобьем векторы κ_0 и κ_+ на компоненты в соответствии со знаками их координат:

$$\begin{aligned} \kappa_0^+ &= \{\kappa_i, \kappa_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}0}\}, \quad \kappa_0^- = \{\kappa_i, \kappa_i < 0, i \in I_{\text{оп}0}\}, \\ \kappa_+^+ &= \{\kappa_i, \kappa_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}+}\}, \quad \kappa_+^- = \{\kappa_i, \kappa_i < 0, i \in I_{\text{оп}+}\}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, \mu_1 = \{\kappa_0^+, 0\}, \mu_2 = \{-\kappa_0^-, 0\}, \\ \mu_3 &= \{\kappa_+^+, 0\}, \mu_4 = \{-\kappa_+^-, 0\}. \end{aligned} \quad (15)$$

План (15) будет базисным планом задачи (14). Для решения задачи (14) можно воспользоваться основной симплекс-таблицей. Каждая итерация, необходимая для решения этой задачи, будет порождать итерацию на основной симплекс-таблице, которую назовем *малой итерацией*. В результате малой итерации значение целевой функции $b'y$ не изменяется.

Малая итерация. Для того чтобы по основной симплекс-таблице определить, является ли построенный план (15) оптимальным в задаче (14), надо проверить критерий оптимальности плана (15). Критерием оптимальности будет неотрицательность вектора

$$\xi_0 = T_{00}^- e' - T_{0+}^+ e' + T_{0+}^- e'.$$

Пусть критерий оптимальности не выполняется. Чтобы улучшить план (15), согласно общим правилам прямого опорного метода, находим направление скорейшего возрастания целевой функции задачи (14):

$$\xi_{j_0} = \min \xi_j, j \in I_{\text{н}0}.$$

Затем вычисляем отношения κ_i/x_{ij_0} , $i \in I_{\text{оп}}$. Находим

$\min_{x_i/x_{ij_0} > 0} x_i/x_{ij_0} = x_{i_0}/x_{i_0j_0}$ и пересчитываем таблицу, элемент

$x_{i_0j_0}$ ведущий. При этом на новом плане (15) целевая функция задачи (14) возрастает на величину $-\xi_{j_0} x_{i_0}/x_{i_0j_0}$. За конечное число малых итераций будет решена задача (14), т. е. возникнет одна из следующих ситуаций: а) выполнилось условие $\xi_0 \geq 0$; б) план y стал невырожденным; в) план y оптимален; г) план y субоптимален.

В случае б) процесс решения продолжается по алгоритму, описанному в гл. I. В случаях в) и г) процесс решения прекращается, в случае а) переходим к большой итерации.

Большая итерация. Пусть $\xi_0 \geq 0$, т. е. план (15) оптимален. Решение задачи (12) можно найти из основной симплекс-таблицы.

Положим $r = \{r_0^+, r_0^-, r_+^+, r_+^-\}$, $r_0^+ = 0$, $r_0^- = e$, $r_+^+ = -e$, $r_+^- = e$. Построенное направление r , во-первых, удовлетворяет ограничениям задачи (12), во-вторых,

$$x'r = x_0^- e + x_+^- e - x_+^+ e = -e'\mu_2 - e'\mu_3 - e'\mu_4.$$

Поскольку значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают, то построенное направление r есть решение задачи (12). Строим новый план y по формуле $\bar{y} = y + \Theta l$. Новому плану \bar{y} соответствует вектор $\bar{\delta} = A'y - c$:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= A'y + \Theta A'l - c = \delta + \Theta A'l = \delta + \Theta A'A_{\text{оп}}^{-1}r = \\ &= \delta + \Theta T'r = \delta + \Theta \xi. \end{aligned}$$

Таким образом, наибольшее число Θ_0 , при котором вектор $\bar{\delta}$ еще остается опорным копланом, вычисляется по формуле $\Theta_0 = \min(-\delta_i/\xi_i)$, $\xi_i < 0$. Новый вектор $\bar{\delta}$ находится по формуле $\bar{\delta} = \delta + \Theta_0 \xi$. Все остальные элементы таблицы остаются прежними. При этом значение целевой функции $b'y$ уменьшается на величину $-\Theta_0(x_0^- e - x_+^+ e + x_+^- e)$.

§ 3. Другой подход к исследованию вырожденных задач

1. Прямой опорный метод. Рассмотрим задачу

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d. \quad (1)$$

Пусть $\{x, A_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план. Здесь

и в дальнейшем в этом пункте используются обозначения: x^0 — оптимальный план, x_{ij} — i -я координата вектора a_j в опоре $\{a_i, i \in I_{\text{оп}}\}$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $I_{\text{оп}} = \{i_1, \dots, i_m\}$, $I_{\text{н}} = I \setminus I_{\text{оп}}$, $I^{\text{н}} = \{i: x_i = 0, i \in I\}$, $I^{\text{в}} = \{i: x_i = d_i, i \in I\}$, $I^{\text{к}} = I^{\text{в}} \cup I^{\text{н}}$, $I^{\text{п}} = I \setminus I^{\text{к}}$, $I_{\text{оп}}^{\text{н}} = I^{\text{н}} \cap I_{\text{оп}}$, $A_{\text{оп}} = \{a_i, i \in I_{\text{оп}}\}$, $\Delta_{\text{оп}} = \{\Delta_i, i \in I_{\text{оп}}\}$ и т. п.

Допустим, что наряду с $\{x, A_{\text{оп}}\}$ известны оценки опорных компонент плана:

$$\Delta_i = 0, i \in I_{\text{оп}}^{\text{п}}; \Delta_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}}^{\text{н}}; \Delta_i \leq 0, i \in I_{\text{оп}}^{\text{в}}. \quad (2)$$

Начальные x , $\Delta_{\text{оп}}$ в конкретных случаях отражают опыт, интуицию специалистов, связанных с практической задачей, по которой составлена математическая модель (1).

Построим вектор u потенциалов согласно $u'A_{\text{оп}} - c'_{\text{оп}} = \Delta'_{\text{оп}}$ и найдем оценки неопорных компонент плана:

$$\Delta'_{\text{н}} = u'A_{\text{н}} - c'_{\text{н}}. \quad (3)$$

Из теории двойственности следуют

Критерий оптимальности. Для оптимальности опорного плана необходимо и достаточно, чтобы для некоторых $A_{\text{оп}}, \Delta_{\text{оп}}$ из (2) вектор $\Delta_{\text{н}}$ из (3) удовлетворял соотношениям $\Delta_i = 0, i \in I_{\text{н}}^{\text{п}}; \Delta_i \geq 0, i \in I_{\text{н}}^{\text{н}}; \Delta_i \leq 0, i \in I_{\text{н}}^{\text{в}}$.

Критерий субоптимальности. Опорный план ε -оптимален ($c'x^0 - c'x \leq \varepsilon$) тогда и только тогда, когда при некоторой опоре $A_{\text{оп}}$ выполняется равенство

$$\sum_{\Delta_i > 0} \Delta_i x_i - \sum_{\Delta_i < 0} \Delta_i (d_i - x_i) = \varepsilon.$$

Метод из гл. I ведет к улучшению плана x , если для некоторого $j_0 \in I_{\text{н}}$ и всех $i \in I_{\text{оп}}^{\text{н}}, k \in I_{\text{оп}}^{\text{в}}$ выполняется одно из условий: а) $\Delta_{j_0} < 0, x_{ij_0} \leq 0, x_{kj_0} \geq 0$; б) $\Delta_{j_0} > 0, x_{ij_0} \geq 0, x_{kj_0} \leq 0$.

Случай и соответствующий ему план $\{x, A_{\text{оп}}\}$, когда ни одно из этих условий не выполняется, назовем вырожденными.

Для вырожденного опорного плана $\{x, A_{\text{оп}}\}$ введем вспомогательную задачу

$$- \sum_{j \in I_{\text{н}}} \alpha_j \rightarrow \max, \bar{\Delta}_j = \sum_{i \in I_{\text{оп}}^{\text{к}}} \bar{\Delta}_i x_{ij} + \Delta_j^* + \varepsilon_j \alpha_j, \quad (4)$$

$$\bar{\Delta}_i \geq 0, i \in I^{\text{н}}; \bar{\Delta}_i \leq 0, i \in I^{\text{в}}; \bar{\Delta}_i = 0, i \in I_{\text{н}}^{\text{п}}; \alpha_j \geq 0, j \in I_{\text{н}},$$

где Δ_j^* — оценки неопорных компонент, полученные при $\Delta_{\text{оп}} = 0$, $\varepsilon_j = \text{sign} (\Delta_j - \sum \Delta_i x_{ij} - \Delta_j^*)$.

Эту задачу можно решить двойственным опорным методом исходя из начальных оценок Δ_i , $i \in I$. Все данные задачи (4) сосредоточены в симплексных таблицах задачи (1), и поэтому итерации по задаче (4), ведутся на подтаблицах задачи (1).

Если в решении $\{\bar{\Delta}_i, \alpha_j, i \in I_{\text{оп}}^K \cup I_{\text{н}}, j \in I_{\text{н}}\}$ задачи (4) переменные α_j равны нулю, то исходный план x оптимален. Пусть $\sum_{j \in I_{\text{н}}} \alpha_j > 0$. Тогда вектор $\bar{x}^{\text{н}}$ — решение задачи, двойственной к (4), — задает подходящее направление из точки x в множестве планов задачи (1). Новый план \bar{x} имеет вид $\bar{x} = x + \Theta^0 \bar{x}$, где $\Theta^0 > 0$ — максимально допустимый шаг, подсчитываемый по стандартной схеме. За итерацию $x \rightarrow \bar{x}$ значение целевой функции задачи (1) увеличивается на величину $\Theta^0 \sum_{j \in I_{\text{н}}} \alpha_j > 0$.

З а м е ч а н и е. Отличие метода данного пункта от метода § 3 гл. I состоит в том, что теперь вместо базисных псевдокопланов используются опорные псевдокопланы $\{\Delta_{\text{оп}}, \Delta_{\text{н}}\}$.

2. Двойственный опорный метод. Пусть $\delta' = y'A - c'$ — начальный коплан задачи (1), построенный по плану $\{y, w\}$ двойственной задачи

$$b'y + d'w \rightarrow \min, A'y + w \geq c, w \geq 0. \quad (5)$$

Пусть $K = \{k: k = 1, 2, \dots, n\}$, $K_{\text{оп}} = \{k: k = k_1, \dots, k_m\}$, $K_{\text{н}} = K \setminus K_{\text{оп}}$, $K^{\text{н}} = \{k: \delta_k > 0\}$, $K^{\text{в}} = \{k: \delta_k < 0\}$, $K^{\text{к}} = K^{\text{н}} \cup K^{\text{в}}$, $K^{\text{п}} = K \setminus K^{\text{к}}$ и т. п.

