М.А. Евграфов

Асимптотические оценки и целые функции

М.А.Евграфов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ

Книга посвящена изложению различных методов асимптотических оценок (метод Лапласа, метод перевала, теория вычетов), применяемых, в теории целых функций. Методы иллюстрируются в основном на материале этой теории. Основные факты из теории целых функций не предполагаются известными читателю — их изложение органически входит в структуру книги. В 3-е издание добавлена глава об асимптотике конформных отображений.

Книга рассчитана на широкий контингент читателей — от студентов до научных работников как математиков, так и прикладников.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Со времени выхода в свет второго издания этой книги прошло уже более 15 лет. За это время появилось немало значительных работ по теории целых функций, и любую монографию по теории целых функций пришлось бы существенно дополнить новыми результатами. Однако эта книга — не монография по теории целых функций. В ней не было изложения современного состояния теории 15 лет назад, нет его и сейчас. Цель книги — рассказ о «техническом вооружении» математика, работающего в теории целых функций (да и во многих других разделах математики). Эта «техника» медленно устаревает и еще медленнее обогащается. Основной прогресс сводится здесь, главным образом, к отысканию лучших способов изложения. В это издание книги добавлена глава о методах оценок гармонической меры и асимптотике конформных отображений. Эта глава добавлена именно потому, что я нашел лучший способ изложить результаты. За счет добавления новой главы удалось улучшить и изложение III-ей (ранее второй) главы. Материал первой и четвертой главы почти не изменен *).

Как и прежде, книга рассчитана на довольно квалифицированного читателя — студентов старших курсов, аспирантов, научных работников (математиков и прикладников). От читателя предполагается знание ТФКП в объеме университетского курса. Специальных знаний из теории целых функций не требуется.

М. Евграфов

---

*) *Примечание при корректуре.* По техническим соображениям пришлось выбросить заключительный пример § 4 гл. IV.

Глава 1

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

§ 1.1. Асимптотическая формула и ряд

В этом параграфе мы договоримся о некоторых понятиях, которыми будем часто оперировать в дальнейшем. Однако прежде чем переходить к формулам и к строгим определениям, скажем несколько слов о роли асимптотических оценок в математике.

Допустим, что мы изучаем величину $f(x)$, которую можем вычислить при любом значении переменной x, но чем ближе x к некоторому предельному значению, скажем к нулю, тем сложнее вычисление нашей $f(x)$. В этом случае нам очень важно знать асимптотическую формулу для $f(x)$ при $x \to 0$, т. е. такую величину $f_1(x)$, которая просто вычисляется при всех x и отличается от $f(x)$ тем меньше, чем ближе x к нулю.

Рассмотрим простейший пример. Представим себя в роли старинного вычислителя, не имеющего таблиц логарифмов, желающего составить таблицу значений показательной функции 10^x. Для целых значений x эта функция вычисляется просто, а для дробных x вычисление функции становится тем сложнее, чем больше знаменатель дроби. Поэтому асимптотические формулы, получающиеся из ряда Тейлора

$$10^x = 1 + \frac{x \ln 10}{1!} + \frac{(x \ln 10)^2}{2!} + \ldots,$$

имеют для нас неоценимое значение.

Именно потребность в такого рода формулах привела к созданию дифференциального и интегрального исчисления. Широкое применение асимптотических формул привело к бурному развитию математического анализа после Ньютона. Недаром математический анализ долгое время носил название исчисления бесконечно малых.

Почти все методы асимптотических оценок, которые мы будем излагать в этой главе, были созданы более 100 лет назад.

Перейдем к определению понятий, которыми будем часто пользоваться на протяжении всей книги.

Пусть мы имеем множество S изменения переменной x и функцию $f(x)$, которая определена на этом множестве, и пусть точка a является предельной точкой множества S. Формулы

$$f(x) = o(\varphi(x)), \qquad x \to a,\ x \in S,$$

$$f(x) \sim \varphi(x), \qquad x \to a,\ x \in S,$$

$$f(x) = O(\varphi(x)), \qquad x \in S,$$

$$f(x) = O(\varphi(x)), \qquad x \to a,\ x \in S,$$

означает соответственно:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0, \qquad x \to a,\ x \in S,$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 1, \qquad x \to a,\ x \in S,$$

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leqslant M < \infty, \qquad x \in S,$$

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leqslant M < \infty, \qquad |x - a| < \rho,\ x \in S.$$

Например:

$$e^{-\frac{1}{x}} = o(1), \qquad x \to 0,\ x > 0,$$

$$\sin x \sim x, \qquad x \to 0,$$

$$\sin x = O(1), \qquad 0 < x < \infty,$$

$$\cos x = O(x), \qquad x \to +\infty,$$

$$\frac{\sin z}{z} = o(e^{|\operatorname{Im} z|}), \qquad z \to \infty,$$

$$1 - e^{-z} = O(z), \qquad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$\ln n! \sim n \ln n, \qquad n \to \infty,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

В случае, когда это не может вызвать недоразумений, указание на множество S, а иногда и на точку a мы будем опускать.

Все формулы указанного выше вида называются *асимптотическими формулами* или *асимптотическими оценками* (последнее выражение будет чаще всего относиться к формулам с o или O в правой части).

Асимптотическим рядом назовем совокупность бесконечного числа асимптотических формул, из которых каждая следующая уточняет все предыдущие. Более точно:

Пусть мы имеем последовательность функций $q_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, обладающих свойствами

$$q_n(x) > 0 \quad x\in S; \qquad \lim_{x\to a,\ x\in S} \frac{q_{n+1}(x)}{q_n(x)} = 0.$$

Мы будем говорить, что функция $f(x)$, определенная на S, имеет *асимптотический ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\mu_n(x)$, и записывать это формулой

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\mu_n(x), \qquad x\to a,\ x\in S,$$

если

1. $$\varlimsup_{x\to a,\ x\in S} \frac{|\mu_n(x)|}{q_n(x)} = c, \qquad 0<c<\infty,$$

2. $$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\mu_k(x) = o(q_n(x)), \qquad x\to a,\ x\in S.$$

Из определения видно, что для асимптотического ряда вопрос о его сходимости не играет никакой роли, а смысл понятия асимптотического ряда в том, что разность между $f(x)$ и частной суммой ряда мала по сравнению с наименьшим членом этой частной суммы. Ясно также, что разложение функции в сходящийся ряд не обязано давать нам асимптотический ряд для этой функции.

Тем не менее простейшие примеры асимптотических рядов дают нам сходящиеся степенные ряды. Например, из формул

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad |x|<1$$

следует

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \to 0.$$

Вообще надо отметить, что наиболее распространенными асимптотическими рядами являются ряды по степеням некоторой функции $\mu(x)$, т. е. $\mu_n(x) = [\mu(x)]^n$ (не обязательно сходящиеся).

Приведем несколько свойств асимптотических рядов.

Теорема 1.1.1. *Любая функция $f(x)$ может иметь не более одного асимптотического ряда (с одними и теми же S, a и $\mu_n(x)$).*

Доказательство. Из существования двух асимптотических разложений для одной и той же функции следовало бы существование разложения

$$0 \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k(x), \qquad x \to a, \ x \in S,$$

где не все a_k нули. Пусть a_n — первый отличный от нуля коэффициент. Из определения асимптотического ряда имеем

$$0 = a_n \mu_n(x) + o(q_n(x)), \qquad x \to a, \ x \in S,$$

т. е. $\mu_n(x) = o(q_n(x))$. Это противоречит свойству 1 функций $\mu_n(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Напротив, две различные функции вполне могут иметь один и тот же асимптотический ряд, например:

$$0 \approx 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots, \qquad x \to 0, \ x > 0$$

и

$$e^{-\frac{1}{x}} \approx 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots, \qquad x \to 0, \ x > 0,$$

так как $e^{-\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$, $x > 0$, стремится к нулю быстрее любой степени x.

Над асимптотическими рядами возможны различные действия. Правда, в общем случае лишь сложение не меняет их вида. Однако для степенных асимптотических рядов имеют место и более содержательные теоремы.

Теорема 1.1.2. *Если*

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x \to 0, \ x > 0,$$

то

$$f(x)+g(x)\approx\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ f(x)g(x)\approx\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n,\quad x\to 0,\ x>0,$$

где

$$c_n=a_n+b_n,\qquad d_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

Теорема 1.1.3. *Если* $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — *аналитическая функция, регулярная в окрестности точки* $z=0$, *и*

$$f(x)\approx\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n,\qquad x\to 0,\ x>0,$$

то

$$h(f(x))\approx\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\qquad x\to 0,\ x>0,$$

где коэффициенты c_n *получаются формальной подстановкой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ *в ряд для* $h(z)$ *и приведением членов с одинаковыми степенями* x.

Доказательство. Ограничимся доказательством только последнего утверждения, как самого сложного. Возьмем какое-либо $N>0$ и напишем

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N-1}b_nx^n+O(x^N),\ h(z)=\sum_{n=1}^{N-1}a_nz^n+O(z^N).$$

Очевидно, имеем

$$h(f(x))=\sum_{n=0}^{N-1}a_n\left(\sum_{k=1}^{N-1}b_kx^k\right)^n+O(x^N)=\sum_{m=0}^{N-1}c_mx^m+O(x^N).$$

Ясно, что c_k не зависят от N и что они получаются именно указанным в теореме способом. Теорема доказана.

Стоит сказать несколько слов о том, как мы будем отмечать равномерность оценок по параметрам, хотя возможность этого неявно предусмотрена уже в наших определениях.

Если функция $f(x,y)$ определена при $x\in S_1$, $y\in S_2$ и

$$f(x,y)\to 0,\qquad x\to a_1,\ x\in S_1$$

равномерно по y, $y \in S_2$, то мы можем написать

$$f(x, y) = o(1), \qquad x \to a_1, \ x \in S_1, \ y \in S_2.$$

Однако мы можем считать переменной пару (x, y), множеством S — прямое произведение множеств S_1 и S_2, а точкой a — произведение a_1 на S_2. Тогда то же утверждение запишется в виде

$$f(x, y) = o(1), \qquad (x, y) \to a, \ (x, y) \in S.$$

Чтобы подчеркнуть равномерность асимптотической оценки, мы чаще будем пользоваться первым обозначением.

Приведем теорему об интегрируемости и дифференцируемости асимптотических рядов, использующую понятие равномерности оценки.

Теорема 1.1.4. *Если*

$$f(x, y) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\, \mu_n(x), \qquad x \to a, \ x \in S, \ c_1 \leqslant y \leqslant c_2,$$

то

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x, y)\, dy \approx \sum_{n=0}^{\infty} \int_{c_1}^{c_2} a_n(y)\, dy \cdot \mu_n(x), \qquad x \to a, \ x \in S.$$

Если же $f(x, y)$ дифференцируема и

$$f'_y(x, y) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n(y)\, \mu_n(x), \qquad x \to a, \ x \in S, \ c_1 \leqslant y \leqslant c_2,$$

то $b_n(y) = a'_n(y)$.

Доказательство. Из равенства

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{N} a_n(y)\, \mu_n(x) + o(q_N(x)), \qquad x \to a, \ x \in S, \ c_1 \leqslant y \leqslant c_2$$

очевидно, имеем

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x, y)\, dy = \sum_{n=0}^{N} \int_{c_1}^{c_2} a_n(y)\, dy \cdot \mu_n(x) + o(q_N(x)), \qquad x \to a, \ x \in S,$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения нужно применить первое утверждение и теорему 1.1.1.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 1.1

1°. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$ и

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}, \qquad x \to +\infty.$$

Показать, что

$$\int_a^x f(t)\,dt \approx a_0 \ln x + c_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)\,x^{n+1}}, \qquad x \to +\infty.$$

2°. Пусть при любом $x \in S$ функция $f(x, z)$ регулярна по z в области D. Показать, что если

$$f(x, z) = o(1), \qquad x \to a,\ x \in S,\ z \in E$$

для любого замкнутого множества $E \subset D$, то и

$$f'_z(x, z) = o(1), \qquad x \to a,\ x \in S,\ z \in E$$

для любого замкнутого множества $E \subset D$.

3°. Показать, что если функция $f(z)$ регулярна в бесконечном секторе $|z| > R$, $|\arg z| < \theta$ и

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}, \qquad z \to \infty,\ |\arg z| < \theta,$$

то

$$f'(z) \approx -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+2}}, \qquad z \to \infty,\ |\arg z| < \theta - \eta$$

при любом $\eta > 0$.

4°. Пусть функция $F(z)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$, а числа λ_k удовлетворяют условиям $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$. Показать, что если

$$F(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}, \qquad \operatorname{Re} z \to +\infty,\ |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2},$$

то

$$F'(z) \approx -\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n e^{-\lambda_n z}, \qquad \operatorname{Re} z \to +\infty,\ |\operatorname{Im} z| < c,$$

при любом $c < \frac{\pi}{2}$.

5°. Пусть функция $f(x)$ регулярна в точке $x = \infty$. Показать, что существует не более двух решений уравнения $y'(x) + y^2(x) =$

$= f(x)$, для которых имеет место асимптотическое разложение вида

$$y(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}, \qquad x \to +\infty.$$

6°. Пусть функция $p(z)$ регулярна в некоторой области D, а функция $w(z, \lambda)$ удовлетворяет уравнению $w_z'' - \lambda^2 p(z) w = 0$. Предположив, что для функции $\ln w$ имеет место асимптотическое разложение вида

$$\ln w(z, \lambda) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) \lambda^{1-n}, \qquad \lambda \to +\infty,$$

показать, что коэффициенты $c_n(z)$ этого разложения удовлетворяют соотношениям

$$c_0'^2(z) = p(z), \quad c_{k-1}''(z) + \sum_{n=0}^{k} c_n'(z) c_{k-n}'(z) = 0, \qquad (k \geqslant 1).$$

§ 1.2. Метод Лапласа

Весьма важным общим методом получения асимптотических формул является *метод Лапласа*. Этот метод был найден Лапласом в его изысканиях по теории вероятностей, связанных с законом больших чисел.

Метод Лапласа применяется для получения асимптотических формул для функций, представленных интегралами вида

$$\int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t)\, dx,$$

где функция $F(x, t)$, грубо говоря, сохраняет знак на отрезке интегрирования и имеет на этом отрезке максимум, выделяющийся тем резче, чем больше значение параметра t. Сам Лаплас применял этот метод в основном к интегралам вида

$$\int_a^b \varphi(x) [f(x)]^n dx,$$

где $f(x) > 0$, а n — большое целое число.

Метод Лапласа особенно интересен тем, что он входит в качестве существенной составной части в метод перевала, предложенный Риманом. Применение метода Лапласа является в методе перевала как бы завершающим моментом.

Сущность метода Лапласа состоит в том, что весь интеграл заменяется асимптотически некоторой величиной, зависящей лишь от локального поведения подынтегральной функции в точке максимума (т. е. выражающейся через значения подынтегральной функции и ее производных в точке максимума). Эту величину мы будем называть *вкладом* точки максимума в интеграл. (Точное определение этого понятия дадим несколько позже.)

Применение метода Лапласа распадается обычно на две части: одна — найти вклад точки максимума, другая — показать, что весь интеграл асимптотически равен вкладу точки максимума.

Возможности метода очень многообразны и не могут быть исчерпаны небольшим количеством четких теорем. Мы попытаемся дать представление об основных идеях метода и попутно докажем несколько результатов для наиболее употребительных случаев.

Теорема 1.2.1. *Пусть*

$$F(t) = \int_0^a \varphi(x)\, e^{-xt} dx, \qquad a > 0,$$

где $\varphi(x)$ — *аналитическая функция, регулярная в точках отрезка* $0 < x \leqslant a$, *а в окрестности точки* $x = 0$ *представимая рядом* $\varphi(x) = x^\alpha (a_0 + a_1 x + \ldots)$, $\alpha > -1$. *Тогда*

$$F(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{t^{n+\alpha}} a_{n-1}, \qquad t \to +\infty. \tag{1}$$

Доказательство. Подынтегральная функция является произведением функции e^{-xt}, имеющей максимум при $x = 0$, выделяющийся тем резче, чем больше t, на мало меняющуюся функцию $\varphi(x)$. Если мы хотим найти вклад в интеграл точки $x=0$, то мы должны исследовать этот интеграл по отрезку $(0, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, так как вклад зависит лишь от локальных свойств $\varphi(x)$ при $x = 0$. Мы можем взять $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы ряд

$$\varphi(x) = x^\alpha (a_0 + a_1 x + \ldots)$$

сходился при $|x| \leqslant 2\varepsilon$. Тогда, очевидно,

$$\varphi(x) - x^{\alpha}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = O(x^{n+1+\alpha}), \quad |x| \leqslant \varepsilon,$$

и

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(x) e^{-xt} dx - \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{\varepsilon} x^{\alpha+k} e^{-xt} dx = O\left\{\int_0^{\varepsilon} x^{\alpha+n+1} e^{-xt} dt\right\}.$$

Но

$$\int_0^{\varepsilon} x^{\alpha+k} e^{-xt} dx = t^{-(\alpha+k+1)} \int_0^{\varepsilon t} u^{\alpha+k} e^{-u} du =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{t^{\alpha+k+1}} + O(e^{-\varepsilon t}),$$

и поскольку $O(e^{-\varepsilon t}) = o(t^{-n})$ при любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и n, то мы можем написать

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(x) e^{-xt} dx \approx \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(\alpha+k+1) \frac{a_k}{t^{k+\alpha+1}}, \quad t \to +\infty.$$

Если считать вкладом точки $x = 0$ в первоначальный интеграл интеграл по сколь угодно малому интервалу $(0, \varepsilon)$, то мы получили для вклада точки $x = 0$ асимптотический ряд.

Но

$$\int_{\varepsilon}^{a} \varphi(x) e^{-xt} dt = O(e^{-\varepsilon t}), \quad t \to +\infty.$$

Таким образом, интеграл по всему отрезку $(0, a)$ отличается от вклада точки $x = 0$ на величину $O(e^{-\varepsilon t})$, которая при $t \to +\infty$ меньше, чем любой член асимптотического ряда для вклада. Тем самым теорема доказана.

Часто удобнее писать для вклада точки $x=0$ в интеграл не весь асимптотический ряд (1), а более простую асимптотическую формулу, даваемую его первым членом:

$$F(t) \sim a_0 \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha-1}, \quad t \to +\infty. \tag{2}$$

Столь же просто доказывается и следующий результат.

Теорема 1.2.2. *Пусть*

$$F(t) = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{-tx^2} dx, \quad a > 0,$$

где $\varphi(x)$ — аналитическая функция, регулярная в точках отрезка $(-a, a)$. Тогда

$$F(t) \approx \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(0)}{n!\,2^{2n}} t^{-n-\frac{1}{2}}, \qquad t \to +\infty. \tag{3}$$

Доказательство. Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве предыдущей теоремы, замечаем, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^{2k+1} e^{-tx^2} dx = 0$$

и

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^{2k} e^{-tx^2}\, dx = t^{-k-\frac{1}{2}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) + O\left(e^{-\varepsilon^2 t}\right) =$$

$$= 2^{-2k} \frac{(2k)!}{k!} t^{-k-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + O\left(t^{2k} e^{-\varepsilon^2 t}\right).$$

Это приводит нас к формуле

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\, e^{-tx^2} dx \approx \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2k)}(0)}{(2k)!} \frac{(2k)!}{k!\,2^{2k}} t^{-k-\frac{1}{2}}$$

для вклада точки $x=0$. То, что весь интеграл равен вкладу точки $x = 0$, доказывается совершенно так же.

Если заменить асимптотический ряд для вклада его первым членом, то мы получим асимптотическую формулу

$$F(t) \sim \varphi(0) \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \qquad t \to +\infty. \tag{4}$$

Замечание. Нетрудно заметить, что формулы (1) — (4) остаются в силе и при $t \to \infty$ в комплексной плоскости, если $|\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$, $\eta > 0$. Действительно, оценки

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^k e^{-xt} dx = O\left(t^k e^{-\varepsilon t}\right) = o\left(t^{-n}\right)$$

остаются справедливыми и при $t \to \infty$, $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \eta$, с заменой t на $\operatorname{Re} t \geqslant |t| \sin \eta$, а этого достаточно для доказательств.

Перейдем теперь к несколько более общему случаю. Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b \varphi(x)\, e^{th(x)} dx, \tag{5}$$

где a, b, $\varphi(x)$ и $h(x)$ не зависят от t. В этом случае, как и в случаях, рассмотренных выше, вкладом точки максимума естественно называть интеграл по сколь угодно малой окрестности точки максимума.

Для интегралов вида (5) обычно очень легко доказывается, что асимптотическое поведение всего интеграла определяется суммой вкладов точек максимума с наибольшими значениями функции $h(x)$. Это очевидно, например, если интервал (a, b) конечен, а $\varphi(x)$ и $h(x)$ — аналитические функции, регулярные при $a \leqslant x \leqslant b$.

Теорема 1.2.3. *Пусть $\varphi(x)$ и $h(x)$ — аналитические функции на отрезке (a, b), $x=c$ — точка максимума $h(x)$. Если c совпадает с одним из концов и $h'(c) \neq 0$, то для вклада $V_c(t)$ точки $x = c$ в интеграл (5) имеет место асимптотический ряд*

$$V_c(t) \approx e^{th(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{t^{n+1}}, \quad t \to \infty, \ |\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta, \tag{6}$$

где коэффициенты a_n определяются из разложения

$$\varphi(c + \psi(u))\, \psi'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n,$$

а функция $\psi(u)$ определена уравнением $h(c+\psi(u)) = h(c) - u$, $\psi(0) = 0$.

Доказательство. Поскольку $h(x)$ — аналитическая функция, регулярная в точке $x = c$, и $h'(c) \neq 0$, то по теореме о неявной функции существует единственное решение уравнения $h(c+\psi(u)) = h(c) - u$, удовлетворяющее условию $\psi(0) = 0$, и это решение — аналитическая функция, регулярная в некоторой окрестности точки $u = 0$. Взяв $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы значения

$h(x) - h(c)$ при $|x-c| < \varepsilon$ находились в этой окрестности регулярности $\psi(u)$, мы рассмотрим интеграл по той части нашего отрезка интегрирования, которая лежит на интервале (a, b). Для определенности положим $c=a$, $h'(c)<0$. Тогда, сделав замену $h(x)=h(c)-u$, получим $x=c+\psi(u)$, $dx=\psi'(u)du$,

$$\int_c^{c+\varepsilon} \varphi(x)\, e^{th(x)}dx = e^{th(c)} \int_0^{\varepsilon_1} \varphi(c+\psi(u))\, \psi'(u)\, e^{-tu}du$$

и, применив теорему 1.2.1, придем к равенству (6).

Если мы ограничимся лишь первым членом асимптотического ряда, то, предположив, что $\varphi(c)\neq 0$, получим для вклада точки $x=c$ более простую асимптотическую формулу:

$$V_c(t) \sim \frac{\varphi(c)\, e^{th(c)}}{th'(c)}, \qquad t\to\infty, \ |\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2}-\eta. \qquad (7)$$

Теорема 1.2.4. *Пусть $\varphi(x)$ и $h(x)$ — аналитические функции на отрезке (a, b), а $x=c$ — точка максимума функции $h(x)$. Если $a<c<b$ и $h''(c)\neq 0$, то для вклада $V_c(t)$ точки $x=c$ в интеграл (5) имеет место асимптотический ряд*

$$V_c(t) \approx e^{th(c)} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}} \frac{a_{2n}}{t^n}, \quad t\to\infty, \ |\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2}-\eta, \qquad (8)$$

где коэффициенты a_n определяются из разложения

$$\varphi(c+\psi(u))\, \psi'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n,$$

а функция $\psi(u)$ определена уравнением

$$h(c+\psi(u)) = h(c) - u^2, \quad \psi(0)=0, \quad \psi'(0)>0.$$

Доказательство. Так как функция

$$h_1(x) = \sqrt{h(c)-h(x)} = \\ = (x-c)\sqrt{-\frac{h''(c)}{2}}\,(1+\alpha_2(x-c)+\ldots)$$

регулярна в точке $x = c$ и $h_1'(c) \neq 0$, то по теореме о неявных функциях уравнение для $\psi(u)$ имеет единственное решение (так как $\psi'(0) > 0$, то знак корня определен) и $\psi(u)$ регулярна в окрестности точки $u=0$. Взяв достаточно малую окрестность точки $x=c$ и сделав замену $h(x) = h(c) - u^2$, получим $x = \psi(u)$, $dx = \psi'(u)du$,

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} e^{th(x)}\varphi(x)dx = e^{th(c)} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{-tu^2}\varphi(c+\psi(u))\psi'(u)\,du.$$

Применив к последнему интегралу теорему 1.2.2, придем к формуле (8).

Ограничившись первым членом асимптотического ряда (8) и предположив, что $\varphi(c) \neq 0$, мы получим более простую асимптотическую формулу для вклада точки $x = c$

$$V_c(t) \sim \varphi(c)\sqrt{-\frac{2\pi}{h''(c)\cdot t}}\exp\{h(c)\cdot t\}, \qquad (9)$$

где

$$t \to \infty, \quad |\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta.$$

Условие аналитичности функций $\varphi(x)$ и $h(x)$ далеко не обязательно даже для справедливости формул (6) и (8). Вполне достаточно, если для этих функций имеют место асимптотические степенные разложения, аналогичные сходящимся степенным рядам, существование которых предполагалось в теореме 1.2.4.

Применение метода Лапласа заметно усложняется, когда подынтегральная функция зависит от параметра t иным образом. Обычно рекомендуется сделать подходящую замену переменной интегрирования и, если нужно, ввести новый параметр. Однако можно доказать некоторые результаты и для интегралов более или менее общего вида. Прежде чем формулировать результат, мы должны определить понятие вклада точки $x=c(t)$ в интеграл

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(x, t)\, e^{h(x,t)}dx. \qquad (10)$$

Ограничимся случаем, когда $x = c(t)$ — простая точка максимума функции $h(x, t)$, лежащая внутри отрезка $(a(t), b(t))$. В этом случае величина $h''_x(c(t), t)$ отлична от нуля. Величину

$$\rho_c(t) = |h''_x(c(t), t)|^{-\frac{1}{2}}$$

мы будем называть *радиусом влияния* точки максимума $x = c(t)$. До сих пор мы определяли вклад точки максимума как интеграл, пределы которого зависели от некоторого произвольного положительного параметра ε. Теперь мы будем считать вклад интегралом, пределы которого зависят от некоторой произвольной функции $\tau(t)$, удовлетворяющей условиям

$$\tau(t) \to +\infty, \quad \tau(t) \leqslant \tau_0(t) \qquad t \to +\infty.$$

Формула для вклада имеет вид

$$V_c(t) = \int\limits_{c(t)-\rho_c(t)\tau(t)}^{c(t)+\rho_c(t)\tau(t)} \varphi(x, t)\, e^{h(x,t)} dx.$$

В определении вклада имеется одно новое обстоятельство, связанное с функцией $\tau_0(t)$ (входящей в условия на функцию $\tau(t)$). Дело в том, что приведенное выше определение вклада корректно лишь тогда, когда асимптотическая формула для вклада не зависит от выбора функции $\tau(t)$. Выбрать такую функцию $\tau_0(t)$, чтобы определение вклада было корректно, не всегда возможно. Если это невозможно, то метод Лапласа неприменим. В рассмотренном выше случае можно взять $\tau_0(t) = \varepsilon\sqrt{t}$, а радиус влияния там равен $\alpha/\sqrt{t}$.

Мы приведем сейчас условия, при выполнении которых формула для вклада точки максимума корректно определена, и получим в этих условиях асимптотическую формулу для вклада.

Теорема 1.2.5. *Пусть выполнены условия:*

1) *При любом $A > 0$ и при $t > t_0(A)$ отрезок*

$$I_A(t) = \{x : c(t) - A\rho_c(t) \leqslant x \leqslant c(t) + A\rho_c(t)\}$$

лежит внутри отрезка $(a(t), b(t))$.

2) *При любом $A>0$ имеют место соотношения*

$$\frac{\varphi(x, t)}{\varphi(c(t), t)} \to 1, \quad \frac{h''_x(x, t)}{h''_x(c(t), t)} \to 1 \qquad t \to +\infty, \; x \in I_A(t).$$

Тогда вклад точки максимума $x=c(t)$ в интеграл (10) корректно определен и при $t \to +\infty$ для него справедлива асимптотическая формула

$$V_c(t) \sim \varphi(c(t), t)\, e^{h(c(t), t)} \sqrt{-\frac{2\pi}{h''_x(c(t), t)}}. \tag{11}$$

Доказательство. Для сокращения записи обозначим

$$I_A(t) = I_A, \qquad \varphi(c(t), t) = \varphi^*(t), \qquad h(c(t), t) = h^*(t).$$

Из условий 1) и 2) видно, что существует функция $\tau_0(t) \to +\infty$, для которой при $t \to \infty$ и $x \in I_{\tau_0(t)}$ имеют место соотношения

$$I_{\tau_0(t)} \in (a(t), b(t)), \quad \frac{\varphi(x, t)}{\varphi^*(t)} \to 1, \quad \rho_c^2(t)\, h''_x(x, t) \to 1.$$

Поэтому при $t \to \infty$ и $x \in I_{\tau(t)}$, где $0 \leqslant \tau(t) \leqslant \tau_0(t)$, имеем

$$\varphi(x, t)\, e^{h(x, t)} =$$

$$= [\varphi^*(t) + o(1)] \exp\left\{h^*(t) + (x - c(t))^2 \rho_c^{-2}(t)\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\right\}.$$

Отсюда нетрудно вывести, что

$$\int\limits_{I_{\tau(t)}} \varphi(x, t)\, e^{h(x, t)} dx \sim \varphi^*(t)\, e^{h^*(t)} \int\limits_{-\tau(t)\rho_c(t)}^{\tau(t)\rho_c(t)} e^{-\frac{1}{2} u^2 \rho_c^{-2}(t)} du.$$

Если выполнено условие $\tau(t) \to \infty$, то справедлива асимптотическая формула

$$\int\limits_{-\tau(t)\rho_c(t)}^{\tau(t)\rho_c(t)} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 \rho_c^{-2}(t)\right) du \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\rho_c^{-2}(t)}}$$

и мы приходим к утверждению теоремы, ибо $\rho_c^{-2}(t) = - h''_x(c(t), t)$.

Несколько сложнее доказывать, что весь интеграл равен вкладу точки максимума. Теоретически вполне можно представить себе случай, когда с увеличением t число локальных максимумов растет, а значения функции h в них различаются все меньше и меньше (или еще какую-либо трудность такого рода). В этом отношении очень часто бывает полезна следующая теорема.

Теорема 1.2.6. *Пусть $h(x)$ — положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям:*

1) $x^2h''(x) \to +\infty, \quad x \to +\infty; \qquad h'(x) \to +\infty, \quad x \to +\infty;$

2) *при любом $A>0$*

$$h''(u) \sim h''(x), \qquad x \to +\infty, \ |u-x| \leqslant A\,[h''(x)]^{-1/2}.$$

Тогда функция $h(x,t) = xt - h(x)$ имеет при достаточно больших t единственный максимум $x = c(t)$ и интеграл

$$\int_a^\infty e^{xt-h(x)}dx = F(t)$$

асимптотически равен вкладу этой точки максимума.

Доказательство. Согласно условию 1) функция $h'(x)$ возрастает при достаточно больших x. Поэтому при достаточно больших t уравнение $t = h'(x)$, получающееся при отыскании максимума функции $h(x, t)$, имеет единственное решение, которое мы будем обозначать $c(t)$. Имеем $\rho_c(t) = [h''(c(t))]^{-1/2}$; и из условий 1) и 2) следует выполнение условий 1) и 2) теоремы 1.2.5, так что для вклада имеет место формула (11).

Оценим интегралы

$$I_1(A) = \int_a^{c(t)-A\rho_c(t)} e^{xt-h(x)}dx \quad \text{и} \quad I_2(A) = \int_{c(t)+A\rho_c(t)}^\infty e^{xt-h(x)}dx.$$

Для определенности ограничимся каким-либо одним, скажем $I_2(A)$. Сделаем замену $xt-h(x) = -u$. Это даст нам

$$I_2(A) = \int_{u(t,A)}^\infty \frac{e^{-u}du}{h'(x(u)) - t},$$

где $u(t, A)=h(c(t)+A\rho_c(t))-(c(t)+A\rho_c(t))t$. В силу монотонного возрастания $h'(x)$ и согласно условию 2) имеем

$$I_2(A) < \frac{e^{-u(t,A)}}{h'(c(t)+A\rho_c(t))-t} =$$

$$= \frac{\exp\{-h(c(t)+A\rho_c(t))+(c(t)+A\rho_c(t))t\}}{h'(c(t)+A\rho_c(t))-h'(c(t))} =$$

$$= e^{-h(c(t))+tc(t)} \frac{\exp\{h(c(t))-h(c(t)+A\rho_c(t))+h'(c(t))A\rho_c(t)\}}{h'(c(t)+A\rho_c(t))-h'(c(t))} =$$

$$= e^{-h(c(t))+tc(t)} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}A^2\rho_c^2(t)h''(c(t)+\vartheta_1 A\rho_c(t))\right\}}{A\rho_c(t)h''(c(t)+\vartheta_2 A\rho_c(t))} \sim$$

$$\sim \rho_c(t)e^{-h(c(t))+tc(t)}\frac{e^{-\frac{A^2}{2}}}{A}.$$

Следовательно, при $A\to\infty$ интегралы $I_1(A)$ и $I_2(A)$ малы по сравнению с вкладом точки $x=c(t)$, который по формуле (11) равен

$$\sqrt{2\pi}\rho_c(t)e^{-h(c(t))+tc(t)}.$$

Теорема доказана.

Теоремы 1.2.5 и 1.2.6 часто дают возможность сразу написать асимптотические формулы для интересующих нас интегралов.

Пример. 1. Найдем асимптотическое поведение при $x\to+\infty$ гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}du=\int_{-\infty}^\infty e^{-e^x+xs}dx.$$

Здесь $h(x)=e^x$ и условия 1) и 2) теоремы 1.2.6, очевидно, выполнены. Точка максимума $x=\ln s$, ее вклад согласно теореме 1.2.5 равен

$$\sqrt{\frac{2\pi}{s}}s^s e^{-s}.$$

Поэтому теорема 1.2.6 дает нам так называемую формулу Стирлинга

$$\Gamma(s+1)\sim\sqrt{2\pi s}s^s e^{-s}, \quad s\to+\infty. \tag{12}$$

Сделав замену $u=xs$, мы могли бы привести интеграл для $\Gamma(s+1)$ к виду (5) и получить для $\Gamma(s+1)$ асимптотический ряд. Мы не будем этого делать, так как в § 1.4 получим более удобный асимптотический ряд для $\ln\Gamma(s)$ другим способом.

Приведенные теоремы, как мы уже предупреждали, далеко не исчерпывают всех возможностей метода Лапласа. Например, для интегралов вида (10) часто бывает возможно получить более точные асимптотические формулы для вклада точки максимума. Покажем, как это делается, на одном простом примере.

Пример 2. Найдем асимптотическое поведение при $t\to+\infty$ функции

$$F(t)=\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-e^x+xt}dx, \qquad \alpha>-1.$$

Сделаем замену $x=u+\ln t$. Тогда получим

$$F(t)=e^{t\ln t}\int\limits_{-\ln t}^{\infty}(\ln t+u)^\alpha e^{-t(e^u-u)}du.$$

Как обычно, нетрудно показать, что весь интеграл асимптотически равен вкладу точки $u=0$, т. е. интегралу по сколь угодно малой окрестности этой точки. Обозначим через $\psi(v)$ решение уравнения

$$e^{\psi(v)}-\psi(v)=v^2+1,\quad \psi(0)=0,\quad \psi'(0)>0.$$

Соображения, использованные при доказательстве теоремы 1.2.4, показывают, что $\psi(v)$ является аналитической функцией в некоторой окрестности точки $v=0$. Делая замену

$$e^u-u=1+v^2,\ u=\psi(v),\ du=\psi'(v)dv,$$

находим

$$F(t)=e^{t\ln t-t}\left\{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\ln t+\psi(v))^\alpha e^{-tv^2}\psi'(v)\,dv+O\left(e^{-\varepsilon^2t}\right)\right\}.$$

Но

$$(\ln t+\psi(v))^\alpha\psi'(v)=(\ln t)^\alpha\sum_{k=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty a_{k,m}v^k(\ln t)^{-m}.$$

Поэтому

$$F(t) \approx t^t e^{-t} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} (\ln t)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}} a_{2k,m} t^{-k} (\ln t)^{-m},$$

где коэффициенты $a_{k,m}$ без особого труда могут быть выражены через коэффициенты разложения $\psi(v)$ в ряд Тэйлора.

Интересные задачи, приводящие к другим формулам для вклада точки максимума, возникают, когда две или больше точки максимума находятся на расстоянии друг от друга того же порядка, что и их радиусы влияния. Такого же рода трудности возникают и тогда, когда особые точки $\varphi(x, t)$ или $h(x, t)$ находятся на расстоянии от точки максимума порядка ее радиуса влияния. Рассмотрим два примера такого рода.

Пример 3. Найдем асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ функции

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^{\alpha}x}\, dx, \qquad \alpha > 0.$$

Здесь функция $\varphi(x, t) = (1+t^{\alpha}x)^{-1}$ имеет особую точку $x = -t^{\alpha}$, расположенную вблизи точки максимума $x = 0$ функции $h(x, t) = -tx$. Для точки максимума, в которой первая производная отлична от нуля, тоже можно ввести понятие радиуса влияния. В нашем случае радиус влияния точки $x=0$ равен t^{-1}. Поэтому мы должны рассмотреть три возможности: первая $\alpha < 1$, вторая $\alpha > 1$ и третья $\alpha = 1$.

При $\alpha < 1$, взяв $\tau(t) \to +\infty$, $\tau(t) t^{\alpha-1} \to 0$, мы можем написать

$$F(t) = \int_0^{\tau(t)t^{-1}} \frac{e^{-tx}}{1+t^{\alpha}x}\, dx + \int_{\tau(t)t^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^{\alpha}x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{t}(1+o(1)) + O\left(\frac{1}{t} e^{-\tau(t)}\right),$$

т. е.

$$F(t) \sim \frac{1}{t}, \qquad t \to +\infty,\ \alpha < 1.$$

При $\alpha > 1$ можно написать

$$F(t) = \int\limits_0^{2t^{-\alpha}} \frac{e^{-tx}}{1+t^\alpha x}\,dx + \int\limits_{2t^{-\alpha}}^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^\alpha x}\,dx =$$

$$= O\left(t^{-\alpha}\right) + (1+o(1)) \int\limits_{2t^{-\alpha}}^{\infty} t^{-\alpha} e^{-tx} \frac{dx}{x},$$

откуда находим

$$F(t) \sim (\alpha - 1)\, t^{-\alpha} \ln t, \qquad t \to +\infty,\ \alpha > 1.$$

Наконец, при $\alpha = 1$ имеем

$$F(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u+1}.$$

Пример 4. Найдем асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ функции

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 + x}\,dx.$$

Здесь имеются две точки максимума: $x = -t^{-1/4}$ и $x = t^{-1/4}$, находящиеся на расстоянии того же порядка, что и их радиусы влияния. Делая замену $x = ut^{-1/2}$, преобразуем наш интеграл к виду

$$F(t) = t^{-\frac{1}{4}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2-1)^2 + ut^{-\frac{1}{4}}}\,du$$

и без труда найдем для $F(t)$ асимптотический ряд

$$F(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\frac{2n+1}{4}}, \qquad t \to +\infty,$$

$$a_n = \frac{1}{(2n)!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^{2n} e^{-(u^2-1)^2}\,du.$$

Наиболее интересны задачи такого рода, в которых приходиться искать формулы, дающие равномерную оценку по параметру (в примере 3 по α). Разумеется, главный член в таких формулах выражается через специальные функции.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 1.2

1°. Пусть $\varphi(x)$ — аналитическая функция, регулярная при $0 < x \leqslant a$, а в окрестности точки $x = 0$ представимая рядом

$$\varphi(x) = x^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\beta}(a_0 + a_1x + \ldots), \qquad \alpha > -1.$$

Показать, что

$$\int_0^a \varphi(x)\,e^{-xt}dx \approx \Gamma(\alpha+1)\,t^{-\alpha-1}(\ln t)^{\beta}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\ln t)^{-n}, \qquad t \to \infty,$$

причем $b_0 = a_0$.

2°. Пусть функция $\tau(x)$ непрерывна на отрезке $(0, \infty)$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$ быстрее любой степени x, а $\varphi(x)$ ограничена при $x \to +\infty$, а при $|x| \leqslant h$ представима рядом $\varphi(x) = x^{\alpha}(a_0 + a_1x + \ldots)$. Показать, что

$$\int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\tau(x)\,dx \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n t^{-n-\alpha}, \qquad t \to +\infty,$$

где $c_n = \int_0^{\infty} x^{n+\alpha}\tau(x)\,dx$.

3°. Пусть D — некоторая область в плоскости (x, y), а $h(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, достигающая своего наибольшего в D значения в точке (x_0, y_0), лежащей внутри D. Введем обозначения:

$$A = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Показать, что если $AC - B^2 \neq 0$, то

$$\iint_D e^{th(x,y)}dx\,dy \sim \frac{\pi}{t}\,\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

§ 1.3. Применения теории вычетов

Очень большую роль при асимптотических оценках интегралов от аналитических функций играет возможность произвольно деформировать контур интегрирования в области регулярности подинтегральной функции. Дело в том, что, оценивая модуль интеграла интегралом от модуля подинтегральной функции, мы получаем оценку, очень сильно зависящую от выбора пути интегрирования, в то время как сам интеграл от выбора пути не зависит. При этом может оказаться, что подходящий выбор контура интегрирования даст нам возможность получить не только хорошую оценку сверху для интеграла, но и асимптотическую формулу.

Пример 1. Оценим коэффициенты a_n целой функции $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ при $n \to \infty$ через величину $M(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|$.

По формуле Коши имеем

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz,$$

откуда

$$|a_n| \leqslant M(r) r^{-n}.$$

Так как r любое, мы можем выбрать его так, чтобы эта оценка была возможно лучше. Это даст нам

$$|a_n| \leqslant \min_{0<r<\infty} M(r) r^{-n}.$$

Для функции $F(z) = e^z$ эта оценка дает $|a_n| \leqslant e^n n^{-n}$, в то время как на самом деле, согласно формуле Стирлинга (см. пример 1 § 1.2),

$$a_n = \frac{1}{n!} \sim e^n n^{-n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Пример 2. Найдем асимптотическое поведение при $n \to \infty$ коэффициентов a_n в разложении

$$(1-z)^{-\alpha}[-z^{-1} \ln(1-z)]^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$(0 < \alpha < 1, \ -\infty < \beta < \infty).$$

(Мы выбираем ветвь функции, положительную при $0 < z < 1$.)

Напишем опять

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{(1-z)^{-\alpha}}{z^{n+1}} \left[-\frac{\ln(1-z)}{z} \right]^{\beta} dz, \qquad r < 1.$$

Если оставить как контур интегрирования окружностью $|z| = r$, то мы не сможем сделать r большим единицы, а из-за множителя z^{-n-1} в подинтегральной функции нам выгодно отодвигать контур возможно дальше от точки $z = 0$. В таком положении естественнее всего взять за контур интегрирования границу круга $|z| \leqslant a$, $a > 1$, с радиальным разрезом $(1, a)$ (в силу условия $\alpha < 1$ интегрировать можно и по пути, проходящему через точку $z = 1$). Таким образом, интеграл, выражающий a_n, складывается из трех частей: интеграла по окружности $|z| = a$, интеграла по верхнему берегу разреза $(1, a)$ и интеграла по нижнему берегу этого разреза. Значения подинтегральной функции на берегах разреза мы должны взять те, которые получаются из выбранных нами значений при $z = 0$ непрерывным продолжением. Поскольку в дальнейшем нам придется делать такие вещи довольно часто, то в первый раз мы проведем продолжение подробно.

Выберем для функций $(1-z)^{-\alpha}$ и $-\ln(1-z)$ те ветви, которые положительны при $0 < z < 1$. Тогда при $z > 1$ функции $(1-z)^{-\alpha}$ и $-\ln(1-z)$ имеют вид

$$(z-1)^{-\alpha} e^{-i\alpha \arg(1-z)}, \quad -\ln(z-1) - i \arg(1-z),$$

так что по существу нам нужно определить лишь $\arg(1-z)$ на верхнем и на нижнем берегах разреза $(1, a)$. Согласно сделанному нами выбору ветвей мы можем считать, что $\arg(1-z) = 0$ при $0 < z < 1$. Чтобы попасть с отрезка $[0, 1]$ на верхний берег разреза $(1, a)$, мы должны пройти из точки $z = 1 - \varepsilon$ в точку $z = 1 + \varepsilon$ по полуокружности $|z-1| = \varepsilon$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. При таком обходе $\arg(1-z)$ уменьшается на π. Аналогично при переходе на нижний берег разреза $(1, a)$ с отрезка $[0, 1]$ этот аргумент увеличивается на π. Поэтому на верхнем берегу разреза имеем

$$(1-z)^{-\alpha}\left[-\frac{\ln(1-z)}{z}\right]^{\beta}=(z-1)^{-\alpha}e^{\pi i\alpha}\left[-\frac{\ln(z-1)}{z}+\pi i\right]^{\beta},$$

а на нижнем берегу

$$(1-z)^{-\alpha}\left[-\frac{\ln(1-z)}{z}\right]^{\beta}=(z-1)^{-\alpha}e^{-\pi i\alpha}\left[-\frac{\ln(z-1)}{z}-\pi i\right]^{\beta}.$$

Так как интеграл по окружности $|z|=a$ равен $O(a^{-n})$, то

$$a_n=\frac{e^{\pi i\alpha}}{2\pi i}\int_1^a (x-1)^{-\alpha}\left[-\frac{\ln(x-1)}{x}+\pi i\right]^{\beta}\frac{dx}{x^{n+1}}-$$

$$-\frac{e^{-\pi i\alpha}}{2\pi i}\int_1^a (x-1)^{-\alpha}\left[-\frac{\ln(x-1)}{x}-\pi i\right]^{\beta}\frac{dx}{x^{n+1}}+O(a^{-n})$$

или, после замены $x-1=\frac{t}{n}$,

$$a_n=\frac{e^{\pi i\alpha}n^{\alpha-1}}{2\pi i}\int_0^{n(a-1)} t^{-\alpha}\left[\frac{\ln n-\ln t}{1+\frac{t}{n}}+\pi i\right]^{\beta}\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n+1}}-$$

$$-\frac{e^{-\pi i\alpha}n^{\alpha-1}}{2\pi i}\int_0^{n(a-1)} t^{-\alpha}\left[\frac{\ln n-\ln t}{1+\frac{t}{n}}-\pi i\right]^{\beta}\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n+1}}+$$

$$+O(a^{-n}).$$

Но

$$\int_0^{n(a-1)} t^{-\alpha}\left[\frac{\ln n-\ln t}{1+\frac{t}{n}}\pm\pi i\right]^{\beta}\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n+1}}\sim(\ln n)^{\beta}\int_0^{\infty}t^{-\alpha}e^{-t}dt=$$

$$=(\ln n)^{\beta}\,\Gamma(1-\alpha),\qquad n\to\infty$$

и мы получаем окончательно

$$a_n\sim\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\Gamma(1-\alpha)\,n^{\alpha-1}(\ln n)^{\beta}=\frac{n^{\alpha-1}(\ln n)^{\beta}}{\Gamma(\alpha)},\quad n\to\infty$$

С помощью дифференцирования нетрудно убедиться, что эта формула справедлива и при любых $\alpha > 1$.

Пример 3. Найдем асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ функции

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xt}{\sqrt{1+t^2}}\, dt.$$

Так как функция $\sqrt{1+t^2}$ четна, мы можем написать

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt.$$

Заметим, что применить прямо к этому интегралу метод Лапласа нельзя, так как подинтегральная функция сильно осциллирует.

Будем деформировать контур. Функция e^{ixt} стремится к нулю при $x \to +\infty$ тем сильнее, чем больше $\operatorname{Im} t$. Поэтому нам выгоднее поднять контур возможно выше. Этому препятствует особая точка подинтегральной функции при $t = i$. Естественнее всего взять за контур интегрирования два берега разреза $(i, +i\infty)$. (Такое смелое обращение с бесконечным контуром интегрирования допустимо, так как в той области, где мы деформируем контур, наша подинтегральная функция стремится к нулю, и притом довольно быстро.) Рассуждая так же, как в предыдущем примере, легко получаем, что при переходе с отрезка $[0, i]$ на левый берег разреза $(i, +i\infty)$ величина $\arg \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2}\arg(t+i) - \frac{1}{2}\arg(t-i)$ увеличивается на $\frac{\pi}{2}$, а при переходе на правый берег разреза — уменьшается на $\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$F(x) = \int_{\infty}^{1} \frac{e^{-xy} i\, dy}{-i\sqrt{y^2-1}} + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-xy} i\, dy}{i\sqrt{y^2-1}} =$$

$$= 2\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-xy}\, dy}{\sqrt{y^2-1}} = 2e^{-x}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-xu}\, du}{\sqrt{u(u+2)}}.$$

Остается применить к последнему интегралу теорему 1.2.1, что даст нам

$$F(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{(n!)^3 2^{4n-1}} x^{-n}, \qquad x \to +\infty.$$

Особенно хороши для получения асимптотических формул те случаи, когда препятствием для перенесения контура в сторону уменьшения подинтегральной функции являются полюсы. Тогда мы можем переносить контур и за полюс, компенсировав это прибавлением вычета. Обычно первый же вычет дает нам асимптотическую формулу.

Пример 4. Найдем асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ функции

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} \frac{dt}{\sqrt{t^2+\pi^2}}.$$

Как и в предыдущем примере, напишем сначала

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch} t} \frac{dt}{\sqrt{t^2+\pi^2}}.$$

Опять нам выгодно поднять контур возможно выше. Этому мешают полюс при $t = \frac{\pi i}{2}$ и точка ветвления при $t = \pi i$. Величину

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch} t} \frac{dt}{\sqrt{t^2+\pi^2}} - \int_{\pi i-\infty}^{\pi i+\infty} \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch} t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t^2+\pi^2}}$$

можно рассматривать как интеграл по замкнутому контуру (в силу стремления подинтегральной функции к нулю на бесконечности). Внутри полосы $0 < \operatorname{Im} t < \pi$, ограниченной этим замкнутым контуром, подинтегральная функция имеет один простой полюс при $t = \frac{\pi i}{2}$ с вычетом $e^{-\frac{\pi}{2}x} \frac{2}{\pi i \sqrt{3}}$, так что согласно теореме о вычетах

$$I(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{2}x}.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\pi i-\infty}^{\pi i+\infty} \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch} t} \frac{dt}{\sqrt{t^2+\pi^2}} =$$

$$= -e^{-\pi x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}}{\operatorname{ch} u} \frac{du}{\sqrt{t(u+2\pi i)}} = O(e^{-\pi x}), \qquad x \to +\infty,$$

где $u = t - \pi i$. Следовательно,

$$F(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi x}{2}} + O(e^{-\pi x}), \qquad x \to +\infty.$$

Еще один путь применения теории вычетов состоит в том, чтобы находить некоторые интегралы в конечном виде и, наоборот, выражать конечные величины через интегралы. Первое интересно, но не очень связано с нашими задачами, а второе имеет большое значение для получения асимптотических оценок. Приведем ряд примеров такого рода.

Начнем с формулы для одного вида интегралов, которую рассмотрим лишь по той причине, что интегралы такого вида будут часто встречаться нам в главе II.

Пример 5. Докажем формулу

$$\int\limits_0^{\infty} x^{a-1} Q(x)\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \sum \text{выч.}\ (-z)^{a-1} Q(z),$$

где $Q(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на положительной части действительной оси, а a — такое действительное число, что интеграл сходится и в нуле, и в бесконечности.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_L (-z)^{a-1} Q(z)\, dz,$$

взятый по двум берегам разреза $(0, +\infty)$, как интеграл по замкнутому контуру. (Для функции $(-z)^{a-1}$ выбираем ветвь, положительную при отрицательных z.) По теореме о вычетах имеем

$$I = 2\pi i \sum \text{выч.}\ (-z)^{a-1} Q(z).$$

С другой стороны, на верхнем берегу разреза $(-z)^{a-1} = -z^{a-1}e^{-\pi i a}$, а на нижнем $(-z)^{a-1} = -z^{a-1}e^{\pi i a}$, и следовательно,

$$I = -e^{-\pi i a}\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)\,dx - e^{\pi i a}\int_\infty^0 x^{a-1}Q(x)\,dx =$$

$$= 2i\sin\pi a\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)\,dx.$$

Сравнивая эти два выражения, получаем искомую формулу.

Пример 6. Покажем, что если

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n],$$

то

$$F(z, x) = \sum_{n=0}^\infty z^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2xz+z^2}}, \qquad |z| < 1.$$

Начнем с того, что по формуле Коши представим $P_n(x)$ интегралом

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t-x|=R}\frac{(1-t^2)^n}{2^n(t-x)^{n+1}}\,dt.$$

Умножим теперь обе части этого равенства на z^n и просуммируем от нуля до бесконечности. При фиксированном R и при достаточно малых z можно поменять порядок суммирования и интегрирования. Получаем

$$F(x, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t-x|=R}\frac{2dt}{2(t-x)-z(1-t^2)}.$$

Подинтегральная функция имеет два полюса:

$$t_1 = \frac{1}{z}\left(\sqrt{1+2xz+z^2}-1\right) \text{ и } t_2 = -\frac{1}{z}\left(\sqrt{1+2xz+z^2}+1\right).$$

Сразу видно, что при достаточно малых z только полюс $t = t_1$ лежит внутри контура интегрирования. Поэтому

$$F(x, z) = \underset{t=t_1}{\text{выч.}} \frac{2}{2(t-x) - z(1-t^2)} = \frac{1}{1+zt_1} = \frac{1}{\sqrt{1+2xz+z^2}}.$$

Пример 7. Найдем асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ функции $\varphi(x)$ — единственного положительного корня уравнения $w \ln w = x$.

Покажем сначала, что $\varphi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ $(x \to +\infty)$. Действительно, при достаточно больших x имеем очевидное неравенство $\varphi(x) < x$. Из него легко находим

$$\ln \varphi(x) < \ln x, \quad \varphi(x) > \frac{x}{\ln x} \quad \text{и} \quad \varphi(x) < \frac{x}{\ln \dfrac{x}{\ln x}},$$

откуда и следует $\varphi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Далее, функция $w \ln w$ в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 1$ действительна лишь при действительных w, так как ее мнимая часть

$$\operatorname{Im}\{\rho e^{i\theta} \ln(\rho e^{i\theta})\} = \rho \ln \rho \sin\theta + \rho\theta\cos\theta =$$
$$= \rho \sin\theta\,(\ln\rho + \theta \operatorname{ctg}\theta)$$

при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\rho > 1$ в нуль не обращается. Поэтому в круге $\left| w - \frac{x}{\ln x} \right| < \frac{1}{2} \frac{x}{\ln x}$ функция $w \ln w - x$ имеет ровно один нуль $w = \varphi(x)$, и по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\left|w - \frac{x}{\ln x}\right| = \frac{1}{2}\frac{x}{\ln x}} \frac{w(\ln w + 1)}{w \ln w - x}\, dw = \varphi(x).$$

Сделаем в интеграле замену $w = (1+t)\frac{x}{\ln x}$ и обозначим для краткости $\sigma = \frac{\ln \ln x}{\ln x}$, $\tau = \frac{1}{\ln x}$. После несложных преобразований получим

$$\varphi(x) = \frac{x}{\ln x}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{(1+t)[1-\sigma+\tau(1+\ln(1+t))]}{1-\sigma\frac{1+t}{t}+\tau\frac{1+t}{t}\ln(1+t)}\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{x}{\ln x}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \Phi(t,\sigma,\tau)\,dt.$$

При $x \to +\infty$ величины σ и τ стремятся к нулю. Поэтому на окружности $|t| = \frac{1}{2}$ функция $\Phi(t,\sigma,\tau)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по степеням σ и τ:

$$\Phi(t,\sigma,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{km}(t)\,\sigma^k\tau^m,$$

где

$$(-1)^m a_{km}(t) = C_{k+m}^m\left(\frac{1+t}{t}\right)^{k+m+1}[\ln(1+t)]^m -$$

$$- C_{k+m-1}^m\left(\frac{1+t}{t}\right)^{k+m}[\ln(1+t)]^m -$$

$$- C_{k+m}^{m-1}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{k+m+1}[\ln(1+t)]^{m-1}[1+\ln(1+t)].$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \frac{x}{\ln x}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{km}\frac{(\ln\ln x)^k}{(\ln x)^{k+m}}, \quad c_{km} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\frac{1}{2}} a_{km}(t)\,dt.$$

Асимптотический ряд для $\varphi(x)$ сходится при достаточно больших x.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 1.3

1°. Пусть

$$f(z) = (1-z)^m\left[-\frac{\ln(1-z)}{z}\right]^\beta \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad m = 0, 1, 2, \ldots;$$

где $\varphi(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant a$, $a > 1$ и $\varphi(1) \neq 0$. Показать, что

$$a_n \sim \varphi(1)\frac{(m-1)!}{n^{m+1}}\beta(\ln n)^{\beta-1}, \qquad n\to\infty.$$

2°. Используя соотношение $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$, показать, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L t^{-z}e^t dt,$$

где L — граница полуполосы $|\operatorname{Im} t|<a$, $\operatorname{Re} t<b$, $b>0$.

3°. Показать, что если $\psi(x)$ — аналитическая функция, регулярная в области D, то при $x\in D$ и при достаточно малых z

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n Q_n(x)=\frac{\partial}{\partial x}t(x,z), \qquad Q_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[\psi^n(x)],$$

где $t(x, z)$ — решение уравнения $t=x+z\psi(t)$, $t(x,0)=x$.

4°. Обозначим через $\varphi(x)$ положительный корень уравнения $w^\alpha e^w=x$, $-\infty<\alpha<\infty$, стремящийся к $+\infty$ при $x\to+\infty$. Показать, что

$$\varphi(x)\approx \ln x-\alpha\ln\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{km}\frac{(\ln\ln x)^m}{(\ln x)^{k+m}}, \qquad x\to+\infty.$$

§ 1.4. Формулы суммирования

Методы теории вычетов с успехом применяются для преобразования конечных сумм и бесконечных рядов в интегралы, что имеет большое значение для получения асимптотических формул. Мы докажем две основные теоремы, часто употребляемые с этой целью, и рассмотрим несколько примеров их применений.

Начнем с вывода формулы Пуассона. Мы докажем ее при довольно сильных ограничениях, вполне приемлемых для большинства задач. Желающие ознакомиться с более общими условиями применимости формулы Пуассона могут найти исчерпывающую информацию в книге Е. К. Титчмарша «Введение в теорию интеграла Фурье», Гостехиздат, 1948 г.

Теорема 1.4.1. *Обозначим через $D_{a\eta}$ область, получающуюся удалением из плоскости углов*

$$\left|\arg(z-ia)-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}-\eta \quad \text{и} \quad \left|\arg(z+ia)+\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}-\eta.$$

Пусть аналитическая функция $f(z)$ регулярна в области $D_{a\eta}$ с какими-нибудь $a>0$ и $\eta>0$ и удовлетворяет условию

$$|f(x+iy)|\leqslant \varepsilon(|x|)\,e^{\gamma|y|},\quad x+iy\in D_{a\eta},\tag{1}$$

где $\gamma<2\pi$, а $\varepsilon(u)\to 0$ при $u\to+\infty$. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{2k\pi ix}dx,\tag{2}$$

если ряд в левой части равенства (2) сходится.

Доказательство. Прежде всего докажем сходимость интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{2k\pi ix}dx$. Нам придется ввести некоторые обозначения. Возьмем два целых положительных числа N_1 и N_2 и обозначим через $C_{N_1N_2}$ границу части области $D_{a\eta}$, лежащей в полосе $-N_1-\frac{1}{2}<\operatorname{Re} z<N_2+\frac{1}{2}$. Через $C^+_{N_1N_2}$ и $C^-_{N_1N_2}$ обозначим соответственно верхнюю и нижнюю половины контура $C_{N_1N_2}$. Через C^+ и C^- обозначим верхнюю и нижнюю границы области $D_{a\eta}$ (в отличие от $C^+_{N_1N_2}$ и $C^-_{N_1N_2}$, где мы сохраняем то же направление, что и на $C_{N_1N_2}$, направление на C^+ и C^- мы будем считать одинаковым: от $-\infty$ к $+\infty$).

Из условия (1) следует, что интегралы $\int\limits_{C^+} f(z)\,e^{2k\pi iz}dz$ при $k\geqslant 1$ и $\int\limits_{C^-} f(z)\,e^{2k\pi iz}dz$ при $k\leqslant -1$ сходятся. Более того, оценивая с помощью условия (1) интегралы по вертикальным частям контуров $C^\pm_{N_1N_2}$, мы легко получаем (согласно теореме Коши) при $k\geqslant 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{\pm 2k\pi ix}dx=$$

$$=\pm\lim_{N_1N_2\to\infty}\int\limits_{C^\pm_{N_1N_2}} f(z)\,e^{\pm 2k\pi iz}dz=\int\limits_{C^\pm} f(z)\,e^{\pm 2k\pi iz}dz.\tag{3}$$

Это дает нам сходимость интересующих нас интегралов при $k\neq 0$.

Чтобы доказать сходимость интеграла при $k=0$, рассмотрим интеграл

$$I_{N_1N_2}=\frac{1}{2i}\int\limits_{C_{N_1N_2}} f(z)\operatorname{ctg}\pi z\,dz,$$

который по теореме о вычетах равен $\sum\limits_{n=-N_1}^{N_2} f(n)$. С другой стороны,

$$I_{N_1N_2}=\frac{1}{2i}\int\limits_{C^+_{N_1N_2}} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z+i)\,dz+$$

$$+\frac{1}{2i}\int\limits_{C^-_{N_1N_2}} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z-i)\,dz-\frac{1}{2}\int\limits_{C^+_{N_1N_2}} f(z)\,dz+\frac{1}{2}\int\limits_{C^-_{N_1N_2}} f(z)dz.$$

Но

$$\frac{1}{2i}(\operatorname{ctg}\pi z+i)=\frac{e^{2\pi iz}}{(1-e^{2\pi iz})},$$

$$\frac{1}{2i}(\operatorname{ctg}\pi z-i)=\frac{e^{-2\pi iz}}{(1-e^{-2\pi iz})},$$

а последние два интеграла по теореме Коши не зависят от пути. Поэтому

$$\sum_{n=-N_1}^{N_2} f(n)-\int\limits_{-\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}^{N_2+\frac{1}{2}} f(x)\,dx=$$

$$=-\int\limits_{C^+_{N_1N_2}}\frac{f(z)\,e^{2\pi iz}}{1-e^{2\pi iz}}\,dz+\int\limits_{C^-_{N_1N_2}}\frac{f(z)\,e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}}\,dz.$$

В силу оценки (1) интегралы в правой части при N_1, $N_2\to\infty$ стремятся к интегралам по C^+ и C^-. Отсюда видно, что интересующий нас интеграл сходится. Кроме того, мы получаем формулу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + \int_{C^+} \frac{f(z)\,e^{2\pi iz}}{1-e^{2\pi iz}}\,dz + \int_{C^-} \frac{f(z)\,e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}}\,dz. \tag{4}$$

На C^+ имеем

$$\frac{e^{2\pi iz}}{1-e^{2\pi iz}} = e^{2\pi iz} + e^{4\pi iz} + e^{6\pi iz} + \ldots,$$

а на C^-

$$\frac{e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}} = e^{-2\pi iz} + e^{-4\pi iz} + e^{-6\pi iz} + \ldots$$

Подставляя эти разложения в формулу (4) и интегрируя почленно, что законно ввиду равномерной сходимости рядов, мы получаем утверждение нашей теоремы.

Приведем два несложных примера применения формулы Пуассона.

Пример 1. Найдем асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ функции

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}.$$

Запишем $F(x)$ как сумму от $-\infty$ до $+\infty$. Очевидно, имеем

$$F(x) = \frac{1}{2|x|} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}.$$

Для функции $f(z) = e^{\pi iz}(x^2+z^2)^{-1/2}$ условия теоремы 1.4.1 выполнены с $\gamma = \pi$. Поэтому формула Пуассона применима, и мы получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)\pi it}}{\sqrt{t^2+x^2}}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi((2k+1)\pi x);$$

здесь

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Асимптотическое поведение функции $\varphi(x)$ при $x \to +\infty$ мы уже исследовали в примере 3 § 1.3, где получили асимптотический ряд

$$\varphi(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{(n!)^3 2^{4n-1}} x^{-n}, \qquad x \to +\infty,$$

из которого видно, что в выражении для нашей суммы слагаемыми с $k > 0$ можно пренебречь. Кроме того, ясно, что функция $\varphi(x)$ четна. Значит, асимптотическое поведение всей суммы вполне определяется двумя слагаемыми: $\varphi(\pi x)$ и $\varphi(-\pi x)$ (т. е. $k = 0$ и $k = -1$). Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}} \approx \frac{e^{-\pi x}}{\sqrt{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(2m)!]^2}{(m!)^3 2^{4m-2}} (\pi x)^{-m}, \qquad x \to +\infty$$

и

$$F(x) \approx \frac{1}{2|x|} + \frac{e^{-\pi x}}{\sqrt{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(2m)!]^2}{(m!)^3 2^{4m-1}} (\pi x)^{-m}, \qquad x \to +\infty.$$

Пример 2. Найдем асимптотическое поведение при $x \to 0$, $x > 0$, функции

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 x}.$$

Здесь условия теоремы 1.4.1 выполнены с $\gamma = 0$ при $\eta < \frac{\pi}{4}$. Применение формулы Пуассона дает

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 x + 2k\pi i t} dt.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2x+2k\pi i t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\left(t-\frac{k\pi i}{x}\right)^2-\frac{k^2\pi^2}{x}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\,e^{-\frac{k^2\pi^2}{x}},$$

и мы приходим к интересному соотношению

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\,\psi\left(\frac{\pi^2}{x}\right).$$

Нетрудно заметить, что при $x \to +\infty$ имеем

$$\psi(x) - 1 \sim e^{-x}.$$

Поэтому

$$\psi(x) - \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}\,e^{-\frac{\pi^2}{x}}, \qquad x \to 0,\ x > 0.$$

Формулу Эйлера — Маклорена мы тоже докажем при довольно жестких ограничениях. (Доказательство этой формулы при меньших ограничениях можно найти в книге Г. Харди «Расходящиеся ряды», ИЛ, 1951 г.)

Теорема 1.4.2. *Пусть аналитическая функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geqslant \theta$, $-1 < \theta < 0$, *непрерывна вплоть до ее границы и удовлетворяет условиям:*

$$|f(x+iy)| \leqslant Me^{\gamma|y|}, \qquad \gamma < 2\pi$$

(M, вообще говоря, зависит от x),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(m+1)}(n)}{f^{(m)}(n)} = 0, \quad |f^{(m)}(n+iy)| \leqslant M_1e^{\gamma|y|}|f^{(m)}(n)|$$

(M_1 не зависит от n).

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \approx \int_{\theta}^{n} f(x)\,dx + \frac{1}{2}f(n) + C(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m f^{(2m+1)}(n), \tag{5}$$

где

$$C(\theta) = \int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} + \int\limits_{\theta}^{\theta-i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1},$$

$$B_m = \frac{2(-1)^m}{(2m+1)!} \int\limits_0^{\infty} \frac{y^{2m+1}}{e^{2\pi y}-1}\,dy.$$

Доказательство. Обозначим через $L_{R\varepsilon}$ контур, состоящий из вертикальных отрезков $[\theta - iR,\ \theta + iR]$, $[n+i\varepsilon,\ n+iR]$, $[n-i\varepsilon,\ n-iR]$, горизонтальных отрезков $[\theta - iR,\ n - iR]$, $[\theta + iR,\ n + iR]$ и полуокружности $|z-n| = \varepsilon$, $\operatorname{Re} z > n$. Перечисленные выше части образуют замкнутый контур, интегрировать по которому мы будем, как обычно, в положительном направлении. Через $L^+_{R\varepsilon}$ обозначим часть этого контура, состоящую из прямолинейных отрезков, лежащих выше действительной оси, через $L^-_{R\varepsilon}$ — симметричную часть, лежащую ниже действительной оси, а через K_ε — оставшуюся часть, т. е. полуокружность.

Рассмотрим интеграл

$$I_{R\varepsilon} = \frac{1}{2i} \int\limits_{L_{R\varepsilon}} f(z)\operatorname{ctg}\pi z\,dz = I^+_{R\varepsilon} + I^-_{R\varepsilon} + I_{n\varepsilon},$$

где через $I^+_{R\varepsilon}$, $I^-_{R\varepsilon}$ и $I_{n\varepsilon}$ обозначены интегралы по $L^+_{R\varepsilon}$, $L^-_{R\varepsilon}$ и K_ε соответственно. По теореме о вычетах имеем

$$I_{R\varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Найдем для $I_{R\varepsilon}$ другое выражение. В $I^+_{R\varepsilon}$ подставим

$$\operatorname{ctg}\pi z = -i - \frac{2i}{e^{-2\pi iz}-1},$$

а в $I^-_{R\varepsilon}$

$$\operatorname{ctg}\pi z = i + \frac{2i}{e^{2\pi iz}-1}.$$

Это даст нам

$$I_{R\varepsilon} = \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{n+i\varepsilon} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{n-i\varepsilon} f(z)\,dz + \int\limits_{\theta}^{\theta+iR} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} +$$

$$+ \int\limits_{\theta}^{\theta-iR} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1} - \int\limits_{n+i\varepsilon}^{n+iR} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} - \int\limits_{n-i\varepsilon}^{n-iR} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1} +$$

$$+ \int\limits_{\theta+iR}^{n+iR} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} + \int\limits_{\theta-iR}^{n-iR} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1} + \frac{1}{2i}\int\limits_{K_\varepsilon} f(z)\operatorname{ctg}\pi z\,dz.$$

Положим теперь $R\to+\infty$, $\varepsilon\to 0$. При $\varepsilon\to 0$ последний интеграл стремится к $\frac{1}{2}f(n)$ — половине вычета функции $\pi f(z)\operatorname{ctg}\pi z$ в точке $z=n$, а два предыдущих интеграла при $R\to+\infty$ стремятся к нулю в силу условия теоремы. В итоге получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int\limits_{\theta}^{n} f(x)\,dx + \frac{1}{2}f(n) + \int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} +$$

$$+ \int\limits_{\theta}^{\theta-i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1} + 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(n+iy)-f(n+iy)}{2i}\,\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}. \qquad (6)$$

Чтобы доказать теперь формулу (5), мы должны убедиться, что последний интеграл дает асимптотический ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B_m f^{(2m+1)}(n)$. С этой целью заметим, что по формуле Тэйлора

$$\left|\frac{f(n+iy)-f(n-iy)}{2i} - \sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\,y^{2m+1}f^{(2m+1)}(n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{y^{2p}}{(2p)!}\max_{|\xi|<y}|f^{(2p)}(n+i\xi)|.$$

Применяя условия теоремы к $f^{(m)}(n+iy)$, получаем, что при любом фиксированном p

$$\left|\int_0^\infty \frac{f(n+iy)-f(n-iy)}{2i}\,\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}-\sum_{m=0}^{p-1} B_m f^{(2m+1)}(n)\right| \leqslant$$
$$\leqslant M_2\,|f^{(2p)}(n)|,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Часто для определения $C(\theta)$ бывает выгодно положить $\theta=0$. Те же рассуждения с маленькой полуокружностью дают нам для $C(0)$ формулу

$$C(0)=-\frac{1}{2}f(0)-2\int_0^\infty \frac{f(iy)-f(-iy)}{2i}\,\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}. \tag{7}$$

Замечание 2. Для коэффициентов B_m, называемых числами Бернулли, можно дать и более удобные формулы. Например, они могут быть определены из равенства

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m t^{2m+1}=\frac{1}{2}\,\frac{e^t+1}{e^t-1}-\frac{1}{t}.$$

Для получения этого равенства можно положить в формуле (5) $f(z)=e^{tz}$ и взять разность $\sum\limits_{k=0}^{n+1} f(k)-\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$.

