Экономико-
математическая
библиотека

И. И. ЕРЕМИН

ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Экономико-
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

И.И. ЕРЕМИН

ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.18
Е70
УДК 519.6

Еремин И.И. **Противоречивые модели оптимального планирования.** – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 160 с. – (Серия "Экономико-математическая библиотека")
ISBN 5-02-013773-1

Посвящена новому направлению в математическом программировании, связанному с теорией и численным анализом противоречивых задач линейного и нелинейного программирования. К задачам такого типа относятся, в частности, задачи, ограничения которых противоречивы (несовместны). В книге в строгой и доступной форме излагается аппарат анализа противоречивых задач: теория двойственности, методы коррекции по различным критериям ее качества, совокупность смежных вопросов. Большое внимание уделяется содержательной стороне дела, так как одна из целей книги – дать широкому кругу прикладников конкретный аппарат для анализа противоречивых задач, возникающих на практике.

Для математиков и экономистов, а также для студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Иван Иванович Еремин

ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Серия "Экономико-математическая библиотека"

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Художественный редактор *Г.М. Коровина*
Технические редакторы: *О.Б. Черняк, С.Н. Баронина*
Корректоры: *Н.П. Круглова, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 32294

Сдано в набор 28.08.87. Подписано к печати 12.01.88. Т – 04507
Формат 60 X 90/16. Бумага книжно-журнальная.
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 10,0. Усл.кр.-отт. 10,0. Уч.-изд.л. 11,01
Тираж 5600 экз. Тип.зак. 1009 . Цена 1 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

$E \frac{1702070000-068}{053(02)-88}$ 17-88
ISBN 5-02-013773-1

Практика моделирования и численного анализа задач оптимального планирования показала, что возникновение математических моделей, не имеющих решений (неразрешимых), — явление обычное, связанное, в частности, с ресурсно-дефицитной природой экономики. В связи с этим возникла необходимость развития теории таких моделей, методов их коррекции, алгоритмического и программного обеспечения.

В книге рассмотрен математический аппарат анализа неразрешимых (противоречивых) задач линейного программирования как наиболее часто встречающихся на практике. Это, во-первых, теория двойственности для таких задач и, во-вторых, методы их коррекции (аппроксимации). Рассматривается несколько способов коррекции, однако, какой из них выбрать в ситуации конкретной задачи, зависит от характера этой задачи, особенностей ее математического описания, цели корректировки модели и т.д. Опыт анализа противоречивых моделей линейного программирования, соотнесенных к реальным объектам планирования, невелик. Необходимо накопление такого опыта, после чего можно ожидать возможность существенного пополнения арсенала математических средств численного анализа противоречивых моделей. Однако следует отметить, что интерес к противоречивым задачам оптимизации (в основном линейным) и их численному анализу в последние годы резко возрос.

Теория двойственности в книге представлена не во всей своей полноте, а преимущественно в той ее части, которая касается задач линейного программирования и частично квадратичного. И это понятно: именно линейные модели нашли свое массовое применение в решении задач оптимального планирования, а потому и являются наиболее актуальными.

В целом материал книги легко читаем, однако есть и исключение — это гл. V, посвященная анализу более широкой схемы двойственности для несобственных задач линейного и выпуклого программирования, а также этим же вопросам, но в бесконечномерном пространстве. Для фактов этой главы приводятся необходимые доказательства. Важность этого материала двоякая: он существенно расширяет класс конкретных реализаций схемы двойственности, что важно для практики, а перенос результатов на бесконечномерный случай позволяет применять их в других разделах математики, таких, как оптимальное управление, приближение функций, некорректные задачи и др.

Книга может быть рекомендована математикам и экономистам, работающим в области приложений математических методов в экономике и технике, а более общо – в области планирования и управления сложными экономическими и техническими системами. Она также может быть использована студентами старших курсов соответствующих специальностей.

Практика применения экономико-математических методов и ЭВМ в решении планово-экономических задач, несомненно, принесла свою пользу, однако она выявила и существенные трудности. Последние имеют разную природу. Отметим такие, как недостаточное совершенство математического аппарата, плохое информационное обеспечение (неполнота, недостоверность и неточность информации, невозможность ее оперативного использования из-за отсутствия автоматизированных баз данных), недостаточное алгоритмическое и программное обеспечение, недостаточное быстродействие используемых ЭВМ. Отметим также трудности, связанные с качеством моделирования. Обеспечить высокий уровень моделирования, ведущий к созданию адекватной рабочей модели экономического (производственного) объекта, хорошо "притертой" к нему и позволяющей отслеживать и прогнозировать развитие объекта планирования – задача не легкая.

Рассмотрим некоторые проблемы, возникающие при внедрении математических методов и ЭВМ в практику планирования конкретного производства. При традиционной технологии принятия решений, основанной на ручном счете, управленческий персонал непосредственно участвует в выборе плановых решений и экономически, или административно отвечает за их последствия. При использовании же математических методов эта цепь разрывается. Действительно, разработка математических моделей и проведение расчетов осуществляются, как правило, научными подразделениями, которые не несут практически никакой ответственности за качество решений. Управленческий же персонал, не имея соответствующей квалификации, фактически не принимает участия в выработке решений, но ответствен за все последствия, связанные с их реализацией.

Другая трудность: динамизм параметров экономических систем и большое число внешних воздействий на объект планирования приводят к тому, что сбор информации, ее обработка, проведение оптимизационных расчетов, анализ полученных решений требуют достаточно большого промежутка времени. Это же ведет к тому, что за это время параметры системы изменяются в той же мере, которая делает рассчитанные планы и управление их реализацией не пригодными для практического применения, так как они описывают иную, чем сложившуюся к этому времени, ситуацию. Сокращение сроков проведения расчетов за счет автоматизации обработки информации, создание более совершенных программ анализа исходных данных, проведение расчетов на более производительных ЭВМ, безусловно, уменьшают остроту проблемы, но не снимают ее.

Эффект от внедрения математических методов в управление производством в существенной мере может быть достигнут за счет более полного учета условий функционирования объекта планирования. При ручном счете не представляется возможным переработать необходимое количество информации. Можно привести такой пример*). На Нижнетагильском металлургическом комбинате возможности выпуска продукции при планировании на год лимитируются 250 существенными ресурсными ограничениями, в то время как при ручном счете возможным является учет около 50 ограничений. С использованием ЭВМ можно учесть все 250 ограничений, но где взять информационное описание этих условий? На комбинате такой детализированной системы учета нет, так как она до сих пор была не нужна. Организация информационного обеспечения задач оптимального планирования в нашем примере предполагает многократное расширение системы учета. Это на основе традиционных процедур учета сделать невозможно. Выход видится в разработке формальных методов идентификации информационного описания производственно-экономических систем, в создании автоматизированных банков данных.

Следует сказать, что все перечисленные проблемы в принципе преодолимы. Несколько другая по своей природе трудность (возможно, главная) состоит в мере допустимой математизации конкретных проблем и задач экономики. Эта мера в первую очередь зависит от уровня совершенства самой экономики, от методов и традиций управления, от действительных законов ее функционирования и эволюции. В этих вопросах роль средств, связанных с применением точных наук, отодвигается на задний план. На первый же план выступают проблемы глубокого научного анализа экономики и ее реальных проявлений, установления ее действительных законов и их обеспечения хозяйственным механизмом.

Параллельно производственной сфере с ее реалиями существует информационно-отображающая сфера с функциями, в частности, управления материальной сферой на базе официально закрепленных законов, установлений, правил, распоряжений и т.д. Однако эта сфера изобилует большим количеством систематических и случайных помех, разными механизмами искажения и фильтрации. Разрыв между "писаными" и реальными законами этих двух сфер, неадекватное отображение материальной сферы информационной сферой, другие несоответствия между ними создают одну из самых серьезных проблем эффективного управления и, в частности, эффективного применения экономико-математических методов и ЭВМ. Последние ориентируются на данные второй (информационной) сферы, на ту сумму положений, которые формулируют, "как должно быть", а не "как есть". Все это приводит к тому, что мы вырабатываем управления на основе моделей идеальных производств и пытаемся применить их к реальным призводственным объектам. Поэтому не случайно, что иногда даже невооруженным глазом можно увидеть неприменимость рассчитанных управ-

*) Василенко Г.Н., Фролов В.Н. Почему комбинату трудно? // ЭКО. – 1982. – № 11.

ляющих воздействий. Однако если последние были бы даже формально правильными, то в реальных условиях их применение могло бы натолкнуться на такие трудности, как существующий хозяйственный механизм, волюнтаризм в практике принятия решений, несоответствие традиционным методам выработки решений, а также на психологический эффект, связанный с ущемлением социальной значимости тех или иных плановых служб.

Роль достоверности и своевременности информации для планирования и управления трудно переоценить. В условиях искаженной информации польза рекомендаций, выработанных на основе применения экономико-математических методов, становится, мягко говоря, сомнительной. Одно дело, когда информация по своей природе носит неопределенный характер или неточна, и тогда с такой ситуацией можно бороться формально – математическими средствами. Совсем другое, когда она искажена в силу тех или иных имманентных экономике механизмов (в силу, например, обеспечения не государственных, а групповых интересов).

Кратко коснемся вопроса об элементарных периодах планирования и обратных связях. В области моделирования и решения задач экономики определенные трудности, связанные с необходимостью оперативного учета быстрых изменений в производственной ситуации, можно снять за счет применения нестационарного программирования*), обеспеченного интерактивными (диалоговыми) средствами обработки данных. Эта форма программирования (планирования) связана с уменьшением элементарных периодов воздействия на производственный процесс, т.е. периодов, в течение которых действует некорректируемое управление, выработанное на конец предыдущего элементарного периода. Реализация малых периодов реагирования возможна лишь на базе использования достаточно мощных ЭВМ и высокоавтоматизированного комплекса счета в целом. Все это потенциально дает возможность организации обратных связей (за счет своевременного получения измененных управляющих параметров). Такой механизм динамического анализа производства делает возможным в рамках единой схемы и планировать, и управлять процессом выполнения плановых программ. При малых элементарных периодах планирования способ управления экономическими объектами становится близким к методам управления технологическим процессом.

Практика решения оптимизационных экономических задач на основе их математического моделирования породила новую проблему, связанную с появлением несобственных (противоречивых) моделей. Частным проявлением несобственности является несовместность ограничений модели, например модели линейного программирования. Изучение задач или теоретических моделей экономики, содержащих противоречия, связано с необходимостью научного обоснования процедур корректирования таких задач и моделей.

Причинами возникновения несобственных моделей, описывающих задачи экономического (производственного) планирования и управления, могут быть: ресурсный дефицит, напряженность планов, неточность экономической информации, учет в модели противоречивых директив, отрицательное воздействие производства на среду и учет нормативов на такое воздейст-

---

*) Еремин И.И., Мазуров В.Д. Нестационарные процессы математического программирования. – М.: Наука, 1979.

вие. Естественно, это перечень только некоторых из причин возникновения противоречивых моделей, носящих более или менее общий характер. Противоречивый характер процедур определения плановых программ и реализации плановых решений может выражаться в несбалансированности заданий по выпуску продукции с ресурсными возможностями объекта планирования. Противоречивость может быть вызвана чрезмерным упрощением действительных связей и многими другими причинами. Противоречивая модель может быть адекватным отражением действительных противоречий, а способы ее корректировки — отражением действительных процедур разрешения этих противоречий. В этих случаях на последующих шагах "отладки" модели предпринимаются те или иные процедуры корректировки или уточнения соотношений модели и ее структуры. Но если стремиться делать такие процедуры обоснованными (а это необходимо), то объектом теоретического исследования становится противоречивая модель.

Словом, практика экономико-математических исследований потребовала уточнения и развития классического положения о том, что всякая теоретическая модель должна быть непротиворечивой. Пока изучались достаточно простые объекты — с малым числом учитываемых параметров, такое положение не казалось ограничительным и представлялось очевидным. В случае же возникновения противоречивой модели ее коррекция осуществлялась простыми приемами. Изучение более сложных моделей, отражающих существенно более сложные ситуации, привело к принципиальной необходимости учета появления противоречивых моделей (формальных систем), а следовательно, к необходимости разработки методов (в частности, численных) их анализа.

Опыт решения задач производственного планирования показывает, что возникновение противоречивых моделей — это довольно обычная ситуация. Конечно, в этом случае, исходя из тех или иных эвристических соображений, можно ряд ограничений снять или ослабить, скорректировать исходные данные и добиться того, что задача будет разрешимой. Однако куда важней и целесообразней подход, основывающийся на применении объективных процедур для "развязки" (коррекции) такой модели, т.е. для преобразования ее в разрешимую (или совокупность таковых). "Развязку" можно еще интерпретировать как "расшивку" узких мест.

Остановимся более подробно (с экономических позиций) на некоторых причинах возникновения противоречивых ситуаций. При разработке плановых программ используется принцип многоступенчатости (иерархичности) проведения расчетов. В этом случае на более высоком уровне иерархии в связи с информационными и вычислительными трудностями нижестоящий (локальный) объект планирования описывается упрощенной моделью. Описанные в упрощенной (а значит, и не полной) модели ресурсы соотносятся со спросом на продукцию. При существующей экономической ситуации, когда продукция большинства отраслей народного хозяйства дефицитна, выбирается вариант плана с максимальным, безрезервным использованием ресурсов. Однако установленное таким образом плановое задание при более полном учете ресурсных возможностей объекта планирования может оказаться нереальным.

Проблема противоречивости усугубляется еще и тем, что многие в прошлом не столь дефицитные и по традиции не учитываемые в должной степени ресурсы в настоящее время существенно лимитируют выпуск продукции. Например, далеко не всегда выполняются ограничения на рациональное использование воздушного и водного бассейнов промышленно развитых районов. Это нарушает процессы воспроизводства трудовых ресурсов, приводя к ухудшению условий жизни населения, росту уровня заболеваемости, и является одной из причин повышенной миграции из этих районов. Тем самым обостряется ситуация с обеспеченностью трудовыми ресурсами, особенно таких отраслей народного хозяйства, как черная и цветная металлургия, химическая и цементная промышленность.

Противоречивость ограничений задач планирования производства порождается также и несовершенством систем ценообразования. Приведем такой пример. На предприятии необходимо увеличить выпуск продукции. Имеются два возможных варианта развития: на основе расширения использования существующей технологии (экстенсивный вариант) и за счет внедрения высокомеханизированных и автоматизированных производственных процессов (интенсификация). Причем первый вариант требует меньших затрат, но существенно большего привлечения трудовых ресурсов. Предположим, что с народнохозяйственной точки зрения затраты по обоим вариантам являются экономически оправданными. Естественно, что на уровне предприятия достаточно затруднительно оценить степень дефицитности различных видов ресурсов, особенно в перспективе, и поэтому решение принимается, как правило, исходя из затрат. В то же время "экономически выгодный" вариант развития может быть нереализуем по причине невозможности привлечения дополнительных трудовых ресурсов в необходимом количестве. Это приведет к противоречиям в реализации "экономически выгодного" варианта плана. Лишь при адекватном отображении меры дефицитности ресурсов в ценах недопустимый вариант развития будет и экономически нецелесообразен.

Приводящей к противоречию ситуацией является практика планирования от достигнутого, когда без соответствующего анализа устанавливается большее плановое задание по выпуску продукции, чем в предыдущий период времени.

Однако если планируемый рост производства продукции не сопровождается соответствующим увеличением ресурсных возможностей, то это приводит к установлению нереального задания. Естественно, производственный коллектив, осознав тот факт, что вряд ли удастся выпустить требуемое количество продукции и получить вознаграждение за выполнение планового задания, будет работать ниже своих возможностей. Тем самым установление нереального плана в конечном итоге приводит к снижению эффективности функционирования производства.

К противоречивым ситуациям приводят также несовершенство системы оценочных показателей работы производственных коллективов и учет нормативов для этих показателей при оценке производственных планов, в частности их напряженности.

Напряженность планов связана с директивным назначением нормативных оценок плана, что в общем контексте упирается в проблему многокритериальности как фактора, порождающего противоречивость.

Обсудим ее вначале на примере задач оптимального проектирования. В проектировании, скажем, самолетов в качестве оценочных критериев выступают: прочность, надежность, скорость, дальность, управляемость, взлетно-посадочные характеристики, экономичность, эксплуатационные свойства, масса и т.д. Если в качестве той или иной совокупности характеристик взять их рекордные значения, достигнутые в тех или иных реализованных проектах, то, заложив эти характеристики в модель поиска оптимального проекта по какому-либо выделенному критерию, например себестоимости, мы получим, естественно, задачу с противоречивой системой ограничений. Взаимодействие критериев друг на друга носит противоречивый характер.

В экономике проблема выбора критерия или учета совокупности критериев стоит так же остро. Достижение хорошего результата по какому-либо одному критерию на фоне общей операционной обстановки может мало что значить. Во всяком случае, погоня за теми или иными рекордами (максимальными значениями по одному критерию) сама по себе, без должного учета конечной полезности, просто вредна.

Противоречивость системы ограничений задачи планирования производства в настоящее время является скорее правилом, чем исключением. Это, безусловно, усложняет моделирование экономических процессов. Однако модель с несовместной системой ограничений (как одним из проявлений свойств несобственности) содержательно может быть не менее важной (а в ряде случаев – и более), чем с совместной.

Сказанное дополним еще одним соображением. Возможно, моделируя производственную ситуацию (речь идет о задачах планирования), в случае существования допустимого решения целесообразно при поиске адекватной модели идти от варианта собственной модели к несобственной (например, за счет включения в модель новых ограничений, не учтенных или не учитываемых ранее, включения новых технологических способов и т.д.), а от последней – к собственной, но уже на основе объективных процедур коррекции.

Безусловно, нельзя полностью устранить противоречивые ситуации в развитии экономических объектов. Однако снизить меру несбалансированности плановых программ, отказаться от тех экономических механизмов, которые усиливают возможность возникновения рассогласований в развитии народного хозяйства, необходимо, так как это уменьшает уязвимость экономики при неблагоприятных воздействиях на ход производственных процессов. Этой цели и служит аппарат несобственных задач математического программирования.

Разнообразие причин возникновения противоречивости предполагает широкий фронт исследований. В настоящее время наибольший прогресс достигнут, по-видимому, в построении математической теории анализа противоречивых моделей*).

Что касается приложений, то здесь опыт не очень велик. Одной из целей написания этой книги и является желание привлечь внимание специалистов, занимающихся прикладными исследованиями, к необходимости использования обоснованных процедур анализа противоречивых задач и моделей.

---

*) Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В данной главе излагаются основы теории систем линейных неравенств и линейного программирования. Ее материал является вводным для последующих глав.

§ 1. Системы линейных неравенств

Системы линейных уравнений являются важным объектом в математике, находящим широкие применения в различных прикладных областях. Система линейных уравнений в общем виде может быть записана следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь коэффициенты a_{ji} $(j = 1, \ldots, m; i = 1, \ldots, n)$ перед переменными x_i и свободные члены b_j – вещественные числа. Системе (1.1) можно дать следующую содержательную интерпретацию (в предположении неотрицательности переменных). Пусть из сырья и материалов разных видов изготавливается n видов продукции, при этом индекс $j = 1, \ldots, m$ нумерует виды сырья и материалов, а индекс $i = 1, \ldots, n$ – виды продукции. Пусть, далее, b_j – объем имеющегося в наличии j-го ресурса, a_{ji} – объем расхода j-го ресурса на единицу i-го вида продукции. Обозначим через x_i объем производимого i-го продукта. Тогда левая часть, например, первого уравнения в системе (1.1) будет давать расход 1-го ресурса, если продукция изготавливается в количествах $x_1, \ldots, x_n$. Само же равенство фиксирует баланс расхода ресурса с его наличием. Таков смысл каждого из равенств системы (1.1).

Если нет требований полного расходования ресурсов, то уравнения системы (1.1) можно заменить на неравенства

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m,\\
&x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

В записи системы (1.2) в явном виде подчеркнуто требование того, чтобы объемы производимой продукции x_i по своему смыслу выражались неотрицательными числами. Если ввести обозначения $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$, $a_j = [a_{j1}, \ldots, a_{jn}]$, т.е. x и a_j есть n-мерные векторы из n-мерного векторного пространства E_n, а также ввести символ (a_j, x) скалярного произведения векторов x и a_j, определяемого равенством $(a_j, x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$, то систему (1.2) можно записать более кратко:

$$(a_j, x) \leqslant b_j, \quad j = 1, \ldots, m, \qquad x \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Здесь запись $x \geqslant 0$ означает $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Несколько слов о геометрическом смысле неравенств системы (1.3). Пусть $n = 2$ и $j = 1$, тогда неравенство запишется в виде $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1$. Геометрическое место точек $x = [x_1, x_2]^T$ на снабженной системой координат плоскости будет полуплоскостью P_1 (в предположении $[a_{11}, a_{12}] \neq 0$). Границей этой полуплоскости является прямая Π_1, которая задается уравнением $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ (рис. 1).

Если рассмотреть линейное неравенство с тремя переменными x_1, x_2 и x_3, то ему в трехмерном пространстве E_3 будет отвечать полупространство, границей которого будет плоскость. В общем случае неравенству $(a_j, x) \leqslant b_j$ в пространстве E_n отвечает образ P_j, который также называется *полупространством* (в предположении $a_j \neq 0$), а уравнению $(a_j, x) = b_j$ отвечает гиперплоскость, являющаяся граничной для P_j. Множеству решений M системы (1.3) отвечает пересечение полупространств P_j, а также полупространств, задаваемых неравенствами $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ (рис. 2).

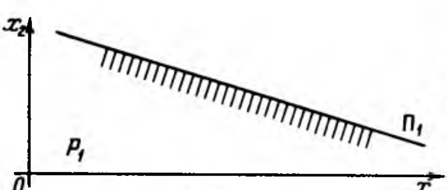

Рис. 1

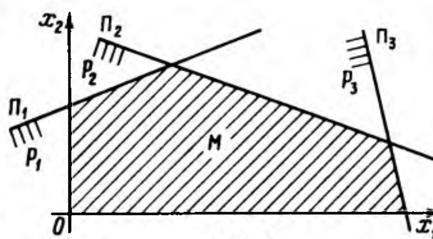

Рис. 2

Множество всех неотрицательных векторов $x \geqslant 0$ будем обозначать через E_n^+, так что $M = \left(\bigcap_{j=1}^{m} P_j \right) \cap E_n^+$. Пересечение конечного числа полупространств называется *многогранником* (выпуклым). Следовательно, множество решений любой конечной системы линейных неравенств является выпуклым многогранником.

Дадим еще одно определение. Вектор $x \in E_n$ называется *допустимым* для системы (1.3), если его координаты удовлетворяют всем ее неравенствам (ограничениям). Следовательно, допустимый вектор x для системы (1.3) и ее решение – понятия эквивалентные.

Дадим системе (1.3) другую содержательную интерпретацию, связанную с понятиями технологического способа и интенсивностью его использования. Образуем из векторов-строк $a_j = [a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}]$ матрицу (прямоугольную таблицу чисел)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет n столбцов, которые мы обозначим через h_i $(i = 1, \ldots, n)$. Столбец h_i будем рассматривать как модель i-го технологического способа, задаваемую расходом ингредиентов $a_{1i}, \ldots, a_{mi}$, приходящихся на единичную интенсивность использования этого способа. Мерой единичной интенсивности может быть определенный промежуток времени (сутки, месяц, квартал и т.д.). Подчеркнем, что здесь содержательный смысл технологического способа остается вне рамок модельного рассмотрения, важна лишь количественная его характеризация, описываемая вектором используемых ингредиентов. Интенсивность использования i-го технологического способа обозначим через x_i, интенсивность по смыслу неотрицательна, т.е. $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$, то скалярное произведение (a_j, x) дает расход j-го ингредиента, а неравенство $(a_j, x) \leqslant b_j$ выражает ограничение на этот расход, т.е. расход j-го ингредиента не может превосходить объем b_j его наличия. Таким образом, и в новой интерпретации переменных x_i системы (1.2) (или (1.3), что одно и то же) неравенства выражают прежний смысл.

Запись системы линейных неравенств в виде (1.2) – это одна из стандартных форм записи системы. В матричном виде эта запись выглядит так:

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0, \tag{1.4}$$

здесь $b = [b_1, \ldots, b_m]^T$; символ $\leqslant$, связывающий два вектора, означает, что этим неравенством связаны соответствующие координаты этих векторов.

Другой стандартной формой для системы линейных неравенств является такая:

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Ее можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} &Ax \leqslant b, \\ -&Ax \leqslant -b, \quad x \geqslant 0, \end{aligned}$$

что соответствует форме записи (1.4). С другой стороны, систему (1.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Ax + {} & [x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]^T = b, \\ & [x, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}] \geqslant 0, \end{aligned}$$

что в свою очередь будет соответствовать форме записи (1.5), т.е. запись оперирует уравнениями с требованием неотрицательности на переменные. Конечно, при таких переходах число ограничений и число переменных меняется.

Остановимся на более сложной интерпретации системы неравенств, записанной в виде

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0; \tag{1.6}$$

$$Px \geqslant d, \tag{1.7}$$

где $P = [p_1, \ldots, p_n]$, $d^T = [d_1, \ldots, d_s] \in E_s$, т.е. матрица P состоит из столбцов $p_1, \ldots, p_n$, каждый из которых есть s-мерный вектор, d – вектор свободных членов подсистемы (1.7).