Совокупность $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ назовем опорным копланом. Для начального опорного коплана, отражающего всю доступную к началу решения задачи (1) информацию, построим псевдоплан κ . Положим

$$\kappa_k = 0, k \in K_{\text{н}}^{\text{н}}, \kappa_k = d_k, k \in K_{\text{н}}^{\text{в}}; 0 \leq \kappa_k \leq d_k, k \in K_{\text{н}}^{\text{п}}, \quad (6)$$

где числа κ_k , $k \in K_{\text{н}}^{\text{п}}$, задаются наряду с начальным копланом исходя из практических соображений.

Опорные компоненты псевдоплана найдутся из уравнения

$$A_{\text{оп}}\kappa_{\text{оп}} + A_{\text{н}}\kappa_{\text{н}} = b.$$

Критерий оптимальности. Псевдоплан κ является оптимальным планом задачи (1) тогда и только тогда, когда при некоторых числах κ_k , $k \in K_{\text{н}}^{\text{п}}$, его опорные компоненты удовлетворяют соотношениям

$$\kappa_k = 0, \quad k \in K_{\text{оп}}^{\text{н}}; \quad \kappa_k = d_k, \quad k \in K_{\text{оп}}^{\text{в}}; \quad 0 \leq \kappa_k \leq d_k, \quad k \in K_{\text{оп}}^{\text{п}}. \quad (7)$$

Критерий субоптимальности. Для ε -оптимальности псевдоплана κ необходимо и достаточно, чтобы $0 \leq \kappa_k \leq d_k$, $k \in K_{\text{оп}}$,

$$\varepsilon = \sum_{\delta_k > 0, k \in K_{\text{оп}}} \delta_k \kappa_k - \sum_{\delta_k < 0, k \in K_{\text{оп}}} \delta_k (d_k - \kappa_k).$$

Если начальный коплан не позволяет остановить процесс решения задачи (1) в силу приведенных критериев, то переходим к его улучшению.

Пусть κ_k^* , $k \in K_{\text{оп}}$, — компоненты псевдоплана, вычисленные при $\kappa_m^* = 0$, $m \in K_{\text{н}}^{\text{п}}$. Среди κ_k^* , $k \in K_{\text{оп}}$, с $\delta_k > 0$ или $\delta_k = 0$, $\kappa_k^* < 0$, находим число $\kappa_{k^0}^*$, максимальное по модулю. Среди $\kappa_k^* - d_k$, $k \in K_{\text{оп}}$, с $\delta_k < 0$ или $\delta_k = 0$, $\kappa_k^* > d_k$, находим число $\kappa_{k^*}^* - d_{k^*}$, максимальное по модулю. Пусть v^0 — число $\kappa_{k^0}^*$, $\kappa_{k^*}^* - d_{k^*}$, имеющее больший модуль. Из опорных компонент коплана варьируем только компоненту с номером k^0 -строки, содержащей число $\Delta \delta_{k^0} = -\sigma \text{sign } v^0$, $\sigma \geq 0$. Вариации неопорных компонент коплана $\Delta \delta_m = -\sigma x_{k^0 m} \text{sign } v^0$, $m \in K_{\text{н}}$. Максимально допустимый шаг σ^0 равен минимальному из чисел

$$\begin{aligned} \sigma_{k^0} &= |\sigma_{k^0}| \text{ при } \delta_{k^0} < 0, \quad \kappa_{k^0}^* > 0 \text{ или } \delta_{k^0} > 0, \quad \kappa_{k^0}^* < d_{k^0}; \\ \sigma_m &= \delta_m / x_{k^0 m} \text{sign } v^0, \quad m \in K_{\text{н}}, \text{ если } \delta_m x_{k^0 m} \text{sign } v^0 > 0; \\ \sigma_m &= 0, \text{ если } x_{k^0 m} \text{sign } v^0 < 0, \quad \delta_m = 0. \end{aligned}$$

Если ни одно из этих чисел нельзя найти, то $\sigma^0 = \infty$ и задача (1) не имеет планов.

Случай $\sigma^0 = 0$ называется вырожденным, соответствующий коплан — особым.

Для особого коплана $\{\delta, A_{\text{оп}}\}$ введем вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} e' \beta &\rightarrow \min, \quad A_{\text{оп}} \bar{\kappa}_{\text{оп}} + A_{\text{н}}^{\text{в}} d_{\text{н}}^{\text{в}} + A_{\text{н}}^{\text{п}} \bar{\kappa}_{\text{н}}^{\text{п}} + A_{\text{оп}} \Lambda \beta = b, \\ 0 &\leq \bar{\kappa}_k \leq d_k, \quad k \in K^{\text{п}}, \quad \bar{\kappa}_k = 0, \quad k \in K_{\text{оп}}^{\text{н}}, \quad \bar{\kappa}_k = d_k, \quad k \in K_{\text{оп}}^{\text{в}}, \quad (8) \end{aligned}$$

где $\Lambda = \text{diag} \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\lambda_k = \text{sign } \kappa_k$, $k \in K_{\text{оп}}^{\text{н}}$,

$\lambda_k = -\text{sign}(\kappa_k - d_k)$, $k \in K_{\text{оп}}^B$, $\lambda_k = -1$, если $\kappa_k \leq 0$ и $\lambda_k = -1$, если $\kappa_k \geq d_k$, $k \in K_{\text{оп}}^H$, $e = \{1, 1, \dots, 1\}$, $\beta \geq 0$.

Задачу можно решить прямым опорным методом (п. 1), используя начальный опорный псевдоплан $\{\kappa, A_{\text{оп}}\}$. Понятно, что можно обойтись симплексной таблицей коплана δ .

Если при решении задачи (8) окажется, что $\beta = 0$, то вектор $\bar{\kappa}$, составленный по решению задачи (8) и дополненный компонентами $\bar{\kappa}_k = 0$, $k \in K_{\text{оп}}^H$, $\bar{\kappa}_k = d_k$, $k \in K_{\text{оп}}^B$, будет оптимальным планом задачи (1).

При $\beta \neq 0$ коплан $\bar{\delta}$, составленный по решению задачи, двойственной к (8), задает подходящее направление в точке δ множества копланов задачи. Поэтому новый коплан $\bar{\bar{\delta}}$ строим по формуле $\bar{\bar{\delta}} = \delta + \sigma^0 \bar{\delta}$, где σ^0 — максимально допустимый шаг, который подсчитывается по стандартным правилам. Если (7) не выполняется, то значение целевой функции задачи (5) за итерацию $\delta \rightarrow \bar{\bar{\delta}}$ уменьшается на величину $\sigma^0 e' \beta > 0$.

З а м е ч а н и я. 1. Если для итерации $x \rightarrow \bar{\bar{x}}$ ($\delta \rightarrow \bar{\bar{\delta}}$) потребуется решить s вспомогательных задач, то план x (коплан δ) называется вырожденным планом (копланом) s -го порядка.

2. В отличие от метода § 2 гл. II в данном пункте используются не базисные псевдопланы, а опорные $\{\kappa_{\text{оп}}, \kappa_H\}$.

Г л а в а VII

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Решение практических задач математическими методами состоит из следующих этапов: построение математической модели реальной задачи; отыскание решения для модели; анализ решения. В данной книге проблема математического моделирования, или, другими словами, проблема адекватного математического описания практических задач, не рассматривается, если не считать примеров иллюстративного характера. В основном (гл. I—VI) внимание уделяется второму этапу математического исследования практических задач, обоснованию методов построения оптимальных (и субоптимальных) планов для задач линейного программирования. Заключительная

глава посвящена некоторым методам исследования по третьему этапу решения.

Общая задача линейного программирования с двух-сторонними ограничениями

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (*)$$

характеризуется следующими группами параметров: 1) *размерами задачи* — числами n и m (неизвестные и основные ограничения); 2) компонентами c_1, \dots, c_n вектора стоимости c ; 3) компонентами b_1, \dots, b_m вектора ограничений b ; 4) элементами a_{ij} , $i=1, m, j=1, n$, матрицы условий; 5) компонентами d_1, \dots, d_n вектора d . Каждая математическая модель реальной задачи (*) имеет определенное сочетание значений перечисленных параметров. Предположим, что получено математическое решение задачи для фиксированных значений параметров. В силу ряда причин (исходные значения параметров задавались приближенно или ожидается изменение параметров и т. п.) возникают вопросы: как оценить влияние на результат решения изменения параметров задачи? как эффективно найти решение задачи для новых значений параметров?

Ниже будет дан ответ на каждый из этих вопросов. Для удобства изложения влияние на решение каждой группы параметров рассматривается отдельно. Сначала вводятся числовые характеристики решения, позволяющие без дополнительных вычислений дать качественный ответ на указанные вопросы, затем строится алгоритм получения решения для новых значений параметров.

Анализируются решения, полученные только прямым опорным методом. Анализ решений, полученных другими методами, проводится аналогично и оставлен читателю в качестве упражнения. Всюду в качестве примера рассматривается производственная задача, решенная в п. 7 § 3 гл. I.

§ 1. Вариация вектора стоимости

Анализ решения задачи линейного программирования начнем с исследования влияния на оптимальное значение целевой функции изменения вектора стоимости.

1. Непрерывная зависимость решений задачи от вектора стоимости. Рассмотрим общую задачу линейного

программирования с двухсторонними ограничениями (см. § 3 гл. I):

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d. \quad (1)$$

Пусть x^0 — оптимальный план задачи (1), полученный прямым опорным методом. Тогда в нашем распоряжении будет симплексная таблица, удовлетворяющая критерию оптимальности:

$$\Delta_j \geq 0, x_j^0 = 0, \Delta_j \leq 0, x_j^0 = d_j, \Delta_j = 0, 0 < x_j^0 < d_j.$$

Зафиксируем все параметры задачи (1), за исключением вектора стоимости c . Введем функцию

$$\varphi(c) = \max c'x, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (2)$$

которая определена при каждом векторе c и характеризует зависимость оптимального значения целевой функции от вектора стоимости.

Обозначим через $X = X(c)$ множество решений задачи (1), *множество оптимальных планов*. Ясно, что при каждом векторе c множество $X(c)$ является непустым выпуклым компактом.

Отображение $c \rightarrow X(c)$ называется *многозначной функцией*. Многозначная функция $X(c)$ называется *полунепрерывной сверху* в точке c (относительно включения), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что множество $X(\tilde{c})$ содержится в ε -окрестности множества $X(c)$ всякий раз, как только $\|\tilde{c} - c\| < \delta$.

Теорема 1. Оптимальное значение $\varphi(c)$ целевой функции задачи (1) — выпуклая функция, непрерывно зависящая от вектора стоимости. Множество $X(c)$ оптимальных планов полунепрерывно сверху по вектору стоимости. Если $\Delta_j > 0, x_j^0 = 0, \Delta_j < 0, x_j^0 = d_j$, для всех неопорных индексов, то единственный оптимальный план $x^0 = x^0(c)$ непрерывно зависит от вектора стоимости.