В качестве иллюстрации применения формулы Эйлера — Маклорена исследуем свойства функций $\Gamma(z)$ и $\zeta(z)$:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad \zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z},$$

с которыми нам часто придется сталкиваться в дальнейшем.

Начнем с функции $\Gamma(z)$, с которой мы уже немного познакомились (при действительных z) в примере 1

§ 1.2, где получили для нее асимптотическую формулу

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}, \qquad x \to +\infty. \tag{8}$$

Пример 3. Исследуем асимптотическое поведение функции $\Gamma(z)$ при комплексных z, $|z| \to \infty$.

Прежде всего с помощью формулы Эйлера — Маклорена получим одно важное интегральное представление для $\ln\Gamma(z)$.

Рассмотрим сумму

$$S(z, n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(z+k).$$

С одной стороны, из равенства $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (оно легко получается, например, интегрированием по частям в интеграле для $\Gamma(z)$) находим

$$S(z, n) = \ln\Gamma(z+n+1) - \ln\Gamma(z).$$

С другой стороны, по формуле Эйлера — Маклорена

$$S(z, n) = \int_0^n \ln(z+t)\,dt + \frac{1}{2}\ln(z+n) + C(z) + o(1), \qquad n \to \infty,$$

откуда

$$S(z, n) = (z+n)\ln(z+n) - z\ln z - n + \\ + \frac{1}{2}\ln(z+n) + C(z) + o(1), \qquad n \to \infty.$$

Сравнивая два выражения для $S(z, n)$, получаем

$$\ln\Gamma(z+n+1) - \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) + (z+n) = \\ = \ln\Gamma(z) - z\ln z + z + C(z) + o(1), \qquad n \to \infty.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и используя формулу (8), находим при $z > 0$:

$$\ln\Gamma(z) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + z\ln z - z - C(z),$$

Согласно замечанию 1 имеем

$$C(z) = \frac{1}{2}\ln z - \int_0^\infty \frac{\ln(z+iy) - \ln(z-iy)}{i} \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}$$

или, после интегрирования по частям,

$$C(z) = \frac{1}{2}\ln z + \frac{z}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln(1 - e^{-2\pi y})}{z^2 + y^2}\, dy.$$

Итак, мы нашли для $\ln \Gamma(z)$ интегральное представление:

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi - \\ - \frac{z}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{z^2 + t^2}\, dt. \qquad (9)$$

Это представление доказано нами при $z > 0$, но по принципу аналитического продолжения оно пригодно при $\operatorname{Re} z > 0$. Однако контур интегрирования в формуле (9) при действительных $z > 0$ можно поворачивать на угол φ, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, так как при $|\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$ подынтегральная функция стремится к нулю и не имеет особых точек. Представление

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \\ + \frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{z}{\pi}\int_0^{\infty e^{i\varphi}} \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{z^2 + t^2}\, dt \qquad (10)$$

уже пригодно при $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) > 0$. Таким образом, формула (9) дает возможность исследовать $\ln \Gamma(z)$ при $|\arg z| \leqslant \pi - \eta$, где $\eta > 0$ сколь угодно мало.

Интеграл в формуле (10) при любом φ равен $O\left(\frac{1}{z}\right)$. Поэтому

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{z}\right), \qquad (11)$$

$$z \to \infty, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \eta.$$

При желании нетрудно получить и асимптотический ряд

$$\ln \Gamma(z) \approx \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{2m+1} z^{-m},$$
$$z \to \infty, \quad |\arg z| < \pi - \eta$$

Из формулы (11) мы можем получить, в частности, что при фиксированном x и при $y \to \pm\infty$ асимптотическое поведение $\ln|\Gamma(x+iy)|$ выражается формулой

$$\ln|\Gamma(x+iy)| = \operatorname{Re} \ln \Gamma(x+iy) =$$
$$= -\frac{\pi}{2}|y| + \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln|y| + O(1), \qquad y \to \pm\infty. \tag{12}$$

Для полного знакомства с $\Gamma(z)$ нам осталось еще выяснить ее поведение вблизи отрицательной части действительной оси. С этой целью мы выведем формулу

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{13}$$

Для этого возьмем какое-либо z, $0 < \arg z < \varphi < \frac{\pi}{2}$, и попробуем найти $\ln \Gamma(-z)$, считая $\arg(-z) = \arg z - \pi$. По формуле (10) имеем

$$\ln \Gamma(-z) = \left(-z - \frac{1}{2}\right)(\ln z - \pi i) +$$
$$+ z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty e^{-i\varphi}} \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{t^2 + z^2} dt.$$

Повернем контур интегрирования так, чтобы он опять совпал с положительной частью действительной оси. При этом он перейдет через полюс подинтегральной функции $t = -iz$, так что нам придется учесть вычет в этом полюсе. Это даст

$$\ln \Gamma(-z) = \left(-z - \frac{1}{2}\right)(\ln z - \pi i) + z + \frac{1}{2} \ln 2\pi +$$
$$+ \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 - e^{-2\pi t})}{t^2 + z^2} dt - \ln(1 - e^{2\pi i z}).$$

Складывая эту формулу с формулой (9), мы получим

$$\ln\Gamma(z)+\ln\Gamma(-z)=\pi iz+\ln 2\pi-\ln(1-e^{2\pi iz})-\ln z+\frac{\pi i}{2},$$

откуда

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z)=\frac{2\pi ie^{\pi iz}}{z\,(1-e^{2\pi iz})}=-\frac{\pi}{z\sin\pi z},$$

что и дает формулу (13), если вспомнить, что $\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$.

Из формулы (13) видно, в частности, что особыми точками $\Gamma(z)$ являются лишь простые полюсы в точках $z=-n$ с вычетами $(-1)^n/n!$, $n=0, 1, 2, \ldots$, и что функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$ целая.

Пример 4. Найдем асимптотическое поведение функции

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}\tag{14}$$

при $z\to\infty$ по различным направлениям во всей комплексной плоскости.

Формула (14) дает представление для $\zeta(z)$ при $\operatorname{Re}z>1$. Из нее видно, что $\zeta(z)$ ограничена при $\operatorname{Re}z\geqslant a>1$. Чтобы судить о поведении $\zeta(z)$ в левой полуплоскости, нужно найти для нее другое представление. Наиболее удобно для этой цели так называемое функциональное уравнение

$$\zeta(1-z)=2\,(2\pi)^{-z}\,\Gamma(z)\,\zeta(z)\cos\frac{\pi z}{2},\tag{15}$$

выводом которого мы сейчас и займемся.

Рассмотрим сумму

$$S(n, z)=\sum_{k=1}^{n}k^{z-1},\qquad 0<\operatorname{Re}z<1.$$

По формуле Эйлера — Маклорена при $0<\theta<1$ имеем

$$S(n, z)=\frac{n^z}{z}-\frac{\theta^z}{z}+C(z, \theta)+o(1),\qquad n\to\infty,$$

где

$$C(z, \theta) = \int\limits_{\theta}^{\theta+i\infty} \frac{t^{z-1}dt}{e^{-2\pi it}-1} + \int\limits_{\theta}^{\theta-i\infty} \frac{t^{z-1}dt}{e^{2\pi it}-1}.$$

Нетрудно заметить, что при любом $\theta > 0$ функция $C(z, \theta)$ является целой функцией z. Поэтому функция

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty}\left\{S(n, z) - \frac{n^z}{z}\right\} = C(z, \theta) - \frac{\theta^z}{z}$$

регулярна во всей плоскости z, за исключением точки $z = 0$, в которой она имеет простой полюс с вычетом -1. Но при $\operatorname{Re} z < 0$

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty}\left\{S(n, z) - \frac{n^z}{z}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S(n, z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{z-1} = \zeta(1-z),$$

так что функция $\zeta(z)$ регулярна во всей плоскости z, за исключением простого полюса при $z = 1$ с вычетом 1.

С другой стороны, при $\operatorname{Re} z > 1$

$$\varphi(z) = C(z, \theta) - \frac{\theta^z}{z} = C(z, 0) =$$

$$= -\int\limits_0^{\infty} \frac{y^{z-1}e^{\frac{\pi i}{2}(z-1)} - y^{z-1}e^{-\frac{\pi i}{2}(z-1)}}{i} \frac{dy}{e^{2\pi y}-1} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi z}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{y^{z-1}dy}{e^{2\pi y}-1} = 2\cos\frac{\pi z}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} y^{z-1}e^{-2k\pi y}dy =$$

$$= 2\cos\frac{\pi z}{2}\int\limits_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^{-z} = 2(2\pi)^{-z}\,\Gamma(z)\,\zeta(z)\cos\frac{\pi z}{2},$$

и формула (15) доказана.

Так как $\zeta(z)$ ограничена при $\operatorname{Re} z \geqslant a > 1$, то с помощью формулы (15) легко находится поведение $\zeta(z)$

при $\operatorname{Re} z \leqslant b < 0$. Например, из формул (15) и (12) легко получить

$$|\zeta(x+iy)| = O\left(|y|^{\frac{1}{2}-x}\right), \quad y \to \pm\infty, \ -\infty < x < 0. \tag{16}$$

Оценки $\zeta(z)$ в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ значительно сложнее. Так, например, вопрос о справедливости оценки (16) при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ не решен до сих пор (так называемая гипотеза Линделефа). Однако более слабая оценка

$$|\zeta(x+iy)| = O\left(|y|^{\frac{1}{2}(1-x)+\varepsilon}\right), \quad y \to \pm\infty, \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{17}$$

может быть получена без особого труда с помощью теорем Фрагмена — Линделефа (см. § 3.4, Задачи и дополнения). Сейчас мы покажем только, что

$$|\zeta(x+iy)| = O\left(|y|^{\frac{3}{2}}\right), \quad y \to \pm\infty, \ 0 \leqslant x < 1.$$

Это следует из формулы

$$\zeta(z) = \int_0^\infty u^{-z} d[u] = \frac{z}{1-z} + z\int_0^\infty u^{-z-1}([u]-u)\,du,$$

дающей сразу $|\zeta(x+iy)| = O(|y|)$ при $x \geqslant \frac{1}{2}$, и из формулы (15).

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 1.4

1°. Пусть $Q(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на действительной оси. Обозначим через z_k^+ ее полюсы, лежащие в верхней полуплоскости, а через z_k^- — полюсы, лежащие в нижней полуплоскости. Показать, что при $0 < \theta < \pi$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(n)\,e^{in\theta} = \sum_{z=z_k^+} \text{выч.}\,\frac{Q(z)}{1-e^{2\pi iz}} - \sum_{z=z_k^-} \text{выч.}\,\frac{Q(z)}{1-e^{-2\pi iz}},$$

если ряд в левой части сходится.

2°. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha}(\ln n)^{\beta} z^{n}, \qquad \alpha>-1,\ -\infty<\beta<\infty.$$

Найти аналитическое продолжение $f(z)$ на всю плоскость z с разрезом $(1, +\infty)$ и показать, что

$$f(z)\sim\Gamma(\alpha+1)(1-z)^{-\alpha-1}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^{\beta} \quad z\to 1,\ |\arg(1-z)|\leqslant\pi-\eta.$$

3°. Показать, что

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}},$$

где

$$C=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right\}.$$

4°. Показать, что при $\operatorname{Re} z\geqslant a>1$ значения $|\zeta(z)|$ ограничены не только сверху, но и снизу.

§ 1.5. Производящие функции

Может показаться странным, что, излагая методы получения асимптотических оценок, мы всюду говорим только об аналитических функциях. Причина этого не в том, что книга посвящена главным образом целым функциям. Она скорее во взглядах автора (может быть, несколько субъективных). Мне кажется, что если мы исследуем асимптотическое поведение какой-либо функции (не обязательно аналитической), то нам почти всегда выгодно связать с этой функцией некоторую аналитическую функцию и исследовать ее, используя весь мощный, хорошо развитый аппарат теории аналитических функций, а затем вернуться обратно.

Типичным примером такого образа действий является применение производящих функций или интегральных преобразований. Впрочем, справедливости ради следует отметить, что применимость этих методов всегда должна быть обусловлена возможностью найти производящую функцию или интегральное преобразование.

Попытаемся разъяснить в общих чертах содержание метода производящих функций. Пусть нам нужно исследовать некоторую последовательность $\{a_n\}$. Часто случается, что способ задания последовательности позволяет найти функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Знание функции $f(z)$ для точного определения последовательности $\{a_n\}$ может дать не больше, чем первоначальный способ задания, так как точное нахождение коэффициентов аналитической функции — сложная задача. Иначе обстоит дело с нахождением асимптотических формул для a_n при $n \to \infty$. Сложность нахождения коэффициентов функции $f(z)$ связана со сложностью самой $f(z)$. Однако сложность $f(z)$ определяется числом ее особых точек и их характером, а на асимптотическое поведение коэффициентов особые точки влияют далеко не одинаково. Грубо говоря, чем дальше особая точка, тем меньше она влияет на коэффициенты, а при одинаковом расстоянии — тем меньше, чем слабее растет функция при приближении к этой точке. Поэтому исследование ближайших особых точек $f(z)$ обычно позволяет легко найти асимптотическую формулу для a_n. Кроме того, в любом случае мы получаем выражение для a_n в виде контурного интеграла, который можно оценивать, например, методом перевала. (Способ исследования, предложенный выше, по существу, совпадает с исследованием методами теории вычетов.)

Пример 1. Найдем асимптотическое поведение при фиксированном x и при $n \to \infty$ функций $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \int_0^x \int_1^{x_1} \ldots \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n}^{x_{n-1}} dx_1 \ldots dx_n, \quad P_0(x) = 1.$$

Попытаемся найти производящую функцию. Положим

$$F(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(x).$$

Так как

$$P_n''(x) = P_{n-2}(x), \quad P_n(0) = 0, \ n > 1, \quad P_n'(1) = 0, \ n \neq 1,$$

то мы без труда получаем для $F(z, x)$ дифференциальное уравнение

$$F''_{xx}(z, x) = z^2 F(z, x), \quad F(z, 0) = 1, \quad F'_x(z, 1) = z.$$

Решая его, находим

$$F(z, x) = C_1(z) e^{xz} + C_2(z) e^{-xz},$$

$$C_1(z) + C_2(z) = 1, \quad C_1(z) e^z - C_2(z) e^{-z} = 1,$$

откуда

$$F(z, x) = \frac{\operatorname{ch}(x-1) z + \operatorname{sh} xz}{\operatorname{ch} z}.$$

Мы видим, что особыми точками $F(z, x)$ являются простые полюсы в точках $z = (2k+1)\frac{\pi i}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Можно написать

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} F(z, x) \frac{dz}{z^{n+1}}, \qquad r < \frac{\pi}{2}$$

и применить для получения асимптотической формулы теорию вычетов. Из-за множителя z^{-n-1} в подынтегральной функции нам выгодно отодвигать контур возможно дальше от начала. Первым препятствием являются ближайшие к $z=0$ полюсы $z = \pm \frac{\pi i}{2}$. Перенося контур через них, получаем

$$P_n(x) = -\operatorname*{выч.}_{z=\frac{\pi i}{2}} \frac{F(z, x)}{z^{n+1}} - \operatorname*{выч.}_{z=-\frac{\pi i}{2}} \frac{F(z, x)}{z^{n+1}} + O(r^{-n}),$$

$$\frac{\pi}{2} < r < \frac{3\pi}{2}$$

или

$$P_n(x) = -\frac{\cos\frac{\pi}{2}(x-1) + i \sin\frac{\pi}{2} x}{i\left(\frac{\pi i}{2}\right)^{n+1}} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}(x-1) - i \sin\frac{\pi x}{2}}{i\left(-\frac{\pi i}{2}\right)^{n+1}} +$$

$$+ O\left(\left(\frac{2}{3\pi}\right)^n\right) = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sin\frac{\pi x}{2} + O\left(\left(\frac{2}{3\pi}\right)^n\right),$$

$$n \to \infty.$$

Учитывая и более далекие полюсы, мы могли бы получить асимптотический ряд.

Пример 2. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_q$ — целые положительные числа, не имеющие общего делителя. Найдем асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины A_n — числа решений уравнения $m_1x_1 + \ldots + m_qx_q = n$ в целых неотрицательных числах $x_1, x_2, \ldots, x_q$.

Рассмотрим производящую функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n.$$

Нетрудно сообразить, что

$$F(z) = (1 - z^{m_1})^{-1} \ldots \left(1 - z^{m_q}\right)^{-1},$$

так как $(1 - z^{m_s})^{-1} = \sum_{x_s=0}^{\infty} z^{x_s m_s}$ и

$$\left(1 - z^{m_1}\right)^{-1} \ldots \left(1 - z^{m_q}\right)^{-1} =$$
$$= \sum_{x_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{x_q=0}^{\infty} z^{m_1x_1 + \ldots + m_qx_q} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n,$$

поскольку, приводя члены с одинаковыми степенями z, мы получаем в качестве коэффициента при z^n число способов, которыми n можно представить в виде $n = m_1x_1 + \ldots + m_qx_q$.

Все особые точки $F(z)$ лежат на окружности $|z| = 1$. Эти особые точки — полюсы различной кратности. В силу предположения об отсутствии общего делителя наибольшую кратность q имеет только полюс $z = 1$. Значит, асимптотическое поведение A_n должно определяться именно этим полюсом.

Как нетрудно заметить, в разложение $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$ старший член $(1 - z)^{-q}$ войдет с коэффициентом

$$\lim_{z \to 1} \frac{(1 - z)^q}{\left(1 - z^{m_1}\right) \ldots \left(1 - z^{m_q}\right)} = \frac{1}{m_1 \ldots m_q}.$$

Коэффициент при z^n в разложении $(1 - ze^{-i\varphi})^{-p}$ по степеням z асимптотически равен $\frac{e^{-in\varphi}n^{p-1}}{(p-1)!}$. Поэтому

$$A_n \sim \frac{n^{q-1}}{(q-1)!\, m_1 \ldots m_q}, \qquad n \to \infty.$$

В случае, когда изучаемые функции зависят не от целочисленного, а от непрерывно меняющегося переменного, вместо производящей функции рассматриваются интегральные преобразования. Роль формулы Коши для коэффициентов играют так называемые формулы обращения.

Наиболее часто применяются следующие три преобразования, отличающиеся друг от друга несущественными заменами переменных. Приведем формулы этих преобразований вместе с формулами обращения.

Преобразование Лапласа:

$$F(z) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-xz} dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(z)\, e^{xz} dz.$$

Преобразование Фурье:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ixz} dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, e^{-ixz} dz.$$

Преобразование Меллина:

$$F(z) = \int_0^\infty f(x)\, x^{z-1} dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(z)\, x^{-z} dz.$$

Приведем без доказательства простейшие условия, достаточные для справедливости формул обращения. (Полное изложение вопроса можно найти в книге Е. К. Титчмарша «Введение в теорию интеграла Фурье», Гостехиздат, 1948 г.)

Для преобразования Лапласа: $f(x)$ непрерывна и

$$\int_0^\infty |f(x)|\, e^{-\sigma x} dx < \infty.$$

Для преобразования Фурье: $f(x)$ непрерывна и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty.$$

Для преобразования Меллина: $f(x)$ непрерывна и

$$\int_{0}^{\infty} |f(x)|\, x^{\sigma-1} dx < \infty.$$

Пример 3. Найдем асимптотическое поведение при $x \to 0$, $x > 0$, функции

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Рассмотрим преобразование Меллина от функции $f_\alpha(x) - 1$. При $\operatorname{Re} z > \frac{1}{\alpha}$ имеем

$$F_\alpha(z) = \int_0^\infty (f_\alpha(x) - 1)\, x^{z-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{z-1} e^{-xn^\alpha} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha z} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \zeta(\alpha z)\, \Gamma(z).$$

(Возможность почленного интегрирования следует из сходимости последнего ряда, так как при $z = \sigma > \frac{1}{\alpha}$ все величины положительны.) По формуле обращения при любом $\sigma > \frac{1}{\alpha}$

$$f_\alpha(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(z)\, \zeta(\alpha z)\, x^{-z} dz.$$

Из оценок, полученных в примерах 3 и 4 § 1.4, мы знаем, что при фиксированном x и при $y \to \pm\infty$

$$|\Gamma(x + iy)\, \zeta(\alpha x + i\alpha y)| = O\left(|y|^C e^{-\frac{\pi}{2}|y|}\right)$$

и подинтегральная функция имеет своими особыми точками простые полюсы при $z=\frac{1}{\alpha}$ (полюс $\zeta(\alpha z)$) и $z=0$, -1, -2, ... (полюсы $\Gamma(z)$). Из-за множителя x^{-z} нам выгоднее перенести прямую интегрирования возможно левее. Перенося контур через полюсы, следует прибавлять вычеты в этих полюсах. В полюсе $z=\frac{1}{\alpha}$ вычет равен $\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)x^{\frac{1}{\alpha}}$, а в полюсах $z=-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, вычеты равны $\zeta(-n\alpha)\frac{(-1)^n}{n!}x^n$. Поэтому

$$f_\alpha(x) \approx \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)x^{-\frac{1}{\alpha}} + 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\zeta(-k\alpha)x^k, \quad x \to 0,\ x > 0$$

С помощью функционального уравнения для $\zeta(z)$ (формула (15) § 1.4) находим

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-k\alpha) = -\frac{1}{\pi}(2\pi)^{-k\alpha}\Gamma(k\alpha+1)\zeta(k\alpha+1)\sin\frac{\pi k\alpha}{2}$$

и, окончательно,

$$f_\alpha(x) \approx \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)x^{-\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2\pi)^{-k\alpha}x^k\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}\zeta(k\alpha+1)\sin\frac{\pi k\alpha}{2}, \quad x \to 0,\ x > 0.$$

Интересно сравнить последний результат при $\alpha=2$ с результатом, полученным в примере 2 § 1.4. Ясно, что $f_2(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\psi(x)$. Из найденной нами формулы следует

$$f_2(x) \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 0\cdot x^k, \quad x \to 0,\ x > 0,$$

а результат, полученный в примере 2 § 1.4, более точен:

$$f_2(x) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\frac{\pi^2}{x}}, \quad x \to 0,\ x > 0.$$

Пример 4. Найдем асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ функции

$$E_\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}, \qquad \rho > 0.$$

Рассмотрим преобразование Лапласа от функции $E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right)$. При $\operatorname{Re} z > 1$ имеем

$$F_\rho(z) = \int_0^\infty E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right) e^{-xz}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{\rho}} e^{-xz}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-\frac{n}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)} \int_0^\infty t^{\frac{n}{\rho}} e^{-t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-\frac{n}{\rho}-1} = \frac{z^{\frac{1}{\rho}-1}}{z^{\frac{1}{\rho}}-1}.$$

Ввиду положительности всех величин (при действительном $z = \sigma$) действия законны, и из сходимости ряда следует абсолютная интегрируемость $E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right)e^{-\sigma x}$ при $\sigma > 1$. Следовательно, можно применить формулу обращения, которая дает

$$E_\rho(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_\rho(z)\, e^{zx^\rho}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zx^\rho} \frac{z^{\frac{1}{\rho}-1}\,dz}{z^{\frac{1}{\rho}}-1}.$$

Нам выгодно переносить контур интегрирования возможно левее. Первым препятствием является простой полюс при $z = 1$, вторым — точка ветвления при $z = 0$ или еще некоторое количество простых полюсов при $z = e^{2k\pi i\rho}$ $\left(\text{они могут оказаться правее, чем } z = 0, \text{ при } \rho \leqslant \frac{1}{4}\right)$.

Перенесем контур интегрирования налево до совпадения с мнимой осью. Учитывая вычеты в пройденных полюсах (полюсы на мнимой оси обойдем слева), получаем

$$E_\rho(x) = \rho \sum_{k=-\left[\frac{1}{4\rho}\right]}^{\left[\frac{1}{4\rho}\right]} e^{x^\rho} e^{2k\pi i\rho} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx^\rho} \frac{z^{\frac{1}{\rho}-1}}{z^{\frac{1}{\rho}}-1}\, dz.$$

Теперь преобразуем контур интегрирования в оставшемся интеграле, повернув оба луча $(0, i\infty)$ и $(0, -i\infty)$ на столь малый угол, чтобы не проходить новых полюсов. Как и в теореме 1.2.1, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{ie^{i\eta}\infty} e^{zx^\rho} \frac{z^{\frac{1}{\rho}-1}}{z^{\frac{1}{\rho}}-1}\, dz \approx -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n}}{2\pi i} \int_0^{ie^{i\eta}\infty} e^z z^{\frac{n}{\rho}-1}\, dz,$$

$$x \to +\infty$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty e^{-i\eta}}^{0} e^{zx^\rho} \frac{z^{\frac{1}{\rho}-1}}{z^{\frac{1}{\rho}}-1}\, dz \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-n}}{2\pi i} \int_0^{-i\infty e^{-i\eta}} e^z z^{\frac{n}{\rho}-1}\, dz,$$

$$x \to +\infty.$$

Но

$$\int_0^{i\infty e^{i\eta}} e^z z^{\frac{n}{\rho}-1}\, dz = \int_0^{\infty e^{\pi i}} e^z z^{\frac{n}{\rho}-1}\, dz = e^{\pi i\frac{n}{\rho}}\Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right),$$

$$\int_0^{-i\infty e^{-i\eta}} e^z z^{\frac{n}{\rho}-1}\, dz = \int_0^{\infty e^{-\pi i}} e^z z^{\frac{n}{\rho}-1}\, dz = e^{-\pi i\frac{n}{\rho}}\Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right),$$

так что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx^\rho} \frac{z^{\frac{1}{\rho}-1}}{z^{\frac{1}{\rho}}-1}\, dz \approx -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right) \sin\frac{\pi n}{\rho}\, x^{-n}, \quad x \to +\infty,$$

и

$$E_\rho(x) \approx \rho \sum_{k=-\left[\frac{1}{4\rho}\right]}^{\left[\frac{1}{4\rho}\right]} e^{x^\rho e^{2k\pi i\rho}} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right) \sin\frac{\pi n}{\rho} x^{-n},$$

$$x \to +\infty.$$

В частности, при $\rho > \frac{1}{4}$

$$E_\rho(x) \approx \rho e^{x^\rho} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right) \sin\frac{\pi n}{\rho} x^{-n}, \qquad x \to +\infty.$$

Немного усложнив рассуждения, можно получить асимптотические формулы для $E_\rho(z)$ при любых комплексных z. Делать это сейчас мы не будем, так как в главе III будет подробно исследован более общий случай.

Пример 5. Найдем асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, решения $f(x) = f_\varepsilon(x)$ интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) e^{-|\xi|} d\xi = \frac{1}{\operatorname{ch} \varepsilon x},$$

абсолютно интегрируемого на интервале $(-\infty, \infty)$.

Введем обозначение

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixz} dx.$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям интегрального уравнения, находим

$$F(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi| + i\xi z} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixz}}{\operatorname{ch} \varepsilon x} dx.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi| + i\xi z} d\xi = \frac{2}{1+z^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixz}}{\operatorname{ch} \varepsilon x} dx = \frac{\pi}{\varepsilon} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{2\varepsilon}}$$

(последний интеграл легко вычисляется, например, при помощи замыкания контура в верхней полуплоскости; получающийся бесконечный ряд вычетов легко суммируется). Следовательно,

$$F(z) = \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{1+z^2}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{2\varepsilon}},$$

и по формуле обращения

$$f(x) = \frac{1}{4\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+z^2}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{2\varepsilon}} e^{-ixz} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} t^2}{\operatorname{ch} t} e^{-it\frac{2\varepsilon x}{\pi}} dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\frac{2\varepsilon x}{\pi}}}{\operatorname{ch} t} dt + \frac{2\varepsilon^2}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 e^{-it\frac{2\varepsilon x}{\pi}}}{\operatorname{ch} t} dt.$$

Отсюда

$$f(x) = \frac{1 + O(\varepsilon^2)}{2 \operatorname{ch} \varepsilon x}, \qquad \varepsilon \to 0, \ -\infty < x < \infty$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itu}}{\operatorname{ch} t} dt = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2}}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 e^{-itu}}{\operatorname{ch} t} dt = -\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2}}\right).$$

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 1.5

1°. Пусть последовательность a_n задана рекуррентными соотношениями

$$(n+1)a_{n+1} - (n+\alpha)a_n = b_n, \quad b_n = O(a^n), \quad a < 1, \ a_0 = 1, \ \alpha > 0,$$

Показать, что

$$a_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad n \to \infty.$$

2°. Пусть последовательность a_n определена рекуррентно:

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \ldots + \frac{a_0}{n+1} = \frac{x^n}{n!}.$$

Показать, что

$$a_n \sim e^x \frac{1}{n(\ln n)^2}, \qquad n \to \infty.$$

3°. Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'' - (a+x)y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad a > 0.$$

Показать, что

$$y(x) \sim \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) x^{\frac{a}{2}} e^x, \qquad x \to +\infty.$$

4°. Пусть $P_n(x)$ определены равенством

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n].$$

Показать, что при фиксированном $x > 1$ и при $n \to \infty$

$$P_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2nx}} \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

§ 1.6. Метод перевала

Метод перевала является одним из наиболее употребительных методов получения асимптотических формул для функций, представленных интегралами вида

$$F(t) = \int_C e^{h(z,t)} dz$$

от аналитических функций. Сущность метода перевала состоит в том, что используя теорему Коши о независимости интеграла от пути, мы деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы можно было применить метод Лапласа.

Применяя метод Лапласа, получаем асимптотическую формулу для интеграла в виде суммы вкладов точек максимума. При изложении метода перевала основной задачей является определение свойств тех точек, которые могут быть точками максимума на контуре, пригодном для применения метода Лапласа.

Введем ряд понятий, с которыми придется работать в методе перевала.

Точками перевала аналитической функции $h(z)$ назовем точки, в которых $h'(z)$ обращается в нуль. *Порядком* точки перевала назовем кратность нуля $h'(z)$. Концы контура будем иногда тоже относить к точкам перевала, приписывая им нулевой порядок.

Название «точки перевала» объясняется тем, что если считать поверхность $u = \operatorname{Re} h(z)$ изображением горной местности, то точки, в которых $h'(z) = 0$, будут похожи именно на горные перевалы. (Эти точки обязательно будут седловыми точками, так как гармоническая функция $\operatorname{Re} h(z)$ не может иметь ни максимумов, ни минимумов.)

Нам важно иметь представление о характере поверхности $u = \operatorname{Re} h(z)$ в окрестности точек перевала.

Лемма 1. *В точке перевала $z = c$ порядка p пересекаются $p+1$ линий $\operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re} h(c)$, которые разбивают достаточно малую окрестность точки $z = c$ на $2p+2$ сектора. В $p+1$ из этих секторов $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(c)$, а в других $\operatorname{Re} h(z) > \operatorname{Re} h(c)$, причем при обходе по кругу такие секторы чередуются.*

Доказательство. Если $z = c$ — точка перевала порядка p, то

$$h'(c) = \ldots = h^{(p)}(c) = 0, \qquad h^{(p+1)}(c) \neq 0.$$

Поэтому функция

$$h_1(z) = \{h(z) - h(c)\}^{\frac{1}{p+1}}$$

удовлетворяет условию $h_1'(c) \neq 0$ и отображение $\zeta = h_1(z)$ взаимно однозначно и конформно переводит малую окрестность точки $z = c$ в малую окрестность точки

$\zeta = 0$. Кривые, переходящие при этом в прямые $\operatorname{Im}\left(\zeta e^{\frac{2k+1}{2p+2}\pi i}\right)=0$, $k = 1, 2, \ldots, p+1$, являются аналитическими кривыми, делящими окрестность точки $z = c$ на $2p+2$ сектора.

Но $h(z)-h(c) = \zeta^{p+1}$, так что на построенных кривых мы имеем $\operatorname{Re}(h(z)-h(c)) = 0$. В секторах, заключенных между отрезками построенных кривых, переходящими в лучи $\arg\zeta = \frac{4m-1}{2p+2}\pi$ и $\arg\zeta = \frac{4m+1}{2m+2}\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, p)$, мы имеем $\operatorname{Re} h(z) > \operatorname{Re} h(c)$, а в остальных $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(c)$. Лемма доказана.

Линиями наибыстрейшего спуска для функции $h(z)$ мы назовем кривые, вдоль которых $\operatorname{Im} h(z)$ сохраняет постоянное значение. Под линией наибыстрейшего спуска, *выходящей из точки* $z = z_0$, мы будем понимать ту часть этой кривой, на которой $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(z_0)$.

Теми же рассуждениями, что и в лемме 1, мы легко докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Из точки перевала порядка p выходит $p+1$ линия наибыстрейшего спуска. В каждом секторе, где $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(c)$, проходит ровно одна линия наибыстрейшего спуска.*

Линии $\operatorname{Im} h(z) = \mathrm{const}$ получили название линий наибыстрейшего спуска, так как вдоль них $\operatorname{Re} h(z)$ убывает быстрее, чем по другим направлениям.

Рассмотрим основные задачи метода перевала на интегралах вида

$$F(t) = \int_C \varphi(z)\, e^{th(z)} dz, \qquad t \to +\infty. \tag{1}$$

Выберем контур C таким образом, чтобы к интегралу можно было применить метод Лапласа. Выясним, каким условиям должен удовлетворять такой контур. Если контур выбран и $\operatorname{Re} h(z)$ достигает максимума на нем в точке $z = z_0$, то асимптотическая формула, полученная методом Лапласа, будет иметь вид $F(t) \sim At^m e^{th(z_0)}$. Это значит, что, слегка деформируя контур, мы не сможем получить новый контур, на котором наибольшее значение $\operatorname{Re} h(z)$ было бы меньше, так как тогда уже грубая оценка интеграла противоречила бы асимптотической формуле. Таким образом, контур, пригодный для применения метода Лапласа, должен удовлетворять условию:

(A) *При любой малой деформации контура наибольшее значение* $\operatorname{Re} h(z)$ *на контуре не уменьшается.*

Заметим, что контур, удовлетворяющий условию (A), вообще говоря, не обязан существовать. Может оказаться, что наибольшее значение функции $\operatorname{Re} h(z)$ на контуре можно сделать тем меньше, чем ближе взять контур к особой точке $\varphi(z)$ или $h(z)$. Это означает только то, что к такому интегралу метод перевала неприменим, или, иными словами, что асимптотическое поведение интеграла определяется не точками перевала, а особыми точками подинтегральной функции. С примерами подобного рода мы встречались в применениях теории вычетов.

Дадим важный критерий того, что контур удовлетворяет условию (A), введя предварительно еще одно понятие.

Будем говорить, что *контур проходит через точку перевала*, если в окрестности этой точки он лежит в двух различных секторах, в которых $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(c)$. Это соответствует тому, что путь на поверхности $u = \operatorname{Re} h(z)$, изображенный контуром, действительно ведет через перевал, а не просто поднимается на перевал, а потом спускается обратно в ту же сторону.

Теорема 1.6.1. *Для того чтобы контур C удовлетворял условию* (A), *необходимо и достаточно, чтобы наибольшее значение* $\operatorname{Re} h(z)$ *на C достигалось в конце контура или в точке перевала, через которую проходит контур C.*

Доказательство. Достаточность следует из того, что малой деформацией контура C мы не можем уменьшить наибольшее значение $\operatorname{Re} h(z)$ в точке перевала, через которую проходит контур C (географически это означает, что путь через перевал самый низкий), а значение $\operatorname{Re} h(z)$ в конце контура вообще не меняется при деформации контура.

Необходимость следует из того, что если контур не проходит через перевал, то он расположен, говоря географически, на одном склоне горы, и мы всегда можем немного опустить его вниз по склону.

Если мы имеем интеграл вида (1) и контур C удовлетворяет условию (A), то этот контур уже совсем просто преобразовать к виду, пригодному для применения метода Лапласа. При этом точками максимума будут точки перевала, через которые проходит контур, или концы контура. Для этой цели нам нужно только все части контура, кроме небольших окрестностей точек перевала и концов контура, опустить ниже уровня наибольшего значения, а в этих окрестностях повести контур по линиям наибыстрейшего спуска. Интеграл по линии наибыстрейшего спуска допускает оценку методом Лапласа, так как на линии наибыстрейшего спуска функция $\operatorname{Im} h(z)$ сохраняет постоянное значение, т. е. аргумент функции $e^{th(z)}$ постоянен.

Интеграл по малой окрестности точки максимума, т. е. вклад точки максимума, нам естественно назвать теперь *вкладом точки перевала*. Понятие вклада точки перевала определено, когда нам дан контур, проходящий через эту точку перевала, или, что то же, когда заданы два сектора, в которых $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(c)$. Вклад точки перевала вычисляется обычными для метода Лапласа приемами.

Приведем формулы для вклада точки перевала или конца контура в интеграл вида (1) в двух наиболее употребительных случаях.

Если $z = c$ — начало контура и $h'(c) \neq 0$, то функция $V_c(t)$ (вклад точки $z = c$ в интеграл (1)) имеет асимптотический ряд

$$V_c(t) \approx e^{th(0)} \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n t^{-n-1}, \qquad t \to \infty, \tag{2}$$

или (если предположить $\varphi(c) \neq 0$ и ограничиться первым членом)

$$V_c(t) \sim -\frac{1}{t} \frac{\varphi(c)}{h'(c)} e^{th(c)}, \qquad t \to \infty. \tag{3}$$

Коэффициенты в формуле (2) находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = \varphi(c + \psi(u)) \psi'(u),$$

где функция $\psi(u)$ определена уравнением

$$h(c + \psi(u)) = h(c) - u, \qquad \psi(0) = 0.$$

Стоит особо подчеркнуть, что формулы для вклада не меняют своего вида в зависимости от $\arg t$.

Если $z = c$ — точка перевала первого порядка, то функция $V_c(t)$ (вклад точки $z = c$ в интеграл (1)) имеет асимптотический ряд

$$V_c(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{th(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\, 2^{2n}} \frac{a_{2n}}{t^n}, \qquad t \to \infty \tag{4}$$

или (если предположить $\varphi(c) \neq 0$ и ограничиться первым членом)

$$V_c(t) \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{th''(c)}}\, \varphi(c)\, e^{th(c)}, \qquad t \to \infty. \tag{5}$$

Коэффициенты в формуле (4) находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = \varphi(c + \psi(u))\, \psi'(u),$$

где функция $\psi(u)$ определена уравнением

$$h(c + \psi(u)) = h(c) - u^2, \quad \psi(0) = 0, \psi'(0) = \sqrt{-\tfrac{1}{2} h''(c)}.$$

Для корня в формулах берется тот или иной знак в зависимости от направления контура. Более точно, $\arg\sqrt{-h''(c)}$ берется равным углу между положительным направлением действительной оси и направлением касательной к контуру, идущему в окрестности точки перевала по линиям наибыстрейшего спуска.

Заметим, что, хотя вид формул для вклада точки перевала не меняется в зависимости от $\arg t$, это еще не значит, что асимптотическое поведение интеграла (1) должно быть одним и тем же при различных $\arg t$. Дело в том, что различным $\arg t$ могут отвечать различные контуры, удовлетворяющие условию (A).

Основной результат, которым мы часто будем пользоваться, состоит в следующем.

Теорема 1.6.2. *Если мы имеем конечный контур C, целиком лежащий в области регулярности функций $\varphi(z)$ и $h(z)$, и наибольшее значение $\operatorname{Re} h(z)$ на C достигается в точках перевала, через которые проходит этот кон-*

тур (или в его концах), то асимптотическое поведение интеграла (1) *при* $t \to +\infty$ *дается суммой вкладов этих точек перевала (или концов контура).*

Доказательство. Прежде всего мы слегка деформируем контур C, чтобы наибольшее значение $\operatorname{Re} h(z)$ на нем достигалось только в точках перевала или в концах контура. Это всегда возможно в окрестности каждой точки, отличной от точки перевала, а для доказательства возможности такой деформации в целом следует применить лемму Гейне — Бореля о конечном покрытии. В окрестности точек перевала и концов контура, в которых достигается наибольшее значение $\operatorname{Re} h(z)$, мы можем повести контур по линиям наибыстрейшего спуска. После этого интеграл по полученному контуру разбивается на сумму интегралов по окрестностям точек с наибольшим значением $\operatorname{Re} h(z)$ и на интеграл по оставшейся части. Интегралы по окрестностям дают сумму вкладов, а интеграл по оставшейся части экспоненциально мал. Теорема доказана.

Доказанная теорема легко переносится на случай, когда t стремится к бесконечности уже не по прямой, а в некотором угле.

Теорема 1.6.3. *Пусть имеется конечный контур* C, *целиком лежащий в области регулярности* $\varphi(z)$ *и* $h(z)$, *и наибольшее значение функции* $\operatorname{Re}\{e^{i\theta}h(z)\}$ *на* C *при любом* θ, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, *достигается в одной из точек перевала, через которые проходит этот контур. Тогда асимптотическое поведение интеграла* (1) *при* $t \to \infty$, $\theta_1 \leqslant \arg t \leqslant \theta_2$, *дается суммой вкладов этих точек перевала.*

Для интегралов более общего вида можно, как и в методе Лапласа, ввести понятие радиуса влияния точки перевала и соответствующее понятие вклада точки перевала. К сожалению, для интеграла общего вида, построив контур с наибольшим значением $\operatorname{Re} h(z, t)$ в точках перевала, мы, вообще говоря, не можем утверждать, что асимптотическое поведение интеграла определяется суммой вкладов точек перевала. Причина этого в том, что при увеличении t число точек перевала может увеличиваться и может оказаться, что вкладами точек перевала, значения $\operatorname{Re} h(z, t)$ в которых меньше наибольшего, нельзя пренебречь. В большинстве случаев от этой трудности можно освободиться, сведя подходящей заменой переменной наш интеграл к виду (1) с функцией $\varphi(z)$, зависящей от t, но слабо.

Вообще, следует отметить, что получение методом перевала асимптотических формул для интегралов более общего вида, чем вид (1), принципиально мало отличается от той же задачи для интегралов вида (1), но требует более высокой техники оценок. Эту технику можно приобрести, только решив самостоятельно ряд достаточно сложных задач. Мы не преследуем цель дать читателю возможность освоить такую технику и поэтому ограничимся разбором сравнительно простых задач, освещающих лишь основные принципиальные вопросы метода. Желающим ознакомиться с техникой применения метода перевала более подробно можно рекомендовать обратиться к книге Н. Г. де Брейна «Асимптотические методы в анализе», ИЛ, 1961 г.

Пример 1. Найдем асимптотическую формулу для функции Бесселя $J_s(t)$ при $t \to \infty$ и при любом целом неотрицательном s.

Функция Бесселя $J_s(t)$ может быть определена интегралом

$$J_s(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} e^{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} z^{-s-1} dz. \tag{6}$$

Отсюда легко получить и разложение в ряд по степеням t:

$$J_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+s} \frac{(-1)^n}{n!\,(s+n)!}.$$

Для получения асимптотической формулы применим метод перевала. Положим $\varphi(z) = z^{-s-1}$, $h(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, а в качестве контура C возьмем окружность $|z| = 1$. Точками перевала являются $z_1 = i$ и $z_2 = -i$. При любых θ наибольшее значение функции $\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2} e^{i\theta}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} =$

$= -\sin\theta\sin\varphi$ ($\varphi = \arg z$) на окружности $|z| = 1$ достигается в одной из точек перевала. Поэтому согласно теореме 1.6.3 асимптотическое поведение $J_s(t)$ при $t\to\infty$ дается суммой вкладов точек перевала $z_1 = i$ и $z_2 = -i$, т. е. асимптотический ряд таков:

$$J_s(t) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{(it)^{-\frac{1}{2}} e^{ix - i\frac{\pi}{2}(s+1)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n} + \right.$$
$$\left. + (-it)^{-\frac{1}{2}} e^{-ix + i\frac{\pi}{2}(s+1)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{-n}\right\} \qquad (7)$$

(для $(it)^{-\frac{1}{2}}$ и $(-it)^{-\frac{1}{2}}$ берутся главные значения; неоднозначность главного значения при отрицательных значениях it и $-it$ не играет роли, так как тогда соответствующие слагаемые экспоненциально малы).

Если ограничиться главными членами этого асимптотического ряда и предположить t лежащим в угле $|\arg t| \leqslant \pi - \eta$, $\eta > 0$, то мы получим более простую асимптотическую формулу:

$$J_s(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left\{\cos\left(t - \frac{\pi s}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \qquad (8)$$
$$t\to\infty, \quad |\arg t| \leqslant \pi - \eta.$$

Пример 2. Найдем асимптотическое поведение при $t\to\infty$ функции

$$Q_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C z^n e^{\frac{z^3}{3} + zt}\, dz,$$

где C — бесконечный контур, начинающийся в угле $-\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{6}$ и кончающийся в угле $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

При $\frac{\pi}{6} + \eta \leqslant |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$, $0 < \eta < \frac{\pi}{6}$, имеем

$$\operatorname{Re}\frac{z^3}{3} = \frac{|z|^3}{2}\cos(3\arg z) \leqslant -\frac{|z|^3}{3}\sin 3\eta.$$

так что интеграл сходится при всех комплексных t и представляет собой целую функцию.

Для получения асимптотической формулы применим метод перевала. Если $\arg t$ фиксирован, то заменой $z = \zeta |t|^{1/2}$ мы можем привести интеграл к виду (1). Это даст возможность применить теорему 1.6.2, а также получить асимптотические ряды для вкладов точек перевала. Таким образом, остается лишь построить контур, на котором наибольшее значение $\operatorname{Re}\left\{\frac{z^3}{3} + zt\right\}$ достигается в точке перевала.

Рассмотрим сначала случай, когда $|\arg(-t)| \leqslant \pi - \eta$, $\eta > 0$. Точек перевала две: $z_1(t) = \sqrt{-t}$ и $z_2(t) = -\sqrt{-t}$ (для корня берем главное значение). Попробуем взять в качестве контура вертикальную прямую, проходящую через точку $z_1(t)$. На этой прямой имеем $z = \sqrt{-t} + iy$, $-\infty < y < \infty$, и

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z^3}{3} + zt\right\} = \frac{2}{3} \operatorname{Re} t\sqrt{-t} - y^2 \operatorname{Re}\sqrt{-t}.$$

Так как $\operatorname{Re}\sqrt{-t} > 0$, то наибольшее значение $\operatorname{Re}\left(\frac{z^3}{3} + zt\right)$ на нашем контуре действительно достигается при $y = 0$, т. е. в точке перевала $z = z_1(t)$. Поэтому мы можем применить теорему 1.6.2. (Хотя контур и бесконечный, но нетрудно убедиться, что интегралом по части его, лежащей вне круга с центром в точке перевала и радиусом порядка $\sqrt{|t|}$, можно пренебречь.)

С помощью замены $z = \zeta\sqrt{-t}$ и применения формулы (4) для вклада точки перевала мы легко получаем асимптотический ряд

$$Q_n(t) \approx \frac{(-t)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{2}{3}t\sqrt{-t}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(t\sqrt{-t}\right)^{-k},$$

$$t \to \infty, \quad |\arg(-t)| \leqslant \pi - \eta.$$

Здесь коэффициенты a_k определяются формулами

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!\, 2^{2k}} \frac{d^{2k}}{dw^{2k}} \left.\frac{(w+1)^n}{\left(1 + \frac{w}{3}\right)^{k+1}}\right|_{w=0}$$

Если значения t близки к действительным положительным, то наша асимптотическая формула перестает быть верной, так как к нашему контуру приближается вторая точка перевала и ее влиянием уже нельзя пренебречь.

Чтобы получить асимптотическую формулу для $t\to\infty$, $|\arg t|\leqslant\eta$, построим контур несколько более сложным образом. Рассмотрим поведение $\operatorname{Re}\left(\frac{z^3}{3}+zt\right)$ на прямой $z=i\sqrt{t}+ye^{\frac{\pi i}{3}}$, $-\infty<y<\infty$ (для $\sqrt{t}$ берется главное значение). Имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z^3}{3}+zt\right)=\frac{2}{3}\operatorname{Re}\left(it\sqrt{t}\right)-\frac{y^3}{3}-y^2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{\pi i}{6}}\sqrt{t}\right).$$

Аналогично на прямой $z=-i\sqrt{t}+ye^{-\frac{\pi i}{3}}$, $-\infty<y<\infty$, имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z^3}{3}+zt\right)=-\frac{2}{3}\operatorname{Re}\left(it\sqrt{t}\right)-\frac{y^3}{3}-y^2\operatorname{Re}\left(e^{-\frac{\pi i}{6}}\sqrt{t}\right).$$

Функция $-\frac{y^3}{3}-ay^2$ имеет максимум при $y=0$ и отрицательна при $y\geqslant-3a$. Поэтому, взяв контур, состоящий из отрезков прямых $z=i\sqrt{t}+ye^{\frac{\pi i}{6}}$ и $z=-i\sqrt{t}+ye^{-\frac{\pi i}{6}}$, лежащих направо от их точки пересечения, мы получим (при достаточно малом η), что наибольшее значение $\operatorname{Re}\left(\frac{z^3}{3}+zt\right)$ достигается в одной из точек перевала. (Заметим, что после замены $z=\zeta\sqrt{t}$ контур становится почти независимым от t.)

По теореме 1.6.2 асимптотическое поведение $Q_n(t)$ дается суммой вкладов обеих точек перевала. Ограничиваясь главными членами асимптотических рядов, приходим к формуле

$$Q_n(t)=\frac{t^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)\right\},$$
$$t\to\infty,\quad|\arg t|\leqslant\eta.$$

До сих пор мы не касались одного чрезвычайно важного вопроса. Именно мы не говорили о том, на основании каких соображений можно выбирать точки перевала, через которые нужно вести контур. Об этом еще будет идти речь в § 3.1 (для интегралов специального вида).

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 1.6

1°. Пусть $h(z, t)$ — многочлен от z, степень которого не зависит от параметра t, и контур C составлен из двух линий наибыстрейшего спуска, выходящих из точки перевала $z = c(t)$. Если при всех t, лежащих в некоторой бесконечной области G, точка перевала $z = c(t)$ имеет первый порядок и при любом $A > 0$ в круге

$$|z - c(t)| < A\,|h''_z(c(t), t)|^{-\frac{1}{2}}, \qquad |t| > t_0(A), \quad t \in G$$

нет других точек перевала, то

$$\int\limits_C e^{h(z,t)}\,dz \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{h''_z(c(t), t)}}\,e^{h(c(t),t)}, \qquad t \to \infty, \quad t \in G.$$

2°. Пусть аналитическая функция $h(z)$ регулярна в некоторой бесконечной области D, а ее производная $h'(z)$ однолистна в D. Предположим, что при любом $A > 0$

$$h(z) \sim h(\zeta), \qquad z \to \infty, \quad z \in D, \quad \zeta \in D, \quad |z - \zeta| < A\,|h''(z)|^{-\frac{1}{2}}.$$

Предположим еще, что для t, лежащих в некоторой бесконечной области G, выполняются условия:

1. При достаточно больших t уравнение $h'(z) = t$ имеет в области D решение $z = c(t)$ (такое решение может быть только одно).

2. При достаточно больших $t \in G$ контур C (зависящий от t) лежит в D и составлен из частей линий наибыстрейшего спуска, выходящих из точки перевала $z = c(t)$.

3. При любом $A > 0$ и при $|t| > t_0(A)$, $t \in G$, круг $|z - c(t)| \leqslant A\,|h''(c(t))|^{-1/2}$ не содержит концов контура C и целиком лежит в области D.

Показать, что

$$\int\limits_C e^{-h(z)+zt}\,dz \sim \sqrt{\frac{2\pi}{h''(c(t))}}\,e^{-h(c(t))+tc(t)}, \qquad t \to \infty, \quad t \in G.$$

3°. Положим

$$\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^m}{m}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

Показать, что

$$a_n=\frac{1+o(1)}{\sqrt{m}\,(2\pi n)^{\frac{m-1}{2m}}}(n!)^{-\frac{1}{m}}\exp\left\{-\frac{1}{m}\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\left(\frac{k}{m}+1\right)\ldots\left(\frac{k}{m}+k-1\right)}{k!\,(m-k)!}\,n^{1-\frac{k}{m}}\right\}.$$

Глава II

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА

§ 2.1. Предварительные сведения

Во многих конструкциях теории целых функций играют существенную роль конформные отображения тех или иных областей. Чаще всего приходится иметь дело с отображениями областей, аналогичных углу — на угол, или областей, аналогичных полосе — на полосу (так, чтобы бесконечность переходила в бесконечность). При исследовании асимптотического поведения подобных конструкций естественно возникает необходимость получения асимптотических оценок для конформных отображений вблизи бесконечности. Методам получения таких оценок и посвящена настоящая глава.

Мы начнем с того, что напомним ряд хорошо известных фактов из теории аналитических и гармонических функций.

Пусть функция $f(z)$ регулярна или мероморфна в области D комплексной плоскости.

Функция $f(z)$ называется *однолистной в области*, если она принимает различные значения в различных точках этой области.

Функция $f(z)$ называется *однолистной в точке*, если она однолистна в некоторой окрестности этой точки.

Очевидно, что функция, однолистная в области, однолистна в каждой точке этой области. Однако пример функции $f(z) = e^z$ показывает, что существуют функции, однолистные в каждой точке области и не однолистные в области.

Если функция $f(z)$ регулярна в точке $a \neq \infty$, то для ее однолистности в этой точке необходимо и достаточно, чтобы $f'(a) \neq 0$.

Конформным отображением области D называется отображение, совершаемое функцией $w = f(z)$ мероморфной и однолистной в этой области. *Образом* области D при конформном отображении $w = f(z)$ является множество G, состоящее из значений, принимаемых функцией $f(z)$ в области D. Известно, что множество G также является областью.

Основополагающим результатом теории конформных отображений является хорошо известная *теорема Римана:*

Если D — односвязная область, граница которой содержит более одной точки, то существует функция $f(z)$, конформно отображающая область D на круг $|w| < 1$. Функция $f(z)$ определяется единственным образом, если задать точку a области D, переходящую в центр круга, и величину $\theta = \arg f'(a)$.

Пусть $w = f(z)$ — какое-либо конформное отображение области D на единичный круг, а $z = \varphi(w)$ — обратное отображение. Вообще говоря, функция $f(z)$ не определена на границе области D, а функция $\varphi(w)$ не определена на единичной окружности. Однако при некоторых дополнительных условиях на область D эти функции можно доопределить. Об этом говорит следующая хорошо известная теорема, носящая название *принципа соответствия границ*:

Если область D ограничена простой замкнутой кривой, то конформное отображение области D на круг $|w| < 1$ можно продолжить до непрерывного и взаимно однозначного отображения замыкания области D на круг $|w| \leqslant 1$.

Иными словами, функцию $f(z)$ можно рассматривать как непрерывную функцию в замыкании области $\bar{D}$, а $\varphi(w)$ — как функцию, непрерывную в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$.

Если функция $\zeta = f(z)$ конформно отображает область D_1 на область D_2, а функция $w = g(\zeta)$ конформно отображает область D_2 на область D_3, то функция $w = g(f(z))$ очевидно конформно отображает область D_1 на область D_3. Поэтому из теоремы Римана следует существование конформного отображения одной односвязной области на другую, если границы этих односвязных областей содержат не менее двух точек каждая. По той же причине принцип соответствия границ сохраняет силу и для отображения друг на друга любых односвязных областей, ограниченных простыми замкнутыми кривыми. Более того, принцип соответствия границ легко распространяется и на отображения многосвязных областей, так как функция, конформно отображающая друг на друга две многосвязные области, отображает и любые односвязные части этих областей.

Для отображения областей, ограниченных простыми замкнутыми кривыми, имеется большее разнообразие в способах выделить единственное отображение. Чаще всего используются следующие два способа:

1. Задается образ одной внутренней точки области D и образ одной ее граничной точки.

2. Задаются образы трех граничных точек области D.

Одним из основных методов исследования задач, связанных с конформными отображениями, является сведение этих задач к решению задачи Дирихле для гармонических функций. Мы изложим ниже ряд довольно хорошо известных результатов о решении задачи Дирихле, но сначала напомним некоторые элементарные сведения, относящиеся к гармоническим функциям.

Согласно определению функция $u(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если она имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению $\Delta u(x, y) = 0$ в каждой точке этой области. Здесь Δ — оператор Лапласа для двух переменных, т. е. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Действительная и мнимая часть аналитической функции являются гармоническими функциями и, обратно, каждую гармоническую в односвязной области функцию можно представить, как действительную или мнимую часть функции, аналитической в этой области (мы не будем проводить различия между комплексной переменной z и парой действительных переменных x и y).

Основные формулы, относящиеся к гармоническим функциям, выводятся из хорошо известной формулы

Грина — Остроградского

$$\int\limits_{\partial D} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(на условиях справедливости этой формулы мы не будем останавливаться, хотя нам будут нужны довольно сильные результаты; их можно найти в хороших учебниках анализа или в моей книге «Аналитические функции»). Обычно используется частный случай приведенной формулы, носящей название *формулы Грина*

$$\int\limits_{\partial D} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\,ds = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint\limits_{D} \varphi\cdot\Delta\psi\,dx\,dy. \tag{1}$$

Мы будем иметь дело с областями, ограниченными кусочно-гладкими кривыми, и потому направление внешней нормали n (а значит, и дифференцирование $\frac{\partial}{\partial n}$ по этому направлению) определено на всей границе области за исключением конечного числа точек. Через ds в формуле (1) обозначен дифференциал длины дуги кривой интегрирования.

Пусть функции u и v гармоничны в области D и непрерывно дифференцируемы в ее замыкании. Тогда из формулы (1) нетрудно вывести формулу

$$\int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0. \tag{2}$$

В частности, при $v \equiv 1$ имеем

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0. \tag{3}$$

Пусть (x_0, y_0) — какая-либо точка области D, а

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $\ln r$ является гармонической во всей плоскости за исключением точки (x_0, y_0).

Из формулы (1) легко выводится формула

$$\int\limits_{\partial D}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\ln r-\frac{\partial u}{\partial n}\ln r\right)ds=$$
$$=2\pi u(x_0,\,y_0)+\iint\limits_{D}\Delta u\cdot\ln r\,dx\,dy, \tag{4}$$

которая для гармонической функции u принимает вид

$$\int\limits_{\partial D}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n}\ln r\right)ds=2\pi u(x_0,\,y_0). \tag{5}$$

Возьмем в качестве области D круг K_R с центром $(x_0,\,y_0)$ и радиусом R. Тогда мы получим для гармонической функции u равенство

$$u(x_0,\,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial K_R}u\,ds. \tag{6}$$

Для произвольной (негармонической) функции u мы также можем получить из формулы (4) равенство

$$u(x_0,\,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial K_R}u\,ds-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K_R}\ln\frac{R}{r}\cdot\Delta u\,dx\,dy. \tag{7}$$

Формулу (6) для гармонических функций можно заменить следующей равносильной словесной формулировкой:

Среднее арифметическое значений гармонической функции на любой окружности равно ее значению в центре круга.

Эта теорема носит название *теоремы о среднем*. Из нее легко вывести один важный результат (о нем будем говорить еще в § 2.3). Этот результат носит название *принципа максимума и минимума* для гармонических функций:

Гармоническая в области D функция, отличная от тождественной постоянной, не может принимать внутри области ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Отметим, что принцип максимума и минимума не требует никаких предположений о границе области D или о поведении гармонической функции в замыкании этой области.

В дальнейшем для упрощения записи мы будем записывать гармоническую функцию $u(x, y)$ символом $u(x+iy)$. Это позволит нам иметь дело не с действительной плоскостью (x, y), а с комплексной плоскостью z.

Перейдем к обсуждению задачи Дирихле.

Простейший вариант задачи Дирихле для гармонических функций состоит в следующем. Пусть на границе ∂D области D задана непрерывная функция $\varphi(\zeta)$. Требуется найти функцию $u(z)$, гармоническую в области D и непрерывную в ее замыкании, совпадающую с функций $\varphi(\zeta)$ на границе области D.

Из принципа максимума и минимума для гармонических функций немедленно вытекает, что простейший вариант задач Дирихле имеет не более одного решения. Однако вопрос о существовании хотя бы одного решения существенно сложнее. Для односвязной области D существование решения задачи Дирихле можно вывести из теоремы Римана и, наоборот, из существования решения задачи Дирихле можно вывести теорему Римана. Мы приведем (без доказательства) один из наиболее обычных результатов о существовании решения задачи Дирихле. Однако нам будет удобнее привести результат, относящийся не к простейшему варианту, а к несколько более общему.

Обобщенная задача Дирихле состоит в следующем.

Пусть на границе ∂D области D задана ограниченная функция $\varphi(\zeta)$, имеющая не более счетного числа точек разрыва. Требуется найти функцию $u(z)$, гармоническую и ограниченную в области D и такую, что

$$u(z) \to \varphi(\zeta), \qquad z \to \zeta,\ z \in D,\ \zeta \in \partial D,$$

в каждой точке ζ, где функция $\varphi(\zeta)$ непрерывна.

Основной результат о разрешимости обобщенной задачи Дирихле таков:

Если область D ограничена конечным числом простых замкнутых кривых (не вырождающихся в точки), то обобщенная задачи Дирихле имеет ровно одно решение для *любой функции* $\varphi(\zeta)$ (*обладающей свойствами, требуемыми в постановке задачи*).

Пусть область D ограничена конечным числом простых замкнутых кривых, а E — множество, состоящее из счетного числа отрезков этих кривых. Возьмем в качестве $\varphi(\zeta)$ функцию, равную единице в точках множества E и нулю в остальных точках границы ∂D области D. Решение задачи Дирихле с такой функцией $\varphi(\zeta)$ мы будем обозначать символом

$$\omega(z;\ E,\ D).$$

Это решение называется *гармонической мерой* множества E относительно области D. Следует помнить, что гармоническая мера — не число, а функция, определенная в области D.

Решение задачи Дирихле с произвольной функцией $\varphi(\zeta)$, заданной на границе области D, можно написать в виде интеграла

$$u(z) = \int\limits_{\partial D} \varphi(\zeta)\,\omega(z;\ d\zeta,\ D). \tag{8}$$

В этой формуле мы обозначаем символом $\omega(z;\ d\zeta,\ D)$ главную линейную часть (при малых $d\zeta$) гармонической меры отрезка границы области D, заключенного между точками ζ и $\zeta+d\zeta$.

Мы уже говорили, что решение задачи Дирихле для гармонических функций можно использовать для исследования вопросов, относящихся к конформным отображениям. Однако и конформные отображения можно с успехом использовать для решения задачи Дирихле. Обычно использование конформных отображений опирается на следующий результат:

Пусть функция $w = f(z)$ *конформно отображает область* D *на область* G. *Если функция* $u(w)$ *является решением задачи Дирихле в области* G *с граничной функцией* $\varphi(\zeta)$, *то функция* $u(f(z))$ *является решением задачи Дирихле в области* D *с граничной функцией* $\varphi(f(\zeta))$.

Пример 1. Пусть $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$. Найдем гармоническую меру дуги окружности

$$\gamma = \{z = e^{i\theta}, \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$$

относительно круга $|z| < 1$.

Нетрудно проверить, что функция

$$w = \frac{z - e^{i\theta_1}}{z - e^{i\theta_2}} \cdot e^{i\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}$$

конформно отображает круг $|z| < 1$ на верхнюю полуплоскость плоскости w, причем дуга γ переходит в отрицательную часть действительной оси. Далее, очевидно, что функция $\frac{1}{\pi} \arg w$ представляет собою гармоническую меру отрицательной части действительной оси относительно верхней полуплоскости. Поэтому согласно приведенному выше результату имеем

$$\omega(z; \gamma, |z| < 1) = \frac{1}{\pi} \arg\left(\frac{z - e^{i\theta_1}}{z - e^{i\theta_2}} \cdot e^{i\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}\right).$$

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 2.1.

1°. Пусть область D описывается неравенством

$$-\infty < x < +\infty, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две непрерывные периодические функции с одинаковым периодом ω. Обозначим через $w(z)$ функцию, конформно отображающую область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ таким образом, что

$$\operatorname{Re} w(z) \to \pm\infty, \qquad \operatorname{Re} z \to \pm\infty.$$

Доказать, что функция $w'(z)$ периодична с периодом ω.

2°. Пусть функция $w(z)$ конформно отображает один прямоугольник на другой таким образом, что вершины переходят в вершины. Доказать, что функция $w(z)$ линейна, а прямоугольники — подобны.

3°. Пусть D — область, ограниченная простой замкнутой кривой, а z_1, z_2 и z_3 — три фиксированные точки на ее границе. Обозначим через $w(z)$ функцию, конформно отображающую область D на прямоугольник $0 < \operatorname{Re} w < 1$, $0 < \operatorname{Im} w < k$, и переводящую точки z_1, z_2 и z_3 в вершины 0, 1 и ik прямоугольника. Доказать, что при изменении величины k от 0 до $+\infty$ прообраз четвертой вершины прямоугольника монотонно движется по границе области D от точки z_2 к точке z_3.

4°. Пусть D — область, ограниченная конечным числом гладких замкнутых кривых, а $\varphi(\zeta)$ — непрерывная действительная функция, заданная на ее границе. Обозначим через A множество действительных функций $u(z)$, непрерывных в области D и равных $\varphi(\zeta)$ на ее границе. Предположив, что в классе A есть хотя бы одна функция $u_0(z)$, для которой интеграл

$$I(u_0) = \int\limits_D\int \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy < \infty$$

конечен, доказать, что наименьшее значение $I(u)$ достигается для решения задачи Дирихле с граничной функцией $\varphi(\zeta)$.

§ 2.2. Интеграл Пуассона

Мы проведем сейчас более подробное исследование задачи Дирихле для случая, когда область D является единичным кругом. Мы получим для этого случая несколько более тонкие результаты по сравнению с общим случаем. Кроме того, наши исследования представляют независимый интерес, так как мы не будем опираться на те глубокие общие результаты, о которых говорилось в предыдущем параграфе.

Пусть $g(\theta)$ — произвольная ограниченная измеримая функция, определенная на всей действительной оси и имеющая период 2π. По функции $g(\theta)$ мы определим функцию $u(z)$ формулой

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}, \quad r<1. \tag{1}$$

Эта формула называется *формулой Пуассона* или *интегралом Пуассона* для круга $|z|<1$.

Теорема 2.2.1. *Функция $u(z)$ гармонична в круге $|z|<1$. Если функция $g(\theta)$ непрерывна в точке $\theta=\theta'$, то $u(z)\to g(\theta')$ когда точка z стремится к точке $e^{i\theta'}$, оставаясь в круге $|z|<1$.*

Доказательство. Введем обозначение

$$K(re^{i\varphi}, \theta) = \frac{(1-r^2)\,g(\theta)}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}.$$

Из равенства

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}=\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}+re^{i\varphi}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}$$

видно, что функция $K(z, \theta)$ является гармонической функцией z в круге $|z|<1$, как действительная часть регулярной в этом круге функции. Поэтому и функция $u(z)$, получаемая интегрированием по параметру θ гармонической функции $K(z, \theta)$, гармонична в том же круге. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения мы заметим сначала, что для $r<1$ имеет место формула

$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}=1, \tag{2}$$

легко доказываемая непосредственным вычислением интеграла (например, с помощью вычетов). В силу этой формулы имеем

$$u(re^{i\varphi})-g(\varphi)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{g(\theta)-g(\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta.$$

Поскольку интеграл от периодической функции по периоду не зависит от места, с которого начинается интегрирование, можно написать

$$u(re^{i\varphi})-g(\varphi)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{g(\varphi+\alpha)-g(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}\,d\alpha.$$

Возьмем произвольное число δ, $0<\delta<\pi$ и разобьем промежуток интегрирования на три отрезка: $-\delta\leqslant\alpha\leqslant\delta$ и $\delta\leqslant|\alpha|\leqslant\pi$. Введем обозначения

$$\eta(\delta,\varphi)=\sup_{|\alpha|\leqslant\delta}|g(\varphi+\alpha)-g(\varphi)|,\quad M=\sup_{\alpha}|g(\alpha)|.$$

Для интеграла по отрезку $(-\delta, \delta)$ имеем оценку

$$\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{g(\alpha+\varphi)-g(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}\,d\alpha\right| \leqslant$$

$$\leqslant \eta(\delta, \varphi)\cdot\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d\alpha}{1+r^2-2r\cos\alpha} \leqslant \eta(\delta, \varphi),$$

а для суммы интегралов по двум оставшимся отрезкам легко получаем неравенство

$$\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|\alpha|\leqslant\pi}\frac{g(\varphi+\alpha)-g(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}\,d\alpha\right| \leqslant M\frac{1-r^2}{1-\cos\delta} < 2M\frac{1-r^2}{\delta^2}.$$

Поэтому

$$|u(re^{i\varphi})-g(\varphi)| \leqslant \eta(\delta, \varphi)+2M\cdot\frac{1-r^2}{\delta^2}. \tag{3}$$

Поскольку

$$\eta(\delta, \varphi)+|g(\varphi)-g(\theta')| \leqslant 2\eta(\delta+|\varphi-\theta'|, \theta')$$

мы выводим из (3), что

$$|u(re^{i\varphi})-g(\theta')| \leqslant 2\eta(\delta+|\varphi-\theta'|, \theta')+2M\cdot\frac{1-r^2}{\delta^2}. \tag{4}$$

Если θ' — точка непрерывности функции $g(\theta)$, то $\eta(\varepsilon, \theta')\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Поэтому, положив в (4) $\delta = (1-r^2)^{1/4}$, мы легко получим второе утверждение теоремы.

Замечание. Если для функции $g(\theta)$ имеют место неравенства

$$m \leqslant g(\theta) \leqslant M, \qquad -\infty < \theta < +\infty,$$

то из формулы (2) легко вывести справедливость неравенств

$$m \leqslant u(z) \leqslant M, \qquad |z| < 1.$$

Из доказанной нами теоремы вытекает, что интеграл Пуассона дает решение обобщенной задачи Дирихле в круге $|z| < 1$ с граничной функцией $\varphi(e^{i\theta}) = g(\theta)$. (Единственность решения требует отдельного доказательства. Мы дадим это доказательство в следующем параграфе.)

В связи с теоремой 2.2.1 естественно возникает вопрос о поведении интеграла Пуассона вблизи точек разрыва функции $g(\theta)$. Следующая теорема в значительной мере отвечает на этот вопрос.