В нижеследующей интерпретации системы (1.6), (1.7) подсистема (1.6) содержательно будет пониматься так же, как и ранее, а именно: A – технологическая матрица, b – вектор ресурсов (в общем случае ингредиентов), x – вектор интенсивностей использования технологических способов. В подсистему же (1.7) будем вкладывать следующий смысл. Пусть единичной интенсивности использования i-го технологического способа поставлен в соответствие не только вектор расхода ингредиентов h_i, но и вектор p_i производимой при этом продукции ($i = 1, \ldots, n$). Векторы-столбцы p_i составляют матрицу P. Произведение дает вектор производимой продукции, соответствующий вектору интенсивностей x использования всех технологических способов (будем говорить – соответствующий уровню производства x). Если под вектором d понимать плановое задание выпуска продукции, то и возникает подсистема (1.7) как выражение требования выполнения плана по выпуску продукции (с возможным перевыполнением).

Заметим, что система (1.6), (1.7) может быть несовместной. Содержательно этому будет соответствовать ситуация, когда ресурсов для выполнения плана d не хватает. Для получения совместности необходимо либо увеличить ресурсы, либо ослабить плановое задание (т.е. уменьшить компоненты вектора d).

Зафиксируем еще одну форму записи системы линейных ограничений, которой мы воспользуемся в дальнейшем:

$$\begin{aligned} &Ax \leqslant b,\\ &Px \geqslant d,\\ &Qx = q,\\ &\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, \ l \leqslant n. \end{aligned} \tag{1.8}$$

В этой системе зафиксированы неравенства $\leqslant$ и $\geqslant$, а также уравнения. Требование неотрицательности здесь распространяется только на часть переменных, а именно на $x_1, \ldots, x_l$. Остальные переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$ являются свободными, т.е. могут принимать любые значения (без ограничений на знак).

Приведем основные факты, относящиеся к теории конечных систем линейных неравенств над пространством E_n [6, 22].

Запишем систему в форме

$$(a_j, x) \leqslant b_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.9}$$

или

$$Ax \leqslant b, \tag{1.10}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}, \qquad b^T = [b_1, \dots, b_m].$$

В (1.9) нет в явном виде условия неотрицательности на вектор x (т.е. если бы таковое и было, то неравенства $-x_i \leqslant 0$ можно было отнести в общий список неравенств).

Дадим определение.

Линейное соотношение в форме неравенства (в одном из смыслов $\leqslant, <, \geqslant, >$) или уравнения называют *следствием* системы линейных соотношений, если любое решение системы удовлетворяет указанному соотношению.

Запишем отдельное неравенство

$$(c, x) \leqslant \alpha. \tag{1.11}$$

Применительно к неравенству (1.11) и системе (1.9) дадим определение неравенства-следствия 1-го и 2-го рода.

Неравенство (1.11) есть *следствие 1-го рода* системы (1.9), если при некотором $\epsilon > 0$ неравенство $(c, x) \leqslant \alpha - \epsilon$ сохраняет свойство быть следствием. В противном случае (1.11) – *неравенство-следствие 2-го рода.*

На рис. 3,4 приводится геометрическая иллюстрация этих случаев.

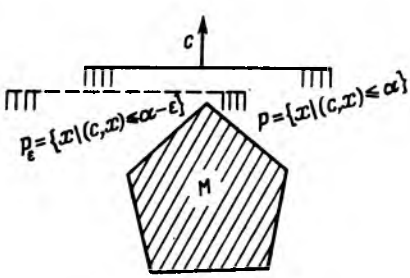

Рис. 3

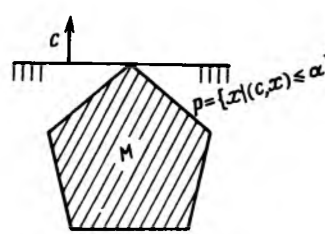

Рис. 4

Теорема 1.1. *Если неравенство* (1.11) *есть следствие 2-го рода системы* (1.10), *то*

$$\{x \mid Ax \leqslant b\} \cap \{x \mid (c, x) = \alpha\} \neq \phi,$$

при этом $\alpha = \max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b\}$.

Теорема 1.2. *Неравенство* (1.11) *есть следствие системы* (1.10) *тогда и только тогда, когда при некоторых* $\bar{u}_j \geqslant 0$ ($j = 0, 1, \dots, m$) *справедливо тождество по* x

$$(c, x) - \alpha \overset{(x)}{\equiv} (\bar{u}, Ax - b) - \bar{u}_0, \tag{1.12}$$

где $\bar{u}^T = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m]$. *При этом если* (1.11) – *следствие 2-го рода, то* $\bar{u}_0 = 0$; *если 1-го рода, то существуют* $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ *та-*

кие, что $\bar{u}_0 > 0$. *Кроме того, можно считать, что* $\{a_j | \bar{u}_j > 0\}$ *линейно независимы.*

Теорема 1.3. *Система* (1.10) *совместна тогда и только тогда, когда неравенство* $(b, u) \geqslant 0$ *есть следствие системы* $A^T u = 0, u \geqslant 0$.

Сформулируем данную теорему в отрицательной форме.

Система (1.10) *несовместна тогда и только тогда, когда система* $A^T u = 0$, $u \geqslant 0$, $(b, u) < 0$ *совместна.*

Теорема 1.4. *Система строгих неравенств* $Ax < b$ *совместна тогда и только тогда, когда неравенство* $(b, u) > 0$ *есть следствие системы*

$$A^T u = 0, u \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{m} u_j > 0.$$

Пусть $r = r(A) > 0$ – ранг матрицы коэффициентов A системы неравенств (1.10).

Теорема 1.5. *Система* (1.10) *совместна тогда и только тогда, когда совместны все ее подсистемы с числом неравенств* $r' \leqslant r + 1$.

Пусть M – многогранник, определяемый системой (1.10), при этом $r = n$. Тогда многогранник M обладает по крайней мере одной вершиной. *Вершину* можно определить как точку из M, которая не может быть серединой нетривиального отрезка, принадлежащего M.

Многогранник M называется *ограниченным,* если он принадлежит некоторому шару $S = \{x \in E_n | \|x - p\| \leqslant R\}$, $p \in E_n$, $R > 0$. Норма в E_n определяется формулой

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}.$$

Система векторов $\{a_j\}_1^m$ называется *всесторонней,* если для любого $s \in E_n, s \neq 0$ существует индекс j' такой, что $(a_{j'}, s) > 0$.

Теорема 1.6. *Многогранник системы* (1.9) *ограничен тогда и только тогда, когда система векторов* $\{a_j\}_1^m$ *всесторонняя.*

Теорема 1.7. *Если* $\{P_k\}_k$ – *множество вершин ограниченного многогранника* M, *то*

$$M = \text{co}\,\{P_k\}_k := \{x = \sum_k \alpha_k P_k \mid \alpha_k \geqslant 0, \quad \sum_k \alpha_k = 1\}.$$

Здесь $\text{co}\,\{P_k\}_k$ – символ выпуклой оболочки векторов $\{P_k\}$.

Поставим системе (1.10) в соответствие однородную систему неравенств

$$Ax \leqslant 0.$$

Если $r(A) = n$, то существует система отличных от нуля векторов $\{s_t\}_t \subset$ $\subset K := \{x | Ax \leqslant 0\}$ таких, что

$$K = \text{cone}\,\{s_t\}_t := \{x = \sum_t \lambda_t s_t \,|\, \lambda_t \geqslant 0 \ (t = 1, \ldots)\}.$$

Множество K является конусом с вершиной в начале координат, т.е. таким множеством, которое с любой точкой x содержит луч $\{\lambda x | \lambda \geqslant 0\}$, а с любыми точками x и y содержит отрезок $\overline{x, y} := \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, их соединяющий. Множество $\{s_t\}_t$ называется *системой образующих* конуса K.

Теорема 1.8. *Если* $r = n$, *то*

$$M = \mathrm{co}\,\{P_k\}_k + \mathrm{cone}\,\{s_k\}_k. \tag{1.13}$$

Здесь cone $\{s_k\}_k$ *– символ конусной оболочки множества векторов* $\{s_k\}_k$.

Представление многогранника M в форме (1.13) называют *параметрическим представлением.*

К системе линейных неравенств можно применить метод исключения неизвестных, подобный методу Гаусса для систем линейных уравнений [22]. Ограничительным обстоятельством при этом является то, что неравенство можно умножить только на положительное число без изменения его смысла. Положим $l_j(x) := (a_j, x) - b_j$ и рассмотрим систему (1.9).

Будем исключать, например, переменную x_1. Пусть

$$I_+ := \{j \mid a_{j1} > 0\}, \quad I_- = \{i \mid a_{i1} < 0\},$$

$$I_0 := \{k \mid a_{k1} = 0\}.$$

По системе (1.9) составим систему

$$\begin{aligned} &\lambda_{ji} l_j(x) + l_i(x) \leqslant 0, \quad l_k(x) \leqslant 0, \\ &j \in I_+, \quad i \in I_-, \quad k \in I_0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

подбирая числа $\lambda_{ji} > 0$ так, чтобы $\lambda_{ji} a_{j1} + a_{i1} = 0$ (т.е. $\lambda_{ji} = -a_{i1}/a_{j1}$). Система (1.14) уже не содержит переменной x_1, т.е. $\lambda_{ji}\, l_j(x) + l_i(x) = h_{ji}(x_2, \ldots, x_n) =: h_{ji}(y)$, $y = [x_2, \ldots, x_n]$. В новых обозначениях систему (1.14) можно переписать в виде

$$h_{ij}(y) \leqslant 0, \quad l_k(y) \leqslant 0, \quad j \in I_+, \ i \in I_-, \quad k \in I_0. \tag{1.15}$$

Система (1.14) (или (1.15)) называется *сверткой* системы (1.9) по переменной x_1.

Теорема 1.9. *Если* $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{y}]$ *– некоторое решение системы* (1.9), *то* $\bar{y}$ *– решение системы* (1.15).

Если $\bar{y}$ *– решение системы* (1.15), *то его можно дополнить до решения* $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{y}]$ *системы* (1.9).

Отсюда: экстремальные значения неисключенных переменных (т.е. максимальные и минимальные значения координат $x_2, \ldots, x_n$*) в решениях систем* (1.9) *и* (1.15) *совпадают.*

Изложенный метод к решению системы линейных неравенств может быть применен следующим образом. Исключая последовательно $x_1, \ldots, x_{n-1}$, получим систему с одной переменной x_n. Такие системы решаются тривиально (ниже это будет пояснено). Найдя $\bar{x}_n$ и подставляя в предыдущую систему, получим $\bar{x}_{n-1}$, и т.д. В итоге получим решение $[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n]$ системы (1.9).

Приведем представление всего множества решений системы линейных неравенств с одной переменной, пусть t такое, что

$$\alpha_j t \leqslant \beta_j (j). \tag{1.16}$$

Будем полагать $\alpha_j \neq 0 \;\; \forall_j$. Пусть

$$\bar{t} = \begin{cases} \min\limits_{\alpha_j > 0} \dfrac{\beta_j}{\alpha_j}, & \exists\, \alpha_j > 0, \\ +\infty, & \forall\, \alpha_j < 0, \end{cases}$$

$$\underline{t} = \begin{cases} \min\limits_{\alpha_j < 0} \dfrac{\beta_j}{\alpha_j}, & \exists\, \alpha_j < 0, \\ -\infty, & \forall\, \alpha_j > 0. \end{cases}$$

Все множество решений T рассматриваемой системы можно представить так:

$$T = \{ t \,|\, \underline{t} < t < \bar{t} \} \cup \{ \underline{t} \;|\, \underline{t} \neq -\infty \} \cup \{ \bar{t} \;|\, \bar{t} \neq +\infty \}.$$

Очевидно, что $\bar{t} = \sup \{ t \,|\, (1.16) \}$, $\underline{t} = \inf \{ t \,|\; (1.16) \}$.

Пусть система (1.9) произвольная, т.е. не обязательно совместная. Ее можно параметризовать, например, в форме

$$(a_j, x) - b_j \leqslant t_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.17}$$

и поставить задачу отыскания всех тех значений t_j, которые дают совместность системы (1.17). Это можно осуществить путем свертывания системы (1.17) по переменным $x_1, \ldots, x_n$. В итоге получится система линейных неравенств с переменными $t_1, \ldots, t_m$, которая и будет задавать многогранник векторов $[t_1, \ldots, t_m]$, обеспечивающих совместность системы (1.17). На множестве T можно ставить экстремальные задачи, например

$$\min \{ \sum_{j=1}^{m} d_j t_j \,|\, [t_1, \ldots, t_m] \in T \}, \tag{1.18}$$

$$d_j > 0, \; j = 1, \ldots, m.$$

На (1.18) можно смотреть как на одну из постановок задачи аппроксимации системы (1.9) в случае ее несовместности.

§ 2. Постановка задачи линейного программирования

В § 1 системе (1.2) была дана, в частности, экономическая интерпретация, в силу которой величинам $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ был придан смысл объемов производимой продукции. Если c_i – цена реализации единицы i-й продукции, то сумма $c_1x_1 + ... + c_nx_n$ будет выражать доход от реализации всей продукции. Естественным образом возникает задача отыскания плана $x = [x_1, ..., x_n]^T \geqslant 0$ выпуска продукции, который обеспечивал бы максимум дохода. Кратко эта задача запишется так:

$$\max\{(c,x) \mid (a_j,x) \leqslant b_j (j = 1, ..., m), x \geqslant 0\},$$

или

$$L: \max\{(c,x) \mid Ax \leqslant b, x \geqslant 0\} \; (=: \tilde{f}), \tag{2.1}$$

здесь $c = [c_1, ..., c_n]^T$.

Наравне с задачей (2.1) запишем ее некоторую модифицикацию:

$$\max\{(c,x) \mid Ax \leqslant b, x \geqslant x^0\}. \tag{2.2}$$

Вектор $x^0 \geqslant 0$ может пониматься как нижний уровень производства продукции, т.е. если $(x^0)^T = [x_1^0, ..., x_n^0]$, то i-го вида продукции должно быть произведено не менее x_i^0: $x_i \geqslant x_i^0$ ($i = 1, ..., n$).

В силу другой интерпретации системы (1.3), также данной в § 1, величины $x_i \geqslant 0$ рассматривались как интенсивности использования технологических способов, заданных столбцами p_i матрицы A коэффициентов системы; при этом элемент a_{ji} вектора p_i – это расход j-го инградиента при "единичном" использовании i-го технологического способа.

Пусть теперь c_i – трудовые затраты (в нормо-часах, в ценах найма рабочей силы и т.д.), связанные с применением i-го технологического способа с единичной интенсивностью, т.е. с $x_i = 1$. Тогда величина $\sum\limits_{i=1}^{n} c_ix_i$ дает суммарные трудовые затраты, которые требуются для использования технологических способов с интенсивностями $x_1 \geqslant x_1^0, ..., x_n \geqslant x_n^0$. Возникает задача: найти минимум трудовых затрат $\sum\limits_{i=1}^{n} c_ix_i$ при ограничениях в форме неравенств

$$\min\{(c,x) \mid Ax \leqslant b, \; x \geqslant x^0\}. \tag{2.3}$$

В развернутом виде эта задача запишется так:

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} c_ix_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leqslant b_j \; (j = 1, ..., m), \; x \geqslant x^0\}.$$

Компилируя интерпретацию критерия (c, x) как трудовые затраты с интерпретацией системы (1.6), (1.7), получим модель

$$\min\{(c,x) \mid Ax \leqslant b, \; Px \geqslant d, \; x \geqslant 0\}. \tag{2.4}$$

Содержательно она может быть прочитана следующим образом: обеспечить плановое задание производства продукции d в рамках вектора ресурсов b при минимальных трудовых затратах.

Целевую функцию (c, x) в (2.4) можно трактовать и как энергетические затраты, в этом случае c_i – величина энергозатрат на единичную интенсивность использования i-го технологического способа.

Задачи (2.1) – (2.4) – суть задачи линейного программирования. Вообще под задачей *линейного программирования* понимается задача максимизации или минимизации линейной функции при линейных ограничениях в форме неравенств и уравнений.

Введем некоторые определения, отнесенные к задаче (2.1). Вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий ограничениям задачи (2.1), т.е. неравенствам $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$ (в развернутом виде – неравенствам (1.2)), называется *допустимым*. Множество всех допустимых векторов называется *допустимым множеством*. Следовательно, допустимое множество задачи (2.1) – это $\{x \mid Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$. Максимальное (в задаче на минимум – минимальное) значение функции (c, x) в задаче (2.1) называется *оптимальным значением*, а оптимизируемая функция (c, x) *критериальной* (или *целевой*) функцией. Допустимый вектор $\tilde{x}$, который доставляет критериальной функции минимальное значение (максимум – в задачах максимизации), называется *оптимальным вектором* (*оптимальным планом*, если вектор x интерпретируется как план); множество всех оптимальных векторов – *оптимальным множеством* с обозначением Arg$L$ (или Arg(2.1)).

Для допустимого множества мы обычно будем употреблять символ M, для оптимального множества – символ $\tilde{M}$, т.е. $\tilde{M} = \operatorname{Arg} L$.

Отметим некоторые свойства задачи линейного программирования (ЛП). Мы записали в (2.1) операцию max вместо sup, имея в виду то обстоятельство, что при $M \neq \phi$ и $\tilde{f} < +\infty$ найдется $\tilde{x} \in M$, при котором $(c, \tilde{x}) = \tilde{f}$, т.е. значение $\tilde{f}$ достигается при некотором $\tilde{x} \in M$. Это вытекает из теоремы 1.1. По смыслу неравенства-следствия можно сформулировать

Утверждение. *Задача* (2.1) *разрешима тогда и только тогда, когда $M \neq \phi$ и при некотором α неравенство $(c, x) \leqslant \alpha$ есть следствие ее системы ограничений, т.е. системы неравенств $Ax \leqslant b, x \geqslant 0$.*

Основным методом решения разрешимых задач ЛП является симплекс-метод, геометрический смысл которого состоит в последовательном построении (вычислении) вершин многогранника ограничений, начиная с некоторой начальной, при монотонном возрастании (убывании) целевой функции, вычисляемой в точках этой последовательности. Метод излагается в большом числе книг и учебных пособий [3, 13, 15], он хорошо обеспечен программно [16, 17].

Заметим, что метод исключения, изложенный в § 1, также можно использовать для решения задач ЛП. А именно, перепишем задачу (2.1) в эквивалентной форме:

найти max t при ограничениях

$$\begin{aligned} -(c, x) + t &\leqslant 0, \\ Ax &\leqslant b, \\ -x &\leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Если эту систему свернуть последовательно по $x_1, \ldots, x_n$, получив некоторую систему вида (1.16), то по теореме (1.9)

$$\max\{(c, x) \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\} = \max\{t \mid (1.16)\}.$$

Правая часть этого соотношения равна $\bar{t} = \min\limits_{\alpha_j > 0} \dfrac{\beta_j}{\alpha_j}$. Вектор $\tilde{x}$, на котором достигается $\bar{t}$, отыскивается по способу, указанному при изложении метода исключения неизвестных. Конечно, этот метод для больших задач ЛП не годится, так как в результате последовательного исключения число неравенств, вообще говоря, растет и заранее нельзя рассчитать необходимое поле памяти ЭВМ для хранения матриц коэффициентов возникающих систем. Но у него имеются и достоинства. Этот метод является сильным средством теоретических исследований систем неравенств и линейных оптимизационных задач [22]. Он позволяет работать с противоречивыми (несовместными) системами линейных неравенств. Пусть, например, система ограничений в задаче (2.1) несовместна. Поставим задачу ее аппроксимации в форме

$$\min_{x \geq 0} \max_{j} \, [(a_j, x) - b_j] \, (=: \tilde{t} > 0). \tag{2.6}$$

Эта постановка эквивалентна задаче ЛП

$$\min\{t \mid (a_j, x) - b_j \leq t \ \ (j = 1, \ldots, m), \ x \geq 0\}.$$

Если систему ее ограничений свернуть по x, получив систему вида (1.16), т.е. $\alpha_j t \leq \beta_j (j)$, то (см. § 1)

$$\tilde{t} = \max_{\alpha_j < 0} \frac{\beta_j}{\alpha_j};$$

при этом восстанавливается и тот вектор $\tilde{x}$, на котором достигается $\tilde{t}$ в (2.6) ($\tilde{t}$ называется *чебышевским уклонением* несовместной системы $Ax \leq b$ на E_n^+).

Сделаем еще одно полезное замечание относительно метода исключения неизвестных. Он годится и для нелинейных систем неравенств. Необходимо лишь, чтобы исключаемые переменные входили в систему линейно (иногда возникает необходимость лишь частичного исключения).

§ 3. Двойственность в линейном программировании

В рамках интерпретации модели (задачи) (2.1) зафиксированы цены на продукцию, но используемые ингредиенты (ресурсы) b_j никаких оценок не имеют. Однако последним можно поставить в соответствие систему оценок $\tilde{u}_1 \geq 0, \ldots, \tilde{u}_m \geq 0$, характеризующих меру эффективности использования этих ингредиентов. Под этим будем понимать следующее. Пусть $\tilde{f}(b_1, \ldots, b_m)$ – функция оптимума (максимума) задачи (2.1), т.е. значение максимума функции (c, x) в зависимости от вектора ингредиентов $b^T = [b_1, \ldots, b_m]$. Если j-й ингредиент увеличить на единицу, то значение оптимума будет равно $\tilde{f}(b_1, \ldots, b_j + 1, \ldots, b_m)$. Разность

$$\tilde{f}(b_1, \ldots, b_j + 1, \ldots, b_m) - \tilde{f}(b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_m) \tag{3.1}$$

и характеризует меру (оценку) эффективности j-го ингредиента. Важно уметь вычислить эти оценки. Вопросы их эффективной вычислимости решаются в рамках теории двойственности в линейном программировании, к рассмотрению которой мы и приступим.

В математике идея сопряжения объекта исследования с неким параллельным (дуальным, двойственным, сопряженным) объектом, выступающим в качестве дополнения к исходному и несущим существенную информацию о нем, является фундаментальной. Она проявляется, по существу, во всех разделах математики.

Итак, задаче линейного программирования (2.1) поставим в соответствие задачу ЛП

$$\min\{(b, u) \mid (h_i, u) \geqslant c_i \ (i = 1, ..., n),\ u \geqslant 0\},$$

или в матричной записи

$$L^*:\ \min\{(b, u) \mid A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}. \qquad (3.2)$$

Эта задача называется *двойственной* (или сопряженной) к L.

Введем некоторые обозначения: M – допустимое множество задачи (2.1), т.е. $M = \{x \mid Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$; $\widetilde{M}$ – оптимальное множество этой задачи; M^* – допустимое множество задачи L^* (т.е. задачи (3.2)); $\widetilde{M}^*$ – ее оптимальное множество.

Оптимальное значение критериальной функции (c, x) в задаче (2.1) можно рассматривать как функцию вектора ресурсов b. Обозначим эту функцию через $\widetilde{f}(b)$. При некоторых условиях (например, единственности оптимального вектора в задаче L^*) функция $\widetilde{f}(b)$ обладает частными производными по b_j:

$$\frac{\partial \widetilde{f}(b)}{\partial b_j} = \lim_{\Delta b_j \to 0} \frac{\widetilde{f}(b_1, ..., b_j + \Delta b_j, ..., b_m) - \widetilde{f}(b)}{\Delta b_j}.$$

Оказывается, что вектор $\widetilde{u}^T = \left[\frac{\partial \widetilde{f}(b)}{\partial b_1}, ..., \frac{\partial \widetilde{f}(b)}{\partial b_m}\right]$ как раз является оптимальным вектором задачи L^*, а его координаты $\widetilde{u}_j = \frac{\partial \widetilde{f}(b)}{\partial b_j}$ $(j = 1, ...$ $..., m)$ дают меру (оценку) эффективности ресурсов b_j $(j = 1, ..., m)$, о чем говорилось в начале параграфа.

Оценки $\widetilde{u}_j$ называются еще *двойственными оптимальными оценками* (или просто *двойственными оценками*), отвечающими ограничениям задачи $(a_j, x) \leqslant b_j$ $(j = 1, ..., m)$ [12]. Хотя оценка $\widetilde{u}_j$ характеризует меру эффективности j-го ресурса, она выражает и меру напряженности ограничения $(a_j, x) \leqslant b_j$ в системе всех ограничений задачи. Вот почему оценку $\widetilde{u}_j$ соотносят к соответствующему (т.е. j-му) ограничению.

Если величина $\Delta b_j = 1$ является достаточно малой по сравнению с величиной b_j, то равенство $\widetilde{u}_j = \frac{\partial \widetilde{f}(b)}{\partial b_j}$ приближенно можно записать в форме

$$\widetilde{f}(b_1, ..., b_j + 1, ..., b_m) \approx \widetilde{f}(b_1, ..., b_m) + \widetilde{u}_j, \qquad (3.3)$$

где $\approx$ есть знак приближенного равенства. Данное соотношение и выражает смысл разности (3.1).

Вывод: оценки эффективности ресурсов b_j определяются из решения задачи L^*, двойственной к L, т.е. если $\widetilde{u}^T = [\widetilde{u}_1, ..., \widetilde{u}_m]$ – оптимальный вектор задачи L^*, то $\widetilde{u}_j$ – мера эффективности j-го ресурса $(j = 1, ..., m)$.