Доказательство. Выпуклость функции $\varphi(c)$ следует из определения (2) и свойства выпуклых функций [5]: если $f(c, x)$ — выпуклая функция при каждом $x \in X$, то функция $\max f(c, x), x \in X$, выпукла по c . Пусть c и \tilde{c} — векторы стоимости. Им соответствуют $\varphi(c), \varphi(\tilde{c})$, $X = X(c), \tilde{X} = X(\tilde{c})$. Из (2) следуют неравенства

$$\tilde{c}'\tilde{x} = \varphi(\tilde{c}) \geq \tilde{c}'x, x \in X, \tilde{x} \in \tilde{X},$$

$$c'\tilde{x} \leq \varphi(c) = c'x.$$

Отсюда

$$\tilde{c}'\tilde{x} - c'\tilde{x} \geq \varphi(\tilde{c}) - \varphi(c) \geq \tilde{c}'x - c'x. \quad (3)$$

Пусть $\tilde{c} \rightarrow c$. Тогда $\tilde{c}'x - c'x \rightarrow 0$. Покажем, что и $\tilde{c}'\tilde{x} - c'\tilde{x} \rightarrow 0$. Если допустить обратное, то для некоторой последовательности $c^i, i \geq 1$, и соответствующей последовательности $x^i, i \geq 1$, решений задачи (1) получим неравенства

$$c^{i'}x^i - c'x^i \geq \alpha > 0, i \geq 1. \quad (4)$$

Множество планов задачи (1) компактно. Поэтому из последовательности $x^i, i \geq 1$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к x^* . Перейдя в (4) к пределу вдоль указанной подпоследовательности, получим противоречивые соотношения: $0 \geq \alpha > 0$. Таким образом, в (3) первая и третья разности стремятся к нулю, что доказывает непрерывность функции $\varphi(c)$, а значит, и первое утверждение теоремы.

Допустим, что неверно второе утверждение теоремы. Тогда найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательность векторов $c^i \rightarrow c, x^i \in X(c^i), i \geq 1$, таких, что ни один из векторов $x^i, i \geq 1$, не лежит в ε -окрестности множества $X(c)$. Как и в предыдущем случае, выберем из $x^i, i \geq 1$, подпоследовательность, сходящуюся к x^* . Поскольку $\varphi(c^i) = c^{i'}x^i$, то, перейдя к пределу вдоль этой подпоследовательности, получим $\varphi(c) = c'x^*$. Это равенство означает, что x^* — элемент множества $X(c)$. Но это невозможно, ибо все элементы сходящейся к x^* подпоследовательности лежат, по предположению, вне ε -окрестности множества $X(c)$.

Из обоснования итерации прямого опорного метода, приведенного в гл. I (см. также гл. V), следует, что при условиях $\Delta_j > 0, x_j^0 = 0, \Delta_j < 0, x_j^0 = d_j$ план $x^0 = x^0(c)$ единственный. Его непрерывная зависимость от вектора c есть следствие полунепрерывности сверху множества $X(c)$, совпадающего в данном случае с вектором $x^0(c)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из теоремы 1 не следует, что каждый оптимальный план $x^0(c)$ непрерывно изменяется с изменением вектора стоимости. Однако если оптимальный план $x^0 = x^0(c)$ единственный (множество $X(c)$ состоит из одного элемента x^0), то малым вариациям вектора c будут соответствовать малые изменения оптимального плана.

2. Коэффициенты чувствительности. Обозначим через $\partial\varphi/\partial c_i^+$, $\partial\varphi/\partial c_i^-$ правую и левую частные производные по c_i от функции $\varphi(c)$.

О п р е д е л е н и е. Правым и левым коэффициентами чувствительности целевой функции по i -й компоненте вектора стоимости называются числа

$$v_i^+ = v_i^+(c) = \frac{\partial\varphi(c)}{\partial c_i^+}; \quad v_i^- = v_i^-(c) = \frac{\partial\varphi(c)}{\partial c_i^-}. \quad (5)$$

Физический смысл коэффициентов чувствительности следует из определения (5): v_i^+ (v_i^-) — скорость возрастания максимального значения целевой функции задачи (1) при увеличении компоненты c_i (остальные компоненты вектора c фиксированы) в правой (левой) окрестности исходного значения. Знание чисел v_i^+ , v_i^- позволяет, с одной стороны, оценить качественно степень влияния компонент вектора стоимости на оптимальное значение $\varphi(c)$ целевой функции $c'x$, с другой — без дополнительных вычислений найти приближенное значение для $\varphi(c + \Delta c) = \max(c + \Delta c)'x$.

Правые и левые производные функций тесно связаны с производной по направлению

$$\frac{\partial\varphi(c)}{\partial g} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{\varphi(c + \varepsilon g) - \varphi(c)}{\varepsilon}, \quad (6)$$

где g — n -вектор-направление в пространстве параметров c . Поэтому сначала докажем формулу для $\partial\varphi/\partial g$, которая затем будет использована для вычисления коэффициентов чувствительности.

В неравенствах (3) положим $\tilde{c} = c + \varepsilon g$, $\varepsilon > 0$, и разделим их на ε :

$$g'x \gtrsim \frac{\varphi(c + \varepsilon g) - \varphi(c)}{\varepsilon} \gtrsim g'x. \quad (7)$$

Векторы x , \tilde{x} — произвольные элементы множеств $X(c)$, $X(\tilde{c})$. Поэтому из (7) получаем

$$\max_{\substack{\tilde{x} \in X(\tilde{c}) \\ x \in X(c)}} g'x \gtrsim \frac{\varphi(c + \varepsilon g) - \varphi(c)}{\varepsilon} \gtrsim \max_{x \in X(c)} g'x. \quad (8)$$

Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда $\tilde{c} \rightarrow c$. В силу полунепрерывности сверху многозначной функции $X(c)$ имеем $\max_{\substack{\tilde{x} \in X(\tilde{c}) \\ x \in X(c)}} g'x \rightarrow$

$\rightarrow \max_{x \in X(c)} g'x$ при $\tilde{c} \rightarrow c$. Подставляя это соотношение в (8) и используя определение (6), приходим к формуле для производной по направлению:

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial g} = \max_{x \in X(c)} g'x. \quad (9)$$

Если оптимальный план x^0 задачи (1) единственный, то из (9) следует $\partial \varphi(c)/\partial g = g'x^0$, т. е. формула (9) переходит в стандартную формулу вычисления производной по направлению дифференцируемой функции $c'x^0$.

Пусть $g = e_i$, где e_i — единичный вектор с i -й, отличной от нуля, компонентой. Тогда из (9) получаем

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial e_i} = \max_{x \in X(c)} x_i.$$

Аналогично для $g = -e_i$ имеем

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial (-e_i)} = \max_{x \in X(c)} (-x_i) = -\min_{x \in X(c)} x_i.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial c_i^+} = \frac{\partial \varphi(c)}{\partial e_i}, \quad \frac{\partial \varphi(c)}{\partial c_i^-} = -\frac{\partial \varphi(c)}{\partial (-e_i)},$$

то справедлива

Теорема 2. Коэффициенты чувствительности целевой функции по компонентам вектора стоимости

$$v_i^+(c) = \max_{x \in X(c)} x_i, \quad v_i^-(c) = \min_{x \in X(c)} x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда видно, что число v_i^+ (v_i^-) равно максимальной (минимальной) i -й координате среди всех оптимальных планов задачи. Если оптимальный план x^0 единственный, то $v_i^+ = v_i^- = x_i^0$, $i = \overline{1, n}$.

3. Вычисление оптимального плана для нового вектора стоимости. По предположению (см. п. 1), для вектора стоимости c оптимальный план x^0 вычислен прямым опорным методом и имеется симплексная таблица, соответствующая этому плану. Пусть вектор стоимости принял новое значение \tilde{c} . Найдем новый оптимальный план \tilde{x}^0 . Поскольку другие параметры задачи (1) остались без изменения, то естественно воспользоваться симплексной таблицей плана x^0 . Заменим в таблице вектор c на \tilde{c} и за-

ново вычислим элементы z - и Δ -строк. Ясно, что при невырожденном плане x^0 соотношения

$$\begin{aligned}\Delta_j(\tilde{c}) &\geq 0 \text{ при } x_j^0 = 0; \Delta_j(\tilde{c}) = 0 \text{ при } 0 < x_j^0 < d_j; \\ \Delta_j(\tilde{c}) &\leq 0 \text{ при } x_j^0 = d_j\end{aligned}\quad (10)$$

необходимы и достаточны, чтобы вектор x^0 остался оптимальным планом при новом значении вектора стоимости \tilde{c} .

Соотношения (10) можно использовать для выяснения пределов изменения вектора стоимости, когда оптимальный план x^0 не меняется.

Если соотношения (10) не выполняются, то для нахождения оптимального плана \tilde{x}^0 используем прямой опорный метод с построенной выше таблицей для x^0 .

З а м е ч а н и я. 1. Описанный метод вычисления нового оптимального плана эффективен при небольших изменениях вектора стоимости, которые наиболее характерны для реальных задач. Можно, конечно, построить примеры, когда использование искусственной опоры ведет к цели быстрее, чем описанный метод.

2. Для выпуклых функций справедливо неравенство

$$\varphi(\tilde{c}) - \varphi(c) \geq k'(\tilde{c} - c), \quad (11)$$

где k — субградиент (обобщенный градиент). По формуле (9) можно показать, что множество субградиентов (субдифференциал) в точке c совпадает с множеством $X(c)$. Отсюда и из формулы (11) следует, что приближенное значение приращения для оптимального значения целевой функции, полученное с помощью коэффициентов чувствительности $v'(c)(\tilde{c} - c)$, где $v(c) = \{v_1(c), \dots, v_n(c)\}$, $v(c) \in X(c)$, является оценкой снизу для $\varphi(\tilde{c}) - \varphi(c)$.

4. Пример. Рассмотрим задачу, решенную в п. 7 § 3 гл. I. Оптимальному плану производства $x^0 = \{0, 25, 175/11, 25/11, 0, 0, 200/11\}$ соответствует табл. VII.1. Из нее видно, что план x^0 невырожденный. Поскольку оценки Δ_j для неопорных индексов отличны от нуля, то x^0 — единственный оптимальный план. Таким образом, правые и левые коэффициенты чувствительности v_i^+ , v_i^- равны между собой и принимают следующие значения: $v_1 = 0$, $v_2 = 25$, $v_3 = 175/11$, $v_4 = 25/11$, $v_5 = 0$, $v_6 = 0$, $v_7 = 200/11$. Отсюда видно, что изменение прибыли по первому типу изделий в первом приближении не влияет на максимальную прибыль предприятия; максимальная прибыль в семь раз ($v_3/v_4 = 7$) чувствительнее к изменению прибыли по третьему типу изделий, чем по четвертому типу изделий.