Теорема 2.2.2. *Пусть функция $g(\theta)$ имеет в точке $\theta = \theta'$ разрыв первого рода и*

$$A^+ = \lim_{\theta \to \theta'+0} g(\theta), \quad A^- = \lim_{\theta \to \theta'-0} g(\theta).$$

Тогда функция

$$u_1(z) = u(z) + \frac{A^+ - A^-}{\pi} \arg(z - e^{i\theta'})$$

(в качестве $\arg(z - e^{i\theta'})$ выбирается произвольная ветвь этой многозначной функции, непрерывная в круге $|z| < 1$) стремится к некоторому пределу при $z \to e^{i\theta'}$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g^*(\theta)$. При $\theta' - \pi < \theta \leqslant \theta' + \pi$ мы определим ее равенствами

$$g^*(\theta') = 0; \quad g^*(\theta) = g(\theta) - A^-, \quad \theta' - \pi < \theta < \theta';$$
$$g^*(\theta) = g(\theta) - A^+, \quad \theta' < \theta \leqslant \theta' + \pi,$$

а затем периодически продолжим на всю действительную ось. Легко видеть, что функция $g^*(\theta)$ непрерывна в точке $\theta = \theta'$. Обозначим через $u^*(z)$ интеграл Пуассона, построенный по функции $g^*(\theta)$. С помощью формулы (2) нетрудно убедиться, что

$$u^*(z) = u(z) - A^+ + (A^+ - A^-) \cdot \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{\theta'-\pi}^{\theta'} \frac{d\theta}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - \theta)}$$

(здесь, как обычно, $z = re^{i\varphi}$). Поскольку

$$\frac{1-r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi-\theta)} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = 2 \operatorname{Im} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} - 1,$$

мы легко находим, что

$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_{\theta'-\pi}^{\theta'}\frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int\limits_{\theta'-\pi}^{\theta'}\frac{d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}-\frac{1}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\ln\frac{e^{i\theta'}-z}{e^{i\theta'}+z}=$$

$$=\frac{1}{2}+2\nu+\frac{1}{\pi}\arg(z-e^{i\theta})-\frac{1}{\pi}\arg(z+e^{i\theta'}),$$

где ν — некоторое целое число (в этих формулах для логарифма выбирается ветвь, регулярная в круге $|z|<1$ и равная нулю при $z=0$, а для аргументов — любая пара ветвей, непрерывных в круге $|z|<1$; число ν определяется выбором этой пары ветвей). Отсюда мы получаем для функции $u_1(z)$, введенной в формулировке теоремы, выражение

$$u_1(z)=u^*(z)+\frac{A^+-A^-}{\pi}\arg(z+e^{i\theta'})+$$
$$+\frac{1}{2}A^++2\nu\cdot(A^+-A^-).$$

Поскольку функция $g^*(\theta)$ непрерывна в точке $\theta=\theta'$, функция $u^*(z)$ по теореме 2.2.1 имеет предел при $z\to e^{i\theta'}$. Остальные слагаемые выражения для $u_1(z)$ очевидно также имеют предел. Теорема полностью доказана.

Заметим, что вычислить предел, к которому стремится функция $u_1(z)$, не составляет труда. Он равен $\frac{1}{2}A^++$ $+2\nu'\cdot(A^+-A^-)$, где ν' — некоторое целое число, зависящее от выбора ветви аргумента.

В качестве применения доказанных теорем мы рассмотрим сейчас вопрос о поведении производной конформного отображения вблизи границы отображаемой области. Без особого ограничения общности можно ограничиться лишь отображениями односвязных областей.

Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости w, ограниченная простой замкнутой кусочно-гладкой кривой C. Как обычно, мы считаем направление кривой C положительным по отношению к области D, т. е.

при движении по кривой C область D должна оставаться слева. Обозначим через $w(z)$ какую-либо функцию, конформно отображающую круг $|z| < 1$ на область D. Согласно принципу соответствия границ эту функцию можно считать определенной и непрерывной в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Ясно, что уравнение

$$w = w(e^{i\theta}), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

можно рассматривать как параметрическое уравнение кривой C.

Мы определим сейчас некоторую функцию $h(\theta)$, значения которой равны углу наклона касательной кривой C в точке $w(e^{i\theta})$ к действительной оси, если точка $w(e^{i\theta})$ не является угловой точкой кривой C. Трудности определения связаны с неоднозначностью в выборе значения угла.

Сначала дадим определение функции $h(\theta)$ на каком-либо отрезке, не содержащем угловых точек кривой C. Выберем произвольную точку θ_0 из этого отрезка и положим

$$h(\theta_0) = \arg \tau(\theta_0),$$

где $\tau(\theta)$ — комплексное число, совпадающее с единичным вектором касательной к кривой C в точке $w(e^{i\theta})$. Ясно, что величина $h(\theta_0)$ определяется с точностью до слагаемого $2\pi\nu$, где ν — целое число. Той же формулой мы определим величину $h(\theta)$ и для любой другой точки отрезка. Дополнительное условие непрерывности, наложенное на функцию $h(\theta)$, позволит нам определить функцию $h(\theta)$ единственным образом по выбранному значению $h(\theta_0)$.

Чтобы окончательно определить функцию $h(\theta)$ на всей действительной оси, мы должны теперь задать условия на ее скачки в угловых точках кривой C. Мы потребуем, чтобы величина скачка была равна $\alpha - \pi$, где α — внешний угол области D в соответствующей угловой точке (величина этого внешнего угла определяется единственным образом — мы считаем, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$).

Теорема 2.2.3. *Функция*

$$u(z) = \arg w'(z)$$

является решением задачи Дирихле в круге $|z| < 1$ *для* *граничной функции*

$$\varphi(e^{i\theta}) = h(0) - \theta - \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \theta < 2\pi.$$

(Как функция $\varphi(\zeta)$, так и функция $u(z)$ определяются с точностью до слагаемого, кратного 2π. Эти слагаемые должны быть согласованы.)

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(z) = \ln \frac{w(ze^{i\varepsilon}) - w(z)}{ze^{i\varepsilon} - z}.$$

В силу однолистности функции $w(z)$ в круге $|z| < 1$ числитель дроби, стоящей под знаком логарифма, может обратиться в нуль только при $z = 0$, и значение дроби при $z = 0$ также отлично от нуля. Следовательно, функция $f_\varepsilon(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$. Из принципа соответствия границ вытекает, что эту функцию можно считать непрерывной в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Поэтому функция

$$u_\varepsilon(z) = \operatorname{Im} f_\varepsilon(z) = \arg \frac{w(ze^{i\varepsilon}) - w(z)}{ze^{i\varepsilon} - z}$$

гармонична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в его замыкании. Отсюда следует, что функция $u_\varepsilon(z)$ является решением задачи Дирихле в круге $|z| < 1$ с граничной функцией

$$\varphi_\varepsilon(e^{i\theta}) = g_\varepsilon(\theta) = \arg \frac{w(e^{i(\theta+\varepsilon)}) - w(e^{i\theta})}{e^{i(\theta+\varepsilon)} - e^{i\theta}}.$$

Мы отмечали, что решение задачи Дирихле с непрерывной граничной функцией единственно. Поэтому функция $u_\varepsilon(z)$ совпадает с интегралом Пуассона, построенным по функции $g_\varepsilon(\theta)$, то есть справедливо равенство

$$\arg \frac{w(ze^{i\varepsilon}) - w(z)}{ze^{i\varepsilon} - z} = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_\varepsilon(\theta)\, d\theta}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - \theta)}. \tag{5}$$

Перейдем в равенстве (5) к пределу при $\varepsilon \to 0$. В левой стороне мы получаем, очевидно, $\arg w'(z)$. Для отыскания предела правой части равенства (5) напишем согласно определению

$$g_\varepsilon(\theta) = \arg\{w(e^{i(\theta+\varepsilon)}) - w(e^{i\theta})\} - \arg\{e^{i(\theta+\varepsilon)} - e^{i\theta}\}$$

(для обоих членов в правой части мы выбираем непрерывные по θ ветви аргумента). Легко проверить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \arg\{e^{i(\theta+\varepsilon)} - e^{i\theta}\} = \theta + \frac{\pi}{2} + 2\pi\nu,$$

где ν — некоторое целое число. Если точка $w(e^{i\theta})$ не является угловой точкой кривой C, то предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(\theta), \tag{6}$$

где

$$h_\varepsilon(\theta) = \arg\{w(e^{i(\theta+\varepsilon)}) - w(e^{i\theta})\} \tag{7}$$

существует и отличается от $h(\theta)$ на слагаемое, кратное 2π. Это следует из того, что значение функции $h_\varepsilon(\theta)$ равно величине угла, образованного положительным направлением действительной оси и секущей кривой C, идущей из точки $w(e^{i\theta})$ в точку $w(e^{i(\theta+\varepsilon)})$, а предельным положением такой секущей при $\varepsilon\to 0$ является касательная к кривой C в точке $w(e^{i\theta})$.

Ясно, что предел (6) существует равномерно по θ на каждом замкнутом отрезке I, не содержащем угловых точек кривой C, и что этот предел — непрерывная на I функция. Поэтому на каждом таком отрезке I справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(\theta) = h(\theta) + 2\pi\nu', \tag{8}$$

где целое число ν' не зависит от точки отрезка I.

Рассмотрим теперь функцию $h_\varepsilon(\theta)$ на произвольном отрезке I. При любом $\varepsilon > 0$ эта функция непрерывна. Введем величину $V_\varepsilon(I)$, равную разности между наибольшим и наименьшим значениями функции $h_\varepsilon(\theta)$ при условии, что обе точки $e^{i\theta}$ и $e^{i(\theta+\varepsilon)}$ лежат на отрезке I (в случае, когда ε больше длины отрезка I, мы будем считать, что $V_\varepsilon(I) = 0$). Из геометрических соображений очевидно, что при уменьшении ε величина $V_\varepsilon(I)$ не убывает. На малых отрезках l кривая C мало отличается от своей касательной или от угла, образованного двумя касательными в угловой точке. Поэтому при достаточно малых отрезках l и при всех $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant V_\varepsilon(l) \leqslant \pi. \tag{9}$$

Мы установили, что предел (6) существует для всех θ за исключением, может быть, конечного числа точек, отвечающих угловым точкам кривой C, причем на каждом замкнутом отрезке, не содержащем угловых точек, предел существует равномерно по θ. Предельная функция определена, таким образом, для всех θ, за исключением угловых точек, и на каждом интервале между угловыми точками предельная функция отличается от $h(\theta)$ на постоянное слагаемое, кратное 2π. Из неравенства (9) вытекает, что величина скачка предельной функции находится в пределах от $-\pi$ до π. Согласно определению величина скачка у функции $h(\theta)$ обладает тем же свойством. Отсюда следует, что предельная функция во всех точках непрерывности отличается от $h(\theta)$ на одну и ту же постоянную.

Итак, мы установили, что

$$g_\varepsilon(\theta) \to h(\theta) - \theta - \frac{\pi}{2}, \qquad \varepsilon \to 0,$$

причем стремление к пределу равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$ за исключением сколь угодно малых окрестностей конечного числа точек; и что

$$|g_\varepsilon(\theta)| \leqslant M < \infty, \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$

где M — некоторое число, независящее от ε. Поэтому, переходя в формуле (5) к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы получаем, что

$$\arg w'(z) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta) - \theta - \frac{\pi}{2}}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - \theta)}\, d\theta + 2\pi\nu^*.$$

Тем самым теорема доказана, ибо мы знаем, что интеграл Пуассона дает решение задачи Дирихле.

Заметим, что мы доказали даже немного больше обещанного — представимость функции $\arg w'(z)$ интегралом Пуассона через указанную граничную функцию. Это различие не очень существенно, так как вскоре мы докажем единственность решения обобщенной задачи Дирихле. Тем не менее этот факт заслуживает упоминания, поскольку он дает нам возможность уже сейчас с полным основанием применять теорему 2.2.2 для исследования отображающей функции вблизи угловых точек границы.

Заметим еще, что используя те же идеи можно было бы при желании доказать справедливость теоремы 2.2.2 при значительно более слабых предположениях о границе области D.

Теорема 2.2.4. *Пусть D — конечная область, ограниченная простой замкнутой кусочно-гладкой кривой, а $w(z)$ — функция, конформно отображающая круг $|z| < 1$ на эту область. Если точка $w(e^{i\theta'})$ является угловой точкой области D, а внутренний угол в этой точке равен $\pi\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$, то величина*

$$\arg\{w'(z)(z-e^{i\theta'})^{1-\lambda}\}$$

имеет предел при $z \to e^{i\theta'}$ по любому пути, лежащему в круге $|z| < 1$.

Доказательство. Согласно теореме 2.2.3 имеем

$$\arg w'(z) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)-\theta-\frac{\pi}{2}}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\,d\theta,$$

где функция $h(\theta)$ равна аргументу единичного вектора касательной к границе области D в точке $w(e^{i\theta})$, если касательная в этой точке существует. Эта функция непрерывна на каждом отрезке, не содержащем прообразов угловых точек, а в прообразах угловых точек эта функция имеет скачок, равный $\alpha - \pi$, где α — внешний угол области D в соответствующей угловой точке. Применим теорему 2. В силу сказанного выше

$$A^+ - A^- = \alpha - \pi = (1-\lambda)\pi,$$

так что величина

$$\arg w'(z) + (1-\lambda)\arg(z - e^{i\theta'})$$

должна иметь предел при $z \to e^{i\theta'}$ по любому пути лежащему в круге $|z| < 1$. Тем самым теорема доказана, так как написанное выражение легко преобразуется к нужному виду.

Стоит особо выделить случай $\lambda = 1$, т. е. случай, когда точка $w(e^{i\theta'})$ не является угловой точкой границы области D, а лежит на гладком участке границы.

Следствие. *Пусть D и G — конечные области, каждая из которых ограничена простой замкнутой кусочно-гладкой кривой, а $F(t)$ — функция, конформно отображающая G на D. Если точка a и ее образ $b = F(a)$ попадают на гладкие участки границы соответствующих областей, то величина $\arg F'(t)$ имеет предел при $t \to a$ по любому пути, лежащему в области G.*

Для доказательства следствия мы представим интересующее нас отображение $w = F(t)$ в виде $w = w(\zeta(t))$, где $\zeta = \zeta(t)$ — отображение области G на круг $|\zeta| < 1$, переводящее точку $t = a$ в точку $\zeta = 1$, а $w = w(\zeta)$ — отображение круга $|\zeta| < 1$ на область D, переводящее точку $\zeta = 1$ в точку $w = b$. В силу теоремы Римана такое представление всегда возможно. Функции, обратные к $\zeta(t)$ и $w(\zeta)$, мы обозначим через $t(\zeta)$ и $z(w)$ соответственно.

По теореме 2.2.4 имеем

$$\begin{aligned} &\arg t'(\zeta) \to A, && \zeta \to 1, \\ &\arg w'(\zeta) \to B, && \zeta \to 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Согласно формулам дифференцирования сложной функции и обратной функции мы можем написать

$$t'(\zeta(t)) = \frac{1}{\zeta'(t)}, \quad F'(t) = w'(\zeta(t)) \cdot \frac{1}{t'(\zeta(t))}.$$

В силу принципа соответствия границ условие $t \to a$ по любому пути, лежащему в области G, равносильно условию $\zeta \to 1$ по любому пути, лежащему в круге $|\zeta| < 1$. Сделав в соотношениях (10) замену $\zeta = \zeta(t)$, мы легко получим, что

$$\arg F'(t) \to B - A, \qquad t \to a.$$

Тем самым следствие доказано.

Замечание. Все предположения о характере границы областей D и G за исключением сколь угодно малых окрестностей точек a и b излишни, так как мы можем ограничиться рассмотрением отображения функцией $w = F(t)$ лишь малой окрестности точки $t = a$.

Заметим теперь, что случай, когда $\lambda > 0$, довольно просто свести к случаю $\lambda = 1$, сделав вспомогательное отображение

$$\mathfrak{z} = (w - b)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Результирующее отображение

$$\mathfrak{z}(t) = (F(t) - b)^{\frac{1}{\lambda}}$$

будет взаимно однозначно и конформно в некоторой достаточно малой окрестности точки $t = a$ (точнее говоря, в пересечении этой окрестности с областью G). Применяя следствие из теоремы 2.2.4, мы получаем, что

$$\arg\left\{F'(t)\,(F(t) - b)^{\frac{1}{\lambda}}\right\} \to A^*, \qquad t \to a. \tag{11}$$

Возьмем в качестве области G круг $|z| < 1$, а в качестве a — точку $z = e^{i\theta'}$, и сравним формулу (11) с аналогичной формулой теоремы 2.2.4. Несложными преобразованиями мы придем к формуле

$$\arg\left\{\frac{w(z) - w(e^{i\theta'})}{(z - e^{i\theta'})^{\lambda}}\right\} \to \alpha, \qquad z \to e^{i\theta'}. \tag{12}$$

Проведя рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые были использованы при доказательстве следствия из теоремы 2.2.4, мы получим следующий результат:

Теорема 2.2.5. *Пусть D и G — конечные области, каждая из которых ограничена простой замкнутой кусочно-гладкой кривой, а $w(z)$ — функция, конформно отображающая G на D. Если точка $z = a$ и ее образ — точка $w = b = w(a)$ являются угловыми точками границы областей G и D с внутренними углами $\pi\mu > 0$ и*

$\pi\lambda > 0$ соответственно, то величина

$$\arg\left\{\frac{(w(z)-b)^{\mu}}{(z-a)^{\lambda}}\right\}$$

имеет предел при $z \to a$ по любому пути, лежащему в области G.

Из теоремы 2.2.5 в сочетании с формулой (11) мы немедленно получаем несколько более общую форму теоремы 2.2.4:

Теорема 2.2.6. *При выполнении условий теоремы 2.2.5 величина*

$$\arg\{w'(z)(z-a)^{\mu-\lambda}\}$$

имеет предел при $z \to a$ по любому пути, лежащему в области G.

Угловую точку границы области с внутренним углом, равным нулю, мы будем называть *острием*. В отличие от теоремы 2.2.4 теоремы 2.2.5 и 2.2.6 справедливы лишь для угловых точек, не являющихся остриями. Для получения теорем более общего вида, относящихся к острию, нам будет удобнее рассматривать случай, когда острие расположено в бесконечности.

Теорема 2.2.7. *Пусть каждая из областей D и G ограничена на сфере Римана простой замкнутой кусочно-гладкой кривой и имеет в бесконечности острие. Пусть, далее, $w(z)$ — функция, конформно отображающая G на D так, что бесконечность переходит в бесконечность. Тогда величина $\arg w'(z)$ имеет предел при $z \to \infty$ по любому пути, лежащему в области G.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда область G является полосой $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$, а интересующее нас острие отвечает бесконечности, лежащей в правой полуплоскости. Мы построим некоторое вспомогательное отображение, которое позволит нам применить теорему 2.2.4.

Возьмем какую-либо точку c, лежащую вне области D, и положим

$$\zeta(t) = \frac{1}{w\left(\ln\frac{1+t}{1-t}\right) - c}.$$

Функция $z = \ln\frac{1+t}{1-t}$ конформно отображает круг $|t|<1$ на полосу $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$, а функция $\zeta = \frac{1}{w-c}$ конформно отображает область D на конечную область D', имеющую острие в точке $\zeta = 0$. Поэтому функция $\zeta(t)$ конформно отображает круг $|t| < 1$ на область D', причем прообразом острия $\zeta = 0$ является, как нетрудно убедиться, точка $t = 1$. Согласно теореме 2.2.4 имеем

$$\arg\{\zeta'(t)(t-1)\} \to A, \quad t \to 1, \ |t| < 1. \tag{13}$$

Из того, что точка $\zeta = 0$ является острием, следует, что

$$\arg \zeta(t) \to \alpha, \quad t \to 1, \ |t| < 1, \tag{14}$$

и поскольку

$$\zeta'(t) = -(\zeta(t))^{-2} \cdot w'\left(\ln\frac{1+t}{1-t}\right) \cdot \frac{1}{1-t^2},$$

мы получаем из формул (13) и (14), что

$$\arg w'\left(\ln\frac{1+t}{1-t}\right) \to A^*, \quad t \to 1, \ |t| < 1.$$

Условие

$$t \to 1, \quad |t| < 1,$$

равносильно условию

$$\operatorname{Re}\ln\frac{1+t}{1-t} \to +\infty, \quad \left|\operatorname{Im}\ln\frac{1+t}{1-t}\right| < \frac{\pi}{2},$$

и мы видим, что величина $\arg w'(z)$ имеет предел при $z \to \infty$ в интересующей нас половине полосы $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$.

Из формулы для производной обратной функции немедленно вытекает, что и величина $\arg z'(w)$, где $z(w)$ — функция, обратная к $w(z)$, имеет предел при $w \to \infty$ по любому пути, лежащему в области D. Отсюда, как и при доказательстве следствия из теоремы 2.2.4, мы выводим справедливость доказываемой теоремы в ее общей формулировке.

Доказанные теоремы имеют большое значение для исследования асимптотического поведения конформного отображения вблизи границы области. В некоторых случаях они непосредственно дают необходимый результат, но чаще необходимы дополнительные исследования, относящиеся к поведению величины $|w'(z)|$. Несколько ниже мы проведем эти исследования для наиболее интересного случая, когда угловая точка границы является острием.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 2.2

1°. Пусть $u(z)$ — функция, гармоническая в правой полуплоскости и непрерывная вплоть до мнимой оси. Доказать, что если функция $u(z)$ удовлетворяет условию

$$u(z) = o(z), \qquad z \to \infty, \ \operatorname{Re} z > 0,$$

то для нее имеет место интегральное представление

$$u(x+iy) = \frac{x}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(i\xi)\, d\xi}{x^2 + (y-\xi)^2}, \qquad x > 0.$$

2°. Пусть $u(z)$ — функция, гармоническая в правой полуплоскости, непрерывная вплоть до мнимой оси и удовлетворяющая условию

$$u(z) = o(z), \qquad z \to \infty, \ \operatorname{Re} z > 0,$$

а $\lambda(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x > 0$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\lambda(x) \to +\infty, \quad x\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \to 0, \qquad x \to +\infty.$$

Доказать, что из равенств

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{u(i\xi)}{\lambda(\xi)} = A, \quad \lim_{\xi\to+\infty} \frac{u(-i\xi)}{\lambda(\xi)} = B$$

вытекает, что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{u(re^{i\theta})}{\lambda(r)} = \frac{A+B}{2} + (A-B)\frac{\theta}{\pi}, \qquad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3°. Пусть $u(z)$ — функция, гармоническая в правой полуплоскости и непрерывная вплоть до мнимой оси. Доказать, что если

$u(z)$ ограничена сверху в правой полуплоскости, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(i\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi > -\infty.$$

§ 2.3. Субгармонические функции

Пусть $U(z)$ — действительная функция, определенная в некоторой области D комплексной плоскости, причем для нее допускаются значения, равные $-\infty$ (но не $+\infty$). Функцию $U(z)$ мы будем называть *субгармонической* в области D, если выполнены следующие условия:

1. Для каждого $\zeta \in D$ существует такое $\rho > 0$, что

$$U(\zeta) \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} U(z)\,|dz| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} U(\zeta + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

2. Функция $\exp U(z)$ непрерывна в области D.

В стандартном определении субгармонической функции вместо условия 2 используется несколько менее ограничительное условие полунепрерывности снизу. Для целей применения к теории аналитических функций одной комплексной переменной вполне можно ограничиться и приведенным выше более простым условием.

Из теоремы о среднем для гармонических функций (см. § 2.2) видно, что *функция, гармоническая в области D, является и субгармонической в этой области функцией.*

Видно также, что если функция $U(z)$ гармонична в области D за исключением конечного числа точек, в которых $U(z) = -\infty$, то она опять-таки является субгармонической функцией в области D, при условии, что предел $U(z)$ при стремлении z к исключительным точкам существует и равен $-\infty$. Действительно, условие 2 выполняется ввиду последней оговорки, условие 1 автоматически выполнено в исключительных точках из-за равенства $U(z) = -\infty$ в этих точках, а в остальных точках — по теореме о среднем для гармонических функций.

Если функция $F(z)$ регулярна в области D, то $\ln|F(z)|$ является гармонической функцией во всей области D за исключением тех точек, где $F(z) = 0$. При стремлении z к этим исключительным точкам мы имеем, очевидно, $\ln|F(z)| \to -\infty$. Согласно теореме единственности таких исключительных точек (если $F(z) \not\equiv 0$) только конечное число в каждой замкнутой части области D. Поэтому справедливо следующее утверждение:

Если функция $F(z)$ регулярна в области D, то функция

$$U(z) = \ln|F(z)|$$

субгармонична в области D.

Это утверждение в значительной мере объясняет значение теории субгармонических функций для оценок, относящихся к аналитическим функциям.

Мы докажем сейчас ряд простейших свойств субгармонических функций.

1°. *Сумма* (но не разность!) *двух субгармонических в области D функций также является функцией, субгармонической в этой области. Умножение на положительную постоянную также оставляет функцию субгармонической.*

Действительно, непосредственно видно, что условия 1 и 2 выдерживают сложение функций и умножение на положительную постоянную.

2°. *Если функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ субгармоничны в области D, то и функция*

$$U(z) = \max\{U_1(z),\ U_2(z)\}$$

субгармонична в области D.

Действительно, выполнение условия 2 вытекает из равенства

$$e^{U(z)} = \max\{e^{U_1(z)},\ e^{U_2(z)}\}$$

и из того факта, что наибольшая из двух непрерывных функций также является непрерывной. Для проверки условия 1 возьмем любые допустимые ζ и ρ. Предположив, что $U(\zeta)=U_k(\zeta)$, где k равно 1 или 2, мы получим

$$U(\zeta)=U_k(\zeta)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_k(\zeta+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\zeta+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

3°. *Если последовательность $\{U_n(z)\}$ субгармонических в области D функций такова, что последовательность $\{\exp U_n(z)\}$ равномерно сходится в области z к пределу $V(z)$, то $\ln V(z)$ — субгармоническая в области D функция.*

Для доказательства обозначим через E множество тех точек области D, где $V(z)=0$. Это множество замкнуто в D, так как из условия 2 вытекает, что $V(z)$ — непрерывная функция. Множество $D\setminus E$ — открытое, и на каждой его замкнутой части последовательность $\{U_n(z)\}$ равномерно сходится. Для $\zeta\in E$ условие 1 выполняется автоматически, ибо $\ln V(\zeta)=-\infty$. Если $\zeta\in D\setminus E$, то можно найти такое $\rho>0$, что круг $|z-\zeta|\leqslant\rho$ лежит в множестве $D\setminus E$; и на всем этом круге последовательность $\{U_n\}$ равномерно сходится. Тогда можно написать условие 1 для функции U_n и совершить предельный переход.

Основную роль в применениях теории субгармонических функций играет следующий результат, носящий название принципа максимума. О его частном случае мы говорили в § 2.1 в связи с гармоническими функциями. Там мы не стали останавливаться на его доказательстве, но сейчас мы поговорим об этом и аналогичных ему результатах со всеми подробностями.

Теорема 2.3.1. *Пусть $U(z)$ — субгармоническая в области D функция, а M — верхняя грань функции $U(z)$ в области D. Если в какой-либо точке области D имеет место равенство $U(z_0)=M$, то $U(z)$ постоянна в области D (и равна M).*

Иными словами:

Субгармоническая функция, отличная от постоянной, не может достигать наибольшего значения внутри области.

Доказательство. Рассмотрим множество E, состоящее из тех точек области D, в которых имеет место равенство $U(z) = M$. Это множество замкнуто в D, так как $\exp U(z)$ — непрерывная функция. Если множество E непусто и отлично от всей области D, то у него найдется граничная точка ζ, лежащая в области D. В силу замкнутости множества E имеем $U(\zeta) = M$. По определению граничной точки существуют сколь угодно малые $\rho > 0$ такие, что на окружности $|z - \zeta| = \rho$ есть хотя бы одна точка $\xi \in D \setminus E$. Но $D \setminus E$ — открытое множество, так что у точки ξ имеется и некоторая окрестность, лежащая в множестве $D \setminus E$, а во всех точках этой окрестности должно выполняться неравенство $U(z) < M$. Рассмотрим окружность $|z - \zeta| = \rho$. Во всех точках этой окружности справедливо неравенство $U(z) \leqslant M$, а на некоторой ее дуге — неравенство $U(z) < M$. Поэтому

$$\int\limits_{|z-\zeta|=\rho} U(z)\,|dz| < 2\pi\rho \cdot M.$$

Но

$$M = U(\zeta) \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} U(z)\,|dz| < M.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим один более специальный вариант принципа максимума, иногда более удобный для применений.

Теорема 2.3.1*. *Пусть $U(z)$ — субгармоническая в области D функция. Для всех значений ζ, лежащих на границе ∂D области D, мы определим функцию $\varphi(\zeta)$ равенством*

$$\varphi(\zeta) = \varlimsup_{z \to \zeta} U(z), \qquad \zeta \in \partial D.$$

Во всей области D имеет место неравенство

$$U(z) \leqslant \sup_{\partial D} \varphi(\zeta),$$

причем равенство возможно лишь в случае, когда функция $U(z)$ постоянна в области D.

Доказательство. Обозначим через M верхнюю грань функции $U(z)$ в области D. Согласно определению верхней грани существует последовательность точек $z_n \in D$, для которых

$$U(z_n) \to M, \qquad n\to\infty$$

Пусть ζ_0 — какая-либо предельная точка последовательности $\{z_n\}$. Если $\zeta_0 \in D$, то мы получаем из теоремы 2.3.1, что $U(z) \equiv M$, и потому $\varphi(\zeta) \equiv M$. Если $\zeta_0 \in \partial D$, то мы имеем $\varphi(\zeta_0) = M$, а значит и $\sup\limits_{\partial D} \varphi(\zeta) = M$.

Доказанный вариант принципа максимума удобен еще и тем, что он позволяет одно существенное усиление, смысл которого в том, что значениями функции $\varphi(\zeta)$ в счетном числе точек можно пренебречь, если известно, что они конечны.

Теорема 2.3.2. *Пусть $U(z)$ и $\varphi(\zeta)$ — те же, что и в теореме 2.3.1*, а S — какое-либо счетное множество точек границы ∂D области D, относительно которой мы будем предполагать, что она имеет хотя бы одну внешнюю точку. Предположим, что*

$$\sup_{\partial D} \varphi(\zeta) < \infty, \quad \sup_{\partial D \setminus S} \varphi(\zeta) = M.$$

Тогда во всей области D имеет место неравенство $U(z) \leqslant M$, причем равенство возможно лишь в случае, когда функция $U(z)$ постоянна в области D.

Доказательство. Обозначим через b какую-либо внешнюю точку области D, а через $a_1, a_2, \ldots$ — точки, образующие множество S, и определим величины A_n равенством

$$A_n = 1 + \sup_{z\in D} \frac{|z-a_n|}{|z-b|}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_\varepsilon(z) = U(z) + \varepsilon \sum_1^\infty \frac{1}{2^n \cdot A_n} \ln \frac{|z-a_n|}{A_n |z-b|}.$$

Нетрудно убедиться, что ряд, входящий в эту функцию, равномерно сходится в каждой замкнутой части области D и что его сумма является гармонической в области D функцией. Поэтому функция U_ε субгармонична в области D. Поскольку слагаемые ряда отрицательны при всех $z \in D$, мы имеем неравенство

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, U_\varepsilon(z) \leqslant \overline{\lim_{z\to\zeta}}\, U(z) \leqslant M, \qquad \zeta \in \partial D \setminus S.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\lim_{z\to\zeta} U_\varepsilon(z) = -\infty, \qquad \zeta \in S. \qquad (1)$$

Поэтому, применяя теорему 2.3.1*, мы получаем, что

$$U_\varepsilon(z) \leqslant M, \qquad z \in D.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, находим $U(z) \leqslant M$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 2.3.2 легко вывести, что обобщенная задача Дирихле (см. § 2.1) имеет не более одного решения. Действительно, если $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — два решения обобщенной задачи Дирихле с одной и той же граничной функцией, то их разность $u(z)$ обладает следующими свойствами:

1. Функция $u(z)$ гармонична в области D и ограничена по абсолютной величине.
2. Предел $\lim\limits_{z\to\zeta} u(z)$ существует и равен нулю для всех точек $\zeta \in \partial D$ за исключением некоторого счетного множества.

Поскольку функция $u(z)$ гармонична, то она и субгармонична, так что применяя теорему 2.3.2, мы получаем

$$u(z) \leqslant 0, \qquad z \in D.$$

С другой стороны, субгамонична и функция $-u(z)$. Поэтому согласно той же теореме 2.3.2 имеем

$$u(z) \geqslant 0, \qquad z \in D.$$

Из полученных неравенств следует, что $u(z) \equiv 0$.

Заметим еще, что не меняя рассуждений, мы могли бы заметно ослабить условия на функцию $U(z)$ в теореме 2.3.2. Именно, мы могли бы предположить функцию $U(z)$ не ограниченной вблизи исключительных точек $a_n \in S$, а даже стремящейся к $+\infty$, но удовлетворяющей условиям

$$U(z) = o\left(\ln \frac{1}{|z - a_n|}\right), \qquad z \to a_n. \tag{2}$$

В этом случае равенство (14) все равно осталось бы справедливым, и мы по-прежнему получили бы, что $U(z) \leqslant M$. Более того, условия (2) можно заменить и еще более слабыми, если сделать некоторые дополнительные предположения о характере границы области D вблизи точек a_n. Результаты подобного рода носят название теорем Фрагмена — Линделёфа. Мы будем говорить о них подробнее в следующей главе.

Прежде чем говорить о других свойствах субгармонических функций, мы докажем два простых результата, позволяющих лучше понять строение этих функций.

Лемма 1. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция $U(z)$ субгармонична в области D в том и только в том случае, когда в каждой точке области D имеет место неравенство $\Delta U(z) \geqslant 0$ (здесь, как и раньше, через Δ мы обозначаем оператор Лапласа по переменным x и y, где $x = \operatorname{Re} z$, а $y = \operatorname{Im} z$).*

Доказательство. С помощью формул Грина (см § 2.1) легко установить, что для каждой функции $U(z)$, дважды непрерывно дифференцируемой в круге $|z-\zeta| \leqslant \rho$, справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} U(z)\,|dz| = U(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|z-\zeta|\leqslant\rho} \Delta U(z) \cdot \ln \frac{\rho}{|z-\zeta|} \cdot dx\,dy.$$

Сравнивая эту формулу с неравенством

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} U(z)\,|dz| \geqslant U(\zeta),$$

определяющим субгармоничность, мы легко получаем наше утверждение.

Лемма 2. *Пусть $U(z)$ — произвольная функция, субгармоническая в области D. Существует последовательность таких субгармонических дважды непрерывно дифференцируемых функций $U_n(z)$, что последовательность $\{\exp U_n(z)\}$ равномерно сходится к функции $\exp U(z)$ на каждой замкнутой части области D.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $z_0 \in D$ и произвольно малое $\varepsilon > 0$. Обозначим через D_ε содержащую точку z_0 связную часть множества тех точек z, для которых круг с центром в z и радиусом ε лежит в области D. Ясно, что какова бы ни была замкнутая часть области D, она содержится в D_ε, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Положим

$$k_\varepsilon(z) = \begin{cases} 0, & |z| \geqslant \varepsilon, \\ \dfrac{1}{K_\varepsilon} \cdot (|z|^2 - \varepsilon^2)^4, & |z| < \varepsilon, \end{cases}$$

где

$$K_\varepsilon = \iint\limits_{|z|<\varepsilon} (|z|^2 - \varepsilon^2)^4 \, dx\, dy.$$

По функции $U(z)$ мы построим функцию $U_\varepsilon^*(z)$, определенную в области D_ε, равенством

$$U_\varepsilon^*(z) = \iint\limits_D k_\varepsilon(z-\zeta)\, U(\zeta)\, d\xi\, d\eta, \tag{3}$$

или, что равносильно, равенством

$$U_\varepsilon^*(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\varepsilon} U(z+\zeta)\, k_\varepsilon(\zeta)\, d\xi\, d\eta. \tag{3*}$$

Если функция $U(z)$ ограничена снизу в области D, то из формулы (3) видно, что функция $U_\varepsilon^*(z)$ дважды непрерывно дифференцируема в области D_ε, а из формулы (3*) легко вывести, что она субгармонична в области D_ε. Далее, если функция $U(z)$ ограничена снизу, то она непрерывна, а для непрерывной функции $U(z)$ нетрудно получить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon^*(z) = U(z)$$

равномерно по z в каждой замкнутой части области D.

Если функция $U(z)$ не ограничена снизу в области D, то мы можем рассмотреть вспомогательную последовательность функций

$$U_n'(z) = \max\{U(z), -n\}.$$

Из непрерывности функции $\exp U(z)$ следует, что последовательность $\{\exp U_n'(z)\}$ равномерно сходится к функции $\exp U(z)$ на каждой замкнутой части области D, а согласно свойству 2° функции $U_n'(z)$ субгармоничны в области D. Согласно сказанному выше функции $U_n'(z)$ можно с любой точностью приблизить субгармоническими дважды непрерывно дифференцируемыми функциями в каждой замкнутой части области D. Отсюда мы легко получаем утверждение леммы.

Очень существенную роль в применениях теории субгармонических функций к аналитическим функциям играет следующее их свойство:

4°. *Если функция $U(w)$ субгармонична в области G, а функция $w(z)$ регулярна в области D и принимает значения, лежащие в области G, то функция $V(z) = U(w(z))$ субгармонична в области D.*

В силу леммы 2 и свойства 3 нам достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда функция $U(w)$ дважды непрерывно дифференцируема в области G. В этом случае наше утверждение легко получается из леммы 1 и несложно проверяемой формулы

$$\Delta V(z) = \Delta U(w)\cdot|w'(z)|^2.$$

Отметим еще одно свойство.

5°. *Пусть функция $U(z)$ субгармонична в области D, а ее значения лежат на отрезке (a, b). Если функция $\varphi(x)$ выпукла книзу и не убывает при $a \leqslant x \leqslant b$, то функция $\varphi(U(z))$ субгармонична в области D.*

Для доказательства опять следует применить лемму 2 и использовать формулу

$$\Delta\varphi(U(z)) = \Delta U \cdot \varphi''(U) + \varphi'(U)\left(U_x^2 + U_y^2\right).$$

Понятие субгармоничности во многом аналогично понятию выпуклости книзу для функций одной действительной переменной. Например, условие выпуклости книзу состоит в том, что значение функции в середине любого допустимого отрезка не превосходит среднего арифметического ее значений в концах этого отрезка. Условие субгармоничности состоит в том, что значение в центре любого допустимого круга не превосходит среднего арифметического ее значений на окружности этого круга. Критерий выпуклости книзу для дважды непрерывно дифференцируемых функций — неотрицательность второй производной, также аналогичен критерию субгармоничности — неотрицательности лапласиана. Субгармоничность функций двух переменных в некоторых отношениях ближе к выпуклости функций одной переменной, чем выпуклость функций двух переменных.

Связи между субгармоническими и выпуклыми функциями не ограничиваются лишь аналогией. Отметим следующий результат.

Теорема 2.3.3. *Если субгармоническая функция* $U(z)$, *определенная в полосе* $a < \operatorname{Re} z < b$, *не зависит от* $\operatorname{Im} z$, *то она является выпуклой книзу функцией от* $\operatorname{Re} z$.

Доказательство. Мы опять можем ограничиться случаем, когда функция $U(z)$ дважды непрерывно дифференцируема. Из доказательства леммы 2 видно, что приближающие функции $U_\varepsilon(x+iy)$ не зависят от y, если сама функция $U(x+iy)$ от y не зависит.

Согласно лемме 1 имеет место неравенство $\Delta U(z) \geqslant 0$. В случае, когда функция $U(x+iy)$ зависит только от x, это неравенство принимает вид $U''(x) \geqslant 0$, а это означает, что функция выпукла книзу.

В связи с субгармоническими функциями часто приходится рассматривать различные обобщения выпуклости книзу.

Функция $f(x)$ называется *логарифмически выпуклой*, если она является выпуклой книзу функцией от $\ln x$.

Следующая теорема совершенно аналогична теореме 2.3.3.

Теорема 2.3.3*. *Если субгармоническая функция $U(z)$, определенная в кольце $r < |z| < R$, не зависит от $\arg z$, то она является логарифмически выпуклой функцией от $|z|$.*

Еще на одном обобщении выпуклости мы остановимся более подробно, так как оно, с одной стороны, менее общеизвестно, а с другой стороны, играет важную роль в теории целых функций.

Пусть $\rho \geqslant 0$. Функция $H(\varphi)$ называется *тригонометрически ρ-выпуклой* на отрезке (α, β), если она ограничена сверху на этом отрезке и если на каждом отрезке (φ_1, φ_3), входящем в отрезок (α, β) и имеющем длину, меньшую π/ρ, выполняется неравенство

$$H(\varphi) \leqslant A \cos \rho\varphi + B \sin \rho\varphi$$

с любыми A и B, для которых

$$H(\varphi_1) \leqslant A \cos \rho\varphi_1 + B \sin \rho\varphi_1,$$

$$H(\varphi_3) \leqslant A \cos \rho\varphi_3 + B \sin \rho\varphi_3.$$

Больше всего нас будет интересовать класс функций $H(\varphi)$ тригонометрически ρ-выпуклых на всей действительной оси и периодических с периодом 2π. Этот класс мы обозначим символом T_ρ.

Отметим ряд свойств тригонометрически ρ-выпуклых функций.

I. *Для того чтобы функция $H(\varphi)$ была тригонометрически ρ-выпукла на отрезке (α, β) необходимо и достаточно, чтобы для любых трех точек φ_1, φ_2, φ_3, подчиненных условиям*

$$(\varphi_1, \varphi_3) \subset (\alpha, \beta), \quad \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_1 + \frac{\pi}{\rho}, \tag{4}$$

имело место неравенство

$$H(\varphi_1)\sin\rho(\varphi_3-\varphi_2)+H(\varphi_2)\sin\rho(\varphi_1-\varphi_3)+ \\ +H(\varphi_3)\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1)\geqslant 0.$$

Действительно, найдя A и B из условий

$$H(\varphi_1)=A\cos\rho\varphi_1+B\sin\rho\varphi_1,$$

$$H(\varphi_3)=A\cos\rho\varphi_3+B\sin\rho\varphi_3$$

и подставив их в неравенство

$$H(\varphi_2)\leqslant A\cos\rho\varphi_2+B\sin\rho\varphi_2,$$

мы придем после несложных преобразований к требуемому неравенству.

Заметим, что при

$$\varphi_1=\varphi-\delta,\quad \varphi_2=\varphi,\quad \varphi_3=\varphi+\delta,\qquad 0<\delta<\frac{\pi}{2\rho}$$

неравенство свойства I легко привести к виду

$$\frac{H(\varphi+\delta)-2H(\varphi)+H(\varphi-\delta)}{\delta^2}+\left(\frac{2}{\delta}\sin\frac{\rho\delta}{2}\right)^2 H(\varphi)\geqslant 0. \quad (5)$$

II. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция $H(\varphi)$ тригонометрически ρ-выпукла на отрезке (α,β) тогда и только тогда, когда*

$$H''(\varphi)+\rho^2H(\varphi)\geqslant 0,\qquad \alpha<\varphi<\beta.$$

Справедливость этого утверждения в одну сторону легко доказывается предельным переходом при $\delta\to 0$ в неравенстве (5). Для доказательства его справедливости в другую сторону обозначим

$$\mu(\varphi)=H''(\varphi)+\rho^2H(\varphi)$$

и будем рассматривать функцию $H(\varphi)$, как решение следующего дифференциального уравнения

$$y''(\varphi)+\rho^2y(\varphi)=\mu(\varphi),\qquad y(\varphi_1)=H(\varphi_1),\qquad y(\varphi_2)=H(\varphi_3).$$

Решение однородного дифференциального уравнения с теми же краевыми условиями мы обозначим через $H_0(\varphi)$. Ясно, что

$$H_0(\varphi) = A\cos\rho\varphi + B\sin\rho\varphi,$$
$$H_0(\varphi_1) = H(\varphi_1), \quad H_0(\varphi_3) = H(\varphi_3).$$

Нетрудно проверить, что для решения $H(\varphi)$ справедлива формула

$$H(\varphi) = H_0(\varphi) - \frac{\sin\rho(\varphi-\varphi_1)}{\rho\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi}\mu(\theta)\sin\rho(\varphi_3-\theta)\,d\theta -$$
$$- \frac{\sin\rho(\varphi_3-\varphi)}{\rho\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)}\int\limits_{\varphi}^{\varphi_3}\mu(\theta)\sin\rho(\theta-\varphi_1)\,d\theta.$$

Поскольку согласно предположению $\mu(\theta) \geqslant 0$, мы получаем, что на всем отрезке (φ_1, φ_3) справедливо неравенство $H(\varphi) \leqslant H_0(\varphi)$. Это и означает, что функция $H(\varphi)$ тригонометрически ρ-выпукла.

Следующие свойства мы будем доказывать уже не для всех тригонометрически ρ-выпуклых функций, а только для класса T_ρ.

III. *Для каждой функции $H(\varphi) \in T_\rho$ справедливо неравенство*

$$\inf_{\varphi} H(\varphi) \geqslant -\sup_{\varphi} H(\varphi)$$

или $H(\varphi) \equiv -\infty$.

Для доказательства заметим сначала, что если $H(\varphi_1) = -\infty$, то из неравенства свойства I в силу ограниченности сверху функции $H(\varphi)$ вытекает, что $H(\varphi_2) = -\infty$ для любого $\varphi_2 \in (\varphi_1, \varphi_3)$. Поэтому, если функция $H(\varphi)$ обращается в $-\infty$, хотя бы в одной точке, то она тождественно равна $-\infty$. Далее, возьмем в неравенстве свойства I

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \varphi_3 = \varphi + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon,$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$. Это даст нам

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(H\left(\varphi - \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon\right) + H\left(\varphi + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon\right)\right) \geqslant 0.$$

Поскольку φ — произвольно, отсюда следует наше утверждение.

IV. *Каждая функция* $H(\varphi) \in T_\rho$ *непрерывна и даже удовлетворяет условию Липшица.*

Для доказательства введем обозначения

$$K_1(\varphi, \varphi_0) = H(\varphi_0)\cos\rho(\varphi - \varphi_0) + H\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2\rho}\right)\sin\rho(\varphi - \varphi_0)$$

и

$$K_2(\varphi, \varphi_0) = H(\varphi_0)\cos\rho(\varphi - \varphi_0) - H\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2\rho}\right)\sin\rho(\varphi - \varphi_0).$$

Покажем, что при каждом φ_0 имеют место неравенства

$$K_2(\varphi, \varphi_0) \leqslant H(\varphi) \leqslant K_1(\varphi, \varphi_0), \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 + \frac{\pi}{2\rho}, \tag{6}$$

и

$$K_1(\varphi, \varphi_0) \leqslant H(\varphi) \leqslant K_2(\varphi, \varphi_0), \quad \varphi_0 - \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0. \tag{7}$$

Действительно, положив в неравенстве свойства I

$$\varphi_1 = \varphi_0, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \varphi_3 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2\rho},$$

мы сразу же получим правое неравенство (6), а положив

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2\rho}, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \varphi_3 = \varphi_0,$$

мы получим правое неравенство (7). Положив же

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2\rho}, \quad \varphi_2 = \varphi_0, \quad \varphi_3 = \varphi$$

и

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi_0, \quad \varphi_3 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2\rho},$$

мы получим левые неравенства (6) и (7) соответственно.

Обозначив теперь $H = \sup_{\varphi} |H(\varphi)|$, мы получим из неравенств (6) и (7), что

$$|H(\varphi) - H(\varphi_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \{|1 - \cos\rho(\varphi - \varphi_0)| + |\sin\rho(\varphi - \varphi_0)|\} \cdot H.$$

Отсюда немедленно вытекает наше утверждение.

V. *Каждую функцию* $H(\varphi) \in T_\rho$ *можно с любой точностью равномерно на всей оси приблизить дважды непрерывно дифференцируемыми функциями из того же класса.*

Действительно, возьмем в качестве приближения функцию

$$H_\varepsilon(\varphi) = \frac{16}{35}\varepsilon^{-7}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} H(\varphi + t)(\varepsilon^2 - t^2)^3\,dt, \qquad \varepsilon > 0.$$

Как и при доказательстве леммы, мы легко убеждаемся, что $H_\varepsilon(\varphi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция из класса T_ρ и что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon(\varphi) = H(\varphi)$$

равномерно по φ на всей оси.

VI. *Функция* $H(\varphi)$ *принадлежит классу* T_ρ *тогда и только тогда, когда функция*

$$U(re^{i\varphi}) = r^\rho H(\varphi)$$

субгармонична во всей плоскости.

В силу свойства V и леммы 2 мы можем ограничиться при доказательстве дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Оператор Лапласа в полярных координатах r и φ имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Поэтому

$$\Delta U(re^{i\varphi}) = r^{\rho-2}(\rho^2 H(\varphi) + H''(\varphi))$$

и мы немедленно получаем наше утверждение из свойства II и леммы 1.

В следующей главе мы докажем еще некоторые представления для функций класса T_ρ, а сейчас отметим только еще некоторые свойства, вытекающие очевидным образом из свойства VI и соответствующих свойств субгармонических функций.

VII. *Если функции $H_1(\varphi)$ и $H_2(\varphi)$ принадлежат классу T_ρ, то функции*

$$F(\varphi) = \max\{H_1(\varphi), H_2(\varphi)\}, \quad G(\varphi) = c_1 H_1(\varphi) + c_2 H_2(\varphi)$$

(c_1 и c_2 — положительные постоянные) также принадлежат классу T_ρ.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 2.3

1°. Доказать, что не существует отличных от тождественной постоянной функций, субгармонических и ограниченных сверху во всей плоскости.

2°. Пусть область D разделена на две области D_1 и D_2 гладкой кривой C. Определим функцию $u(z)$ в области D равенствами

$$u(z) = \begin{cases} u_1(z), & z \in D_1 \cup C, \\ u_2(z), & z \in D_2, \end{cases}$$

где $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — функции, гармонические в областях D_1 и D_2 соответственно и непрерывно дифференцируемые в замыкании этих областей. Доказать, что функция $u(z)$ субгармонична в области D в том и только в том случае, когда в каждой точке кривой C имеет место неравенство

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \leqslant 0$$

(здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по положительному направлению нормали к кривой C; положительным считаем направление нормали, ведущее из области D_1 в область D_2).

3°. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$. Доказать, что при любом $\alpha > 0$ функция

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi$$

является неубывающей и выпуклой книзу функцией от $\ln r$ на отрезке $0 \leqslant r < R$.

4°. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена в круге $|z| < R$. Доказать, что величина

$$\int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

имеет конечный предел при $r \to R$.

5°. Пусть функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости, а

$$M(r) = \sup_{|\theta|<\frac{\pi}{2}} |F(re^{i\theta})|.$$

Предположим, что

$$\int_0^{\infty} \frac{M(r)}{r}\, dr < \infty.$$

Доказать, что функция

$$I(\theta) = \int_0^{\infty} |F(re^{i\theta})| \frac{dr}{r}$$

является выпуклой книзу функцией θ на отрезке $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

§ 2.4. Оценки гармонической меры

Основным достоинством понятия гармонической меры является возможность получения для нее оценок очень наглядными геометрическими способами. Описанием этих способов мы сейчас и займемся.

В § 2.1 мы определили гармоническую меру $\omega(z; E, D)$ в случае, когда множество E является частью границы области D. Часто удобнее говорить о гармонической мере любого[1]) множества E, не имеющего общих точек с об-

---

[1]) Разумеется, составленного из счетного множества дуг.

ластью D, полагая

$$\omega(z; E, D) = \omega(z; E', D), \qquad E' = E \cap \partial D.$$

Прежде всего, мы отметим неравенства

$$0 \leqslant \omega(z; E, D) \leqslant 1, \qquad z \in D, \tag{1}$$

справедливые для любого множества E. Если при этом множество E содержит хотя бы одну дугу граничной кривой области D, то левое неравенство является строгим, а если такую дугу содержит множество $\partial D \setminus E$, то строгим является правое неравенство. Эти утверждения немедленно вытекают из обобщенного принципа максимума и минимума для гармонических функций, доказанного в § 2.3.

Прежде чем переходить к оценкам гармонической меры в каких-либо сложных областях, мы выясним геометрический смысл гармонической меры множества, расположенного на действительной оси, относительно верхней полуплоскости.

Пусть I — отрицательная часть действительной оси. Тогда

$$\omega(z; I, \operatorname{Im} z > 0) = \frac{1}{\pi} \arg z.$$

Действительно, функция $\frac{1}{\pi} \arg z$ гармонична в верхней полуплоскости, ограничена, и ее значения на положительной части действительной оси равны нулю, а на отрицательной — единице. В силу единственности решения задачи Дирихле эта функция обязана совпадать с гармонической мерой отрицательной части действительной оси относительно верхней полуплоскости.

Пусть теперь I — конечный отрезок (a, b). Функция $w = \frac{z-a}{z-b}$ конформно отображает верхнюю полуплоскость на себя и переводит отрезок I в отрицательную часть действительной оси. Поэтому

$$\omega(z; I, \operatorname{Re} z > 0) = \frac{1}{\pi} \arg(z-a) - \frac{1}{\pi} \arg(z-b).$$

Полученная величина имеет простой геометрический смысл — она равна углу, под которым виден отрезок l из точки z, деленному на π. Эта величина, очевидно, сохраняет свой смысл и при любом положении полуплоскости. Таким образом, мы пришли к утверждению:

Лемма 1. *Гармоническая мера множества E, расположенного на прямой l относительно полуплоскости, ограниченной прямой l, равна углу, под которым видно множество E из точки z, деленному на π.*

Эта элементарная лемма играет довольно значительную роль в оценках гармонической меры.

Следующий основной результат, носящий название *принципа расширения области* или *принципа Карлемана*, хотя и не столь элементарен, но доказывается не сложнее.

Теорема 2.4.1. *Пусть область D' содержит область D, а множество E', лежащее на границе D', содержит множество E, лежащее на границе D. Тогда*

$$\omega(z; E, D) \leqslant \omega(z, E', D'), \qquad z \in D.$$

Доказательство. Обе гармонические меры гармоничны и ограничены в области D. Рассмотрим их на границе этой области. В точках множества E обе равны единице. В остальных точках границы области D функция $\omega(z; E, D)$ равна нулю, а функция $\omega(z; E', D')$ — неотрицательна. Следовательно, функция $\omega(z; E', D') - \omega(z; E, D)$ на границе области D неотрицательна. По принципу максимума она неотрицательна и внутри области D. Теорема доказана.

Принцип расширения области позволяет оценивать гармоническую меру не только сверху, но и снизу. Оценка снизу получается с помощью оценки сверху гармонической меры множества $\partial D \setminus E$. Мы приведем сейчас другую формулировку принципа расширения области, в которой это обстоятельство выражено несколько яснее (хотя сама формулировка несколько более расплывчатая).

Теорема 2.4.1*. *При расширении области D за счет той части ее границы, которая не содержит точек множества E, гармоническая мера $\omega(z; E, D)$ увеличивается, а при расширении области D за счет части границы, вхо-*

дящей в множество E, эта гармоническая мера уменьшается.

С помощью принципа расширения области мы докажем сейчас одно довольно грубое, но очень наглядное неравенство.

Теорема 2.4.2. *Пусть D — выпуклая область, а E — какая-либо дуга граничной кривой этой области. Тогда*

$$\omega(z;\ E,\ D) \leqslant \frac{1}{\pi}\,\varphi(z,\ E), \qquad z \in D,$$

где $\varphi(z, E)$ — угол, под которым дуга E видна из точки z.

Доказательство. Обозначим через E_1 хорду, соединяющую концы дуги E, а через D_1 — область, отсекаемую от области D хордой E_1 и содержащую точку z. Могут представиться две возможности: или дуга E лежит на границе области D_1 или нет. В первом случае доказываемое неравенство заведомо справедливо, так как тогда $\varphi(z,\ E) \geqslant \pi$. Во втором случае мы можем согласно принципу расширения области написать неравенство

$$\omega(z;\ E,\ D) \leqslant \omega(z;\ E_1,\ D_1), \qquad z \in D_1$$

(применяем теорему 2.4.1*: область D получается расширением области D_1 за счет той части ее границы, которая входит в E_1). Далее, обозначим через P полуплоскость, ограниченную прямой, соединяющей концы нашей дуги E, и содержащую область D_1. Применяя еще раз принцип расширения области, мы получаем неравенство

$$\omega(z;\ E_1,\ D_1) \leqslant \omega(z;\ E_1,\ P), \qquad z \in D_1$$

(на этот раз область D_1 расширяется за счет части границы, не содержащей точек множества E_1). Требуемое неравенство мы получаем теперь из леммы 1, так как дуга E и хорда E_1 видны из точки z под одинаковым углом.

Наряду с принципом расширения области часто применяется еще один, столь же несложный результат, носящий название *принципа гармонической меры*:

Теорема 2.4.3. *Пусть $w(z)$ — функция, регулярная в области D и непрерывная в ее замыкании. Обозначим* *через D^* образ области D при отображении $w = w(z)$ (не обязательно взаимно-однозначном), а через E^* — образ множества $E \subset \partial D$ и положим*

$$u(z) = \omega(z;\ E,\ D),\quad v(w) = \omega(w;\ E^*,\ D^*).$$

Если $E^* \subset \partial D^*$, то имеет место неравенство

$$v(w(z)) \geqslant u(z), \qquad z \in D.$$

Когда отображение $w = w(z)$ взаимно-однозначно, имеет место равенство.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$u(z),\quad u_1(z) = v(w(z)).$$

Обе эти функции гармоничны и ограничены в области D. В точках множества $E \subset \partial D$ мы имеем $u(z) = 1$ и $u_1(z) = 1$. В точках множества $\partial D \setminus E$ мы имеем $u(z) = 0$, но значения $u_1(z)$ могут, вообще говоря, оказаться положительными, так как образ точки из множества $\partial D \setminus E$ при отображении $w = w(z)$ может попасть и внутрь области D^*, и на множество E^*. Следовательно, на границе области D мы имеем неравенство $u_1(z) - u(z) \geqslant 0$, а по принципу максимума это неравенство сохраняется и внутри области. Тем самым мы доказали интересующее нас неравенство. Если отображение $w = w(z)$ взаимно однозначно, то на границе области D, а следовательно, и внутри нее имеет место равенство $u_1(z) = u(z)$.

К теории аналитических функций оценки гармонической меры применяются обычно с помощью так называемой *теоремы о двух константах*:

Теорема 2.4.4. *Пусть функция $F(z)$ регулярна в области D и непрерывна в ее замыкании, а на границе области D для функции $F(z)$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leqslant M, \qquad z \in \partial D, \\ |F(z)| &\leqslant m, \qquad z \in E, \end{aligned} \tag{2}$$

где E — некоторое множество границы области D, а M и $m < M$ — некоторые положительные постоянные. Тог-

да справедливо неравенство

$$|F(z)| \leqslant m^{\gamma(z)} M^{1-\gamma(z)}, \qquad z \in D,$$

где

$$\gamma(z) = \omega(z; E, D).$$

Доказательство. Функция $\ln|F(z)|$ субгармонична и ограничена сверху в области D, а функция

$$u(z) = \omega(z; E, D)\ln m + \omega(z; \partial D \setminus E, D)\ln M$$

гармонична в области D и ограничена там по абсолютной величине. Поэтому функция

$$\ln|F(z)| - u(z)$$

субгармонична и ограничена сверху в области D. В силу неравенства (2) имеем

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} \{\ln|F(z)| - u(z)\} \leqslant 0$$

для всех точек $\zeta \in \partial D$ за исключением счетного числа (мы считаем, как обычно, что область D ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых, а множество E состоит из счетного числа дуг граничных кривых). Поэтому из принципа максимума для субгармонических функций следует, что

$$\ln|F(z)| \leqslant u(z), \qquad z \in D.$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Многие задачи теории целых функций приводятся к так называемой проблеме Карлемана — Мию. Мы изложим сейчас постановку этой проблемы и приведем один из относящихся к ней результатов.

Пусть D — некоторая область комплексной плоскости, имеющая конечное и непустое пересечение с каждой прямой $\operatorname{Re} z = x$ при $a < x < b$ (обычно принимают $b = +\infty$). Обозначим через D_x связную часть области D, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} z < x$ и содержащую заданную точку ζ (мы считаем, что $\operatorname{Re} \zeta < x$). Через h_x

мы обозначим часть границы области D_x, лежащую на прямой $\operatorname{Re} z = x$, а через $h(x)$ — меру множества h_x (мы будем предполагать, что множество h_x состоит из счетного числа отрезков; тогда $h(x)$ — сумма их длин).

Проблема Карлемана — Мию состоит в оценке гармонической меры $\omega(\zeta;\ h_x,\ D_x)$ по заданной функции $h(t)$, $a \leqslant t \leqslant x$.

Карлеманом был получен следующий результат:

Теорема 2.4.5. *Пусть* $\zeta = \xi + i\eta \in D$ *и* $a < \xi < x < b$. *Тогда*

$$\omega(\xi + i\eta;\ h_x,\ D_x) \leqslant \exp\left\{-\frac{4}{\pi}\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dt}{h(t)}\right\}.$$

Доказательство. Возьмем произвольное значение σ, заключенное между ξ и x, и рассмотрим в области D_σ две гармонические функции $\omega(\zeta;\ h_x,\ D_x)$ и $\omega(\zeta;\ h_\sigma,\ D_\sigma)$. На той части границы области D_σ, которая отлична от отрезков h_σ (расположенных на прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$), обе функции равны нулю. Поэтому согласно формуле (5) § 1 эти функции можно восстановить по их значениям на отрезках h_σ следующим образом:

$$\omega(\zeta;\ h_x,\ D_x) = \int\limits_{h_\sigma} \omega(\sigma + iy;\ h_x,\ D_x)\,\omega(\zeta;\ dy,\ D_\sigma)$$

и

$$\omega(\zeta;\ h_\sigma,\ D_\sigma) = \int\limits_{h_\sigma} \omega(\zeta;\ dy,\ D_\sigma)$$

(функция $\omega(z;\ h_\sigma,\ D_\sigma)$ равна единице при $z \in h_\sigma$). Вычитая из первого равенства второе и деля на $x - \sigma$, мы получаем

$$\frac{\omega(\zeta;\ h_x,\ D_x) - \omega(\zeta;\ h_\sigma,\ D_\sigma)}{x - \sigma} = \int\limits_{h_\sigma} \frac{\omega(\sigma + iy;\ h_x,\ D_x) - 1}{x - \sigma}\,\omega(\zeta;\ dy,\ D_\sigma). \tag{3}$$

Оценим гармоническую меру $\omega(\sigma + iy;\ h_x,\ D_x)$, стоящую под знаком интеграла. По принципу расширения области имеем

$$\omega(\sigma + iy;\ h_x,\ D_x) \leqslant \omega(\sigma + iy;\ h_x,\ \operatorname{Re} z < x),$$

а по лемме 1 величина $\omega(t;\ h_x,\ \operatorname{Re} z < x)$ равна деленной на π сумме углов, под которыми видны отрезки, составляющие множество h_x, из точки t. При заданной сумме длин отрезков сумма углов будет наибольшей, когда множество h_x образует единственный отрезок, расположенный симметрично относительно прямой $\operatorname{Im} z = y$. Вычисляя угол для этого экстремального случая, находим

$$\omega(\sigma + iy;\ h_x,\ D_x) \leqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h(x)}{2(x-\sigma)} = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(x-\sigma)}{h(x)}.$$

Подставляя полученное неравенство в формулу (3), мы получаем, что

$$\frac{\omega(\zeta;\ h_x, D_x) - \omega(\zeta;\ h_\sigma,\ D_\sigma)}{x-\sigma} \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{arctg} \dfrac{2(x-\sigma)}{h(x)}}{\sigma - x} \int\limits_{h\sigma} \omega(\zeta;\ dy,\ D_\sigma) =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \dfrac{2(x-\sigma)}{h(x)}}{x-\sigma} \cdot \omega(\zeta;\ h_\sigma,\ D_\sigma).$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \to \sigma$, имеем

$$\frac{d}{d\sigma} \ln \omega(\zeta;\ h_\sigma,\ D_\sigma) \leqslant -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{h(\sigma)}$$

(для аккуратности следовало бы написать верхнюю производную, так как производная, вообще говоря, может и не существовать). Интегрируя последнее неравенство и учитывая, что

$$\omega(\zeta;\ h_\sigma,\ D_\sigma) \to 1, \qquad \sigma \to \xi,$$

мы приходим к утверждению теоремы.

Чтобы оценить точность теоремы 2.4.5, мы сравним получаемую из нее оценку с точной формулой для простейшего случая, когда область D — полоса $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$.

В этом случае $h(x) \equiv \pi$, и теорема 2.4.5 дает нам

$$\omega(\zeta; h_x, D_x) \leqslant \exp\left(-\frac{4}{\pi^2}(x - \operatorname{Re}\zeta)\right). \tag{4}$$

Для отыскания точной формулы для интересующей нас гармонической меры рассмотрим отображение

$$w = \frac{1 + i\exp(z - x)}{1 - i\exp(z - x)}.$$

Нетрудно проверить, что образом области D при этом отображении является угол $G: 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$, а образом отрезка h_x — вертикальная сторона H этого угла. Это отображение конформно, так что по принципу гармонической меры имеем

$$\omega(\zeta; h_x, D_x) = \omega(w(\zeta); H, G).$$

Гармоническая мера, стоящая в правой части, нам известна, и мы получаем формулу

$$\omega(\zeta; h_x, D_x) = \frac{2}{\pi}\arg\frac{1 + i\exp(\zeta - x)}{1 - i\exp(\zeta - x)},$$

из которой видно, что при фиксированном ζ и при $x \to +\infty$

$$\omega(\zeta; h_x, D_x) \sim \frac{4}{\pi}\operatorname{Re} e^{\zeta - x}. \tag{5}$$

Формула (4) означает, что

$$\ln\omega(\zeta; h_x, D_x) \leqslant -\frac{4}{\pi^2}x + C,$$

а из формулы (5) видно, что в действительности

$$\ln\omega(\zeta; h_x, D_x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x,$$

Это означает, что даже в простейшем случае оценка, получаемая из теоремы 2.4.5, довольно груба. В дальнейшем мы получим более точные оценки, но при заметно более жестких предположениях относительно области D.

Много интересных и глубоких оценок гармонической меры можно получить, используя некоторые экстремальные соображения. Одним из наиболее известных является так называемый *принцип симметризации*. Этот принцип ведет свое происхождение от изопериметрических задач элементарной геометрии. Венгерские математики Полиа и Сеге начали применять его в анализе, а потом этот принцип нашел много применений в теории аналитических функций. Мы не сможем изложить принцип симметризации во всей его полноте, но ограничимся несколькими теоремами, допускающими более простой метод доказательства.

Начнем с доказательства одной леммы.

Лемма 2. *Пусть E^* — множество, состоящее из конечного числа непересекающихся отрезков, лежащих на отрезке $[0, R]$, а D^* — круг $|z| < R$, из которого выброшено множество E^*. Тогда*

$$\omega(z; E^*, D^*) = \int_{E^*} \mu(x) \ln \frac{|R^2 - xz|}{R|x - z|}\, dx, \qquad z \in D^*,$$

где $\mu(x) = \mu(x, E^*)$ — некоторая неотрицательная функция, определенная на множестве E^*.

Доказательство. Для экономии места введем обозначения

$$\omega(z; E^*, D^*) = \omega(z), \quad \ln \frac{|R^2 - \bar{\zeta} z|}{R|\zeta - z|} = K_z(\zeta).$$

Из формул Грина (см. формулы (2) и (5) § 2.1) мы получаем, что

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^*} \left\{ K_z(\zeta) \frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial n} - \omega(\zeta) \frac{\partial K_z(\zeta)}{\partial n} \right\} |d\zeta|. \tag{6}$$

Граница ∂D^* области D^* состоит из окружности $|\zeta| = R$ и множества (E^*), представляющего собой совокупность разрезов по отрезкам, образующим множество E^*. Мы ввели для совокупности разрезов отдельное обозначение, так как каждый разрез следует рассматривать, как два экземпляра отрезка,— по одному экземпляру на каждую сторону разреза.

На окружности $|\zeta|=R$ имеем $\omega(\zeta)=0$ и $K_z(\zeta)=0$, так что в формуле (6) от всего интеграла по границе области D^* остается лишь интеграл по множеству разрезов (E^*). Более того, от этого интеграла остается лишь одно слагаемое, так как

$$\int\limits_{(E^*)} \omega(\zeta)\frac{\partial K_z(\zeta)}{\partial n}|d\zeta| = 0.$$

Действительно, функция $\omega(\zeta)$ согласно определению равна единице на обеих сторонах разреза, а значения нормальной производной функции $K_z(\zeta)$ в соответствующих точках на разных сторонах разреза отличаются только знаком, поскольку направления внешней нормали к границе области D^* в этих точках противоположны. Таким образом, формула (6) приводится к виду

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(E^*)} \frac{\partial\omega(\zeta)}{\partial n} K_z(\zeta)|d\zeta|, \qquad z\in D^*.$$

Функция $K_z(\zeta)$ определена во всем круге $|\zeta|<R$, и ее значения в точках разреза не зависят от того, на какой стороне разреза лежат эти точки. Функция $\omega(\zeta)$ принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно действительной оси, так как и область D^* и множество E^* симметричны. Поскольку направления внешней нормали также симметричны, значения нормальной производной $\frac{\partial\omega(\zeta)}{\partial n}$ в соответствующих точках на разных сторонах разреза должны быть одинаковы (если они существуют; существование производных у функции $\omega(\zeta)$ во внутренних точках отрезков нетрудно вывести из принципа симметрии Римана — Шварца; в силу этого принципа функцию $\omega(\zeta)$ можно аналитически продолжить через каждый отрезок). Значения нормальных производных функции $\omega(\zeta)$ в точках разреза неотрицательны, так как в точках разреза эта функция принимает свое наибольшее значение. Положив

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial\omega(\zeta)}{\partial n}\bigg|_{\zeta=x}, \qquad x\in E^*,$$

мы придем к утверждению леммы.

Теорема 2.4.6. *Пусть область D представляет собой круг $|z| < R$, из которого выброшено множество E, состоящее из конечного числа кусочно-гладких кривых и конечного числа областей, ограниченных такими кривыми. Множество E^* и область D^* мы будем считать имеющими тот же смысл, что и в лемме 2. Если для каждого $x \in E^*$ на окружности $|z| = x$ лежит хотя бы одна точка множества E, то имеет место неравенство*

$$\omega(z; E, D) \geqslant \omega(-|z|; E^*, D^*), \qquad z \in D.$$

Доказательство. Пусть $x \in E^*$. Выберем на окружности $|z| = x$ какую-либо точку множества E и обозначим через $\theta(x)$ ее аргумент. В силу наших предположений о множестве E мы можем считать функцию $\theta(x)$ непрерывной на множестве E^* за исключением конечного числа точек разрыва первого рода. Положим

$$Q_x(z) = \ln \frac{|R^2 - zxe^{-i\theta(x)}|}{R\,|z - xe^{i\theta(x)}|}, \qquad x \in E^*,$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$u(z) = \int_{E^*} \mu(x)\, Q_x(z)\, dx, \qquad |z| < R,$$

где $\mu(x)$ — функция, построенная в лемме 2 для множества E^*.

Функция $Q_x(z)$, как функция z, при любом $x \in E^*$ гармонична во всей плоскости за исключением двух точек

$$z_1 = xe^{i\theta(x)}, \quad z_2 = \frac{R^2}{x} e^{i\theta(x)},$$

не попадающих в область D, так как $z_1 \in E$, а z_2 лежит вне круга $|z| \not< R$. Поэтому функция $Q_x(z)$ при всех $x \in E^*$ гармонична в области D. На окружности $|z| = R$ функция $Q_x(z)$ обращается в нуль.

Из сказанного следует, что функция $u(z)$ гармонична в области D и обращается в нуль на окружности $|z| = R$. Легко проверить, что при любом ρ, $0 \leqslant \rho < R$, имеем

$$\min_{|z|=\rho} Q_x(z) = \ln \frac{R^2 + x\rho}{R(x+\rho)}, \qquad 0 < x < R, \tag{7}$$

и

$$\max_{|z|=\rho} Q_x(z) = \ln \frac{R^2 - x\rho}{R\,|x-\rho|}, \qquad 0<x<R. \tag{8}$$

Из формулы (7) вытекает неравенство

$$u(z) \geqslant \int_{E^*} \mu(x) \ln \frac{R^2 + x\,|z|}{R\,(x+|z|)}\, dx, \qquad |z|\leqslant R, \tag{9}$$

а из формулы (8) — неравенство

$$u(z) \leqslant \int_{E^*} \mu(x) \ln \frac{R^2 - x\,|z|}{R\,|x-|z||}\, dx, \qquad |z|<R. \tag{10}$$

Согласно определению функции $\mu(x)$ (см. лемму 2) интеграл, стоящий в правой части неравенства (9), равен $\omega(-|z|, E^*, D^*)$, и мы можем придать этому неравенству вид

$$u(z) \geqslant \omega(-|z|;\ E^*, D^*), \qquad z\in D. \tag{9*}$$

По той же причине интеграл, стоящий в правой части неравенства (10), равен $\omega(|z|;\ E^*, D^*)$, и потому не превосходит единицы. Отсюда вытекает, что

$$u(z) \leqslant 1, \qquad |z|<R. \tag{10*}$$

Поскольку функция $u(z)$ гармонична в области D и равна нулю на окружности $|z|=R$, из неравенства (10*) в силу принципа максимума вытекает неравенство

$$u(z) \leqslant \omega(z;\ E, D), \qquad z\in D. \tag{11}$$

Из неравенств (9*) и (11) мы немедленно получаем утверждение теоремы.