Соотношениям

$$\frac{\partial \tilde f(b)}{\partial b_j} = \tilde u_j, \quad j = 1, ..., m, \tag{3.4}$$

можно придать более общий вид, а именно: если $s = [s_1, ..., s_m]$ – любое направление (вектор) в пространстве E_m, то

$$\frac{\partial \tilde f(b)}{\partial s} = \sum_{j=1}^{m} s_j \tilde u_j = (s, \tilde u), \tag{3.5}$$

где $\frac{\partial \tilde f(b)}{\partial s}$ – производная по направлению s, определяемая соотношением

$$\frac{\partial \tilde f(b)}{\partial s} = \lim_{t \to +0} \frac{\tilde f(b + ts) - f(b)}{t}.$$

Соотношения (3.4) получаются из (3.5), если в качестве s брать векторы $e_j = [0, ..., 1, 0, ..., 0]$; здесь на j-м месте вектора e_j стоит единица, на остальных – нули.

Из (3.5) можно вывести приближенное равенство

$$\tilde f(b_1 + \Delta b_1, ..., b_m + \Delta b_m) \approx \tilde f(b_1, ..., b_m) + \sum_{j=1}^{m} \tilde u_j \Delta b_j, \tag{3.6}$$

где Δb_j – приращения ингредиентов b_j (некоторые приращения могут быть и отрицательными). Соотношение (3.3) получается из (3.6), если положить $\Delta b_j = 1$, $\Delta b_i = 0$ для $i \neq j$.

Формула (3.5) допускает обобщение на случай неоднозначной разрешимости задачи (3.2), двойственной к (2.1):

$$\frac{\partial \tilde f(b)}{\partial s} = \min_{\tilde u \in \tilde M^*} (s, \tilde u),$$

где $\tilde M^* = \operatorname{Arg}(3.2)$.

Функцию оптимума задачи (2.1) можно рассматривать и как функцию $g(c)$ от вектора цен $c^T = [c_1, ..., c_n]$. В предположении единственности оптимального вектора $\tilde x^T = [\tilde x_1, ..., \tilde x_n]$ этой задачи можно привести аналоги формулам (3.3)–(3.6):

$$g(c_1, ..., c_i + 1, ..., c_n) \approx g(c_1, ..., c_n) + \tilde x_i,$$

$$\frac{\partial g(c)}{\partial c_i} = \tilde x_i, \quad i = 1, ..., n,$$

$$\frac{\partial g(c)}{\partial e} = (e, \tilde x),$$

$$g(c_1 + \Delta c_1, ..., c_n + \Delta c_n) \approx g(c_1, ..., c_n) + \sum_{i=1}^{n} \tilde x_i \Delta c_i.$$

Запись задачи L является одной из стандартных. Это означает, что любую задачу линейного программирования можно привести к такой форме.

Отсюда следует, что если правило формирования задачи L^* по задаче L назвать (*)-правилом, то его (это правило) можно применить к задаче линейного программирования, записанной в произвольной форме. Формирование двойственной задачи в общем случае изобразим схематически:

$$\left.\begin{array}{l} \max(c,x) \\ \text{при ограничениях} \\ (a_j,x)\leqslant b_j\ (j\in J_<), \\ (a_j,x)\geqslant b_j\ (j\in J_>), \\ (a_j,x)=b_j\ (j\in J_=), \\ \quad x_i\geqslant 0\ \ (i\in I_>), \\ \quad x_i\leqslant 0\ \ (i\in I_<), \\ x_i \text{ свободные } (i\in I_=). \end{array}\right\} \quad \overset{(*)}{\rightleftarrows} \quad \left\{\begin{array}{l} \min(b,u) \\ \text{при ограничениях} \\ (h_i,u)\leqslant c_i\ \ (i\in I_<), \\ (h_i,u)\geqslant c_i\ \ (i\in I_>), \\ (h_i,u)=c_i\ \ (i\in I_=), \\ \quad u_j\geqslant 0\ (j\in J_<), \\ \quad u_j\leqslant 0\ (j\in J_>), \\ u_j \text{ свободные } (j\in J_=). \end{array}\right.$$

Сделаем пояснения символики данной схемы: $J_<$ – множество номеров неравенств со смыслом $\leqslant$, $J_>$ – со смыслом $\geqslant$ и т.д. Некоторые из этих множеств могут быть пустыми, т.е. если например, $J_> = \phi$, то неравенств со смыслом $\geqslant$ в системе ограничений нет. В схеме предусмотрены случаи, когда часть переменных неотрицательны, часть неположительны, часть свободны. Схемой можно пользоваться как слева направо ($\rightarrow$), так и справа налево ($\leftarrow$), т.е. если имеем задачу линейного программирования на max, то схема используется слева направо, если же на min, то справа налево.

Если для произвольной задачи ЛП ввести понятие *идентификатора* в форме

$$(\uparrow,\downarrow; c, A, b;\ J_<, J_>, J_=;\ I_<,\ I_>,\ I_=),$$

то универсальная схема перехода к двойственной задаче может быть изображена подстановками

$$\begin{pmatrix} \uparrow;\ c, A, b;\ J_<,\ J_>,\ J_=;\ I_<,\ I_>,\ I_= \\ \downarrow;\ b, A^T, c;\ I_<, I_>,\ I_=;\ J_>,\ J_<,\ J_= \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \downarrow;\ c, A, b;\ J_<,\ J_>,\ J_=;\ I_<,\ I_>,\ I_= \\ \uparrow;\ b, A^T, c;\ I_>,\ I_<,\ I_=;\ J_<,\ J_>,\ J_= \end{pmatrix}.$$

Символы $\uparrow$ и $\downarrow$ означают, что целевая функция в задаче максимизируется или минимизируется соответственно.

Имеет место *свойство взаимности*:

$$(L^*)^* = L,$$

т.е. двойственная задача к двойственной совпадает с исходной. Оно справедливо для любой задачи линейного программирования.

Правило (*) порождает следующие пары взаимно двойственных задач:

$$\left.\begin{array}{l} L_1:\max(c,x) \\ Ax\leqslant b, x\geqslant \bar{x} \end{array}\right\} \quad \overset{(*)}{\rightleftarrows} \quad \left\{\begin{array}{l} L_1^*:\min\left[(b,u)-(\bar{x},v)\right] \\ A^Tu-v=c,\ \ [u,v]\geqslant 0; \end{array}\right. \tag{3.7}$$

здесь $u\in E_m$, $v\in E_n$. Если бы в L_1 было условие $x\geqslant 0$, то в двойственной задаче следовало писать $A^Tu - v\geqslant c$.

Далее имеем:

$$\left.\begin{array}{l} L_2: \min(c,x) \\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0 \end{array}\right\} \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{(*)}} \left\{\begin{array}{l} L_2^*: \max(b,u) \\ A^T u \leqslant c,\ u \leqslant 0; \end{array}\right. \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{array}{l} L_3: \min(c,x) \\ Ax \leqslant b, \\ Px \geqslant d, \\ \quad x \geqslant 0 \end{array}\right\} \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{(*)}} \left\{\begin{array}{l} L_3^*: \max[-(b,u)+(d,u)] \\ -A^T u + P^T v \leqslant c, \\ \qquad\qquad u \geqslant 0, \\ \qquad\qquad v \geqslant 0; \end{array}\right. \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{array}{r} L_4: \max(c,x) \\ Ax \leqslant b, \\ Px \geqslant d, \\ Qx = q, \\ x \geqslant 0 \end{array}\right\} \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{(*)}} \left\{\begin{array}{l} L_4^*: \min[(b,u)-(d,v)+(q,z)] \\ \quad A^T u - P^T v + Q^T z \geqslant c, \\ \qquad\qquad\qquad u \geqslant 0, \\ \qquad\qquad\qquad v \geqslant 0, \\ \quad z \text{ — свободный вектор;} \end{array}\right. \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{array}{r} L_5: \min(c,x) \\ Ax = b, \\ x \geqslant 0 \end{array}\right\} \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{(*)}} \left\{\begin{array}{l} L_5^*: \max(b,u) \\ \quad A^T u \leqslant c, \\ \quad u \text{ — свободный вектор.} \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Приведенные здесь пары двойственных задач $\{L_i, L_i^*\}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ полезны для читателя в том смысле, что так как их форма является наиболее распространенной в приложениях, то используя эти модели (а также соответствующее программное обеспечение), при решении практической задачи можно воспользоваться выписанными переходами к двойственной задаче с целью уяснения ее структуры и практического использования двойственных оценок. Пакеты прикладных программ, решающие задачи линейного программирования, как правило, выдают на печать большую информацию о задаче: это не только оптимальный план, но и двойственные оценки, интервалы устойчивости ингредиентов (т.е. интервалы изменения ингредиентов без изменения двойственных оценок) и др.

Пусть L — произвольная задача линейного программирования на максимум (max), M — ее допустимое множество, M^* — допустимое множество двойственной к ней задачи L^*. Если (c,x) и (b,u) — оптимизируемые функции этих задач (их критериальные функции), то справедлива

Т е о р е м а 3.1. *Имеет место неравенство*

$$(c,x) \leqslant (b,u)$$

для всех $x \in M$, $u \in M^*$.

З а м е ч а н и е. Если задача L на минимум, то теорема 3.1 справедлива с неравенством $\geqslant$.

Сформулируем основную теорему теории двойственности в линейном программировании.

Т е о р е м а 3.2. *Если произвольная задача линейного программирования L разрешима, то двойственная к ней задача L^* также разрешима; при этом их оптимальные значения совпадают.*

В силу свойства взаимности правила (*) имеет место и обратное

Утверждение. *Если задача L^* разрешима, то разрешима и задача L; при этом их оптимальные значения совпадают.*

Сформулируем для задачи L в форме (2.1) задачу (*симметрическую*) S: Найти хотя бы одно решение системы неравенств

$$\begin{aligned}&Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0; \quad A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0;\\ &(c, x) \geqslant (b, u).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает

Теорема 3.3. *Если $\tilde{x}$ – оптимальный вектор задачи L, $\tilde{u}$ – оптимальный вектор задачи L^*, то вектор $[\tilde{x}, \tilde{u}]$ является некоторым решением системы* (3.12). *Обратно: если* $[\tilde{x}, \tilde{u}]$ – *некоторое решение системы* (3.12), *то $\tilde{x}$ – оптимальный вектор задачи L, а $\tilde{u}$ – задачи L^*.*

Таким образом, решение оптимизационных задач линейного программирования L и L^* сводится к нахождению хотя бы одного решения некоторой системы линейных неравенств, а именно системы (3.12). Этот факт имеет принципиальное значение. Он позволяет любой метод решения системы линейных неравенств использовать для решения задач линейного программирования или положить в основу поиска эффективных методов решения.

Все приведенные теоремы с доказательствами можно найти в учебном пособии [6].

Приведем некоторые дополнительные сведения о двойственности в ЛП.

Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют сформулировать

Утверждение. *Задача линейного программирования разрешима тогда и только тогда, когда системы ее ограничений и ограничений двойственной задачи совместны, т.е. $M \neq \phi, M^* \neq \phi$.*

Сформулируем условия оптимальности для допустимых векторов $\bar{x} \in M$ и $\bar{u} \in M^*$.

Теорема 3.4. *Допустимые векторы $\bar{x}$ и $\bar{u}$ для L и L^* (т.е. для* (2.1) *и* (3.2)) *оптимальны для них тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$(\bar{u}, A\bar{x} - b) = 0, \qquad (\bar{x}, A^T\bar{u} - c) = 0.$$

В силу $\bar{u} \geqslant 0$, $A\bar{x} - b \leqslant 0$, $\bar{x} \geqslant 0$, $A^T\bar{u} - c \geqslant 0$ эти соотношения могут быть переписаны в эквивалентном виде:

$$\bar{u}_j[(a_j, \bar{x}) - b_j] = 0, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$\bar{x}_i[(h_i, \bar{u}) - c_i] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

или

$$\bar{u}_j > 0 \Rightarrow (a_j, \bar{x}) = b_j, \qquad (a_j, \bar{x}) < b_j \Rightarrow \bar{u}_j = 0; \tag{3.13}$$

$$\bar{x}_i > 0 \Rightarrow (h_i, \bar{u}) = c_i, \qquad (h_i, \bar{u}) > c_i \Rightarrow \bar{x}_i = 0. \tag{3.14}$$

Помня интерпретацию задачи L и оптимальных двойственных оценок $u_j \geqslant 0$ ($j = 1, \ldots, m$), соотношения (3.13) и (3.14) можно на содержательном языке прочитать следующим образом.

Если оптимальная оценка $\bar{u}_j$ j-го ресурса положительна, то этот ресурс в соответствии с планом $\bar{x}$ используется полностью; если этот ресурс используется не полностью, то его оптимальная оценка равна нулю.

Если в соответствии с оптимальным планом $\bar{x}$ продукция i-го вида производится $(\bar{x}_i > 0)$, то это производство неубыточно (цена единицы продукции i-го вида c_i равна затратам на ее производство в оценках $\bar{u}_j$); если производство i-й продукции убыточно в оценках $\bar{u}_j$, т.е. $(h_i, \bar{u}) > c_i$, то эта продукция не производится $(\bar{x}_i = 0)$.

Коснемся вопросов устойчивости задачи L. Пусть $\tilde{f}\ (c, b, A)$ – ее функция оптимума как функция от $s = [c, b, A] \in E_{n+m+nm}$ – информационного вектора задачи L. Если $s_0 = [c^0, b^0, A_0]$ – некоторая его реализация и значение $\tilde{f}\ (s_0)$ определено, т.е. задача

$$\max\{(c^0, x) \mid A_0 x \leqslant b^0, x \geqslant 0\} \tag{3.15}$$

разрешима, то она называется *устойчивой* по s в точке s_0 (по c в точке c^0, по b в b^0, по A в A_0), когда $\tilde{f}\ (s)$ непрерывна по s в точке s_0 (по c в точке c^0, по b в b^0, по A в A_0).

Т е о р е м а 3.5. 1. *Задача* (3.15) *устойчива по s тогда и только тогда, когда ее оптимальное множество непусто и ограничено, а система ограничений устойчива, т.е. при некотором $p > 0$: $Ap < b$.*

2. *Задача устойчива по c (по b) тогда и только тогда, когда множество* Arg L *непусто и ограничено* (Arg $L \neq \phi$ *и* Arg L^* *ограничено*).

Доказательство теоремы об устойчивости не является сложным и опирается на такие простые свойства систем линейных неравенств и задач ЛП:

1) *Если произвольная система линейных неравенств $Ax \leqslant b$ устойчива $(\exists p \mid Ap < b)$, то при малых вариациях элементов вектора b и матрицы A это свойство системы не нарушается.*

2) *Если многогранник системы ограничен, то малые вариации информационного вектора $[b, A]$ не нарушают свойства его ограниченности (при непустоте).*

Это следует из того, что свойство всесторонности системы векторов $\{a_j\}_1^m$ как условия ограниченности многогранника ее решений (см. § 1) является инвариантом при малых вариациях векторов $\{a_j\}_1^m$.

3) *Если множество* Arg L *непусто и ограничено, то*

$$\operatorname{Arg}\max\{(c_\epsilon, x) \mid Ax \leqslant b,\ \ x \geqslant 0\} \subset \operatorname{Arg} L$$

при достаточно малых $\epsilon > 0$, где $\| c - c_\epsilon \| \leqslant \epsilon$. Следовательно, при малых вариациях вектора c сохраняется свойство разрешимости задачи и ограниченности ее оптимального множества.

Приведем более общую формулу для маргинальных значений задачи (2.1), т.е. формулу производной ее функции оптимума $\tilde{f}(s)$, по направлению $l \in E_{nm+n+m}$, где $s = [c, A, b]$.

Т е о р е м а 3.6. *Пусть задача ЛП* му оптимальному вектору

$$L:\ \max\{(c, x) \mid Ax \leqslant b,\ \ x \geqslant 0\}$$

и двойственная к ней

$$L^*:\ \min\{(b, u) \mid A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}$$

разрешимы и имеют по единственному оптимальному вектору $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ соот-

ветственно. Если $l = [c_l, A_l, b_l]$, *то справедливо соотношение*

$$\frac{\partial \tilde{f}(s)}{\partial l} = (c_l, \tilde{x}) + (\tilde{u}, b_l - A_l^T \tilde{x}). \tag{3.16}$$

Частными случаями (3.16) являются

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial b_j} = \tilde{u}_j, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial e_i} = \tilde{x}_i, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial a_{ji}} = -\tilde{u}_j \ \tilde{x}_i, \tag{3.17}$$

$j = 1, \ldots, m; \ \ i = 1, \ldots, n.$

Если $\tilde{M} = \operatorname{Arg} L$ и $\tilde{M}^* = \operatorname{Arg} L^*$ непусты и ограничены, то обобщением (3.16) является формула

$$\frac{\partial \tilde{f}(s)}{\partial l} = \max_{x \in \tilde{M}} \ \min_{y \in \tilde{M}^*} \ [(c_l, x) + (u, b_l - A_l^T x)]. \tag{3.18}$$

Формулы (3.17) для случая неоднозначности оптимальных векторов $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ запишутся в виде

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial b_j} = \min \{ (e_j^*, u) \mid u \in \tilde{M}^* \} \ (=: \alpha_j),$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial c_l} = \max \{ (e_i, x) \mid x \in \tilde{M} \} (=: \ \beta_i),$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial a_{ji}} = -\alpha_j \beta_i, \qquad j = 1, \ldots, m; \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $e_j^* = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0] \in E_m$, $e_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0] \in E_n$.

§ 4. Игровой подход к двойственности

В прикладной математике имеется важное научное направление – теория игр, изучающая математические модели конфликтных ситуаций. Выделим частный класс игр, а именно класс *игр двух лиц* (сторон), именуемых игроками, интересы которых противоположны. Опишем кратко такие игры.

Пусть каждый из игроков располагает некоторым множеством согласованных с *правилами игры* способов поведения, отнесенных к одноразовой реализации игры. Эти способы поведения называются *стратегиями.* Будем исходить из того, что стратегии игроков задаются векторами $x \in \in M \subset E_n$ и $y \in N \subset E_m$ соответственно; здесь M – множество всех стратегий первого игрока, N – множество всех стратегий второго игрока. В определении игры постулируется, что если игроки независимо друг от друга выбирают стратегии x и y, то этим однозначно определяется скалярная величина $F(x, y)$ (*платежная функция*), интерпретируемая как плата первому игроку вторым. Если при каких-то x и y величина $F(x, y)$ отрицательна, то это означает, что в количестве $-F(x, y)$ первый игрок платит второму.

Играющими сторонами могут быть: человек и человек (игра в шахматы), человек и природа, человек и механизм (человек и шахматная программа на ЭВМ), производство и рынок и т.д. Выбор стратегии игроком может носить активный или пассивный характер, детерминированный или случайный, сознательный или стихийный (в примере человек и природа).

В основу *решающего правила* игры могут быть положены разные принципы; наиболее часто используемый именуется принципом гарантированного результата. К нему можно прийти на основе следующего рассуждения.

Если первый игрок зафиксирует свою стратегию x, то он может себе гарантировать выигрыш в размере

$$\min_{u \in N} F(x, u) =: f(x).$$

Но так как выбор стратегии x в руках первого игрока, то он может себе обеспечить выигрыш

$$\max_{x \in M} f(x) = \max_{x \in M} \min_{u \in N} F(x, u) \ (=: F_1). \tag{4.1}$$

Аналогичные рассуждения со стороны второго игрока (с его функцией выигрыша $-F(x, u)$) приводят к операции

$$\min_{u \in N} \max_{x \in M} F(x, u) \ (=: F_2). \tag{4.2}$$

Если существуют стратегии $\bar{x} \in M$ и $\bar{u} \in N$ такие, что

$$F(\bar{x}, \bar{u}) = F_1 = F_2 \ (=: F_0), \tag{4.3}$$

то они называются *оптимальными* (или *равновесными*) стратегиями, а F_0 – ценой игры.

Заметим, что анализ игры на основе принципа гарантированного результата соответствует безазартному, осторожному подходу, нацеленному на обеспечение пусть минимального, но гарантированного выигрыша.

Приведем конкретный пример игры, а именно матричной игры. Пусть задана произвольная матрица

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{ji} & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix},$$

столбцы и строки которой пронумерованы индексами $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$ соответственно. Одноразовая реализация игры состоит в том, что если первый игрок выбирает j-ю строку, а второй – i-й столбец матрицы Γ (выбор производится независимо друг от друга), то число a_{ji}, стоящее на пересечении j-й строки и i-го столбца, является платой первому игроку вторым (в силу этого матрица Γ называется *платежной*). Описанная ситуация соответствует тому, что игроки располагают конечным числом стратегий: первый располагает m стратегиями, а второй – n стратегиями. Если содержательный смысл стратегий не уточняется, то их можно отождествить просто с номером, присвоенным соответствующей стратегии. В этом случае платежная функция имеет вид $F(j,i) = a_{ji}$. Матрица Г и функция $F(j,i)$ однозначно друг друга определяют. В рассматриваемом примере понятия стратегий можно обобщить до понятия *смешанных стратегий*

$$x^T = [x_1, \ldots, x_m] \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \tag{4.4}$$

$$u^T = [u_1, \ldots, u_n] \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i = 1, \tag{4.5}$$

интерпретируемых следующим образом: x_j – вероятность выбора первым игроком j-й стратегии (чистой стратегии), u_i – вероятность выбора вторым игроком i-й стратегии (чистой стратегии). В предположении независимости случайного выбора игроками чистых стратегий математическое ожидание выигрыша для первого игрока будет равно

$$F(x,u) = \sum_{j=1,\, i=1}^{m,n} a_{ji}\, x_j\, u_i. \tag{4.6}$$

Пусть M и N – множества смешанных стратегий первого и второго игроков, т.е. множества, задаваемые соотношениями (4.4) и (4.5) соответственно. Задачи (4.1) и (4.2) на классах смешанных стратегий при платежной функции (4.6) разрешимы на некоторой паре стратегий $\bar{x}$ и $\bar{u}$, при этом выполняется (4.3), т.е. $\bar{x}$ и $\bar{u}$ будут оптимальными смешанными стратегиями. Интересно отметить, что задачи (4.1) и (4.2), поставленные в соответствие матричной игре в смешанных стратегиях, эквивалентны следующей паре взаимно двойственных задач линейного программирования:

$$\max \Big\{ x_{m+1} \;\Big|\; \sum_{j=1}^{m} a_{ji} x_j \geqslant x_{m+1},$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \qquad \sum_{j=1}^{m} x_j = 1 \Big\},$$

$$\min \Big\{ u_{n+1} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} a_{ji} u_i \geqslant u_{n+1},$$

$$u_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i = 1 \Big\}.$$

Эквивалентность понимается в том смысле, что если $[\bar{x}, \bar{x}_{m+1}]$ – оптимальный вектор первой задачи, $[\bar{u}, \bar{u}_{n+1}]$ – оптимальный вектор второй задачи, то $\bar{x}$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока, $\bar{u}$ – второго игрока, при этом $\bar{x}_{m+1} = \bar{u}_{n+1}$ – цена игры. Обратно, если $\bar{x}$ и $\bar{u}$ – оптимальные стратегии первого и второго игроков, F_0 – цена игры, то векторы $[\bar{x}, \bar{x}_{m+1}]$ и $[\bar{u}, \bar{u}_{n+1}]$ при $\bar{x}_{m+1} = \bar{u}_{n+1} = F_0$ являются оптимальными для выписанной пары задач линейного программирования.

Приведенных сведений об игроках двух лиц с противоположными интересами нам достаточно, чтобы перейти к вопросу, означенному в заглавии параграфа.

Наравне с *Производством*, формализуемым, например, моделью (2.1), т.е.

$$L:\ \max\{(c,x)\mid Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0\},\tag{4.7}$$

рассмотрим *Рынок*, который выполняет функции реализации продукции производства, реализации излишек тех или иных ресурсов и закупок недостающих ресурсов, при этом продажа продукции осуществляется по фиксированным ценам c_i $(i=1,\ldots,n)$, а продажа и закупка ресурсов – по ценам Рынка $u_j\,(j=1,\ldots,m)$, устанавливающимся на основе конкурентного взаимодействия двух сторон – Производства и Рынка. Эти взаимодействующие стороны будем рассматривать в роли двух игроков (Производство – первый игрок, Рынок – второй игрок) со стратегиями $x^T=[x_1,\ldots,x_n]\geqslant 0$ и $u^T=[u_1,\ldots,u_m]\geqslant 0$. В качестве же платежной функции будет выступать функция Лагранжа

$$L(x,u)=(c,x)-\sum_{j=1}^{m}u_j\,[(a_j,x)-b_j],$$

поставленная в соответствие задаче (4.7). Она выражает, как легко усмотреть из вида этой функции, итоговый доход производства от реализации продукции, продажи излишек и закупки недостающих ресурсов. Функция дохода производства $L(x,\ u)$ – это в то же время и функция издержек рынка.

Если отыскание оптимальных стратегий Производства и Рынка подчинить принципу гарантированного результата, то мы придем к двум задачам:

$$\max_{x\geqslant 0}\ \min_{u\geqslant 0}\ L(x,u)\,(=:\tilde{l}),\tag{4.8}$$

$$\min_{u\geqslant 0}\ \max_{x\geqslant 0}\ L(x,u)\,(=:\tilde{l}^{*}).\tag{4.9}$$

Сразу же отметим, что $\tilde{l}=\tilde{l}^{*}$. Если вектор $[\bar{x},\ \bar{u}]\geqslant 0$ реализует операции максимина и минимакса в (4.8) и (4.9), то по принятой терминологии: $\bar{x}$ – оптимальная стратегия Производства, $\bar{u}$ – оптимальная стратегия Рынка. Еще говорят, что $[\bar{x},\bar{u}]$ осуществляет *состояние равновесия* в системе Производство – Рынок, вектор $[\bar{x},\bar{u}]$ называют *равновесным*, $\bar{u}$ – *равновесным вектором цен* (на ресурсы).