Найдем пределы изменений прибыли по каждому типу

c $c_{оп}$				10	30	20	15	0	0
	d $d_{оп}$			10	25	20	5	∞	∞
		x $x_{оп}$		0	25	175/11	25/11	0	0
			a_j опора	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
15	5	25/11	a_4	1/11	19/11	0	1	3/55	-1/55
20	20	175/11	a_3	7/11	1/11	1	0	-1/55	4/55
0	∞	200/11	a_7	8/11	20/11	0	0	-4/11	-6/11
			Δ	45/11	-25/11	0	0	5/11	13/11

изделий, при которых оптимальный план x^0 сохраняется. Соотношения (10) в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} \tilde{c}_4 + \frac{7}{11} \tilde{c}_3 - \tilde{c}_1 &\geq 0, \quad \frac{19}{11} \tilde{c}_4 + \frac{1}{11} \tilde{c}_3 - \tilde{c}_2 \leq 0, \\ -\frac{1}{55} \tilde{c}_4 + \frac{4}{55} \tilde{c}_3 &\geq 0, \quad \frac{3}{55} \tilde{c}_4 - \frac{1}{55} \tilde{c}_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Запишем их в виде равенств

$$\begin{aligned} \tilde{c}_4 + 7 \tilde{c}_3 - 11 \tilde{c}_1 - \alpha &= 0, \quad 19 \tilde{c}_4 + \tilde{c}_3 - 11 \tilde{c}_2 + \beta = 0, \\ -\tilde{c}_4 + 4 \tilde{c}_3 - \gamma &= 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \\ 3 \tilde{c}_4 - \tilde{c}_3 - \mu &= 0, \quad \mu \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \frac{11 \tilde{c}_4 + 7\gamma - 4\alpha}{44}, \quad \tilde{c}_2 = \frac{77 \tilde{c}_4 + \gamma + 4\beta}{44}, \\ \tilde{c}_3 &= \frac{\tilde{c}_4 + \gamma}{4}, \quad \tilde{c}_4 = \frac{\tilde{c}_3 + \mu}{3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таблица VII.2

c $c_{оп}$				15	30	20	0	0	
	d $d_{оп}$			10	25	20	∞	∞	
		x $x_{оп}$		0	25	175/11	0	0	1089
			a_j опора	a_1	a_2	a_3	a_5	a_6	Θ
15	5	25/11	a_4	1/11	19/11	0	3/55	-1/55	25
20	20	175/11	a_3	7/11	1/11	1	-1/55	4/55	25
0	∞	200/11	a_7	8/11	20/11	0	-4/11	-6/11	25
			Δ	-10/11	-25/11	0	5/11	13/11	

Придавая неотрицательные значения параметрам α , β , γ , μ , получаем всевозможные значения компонент вектора стоимости, сохраняющие оптимальным вектор x^0 . Исходному вектору c соответствуют $\alpha=45$, $\beta=25$, $\gamma=65$, $\mu=25$.

Пусть компоненты c_2 , c_3 , c_4 фиксированы: $c_2=30$, $c_3=20$, $c_4=15$. Тогда из (12) получаем, что при изменении \tilde{c}_1 в пределах $-\infty < \tilde{c}_1 \leq 155/11$ оптимальный план x^0 не изменится.

Найдем оптимальный план производства для случая, когда прибыль по первому типу изделий увеличилась до $\tilde{c}_1=15$, прибыли по остальным типам сохранились. Заменив в табл. VII.1 вектор c новым $\tilde{c}=\{15, 30, 20, 15\}$, получим табл. VII.2. Сделав одну итерацию прямого опорного метода, получим табл. VII.3 с оптимальным планом $\tilde{x}^0=\{10, 25, 105/11, 15/11, 0, 0, 120/11\}$.

Таким образом, за одну итерацию получен оптимальный план для нового вектора стоимости. Как и следовало ожидать по величине коэффициента чувствительности, увеличение общей прибыли оказалось не очень значительным. Можно аналогичным расчетом убедиться, что изме-

$\begin{array}{c} c \\ c_{\text{оп}} \end{array}$				15	30	20	0	0	
	$\begin{array}{c} d \\ d_{\text{оп}} \end{array}$			10	25	20	∞	∞	
		$\begin{array}{c} x \\ x_{\text{оп}} \end{array}$		10	25	105/11	0	0	
			$\begin{array}{c} a_j, b \\ \text{опора} \end{array}$	a_1	a_2	a_3	a_5	a_6	b
15	5	15/11	a_4	1/11	19/11	0	3/55	-1/55	500/11
20	20	105/11	a_3	7/11	1/11	1	-1/55	4/55	200/11
0	∞	120/11	a_7	8/11	20/11	0	-4/11	-6/11	700/11
			Δ	-10/11	-25/11	0	5/11	13/11	

нение прибыли по второму типу изделий более заметно сказывается на величине общей прибыли.

§ 2. Изменение вектора ограничений

Исследование влияния вектора ограничений на оптимальный план задачи линейного программирования имеет большое практическое значение. При этом выясняется физический смысл решения двойственной задачи.

1. Непрерывность оптимального плана. Пусть $\{x^0, A_{\text{оп}}\}$ — невырожденный оптимальный опорный план задачи

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

где c, d, x — n -векторы, b — m -вектор, A — $m \times n$ -матрица, $d > 0$, $\|d\| < \infty$, $\text{rang } A = m$.

Зафиксируем все параметры задачи (1), за исключением вектора b , и введем функцию

$$\varphi(b) = \max c'x, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (2)$$

характеризующую зависимость оптимального значения целевой функции от вектора ограничений.

Вектор b , которому соответствует план x^0 , является внутренней точкой множества определения функции $\varphi(b)$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}_{\text{оп}}(\tilde{b}) = A_{\text{оп}}^{-1}\tilde{b} - A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}x_{\text{н}}^0. \quad (3)$$

Ясно, что $\tilde{x}_{\text{оп}}(b) = x_{\text{оп}}^0$. Поскольку $0 < x_{\text{оп}}^0 < d_{\text{оп}}$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех \tilde{b} , $\|\tilde{b} - b\| \leq \varepsilon$, выполняются в силу (3) неравенства $0 \leq \tilde{x}_{\text{оп}}(\tilde{b}) \leq d_{\text{оп}}$. Отсюда следует, что вектор $\{\tilde{x}_{\text{оп}}(\tilde{b}), x_{\text{н}}^0\}$ является планом задачи (1), соответствующим вектору \tilde{b} , и функция (2) определена при этом значении вектора ограничений.

Множество определения функции $\varphi(b)$ является выпуклым. Это следует из соотношений

$$\begin{aligned} Ax^0 &= b, A\tilde{x}^0 = \tilde{b}, 0 \leq x^0 \leq d, 0 \leq \tilde{x}^0 \leq d, 0 \leq t \leq 1, \\ b(t) &= b + t(\tilde{b} - b), x(t) = x^0 + t(\tilde{x}^0 - x^0), \\ Ax(t) &= Ax^0 + tA(\tilde{x}^0 - x^0) = b + t(\tilde{b} - b) = b(t), \\ 0 \leq x(t) &= (1-t)x^0 + t\tilde{x}^0 \leq (1-t)d + td = d. \end{aligned}$$

Согласно теореме двойственности (см. введение), функцию (2) можно определить через двойственную к (1) задачу:

$$\varphi(b) = \min (b'y + d'\omega), A'y + \omega \geq c, \omega \geq 0. \quad (4)$$

Компонента $Y = Y(b)$ множества $\{Y, W\}$ оптимальных планов двойственной задачи состоит из единственного элемента y^0 , если план x^0 невырожденный. Это легко следует из обоснования правил перехода (итерации) в двойственном опорном методе. В силу приведенных выше вычислений это свойство сохранится и для всех векторов \tilde{b} из достаточно малой окрестности вектора b . Поскольку множества $Y(\tilde{b})$, $\|\tilde{b} - b\| \leq \varepsilon$, компактны, то, повторив доказательство из п. 1. § 1, убеждаемся, что функция $\varphi(b)$ непрерывна в окрестности точки b . Из определения (4) и свойства выпуклых функций следует, что $\varphi(b)$ — вогнутая функция.

Нетрудно убедиться, повторив соответствующие доказательства из § 1, что многозначная функция $X(b)$, характеризующая множество оптимальных планов, непрерывна сверху, оптимальный двойственный план $y^0 = y^0(b)$ непрерывно зависит от вектора ограничений.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть $\{x^0, A_{оп}\}$ — оптимальный невырожденный опорный план задачи (1), соответствующий вектору ограничений b . Тогда максимальное значение $\varphi(b)$ целевой функции определено в окрестности точки b и является вогнутой функцией, непрерывно зависящей от b ; многозначная функция $X(b)$ полунепрерывна сверху в точке b ; двойственный оптимальный план $y^0 = y^0(b)$ непрерывен по b .

2. Коэффициенты чувствительности по вектору ограничений. По аналогии с § 1 введем

О п р е д е л е н и е. Правым и левым коэффициентами чувствительности целевой функции по i -й компоненте вектора ограничений называются числа

$$v_i^+ = v_i^+(b) = \frac{\partial \varphi(b)}{\partial b_i^+}, \quad v_i^- = v_i^-(b) = \frac{\partial \varphi(b)}{\partial b_i^-}. \quad (5)$$

Для вычисления коэффициентов чувствительности найдем сначала формулу для производной по направлению:

$$\frac{\partial \varphi(b)}{\partial g} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{\varphi(b + \varepsilon g) - \varphi(b)}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Из определения (4) функции $\varphi(b)$ имеем

$$(b + \varepsilon g)' \tilde{y}^0 + d' \tilde{w}^0 = \varphi(b + \varepsilon g) \leq (b + \varepsilon g)' y^0 + d' w^0, \\ b' \tilde{y}^0 + d' \tilde{w}^0 \geq \varphi(b) = b' y^0 + d' w^0.$$

Отсюда

$$(b + \varepsilon g)' \tilde{y}^0 - b' \tilde{y}^0 \leq \varphi(b + \varepsilon g) - \varphi(b) \leq (b + \varepsilon g)' y^0 - b' y^0.$$

Разделив эти неравенства на $\varepsilon > 0$, получим

$$g' \tilde{y}^0 \leq \frac{\varphi(b + \varepsilon g) - \varphi(b)}{\varepsilon} \leq g' y^0. \quad (7)$$

Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда $\tilde{b} = b + \varepsilon g \rightarrow b$ и в силу непрерывности функции $\tilde{y}^0 = y^0(b)$ имеем $\tilde{y}^0 \rightarrow y^0$. Таким образом, из (7) получаем

$$\partial \varphi(b) / \partial g = g' y^0. \quad (8)$$

З а м е ч а н и е. Можно показать [7], что формула (8) для случая, когда множество $Y(b)$ оптимальных двойственных планов ограничено, имеет вид

$$\partial \varphi(b) / \partial g = \min g' y, \quad y \in Y(b). \quad (9)$$

Перейдя от (5) к (6), сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. Пусть $\{x^0, A_{\text{оп}}\}$ — оптимальный невырожденный план, $y^0 = \{y_1^0, \dots, y_m^0\}$ — оптимальный двойственный план, соответствующие вектору b . Коэффициенты чувствительности по вектору ограничений, $v_i^+(b) = v_i^-(b) = v_i(b) = y_i^0$.