Оценка, предлагаемая теоремой 2.4.6, хороша далеко не во всех случаях. Дело в том, что гармоническую меру $\omega(z;\ E^*, D^*)$ не так просто найти. Поэтому часто бывает полезно упростить полученную оценку с помощью следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть E^* и D^* — те же, что и в лемме 2. Обозначим через δ сумму длин отрезков, образующих множество E^*, а через E^δ — отрезок $(R-\delta, R)$. Через D^δ мы обозначим круг $|z| < R$ с разрезом по отрезку E^δ. Тогда имеет место неравенство*

$$\omega(-a;\ E^*, D^*) \geqslant \omega(-a;\ E^\delta, D^\delta), \qquad 0 \leqslant a < R.$$

Доказательство. Мы используем тот же прием, что и при доказательстве теоремы 2.4.6.

Обозначим через $g(x)$ функцию, описывающую отображение множества E^* на отрезок $(R-\delta, R)$, состоящее в том, что отрезки множества E^* сдвигаются вплотную друг к другу, а затем получившийся отрезок передвигается на нужное место. Легко видеть, что при таком отображении расстояние от нуля до любой точки $x \in E^*$ не уменьшается, а расстояние между любой парой точек из множества E^* не увеличивается. Это означает, что имеют место неравенства

$$g(x) \geqslant x, \qquad x \in E^*, \tag{12}$$

и

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |x - y|, \quad x \in E^*,\ y \in E^*. \tag{13}$$

Положим

$$Q_x^*(z) = \ln \frac{|R^2 - g(x)\,z|}{R\,|g(x) - z|}, \qquad x \in E^*,$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$u_1(z) = \int\limits_{E^*} \mu(x)\, Q_x^*(z)\, dx, \qquad |z| \leqslant R,$$

где $\mu(x)$ — функция, построенная в лемме 2 для множества E^*.

Как и при доказательстве теоремы 2.4.6, мы легко убеждаемся, что функция $u_1(z)$ гармонична в области D^δ и обращается в нуль на окружности $|z| = R$.

Непосредственным дифференцированием легко проверяется, что при любом фиксированном $a \geqslant 0$ функция

$$F(y) = \ln \frac{R^2 + ay}{(a+y)\,R}$$

монотонно убывает на отрезке $(0, R)$. Поэтому из неравенства (12) мы получаем, что

$$u_1(-a) \leqslant \omega(-a; E^*, D^*), \qquad 0 \leqslant a < R. \tag{14}$$

С другой стороны, из неравенств (12) и (13) нетрудно вывести, что

$$Q_x^*(g(y)) \geqslant \ln \frac{R^2 - xy}{R|x-y|}, \qquad x \in E^*, \ y \in E^*,$$

и получить неравенство

$$u_1(g(y)) \geqslant \int\limits_{E^*} \mu(x) \ln \frac{R^2 - xy}{R|x-y|} dx, \qquad y \in E^*. \tag{15}$$

Согласно определению функции $\mu(x)$ интеграл, стоящий в правой части неравенства (15), совпадает с $\omega(y; E^*, D^*)$ и потому он равен единице. Поскольку любая точка $z \in E^\delta$ может быть представлена в виде $z = g(y)$ (согласно определению функции $g(x)$), мы получаем из неравенства (15), что

$$u_1(z) \geqslant 1, \qquad z \in E^\delta. \tag{16}$$

Функция $u_1(z)$ гармонична в области D^δ, равна нулю на окружности $|z| = R$ и не меньше единицы на отрезке E^δ. По принципу максимума мы получаем отсюда, что

$$u_1(z) \geqslant \omega(z; E^\delta, D^\delta), \qquad z \in D^\delta.$$

Из этого неравенства и неравенства (14) немедленно вытекает утверждение леммы.

Гармоническую меру $\omega(z; E^\delta, D^\delta)$, входящую в утверждение леммы 3, можно просто вычислить. Действительно, нетрудно проверить, что функция

$$w(z) = i \frac{\sqrt{(z - R + \delta) R} - \sqrt{R^2 - (R-\delta) z}}{\sqrt{(z - R + \delta) R} + \sqrt{R^2 - (R-\delta) z}}$$

конформно отображает D^δ на угол $S = \left\{w: 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}\right\}$, причем разрез E^δ переходит при этом отображении в вертикальную сторону H этого угла. По принципу гармонической меры

$$\omega(z;\ E^\delta,\ D^\delta) = \omega(w(z);\ H,\ S),$$

а последняя гармоническая мера, как мы уже знаем, равна

$$\frac{2}{\pi}\arg w(z).$$

Поэтому с помощью несложных преобразований можно получить формулу

$$\omega\left(-a;\ E^\delta,\ D^\delta\right) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(R-a)\,\delta}{(R+a)\,(2R-\delta)},\qquad 0\leqslant a<R. \tag{17}$$

Объединяя теорему 2.4.6 с леммой 3 и формулой (17), мы приходим к следующему результату:

Теорема 2.4.7. *Пусть область D представляет собой круг $|z|<R$ с выброшенным из него множеством E, а Δ — некоторое подмножество отрезка $(0,\ R)$, имеющее меру δ. Если для каждого $x\in\Delta$ на окружности $|z|=x$ есть хотя бы одна точка, принадлежащая множеству E, то*

$$\omega(z;\ E,\ D)\geqslant\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(R-|z|)\,\delta}{(R+|z|)\,(2R-\delta)},\qquad z\in D.$$

Проведенные выше рассуждения доказывают теорему 2.4.7 в случае, когда множество E состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых и конечного числа областей ограниченных такими кривыми, а множество Δ состоит из конечного числа отрезков. Однако с помощью аппроксимации и предельного перехода эти условия можно существенно ослабить.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 2.4

1°. Пусть функция $f(z)$ регулярна и ограничена в правой полуплоскости и стремится к пределу A при $z\to\infty$ по некоторой кривой, лежащей в этой полуплоскости. Доказать, что тогда $f(z)$ стремится к пределу A при $z\to\infty$ в любом угле, расположенном внутри правой полуплоскости.

2°. Пусть область D описывается неравенствами

$$-\infty < x < +\infty, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x).$$

Обозначим через D_x пересечение области D с полуплоскостью $\operatorname{Re} z < x$, а через θ_x — ее пересечение с прямой $\operatorname{Re} z = x$. Доказать справедливость неравенства

$$\omega(\zeta;\, \theta_x,\, D_x) \leqslant \frac{4}{\pi} \exp\left\{\max_{z\in\theta_x} \operatorname{Re} w(z) - \operatorname{Re} w(\zeta)\right\},$$

где $w(z)$ — функция, конформно отображающая область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ таким образом, что $\operatorname{Re} w(z) \to \pm\infty$ при $\operatorname{Re} z \to \pm\infty$.

3°. Пусть области D и D^* описываются неравенствами

$$-\infty < x < +\infty, \quad |y - \varphi(x)| < \theta(x),$$

и

$$-\infty < x < +\infty, \quad |y| < \theta(x)$$

соответственно. Обозначим через D_x и D_x^* пересечения областей D и D^* с полуплоскостью $\operatorname{Re} z < x$, а через θ_x и θ_x^* — их пересечения с прямой $\operatorname{Re} z = x$. Доказать, что

$$\omega(\zeta;\, \theta_x,\, D_x) \leqslant \omega(\operatorname{Re}\zeta;\, \theta_x^*,\, D_x^*).$$

§ 2.5. Модули и экстремальные длины

Наглядные геометрические методы оценок отнюдь не являются монополией гармонической меры. В этом параграфе мы будем говорить о других геометрических методах, которые дают возможность получать более тонкие и глубокие результаты. С их помощью мы получим, в частности, асимптотические формулы для конформных отображений.

Начнем с ряда формальных определений.

Пусть D — односвязная область, ограниченная простой замкнутой кривой. *Четырехугольником* $\mathbf{D}$ *с вершинами* A, A', B', B мы будем называть область D, на границе которой указаны четыре точки A, A', B', B, записанные в порядке их следования по границе в положительном направлении (указание первой точки тоже существенно). Дуги граничной кривой области D, расположенные между двумя соседними вершинами, мы будем называть *сторонами* четырехугольника.

Модулем четырехугольника D с вершинами A, A', B', B мы будем называть такое положительное число $m = m(D)$, для которого существует функция $w = w(z)$, конформно отображающая область D на прямоугольник $0 < \operatorname{Re} w < 1$, $0 < \operatorname{Im} w < m$ таким образом, что

$$w(A) = 0, \quad w(A') = 1, \quad w(B) = im, \quad w(B') = im + 1.$$

Если область D — это обычный прямолинейный прямоугольник, а вершины четырехугольника D и его стороны совпадают с вершинами и сторонами в их обычном понимании, то модуль $m(D)$ равен отношению длины стороны AB к длине стороны AA'.

Сопряженным модулем $m^*(D)$ четырехугольника D с вершинами A, A', B', B мы будем называть модуль четырехугольника D с вершинами A', B', A, B. Легко видеть, что

$$m(D) \cdot m^*(D) = 1. \tag{1}$$

Среди геометрически простых областей почти нет таких, которые отображаются элементарными функциями на прямоугольник. Поэтому лишь для немногих четырехугольников модуль может быть найден в элементарном виде. Стоит упомянуть, пожалуй, только один случай (отличный от прямоугольника).

Пусть область D — кольцевой сектор

$$r < |z| < R, \quad \varphi < \arg z < \psi.$$

Вершины четырехугольника D выберем следующим образом:

$$A = Re^{i\varphi}, \quad A' = re^{i\varphi}, \quad B' = re^{i\psi}, \quad B = Re^{i\psi}.$$

Функция $w = \ln z$ конформно отображает такой четырехугольник на прямоугольник

$$\ln r < \operatorname{Re} w < \ln R, \quad \varphi < \operatorname{Im} w < \psi,$$

причем образами вершин A, A', B', B четырехугольника D являются соответственно вершины

$$\ln R + i\varphi, \quad \ln r + i\varphi, \quad \ln r + i\psi, \quad \ln R + i\psi$$

прямоугольника. Поэтому мы получаем для модуля $m(D)$ четырехугольника D формулу

$$m(D) = \frac{\varphi - \psi}{\ln (R/r)}.$$

Из-за малого числа элементарных примеров, где модуль можно вычислить, не стоит пытаться усмотреть какие-либо интересные геометрические свойства модуля непосредственно из определения. Лучше пока считать это определение чисто формальным. В действительности за этим формальным определением кроется очень своеобразный геометрический смысл, позволяющий получать наглядные и в то же время глубоко нетривиальные оценки для модулей четырехугольников. Для рассказа о нем нам потребуется некоторая подготовка. С этой целью мы введем еще одно понятие — экстремальную длину семейства кривых. Оба понятия — и модуль, и экстремальная длина были введены замечательным шведским математиком Л. Альфорсом, идеи которого пронизывают всю геометрическую теорию аналитических функций.

Пусть нам дана неотрицательная функция $\rho(z)$, определенная для всех комплексных z и интегрируемая с квадратом по всей комплексной плоскости. С функцией $\rho(z)$ мы свяжем метрику в комплексной плоскости, определив дифференциал длины дуги равенством

$$ds = \rho(z)\,|dz|.$$

Ясно, что длина кривой γ и площадь области D в этой метрике выражаются формулами

$$l_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)\,|dz|, \quad S_\rho(D) = \iint_D \rho^2(z)\,dx\,dy$$

(для длины кривой мы допускаем значение $l_\rho(\gamma) = +\infty$).

Рассмотрим теперь некоторое семейство Γ спрямляемых кривых γ, лежащих в данной области D (и удовлетворяющих каким-то дополнительным условиям, определяющим семейство Γ). *Экстремальной длиной* семейства Γ

мы назовем величину

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \left\{ \inf_{\gamma \in \Gamma} l_{\rho}(\gamma) \right\}^2,$$

где верхняя грань берется по всем метрикам, для которых функция $\rho(z)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \rho^2(z)\,dx\,dy \leqslant 1. \tag{2}$$

Ту метрику, для которой верхняя грань в определении экстремальной длины достигается, мы будем называть *экстремальной.* Функцию $\rho(z)$, отвечающую экстремальной метрике для семейства Γ, мы будем обозначать через $\rho_\Gamma(z)$. Ясно, что функцию $\rho_\Gamma(z)$ мы можем считать равной нулю вне области D и удовлетворяющей условию

$$\iint_D \rho_\Gamma^2(z)\,dx\,dy = 1,$$

так как в противном случае мы могли бы увеличить значение величины $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} l_{\rho_\Gamma}(\gamma)$ умножением функции $\rho_\Gamma(z)$ на некоторую постоянную. Нетрудно показать, что экстремальная метрика в существенном единственна. Действительно, пусть $\rho_1(z)$ и $\rho_2(z)$ — функции, отвечающие двум экстремальным метрикам. Обозначим

$$\rho(z) = \frac{1}{2}(\rho_1(z) + \rho_2(z)), \quad \Delta(z) = \frac{1}{2}(\rho_1(z) - \rho_2(z)).$$

Очевидно, что

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} l_{\rho}(\gamma) \geqslant \frac{1}{2}\inf_{\gamma \in \Gamma} l_{\rho_1}(\gamma) + \frac{1}{2}\inf l_{\rho_2}(\gamma) = \lambda(\Gamma),$$

а

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \rho^2(z)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int \Delta^2(z)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \rho_1^2(z)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \rho_2^2(z)\,dx\,dy = 1.$$

Если бы имело место неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \Delta^2(z)\,dx\,dy > 0,$$

то метрики, отвечающие функциям $\rho_1(z)$ и $\rho_2(z)$, не могли бы быть экстремальными. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int (\rho_1(z) - \rho_2(z))^2\,dx\,dy = 4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \Delta^2(z)\,dx\,dy = 0,$$

а это означает, что функции $\rho_1(z)$ и $\rho_2(z)$ могут отличаться лишь на множестве меры нуль.

Теорема 2.5.1. *Модуль четырехугольника* D *с вершинами* A, A', B', B *равен экстремальной длине семейства* Γ, *состоящего из кривых, лежащих в области* D *и соединяющих стороны* AA' *и* BB' *этого четырехугольника.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что и модуль четырехугольника, и экстремальная длина указанного семейства не меняются при конформных отображениях области D. Поэтому нам достаточно доказать утверждение теоремы лишь в случае, когда четырехугольник D является прямоугольником

$$D^* = \{z\colon\ 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < m\},$$

а

$$A = 0,\quad A' = 1,\quad B = im,\quad B' = im + 1.$$

В этом случае $m(D^*) = m$. Найдем экстремальную длину $\lambda(\Gamma)$ соответствующего семейства Γ, которое состоит из кривых, лежащих в прямоугольнике D^* и соединяющих его стороны $(0, 1)$ и $(mi, mi+1)$.

Для оценки $\lambda(\Gamma)$ снизу возьмем

$$\rho_0(z) = \begin{cases} m^{-\frac{1}{2}}, & z \in D^*, \\ 0, & z \notin D^*. \end{cases}$$

Тогда

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho}\left\{\inf_{\gamma\in\Gamma} l_\rho(\gamma)\right\}^2 \geqslant \left(\inf_{\gamma\in\Gamma} l_{\rho_0}(\gamma)\right)^2 = \frac{1}{m}\,(l(\gamma))^2,$$

где $l(\gamma)$ — евклидова длина кривой γ. Для кривых семейства Γ имеем, очевидно, $l(\gamma) \geqslant m$. Следовательно,

$$\lambda(\Gamma) \geqslant m. \tag{3}$$

Для оценки $\lambda(\Gamma)$ сверху возьмем в качестве γ отрезок γ_x, соединяющий точки x и $x+im$, где $0<x<1$. Для любой допустимой функции $\rho(z)$ имеем

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} l_\rho(\gamma) \leqslant l_\rho(\gamma_x) = \int_x^{x+im} \rho(z)\,|dz| = \int_0^m \rho(x+iy)\,dy.$$

Интегрируя полученное неравенство по x от 0 до 1, имеем

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} l_\rho(\gamma) \leqslant \iint_{D^*} \rho(z)\,dx\,dy.$$

Отсюда, применив неравенство Буняковского — Шварца, мы получим в силу условия (2), что

$$\left\{\inf_{\gamma\in\Gamma} l_\rho(\gamma)\right\}^2 \leqslant \iint_{D^*} \rho^2(z)\,dx\,dy \cdot \iint_{D^*} dx\,dy \leqslant m.$$

Это неравенство, справедливое для любых допустимых $\rho(z)$, означает, что $\lambda(\Gamma) \leqslant m$, и вместе с (3) оно дает нам, что $\lambda(\Gamma) = m$.

Заметим, что из наших рассуждений вытекает также, что экстремальная функция $\rho_\Gamma(z)$ для прямоугольника D^* равна $m^{-1/2}$. Отсюда нетрудно вывести, что для исходного четырехугольника D экстремальная функция $\rho_\Gamma(z)$ равна $m^{-\frac{1}{2}}|w'(z)|$, где $w(z)$ — функция, конформно отображающая четырехугольник D на прямоугольник D^*.

Доказанную теорему легко использовать для оценок модулей четырехугольников. Для начала отметим следующий аналог принципа расширения области.

Теорема 2.5.2. *Пусть D' и D — два четырехугольника с совпадающими вершинами A, A', B', B. Если область D' является частью области D, но стороны AA' и BB' и четырехугольников D и D' являются общими, то $m(D) \leqslant m(D')$.*

Доказательство. Семейство Γ, состоящее из кривых, лежащих в области D и соединяющих стороны AA' и BB', содержит аналогичное семейство Γ', в котором область D заменена на область D'. Поэтому

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} l_\rho(\gamma) \leqslant \inf_{\gamma\in\Gamma'} l_\rho(\gamma).$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Доказательство следующей теоремы совершенно аналогично.

Теорема 2.5.2*. *Если вершины A, B и B' четырехугольника $\boldsymbol{D}$ фиксированы, то с приближением вершины A' к вершине A модуль четырехугольника $\boldsymbol{D}$ возрастает.*

Рассмотрим два примера оценки модуля с использованием теорем 2.5.2 и 2.5.2*.

Пример 1. Оценим модуль $m(\boldsymbol{D})$ четырехугольника $\boldsymbol{D}$, где область D описывается неравенствами

$$a < x < b, \quad \theta_1(x) < y < \theta_2(x)$$

($\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ — непрерывные функции), а вершины четырехугольника находятся в точках

$$A = a + i\theta_2(a),\ A' = a + i\theta_1(a),$$
$$B' = b + i\theta_1(b),\ B = b + i\theta_2(b).$$

Обозначим

$$\theta_k^+ = \max_{a\leqslant x\leqslant b} \theta_k(x), \quad \theta_k^- = \min_{a\leqslant x\leqslant b} \theta_k(x).$$

Покажем сначала, что если $\theta_1^+ < \theta_2^-$, то

$$m(\boldsymbol{D}) \leqslant \frac{b-a}{\theta_2^- - \theta_1^+}.$$

Пусть

$$A_1 = a + i\theta_2^-, \quad A_1' = a + i\theta_1^+, \quad B_1' = b + i\theta_1^+, \quad B = b + i\theta_2^-.$$

Рассмотрим два вспомогательных четырехугольника $\boldsymbol{D}_1$

и D_1'. Четырехугольник D_1 отличается от четырехугольника D лишь тем, что его вершинами являются точки A, A_1', B_1', B_1, а четырехугольник D_1' имеет те же вершины, что и четырехугольник D_1, но вместо области D у него прямоугольник

$$a < x < b, \quad \theta_1^+ < y < \theta_2^-.$$

Из теоремы 2.5.2* имеем $m(D_1) \geqslant m(D)$, а из теоремы 2.5.2 — $m(D_1') \geqslant m(D_1)$, так что

$$m(D) \leqslant m(D_1') = \frac{b-a}{\theta_2^- - \theta_1^+}.$$

Совершенно аналогичные рассуждения дают нам оценку

$$m(D) \geqslant \frac{b-a}{\theta_2^+ - \theta_1^-}$$

для модуля четырехугольника D снизу.

В тех случаях, когда не удается применить теоремы 2.5.2 и 2.5.2*, иногда удается непосредственно применить теорему 2.5.1.

Пример 2. Пусть стороны AA' и BB' четырехугольника D лежат на двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно $\Delta > 0$, а две другие его стороны — это произвольно расположенные между этими прямыми кривые, расстояние между которыми равно d. Оценим модуль четырехугольника D снизу.

Построим вспомогательный четырехугольник D_1 с вершинами A_1, A_1', B_1', B_1, расположенными на тех же параллельных прямых, что и вершины четырехугольника D. Четырехугольник D_1 мы будем считать обычным прямолинейным прямоугольником. Его расположение и размеры мы выберем следующим образом. Найдем ближайшие друг к другу точки $\zeta \in AB$ и $\zeta' \in A'B'$ (расстояние между ними равно d) и расположим прямоугольник D_1 так, чтобы точки ζ и ζ' лежали внутри него и чтобы их расстояние от сторон A_1B_1 и $A_1'B_1'$ было не меньше Δ. Легко подсчитать, что для этой цели нам достаточно, чтобы длина стороны A_1A_1' прямоугольника D_1 была равна $d+2\Delta$. Поскольку длина стороны A_1B_1 прямоугольника D_1 равна Δ, его площадь будет равной $(d+2\Delta)\Delta$.

Возьмем функцию $\rho(z)$, равной c в прямоугольнике D_1 и нулю вне него. Для выполнения условия (2) мы полагаем

$$c = [(d+2\Delta)\,\Delta]^{-1/2}.$$

Согласно теореме 1

$$m(D) \geqslant \left\{\inf_{\gamma\in\Gamma} l_\rho(\gamma)\right\}^2,$$

где Γ — семейство кривых, лежащих в области D и соединяющих между собой стороны AA' и BB' четырехугольника D.

Оценим $l_\rho(\gamma)$. Пересечение γ_1 кривой γ с прямоугольником D_1 непусто, так как D_1 по построению содержит отрезок (ζ, ζ'), а каждая кривая $\gamma \in \Gamma$ обязана пересекать этот отрезок. При нашем выборе $\rho(z)$ величина $l_\rho(\gamma)$ равна $cl(\gamma_1)$, где $l(\gamma_1)$ — евклидова длина множества γ_1. Мы покажем сейчас, что $l(\gamma_1) \geqslant \Delta$.

Рассмотрим две возможности: или кривая γ целиком лежит в прямоугольнике D_1, или она выходит за его пределы. В первом случае доказываемое неравенство непосредственно вытекает из определения семейства Γ, ибо расстояние между AA' и BB' по условию не меньше, чем Δ. Во втором случае множество γ_1 содержит связный кусок кривой γ, начинающийся в точке ее пересечения с отрезком (ζ, ζ'). Таких участков — два, и хотя бы один из них кончается на стороне A_1B_1, или на стороне $A_1'B_1'$ прямоугольника D_1. По построению прямоугольника D_1 этот участок имеет длину не меньше, чем Δ. Итак, в обоих случаях доказываемое неравенство справедливо.

Возвращаясь к $l_\rho(\gamma)$, мы видим, что для всех $\gamma \in \Gamma$ имеет место неравенство

$$l_\rho(\gamma) \geqslant c\Delta = \left(\frac{\Delta}{d+2\Delta}\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$m(D) \geqslant \frac{\Delta}{d + 2\Delta}.$$

При оценках модулей часто бывают удобны различные видоизменения формул для экстремальных длин и для модулей. Мы отметим сейчас несколько возможностей такого рода.

Начнем с одного совершенно очевидного замечания. В определении экстремальной длины совсем необязательно рассматривать метрики, удовлетворяющие нормировочному условию (2). Вполне достаточно требовать выполнение условия

$$S_\rho = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \rho(z)\, dx\, dy > 0. \qquad (2^*)$$

Экстремальная длина $\lambda(\Gamma)$ определяется тогда слегка иной формулой

$$\lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{\left\{\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} (l_\rho(\gamma))\right\}^2}{S_\rho}.$$

Далее, как мы уже отмечали, экстремальная метрика равна нулю вне области D, если речь идет об экстремальной длине семейства кривых, лежащих в области D. Поэтому условие (2*) можно заменить условием

$$S_\rho(D) = \iint\limits_D \rho(z)\, dx\, dy > 0 \qquad (2^{**})$$

и написать для экстремальной длины $\lambda(\Gamma)$ формулу

$$\lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{\left\{\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} l_\rho(\gamma)\right\}^2}{S_\rho(D)}. \qquad (4)$$

Эту формулу можно еще немного преобразовать. Обозначим через K_Γ такой класс метрик, для которых при всех $\gamma \in \Gamma$ имеют место неравенства

$$l_\rho(\gamma) \geqslant 1, \qquad \rho \in K_\Gamma. \qquad (5)$$

Формулу (4) можно записать в виде

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho \in K_\Gamma} (S_\rho(D))^{-1}. \tag{4*}$$

Мы воспользуемся сейчас формулой (4*), чтобы написать еще одну полезную формулу для модуля четырехугольника D. Мы даже выделим эту формулу в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть D — четырехугольник с вершинами A, A', B', B, а Γ^* — семейство кривых, лежащих в области D и соединяющих между собой стороны AB и $A'B'$ этого четырехугольника. Тогда*

$$m(D) = \inf_{\rho \in K_{\Gamma^*}} S_\rho(D),$$

где K_{Γ^*} — класс метрик, для которых

$$l_\rho(\gamma) \geqslant 1, \quad \gamma \in \Gamma^*, \ \rho \in K_{\Gamma^*}.$$

Доказательство. Согласно определению экстремальная длина семейства Γ^* равна сопряженному модулю $m^*(D)$ нашего четырехугольника D. Поэтому интересующая нас формула немедленно получается из формул (4*) и (1).

Во многих случаях бывает удобно пользоваться так называемой леммой Греча. Для ее формулировки мы опишем сначала некоторое построение.

Пусть мы имеем четырехугольник D с вершинами, которые мы обозначим через A_0, A_0', A_n', A_n. Рассмотрим следующее разбиение этого четырехугольника на n четырехугольников D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Выберем на стороне A_0A_n точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$ и аналогичные точки $A_1', \ldots, A_{n-1}'$ на стороне $A_0'A_n'$. Мы будем считать, что номера точек A_k и A_k' отвечают порядку их следования по соответствующим сторонам четырехугольника D. Далее, каждую точку A_k мы соединим с точкой A_k' простой кривой c_k, лежащей в области D (теперь $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, но для единообразия мы можем обозначить через C_0 и C_n стороны A_0A_0' и A_nA_n' четырехугольника D).

Все кривые C_k мы будем считать, попарно непересекающимися. Эти кривые разбивают область D на n областей D_k, $k=1, 2, \ldots, n$. Из этих областей мы и получаем четырехугольники D_k с вершинами в точках A_{k-1}, A'_{k-1}, A'_k, A_k.

Теорема 2.5.3. *При любом описанном выше разбиении четырехугольника D имеет место неравенство*

$$m(D) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m(D_k).$$

Доказательство. Пусть Γ^* — семейство кривых, лежащих в области D и соединяющих между собой стороны A_0A_n и $A'_0A'_n$ четырехугольника D. Обозначим через $\rho^*(z)$ функцию, отвечающую экстремальной метрике для семейства Γ^*. Согласно лемме 1

$$m(D) = S_{\rho^*}(D) = \sum_{k=1}^{n} S_{\rho^*}(D_k). \tag{6}$$

Очевидно, что семейство Γ^* включает в себя аналогичные семейства Γ_k^*, построенные для четырехугольников D_k. Поэтому

$$\rho^* \in K_{\Gamma_k^*}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и из леммы 1 вытекает, что

$$m(D_k) \leqslant S_{\rho^*}(D_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Из формул (6) и (7) немедленно получаем утверждение теоремы.

Покажем, как используется теорема 2.5.3 для оценки модулей четырехугольников.

Пример 3. Найдем более точную оценку снизу для модуля четырехугольника, рассмотренного в примере 1.

Область D для четырехугольника примера 1 описывалась неравенствами

$$a \leq x < b, \quad \theta_1(x) < y < \theta_2(x).$$

Мы разделим отрезок (a, b) на n равных частей точками

$$a_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

и разобьем область D на n областей D_k прямыми, проходящими через точки a_k параллельно мнимой оси. Область D_k можно описать неравенствами

$$a_{k-1} < x < a_k, \quad \theta_1(x) < y < \theta_2(x),$$

а вершинами четырехугольника D_k являются точки A_{k-1}, A'_{k-1}, A'_k, A_k, где

$$A_s = a_s + i\theta_2(a_s), \qquad A'_s = a_s + i\theta_1(a_s).$$

Четырехугольники D_k вполне подходят под категорию четырехугольников D, рассмотренных в примере 1, если положить $a_{k-1} = a$, $a_k = b$. Поэтому мы можем написать неравенство

$$m(D_k) \geqslant \frac{a_k - a_{k-1}}{\theta_2(\xi_k) - \theta_1(\xi'_k)},$$

где

$$\theta_2(\xi_k) = \max_{a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k} \theta_2(x), \quad \theta_1(\xi'_k) = \min_{a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k} \theta_1(x).$$

Согласно теореме 3 имеем

$$m(D) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m(D_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{\theta_2(\xi_k) - \theta_1(\xi'_k)}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы легко получаем неравенство

$$m(D) \geqslant \int_a^b \frac{dx}{\theta_2(x) - \theta_1(x)}. \tag{8}$$

Ясно, что неравенство (8) существенно точнее неравенства, полученного в примере 1. Однако и неравенство (8) далеко не всегда дает результат, близкий к истине. Например, рассмотрим случай, когда область D представляет собой полосу $a < x < b$ с некоторым числом разрезов по вертикальным лучам, причем имеются разрезы, идущие вверх, и разрезы, ведущие вниз. В качестве сторон AA' и BB' четырехугольника D мы возьмем прямые $\operatorname{Re} x = a$ и $\operatorname{Re} x = b$. Нетрудно показать, что модуль такого четырехугольника положителен и что он может быть сколь угодно большим, если разрезов достаточно много. С другой стороны, для любой такой области D мы имеем равенство $\theta_2(x) - \theta_1(x) = \infty$, так что неравенство (8) не дает в этом случае никакой оценки.

Лемма Греча очень удобна для оценок модуля, но она позволяет получать только оценки снизу. Конечно, для оценки модуля четырехугольника сверху можно оценивать снизу сопряженный модуль этого четырехугольника, но устройство четырехугольника часто позволяет естественные разбиения лишь в одном направлении (скажем, в четырехугольниках вида, рассмотренного в примерах 1 и 3, разбиение в другом направлении было бы нецелесообразно).

Для более тонких оценок модуля четырехугольника (как сверху, так и снизу, ибо для этого приема модуль и сопряженный модуль ничем не различаются) используется другой прием. Он состоит в том, что мы строим отображение данного четырехугольника на прямоугольник. Если удается построить конформное отображение, то мы получаем точную формулу для модуля. Отображение, не являющееся конформным, позволяет получить оценки, которые тем точнее, чем ближе построенное отображение к конформному.

Мы докажем сейчас один результат подобного рода, который во многих случаях очень удобен в применении.

Лемма 2. *Пусть D — четырехугольник с вершинами A, A', B', B, а $\tau(z)$ — действительная функция, непрерывно дифференцируемая в замыкании области D. Если функция $\tau(z)$ отображает область D на отрезок $(0,1)$ таким образом, что сторона AB четырехугольника D переходит в точку 0, а сторона $A'B'$* — в точку 1, то

$$m(D) \leqslant \iint\limits_D \left\{ \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy.$$

Доказательство. Обозначим через $w(z)$ функцию, конформно отображающую область D на прямоугольник G: $0<\operatorname{Re} w<1$, $0<\operatorname{Im} w<m$ таким образом, что

$$w(A)=0,\quad w(A')=1,\quad w(B)=im,\quad w(B')=im+1.$$

Через $z(w)$ мы обозначим обратную функцию. Положим

$$\operatorname{Re} z(u+iv)=x(u,\,v),\quad \operatorname{Im} z(u+iv)=y(u,\,v)$$

и рассмотрим функцию

$$\xi_v(u)=\xi(u)=\tau(z(u+iv)).$$

Функция $\tau(z(w))$ отображает прямоугольник G на отрезок $(0,\,1)$ и переводит его сторону $(0,\,im)$ в точку 0, а сторону $(1,\,1+im)$ — в точку 1. Поэтому при любом $v\in(0,\,m)$ имеем

$$1=\xi(1)-\xi(0)=$$

$$=\int_0^1\xi'(u)\,du\leqslant\int_0^1|\xi'(u)|\,du=\int_0^1\left|\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right|du$$

или

$$\left\{\int_0^1\left|\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right|du\right\}^2\geqslant 1.$$

Применив к последнему интегралу неравенство Буняковского — Шварца, мы придем отсюда к неравенству

$$\int_0^1\left|\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right|^2du\geqslant 1.$$

Но

$$\left|\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right|^2\leqslant\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right],$$

а

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2=|z'(u+iv)|^2.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right] |z'(u+iv)|^2 \, du \geqslant 1.$$

Интегрируя это неравенство по параметру v от 0 до m, находим

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right] |z'(u+iv)|^2 \, du\, dv \geqslant m.$$

Сделаем замену $z(w) = z$. Поскольку образом прямоугольника G является область D, мы получим неравенство

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \geqslant m.$$

Согласно определению модуля $m = m(D)$ мы пришли к утверждению леммы.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 2.5

1°. Пусть D — двусвязная область, а C_1 и C_2 — связные компоненты ее границы (мы будем считать, что каждая из них состоит более чем из одной точки). Обозначим через Γ семейство кривых, лежащих в области D и соединяющих между собой различные компоненты ее границы. Доказать, что функция $\rho(z)$, отвечающая экстремальной метрике для семейства Γ, имеет вид $|w'(z)/w(z)|$, где $w(z)$ — функция, конформно отображающая область D на кольцо $r < |z| < R$.

2°. Пусть p-связная область D ограничена простой замкнутой кривой C_p и еще $p-1$ компонентами $C_1, \ldots, C_{p-1}$. Выделим на кривой C_p две дуги E_1 и E_2, не имеющие общих точек, и обозначим через Γ семейство кривых, лежащих в области D и соединяющих между собой эти дуги. Доказать, что экстремальная метрика для семейства Γ имеет вид $|w'(z)||dz|$, где $w(z)$ — функция, конформно отображающая область D на прямоугольник

$$0 < \operatorname{Re} w < 1, \quad 0 < \operatorname{Im} w < m$$

с вертикальными разрезами. При этом отображении кривая C_p переходит в границу прямоугольника, дуги E_1 и E_2 — в его горизонтальные стороны, а компоненты $C_1, \ldots, C_{p-1}$ — в вертикальные разрезы.

3°. Пусть области D и D^* описываются неравенствами

$$a < x < b, \quad |y - \varphi(x)| < \theta(x),$$

и

$$a < x < b, \quad |y| < \theta(x)$$

соответственно. Вершины A, A', B', B четырехугольников D и D^* мы выберем так, чтобы стороны AA' и BB' у обоих четырехугольников совпадали с вертикальными отрезками, входящими в границы областей D и D^*. Доказать, что $m(D) \geqslant m(D^*)$.

§ 2.6. Отображения криволинейных полос

Пусть $\varphi^+(x)$ и $\varphi^-(x)$ — две функции, непрерывно дифференцируемые при $x \geqslant a$ и удовлетворяющие условиям

$$\varphi^+(x) > \varphi^-(x) \qquad x \geqslant a$$

и

$$\lim_{x\to+\infty} (\varphi^+(x))' = \lim_{x\to+\infty} (\varphi^-(x))' = \varkappa. \tag{1}$$

Через $C^\pm$ мы обозначим кривые с уравнениями

$$y = \varphi^\pm(x), \qquad x \geqslant a$$

а через θ_x — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $x + i\varphi^-(x)$ и $x + i\varphi^+(x)$.

Область D, ограниченную кривой C^+, кривой C^- и отрезком θ_a (и содержащую каждый отрезок θ_x при $x > a$), мы будем называть *криволинейной полосой*. Область D можно описать неравенствами

$$x > a, \quad \varphi^-(x) < y < \varphi^+(x).$$

Нас будут интересовать конформные отображения двух криволинейных полос друг на друга, при которых бесконечность переходит в бесконечность. Ясно, что для этого достаточно изучить конформные отображения произвольных криволинейных полос на некоторую каноническую. Такую каноническую полосу P мы сейчас и определим.

Пусть l_a — некоторая конечная простая кривая, лежащая в полосе $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ и соединяющая между собой ее граничные прямые. Мы обозначим через P часть полосы $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$, лежащую справа от кривой l_a.

Всюду в дальнейшем мы будем обозначать через $W(z)$ функцию, конформно отображающую область D на область P так, чтобы образом бесконечности была бесконечность, а образом отрезка θ_a — кривая l_a. Согласно теоремам о конформном отображении эти условия однозначно определяют функцию $W(z)$, так как они задают образы трех граничных точек.

Функцию, обратную к $W(z)$, мы будем обозначать через $Z(w)$.

Наряду с функциями $\varphi^{\pm}(x)$ мы будем использовать функции

$$\theta(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x), \quad \varphi(x) = \frac{\varphi^+(x) + \varphi^-(x)}{2}. \tag{2}$$

Легко видеть, что $\theta(x)$ — длина отрезка θ_x.

Введем еще область $D_{\alpha,\beta}$, где $a < \alpha < \beta$, описываемую неравенствами

$$\alpha < x < \beta, \quad |y - \varphi(x)| < \frac{1}{2}\theta(x). \tag{3}$$

Иными словами, область $D_{\alpha,\beta}$ — это часть области D, лежащая в полосе $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$. Мы будем рассматривать также четырехугольник $\boldsymbol{D}_{\alpha,\beta}$ с вершинами A, A', B', B, выбранными таким образом, чтобы сторона AA' совпадала с отрезком θ_α, а сторона BB' — с отрезком θ_β.

Лемма 1. *Положим*

$$u^+(x) = \sup_{z\in\theta_x} \operatorname{Re} W(z), \quad u^-(x) = \inf_{z\in\theta_x} \operatorname{Re} W(z). \tag{4}$$

Для модуля $m(\boldsymbol{D}_{\alpha,\beta})$ четырехугольника $\boldsymbol{D}_{\alpha,\beta}$ имеют место неравенства

$$\frac{u^-(\beta) - u^+(\alpha)}{\pi} \leqslant m(\boldsymbol{D}_{\alpha,\beta}) \leqslant \frac{u^+(\beta) - u^-(\alpha)}{\pi}.$$

Доказательство. Обозначим через l_x образ отрезка θ_x при отображении $w = W(z)$. Очевидно, что формулы (4) равносильны формулам

$$u^+(x) = \sup_{w\in l_x} \operatorname{Re} w, \quad u^-(x) = \inf_{w\in l_x} \operatorname{Re} w. \tag{4*}$$

Образом четырехугольника $D_{\alpha,\beta}$ при отображении $w = W(z)$ является четырехугольник $G_{\alpha,\beta}$, вырезаемый из полосы $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ кривыми l_α и l_β — образами сторон AA' и BB' исходного четырехугольника $D_{\alpha,\beta}$. При конформных отображениях модуль не меняется, так что имеем равенство $m(D_{\alpha,\beta}) = m(G_{\alpha,\beta})$. Из формул (4*) видно, что четырехугольник $G_{\alpha,\beta}$ содержит прямоугольник

$$G'_{\alpha,\beta} = \left\{w\colon\ |\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2},\quad u^+(\alpha) < \operatorname{Re} w < u^-(\beta)\right\}$$

и содержится в прямоугольнике

$$G''_{\alpha,\beta} = \left\{w\colon\ |\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2},\quad u^-(\alpha) < \operatorname{Re} w < u^+(\beta)\right\}.$$

Поэтому

$$m\left(G'_{\alpha,\beta}\right) \leqslant m\left(D_{\alpha,\beta}\right) \leqslant m\left(G''_{\alpha,\beta}\right).$$

Вычисляя модули прямоугольников $G'_{\alpha,\beta}$ и $G''_{\alpha,\beta}$, мы приходим к утверждению леммы.

Замечание. Если $u^-(\beta) < u^+(\alpha)$, то прямоугольник $G'_{\alpha,\beta}$ отсутствует и связанные с ним оценки неправомерны. Однако это не является помехой доказательству, так как при $u^-(\beta) < u^+(\alpha)$ написанная в лемме оценка снизу бессодержательна.

Лемма 2. *Для функций $u^\pm(x)$, определенных формулой* (4), *имеет место соотношение*

$$\lim_{x\to+\infty} \{u^+(x) - u^-(x)\} = |\varkappa|,$$

где $\varkappa$ — величина, входящая в условие (1).

Доказательство. Области D и P, как легко проверить, имеют в бесконечности острие (см. § 2.2). Поэтому из теоремы 2.2.7 вытекает, что

$$\arg Z'(w) \to \psi, \qquad w \to \infty,\quad w \in P. \tag{5}$$

Выясним, как связаны между собой величины ψ и $\varkappa$. С этой целью заметим, что большие положительные значения w лежат в области P, и что при $u \to +\infty$ имеем

$$\arg Z(u) \sim \arg \int\limits_{u_0}^{u} Z'(t)\,dt \sim \arg Z'(u) \to \psi$$

согласно (5), поскольку $Z(u) \to \infty$ при $u \to +\infty$. С другой стороны $Z(u) \in D$, а из условия (1) нетрудно вывести, что

$$\arg z \to \operatorname{arctg} \varkappa, \qquad z \to \infty, \quad z \in D.$$

Сравнивая две последние формулы, мы получаем искомую связь

$$\varkappa = \operatorname{tg} \psi. \tag{6}$$

Заметим еще, что из формулы для производной обратной функции вытекает соотношение

$$\arg W(z) \to -\psi, \qquad z \to \infty, \quad z \in D, \tag{7}$$

Рассмотрим теперь кривую l_x — образ отрезка θ_x при отображении $w = W(z)$. Параметрическое уравнение этой кривой можно написать в виде

$$w = s(y), \quad \varphi^-(x) \leqslant y \leqslant \varphi^+(x),$$

где

$$s(y) = W(x + iy).$$

Отсюда мы легко получаем для $\tau(y)$ — единичного вектора касательной к кривой l_x — формулу

$$\tau(y) = \frac{s'(y)}{|s'(y)|} = \exp\left\{\frac{\pi i}{2} + i \arg W'(x + iy)\right\}.$$

Из этой формулы и из формулы (7) видно, что

$$\arg \tau(y) \to \frac{\pi}{2} - \psi, \qquad x \to +\infty.$$

Иными словами, при больших положительных x кривая l_x мало отличается от прямолинейного отрезка, пересекающего полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ под углом $\frac{\pi}{2} - \psi$. Поэтому мы легко получаем утверждение леммы из формул (4*) и (6).

Следствие. *Если область симметрична относительно действительной оси, то*

$$\lim_{x\to+\infty}\{u^+(x)-u^-(x)\}=0.$$

Во многих случаях бывает полезна грубая оценка для величины $u^-(\beta)-u^+(\alpha)$, не требующая почти никаких предположений о функциях $\varphi(x)$ и $\theta(x)$.

Лемма 2*. *Пусть $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ — произвольные непрерывные функции. Если выполнено условие*

$$\int_\alpha^\beta \frac{ds}{\theta(s)}\geqslant 3,$$

то имеет место неравенство

$$u^-(\beta)-u^+(\alpha)\geqslant \pi\int_\alpha^\beta \frac{ds}{\theta(s)}-3\pi.$$

Доказательство. Обозначим через $G_{\alpha,\beta}$ образ области $D_{\alpha,\beta}$ при отображении $w=W(z)$, а через l_α и l_β — образы отрезков θ_α и θ_β. Ясно, что l_α и l_β — простые кривые, лежащие в полосе $|\operatorname{Im} w|<\frac{\pi}{2}$ и соединяющие между собой прямые, ограничивающие эту полосу. Область $G_{\alpha,\beta}$ вырезается из полосы $|\operatorname{Im} w|<\frac{\pi}{2}$ кривыми l_α и l_β.

Рассмотрим четырехугольник $G_{\alpha,\beta}$, являющийся образом четырехугольника $D_{\alpha,\beta}$ при отображении $w=W(z)$, и четырехугольник $\overset{*}{G}_{\alpha,\beta}$, получающийся из него переменой роли сторон. Согласно определению сопряженного модуля (см. начало § 2.5) имеем

$$m^*(\overset{*}{G}_{\alpha,\beta})=m(G_{\alpha,\beta})=m(D_{\alpha,\beta}).$$

В примере 2 § 2.5 мы рассматривали четырехугольники, аналогичные четырехугольнику $\overset{*}{G}_{\alpha,\beta}$, и получили неравенство для их модулей, которое для нашего случая принимает вид

$$m\left(G^*_{\alpha,\beta}\right) \geqslant \frac{\pi}{d+2\pi},$$

где d — расстояние между кривыми l_α и l_β (расстояние Δ между параллельными сторонами четырехугольника $G^*_{\alpha,\beta}$ в нашем случае равно π). С другой стороны, в примере 3 § 2.5 мы рассматривали четырехугольники, аналогичные четырехугольнику $D_{\alpha,\beta}$, и получили для их модулей неравенство, которое в нашем случае имеет вид

$$m\left(D_{\alpha,\beta}\right) \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{ds}{\theta(s)}.$$

Поскольку согласно определению сопряженного модуля $m^*(G)\,m(G)=1$, мы получаем, что

$$2+\frac{d}{\pi} \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{ds}{\theta(s)}.$$

Из геометрических соображений видно, что

$$u^-(\beta)-u^+(\alpha) \geqslant d-\pi$$

если $d \geqslant \pi$. Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Заметим, что доказанную лемму можно истолковать как асимптотическую оценку для действительной части функции $W(z)$, конформно отображающей область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$.

Следствие. *Если область D описывается неравенствами*

$$x > a, \quad |y-\varphi(x)| < \frac{1}{2}\theta(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ — произвольные непрерывные функции;

удовлетворяющие условиям

$$\theta(x) > 0 \quad x \geqslant a; \qquad \int\limits_a^\infty \frac{ds}{\theta(s)} = \infty,$$

то

$$\operatorname{Re} W(x+iy) \geqslant \pi \int\limits_a^x \frac{ds}{\theta(s)} + O(1), \qquad x \to +\infty,$$

равномерно по y при $x+iy \in D$.

Действительно, нам достаточно взять в лемме 2* $\alpha = a$, $\beta = x$. Условие $\int\limits_a^x \frac{ds}{\theta(s)} \geqslant 3$ при достаточно больших x будет выполнено ввиду предположения о расходимости интеграла.

Теперь мы можем перейти к получению асимптотических формул для функции $W(z)$ при $z \to \infty$, $z \in D$. Начнем с доказательства наиболее простой формулы для функции $\operatorname{Re} W(z)$.

Теорема 2.6.1. *При выполнении условия* (1) *с* $\varkappa = 0$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\operatorname{Re} W(x+iy) \sim \pi \int\limits_a^x \frac{ds}{\theta(s)}, \qquad x \to +\infty, \quad x+iy \in D.$$

Доказательство. Из лемм 1 и 2 видно, что интересующий нас вопрос сводится к получению асимптотической формулы для модуля четырехугольника $D_{a,x}$ при $x \to +\infty$. Действительно, возьмем произвольную точку z_0 на отрезке θ_a. Тогда мы получим из лемм 1 и 2, что

$$\operatorname{Re} W(x+iy) - \operatorname{Re} W(z_0) = \pi m(D_{a,x}) + O(1), \qquad x \to +\infty,$$

равномерно по y при $x+iy \in D$. Если

$$m(D_{a,x}) \to +\infty, \qquad x \to +\infty, \tag{8}$$

то написанная формула означает, что

$$\operatorname{Re} W(x+iy) \sim m(D_{a,x}), \quad x \to +\infty, \quad x+iy \in D. \tag{9}$$

Следовательно, нам остается получить асимптотическую формулу для модуля $m(D_{a,x})$ и убедиться в справедливости соотношения (8).

Оценку интересующего нас модуля снизу мы фактически уже нашли в примере 3 § 2.5. Она имеет вид

$$m(D_{a,x}) \geqslant \int\limits_a^x \frac{ds}{\theta(s)}. \tag{10}$$

Для оценки модуля сверху мы воспользуемся леммой 2 § 2.5. Рассмотрим функцию

$$\tau(x+iy) = \frac{1}{2} + \frac{y-\varphi(x)}{\theta(x)}.$$

Она определена во всей области D и непрерывно дифференцируема в ее замыкании. Легко проверить, что функция $\tau(z)$ отображает область D на отрезок $(0, 1)$, причем всю кривую C^- она переводит в точку 0, а всю кривую C^+ — в точку 1. Ясно, что эта функция совершает подходящее отображение четырехугольника $D_{a,x}$. Согласно лемме 2 § 5 справедливо неравенство

$$m(D_{a,x}) \leqslant \iint\limits_{D_{a,x}} \left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy.$$

Но

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 = \frac{1+\varphi'^2(x)}{\theta^2(x)} - \frac{y-\varphi(x)}{\theta^3(x)}\varphi'(x)\,\theta'(x) + {} \\ + \frac{[y-\varphi(x)]^2}{\theta^4(x)}\theta'^2(x)$$

и потому это неравенство можно записать в виде

$$m(D_{a,x}) \leqslant \int\limits_a^x \int\limits_{-\frac{1}{2}\theta(s)}^{\frac{1}{2}\theta(s)} \left\{\frac{1+\varphi'^2(s)}{\theta^2(s)} - \frac{\varphi'(s)\,\theta'(s)}{\theta^3(s)}\,t + \frac{\theta'^2(s)}{\theta^4(s)}\,t^2\right\} ds\,dt.$$

Вычисляя интеграл по t, мы приходим к неравенству

$$m(D_{a,x}) \leqslant \int_a^x \frac{ds}{\theta(s)} + \int_a^x \frac{\varphi'^2(s) + \frac{1}{12}\theta'^2(s)}{\theta(s)}\, ds. \tag{11}$$

Из условия (1) с $\varkappa = 0$ имеем

$$\theta'(x) \to 0, \qquad \varphi'(x) \to 0, \qquad x \to +\infty. \tag{12}$$

Из (12) следует, в частности, что

$$\theta(x) = o(x), \qquad x \to +\infty,$$

откуда вытекает, что

$$\int_a^x \frac{ds}{\theta(s)} \to +\infty, \qquad x \to +\infty. \tag{13}$$

Отсюда в силу неравенства (10) вытекает справедливость соотношения (8). Кроме того, из (12) и (13) нетрудно вывести, что

$$\int_a^x \frac{\varphi'^2(s) + \frac{1}{12}\theta'^2(s)}{\theta(s)}\, ds = o\left(\int_a^x \frac{ds}{\theta(s)}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Поэтому из неравенств (10) и (11) вытекает асимптотическая формула

$$m(D_{a,x}) \sim \int_a^x \frac{ds}{\theta(s)}, \qquad x \to +\infty.$$

Эта формула вместе с формулой (9) дает нам утверждение теоремы.

Замечание 1. В действительности, рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы, позволяют получить значительно больше. Именно, заменив a и x на произвольные α и β, мы можем утверждать, что асимптотическая формула

$$\operatorname{Re} W(\beta + iy) - \operatorname{Re} W(\alpha + iy') \sim \pi \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ds}{\theta(s)}$$

справедлива при любых α и β, удовлетворяющих условиям

$$a \leqslant \alpha < \beta, \qquad \beta \to +\infty$$

и

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{ds}{\theta(s)} \geqslant c > 0,$$

где c — произвольная положительная постоянная. При этом асимптотическая формула имеет место равномерно по y и y' (разумеется, при условии, что $\alpha + iy' \in D$ и $\beta + iy \in D$).

Замечание 2. Предположение теоремы, что условие (1) выполняется с $\varkappa = 0$, не очень существенно. Повернув область D на угол $\psi = \operatorname{arctg} \varkappa$, мы получим область, удовлетворяющую условию (1) уже с $\varkappa = 0$. Написав для новой области асимптотику отображающей функции, а затем возвратившись к прежним обозначениям, мы без труда получим асимптотическую формулу для общего случая. Она имеет вид

$$\operatorname{Re} W(x + iy) \sim (1 + \varkappa^2)\, \pi \int_{a}^{x} \frac{ds}{\theta(s)}.$$

Наша следующая задача — исследование асимптотического поведения функций $W'(z)$ и $\operatorname{Im} W(z)$.

Область, описываемую неравенствами

$$x > a, \quad |y - \varphi(x)| < \frac{\mu}{2} \theta(x), \qquad 0 < \mu \leqslant 1$$

мы будем обозначать через D^{μ}. Ясно, что D^1 — это сама область D, а при $0<\mu<1$ область D^μ лежит внутри области D. Мы будем использовать также обозначение $D^\mu_{\alpha,\beta}$, смысл которого аналогичен.

Теоремы о функциях $W'(z)$ и $\operatorname{Im} W(z)$ мы будем формулировать только для случая $\varkappa=0$. Поэтому выпишем для ссылок несколько формул, относящихся к этому случаю.

Прежде всего, напомним, что при $\varkappa=0$ имеем

$$\theta'(x)\to 0, \qquad \varphi'(x)\to 0, \qquad x\to+\infty. \tag{14}$$

Отсюда легко вывести, что

$$\theta(x)-\theta(t)=o(\theta(x)),\ \varphi(x)-\varphi(t)=o(\theta(x)),$$

когда

$$x\to+\infty, \quad |x-t|<K\cdot\theta(x), \tag{15}$$

где K — произвольное фиксированное число.

Далее, при доказательстве леммы 2 мы установили, что

$$\arg W'(z)\to 0, \qquad z\to\infty,\ z\in D \tag{16}$$

(опять же, если $\varkappa=0$).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия*

$$\zeta\in D^\mu, \qquad \zeta'\in D^\mu, \qquad |\zeta-\zeta'|<M\cdot\theta(\operatorname{Re}\zeta), \tag{17}$$

где $0<\mu<1$ и $M>0$ — какие-либо фиксированные постоянные. Тогда

$$\frac{W'(\zeta')}{W'(\zeta)}\to 1, \qquad \zeta\to\infty,\ \zeta\in D^\mu,$$

причем стремление к пределу равномерно по ζ', удовлетворяющим условию (17).

Доказательство. Хорошо известна формула Шварца [1])

$$F(z)-F(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t-z_0|=R}[V(t)-V(z_0)]\frac{t+z-z_0}{t-z-z_0}\frac{dt}{t-z_0},$$

позволяющая восстановить функцию $F(z)$, аналитическую в круге по значениям ее мнимой части $V(z)$ на окружности этого круга. Из формулы Шварца легко получить оценку

$$\max_{|t-z_0|\leqslant r}|F(z)-F(z_0)|\leqslant\frac{R+r}{R-r}\max_{|t-z_0|\leqslant R}|V(z)-V(z_0)|.$$

Функция $\arg W'(z)$ является мнимой частью функции $\ln W'(z)$, аналитической в области D. Из формул (15) нетрудно усмотреть, что круг

$$\mathscr{K}_\lambda(\zeta)=\{z:\ |z-\zeta|<\lambda\theta(\operatorname{Re}\zeta)\},\qquad \zeta\in D^\mu,$$

лежит в области D, если $\lambda<1-\mu$, а $\operatorname{Re}\zeta$ достаточно велико. Поэтому из существования предела функции $\arg W'(z)$ легко вывести утверждение леммы, правда, только для случая, когда $M<1-\mu$. Очевидная формула

$$\frac{W(z_n)}{W(z_1)}=\frac{W(z_n)}{W(z_{n-1})}\cdots\frac{W(z_2)}{W(z_1)}$$

позволяет перенести утверждение на случай любого M.

Теорема 2.6.2. *Если выполнено условие* (1) *с* $\varkappa=0$, *то при любом фиксированном* μ, $0<\mu<1$, *справедлива формула*

$$W'(z)\sim\frac{\pi}{\theta(\operatorname{Re}z)},\qquad z\to\infty,\ z\in D^\mu.$$

Доказательство. Для каждой точки $z\in D^\mu$ положим

$$z_K=z+K\cdot\theta(x),\qquad x=\operatorname{Re}z.$$

[1]) Ее вывод можно найти на стр. 173.

Из формул (15) нетрудно усмотреть, что $z_K \in D^{\mu'}$ при любом $\mu' > \mu$, если K фиксировано, а x — достаточно велико.

Напишем

$$W(z_K) - W(z) = \int_z^{z_K} W'(\zeta)\, d\zeta = W'(z) \cdot \int_z^{z_K} \frac{W'(\zeta)}{W'(z)}\, d\zeta.$$

В силу леммы 3 из написанной формулы вытекает, что

$$W(z_K) - W(z) \sim (z_K - z)\, W'(z), \quad z \to \infty,\ z \in D^{\mu}. \tag{18}$$

Заметим теперь, что согласно формуле (15)

$$\int_{\operatorname{Re} z}^{\operatorname{Re} z_K} \frac{ds}{\theta(s)} = \int_x^{x + K\theta(x)} \frac{ds}{\theta(s)} \sim K\,\theta(x) \cdot \frac{1}{\theta(x)} = K, \qquad x \to +\infty.$$

В силу замечания 1 к теореме 1 справедлива формула

$$\operatorname{Re} W(z_K) - \operatorname{Re} W(z) \sim \pi \int_{\operatorname{Re} z}^{\operatorname{Re} z_K} \frac{ds}{\theta(s)} \sim \pi K.$$

Принимая во внимание, что для всех $z \in D$ очевидно справедливо неравенство $|\operatorname{Im} W(z)| < \frac{\pi}{2}$, можем написать неравенство

$$|W(z_K) - W(z) - \pi K| \leqslant \pi + o(1), \quad z \to \infty,\ z \in D^{\mu};$$

Вместе с формулой (18) это неравенство дает нам

$$|\pi - \theta(x)\, W'(z)| \leqslant \frac{\pi}{K} + 0(1), \quad z \to \infty,\ z \in D^{\mu}.$$

Поскольку K произвольно велико, мы приходим отсюда к утверждению теоремы.

Теорема 2.6.3. *Если выполнено условие* (1) *с* $\varkappa = 0$, *то*

$$\int_{\varphi(x) - \frac{1}{2}\theta(x)}^{\varphi(x) + \frac{1}{2}\theta(x)} \left| W'(x + iy) - \frac{\pi}{\theta(x)} \right| dy = o(1), \quad x \to +\infty.$$

Доказательство. Пусть $0<\mu\leqslant 1$. Обозначим через $I_\mu=I_\mu(x)$ отрезок

$$\varphi(x)-\frac{\mu}{2}\theta(x)<y<\varphi(x)+\frac{\mu}{2}\theta(x)$$

и введем еще обозначение $I_\mu^* = I_1\setminus I_\mu$.

Имеем очевидное равенство

$$W(x+i\varphi^+(x))-W(x+i\varphi^-(x))=i\int\limits_{I_1} W'(x+iy)\,dy.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Im} W(x+i\varphi^\pm(x))=\pm\frac{\pi}{2}$$

мы получаем

$$\int\limits_{I_1}\operatorname{Re} W'(x+iy)\,dy=\pi+o(1),\qquad x\to+\infty$$

В силу формулы (16) отсюда следует, что и

$$\int\limits_{I_1}|W'(x+iy)|\,dy=\pi+o(1),\qquad x\to+\infty.$$

Далее, из теоремы 2.6.2 очевидно нетрудно вывести, что

$$\int\limits_{I_\mu}|W'(x+iy)|\,dy=\pi\mu+o(1),\qquad x\to+\infty,$$

при любом фиксированном μ, $0<\mu<1$. Следовательно,

$$\int\limits_{I_\mu^*}|W'(x+iy)|\,dy=\pi(1-\mu)+o(1),\qquad x\to+\infty.$$

Рассмотрим очевидное неравенство

$$\int\limits_{I_1}\left|W'(x+iy)-\frac{\pi}{\theta(x)}\right|dy\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{I_\mu}\left|W'(x+iy)-\frac{\pi}{\theta(x)}\right|dy+\int\limits_{I_\mu^*}\left\{|W'(x+iy)|+\frac{\pi}{\theta(x)}\right\}dy.$$

Первый интеграл в правой части этого неравенства по теореме 2.6.2 равен $o(1)$, а второй не превосходит $2\pi(1-\mu)+o(1)$. Поскольку число μ можно взять сколь угодно близким к единице, мы приходим к утверждению теоремы.

Теорема 2.6.4. *Если выполнено условие* (1) *с* $\varkappa=0$, *то имеет место асимптотическая формула*

$$\operatorname{Im} W(x+iy)=\pi\frac{y-\varphi(x)}{\theta(x)}+o(1),$$

справедливая при $x\to+\infty$, $x+iy\in D$, *равномерно по* y.

Доказательство. Пусть $x+iy\in D$. Тогда по определению

$$\varphi(x)-\frac{1}{2}\theta(x)<y<\varphi(x)+\frac{1}{2}\theta(x).$$

В силу очевидных равенств

$$\operatorname{Im} W(x+i\varphi^{-}(x))=-\frac{\pi}{2}$$

и

$$W(x+iy)-W(x+i\varphi^{-}(x))=i\int\limits_{\varphi(x)-\frac{1}{2}\theta(x)}^{y}W(x+i\eta)\,d\eta$$

мы можем написать

$$\left|\operatorname{Im} W(x+iy)-\pi\frac{y-\varphi(x)}{\theta(x)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\varphi(x)-\frac{1}{2}\theta(x)}^{y}\left|W'(x+i\eta)-\frac{\pi}{\theta(x)}\right|d\eta.$$

Отсюда в силу теоремы 2.6.3 немедленно получаем наше утверждение.

Асимптотическая формула для $\operatorname{Im} W(x+iy)$ обладает достаточной точностью практически для любых приложений. Что касается формулы для $\operatorname{Re} W(x+iy)$, полученной в теореме 2.6.1, то во многих случаях она оказывается слишком грубой. Ее остаточный член имеет вид

$$o\left(\int_a^x \frac{ds}{\theta(s)}\right), \qquad x \to +\infty,$$

а интеграл, стоящий под знаком o, при всех допустимых $\theta(x)$ стремится к $+\infty$. Естественно возникает желание получить асимптотическую формулу с остаточным членом $o(1)$ и для всей отображающей функции $W(z)$. Это возможно, но, разумеется, при более суровых ограничениях на функции $\varphi(x)$ и $\theta(x)$. В одном довольно важном случае интересующая нас формула может быть получена без преодоления новых трудностей.

Теорема 2.6.5. *Пусть область D симметрична относительно действительной оси, а функция $\theta(x)$ помимо условия (1) удовлетворяет еще условию*

$$\int_a^\infty \frac{\theta'^2(s)}{\theta(s)}\, ds < \infty. \tag{19}$$

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$W(x+iy) = \pi \int_a^x \frac{ds}{\theta(s)} + i\pi \frac{y}{\theta(x)} + \lambda + o(1),$$

где λ — некоторая действительная постоянная. Эта формула справедлива при $x \to +\infty$, $x+iy \in D$, равномерно по y.

Доказательство. В силу теоремы 2.6.4 (а она в условиях доказываемой теоремы заведомо справедлива) нам достаточно доказать лишь асимптотическую формулу

$$\operatorname{Re} W(x+iy) = \pi \int_a^x \frac{ds}{\theta(s)} + \lambda + o(1) \tag{20}$$

для функции $\operatorname{Re} W(z)$.

Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\operatorname{Re} W(\beta+iy) - \operatorname{Re} W(\alpha+iy') = \pi m(\boldsymbol{D}_{\alpha,\beta}) + o(1) \tag{21}$$

при любых α и β, удовлетворяющих условиям

$$\alpha<\beta, \quad \alpha\to+\infty.$$

Неравенства (10) и (11), полученные нами при доказательстве теоремы 2.6.1, можно записать в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{ds}{\theta(s)}\leqslant m(D_{\alpha,\beta})\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}\frac{ds}{\theta(s)}+\frac{1}{12}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\theta'^2(s)}{\theta(s)}\,ds,$$

так как для симметричной области D функция $\varphi(x)$ равна нулю. Из этих неравенств и из предположения (19) следует, что

$$m(D_{\alpha,\beta})=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{ds}{\theta(s)}+o(1), \qquad \beta>\alpha,\ \alpha\to+\infty,$$

а отсюда согласно формуле (21) мы получаем

$$\operatorname{Re}W(\beta+iy)-\operatorname{Re}W(\alpha+iy')=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\frac{ds}{\theta(s)}+o(1). \tag{22}$$

Используя формулу (22) и критерий Коши, негрудно убедиться, что функция

$$\operatorname{Re}W(x+iy)-\pi\int_{a}^{x}\frac{ds}{\theta(s)}$$

имеет при $x\to+\infty$, $x+iy\in D$ конечный предел, независящий от y. Обозначив этот предел через λ, мы придем к формуле (20).

Замечание. Если область D не является симметричной относительно действительной оси, но

$$\int_{a}^{\infty}\frac{\varphi'^2(s)}{\theta(s)}\,ds<\infty, \tag{23}$$

то все рассуждения, проведенные выше, остаются в силе, и мы получим ту же самую формулу для оотбражающей функции.

Получение столь же точной асимптотической формулы для случая, когда условие (23) не выполнено, значительно труднее. Трудность связана с тем, что между оценками для модуля сверху и снизу (формулы (11) и (10)) возникает зазор, и нужно найти новый подход к оценкам модуля, чтобы суметь ликвидировать этот зазор. Об одном из таких подходов и пойдет сейчас речь.

Мы начнем с нового способа задания области D.

Пусть C^0 — некоторая простая кривая, а

$$z=\zeta(s) \qquad 0\leqslant s<\infty$$

— ее параметрическое уравнение, где в качестве параметра s выбрана длина дуги этой кривой, отсчитываемая от ее начала. Функцию $\zeta(s)$ мы будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемой.

Обозначим через $n(s)$ комплексное число, изображающее единичный вектор нормали к кривой C^0 в точке $\zeta(s)$, а через $\varepsilon(s)$ — кривизну кривой C^0 в той же точке. Известно, что

$$n(s)=i\zeta'(s), \qquad \zeta''(s)=\varepsilon(s)n(s). \tag{24}$$

Пусть $\nu_+(s)$ и $\nu_-(s)$ — две положительные при $s\geqslant 0$ функции, а $\nu(s)$ — их сумма. Мы будем предполагать, что

$$\nu(s)\,|\,\varepsilon(s)\,|\leqslant 1, \qquad s\geqslant 0. \tag{25}$$

На нормали к кривой C^0 в точке $\zeta(s)$ отложим отрезок длины $\nu_+(s)$ от точки $\zeta(s)$ в сторону положительного направления нормали и отрезок длины $\nu_-(s)$ — в сторону отрицательного направления. Весь отрезок мы будем обозначать через ν_s.

Две бесконечно близкие нормали пересекаются в центре круга кривизны, радиус которого равен $|\,\varepsilon(s)\,|^{-1}$. В силу условия (25) отрезки ν_s при достаточно близких значениях s не пересекаются. Мы потребуем дополнительно выполнения условия:

(А) *Отрезки ν_s и $\nu_{s'}$ не пересекаются ни при каких различных значениях s и s'.*

Если выполнено условие (25), то можно предложить простые достаточные условия для выполнения условия А. Например:

Если имеет место неравенство (25) *и абсолютная величина изменения функции* $\arg \zeta'(s)$ *на любом отрезке кривой* C^0 *не превосходит* $\pi/2$, *то условие* А *выполнено.*

Пусть условие А выполнено. Тогда при изменении s от нуля до бесконечности концы отрезка ν_s описывают простые кривые C^+ и C^- с параметрическими уравнениями

$$z = \zeta(s) + \nu_+(s)n(s), \quad z = \zeta(s) + \nu_-(s)n(s), \qquad s \geqslant 0,$$

соответственно.

Мы будем обозначать через D область, ограниченную отрезком ν_0 и кривыми C^+ и C^- (ту из двух, которая содержит все отрезки ν_s при $s>0$).

Через $\overset{*}{D}_{\alpha,\beta}$ мы обозначим часть области D, заключенную между отрезками ν_α и ν_β. Вместе с областями $\overset{*}{D}_{\alpha,\beta}$ мы будем рассматривать четырехугольники $\overset{*}{D}_{\alpha,\beta}$, вершины которых A, A', B' и B выбираются таким образом, чтобы стороной AA' стал отрезок ν_α, а стороной BB' — отрезок ν_β.

С областями, определенными таким способом, естественно связать систему координат (s, t), где s и t связаны с x и y (или с $z=x+iy$) формулой

$$z=\zeta(s)+it\zeta'(s) \tag{26}$$

(s и t — действительные числа).

Легко видеть, что в координатах (s, t) область $\overset{*}{D}_{\alpha,\beta}$ описывается неравенствами

$$\alpha<s<\beta, \qquad -\nu_-(s)<t<\nu_+(s). \tag{27}$$

В общем случае нельзя написать явное выражение s и t через z. Однако через s и t все необходимые формулы пишутся без труда.

Дифференцируя равенство (26) и используя соотношения (24), мы находим, что

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (1 - \varepsilon(s)t)\,\zeta'(s), \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = i\zeta'(s).$$

Отсюда легко получаем формулу для якобиана

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (s, t)} = -\frac{1}{2i}\frac{\partial (z, \bar{z})}{\partial (s, t)} = 1 - \varepsilon (s)\, t. \tag{28}$$

Далее, введя обычное обозначение

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y},$$

мы легко найдем, что

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\overline{\zeta' (s)}}{1 - \varepsilon (s)\, t}, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{i}{2}\overline{\zeta' (s)}. \tag{29}$$

Новый способ задания области D во многом аналогичен прежнему. Роль отрезков θ_x играют отрезки ν_s, а роль четырехугольников $D_{\alpha,\beta}$ — четырехугольники $D^*_{\alpha,\beta}$. Утверждения, аналогичные леммам 1 и 2, доказываются почти дословно так же. Из них совершенно такими же рассуждениями выводится, что

$$\operatorname{Re} W (z) - \operatorname{Re} W (z') = \pi m \left(D^*_{\alpha',\alpha}\right) + o (1) \tag{30}$$

при

$$z \in \nu_\alpha, \quad z' \in \nu_{\alpha'}, \qquad \alpha > \alpha',\ \alpha' \to +\infty.$$

Таким образом, как и прежде, задача сводится к оценкам модуля четырехугольника — теперь $D^*_{\alpha,\beta}$.