Покажем, что задачи (4.8) и (4.9) эквивалентны задачам линейного программирования L, т.е. задаче (4.7), и задаче

$$L^{*}:\ \min\{(b,u)\mid A^Tu\geqslant c,\ u\geqslant 0\}\tag{4.10}$$

соответственно. Задача (4.10) – это двойственная к L.

Докажем вначале эквивалентность задачи L задаче (4.8). Рассмотрим внутреннюю операцию в задаче (4.8), т.е. $\min\limits_{u\geqslant 0} L(x,u)$. Имеем

$$\min_{u\geqslant 0}L(x,u)=\min_{u\geqslant 0}\,[(c,x)-(u,Ax-b)]=\begin{cases}(c,x), & \text{если}\quad Ax\leqslant b;\\ -\infty, & \text{если}\quad Ax\nleqslant b.\end{cases}$$

Отсюда и следует

$$\max_{x \geqslant 0} \min_{u \geqslant 0} L(x, u) = \max_{x \geqslant 0} \{(c, x) \mid Ax \leqslant b\};$$

при этом если вектор $[\bar{x}, \bar{u}] \geqslant 0$ такой, что $L(\bar{x}, \bar{u}) = \tilde{l}$, то $\bar{x}$ оптимален для L, и обратно: если $\bar{x}$ оптимален для L, то существует $\bar{u} \geqslant 0$ такой, что $L(\bar{x}, \bar{u}) = \tilde{l}$.

Докажем эквивалентность задачи (4.9) задаче L^*. Преобразуем вначале функцию Лагранжа

$$L(x, u) = (c, x) - (u, Ax - b) = (b, u) + (c, x) - (Ax, u) =$$
$$= (b, u) - (A^T u - c, x).$$

Рассмотрим внутреннюю операцию в задаче (4.9), т.е. $\max\limits_{x \geqslant 0} L(x, u)$. Имеем

$$\max_{x \geqslant 0} L(x, u) = \max_{x \geqslant 0} \{(b, u) - (A^T u - c, x)\} =$$

$$= \begin{cases} (b, u), & \text{если} \quad A^T u \geqslant c, \\ +\infty, & \text{если} \quad A^T u \not\geqslant c. \end{cases}$$

Отсюда и следует

$$\min_{u \geqslant 0} \max_{x \geqslant 0} L(x, u) = \min_{u \geqslant 0} \{(b, u) \mid A^T u \geqslant c\},$$

при этом если вектор $[\bar{x}, \bar{u}] \geqslant 0$ такой, что $L(\bar{x}, \bar{u}) = \tilde{l}^*$, то $\bar{u}$ оптимален для L^*, и обратно: если $\bar{u}$ оптимален для L^*, то существует $\bar{x} \geqslant 0$ такой, что $L(\bar{x}, \bar{u}) = \tilde{l}^*$.

В силу доказанных эквивалентностей $L \sim (4.8)$ и $L^* \sim (4.9)$ и теоремы двойственности в линейном программировании как раз и следует отмеченное ранее равенство $\tilde{l} = \tilde{l}^*$, т.е.

$$\max_{x \geqslant 0} \min_{u \geqslant 0} L(x, u) = \min_{u \geqslant 0} \max_{x \geqslant 0} L(x, u).$$

Подведем итог: к двойственной задаче линейного программирования L^* можно прийти на основе построения задачи (4.9) в рамках игровой модели Производство – Рынок, при этом (4.9) выступает как задача построения равновесных цен Рынка.

Такой подход к двойственности можно отнести к произвольной задаче математического программирования (МП), т.е. задаче [6]

$$\max\{f_0(x) \mid f_j(x) \leqslant 0 \ \ (j = 1, \ldots, m), \ x \geqslant 0\} \ (=: \tilde{f}), \tag{4.11}$$

где $\{f_s(x)\}_0^m$ – произвольные функции, заданные на E_n. Пусть $F(x, u) = f_0(x) - \sum\limits_{j=1}^{m} u_j f_j(x)$ – функция Лагранжа для (4.11). Точно так же, как и в линейном случае, доказывается эквивалентность

$$\max_{x \geqslant 0} \min_{u \geqslant 0} F(x, u) \sim (4.11).$$

Тогда двойственную к (4.11) естественно определить как

$$\min_{u \geqslant 0} \max_{x \geqslant 0} F(x, u) \,(=: \tilde{f}^*). \tag{4.12}$$

Функция $f(x)$ называется *выпуклой*, если

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

$$\forall x, y \in E_n, \quad \forall \alpha \in \overline{0, 1}.$$

Функция $f(x)$ вогнута по определению, если $-f(x)$ выпукла. *Строгая выпуклость* (*строгая вогнутость*) функции $f(x)$ в точке p означает, что в некоторой окрестности точки p соответствующее неравенство выполняется строго, т.е. $<$ ($>$ для строгой вогнутости).

Если (4.11) – задача выпуклого программирования (ВП), т.е. функции $\{-f_0(x), f_j(x)\}_{j=1}^m$ выпуклые, то справедлива

Т е о р е м а 4.1 (двойственности). *Пусть задача ВП* (4.11) *разрешима и* $\exists\, p \geqslant 0$: $f_j(p) < 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, *тогда* (4.12) *разрешима и* $\tilde{f} = \tilde{f}^*$.

Если условие $x \geqslant 0$ в (4.11) убрать, т.е. рассмотреть задачу

$$\max \{ f_0(x) \mid f_j(x) \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \}, \tag{4.13}$$

и предположить функции $\{f_0(x), f_j(x)\}_{j=1}^m$ дифференцируемыми, то задача (4.12) допускает эквивалентную запись

$$\min \{ F(x, u) \mid \nabla_x F(x, u) = 0, \;\; u \geqslant 0 \} \quad (=: \tilde{f}^*); \tag{4.14}$$

здесь ∇_x – символ градиента функции $F(x, u)$ по x.

Имеет место

Т е о р е м а 4.2 (обратная теорема двойственности). *Пусть* (4.11) – *задача ВП и* (4.14) – *разрешима в точке* $[\bar{x}, \bar{u}]$. *Если функция* $F(x, \bar{u})$ *строго вогнута в некоторой окрестности точки* $\bar{x}$, *то* (4.11) *также разрешима, при этом* $\bar{x} \in \operatorname{Arg}(4.11)$ *и* $\tilde{f} = \tilde{f}^*$.

В § 3 была дана формула для маргинальных значений задачи ЛП. В силу прикладной важности дадим ее обобщение на случай параметрической задачи выпуклого программирования:

$$\max \{ f_0(x, s) \mid f_j(x, s) \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \quad x \geqslant 0 \}, \tag{4.15}$$

здесь $\{-f_0(x, s), f_1(x, s), \ldots, f_m(x, s)\}$ – выпуклые по x, непрерывные по $z = [x, s]$, дифференцируемые по $s \in E_k$ функции. По аналогии с (4.12) для (4.15) можно выписать двойственную к ней задачу:

$$\min_{u \geqslant 0} \max_{x \geqslant 0} F(x, u; s) \,(=: \tilde{f}(s)), \tag{4.16}$$

где $F(x, u; s) = f_0(x, s) - \sum_{j=1}^m u_j f_j(x, s)$. Положим $\tilde{M}_s = \operatorname{Arg}(4.15)$, $\tilde{M}_s^* = \operatorname{Arg}_u (4.16)$, $l \in E_k$.

Т е о р е м а 4.3. *Если оптимальные множества* $\tilde{M}_s$ *и* $\tilde{M}_s^*$ *не пусты и ограничены, то*

$$\frac{\partial \tilde{f}(s)}{\partial l} = \max_{x \in \tilde{M}_s} \min_{u \in \tilde{M}_s^*} (F_s'(x, u; s), l). \tag{4.17}$$

§ 5. Метод штрафных функций

Под методами штрафных функций понимаются способы эквивалентного (или приближенного) сведения задачи ЛП к новой оптимизационной задаче, в которой сохранена некоторая часть (возможно, пустая) ограничений исходной задачи, а остальные ограничения определенным образом учтены в реконструированной целевой функции. Такое сведение имеет большое число реализаций. Мы остановимся только на двух [10].

Пусть задача ЛП записана в виде

$$\max\{(c, x) \mid Ax - b \leqslant 0, \ \ x \in M\} \ (=: \tilde{f}), \tag{5.1}$$

где M – многогранник, заданный некоторой системой линейных неравенств. Возможно, $M = E_n$ или $M = \{x \geqslant 0\}$. Разобъем систему $Ax - b \leqslant 0$ произвольным образом на подсистемы

$$A_j x - b^j \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$

так что

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_{m_0} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b^1 \\ \ldots \\ b^{m_0} \end{bmatrix}.$$

Выпишем задачи:

$$\max\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| (A_j x - b^j)^+ \|_{p(j)} \mid \ x \in M\}, \tag{5.2}$$

$$\sup\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| A_j x - b^j)^+ \|^2_{p(j)} \mid \ x \in M\} \ \ (=: \tilde{f}_R); \tag{5.3}$$

здесь $\| \cdot \|_{p(j)}$ – произвольные нормы пространств размерностей n_j, совпадающих с размерностями векторов b^j $(j = 1, \ldots, m_0)$.

Под *монотонной* нормой $\| \cdot \|$ пространства E_n понимается такая, что $x \geqslant y \geqslant 0 \Rightarrow \| x \| \geqslant \| y \|$. Нормы $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\max_i |x_i|$, $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ являются монотонными; здесь $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Обозначим через $\tilde{u}$ вектор двойственных оценок ограничений (неравенств) системы $Ax \leqslant b$ (следовательно, вектор $\tilde{u}$ имеет размерность, равную числу неравенств в этой системе). В соответствии с разбиением матрицы A на подматрицы A_j $(j = 1, \ldots, m_0)$ вектор $\tilde{u}$ разобьется на свои части $\tilde{u}^j$ $(j = 1, \ldots, m_0)$: $\tilde{u}^T = [\tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^{m_0}]$. Ниже будет рассмотрена связь задачи (5.1) с задачами (5.2) и (5.3).

Обозначим через $\| \cdot \|^*_{p(j)}$ норму, сопряженную к норме $\| \cdot \|_{p(j)}$; она определяется соотношением

$$\| y \|^*_{p(j)} = \sup_{\| x \|_{p(j)} \leqslant 1} \frac{|(y, x)|}{\| x \|_{p(j)}};$$

здесь (y, x) – скалярное произведение векторов y и x.

Т е о р е м а 5.1. *Если* $R_j \geqslant \|\tilde{u}^j\|^*_{p(j)}$ $(j = 1, \ldots, m_0)$, *то оптимальные значения задач* (5.1) *и* (5.2) *совпадают. Если же* $R_j > \|\tilde{u}^j\|^*_{p(j)}$ $(j = 1, \ldots, m_0)$, *то в задачах* (5.1) *и* (5.2) *совпадают и их оптимальные множества, т.е.* Arg(5.1) = Arg(5.2).

Т е о р е м а 5.2. *Оптимальное значение* $\tilde{f}_R$ *задачи* (5.3) *связано с оптимальным значением* $\tilde{f}$ *задачи* (5.1) *неравенством*

$$\tilde{f} \leqslant \tilde{f}_R \leqslant \tilde{f} + \sum_{j=1}^{m_0} \frac{(\|\tilde{u}^j\|^*_{p(j)})^2}{4R_j} \tag{5.4}$$

Отсюда следует

$$\lim \tilde{f}_R = \tilde{f}$$

при $\min\limits_j R_j \to +\infty$.

Таким образом, теорема 5.1 утверждает эквивалентность задачи (5.2) исходной задаче (5.1), а теорема 5.2 – асимптотическую эквивалентность задачи (5.3) задаче (5.1).

Если в качестве подсистемы $A_j x - b^j \leqslant 0$ взять j-е неравенство $l_j(x) = (a_j, x) - b^j \leqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, а $M = \{x \geqslant 0\}$, то задачи (5.2) и (5.3) примут вид

$$\max\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m} R_j l_j^+(x) \mid x \geqslant 0\}, \tag{5.5}$$

$$\sup\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m} R_j [l_j^+(x)]^2 \mid x \geqslant 0\}. \tag{5.6}$$

Заметим, что целевая функция в задаче (5.5) не является гладкой, т.е. не является дифференцируемой. В задаче же (5.6) целевая функция $f_R(x)$ дифференцируема, и ее градиент вычисляется по формуле

$$\Delta f_R(x) = c - 2\sum_{j=1}^{m} R_j l_j^+(x) a_j^T \quad (=: e_R(x)).$$

С использованием этого градиента задаче (5.6) можно поставить в соответствие итерационный процесс

$$x^{t+1} = [x^t + \alpha_t e_R(x^t)]^+, \tag{5.7}$$

который и решает приближенно задачу (5.1) при $M = \{x \geqslant 0\}$, причем тем точней, чем больше $R = \min\limits_j R_j$ и чем больше сделано итераций в силу выписанного процесса (5.7). В (5.7) коэффициенты α_t положительны и могут выбираться разными способами; можно их выбор подчинить, например, условиям

$$0 < \alpha_t \to 0, \qquad \sum_t \alpha_t = +\infty.$$

Что касается задачи (5.2), то, хотя ее функция цели и не дифференцируема, для ее решения (следовательно, и для решения задачи (5.1)) можно применить аналог процесса (5.7), изменив в нем только способ выбора направляющего вектора $e_R(x)$, а именно: в качестве такого вектора можно взять a_{j_t}, где индекс j_t выбирается, например, согласно правилу

$$\max_j l_j(x^t) = l_{j_t}(x^t).$$

З а м е ч а н и е 1. Если в задаче (5.1) $M = E_n$, т.е. при сведении задачи (5.1) к задаче (5.2) или (5.3) мы полностью освобождаемся от ограничений, то (5.2) и (5.3) суть задачи безусловной максимизации.

З а м е ч а н и е 2. В (5.3) вместо max поставлена операция sup. Это связано с тем, что операция sup в (5.3) не обязательно достижима (т.е. значение $\tilde{f}_R$ может быть конечным, а элемента $\tilde{x} \in M$, на котором целевая функция принимает значение $\tilde{f}_R$, не существует). Однако при некоторых условиях достижимость гарантируется, например, в случае, когда многогранник M ограничен.

Приведем несколько частных форм задачи (5.2) при выборе тех или иных конкретных норм $\|\cdot\|_{p(j)}$ и способов разбиения матрицы A на подматрицы A_j $(j = 1, \ldots, m_0)$. Пусть $m_0 = 1$, т.е. $A_j = A$, и $\| u \|_{p(1)} = \max\limits_j | u_j |$.

Тогда задача (5.2) будет иметь вид

$$\max \{(c, x) - R \max_j l_j^+(x) \mid \quad x \in M\},$$

где R – положительное число. Совпадение оптимального значения этой задачи с $\tilde{f}$ – оптимальным значением задачи (5.1) – обеспечивается при $R > \max\limits_j \tilde{u}_j$, где $\tilde{u}$ имеет тот же смысл, что и в теореме (5.1).

Если при $m_0 = 1$ взять норму вектора $[l_1^+(x), \ldots, l_m^+(x)]$ в форме $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} l_j^{+p}\right)^{1/p}$, то задача (5.2) примет вид

$$\{(c, x) - R\left(\sum_{j=1}^{m} [l_j^+(x)]^p\right)^{1/p} \mid \ x \in M\}, \qquad R > 0.$$

§ 6. Задачи линейного программирования со многими критериальными функциями

Как уже было отмечено во введении, план (или технический проект) характеризуется многими оценочными показателями, которые могут быть как упорядоченными по важности, так и неупорядоченными (или частично упорядоченными). В обычной задаче ЛП и стандартной ее интерпретации фигурирует один показатель, который и выступает в качестве критериальной функции. Ниже мы рассмотрим некоторые аспекты задач ЛП при наличии нескольких критериальных функций. Пусть этими функциями будут $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots, f_s(x)$, а системой ограничений

$$Ax \leqslant b, \qquad x \geqslant 0. \tag{6.1}$$

Этим еще однозначно не определяется модель оптимизации при многих критериях; здесь требуются уточнения постановок. На некоторых мы ниже и остановимся.

6.1. Модель последовательной оптимизации. Пусть u и v – векторы из некоторого пространства, так что $u = [u_1, \ldots, u_N]$, $v = [v_1, \ldots, v_N]$. Введем лексикографическое неравенство $u \overset{(l)}{\leqslant} v$ условием $u_1 \leqslant v_1$. При этом, если $u_1 = v_1$, то $u_2 \leqslant v_2$; если $u_2 = v_2$, то $u_3 \leqslant v_3$ и т.д. Пусть Q – некоторое множество из E_N. Элемент $\bar{v} \in Q$ назовем *l-максимальным (лексикографически максимальным)*, если из того, что $u \overset{(l)}{\geqslant} \tilde{v}$, следует $u = \tilde{v}$.

Предположим теперь, что показатели $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ упорядочены по важности и индексы этих функций фиксируют этот порядок.

Обозначив через M множество решений системы (6.1), рассмотрим задачу лексикографической оптимизации:

$$\max_l \{[f_0(x), \ldots, f_s(x)] \mid x \in M\}. \tag{6.2}$$

Задачу (6.2) следует понимать как задачу отыскания l-максимального элемента $\tilde{v}$ во множестве

$$V = \{[v_0, v_1, \ldots, v_s] \mid v_j \leqslant f_j(x) \ (j = 0, \ldots, s), \ x \in M\}$$

и того элемента $\tilde{x} \in M$, для которого выполняются равенства $f_j(\tilde{x}) = \tilde{v}_j$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$. Задача (6.2) может решаться следующим образом:

0) отыскиваем $\tilde{v}_0 = \max\{f_0(x) \mid x \in M\}$;

1) затем находим $\tilde{v}_1 = \max\{f_1(x) \mid f_0(x) \geqslant \tilde{v}_0, \ x \in M\}$;

. . . .

s) наконец, вычисляем $\tilde{v}_s = \max\{f_s(x) \mid f_i(x) \geqslant \tilde{v}_i \ (i = 0, 1, \ldots, s-1), x \in M\}$.

Вектор $\tilde{v} = [\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_s]$ будет искомым. Элемент $\tilde{x}$ ищется из системы неравенств

$$f_j(x) \geqslant \tilde{v}_j, \quad j = 0, 1, \ldots, s, \quad x \in M.$$

6.2. Модель оптимизации по Парето (см., например, [19]). Будем исходить теперь из того, что один показатель $f_0(x)$ выделенный, а $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ дополнительные, причем они не упорядочены по важности. Оставив пока в стороне вопрос о максимизации показателя $f_0(x)$, рассмотрим задачу максимизации показателей $\{f_j(x)\}_{j=1}^{s}$ по Парето.

Точку $\bar{v} \in Q \subset E_N$ называют *максимальной точкой Парето* в Q (*π-максимальной*), если из $v \geqslant \bar{v}$, $v \in Q$, следует $v = \bar{v}$.

Если Q – выпуклое полиэдральное множество, то множество всех π-максимальных точек в нем получаются путем объединения множеств $\operatorname{Arg\,max}\{(v, x) \mid x \in Q\}$ при $v > 0$, т.е. оно равно

$$\bigcup_{v=0} \operatorname{Arg\,max}\{(v, x) \mid x \in Q\} \ (=: Q_\pi).$$

На самом деле существует конечное число векторов $v^i > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ таких, что

$$Q_\pi = \bigcup_{v^i > 0} \operatorname{Arg\,max}\{(v^i, x) \mid x \in Q\}.$$

Пусть теперь M – выпуклое допустимое множество в задаче многокритериальной оптимизации с критериями $f_1(x), \ldots, f_s(x)$, каждому из которых желательно придать как можно большее значение.

Точка $\tilde{x} \in M$ называется *оптимальной по Парето относительно критериев* $f_1(x), \ldots, f_s(x)$, если из $\bar{x} \in M$ и $f_i(\bar{x}) \geqslant f_i(\tilde{x})$ $(i = 1, \ldots, s)$ следует

$f_i(\tilde{x}) = f_i(\bar{x})$. Задачу поиска оптимального множества по Парето запишем в виде

$$\max_\pi \{F(x) \mid x \in M\}, \tag{6.3}$$
$$F(x) = [f_1(x), \ldots, f_s(x)].$$

Если $\bar{x} \in \mathrm{Arg}_\pi(6.3)$, то точка $\bar{u} = [f_1(\bar{x}), \ldots, f_s(\bar{x})]$ будет π-максимальной в $U = \{u \mid u \leqslant F(x), \ x \in M\}$.

На основании сказанного выше на случай полиэдральности M и линейности функций $\{f_j(x)\}_1^s$ можно записать равенство

$$\mathrm{Arg}_\pi(6.3) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Arg}\max\{(v^i, F(x)) \mid x \in M\}$$

при некоторых $v^i > 0$.

Взяв любое $\bar{v} > 0$, будем иметь

$$\mathrm{Arg}\max\{(\bar{u}, F(x)) \mid x \in M\} \subset \mathrm{Arg}_\pi(6.3).$$

Таким образом, способ отыскания элементов $\bar{x} \in \mathrm{Arg}_\pi(6.3)$ весьма прост: достаточно взять любые числа $v_j > 0$, составить функцию

$$f(x) := (v, F(x)) = \sum_{j=1}^{s} v_j f_j(x) \tag{6.4}$$

и решить задачу

$$\max\{(v, F(x)) \mid x \in M\}. \tag{6.5}$$

На задачу (6.5) можно смотреть как на параметрическое представление задачи паретовской оптимизации (6.3).

В многокритериальной (векторной) оптимизации применяется один общий прием, суть которого состоит в сведении многокритериальной задачи к задаче с одним критерием $F(f_1(x), \ldots, f_s(x))$; последний тем или иным образом строится по системе исходных критериев $f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_s(x)$. Этот прием именуется *свертыванием* критериев. Функция вида (6.4) – пример свертки. Здесь $\{v_j\}_1^s$ могут играть роль весов важности критериев $\{f_j(x)\}_1^s$.

Можно положить $f(x) = \min\limits_j f_j(x)$. Вид этой функции может быть оправдан следующей содержательной интерпретацией задачи векторной оптимизации. Пусть M – множество ресурсных и технологических возможностей для проектов $x \in M$ некоторой технической конструкции, $\{f_j(x)\}_1^s$ – функции надежности ее узлов (модулей). Надежность конструкции по проекту x определится функцией $f(x) = \min\limits_j f_j(x)$. Задача будет состоять в выборе такого проекта $x \in M$, который бы давал максимум надежности конструкции, т.е.

$$\max_{x \in M} \min_j f_j(x).$$

Свертывание критериев всегда определяется содержательной постановкой многокритериальной задачи и осуществляется на основе конкретных данных о задаче.

Если $\tilde{f}_j := \max\{f_j(x) \mid x \in M\} < +\infty$ $(i = 1, \ldots, s)$, то веса v_j в (6.4) из общих соображений можно выбирать по правилу $v_j = \tilde{f}_j / \sum_{i=1}^{s} \tilde{f}_i$ (в предположении $\tilde{f}_j > 0$).

Если помимо критериев $\{f_j(x)\}_1^s$, не упорядоченных по важности, имеется ведущий критерий $f_0(x)$, то можно поставить задачу

$$\max\{f_0(x) \mid x \in \mathrm{Arg}_\pi\ (6.3)\}, \tag{6.6}$$

ассоциировав с нею задачу

$$\max\{f_0(x) + (v, F(x)) \mid x \in M\}. \tag{6.7}$$

При подходящем $v > 0$ задача (6.7) решает и задачу (6.6), при этом естественным образом могут быть построены интерационные процедуры для (6.6). На каждой итерации с номером t такого процесса решается задача (6.7) при своем $v^t > 0$, а v^t пересчитывается от итерации к итерации [4, 19].

Применительно к линейным ограничениям (6.1) положим $f_{ji}(x) = (c^{ij}, x)$ $(j = 0, 1 \ldots, l)$, $C = [c^1, \ldots, c^l]$ и рассмотрим задачи (6.3) и (6.5) в их линейной постановке. Вектор $[(c^1, x), \ldots, (c^l, x)]^T$ в матричной форме можно записать в виде $C^T x$, его свертку посредством вектора $v > 0$ – в виде $v^T C^T x = x^T C v = (Cv, x)$. Так что задачи (6.3) и (6.5) запишутся в форме

$$\max_\pi \{C^T x \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}, \tag{6.8}$$

$$\max\{(Cv, x) \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}. \tag{6.9}$$

Задача, ассоциированная с (6.9) (по типу (6.6) – (6.7)), запишется в виде

$$\max\{(c^0, x) + (Cv, x) \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}. \tag{6.10}$$

Еще раз подчеркнем (но уже применительно к линейной постановке), что модель (6.10) вбирает в себя задачу поиска максимума выделенного (ведущего) критерия (c^0, x) на паретовском множестве задачи линейной векторной максимизации (6.8).