З а м е ч а н и е. Из (9) следуют формулы

$$v_i^+(b) = \min y, y \in Y(b); v_i^-(b) = \max y_i, y \in Y(b).$$

Теорема 2 вскрывает физический смысл двойственных переменных в производственной задаче (см. гл. I): число y_i^0 характеризует степень дефицитности i -го ресурса в оптимальном плане производства.

3. Вычисление оптимального плана для нового вектора ограничений. Пусть известен оптимальный план x^0 задачи (1), вычисленный прямым опорным методом. Требуется найти оптимальный план \tilde{x}^0 для случая, когда в задаче (1) вектор ограничений b заменен на новый \tilde{b} . При решении этой задачи естественно, как и в § 1, воспользоваться симплексной таблицей, соответствующей плану x^0 .

По определению, $A_{\text{оп}}x_{\text{оп}}^0 + A_{\text{н}}x_{\text{н}}^0 = b$, т. е. $x_{\text{оп}}^0 = A_{\text{оп}}^{-1}b$ — $A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}x_{\text{н}}^0$. Вычислим вектор

$$\kappa_{\text{оп}} = A_{\text{оп}}^{-1}\tilde{b} - A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}\kappa_{\text{н}}. \quad (10)$$

Если

$$0 \leq \kappa_{\text{оп}} \leq d_{\text{оп}}, \quad (11)$$

то, согласно критерию оптимальности двойственного опорного метода (см. гл. II), вектор $\tilde{x}^0 = \{\kappa_{\text{оп}}, \kappa_{\text{н}}\}$ является решением поставленной задачи.

Вектор (10) легко подсчитывается по элементам симплексной таблицы для плана x^0 .

Дальнейшие вычисления удобно проводить двойственным опорным методом. Поскольку симплексная таблица для плана x^0 соответствует базисному коплану $\delta^0 (\Delta_j = \delta_j = 0$ для опорных индексов), то операции двойственного опорного метода совпадают с операциями двойственного симплекс-метода.

Для описанного метода остается справедливым замечание из п. 3 § 1: метод эффективен при небольших изменениях вектора b .

З а м е ч а н и е. Для вогнутой функции $\varphi(b)$ справедливо неравенство $\varphi(\tilde{b}) - \varphi(b) \leq k'(\tilde{b} - b)$, где k' — субградиент. Исходя из (9),

можно показать, что множество субградиентов в точке b совпадает с $Y(b)$. Следовательно, величина $v'(b)(\bar{b}-b)$, где $v(b) = \{v_1(b), \dots, v_m(b)\}$, $v(b) \in Y(b)$, полученная с помощью коэффициентов чувствительности, является оценкой сверху для приращения оптимального значения целевой функции.

4. Пример. Рассмотрим производственную задачу из п. 7 § 3 гл. I. В качестве исходных данных возьмем результаты вычислений из п. 4 § 1 данной главы. В табл. VII.3 приведем оптимальный план

$$x^0 = \{10, 25, 105/11, 15/11, 0, 0, 120/11\} \quad (12)$$

для задачи с вектором стоимости $c = \{15, 30, 20, 15\}$ и вектором ограничений $b = \{1000, 500, 700\}$:

$$\begin{aligned} 15x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 & \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 35x_2 + 5x_3 + 20x_4 + x_5 &= 1000, \\ 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 5x_4 + x_6 &= 500, \\ 8x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + x_7 &= 700, \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, 7}. \end{aligned}$$

Для подсчета элементов b -столбца из табл. VII.3 и таблиц из п. 7 § 3 гл. I извлекаем обратную матрицу

$$A_{\text{оп}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/55 & -1/55 & 0 \\ -1/55 & 4/55 & 0 \\ -4/11 & -6/11 & 1 \end{bmatrix}$$

и умножаем ее на вектор b . Табл. VII.3 удовлетворяет критерию оптимальности прямого опорного метода (см. § 3 гл. I). Оптимальный план x^0 невырожденный. Известно (см. введение): $y^{0'} = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} y^0 = \{y_1^0, y_2^0, y_3^0\} = \{15, 20, 0\} & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{3}{55} & -\frac{1}{55} & 0 \\ -\frac{1}{55} & \frac{4}{55} & 0 \\ -\frac{4}{11} & -\frac{6}{11} & 1 \end{array} \right\} = \\ & = \left\{ \frac{5}{11}, \frac{13}{11}, 0 \right\}. \end{aligned}$$

Вектор y^0 — единственный оптимальный двойственный план.

Согласно результатам п. 3, коэффициенты чувстви-

тельности по вектору ограничений для оптимального плана x^0

$$\begin{aligned} v_1^+ = v_1^- = v_1 = \frac{5}{11}, \quad v_2^+ = v_2^- = v_2 = \frac{13}{11}, \\ v_3^+ = v_3^- = v_3 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда следует, что ресурсы по операциям третьего типа в оптимальном плане производства недефицитны ($v_3=0$). Этот вывод согласуется с тем, что остаток этих ресурсов $x_7^0 = 120/11$. Из (13) видно, что в оптимальном плане степень дефицитности ресурсов второго типа в $v_2/v_1 = 13/5$ раза больше дефицитности ресурсов первого типа. Другими словами, изменение ресурсов второго типа в $13/5$ раз резко сказывается на максимальной прибыли, чем изменение ресурсов первого типа.

Предположим, что ресурсы первого типа увеличились на 50 единиц (5%), т. е. новый вектор ограничений имеет вид $\tilde{b} = \{1050, 500, 700\}$. Из физического смысла коэффициента чувствительности $v_1(b)$ следует, что приближенное значение приращения максимальной прибыли $v_1 \cdot \Delta b_1 = 5/11 \cdot 50 = 250/11 (\sim 2\%)$.

Найдем новый оптимальный план \tilde{x}^0 и точное значение приращения целевой функции $\varphi(\tilde{b}) - \varphi(b)$. В табл. VII.3 заменим элементы b -столбца и $x_{\text{оп}}$ -столбца. В b -столбец поместим компоненты вектора

$$A_{\text{оп}}^{-1} \tilde{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{55} - \frac{1}{55} & 0 \\ -\frac{1}{55} & \frac{4}{55} & 0 \\ -\frac{4}{11} - \frac{6}{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1050 \\ 500 \\ 700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{530}{11} \\ \frac{190}{11} \\ \frac{500}{11} \end{bmatrix}.$$

По правилам двойственного опорного метода подсчитаем опорные компоненты $x_{\text{оп}}$ псевдоплана \tilde{x} . В результате получим табл. VII.4, а. Она не удовлетворяет критерию оптимальности. Результат первой итерации (табл. VII.4, б) удовлетворяет критерию оптимальности. Оптимальный план $\tilde{x}^0 = \{0, 25, 15, 5\}$.

Оптимальное значение целевой функции возросло на величину $(30 \cdot 25 + 20 \cdot 15 + 15 \cdot 5) - (15 \cdot 10 + 30 \cdot 25 + 20 \times 105/11 + 15 \cdot 15/11) = 206/11 (\sim 2\%)$.

5. Изменение границ переменных. Пусть в задаче (1) зафиксированы все параметры, за исключением век-

а

c $c_{оп}$				15	30	0	0	0	
d $d_{оп}$				10	25	∞	∞	∞	
κ $\kappa_{оп}$				10	25	0	0	$-80/11$	
a_j, b опора				a_1	a_2	a_5	a_6	a_7	b
15	5	$45/11$	a_4	$1/11$	$19/11$	$3/55$	$-1/55$	0	$530/11$
20	20	$95/11$	a_3	$7/11$	$1/11$	$-1/55$	$4/55$	0	$190/11$
0	∞	$-80/11$	a_7	$8/11$	$20/11$	$-4/11$	$-6/11$	1	$500/11$
			Δ	$-10/11$	$-25/11$	$5/11$	$13/11$	0	
			σ	$5/4$	$5/4$	$5/4$	$13/6$		

б

κ $\kappa_{оп}$			0	25	0	0	0	
5	5	a_4	$-3/5$	0	$2/5$	$1/2$	$-19/20$	5
20	15	a_3	$3/5$	0	0	$1/10$	$-1/20$	15
25	25	a_2	$2/5$	1	$-1/5$	$-3/10$	$11/20$	25
		Δ	0	0	0	$1/2$	$5/4$	

тора d . В этом случае максимальное значение целевой функции становится функцией этого вектора:

$$\varphi(d) = \max c'x, Ax = b, 0 \leq x \leq d. \quad (14)$$

Поскольку

$$\varphi(d) = \max c'x \left. \begin{matrix} Ax = b \\ x \leq d \end{matrix} \right\} x \geq 0$$

то для анализа решения можно воспользоваться результатами предыдущих пунктов.

Если $x^0 = x^0(d)$ — оптимальный невырожденный опорный план, то функция (14) определена и непрерывна в окрестности точки d .

Пусть множества X и $\{Y, W\}$ оптимальных планов задачи (1) и двойственной к ней задачи ограничены. Тогда многозначные функции $X(d)$, $Y(d)$, $W(d)$ полунепрерывны сверху и

$$\frac{\partial \varphi(d)}{\partial g} = \min_{w \in W(d)} g'w. \quad (15)$$

Как показано в гл. II, компоненты $w^0 = \{w_1^0, \dots, w_n^0\}$ оптимального двойственного плана $\{y^0, w^0\}$ легко находятся из Δ -строки симплексной таблицы плана x^0 :

$$w_i^0 = \Delta_i, \text{ если } \Delta_i < 0; w_i^0 = 0, \text{ если } \Delta_i \geq 0.$$

Из (15) легко получаются коэффициенты чувствительности $v_i^+(d)$, $v_i^-(d)$ целевой функции по вектору d .

§ 3. Вариация матрицы условий

Коэффициенты чувствительности критерия качества по матрице условий можно подсчитать исходя из формул производных по направлению [7]. Из-за громоздкости выкладок в данном параграфе без доказательства приводятся лишь окончательные формулы. Указываются процедуры вычислений нового оптимального плана при изменении элементов матрицы условий задачи.