Лемма 4. *Если выполнено условие* (25), *то для модуля четырехугольника* $D^*_{\alpha,\beta}$ *справедливы неравенства*

$$m \left(D^*_{\alpha,\beta}\right) \geqslant \int\limits_\alpha^\beta \frac{\varepsilon (s)\, ds}{\ln \dfrac{1 + \varepsilon (s)\, \nu_-(s)}{1 - \varepsilon (s)\, \nu_+(s)}} \tag{31}$$

и

$$m \left(D^*_{\alpha,\beta}\right) \leqslant \int\limits_\alpha^\beta \left\{\frac{1}{\nu (s)} + \varepsilon (s) \frac{\nu_+ (s) - \nu_- (s)}{2\nu (s)} \frac{\nu_-'^2 (s) + \nu_+'^2 (s)}{\nu (s)}\right\} ds. \tag{32}$$

Доказательство. Возьмем на отрезке (α, β) точки

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \beta.$$

Согласно теореме 3 § 5 имеем неравенство

$$m\left(D^*_{\alpha,\beta}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m\left(D^*_{\alpha_{k-1},\alpha_k}\right).$$

При малых значениях $s-s'$ четырехугольник $D^*_{s's}$ можно рассматривать как кольцевой сектор, где центр кольца совпадает с центром круга кривизны, а радиусы кольца равны

$$r_+ = \left|\frac{1}{\varepsilon(s)} - \nu_+(s)\right|, \quad r_- = \left|\frac{1}{\varepsilon(s)} + \nu_-(s)\right|.$$

Модуль кольцевого сектора легко вычисляется (см. начало § 2.5), и мы имеем

$$m\left(D^*_{s',s}\right) \sim \frac{(s-s')\,\varepsilon(s)}{\ln\dfrac{1+\varepsilon(s)\,\nu_-(s)}{1-\varepsilon(s)\,\nu_+(s)}}, \qquad s' \to s,\ s' < s.$$

Переходя к пределу при измельчении разбиения, мы получаем (31).

Чтобы получить оценку (32), рассмотрим функцию

$$\tau(z) = \frac{\nu_-(s(z)) + t(z)}{\nu(s(z))}, \qquad z \in D,$$

где $s(z)$ и $t(z)$ — функции, неявно определяемые формулой (26). Из формул (27) видно, что функция $\tau(z)$ отображает любую из областей $D^*_{\alpha,\beta}$ на отрезок $(0, 1)$, причем граничную кривую C^- она переводит в точку 0, а граничную кривую C^+ — в точку 1. Согласно лемме 2 § 5 имеем неравенство

$$m\left(D^*_{\alpha,\beta}\right) \leqslant 4 \iint\limits_{D^*_{\alpha,\beta}} \left|\frac{\partial\tau}{\partial z}\right|^2 dx\,dy. \tag{33}$$

Из формул (29) находим

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = -\frac{1}{2}\,\overline{\zeta'(s)}\left(\frac{i}{\nu(s)} + \frac{\nu'(s)\,t + \nu_-(s)\,\nu'_+(s) - \nu_+(s)\,\nu'_-(s)}{\nu^2(s)\,(1-\varepsilon(s)\,t)}\right)$$

и, принимая во внимание, что $|\zeta'(s)| = 1$, получаем

$$4\left|\frac{\partial\tau}{\partial z}\right|^2 \leqslant \frac{1}{\nu^2(s)} + \left[\nu'^2_+(s) + \nu'^2_-(s)\right]\frac{[t+\nu_-(s)]^2 + [t-\nu_+(s)]^2}{\nu^4(s)\,[1-\varepsilon(s)\,t]^2}.$$

Сделав в правой части неравенства (33) замену переменных интегрирования (x, y) на (s, t), мы получим, учитывая формулу (28) для якобиана этой замены, что

$$m(D^*_{\alpha,\beta}) - \int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\nu_-(s)}^{\nu_+(s)} \frac{1-\varepsilon(s)\,t}{\nu^2(s)}\,dt\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\nu_-(s)}^{\nu_+(s)} \left[\nu_+'^2(s) + \nu_-'^2(s)\right] \frac{[t+\nu_-(s)]^2 + [t-\nu_+(s)]^2}{\nu^4(s)\,[1-\varepsilon(s)\,t]}\,dt\,ds.$$

Отсюда, используя предположение (25), выводим, что

$$m(D^*_{\alpha,\beta}) - \int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\nu_-(s)}^{\nu_+(s)} \frac{1-\varepsilon(s)\,t}{\nu^2(s)}\,dt\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{\alpha}^{\beta}\int_{-\nu_-(s)}^{\nu_+(s)} \left[\nu_+'^2(s) + \nu_-'^2(s)\right] \frac{[t+\nu_-(s)]^2 + [t-\nu_+(s)]^2}{\nu^4(s)}\,dt\,ds.$$

Выполнив интегрирование по t, придем к неравенству (32).

Теорема 2.6.6. *Если выполняется неравенство*

$$|\varepsilon(s)|\,\nu(s) \leqslant c < 1, \qquad s \geqslant 0, \tag{34}$$

и условия

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(s)\,\nu(s)\,ds < \infty, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\nu_+'^2(s) + \nu_-'^2(s)}{\nu(s)}\,ds < \infty, \tag{35}$$

то имеет место асимптотическая формула

$$\operatorname{Re} W(z) = \pi \int_0^{s} \frac{d\xi}{\nu(\xi)} - \frac{\pi}{2}\int_0^{s} [\nu_+(\xi) - \nu_-(\xi)]\,\frac{\varepsilon(\xi)}{\nu(\xi)}\,d\xi + \lambda + o(1),$$

где λ — некоторая постоянная. В этой формуле $s \to +\infty$, а $z \in \nu_s$, и она справедлива равномерно по $z \in \nu_s$.

Доказательство. В силу (34) справедливо равенство

$$\ln\frac{1+\varepsilon(s)\,\nu_-(s)}{1-\varepsilon(s)\,\nu_+(s)}=\varepsilon(s)\,\nu(s)+\frac{1}{2}\,\varepsilon^2(s)\,\nu(s)\,[\nu_+(s)-\nu_-(s)]+ + O(\varepsilon^3(s)\,\nu^3(s)).$$

Поэтому формула (31) при любых $0<\alpha<\beta$ дает нам

$$m(D^*_{\alpha,\beta})\geqslant\int_\alpha^\beta\frac{ds}{\nu(s)}-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\nu_+(s)-\nu_-(s)]\,\frac{\varepsilon(s)}{\nu(s)}\,ds+ + O\left(\int_\alpha^\beta\varepsilon^2(s)\,\nu(s)\,ds\right)$$

и при $\alpha<\beta$, $\alpha\to+\infty$, мы получаем согласно первому из условий (35), что

$$m(D^*_{\alpha,\beta})\geqslant\int_\alpha^\beta\frac{ds}{\nu(s)}-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\nu_+(s)-\nu_-(s)]\,\frac{\varepsilon(s)}{\nu(s)}\,ds+o(1).$$

С другой стороны, из формулы (32) и второго условия (35) мы получаем, что

$$m(D^*_{\alpha,\beta})\leqslant\int_\alpha^\beta\frac{ds}{\nu(s)}-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\nu_+(s)-\nu_-(s)]\,\frac{\varepsilon(s)}{\nu(s)}\,ds+o(1)$$

при тех же условиях на α и β. Следовательно,

$$m(D^*_{\alpha,\beta})=\int_\alpha^\beta\frac{ds}{\nu(s)}-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\nu_+(s)-\nu_-(s)]\,\frac{\varepsilon(s)}{\nu(s)}\,ds+o(1),$$

а в силу формулы (30)

$\operatorname{Re}W(z)-\operatorname{Re}W(z')=$

$$\pi=\int_\alpha^{\alpha'}\frac{ds}{\nu(s)}-\frac{\pi}{2}\int_\alpha^{\alpha'}[\nu_+(s)-\nu_-(s)]\,\frac{\varepsilon(s)}{\nu(s)}\,ds+o(1),$$

когда $z\in\gamma_\alpha$, $z'\in\gamma_{\alpha'}$, а $\alpha<\alpha'$ и $\alpha\to+\infty$. Поэтому функция

$$\operatorname{Re} W(z) - \pi \int_0^s \frac{d\xi}{\nu(\xi)} + \frac{\pi}{2} \int_0^s [\nu_+(\xi) - \nu_-(\xi)] \frac{\varepsilon(\xi)}{\nu(\xi)} d\xi, \quad z \in \nu_s,$$

имеет (согласно критерию Коши) предел при $s \to +\infty$. Обозначая этот предел через λ, мы приходим к утверждению теоремы.

С помощью теоремы 2.6.6 нетрудно получить асимптотические формулы для отображающей функции и в случае, когда область D задана первоначальным способом — через функции $\theta(x)$ и $\varphi(x)$. Для этого следует взять в качестве C^0 кривую $y=\varphi(x)$, записать ее уравнение в параметрическом виде с длиной дуги в качестве параметра и выразить все требуемые величины через функции $\varphi(x)$ и $\theta(x)$. Проводить все эти операции в общем виде не очень целесообразно, так как в явном виде эти величины не выражаются, а при замене их асимптотическими формулами имеется слишком много различных возможностей. В конкретных задачах подобный переход не представляет особого труда.

На протяжении всей главы мы делали много излишних предположений о гладкости тех или иных функций (или граничных кривых областей). Это делалось ради большей прозрачности изложения. Желающие познакомиться с более точными результатами могут найти их в более специальной литературе. По вопросам, относящимся к асимптотике конформных отображений, можно рекомендовать интересную и содержательную статью канадского математика С. Варшавского, имеющуюся в русском переводе (Сборник переводов «Математика», т. 2, № 4, 1958).

Заметим еще, что в некоторых отношениях теорема 2.6.6 налагает на область D даже более слабые ограничения, чем теорема 2.6.1. Скажем, в теореме 2.6.6 область D не обязана асимптотически подходить к некоторому лучу. Она может уходить в бесконечность даже по спирали с бесконечным числом витков. Было бы интересно (вероятно это не очень трудно) получить в условиях теоремы 2.6.6 асимптотические формулы для функций $W'(z)$ и $\operatorname{Im} W(z)$.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 2.6

1°. Пусть C^- и C^+ — две простые кривые, идущие из точки $z = 0$ в бесконечность, не пересекая друг друга и оставаясь в угле $|\arg z| < \lambda < \frac{\pi}{2}$. Область, лежащую в том же угле и ограниченную кривыми C^- и C^+, мы обозначим через D. При этих условиях пересечение области D с прямой $\operatorname{Re} z = x$ при любом $x > 0$ непусто. В этом пересечении содержится конечное число отрезков, у которых один конец лежит на C^-, а второй — на C^+. Мы обозначим через θ_x тот из них, концы которого расположены ближе всего к началу кривых C^- и C^+. Длину отрезка θ_x обозначим через $\theta(x)$. Через $W(z)$ мы обозначим функцию, конформно отображающую область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ таким образом, что

$$\operatorname{Re} W(z) \to -\infty, \qquad \to 0,\ z \in D$$

$$\operatorname{Re} W(z) \to +\infty, \qquad z \to \infty,\ z \in D.$$

Доказать, что

$$\operatorname{Re} W(x+iy) \geqslant \pi \int_a^x \frac{ds}{\theta(s)} + O(1), \qquad x \to +\infty,\ x+iy \in D.$$

2°. Пусть область D описывается неравенствами

$$x > a, \quad |y - \varphi(x)| < \frac{1}{2}\theta(x),$$

а функции $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to+\infty} \theta'(x) = 0; \quad |\theta(x)| \leqslant c < \infty;$$

$$\int_a^\infty (|\varphi''(x)| + |\theta''(x)|)\,dx < \infty, \quad \int_a^\infty \frac{\theta'^2(x)}{\theta(x)}\,dx < \infty.$$

Обозначим через $W(z)$ функцию, конформно отображающую область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ таким образом, что $\operatorname{Re} W(z) \to +\infty$ при $z \to \infty$, $z \in D$.

Доказать, что тогда имеет место асимптотическая формула

$$W(x+iy) = \pi \int_a^x \frac{1+\varphi^{2\prime}(s)}{\theta(s)}\,ds + i\pi\frac{y-\varphi(x)}{\theta(x)} + \lambda + o(1),$$

где λ — некоторая действительная постоянная. Формула справедлива при $x \to +\infty$, $x + iy \in D$, равномерно по y.

Глава III

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

§ 3.1. Шкала роста целых функций

Как известно, целыми функциями называются аналитические функции, не имеющие особых точек в конечной части плоскости. Они образуют сравнительно узкий, но важный подкласс всего класса аналитических функций. Однако для исследования большинства вопросов и этот подкласс слишком широк: слишком мало содержательных закономерностей может быть сформулировано для всего класса целых функций. Обычно при формулировке результатов приходится выделять более узкие классы. В большинстве вопросов теории целых функций естественно производить деление целых функций на классы по их росту. Это деление может быть более тонким или более грубым в зависимости от наших надобностей.

Простейшей классификацией целых функций по росту является следующая.

Порядком целой функции $F(z)$ мы назовем число

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln r}, \text{ где } M_F(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Если порядок целой функции равен ρ, то это означает, грубо говоря, что $F(z)$ растет, как e^{r^ρ}. Все целые функции, растущие медленнее, чем e^{r^α} при любом $\alpha > 0$, мы называем целыми функциями *нулевого порядка*, а все функции, растущие быстрее e^{r^α} при любом $\alpha > 0$,— функциями *бесконечного порядка*. Такая классификация явно приспособлена для изучения целых функций конечного положительного порядка.

Часто такого деления бывает недостаточно.

Пусть функция $h(r)$, определенная для всех достаточно больших положительных значений r, положительна, монотонно возрастает и логарифмически выпукла. Если

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_F(r)}{h(r)}=\sigma<\infty,$$

то мы будем говорить, что целая функция $F(z)$ имеет *рост* $h(r)$. Если при этом $\sigma>0$, то мы будем говорить, что функция $F(z)$ имеет *точный рост* равный $h(r)$. (Этот термин не является общепринятым; чаще используется функция $\rho(r)=\frac{\ln h(r)}{\ln r}$, которая называется *уточненным порядком.*)

Введенное понятие роста целой функции позволяет провести более тонкую градацию в делении целых функций на классы, чем понятие порядка. Эта градация будет более тонкой не только для функций нулевого и бесконечного порядка, но и для любого конечного порядка. Например, целые функции с точным ростом $h(r)=r$ и $h(r)=r\ln r$ имеют один и тот же порядок $\rho=1$.

Условие логарифмической выпуклости функции $h(r)$, означающее, что $rh'(r)$ монотонно стремится к $+\infty$, накладывает некоторое ограничение на скорость стремления функции $h(r)$ к бесконечности. Действительно, из логарифмической выпуклости функции $h(r)$ нетрудно вывести, что $h(r)/\ln r\to+\infty$. Это ограничение не сужает класса целых функций, если мы исключим из рассмотрения многочлены. Это видно из хорошо известной теоремы Лиувилля:

Теорема 3.1.1. *Пусть $r_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$. Если*

$$M_F(r_k)=O\left(r_k^\alpha\right),\qquad k\to+\infty,$$

то целая функция $F(z)$ является многочленом степени не выше α.

Несмотря на общеизвестность теоремы Лиувилля мы сейчас ее докажем. Нам будет удобнее доказать даже более сильную теорему, которая понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 3.1.2. *Пусть $\{r_k\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности. Если*

$$\operatorname{Re}F\left(r_ke^{i\varphi}\right)=O\left(r_k^\alpha\right),\qquad k\to+\infty,$$

при всех действительных φ равномерно по φ, то $F(z)$ — многочлен степени, не превосходящей α.

Доказательство. *Пусть*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Сначала мы установим одну формулу, позволяющую восстановить $F(z)$ по ее действительной части $u(z)$. Так как

$$u(z) = \operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{2}\left(F(z) + \overline{F(z)}\right),$$

то мы можем написать формулу

$$u\left(Re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n e^{in\theta} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n R^n e^{-in\theta}.$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z} = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n R^n e^{in\theta}, \qquad |z| < R.$$

Перемножая эти два ряда и почленно интегрируя их произведение по θ, от $-\pi$ до π, мы убеждаемся в справедливости так называемой *формулы Шварца*

$$F(z) = i \operatorname{Im} F(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\left(Re^{i\theta}\right)\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta, \quad |z| < R.$$

Дифференцируя эту формулу p раз, получаем

$$F^{(p)}(z) = R\frac{p!}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\left(Re^{i\theta}\right)\frac{e^{i\theta}d\theta}{(Re^{i\theta}-z)^{p+1}}.$$

Положим теперь $R = r_k$, $p = [\alpha] + 1$ и устремим k к бесконечности. Из условия $\operatorname{Re} F\left(r_k e^{i\varphi}\right) = O\left(r_k^{\alpha}\right)$ легко получаем $F^{(p)}(z) \equiv 0$. Следовательно, $F(z)$ — многочлен степени не выше $p - 1$. Теорема доказана.

Наиболее часто встречается случай, когда точный рост является степенью r, т. е. $h(r) = r^{\rho}$. Функции точного роста r^ρ называются функциями *порядка* ρ *и конечного типа*. Если к тому же $\rho=1$, то их называют функциями *экспоненциального типа* или *целыми функциями конечной степени*.

Функции экспоненциального типа встречаются в приложениях чаще всего.

Рассмотрим знакомые нам целые функции с точки зрения их роста. Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ являются функциями экспоненциального типа, так как для них $M_F(r)$ равно соответственно e^r, $\frac{1}{2}\left(e^r+e^{-r}\right)$, $\frac{1}{2}\left(e^r-e^{-r}\right)$.

Функция Бесселя $J_n(z)$ порядка n при целом $n \geqslant 0$ тоже является целой функцией экспоненциального типа. В этом можно убедиться с помощью формулы (6) § 1.6, которая при фиксированном n справедлива для всех комплексных z.

Функции $\frac{1}{\Gamma(z)}$ и $(z-1)\zeta(z)$ тоже целые функции первого порядка, но они уже не являются функциями экспоненциального типа. Из оценок, полученных в § 1.4 (примеры 3 и 4), следует, что точный рост этих функций равен $r\ln r$.

Функция

$$E_\rho(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}$$

согласно оценкам, полученным в § 1.5 (пример 4), имеет порядок ρ и тип 1.

Методом § 3.2 можно строить примеры функций, имеющих точным ростом очень широкий класс функций $h(r)$.

Поговорим, кстати, о функциях, которые разумно выбирать в качестве $h(r)$. Ясно, конечно, что поскольку имеет смысл определять точный рост лишь с точностью до асимптотического равенства при $r\to\infty$, то мы можем считать функции $h(r)$ сколько угодно раз дифференцируемыми. Но имеются разумные основания требовать от функций $h(r)$ и гораздо большего. Дело в том, что функции $h(r)$ дают нам шкалу роста, и естественно выбирать в качестве шкалы наиболее простые и правильные функции, скажем

$$r^{\alpha}(\ln r)^{\beta},\ e^{r^{\alpha}}r^{\alpha_1}(\ln r)^{\alpha_2}(\ln\ln r)^{\alpha_3},\ e^{e^{(\ln r)^{\alpha}(\ln\ln r)^{\beta}}},\ldots$$

Практически так и поступают. За исключением примеров, придуманных специально для этой цели, мы никогда не встречаем функций, для которых в качестве точного роста нельзя взять комбинацию показательных функций, степеней и логарифмов. Однако с теоретической точки зрения такой подход к выбору $h(r)$ доставил бы много неудобств. Каждый раз пришлось бы выяснять, выражаются ли получающиеся интегралы или обратные функции асимптотически в том же виде. Поэтому часто бывает проще обходиться теми минимальными требованиями, которые мы наложили выше. Тем не менее повышение требований на $h(r)$ может сильно упростить доказательство (или даже просто сделать его возможным). В таких случаях будем накладывать ограничения без всяких колебаний.

Наиболее часто мы будем предполагать, что $h(r) = r^{\rho}l(r)$, где $l(r)$ — так называемая *аналитическая медленно растущая функция*, т. е. такая функция, которая регулярна и непрерывна в области $|z| \geqslant a$, $|\arg z| \leqslant \pi$, и для которой

$$\lim_{z\to\infty} z\frac{l'(z)}{l(z)} = 0.$$

(Значения $l(z)$ на двух сторонах разреза $(-\infty, -a)$ не обязаны совпадать.)

Заметим, что если $l(z)$ — аналитическая медленно растущая функция, то такова и функция $\frac{1}{l(z)}$, так как

$$z\frac{\left(\frac{1}{l(z)}\right)'}{\left(\frac{1}{l(z)}\right)} = -z\frac{l'(z)}{l(z)}$$

(медленно растущие функции не обязаны возрастать, они могут быть и убывающими, и колеблющимися).

Примерами аналитических медленно растущих функций могут служить

$$(\ln r)^{\alpha}, \quad -\infty < \alpha < \infty; \quad (\ln\ln r)^{\alpha}, \quad -\infty < \alpha < \infty;$$
$$e^{(\ln r)^{\alpha}(\ln\ln r)^{\beta}}, \quad \alpha < 1.$$

Докажем две леммы о медленно растущих функциях, на которые мы часто будем ссылаться в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $l(z)$ — аналитическая медленно растущая функция. При любом $c \neq 0$*

$$l(cz) \sim l(z), \qquad z \to \infty, \ |\arg z| \leqslant \pi - |\arg c|.$$

Доказательство. По определению медленно растущей функции

$$\frac{l'(z)}{l(z)} = o\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z \to \infty, \ |\arg z| \leqslant \pi.$$

Поэтому

$$\ln\frac{l(cz)}{l(z)} = \int\limits_{z}^{cz} \frac{l'(t)}{l(t)}\,dt = \int\limits_{z}^{cz} o\left(\frac{1}{t}\right)dt = o(1),$$

так как контур интегрирования в последнем интеграле можно взять отстоящим от точки $z = 0$ не меньше чем на $C_1|z|$, а длиной не больше $C_2|z|$. Следовательно, $\frac{l(cz)}{l(z)} = e^{o(1)}$, и лемма доказана.

Следствие. *Если $h(r) = r^{\rho}l(r)$, то при любом $c \neq 0$*

$$h(cr) \sim c^{\rho}h(r), \qquad r \to +\infty.$$

Замечание. Теми же средствами легко показать, что при $\frac{a}{|z|} \leqslant u < \infty$ и при достаточно больших z

$$\left|\frac{l(uz)}{l(z)}\right| \leqslant M_{\varepsilon}e^{\varepsilon|\ln u|},$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Лемма 2. *Пусть $l(r)$ — аналитическая медленно растущая функция и $\varphi(u)$ — абсолютно интегрируемая на отрезке $(0, \infty)$ функция, регулярная в области $|u| \leqslant \eta$, $|\arg u| \leqslant \pi$, и удовлетворяющая условиям* $(\gamma > 0)$

$$|\varphi(u)| = O\left(|u|^{\gamma-1}\right), \qquad u \to 0, \ |\arg u| \leqslant \pi,$$
$$|\varphi(u)| = O\left(u^{-\gamma-1}\right), \qquad u \to +\infty.$$

Тогда

$$\int_{\frac{a}{z}}^{+\infty} \frac{l(uz)}{l(z)} \varphi(u)\,du = \int_0^{\infty} \varphi(u)\,du + o(1), \quad z\to\infty,\ |\arg z| \leqslant \pi.$$

Доказательство. Возьмем какие-либо $\alpha > 0$ и и $A > \alpha$ и разобьем первый интеграл на четыре части: от $\frac{a}{z}$ до $\frac{a}{|z|}$ по окружности $|u| = \frac{a}{|z|}$, от $\frac{a}{|z|}$ до α, от α до A и от A до ∞. Эти интегралы обозначим соответственно через I_0, I_1, I_2, I_3. Так как $l(z)$ и $\frac{1}{l(z)}$ растут медленнее любой степени, имеем $I_0 = O(|z|^{-\gamma}[l(z)]^{-1}) = o(1)$. Для I_2 (согласно лемме 1) можем написать

$$I_2 = \int_\alpha^A \varphi(u)\,du + o(1).$$

Для оценки I_1 и I_3 возьмем $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$ и воспользуемся замечанием к лемме 1. Это даст

$$|I_1| + |I_3| \leqslant M\left(\alpha^{\frac{\gamma}{2}} + A^{-\frac{\gamma}{2}}\right).$$

Так как α произвольно мало, а A произвольно велико, то мы получаем утверждение леммы.

Деление целых функций на классы только по их росту не единственная возможность.

В теории обобщенных функций получили широкое распространение классы целых функций совершенно другого рода.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две положительные на интервале $(0, \infty)$ выпуклые книзу (т. е. $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$, монотонно возрастая, стремятся к $+\infty$ при $x \to +\infty$) функции. Мы будем говорить, что целая функция $F(z)$ принадлежит классу $W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$, если при каких-либо положительных a, b, M

$$\ln|F(x+iy)| \leqslant -\varphi(a|x|) + \psi(b|y|) + M. \tag{1}$$

Полезно иметь в виду, что если $F(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\ln |F(x+iy)| \leqslant -C_1\varphi(a|x|) + C_2\psi(b|y|) + M, \quad c_1, c_2 > 0, \tag{2}$$

то она удовлетворяет и неравенству (1) (конечно, с некоторыми другими a, b и M). Действительно, при $C<1$ имеем $C\psi(x) < \psi(x)$, так как $\psi(x) \geqslant 0$, а при $C>1$ имеем

$$\psi(Cx) = \psi(CA) + \int_{CA}^{Cx} \psi'(t)\,dt =$$

$$= \psi(CA) + C\int_A^x \psi'(Cu)\,du \geqslant \psi(CA) + C\int_A^x \psi'(u)\,du =$$

$$= \psi(CA) - C\psi(A) + C\psi(x) = M_1 + C\psi(x)$$

в силу монотонного возрастания $\psi'(x)$. Аналогичные рассуждения справедливы и для $\varphi(x)$.

Наиболее часто рассматриваются простейшие классы W_p^q, отвечающие случаю $\varphi(x) = x^p$, $p>1$, $\psi(x) = x^q$, $q>1$.

Классы $W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$ устроены более сложно, чем классы функций данного точного роста. Так, например, уже вопрос о том, содержит ли класс $W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$ хотя бы одну целую функцию, отличную от тождественного нуля, является не вполне тривиальным. Об этом мы будем говорить в § 3.5.

К функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в полной мере относится все, что мы говорили о функциях $h(r)$.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 3.1

1°. Пусть $F(z)$ — целая функция конечного порядка. Показать, что $F(z)$ и $F'(z)$ имеют один и тот же точный порядок и тип.

2°. Показать, что если целая функция конечного порядка не имеет нулей, то она равна $e^{p(z)}$, где $p(z)$ — многочлен.

3°. Пусть $\lambda(u) = (\ln u)^\alpha l(\ln u)$, $\alpha > 0$. Показать, что

$$\int_a^\infty \frac{\lambda(u)\,du}{u(u+z)} \sim \frac{\ln z}{z}\,\frac{\lambda(z)}{\alpha+1}, \quad z\to\infty, \quad |\arg z| \leqslant \pi.$$

4°. Пусть $\lambda(z) = (\ln z)^{\alpha} l(\ln z)$, $\alpha > 0$. Показать, что

$$\operatorname{Im} \lambda(iy) \sim \frac{\pi}{2} y\lambda'(y), \qquad y \to \pm\infty.$$

5°. Показать, что умножение на степень и дифференцирование не выводят из класса $W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$.

§ 3.2. Коэффициенты ряда Тейлора

Поскольку целые функции часто задаются степенными рядами, бывает полезно уметь судить о росте целой функции по ее коэффициентам. Вопрос о связи роста целой функции и убывания ее коэффициентов изучался многими авторами с самых различных точек зрения. Мы приведем несколько результатов в двух основных направлениях.

Результаты первого направления приспособлены, главным образом, для чисто практических целей, т. е. для возможно более точного определения роста целой функции с довольно правильным поведением коэффициентов. Содержание таких результатов состоит в следующем.

Дана некоторая очень правильная функция, скажем $e^{h(r)}$, являющаяся мажорантой для $|F(z)|$. Мы находим столь же правильную мажоранту для $|a_n|$, где

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Второе направление преследует другие, гораздо более отвлеченные цели. В результатах этого направления ищется связь не между мажорантами $|F(z)|$ и $|a_n|$, а между самими этими величинами. Здесь основная задача в том, чтобы выяснить соотношения, остающиеся при любой неправильности поведения a_n.

Методы исследования, употребляемые в обоих направлениях, элементарны. Они основаны на следующих двух неравенствах:

$$M_F(r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n, \tag{1}$$

дающем оценку $M_F(r)$ сверху, и

$$M_F(r) \geqslant \max_{n \geqslant 0} |a_n| r^n, \tag{2}$$

дающем оценку $M_F(r)$ снизу.

Неравенство (1) очевидно, а неравенство (2) получается из формулы Коши для коэффициентов степенного ряда

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$$

непосредственной оценкой (мы уже говорили об этом в начале § 1.3).

Докажем сначала несколько результатов первого направления.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Если*

$$\varlimsup_{r \to \infty} M_F(r) e^{-\sigma r^\rho} = M, \tag{3}$$

то

$$\varlimsup_{n \to \infty} |a_n| \left(\frac{n}{\sigma \rho e}\right)^{\frac{n}{\rho}} \leqslant M, \tag{4}$$

$$\varlimsup_{n \to \infty} |a_n| \left(\frac{n}{\sigma \rho e}\right)^{\frac{n}{\rho}} \sqrt{2\pi\rho n} \geqslant M. \tag{5}$$

Доказательство. Из неравенства (2) имеем $|a_n| \leqslant \min\limits_{r>0} r^{-n} M_F(r)$. В частности, при $r = \left(\frac{n}{\sigma\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ оно дает нам

$$|a_n| \leqslant \left(\frac{n}{\sigma\rho}\right)^{-\frac{n}{\rho}} M_F\left(\left(\frac{n}{\sigma\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right).$$

Но согласно условию (3)

$$M_F\left(\left(\frac{n}{\sigma\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right) \leqslant (M + o(1)) e^{\frac{n}{\rho}}, \qquad n \to \infty,$$

поэтому

$$|a_n| \leqslant (M + o(1)) \left(\frac{n}{\sigma\rho e}\right)^{-\frac{n}{\rho}}, \qquad n \to \infty,$$

откуда и получаем неравенство (4).

Неравенство (5) докажем от противного. Допустим, что оно неверно. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и при всех $n > n_0$ мы имеем неравенство

$$|a_n| \leqslant \frac{M - \varepsilon_0}{\left(\frac{n}{\sigma\rho e}\right)^{\frac{n}{\rho}} \sqrt{2\pi\rho n}}.$$

Согласно формуле Стирлинга для гамма-функции (см. пример 1 § 1.2) знаменатель этой дроби асимптотически равен $\rho\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)\sigma^{-\frac{n}{\rho}}$. Поэтому мы можем написать

$$|a_n| \leqslant \frac{M - \varepsilon_1}{\rho\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)} \sigma^{\frac{n}{\rho}}, \qquad n \geqslant n_1.$$

С помощью неравенства (1) получаем

$$M_F(r) \leqslant \frac{M - \varepsilon_1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{\frac{n}{\rho}} r^n}{\rho\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)} + O(r^{n_1}) =$$

$$= \frac{M - \varepsilon_1}{\rho} E_\rho\left(r\sigma^{\frac{1}{\rho}}\right) + O(r^{n_1}).$$

Но функция $E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}$ исследовалась нами в § 1.5 (пример 4), где мы выяснили, что $E_\rho(r) \sim \rho e^{r^\rho}$. Следовательно, полученное неравенство дает нам

$$M_F(r) \leqslant (M - \varepsilon_2) e^{\sigma r^\rho} (1 + o(1)), \qquad r \to \infty,$$

т. е.

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} M_F(r)\, e^{-\sigma r^\rho} \leqslant M - \varepsilon_2,$$

а это противоречит условию (3). Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (5). Теорема доказана.

Неравенства (4) и (5) в формулировке теоремы уточнить нельзя. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть две функции:

$$F_1(z) = e^z, \quad F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}\left(\frac{e}{n!}\right)^{n!}.$$

Для обеих функций справедливо равенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} M_F(r)\, e^{-r} = 1.$$

Как легко проверить, для коэффициентов функции $F_1(z)$ имеет место знак равенства в (5), а для коэффициентов функции $F_2(z)$ — знак равенства в (4).

Иногда бывает удобнее следующая форма теоремы 3.2.1.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| \left(\frac{n}{\sigma\rho e}\right)^{\frac{n}{\rho}} \sqrt{2\pi\rho n} = M,$$

то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} M_F(r)\, e^{-\sigma r^\rho} \leqslant M$$

и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} M_F(r)\, e^{-\sigma r^\rho} \rho \sqrt{2\pi\sigma r^\rho} \geqslant M.$$

Эта теорема доказывается совершенно теми же рассуждениями, что и предыдущая.

При доказательстве теоремы 3.2.1 решающую роль сыграло то, что для функции $E_\rho(z)$ мы знали и асимптотическое поведение $E_\rho(r) = \max\limits_{|z|=r} |E_\rho(z)|$ при $r \to \infty$ и асимптотическое поведение ее коэффициентов при $n \to \infty$. Используя функции, которые строятся в § 4.4, мы смогли бы доказать результаты, аналогичные теоремам 3.2.1 и 3.2.2, с заменой σr^ρ на любую $h(r)$. Результат, аналогичный теореме 3.2.1, выглядел бы так.

Из условия

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} M_F(r)\, e^{-h(r)} = M$$

следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| [r(n)]^n e^{-h(r(n))} \leqslant M$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| [r(n)]^n e^{-h(r(n))} \sqrt{2\pi \{n + [r(n)]^2 h''(r(n))\}} \geqslant M,$$

где $r(n)$ — функция, обратная к $rh'(r)$.

Иногда бывает удобнее пользоваться следующей теоремой.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Если*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\rho} \ln M_F(r) = \sigma, \tag{6}$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{7}$$

и, наоборот, из (7) *следует* (6).

Доказательство. Нам достаточно показать, что из (6) следует (7) с заменой знака равенства на знак $\leqslant$ и что из (7) следует (6) также с заменой знака равенства на знак $\leqslant$.

Если (6) выполнено, то при любом $\varepsilon > 0$ и при всех r (за счет выбора достаточно большого M_ε)

$$M_F(r) \leqslant M_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon) r^\rho},$$

и теорема 2.2.1 дает нам

$$|a_n| \leqslant M_\varepsilon n^{-\frac{n}{\rho}} \{(\sigma + \varepsilon) e\rho\}^{\frac{n}{\rho}}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то отсюда следует

$$\varlimsup_{n \to \infty} n^{\frac{1}{\rho}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

С другой стороны, если выполнено (7), то при любом $\varepsilon > 0$ и при всех n (опять за счет выбора M_ε)

$$|a_n| \leqslant M_\varepsilon \sqrt{2\pi\rho n} \left(\frac{(\sigma + \varepsilon) e\rho}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}},$$

и теорема 3.2.2 дает нам

$$\varlimsup_{r \to \infty} M_F(r) e^{-(\sigma+\varepsilon) r^\rho} \leqslant M_\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то отсюда следует

$$\varlimsup_{r \to \infty} r^{-\rho} \ln M_F(r) \leqslant \sigma.$$

Тем самым теорема доказана.

Используя функции, построенные в § 4.4, мы могли бы установить и теоремы, аналогичные теореме 3.3.3, однако нетрудно убедиться, что результат может быть похожим лишь для функций конечного порядка. Действительно, при $\rho \to 0$ или при $\rho \to \infty$ величина $(\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}$ перестает зависеть от σ разумным образом.

Перейдем к результатам второго направления. Основной отличительной чертой этих результатов является введение функции

$$\mu_F(r) = \max_{n \geqslant 0} |a_n| r^n,$$

дающей величину максимального члена ряда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ на окружности $|z| = r$. Функция $\mu_F(r)$ элементарно связана с последовательностью $|a_n|$ и в то же время по своим свойствам близка к функции $M_F(r)$. Именно связь между $\mu_F(r)$ и $M_F(r)$ является содержанием теорем второго направления. Докажем простейшую теорему такого рода.

Теорема 3.2.4. *Для целой функции $F(z)$ конечного порядка справедливо соотношение*

$$\ln \mu_F(r) \sim \ln M_F(r). \tag{8}$$

Доказательство. Возьмем число γ большее, чем порядок $F(z)$. Тогда $M_F(r) \leqslant Me^{r^\gamma}$ и согласно теореме 3.2.1 $|a_n| \leqslant M\left(\frac{\gamma e}{n}\right)^{\frac{n}{\gamma}}$. Положим $n(r) = \gamma e(2r)^\gamma$. Тогда

$$\sum_{n>n(r)} |a_n| r^n \leqslant M \sum_{n>n(r)} \left(\frac{\gamma e}{n}\right)^{\frac{n}{\gamma}} r^n \leqslant M \sum_{n>n(r)} 2^{-n} \leqslant M$$

и, следовательно,

$$M_F(r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant M + \sum_{n\leqslant n(r)} |a_n| r^n \leqslant$$
$$\leqslant M + (n(r)+1)\mu_F(r).$$

С другой стороны, неравенство (2) дает нам $M_F(r) \geqslant \mu_F(r)$, так что

$$\ln \mu_F(r) \leqslant \ln M_F(r) \leqslant \ln \mu_F(r) + O(\ln r).$$

Но если $F(z)$ не многочлен, то по теореме Лиувилля (теорема 3.1.1) имеем $\ln r = o(\ln M_F(r))$. Значит, если $F(z)$ не многочлен, то соотношение (8) справедливо. Так как для многочлена оно и подавно справедливо, то теорема доказана.

Из доказательства видно, что если соотношение (8) и нарушается для данной функции бесконечного порядка, то оно нарушается для тех r, для которых и $\mu_F(r)$ и $M_F(r)$ малы по сравнению со средним уровнем их роста.

В связи с теоремами второго направления естественно возникает задача об оценке $|a_n|$ по $\mu_F(r)$. Для обсуждения этой задачи мы введем еще одно полезное понятие.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена для достаточно больших x и $\frac{\varphi(x)}{x} \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Функцию

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \max_{x>0}(x\xi - \varphi(x))$$

мы назовем *двойственной по Юнгу* с функцией $\varphi(x)$.

Лемма 1. *Функция $\tilde{\varphi}(\xi)$ выпукла книзу.*

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и любой отрезок $(0, A)$ можно разбить на конечное число участков монотонности $\varphi'(x)$. Мы можем написать

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \xi x(\xi) - \varphi(x(\xi)), \tag{9}$$

где $x(\xi)$ — некоторый корень уравнения $\varphi'(x) = \xi$. Из геометрических соображений ясно, что функция $x(\xi)$ неубывающая и что $x(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$. Действительно, по определению $\tilde{\varphi}(\xi)$ прямая $y - \varphi(x(\xi)) = \xi(x - x(\xi))$ лежит ниже кривой $y = \varphi(x)$. Поэтому прямая, проходящая через точку $(x(\xi), \varphi(x(\xi)))$, с угловым коэффициентом $\xi_1 > \xi$, может пересекать кривую $y = \varphi(x)$ лишь при $x > x(\xi)$. Это тем более верно относительно прямой $y - \varphi(x(\xi_1)) = \xi_1(x - x(\xi_1))$, лежащей, по определению $\tilde{\varphi}(\xi_1)$, еще ниже. Значит, $x(\xi_1) > x(\xi)$, а стремление $x(\xi)$ к $+\infty$ следует из того, что в противном случае кривая $y = \varphi(x)$ лежала бы слева от некоторой вертикальной прямой.

Функция $x(\xi)$, вообще говоря, разрывна, но из предположения конечности числа участков монотонности $\varphi'(x)$ вытекает, что число разрывов $x(\xi)$ тоже конечно (на любом конечном интервале). Из тех же геометрических рассмотрений видно, что если $x(\xi)$ непрерывна на интервале (ξ_1, ξ_2), то $\varphi'(x)$ монотонно возрастает на интервале $(x(\xi_1), x(\xi_2))$.

Возьмем ξ и $\xi + h$ на одном интервале непрерывности $x(\xi)$. Тогда из (9) получаем

$$\tilde{\varphi}(\xi+h) - \tilde{\varphi}(\xi) = hx(\xi+h) + (\xi - \varphi'(x_1))(x(\xi+h) - x(\xi)),$$

где $x(\xi) \leqslant x_1 \leqslant x(\xi+h)$. Но $x(\xi)$ монотонно возрастает на интервале $(\xi, \xi+h)$, так что

$$x_1 = x(\xi+\theta h), \quad \varphi'(x_1) = \xi+\theta h \quad (0<\theta<1).$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}(\xi)$ дифференцируема на участках непрерывности $x(\xi)$, а в точках разрыва $x(\xi)$ имеет правую и левую производные, т. е. $\tilde{\varphi}(\xi)$ абсолютно непрерывна и $\tilde{\varphi}'(\xi)=x(\xi)$ почти всюду. Так как функция $x(\xi)$ неубывающая и $x(\xi)\to+\infty$ при $\xi\to+\infty$, то $\tilde{\varphi}(\xi)$ выпукла книзу, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Функция* $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ *совпадает с функцией* $\varphi^*(x)$ — *наибольшей выпуклой функцией, не превосходящей* $\varphi(x)$. *В частности, если* $\varphi(x)$ *выпукла книзу, то* $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)\equiv\varphi(x)$.

Доказательство. Допустим сначала, что $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и $\varphi'(x)$ монотонно возрастает. Тогда

$$\tilde{\varphi}(\xi) = x(\xi)\xi - \varphi(x(\xi)),$$

где $x(\xi)$ — функция, обратная к $\varphi'(x)$, и

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(t) = t\xi(t) - \tilde{\varphi}(\xi(t)),$$

где $\xi(x)$ — функция, обратная к $\tilde{\varphi}'(\xi)$. Но $\tilde{\varphi}'(\xi)=x(\xi)$, так что $\xi(x)=\varphi'(x)$, и мы получаем

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(t) = t\varphi'(t) - \tilde{\varphi}(\varphi'(t)) = \\ = t\varphi'(t) - x(\varphi'(t))\varphi'(t) + \varphi(x(\varphi'(t))) = \varphi(t).$$

Чтобы доказать это же утверждение для произвольной выпуклой книзу функции $\varphi(x)$, заметим, что ее можно сколь угодно точно приблизить дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ с монотонными производными, причем так, чтобы

$$\varphi_1(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi_2(x).$$

Но из этих неравенств очевидно следует

$$\tilde{\varphi}_2(\xi)\leqslant\tilde{\varphi}(\xi)\leqslant\tilde{\varphi}_1(\xi),$$

и по той же причине $\tilde{\tilde{\varphi}}_1(x) \leqslant \tilde{\tilde{\varphi}}(x) \leqslant \tilde{\tilde{\varphi}}_2(x)$, т. е. $\varphi_1(x) \leqslant \tilde{\tilde{\varphi}}(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Так как $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ сколь угодно близки к $\varphi(x)$, то мы получаем $\tilde{\tilde{\varphi}}(x) \equiv \varphi(x)$ для любой выпуклой книзу $\varphi(x)$.

Если не требовать от $\varphi(x)$ выпуклости книзу, то можно написать

$$\tilde{\varphi}(\xi) \geqslant x\xi - \varphi(x) \qquad x>0,\ \xi>0,$$

откуда ясно, что

$$\varphi(x) \geqslant x\xi - \tilde{\varphi}(\xi) \geqslant \max_{\xi>0} \{x\xi - \tilde{\varphi}(\xi)\} = \tilde{\tilde{\varphi}}(x).$$

Таким образом, $\tilde{\tilde{\varphi}}(x) \leqslant \varphi(x)$ и функция $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ выпукла книзу (по лемме 1). Если $\varphi_1(x)$ — любая выпуклая книзу функция, не превосходящая $\varphi(x)$, то из неравенства $\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x)$ получаем $\tilde{\varphi}_1(\xi) \geqslant \tilde{\varphi}(\xi)$ и $\tilde{\tilde{\varphi}}_1(x) \leqslant \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, т. е. $\varphi_1(x) \leqslant \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$. Следовательно, $\tilde{\tilde{\varphi}}(x) \equiv \varphi^*(x)$, и лемма доказана.

Теорема 3.2.5. *Пусть $\psi(x)$ — некоторая выпуклая книзу функция, а $\tilde{\psi}(x)$ — функция, двойственная с ней по Юнгу. Тогда из соотношения*

$$\ln \mu_F(r) \leqslant \psi(\ln r) \tag{10}$$

следует

$$\ln |a_n| \leqslant -\tilde{\psi}(n) \tag{11}$$

и, наоборот, из (11) *следует* (10).

Доказательство. Из формулы

$$\ln \mu_F(r) = \max_{n\geqslant 0} \{\ln |a_n| + n \ln r\}$$

видно, что функция $\ln \mu_F(e^\xi)$ является двойственной по Юнгу с функцией $-\ln |a_{[x]}|$. Теперь утверждение теоремы сразу получается из леммы 2.

Все, что мы делали выше, применимо не только для оценки роста степенных рядов. С тем же успехом мы могли бы оценивать, например, рост интегралов. В качестве примера такого рода рассмотрим задачу о преобразовании Фурье функций из класса $W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$ (см. конец § 3.1).

Теорема 3.2.6. *Если* $F(z) \in W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$ *и* $\Phi(z)$ — *преобразование Фурье функции* $F(z)$, *то* $\Phi(z) \in W_{\widetilde{\psi}(x)}^{\widetilde{\varphi}(y)}$.

Доказательство. Имеем

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{izt} dt.$$

Но при фиксированном η

$$F(\xi + i\eta) = O\left(e^{-\varphi(a|\xi|)}\right), \qquad x \to \pm\infty,$$

так что интеграл для $\Phi(z)$ можно брать по любой прямой $\operatorname{Im} t = \eta$. Поэтому

$$\Phi(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi + i\eta)\, e^{i(x+iy)(\xi+i\eta)} d\xi,$$

и, выбирая η так, чтобы x и η были одного знака, получаем

$$|\Phi(x + iy)| \leqslant M e^{-|\eta||x| + \psi(b\eta)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(a|\xi|) + \xi|y|} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \min_{\eta} \left\{e^{-|\eta||x| + \psi(b|\eta|)}\right\} \max_{\xi} \left\{e^{|\xi||y| - \frac{1}{2}\varphi(a|\xi|)}\right\},$$

где

$$M_1 = M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(a|\xi|)} d\xi.$$

Значит, согласно определению $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\psi}(y)$

$$|\Phi(x + iy)| \leqslant M_1 \exp\left\{-\widetilde{\psi}\left(\frac{|x|}{b}\right) + 2\widetilde{\varphi}\left(\frac{2|y|}{a}\right)\right\}.$$

Но в § 3.1 мы видели, что функция, удовлетворяющая такому неравенству, удовлетворяет и неравенству

$$|\Phi(x+iy)| \leqslant M_2 \exp\{-\tilde{\psi}(a_1|x|)+\tilde{\varphi}(b_1|y|)\}.$$

Следовательно, $\Phi(z) \in W^{\tilde{\varphi}(y)}_{\tilde{\psi}(x)}$. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 3.2.

1°. Пусть $h(r) = r^{\rho}l(r)$, $0 < \rho < \infty$. Показать, что если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_F(r)}{h(r)} = \sigma,$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} k(n)|a_n|^{\frac{1}{n}} = (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}},$$

и наоборот. (Здесь $k(n)$ — функция, обратная к $h(r)$.)

2°. Пусть $F(z)$ — целая функция конечного порядка ρ. Показать, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует последовательность $r_k \to \infty$, для которой

$$M_F(r_k) < (\rho+\varepsilon)\sqrt{2\pi \ln \mu_F(r_k)}\,\mu_F(r_k).$$

3°. Пусть $F(z)$ — произвольная целая функция. Показать, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует последовательность $r_k \to \infty$, для которой

$$M_F(r_k) < \mu_F(r_k)\left[\ln \mu_F(r_k)\right]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

4°. Пусть $h(r) = (\ln r)^{\alpha} l(\ln r)$, где $\alpha > 1$, и $l(r)$ — медленно растущая функция. Показать, что если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_F(r)}{h(r)} = c,$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{-\ln|a_n|}{n\ln r(n)} = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha c)^{-\frac{1}{\alpha-1}},$$

и наоборот. (Здесь $r(n)$ — функция, обратная к $rh'(r)$.)

5°. Пусть целая функция $F(z)$ принадлежит какому-либо классу W^{φ}_{p}. Положим

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ixz} dx$$

и введем обозначения:

$$M_F^W(y) = \max_{|\operatorname{Im} z| \leqslant y} |F(z)|, \qquad \mu_F^W(y) = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)|\, e^{|x| y}.$$

Показать, что

$$\ln \mu_F^W(y) \sim \ln M_F^W(y), \qquad y \to +\infty.$$

6°. В условиях задачи 5° показать, что если

$$\varlimsup_{y \to \infty} y^{-\rho} \ln M_F^W(y) = \sigma,$$

то

$$\varlimsup_{x \to \pm\infty} \frac{\ln |f(x)|}{x^{\frac{\rho}{\rho - 1}}} = \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)(\sigma\rho)^{-\frac{1}{\rho - 1}}.$$

§ 3.3. Оценка канонических произведений

Распределение нулей является одним из наиболее тонких вопросов теории целых функций. Рост целой функции зависит не только от числа ее нулей, но и от их взаимного расположения. Имеются некоторые довольно простые, хотя и весьма грубые закономерности, связывающие рост функции с числом ее нулей. Все эти закономерности касаются главным образом функций конечного порядка. Для них, как мы покажем впоследствии, имеется представление вида

$$f(z) = z^m e^{P(z)} F(z),$$

где $P(z)$ — многочлен, а $F(z)$ — так называемое каноническое произведение.

Каноническим произведением мы называем функцию вида

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left\{\frac{z}{z_n} + \frac{z^2}{2z_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{p z_n^p}\right\},$$

где число p выбрано так, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-p-1}$ сходился, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-p}$ расходился. Это число p называется *родом* или *жанром* канонического произведения.

Ясно, что каноническое произведение обращается в нуль лишь в точках $z = z_n$. Поэтому мы часто будем говорить, что каноническое произведение построено по заданным нулям.

Начнем с оценки сверху функции $M_F(r)$ для канонических произведений при помощи функции $n_F(r)$, равной числу нулей $F(z)$ в круге $|z| < r$ (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность).

Теорема 3.3.1. *Для канонического произведения $F(z)$ рода нуль имеем*

$$\ln M_F(r) \leqslant \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn_F(t). \tag{1}$$

Доказательство. Заметим, что функция $\ln|1 + se^{i\varphi}|$ при любом положительном s достигает наибольшего значения при $\varphi = 0$. Поэтому

$$\ln M_F(r) = \max_{|z|=r} \sum_{n=1}^\infty \ln\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty \max_{\varphi_i} \ln\left|1 + \frac{r}{z_n} e^{i\varphi_n}\right| = \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn_F(t),$$

что и доказывает теорему.

Заметим, что последний интеграл сходится, если род канонического произведения равен нулю, так как

$$\ln\left(1 + \frac{r}{t}\right) \sim \frac{r}{t}$$

при больших t и

$$\int_0^\infty \frac{dn_F(t)}{t} = \sum_{n=1}^\infty |z_n|^{-1} < \infty$$

по определению рода.

Немногим сложнее обстоит дело с каноническими произведениями рода единица.

Теорема 3.3.2. *Для канонического произведения $F(z)$ рода единица*

$$\ln M_F(r) \leqslant \int_0^{\frac{r}{2}} \left\{ \ln\left(\frac{r}{t} - 1\right) + \frac{r}{t} \right\} dn_F(t) + \int_{\frac{r}{2}}^{\infty} \frac{r^2}{2t^2}\, dn_F(t). \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\ln\left|(1 + se^{i\varphi})\, e^{-se^{i\varphi}}\right| = \frac{1}{2}\ln(1 + 2s\cos\varphi + s^2) - s\cos\varphi,$$

$$s > 0.$$

Легко проверить, что при $s < 2$ максимум этого выражения, равный $\frac{1}{2}s^2$, достигается при φ, для которого $\cos\varphi = -\frac{s}{2}$, а при $s \geqslant 2$ максимум, равный $\ln(s-1)+s$, достигается при $\varphi = \pi$. Поэтому

$$\ln M_F(r) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_{|z|=r} \ln\left|\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}\right| =$$

$$= \int_0^{\infty} \max_{\varphi} \ln\left|\left(1 + \frac{r}{t} e^{i\varphi}\right) e^{-\frac{r}{t}e^{i\varphi}}\right| dn_F(t) =$$

$$= \int_0^{\frac{r}{2}} \left\{ \ln\left(\frac{r}{t} + 1\right) + \frac{r}{t} \right\} dn_F(t) + \int_{\frac{r}{2}}^{\infty} \frac{r^2}{2t^2}\, dn_F(t).$$

Последний интеграл опять-таки сходится согласно определению рода. Теорема доказана.

Для канонических произведений любого рода p тоже можно получить подобные оценки. Однако точность таких оценок не будет важна в дальнейшем. Поэтому для канонических произведений рода p мы докажем более простую и грубую оценку, Теорема 3.3.3. *Для канонического произведения $F(z)$ рода p*

$$\ln M_F(r) \leqslant Ar^p \int_0^r \frac{n_F(t)}{t^{p+1}}\,dt + Br^{p+1}\int_r^\infty \frac{n_F(t)}{t^{p+2}}\,dt + Cn_F(r), \qquad (3)$$

где A, B, C — некоторые постоянные, зависящие только от p.

Доказательство. Оценим максимум по φ выражения

$$Q_p(s, \varphi) = \ln\left|(1+se^{i\varphi})\exp\left\{-se^{i\varphi} + \frac{s^2e^{2i\varphi}}{2} - \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots + (-1)^p\frac{s^pe^{pi\varphi}}{p}\right\}\right|, \quad s > 0.$$

Если s мало, то этот максимум не превосходит C_1s^{p+1}, так как при малых s

$$Q_p(s, \varphi) \sim (-1)^{p+1}\frac{s^{p+1}}{p+1}\cos(p+1)\varphi.$$

Если s велико, то он не превосходит C_2s^p, так как при $p > 0$

$$Q_p(s, \varphi) \sim \frac{(-1)^p}{p}s^p\cos p\varphi.$$

Наконец, при конечных s этот максимум есть некоторая конечная величина. Поэтому мы можем написать

$$\max_\varphi Q_p(s, \varphi) \leqslant C_1' s^{p+1}, \quad s \leqslant 1; \qquad \max_\varphi Q_p(s, \varphi) \leqslant C_2' s^p, \quad s > 1;$$

откуда находим, как обычно,

$$\ln M_F(r) \leqslant C_1'\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^{p+1} dn_F(t) + C_2'\int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^p dn_F(t).$$

Интегрируя по частям, получаем (3).

Оценка $M_F(r)$ через $n_F(r)$ снизу может быть получена из несколько других соображений. В основе ее лежит так называемая *формула Иенсена*, которую мы сейчас докажем.

Лемма 1. *Пусть $F(z)$ — аналитическая функция, регулярная в круге $|z| \leqslant r$ и не обращающаяся в нуль на окружности $|z|=r$ и при $z=0$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \ln|F(0)| + \int_0^r \ln\frac{r}{t}\,dn_F(t). \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим нули $F(z)$ в круге $|z|<r$ через $z_1, \ldots, z_n$ (каждый нуль пишется столько раз, какова его кратность). Рассмотрим функцию

$$F_1(z) = F(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2 - z\bar{z}_k}{r(z-z_k)}.$$

Она регулярна в круге $|z| \leqslant r$ и не имеет там нулей. Следовательно, функция $\ln F_1(z)$ тоже регулярна в круге $|z| \leqslant r$, и по теореме Коши

$$\ln F_1(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\ln F_1(z)}{z}\,dz,$$

т. е.

$$\ln F_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln F_1(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

или, если отделить действительную часть,

$$\ln|F_1(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F_1(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Но $\left|\dfrac{r^2 - z\bar{z}_n}{r(z-z_n)}\right| = 1$ при $|z| = r$, так что

$$\ln|F_1(re^{i\varphi})| = \ln|F(re^{i\varphi})|.$$

Кроме того,

$$\ln|F_1(0)| = \ln|F(0)| + \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{r}{|z_k|} =$$

$$= \ln|F(0)| + \int_0^r \ln\frac{r}{t}\,dn_F(t),$$

и мы получаем формулу (4).

Теорема 3.3.4. *Для канонического произведения любого рода*

$$\ln M_F(r) \geqslant \int_0^r \frac{n_F(t)}{t}\,dt. \tag{5}$$

Доказательство. Применим формулу Иенсена. Так как $|F(re^{i\varphi})| \leqslant M_F(r)$, а $F(0) = 1$, то, интегрируя по частям интеграл в правой части равенства (4), получим формулу (5).

Имея оценки для $M_F(r)$ через $n_F(r)$ сверху и снизу, мы можем доказать несколько общих теорем.

Теорема 3.3.5. *Если $F(z)$ — каноническое произведение, то*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n_F(r)}{\ln r}.$$

(Иными словами, порядок канонического произведения определяется его нулями.)

Доказательство. Пусть

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n_F(r)}{\ln r} = \rho. \tag{6}$$

Оценим $M_F(r)$ сверху. Из (6) следует, что при любом $\varepsilon > 0$

$$n_F(r) \leqslant c_\varepsilon r^{\rho+\varepsilon}.$$

Если $\rho < p+1$, то при ε достаточно малом $\rho+\varepsilon < p+1$, так что теорема 2.3.3 дает

$$\ln M_F(r) \leqslant M_\varepsilon r^{\rho+\varepsilon}.$$

Поскольку ε сколь угодно мало, получаем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln r} \leqslant \rho. \tag{7}$$

Если же $\rho \geqslant p+1$, то та же теорема 2.3.3 дает

$$\ln M_F(r) \leqslant M_\varepsilon r^{\rho+\varepsilon} + Br^{p+1}\int_r^\infty \frac{n_F(t)}{t^{p+2}}\,dt = M_\varepsilon r^{\rho+\varepsilon} + o(r^{p+1}),$$

так как по определению рода интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{n_F(t)}{t^{p+2}}\,dt$ сходится, и опять получим (7).

Для оценки снизу возьмем последовательность $r_k \to \infty$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_F(r_k)}{\ln r_k} = \rho.$$

При любом $\varepsilon > 0$ имеем $n_F(r_k) > c_\varepsilon r_k^{\rho-\varepsilon}$, и по теореме 2.3.4

$$\ln M_F(2r_k) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^{2r_k} \frac{n_F(t)}{t}\,dt \geqslant \int\limits_{r_k}^{2r_k} \frac{n_F(t)}{t}\,dt \geqslant n_F(r_k) \int\limits_{r_k}^{2r_k} \frac{dt}{t} \geqslant c'_\varepsilon (2r_k)^{\rho-\varepsilon}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln r} \geqslant \varlimsup_{r_k\to\infty} \frac{\ln\ln M_F(2r_k)}{\ln 2r_k} \geqslant \rho.$$

Это неравенство вместе с неравенством (7) доказывает теорему.

Т е о р е м а 3.3.6. *Пусть $F(z)$ — каноническое произведение рода p и $h(r) = r^\rho l(r)$. Если*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n_F(r)}{h(r)} = \sigma, \qquad 0 < \sigma < \infty, \tag{8}$$

то при любом ρ

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r)}{h(r)} > 0. \tag{9}$$

Кроме того,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r)}{h_1(r)} < \infty, \tag{10}$$

где $h_1(r) = h(r)$ при ρ нецелом и $h_1(r) = r^\rho l_1(r)$ при ρ целом.

(Здесь $l_1(r) = \int\limits_0^r \frac{l(t)}{t}\,dt$ при $\rho = p$, $l_1(r) = \int\limits_r^\infty \frac{l(t)}{t}\,dt$ при $\rho = p+1$.)

Доказательство. Для оценки снизу возьмем последовательность $r_k \to \infty$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_F(r_k)}{h(r_k)} = \sigma, \qquad 0 < \sigma < \infty.$$

Тогда по теореме 3.3.4

$$\ln M_F(2r_k) \geqslant \int_0^{2r_k} \frac{n_F(t)}{t}\, dt \geqslant n_F(r_k) \ln 2 \geqslant ch(r_k), \quad c > 0.$$

Но согласно следствию из леммы 1 § 3.1 имеем $h(2r_k) \sim \sim 2^\rho h(r_k)$, так что неравенство (9) доказано.

Для оценки сверху напишем, согласно теореме 3.3.3,

$$\ln M_F(r) \leqslant \sigma_1 A r^p \int_a^r \frac{h(t)}{t^{p+1}}\, dt + \sigma_1 B r^{p+1} \int_r^\infty \frac{h(t)}{t^{p+2}}\, dt + \sigma_1 C h(r).$$

При нецелом ρ отсюда по лемме 1 § 3.1 получаем

$$\ln M_F(r) \leqslant Mh(r),$$

т. е. неравенство (10) с $h_1(r) = h(r)$.

При $\rho = p$ получаем по лемме 2 § 3.1

$$Br^{p+1} \int_r^\infty \frac{n_F(t)}{t^{p+2}}\, dt + Cn_F(r) \leqslant Mh(r)$$

и

$$r^\rho \int_a^r \frac{n_F(t)}{t^{p+1}}\, dt \leqslant r^p \int_a^r \frac{l(t)}{t}\, dt = r^p l_1(r) = h_1(r),$$

причем $l_1(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ по определению рода и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{l(r)}{l_1(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{l'(r)}{l_1'(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = 0.$$

Следовательно, неравенство (10) доказано с $h_1(r) = r^\rho l_1(r)$. Совершенно аналогично обстоит дело при $\rho = p+1$.

Теорема доказана.

Обращает на себя внимание тот факт, что при целом p знания функции $n_F(r)$ недостаточно для нахождения точного роста. Сравним функции $\frac{1}{\Gamma(z)}$ и $\sin\frac{\pi z}{2}$. Для них обеих $n_F(r) \sim r$ $(r \to \infty)$, но $\frac{1}{\Gamma(z)}$ имеет точный рост $r \ln r$, а $\sin\frac{\pi z}{2}$ — точный рост r.

Причина этого явления в том, что на рост целой функции влияет не только число ее нулей, но и их взаимное расположение.

Теорема 3.3.7. *Пусть $F(z)$ — каноническое произведение рода p и $h(r) = r^\rho l(r)$, где ρ — целое число. Введем обозначения:*

$$\nu(r) = \Big|\sum_{|z_n| \leqslant r} z_n^{-\rho}\Big| \quad \textit{при} \quad \rho = p,$$

$$\nu(r) = \Big|\sum_{|z_n| \geqslant r} z_n^{-\rho}\Big| \quad \textit{при} \quad \rho = p + 1.$$

Если $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{n_F(r)}{h(r)} = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$, *то*

$$\ln M_F(r) \leqslant r^\rho \nu(r) + O(h(r)), \qquad r \to \infty.$$

Доказательство. Ограничимся для простоты лишь случаем $p = 1$ и допустим для определенности, что $\rho = p = 1$. Это значит, что

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-1}$ расходится. Мы можем написать

$$\operatorname{Re}\left\{\ln F(z) - z\sum_{|z_n| \leqslant r} \frac{1}{z_n}\right\} =$$

$$= \sum_{|z_n| \leqslant r} \ln\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| + \sum_{|z_n| > r} \ln\left|\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}\right|.$$

Те же соображения, которые мы использовали при доказательстве теоремы 3.3.3, дают

$$\max_{|z|=r} \ln\left|1-\frac{z}{z_n}\right| \leqslant C_1 \ln\frac{r}{|z_n|}, \qquad |z_n|<r,$$

$$\max_{|z|=r} \ln\left|\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}}\right| \leqslant C_2 \frac{r^2}{|z_n|^2}, \qquad |z_n|>r,$$

и мы получаем

$$\max_{|z|=r} \operatorname{Re}\left\{\ln F(z) - z\sum_{|z_n|\leqslant r}\frac{1}{z_n}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\int_0^r \ln\frac{r}{t}\,dn_F(t) + C_2\int_r^\infty \frac{r^2}{t^2}\,dn_F(t) = O(h(r))$$

или

$$\ln M_F(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re}\ln F(z) \leqslant$$

$$\leqslant r\left|\sum_{|z_n|\leqslant r}\frac{1}{z_n}\right| + O(h(r)) = r\nu(r) + O(h(r)).$$

Теорема доказана.

Пока мы получали лишь самые грубые оценки канонических произведений, так как делали только грубые предположения относительно функции $n_F(r)$. Если дополнительно предположить гладкость $n_F(r)$ и еще что-либо о распределении нулей по направлениям, то можно получить теми же средствами более точные оценки. Рассмотрим один пример такого рода.

Теорема 3.3.8. *Пусть* $n_F(r) \sim \sigma h(r)$ *и* $h(r) = r^\rho l(r)$, $0<\rho<1$. *Предположим еще, что* $\arg(-z_n)\to 0$ *при* $n\to\infty$. *Тогда при любом* φ, $|\varphi|<\pi$, *и* $r\to\infty$ *имеем*

$$\ln|F(re^{i\varphi})| = \ln\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{ze^{i\varphi}}{z_n}\right)\right| \sim \frac{\pi\sigma h(r)}{\sin\pi\rho}\cos\rho\varphi$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\ln|1+se^{i(\varphi-\theta)}|,$$

где $s\geqslant 0$, $|\theta|\leqslant\varepsilon$, $\varepsilon<\varphi<\pi-\varepsilon$. При всех s эта величина достигает максимума по θ при $\theta = -\varepsilon$, а минимума — при $\theta = \varepsilon$. Так как по условию теоремы $\arg(-z_n) \to 0$ при $n \to \infty$, мы можем при любом $\varepsilon > 0$ выбрать такое $N = N(\varepsilon)$, чтобы $|\arg(-z_n)| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Поэтому при $\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varepsilon$

$$Q(r, \varphi + \varepsilon) + O(\ln r) \leqslant \ln |F(re^{i\varphi})| \leqslant Q(r, \varphi - \varepsilon) + O(\ln r),$$

где

$$Q(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| 1 + \frac{re^{i\varphi}}{|z_n|} \right| = \int_0^{\infty} \ln \left| 1 + \frac{re^{i\varphi}}{t} \right| dn_F(t).$$

Исследуем поведение $Q(r, \varphi)$ при $r \to \infty$. Обозначая снова $z = re^{i\varphi}$, имеем

$$Q(r, \varphi) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{z}{t} \right) dn_F(t) = \operatorname{Re} z \int_0^{\infty} \frac{n_F(t)\, dt}{t(t+z)}.$$

Используя условие $n_F(t) \sim \sigma h(t)$, находим

$$Q(r, \varphi) = \sigma \operatorname{Re} z \int_a^{\infty} \frac{h(t)\, dt}{t(t+z)} + o(h(r)) =$$

$$= \sigma \operatorname{Re} \int_{\frac{a}{z}}^{\infty} \frac{h(zu)\, du}{u(u+1)} + o(h(r)).$$

Применим лемму 2 § 3.1. Это даст

$$Q(r, \varphi) = \sigma \operatorname{Re} h(z) \int_0^{\infty} \frac{u^{\rho-1} du}{u+1} + o(h(r)).$$

Но по следствию из леммы 1 § 3.1 $h(z) \sim e^{i\rho\varphi} h(r)$, а интеграл находится с помощью формулы, полученной в примере 3 § 1.3. Он равен $\frac{\pi}{\sin \pi\rho}$, и мы получаем

$$Q(r, \varphi) \sim h(r) \frac{\pi\sigma \cos \rho\varphi}{\sin \pi\rho}.$$

Таким образом,

$$h(r)\frac{\pi\sigma\cos\rho(\varphi+\varepsilon)}{\sin\pi\rho}+o(h(r))\leqslant\ln|F(re^{i\varphi})|\leqslant$$
$$\leqslant h(r)\frac{\pi\sigma\cos\rho(\varphi-\varepsilon)}{\sin\pi\rho}+o(h(r)).$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно мало, мы получаем отсюда утверждение теоремы для $\varphi>0$. Для $\varphi<0$ и для $\varphi=0$ рассуждения совершенно аналогичны. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 3.3

1°. Показателем сходимости последовательности z_n называют число τ, обладающее следующим свойством: при $s>\tau$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^{-s}$ сходится, а при $s<\tau$ расходится. Показать, что

$$\tau=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln n_F(r)}{\ln r}.$$

2°. Показать, что интегралы

$$\int_1^{\infty} n_F(r)\,r^{-q}dr,\qquad \int_1^{\infty}\ln M_F(r)\,r^{-q}dr$$

сходятся или расходятся одновременно.

3°. Пусть все z_n положительны, $n_F(r)\sim\sigma h(r)$ и $h(r)=r(\ln r)^{\alpha}l(\ln r)$, где $\alpha<-1$, а $l(r)$ — медленно растущая функция. Показать, что при любом φ, $|\varphi|<\pi$, и при $r\to\infty$

$$\ln\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{re^{i\varphi}}{z_n}\right)\right|=-\frac{\sigma h(r)\ln r}{\alpha+1}\cos\varphi+o(h(r)\ln r).$$

4°. Пусть все r_n положительны, $n_F(r)\sim\sigma h(r)$, где $h(r)=rl(r)$, и интеграл $\int_0^{\infty}n_F(t)\,t^{-2}dt$ расходится. Введем обозначение

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{z_n}\right)e^{-\frac{z}{z_n}}.$$

Показать, что при $|\varphi|<\pi$ и при $r\to\infty$ имеем

$$\ln|F(re^{i\varphi})|+r\cos\varphi\int_0^r\frac{n_F(t)}{t^2}\,dt\sim\sigma h(r)\,\varphi\sin\varphi$$

§ 3.4. Теоремы Фрагмена — Линделефа

Сейчас мы перейдем к изложению группы результатов, не связанных с целыми функциями непосредственно, но играющих очень важную роль почти во всех задачах теории целых функций.

Принципиальная основа всех этих результатов состоит в следующем.

Пусть нам удалось получить для аналитической функции $F(z)$ в какой-либо области D оценку

$$|F(z)| \leqslant \exp \Phi(z), \qquad z \in D. \tag{1}$$

Рассмотрим класс субгармонических функций $U(z)$, удовлетворяющих в области D неравенству

$$U(z) \leqslant \Phi(z), \qquad z \in D.$$

Поскольку наибольшая из нескольких субгармонических функций также субгармонична (см. свойство 2° § 2.3), в этом классе существует наибольшая функция, которую мы обозначим через $\Phi^*(z)$. Но функция $\ln|F(z)|$ субгармонична в области D, так что $F(z)$ обязана удовлетворять неравенству

$$|F(z)| \leqslant \exp \Phi^*(z), \qquad z \in D. \tag{2}$$

Таким образом, мы получаем из оценки (1) оценку (2), которая может оказаться значительно более сильной.

Подобные рассуждения мы использовали в наших действиях с выпуклыми функциями в § 3.2. По аналогии с введенной там терминологией мы будем называть функцию $\Phi^*(z)$ *субгармонической минорантой* функции $\Phi(z)$.

К сожалению, трудно предложить сколько-нибудь общий (и к тому же, конструктивный) способ построения субгармонической миноранты. Различные частные приемы, используемые для этой цели, и составляют содержание теорем Фрагмена — Линделефа.

Продемонстрируем один из наиболее важных приемов на доказательстве простейшей теоремы такого рода.

Теорема 3.4.1. *Пусть функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости и непрерывна вплоть до мнимой* *оси. Если функция $F(z)$ удовлетворяет условиям*

$$|F(iy)| \leqslant M, \qquad -\infty < y < +\infty, \tag{3}$$

и

$$\ln|F(z)| = o(|z|), \qquad z \to \infty, \ \operatorname{Re} z \geqslant 0, \tag{4}$$

то $|F(z)| \leqslant M$ во всей правой полуплоскости.

Доказательство. По условиям теоремы мы имеем для функции $F(z)$ оценку

$$\ln|F(z)| \leqslant \Phi(z), \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

где

$$\Phi(iy) = \ln M, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

и

$$\Phi(z) = \varepsilon(|z|)\,|z|, \qquad \operatorname{Re} z > 0$$

(здесь $\varepsilon(r)$ — некоторая функция, стремящаяся к нулю при $r \to +\infty$). Попытаемся построить субгармоническую миноранту $\Phi^*(z)$. Для этой цели возьмем произвольно большое $R > 0$ и построим функцию $u_R(z)$, гармоническую в полукруге K_R: $|z| < R$, $\operatorname{Re} z > 0$, и имеющую на его границе те же значения, что и функция $\Phi(z)$. Согласно принципу максимума для субгармонических функций будет выполняться неравенство

$$\Phi^*(z) \leqslant u_R(z), \qquad z \in K_R. \tag{5}$$

Затем мы посмотрим, что нам даст предельный переход при $R \to +\infty$ (и при фиксированном z).