6.3. Вопросы двойственности в линейной векторной оптимизации. Задача линейной векторной оптимизации (6.8) задается матричным каркасом

$$D = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ A & b \end{bmatrix}.$$

От каркаса D можно перейти к

$$D^* = \begin{bmatrix} b^T & 0 \\ A^T & C \end{bmatrix},$$

определив для него задачу

$$\min\{(b, u) \mid A^T u \geqslant Cv,\ u \geqslant 0\},$$

двойственную к (6.9). Здесь вектор свободных членов Cv можно понимать как положительную свертку набора столбцов c^i $([c^1, \ldots, c^l] = C)$, отвечающую свертке (Cv, x) целевых функций (c^i, x) в исходной задаче (6.8). Но если допустить набор целевых функций и набор векторов свободных членов в исходной постановке, то можно исходить из матричных каркасов

$$K = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ A & B \end{bmatrix}, \qquad K^* = \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ A^T & C \end{bmatrix},$$

определив через них задачи-свертки

$$\max\{(Cv, x) \mid Ax \leqslant Bw, \ x \geqslant 0\}, \tag{6.11}$$

$$\min\{(Bw, u) \mid A^T u \geqslant Cv, \ u \geqslant 0\}, \tag{6.12}$$

где $v > 0$, $w > 0$. Задачи (6.11) и (6.12) являются двойственными в обычном смысле, а потому для них верна теорема двойственности. Однако в данном случае интерпретация оптимальных решений задач (6.11) и (6.12) может быть дана через термины паретовской оптимизации:

$$\operatorname{Arg}(6.11) \subset \operatorname{Arg}\max_\pi\{C^T x \mid Ax \leqslant Bw, \ x \geqslant 0\},$$

$$\operatorname{Arg}(6.12) \subset \operatorname{Arg}\min_\pi\{B^T u \mid A^T u \geqslant Cv, \ u \geqslant 0\}.$$

Если целевые функции правых задач свернуть с помощью положительных векторов v и w соответственно, то и получим задачи (6.11) и (6.12).

Если по аналогии с п. 6.2 выделить критерий (c^0, x) в исходной постановке, а также столбец свободных членов b^0 (помимо $b^1, \ldots, b^k$), то аналогом задачи (6.10) для нашей более общей ситуации будет задача

$$\max\{(c^0, x) + (Cv, x) \mid Ax \leqslant b^0 + Bw, \ x \geqslant 0\}, \tag{6.13}$$

а двойственной –

$$\min\{(b^0, u) + (Bw, u) \mid A^T u \geqslant c^0 + Cv, \ u \geqslant 0\}. \tag{6.14}$$

Этим задачам можно дать широкие интерпретации, увязав их с паретовской оптимизацией.

Содержательный смысл свертки целевых функций $(c^1, x), \ldots, (c^l, x)$ в форме (Cv, x), как уже отмечалось, состоит во включении $\operatorname{Arg}(6.9) \subset \operatorname{Arg}_\pi(6.8)$ при $v > 0$. Что касается свертки Bw правых частей, т.е. свертки набора векторов $b^1, \ldots, b^k$, то такая операция может быть проинтерпретирована по-разному. Например, на Bw можно смотреть как на вектор "смеси" альтернатив $\{b^j\}_1^k$. Или если на выбор столбца b^j смотреть как на выбор чистой стратегии в ресурсном обеспечении производства (в рамках ранее данной экономической интерпретации задачи ЛП), то при $w \in S_w = \{w \geqslant 0 \mid \sum_{j=1}^{k} w_j = 1\}$ (симплекс) вектор Bw реализует смешанную стратегию выбора вектора ресурсов: $Bw = \sum_{j=1}^{k} w_j b^j$. Можно и вектор v выбирать из симплекса $S_v = \{v \geqslant 0 \mid \sum_{i=1}^{l} v_i = 1\}$, придав (Cv, x) смысл критерия, реализующего смешанную стратегию применения критериев $(c^1, x), \ldots, (c^l, x)$: $(Cv, x) = \sum_{i=1}^{l} v_i (c^i, x)$. Тогда реализуется игра двух лиц с нулевой суммой: первый игрок выбирает смешанную стратегию $v \in S_v$ формирования целевой функции (Cv, x), а второй – смешанную стратегию $w \in S_w$ формирования вектора ресурсного обеспечения Bw.

Платежной же функцией является функция оптимума $\tilde{f}(v, w)$ задачи (6.11) или (6.12), двойственной к первой, что одно и то же.

Функция $\tilde{f}(v, w)$ формирует игровую задачу выбора оптимальных стратегий $\tilde{v} \in S_v$ и $\tilde{w} \in S_w$ в силу постановок

$$\max_{v \in S_v} \min_{w \in S_w} \tilde{f}(v, w), \qquad \min_{w \in S_w} \max_{v \in S_v} \tilde{f}(v, w),$$

реализующих принцип гарантированного результата (см. § 4). Для них можно предположить разные варианты итерационных процессов типа метода Брауна – Робинсон [10].

Заметим, что в (6.13) целевая функция (c^0, x) и столбец b^0 "выделены", т.е. в общей свертке они взяты с коэффициентами 1; в (6.14) этому соответствуют единичные коэффициенты перед функцией (b^0, u) и столбцом c^0.

По поводу паретовской оптимизации сделаем такое замечание. Критерием оптимальности по Парето не следует обольщаться. Поясним это на примере. Пусть некоторый ресурс в количестве $a > 0$ распределяется между n участниками. Долю каждого из них обозначим через x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Величины $x_i \geqslant 0$ связаны балансовым соотношением $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$. Напрашивается модель

$$\max_\pi \{[x_1, \ldots, x_n] \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha, \quad x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\},$$

в которой x_i – критерий i-го участника, т.е. его доля в распределении ресурса, причем i-й участник заинтересован в ее максимизации. В этой задаче любой допустимый вектор $[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n]$ будет π-максимальным, ибо при любом перераспределении нельзя увеличить долю какого-либо участника, не уменьшив доли другого. Взяв, например, $\bar{x}_1 = a$, $\bar{x}_i = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$, мы получим распределение, оптимальное по Парето. И вообще при фиксированных ресурсах любое полное их распределение является оптимальным по Парето (в модели распределения ресурсов). В этой ситуации определяющим обстоятельством является выбор ведущего критерия $f_0(x)$.

ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящей главе будут рассмотрены модели линейного программирования, которые не обладают свойством разрешимости. В частности, это такие, системы ограничений которых несовместна (противоречива), т.е. не обладает решениями. Неразрешимые задачи линейного программирования называются *несобственными*.

§ 7. Классификация несобственных задач линейного программирования

Запишем задачу ЛП, например, в виде

$$L:\ \max\{(c,x)\mid\ Ax\leqslant b,\ \ x\geqslant 0\}\ \ (=:\tilde{f}). \tag{7.1}$$

Двойственной к ней является задача

$$L^*:\ \min\{(b,u)\mid\ A^{\mathrm{T}}u\geqslant c,\ \ u\geqslant 0\}\ \ (=:\tilde{f}^*) \tag{7.2}$$

(см. § 3). Как и ранее, допустимые множества задач (7.1) и (7.2) обозначим через M и M^* соответственно. Как отмечалось в § 3, разрешимости задачи (7.1), как и задачи (7.2), соответствует свойство $M\neq\phi, M^*\neq\phi$.

Последнее обстоятельство позволяет противоречивость (неразрешимость) задачи L непосредственно связать с противоречивостью (неразрешимостью) системы (3.12), определяющей симметрическую задачу S. Связь между задачами L, L^* и задачей S дается теоремой 3.3. Так как противоречивость системы (3.12), т.е. системы

$$Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0;\ \ A^Tu\geqslant c,\ u\geqslant 0;$$

$$(c,x)\geqslant(b,u),$$

эквивалентна противоречивости ее подсистемы $Ax\leqslant b,\ \ x\geqslant 0;\ A^Tu\geqslant c,$ $u\geqslant 0$, т.е. противоречивости хотя бы одной из подсистем $Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0$ или $A^Tu\geqslant c,\ u\geqslant 0$ (вытекает из теоремы двойственности 3.2), то классификацию несобственных задач ЛП можно провести в зависимости от пустоты или непустоты допустимых множеств M и M^* задач L и L^*. Здесь возможны три альтернативы:

1) $M=\phi,\qquad M^*\neq\phi;$

2) $M\neq\phi,\qquad M^*=\phi;$

3) $M=\phi,\qquad M^*=\phi.$

Задача ЛП называется *несобственной* *1-го, 2-го* или *3-го рода* в зависимости от выполнимости соответственно 1-й, 2-й или 3-й альтернативы. Для несобственной задачи линейного программирования примем сокращение НЗ ЛП.

Из свойства взаимности для двойственной пары задач линейного программирования L и L^* следует, что:

если L – НЗ ЛП 1-го рода, то L^* – НЗ ЛП 2-го рода;
если L – НЗ ЛП 2-го рода, то L^* – НЗ ЛП 1-го рода;
если L – НЗ ЛП 3-го рода, то L^* – также НЗ ЛП 3-го рода.

Дадим характеризацию каждой из альтернатив 1–3.

Альтернатива 1 означает, что как только при некотором приращении $\Delta b \in E_m$ вектора b система неравенств

$$Ax \leqslant b + \Delta b, \; x \geqslant 0 \tag{7.3}$$

становится совместной, задача

$$\max\{(c, x) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \;\; x \geqslant 0\} \tag{7.4}$$

разрешима. Действительно, из совместности системы (7.3) и условия $M^* \neq \phi$ следует разрешимость пары взаимно двойственных задач – (7.4) и

$$\min\{(b + \Delta b, u) \mid \; A^T u \geqslant c, \; u \geqslant 0\}. \tag{7.5}$$

Обратно, если при некотором Δb задача (7.4) разрешима, то по теореме двойственности 3.2 задача (7.5) также разрешима, а потому $M^* = \{u \geqslant 0 \mid \; A^T u \geqslant c\} \neq \phi$.

Альтернатива 2 ($M \neq \phi$, $M^* = \phi$) означает, что оптимальное значение $\tilde{f}$ задачи (7.1) равно $+\infty$.

Наконец, альтернатива 3 ($M = \phi$, $M^* = \phi$) эквивалентна тому, что при любом приращении Δb, обеспечивающем разрешимость системы (7.3), т.е. системы ограничений задачи (7.4), оптимальное значение последней равно $+\infty$.

На рис. 5 – 7 иллюстрируются ситуации несобственности 1-го, 2-го и 3-го рода соответственно.

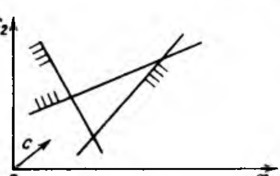

Рис. 5

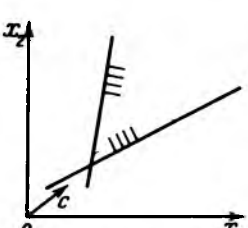

Рис. 6

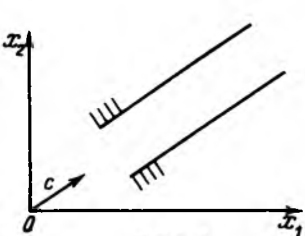

Рис. 7

Как уже отмечалось, ситуация, когда система ограничений в модели линейного программирования, поставленной в соответствие реальной экономической задаче, несовместна, является довольно обычной. Если, например, рассмотреть модель (2.2), в которой A – технологическая матрица, b – вектор ресурсов, (c, x) – доход, x^0 – директивное задание на производство продукции, то несовместность системы

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant x^0 (\geqslant 0)$$

в задаче (2.2) может произойти за счет завышенного плана x^0, что проявляется в недостаточности ресурсов для его выполнения. Формально это характеризуется тем, что вектор x^0 не удовлетворяет системе неравенств $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$. Проиллюстрируем это на рис. 8.

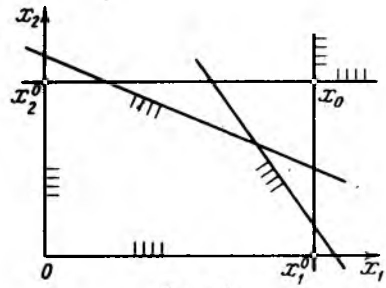

Рис. 8

В модели (2.4) несовместность системы

$$Ax \leqslant b, \quad Px \geqslant d, \quad x \geqslant 0$$

может быть следствием того, что завышен план d по отношению к вектору ресурсов b или занижены лимиты ресурсов по отношению к плану d.

Моделирование практических задач порождает в основном несобственные задачи ЛП 1-го рода.

Приведем некоторые достаточные условия для альтернатив, определяющих несобственность того или иного рода задачи ЛП, записанной в форме

$$\max \{ (c, x) \mid Ax \leqslant b \}, \tag{7.6}$$

т.е. в форме, явно не выделяющей условие $x \geqslant 0$ – условие неотрицательности переменных x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Двойственной к (7.6) будет

$$\min \{ (b, u) \mid A^T u = c, \quad u \geqslant 0 \}. \tag{7.7}$$

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix},$$

т.е. $\{a_j\}_1^m$ – строки матрицы A.

Теорема 7.1. 1. *Если система векторов* $\{a_j\}_1^m$ *всесторонняя, то* (7.6) *либо разрешима, либо НЗ* 1*-го рода.*

2. *Если система векторов* $\{a_j\}_1^m$ *невсесторонняя, т.е. система неравенств* $(a_j, x) < 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ *совместна* (*см.* § 1) *и* $c \in \operatorname{cone} \{a_j\}_1^m$, *то* (7.6) *либо разрешима, либо НЗ* 2*-го рода. Если же* $c \notin \operatorname{cone} \{a_j\}_1^m$, *то* (7.6) *либо разрешима, либо НЗ* 3*-го рода.*

Действительно, если приращение Δb таково, что система $Ax \leqslant b + \Delta b$ совместна, то в силу всесторонности векторов $\{a_j\}_1^m$ ее многогранник $M(\Delta b)$ ограничен (см. теорему 1.6), что дает разрешимость задачи

$$\max\{(c,x) \mid Ax \leqslant b + \Delta b\}, \tag{7.8}$$

а потому и двойственной к ней задачи

$$\min\{(b + \Delta b, u) \mid A^T u = c,\ u \geqslant 0\}.$$

Следовательно, $M^* = \{u \geqslant 0 \mid A^T u = c\} \neq \phi$, т.е. (7.6) – НЗ ЛП 1-го рода.

Докажем п. 2 теоремы. Если (7.3) неразрешима и $c \in \text{cone}\{a_j\}_1^m$, т.е. $c = \sum_{j=1} \bar{u}_j a_j$ при некотором $\bar{u}^T = [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n] \geqslant 0$, то $M^* = \{u \geqslant 0 \mid A^T u = c\} \neq \phi$, что и соответствует несобственности 2-го рода для задачи (7.6).

Заключительная часть теоремы после этого становится тривиальной.

К доказанной теореме сделаем такое примечание. При всесторонности векторов $\{a_j\}_1^m$ обеспечивается разрешимость задачи (7.8) при любой целевой функции (c, x) и $M(\Delta b) \neq \phi$, что определяет при $M = \phi$ свойство для задачи (7.6) быть несобственной 1-го рода. Но если обеспечивать это свойство не для любых c, а для данного c, то можно условие всесторонности векторов $\{a_j\}_1^m$ ослабить до условия всесторонности векторов $\{-c, a_j\}_1^m$, что обеспечивает ограниченность многогранника, задаваемого системой

$$\begin{aligned} &Ax \leqslant b + \Delta b, \\ &(c, x) \geqslant \alpha. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Здесь α таково, что обеспечивает совместность системы (7.9) (рис. 9).

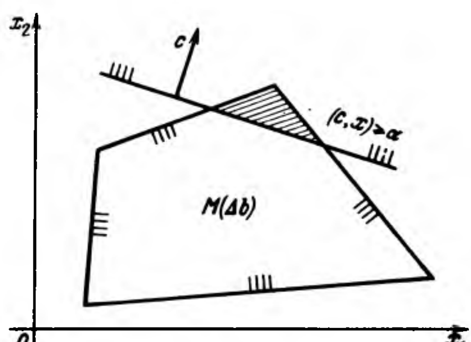

Рис. 9

Условие ограниченности многогранника системы (7.9) (или всесторонности векторов $\{-c, a_j\}_1^m$) назовем *θ-условием* для задачи (7.6). θ-условие является достаточным для разрешимости задачи

$$\max\{(c,x) \mid (7.9)\}. \tag{7.10}$$

Но так как, очевидно,

$$\text{Argmax}\,\{(c,x) \mid x \in M(\Delta b)\} = \text{Arg}\,(7.10) \neq \phi,$$

то при $M = \phi$, $M(\Delta b) \neq \phi$ мы и получаем разрешимость задачи $\max\{(c,x) \mid x \in M(\Delta b)\}$, что дает для (7.6) несобственность 1-го рода.

Если исходную задачу линейного программирования рассматривать в первоначальном виде (7.1), то для нее θ-условие будет условием всесторонности системы векторов $\{-c, a_j, -e_i\}_{j,i=1}^{m,n}$, где $e_i = [0, \ldots, 0, 1^i, 0, \ldots, 0] \in \in E_n$. θ-условием для задачи (7.2) – двойственной к (7.1) – будет условие всесторонности системы векторов $\{b, -p_i, -e_j^*\}_{i,j=1}^{n,m}$, где $\{p_i\}_1^n$ – колонки матрицы A, $\{e_j^*\}_1^m$ – единичные орты пространства E_m. При θ-условии для (7.2) и $M^* = \phi$ задача (7.1) будет несобственной 1-го рода. Если (7.1) – несобственная задача 3-го рода, то θ-условие не выполняется как для (7.1), так и для (7.2).

§ 8. Содержательная интерпретация несобственных задач линейного программирования

Частично мы уже коснулись этого вопроса в предыдущем параграфе: мы указали, что неразрешимость конкретной задачи может быть вызвана либо завышенным плановым заданием, либо недостатком ресурсов для выполнения плана (это по существу одно и то же, но в разном прочтении).

Так как любой план может быть выполнен, если он ресурсно обеспечен, то охарактеризованный тип неразрешимости задачи линейного программирования мы назовем неразрешимостью по дефициту ресурсов.

Строго говоря, сказанное относится к несобственным задачам 1-го рода. Но практические задачи производственного планирования, как правило, и являются таковыми (в случае их неразрешимости).

Причина несовместности системы ограничений в задаче (7.1) может лежать просто в факте неточности задания вектора b (почти все экономические показатели носят приближенный характер). Далее мы проследим смысл каждого из видов несобственности для задач ЛП с точки зрения возможности их возникновения из-за неточности задания исходных данных.

Ниже на задачу (7.1) мы будем смотреть как на стандартную запись произвольной задачи ЛП, в силу чего информационному вектору $s = [c, b, A]$ не будем приписывать прежнюю интерпретацию (т.е. c – вектор цен, b – вектор ресурсов, A – технологическая матрица); следовательно, знаки координат вектора s могут быть любыми.

Обычно для того или иного показателя L можно лишь указать отрезок $[\underline{L}, \overline{L}]$, в котором он лежит, в редких случаях – приближенное задание закона его распределения на указанном отрезке. Поэтому, если $\underline{b}$ и $\overline{b}$ – возможные границы для значения вектора b, определяющие неточность его задания, то важно выяснить, является ли система

$$Ax \leqslant y, \quad \underline{b} \leqslant y \leqslant \overline{b}, \quad x \geqslant 0$$

совместной. Если она совместна относительно x при некотором $\overline{y} \in [\underline{b}, \overline{b}]$, то система ограничений в задаче (7.1) с полным основанием может быть заменена на равноценную:

$$Ax \leqslant \overline{y}, \quad x \geqslant 0,$$

а сама задача (7.1) – на задачу

$$\max\{(c, x) \mid Ax \leqslant \overline{y}, \quad x \geqslant 0\}.$$

Последняя является разрешимой, если (7.1) – НЗ ЛП 1-го рода.

Рассмотрение смысла НЗ ЛП 2-го рода мы свяжем с понятием устойчивости задачи ЛП по той или иной подсистеме ее исходных данных. Полной системой исходных данных задачи (7.1) является множество

$$I = \{ \{ a_{ji} \}_{j,i=1}^{m,n}, \quad \{b_j\}_{j=1}^{m}, \quad \{c_i\}_{i=1}^{n} \}.$$

Пусть I_0 – некоторое подмножество множества показателей I. Задачу (7.1) назовем *I_0-устойчивой*, если малые изменения (вариации) показателей из I_0 оставляют ее разрешимой, а оптимальное значение задачи непрерывно зависит от этих изменений (т.е. малым вариациям показателей из I_0 соответствует малое изменение оптимального значения).

Это соответствует $\tilde{f}$-устойчивости [6, с. 129] при $y = I$, т.е. вектор-параметр y в определении $\tilde{f}$-устойчивости формируется из показателей, входящих в I.

Если $I_0 = \{c_1, \ldots, c_n\}$, то будем говорить о *с-устойчивости*. Известно, что задача (7.1) c-устойчива тогда и только тогда, когда ее оптимальное множество M не пусто и ограничено. Если оно не ограничено, то существуют сколь угодно малые (по норме) вариации Δc вектора c, при которых

$$\sup \{ (c + \Delta c, x) \mid Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0 \} = +\infty. \tag{8.1}$$

Сказанное показывает, что если задача L (пусть в форме (7.1)) в своем точном задании разрешима, но не c-устойчива, то приближенное задание вектора c в виде $\bar{c} = c + \Delta c$ может привести к ситуации (8.1), т.е. к несобственной задаче 2-го рода. Следовательно, если мы имеем дело с реально заданной задачей

$$\sup \{ (\bar{c}, x) \mid Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0 \}, \tag{8.2}$$

оптимум которой равен $+\infty$, то возникает вопрос: не есть ли это результат неточного задания вектора $\bar{c}$? Рассмотрим минимальную по норме вариацию Δc, обеспечивающую разрешимость задачи

$$\max \{ (c, x) \mid Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0 \}, \tag{8.3}$$

где $c = \bar{c} - \Delta c$ (выбор такого Δc всегда возможен путем решения задачи $\min \{ \| \Delta c \|^2 \mid A^T u \geqslant \bar{c} - \Delta c, u \geqslant 0 \}$. Если приращение Δc укладывается в рамки погрешностей задания вектора $\bar{c}$, то модель (8.3) может рассматриваться как результат коррекции задачи (8.2) по неточности данных о векторе $\bar{c}$. Задача (8.2) с достаточным основанием может быть заменена на (8.3), которая, будучи неустойчивой, требует специальных приемов ее решения – методов регуляризации. В соответствии с одним из них решение задачи (8.3) заменяют решением регуляризованной (по Тихонову) задачи

$$\max \{ (c, x) - \alpha \| x \|^2 \mid Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0 \},$$

где α – достаточно малое положительное число [21].

Наконец, если следовать предыдущему анализу, то случай несобственной задачи 3-го рода может интерпретироваться как результат неточного задания векторов b и c. Если Δc и Δb лежат в пределах их неточности и обеспечивают разрешимость задачи

$$\max \{ (c - \Delta c, x) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad x \geqslant 0 \}, \tag{8.4}$$

то задачу (7.1) можно заменить на (8.4). Коррекция задачи (7.1) в форме (8.4) интересна тем, что она двойственно симметрична: если подвергнуть аналогичной коррекции двойственную к (7.1) задачу (7.2), то получим

$$\min \{(b + \Delta b, u) \mid A^T u \geqslant c - \Delta c, \quad u \geqslant 0\}; \tag{8.5}$$

последняя является двойственной к (8.4).

К анализу задач (8.4) и (8.5) мы вернемся в следующем параграфе.

Сказанное выше о неточном задании той или иной информации о задаче как причине ее несобственности можно распространить на систему всех показателей $I = [\underline{s}, \overline{s}]$, где $\underline{s} = [\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}]$, $\overline{s} = [\overline{A}, \overline{b}, \overline{c}]$. Множество I здесь выступает как параллелепипед, задающий все возможные состояния информационного вектора $s = [A, b, c]$, поставленного в соответствие модели (7.1). В этом случае может быть поставлена задача о выявлении совместности более сложной системы неравенств:

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b, \quad \underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A}, \quad \underline{b} \leqslant b \leqslant \overline{b}, \\ \underline{c} \leqslant c \leqslant \overline{c}, \quad x \geqslant 0 \end{gathered} \tag{8.6}$$

и разрешимости задачи

$$\max \{(\tilde{c}, x) \mid \tilde{A} x \leqslant \tilde{b}, \quad x \geqslant 0\} \ (=: \tilde{f}(\tilde{s})), \tag{8.7}$$

где вектор $\tilde{s} = [\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}] \in I$ обеспечивает совместность системы ограничений в задаче (8.7) при $s = \tilde{s}$. Если задача (8.7) сформирована, то она может служить объективно равноценной заменой для (7.1) независимо от того, являлась ли задача (7.1) собственной или несобственной. Следовательно, задачи (8.7) как параметрический класс задач относительно $\tilde{s} \in I$ могут считаться информационно эквивалентными в том смысле, что они не упорядочены по информационной предпочтительности, хотя их случайные реализации и не дают равномерного распределения для тех или иных производных от (8.7) характеристик (например, оптимального значения) в соответствующих областях значений этих характеристик. Последние же, естественно, уже могут быть положены в основу того или иного упорядочения множества разрешимых задач (8.7), например упорядочения по значению функции оптимума $\tilde{f}(\tilde{s})$.

§ 9. Методы коррекции несобственных задач оптимизации (предварительные замечания)

Методы преодоления несобственности задач оптимизации, в частности задач линейного программирования, разнообразны. Некоторые из них навеяны общими соображениями, некоторые же подсказаны практикой анализа конкретных прикладных задач.