1. Коэффициенты чувствительности целевой функции по элементам матрицы условий. Пусть x^c — оптимальный опорный план, вычисленный прямым опорным методом в задаче

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

По аналогии с предыдущими параграфами введем числа

$$v_{ij}^+ = v_{ij}^+(A) = \frac{\partial \varphi(A)}{\partial a_{ij}^+}; \quad v_{ij}^- = v_{ij}^-(A) = \frac{\partial \varphi(A)}{\partial a_{ij}^-},$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

характеризующие чувствительность функции $\varphi(A) = \max c'x$, $Ax = b$, $0 \leq x \leq d$, к изменениям элементов a_{ij} матрицы условий.

Если задача (1) имеет решение при вариации матрицы условий в окрестности точки A и множества $X(A)$, $Y(A)$ оптимальных планов прямой (1) и двойственной к ней задач компактны, то имеют место следующие формулы [7]:

$$v_{ij}^+(A) = \begin{cases} -v_i^-(b) v_j^-(c), & \text{если } v_i^-(b) \geq 0, \\ -v_i^-(b) v_j^+(c), & \text{если } v_i^-(b) < 0; \end{cases}$$

$$v_{ij}^-(A) = \begin{cases} -v_i^+(b) v_j^+(c), & \text{если } v_i^+(b) \geq 0, \\ -v_i^+(b) v_j^-(c), & \text{если } v_i^+(b) < 0. \end{cases}$$

В частности, когда правые и левые коэффициенты чувствительности по векторам стоимости и ограничений равны между собой:

$$v_i^+(b) = v_i^-(b) = v_i(b), \quad i = \overline{1, m};$$

$$v_j^+(c) = v_j^-(c) = v_j(c), \quad j = \overline{1, n},$$

матрица $v(A)$ из коэффициентов чувствительности $v_{ij}(A)$ имеет вид

$$v(A) = -v(b)v'(c), \quad (2)$$

где $v(b) = \{v_1(b), \dots, v_m(b)\}$, $v(c) = \{v_1(c), \dots, v_n(c)\}$.

2. Изменение неопорного вектора условий. Требуется найти оптимальный план \tilde{x}^0 задачи (1), если один неопорный вектор условий a_k заменен на новый \tilde{a}_k .

В симплексной таблице плана $\{x^0, A_{\text{оп}}\}$ заменим a_k -столбец на \tilde{a}_k -столбец. Новые элементы \tilde{x}_{ik} , $i = \overline{1, m}$, вычислим по формуле

$$\{\tilde{x}_{1k}, \dots, \tilde{x}_{mk}\} = A_{\text{оп}}^{-1} \tilde{a}_k. \quad (3)$$

Обратную матрицу можно извлечь из симплексной таблицы плана x^0 (см. гл. I). В мультипликативном методе она известна.

Зная (3), легко подсчитать элемент $\tilde{\Delta}_k$ из $\tilde{\Delta}$ -строки и $\kappa_{оп}$, $\kappa_{н}$, (см. гл. II). Если

$$0 \leq \kappa_i \leq d_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

то, согласно критерию оптимальности двойственного опорного метода, вектор $\tilde{x}^0 = \{\kappa_{оп}, \kappa_{н}\}$ является оптимальным планом задачи (1) с новым вектором условий \tilde{a}_k .

В случае, когда неравенства (4) не выполняются, то для вычисления плана \tilde{x}^0 применяем двойственный опорный метод.

Неравенства (4) можно использовать для нахождения границ изменения компонент вектора \tilde{a}_k , в пределах которых для вычисления плана \tilde{x}^0 не требуется новых итераций.

Пример. Рассмотрим решение производственной задачи

$$\begin{aligned} 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 &\rightarrow \max, \\ 5x_1 + 35x_2 + 5x_3 + 20x_4 + x_5 &= 1000, \\ 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 5x_4 + x_6 &= 500, \\ 8x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + x_7 &= 700, \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, 7}, \end{aligned}$$

полученное в п. 7 § 3 гл. I. Оптимальный опорный план $x^0 = \{0, 25, 175/11, 25/11, 0, 0, 200/11\}$ является единственным и невырожденным (см. § 1). Следовательно,

$$\begin{aligned} v_i^+(c) &= v_i^-(c) = v_i(c), \quad i = \overline{1, n}; \\ v_i^+(b) &= v_i^-(b) = v_i(b), \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Согласно вычислениям § 1, 2, имеем

$$\begin{aligned} v(c) &= \{v_1(c), \dots, v_7(c)\} = \{0, 25, 175/11, 25/11, 0, 0, 200/11\}, \\ v(b) &= \{v_1(b), \dots, v_3(b)\} = \{5/11, 13/11, 0\}. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица $v(A)$ коэффициентов чувствительности имеет вид

$$v(A) = - \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 13 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ 0, 25, \frac{175}{11}, \frac{25}{11}, 0, 0, \frac{200}{11} \right\} =$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1375}{121} & \frac{875}{121} & \frac{125}{121} & 0 & 0 & \frac{1000}{121} \\ 0 & \frac{3575}{121} & \frac{2275}{121} & \frac{325}{121} & 0 & 0 & \frac{2600}{121} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оптимальное значение целевой функции наиболее чувствительно к изменению коэффициента a_{22} , т. е. к изменению затрат ресурсов на операции второго типа по изготовлению одного изделия второго типа.

Пусть расходы ресурсов трех типов на изготовление одного изделия второго типа характеризуются вектором $\tilde{a}_2 = \{35, 11, 20\}$ вместо прежнего $a_2 = \{35, 10, 20\}$. Найдем новый оптимальный план \tilde{x}^0 . В табл. VII.1 соответствующий оптимальному плану x^0 вектор a_2 неопорный. Вычислим

$$A_{\text{оп}}^{-1} \tilde{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{55} & -\frac{1}{55} & 0 \\ -\frac{1}{55} & \frac{4}{55} & 0 \\ -\frac{4}{11} & -\frac{6}{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{94}{55} \\ \frac{9}{55} \\ \frac{14}{11} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Заменим в табл. VII.1 элементы столбца a_2 координатами вектора (5). Пересчитаем элемент Δ_2 , κ и получим табл. VII.5, которая удовлетво-

Таблица VII.5

c c_0				10	30	20	0	0	
	d $d_{\text{оп}}$			10	25	20	∞	∞	
		κ $\kappa_{\text{оп}}$		0	25	155/11	0	0	
			a_j, b опора	a_1	a_2	a_3	a_5	a_6	b
15	5	30/11	a_4	1/11	94/55	0	3/55	-1/55	500/11
20	20	155/11	a_3	7/11	9/55	1	-1/55	4/55	200/11
0	∞	350/11	a_7	8/11	14/11	0	-4/11	-6/11	700/11
			Δ	45/11	-57/11	0	5/11	13/11	

ряет критерию оптимальности. Следовательно, $\bar{x}^0 = \{0, 25, 155/11, 30/11, 0, 0, 350/11\}$. Максимальная прибыль ($c'x^0 = 12\ 125/11$) уменьшилась на $324/11$. Приближенное значение разности, полученное с помощью коэффициента чувствительности, $v_{22}(A)\Delta a_{22} = -375/11$.

3. Изменение опорного вектора условий. Пусть известен оптимальный опорный план $\{x^0, A_{\text{оп}}\}$. Требуется найти оптимальный план \bar{x}^0 , если опорный вектор условий a_k плана x^0 заменен на вектор \tilde{a}_k .

С изменением опорного вектора меняется обратная матрица. В этом и состоит основная трудность при исследовании рассматриваемого случая. Примеры вычисления новой обратной матрицы приведены в [1]. Ниже предлагается другой подход к задаче.

На симплексной таблице плана x^0 осуществим одну итерацию двойственного опорного метода (см. § 2 гл. II) с шагом $\sigma^0 = 0$. В качестве ведущего можно взять любой элемент x_{kj} ($x_{kj} \neq 0$), $k \neq j$. В полученной таблице вектор a_k становится неопорным, и поэтому можно применить метод п. 2.

§ 4. Изменение размеров задачи

Размер общей задачи линейного программирования характеризуется числом переменных (n) и числом основных ограничений (m). В данном параграфе приводятся правила вычисления нового оптимального плана при изменении этих параметров.

1. Увеличение числа переменных. Пусть $\{x^0, A_{\text{оп}}\}$ — оптимальный опорный план задачи

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, 0 \leq x \leq d, \quad (1)$$

в которой матрица условий A имеет размеры $m \times n$.

Используем результаты вычисления плана x^0 для решения задачи

$$c'x + c_{n+1}x_{n+1} \rightarrow \max, \\ Ax + a_{n+1}x_{n+1} = b, 0 \leq x \leq d, 0 \leq x_{n+1} \leq d_{n+1}, \quad (2)$$

у которой число переменных увеличилось на единицу по сравнению с задачей (1).

Ясно, что $(n+1)$ -вектор $\bar{x} = \{x^0, 0\}$ с опорой $A_{\text{оп}}$ является опорным планом задачи (2). Дополним симплексную таблицу плана x^0 новым столбцом a_{n+1} . Элементы $x_{i, n+1}$, $i \in I_{\text{оп}}$, основной части этого столбца суть

координаты вектора $A_{\text{оп}}^{-1}a_{n+1}$. Из критерия оптимальности прямого опорного метода следует, что неравенство

$$\Delta_{n+1} \geq 0, \Delta_{n+1} = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} a_{n+1} - c_{n+1} \quad (3)$$

является необходимым и достаточным условием оптимальности плана $\{x^0, 0\}$ в задаче (2).

Если неравенство (3) не выполняется, то для вычисления нового оптимального плана применяем прямой опорный метод.

Модуль отрицательной оценки Δ_{n+1} характеризует меру целесообразности введения новой переменной *.

Пример. Предположим, что в условиях анализируемого в данной главе примера из § 3 гл. I предлагается к производству изделие пятого типа. Пусть отчисления, расходы ресурсов первого, второго и третьего типов и прибыль на одно новое изделие характеризуются соответственно параметрами

$$a_{18}, a_{28}, a_{38}, c_8. \quad (4)$$

Найдем соотношения, при которых выпуск новых изделий целесообразен.

Новый вектор условий a_8 внесем в табл. VII.6 плана x^0 . Для этого с помощью обратной матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}$ плана x^0 подсчитаем вектор

$$A_{\text{оп}}^{-1}a_8 = \begin{bmatrix} \frac{3}{55} & -\frac{1}{55} & 0 \\ -\frac{1}{55} & \frac{4}{55} & 0 \\ -\frac{4}{11} & -\frac{6}{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{18} \\ a_{28} \\ a_{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3a_{18} - a_{28}}{55} \\ \frac{-a_{18} + 4a_{28}}{55} \\ \frac{-4a_{18} - 6a_{28}}{11} + a_{38} \end{bmatrix}.$$

Согласно критерию оптимальности прямого опорного метода, план $\{x^0, 0\}$ оптимален, если оценка Δ_8 нового вектора условий неотрицательна: $\Delta_8 \geq 0$. Подсчитав по табл. VII.6 величину Δ_8 , получим соотношение

$$\frac{3(3a_{18} - a_{28})}{11} + \frac{4(-a_{18} + 4a_{28})}{11} - c_8 \geq 0, \quad (5)$$

при выполнении которого производство нового изделия нецелесообразно.