Для построения интересующей нас гармонической функции $u_R(z)$ обозначим через γ_R полуокружность $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $|z| = R$. Легко видеть, что

$$u_R(z) = R\varepsilon(R)\,\omega(z;\gamma_R, K_R) + (1-\omega(z;\gamma_R, K_R))\ln M,$$

где $\omega(z;\gamma_R, K_R)$ — гармоническая мера полуокружности γ_R относительно полукруга K_R (в точке $z \in K_R$). Для отыскания гармонической меры следует, как мы это неоднократно делали в предыдущей главе, конформно отобразить полукруг на первый квадрант плоскости w и взять функцию $\frac{2}{\pi}\arg w$. Легко проверить, что

$$\omega(z;\gamma_R, K_R) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\ln\frac{1+(iz/R)}{1-(iz/R)}.$$

При фиксированном z очевидно имеем

$$\ln\frac{1+(iz/R)}{1-(iz/R)}\sim\frac{2iz}{R},\qquad R\to+\infty.$$

Поэтому из условия $\varepsilon(R)\to 0$ мы выводим, что

$$u_R(z)=\ln M+o(1)$$

при $R\to+\infty$ и при фиксированном z. Если теперь перейти в неравенстве (5) к пределу при $R\to+\infty$, то мы получим

$$\Phi^*(z)\leqslant\ln M,\qquad \operatorname{Re}z\geqslant 0.$$

Согласно определению субгармонической миноранты это дает нам неравенство $\ln|F(z)|\leqslant\ln M$, и теорема доказана.

Замечание. Условие (4) можно заменить более слабым условием

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln M_F(r)}{r}=0,\tag{4*}$$

где

$$M_F(r)=\max_{-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}|F(re^{i\varphi})|.$$

Доказательство не потребует почти никаких изменений. Действительно, функция $\varepsilon(R)$ будет по-прежнему стремиться к нулю, правда, лишь по некоторой последовательности значений $R_k\to+\infty$. Мы можем провести все рассуждения именно для этой последовательности.

Заметим еще, что теорема 3.4.1 довольно точна. Она становится неверной, если заменить условие (4) условием

$$\ln|F(z)|\leqslant\alpha|z|,\qquad \operatorname{Re}z>0,$$

как показывает пример функции $F(z)=\exp(\alpha z)$.

Приведем одно довольно очевидное обобщение теоремы 3.4.1.

Теорема 3.4.1.*. *Пусть D — произвольная бесконечная область, лежащая в правой полуплоскости, а функция $F(z)$ регулярна в области D и непрерывна в ее замыкании. Если выполнены условия*

$$|F(z)| \leqslant M, \qquad z \in \partial D, \tag{3**}$$

и

$$\ln|F(z)| = o(|z|), \qquad z \to \infty, \ z \in \overline{D}, \tag{4**}$$

то $|F(z)| \leqslant M$ во всей области D.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $z_0 \in D$ и $R > |z_0|$. Обозначим через K_R^* связную часть пересечения области D с кругом $|z| < R$, содержащую точку z_0, а через γ_R^* — ту часть окружности $|z| = R$, которая входит в границу области K_R^*.

Действуя, как и при доказательстве 3.4.1, мы построим функцию

$$u_R^*(z) = R\varepsilon(R)\,\omega(z;\ \gamma_R^*,\ K_R^*) + \left(1 - \omega(z;\ \gamma_R^*,\ K_R^*)\right)\ln M.$$

По принципу расширения области (см. теоремы 2.4.1 и 2.4.1 *) имеет место неравенство

$$\omega(z;\ \gamma_R^*,\ K_R^*) \leqslant \omega(z;\ \gamma_R,\ K_R), \qquad z \in K_R^*,$$

откуда видно, что функция $u_R^*(z)$ не превосходит функции $u_R(z)$, построенной при доказательстве теоремы 3.4.1. Отсюда легко выводим утверждение теоремы.

Существенную роль в доказательстве теоремы 3.4.1 сыграло то обстоятельство, что мы смогли написать в явном виде гармоническую меру $\omega(z;\ \gamma_R,\ K_R)$. Можно было бы описать те области, где удастся применить аналогичный прием. Однако это не имеет особого смысла, так как проще применить другой прием, состоящий в использовании уже доказанной теоремы 3.4.1 и конформного отображения. Приведем в качестве примера одну теорему, которой мы будем пользоваться чаще всего.

Теорема 3.4.2. *Пусть функция $F(z)$ регулярна в угле*

$$S_\rho = \left\{z:\ |\arg(z - z_0) - \varphi_0| < \frac{\pi}{2\rho}\right\}$$

и непрерывна вплоть до его сторон. Если выполнены условия

$$|F(z)| \leqslant M, \qquad z \in \partial S_\rho,$$

и

$$\ln|F(z)| = o(|z|^\rho), \qquad z \to \infty,\ z \in S_\rho,$$

то $|F(z)| \leqslant M$ *во всем угле* S_ρ.

Доказательство. Функция

$$w = ((z - z_0)\, e^{-i\varphi_0})^\rho$$

конформно отображает угол S_ρ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$. Рассмотрим функцию

$$F_1(w) = F\left(z_0 + w^{\frac{1}{\rho}} e^{i\varphi_0}\right), \qquad \operatorname{Re} w \geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что она удовлетворяет условиям теоремы 3.4.1. Поэтому $|F_1(w)| \leqslant M$ при $\operatorname{Re} w \geqslant 0$, а отсюда немедленно вытекает утверждение нашей теоремы.

Теоремы Фрагмена — Линделефа, простейшие примеры которых были приведены выше, можно воспринимать, как обобщение принципа максимума. Действительно, их содержание таково. Имеется область D и одна исключительная точка ζ на ее границе. Во всех неисключительных точках границы мы предполагаем функцию $F(z)$, регулярную в области D, непрерывной и ограниченной (одной и той же постоянной M). При стремлении точки z к исключительной точке ζ границы области D функции $F(z)$ a priori разрешается расти с некоторой скоростью. Если эта скорость ниже некоторой предельной скорости, то функция $F(z)$ в действительности просто ограничена и вблизи исключительной точки границы.

Основная задача, возникающая в связи с теоремами Фрагмена — Линделефа,— это оценка предельной скорости роста в зависимости от геометрических свойств области D вблизи исключительной точки границы. Эта задача находится в тесной связи с проблемой Карлемана — Мию (см. § 2.4) об оценке гармонической меры и с задачей об асимптотических оценках конформных отображений. Последняя задача, как мы видели в § 2.6, равносильна задаче об оценке модулей четырехугольников. Из результатов, полученных нами в §§ 2.4 и 2.6, нетрудно вывести ряд глубоких теорем Фрагмена — Линделефа.

Начнем с более грубого результата, вытекающего из оценок Карлемана в проблеме Карлемана — Мию.

Теорема 3.4.3. *Пусть область D такова, что ее пересечение h_x с прямой $\operatorname{Re} z = x$ при всех $x \geqslant a$ непусто и даже содержит некоторый отрезок. Линейную меру множества h_x мы обозначим через $h(x)$. Если функция $F(z)$ регулярна в области D, непрерывна в ее замыкании и удовлетворяет условиям*

$$|F(z)| \leqslant M, \qquad z \in \partial D$$

и

$$\ln M_F(x) = o\left(\exp\left(\frac{4}{\pi}\int_a^x \frac{dt}{h(t)}\right)\right), \qquad x \to +\infty$$

где

$$M_F(x) = \sup_{z \in h_x} |F(z)|,$$

то $|F(z)| \leqslant M$ во всей области D.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $z_0 \in D$ и произвольное число x, большее a и $\operatorname{Re} z_0$. Обозначим через D_x связную часть пересечения области D с полуплоскостью $\operatorname{Re} z < x$, а через h_x^* — ту часть прямой $\operatorname{Re} z = x$, которая входит в границу области D_x. Для сокращения записи мы положим

$$H(x) = \frac{4}{\pi}\int_a^x \frac{dt}{h(t)}$$

и будем считать, что $M = 1$ (легко видеть, что такое предположение не ограничивает общности). Еще обозначим

$$\varepsilon(x) = M_F(x)\exp(-H(x)).$$

Согласно предположению теоремы

$$\varepsilon(x) \to 0, \qquad x \to +\infty.$$

Определим функцию $\Phi(z)$ в замыкании области D равенствами

$$\Phi(z) = \begin{cases} 0, & z \in \partial D, \\ \varepsilon(x) \exp H(x), & x + iy = z \in D \end{cases}$$

и обозначим через $\Phi^*(z)$ субгармоническую миноранту функции $\Phi(z)$. В силу принципа максимума имеем

$$\Phi^*(z) \leqslant \varepsilon(x) \exp H(x) \cdot \omega(z;\, h_x^*,\, D_x), \qquad z \in D_x,$$

а по теореме 2.4.5

$$\omega(z;\, h_x^*,\, D_x) \leqslant \exp\left(-\frac{4}{\pi} \int\limits_{\operatorname{Re} z}^{x} \frac{dt}{h(t)}\right) \leqslant \exp(-H(x)).$$

Поэтому, переходя к пределу при $x \to +\infty$, мы получаем, что

$$\Phi^*(z) \leqslant 0, \qquad z \in D.$$

Следовательно, $|F(z)| \leqslant 1$ при $z \in D$ и теорема доказана.

Применение следствия из леммы 2* § 2.6 дает для довольно близкого случая значительно лучшую оценку.

Теорема 3.4.4. *Пусть область D, лежащая в угле $|\arg z| \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$, описывается неравенствами*

$$x > a, \quad |y - \varphi(x)| < \frac{1}{2}\theta(x), \qquad z = x + iy,$$

где $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ — непрерывные при $x \geqslant a$ функции и $\theta(x) > 0$ $(x \geqslant a)$. Если функция $F(z)$ регулярна в области D, непрерывна вплоть до ее границы и удовлетворяет условиям

$$|F(z)| \leqslant M, \qquad z \in \partial D, \tag{6}$$

и

$$\ln|F(x + iy)| = o\left(\exp\left(\pi \int\limits_a^x \frac{ds}{\theta(s)}\right)\right), \qquad x \to +\infty \tag{7}$$

(равномерно по y при $x + iy \in D$), то $|F(z)| \leqslant M$ при $z \in D$.

Доказательство. Обозначим через $W(z)$ функцию, конформно отображающую область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ таким образом, что

$$\operatorname{Re} W(z) \to +\infty, \qquad z \to \infty, \ z \in D \tag{8}$$

(а прообраз второй бесконечности мы будем считать лежащим на прямой $\operatorname{Re} z = a$). Тогда функция $\zeta(z) = \exp W(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Через $Z(\zeta)$ мы обозначим функцию, обратную к $\zeta(z)$.

Рассмотрим функцию $F_1(\zeta) = F(Z(\zeta))$. Эта функция определена и регулярна в правой полуплоскости, и по теореме о соответствии границ при конформном отображении она непрерывна вплоть до мнимой оси. Поскольку образом границы области D при отображении функцией $\zeta(z)$ является мнимая ось, мы имеем

$$|F_1(iy)| \leqslant M, \quad -\infty < y < +\infty. \tag{9}$$

Условие (7) означает, что

$$\ln |F(Z(\zeta))| = \varepsilon(\operatorname{Re} Z(\zeta)) \exp \left\{\pi \int_a^{\operatorname{Re} Z(\zeta)} \frac{ds}{\theta(s)}\right\},$$

где $\varepsilon(r)$ — некоторая функция, определенная при $r > r_0$ и стремящаяся к нулю при $r \to +\infty$. Поскольку из условия (8) на отображающую функцию $W(z)$ легко вывести, что

$$\operatorname{Re} Z(\zeta) \to +\infty, \qquad \zeta \to \infty, \ \operatorname{Re} \zeta \geqslant 0,$$

мы можем написать, что

$$\ln |F_1(\zeta)| = \varepsilon_1(|\zeta|) \exp \left\{\pi \int_a^{\operatorname{Re} Z(\zeta)} \frac{ds}{\theta(s)}\right\}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_1(r) \to 0$ при $r \to +\infty$.

Согласно следствию из леммы 2* § 2.6 справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} W(z) \geqslant \pi \int_a^{\operatorname{Re} z} \frac{ds}{\theta(s)} + O(1), \qquad z \to \infty, \ z \in D.$$

которое нетрудно привести к виду

$$\pi \int\limits_a^{\operatorname{Re} Z(\zeta)} \frac{ds}{\theta(s)} \leqslant \ln|\zeta| + O(1), \qquad \zeta \to \infty, \ \operatorname{Re}\zeta \geqslant 0.$$

В силу этого неравенства мы получаем из (10), что

$$\ln|F_1(\zeta)| = o(|\zeta|), \qquad \zeta \to \infty, \ \operatorname{Re}\zeta \geqslant 0.$$

Итак, мы показали, что функция $F_1(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.4.1, и потому справедливо неравенство $|F_1(\zeta)| \leqslant M$ во всей правой полуплоскости. Отсюда немедленно вытекает утверждение нашей теоремы.

Сравнивая результаты теорем 3.4.3 и 3.4.4, мы видим, что первая теорема налагает менее жесткие ограничения на область D, но условия на предельный рост функции $F(z)$ во второй теореме заметно слабее. В действительности, используя принцип симметризации (о котором мы упоминали в § 2.4), можно было бы получить теорему, в которой сочетаются преимущества обеих теорем.

Теорему 3.4.4 до некоторой степени можно считать точной, правда, она точна лишь в случае, когда выполняются условия

$$\int\limits_a^{\infty} \frac{\varphi'^2(s)}{\theta(s)}\, ds < \infty, \qquad \int\limits_a^{\infty} \frac{\theta'^2(s)}{\theta(s)}\, ds < \infty.$$

При выполнении этих условий функция

$$\exp(\delta W(z)), \qquad \delta > 0,$$

дает нам пример, показывающий, что условие (7) нельзя существенно ослабить. Асимптотическую формулу, позволяющую это установить, дает теорема 2.6.5. Если предположить только, что

$$\varphi'(x) \to 0, \quad \theta'(x) \to 0, \qquad x \to +\infty,$$

то из теоремы 2.6.1 вытекает, что множитель π в формуле (7) нельзя заменить меньшим числом, не нарушив справедливости теоремы.

Более точные оценки для предельного роста можно было бы получить с помощью теоремы 2.6.6.

Приведем еще один вариант теоремы Фрагмена — Линделефа, легко получаемый из теоремы 3.4.4 с помощью элементарного конформного отображения.

Теорема 3.4.5. *Пусть G — область плоскости $\zeta = re^{i\psi}$, описываемая неравенствами*

$$r > r_0, \quad |\psi - \beta(r)| < \frac{1}{2}\alpha(r),$$

где функция $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ непрерывны при $r \geqslant r_0$ и $0 < \alpha(r) \leqslant \pi$. Если функция $F(\zeta)$ регулярна в области G, непрерывна вплоть до ее границы и удовлетворяет условиям

$$|F(\zeta)| \leqslant M, \qquad \zeta \in \partial G,$$

и

$$\ln|F(\zeta)| = o\left(\exp\left(\pi \int_{r_0}^{|\zeta|} \frac{ds}{s\alpha(s)}\right)\right), \qquad \zeta \to \infty, \ \zeta \in G,$$

то $|F(\zeta)| \leqslant M$ во всей области G.

Доказательство. Функция $z = \ln \zeta$ регулярна в области G и конформно отображает ее на область D, описываемую неравенствами

$$x > \ln r_0, \quad |y - \beta(x)| < \frac{1}{2}\alpha(x), \qquad z = x + iy.$$

Поэтому применив теорему 3.4.4 к функции $F_1(z) = F(e^z)$, мы легко получаем требуемое утверждение.

Приведенные выше результаты далеко не исчерпывают всего многообразия теорем Фрагмена — Линделефа. Изложенный метод доказательства также не является единственно возможным. Более того, он и не самый употребительный. Чаще всего используется один элементарный прием, который мы однажды уже применяли для доказательства принципа максимума в § 2.3. Приведем еще два примера его использования.

В качестве первого примера мы докажем следующий результат, немного уточняющий теорему 3.4.1.

Теорема 3.4.6. *Пусть функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости и непрерывна вплоть до мнимой оси. Если выполнены условия*

$$|F(iy)| \leqslant M, \qquad -\infty < y < +\infty, \tag{11}$$

и

$$\ln|F(x+iy)| = o(x+y^2), \qquad x > 0,\ x+iy \to \infty, \tag{12}$$

то $|F(z)| \leqslant M$ *при* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_\varepsilon(z) = F(z)e^{-\varepsilon z}.$$

Очевидно, что

$$|F_\varepsilon(iy)| \leqslant M, \qquad -\infty < y < +\infty. \tag{13}$$

Далее, из условия (12) следует, что

$$|F_\varepsilon(x)| \leqslant M_\varepsilon, \qquad x > 0,$$

где M_ε — некоторая постоянная. Это означает, что на сторонах угла $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $|F_\varepsilon(z)| \leqslant M'_\varepsilon = \max(M, M_\varepsilon)$. Внутри этого угла согласно условию (12) имеем

$$\ln|F(z)| = o(|z|^2), \qquad z \to \infty.$$

По теореме 3.4.2 мы выводим отсюда, что

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant M'_\varepsilon, \qquad 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Совершенно аналогично мы получаем неравенство

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant M'_\varepsilon, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 0.$$

Эти два неравенства означают, что

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant M'_\varepsilon, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Из полученного неравенства следует, в частности, что

$$\ln|F_\varepsilon(z)| = o(|z|), \quad z\to\infty,\ \operatorname{Re} z > 0. \tag{14}$$

Из формул (13) и (14) мы видим, что функция $F_\varepsilon(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.4.1, и потому справедливо неравенство

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant M, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

означающее, что

$$|F(z)| \leqslant M e^{\varepsilon \operatorname{Re} z}, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно мало, мы получаем отсюда утверждение теоремы.

В качестве второго примера мы рассмотрим обобщение теоремы 3.4.1 на случай, когда функция $F(z)$ уже не является ограниченной на мнимой оси.

Теорема 3.4.7. *Пусть функция $F(z)$ регулярна в бесконечном секторе*

$$S = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ |z| > 1\}$$

и непрерывна вплоть до его границы. Если выполнены условия

$$|F(iy)| = O(y^a), \quad |F(-iy)| = O(y^b), \qquad y \geqslant 1, \tag{15}$$

и

$$\ln|F(z)| = o(|z|), \quad z\to\infty,\ z\in S, \tag{16}$$

то

$$|F(re^{i\varphi})| = O\left(r^{\frac{1}{2}(a+b)+\frac{\varphi}{\pi}(a-b)}\right), \quad r\to\infty,\ |\varphi| < \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_1(z) = F(z)\, z^{-\frac{1}{2}(a+b)} \exp\left(i\,\frac{a-b}{2\pi}\ln^2 z\right).$$

Легко видеть, что

$$\ln|F_1(z)| = o(|z|), \qquad z\to\infty,\ z\in S. \tag{17}$$

Далее, поскольку

$$|\exp(i\alpha \ln^2(re^{i\varphi}))| = \exp(-\alpha \operatorname{Im}(\ln r + i\varphi)^2) = r^{-2\alpha\varphi} \tag{18}$$

функция $F_1(z)$ удовлетворяет условиям

$$|F(iy)| = O(1), \quad |F(-iy)| = O(1), \quad y \geqslant 1. \tag{19}$$

Формулы (17) и (19) показывают, что функция $F_1(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.4.1*, и потому

$$|F_1(z)| \leqslant M < \infty, \qquad z \in S,$$

или

$$|F(re^{i\varphi})| \leqslant r^{\frac{1}{2}(a+b)} \left| \exp\left(-i\frac{a-b}{2\pi} \ln^2(re^{i\varphi})\right)\right|, \qquad re^{i\varphi} \in S.$$

В силу формулы (18) мы получаем отсюда утверждение теоремы.

В заключение параграфа сделаем еще одно замечание. До сих пор мы формулировали теоремы Фрагмена — Линделефа, как теоремы об аналитических функциях. Однако в действительности каждая из этих теорем является теоремой о субгармонических функциях. В доказательстве теоремы 3.4.1 это заметно особенно хорошо — переход к аналитическим функциям там совершался лишь в последний момент. Для этого перехода мы использовали то, что логарифм модуля аналитической функции является субгармонической функцией. В других теоремах мы сводили дело к теореме 3.4.1 с помощью конформного отображения. Этот прием также пригоден и для субгармонических функций, ибо конформное отображение, как мы знаем, сохраняет субгармоничность. Немного сложнее обстоит дело с теоремами, доказанными через рассмотрение вспомогательных функций. Там непосредственной связи нет. Однако любое такое доказательство может быть почти дословно воспроизведено и для субгармонических функций.

Для удобства ссылок мы сформулируем одну из наиболее общих теорем и в терминах субгармонических функций.

Теорема 3.4.4*. *Пусть область D, лежащая в угле $|\arg z| < \gamma < \frac{\pi}{2}$, описывается неравенствами*

$$x > a, \quad |y - \varphi(x)| < \frac{1}{2}\theta(x), \qquad x+iy=z,$$

где $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ — непрерывные при $x \geqslant a$ функции и $\theta(x) > 0$ $(x \geqslant a)$. Если функция $\Phi(z)$ субгармонична в области D и удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{z \to \zeta} \Phi(z) \leqslant M, \qquad \zeta \in \partial D,$$

и

$$\Phi(x+iy) \leqslant o\left(\exp\left\{\pi \int_a^x \frac{ds}{\theta(s)}\right\}\right), \qquad x \to +\infty$$

(равномерно по y при $x + iy \in D$), то $\Phi(z) \leqslant M$ при $z \in D$.

Заодно приведем и аналогичную теорему для гармонических функций.

Теорема 3.4.4**. *Пусть область D и функции $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ — те же, что и в теореме 3.4.4*. Если функция $U(z)$ гармонична в области D и удовлетворяет условиям*

$$\varlimsup_{z \to \zeta} |U(z)| \leqslant M, \qquad \zeta \in \partial D,$$

и

$$|U(x+iy)| = o\left(\exp\left(\pi \int_a^x \frac{ds}{\theta(s)}\right)\right), \qquad x \to +\infty$$

(равномерно по y при $x + iy \in D$), то $|U(z)| \leqslant M$ при $z \in D$.

Для доказательства теоремы 3.4.4** достаточно применить теорему 3.4.4* к функциям $U(z)$ и $-U(z)$.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 3.4

1°. Доказать, что субгармоническая миноранта функции $\Phi(re^{i\varphi}) = r^{\alpha(\varphi)}$ равна $r^{\alpha^*(\varphi)}$, где $\alpha^*(\varphi)$ — наибольшая выпуклая книзу функция, не превосходящая $\alpha(\varphi)$.

2°. Доказать, что субгармоническая миноранта функции $\Phi(re^{i\varphi}) = r^\rho\alpha(\varphi)$ равна $r^\rho\alpha_1(\varphi)$, где $\alpha_1(\varphi)$ — верхняя грань функций, не превосходящих $\alpha(\varphi)$ и удовлетворяющих условию $\alpha_1''(\varphi) + \rho^2\alpha(\varphi) \geqslant 0$.

3°. Пусть функция $F(z)$ регулярна в полуполосе $0 < \operatorname{Im} z < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$, и непрерывна вплоть до ее границы. Если функция $F(z)$ удовлетворяет условиям

$$F(x) = O(x^\alpha), \quad F(i+x) = O(x^\beta), \qquad x \to +\infty,$$

и

$$\ln|F(x+iy)| = o(e^{\pi x}), \qquad x \to +\infty, \ 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

то

$$F(x+iy) = \overline{O}(x^{\alpha+(\beta-\alpha)y}), \qquad x \to +\infty, \ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

4°. Пусть D — область, описываемая неравенствами

$$x > a, \quad |y - \varphi(x)| < \frac{1}{2}\theta(x), \qquad z = x + iy,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to+\infty} \theta'(x) = 0, \qquad 0<\theta(x)<\pi, \qquad x \geqslant a,$$

$$\int_a^\infty (|\varphi''(x)| + |\theta''(x)|)\,dx < \infty, \qquad \int_a^\infty \frac{\theta'^2(x)}{\theta(x)}\,dx < \infty.$$

Доказать, что если функция $F(z)$, регулярная в области D и непрерывная вплоть до ее границы удовлетворяет условиям

$$|F(z)| \leqslant M, \qquad z \in \partial D,$$

и

$$\ln|F(x+iy)| = o\left(\exp\left(\pi\int_a^x \frac{1+\varphi'^2(s)}{\theta(s)}\,ds\right)\right), \qquad x \to +\infty,$$

то $|F(z)| \leqslant M$ во всей области D.

§ 3.5. Убывание целых функций

Если функция $F(z)$, отличная от тождественного нуля, регулярна в бесконечности, то ни по одному пути, ведущему в бесконечность, она не может стремиться к нулю быстрее любой степени $1/z$. Действительно, из разложения

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}, \qquad |z|>R,$$

видно, что $F(z) \sim c_m z^{-m}$, где m — наименьший номер, при котором коэффициент c_m отличен от нуля.

Для целой функции бесконечность — особая точка, и по отдельным путям, ведущим в бесконечность, целая функция может стремиться к нулю с любой скоростью. Скажем, при стремлении z к бесконечности по действительной оси (в положительном направлении) примеры функций, сколь угодно быстро стремящихся к нулю, можно построить в виде

$$e^{-z}, \ \exp(-e^z), \ \exp(-\exp e^z), \ \ldots$$

На этих примерах нетрудно заметить одну интересную закономерность. Каждая из функций стремится к нулю не только по самой действительной оси, но и в некоторой области, содержащей действительную ось. Эта область тем уже, чем больше скорость стремления функции к нулю. Например, функция e^{-z} стремится к нулю в целой полуплоскости, а функция $\exp(-e^z)$ — уже только в полосе шириной π. В настоящем параграфе мы докажем ряд теорем, дающих количественные выражения для отмеченной закономерности.

Результаты настоящего параграфа очень тесно связаны с результатами предыдущего параграфа. Их также можно рассматривать, как построение субгармонической миноранты. Как правило, эта миноранта тождественно равна $-\infty$.

Мы начнем с доказательства двух простейших теорем, в которых говорится о возможной скорости стремления к нулю функций, регулярных и ограниченных в полуплоскости.

Теорема 3.5.1. *Пусть функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости и непрерывна вплоть до мнимой оси. Из выполнения условий*

$$|F(z)| \leqslant M, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \qquad (1)$$

и

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} = -\infty \tag{2}$$

следует, что $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Возьмем произвольное число $A > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_A(z) = F(z) e^{Az}.$$

Из условия (1) видно, что

$$|F_A(iy)| \leqslant M, \qquad -\infty < y < +\infty, \tag{3}$$

а также, что

$$\ln |F_A(z)| = O(z) = o(z^2), \quad z \to \infty, \ \operatorname{Re} z \geqslant 0. \tag{4}$$

Кроме того, из условия (2) нетрудно вывести, что

$$|F_A(x)| \leqslant M_A < \infty, \qquad x \geqslant 0.$$

Таким образом, функция $F_A(z)$ не превосходит по модулю постоянной $M'_A = \max(M, M_A)$ на сторонах углов $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \arg z < 0$, а внутри этих углов выполняется условие (4). Поэтому, применяя теорему 3.4.2, мы получаем, что

$$|F_A(z)| \leqslant M'_A, \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

В силу теоремы 3.4.1 из этого неравенства и из неравенства (3) мы получаем более сильное неравенство

$$|F_A(z)| \leqslant M, \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

Следовательно,

$$|F(z)| \leqslant M e^{-A \operatorname{Re} z}, \qquad \operatorname{Re} z > 0,$$

и отсюда, полагая $A \to +\infty$, мы получаем утверждение теоремы.

Теорема 3.5.2. *Пусть функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости и непрерывна вплоть до мни-*

мой оси. Если выполнено условие

$$|F(z)| \leqslant M \exp(-\varepsilon|z|), \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \tag{5}$$

где ε *— какая-либо положительная постоянная, то* $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_1(z) = F(z) \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\pi} z \ln z\right).$$

Из формулы

$$\operatorname{Re}(re^{i\varphi} \ln(re^{i\varphi})) = (r \ln r) \cos\varphi - r\varphi \sin\varphi$$

видно, что

$$\left|\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{\pi} z \ln z\right)\right| \leqslant \exp(\varepsilon|z|+1), \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Поэтому

$$|F_1(z)| \leqslant Me, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{\ln|F_1(x)|}{x} \to -\infty, \qquad x \to +\infty.$$

Следовательно, функция $F_1(z)$ тождественно равна нулю по теореме 3.5.1, а потому и $F(z) \equiv 0$.

Замечание. Теорему можно немного усилить, предположив условие (5) выполненным только на мнимой оси, но предположив дополнительно, что

$$\ln|F(z)| = o(|z| \ln|z|), \qquad z \to \infty, \ \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Обе доказанные теоремы можно заметно обобщить и даже несколько уточнить, но для этого нужны немного более сильные средства.

Теорема 3.5.1*. *Пусть функция* $F(z)$ *регулярна в правой полуплоскости и непрерывна вплоть до мнимой оси, а* L *— какая-либо кривая, идущая из точки* $z = 0$ *в бесконечность, оставаясь в правой полуплос-*

кости. Если выполнены условия

$$|F(z)| \leqslant M, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \tag{6}$$

и

$$\frac{\ln|F(z)|}{|z|} \to -\infty, \qquad z \to \infty, \ z \in L, \tag{7}$$

то $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Эту теорему, как и предыдущую, мы опять сведем к теореме 3.5.1. С этой целью мы оценим $|F(x)|$ при $x > 0$.

Заметим сначала, что из условия (7) следует существование положительной функции $\nu(r)$, монотонно стремящейся к $+\infty$ при $r \to +\infty$ и такой, что

$$\ln|F(z)| \leqslant -|z|\,\nu(|z|), \qquad z \in L. \tag{8}$$

Еще заметим, что мы можем считать, не ограничивая общности, постоянную M из условия (6) равной единице.

Возьмем произвольное $x > 0$ и обозначим через S_x сектор

$$S_x = \left\{z : |z| > \frac{x}{2}, \ \operatorname{Re} z > 0\right\},$$

а через λ_x^+ и λ_x^- — вертикальные лучи, входящие в его границу.

Кривая L разбивает сектор S_x на какое-то число областей. Ту из них, в которой лежит точка $z = x$, мы обозначим через D_x (если эта точка лежит на кривой L, то мы обозначаем через D_x любую из областей, на границу которых попадает эта точка). Ту часть кривой L, которая входит в границу области D_x, мы обозначим через L_x, а остальную часть границы области D_x — через E_x. Ясно, что множество E_x является частью границы сектора S_x.

Рассмотрим в области D_x субгармоническую функцию $\ln|F(z)|$. В силу неравенства (8) и монотонности функции $\nu(r)$ имеем

$$\ln|F(z)| \leqslant -\frac{x}{2}\,\nu\left(\frac{x}{2}\right), \qquad z \in L_x,$$

а в силу неравенства (6)

$$\ln|F(z)| \leqslant 0, \qquad z \in E_x$$

(мы предположили, что $M=1$). Поскольку субгармоническая функция не превосходит гармонической функции с теми же значениями на границе области, мы получаем неравенство

$$\ln|F(z)|\leqslant-\frac{x}{2}\nu\left(\frac{x}{2}\right)\omega(z;\,L_x,\,D_x),\quad z\in D_x,\qquad(9)$$

где $\omega(z;\,L_x,\,D_x)$ — гармоническая мера множества L_x относительно области D_x. Но

$$\omega(z;\,L_x,\,D_x)=1-\omega(z;\,E_x,\,D_x),$$

а согласно принципу расширения области (см. теорему 2.4.1)

$$\omega(z;\,E_x,\,D_x)\leqslant\omega(z;\,E_x,\,S_x),\qquad z\in D_x.$$

Поскольку множество $\partial S_x\setminus E_x$ должно содержать хотя бы один из двух лучей λ_x^+ или λ_x^-, мы получаем отсюда, что имеет место одно из двух неравенств

$$\omega(z;\,L_x,\,D_x)\geqslant\omega(z;\,\lambda_x^+,\,S_x),\qquad z\in D_x,$$

или

$$\omega(z;\,L_x,\,D_x)\geqslant\omega(z;\,\lambda_x^-,\,S_x),\qquad z\in D_x.$$

Гармоническую меру $\omega(z;\,\lambda_x^\pm,\,S_x)$ довольно просто вычислить, но это не нужно. Вполне достаточно заметить, что

$$\omega(x;\,\lambda_x^+,\,S_x)=\omega(x;\,\lambda_x^-,\,S_x)=\gamma,$$

где γ — некоторая положительная постоянная, независящая от x. В силу этого замечания мы получаем из неравенства (9) оценку

$$\ln|F(x)|\leqslant-\frac{\gamma x}{2}\nu\left(\frac{x}{2}\right),\qquad x>0.$$

Из нее вытекает, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|F(x)|}{x}=-\infty$$

и, применяя к функции $F(z)$ теорему 3.5.1, мы приходим к утверждению нашей теоремы.

Результаты § 2.6 об асимптотике конформных отображений позволяют получить, как и в предыдущем параграфе, много различных обобщений теоремы 3.5.1* на случай, когда функция $F(z)$ определена не в полуплоскости, а в более сложной области. Основное различие с результатами предыдущего параграфа в том, что теперь нам будут нужны оценки действительной части отображающей функции сверху, а не снизу.

Мы ограничимся одним примером такого обобщения.

Теорема 3.5.3. *Пусть область D описывается неравенствами*

$$x > a, \quad |y - \varphi(x)| < \frac{1}{2}\theta(x), \qquad x+iy=z,$$

а L — кривая, начинающаяся в какой-либо конечной точке границы области D и идущая в бесконечность, оставаясь в области D. Мы будем предполагать функции $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ непрерывно дифференцируемыми при $x \geqslant a$ и удовлетворяющими условиям

$$\theta(x) > 0 \quad {}_{x \geqslant a;} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to+\infty} \theta'(x) = \varkappa.$$

Если функция $F(z)$ регулярна в области D, непрерывна и ограничена в ее замыкании и удовлетворяет условию

$$\frac{\ln|F(z)|}{N(\operatorname{Re} z)} \to -\infty, \qquad z\to\infty, \ z \in L, \tag{10}$$

где

$$N(x) = \exp\left\{\pi \int_a^x \frac{1 + \varphi'^2(s) + \frac{1}{12}\theta'^2(s)}{\theta(s)}\, ds\right\},$$

то $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $W(z)$ — функция, конформно отображающая область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ таким образом, что

$$\operatorname{Re} W(z) \to +\infty, \qquad z\to\infty, \ z \to D$$

(прообразом второй бесконечности мы будем считать начало кривой L). Положим $\zeta(z)=\exp W(z)$ и обозначим через $Z(\zeta)$ функцию, обратную к $\zeta(z)$.

Рассмотрим функцию $F_1(\zeta)=F(Z(\zeta))$. Легко видеть, что она определена и регулярна в правой полуплоскости, а также непрерывна и ограничена в ее замыкании. Обозначим через L_1 образ кривой L при отображении $\zeta=\zeta(z)$ и оценим $|F_1(\zeta)|$ на кривой L_1.

Запишем условие (10) в виде

$$\ln|F(z)|\leqslant-\nu(\operatorname{Re} z)\,N(\operatorname{Re} z), \qquad z\in L,$$

где $\nu(x)$ — функция, монотонно стремящаяся к $+\infty$ при $x\to+\infty$. Сделав замену $z=Z(\zeta)$, мы получим отсюда неравенство

$$\ln|F_1(\zeta)|\leqslant-\nu(\operatorname{Re} Z(\zeta))\,N(\operatorname{Re} Z(\zeta)), \qquad \zeta\in L_1. \tag{11}$$

В теореме 2.6.1 было доказано, что

$$\operatorname{Re} W(z)\leqslant\pi\int\limits_a^{\operatorname{Re} z}\frac{1+\varphi'^2(s)+\frac{1}{12}\theta'^2(s)}{\theta(s)}\,ds+O(1), \qquad z\in D,$$

из которого легко получаем, что

$$N(\operatorname{Re} Z(\zeta))\geqslant M\exp\{\operatorname{Re} W(Z(\zeta))\},$$

где M — некоторая положительная постоянная, независящая от ζ. Но согласно определению

$$W(Z(\zeta))=\ln\zeta$$

и мы приходим к неравенству

$$N(\operatorname{Re} Z(\zeta))\geqslant M|\zeta|.$$

Это неравенство вместе с неравенством (11) дает нам

$$\ln|F_1(\zeta)|\leqslant-M\nu(\operatorname{Re} Z(\zeta))\,|\zeta|, \qquad \zeta\in L_1.$$

Поскольку из определения функции $W(z)$ нетрудно вывести, что

$$\operatorname{Re} Z(\zeta)\to+\infty, \qquad \zeta\to\infty,\ \operatorname{Re}\zeta\geqslant0,$$

мы получаем

$$\frac{\ln|F_1(\zeta)|}{|\zeta|}\to-\infty, \qquad \zeta\to\infty,\ \zeta\in L_1.$$

Таким образом, мы показали, что функция $F_1(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.5.1*. Следовательно, функция $F_1(\zeta)$ тождественно равна нулю, а потому и $F(z) \equiv 0$.

Перейдем теперь к обобщениям теоремы 3.5.2. Как и с теоремой 3.5.1, мы сначала докажем некоторое ее уточнение.

Нам понадобится одна лемма.

Лемма 1. *Если функция $f(z)$, отличная от тождественного нуля, регулярна в круге $|z| < 1$ и непрерывна в его замыкании, то функция*

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi$$

является непрерывной и неубывающей функцией при $0 \leqslant r < 1$.

Доказательство. Функция $\ln|f(ze^{i\varphi})|$ при каждом действительном значении φ является субгармонической функцией z при $|z| < 1$. Отсюда с помощью свойств 1 и 3 (см. § 2.3) субгармонических функций легко вывести, что функция

$$I(z) = \int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(ze^{i\varphi}\right)\right| d\varphi$$

также является субгармонической при $|z| < 1$. Нетрудно убедиться, что функция $I(z)$ зависит только от $|z|$. В § 2.3 мы отмечали, что субгармоническая функция, зависящая только от $|z|$, является выпуклой книзу функцией от $\ln|z|$. Выпуклая книзу функция непрерывна на отрезке, если она конечна хотя бы в одной его точке. Функция $I(z)$ конечна в каждой точке отрезка $(0,1)$, если $f(z) \not\equiv 0$, так как нули регулярной функции не могут иметь предельных точек внутри области регулярности (и порядок каждого нуля конечен). Следовательно, из сделанных предположений вытекает непрерывность функции $I(r)$. Ее монотонность вытекает из принципа максимума для субгармонических функций.

Теорема 3.5.2*. *Если функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости, непрерывна и ограничена в ее замыкании и удовлетворяет условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|F(iy)|}{1+y^2}\,dy = -\infty, \tag{12}$$

то $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(w) = F\left(\frac{1+w}{1-w}\right).$$

Поскольку функция $z = \frac{1+w}{1-w}$ конформно отображает круг $|w| < 1$ на правую полуплоскость, функция $f(w)$ регулярна в круге $|w| < 1$ и непрерывна в его замыкании. Поэтому

$$I(1) = \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = \int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi$$

и мы получаем

$$I(1) = \int_0^{2\pi} \ln\left|F\left(\frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right)\right| d\varphi = \int_0^{2\pi} \ln\left|F\left(i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi.$$

Но

$$\int_0^{2\pi} \ln\left|F\left(i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|F(iy)|}{1+y^2}\,dy,$$

так что согласно условию (12) $I(1) = -\infty$. В силу леммы 1 это возможно лишь тогда, когда $f(w) \equiv 0$. Следовательно и $F(z) \equiv 0$.

Если

$$\ln|F(iy)| \leqslant -\varepsilon|y|, \qquad -\infty<y<+\infty,$$

где ε — какая-либо положительная постоянная, то условие (12) заведомо выполняется. Это означает, что теорема 3.5.2* действительно является уточнением теоремы 3.5.2.

Рассмотрим вопрос о точности теоремы 3.5.2*. Пусть нам дана произвольная функция $g(y)$, непрерывная и ограниченная сверху на всей действительной оси, а также удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y)\,dy}{1+y^2} > -\infty.$$

Тогда интеграл Пуассона

$$u(x+iy) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}$$

сходится при всех $x > 0$ и дает решение задачи Дирихле в правой полуплоскости с граничной функцией $g(y)$. Нетрудно убедиться, что функция $u(z)$ гармонична и ограничена сверху в правой полуплоскости, а в каждой конечной точке мнимой оси она непрерывна. По функции $u(z)$ можно построить сопряженную с ней гармоническую функцию $v(z)$, но ее поведение вблизи мнимой оси исследовать много сложнее. Функция

$$F(z) = \exp(u(z) + iv(z))$$

регулярна и ограничена в правой полуплоскости, и

$$\lim_{x\to 0} \ln|F(x+iy)| = g(y)$$

Очевидно, что $F(z) \not\equiv 0$.

Таким образом, если условие (12) не выполняется, то существует функция $F(z) \not\equiv 0$, регулярная и ограниченная в правой полуплоскости. Единственное условие, выполнение которого мы не можем обеспечить — это непрерывность функции $F(z)$ в замыкании правой полуплоскости. Этот небольшой разрыв между условиями теоремы и примером, показывающим ее точность, можно было бы ликвидировать, отказавшись в условиях теоремы от требования непрерывности.

Обобщение теоремы 3.5.2 или 3.5.2* на функции, регулярные не в полуплоскости, а в областях более сложного вида, может быть проведено дословно так же, как и при доказательстве теоремы 3.5.3. Мы не будем повторять доказательства, но приведем формулировку одного из возможных результатов.

Теорема 3.5.4. *Пусть область D описывается неравенствами*

$$x > a, \quad |y - \varphi(x)| < \frac{1}{2}\theta(x), \qquad x+iy=z,$$

где $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ — непрерывно дифференцируемые при $x \geqslant a$ функции, удовлетворяющие условиям

$$\theta(x) > 0 \quad x \geqslant a; \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to+\infty} \theta'(x) = \varkappa \neq \infty.$$

Введем обозначения

$$t^{\pm}(x) = x + i\left[\varphi(x) \pm \frac{\theta(x)}{2}\right],$$

$$N(x) = \exp\left\{\pi \int_a^x \frac{1+\varphi'^2(s) + \frac{1}{12}\theta'^2(s)}{\theta(s)}\, ds\right\}.$$

Если функция $F(z)$ регулярна и ограничена в области D, непрерывна в ее замыкании, а кроме того, удовлетворяет условию

$$\int_a^\infty \frac{\ln|F(t^+(x))\, F(t^-(x))|}{N(x)\,\theta(x)}\, dx = -\infty,$$

то $F(z) \equiv 0$.

Обратим внимание на еще одно различие в условиях теорем 3.5.2 и 3.5.2*. В первой из них мы предполагали, что функция $F(z)$ равномерно стремится к нулю во всей правой полуплоскости. Во второй внутри полуплоскости предполагалась только ограниченность $|F(z)|$, а условия стремления к нулю относились лишь к значениям функции $F(z)$ на мнимой оси. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли разрешить функции $F(z)$ расти внутри полуплоскости? Такой гибрид теорем об убывании с теоремами Фрагмена — Линделефа возможен, и мы приведем сейчас один результат такого рода. Имея в виду некоторые дальнейшие приложения, мы будем теперь рассматривать функции не в правой, а в верхней полуплоскости.

Нам опять придется начать с доказательства одной леммы.

Лемма 2. *Пусть функция $q(\xi)$ определена и непрерывна на всей действительной оси, а при $\xi \to \pm\infty$ функция $|q(\xi)|$ растет не быстрее некоторой степени $|\xi|$. Тогда функция*

$$U(x+iy) = \frac{1}{2H} \sin\frac{\pi y}{H} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi)\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{H}(x-\xi)}{\left(\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{H}(x-\xi)\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi y}{H}\right)^2}\, d\xi$$

дает решение задачи Дирихле в полосе

$$P_H = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < H\} \tag{13}$$

с граничной функцией, принимающей одинаковые значения, равные $q(\xi)$, в точках ξ и $\xi + iH$.

Доказательство. С помощью несложных преобразований можно убедиться в справедливости формулы

$$\frac{1}{2H}\cdot \sin\frac{\pi y}{H}\cdot \frac{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{H}(x-\xi)}{\left(\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{H}(x-\xi)\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi y}{H}\right)^2} =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{2Hi}\left\{\frac{\exp\frac{\pi\xi}{H}}{\exp\frac{\pi\xi}{H} - \exp\frac{\pi z}{H}} - \frac{\exp\frac{\pi(\xi+iH)}{H}}{\exp\frac{\pi(\xi+iH)}{H} - \exp\frac{\pi z}{H}}\right\} \tag{14}$$

(мы обозначили, как обычно, $z = x + iy$). Поскольку функция

$$\frac{1}{2Hi}\left\{\frac{\exp\frac{\pi\xi}{H}}{\exp\frac{\pi\xi}{H} - \exp\frac{\pi z}{H}} - \frac{\exp\frac{\pi(\xi+iH)}{H}}{\exp\frac{\pi(\xi+iH)}{U} - \exp\frac{\pi y}{H}}\right\}$$

при всех действительных ξ регулярна в полосе P_H, ее действительная часть гармонична в этой полосе. Ввиду равномерной сходимости интеграла для функции $U(z)$ эта функция также гармонична в интересующей нас полосе P_H.

Далее, с помощью формулы (13) легко доказать, что

$$\frac{1}{2H}\cdot\sin\frac{\pi y}{H}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{H}(x-\xi)}{\left(\operatorname{sh}\frac{\pi}{H}(x-\xi)\right)^2+\left(\sin\frac{\pi y}{H}\right)^2}\,d\xi=1.$$

Поэтому

$$U(x+iy)-U(x)=\frac{1}{2H}\sin\frac{\pi y}{H}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[q(\xi)-q(x)]\operatorname{ch}\frac{\pi}{H}(x-\xi)}{\left(\operatorname{sh}\frac{\pi}{H}(x-\xi)\right)^2+\left(\sin\frac{\pi y}{H}\right)^2}\,d\xi$$

и проводя почти дословно те же рассуждения, которые были проведены в § 2.2. при выводе формулы Пуассона для круга, мы получим, что

$$U(x+iy)\to q(x'),\qquad x\to x',\ y\to+0,$$

и что

$$U(x+iy)\to q(x'),\qquad x\to x',\ y\to H-0,$$

ввиду соотношения $U(x+iy)=U(x+i(H-y))$, непосредственно вытекающего из определения функции $U(z)$. Лемма доказана.

Теорема 3.5.5. *Пусть функция $F(z)$, регулярная в верхней полуплоскости и непрерывная вплоть до действительной оси, удовлетворяет неравенству*

$$\ln|F(x+iy)|\leqslant-\varphi(x)+\psi(y),\qquad y\geqslant 0,\ -\infty<x<+\infty,$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ — некоторые положительные непрерывные функции (первая при всех действительных x, а вторая — при $y\geqslant 0$). Относительно функции $\varphi(x)$ мы будем предполагать, что

$$\varphi(x)=O(x^2),\qquad x\to\pm\infty. \tag{15}$$

Если

$$\lim_{H\to+\infty}\left\{\frac{\psi(H)}{H}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)\operatorname{ch}\frac{\pi\xi}{H}}{1+\left(\frac{H}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi\xi}{H}\right)^2}\,d\xi\right\}=-\infty, \quad (16)$$

то $F(z)\equiv 0$.

Доказательство. Проведем построение субгармонической миноранты $\Phi^*(z)$ функции $\Phi(x+iy)=-\varphi(x)+\psi(y)$. С этой целью мы возьмем произвольное $H>0$ и построим в полосе P_H, определенной формулой (13), гармоническую функцию $u_H(z)$, принимающую на границе полосы P_H те же значения, что и функция $\Phi(z)$.

Поскольку $y\cdot A$, где A — постоянная, является гармонической во всей плоскости функцией, наша задача сводится к построению функции

$$u_H^*(z)=u_H(z)-\frac{y}{H}\psi(H),$$

гармонической в полосе P_H и принимающей в точках ξ и $\xi+iH$ ее границы одинаковые значения, равные $-\varphi(\xi)$. Согласно лемме 2 имеем

$$u_H(z)=y\frac{\psi(H)}{H}-\frac{1}{2H}\sin\frac{\pi y}{H}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)\operatorname{ch}\frac{\pi}{H}(x-\xi)}{\left(\operatorname{sh}\frac{\pi}{H}(x-\xi)\right)^2+\left(\sin\frac{\pi y}{H}\right)^2}\,d\xi.$$

Из условия (15) легко вывести, что

$$\max_{0\leqslant y\leqslant H}|u_H(x+iy)|=O(x^2), \qquad x\to\pm\infty.$$

Поэтому с помощью теоремы 3.4.4* (положив там $\varphi(x)=\frac{H}{2}$ и $\theta(x)=H$) мы получаем неравенство

$$\Phi^*(z)\leqslant u_H(z), \qquad z\in P_H. \quad (17)$$

Из того же условия (15) нетрудно вывести также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) \operatorname{ch} \frac{\pi\xi}{H}}{\left(\operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{H}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi y}{H}\right)^2} d\xi = O(H^3)$$

при любом фиксированном $y > 0$ и при $H \to +\infty$. Поэтому

$$u_H(iy) = y \cdot \left\{ \frac{\psi(H)}{H} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) \operatorname{ch} \frac{\pi\xi}{H}}{y^2 + \left(\frac{H}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{H}\right)^2} d\xi \right\} + O(1).$$

Еще из условия (15) нетрудно вывести, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) \operatorname{ch} \frac{\pi\xi}{H}}{y^2 + \left(\frac{H}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{H}\right)^2} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) \operatorname{ch} \frac{\pi\xi}{H}}{1 + \left(\frac{H}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{H}\right)^2} d\xi = O(1).$$

Это дает нам окончательную формулу

$$u_H(iy) = y \left\{ \frac{\psi(H)}{H} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) \operatorname{ch} \frac{\pi\xi}{H}}{1 + \left(\frac{H}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{H}\right)^2} d\xi \right\} + O(1), \tag{18}$$

справедливую при любом фиксированном $y > 0$ и при $H \to +\infty$. Из формул (17) и (18) ввиду условия (16) мы получаем, что

$$\Phi^*(iy) = -\infty, \qquad y > 0.$$

Это означает, что $F(iy) = 0$ при всех $y > 0$. Отсюда с помощью теоремы единственности мы приходим к утверждению теоремы.

З а м е ч а н и е. Условие (15) в действительности нужно лишь для того, чтобы немного упростить выражение для функции $u_H(z)$ при больших значениях H. Мы использовали его еще при доказательстве неравенства (16), но там можно было бы ограничиться значительно более слабым условием

$$\ln \varphi(x) = o(|x|), \qquad x \to \pm\infty. \tag{15*}$$

При желании условие (16) можно заменять более простыми, но зато и более грубыми условиями. Например, воспользовавшись легко проверяемым неравенством

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(1+\xi^2)\operatorname{ch}\frac{\pi\xi}{H}}{1+\left(\frac{H}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi\xi}{H}\right)^2} \geqslant \frac{\pi \operatorname{ch}\pi}{2\operatorname{sh}^2\pi}, \qquad -H \leqslant \xi \leqslant H,$$

мы могли бы заменить условие (16) условием

$$\varlimsup_{H\to+\infty} \left\{\frac{\psi(H)}{H} - \frac{\pi\operatorname{ch}\pi}{2\operatorname{sh}^2\pi}\int_{-H}^{H} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2}\right\} = -\infty. \tag{16*}$$

Хотя условие (16*) заметно грубее, чем условие (16), но даже при такой замене теорема 3.5.5 содержит в себе, как частный случай, теорему 3.5.2*.

Отметим еще, что теорема 3.5.5 в значительной мере отвечает на вопрос, поставленный в конце § 3.1, о пустоте и непустоте классов $W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$. Именно, из теоремы 3.5.5 (с заменой условия (16) условием (16*) непосредственно вытекает следующее утверждение:

Если выполняется условие

$$\varlimsup_{H\to+\infty} \frac{H}{\psi(H)} \int_{-H}^{H} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{1+\xi^2} = +\infty, \tag{19}$$

то класс $W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$ *не может содержать ни одной целой функции.*

Приведенное достаточное условие пустоты класса $W_{\varphi(x)}^{\psi(y)}$ довольно близко к необходимому. Оно становится необходимым, если предположить некоторую правильность поведения функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, скажем, предположить, что они имеют вид $|x|^{\rho} l_1(|x|)$ и $y^{\rho'} l_2(y)$, где $l_1(x)$ и $l_2(y)$ — аналитические медленно растущие функции.

Ряд интересных конструкций различных примеров целых функций, позволяющих судить о точности доказанных выше теорем, можно найти в книге С. Мандельбройта «Теоремы замкнутости и теоремы композиции» Москва, ИЛ, 1962 г.

В заключение мы докажем еще один результат о скорости стремления к нулю целой функции, но уже несколько иного рода.

Теорема 3.5.6. *Пусть $F(z)$ — целая функция, а*

$$M_F(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|, \quad m_F(r) = \min_{|z|=r} |F(z)|.$$

Зададим непрерывную функцию $q(r) > 1$ и обозначим через $\delta(r)$ меру множества Δ_r, состоящего из тех точек t отрезка $(0, r)$, для которых выполняется неравенство

$$\ln m_F(t) \leqslant -q(r) \ln M_F(r), \qquad t \in \Delta_r. \tag{20}$$

Если имеет место соотношение

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\delta(r)(1+q(r))}{r} > 2, \tag{21}$$

то $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Обозначим через K_r круг $|z| < r$, а через E_r — его подмножество, состоящее из точек, в которых выполняется неравенство

$$\ln|F(z)| \leqslant -q(r) \ln M_F(r), \qquad z \in E_r. \tag{22}$$

Покажем, что при достаточно больших r множество $K_r \setminus E_r$ непусто, если только функция $F(z)$ отлична от тождественной постоянной. В силу теоремы Лиувилля тогда $\ln M_F(r) \to \infty$ при $r \to +\infty$. Отсюда вытекает, что множество $K_1 \cap E_r$ состоит из малых окрестностей нулей функции $F(z)$, лежащих в K_1. Поэтому при достаточно больших r множество $K_1 \setminus (K_1 \cap E_r)$ непусто и связно. Это множество содержится в множестве $K_r \setminus E_r$, так что и последнее непусто.

Предположим теперь, что $F(z) \not\equiv \text{const}$, и выберем число r настолько большим, чтобы множество $K_1 \setminus E_r$ было непусто и связно. Обозначим через D_r ту связную часть множества $K_r \setminus E_r$, которая содержит множество $K_1 \setminus E_r$.

В силу определения множества E_r функция $\ln|F(z)|$ не превосходит на нем величины $-q(r)\ln M_F(r)$, а на остальной части границы области D_r эта функция не превосходит $\ln M_F(r)$. Согласно теореме о двух константах (теорема 2.4.4) мы получаем отсюда

$$|F(z)| \leqslant (M_F(r))^{1-(1+q(r))\cdot\omega}, \qquad z \in D_r, \quad (23)$$

где

$$\omega = \omega(z;\ E_r,\ D_r).$$

Для оценки гармонической меры ω мы применим теорему 2.4.7. Поскольку при каждом $t \in \Delta_r$ на окружности $|z| = t$ лежит хотя бы одна точка множества E_r, мы получаем из теоремы 2.4.7, что

$$\omega \geqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(r-|z|)\,\delta(r)}{(r+|z|)\,(2r-\delta(r))}, \qquad z \in D_r.$$

Так как $\operatorname{tg} x \leqslant 4x/\pi$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, мы можем заменить эту оценку более простой

$$\omega \geqslant \frac{(r-|z|)\,\delta(r)}{2\,(r+|z|)\,r}, \qquad z \in D_r.$$

Подставляя найденную оценку для ω в неравенство (23) и переходя к пределу при $r \to +\infty$, мы находим из условия (21), что $F(z) = 0$ для любого z из круга $|z| < 1$ (который мы обозначили K_1). По теореме единственности это означает, что $F(z) \equiv 0$, и мы пришли к противоречию с предположением $F(z) \not\equiv \text{const}$. Легко проверить, что постоянная, отличная от нуля, не может удовлетворять условиям (20) и (21). Следовательно, $F(z) \equiv 0$ и теорема доказана.

Чтобы пояснить содержание доказанной теоремы, приведем некоторые следствия из нее.

Следствие 1. *Пусть $F(z)$ — целая функция, отличная от тождественного нуля, а $q > 1$ — некоторая постоянная. Обозначим через $\sigma(r)$ меру множества тех точек t из отрезка $(0, r)$, для которых имеет место* *неравенство*

$$\ln m_F(t) > -q \ln M_F(t).$$

Тогда

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(r)}{r} \geqslant \frac{q-1}{q+1}.$$

Для доказательства этого следствия достаточно заметить, что при $q(r) \equiv q$ во всех точках множества $(0, r) \setminus \Delta_r$ выполняется неравенство

$$\ln m_F(t) > -q \ln M_F(r)$$

и, тем более, неравенство

$$\ln m_F(t) > -q \ln M_F(t)$$

(ибо $t \leqslant r$, а $M_F(t)$ — монотонно возрастающая функция).

Следствие 2. *Пусть $F(z)$ — целая функция, отличная от тождественного нуля, а $\lambda > 1$ — некоторая постоянная. Тогда существует бесконечная последовательность $\{r_n\}$ положительных чисел, удовлетворяющих условиям*

$$r_n \to +\infty; \quad r_{n-1} < r_n \leqslant \lambda r_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

и такая, что

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln m_F(r)}{\ln M_F(r)} \geqslant -\frac{\lambda+1}{\lambda-1}.$$

Легко видеть, что это следствие является лишь некоторой переформулировкой следствия 1.

Следствие 3. *Для любой целой функции $F(z)$*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln m_F(r)}{\ln M_F(r)} \geqslant -1.$$

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 3.5

1°. Пусть функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости, непрерывна вплоть до мнимой оси и удовлетворяет условиям

$$\ln|F(iy)| < \alpha|y|, \qquad -\infty < y < \infty,$$
$$\ln|F(z)| = o(|z|^2), \qquad z\to\infty,\ \operatorname{Re} z > 0,$$
$$\ln|F(x)| < -\rho x\ln x, \qquad x > 2.$$

Доказать, что если $\alpha < \frac{\pi\rho}{2}$, то $F(z)\equiv 0$.

2°. Пусть функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости, непрерывна вплоть до мнимой оси и удовлетворяет условиям

$$\ln|F(iy)| < \alpha h(|y|), \qquad -\infty < y < \infty,$$
$$\ln|F(z)| = o(|z|^2), \qquad z\to\infty,\ \operatorname{Re} z > 0,$$
$$\ln|F(x)| < -\rho x\int_a^x \frac{h(t)}{t^2}\,dt, \qquad x > x_0,$$

где $h(t) = t(\ln t)^\gamma l(\ln t)$, $\gamma > -1$, а $l(x)$ — аналитическая медленно растущая функция. Доказать, что если $\alpha < \frac{\pi\rho}{2}$, то $F(z)\equiv 0$.

3°. Пусть $n(r)$ — число точек последовательности $\{x_n\}$ с положительными членами на отрезке $(0, r)$. Предположим, что

$$n(r) \sim r^\rho l(r), \qquad 1\leqslant\rho<2,$$

где $l(r)$ — аналитическая медленно растущая функция, причем если $\rho = 1$, то интеграл $\int^\infty n(t)\,t^{-2}dt$ расходится. Обозначим

$$F(z) = \prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{iz}{x_n}\right)^{-1}\exp(iz/x_n).$$

Показать, что при $-\infty < x < \infty$ и $y > 0$ имеет место неравенство

$$\ln|F(x+iy)| \geqslant -An(|x|) + By\int_0^y n(t)\,t^{-2}dt$$

с некоторыми $A > 0$ и $B > 0$.

4°. Пусть $f(x)$ — функция, бесконечно дифференцируемая на всей действительной оси и равная нулю вне отрезка $(-a, a)$. Обозначим $M_n = \max\limits_{-\infty<x<\infty}|f^{(n)}(x)|$. Доказать, что если выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{-1/n} = +\infty,$$

то $f(x) \equiv 0$.

5°. Пусть $F(z)$ — целая функция, а

$$m_F(r) = \min_{|z|=r} |F(z)|, \quad M_F(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Доказать, что если

$$m_F(r) \leqslant m < \infty, \qquad r > 0,$$

то

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r)}{\sqrt{r}} > 0.$$

§ 3.6. Индикатор роста целой функции

В этом параграфе мы коснемся одного круга вопросов, который, пожалуй, можно считать лежащим в центре интересов современного положения теории целых функций. Этот круг вопросов связан с понятием индикатора целой функции. Это понятие мы могли бы определить и сразу, но мы отложим это на некоторое время, а сейчас поговорим об одной сравнительно простой и хорошо известной теореме.

Эта теорема говорит о представлении целой функции конечного порядка в виде бесконечного произведения, построенного по ее нулям. Ее роль в том, что она позволила свести исследование произвольных целых функций конечного порядка к исследованию канонических произведений.

Теорема 3.6.1. *Каждую целую функцию $F(z)$ порядка $\rho < \infty$ можно представить в виде*

$$F(z) = z^m \Phi(z) \exp(P(z)),$$

где $P(z)$ — некоторый многочлен, $\Phi(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $F(z)$, отличным от точки $z = 0$, а m — кратность нуля функции $F(z)$ в точке $z = 0$. При этом степень многочлена $P(z)$

и род канонического произведения $\Phi(z)$ не превосходит ρ.

Доказательство. Так как от деления функции $F(z)$ на Az^m ее порядок не изменится, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $F(0)=1$. Обозначим, как обычно, через $n_F(r)$ число нулей функции $F(z)$ в круге $|z|<r$, а

$$M_F(r)=\max_{|z|=r}|F(z)|.$$

По лемме 1 § 3.3

$$\ln M_F(r)\geqslant\int_0^r n_F(t)\frac{dt}{t}\geqslant n_F\left(\frac{r}{2}\right)\ln 2.$$

Из этого неравенства легко вывести, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln n_F(r)}{\ln r}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln r}=\rho. \qquad (1)$$

Обозначим теперь через $\Phi(z)$ каноническое произведение, построенное по нулям нашей функции $F(z)$. Тогда $n_\Phi(r)=n_F(r)$, и мы получаем из (1) в силу теоремы 3.3.5, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_\Phi(r)}{\ln r}\leqslant\rho. \qquad (2)$$

Таким образом, мы убедились, что порядок, а значит и род канонического произведения $\Phi(z)$ не превосходит числа ρ.

Нам остается доказать, что функция

$$P(z)=\ln Q(z)\overset{\text{def}}{=}\ln\frac{F(z)}{\Phi(z)}$$

является многочленом степени, не превосходящей числа ρ. Сразу можно заметить только, что $P(z)$ — целая функция, так как $Q(z)$ — целая функция, не имеющая нулей ($\Phi(z)$ по построению имеет те же нули, что и $F(z)$).

Оценим рост функции $Q(z)$. Имеем очевидные неравенства

$$\ln M_Q(r)\leqslant\ln M_F(r)-\ln m_\Phi(r)\leqslant$$
$$\leqslant 2\max\{\ln M_F(r),\ -\ln m_\Phi(r)\}.$$

Поэтому для любой последовательности $r_n \to +\infty$ имеем

$$\varlimsup_{r_n \to \infty} \frac{\ln \ln M_Q(r_n)}{\ln r_n} \leqslant \max(\rho, \rho'), \tag{3}$$

где

$$\rho' = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \max\{1, -\ln m_\Phi(r_n)\}}{\ln r_n}.$$

Согласно следствию 2 из теоремы 3.5.6 для каждого $\lambda > 1$ существует бесконечная последовательность $\{r_n\}$ положительных чисел, стремящихся к бесконечности, для которой

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{-\ln m_\Phi(r_n)}{\ln M_\Phi(r_n)} \leqslant \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}.$$

Из (2) видно, что для каждой такой последовательности $\rho' \leqslant \rho$, и потому

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \ln M_Q(r_n)}{\ln r_n} \leqslant \rho. \tag{4}$$

Переходя к функции $P(z)$, имеем

$$\ln M_Q(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} P(z).$$

Поэтому соотношение (4) дает нам

$$\max_{|z|=r_n} \operatorname{Re} P(z) = O\left(r_n^{\rho_1}\right), \qquad n \to \infty,$$

при любом $\rho_1 > \rho$. По теореме 3.1.2 отсюда вытекает, что $P(z)$ — многочлен степени, не превосходящий числа ρ. Теорема доказана.

Теперь мы уже можем с чистой совестью наконец перейти к определению понятия индикатора роста. Первоначально это понятие вводилось для целых функций порядка $\rho < \infty$ и конечного типа, но оно автоматически переносится и на функции любого точного роста $h(r)$. Мы сразу дадим определение для общего случая.

Пусть $F(z)$ — функция точного роста $h(r)$. Функция

$$H_F(\varphi) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{h(r)}$$

называется *индикатором роста* функции $F(z)$, относительно $h(r)$.

В определении не требуется, чтобы функция $F(z)$ была целой функцией конечного и положительного порядка, но тем не менее понятие индикатора оказывается полезным только в этом случае. Чтобы понять причины этого, мы найдем сейчас индикатор для некоторых конкретных функций.

Во первых, найдем индикатор роста для канонического произведения

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{z_n}\right),$$

где все z_n положительны и

$$n_F(r) \sim \sigma h(r), \qquad h(r) = r^\rho l(r), \qquad \rho < 1.$$

Эта функция была исследована в теореме 3.3.8. Утверждение этой теоремы означает, что

$$H_F(\varphi) = \frac{\pi\sigma}{\sin\pi\rho}\cos\rho\varphi, \qquad |\varphi| \leqslant \pi.$$

Видно, что при $\rho\to 0$ индикатор перестает зависеть от φ.

Это верно и не только для нашей конкретной функции. Несколько ниже мы покажем, что при порядке, равном нулю, индикатор не зависит от φ, т. е. он не дает никакой дополнительной информации о поведении целой функции.

Во вторых, найдем индикатор роста для функции $F(z) = \exp e^z$, положив, естественно, $h(r) = \exp e^r$. Очевидно, имеем $H_F(0) = 1$. При $\varphi \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ мы легко находим, что $H_F(\varphi) = 0$.

Из последнего примера видно, что у функций бесконечного порядка не имеет особого смысла исследовать их рост в зависимости от φ. Функция $F(z) = \exp e^z$ растет

при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ в полосах

$$|\operatorname{Im} z - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и стремится к нулю при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ в полосах

$$|\operatorname{Im} z - (2k+1)\pi| < \frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Все это остается незамеченным функцией $H_F(\varphi)$. Нетрудно даже построить пример целой функции бесконечного порядка, для которой

$$M_F(r) \sim h(r), \qquad r \to \infty,$$

а ее индикатор $H_F(\varphi)$ равен нулю при всех φ. Ясно, что при наличии подобных ситуаций индикатор также бесполезен.

В случае конечного положительного порядка индикатор дает разумную и содержательную характеристику роста целой функции по направлениям.

Основой всех исследований, связанных с индикатором, является следующее его свойство.

Теорема 3.6.2. *Пусть $F(z)$ — целая функция порядка $\rho < \infty$ и точного роста $h(r)$, где $h(r) = r^{\rho} l(r)$, а $l(r)$ — аналитическая медленно растущая функция. Тогда индикатор $H_F(\varphi)$ функции $F(z)$ относительно роста $h(r)$ является функцией класса T_ρ. Иными словами, $H_F(\varphi)$ — ограниченная сверху тригонометрически ρ-выпуклая функция, определенная на всей оси и имеющая период 2π.*

Доказательство. Ясно, что при желании индикатор можно рассматривать, как функцию, определенную на всей оси и имеющую период 2π. Его ограниченность сверху следует из неравенства

$$H_F(\varphi) \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r)}{h(r)} = \sigma < \infty,$$

ибо $h(r)$ — точный рост функции $F(z)$. В доказательстве нуждается лишь тригонометрическая ρ-выпуклость индикатора.

Возьмем произвольные φ_1 и φ_3, подчиненные условию

$$\varphi_1 < \varphi_3 < \varphi + \frac{\pi}{\rho}, \tag{5}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$F_1(z) = F(z)\exp\{-Ah(ze^{-i\varphi_1}) - Bh(ze^{-i\varphi_3})\}$$

в угле $\varphi_1 < \arg z < \varphi_3$. Поскольку функция $F(z)$ имеет точный рост $h(r)$, при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\ln|F_1(z)| = O(h(|z|)) = o(|z|^{\rho+\varepsilon}), \quad \varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_3.$$

Поэтому, если функция $F(z)$ ограничена (по модулю) на сторонах нашего угла, то по теореме 3.4.2 она будет ограничена и внутри него. Из сказанного следует, что неравенство

$$H_F(\varphi) \leqslant A \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{Re} h(re^{i(\varphi-\varphi_1)})}{h(r)} + B \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{Re} h(re^{i(\varphi-\varphi_3)})}{h(r)}$$

будет выполняться при $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_3$, если оно выполняется (как строгое неравенство) при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_3$. Согласно следствию из леммы 1 § 3.1

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{Re} h(re^{i\theta})}{h(r)} = \cos\rho\theta,$$

и мы видим, что неравенство

$$H_F(\varphi) \leqslant A\cos\rho(\varphi-\varphi_1) + B\cos\rho(\varphi-\varphi_3) = \\ = A'\cos\rho\varphi + B'\sin\rho\varphi$$

справедливо, если справедливы неравенства

$$H_F(\varphi_1) < A'\cos\rho\varphi_1 + B'\sin\rho\varphi_1,$$
$$H(\varphi_3) < A'\cos\rho\varphi_3 + B'\sin\rho\varphi_3.$$

Это и означает, что функция $H_F(\varphi)$ тригонометрически ρ-выпукла.

Замечание. Понятие индикатора можно было бы ввести не только для целых функций, но и для функций, регулярных в некотором угле. И в этом случае те же рассуждения позволили бы доказать тригонометрическую ρ-выпуклость индикатора.

Из свойств функций класса T_ρ, доказанных в § 2.3, вытекают многие полезные свойства индикатора. В частности, полезно отметить его *непрерывность*. Напомним также, что при любых φ_1, φ_2, φ_3, подчиненных условиям

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3 \leqslant \varphi_1 + \frac{\pi}{\rho},$$

индикатор $H_F(\varphi)$ целой функции порядка ρ относительно какого-либо ее точного роста удовлетворяет неравенству

$$H_F(\varphi_1)\sin\rho(\varphi_3-\varphi_2) + \\ + H_F(\varphi_2)\sin\rho(\varphi_1-\varphi_3) + H_F(\varphi_3)\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1) \geqslant 0.$$

Полагая в этом неравенстве $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2\rho}$, $\varphi_3 = \varphi + \frac{\pi}{\rho}$, мы приходим к следующему часто применяемому неравенству:

$$H_F(\varphi) + H_F\left(\varphi + \frac{\pi}{\rho}\right) \geqslant 0, \quad -\infty < \varphi < \infty. \tag{6}$$

Заметим еще, что из неравенства, полученного в § 2.3 при доказательстве непрерывности функций из класса T_ρ, вытекает, что класс T_0 состоит только из постоянных функций. Поэтому индикатор функции нулевого порядка — постоянная.

Теорема 3.6.3. *Пусть $F(z)$ — целая функция порядка $\rho < \infty$ и точного роста $h(r)$, а I — произвольный отрезок действительной оси. Введем обозначение*

$$M_F(r, I) = \sup_{\varphi\in I} |F(re^{i\varphi})|.$$

Для любого отрезка I справедливо равенство

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r, I)}{h(r)} = \sup_{\varphi\in I} H_F(\varphi),$$

где $H_F(\varphi)$ — индикатор целой функции $F(z)$ по отношению к ее точному росту $h(r)$.