Ниже термины "методы коррекции" и "методы аппроксимации" будем понимать в одинаковом смысле.

Один из общих подходов к аппроксимации несобственных задач состоит в их параметризации.

Пусть

$$C\colon \ \sup\{f_0(x) \mid f_j(x) \leqslant 0 \ \ (j = 1, \ldots, m), \ \ x \geqslant 0\} \tag{9.1}$$

– задача математического программирования (т.е. $f_0(x), \ldots, f_m(x)$ –

произвольные функции). Включим тем или иным образом задачу C в класс параметрических по параметру $y \in U$ задач $C(y)$, так что при некотором $y = y_0 \in Y$ $C(y_0) \equiv C$. Если σ – то или иное важное свойство задачи (например, разрешимость), то, образовав множество

$$Y_\sigma = \{y \in Y \mid C(y) \text{ обладает свойством } \sigma\},$$

можно выбирать из него наилучший элемент в том или ином смысле, т.е. наилучший в силу некоторого критерия оптимальности $\varphi(y)$, определяющего степень качества коррекции (аппроксимации). Возникает задача

$$\min\{\varphi(y) \mid y \in Y_\sigma\}. \tag{9.2}$$

Например, взяв $y = [\Delta c, \Delta b] \in E_{n+m}$, от задачи (9.1) можно перейти к

$$\sup\{f_0(x) - (\Delta c, x) \mid f_j(x) \leqslant b_j \ \ (j = 1, \dots, m), \ \ x \geqslant 0\}. \tag{9.3}$$

Положив

$$Y_\Delta = \{[\Delta c, \Delta b] \geqslant 0 \mid \sup_{x \geqslant 0} \inf_{u \geqslant 0} F(x, u, y) =$$

$$= \inf_{u \geqslant 0} \sup_{x \geqslant 0} F(x, u, y)\},$$

где $F(x, u, y) = f_0(x) - (\Delta c, x) + \sum_{j=1}^{m} u_j [f_j(x) - \Delta b_j]$, $\varphi(y) = \|\Delta c\|^2 + \|\Delta b\|^2$, получим задачу коррекции в форме

$$\min\{\|\Delta c\|^2 + \|\Delta b\|^2 \mid y = [\Delta c, \Delta b] \in Y_\Delta\}$$

по критерию минимального исправления целевой функции $f_0(x)$ (с помощью линейной добавки) и вектора правых частей ограничений.

Если взять задачу ЛП (2.1), то, положив $y = [\Delta c, \Delta b, H]$, можно ее параметризовать в форме

$$\max\{(c - \Delta c, x) \mid (A + H)x \leqslant b + \Delta b, \ \ x \geqslant 0\} \tag{9.4}$$

и искать наименьший по норме вектор $[\Delta c, \Delta b, H]$, обеспечивающий разрешимость задачи (9.4). Для случая $y = [\Delta c, \Delta b]$ это согласуется с постановкой задачи коррекции в предыдущем примере.

Другой подход состоит в том, что часть неравенств в противоречивой системе ограничений учитывается посредством включения их в преобразованную целевую функцию (по типу метода штрафных функций) так, что оставшаяся часть ограничений становится совместной. Пусть, например, в задаче (9.1) подсистема $f_j(x) \leqslant 0$ $(j \in J')$, $x \geqslant 0$ совместна и $J = \{1, \dots, m\} \setminus J'$. Положим для определенности $J = \{1, \dots, m_0\}$. Задаче (9.1) можно поставить в соответствие задачу

$$\sup\{f_0(x) - r\psi(R_1 f_1^+(x), \dots, R_{m_0} f_{m_0}^+(x)) \mid f_j(x) \leqslant 0$$
$$(j \in J'), \quad x \geqslant 0\},$$

где $\psi(t_1, \dots, t_{m_0})$ – неотрицательная на $E_{m_0}^+$ монотонная функция, $\psi(0) = 0$, $R_j > 0$ $(j = 1, \dots, m_0)$, $r > 0$. При определенных условиях эта задача выступает в роли аппроксимирующей для (9.1), например в смысле эквивалентности ее задаче максимизации функции $f_0(x)$ на множестве

$$\operatorname{Arg\,min}\{\varphi(x) \mid f_j(x) \leqslant 0 \quad (j \in J'), \quad x \geqslant 0\},$$

где $\varphi(x)$ – тем или иным образом построенная функция невязки подсистемы $f_j(x) \leqslant 0$ $(j \in J)$ на $M = \{x \geqslant 0 \mid f_j(x) \leqslant 0 \ (j \in J')\}$. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(\cdot)$ могут взаимоотноситься, например, так: $\varphi(\cdot) = r\psi(\cdot)$. Точные результаты будут сформулированы в связи с двойственностью для несобственных задач линейного программирования (гл. III).

§ 10. Содержательный смысл некоторых методов коррекции

В данном параграфе обсуждается только содержательный аспект некоторых типов коррекции задач линейного программирования, записанных в той или иной форме.

Рассмотрим задачу ЛП

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b, Bx \leqslant d, x \geqslant 0\}, \tag{10.1}$$

в которой A, b и c будут интерпретироваться традиционно, т.е. b – вектор ресурсов, c – вектор цен, A – технологическая матрица. Подсистему $Bx \leqslant d$, $x \geqslant 0$, включающую требования к плану x, будем предполагать совместной. В случае несовместности системы ограничений задачи (10.1) последнюю можно заменить на

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad x \in Q\}, \tag{10.2}$$

где $Q = \{x \geqslant 0 \mid Bx \leqslant d\}$, Δb – приращение ресурсов b, обеспечивающее совместность системы ограничений в (10.2). Аппроксимацию системы можно подчинить (см. § 9) задаче

$$\min \{(r, \Delta b) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \ x \in Q, \quad \Delta b \geqslant 0\}. \tag{10.3}$$

Смысл такой аппроксимации прост: если $r = [r_1, \ldots, r_m] > 0$ и r_j понимать как потерю в доходе за счет приобретения дополнительной единицы j-го ресурса, то необходимо закупку недостающих ресурсов Δb осуществить так, чтобы обеспечить совместность системы ограничений (10.3) при минимальных затратах на приобретение дополнительных ресурсов Δb.

Отметим, что тип коррекции в форме (10.3) справедлив в предположении, что (10.1) – НЗ ЛП 1-го рода.

В приведенной интерпретации мы исходили из предположения, что допустимо любое приращение Δb ресурсов. Однако естественней предположить, что структура возможных $\Delta b \geqslant 0$ предопределена (или исчислена на основе анализа реальных возможностей приобретения дополнительных ресурсов), т.е. $\Delta b = t\overline{\Delta b}$, где $\overline{\Delta b} \geqslant 0$ – вектор, задающий структуру приращения, а $t \geqslant 0$ – неотрицательное число, задающее меру (интенсивность) такого приращения. В этом случае задача (10.3) заменится на

$$\min \{t(r, \overline{\Delta b}) \mid Ax \leqslant b + t\overline{\Delta b}, \ x \in Q, \quad t \geqslant 0\}. \tag{10.4}$$

Если, например, $\overline{\Delta b_1} = 0$, т.е. первая координата вектора $\overline{\Delta b}$ равна нулю, то $\Delta b_1 = t\,\overline{\Delta b_1} = 0$ при любом $t \geqslant 0$. Это означает, что дополнительное приобретение 1-го ресурса невозможно (последнее может иметь место в условиях острого дефицита на этот ресурс). Словом, заданием вектора-структуры можно учесть реальные возможности приобретения дополнительных количеств необходимых ресурсов. В моделях перспективного развития производства рост потребления ресурсов по периодам также естественно задавать векторами структур $\Delta b(t)$ $(t = 1, \ldots, T)$, пропорции которых определяются наличным состоянием производства и прогнозом обновления технологий по периодам (плюс, разумеется, прогнозом состояния экономики в целом, в частности ее добывающих отраслей).

Соединение коррекции задачи (10.1) в форме (10.4) с самой задачей по методу штрафных функций порождает задачу

$$\max \{(c, x) - r_0(r, \overline{\Delta b})t \mid Ax \leqslant b + t\overline{\Delta b}, \quad x \in Q, \quad t \geqslant 0\}.$$

При достаточно большом $r_0 > 0$ эта задача дает оптимальный вектор $[\tilde{x}, \tilde{t}]$, где $\tilde{t}$ – оптимальный (минимальный) параметр в задаче аппроксимации (10.4) и $x \in \operatorname{Arg}$ (10.2) при $\Delta b = \tilde{t}\overline{\Delta b}$.

Можно исходить из того, что множество вариаций ресурсов задается своей системой линейных ограничений, порождающих множество $N \subset E_m$; тогда $\Delta b \in N$. Это может иметь место при той или иной взаимозаменяемости ресурсов. Тогда вместо задачи (10.2) следует записать

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad x \in Q, \quad \Delta b \in N\}.$$

Оптимизацию же параметра Δb в этой задаче можно проводить по изложенной схеме.

Рассмотрим далее модель (2.4):

$$\min \{(c, x) \mid Ax \leqslant b, \quad Px \geqslant d, \quad x \geqslant 0\}, \tag{10.5}$$

с ее содержательным смыслом, изложенным в §2. В соответствии с этим смыслом b – вектор ресурсов, d – директивный план производства продукции, x – вектор интенсивностей использования технологических процессов, (c, x) – трудовые затраты. Система ограничений в (10.5) может оказаться несовместной; при этом на причины несовместности можно посмотреть двояко: либо не хватает ресурсов b для выполнения плана d, либо завышен план d по отношению к ресурсным возможностям b. Если (10.5) – несобственная задача ЛП 1-го рода, то ее аппроксимацию можно осуществить за счет оптимальной коррекции системы ограничений, не изменяя вектор c. Такого рода коррекции модели (10.5) мы и рассмотрим.

В нашей интерпретации задачи (10.5) весь информационный массив неотрицателен, т.е. $A \geqslant 0$, $P \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $d \geqslant 0$. Каждая из подсистем $Ax \leqslant b$, $Px \geqslant d$ допускает решение $x \geqslant 0$, а взятые вместе, они могут образовывать несовместную систему; в этом случае и требуется коррекция. Выпишем три вида такой коррекции:

$$\min \{(r, \Delta b) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad Px \geqslant d, \quad [x, \Delta b] \geqslant 0\}, \tag{10.6}$$

$$\min \{(R, \Delta d) \mid Ax \leqslant b, \quad Px \geqslant d - \Delta d, \quad [x, \Delta d] \geqslant 0\}, \tag{10.7}$$

$$\min \{(r, \Delta b) + (R, \Delta d) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad Px \geqslant d - \Delta d,$$
$$[x, \Delta b, \Delta d] \geqslant 0\}; \tag{10.8}$$

здесь $r > 0$, $R = [R_1, \ldots, R_n] > 0$.

Смысл коррекции (10.6), т.е. коррекции по ресурсам, был уже объяснен. Интерпретация коррекции в форме (10.7) связана с изменением плана d за счет уменьшения его на $\Delta d \geqslant 0$, но так, чтобы обеспечить при этом минимальные издержки (например, трудовые), выражаемые величиной $(R, \Delta d) = \sum_{i=1}^{n} R_i \Delta d_i$. Показатель R_i в этом случае можно понимать как меру труда, необходимую для реализации i-й плановой позиции (i-го вида продукта), увеличенной на 1, т.е. $d_i + 1$.

Аппроксимация в форме (10.8) предполагает коррекцию и ресурсов b, и плана d.

Параметризация задачи (10.5) отмеченных типов (10.6) – (10.8) и их оптимизация по параметру запишутся в таком виде:

$$\min \{(c, x) + r_0(r, \Delta b) \mid Ax \leqslant b + \Delta b,$$

$$Px \geqslant d, \quad [x, \Delta b] \geqslant 0\},$$

$$\min \{(c, x) + r_0(R, \Delta d) \mid Ax \leqslant b,$$

$$Px \geqslant d - \Delta d, \quad [x, \Delta d] \geqslant 0\},$$

$$\min \{(c, x) + r_0 [(r, \Delta b) + (R, \Delta d)] \mid$$

$$Ax \leqslant b + \Delta b, Px \geqslant d - \Delta d, \quad [x, \Delta b, \Delta d] \geqslant 0\},$$

где r_0 – достаточно большое положительное число. Обратим внимание на то, что и здесь приращения Δb и Δd можно было бы искать в виде $\Delta b = t\overline{\Delta b}$, $\Delta d = t\overline{\Delta d}$, где $\overline{\Delta b} \geqslant 0$, $\overline{\Delta d} \geqslant 0$ – фиксированные векторы, t – неотрицательный параметр.

Запишем задачу

$$\max \{(c, x) \mid A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0, \quad A_1 x \leqslant b^1\}, \tag{10.9}$$

в которой зафиксировано разбиение системы ограничений на две подсистемы $A_0 x \leqslant b^0$, $x \geqslant 0$ и $A_1 x \leqslant b^1$. Такое разбиение можно интерпретировать следующим образом: ограничения подсистемы $A_0 x \leqslant b^0$ *директивные* (обязательные), а $A_1 x \leqslant b^1$ *факультативные* (желательные, но не обязательные). Следовательно, в этом случае ограничения ранжированы по их важности. Нарушения ограничений подсистемы $A_1 x \leqslant b^1$ допускаются, но они должны быть минимальными. Такую постановку можно формализовать, получив задачу

$$\max \{(c, x) - (R, (A_1 x - b^1)^+) \mid A_0 x \leqslant b^0, x \geqslant 0\}. \tag{10.10}$$

В ней $(A_1 x - b^1)^+$ – вектор невязок для ограничений $l_j(x) \leqslant 0$ ($j = 1, \ldots, k$) системы $A_1 x \leqslant b^1$, $R = [R_1, \ldots, R_k] > 0$. Величину R_j можно понимать как меру потерь (в единицах критерия (c, x)), приходящуюся на невязку $l_j^+(x) = 1$; следовательно, $(R, (A_1 x - b^1)^+) = \sum_{j=1}^{k} R_j l_j^+(x)$ – общие потери, связанные с нарушением ограничений $l_j(x) \leqslant 0$ ($j = 1, \ldots, k$). Эти потери в модели (10.10) вычитаются из критериальной функции (c, x), измеряющей, например, доход производства.

Ранжирование ограничений может носить более сложный характер за счет большей глубины ранжирования. Формальный анализ такой ситуации состоит в методе последовательной коррекции. Пусть в (10.9) система $Ax \leqslant b$ разбита на подсистемы

$$A_j x \leqslant b^j, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$

причем важность ограничений $A_j x \leqslant b^j$ по мере роста j ослабевает. Что касается ограничений $A_0 x \leqslant b^0$, то они остаются ведущими, наиболее важными. Модель коррекции теперь может выглядеть так: вначале решают задачу

$$(1): \min \{(r^{(1)}, (A_1 x - b^1) | A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0\} \ (=: \alpha_1),$$

затем

$$(2): \min \{(r^{(2)}, (A_2 x - b^2)^+) \mid x \in \operatorname{Arg}(1)\} \ (=: \alpha_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(m_0): \min \{(r^{(m_0)}, (A_{m_0} x - b^{m_0})^+) \mid x \in \operatorname{Arg}(m_0 - 1)\} \ (=: \alpha_{m_0}),$$

наконец,

$$\max \{(c, x) \mid x \in \operatorname{Arg}(m_0)\}. \tag{10.11}$$

Задача (10.11) и является результатом последовательной коррекции модели (10.9), в которой ограничения упорядочены по их важности. Выше $\{r^{(i)}\}_{i=1}^{m_0}$ – положительные векторы, размерность которых совпадает с числом строк подматриц A_i (или размерностью векторов b^i, что одно и то же). В задачах (i) $(i > 1)$ в качестве допустимых областей фигурируют оптимальные множества предыдущих задач $\operatorname{Arg}(i-1)$; последние могут быть записаны системами кусочно линейных неравенств;

$$\operatorname{Arg}(2) = \{x \geqslant 0 \mid A_0 x \leqslant b^0, (r^{(2)}, (A_2 x - b^2)^+) \leqslant \alpha_1\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\operatorname{Arg}(m_0) = \{x \geqslant 0 \mid A_0 x \leqslant b^0, \ (r^{(m_0)}, (A_{m_0} x - b^{m_0})^+) \leqslant \alpha_{m_0 - 1}\}.$$

Кусочно линейные неравенства в свою очередь сводятся к системам линейных неравенств. Все это позволяет решать задачи (i) $(i = 1, \ldots, m_0)$ методами линейного программирования, например симплекс-методом.

Рассмотрим один из вариантов содержательной интерпретации паретовской коррекции модели, связанной с наличием многих критериев, оценивающих план.

Пусть в некоторой задаче производственного планирования допустимым множеством будет $Q = \{x \geqslant 0 \mid A_0 x \leqslant b^0\} \neq \phi$, $x \geqslant 0$ – план, а $\{(c^t, x)\}_{t=1}^{k}$ – система критериев, оценивающих план $x \in Q$ (эти критерии будем называть оценочными). Такими оценочными критериями могут быть прибыль, чистая продукция, доля продукции высшего качества и т.д. Значения всех этих критериев желательно сделать максимальными. Если взять какой-либо один критерий из этого числа, например

(c^t, x), то соответствующий максимум найдется из задачи

$$\max \{(c^t, x) \mid x \in Q\} \quad (=: \alpha_t).$$

План $\bar{x} \in Q$, который имеет оценку α_t по критерию (c^t, x), т.е. $(c^t, \bar{x}) = \alpha_t$, может существовать. Но все критерии (c^t, x) вывести на значения α_t одновременно, как правило, нельзя, т.е. нельзя найти такой план $\bar{x} \in Q$, для которого выполнялись бы равенства $(c^t, \bar{x}) = \alpha_t$ $(t = 1, \ldots, k)$. Это означает, что система уравнений $(c^t, x) = \alpha_t$ $(t = 1, \ldots, k)$, $x \in Q$ несовместна. Ее несовместность, очевидно, эквивалентна несовместности следующей системы линейных неравенств:

$$(c^t, x) \geqslant \alpha_t, \quad t = 1, \ldots, k, \quad A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0. \tag{10.12}$$

К анализу этой несовместной системы и к ее коррекции можно подойти с позиций многих методов, в частности с позиций паретовской оптимизации. Обозначив $g_t(x) = (c^t, x) - \alpha_t$, введем задачу

$$\max{}_\pi \; \{[g_1(x), \ldots, g_k(x)] \mid x \in Q\}. \tag{10.13}$$

Напомним, что план $\bar{x} \in Q$ будет оптимальным по Парето для задачи (10.13), если в Q нельзя найти другой план $\tilde{x}$, для которого $g_t(\tilde{x}) \geqslant g_t(\bar{x})$ для всех k и хотя бы для одного $\bar{t}$ $g_{\bar{t}}(\tilde{x}) > g_{\bar{t}}(\bar{x})$. Это означает, что нельзя улучшить значение хотя бы одного критерия, не ухудшив значение другого критерия. Множество оптимальных по Парето точек для задачи (10.13), как и ранее, обозначим через Arg_π (10.13). Оно будет аппроксимировать несовместную систему (10.12) в смысле Парето. Если помимо критериев (c^t, x) $(t = 1, \ldots, k)$ имеется еще один – ведущий критерий (c, x), то можно решать задачу

$$\max \{(c, x) \mid x \in \operatorname{Arg}_\pi (10.13)\}.$$

Эта задача, таким образом, выступает в качестве аппроксимирующей для ситуации, когда планы $x \in Q$ оцениваются одним выделенным критерием (c, x) и множеством дополнительных критериев $\{(c^t, x)\}_{t=1}^k$, не упорядоченных по предпочтительности.

Такое положение возникает, как правило, в задачах оптимального проектирования в ситуации нелинейных моделей. При этом вектор $x \geqslant 0$ понимается как описание проекта (конструкции), Q – множество ресурсов и технологически допустимых проектов, $\{f_t(x)\}_{t=1}^k$ – система характеристик проекта x (выше было $f_t(x) = (c^t, x)$), $f_0(x)$ – выделенный критерий, который и определяет окончательный выбор проекта из паретовского множества

$$\operatorname{Arg} \max{}_\pi \; \{[f_1(x), \ldots, f_k(x)] \mid x \in Q\}.$$

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В § 3 были рассмотрены кратко вопросы двойственности для разрешимых задач ЛП. Теория двойственности играет огромную роль в линейном (и вообще в математическом) программировании, в частности при построении методов решения задач ЛП. Мы уже отмечали, что теорема двойственности позволяет сводить задачу ЛП к решению некоторой системы линейных неравенств. Это факт чрезвычайной важности.

Двойственность, дающая возможность вычислять частные производные функции оптимума в зависимости от параметров модели, позволяет вести анализ соответствующего этой модели объекта в динамике.

Для несобственных задач ЛП двойственность в прежнем виде становится бессодержательной, поэтому возникает проблема построения новой теории, пригодной для анализа несобственных задач.

В этой главе кратко излагается эта теория.

§ 11. Общая схема формирования двойственности для несобственных задач ЛП

Пусть

$$L\colon \max\ \{(c,x)\mid Ax\leqslant b,\ \ x\geqslant 0\}, \tag{11.1}$$

$$L^*\colon \max\ \{(b,u)\mid A^Tu\geqslant c,\ \ u\geqslant 0\} \tag{11.2}$$

— двойственная пара задач линейного программирования с допустимыми множествами M и M^* соответственно; здесь $c,\ x\in E_n,\ b,\ u\in E_m$. Для несобственных задач, как уже отмечалось, возможны три случая: 1) $M=\phi$, $M^*\neq\phi$; 2) $M\neq\phi, M^*=\phi$; 3) $M=\phi, M^*=\phi$, в зависимости от которых задача L называется несобственной 1-го, 2-го или 2-го рода соответственно.

Правило (*) формирования задачи L^* по задаче L обладает свойством взаимности, т.е., будучи примененным к L^*, оно дает $L:(L^*)^*=L$. Задачи L и L^* связаны теоремой двойственности: из разрешимости L вытекает разрешимость L^* и совпадение их оптимальных значений (и наоборот).

Ниже дается схема двойственности для несобственных задач ЛП и ее реализация. Содержательно смысл схемы состоит в следующем: исходной паре двойственных задач L и L^* по единой схеме π ставятся в соответствие задачи P и $P^{\#}$, связанные между собой свойством взаимности и теоремой двойственности; при этом P и $P^{\#}$ выступают в роли задач, аппроксимирующих в том или ином смысле L и L^* соответственно. Схему можно изобразить как показано на рис. 10.

Для нелинейных задач в этой схеме свойство взаимности должно быть отброшено. На рис. 11 правила π и π' формирования задач P и $P^{\#}$ не обязательно должны совпадать.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, shift right, "(*)"'] & P \arrow[d, shift right, "(\#)"'] \\ L^* \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, shift right] & P^{\#} \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$

Рис. 10

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(*)"'] & P \arrow[d, "(\#)"'] \\ C^* \arrow[r, "\pi'"] & P^{\#}, \end{tikzcd}$$

Рис. 11

Дадим реализацию схемы рис. 10 для задач ЛП.

Зафиксируем произвольный "разрез" матрицы A на горизонтальные и вертикальные подматрицы: A_j $(j = 0, 1, \ldots, m_0)$ и B_i $(i = 0, 1, \ldots, n_0)$ соответственно. Этому разрезу соответствует разрез векторов b и u, а также c и x:

$$b^T = [b^0, \ldots, b^{m_0}], \quad u^T = [u^0, \ldots, u^{m_0}];$$

$$c^T = [c^0, \ldots, c^{n_0}], \quad x^T = [x^0, \ldots, x^{n_0}].$$

Таким образом,

$$[A \mid b \mid u] = \left[\begin{array}{c|c|c} A_0 & b^0 & u^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m_0} & b^{m_0} & u^{m_0} \end{array}\right],$$

$$[A^T \mid c \mid x] = \left[\begin{array}{c|c|c} B_0^T & c^0 & x^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n_0}^T & c^{n_0} & x^{n_0} \end{array}\right].$$

Условимся придавать, если это необходимо, тем или иным выделенным подматрицам "пустые" значения ϕ Так, например, если $A_j = \phi$ $(j=1, \ldots, m_0)$, то $A = A_0$ и т.д.

Пусть $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$ – произвольные нормы пространств размерностей векторов u^j и x^i; $\|\cdot\|^*_{p(j)}$ и $\|\cdot\|^*_{q(i)}$ – им сопряженные нормы; $R_j \geqslant 0, r_i \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m_0;\ i = 1, \ldots, n_0)$.

Пусть $z = [z_1, \ldots, z_k] \in E_k$. Для норм $\max\limits_j |z_j|$ и $\sum\limits_i |z_i|$ будем употреблять обозначения $\|z\|_0$ и $\|z\|_1$ соответственно (эти нормы являются взаимно сопряженными), т.е. $\|z\|_0^* = \|z\|_1$, $\|z\|_1^* = \|z\|_0$.

Оговорим одно предположение относительно всех здесь используемых норм, а именно свойство монотонности:

$$x \geqslant y \geqslant 0 \Rightarrow \|x\| \geqslant \|y\|.$$

Сформулируем задачи:

$$P\colon \sup \{(c,x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|A_j x - b^j)^+\|_{p(j)} \mid$$

$$A_0 x \leqslant b^0, x \geqslant 0, \ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i (i = 1, \ldots, n_0)\}, \tag{11.3}$$

$$P^{\#}\colon \inf \{(b,u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)} \mid$$

$$B_0^T u \geqslant c^0, \ u \geqslant 0, \ \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j (j = 1, \ldots, m_0)\} \cdot \tag{11.4}$$

Напомним, что + при векторе означает замену его отрицательных координат нулями.