* При оценке эффективности всюду разумно пользоваться относительными величинами.

c $c_{оп}$				10	30	15	0	0	19
	d $d_{оп}$			10	25	5	∞	∞	∞
		x $x_{оп}$		0	25	25/11	0	0	
			a_j , опора	a_1	a_2	a_4	a_5	a_6	a_8
15	5	25/11	a_4	1/11	19/11	1	3/55	-1/55	7/11
20	20	175/11	a_3	7/11	1/11	0	-1/55	4/55	5/11
0	∞	200/11	a_7	8/11	20/11	0	-4/11	-6/11	-65/11
Δ				45/11	-25/11	0	5/13	13/11	-4/11

		x $x_{оп}$		0	25	0	0	0	25/7
19	∞	25/7	a_8	1/7	19/7	11/7	3/35	-1/35	1
20	20	100/7	a_3	4/7	-8/7	-5/7	-2/35	3/35	0
0	∞	275/7	a_7	11/7	125/7	65/7	1/7	-5/7	0
Δ				29/7	-9/7	4/7	17/35	41/35	0

Поскольку опорный план $\{x^0, A_{оп}\}$ невырожден, то нарушение соотношения (5) означает, что при включении нового изделия в план производства общая прибыль предприятия увеличится.

Пусть параметры (4) таковы: $a_{18}=15$, $a_{28}=10$, $a_{38}=5$, $c_8=19$. Такие параметры нового изделия не удовлетворяют неравенству (5).

Следовательно, новое изделие нужно включить в план производства.

Вычислим новый оптимальный план $\{\tilde{x}_0^0, x_8^0\}$.

Исходная таблица имеет вид табл. VII.6, а. После одной итерации прямого опорного метода получаем табл. VII.6, б, которая удовлетворяет критерию оптимальности. Новый оптимальный план $\tilde{x}^0 = \{0, 25, 100/7, 0, 0, 0, 275/7, 25/7\}$. Таким образом, изделие четвертого типа следует снять с производства.

2. Уменьшение числа переменных. Рассмотрим теперь задачу, у которой число переменных меньше, чем в задаче (1):

$$\sum_{i=1, i \neq k} c_i x_i \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1, i \neq k} a_i x_i = b, \quad 0 \leq x_i \leq d_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad i \neq k.$$

Формально для нахождения плана \tilde{x}^0 достаточно вектор d в задаче (1) заменить на $\tilde{d} = \{d_1, \dots, d_{k-1}, 0, d_{k+1}, \dots, d_n\}$ и использовать результаты § 2.

Сформулированную задачу обобщает следующая задача: после получения плана x^0 задачи (1) требуется найти план \tilde{x}^0 , у которого значение координаты \tilde{x}_k^0 задано. В этом случае запишем условие $Ax = b$ в виде

$$\sum_{i=1, i \neq k} a_i x_i = b - a_k \tilde{x}_k^0 = \tilde{b}.$$

Если a_k — опорный вектор плана x^0 , то для вычисления оптимального плана \tilde{x}^0 используем процедуру § 2 (в симплексной таблице плана x^0 столбец a_k убираем). Если a_k — опорный вектор, то предварительно он выводится из опоры плана x^0 .

Пример. Пусть требуется, чтобы в плане производства интенсивность изготовления изделий второго типа равнялась $\tilde{x}_2^0 = 23$. Найдем оптимальные интенсивности для остальных изделий. Из табл. VII.3 находим $\tilde{b} = b - a_2 \tilde{x}_2^0 = \{500/11, 200/11, 700/11\} - \{19/11, 1/11, 20/11\} \cdot 23 = \{63/11, 177/11, 240/11\}$. Составим табл. VII.7, а. После одной итерации двойственного опорного метода получим оптимальный план (табл. VII.7, б).

3. Увеличение числа ограничений. Пусть к ограничениям задачи (1) добавляется одно из следующих соотношений:

c				10	20	15	0	0	
$c_{оп}$				10	20	5	∞	∞	
	d			10	20	5	∞	∞	
	$d_{оп}$			10	20	5	∞	∞	
		κ		0	177/11	63/11	0	0	
		$\kappa_{оп}$		0	177/11	63/11	0	0	
			a_i, b	a_1	a_3	a_4	a_5	a_6	b
			опора	a_1	a_3	a_4	a_5	a_6	b
15	5	63/11	a_4	1/11	0	1	3/55	-1/55	63/11
20	20	177/11	a_3	7/11	1	0	-1/55	4/55	177/11
0	∞	240/11	a_7	8/11	0	0	-4/11	-6/11	240/11
			Δ	45/11	0	0	5/11	13/11	
			σ	45			25/3		

	κ		0	49/3	5	40/3	0	
	$\kappa_{оп}$		0	49/3	5	40/3	0	
∞	40/3	a_5	5/3	0	55/3	1	-1/3	105
20	49/3	a_3	2/3	1	1/3	0	1/15	18
∞	80/3	a_7	4/3	0	20/3	0	-2/3	60
		Δ	10/3	0	-25/3	0	4/3	

$$a'x \leq \beta, \beta \geq 0, \quad (6)$$

$$a'x \geq \beta, \beta \geq 0, \quad (7)$$

$$a'x = \beta, \beta \geq 0. \quad (8)$$

Ясно, что если план x^0 задачи (1) удовлетворяет дополнительному ограничению, то он остается оптимальным в задаче (1) с одним из дополнительных ограничений (6) — (8). Поэтому будем считать, что на векторе x^0 ни одно из ограничений не выполняется.

Пусть дополнительное ограничение задано неравенством (6). Введя свободную переменную x_{n+1} , запишем (6) в виде

$$a'x + x_{n+1} = \beta, \quad x_{n+1} \geq 0. \quad (9)$$

Если эти соотношения добавить к задаче (1), то получим новую задачу

$$\begin{aligned} c'x &\rightarrow \max, \\ Ax &= b, \quad 0 \leq x \leq d, \\ a'x + x_{n+1} &= \beta, \quad 0 \leq x_{n+1}. \end{aligned}$$

Для нее имеем

$$x_{\text{оп}} = A_{\text{оп}}^{-1}b - A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}}x_{\text{н}}.$$

Следовательно, дополнительное ограничение (9) принимает вид

$$(a'_{\text{н}} - a'_{\text{оп}}A_{\text{оп}}^{-1}A_{\text{н}})x_{\text{н}} + x_{n+1} = \beta - a'_{\text{оп}}A_{\text{оп}}^{-1}b.$$

Это равенство записываем в $(m+1)$ -строку симплексной таблицы для плана x^0 . Строка Δ не изменится (добавится элемент $\Delta_{n+1}=0$). В $x_{\text{оп}}$ -столбце появится отрицательный элемент $x_{n+1} = \beta - a'x^0 < 0$. К новой таблице применяем двойственный опорный метод.

Величина $-x_{n+1}$ может служить мерой существенности нового ограничения.

Матрица из опорных векторов задачи (1) и (6) имеет вид

$$\tilde{A}_{\text{оп}} = \begin{bmatrix} A_{\text{оп}} & 0 \\ a'_{\text{оп}} & 1 \end{bmatrix},$$

где $a_{\text{оп}}$ — m -вектор, составленный из компонент вектора a , имеющих опорные индексы плана x^0 .

Легко проверить, что

$$\tilde{A}_{\text{оп}}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{\text{оп}}^{-1} & 0 \\ -a'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Значит, и в случае применения мультипликативного метода необходимые данные получаются просто.

Рассмотрим дополнительное ограничение (7). Запишем его в виде

$$-a'x + x_{n+1} = -\beta, \quad x_{n+1} \geq 0.$$

Рассуждая как и в предыдущем случае, введем a_{n+1} -столбец с вектором $a_{n+1} = e_{n+1}$, числом $\Delta_{n+1} = 0$, a_{n+1} -строку вида

$$(-a'_n + a'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} A_n) x_n + x_{n+1} = -\beta + a'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} b$$

с числом $x_{n+1} = -\beta + a'x^0 < 0$ и применим двойственный опорный метод. Ясно, что

$$\tilde{A}_{\text{оп}} = \begin{bmatrix} A_{\text{оп}} & 0 \\ -a'_{\text{оп}} & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{\text{оп}}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{\text{оп}}^{-1} & 0 \\ a'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть, наконец, добавляется ограничение (8). Запишем его в виде

$$a'x + x_{n+1} = \beta, \quad 0 \leq x_{n+1} \leq d_{n+1}, \quad d_{n+1} = 0.$$

Отсюда и из (9) видно, что дальнейшие операции совпадут с аналогичными для случая (6).

Пример. Предположим, что изделия всех типов должны проходить дополнительную обработку. Общий объем ресурсов на обработку $\beta = 540$. Расходы на одно изделие каждого из четырех типов равны соответственно

$$a_{41} = 5, \quad a_{42} = 15, \quad a_{43} = 10, \quad a_{44} = 5.$$

Найдем оптимальный план \tilde{x}^0 производства, учитывающий дополнительную обработку.

Дополнительное ограничение имеет вид

$$5x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 540.$$

Введя свободную переменную $x_8 \geq 0$,

$$5x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 5x_4 + x_8 = 540$$

и подставив в последнее равенство выражения для опорных переменных x_4, x_3, x_7 из табл. VII.3 плана x^0

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{500}{11} - \frac{1}{11} x_1 - \frac{19}{11} x_2 - \frac{3}{55} x_5, \\ x_3 &= \frac{200}{11} - \frac{7}{11} x_1 - \frac{1}{11} x_2 + \frac{4}{55} x_5, \end{aligned}$$

$$x_7 = \frac{700}{11} - \frac{8}{11} x_1 - \frac{20}{11} x_2 + \frac{4}{11} x_5,$$

получим соотношение

$$-\frac{20}{11} x_1 + \frac{60}{11} x_2 - \frac{1}{11} x_5 + x_8 = \frac{1440}{11},$$

которое добавим в табл. VII.3 плана x^0 . Получившаяся табл. VII.8, а не удовлетворяет критерию оптимальности. После одной итерации двойственного опорного метода получается табл. VII.8, б с оптималь-

ным планом: $\tilde{x}_1^0 = 0$, $\tilde{x}_2^0 = 24$, $\tilde{x}_3^0 = 16$, $\tilde{x}_4^0 = 4$, $\tilde{x}_5^0 = 0$, $\tilde{x}_6^0 = 0$, $\tilde{x}_7^0 = 20$, $\tilde{x}_8^0 = 0$.