Доказательство. Если отрезок I разбит на сумму конечного числа отрезков $I_1, \ldots, I_n$, то из определения верхнего предела нетрудно вывести справедливость формулы

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r, I)}{h(r)} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left\{\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r, I_k)}{h(r)}\right\}. \tag{7}$$

Эта формула позволит нам ограничиться рассмотрением сколь угодно малых отрезков I.

Возьмем произвольный отрезок I' вида $(\varphi'-\delta, \varphi'+\delta)$, где число $\delta > 0$ достаточно мало, обозначим через S' угол

$$S' = \{z\colon \arg z \in I'\}$$

и рассмотрим в угле S' функцию

$$F_1(z) = F(z)\exp\{-Ah(ze^{-i\varphi'})\}.$$

Из теоремы 3.4.2 нетрудно вывести, что функция $F_1(z)$ будет ограничена в угле S', если она ограничена на его сторонах (и если δ достаточно мало). Для ограниченности на сторонах достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln |F_1(re^{i(\varphi'\pm\delta)})|}{h(r)} < 0. \tag{8}$$

С помощью следствия из леммы 1 § 3.1 находим, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln |F_1(re^{i(\varphi'\pm\delta)})|}{h(r)} = H_F(\varphi' \pm \delta) - A\cos\delta.$$

Поэтому неравенства (8) заведомо будут выполнены, если взять

$$A\cos\delta > \sup_{\varphi\in I'} H_F(\varphi).$$

Итак, при любых A, удовлетворяющих этому неравенству, имеем

$$|F(z)| \leqslant M_A \exp(Ah(|z|)), \qquad z \in S'.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r, I')}{h(r)} \leqslant \frac{1}{\cos\delta} \cdot \sup_{\varphi\in I'} H_F(\varphi). \tag{9}$$

Пусть длина исходного отрезка I равна Δ. Разобьем его на n отрезков равной длины и применим к каждому из них неравенство (9), а затем воспользуемся формулой (7). Это даст нам

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r, I)}{h(r)} \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2n}} \sup_{\varphi\in I} H_F(\varphi).$$

Так как число n произвольно велико, то отсюда следует, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r, I)}{h(r)} \leqslant \sup_{\varphi\in I} H_F(\varphi).$$

Поскольку обратное неравенство очевидно, мы приходим к утверждению теоремы.

Из доказанной теоремы видно, что индикатор целой функции конечного порядка дает нам истинную информацию о росте этой функции в каждом угле (напомним о примере целой функции бесконечного порядка, у которой индикатор относительно ее точного роста равен нулю при всех φ).

Прежде чем говорить о еще одном важном этапе в развитии теории целых функций, мы докажем одну теорему не о целых функциях, а о функциях класса T_ρ.

Теорема 3.6.4. *Если ρ — не целое число, то функция $H(\varphi)$ принадлежит классу T_ρ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде*

$$H(\varphi) = \int_0^{2\pi} Q_\rho(\varphi - \theta)\, d\nu(\theta),$$

где $\nu(\theta)$ — функция, неубывающая и ограниченная на *отрезке* $(0, 2\pi)$, *а ядро* $Q_\rho(\varphi)$ — *периодическая с периодом* 2π *функция, определяемая на отрезке* $(-\pi, \pi)$ *равенством*

$$Q_\rho(\varphi) = \frac{\cos\rho(\pi - |\varphi|)}{2\sin\pi\rho}, \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала дважды непрерывно дифференцируемые функции $H(\varphi)$ из класса T_ρ. Обозначив

$$\mu(\varphi) = H''(\varphi) + \rho^2 H(\varphi),$$

мы можем рассматривать функцию $H(\varphi)$, как решение дифференциального уравнения $y'' + \rho^2 y = \mu(\varphi)$, определенное на всей оси и имеющее период 2π. Эти решения можно получить и как решения краевой задачи

$$y'' + \rho^2 y = \mu(\varphi), \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi), \tag{10}$$

поставленной на отрезке $(0, 2\pi)$. Действительно, каждое периодическое решение с периодом 2π является решением краевой задачи (10). С другой стороны, каждое решение краевой задачи (10) можно периодически продолжить с периодом 2π на всю действительную ось (с сохранением непрерывности двух производных). Непосредственным дифференцированием нетрудно проверить, что формула

$$H(\varphi) = \frac{1}{2\sin\pi\rho} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \mu(\theta)\cos\rho(\varphi - \theta - \pi)\,d\theta \tag{11}$$

дает интересующее нас решение. Это решение единственно, так как однородное уравнение не имеет нетривиальных решений с периодом, равным 2π при нецелом ρ.

Введем функцию $Q_\rho(\varphi)$, определенную в формулировке теоремы, и функцию

$$\nu(\varphi) = \int_0^{\varphi} \mu(\theta)\,d\theta.$$

Заметим, что интеграл от периодической функции по периоду не зависит от выбора начальной точки отрезка интегрирования, мы придем к формуле, предложенной в утверждении теоремы. Функция $\nu(\varphi)$ не убывает на отрезке $(0, 2\pi)$ ввиду положительности функции $\mu(\varphi)$. Для наибольшего значения функции $\nu(\varphi)$ — оно равно $\nu(2\pi)$, мы можем получить простую формулу. Для этого достаточно проинтегрировать формулу для $H(\varphi)$ по отрезку $(0, 2\pi)$, После несложных вычислений получим

$$\nu(2\pi) = \frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi} H(\varphi)\,d\varphi. \tag{12}$$

Теперь нам остается освободиться от предположения о существовании двух непрерывных производных у функции $H(\varphi)$.

Пусть $H(\varphi)$ — произвольная функция из класса T_ρ, а $H_n(\varphi)$ — последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций из класса T_ρ, для которых $H_n(\varphi) \to H(\varphi)$ равномерно на всей оси. Через $\nu_n(\theta)$ мы обозначим неубывающие функции, построенные описанным выше образом для функций $H_n(\varphi)$. Из формулы (12) видно, что все функции $\nu_n(\theta)$ ограничены на отрезке $(0, 2\pi)$ некоторой постоянной, независящей от n. Из теоремы Хелли о последовательностях монотонных ограниченных функций легко вывести, что существует предел $\lim \nu_n(\theta) = \nu(\theta)$, и что переход к пределу в равенстве

$$H_n(\varphi) = \int_0^{2\pi} Q_\rho(\varphi - \theta)\,d\nu_n(\theta)$$

возможен.

Для окончательного завершения доказательства нам следовало бы еще проверить, что каждая функция $H(\varphi)$, представимая интегральной формулой, предложенной в нашей теореме, принадлежит классу T_ρ. Для этого достаточно показать, что функция $Q_\rho(\varphi)$ принадлежит классу T_ρ. Этот факт вытекает из наших рассуждений, но при желании его можно проверить и непосредственно.

Аналогичное представление существует и для целых ρ, но там формулы немного сложнее.

Теорема 3.6.4*. *Пусть $\rho > 0$ — целое число. Функция $H(\varphi)$ принадлежит классу T_ρ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде*

$$H(\varphi) = \int_0^{2\pi} Q_\rho^*(\varphi - \theta)\, d\nu(\theta),$$

где $\nu(\theta)$ — неубывающая и ограниченная на отрезке $(0, 2\pi)$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\theta} d\nu(\theta) = 0,$$

а ядро $Q_\rho^*(\varphi)$ — периодическая функция с периодом 2π, определенная на отрезке $(-\pi, \pi)$ равенством

$$Q_\rho^*(\varphi) = \frac{(\pi - |\varphi|)\sin\rho(\pi - |\varphi|)}{2\pi\rho}, \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Доказательство. Мы опять рассмотрим дважды дифференцируемую функцию $H(\varphi)$ из класса T_ρ и опять обозначим

$$\mu(\varphi) = H''(\varphi) + \rho^2 H(\varphi).$$

Возьмем нецелое ρ_1, сколь угодно близкое к ρ, и вместо краевой задачи (10) рассмотрим краевую задачу

$$y'' + \rho_1^2 y = \mu^*(\varphi), \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi), \tag{10*}$$

где

$$\mu^*(\varphi) = \mu(\varphi) + \left(\rho_1^2 - \rho^2\right) H(\varphi).$$

Поскольку функция $H(\varphi)$ является решением этой краевой задачи, то для нее имеет место полученное нами ранее представление

$$H(\varphi) = \int_0^{2\pi} Q_{\rho_1}(\varphi - \theta)\, \mu^*(\theta)\, d\theta. \tag{13}$$

Мы совершим сейчас в этом представлении предельный переход $\rho_1 \to \rho$. С этой целью заметим, что имеет место асимптотическая формула

$$Q_{\rho'}(\varphi)=\frac{\cos\rho\varphi}{2\sin\pi\rho_1}+Q_\rho^*(\varphi)+O(\rho-\rho_1),\qquad \rho_1\to\rho.$$

С помощью этой асимптотической формулы мы получаем из формулы (13)

$$H(\varphi)=$$
$$=\int_0^{2\pi}Q_\rho^*(\varphi-\theta)\,\mu(\theta)\,d\theta+\frac{\rho}{\pi}(-1)^\rho\int_0^{2\pi}\cos\rho(\varphi-\theta)\cdot H(\theta)\,d\theta+$$
$$+\frac{1}{2\sin\pi\rho_1}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\cos\rho(\varphi-\theta)\,d\theta+O(\rho-\rho_1),\qquad \rho\to\rho_1.$$

Левая часть написанного выражения и первые два интеграла в его правой части не зависят от ρ_1. Поэтому предел последнего интеграла должен существовать. Он существует лишь при условии, что

$$\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\cos\rho\theta\,d\theta=0,\qquad \int_0^{2\pi}\mu(\theta)\sin\rho\theta\,d\theta=0.$$

Эти условия равносильны одному условию

$$\int_0^{2\pi}e^{i\rho\theta}\mu(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}e^{i\rho\theta}d\nu(\theta)=0.$$

Замечая еще, что

$$\frac{\rho}{\pi}(-1)^\rho\int_0^{2\pi}H(\theta)\cos\rho(\varphi-\theta)\,d\theta=A\cos\rho\varphi+B\sin\rho\varphi,$$

мы приходим к утверждению теоремы. От предположения, что функция $H(\varphi)$ дважды непрерывно дифференцируема, опять освобождаемся с помощью предельного перехода.

Важный этап в развитии теории целых функций, ради рассказа о котором мы доказали теоремы 3.6.4 и 3.6.4*, состоял во введении в рассмотрение класса целых функций, свойства которых очень полно определяются их индикаторами. Этот класс был введен А. Пфлюгером и независимо от него Б. Я. Левиным. Он получил название класса целых функций *вполне регулярного роста*. Точное определение этого класса потребовало бы довольно много места, и мы от него уклонимся. Вместо определения мы попытаемся дать некоторое представление о существе дела.

Заметим, что для произвольной целой функции $F(z)$ ее индикатор $H_F(\varphi)$ по самому своему смыслу не претендует на характеристику асимптотического поведения функции $F(z)$. В его определении стоит верхний предел, и индикатор указывает таким образом лишь верхнюю границу роста модуля функции $F(z)$ по каждому лучу. Если при каком-либо φ в формуле для индикатора имеет место точный, а не верхний предел, то мы уже можем написать асимптотическую формулу для функции $\ln|F(re^{i\varphi})|$ при $r\to+\infty$. Существенно бóльшие возможности появляются, когда точный предел в формуле для индикатора имеет место на целом отрезке и к тому же равномерно по φ. Прежде чем продолжать наш разговор о функциях вполне регулярного роста, мы докажем две теоремы, из которых будет видно, о каких возможностях идет речь.

Теорема 3.6.5. *Пусть $F(z)$ — целая функция порядка $\rho<\infty$ и точного роста $h(r)$. Если на отрезке (α, β) равномерно по φ существует предел*

$$H_F(\varphi)=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{h(r)},\qquad \alpha<\varphi<\beta,$$

то

$$H_F(\varphi)=A\cos\rho\varphi+B\sin\rho\varphi,\qquad \alpha<\varphi<\beta.$$

Кроме того, существует и предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln|F(re^{i\varphi})|}{h(r)}=H'_F(\varphi),\qquad \alpha<\varphi<\beta,$$

причем здесь стремление к пределу равномерно по φ на каждом отрезке, лежащем строго внутри отрезка (α, β).

Доказательство. Из равномерного существования предела для индикатора вытекает, в частности, что функция $F(z)$ не имеет нулей в секторе

$$|z| > R_0, \quad \alpha+\varepsilon < \arg z < \beta-\varepsilon$$

при любом $\varepsilon > 0$ и при достаточно большом $R_0 = R_0(\varepsilon)$. Это означает, что функция $\ln|F(rz)|$ гармонична по z в кольцевом секторе

$$\rho < z < R, \quad \alpha+\varepsilon < \arg z < \beta-\varepsilon$$

при любых фиксированных $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ и $R < \infty$, если только число $r > 0$ достаточно велико. Поскольку точный рост $h(r)$ мы предполагаем, как всегда, имеющим вид $h(r) = r^\rho l(r)$, где $l(r)$ — аналитическая медленно растущая функция, то

$$h(ra) \sim a^\rho h(r), \qquad r\to\infty, \ \rho \leqslant a \leqslant R.$$

Отсюда мы видим, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|F(rz)|}{h(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|F(rz)|}{h(r|z|)} \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{h(r|z|)}{h(r)} = \\ = |z|^\rho H_F(\arg z), \qquad \alpha < \arg z < \beta,$$

причем стремление к пределу равномерно по z в указанном выше кольцевом секторе с любыми $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ и $R < \infty$. Следовательно, функция $|z|^\rho H_F(\arg z)$ гармонична в угле $\alpha < \arg z < \beta$, как предел равномерно сходящейся последовательности гармонических функций. Вычислив оператор Лапласа для функции

$$U(re^{i\varphi}) = r^\rho H_F(\varphi),$$

мы получим, что

$$0 = \Delta U = r^{\rho-2}(\rho^2 H(\varphi) + H''(\varphi)).$$

Итак, мы доказали, что $H''(\varphi) + \rho^2 H(\varphi) = 0$, откуда немедленно получаем первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы следует из того факта, что равномерно сходящуюся последовательность гармонических функций можно почленно дифференцировать (ибо дифференцирование гармонической функции сводится к интегрированию по границе сколь угодно малого круга с помощью интеграла Пуассона).

Вторая теорема, которую мы сейчас докажем, ставит своей целью ответ на следующий естественно возникающий вопрос. Пусть мы имеем два прилегающих концами отрезка, внутри каждого из которых равномерно по φ существует точный предел в формуле для индикатора. Что происходит на стыке этих отрезков? Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\nu(r)$ — *монотонно возрастающая функция*, $h(r) = r^{\rho}l(r)$, $\rho > 0$. *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует последовательность* $r_n \to \infty$, *для которой* $r_n \leqslant r_{n+1} \leqslant (1+\varepsilon) r_n$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(r_n)}{h(r_n)} = a,$$

то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{h(r)} = a.$$

Доказательство. Возьмем какое-либо $\varepsilon > 0$ и соответствующую ему последовательность r_n. Из свойств последовательности r_n и из определения медленно растущей функции следует, что при любом $\rho_1 > \rho$ имеем

$$(1+\varepsilon)^{\rho_1} h(r_n) > h(r) > (1+\varepsilon)^{-\rho_1} h(r_{n+1})$$

когда

$$r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}, \quad n > n_0.$$

Но функция $\nu(r)$ монотонно возрастает. Поэтому при $r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}$

$$(1+\varepsilon)^{-\rho_1} \frac{\nu(r_n)}{h(r_n)} < \frac{\nu(r_n)}{h(r)} \leqslant \frac{\nu(r)}{h(r)} \leqslant \frac{\nu(r_{n+1})}{h(r)} < (1+\varepsilon)^{\rho_1} \frac{\nu(r_{n+1})}{h(r_{n+1})},$$

откуда следует

$$a(1+\varepsilon)^{-\rho_1} \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{h(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{h(r)} \leqslant a(1+\varepsilon)^{\rho_1}.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, а $\varliminf\limits_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{h(r)}$ и $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{h(r)}$ не зависят от ε, мы получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $n(r)$ — *неубывающая функция,* $h(r) = r^\rho l(r)$, $\rho > 0$. *Если*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h(r)}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt = S,$$

то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{h(r)} = \rho S.$$

Доказательство. Обозначим $n_1(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt$.

Так как $h(\lambda r) \sim \lambda^\rho h(r)$, то из предположения леммы при любом фиксированном λ мы легко получаем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h(r)}[n_1(\lambda r) - n_1(r)] = \left(\lambda^\rho - 1\right)S,$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h(r)}\left[n_1(r) - n_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right] = \left(1 - \lambda^{-\rho}\right)S.$$

Но $n(r)$ — неубывающая функция. Поэтому $n(\lambda r)\ln\lambda \geqslant$ $\geqslant n_1(\lambda r) - n_1(r) \geqslant n(r)\ln\lambda$, откуда

$$\frac{n_1(r) - n_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{\ln\frac{1}{\lambda}} \leqslant n(r) \leqslant \frac{n_1(\lambda r) - n_1(r)}{\ln\lambda}, \qquad \lambda > 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1 - \lambda^{-\rho}}{\ln\frac{1}{\lambda}}S \leqslant \varliminf_{r\to\infty}\frac{n(r)}{h(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)}{h(r)} \leqslant \frac{\lambda^\rho - 1}{\ln\lambda}S, \qquad \lambda > 1.$$

Поскольку λ можно взять сколь угодно близким к единице, а $\varliminf\limits_{r\to\infty}\frac{n(r)}{h(r)}$ и $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{n(r)}{h(r)}$ не зависят от λ, мы получаем утверждение леммы.

Теорема 3.6.6. *Пусть $F(z)$ — целая функция порядка $\rho < \infty$ и точного роста $h(r)$. Обозначим через I_ε^+ и I_ε^- отрезки*

$$I_\varepsilon^+ = (\varphi_0 + \varepsilon, \varphi_0 + \eta),$$
$$I_\varepsilon^- = (\varphi_0 - \eta, \varphi_0 - \varepsilon), \quad 0<\varepsilon<\eta, \tag{14}$$

через S_r^θ — сектор

$$S_r^\theta = \{z:\ |z| < r,\ |\arg z - \varphi_0| < \theta\}, \tag{15}$$

а через $n_\theta(r)$ — число нулей функции $F(z)$ в секторе S_r^θ. Если при некотором $\eta > 0$ и при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ на отрезках I_ε^+ и I_ε^- равномерно по φ существует предел

$$H_F(\varphi) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{h(r)},$$

то при любом $0 < \theta < \eta$ справедлива формула

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_\theta(r)}{h(r)} = \frac{1}{2\pi}\{H_F'(\varphi_0 + 0) - H_F'(\varphi_0 - \theta)\}.$$

Доказательство. Из равномерности существования предела в формуле для индикатора на отрезках I_ε^+ и I_ε^- вытекает, что в углах

$$-\eta < \arg z - \varphi_0 < -\varepsilon, \quad \varepsilon < \arg z - \varphi_0 < \eta$$

лежит лишь конечное число нулей функции $F(z)$. Поэтому при любом $\varepsilon < \theta < \eta$ и при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$n_\theta(r) = n_\varepsilon(r) + O(1), \quad r\to\infty. \tag{16}$$

Считая, что на границе сектора S_r^ε нет нулей функции $F(z)$, мы можем написать формулу

$$n_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_r^\varepsilon} \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz,$$

которой ввиду действительности числа $n_\varepsilon(r)$ можно придать вид

$$n_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial S_r^\varepsilon} \operatorname{Im}\left\{\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz\right\}. \tag{17}$$

Обозначим

$$U(r, \varphi) = \ln\left|F\left(re^{i(\varphi_0+\varphi)}\right)\right|.$$

Нам желательно выразить $n_\varepsilon(r)$ через функцию $U(r, \varphi)$, так как знание индикатора дает нам асимптотические формулы только для нее. Из уравнений Коши — Римана нетрудно вывести формулу

$$\frac{F'\left(re^{i(\varphi_0+\varphi)}\right)}{F\left(re^{i(\varphi_0+\varphi)}\right)}\,e^{i(\varphi_0+\varphi)} = U'_r(r, \varphi) - \frac{i}{r}\,U'_\varphi(r, \varphi).$$

В силу этой формулы на лучах $\arg z = \varphi_0 \pm \varepsilon$ имеем

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz\right\} = -U'_\varphi(t, \pm\varepsilon)\,\frac{dt}{t}, \qquad z = te^{i(\varphi_0\pm\varepsilon)},$$

а на окружности $|z| = r$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz\right\} = rU'_r(r, \varphi)\,d\varphi, \qquad z = re^{i(\varphi_0+\varphi)}.$$

Поэтому формула (17) принимает вид

$$n_\varepsilon(r) = \lambda_\varepsilon(r) + \mu_\varepsilon(r),$$

где

$$\lambda_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r \{U'_\varphi(t, \varepsilon) - U'_\varphi(t, -\varepsilon)\}\,\frac{dt}{t},$$

а

$$\mu_\varepsilon(r) = \frac{r}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} U'_r(r, \varphi)\,d\varphi.$$

Из теоремы 3.6.5 следует, что

$$\lambda_\varepsilon(r) \sim \frac{h(r)}{2\pi} \cdot \{H'_F(\varphi_0 + \varepsilon) - H'_F(\varphi_0 - \varepsilon)\}. \tag{18}$$

Оценка функции $\mu_\varepsilon(r)$ существенно сложнее. Именно для нее нужны доказанные выше леммы.

Рассмотрим функцию

$$n_\varepsilon^*(r) = \int_0^r n_\varepsilon(t)\,\frac{dt}{t}$$

и аналогично построенные функции $\lambda_\varepsilon^*(r)$ и $\mu_\varepsilon^*(r)$. Считая для простоты, что $F(0) = 1$, мы получаем для функции $\mu_\varepsilon^*(r)$ формулу

$$\mu_\varepsilon^*(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} U(r, \varphi)\,d\varphi.$$

Для функции $\lambda_\varepsilon^*(r)$ из формулы (18) легко получаем, что

$$\lambda_\varepsilon^*(r) \sim \frac{h(r)}{2\pi\rho} \cdot \{H'_F(\varphi_0 + \varepsilon) - H'_F(\varphi_0 - \varepsilon)\}. \tag{18*}$$

Обозначим

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\ln M_F(r)}{h(r)}.$$

С одной стороны, мы имеем для функции $\mu_\varepsilon^*(r)$ очевидную оценку

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\mu_\varepsilon^*(r)}{h(r)} \leqslant 2\varepsilon\sigma. \tag{19}$$

С другой стороны, согласно следствию из теоремы 3.5.6 для каждого $k > 1$ существует последовательность $r_n \to +\infty$, удовлетворяющая условиям $r_{n-1} < r_n < kr_{n-1}$, и такая, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\ln m_F(r_n)}{h(r)} \geqslant -\sigma \cdot \frac{k+1}{k-1}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mu_\varepsilon^*(r_n)}{h(r_n)} \geqslant -2\varepsilon\sigma \frac{k+1}{k-1}. \tag{20}$$

Из неравенств (19) и (20) вместе с формулой (18*) мы получаем, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n_\varepsilon^*(r)}{h(r)} \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \{H_F'(\varphi_0+\varepsilon) - H_F'(\varphi_0-\varepsilon)\} + 2\varepsilon\sigma \tag{21}$$

и

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n_\varepsilon^*(r_n)}{h(r_n)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi\rho} \{H_F'(\varphi_0+\varepsilon) - H_F'(\varphi_0-\varepsilon)\} - 2\varepsilon\sigma \frac{k+1}{k-1}. \tag{22}$$

Из формулы (16) видно, что при любом фиксированном $0<\theta<\eta$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n_\theta^*(r)}{h(r)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n_\varepsilon^*(r)}{h(r)}, \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{n_\theta^*(r_n)}{h(r_n)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n_\varepsilon^*(r_n)}{h(r_n)}.$$

Это значит, что неравенства (21) и (22) остаются в силе, если заменить в них функцию $n_\varepsilon^*(r)$ функцией $n_\theta^*(r)$. Но величины

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n_\theta^*(r)}{h(r)}, \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{n_\theta^*(r_n)}{h(r_n)}$$

уже не зависят от ε. Поэтому, полагая $\varepsilon\to 0$, мы получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_\theta^*(r_n)}{h(r_n)} = \frac{1}{2\pi\rho} \{H_F'(\varphi_0+0) - H_F'(\varphi_0-0)\}. \tag{23}$$

При выборе последовательности r_n мы могли взять $k=1+\delta$, где число $\delta>0$ сколь угодно мало. Поэтому, применяя лемму 1, находим

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_\theta^*(r)}{h(r)} = \frac{1}{2\pi\rho} \{H_F'(\varphi_0+0) - H_F'(\varphi_0-0)\}.$$

Применив теперь лемму 2, мы получим утверждение теоремы.

Если весь отрезок $(0, 2\pi)$ можно разбить на конечное число интервалов, внутри каждого из которых существует равномерно по z точный предел в формуле для индикатора целой функции $F(z)$, то для такой целой функции теорема 3.6.6 дает хорошее асимптотическое описание распределения ее нулей. Действительно, из теоремы 3.6.6 следует, что в этом случае нули функции $F(z)$ расположены вблизи тех лучей, которые отвечают точкам разрыва производной индикатора. Более того, для числа этих нулей можно написать асимптотические формулы. Мы придадим сейчас этому утверждению более удобный вид.

Обозначим через $n_F(r;\ \alpha,\ \beta)$ число нулей функции $F(z)$ в секторе

$$|z| < r, \quad \alpha < \arg z < \beta.$$

Тогда из теоремы 3.6.6 следует, что предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_F(r;\alpha,\beta)}{h(r)} = \varkappa(\alpha,\beta)$$

существует, если ни α, ни β не совпадают с точками разрыва производной индикатора $H_F(\varphi)$, которые мы обозначим через φ_k. Допустим, для определенности, что ни одна из точек φ_k не равна нулю, и рассмотрим функцию

$$\lambda_F(\theta) = 2\pi\varkappa(0, \theta).$$

Эта функция кусочно-постоянна. Она имеет скачки в точках $\varphi = \varphi_k$, а величина этих скачков равна $H_F(\varphi_k+0) - H_F(\varphi_k-0)$. Поэтому, используя дельтафункцию Дирака $\delta(x)$, мы можем написать

$$\lambda_F'(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} \{H_F(\varphi_k + 0) - H_F(\varphi_k - 0)\}\, \delta(\varphi - \varphi_k).$$

Но из теоремы 3.6.5 нетрудно вывести, что и

$$H_F''(\varphi) + \rho^2 H_F(\varphi) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \{H_F(\varphi_k + 0) - H_F(\varphi_k - 0)\}\, \delta(\varphi - \varphi_k),$$

т. е.

$$H_F''(\varphi) + \rho^2 H_F(\varphi) = \lambda_F'(\varphi).$$

В доказательствах теорем 3.6.4 и 3.6.4* мы строили представление функции $H(\varphi)$ из класса T_ρ с помощью функции $\nu(\theta)$, связанной с функцией $H(\varphi)$ именно таким образом (мы обозначали там $\nu'(\theta)$ через $\mu(\theta)$). Таким образом, мы выяснили, что для описанного нами выше класса целых функций $F(z)$ их индикатор связан с функцией $\lambda_F(\theta)$, описывающей распределение нулей функции $F(z)$ по углам, формулой

$$H_F(\varphi) = \int_0^{2\pi} Q_\rho(\varphi - \theta)\, d\lambda_F(\theta) \qquad .$$

для нецелого ρ и формулой

$$H_F(\varphi) = A \cos \rho\varphi + B \sin \rho\varphi + \int_0^{2\pi} Q_\rho^*(\varphi - \theta)\, d\lambda_F(\theta)$$

для целого ρ. Здесь, как и в теоремах 3.6.4 и 3.6.4*, ядра $Q_\rho(\varphi)$ и $Q_\rho^*(\varphi)$ представляют собой периодические функции с периодом 2π, определенные на отрезке $(-\pi, \pi)$ равенствами

$$Q_\rho(\varphi) = \frac{\cos \rho (\pi - |\varphi|)}{2 \sin \pi\rho}, \qquad -\pi < \varphi \leqslant \pi,$$

и

$$Q_\rho^*(\varphi) = \frac{(\pi - |\varphi|) \sin \rho (\pi - |\varphi|)}{2\pi\rho}, \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Эти формулы справедливы и для более широкого класса, о котором упоминалось выше,— для класса функций вполне регулярного роста. Идея, которая легла в основу определения этого класса, состоит в том, что нули целой функции в действительности не изменяют правильности или неправильности ее поведения на бесконечности. Нужно лишь исключить из рассмотрения некоторые малые окрестности нулей, и брать предел в формуле для индикатора по оставшемуся множеству. Подробное изложение теории целых функций вполне регулярного роста можно найти в книге Б. Я. Левина «Распределение корней целых функций», Москва, ГТТИ, 1956 г.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 3.6

1°. Пусть $F(z)$ — функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяющая условию

$$\ln|F(x+iy)| = O(e^{\rho x}), \qquad x > 0.$$

Показать, что функция

$$h_F(y) = \varlimsup_{x\to+\infty} e^{-\rho x} \ln|F(x+iy)|$$

тригонометрически ρ-выпукла (но не обязательно периодична).

2°. Пусть функция $F(z)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re} z| \leqslant a$ и удовлетворяет условию

$$|F(x+iy)| = O(|y|^k), \qquad y \to \pm\infty.$$

Показать, что функция

$$h_F(x) = \varlimsup_{y\to\pm\infty} \frac{\ln|F(x+iy)|}{\ln|y|}$$

выпукла книзу.

3°. Доказать, что теорема 3.6.6. остается в силе, если $F(z)$ — не целая функция, а только регулярна в угле $|\arg z - \varphi_0| \leqslant \eta$ и удовлотворяет условию

$$\ln|F(z)| = O(h(|z|)).$$

4°. Доказать, что функция $H(\varphi)$ принадлежит классу T_1 тогда и только тогда, когда она является опорной функцией какой-либо выпуклой ограниченной области на плоскости.

5°. Пусть $F(z)$ — аналитическая функция, регулярная в полуполосе $\operatorname{Re} z > 0$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant \eta$, и пусть при любом $a > 0$ равномер-

но по y, $a \leqslant |y| \leqslant \eta$, существует предел

$$h_F(y) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|F(x+iy)|}{e^{\rho x}}$$

(кроме того, $\ln|F(x+iy)| = O(e^{\rho x})$, $x \to +\infty$). Обозначим через $n_0(x)$ число нулей $F(z)$ в прямоугольнике $0 < \operatorname{Re} z < x$, $|\operatorname{Im} z| < \eta$. Показать, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{n_0(x)}{e^{\rho x}} = \frac{1}{2\pi\rho}\left(h_F'(+0) - h_F'(-0)\right).$$

§ 3.7. Интерполяция целых функций

Сейчас мы коротко расскажем еще об одном направлении теории целых функций, бурно развивавшегося 25—50 лет назад. Это направление довольно тесно связано со многими другими областями анализа и теории функций (ряды Дирихле, полнота и замкнутость систем функций и др.).

Основная постановка задачи (многократно обобщавшаяся различными способами) состоит в следующем. Дана последовательность точек $\{\lambda_n\}$, где $\lambda_n \to \infty$. Требуется найти условия на класс функций (целых или хотя бы регулярных в некоторой области, содержащей все точки λ_n), чтобы этот класс содержал не более одной функции $F(z)$ с заданными значениями $F(\lambda_n)$. Теоремы такого рода называются *теоремами единственности*.

Когда теоремы единственности уже получены, возникают и более сложные задачи. Например, восстановить функцию $F(z)$ из класса единственности по ее значениям $F(\lambda_n)$, или найти условия на числа A_n, чтобы существовала функция $F(z)$ из класса единственности, для которой $F(\lambda_n) = A_n$.

Мы будем говорить об одном из наиболее простых случаев, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям

$$0 < \operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant \ldots; \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma, \tag{1}$$

где $0 < \sigma < \infty$. С последовательностью $\{\lambda_n\}$ обычно всегда связывают функцию

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Условия (1), как нетрудно убедиться, обеспечивают сходимость бесконечного произведения.

Вот одна из основных теорем единственности.

Теорема 3.7.1. *Пусть функция $F(z)$ регулярна в правой полуплоскости, непрерывна вплоть до мнимой оси и удовлетворяет условиям*

$$|F(iy)| \leqslant M \exp\{(\pi\sigma - \varepsilon)|y|\}, \qquad -\infty < y < \infty, \quad \varepsilon > 0, \tag{2}$$

и

$$|F(z)| \leqslant M \exp(A|z|), \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{3}$$

Если $F(\lambda_n) = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$, а последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям (1), *то $F(z) \equiv 0$.*

Доказательство. Сначала оценим функцию $\Phi(z)$. Используя теорему 3.3.8, можно получить формулу

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r} = \pi\sigma|\sin\varphi|, \qquad 0 < |\varphi| < \pi. \tag{4}$$

В силу непрерывности индикатора сохраняется равенство и всех остальных φ, но уже после замены точного предела верхним.

Формулу (4) часто бывает удобнее использовать записанной в виде

$$\ln|\Phi(x + iy)| \sim \pi\sigma|y|, \qquad y \to \pm\infty, \quad \left|\frac{y}{x}\right| \geqslant \eta > 0. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{\Phi(z)}.$$

Она регулярна в правой полуплоскости, ибо $F(\lambda_n) = 0$, и непрерывна вплоть до мнимой оси. Из формул (2) и (5) видно, что

$$|F_1(iy)| \leqslant M_{\varepsilon_1} \exp(-\varepsilon_1|y|)$$

при любом $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Оценим рост функции $F_1(z)$ в правой полуплоскости. С этой целью выберем последовательность $\{r_n\}$, для которой

$$r_n \to \infty, \quad r_{n-1} < r_n \leqslant 2r_{n-1}, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

и

$$\min_{|z|=r_n} |\Phi(z)| > M \exp(-4\sigma r_n), \qquad M > 0.$$

Существование такой последовательности $\{r_n\}$ вытекает из следствия 2 теоремы 3.5.6. Тогда мы получаем оценку

$$|F_1(z)| \leqslant M_1 \exp\{(A+4\sigma) r_n\}$$

на полуокружностях $|z| = r_n$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Если применить к функции $F_1(z)$ принцип максимума модуля в полукольце

$$r_{n-1} < |z| < r_n, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

то мы легко получим из написанной оценки неравенство

$$|F_1(z)| \leqslant M_1 \exp\{2(A+4\sigma)|z|\},$$

справедливое уже во всей правой полуплоскости. Из полученных неравенств для $|F_1(iy)|$ и $|F_1(z)|$ видно, что функция $F_1(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5.2 (с учетом замечания к ней). Согласно этой теореме $F_1(z) \equiv 0$. Поэтому и $F(z) \equiv 0$.

Если предположить, что $F(z)$ — целая функция, и потребовать, чтобы она обращалась в нуль во всех нулях функции $\Phi(z)$, то можно получить существенно более точные оценки возможного роста функции $F(z)$ (отличной от тождественного нуля). Мы приведем сейчас один такой результат.

Последовательность $\{\lambda_n\}$ мы по-прежнему будем считать удовлетворяющей условию (1), но обозначим дополнительно

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{-n} = -\lambda_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и вместо функции $\Phi(z)$ будем рассматривать функцию $\Phi_1(z) = z\Phi(z)$. Сверх этого мы введем величины

$$x_n^* = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\lambda_n + \lambda_{n+1}), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и будем предполагать, что при всех $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и при всех действительных y выполнялось неравенство

$$|\Phi_1(x_n^* + iy)| \geqslant M\,|x_n^*|^\alpha \exp(\pi\sigma|y|) \tag{6}$$

с определенной постоянной α и с какой-либо положительной постоянной M.

Следует заметить, что условие (6) весьма ограничительно, и что проверить его выполнение по данной последовательности $\{\lambda_n\}$ далеко не просто. Можно показать, что условие (6) выполняется для последовательности $\{\lambda_n\}$, имеющей вид

$$\lambda_n = \frac{|n| + \alpha}{\sigma}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Можно даже показать, что изменение точек λ_n этой последовательности на величины, не превосходящие $(2|n| + 1)^{-1}$, не нарушат условия (6). Однако, с другой стороны, видно, что добавление к последовательности $\{\lambda_n\}$ только одной пары точек сразу приводит к замене в условии (6) постоянной α на $\alpha + 2$.

Теорема, которую мы сейчас докажем, дает не только условия единственности. Она дает и формулу, восстанавливающую функцию $F(z)$ по ее значениям $F(\lambda_n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Теорема 3.7.2. *Пусть целая функция $F(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$|F(x+iy)| \leqslant M\,|x|^{\alpha+1}\delta(|x|)\exp((\pi\sigma - \varepsilon)|y|), \tag{7}$$

где ε — какая-либо положительная постоянная, а $\delta(t)$ — какая-либо функция, стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$. Если последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям

(1) *и* (6), *то при всех* z *имеет место равенство*

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(\lambda_n)}{\Phi_1'(\lambda_n)} \cdot \frac{\Phi_1(z)}{z-\lambda_n}.$$

(Написанный ряда называется *интерполяционным рядом Лагранжа.*)

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_{n,m,R}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{n,m,R}} \frac{F(\zeta)}{\Phi_1(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

где $L_{n,m,R}$ — граница прямоугольника

$$x_{-m}^* < \operatorname{Re}\zeta < x_n^*, \quad |\operatorname{Im}\zeta| < R.$$

Мы покажем сначала, что этот интеграл стремится к нулю, когда z — произвольное фиксированное число, а

$$n \to +\infty, \quad m \to +\infty, \quad R > n + m.$$

С этой целью заметим, что при ζ, лежащем на горизонтальных сторонах прямоугольника, из формул (5) и (7) нетрудно вывести оценку

$$\left| \frac{F(\zeta)}{\Phi_1(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta - z} \right| \leqslant M' e^{-\varepsilon_1 R},$$

где $\varepsilon_1 < \varepsilon$ — произвольное положительное число, а постоянная M' зависит от ε_1 и от z. При ζ, лежащем на вертикальных сторонах прямоугольника, мы получаем из неравенств (6) и (7) оценку

$$\left| \frac{F(\zeta)}{\Phi_1(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta - z} \right| \leqslant M'' e^{-\varepsilon_1 |\operatorname{Im}\zeta|} \cdot \left(\delta\left(\left|x_{-m}^*\right|\right) + \delta\left(\left|x_n^*\right|\right)\right).$$

Здесь опять $\varepsilon_1 < \varepsilon$ — произвольное положительное число, а постоянная M'' зависит от ε_1 и z. Из этих оценок немедленно вытекает, что

$$I_{n,m,R}(z) \to 0$$

при любом фиксированном z и при $n \to +\infty$, $m \to +\infty$, $R \to +\infty$.

С другой стороны, вычисляя интеграл $I_{n,m,R}$ с помощью вычетов, находим при достаточно большом R

$$I_{n,m,R}(z) = -\sum_{k=-m+1}^{n} \frac{F(\lambda_k)}{\Phi_1'(\lambda_k)} \frac{1}{z-\lambda_k} + \frac{F(z)}{\Phi_1(z)}.$$

Следовательно, переходя к пределу при $n \to \infty$, $m \to \infty$, $R > m+n$, получаем

$$F(z) = \Phi_1(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{\Phi_1'(\lambda_k)} \frac{1}{z-\lambda_k}.$$

Теорема доказана.

Обращает на себя внимание тот факт, что для восстановления $F(z)$ в теореме 3.7.2 использовано очень много лишних (с точки зрения теоремы 3.7.1) данных, необходимых, однако, для сходимости интерполяционного ряда Лагранжа. Более того, в условиях сходимости ряда Лагранжа нельзя выбросить даже одну точку, так как удаление одной точки уменьшает α на единицу в неравенствах (6).

В случае, когда сходимость ряда Лагранжа нельзя обеспечить, задача восстановления $F(z)$ по $F(\lambda_n)$ становится значительно сложнее. Мы решим эту задачу и задачу о характеристике $F(\lambda_n)$ в условиях, довольно близких к условиям теоремы 3.7.1. Результаты, которые мы используем для этой цели, вскрывают интересную связь между ростом аналитической функции, регулярной в полуплоскости, и свойствами некоторого ряда Дирихле, связанного с этой функцией.

Начнем с доказательства двух теорем.

Теорема 3.7.3. *Пусть $F(z)$ — аналитическая функция, регулярная в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$, *непрерывная вплоть до ее границы и удовлетворяющая неравенствам* (2) *и* (3), *а λ_n — последовательность, удовлетворяющая условиям* (1). *Тогда, если ряд Дирихле*

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_n)}{\Phi'(\lambda_n)} e^{\lambda_n z} \tag{8}$$

абсолютно сходится в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z \le a$, *то его сумма может быть аналитически продолжена в полосу $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$, причем в любой внутренней полосе она ограничена.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)} e^{\zeta z} d\zeta. \tag{9}$$

Так как согласно (2) и (5) при любом ε, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, имеем

$$\left|\frac{F(iy)}{\Phi(iy)}\right| < M_1 e^{-\varepsilon_1 |y|} \qquad -\infty < y < \infty,$$

то интеграл равномерно сходится в любой полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Покажем, что при отрицательных z, достаточно больших по абсолютной величине, существует такая последовательность $r_n \to \infty$, для которой

$$\left|\frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)} e^{z\zeta}\right| < M_2 e^{-\varepsilon_2|\zeta|}, \qquad |\zeta| = r_n, \ \operatorname{Re}\zeta \geqslant 0. \tag{10}$$

Вне угла $|\arg\zeta| < \eta$, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, выполнения этого равенства можно добиться при всех $|\zeta|$, так как индикатор $H(\varphi)$ функции

$$F_1(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)} e^{z\zeta}, \qquad H(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \ln|F_1(re^{i\varphi})|,$$

в силу (2) и (5) отрицателен при $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, а при $\varphi = \pm\eta$ его тоже можно сделать отрицательным за счет выбора z. Поэтому из свойства тригонометрической выпуклости следует, что при отрицательных z, достаточно больших по абсолютной величине, индикатор $H(\varphi)$ будет отрицателен в углах $\eta \leqslant |\arg\zeta| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Внутри угла соображения с индикатором применить нельзя, так как у функции $F_1(\zeta)$ имеются полюсы, но существование нужной последовательности r_n следует из теоремы 3.5.6 и из возможности взять z отрицательным и сколь угодно большим по абсолютной величине.

Обозначая через C_n границу полукруга $|\zeta| = r_n$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$, мы можем написать

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)}e^{z\zeta}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)}e^{z\zeta}\,d\zeta,$$

так как согласно (10) интеграл по полуокружности при $n\to\infty$ стремится к нулю. Вычисляя последний интеграл с помощью вычетов, находим

$$P(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{|\lambda_i|<r_n}\frac{F(\lambda_k)}{\Phi'(\lambda_k)}e^{z\lambda_i}.$$

Но согласно условию ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{F(\lambda_k)}{\Phi'(\lambda_k)}e^{z\lambda_k}$ сходится при $\operatorname{Re} z < a$. Следовательно, этот ряд и наш интеграл представляют одну и ту же аналитическую функцию. Иными словами, сумма ряда аналитически продолжается в полосу $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$ при помощи интеграла. Теорема доказана.

Второй результат, который мы докажем, является в некотором смысле обратным к теореме 3.7.3.

Теорема 3.7.4. *Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условиям* (1), *а ряд Дирихле*

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$$

абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant a$, его сумма аналитически продолжается в полосу $|\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon$ и ограничена в этой полосе. Тогда функция

$$F(z) = \Phi(z)\,G(z), \qquad G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,e^{-xz}dx,$$

регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяет неравенствам

$$|F(\eta + iy)| < Me^{(\pi\sigma-\varepsilon_1)|y|}, \qquad |F(z)| \leqslant Me^{A|z|},$$

где

$$\varepsilon_1 < \varepsilon, \ \eta > 0, \ \operatorname{Re} z \geqslant \eta$$

При этом $F(\lambda_n) = a_n\Phi'(\lambda_n)$.

Доказательство. В полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon$ мы имеем для суммы ряда Дирихле неравенство $|P(z)| \leqslant M_1$, но согласно условиям (1) при достаточно большом b будет выполняться еще и неравенство

$$|P(z)| < M_1 e^{-\alpha|z|}, \qquad |\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon, \ \operatorname{Re} z \leqslant -b.$$

Поэтому интеграл

$$G(z) = \int\limits_{-\infty+i\tau_1}^{\infty+i\tau_1} P(t)\, e^{-tz} dt, \qquad |\tau| \leqslant \varepsilon,$$

равномерно сходится при $0 < \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha_2 < \alpha$ и по теореме Коши не зависит от τ. На любой прямой $\operatorname{Re} z = \eta$, $\alpha_1 \leqslant \eta \leqslant \alpha_2$, мы без труда получаем для него оценку, выбирая $\tau = \pm\varepsilon$ (в зависимости от знака y):

$$|G(\eta + iy)| < M_\eta e^{-\varepsilon|y|}, \quad -\infty < y < \infty. \tag{11}$$

Найдем аналитическое продолжение $G(z)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Для этой цели напишем

$$G(z) = \int\limits_{-\infty}^{a} P(x)\, e^{-xz}\, dx + \int\limits_{a}^{\infty} P(x)\, e^{-xz}\, dx = G_1(z) + G_2(z).$$

Функция $e^{az}G_2(z)$ регулярна и ограничена при $\operatorname{Re} z \geqslant \eta > 0$, а для нахождения аналитического продолжения функции $G_1(z)$ подставим в интеграл вместо $P(x)$ ее разложение в ряд Дирихле и проинтегрируем почленно, что вполне законно при $\operatorname{Re} z > 0$. Это даст нам

$$G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{a(\lambda_n - z)}}{\lambda_n - z} = -e^{-az} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{a\lambda_n} \frac{1}{z - \lambda_n}.$$

Заметим, что функция $e^{az}G_1(z)$ ограничена вне кругов $|z - \lambda_n| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n a}$ по условию абсолютно сходится.

Таким образом, мы видим, что функция $e^{az}G(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \eta > 0$, за исключением простых полюсов при $z = \lambda_n$, и ограничена в этой полуплоскости вне кругов $|z - \lambda_n| \leqslant \delta$. Поскольку функция $\Phi(z)$ имеет в точках $z = \lambda_n$ нули и удовлетворяет неравенству

$$|\Phi(z)| \leqslant Me^{A_1|z|}, \qquad A_1 > \pi\sigma,$$

то функция $F(z) = \Phi(z)G(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Fe} z > 0$ и удовлетворяет неравенству

$$|F(z)| \leqslant Me^{A|z|}, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant \eta > 0.$$

Кроме того, из формул (11) и (5) следует, что при любом $\varepsilon_1 < \varepsilon$ выполняется неравенство

$$|F(\eta + iy)| < Me^{(\pi\sigma - \varepsilon_1)|y|}, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Наконец,

$$F(\lambda_n) = \Phi'(\lambda_n) \underset{z=\lambda_n}{\text{выч.}} G(z) = \Phi'(\lambda_n) \underset{z=\lambda_n}{\text{выч.}} G_1(z) = \Phi'(\lambda_n) a_n,$$

и теорема доказана.

Последние теоремы позволяют полностью решить вопрос о восстановлении $F(z)$ по $F(\lambda_n)$ и об условиях того, чтобы числа A_n являлись значениями в точках λ_n функции $F(z)$, удовлетворяющей неравенствам (2) и (3). Правда, от последовательности λ_n нам придется потребовать кое-что сверх условий (1). Именно мы будем предполагать выполненным условие

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\Phi'(\lambda_n)|}{\lambda_n} = \gamma > -\infty. \tag{12}$$

Можно показать, что из более простого предположения

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geqslant |n - m|\, h \quad h > 0, \ n = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

следует выполнение условия (12), и притом с $\gamma = 0$.

Теорема 3.7.5. *Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условиям (1) и (12), а $F(z)$ — условиям (2) и (3). Тогда при достаточно большом q функция $F(z)$ мо-*

жет быть представлена в виде

$$F(z) = \Phi(z)\left\{\int_{-q}^{\infty} P(x)\, e^{-zx}\, dx + e^{qz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_n)}{\Phi'(\lambda_n)} \frac{e^{-q\lambda_n}}{z-\lambda_n}\right\},$$

где $P(z)$ *— аналитическая функция, представимая в достаточно далекой полуплоскости* $\operatorname{Re} z < a$ *рядом Дирихле*

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_n)}{\Phi'(\lambda_n)} e^{z\lambda_n}.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.7.3 ряд Дирихле $P(z)$ аналитически продолжается в полосу $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$ и ограничен в этой полосе (сходимость ряда легко следует из (3) и (12)). Аналитическое продолжение $P(z)$ осуществляется при помощи формулы

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)} e^{z\zeta}\, d\zeta.$$

Рассмотрим функцию

$$I(z) = \int_{-q}^{\infty} P(x)\, e^{-zx}\, dx = \int_{-q}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)} e^{x(\zeta - z)}\, dx\, d\zeta.$$

При $\operatorname{Re} z > 0$ порядок интегрирования можно изменить, и мы получаем

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)} e^{-q(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Как и в теореме 3.7.3, мы можем выбрать такое q и такую последовательность $r_n \to \infty$, что

$$\left|\frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)} e^{-q\zeta}\right| < Me^{-\varepsilon_1|\zeta|}, \qquad |\zeta| = r_n, \ \operatorname{Re}\zeta > 0.$$

Обозначая через C_n границу полукруга $|\zeta| < r_n$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$, получаем

$$I(z) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\zeta)}{\Phi(\zeta)}e^{-q(\zeta-z)}\frac{d\zeta}{\zeta-z} =$$

$$= -\frac{F(z)}{\Phi(z)} + \lim_{n\to\infty}\sum_{|\lambda_k|<r_n}\frac{F(\lambda_k)}{\Phi'(\lambda_k)}e^{-q(\lambda_k-z)}\frac{1}{z-\lambda_k}.$$

Из условия (12) следует, что последний ряд сходится при достаточно больших q и представляет аналитическую функцию z. Следовательно,

$$I(z) = -\frac{F(z)}{\Phi(z)} + e^{qz}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(\lambda_n)}{\Phi'(\lambda_n)}\frac{e^{-q\lambda_n}}{z-\lambda_n},$$

и теорема доказана.

Из теорем 3.7.3 и 3.7.4 нетрудно получить как необходимые, так и достаточные условия для того, чтобы числа A_n были значениями функции $F(z)$, удовлетворяющей условиям (2) и (3), в точках последовательности λ_n, удовлетворяющей условиям (1) и (12).

Для изучения рядов Дирихле можно применять теоремы 3.7.3 и 3.7.4. Приведем простейший пример теоремы такого рода.

Теорема 3.7.6. *Пусть последовательность* λ_n *удовлетворяет условиям* (1). *Если ряд Дирихле*

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} z \leqslant a$, *а его сумма аналитически продолжается в полосу* $|\operatorname{Im} z| < \alpha$, $\alpha > \pi\sigma$, *и ограничена в этой полосе, то все коэффициенты этого ряда суть нули.*

Доказательство. Согласно теореме 3.7.4 функция

$$F(z) = \Phi(z)\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,e^{-\bar{x}z}dx$$

удовлетворяет неравенствам

$$|F(z)| < Me^{A|z|}, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant \eta > 0,$$
$$|F(\eta + iy)| < Me^{-\varepsilon|y|}, \qquad 0 < \varepsilon < \alpha - \pi\sigma.$$

Но по теореме 3.5.2 (точнее, по замечанию к этой теореме) $F(\eta + z) \equiv 0$. Это возможно лишь, когда $P(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 3.7

1°. Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = +\infty.$$

Если аналитическая функция $F(z)$ регулярна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, то из условий $F(\lambda_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, следует $F(z) \equiv 0$.

2°. Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = +\infty.$$

Показать, что система функций $\{x^{\lambda_n}\}$ полна на отрезке $[0, 1]$, т. е. не существует непрерывной на этом отрезке функции $f(x) \not\equiv 0$, для которой

$$\int_0^1 f(x)\, x^{\lambda_n} dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

3°. Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условиям

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \lambda_n = \frac{n+\alpha}{\sigma} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to +\infty; \ \lambda_{-n} = \lambda_n.$$

Показать, что если $\alpha \leqslant 0$, то система функций $\{e^{i\lambda_n x}\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ полна на отрезке $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$.

4°. Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условиям

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_{n+1} \geqslant \lambda_n + \delta, \quad \delta > 0, \quad \frac{n}{\lambda_n} \sim \sigma, \quad n \to +\infty.$$

Показать, что ряд Дирихле

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = c,$$

на каждом отрезке $\operatorname{Re} z = c$, $b < \operatorname{Im} z < b + a$, $a > 2\pi\sigma$, имеет хотя бы одну особую точку.

5°. Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условиям

$$0 < \operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant \ldots, \frac{n}{\lambda_n} \sim \sigma, \qquad n \to +\infty,$$

а ряд Дирихле $P(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ абсолютно сходится при всех z и

$$|P(x)| < M, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{x \operatorname{Re}\lambda_n} < M e^{e^{\rho x^*}}, \ -\infty < x < \infty.$$

Показать, что если $\rho < \frac{\pi}{\sigma}$, то $F(z) \equiv 0$.

Глава IV

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНКРЕТНЫХ ПРИМЕРОВ

§ 4.1. Функции, представленные интегралами

Довольно просто могут быть получены точные асимптотические формулы для целых функций, представленных интегралами вида

$$F(t) = \int\limits_C e^{-h(z)+zt} dz, \tag{1}$$

где $h(z)$ — некоторая достаточно хорошая аналитическая функция, а C — контур, уходящий в бесконечность обоими своими концами или одним из них. Функция $F(t)$, представленная интегралом вида (1), будет целой, если в тех направлениях, где контур C уходит в бесконечность, функция $\operatorname{Re} h(z)$ стремится к $+\infty$ быстрее, чем любая постоянная, умноженная на $|z|$.

Для получения асимптотических формул применяется метод перевала, часто в сочетании с методами теории вычетов. Важное преимущество интегралов вида (1) перед какими-либо другими состоит в том, что для них можно дать весьма общие указания на то, какие точки перевала определяют их асимптотическое поведение.

Мы по-прежнему не будем уделять большого внимания самой технике применения метода перевала. В частности, задача об определении асимптотического поведения интеграла (1) будет считаться решенной, когда найдены точки перевала и проходящий через них контур, на котором наибольшее значение функции $\operatorname{Re}(-h(z)+zt)$ достигается именно в этих точках. Мы не будем останавливаться на подробностях вычисления вклада точки перевала, а также на сведении наших интегралов к интегралам вида

$$\int\limits_{C_1} \varphi(t, \zeta)\, e^{th_1(\zeta)} d\zeta.$$

Под вкладом точки перевала $z = c(t)$ мы будем понимать интеграл по части контура, лежащей в круге $|z-c(t)|<\tau(t)\rho_c(t)$, где $\tau(t)\to+\infty$, а $\rho_c(t)$ — радиус влияния точки перевала, т. е. $|h''(c(t))|^{-1/2}$. В большинстве случаев для вклада точки перевала справедлива асимптотическая формула

$$V_c(t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{h''(c(t))}}\, e^{-h(c(t))+tc(t)}, \qquad (2)$$

а для вклада начала контура C — асимптотическая формула

$$V_c(t) \sim \frac{1}{t} e^{-h(c(t))+tc(t)}. \qquad (3)$$

Чтобы лучше разъяснить ход рассуждений, докажем сначала одну совсем простую теорему.

Теорема 4.1.1. *Пусть $h(z)=z^{2m}+a_1z^{2m-1}+\ldots+a_{2m}$. Асимптотическое поведение интеграла*

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h(z)+izx}dz$$

при $x\to+\infty$ определяется суммой вкладов всех точек перевала, расположенных в верхней полуплоскости.

Доказательство. Выясним прежде всего, каков характер поверхности $u = \mathrm{Re}(-h(z))$ при больших z. Так как $h(z) \sim z^{2m}$ при $z\to\infty$, то, полагая $z = re^{i\varphi}$, получаем $\mathrm{Re}(-h(z)) = -r^{2m}\cos 2m\varphi + o(r^{2m})$. Отсюда видно, что $\mathrm{Re}(-h(z))\to-\infty$ при $z\to\infty$ внутри углов

$$\left|\varphi - \frac{k\pi}{m}\right| < \frac{\pi}{4m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2m-1,$$

и $\mathrm{Re}(-h(z))\to+\infty$ при $z\to\infty$ внутри углов

$$\left|\varphi - \frac{2k+1}{2m}\pi\right| < \frac{\pi}{4m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2m-1.$$

Если воспользоваться географической терминологией, то можно сказать, что эта поверхность представляет собой $2m$ ущелий, разделенных $2m$ горными хребтами.

Рассмотрим, как изменится характер поверхности от добавления слагаемого $\operatorname{Re}(ixz)$. Нас будет интересовать лишь часть поверхности, расположенная над верхней полуплоскостью. В верхней полуплоскости величина $\operatorname{Re}(ixz)$ отрицательна. Поэтому в ущельях общая картина останется той же, только они станут еще глубже. На хребтах дело обстоит несколько сложнее. Сначала при движении вдоль хребта высота будет понижаться, так как x велико и главную роль играет слагаемое $\operatorname{Re}(ixz)$. Однако при дальнейшем движении вдоль хребта высота дойдет до минимума и начнет возрастать, так как $\operatorname{Re} z^{2m}$ растет быстрее, чем $|z|$. Точки хребтов, имеющие наименьшую высоту, и есть точки перевала. Нетрудно проверить, что в верхней полуплоскости точек перевала столько же, сколько хребтов, и что расположены они на хребтах. Линии наибыстрейшего спуска, выходящие из этих точек перевала, очевидно, уходят в бесконечность по ущельям, примыкающим с обеих сторон к хребту, на котором расположена точка перевала.

Пусть $z = c_k(x)$ — одна из точек перевала. Обозначим через C_k контур, составленный из двух линий наибыстрейшего спуска, выходящих из этой точки. Зададим направление контура C_k: будем считать, что контур C_k начинается в том из ущелий, которое ближе к отрицательной части действительной оси. Интеграл по действительной оси равен сумме интегралов по C_k, а асимптотическое поведение интеграла по C_k дается вкладом точки перевала $c_k(t)$. Тем самым теорема доказана.

Ясно, что те же рассуждения пригодны не только для таких интегралов и не только для случая, когда $h(z)$ — многочлен. Решающим здесь является лишь то обстоятельство, что точки перевала уходят в бесконечность и что в бесконечности поверхность $u = \operatorname{Re}(-h(z))$ имеет вид чередующихся хребтов и ущелий, мало отличающихся друг от друга.

При этом даже не обязательно, чтобы функция $-h(z)$ была регулярна, обязательна лишь регулярность $e^{-h(z)}$ в верхней полуплоскости (т. е. функция $e^{-h(z)}$ может обращаться в нуль). Осложнения возникают только тогда, когда нули $e^{-h(z)}$ попадают в область влияния точки перевала, т. е. когда их расстояние от этой точки того же порядка, что и ее радиус влияния. Впрочем, даже и в этом случае асимптотическое поведение часто удается найти.

Пример. Найдем асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величин a_n, определяемых равенствами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{\Gamma(z)}, \text{ где } \Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du.$$

По формуле Коши имеем

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{\Gamma(z)\, z^{n+1}}.$$

Согласно формуле Стирлинга (см. § 1.4, пример 3)

$$\ln \Gamma(z) = z \ln z - z - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

когда

$$z \to \infty, \quad |\arg z| < \pi - \eta$$

так что поверхность $u = -\ln|\Gamma(z)|$ представляет собой одно ущелье (при $\operatorname{Re} z > 0$) и один хребет (при $\operatorname{Re} z < 0$). К сожалению, на хребте, как раз там, где должна быть точка перевала, функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$ имеет нули. Чтобы освободиться от этого препятствия, заметим, что часть контура, лежащая в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \eta$, несущественна для оценки, и заменим интегрирование по окружности $|z| = r$ интегрированием по L_r — границе сектора $|z| > r$, $|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2} + \eta$. Кроме того, воспользуемся формулой $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$. После замены $\zeta = -z$ это даст нам

$$a_n = \frac{(-1)^n}{4\pi^2} \int_{L_r'} \Gamma(\zeta+1)\, e^{\pi i \zeta - (n+1)\ln \zeta} d\zeta -$$

$$- \frac{(-1)^n}{4\pi^2} \int_{L_r'} \Gamma(\zeta+1)\, e^{-\pi i \zeta - (n+1)\ln \zeta} d\zeta.$$

К этим двум интегралам все наши рассуждения полностью применимы, и поэтому каждый из них асимптотически равен вкладу своей точки перевала. Опуская выкладки, связанные с вычислением этих вкладов, приведем окончательный результат:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2\pi}\sqrt{\frac{en}{\ln n}}\left[e^{-n\ln\mu(ne^{\pi i})-\mu(ne^{\pi i})+o(1)} + \right.$$
$$\left. + e^{-n\ln\mu(ne^{-\pi i})-\mu(ne^{-\pi i})+o(1)}\right].$$

Здесь $\mu(z)$ — та ветвь функции, обратной к $z\ln z$, которая положительна для положительных z.

Теперь мы несколько усложним наши рассуждения и докажем более общий результат.

Теорема 4.1.2. *Пусть*

$$h(z) = z^{2m} + a_1 z^{2m-1} + \ldots + a_{2m}.$$

Асимптотическое поведение интеграла

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h(z)+zt}\,dz$$

при $t\to\infty$ определяется суммой вкладов двух точек перевала, расположенных ближе всех других к действительной оси.

Доказательство. При доказательстве предыдущей теоремы мы выяснили, какие изменения в вид поверхности $u=\mathrm{Re}(-h(z))$ вносит слагаемое $\mathrm{Re}(zt)$, если t чисто мнимое. Немногим сложнее решить этот вопрос и для любых t. Грубо говоря, имеются такие возможности:

в данном ущелье или имеется луч, вдоль которого $\mathrm{Re}\,zt\to-\infty$, или таких лучей нет, и $\mathrm{Re}\,zt\to+\infty$ по всем направлениям в этом ущелье;

на данном хребте или имеется луч, вдоль которого $\mathrm{Re}\,zt\to+\infty$, или таких лучей нет, и $\mathrm{Re}\,zt\to-\infty$ по всем направлениям на этом хребте.

Если в ущелье есть луч, вдоль которого $\mathrm{Re}\,zt\to-\infty$, или на хребте есть луч, вдоль которого $\mathrm{Re}\,zt\to+\infty$, то общая картина в таком ущелье или на таком хребте сохраняется — ущелье становится несколько глубже, хребет несколько выше. Если во всем ущелье $\operatorname{Re} zt \to +\infty$, то картина меняется — ущелье оказывается как бы перегороженным плотиной, которая тем выше, чем больше значения t. Если на всем хребте $\operatorname{Re} zt \to -\infty$, то хребет вначале как бы размывается, и этот размыв тем глубже, чем больше значения t.

В двух последних случаях мы обязательно получим точки перевала. Ими будут самая низкая точка плотины, перегораживающей ущелье, и самая низкая точка хребта, находящаяся в его размытой части. В двух первых случаях в ущелье и на хребте точек перевала не будет.

Выясним, куда идут линии наибыстрейшего спуска, выходящие из точек перевала. Пусть точка перевала находится на размытом хребте. На всем этом хребте $\operatorname{Re} zt \to -\infty$, так что для ущелий, примыкающих к нашему хребту, имеются лучи, вдоль которых $\operatorname{Re} zt \to -\infty$. Поэтому линии наибыстрейшего спуска уходят в бесконечность именно по этим ущельям. (Особым является случай, когда $\operatorname{Re} zt$ меняет знак как раз на границе хребта и ущелья. В этом случае вопрос о том, куда пойдет линия наибыстрейшего спуска, потребовал бы изучения следующих коэффициентов многочлена $h(z)$. Однако мы увидим, что эти тонкие вопросы не имеют значения для оценок.) Если точка перевала находится в ущелье, то, рассуждая аналогичным образом, мы придем к выводу, что одна линия наибыстрейшего спуска уходит в бесконечность по ущелью, а вторая — в область сравнительно небольших значений z, где вид поверхности $u = \operatorname{Re}(-h(z) + zt)$ определяется только слагаемым $\operatorname{Re} zt$. Это значит, что в области небольших значений z линия наибыстрейшего спуска пойдет по направлению, вдоль которого убывание $\operatorname{Re} zt$ наиболее сильно, т. е. близко к лучу $\arg z = \pi - \arg t$. Пройдя область небольших значений z, линия наибыстрейшего спуска уйдет в бесконечность по ущелью, лежащему ближе всего к лучу $\arg z = \pi - \arg t$. (Если таких ущелий два, то вопрос снова становится весьма тонким, но мы опять же увидим, что для оценки эти тонкости значения не имеют.)

Прежде чем приступать к замене интегрирования по действительной оси интегрированием по контуру, составленному из линий наибыстрейшего спуска, нам понадобится грубо оценить вклады точек перевала, Точки перевала $z = c_k(t)$ определяются из уравнения $h'(z) = t$, и при $t \to \infty$ имеем

$$c_k(t) \sim \left|\frac{t}{2m}\right|^{\frac{1}{2m-1}} \exp i\left\{\frac{\arg t}{2m-1} - \frac{2k\pi}{2m-1}\right\},$$

где

$$k = 0, 1, \ldots, 2m-2.$$

Из формулы (2) следует, что для вклада точки перевала $V_{c_k}(t)$ мы можем написать

$$\ln\left|V_{c_k}(t)\right| \sim A_m |t|^{\frac{2m}{2m-1}} \cos\left\{\frac{2m}{2m-1}\left(\arg t - \frac{k\pi}{m}\right)\right\}.$$

Таким образом, если

$$\left|\arg t - \frac{s\pi}{m}\right| < \left|\arg t - \frac{k\pi}{m}\right|,$$

то вклад точки перевала $c_k(t)$ мал по сравнению с вкладом точки перевала $c_s(t)$, и им можно пренебречь.

Через C_k обозначим контур, состоящий из линий наибыстрейшего спуска, выходящих из точки перевала $z = c_k(t)$. Он начинается и кончается в двух различных ущельях. Выберем направление этого контура таким, чтобы он начинался в том ущелье, которое ближе к отрицательной части действительной оси.

Перейдем к построению контура интегрирования, эквивалентного действительной оси и составленного из некоторого количества контуров C_k.

Допустим, что $\operatorname{Re} t \leqslant 0$. В ущелье, содержащем отрицательную часть действительной оси, или на склоне одного из примыкающих к нему хребтов имеется такая точка перевала, что выходящая из нее линия наибыстрейшего спуска уходит в бесконечность по этому ущелью. Если таких точек две, то мы выберем ту из них, которая ближе к лучу $\arg z = \pi - \arg t$. Эту точку обозначим через $c_{k_1}(t)$. Выясним, куда уходит второй конец контура C_{k_1}. Могут представиться две возможности. Первая — второй конец C_{k_1} уходит в бесконечность по соседнему ущелью. Это соседнее ущелье обязательно будет расположено с той же стороны, что и луч $\arg z = \pi - \arg t$, так как с этой стороны вся поверхность ниже. Вторая возможность — второй конец контура C_{k_1} уходит в бесконечность по одному из двух ущелий, лежащих ближе всего к лучу $\arg z = \pi - \arg t$.

Первая возможность соответствует тому, что точка перевала лежит на хребте, разделяющем наше и соседнее ущелья. Та же картина будет наблюдаться и во всех остальных ущельях, расположенных в той же полуплоскости (верхней или нижней), что и луч $\arg z = \pi - \arg t$ (поскольку из условия $\operatorname{Re} t \leqslant 0$ следует, что ущелье, содержащее отрицательную часть действительной оси, является самым высоким из них). В этом случае асимптотическое поведение интеграла дается суммой вкладов всех точек перевала, лежащих в той же полуплоскости (верхней или нижней), что и луч $\arg z = \pi - \arg t$. Из полученных выше оценок видно, что вклады всех точек, кроме первой и последней, пренебрежимо малы. Вклады первой и последней точек будут примерно одного порядка, если t близко к чисто мнимым значениям. Тем самым для первой возможности теорема доказана.

Рассмотрим вторую возможность. Мы можем применить те же рассуждения, но начиная с одного из самых низких ущелий, в которое нас приведет контур C_{k_1}. Ясно, что утверждение теоремы мы получим и в этом случае.

Если $\operatorname{Re} t \geqslant 0$, то мы должны провести те же рассуждения, но начиная с ущелья, содержащего положительную часть действительной оси.

Таким образом, все возможности исчерпаны, и теорема доказана.

Аналогичную теорему можно доказать и для интегралов по полубесконечному интервалу.

Теорема 4.1.3. *Пусть*

$$h(z) = z^{\alpha}\left(z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m\right), \quad \alpha > 0,\ m + \alpha > 1.$$

Асимптотическое поведение интеграла

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-h(z)+zt}\,dz$$

при $t \to \infty$ дается суммой вкладов начала контура и (если *такая есть) точкой перевала, лежащей в угле*

$$|\arg z| < \frac{\pi(m+\alpha-1)}{m+\alpha} + \eta, \qquad 0<\eta<\frac{\pi}{2(m+\alpha)}.$$

Доказательство. Поверхность $u = \operatorname{Re}(-h(z))$ при больших z имеет вид почти одинаковых ущелий, разделенных горными хребтами. Правда, теперь из-за многозначности функции z^α эту поверхность следует представлять построенной не просто над комплексной плоскостью, а над римановой поверхностью логарифма. В основном нас будет интересовать та часть поверхности, которая расположена над плоскостью с разрезом $(-\infty, 0)$, т. е. $|\arg z| \leqslant \pi$, однако иногда нам придется заглядывать и на другие листы римановой поверхности.

Ущелья асимптотически совпадают с углами

$$\left|\arg z - \frac{2k\pi}{m+\alpha}\right| < \frac{\pi}{2(m+\alpha)}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а хребты — с углами

$$\left|\arg z - \frac{2k+1}{m+\alpha}\pi\right| < \frac{\pi}{2(m+\alpha)}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В случае $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \arg t \leqslant \pi$, $\varepsilon < \frac{\pi}{2(m+\alpha)}$, асимптотическое поведение нашего интеграла определяется только вкладом начала контура интегрирования. В этом проще всего убедиться, взяв в качестве контура интегрирования луч $\arg z = \varepsilon_1$, $\varepsilon < \varepsilon_1 < \frac{\pi}{2(m+\alpha)}$, и применив теорему 1.6.2. То же утверждение справедливо и для

$$-\pi \leqslant \arg t \leqslant -\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad \varepsilon < \frac{\pi}{2(m+\alpha)}.$$

Займемся выяснением асимптотического поведения интеграла при $t \to \infty$, $|\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ Для точек перевала имеем асимптотические формулы

$$c_k(t) \sim \left|\frac{t}{m+\alpha}\right|^{\frac{1}{m+\alpha-1}} \exp i\left\{\frac{\arg t}{m+\alpha-1} + \frac{2k\pi}{m+\alpha-1}\right\}$$

где

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а для их вкладов $V_{c_k}(t)$ — асимптотические формулы

$$\ln |V_{c_k}(t)| \sim A_{m,\alpha} |t|^{\frac{m+\alpha}{m+\alpha-1}} \cos \left\{ \frac{m+\alpha}{m+\alpha-1} \left(\arg t - \frac{2k\pi}{m+\alpha} \right) \right\}.$$

Для вклада начала контура $V_0(t)$ имеем

$$\ln |V_0(t)| \sim A \ln |t|.$$

Через C_k мы будем по-прежнему обозначать контур, составленный из линий наибыстрейшего спуска, выходящих из точки перевала $z = c_k(t)$ (C_k опять начинается в ущелье, лежащем ближе к отрицательной части действительной оси). Вообще говоря, может случиться, что контур C_k выходит за пределы нашей плоскости с разрезом, т. е. за пределы угла $|\arg z| \leqslant \pi$.