Замечание 1. Задачи (11.3) и (11.4) при $A_j = \phi (j = 1, \ldots, m_0)$, $B_i = \phi \ (i = 1, \ldots, n_0)$ превращаются в задачи L и L^*.

Подсистемы $A_0 x \leqslant b^0$, $x \geqslant 0$ и $B_0^T u \geqslant c^0$, $u \geqslant 0$ систем ограничений в задачах L и L^*, выделяемые подматрицами A_0 и B_0^T (последние могут принимать значения ϕ), будем располагать совместными. Такое предположение не является, естественно, ограничительным, ибо всегда имеется возможность выделять совместные подсистемы несовместных систем. Содержательно это может соответствовать выделению директивных ограничений в предположении их обоснованности (т.е. возможности их выполнения) или выделению максимальной совместной подсистемы.

Замечание 2. Из структуры задач P и $P^{\#}$ видно, что схема их формирования из задач L и L^* одна и та же (на рис. 11. – это схема π).

Замечание 3. Пусть (#) – правило, сопоставляющее задаче P задачу $P^{\#}$: $P \xrightarrow{(\#)} P^{\#}$. Тогда легко убедиться (с учетом свойства $(\|\cdot\|^*)^* = \|\cdot\|$, где $\|\cdot\|$ – любая норма конечномерного пространства), что это правило является взаимным, т.е. $(P^{\#})^{\#} = P$.

Если в задаче (11.3) все $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$ являются нормами типа $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$, то назовем ее *l-задачей*. Из того, что P – l-задача, следует, что $P^{\#}$ также является l-задачей (и наоборот).

Замечание 4. Если P – l-задача, то P и $P^{\#}$ являются выпуклыми кусочно линейными и могут быть эквивалентным образом переписаны в форме задач ЛП.

Ниже выпишем ряд частных реализаций задач P и $P^{\#}$.

Пусть в P и $P^{\#}$: A_j – j-я строка, а B_i – i-й столбец матрицы A $(j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$; тогда P и $P^{\#}$ примут вид

$$P_0\colon \max \{(c,x) - (R, (Ax - b)^+) \mid 0 \leqslant x \leqslant r\}, \tag{11.5}$$

$$P_0^{\#}\colon \min \{(b,u) + (r, (c - A^T u)^+) \mid 0 \leqslant u \leqslant R\}. \tag{11.6}$$

В P_0 и $P_0^{\#}$ вместо операций sup и inf поставлены max и min в силу очевидной достижимости этих операций.

Если $A_0 = \phi$, $B_0 = \phi, m_0 = 1, n_0 = 1$, то задачи P и $P^\#$ могут быть записаны так:

$$\bar{P}: \max\{(c, x) - R_0 \|(Ax - b)^+\|_p \mid \|x\|_q \leqslant r_0,\ x \geqslant 0\}, \tag{11.7}$$

$$\bar{P}^\#: \min\{(b, u) + r_0 \|(c - A^T u)^+\|_q^* \mid \|u\|_p^* \leqslant R_0,\ u \geqslant 0\}. \tag{11.8}$$

Здесь $R_0 \geqslant 0$ и $r_0 \geqslant 0$ – скалярные величины, $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ – произвольные монотонные нормы пространств E_m и E_n соответственно.

Если L – несобственная задача 1-го рода, то можно положить $B_i = \phi (i = 1, \ldots, n_0)$. Тогда $B_0 = A$, и задачи P и $P^\#$ запишутся в следующем виде:

$$P_1: \sup\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|A_j x - b^j)^+\|_{p(j)} \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\}, \tag{11.9}$$

$$P_1^\#: \inf\{(b, u) \mid A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0,\ \|u^j\|_{p(j)}^* \leqslant R_j\ (j = 1, \ldots, m_0)\}. \tag{11.10}$$

Пусть L – несобственная задача 2-го рода. В этом случае при $A_j = \phi\ (j = 1, \ldots, m_0)$ задачи P и $P^\#$ примут вид

$$P_2: \sup\{(c, x) \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0,\ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i\ (i = 1, \ldots, n_0)\}, \tag{11.11}$$

$$P_2^\#: \inf\{(b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|(c^i - B_i^T u)^+\|_{q(i)}^* \mid B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0\}. \tag{11.12}$$

Как в $P_1, P_1^\#$, так и в $P_2, P_2^\#$ вместо sup и inf можно поставить max и min, если A_0 и B_0 принимают значения ϕ.

Возможны и другие частные реализации задач P и $P^\#$ (например, за счет выбора тех или иных конкретных норм $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$).

Тот или иной вид задач P и $P^\#$ определяется и способом разбиения матрицы коэффициентов A задачи L на подматрицы (горизонтальные и вертикальные). Такое разбиение может диктоваться реальной структурой матрицы A, если она отвечает конкретной постановке задачи. Одной из типичных структур является следующая (блочно-диагональная):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \\ B_1 & \ldots & B_k \end{bmatrix},$$

В этом случае говорят о блоках A_i и связке $B = [B_1 \ldots B_k]$. Разрез этой матрицы на горизонтальные и вертикальные подматрицы естественно осуществить в соответствии с указанной ее структурой. Запишем сопутствующее разбиение векторов c, x, b и u на подвекторы:

$$c^T = [c^1, \ldots, c^k],\quad x^T = [x^1, \ldots, x^k],$$

$$b^T = [b^1, \ldots, b^k, b^0],\quad u^T = [u^1, \ldots, u^k, u^0].$$

Следовательно, исходная задача L и двойственная к ней могут быть записаны следующим образом:

$$\tilde{L}: \max\{\sum_{i=1}^{k}(c^i, x^i) \mid A_i x^i \leqslant b^i,\ \ x^i \geqslant 0\ \ (i=1,\ldots,k),$$

$$\sum_{i=1}^{k} B_i x^i \leqslant b^0\}, \tag{11.13}$$

$$\tilde{L}^*: \max\{\sum_{j=0}^{k}(b^j, u^j) \mid A_i^T u^i + B_i^T u^0 \geqslant c^i,\ \ u^T = [u_1,\ldots,u_k,u_0] \geqslant 0$$

$$(i=1,\ldots,k)\}. \tag{11.14}$$

Выпишем задачи (11.3) и (11.4), отвечающие описанной ситуации:

$$P_d: \max\{\sum_{i=1}^{k}(c^i, x^i) - \sum_{i=1}^{k} R_i \|(A_i x^i - b^i)^+\|_{p(i)} \mid$$

$$\sum_{i=1}^{k} B_i x^i \leqslant b^0,\ \ x_i \geqslant 0,\ \ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i$$

$$(i=1,\ldots,k)\}, \tag{11.15}$$

$$P_d^{\#}: \min\{\sum_{j=0}^{k}(b^j, u^j) + \sum_{i=1}^{k} r_i \|(c^i - A_i^T u^i - B_i^T u_0)^+\|_{q(i)}^* \mid u \geqslant 0,$$

$$\|u^i\|_{p(i)}^* \leqslant R_i\ (i=1,\ldots,k)\}. \tag{11.16}$$

Если задачу L предположить несобственной 1-го рода, то вместо $\{P_d, P_d^{\#}\}$ можно записать

$$\max\ \{(c,x) - \sum_{i=1}^{k} R_i \|(A_i x^i - b^i)^+\|_{p(i)} \mid$$

$$Bx \leqslant b^0, x \geqslant 0\}, \tag{11.17}$$

$$\min\{(b,u) \mid A^T u \geqslant c,\ \ u \geqslant 0,\ \ \|u^i\|_{p(i)}^* \leqslant R_i$$

$$(i=1,\ldots,k)\}. \tag{11.18}$$

Эти задачи получаются из (11.3) и (11.4), если наравне с указанным разбиением матрицы A на горизонтальные подматрицы в них положить $B_0 = A$. Тогда ограничений $\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i$ в (11.15) не будет.

Остановимся еще на таком варианте задач P и $P\#$, когда в них $A_0 x \leqslant b^0$, $x \geqslant 0$ – максимально совместная подсистема (МСП) системы ограничений $Ax \leqslant b, x \geqslant 0$ задачи L; $B_0^T u \geqslant c^0$, $u \geqslant 0$ – МСП системы ограничений $A^T u \geqslant c$, $u \geqslant 0$ задачи L^*. В силу определения МСП выполняются соотношения

$$A_j x - b^j > 0 \quad \forall x \in M_0 := \{x \geqslant 0 \mid A_0 x \leqslant b^0\},$$
$$c^i - B_i^T u > 0 \quad \forall u \in M_0^{\#} := \{u \geqslant 0 \mid B_0^T u \geqslant c^0\};$$
$$j = 1,\ldots,m_0;\ \ i = 1,\ldots,n_0.$$

Следовательно,

$$(A_j x - b^j)^+ = A_j x - b^j \quad \forall x \in M_0,$$
$$(c^i - B_i^T u)^+ = c^i - B_i^T u \quad \forall u \in M_0^{\#}.$$

А тогда задачи P и $P^{\#}$ принимают вид

$$\sup\{(c,x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|A_j x - b^j\|_{p(j)} \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0,$$
$$\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i (i = 1, \ldots, n_0)\}, \tag{11.19}$$

$$\inf\{(b,\ u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|B_i^T u - c^i\|^*_{q(i)} \mid B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0,$$
$$\|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j\ (j = 1, \ldots, m_0)\}. \tag{11.20}$$

Свойства задач (11.19) и (11.20) могут быть более предпочтительными с вычислительной точки зрения. Поясним это на двух примерах частной реализации, соответствующей предположениям:

1) A_j – j-я строка матрицы A ($j = 1, \ldots, m_0$), B_i – i-й столбец матрицы A ($i = 1, \ldots, n_0$);

2) $m_0 = 1$, $n_0 = 1$, $\|\cdot\|_{p(1)} = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{q(1)} = \|\cdot\|_0$.

Пары взаимно двойственных задач будут иметь следующий вид:

$$\max\{(c,x) - (R, A_1 x - b^1) \mid A_0 x \leqslant b^0, x \geqslant 0, x^1 \leqslant r\},$$
$$\min\{(b,u) + (r, c^1 - B_1^T u) \mid B_0^T u \geqslant c^0, u \geqslant 0,\ u^1 \leqslant R\}; \tag{11.21}$$

$$\max\{(c,x) - R_0 \|A_1 x - b^1\|_1 \mid A_0 x \leqslant b^0, x \geqslant 0, \|x^1\|_0 \leqslant R_0\},$$
$$\min\{(b,u) + r_0 \|c^1 - B_1^T u\|_1 \mid B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0,\ \|u^1\|_0 \leqslant R_0\}. \tag{11.22}$$

Последнюю пару можно записать в более развернутом виде:

$$\max\{(c,x) - R_0 \sum_{j=0}^{l} [(a_j, x) - b_j] \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0,$$
$$x_i \leqslant r_0\ (i = 1, \ldots, s)\}, \tag{11.23}$$

$$\min\{(b,u) + r_0 \sum_{i=1}^{s} [c_i - (h_i, u)] \mid B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0,$$
$$u_j \leqslant R_0 (j = 1, \ldots, l)\}, \tag{11.24}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = [B_1, B_0],$$

$$A_1 x \leqslant b^1 \sim (a_j, x) \leqslant b_j, \quad j = 1, \ldots, l,$$
$$B_1^T u \geqslant c^1 \sim (h_i, u) \geqslant c_i, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Пары задач (11.21), (11.22) и (11.23), (11.24) – суть задачи ЛП, в отличие от случая, когда выделяемые подсистемы $A_0 x \leqslant b^0$, $x \geqslant 0$ и $B_0^T u \geqslant$

$\geqslant c^0, u \geqslant 0$ не являются максимально совместными подсистемами. В последней ситуации в отмеченных парах задач фигурировали бы положительные срезки $(A_1 x - b^1)^+, (c^{-1} - B_1^T u)^+$ векторов $A_1 x - b^1$ и $c^1 - B_1^T u$, что обеспечивало бы для соответствующих задач свойство быть кусочно линейными выпуклыми программами.

§ 12. Основная теорема двойственности и некоторые ее частные реализации

В отличие от практически однозначной формулировки теоремы двойственности для разрешимой задачи L в случае неразрешимости L допускается много вариантов формулировок теорем двойственности. Этому причины – разные типы несобственности, наличие свободных разбиений матрицы A на горизонтальные и вертикальные подматрицы, разный набор фигурирующих в записи задач P и $P^\#$ норм.

Теорема 12.1 (двойственности). *Пусть задача P (т.е. (11.3)) разрешима, а $\{r_i\}_1^{n_0}$ таковы, что система неравенств*

$$\|x^i\|_{q(i)} < r_i, \quad i = 1, \ldots, n_0, \quad A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0$$

совместна. Тогда $P^\#$ также разрешима. При этом их оптимальные значения совпадают.

Замечание. В силу взаимности задач P и $P^\#$ справедлива и обратная теорема двойственности в следующей формулировке.

Из разрешимости задачи $P^\#$ и совместности системы

$$\|u^j\|^*_{p(j)} < R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0, \quad B_0^T u \geqslant c^0, \quad u \geqslant 0$$

вытекает разрешимость задачи P и совпадение их оптимальных значений.

Пусть $M(r)$ и $M^\#(R)$ – допустимые множества для задач P и $P^\#$ соответственно.

Теорема 12.2. *Если в P и $P^\#$ $\{R_j\}_1^{m_0}$ и $\{r_i\}_1^{n_0}$ таковы, что $M(r) \neq \phi$ и $M^\#(R) \neq \phi$, при этом P – l-задача, то P и $P^\#$ разрешимы и их оптимальные значения совпадают.*

Теорема 12.3. *Задачи* (11.5) *и* (11.6) *разрешимы при любых $R \geqslant 0$ и $r \geqslant 0$, при этом их оптимальные значения совпадают.*

Теорема 12.4. *Задачи $\overline{P}$ и $\overline{P}^\#$ разрешимы при любых $R_0 \geqslant 0$ и $r_0 \geqslant 0$; при этом их оптимальные значения совпадают.*

В двойственности для НЗ ЛП имеет место аналог теоремы 3.1, связывающий оптимизируемые функционалы в задачах P и $P^\#$.

Теорема 12.5. *Пусть*

$$f_R(x) := (c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|(A_j x - b^j)^+\|_{p(j)},$$

$$f_r^\#(u) := (b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)}.$$

Если $\overline{x} \in M(r)$, $\overline{u} \in M^\#(R)$, то

$$f_R(\overline{x}) \leqslant f_r^\#(\overline{u}). \tag{12.1}$$

С л е д с т в и е. *Если в* (12.1) *реализуется равенство, то*

$\bar{x} \in \operatorname{Arg} P, \quad \bar{u} \in \operatorname{Arg} P^{\#}.$

Теорема 12.5 является прямым следствием теоремы двойственности 12.1, если обеспечиваются условия справедливости последней. Однако неравенство (12.1) имеет место без каких-либо ограничений.

В связи со следствием целесообразно, как это делалось в § 3, ввести симметрическую задачу S: найти хотя бы одно решение системы неравенств

$$A_0 x \leqslant b^0, \ x \geqslant 0, \ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i, \ i = 1, \dots, n_0;$$

$$B_0 x \geqslant c^0, \ u \geqslant 0, \ \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j, \ j = 1, \dots, m_0; \qquad (S)$$

$$f_R(x) \geqslant f_r(u).$$

Т е о р е м а 12.6. *Вектор* $[\bar{x}, \bar{u}]$ *тогда и только тогда является решением системы* (S), *когда* $\bar{x} \in \operatorname{Arg} P$ *и* $\bar{u} \in \operatorname{Arg} P^{\#}$.

З а м е ч а н и е 1. Система неравенств (S) является выпуклой в том смысле, что если ее неравенства привести к форме записи $f_j(x, u) \leqslant 0$, то функции $f_j(x, u)$ будут выпуклыми по $z = [x, u]$.

Для систем выпуклых неравенств имеется много методов их решения [9].

З а м е ч а н и е 2. Если в (S) все нормы $\|\cdot\|_{p(j)}$, $\|\cdot\|_{q(i)}$ типа $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ (этому соответствует то, что P – l-задача), то (S) будет системой выпуклых кусочно линейных неравенств и может быть сведена просто к системе линейных неравенств.

Проиллюстрируем сказанное на примере системы (S), поставленной в соответствие паре $\bar{P}$ и $\bar{P}^{\#}$:

$$\begin{aligned} &\|x\|_q \leqslant r_0, \ x \geqslant 0; \ \|u\|^*_p \leqslant R_0, \ u \geqslant 0; \\ &(b, u) + r_0 \|(c - A^T u)^+\|^*_q \leqslant (c, x) - R_0 \|(Ax - b)^+\|_p. \end{aligned} \qquad (\bar{S})$$

Положим, например, $p = 0, q = 1$. Тогда (S) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant r_0, \ x \geqslant 0; \quad \sum_{j=1}^{m} u_j \leqslant R_0, \ u \geqslant 0; \\ &(b, u) + r_0 \max_i (c_i - (h_i, u))^+ \leqslant (c, x) - R_0 \max_j ((a_j, x) - b_j)^+. \end{aligned} \qquad (\bar{S})_l$$

Вводя новые переменные $t \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$, последнее неравенство в системе $(\bar{S})_l$ можно эквивалентно заменить на систему

$$(b, u) + r_0 t \leqslant (c, x) - R_0 \mu,$$

$$c_i - (h_i, u) \leqslant t, \quad i = 1, \dots, n, \ t \geqslant 0,$$

$$(a_j, x) - b_j \leqslant \mu, \quad j = 1, \dots, m, \quad \mu \geqslant 0.$$

Заменяя в $(\bar{S})_l$ последнее неравенство на эту систему, мы получим искомую систему линейных неравенств.

Итогом замечания 2 может служить следующее

Утверждение. *Если P является l-задачей (т.е. все $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$ являются нормами типа $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$), то решение задач P и $P^\#$ сводится к нахождению хотя бы одного решения конструктивно выписываемой системы линейных неравенств.*

Систему же линейных неравенств можно решить симплекс-методом или одним из итерационных методов (например, методами фейеровского типа [9]).

Укажем на связь задач P и $P^\#$ с вопросами векторной оптимизации (см. § 6). Разбив системы ограничений задач L и L^*, т.е. (11.1) и (11.2), на подсистемы

$$A_0x \leqslant b^0,\ \ x \geqslant 0;\ A_1x \leqslant b^1 \ \text{ и } B_0^Tu \geqslant c^0,\ \ u \geqslant 0;\ B_1^Tu \geqslant c^1$$

так, что $M_0 = \{x \geqslant 0 \mid A_0x \leqslant b^0\} \neq \phi$, $M_0^* = \{u \geqslant 0 \mid B_0^Tu \geqslant c^0\} \neq \phi$, можно записать формально симметричные задачи векторной оптимизации:

$$\min\nolimits_\pi \{(A_1x - b^1)^+ \mid A_0x \leqslant b^0,\ \ x \geqslant 0\}, \tag{12.2}$$

$$\min\nolimits_\pi \{(c^1 - B_1^Tu)^+ \mid B_0^Tu \geqslant c^0,\ \ u \geqslant 0\}. \tag{12.3}$$

Свертки векторных критериев этих задач порождают задачи (см. § 6)

$$\min \{(R, (A_1x - b^1)^+) \mid A_0x \leqslant b^0,\ \ x \geqslant 0\}, \tag{12.4}$$

$$\min \{(r, (c^1 - B_1^Tu)^+) \mid B_0^Tu \geqslant c^0,\ \ u \geqslant 0\}, \tag{12.5}$$

где $E_m \ni R > 0$, $E_n \ni r > 0$. Вводя в них критерии (c, x) и (b, u) из исходных постановок, получим

$$\max \{(c, x) - (R, (A_1x - b^1)^+) \mid A_0x \leqslant b^0,\ \ x \geqslant 0\}, \tag{12.6}$$

$$\min \{(b, u) + (r, (c^1 - B_1^Tu)^+) \mid B_0^Tu \geqslant c^0,\ \ u \geqslant 0\}. \tag{12.7}$$

В принципе эти задачи формулируют поиск $\max(c, x)$ и $\min(b, u)$ на множествах Arg_π (12.2) и Arg_π (12.3) соответственно, точнее: при подходящем управлении параметрами $R > 0$ и $r > 0$ можно организовать вычислительный процесс, реализующий указанный поиск [4]. Но задачи (12.6) и (12.7) хотя и находятся в формальной двойственности, однако основным свойством двойственности (совпадением оптимальных значений) не обладают. Для обеспечения этого свойства в их ограничения необходимо внести: $x \leqslant r$ в (12.6) и $u \leqslant R$ в (12.7), т.е.

$$\max \{(c, x) - (R, (A_1x - b^1)^+) \mid A_0x \leqslant b^0,\ \ 0 \leqslant x \leqslant r\}, \tag{12.8}$$

$$\min \{(b, u) + (r, (c^1 - B_1^Tu)^+) \mid B_0^Tu \geqslant c^0,\ \ 0 \leqslant u \leqslant R\}. \tag{12.9}$$

Эти задачи получаются из P и $P^\#$, когда горизонтальные подматрицы матрицы суть A_0 и строки, не вошедшие в A_0; здесь они (строки) образуют подматрицу, обозначенную A_1. Соответственно вертикальные подматрицы – это B_0 и столбцы, не вошедшие в B_0; здесь они (столбцы) образуют подматрицу, обозначенную B_1. Задачи (12.8) и (12.9) связаны теоремой двойственности, например, в формулировке теоремы 12.2.

Описанную здесь схему движения от задач (12.2), (12.3) к задачам (12.8), (12.9) можно было бы применить к общей ситуации разбиения матрицы A на горизонтальные подматрицы A_j $(j = 0, 1, \ldots, m_0)$ и вертикальные подматрицы B_i $(i = 0, 1, \ldots, n_0)$ и сформировать векторы невязок

$$F(x) = [\, \|(A_1 x - b^1)^+\|_{p(1)}, \ldots, \|(A_{m_0} x - b^{m_0})^+\|_{p(m_0)}],$$

$$F^{\#}(u) = [\, \|(c^1 - B_1^T u)^+\|^*_{q(1)}, \ldots, \|(c^{n_0} - B_{n_0}^T u)^+\|^*_{q(n_0)}].$$

Тогда аналогами задач (12.2) и (12.3) были бы

$$\min\nolimits_\pi \{F(x) \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\},$$

$$\min\nolimits_\pi \{F^{\#}(u) \mid B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0\},$$

а эквивалентом (12.8), (12.9) – задачи

$$P\colon\ \max\{(c, x) - (R, F(x)) \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0,$$

$$\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i\ (i = 1, \ldots, n_0)\},$$

$$P^{\#}\colon\ \min\{(b, u) + (r, F^{\#}(x)) \mid B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0,$$

$$\|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j\ (j = 1, \ldots, m_0)\}.$$

Последние в несколько сокращенной записи суть задачи (11.3), (11.4).

Таким образом, модели P и $P^{\#}$ дают содержательную развязку для несобственных задач линейного программирования L и L^* в терминах паретовской оптимизации, что, например, по отношению к задаче P сводится к определению паретовского множества задачи $\min_\pi F(x)$ при ограничениях задачи P, а затем к поиску $\max(c, x)$ на оптимальном множестве последней. Так же может быть истолкована и задача $P^{\#}$.

Если от задач L и L^* с каркасами

$$\begin{bmatrix} c^T & 0 \\ A & b \end{bmatrix} \overset{(*)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} b^T & 0 \\ A^T & c \end{bmatrix}$$

перейти к задачам линейной векторной оптимизации с каркасами

$$K = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \overset{(*)}{\rightarrow} K^* = \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ A^T & C \end{bmatrix}$$

(см. § 6, п. 6.3), то в задачах P и $P^{\#}$ векторы c и b следует заменить векторами-свертками $C_v =: c(v)$ и $B_w =: b(w)$, в силу чего они примут вид:

$$P_{v,w}\colon\ \sup\{(C_v, x) - (R, F_w(x)) \mid A_0 x \leqslant b^0(w),\ x \geqslant 0,$$

$$\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i\ (i = 1, \ldots, n_0)\}, \tag{12.10}$$

$$P^{\#}_{v,w}\colon\ \inf\{(B_w, u) + (r, F^{\#}_v(u)) \mid B_0^T u \geqslant c^0(v),\ u \geqslant 0,$$

$$\|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j\ (j = 1, \ldots, m_0)\}, \tag{12.11}$$

где

$$F_w(x) = [\, \|(A_1 x - b^1(w))^+\|_{p(1)}, \ldots, \|(A_{m_0} x - b^{m_0}(w))^+\|_{p(m_0)}],$$

$$F^{\#}_v(u) = [\, \|(c^1(v) - B_1^T u)^+\|^*_{q(1)}, \ldots, \|(c^{n_0}(v) - B_{n_0}^T(v) - B_{n_0}^T u)^+\|^*_{q(n_0)}],$$

$$(C_v)^T = c^T(v) = [c^0(v), \ldots, c^{n_0}(v)],\quad (B_w)^T = b^T(w) = [b^0(w), \ldots, b^{m_0}(w)].$$

Для этих задач справедлива, очевидно, теорема двойственности 12.1, а для их частных реализаций – теоремы 12.2–12.4. Формально задачи $P_{v,w}$ и $P^{\#}_{v,w}$ ничего нового по сравнению с P и $P^{\#}$ не несут, но за счет смысла матриц C и B из них можно извлекать большое число частных случаев, которые интерпретируются через понятия векторной оптимизации, а сама теорема двойственности дает для этих случаев свой математический смысл. Причем (и это главное!) данные факты и их содержательный смысл имеют место для любого исходного матричного каркаса

$$\begin{bmatrix} C^T & 0 \\ A & B \end{bmatrix},$$

т.е. без каких-либо предположений о разрешимости тех или иных задач, определяемых этим каркасом.