4. Уменьшение числа ограничений. Пусть после получения оптимального плана x^0 задачи (1) удаляется k -е основное ограничение. Требуется найти новый оптимальный план \tilde{x}^0 .

Из физического смысла двойственных переменных (см. § 2) следует, что существенность в плане x^0 k -го ограничения определяется величиной k -й компоненты вектора y^0 из двойственного плана $\{y^0, w^0\}$.

Для построения плана \tilde{x}^0 по опоре $A_{\text{оп}}$ плана x^0 найдем вектор $\{y_1^0, \dots, y_m^0\} = u' = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}$. Для нового вектора $\tilde{u} = \{\tilde{u}_i = u_i, i \neq k, \tilde{u}_k = 0\}$ вычисляем оценки $\tilde{\Delta}_j = \tilde{u}' a_j - c_j = \Delta_j - u_k a_{kj}$, $j = \overline{1, n}$. Из опоры $A_{\text{оп}}$ удаляем вектор a_i , находящийся в k -й строке таблицы плана x^0 . Основная часть новой таблицы получается после преобразования старой относительно ведущего элемента x_{ls} , где s — индекс такого вектора условий, что $a_s = e_k$.

После ликвидации a_i -строки и a_s -столбца и заполнения Δ -строки оценками $\tilde{\Delta}_j$ получаем новую таблицу, к которой применяем прямой опорный метод.

Пример. В табл. VII.1 помещен оптимальный план производства x^0 при исходных данных из п. 7 § 3 гл. I. Предположим, что при обработке изделий ликвидируются операции первого типа. Найдем новый оптимальный план производства.

С помощью обратной матрицы $A_{\text{оп}}^{-1}$ (см. § 2) для опоры из табл. VII.1 вычислим

$$u' = \{15, 20, 0\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{3}{55} & -\frac{1}{55} & 0 \\ -\frac{1}{55} & \frac{4}{55} & 0 \\ -\frac{4}{11} & -\frac{6}{11} & 1 \end{array} \right\} = \left\{ \frac{5}{11}, \frac{13}{11}, 0 \right\}.$$

Таблица VII.8

а

c $c_{оп}$				10	30	0	0	0	
d $d_{оп}$				10	25	∞	∞	∞	
κ $\kappa_{оп}$				0	25	0	0	$-60/11$	
a_j, b				a_1	a_2	a_5	a_6	a_8	b
15	5	25/11	a_4	1/11	19/11	3/55	$-1/55$	0	500/11
20	20	175/11	a_3	7/11	1/11	$-1/55$	4/55	0	200/11
0	∞	$-200/11$	a_7	8/11	20/11	$-4/11$	$-6/11$	0	700/11
0	∞	$-60/11$	a_8	$-20/11$	$60/11$	$-1/11$	0	1	1440/11
			Δ	45/11	$-25/11$	3/11	13/11	0	
			σ	9/4	5/12	5			

б

κ $\kappa_{оп}$			0	24	0	0	0	
5	4	a_4						4
20	16	a_3						16
∞	20	a_7						20
25	24	a_2						24
		Δ	10/3	0	5/12	13/11	5/12	

c $c_{оп}$				10	30	20	15	0	0
	d $d_{оп}$			10	25	20	5	∞	∞
		x $x_{оп}$		0	25	175/11	25/11	0	200/11
			a_j опора	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7
20	20	175/11	a_3	2/3	2/3	1	1/3	1/15	0
0	∞	200/11	a_7	4/3	40/3	0	20/3	-2/3	1
			Δ	-10/3	-50/3	0	-25/3	4/3	0

x $x_{оп}$		0	25	15	5	0	0
15	a_3	3/5	0	1	0	1/10	-1/20
5	a_4	1/5	2	0	1	-1/10	3/20
	Δ	-5/3	0	0	0	1/2	5/4

Поскольку $u_1 = 5/11 \neq 0$, то первое ограничение для плана существенно. Подсчитаем новые оценки $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 - u_1 a_{11} = -10/3$, $\tilde{\Delta}_2 = -50/3$, $\tilde{\Delta}_3 = 0$, $\tilde{\Delta}_4 = -25/3$, $\tilde{\Delta}_6 = 4/3$, $\tilde{\Delta}_7 = 0$. Табл. VII.1 преобразуем относительно ведущего элемента x_{45} . После ликвидации a_4 -строки и a_5 -столбца получаем табл. VII.9, а. Преобразуем ее относительно ведущего элемента x_{75} . Новая табл. VII.9, б не удовлетворяет критерию оптимальности, но из нее легко получить оптимальный план $\tilde{x}_1^0 = 10$, $\tilde{x}_2^0 = 25$, $\tilde{x}_3^0 = 9$, $\tilde{x}_4^0 = 3$, $\tilde{x}_6^0 = 0$, $\tilde{x}_7^0 = 0$.

З а м е ч а н и е. В данной главе анализировался оптимальный план задачи. Нетрудно заметить, что во многих случаях методы анализа непосредственно переносятся и на каждый опорный план.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. М., «Прогресс», 1966.

2. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория и конечные методы). М., Физматгиз, 1963.

3. Билл Е. Альтернативный метод линейного программирования.— В кн.: Методы решения общей задачи линейного программирования. М., Госстатиздат, 1963.

4. Гасс С. Первое допустимое решение в задачах линейного программирования.— В кн.: Методы решения общей задачи линейного программирования. М., Госстатиздат, 1963.

5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. Минск, Изд-во Белорус. ун-та, 1975.

6. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М., ИЛ, 1963.

7. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. М., «Советское радио», 1966.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм прямого метода 22
— метода обратной матрицы 33
— выхода из цикла 127
Вектор базисный 53
— координирующий 105
— ограничений 143
— согласованный с копланом 69
— стоимости 143
— условий 9
Векторы базисные 53
Задача вырожденная 126
— классическая о диете 62
— на безусловный минимум 72
— на условный минимум 72
— невырожденная 9
— общая линейного программирования 7, 37
— — — в канонической форме 8
— — — в нормальной форме 7
— ограниченная 113
— о смесях 62
— о сплавах 62
— производная 92, 105
— прямая ограниченная 94
— расширенная 101
— регулярная 105
Защипливание 126
Индексы опорные 14
Итерация большая 91, 116, 133, 138
— малая 91, 116, 132, 137
— общая 9
Квазиплан 42
Компонента плана 14
— — неопорная 14
— — опорная 14
Коплан 55
— опорный 55
— — начальный 71
— — невырожденный 55
— оптимальный 67
Коэффициент чувствительности 146, 153
Критерий несовместности 82
— оптимальности 17, 38, 43, 53, 55, 56, 68, 92, 129, 139, 141
— отсутствия планов 54
— субоптимальности 13, 39, 57, 139, 141
— точности оценки субоптимальности 58
Матрица условий 143
Метод безопорно-опорный 124
Метод безопорный 102, 106
— — комбинированный 125
— двухсторонних оценок 113
— двухфазный 9
— комбинированный 112
— мультипликативный 36
— — двойственный 62
— наискорейшего подъема 72
— обратной матрицы 13, 32, 62
— одновременного решения 92
— опорно-безопорный 121
— опорный двойственный 51
— — комбинированный 119
— первого порядка 72
— по координатного подъема 72
— последовательного сокращения невязок 97
— прямой 13
— — опорный 13
М-метод 9
Множество индексов опорных 14
— планов оптимальных 144, 152

Модификации симплекс-метода 29

Направление допустимое 15, 81, 105, 109

— α -допустимое 106, 110

— оптимальное 109

— α -оптимальное 106, 110

— подходящее 91, 105, 109

— α -подходящее 106, 110

Неограниченность целевой функции 20, 40

Ограничение основное 37

Ограничения двухсторонние 42

— односторонние 13

— прямые 13, 14, 42

Опора задачи 14

Оптимизация локальная 49

Оценка 33, 43

— двухсторонняя 115

Переменные базисные 9

— искусственные 9

— неопорные коплана 67

— — положительные 17

— опорные коплана 67

— свободные 8

План 9

— базисный 9

— — невырожденный 9

— двойственный 53

— — базисный невырожденный 53

— локально оптимальный 49

— начальный 26

— опорный 12

— — вырожденный 127

— оптимальный 10, 42, 53

— ε -оптимальный (субоптимальный) 19

Потенциал 33, 43

Правило прямоугольника 11

Программирование линейное 7

Производная по направлению 146

Процедура стандартная 8

Псевдоплан 14, 42

— базисный 67

Размер задачи 143

Реализация табличная 130

Симплекс-метод 8

— двойственный 51, 52

Способ нормировки 105

— регуляризации 105

Столбец ведущий 26, 46, 54

Строка ведущая 54

Субградиент 148

Субдифференциал 148

Сущность декомпозиционная 105

Таблица симплексная 9

Теория двойственности 13, 19

Условие дополняющей нежесткости 8

— достаточное отсутствия планов 59

— — несуществования 21, 41

— — оптимальности 129

— — субоптимальности 19, 44, 45, 68

— необходимое оптимальности 129, 130

— неограниченности 20

— нормировочное 22

Фаза первая 9

— вторая 9

Форма мультипликативная 36

Функция многозначная 144

— — полунепрерывная сверху 144

— целевая 8

Шаг допустимый максимальный 23, 25

Элемент ведущий 29, 46, 54

- Г 12 **Габасов Р., Кириллова Ф. М.**
Методы линейного программирования. Ч. 1. Общие задачи. Мн., Изд-во БГУ, 1977.
176 с.

Подробно излагаются основные конечные методы численного решения общих задач линейного программирования: прямой, двойственный, комбинированный и их модификации. Исследуется задача анализа решения. Развиваются новые методы решения вырожденных задач. Принятый в книге новый подход к решению общей задачи линейного программирования позволяет эффективно использовать хорошие начальные приближения, догадки и опыт специалистов. Излагаемые методы допускают останов после получения субоптимальных планов.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров, специалистов, занятых прикладными задачами оптимизации. Может быть использована как учебное пособие студентами математических факультетов и факультетов прикладной математики.

Спис. лит. с. 172.

Рафаил Габасов
Фаина Михайловна Кириллова

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ч. I. Общие задачи

Редактор
Т. А. Акулович
Художник
В. И. Попов
Художественный редактор
И. Х. Беленькая
Технические редакторы
Н. Ф. Кленова,
В. П. Безбородова
Корректоры
Л. В. Лебедева, З. М. Машкевич

ИБ № 138

АТ 10212. Сдано в набор 28/III 1977 г.
Подписано в печать 13/X 1977 г. Формат
84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 1. Усл.
печ. л. 9,24. Учетн.-изд. л. 8,92. Тираж
5500 экз. Заказ 154. Цена 1 руб.

Издательство Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина. Минск, ул. Московская, 15. Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79.

1 p.