Могут представиться две возможности: или в полуплоскости $0 < \arg z < \pi$ есть точка перевала, или ее нет.

Если при $0 < \arg z < \pi$ точки перевала нет, то мы строим контур интегрирования следующим образом: от точки $z = 0$ идем по лучу $\arg z = \pi$ до точки $z = z_1$, в которой достигается минимум $\operatorname{Re}\{-h(z) + zt\}$, а от этой точки — по линии наибыстрейшего спуска. Если при $0 < \arg z < \pi$ точки перевала нет, то линия наибыстрейшего спуска уходит в бесконечность по ущелью, содержащему луч $\arg z = 0$. Построенный контур эквивалентен контуру $(0, +\infty)$, и интеграл по нему асимптотически равен вкладу начала контура.

Если при $0 < \arg z < \pi$ есть точки перевала, то мы возьмем ту из них, которая ближе всего к положительной части действительной оси, скажем $z = c_{k_1}(t)$, и рассмотрим контур C_{k_1}. Этот контур кончается в ущелье, содержащем луч $\arg z = 0$, а начинается в каком-то другом ущелье. Если C_{k_1} целиком лежит в полуплоскости $0 < \arg z < \pi$, то мы переходим к контуру C_{k_2}, соединяющему ущелье, в котором начинается контур C_{k_1}, со следующим, более далеким от положительной части действительной оси. Этот процесс мы продолжаем до тех пор, пока не дойдем до ущелья, ближайшего к лучу $\arg z = \pi - \arg t$, или пока не дойдем до контура C_{k_3}, пересекающего луч $\arg z = \pi$. В первом случае мы добавим еще интеграл по линии наибыстрейшего спуска, выходящей из точки $z = 0$ (она тоже уходит в бесконечность по ущелью, ближайшему к лучу $\arg z = \pi - \arg t$). Во втором случае мы возьмем последний интеграл не по контуру C_{k_s}, а по контуру C'_{k_s}, состоящему из части C_{k_s}, лежащей в полуплоскости $0 < \arg z < \pi$, дополнив ее отрезком луча $\arg z = \pi$ от $z = 0$ до точки пересечения с C_{k_s}. В обоих случаях мы получаем, что асимптотическое поведение интеграла определяется суммой вкладов всех проходимых точек перевала и начала контура. Из приведенных выше грубых асимптотических формул для вкладов видно, что вкладами всех точек перевала, кроме самой первой, можно пренебречь. Самая первая точка перевала лежит в угле $0 < \arg z < \pi$ и дает вклад, сравнимый с вкладом начала контура, лишь если она лежит в угле $|\arg z| < \frac{\pi(m+\alpha-1)}{m+\alpha} + \eta$. Тем самым теорема доказана.

Ясно, что рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы, пригодны не только для многочленов, но и для многих других функций.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 4.1

1°. Положим

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^{2m}+zt}\,dz$$

(m — целое число). Показать, что при $t \to \infty$

$$F(t) = A_m \left\{ t^{-\frac{m-1}{2m-1}} \exp\left(c_m t^{\frac{2m}{2m-1}} + O\left(t^{-\frac{2m}{2m-1}}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + (-t)^{-\frac{m-1}{2m-1}} \exp\left(c_m (-t)^{\frac{2m}{2m-1}} + O\left(t^{-\frac{2m}{2m-1}}\right)\right)\right\},$$

где

$$A_m = \sqrt{4\pi m(2m-1)}, \qquad c_m = \frac{2m-1}{2m}(2m)^{-\frac{1}{2m-1}},$$

а для степеней t и $-t$ берется главное значение.

2°. Положим

$$F(z)=\int_0^\infty u^{\alpha-\rho u}e^{uz}du, \qquad \alpha>-1,\ \rho>0.$$

Показать, что при $\operatorname{Re} z\to+\infty$, $|\operatorname{Im} z|<\pi\rho$,

$$F(z)=(-z)^{1-\alpha}(1+o(1))+$$
$$+(1+o(1))\sqrt{2\pi\rho}\exp\left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{\rho}-1\right)+\rho e^{\frac{z}{\rho}-1}\right\},$$

а при $z\to\infty$ вне полуполосы $\operatorname{Re} z>0$, $|\operatorname{Im} z|<\pi\rho$,

$$F(z)=(-z)^{1-\alpha}(1+o(1)).$$

3°. Положим

$$F(z)=\int_0^\infty \frac{e^{uz}}{\Gamma\left(\frac{u}{\rho}+1\right)}du, \qquad \rho>0.$$

Показать, что при $\operatorname{Re} z\to+\infty$, $|\operatorname{Im} z|<\pi\rho$,

$$F(z)=-\frac{1}{z}+O(z^{-2})+\exp\left(\rho e^{\frac{z}{\rho}}+O(e^{-z})\right),$$

а при $z\to\infty$ вне полуполосы $\operatorname{Re} z>0$, $|\operatorname{Im} z|<\pi\rho$,

$$F(z)=-\frac{1}{z}+O(z^{-2}).$$

4°. Пусть

$$F(t)=\int_C e^{-h(z)+tz}dz,$$

где $h(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m$, а C — граница угла

$$\frac{1}{m}(\arg t-\arg a_0+2k\pi)<\arg z<\frac{1}{m}(\arg t-\arg a_0+2s\pi).$$

Показать, что асимптотическое поведение $F(t)$ при $t\to\infty$ определяется суммой вкладов точек перевала, ближайших к сторонам этого угла.

5°. Пусть $h(z) = e^{m_0 z} - a_1 e^{m_1 z} + \ldots + a_k e^{m_k z}$, $m_0 > m_1 > \ldots$ $\ldots > m_k$. Показать, что асимптотическое поведение интеграла

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-h(z)+zt} dz$$

дается суммой вкладов начала контура и точки перевала, расположенной ближе других к положительной части действительной оси.

§ 4.2. Ряды и произведения

Часто целые функции значительно проще задаются не в виде интегралов, рассмотренных в предыдущем параграфе, а в виде бесконечных рядов или бесконечных произведений. В этих случаях задачу получения асимптотических формул можно свести к методу перевала, применив формулу Эйлера — Маклорена или какую-нибудь другую, сходную с ней. Покажем, как это делается, на нескольких типичных задачах. Начнем с наиболее простой.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$ (σ — не целое число) и удовлетворяющая там условию*

$$|f(x+iy)| < \varepsilon(x) e^{a|y|}, \qquad a < 2\pi, \ \varepsilon(x) \to 0, \ x \to +\infty$$

Если интеграл $\int_\sigma^\infty f(x)\,dx$ *сходится, то*

$$\sum_{n>\sigma} f(n) = \int_\sigma^\infty f(x)\,dx + \int_\sigma^{\sigma+i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi i z}-1} + \int_\sigma^{\sigma-i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi i z}-1}.$$

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 1.4.2 до получения формулы (6), совершаем в ней предельный переход при $n \to \infty$. Это и дает нам утверждение леммы.

Теорема 4.2.1. *Пусть $\mu(z)$ — аналитическая функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$ ($\sigma \leqslant 0$ — не* *целое число) и удовлетворяющая условию*

$$|\mu(x+iy)| < M_A e^{-Ax+a|y|}, \qquad a<\pi, \tag{1}$$

при любом фиксированном $A>0$. *Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)\, t^n = \int_{\sigma}^{\infty} \mu(x)\, e^{x\ln t} dt - \sum_{k=0}^{[-\sigma]} \frac{\mu(-k)}{t^k} + O(|t|^{\sigma}) \tag{2}$$

(для $\ln t$ *берется главная ветвь).*

Доказательство. Для функции $f(z)=\mu(z)t^z$ при любом t (мы берем для $\ln t$ главную ветвь) выполнены условия леммы 1. Поэтому

$$\sum_{n>\sigma} \mu(n)\, t^n =$$

$$= \int_{\sigma}^{\infty} \mu(x)\, e^{x\ln t} dx + \int_{\sigma}^{\sigma+i\infty} \frac{\mu(z)\, e^{z\ln t}}{e^{-2\pi i z}-1} dz + \int^{\sigma-i\infty} \frac{\mu(z)\, e^{z\ln t}}{e^{2\pi i z}-1} dz.$$

Но на прямой $\operatorname{Re} z=\sigma$ имеем

$$\left|\frac{\mu(z)\, e^{z\ln t}}{e^{-2\pi i z}-1}\right| \leqslant M|t|^{\sigma} e^{-(2\pi-a-|\arg t|)|\operatorname{Im} z|} =$$

$$= Me^{-\delta|\operatorname{Im} z|}|t|^{\sigma}; \qquad \delta>0,$$

так что последние два интеграла равны $O(|t|^{\sigma})$. Перенося часть суммы, распространенную на отрицательные значения, в правую часть, получаем формулу (2). Теорема доказана.

Доказанная нами теорема позволяет свести задачу об асимптотической оценке суммы ряда к задаче об асимптотической оценке интеграла. Заметим, что интеграл имеет как раз тот вид, который рассматривался в предыдущем параграфе.

Чтобы немного уяснить себе пределы применимости этой формулы, разберем один простой пример.

Пример 1. Найдем асимптотическое поведение при $t\to\infty$ функции

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (n!)^{-\frac{1}{\rho}}, \qquad \rho > \frac{1}{2}.$$

При $\rho > \frac{1}{2}$ условия теоремы выполнены, так как согласно формуле (10) § 1.4

$$|\Gamma(\sigma + iy)| < M_\sigma\, e^{-\frac{\pi}{2}|y|}.$$

Поэтому

$$F(t) = \int_{-1}^{\infty} [\Gamma(z+1)]^{-\frac{1}{\rho}} e^{z\ln t} dz + O\left(\frac{1}{|t|}\right).$$

$\left(\right.$При желании можно получить вместо $O\left(\frac{1}{t}\right)$ более точную оценку:

$$-\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\rho}\, t^{-1} (\ln t)^{-\frac{1}{\rho}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln t}\right)\right).\Big)$$

Дальнейшую оценку мы проводим методом перевала (точнее, применяем рассуждения теоремы 4.1.3). Опуская подробности, приведем окончательный результат:

$$F(t) = (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2\rho}} t^{\frac{\rho-1}{2}} e^{\frac{1}{\rho}t^\rho} \left(1 + O\left(|t|^{-\rho}\right)\right) + O\left(|t|^{-1}\right)$$

при $t \to \infty$, $|\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \eta$, и

$$F(t) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\rho}\right)\frac{1}{t(\ln t)^{1/\rho}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln t}\right)\right)$$

в остальной части плоскости.

В этом примере нам важно только одно обстоятельство. Оказывается, что условие (1) приводит к существенному ограничению на рост оцениваемых функций даже при любых требованиях гладкости. Естественно возникает вопрос, нельзя ли ослабить это условие. Сделаем это за счет некоторого видоизменения леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в некоторой области D, содержащей полуполосу* $\operatorname{Re} z > \sigma$, $|\operatorname{Im} z| < h$ ($\sigma \geqslant 0$ — *не целое число*), *и удов-*

летворяющая условию

$$|f(x+iy)| < \varepsilon(x)\, e^{a|y|}, \quad x+iy \in D,\ a<2\pi, \tag{3}$$

где

$$\varepsilon(x) \to 0, \qquad x \to +\infty.$$

Если интеграл $\int\limits_{\sigma}^{\infty} f(x)\,dx$ *сходится, то*

$$\sum_{n>\sigma} f(n) = \int\limits_{\sigma}^{\infty} f(z)\,dz + \int\limits_{C_\sigma^+} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} + \int\limits_{C_\sigma^-} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1}, \tag{4}$$

где C_σ^+ *— любой контур, идущий из точки* $z=\sigma$ *в бесконечность выше действительной оси, оставаясь в* D, *а* C_σ^- *— аналогичный контур, лежащий ниже действительной оси.*

Доказательство. Эта лемма доказывается почти так же, как и предыдущая, с той лишь разницей, что рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1.4.2, применяются не к прямоугольнику $\sigma < \operatorname{Re} z < N$, $|\operatorname{Im} z| < R$, а к контуру, образованному частями линий C_σ^+ и C_σ^-, лежащими левее прямой $\operatorname{Re} z = N + \frac{1}{2}$, и отрезком этой прямой, соединяющим их концы.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $\mu(z)$ *— аналитическая функция, регулярная в некоторой области* D, *содержащей полуполосу* $\operatorname{Re} z > \sigma$, $|\operatorname{Im} z| < h$ ($\sigma < 0$ *— не целое число*), *и удовлетворяющая условию*

$$|\mu(x+iy)| < M_A e^{-Ax}, \qquad x+iy \in D,$$

при любом A. *Тогда*

$$\sum_{n>\sigma}^{\infty} \mu(n)\, t^n =$$

$$= \int\limits_{\sigma}^{\infty} \mu(z)\, e^{z\ln t} dz + \int\limits_{C_\sigma^+} \frac{\mu(z)\, e^{z\ln t}}{e^{-2\pi iz}-1} + \int\limits_{C_\sigma^-} \frac{\mu(z)\, e^{z\ln t}}{e^{2\pi iz}-1}\, dz, \tag{5}$$

где C_σ^+ *— любой контур, идущий из точки* $z=0$ *в беско-*

нечность выше действительной оси, оставаясь в D, а C_σ^- — аналогичный контур, лежащий ниже действительной оси.

Доказательство. Утверждение теоремы сразу получается, если применить лемму 2 к функции $f(z) = \mu(z)e^{z\ln t}$.

Идея применения формулы (5) состоит в том, что метод перевала можно применять для получения асимптотической оценки не только первого, но и двух последних интегралов. Наличие полюсов у подинтегральной функции нам не помешает, если эти полюсы будут находиться вне области влияния точки перевала, т. е. если расстояние от точки перевала до действительной оси велико по сравнению с радиусом влияния этой точки перевала. Посмотрим, что нового нам добавит использование формулы (5) для оценки функции примера 1 с меньшими ρ.

Пример 2. Найдем асимптотическое поведение функции

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (n!)^{-\frac{1}{\rho}}, \qquad \rho > 0,$$

при $t \to \infty$.

Теперь условия применимости теоремы 3.2.2 выполнены при любом ρ. Поэтому

$$F(t) = \int_{-1}^{\infty} [\Gamma(z+1)]^{-\frac{1}{\rho}} e^{z\ln t} dz + \\ + \int_{C_{-1}^{+}} \frac{[\Gamma(z+1)]^{-\frac{1}{\rho}} e^{z(\ln t + 2\pi i)}}{-e^{2\pi i z}+1} dz + \\ + \int_{C_{-1}^{-}} \frac{[\Gamma(z+1)]^{-\frac{1}{\rho}} e^{z(\ln t - 2\pi i)}}{-e^{-2\pi i z}+1} dz + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

К первому интегралу мы можем сразу применить рассуждения теоремы 4.1.3, что даст нам

$$\int_{-1}^{\infty} [\Gamma(z+1)]^{-\frac{1}{\rho}} e^{z \ln t} dz =$$

$$= (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2\rho}} t^{\frac{\rho-1}{2}} e^{\frac{1}{\rho} t^{\rho}} (1 + O(t^{-\rho})) + O\left(\frac{1}{t(\ln t)^{1/\rho}}\right)$$

при $|\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \eta$, $\eta > 0$, и

$$\int_{-1}^{\infty} [\Gamma(z+1)]^{-\frac{1}{\rho}} e^{z \ln t} dz = O\left(\frac{1}{t(\ln t)^{1/\rho}}\right)$$

при $\pi \geqslant \arg t \geqslant \frac{\pi}{2\rho} + \eta$.

С двумя последними интегралами вопрос несколько сложнее, так как у них подинтегральные функции имеют особые точки на действительной оси. Однако во втором из них величина $\ln t + 2\pi i$, играющая роль t в теореме 4.1.3, имеет положительную мнимую часть, так что в рассуждениях теоремы 4.1.3 можно обойтись только рассмотрением верхней полуплоскости, где особенностей у подинтегральной функции нет. Аналогично в третьем интеграле можно обойтись нижней полуплоскостью. Ограничимся рассмотрением одного интеграла, скажем второго.

Для точки перевала имеем уравнение

$$\frac{d}{dz}\left\{-\frac{1}{\rho}(z \ln z - z) + z(\ln t + 2\pi i) + O\left(\frac{1}{z}\right) + \right.$$

$$\left. + O\left(e^{2\pi i z}\right)\right\} = 0,$$

из которого находим

$$\frac{1}{\rho} \ln z = \ln t + 2\pi i + O\left(\frac{1}{z}\right) + O\left(e^{2\pi i z}\right),$$

т. е.

$$z = c(t) = t^{\rho} e^{2\pi i \rho} \left(1 + O\left(e^{2\pi i t^{\rho} e^{2\pi i \rho}}\right)\right) O\left(t^{-\rho}\right).$$

Радиус влияния этой точки перевала равен

$$\rho_c(t) = O\left(t^{\frac{\rho}{2}}\right).$$

Так как согласно теореме 4.1.3 в асимптотическую формулу входит лишь точка перевала, лежащая в сколь угодно малом угле $|\arg z|<\eta$, то точка перевала или не входит в асимптотику, или находится от действительной оси на расстоянии порядка t^ρ, что значительно больше, чем ее радиус влияния.

Таким образом, в нашем случае метод перевала применим к оценке всех трех интегралов.

Если $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ и $|\arg t| \leqslant \pi-\eta$, то основной вклад в оценку дает только точка перевала первого интеграла, и мы получаем

$$F(t) \approx (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2\rho}} t^{\frac{\rho-1}{2}} e^{\frac{1}{\rho} t^\rho}\left(1+O\left(t^{-\rho}\right)\right), \quad t\to\infty,\ |\arg t| \leqslant \pi-\eta.$$

При $\rho<\frac{1}{2}$ и $\arg t$, близких к $\pm\pi$, один из оставшихся интегралов дает вклад того же порядка. Эту формулу мы приводить не будем.

Пример 3. Найдем асимптотическое поведение при $t\to\infty$ функции

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} t^n, \qquad 1<\alpha<2.$$

Попытаемся опять применить теорему 4.2.2. Здесь $\mu(z)=e^{-z^\alpha}$ имеет особенность при $z=0$, так что нам придется взять $0<\sigma<1$. Поэтому

$$F(t)=\int_\sigma^\infty e^{-z^\alpha+z\ln t}\,dz+\int_{C_\sigma^+} \frac{e^{-z^\alpha+z(\ln t+2\pi i)}}{1-e^{2\pi i z}}\,dz+ \\ +\int_{C_\sigma^-} \frac{e^{-z^\alpha+z(\ln t-2\pi i)}}{1-e^{-2\pi i z}}\,dz+O(z^\sigma).$$

Выясним возможность применения метода перевала к последним двум интегралам. Те соображения, что, применяя рассуждения теоремы 4.1.3, мы можем ограничиться полуплоскостью, по-прежнему справедливы. Нужно выяснить только, не попадает ли действительная ось в область влияния точек перевала для второго и третьего интегралов (согласно теореме 4.1.3 нас интересуют только точки перевала, ближайшие к положительной части действительной оси). Ограничимся рассмотрением второго интеграла.

Для точки перевала имеем уравнение

$$-\alpha z^{\alpha-1}+\ln t+2\pi i=O(e^{2\pi i z}),$$

из которого находим

$$z=c(t)=\alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}(\ln t+2\pi i+O(e^{2\pi i z}))^{\frac{1}{\alpha-1}}=$$
$$=\alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}(\ln|t|+(\varphi+2\pi)i+O(e^{2\pi i z}))^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

где

$$\varphi=\arg z,\quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

Радиус влияния этой точки перевала равен

$$\rho_c(t)\sim A(\ln|t|)^{\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}},$$

а расстояние от этой точки перевала до оси имеет порядок

$$(\ln|t|)^{\frac{1}{\alpha-1}-1}=(\ln|t|)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}.$$

Значит, при $1<\alpha<2$ расстояние от точки перевала до оси стремится к бесконечности при $t\to\infty$ и велико по сравнению с радиусом влияния. Метод перевала применим. Если же $\alpha>2$, то особые точки на действительной оси попадают в область влияния точки перевала и применение метода перевала наталкивается на серьезные трудности.

Опуская выкладки, приведем асимптотическую формулу для $F(t)$ при $1<\alpha<2$:

$$F(t)=K_\alpha(\ln|t|)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}}\Big\{\exp\Big[c_\alpha(\ln|t|+\varphi i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+o(1)\Big]+$$
$$+\exp\Big[c_\alpha(\ln|t|+(\varphi+2\pi)i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+o(1)\Big]+$$
$$+\exp\Big[c_\alpha(\ln|t|+(\varphi-2\pi)i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+o(1)\Big]\Big\}.$$

Здесь $\varphi=\arg t$, $c_\alpha=(\alpha-1)\alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}$, $K_\alpha=\sqrt{2\pi\alpha(\alpha-1)}$.

Разобранный пример дает довольно точное представление о пределах применимости теоремы 4.2.2 (конечно, если говорить не о гладкости функций $\mu(z)$, а только о скорости их убывания).

С помощью той же леммы 2 можно асимптотически оценивать и бесконечные произведения, например канонические произведения с гладко расположенными нулями.

Теорема 4.2.3. *Пусть функция $w=\mu(z)$ регулярна в области D, содержащей положительную часть действительной оси, и отображает ее взаимно однозначно и конформно на угол $|\arg w|<\alpha$, причем так, что $\operatorname{Re} w \to +\infty$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$. Обозначим через L_η кривую, переходящую при отображении $w=\mu(z)$ в луч $\arg w=\eta$.*

Если выполнены условия

$$\int_1^\infty \frac{dt}{|\mu(t)|} < \infty$$

и на любой кривой L_η, $0<|\eta|<\alpha$,

$$\ln|\mu(z)| = o(|\operatorname{Im} z|), \qquad z\in L_\eta, \quad z\to\infty, \tag{6}$$

то

$$F(t) = \prod_{n=1}^\infty \left(1-\frac{t}{\mu(n)}\right) \approx \exp\left\{\int_\sigma^\infty \ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)dz + R(\sigma, t)\right\}$$

при

$$t\to\infty, \eta \leqslant |\arg t| \leqslant \pi$$

где

$$R(\sigma, t) \approx \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\ln(-t) - \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k(\sigma)}{t^k},$$

причем $c_k(\sigma)$ определяются формулами

$$c_0(\sigma) = \int_{L_{\sigma,\eta}} \frac{\ln\mu(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} + \int_{L_{\sigma,-\eta}} \frac{\ln\mu(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1},$$

$$kc_k(\sigma) = \int_{L_{\sigma,\eta}} \frac{[\mu(z)]^k\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} + \int_{L_{\sigma,-\eta}} \frac{[\mu(z)]^k\,dz}{e^{2\pi iz}-1}, \quad k=1, 2, \ldots$$

(Здесь $0<\sigma<1$ и $L_{\sigma,\eta}$ — контур, образованный вертикальным отрезком, идущим из точки $z=\sigma$ до пересечения с L_η, и частью L_η, идущей от этой точки пересечения до бесконечности.)

Доказательство. Применим лемму 2, взяв в качестве контуров C_σ^+ и C_σ^- контуры $L_{\sigma,\eta}$ и $L_{\sigma,-\eta}$ соответственно. Поскольку область, заключенная между $L_{\sigma,-\eta}$ и $L_{\sigma,\eta}$, отображается функцией $w=\mu(z)$ в часть угла $|\arg w|<\eta$, то при значениях t, лежащих вне угла $|\arg t|\leqslant\eta_1$, $\eta_1>\eta$, функция $\ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)$ не имеет особых точек между контурами $L_{\sigma,-\eta}$ и $L_{\sigma,\eta}$. Другие условия леммы 2 для этой функции тоже выполнены. Поэтому

$$\ln F(t)=\int_\sigma^\infty \ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)dz+\int_{L_{\sigma,\eta}}\ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)\frac{dz}{e^{-2\pi iz}-1}+$$
$$+\int_{L_{\sigma,-\eta}}\ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)\frac{dz}{e^{2\pi iz}-1}.$$

Но с помощью условия (6) нетрудно показать, что

$$\int_{L_{\sigma,\eta}}\ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)\frac{dz}{e^{-2\pi iz}-1}\approx\ln t\int_{L_{\sigma,\eta}}\frac{dz}{e^{-2\pi iz}-1}-$$
$$-\int_{L_{\sigma,\eta}}\frac{\ln\mu(z)}{e^{-2\pi iz}-1}\,dz-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{t^k}\int_{L_{\sigma,\eta}}\frac{[\mu(z)]^k\,dz}{e^{-2\pi iz}-1},$$

и аналогично для интеграла по $L_{\sigma,-\eta}$. Отсюда получается утверждение теоремы, так как

$$\int_{L_{\sigma,\eta}}\frac{dz}{e^{-2\pi iz}-1}+\int_{L_{\sigma,-\eta}}\frac{dz}{e^{2\pi iz}-1}=\sigma-\frac{1}{2}.$$

Немного дополнив наши рассуждения, легко получить асимптотические формулы для $F(t)$ вблизи ее нулей.

Теорема 4.2.4. *Пусть функция $\mu(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2.3, а $\nu(z)$ — функция, обратная к $\mu(z)$ (та ветвь, которая совершает обратное отображение). Тогда при t из угла $|\arg t|<\eta$ справедливы формулы:*

при t, лежащих выше L_0,

$$F(t) \approx \frac{1-e^{2\pi i\nu(t)}}{1-e^{2\pi i\nu(0)}} \exp\left\{\int_\sigma^\infty \ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)dz + R(\sigma, t)\right\};$$

при t, лежащих ниже L_0,

$$F(t) \approx \frac{1-e^{-2\pi i\nu(t)}}{1-e^{-2\pi i\nu(0)}} \exp\left\{\int_\sigma^\infty \ln\left(1+\frac{t}{\mu(z)}\right)dz + R(\sigma, t)\right\};$$

при t, лежащих на L_0,

$$F(t) \approx \frac{\sin\pi\nu(t)}{\sin\pi\nu(0)} \exp\left\{\int_\sigma^\infty \ln\left|1+\frac{t}{\mu(z)}\right|dz + R(\sigma, t)\right\}.$$

(Здесь $R(\sigma, t)$ — тот же асимптотический ряд, что и в теореме 4.2.3.)

Доказательство. Ограничимся доказательством первой формулы. Пусть точка t лежит на кривой L_{η_1}, $0<\eta<\eta_1<\alpha$. Тогда, применяя лемму 2 к функции $f(z) = -\frac{1}{\mu(z)-t}$, мы получаем

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t-\mu(z)} = \int_\sigma^\infty \frac{dz}{t-\mu(z)} + \\ + \int_{L_{\sigma,\eta}} \frac{1}{t-\mu(z)}\,\frac{dz}{e^{-2\pi iz}-1} + \int_{L_{\sigma,-\eta}} \frac{1}{t-\mu(z)}\,\frac{dz}{e^{2\pi iz}-1}.$$

Между кривыми $L_{\sigma,\eta}$ и $L_{\sigma,\alpha}$ в точке $z=\nu(t)$ находится полюс функции $(t-\mu(z))^{-1}$. Вычет в нем равен $-\frac{1}{\mu'(\nu(t))} = -\nu'(t)$. Поэтому по теореме о вычетах

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{\nu'(t)}{1-e^{-2\pi i\nu(t)}} + \int_\sigma^\infty \frac{dz}{t-\mu(z)} + \\ + \int_{L_{\sigma,\alpha}} \frac{(t-\mu(z))^{-1}}{e^{-2\pi iz}-1}\,dz + \int_{L_{\sigma,-\alpha}} \frac{(t-\mu(z))^{-1}}{e^{2\pi iz}-1}\,dz.$$

Интегрируя от нуля до t, получаем

$$\ln F(t) = \ln\frac{1-e^{-2\pi i\nu(t)}}{1-e^{-2\pi i z(0)}} + \int_{\sigma}^{\infty}\ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)dz +$$
$$+ \int_{L_{\sigma,\alpha}} \frac{\ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)}{e^{-2\pi i z}-1}\,dz + \int_{L_{\sigma,-\alpha}} \frac{\ln\left(1-\frac{t}{\mu(z)}\right)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz.$$

Поскольку последние два интеграла имеют тот же асимптотический ряд, что и в теореме 4.2.3, мы получаем первую из наших формул. Вторая доказывается совершенно аналогично, а третью можно получить из соображений непрерывности. Теорема доказана.

Пример 4. Найдем асимптотическое поведение при $t\to\infty$ функции

$$F(t) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-te^{-n^{\alpha}}\right), \qquad \alpha<\frac{1}{2}.$$

В проверке нуждается только условие (6). Для кривой L_η получаем уравнение $\operatorname{Im} z^{\alpha}=\eta$. Полагая $z=z(r)=re^{i\varphi(r)}$, находим, что при $r\to\infty$

$$\varphi(r)\sim\frac{1}{\alpha}\eta r^{-\alpha},\ \operatorname{Re} z(r)\sim r^{\alpha},\ \operatorname{Im} z(r)\sim\frac{\eta}{\alpha}r^{1-\alpha}.$$

Отсюда ясно, что при $\alpha<\frac{1}{2}$ условие (6) выполнено. Опуская выкладки, приведем окончательную формулу:

$$\ln F(t)\approx\int_0^{\infty}\ln\left(1-te^{-x^{\alpha}}\right)dx-\frac{1}{2}\ln(-t)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(0)}{t^k}-c_0(0), \qquad t\to\infty,\ |\arg(-t)|<\pi-\eta,$$

где

$$c_0(0)=\zeta(-\alpha), \quad c_k(0)=\frac{2}{k}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(ky^{\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{e^{2\pi y}-1}e^{ky^{\alpha}\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\,dy.$$

На этом примере видны пределы применимости теорем 4.2.3 и 4.2.4.

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 4.2

1°. Положим

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\ln(n+2))^n}.$$

Показать, что

$$F(z)=\sqrt{2\pi z}\exp\left\{\frac{z}{2}+e^{z-\ln z}+o(1)\right\}+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

при $\operatorname{Re} z\to+\infty$, $|\operatorname{Im} z|<\pi$, и

$$F(z)=O\left(\frac{1}{z}\right)$$

при $z\to\infty$ вне полуполосы $\operatorname{Re} z>0$, $|\operatorname{Im} z|<\pi$.

2°. Пусть ρ — не целое число и $p=[\rho]$. Показать, что если обозначить

$$\Gamma_\rho(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-zn^{-\frac{1}{\rho}}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{z^k n^{-\frac{k}{\rho}}}{k}\right),$$

то

$$\ln\Gamma_\rho(z)\approx\frac{\pi z^\rho}{\sin\pi\rho}-\frac{1}{2}\ln(-z)-\sum_{k=-p}^{\infty}c_k z^{-k}$$

$$z\to\infty,\quad |\arg(-z)|\leqslant\pi-\eta,$$

где

$$c_0=\frac{1}{2\rho}\ln 2\pi,\qquad c_k=\frac{1}{k}\zeta\left(-\frac{k}{\rho}\right),\qquad k\neq 0.$$

3°. Пусть аналитические функции $\varphi(z)$ и $\mu(z)$ регулярны в области D, содержащей положительную часть действительной оси, и функция $w=\mu(z)$ отображает D на угол $|\arg w|<\alpha$. В обозначениях теоремы 3.2.3, если выполнены условия:

$$\text{интеграл}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{\mu(t)}\,dt\ \text{сходится},$$

и на любой кривой L_η, $\eta \neq 0$,

$$\ln|\varphi(t)| = o(|\operatorname{Im} z|), \quad \ln|\mu(z)| = o(|\operatorname{Im} z|), \quad z \to \infty, \ z \in L_\eta,$$

то

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{\mu(n) - t} \approx \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\varphi(z)\, dz}{\mu(z) - t} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(\sigma)}{t^{k+1}}$$

$$t \to \infty, \quad |\arg(-t)| \leqslant \pi - \eta,$$

где $0 < \sigma < 1$ и

$$c_k(\sigma) = \int\limits_{L_{\sigma,\eta}} \frac{\varphi(z)[\mu(z)]^k}{e^{-2\pi i z} - 1}\, dz + \int\limits_{L_{\sigma,-\eta}} \frac{\varphi(z)[\mu(z)]^k}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz.$$

§ 4.3. Нули целых функций

В двух предыдущих параграфах мы рассказывали о том, как можно получать асимптотические формулы для целых функций, представленных интегралами или рядами. Сейчас мы коротко покажем, как находить асимптотические формулы для нулей таких функций.

Все асимптотические формулы, которые мы получали, носили следующий характер:

$$F(z) = e^{g_1(z)+o(1)} + e^{g_2(z)+o(1)}, \qquad z \to \infty, \ z \in D, \tag{1}$$

где D — некоторая бесконечная область, а $g_1(z)$ и $g_2(z)$ — две аналитические функции, регулярные в этой области. Часто в таких асимптотических формулах было только одно слагаемое, но тогда $F(z)$, очевидно, не обращалась в нуль при достаточно больших $z \in D$.

Исходя из того, что асимптотические формулы для $F(z)$ имеют вид (1), мы попытаемся найти асимптотические формулы для нулей $F(z)$.

Разумеется, наличие асимптотических формул вида (1) не является обязательным для любых целых функций. Вполне может случиться, что в асимптотическую формулу входит не два, а большее число примерно равноценных слагаемых. Тогда, конечно, задача получения асимптотических формул для нулей чрезвычайно усложняется. Мы ограничимся исследованием только самого простейшего случая.

Сначала докажем совсем простой результат.

Теорема 4.3.1. *Пусть $F(z)$ — аналитическая функция, регулярная в области D_{η_0}, которая отображается функцией $\zeta=\gamma(z)$ взаимно однозначно и конформно на полуполосу* $\operatorname{Re}\zeta>a$, $|\operatorname{Im}\zeta|<\eta_0$, *причем* $\operatorname{Re}\zeta\to+\infty$ *при* $r\to\infty$. *Обозначим через* D_η, $\eta\leqslant\eta_0$, *область, которая отображается функцией* $\zeta=\gamma(z)$ *на полуполосу* $\operatorname{Re}\zeta>a$, $|\operatorname{Im}\zeta|<\eta$, *а через* $\omega(\zeta)$ — *функцию, осуществляющую обратное отображение.*

Если для $F(z)$ имеет место асимптотическая формула

$$F(z)=2e^{\alpha(z)}\cos(\gamma(z)+o(1)),\qquad z\to\infty,\ z\in D_{\eta_0},$$

где $\alpha(z)$ — произвольная аналитическая функция, регулярная в D_{η_0}, то функция $F(z)$ имеет в области D_{η_1}, $\eta_1<\eta_0$, бесконечную последовательность нулей λ_n, для которых справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n=\omega\left(\pi\left(n+n_0+\frac{1}{2}\right)+o(1)\right),\qquad n\to\infty.$$

(Здесь n_0 — некоторое целое число, зависящее от η_1 и a.)

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_1(\zeta)=\frac{1}{2}e^{-\alpha(\omega(\zeta))}F(\omega(\zeta)).$$

Из условий теоремы следует, что $F_1(\zeta)=\cos\varphi(\zeta)$, где функция $\varphi(\zeta)$ в полуполоее $\operatorname{Re}\zeta>a$, $|\operatorname{Im}\zeta|<\eta_0$, регулярна и равна $\zeta+o(1)$ при $\zeta\to\infty$. С помощью теоремы Руше нетрудно показать, что в полуполосе $\operatorname{Re}\zeta>a_1$, $|\operatorname{Im}\zeta|<\eta_1$, функция $w=\varphi(\zeta)$ однолистна и при любом $\eta_1<\eta$ и при достаточно большом a_1, а в полуполосе $\operatorname{Re}w>a_2$, $|\operatorname{Im}w|<\eta_0$, обратная к w функция $\psi(w)$ регулярна и равна $w+o(1)$ при $w\to\infty$. Следовательно, в полуполосе $\operatorname{Re}\zeta>a_1$, $|\operatorname{Im}\zeta|<\eta_1$, функция $F_1(\zeta)$ обращается в нуль только в точках

$$\zeta_n=\psi\left(\pi\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\right)=\pi\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+o(1),$$

где n_1 отличается от n на некоторое фиксированное целое число n_0. Так как $\lambda_n=\omega(\zeta_n)$, мы получаем утверждение теоремы.

Крупным недостатком доказанной теоремы является наличие в асимптотической формуле для нулей неопределенного числа n_0. Этот недостаток нельзя устранить, не внося существенно новых предположений, так как по асимптотической формуле для функции $F(z)$ не всегда можно судить о числе ее нулей, лежащих в конечной части плоскости. Однако если $F(z)$ — целая функция и нам известно ее асимптотическое поведение при любом стремлении z к ∞, то эта задача разрешима.

Прежде всего сформулируем требования, налагаемые на асимптотические формулы для целой функции $F(z)$ при $z\to\infty$.

Пусть мы имеем m попарно не перекрывающихся областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$, уходящих в бесконечность и разделяющих область $|z|>R$ на m частей $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Занумеруем области так, чтобы при обходе в положительном направлении после D_k следовала G_k, а за ней D_{k+1}. При этом для удобства записи мы будем полагать

$$D_{m+1}=D_1,\ G_{m+1}=G_1.$$

С каждой областью D_k свяжем аналитическую функцию $\gamma_k(z)$, отображающую D_k взаимно однозначно и конформно на область, лежащую в угле $|\arg\zeta|<\pi$, но содержащую полуполосу $\operatorname{Re}\zeta>a$, $|\operatorname{Im}\zeta|<\eta$, при любом η и при достаточно большом a. При этом потребуем, чтобы $\operatorname{Re}\gamma_k(z)\to+\infty$ при $z\to\infty$, $z\in D_k$, и будем полагать $\gamma_{m+1}(z)=\gamma_1(z)$.

Через $L_k^{(\eta)}$ обозначим линии, переходящие при отображении $\zeta=\gamma_k(z)$ в прямые $\operatorname{Re}\zeta>a$, $\operatorname{Im}\zeta=\eta$. Будем предполагать, что эти линии пересекаются окружностью $|z|=r$ при достаточно большом r только один раз, и уравнение кривой $L_k^{(0)}$ запишем в виде $z=z_k(r)$.

Наши предположения относительно функции $F(z)$ сводятся к следующим:

при $z\in G_k$

$$F(z)=e^{g_k(z)+o(1)},\qquad z\to\infty,\tag{2}$$

где $g_k(z)$ — аналитические функции, регулярные в объединении трех соседних областей G_k, D_k, D_{k+1};

при $z\in D_k$

$$F(z)=2e^{\alpha_k(z)}\cos(\gamma_k(z)+o(1)),\qquad z\to\infty,\tag{3}$$

где $\alpha_k(z)$ — некоторые аналитические функции, регулярные в D_k $(\alpha_{m+1}(z)=\alpha_1(z))$. Функции $\gamma_k(z)$, $\alpha_k(z)$ и $g_k(z)$

связаны между собой соотношениями

$$g_k(z) - g_{k+1}(z) = 2i\gamma_{k+1}(z), \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$
$$g_k(z) = \alpha_k(z) - i\gamma_k(z), \qquad k = 1; 2, \ldots, m; \quad z \in D_k.$$

Заметим, что, задавая $g_1(z)$ и $\gamma_1(z), \ldots, \gamma_m(z)$, мы задаем все функции $g_k(z)$ и $\alpha_k(z)$. Действительно,

$$g_2(z) = g_1(z) - i\gamma_2(z), \qquad \alpha_k(z) = g_k(z) + i\gamma_k(z).$$

Более того, обойдя весь круг, мы вернемся снова к тому же месту. При этом мы получим, вообще говоря, другую функцию, $g_1^*(z)$. Но поскольку функция $F(z)$ целая, то такой обход не может изменить ее значения, и мы находим

$$F(z) = e^{g_1(z)+o(1)} = e^{g_1^*(z)+o(1)}, \qquad z \to \infty, \ z \in G_1.$$

Это значит, что при достаточно больших z имеем $g_1^*(z) = g_1(z) + 2\pi\nu_0 i + o(1)$, где ν_0 — некоторое целое число.

Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат.

Теорема 4.3.2. *Пусть целая функция $F(z)$ обладает перечисленными выше свойствами, а $n_F(r)$ — число нулей $F(z)$ в круге $|z| < r$. Тогда*

$$n_F(r) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{1}{\pi} \gamma_k(z_k(r)) + \frac{1}{2} + o(1) \right].$$

(Здесь $[u]$ означает целую часть u.)

Доказательство. Если на окружности $|z| = r$ нет нулей $F(z)$, то

$$n_F(r) = \frac{1}{2\pi} \underset{|z|=r}{\text{изм.}} \arg F(z) = \frac{1}{2\pi} \underset{|z|=r}{\text{изм.}} \operatorname{Im} \ln F(z).$$

причем изменение $\operatorname{Im} \ln F(z)$ можно вычислить не только по окружности $|z| = r$, но и по любому контуру, в который можно деформировать эту окружность, не переходя через нули $F(z)$. Если часть этого контура, скажем s, лежит в односвязной области, не содержащей нулей $F(z)$, то

$$\underset{s}{\text{изм.}} \operatorname{Im} \ln F(z) = \operatorname{Im} \ln F(z_2) - \operatorname{Im} \ln F(z_1),$$

где z_1 — начало s, а z_2 — конец. Из асимптотических формул (2) и (3) видно, что в G_k функция $F(z)$ не имеет нулей, а в D_k может иметь их лишь между кривыми $L_k^{(-\eta)}$ и $L_k^{(\eta)}$ (все это, конечно, верно вне достаточно большого круга). Поэтому для подсчета изменения $\operatorname{Im}\ln F(z)$ мы разобьем наш контур на части $\tau_{k,\eta}$ и $s_{k,\eta}$.

$\tau_{k,\eta}$ — это дуги, переходящие при отображении $\zeta = \gamma_k(z)$ в вертикальные отрезки

$$\operatorname{Re}\zeta = \pi n_k, \qquad -\eta < \operatorname{Im}\zeta < \eta,$$

где целое число n_k выбрано таким образом, чтобы между дугой окружности $|z| = r$ и $\tau_{k,\eta}$ не было нулей $F(z)$; из асимптотической формулы (3) видно, что число n_k должно удовлетворять условию

$$\pi\left(n_k - \frac{1}{2}\right) < \gamma_k(z_k(r)) + o(1) < \pi\left(n_k + \frac{1}{2}\right),$$

т. е.

$$n_k = \left[\frac{1}{\pi}\gamma_k(z_k(r)) + \frac{1}{2} + o(1)\right];$$

концы дуг $\tau_{k,\eta}$, лежащие на линиях $L_k^{(\eta)}$ и $L_k^{(-\eta)}$, мы обозначим соответственно через $z_{k,\eta}$ и $z_{k,-\eta}$; в качестве $s_{k,\eta}$ мы возьмем какие-нибудь кривые, заключенные между $L_k^{(\eta)}$ и $L_{k+1}^{(-\eta)}$ и соединяющие точки $z_{k,\eta}$ и $z_{k+1,-\eta}$.

Напишем

$$n_F(r) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \underset{\tau_{k,\eta}}{\text{изм.}} \operatorname{Im}\ln F(z) + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \underset{s_{k,\eta}}{\text{изм.}} \operatorname{Im}\ln F(z).$$

Для первой суммы с помощью асимптотической формулы (3) находим

$$\underset{\tau_{k,\eta}}{\text{изм.}} \operatorname{Im}\ln F(z) =$$
$$= \operatorname{Im}\{\alpha_k(z_{k,\eta}) - \alpha_k(z_{k,-\eta})\} + \underset{\tau_{k,\eta}}{\text{изм.}} \arg\cos(\gamma_k(z) + o(1)).$$

Согласно выбору линии $\tau_{k,\eta}$ имеем

$$\underset{\tau_{k,\eta}}{\text{изм.}} \arg\cos(\gamma_k(z) + o(1)) = o(1),$$

и следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \underset{\tau_{k,\eta}}{\text{изм.}} \operatorname{Im} \ln F(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Im}\{\alpha_k(z_{k,\eta}) - \alpha_k(-z_{k,-\eta})\} + o(1). \qquad (4)$$

Далее, кривые $s_{k,\eta}$ лежат в односвязных областях, не содержащих нулей $F(z)$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \underset{s_{k,\eta}}{\text{изм.}} \operatorname{Im} \ln F(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Im}\{\ln F(z_{k+1,-\eta}) - \ln F(z_{k,\eta})\}.$$

Из асимптотических формул (2) и (3) видно, что при z, лежащем между $L_k^{(\eta)}$ и $L_{k+1}^{(-\eta)}$,

$$\ln F(z) - g_k(z) = o(1) + \theta e^{-\eta}, \qquad |\theta| < 1.$$

Значит,

$$\operatorname{Im}\{\ln F(z_{k+1,-\eta}) - \ln F(z_{k,\eta})\} =$$

$$= \operatorname{Im}\{g_k(z_{k+1,-\eta}) - g_k(z_{k,\eta})\} + o(1) + \theta e^{-\eta}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \underset{s_{k,\eta}}{\text{изм.}} \operatorname{Im} \ln F(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=2}^{m} \operatorname{Im}\{g_{k-1}(z_{k,-\eta}) - g_k(z_{k,\eta})\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\{g_m(z_{1,-\eta}) - g_1(z_{1,\eta})\} + o(1) + \theta m e^{-\eta}.$$

Но

$$\operatorname{Im}\{g_{k-1}(z_{k,-\eta}) - g_k(z_{k,\eta})\} = -\operatorname{Im}\{\alpha_k(z_{k,\eta}) - \alpha_k(z_{k,-\eta})\} +$$

$$+ \operatorname{Re}\{\gamma_k(z_{k,\eta}) + \gamma_k(z_{k,-\eta})\}, \quad k \geqslant 2,$$

$$\operatorname{Im}\{g_m(z_{1,-\eta}) - g_1(z_{1,\eta})\} =$$

$$= 2\pi\nu_0 - \operatorname{Im}\{\alpha_1(z_{1,\eta}) - \alpha_1(z_{1,-\eta})\} +$$

$$+ \operatorname{Re}\{\gamma_1(z_{1,\eta}) + \gamma_1(z_{1,-\eta})\} + o(1);$$

согласно определению точек $z_{k,\eta}$ и $z_{k,-\eta}$

$$\operatorname{Re}\gamma_k(z_{k,\eta}) = \operatorname{Re}\gamma_k(z_{k,-\eta}) = \pi n_k.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \underset{s_{k,\eta}}{\text{изм.}} \operatorname{Im} \ln F(z) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{m} n_k + o(1) + \theta m e^{-\eta}.$$

Складывая это выражение с выражением (4), находим

$$n_F(r) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{m} n_k + o(1) + \theta m e^{-\eta}, \qquad |\theta| < 1.$$

Так как η может быть сколь угодно большим, то отсюда следует

$$n_F(r) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{m} n_k + o(1), \qquad r \to \infty.$$

Поскольку $n_F(r)$, ν_0 и n_k — целые числа, то это означает, что при достаточно больших r

$$n_F(r) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{m} n_k.$$

Вспоминая определение n_k, мы приходим к утверждению теоремы.

Ясно, что, имея более точные асимптотические формулы для $F(z)$, мы получаем и более точные асимптотические формулы для ее нулей.

Покажем на двух несложных примерах, как применяются доказанные теоремы.

Пример 1. Обозначим через $\lambda_{n,s}$ величину n-го положительного нуля функции $J_s(z)$ — функции Бесселя порядка s (s — целое неотрицательное число).

Для функции $J_s(z)$ методом перевала может быть получена асимптотическая формула (см. § 1.6, пример 4)

$$J_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{(iz)^{-\frac{1}{2}} e^{iz - \frac{\pi i s}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right)} + \right.$$

$$\left. + (-iz)^{-\frac{1}{2}} e^{-iz + \frac{\pi i s}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right)}\right\}, \qquad z \to \infty$$

(для $u^{-\frac{1}{2}}$ берется ветвь, положительная при положительных u). Используем сначала теорему 3.3.1, положив

$$\gamma(z) = z - \frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Так как $\omega(\zeta) = \zeta + \frac{\pi s}{2} + \frac{\pi}{4}$, то мы получаем

$$\lambda_{n,s} = \pi(n + n_0) + \frac{\pi s}{2} + \frac{3\pi}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

Теперь попробуем определить n_0 с помощью теоремы 4.3.2. Обозначим через $n_s(r)$ число нулей $J_s(z)$ в круге $|z| < r$. В обозначениях теоремы 3.3.2 имеем

$$g_1(z) = iz - \frac{\pi i s}{2} - \frac{1}{2}\ln(iz), \quad g_2(z) = -iz + \frac{\pi i s}{2} - \frac{1}{2}\ln(-iz),$$

$$\gamma_2(z) = z - \frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad \gamma_1(z) = -z + \frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{4},$$

поэтому $g_1^*(z) = g_1(z)$ и $\nu_0 = 0$. Следовательно, по теореме 4.3.2

$$n_s(r) = \left[\frac{r}{\pi} - \frac{s}{2} + \frac{1}{4} + o(1)\right] + \left[\frac{r}{\pi} + \frac{s}{2} + \frac{1}{4} + o(1)\right].$$

Но $J_s(z)$ имеет s-кратный нуль при $z=0$, и функция $z^{-s}J_s(z)$ четна, так что $n_s(\lambda_{n,s} + \varepsilon) = 2n + s$ $\left(\text{при } 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. Подставляя $\lambda_{n,s} = \pi(n + n_0) + \frac{\pi s}{2} + \frac{\pi s}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right)$ в асимптотическую формулу для $n_s(r)$, мы находим $n_0 = -2$. Следовательно,

$$\lambda_{n,s} = \pi\left(n + \frac{s}{2} - \frac{5}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

Пример 2. Найдем асимптотическое поведение при $r \to \infty$ величины $n_F(r)$ для

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^\alpha} z^n, \qquad \frac{3}{2} < \alpha < 2.$$

В примере 3 § 2 мы получили асимптотическую формулу для $F(z)$ при $1<\alpha<2$. Если $\alpha>\frac{3}{2}$, то этой формуле можно придать более простой вид:

$$F(z)=M_\alpha(\ln z)^{\frac{1}{2}\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}\exp\left\{c_\alpha(\ln z)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+o(1)\right\}$$

$$z\to\infty,\quad |\arg z|\leqslant\pi-\eta$$

и

$$F(z)=2M_\alpha(\ln(-z))^{\frac{1}{2}\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}\exp c_\alpha\left\{(\ln(-z))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}-\right.$$
$$\left.-\pi^2\frac{2-\alpha}{(\alpha-1)^2}(\ln(-z))^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}\right\}\cos\left(\frac{\alpha c_\alpha}{\alpha-1}\pi(\ln(-z))^{\frac{1}{\alpha-1}}+o(1)\right),$$

где

$$M_\alpha=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha-1}}\,\alpha^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}},\quad c_\alpha=(\alpha-1)\,\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

В обозначениях теоремы 4.3.2 имеем $m=1$ и

$$g_1(z)=c_\alpha(\ln z)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+\frac{1}{2}\frac{2-\alpha}{\alpha-1}\ln\ln z,$$

$$\gamma_1(z)=\frac{\alpha c_\alpha}{\alpha-1}\pi(\ln(-z))^{\frac{1}{\alpha-1}},\qquad z_1(r)=-r.$$

Нетрудно убедиться, что $\nu_0=0$. Поэтому

$$n_F(r)=\left[\frac{\alpha c_\alpha}{\alpha-1}(\ln r)^{\frac{1}{\alpha-1}}+\frac{1}{2}+o(1)\right]=$$
$$=\left[\left(\frac{\ln r}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}+\frac{1}{2}+o(1)\right],\qquad r\to\infty,$$

и

$$\lambda_n=e^{\alpha\left(n-\frac{1}{2}-o(1)\right)^{\alpha-1}},\qquad n\to\infty.$$

ЗАДАЧИ И ДОПОЛНЕНИЯ К § 4.3

1°. Положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

где L — граница полуполосы $\operatorname{Re}\zeta > a$, $|\operatorname{Im}\zeta| < \pi$, $a > |z|$. Пусть λ_n — нули $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, занумерованные в порядке возрастания модулей. Показать, что

$$\lambda_n = \ln n + \ln 2\pi + \frac{\pi i}{2} - \frac{i \ln\ln n}{2n\pi} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$

§ 4.4. Два приема построения примеров

В заключение книги поговорим о методах построения примеров целых функций, имеющих предписанное поведение в бесконечности. Разумеется, все, что до сих пор излагалось в этой главе, тоже в большой степени относится к этому вопросу. Здесь мы дадим два метода, часто приводящих к нужным результатам довольно прямым путем.

Речь будет идти о задаче такого рода. Дана некоторая действительная функция $\Phi(z)$, определенная во всей плоскости z. Требуется выяснить, может ли существовать целая функция, не превосходящая по модулю $\Phi(z)$. При этом обычно $\Phi(z)$ задается не точно, а с некоторой степенью произвола (если $\Phi(z)$ задана точно, то задача весьма трудна). Первое, что мы должны сделать, когда возникает такая задача, это оценить субгармоническую миноранту. Оценка субгармонической миноранты — вопрос довольно сложный, и ясно, что он не становится проще, если нам нужно строить не субгармоническую функцию, а модуль целой функции. Поэтому естественно считать, что субгармоническая миноранта уже найдена, т. е. исходная функция $\Phi(z)$ уже является субгармонической, и мы решаем задачу о построении целой функции $F(z)$, удовлетворяющей условию

$$\ln|F(z)| \leqslant \Phi(z).$$

Если функция $\Phi(z)$ задана точно, то задача опять чрезвычайно сложна и, вообще говоря, неразрешима, так что мы по-прежнему должны считать, что в задании функции $\Phi(z)$ имеется некоторый произвол.

Будем еще предполагать, что функция $\Phi(z)$ не произвольная субгармоническая, а устроена следующим образом. Плоскость z разбита кривыми L_k на конечное число областей D_k. В каждой области D_k функция $\Phi(z)$ гармонична и при переходе из одной области в другую остается непрерывной.

При этих предположениях мы будем пытаться строить целую функцию, не только удовлетворяющую неравенству $\ln|F(z)| \leqslant \Phi(z)$, но, по возможности, вообще мало отличающуюся от $\Phi(z)$.

Наиболее простым является случай, когда $\Phi(z) \geqslant 0$ при всех z, так как задача полностью распадается в том смысле, что ее достаточно решить для каждой области D_k, найдя целую функцию, ограниченную вне D_k (или, во всяком случае, малую по сравнению с ее значениями в D_k), а внутри D_k мало отличающуюся от заданной аналитической функции (не обязательно целой). Докажем несколько результатов, позволяющих осуществлять такое построение для довольно важного класса областей D_k и заданных в них функций. Начнем с простейшей теоремы.

Теорема 4.4.1. *Пусть аналитическая функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям:*

1. *При достаточно больших положительных x функция $\varphi'(x)$ положительна и $\varphi(x)$ стремится к $+\infty$ быстрее любой степени x при $x \to +\infty$.*

2. *При любом A и при достаточно большом x функция $\varphi(z)$ регулярна в круге $|z-x| < A\dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$.*

3. *При любом фиксированном A*

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \sim \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \qquad x \to +\infty, \ |z-x| < A\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Обозначим через $D_{R,\alpha}$ область $x > R$, $|y| < \alpha\dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$, а через $L_{R,\alpha}$ — ее границу. Функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{R,\alpha}} \frac{e^{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad R > \max(R_0, |z|), \ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

является целой функцией z, не зависящей от R и α, и для *нее справедливы асимптотические формулы*

$$F(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}, \qquad z \to \infty,\ z \bar{\in} D_{R,\alpha};\ \alpha > \frac{\pi}{2},$$

$$F(z) \approx e^{\varphi(z)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}, \qquad z \to \infty,\ z \in D_{R,\alpha};\ \alpha < \pi,$$

где

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R,\alpha}} \zeta^n e^{\varphi(\zeta)} d\zeta.$$

Доказательство. Докажем прежде всего, что интегралы, определяющие $F(z)$ и a_n, сходятся. Для этого оценим $|e^{\varphi(\xi+i\eta)}|$ на кривой $\eta = \alpha \frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. В силу условия 2 функция $\varphi(\zeta)$ регулярна при любом A в круге $|\zeta - \xi| < A \frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, и мы можем написать

$$\ln \varphi(\xi + i\eta) - \ln \varphi(\xi) = i \int_0^{\eta} \frac{\varphi'(\xi + it)}{\varphi(\xi + it)} dt, \qquad |\eta| < A \frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Согласно условию 3 отсюда получаем

$$\ln \varphi\left(\xi + i\alpha \frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)}\right) = \ln \varphi(\xi) + i\alpha + o(1)$$

или

$$\left| e^{\varphi\left(\xi + i\alpha \frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)}\right)} \right| = e^{\varphi(\xi)(\cos\alpha + o(1))}, \qquad \xi \to +\infty. \quad (1)$$

Так как $\varphi(\xi) \to +\infty$ быстрее любой степени ξ, а $\cos\alpha < 0$ $\left(\text{мы предположили, что интегрирование происходит по } L_{R,\alpha}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, то сходимость интегралов обеспечена.

Убедимся, что $F(z)$ — целая функция, не зависящая от R и α. Мы определили $F(z)$ интегралом по $L_{R,\alpha}$ для $|z| < R$. Однако для $R_1 > R$ по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R,\alpha}} \frac{e^{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R_1,\alpha_1}} \frac{e^{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\ \frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi,$$

так как подинтегральная функция регулярна и контур можно произвольно деформировать. Но интеграл по L_{R_1,α_1} определяет функцию, регулярную уже при $|z| < R_1$. Поскольку R_1 можно брать произвольно большим, то $F(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость.

Перейдем к выводу асимптотических формул. Возьмем какое-либо α_1, $\alpha_1 > \alpha > \frac{\pi}{2}$, и предположим, что z лежит вне D_{R_0,α_1}. Очевидно, что если z лежит вне D_{R_0,α_1}, а ζ — на $L_{R_1,\alpha}$, то

$$|\zeta - z| > \eta \frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Подставляя в формулу

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R_1,\alpha}} \frac{e^{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad R_1 > R_0,$$

справедливую для всех z, лежащих вне $D_{R_0,\alpha}$, выражение

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\zeta}{z^2} - \ldots - \frac{\zeta^{N-1}}{z^N} + \frac{\zeta^N}{z^N}\frac{1}{\zeta - z},$$

находим

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n-1} + z^{-N} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R_1,\alpha}} \frac{e^{\varphi(\zeta)}\zeta^N}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

что в силу оценки (1) дает нам

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-2} a_n z^{-n-1} + O\left(z^{-N}\right), \qquad z \to \infty,\ z \in D_{R_0,\alpha_1}.$$

Это доказывает первую из наших асимптотических формул.

Пусть теперь z лежит в D_{R,α_1}, $\alpha_1 < \alpha < \pi$. Тогда при $R_1 > |z| > R_0$ мы можем написать согласно теореме о вычетах

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R_1,\alpha}} \frac{e^{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta = e^{\varphi(z)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R_1,\alpha}} \frac{e^{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Для последнего интеграла те же рассуждения, что и выше, дают нам тот же самый асимптотический ряд. Теорема доказана.

Сформулированные условия на $\varphi(z)$ можно видоизменять самыми различными способами. Мы выбрали простейшие даже не для простоты доказательства, а для простоты формулировок. Приведем один более общий результат, который доказывается дословно так же.

Теорема 4.4.2. *Пусть кривая C_0 задана уравнением $z = z_0(x)$ (где $z_0(x) = x + iy(x)$, $x > R_0$) и уходит в бесконечность при $x \to +\infty$, и пусть имеется функция $\varphi(z)$, регулярная в некоторой окрестности этой кривой. Для каждого α обозначим через C_α кривую с уравнением $z = z_\alpha(x)$, где $z_\alpha(x) = z_0(x) + i\alpha\dfrac{\varphi(z_0(x))}{\varphi'(z_0(x))}$, и предположим, что при $x > R_0$, $-\pi < \alpha < \pi$, кривые C_α не пересекаются друг с другом. Через $D_{R,\alpha}$ обозначим область, занимаемую кривыми C_η, $-\alpha < \eta < \alpha$, в полуплоскости $x > R$, а через $L_{R,\alpha}$ — границу этой области. Мы будем предполагать, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям:*

1. При достаточно больших z функция $\varphi(z)$ положительна на C_0 и монотонно стремится к $+\infty$ при $z \to \infty$, $z \in C_0$, быстрее, чем любая степень z.

2. При любом A и при достаточно большом x функция $\varphi(z)$ регулярна в круге $|z - z_0(x)| < A\left|\dfrac{\varphi(z_0(x))}{\varphi'(z_0(x))}\right|$.

3. При любом фиксированном A

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \sim \frac{\varphi'(z_0(x))}{\varphi(z_0(x))}, \qquad x \to +\infty, \quad |z - z_0(x)| < A\left|\frac{\varphi(z_0(x))}{\varphi'(z_0(x))}\right|.$$

Тогда функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{R,\alpha}} \frac{e^{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z}\, g\zeta, \qquad R > \max(R_0, |z|), \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

целая, не зависящая от R и α, и для нее справедливы те же асимптотические формулы, что и в предыдущей теореме.

В обеих теоремах мы говорили только о таких случаях, когда $\varphi(z)$ растет быстрее любой степени z. Вполне возможно было бы рассмотреть и случай, когда $\varphi(z)$ растет, как степень, бо́льшая $^1/_2$. Однако для функций, растущих, как степень и медленнее, можно предложить другой способ построения. Он несколько сложнее, но его применения более широки. Состоит этот способ в следующем.

Обозначаем через $\psi(t)$ функцию, обратную к $\varphi(z)$, и рассматриваем интеграл

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\psi'(t)\,e^{t}}{\psi(t)-z}\,dt,$$

где σ выбирается столь большим, чтобы при $\operatorname{Re} t\geqslant\sigma$ функция $\psi(t)$ не обращалась в z. Для получения асимптотических формул мы используем те же методы теории вычетов.

Доказывать теоремы, относящиеся к этому способу построения, мы не будем, а рассмотрим два примера.

Пример 1. Найдем асимптотическое поведение при $z\to\infty$ функции

$$F(z)=\frac{1}{\rho}E_{\rho}(z)=\frac{1}{2\pi i\rho}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{t^{\frac{1}{\rho}-1}}{t^{\frac{1}{\rho}}-z}\,e^{t}dt,\qquad \sigma>|z|^{\rho}.$$

С этой функцией мы сталкивались при действительных z в § 1.5. Убедимся прежде всего, что функция $F(z)$ целая. Интегрированием по частям легко проверить, что интеграл сходится при любом σ. Кроме того, в любой полуплоскости $\operatorname{Re} t<a$ подинтегральная функция стремится к нулю, причем достаточно быстро, чтобы там можно было произвольно деформировать контур интегрирования (конечно, не переходя через особые точки). Поэтому при $\sigma>|z|^{\rho}$ интеграл не зависит от σ, и, взяв σ достаточно большим, мы получаем аналитическое продолжение $F(z)$ на сколь угодно большие z.

Особыми точками подинтегральной функции являются полюсы $t_k=z^{\rho}e^{2k\pi i\rho}$ и точка ветвления $t=0$. Асимптотическая формула для $F(z)$ определяется особыми точками подинтегральной функции, лежащими правее мнимой оси (но учитывать стоит и особые точки, лежащие близко к мнимой оси, даже если они левее ее). Если в полуплоскости $\operatorname{Re} t>-\eta|z|$, $\eta>0$, нет полюсов t_k, то мы можем заменить наш контур интегрирования ломаной

$$L_\eta(-\eta|z|-i\infty,\ -\eta|z|-i0,\ 0,\ -\eta|z|+i0,\ -\eta|z|+i\infty)$$

и получить

$$F(z) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n},$$

где

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i\rho}\int_{L_\eta} t^{\frac{n}{\rho}} e^t dt = -\frac{1}{\pi\rho}\sin\frac{\pi n}{\rho}\,\Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right).$$

Если же в полуплоскости $\operatorname{Re} t > -\eta|z|$, $\eta > 0$, есть полюсы подинтегральной функции, то, заменив наш первоначальный контур интегрирования контуром L_η, мы должны будем добавить к найденному асимптотическому ряду сумму вычетов в полюсах, лежащих в этой полуплоскости. Нетрудно заметить, что вычеты в полюсах t_k, лежащих левее, пренебрежимо малы по сравнению с каждым членом асимптотического ряда, происходящего от точки ветвления $t = 0$.

Таким образом, для написания асимптотических формул нам остается произвести несложный подсчет — определить, при каких z какие полюсы войдут в асимптотическую формулу. Опуская этот подсчет, приведем окончательный результат.

При $\rho > \frac{1}{2}$

$$E_\rho(z) \approx -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right)\sin\frac{\pi n}{\rho},$$

когда

$$z \to \infty,\quad \frac{\pi}{2\rho} + \eta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$$

и

$$E_\rho(z) = \rho e^{z^\rho} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right)\sin\frac{\pi n}{\rho}$$

когда

$$z \to \infty,\quad |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} + \eta$$

При $\rho \leqslant \frac{1}{2}$

$$E_\rho(z) \approx \rho \sum e^{z^\rho} e^{2k\pi i\rho} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \Gamma\left(\frac{n}{\rho}\right) \sin \frac{\pi n}{\rho},$$

когда

$$z \to \infty, \quad |\arg z| \leqslant \pi$$

где первая сумма распространена на те значения k, $|k| \leqslant \left[\frac{1}{\rho}\right]$, для которых $|\arg z + 2k\pi i| < \frac{\pi}{2\rho} + \eta$.

При $\rho = \frac{1}{m}$ (m — целое число) функция $E_\rho(z)$ легко находится в конечном виде.

Пример 2. Найдем асимптотическое поведение при $z \to \infty$ функции

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{t + t^\alpha}}{e^{t^\alpha} - z}\, dt, \qquad \sigma > (\ln(1 + |z|))^{\frac{1}{\alpha}}, \ \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

В сходимости интеграла и в возможности произвольно деформировать контур интегрирования в любой полуплоскости $\operatorname{Re} t < a$ (не переходя особых точек подынтегральной функции) мы легко убеждаемся тем же путем, что и в предыдущем примере. Заменим интегрирование по нашему исходному контуру интегрированием по разрезу $(-\infty, 0)$. По теореме о вычетах получим

$$F(z) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(\ln z + 2k\pi i)^{\frac{1}{\alpha}}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}, \qquad z \to \infty, \ |\arg z| < \pi,$$

где

$$a_n = -\frac{\alpha}{2\pi i} \int_{(-\infty, 0)} e^{t + nt^\alpha} t^{\alpha - 1}\, dt.$$

Нетрудно заметить, что первый ряд при любых z, $|\arg z| \leqslant \pi$, является асимптотическим рядом (сходящимся) и что каждый его член больше любого члена второго ряда. Поэтому

$$F(z) \approx e^{(\ln z)^{\frac{1}{\alpha}}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{(\ln z + 2k\pi i)^{\frac{1}{\alpha}}} + e^{(\ln z - 2k\pi i)^{\frac{1}{\alpha}}} \right),$$

когда

$$z \to \infty, \quad |\arg z| \leqslant \pi.$$

Изложенные два метода дают некоторое представление о том, на что мы можем рассчитывать, пытаясь решить задачу, о которой мы говорили в начале параграфа, если $\Phi(z)$ неотрицательна. Заметим, что гладкость функции $\varphi(z)$, хотя мы ее и использовали в значительной мере, не играет такой уж большой роли, если не предъявлять слишком больших требований к остаточным членам.

Значительно сложнее обстоит дело в случае, когда $\Phi(z)$ может быть отрицательной. Мы коротко расскажем об одном подходе к решению задачи в этом случае.

Будем предполагать, что субгармоническая функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию

$$\Phi(z) = O(z^p), \qquad z \to \infty,$$

и что вся плоскость z разделена кривыми L_k, выходящими из одной точки, на n бесконечных областей D_k, в каждой из которых $\Phi(z)$ равна гармонической функции $u_k(z)$. При этом мы будем считать, что область гармоничности $u_k(z)$ несколько шире D_k. На кривой L_k, разделяющей области D_k и D_{k+1}, мы должны иметь

$$u_k(z) = u_{k+1}(z).$$

Пусть ν — направление нормали к кривой L_k, отвечающее переходу из D_k в D_{k+1} в точке $z = z_k(s)$ на кривой L_k. Введем обозначение

$$\rho_k(s) = \frac{\partial u_k}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \nu}\bigg|_{z=z_k(s)}.$$

Можно показать, что

$$\Phi(z) = \operatorname{Re} P(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \left\{ \ln\left|1 - \frac{z}{z_k(s)}\right| + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_k(s)} + \ldots + \frac{z^p}{p z_k^p(s)}\right)\right\} \rho_k(s)\, ds,$$

где $P(z)$ — некоторый многочлен от z степени не выше

p. В самом деле, в теории логарифмического потенциала доказывается (см., например, С. Л. Соболев, Лекции по теории дифференциальных уравнений математической физики, Гостехиздат, 1950 г.), что логарифмический потенциал простого слоя непрерывен, а его нормальная производная при переходе через слой имеет скачок, равный $2\pi\rho(s)$. Поэтому разность между $\Phi(z)$ и интегралом в правой части является гармонической функцией во всей плоскости, за исключением, может быть, кривых L_k. Но на этих кривых непрерывны и сами функции и их нормальные производные. Это означает, что наша разность гармонична и на этих кривых. Кроме того, рассуждениями того же рода, что и в § 2.3, мы легко установим, что

$$\int\limits_{L_k}\left\{\ln\left|1-\frac{z}{z_k(s)}\right|+\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_k(s)}+\ldots+\frac{z^p}{pz_k^p(s)}\right)\right\}\rho_k(s)\,ds=$$
$$=O(|z|^p),\qquad z\to\infty.$$

Поэтому, применяя к нашей разности теорему 3.1.2, мы получим, что она многочлен степени не выше p.

Можно показать также, что для субгармоничности $\Phi(z)$ необходимо и достаточно выполнения условий $\rho_k(s)\geqslant 0$. Обозначая

$$\mu_k(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^s\rho_k(t)\,dt,$$

мы можем записать $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z)=\operatorname{Re}P(z)+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{L_k}\left\{\ln\left|1-\frac{z}{z_k(s)}\right|+\right.$$
$$\left.+\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_k(s)}+\ldots+\frac{z^p}{pz_k^p(s)}\right)\right\}d\mu_k(s).$$

В качестве целой функции, для которой $\ln|F(z)|$ не очень сильно отличается от $\Phi(z)$, естественно взять функцию

$$F(z)=e^{P(z)}\prod_{k=1}^{n}F_k(z),$$

$$F_k(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k(m)}\right)\exp\left\{\frac{z}{\lambda_k(m)} + \ldots + \frac{z^p}{p\lambda_k^p(m)}\right\},$$

где $\lambda_k(m) = z_k(s_k(m))$, $s_k(t)$ — функция, обратная к $\mu_k(s)$, так как для этой функции

$$\ln|F_k(z)| = \int_{L_k}\left\{\ln\left|1 - \frac{z}{z_k(s)}\right| + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_k(s)} + \ldots + \frac{z^p}{pz_k^p(s)}\right)\right\} d[\mu_k(s)],$$

а для функций

$$R_k(z) = \int_{L_k}\left\{\ln\left|1 - \frac{z}{z_k(s)}\right| + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_k(s)} + \ldots + \frac{z^p}{pz_k^p(s)}\right)\right\} d(\mu_k(s) - [\mu_k(s)])$$

тем же методом, что и при доказательстве теоремы 4.2.4 обычно удается получить оценку

$$R_k(z) \leqslant O(1), \qquad z \to \infty.$$

Все сказанное выше можно строго обосновать. Задача о построении целой функции, мало отличающейся на бесконечности от данной субгармонической функции, была подробно исследована в работах В. С. Азарина. Им были получены весьма общие результаты *).

---

*) См., например, его статью в Матем. Сб. т. 79 (121), вып. 4 (1969 г.).