§ 13. Двойственность для несобственных задач линейного программирования 1-го рода

Несобственности 1-го рода соответствует случай $M = \phi, M^* \neq \phi$, т.е. система $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$ несовместна, а $A^T u \geqslant c$, $u \geqslant 0$ совместна. Тогда в общей схеме формирования задач P и $P^{\#}$ можно в качестве подсистемы $B_0^T u \geqslant c^0$ взять всю систему $B^T u \geqslant c$, и мы получим задачи P_1 и $P_1^{\#}$, т.е. задачи (11.9) и (11.10). Для них справедлива

Теорема 13.1. *Если $\{R_j \geqslant 0\}_1^{m_0}$ таковы, что система ограничений в задаче $P_1^{\#}$ совместна, а операция* sup *в задаче P_1 достижима, то $P_1^{\#}$ разрешима и ее оптимальное значение совпадает с оптимальным значением задачи P_1.*

Если задача $P_1^{\#}$ разрешима, при этом совместна система

$$A^T u \geqslant c, \ u \geqslant 0, \quad \| u^j \|^*_{p(j)} < R_j \quad \forall j \in J,$$

где $J = \{ j \mid R_j > 0 \}$, то P_1 разрешима, при этом оптимальные значения этих задач совпадают.

Класс несобственных задач ЛП 1-го рода является в прикладном отношении, как уже отмечалось, наиболее важным. Поэтому вопросы двойственности для них мы обсудим более подробно.

Теорема 13.1 является общей. Зафиксируем ее некоторые частные случаи, соответствующие частным реализациям задач P и $P^{\#}$.

Если в P_1 $m_0 = 1$, то P_1 и $P_1^{\#}$ запишутся так:

$$P_{11}: \ \sup \{ (c, x) - R_0 \| (A_1 x - b^1)^+ \|_p \mid A_0 x \leqslant b^0, \ x \geqslant 0 \}, \tag{13.1}$$

$$P^{\#}_{11}: \ \inf \{ (b, u) \mid A^T u \geqslant c, \ u \geqslant 0, \ \| u^1 \|^*_p \leqslant R_0 \}; \tag{13.2}$$

здесь $R_0 > 0$, $u = [u^0, u^1]$, $\| \cdot \|_p$ – произвольная монотонная норма пространства E_m. Для нее теорема двойственности может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 13.2. *Из разрешимости P_{11} следуют разрешимость задачи $P^{\#}_{11}$ и совпадение их оптимальных значений. Из совместности системы ограничений в задаче $P^{\#}_{11}$ (при строгом неравенстве $\| u^1 \|^*_p < R_0$), т.е.*

совместности системы неравенств

$$A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0,\ \|u^1\|_p^* < R_0,$$

следуют разрешимость задач $P_{11}, P_{11}^{\#}$ и совпадение их оптимальных значений.

Задаче (13.1) соответствует разбиение системы $Ax \leqslant b$ на подсистемы $A_0 x \leqslant b^0$ и $A_1 x \leqslant b^1$. Этому разбиению ранее мы придавали такой смысл: $A_0 x \leqslant b^0$, $x \geqslant 0$ – директивные ограничения, $A_1 x \leqslant b^1$ – факультативные ограничения. Задача (13.1) выступает в качестве аппроксимирующей задачу (10.9). В отмеченном п. 10.4 в качестве аппроксимирующей мы брали задачу (10.10), которая может быть получена из P_1, если в ней положить $A_j = a_j$ $(j = 1, \ldots, k)$:

$$P_{12}:\ \max\left\{(c, x) - \sum_{j=1}^{k} R_j [(a_j, x) - b_j]^+ \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\right\}. \tag{13.3}$$

Таким образом, задаче (13.3) в § 10 был придан аппроксимационный смысл. Но теперь в соответствии с общей схемой можно выписать объект, двойственный к (13.3):

$$P_{12}^{\#}:\ \min\{(b, u) \mid A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0,\ u_j \leqslant R_j\ \ (j = 1, \ldots, k)\}. \tag{13.4}$$

Взаимно двойственные задачи P_{12} и $P_{12}^{\#}$ мы отметим особо, так как в P_{12} заложен наиболее простой и содержательно понятный тип аппроксимации несобственной задачи ЛП 1-го рода, заданной в форме (11.1), – это с одной стороны. С другой – на основе связи между ними можно установить точное содержание назначения штрафных констант, по крайней мере в смысле следующих вопросов:

1. При каких $R_j \geqslant 0$ гарантируется разрешимость задачи P_{12}?

2. Как величины R_j влияют на возможность интерпретации оптимального вектора $\tilde{u}$ двойственной задачи $P_{12}^{\#}$ как вектора оценок эффективности ресурсов b_j $(j = 1, \ldots, k)$ (по аналогии с ситуацией из § 3, где рассматривался смысл двойственности для разрешимых задач)?

Сразу же и ответим на эти вопросы.

Теорема 13.3. *Задача P_{12}, т.е. (13.3), разрешима тогда и только тогда, когда совместна система ограничений в задаче $P_{12}^{\#}$, т.е. система*

$$A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0,\ u_j \leqslant R_j,\ j = 1, \ldots, k.$$

Заметим, что эта теорема верна при любой исходной задаче линейного программирования, т.е. как разрешимой, так и неразрешимой. Обозначим через $\tilde{f}(b)$ функцию оптимума в (13.3), $\tilde{u}^T = [\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m] \in \operatorname{Arg} P_{12}^{\#}$.

Теорема 13.4. *Если оптимальный вектор $\tilde{u}$ задачи $P_{12}^{\#}$ определяется однозначно, то*

$$\partial \tilde{f}(b)/\partial b_j = \tilde{u}_j,\quad j = 1, \ldots, k, \tag{13.5}$$

здесь $\tilde{u}^T = [\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k, \ldots, \tilde{u}_m]$.

Частным случаем P_{12} и $P_{12}^{\#}$ (при $k = m$) является взаимно двойственная пара задач:

$$P_{13}:\ \max\{(c, x) - (R, (Ax - b)^+) \mid x \geqslant 0\},$$

$$P^{\#}_{13}: \ \min\{(b,u) \mid A^T u \geqslant c, \ 0 \leqslant u \leqslant R\};$$

здесь $R = [R_1, \ldots, R_m] \geqslant 0$.

Выпишем ту симметрическую задачу, к которой сводится решение задач P_{12} и $P^{\#}_{12}$:

$$A_0 x \leqslant b^0, \ x \geqslant 0; \ A^T u \geqslant c, \ u \geqslant 0, \ u_j \leqslant R_j, \ j = 1, \ldots, k;$$

$$(b,u) \leqslant (c,x) - \sum_{j=1}^{k} R_j t_j, \ (a_j, x) - b_j \leqslant t_j, \ t_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, k.$$

Поправка этой системы на случай задач P_{13} и $P^{\#}_{13}$ очевидна.

Наравне с P_{11} и $P^{\#}_{11}$ выпишем их частный случай, когда $A_0 = \phi$, т.е. $A_1 = A$. Тогда получаются задачи

$$P_{14}: \ \sup\{(c,x) - R_0 \| (Ax - b)^+ \|_p \mid x \geqslant 0\}, \tag{13.6}$$

$$P^{\#}_{14}: \ \min\{(b,u) \mid A^T u \geqslant c, \ u \geqslant 0, \ \| u \|^*_p \leqslant R_0\}. \tag{13.7}$$

В (13.7) вместо inf поставлена операция min в связи с тем, что операция inf в этом случае автоматически достижима. Заметим, что система

$$A^T u \geqslant c, \ u \geqslant 0, \ \| u \|^*_p < R_0 \tag{13.8}$$

за счет выбора параметра $R_0 > 0$ может быть всегда сделана совместной. Приведем еще одну формулировку теоремы двойственности для задач (13.6) и (13.7).

Теорема 13.5. *Из разрешимости P_{14} следует разрешимость $P^{\#}_{14}$ и совпадение их оптимальных значений. Из совместности системы* (13.8) *следует разрешимость задач P_{14} и $P^{\#}_{14}$ и совпадение их оптимальных значений.*

В § 2 рассматривались некоторые модели, например (2.2) и (2.4), для которых свойство несовместности системы ограничений, более того – даже тип несобственности (а именно 1-го рода), возникали самым естественным образом. В модели (2.2) – это результат необеспеченности ресурсами b выполнения (тем более перевыполнения) плана x^0; в модели (2.4) – необеспеченность плана d ресурсами b. Для этих двух моделей мы выпишем варианты двойственных задач. Напомним, что двойственной (в смысле (*)-правила) задачей к (2.2) является (3.7). Задачам (2.2) и (3.7) (в предположении, что (2.2) – несобственная задача ЛП 1-го рода) поставим в соответствие взаимно двойственные (в смысле (#)-правила) задачи:

$$P_{15}: \ \max\{(c,x) - (R, (Ax - b)^+) \mid x \geqslant \bar{x}\},$$

$$P^{\#}_{15}: \ \min\{(b,u) - (v, \bar{x}) \mid A^T u - v \geqslant c, \ v \geqslant 0, \ 0 \leqslant u \leqslant R\}.$$

Для задач (2.4) и (3.9) такой парой будут

$$P_{16}: \ \min\{(c,x) + R, (Ax - b)^+) \mid Px \geqslant d, \ x \geqslant 0\},$$

$$P^{\#}_{16}: \ \max\{(d,v) - (b,u) \mid P^T v - A^T u \leqslant c, \ v \geqslant 0, \ 0 \leqslant u \leqslant R\}.$$

В P_{16} минимизируется ресурсная невязка (приращение) при неизменяемом плане d. Если ресурсы b оставить неизменяемыми, корректирование плана будет подчинено задаче

$$P_{17}:\ \min\{(c,x)+(r,(d-Px)^+)\mid Ax\leqslant b;\ x\geqslant 0\};$$

(#)-двойственной к ней будет

$$P_{17}^{\#}:\ \max\{(d,v)-(b,u)\mid P^Tv-A^Tu\leqslant c,\ u\geqslant 0,\ 0\leqslant v\leqslant r\}.$$

Еще раз обратимся к задаче P_{12} и ее частному случаю P_{13}. В них вектор c может быть нулевым. Тогда P_{12} перепишется в виде

$$P_{12}^0:\ \min\{\sum_{j=1}^{k}R_j[(a_j,x)-b_j]^+\mid A_0x\leqslant b^0,\ x\geqslant 0\}.$$

Связь между P_{12} и P_{12}^0 очевидная: $\operatorname{Arg}P_{12}=\operatorname{Arg}P_{12}^0$ и $\operatorname{opt}P_{12}=-\operatorname{opt}P_{12}^0$. Смысл задачи P_{12}^0 состоит в аппроксимации системы неравенств $Ax\leqslant b$, $x\geqslant 0$, если она несовместна. Двойственной к ней (в соответствии с (13.4)) будет задача

$$(P_{12}^0)^{\#}:\min\{(b,u)\mid A^Tu\geqslant 0,\ u\geqslant 0,\ u_j<R_j$$

$$(j=1,\ldots,k)\}.$$

В силу теоремы двойственности для P_{12} и $P_{12}^{\#}$ справедлива

Теорема 13.6. *Задачи P_{12}^0 и $(P_{12}^0)^{\#}$ всегда разрешимы; при этом* $\operatorname{opt}P_{12}^0+\operatorname{opt}(P_{12}^0)^{\#}=0$.

Аналогично, задачи

$$P_{13}^0:\ \min\{(R,(Ax-b)^+)\mid x\geqslant 0\},$$

$$(P_{13}^0)^{\#}:\ \min\{(b,u)\mid A^Tu\geqslant 0,\ 0\leqslant a\leqslant R\}$$

всегда разрешимы и

$$\operatorname{opt}P_{13}^0+\operatorname{opt}(P_{13}^0)^{\#}=0.$$

Если же в задаче P_{14} $c=0$, то она при $p=2$ преобразуется в задачу квадратичной аппроксимации системы $Ax\leqslant b$, $x\geqslant 0$:

$$P_{14}^0:\ \min\{\|(Ax-b)^+\|\mid x\geqslant 0\},$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Задача $P_{14}^{\#}$ примет вид

$$(P_{14}^0)^{\#}:\ \min\{(b,u)\mid A^Tu\geqslant 0,\ u\geqslant 0,\ \|u\|\leqslant R_0\}.$$

Справедлива

Теорема 13.7. *Задачи P_{14}^0 и $(P_{14}^0)^{\#}$ разрешимы и*

$$R_0\operatorname{opt}P_{14}^0+\operatorname{opt}(P_{14}^0)^{\#}=0.$$

Заметим, что анализ случая $c=0$ на основании предыдущих теорем двойственности прост, но он интересен с точки зрения двойственности для задач аппроксимации несовместных систем линейных неравенств.

§ 14. Двойственность для несобственных задач линейного программирования 2-го рода

Если L – несобственная задача ЛП 2-го рода, то L^* – несобственная задача ЛП 1-го рода. Поэтому применительно к L^* мы могли бы повторить все содержание предыдущего параграфа. Конечно, здесь потребовалось бы переосмысление содержательных аспектов некоторых фактов, в частности связей двойственности с вопросами аппроксимаций.

Ниже мы остановимся лишь на некоторых моментах, а именно на соотношении двойственности непосредственно и на формулах типа (13.5).

Несобственности 2-го рода соответствуют $M \neq \phi$, $M^* = \phi$, поэтому возможна реализация задач P и $P^\#$ в форме (11.11) и (11.12), т.е. в форме задач P_2 и $P_2^\#$. Интересны некоторые частные случаи задач P_2 и $P_2^\#$. Выпишем их:

$$P_{21}\colon\ \sup\{(c,x) \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0,\ \|x^1\|_q \leqslant r_0\},$$

$$P_{21}^\#\colon\ \inf\{(b,u) + r_0\|(c^1 - B_1^T u)^+\|_q^* \mid B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0\};$$

здесь $x^T = [x^0, x^1]$, $A^T = [B_0, B_1]$, $\|\cdot\|_q$ – монотонная норма пространства размерности вектора x^1;

$$P_{22}\colon\ \max\{(c,x) \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0,\ x_i \leqslant r_i\ (i = 1, \ldots, s_0)\};$$

$$P_{22}^\#\colon\ \min\{(b,u) + \sum_{i=1}^{s_0} r_i[c_i - (h_i,u)]^+ \mid B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0\};$$

$$P_{23}\colon\ \max\{(c,x) \mid Ax \leqslant b,\ 0 \leqslant x \leqslant r\},$$

$$P_{23}^\#\colon\ \min\{(b,u) + (r, (c - A^T u)^+) \mid u \geqslant 0\};$$

$$P_{24}\colon\ \max\{(c,x) \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0,\ \|x\|_q \leqslant r_0\},$$

$$P_{24}^\#\colon\ \inf\{(b,u) + r_0\|(c - A^T u)^+\|_q^* \mid u \geqslant 0\}.$$

Пары задач $\{P_{2i}, P_{2i}^\#\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ выписаны в параллель с парами $\{P_{1i}, P_{1i}^\#\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Для них справедливы соотношения двойственности (т.е. совпадение оптимальных значений).

Равенства (13.5) были соотнесены к задачам P_{12} и $P_{12}^\#$. Здесь мы приведем аналог этих соотношений применительно к P_{22} и $P_{22}^\#$. Если $\tilde{f}^*(c)$ – функция оптимума задачи $P_{22}^\#$ и оптимальный вектор $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n]^T$ задачи P_{22} определяется однозначно, то справедливы соотношения

$$\partial \tilde{f}^*(c)/\partial c_i = \tilde{x}_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

§ 15. Двойственность для несобственных задач применительно к разрешимым задачам линейного программирования

Основная теорема двойственности 11.1 и ее специальные случаи справедливы и для собственных, т.е. разрешимых задач линейного программирования. Причем эти теоремы не теряют свойства новизны, т.е. они и для разрешимых задач дают новую информацию. Эта информация смыкается с теоремами, раскрывающими смысл методов штрафных функций, методов аппроксимаций и т.д. В полной мере этот вопрос мы рассматривать не будем. Коснемся его в той части, которая имеет отношение к содержанию § 5, посвященного методу штрафных функций. Перепишем задачу (5.1) в форме

$$L_1:\ \max\{(c,x)|\ Ax\leqslant b,\ Bx\leqslant d,\ x\geqslant 0\}\ (=:\ \tilde{f}). \tag{15.1}$$

Будем считать ее разрешимой. Тогда двойственная к ней

$$L_1^*:\ \min\{(b,u)+(d,v)|\ A^Tu+B^Tv\geqslant c,\ [u,v]\geqslant 0\}\ (=:\ \tilde{f}^*)$$

также разрешима, причем $\tilde{f}=\tilde{f}^*$. В § 5 задаче (5.1) (следовательно, и задаче (15.1) при $M=\{x\geqslant 0|\ Bx\leqslant d\}\neq\phi$) была поставлена в соответствие задача (5.2), т.е.

$$C_1:\ \max\{(c,x)-\sum_{j=1}^{m_0}R_j\|(A_jx-b^j)^+\|_{p(j)}|\ Bx\leqslant d,\ x\geqslant 0\}(=:\ \tilde{f}_R). \tag{15.2}$$

В соответствии с отображением π, формирующим (#)-двойственность, для (15.2) можно сформировать (#)-двойственную задачу в следующем виде:

$$C_1^{\#}:\ \min\{(b,u)+(d,v)|\ A^Tu+B^Tv\geqslant c,\ [u,v]\geqslant 0,$$
$$\|u^j\|^*_{p(j)}\leqslant R_j\ (j=1,\ldots,m_0)\}\ (=:\ \tilde{f}^{\#}_R). \tag{15.3}$$

Задача (15.2) получена из (15.1) по методу штрафных функций, при этом условия $R_j>\|\tilde{u}^j\|^*_{p(j)}$ $(j=1,\ldots,m_0)$ гарантируют их эквивалентность; здесь $\tilde{u}^T=[\tilde{u}^1,\ldots,\tilde{u}^{m_0}]\in\operatorname{Arg}_u L^*$ (см. теорему 5.1).

Теперь может быть сформулирована более общая

Теорема 15.1 *Если* $R_j\geqslant\|\tilde{u}^j\|^*_{p(j)}$ $(j=1,\ldots,m_0)$, *то*

$$\tilde{f}=\tilde{f}^*=\tilde{f}_R=\tilde{f}^{\#}_R, \tag{15.4}$$

т.е. оптимальные значения задач L_1, L_1^*, C_1 *и* $C_1^{\#}$ *совпадают. Если же* $R_j\geqslant\geqslant\|\tilde{u}^j\|^*_{p(j)}$ $(j=1,\ldots,m_0)$, *то*

$$\operatorname{Arg}L_1=\operatorname{Arg}C_1,\quad \operatorname{Arg}C_1^{\#}\subset\operatorname{Arg}L_1^*. \tag{15.5}$$

На самом деле такого рода утверждений можно получить достаточно много, исходя из той или иной реализации отображения π и вида задания исходной задачи. Потребность в получении соответствующих утверждений может диктоваться чисто практическими соображениями, а последние подсказываются конкретным содержанием решаемой задачи и видом ее математической модели.

Приведем еще одну форму задач типа L_1, L_1^*, C_1 и $C_1^{\#}$, для которых справедливы соотношения вида (15.4) и (15.5). В качестве исходной возьмем задачу

$$L_2:\ \max\{(c,x)|\ A_1x\leqslant b^1,\ A_0x\leqslant b^0,\ x\geqslant 0\}.$$

Тогда

$$L_2^*:\ \min\{(b,u)|\ B_1^Tu\geqslant b^1,\ B_0^Tu\geqslant c^0,\ u\geqslant 0\};$$

здесь

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = [B_1 B_0], \ c^T = [c^1, c^0], \ b^T = [b^1, b^0].$$

Для L_2 и L_2^* аналогами задач C_1 и $C_1^\#$ будут

C_2: $\max\{(c,x) - (R, (A_1 x - b^1)^+) |\ A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0,\ x^1 \leqslant r\}$,

$C_2^\#$: $\min\{(b,u) + (r, (B_1^T u - c^1)^+) |\ B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0,\ u^1 \leqslant R\}$.

Здесь $0 \leqslant R \in E_{m_1}$ (m_1 – размерность вектора b^1), $0 \leqslant r \in E_{n_1}$ (n_1 – размерность вектора c^1), $u^T = [u^1, u^0]$, $x^T = [x_1, x^0]$.

Теорема 15.2. *Пусть* $\tilde{x} = [\tilde{x}^1, \tilde{x}^0] \in \mathrm{Arg}L_2$, $[\tilde{u}^1, \tilde{u}^0] \in \mathrm{Arg}L_2^*$. *Если* $R \geqslant \tilde{u}^1$, $r \geqslant \tilde{x}^1$, *то оптимальные значения задач* L_2, L_2^*, C_2 и $C_2^\#$ *совпадают. Если же* $R > \tilde{u}^1$, $r > \tilde{x}^1$, *то* $\mathrm{Arg}L_2 = \mathrm{Arg}C_2$, $\mathrm{Arg}C_2^\# \subset \mathrm{Arg}L_2^*$.

Возьмем задачи L_1 и L_1^* в форме

L: $\max\{(c,x) |\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$,

L^*: $\min\{(b,u) |\ A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}$

и будем считать одну из них (и, следовательно, обе) разрешимой. Зафиксируем частную реализацию задач C_1 и $C_1^\#$ применительно к L и L^*:

C: $\max\{(c,x) - (R, (Ax - b)^+) |\ x \geqslant 0\}$,

$C^\#$: $\min\{(b,u) |\ A^T u \geqslant c,\ 0 \leqslant u \leqslant R\}$.

Задача C есть частный случай задачи (5.2), возникшей при рассмотрении метода штрафных функций (а именно в (5.2) нужно положить $M = E_n^+$, $A_j = a_j$, $b_j = b^j$, т.е. $A_j x - b^j = (a_j, x) - b_j$).

Теорема 5.1. говорит о том, что при $R \in (\tilde{M} + E_m^+)^0$ справедливо равенство $\mathrm{Arg}L = \mathrm{Arg}C$, а при $R \in \tilde{M} + E_m^+$ гарантируется лишь $\mathrm{opt}L = \mathrm{opt}C$; выше $(\cdot)^0$ означает внутренность множества, стоящего в скобках.

Но что можно сказать о разрешимости задачи C, если $R \notin \tilde{M} + E_m^+$? Этот вопрос возникает в рамках анализа метода штрафных функций в форме задачи C при разрешимости задачи L. Ответ можно дать на основе теоремы двойственности, связывающей задачи C и $C^\#$.

Теорема 15.3 *Задача C разрешима тогда и только тогда, когда система неравенств*

$$A^T u \geqslant c,\ 0 \leqslant u \leqslant R,$$

совместна.

Применительно к задаче C_1 эта теорема приобретает следующий вид: задача C_1 разрешима тогда и только тогда, когда система ограничений в $C_1^\#$ совместна, т.е совместна система неравенств

$$A^T u + B^T v \geqslant c,\ [u, v] \geqslant 0,\ \|u^j\|_{p(j)}^* \leqslant R_j,\ j = 1, \ldots, m_0.$$

§ 16. Характеристика оптимальных решений задач P и $P^{\#}$

В этом параграфе мы остановимся на характеризации оптимальных решений задач P и $P^{\#}$, т.е. (11.3) и (11.4). Такая характеризация вбирает условия оптимальности для допустимых векторов $\bar{x}$ и $\bar{u}$, свойство их стационарности, аппроксимационный смысл, а также интерпретацию вектора $\tilde{u} \in \mathrm{Arg}P^{\#}$ через маргинальные значения функции оптимума $\tilde{f}_{R,r}(s)$ задачи P; здесь $s = [c, A, b]$.

Ниже будет идти речь о несобственных задачах (11.1) и (11.2). При неотрицательных x и u векторы $(Ax - b)^+$ и $(c - A^T u)^+$ дают невязки для систем ограничений этих задач. Введем для невязок обозначения $\Delta_x b$ и $\Delta_u c$ соответственно. Если зафиксировать $\bar{x} \geqslant 0$ и $\bar{u} \geqslant 0$, то задачи

$$\max\{(c - \Delta_{\bar{u}} c, x) \mid Ax \leqslant b + \Delta_{\bar{x}} b, \ x \geqslant 0\}, \tag{16.1}$$

$$\min\{(c + \Delta_{\bar{x}} b, u) \mid A^T u \geqslant c + \Delta_{\bar{u}} c, u \geqslant 0\} \tag{16.2}$$

являются взаимно двойственными и разрешимыми.

Вектор $[\bar{x}, \bar{u}] \geqslant 0$ будем называть стационарным для (11.1) и (11.2), если $\bar{x} \in \mathrm{Arg}\,(16.1)$ и $\bar{u} \in \mathrm{Arg}\,(16.2)$.

Легко видеть, что вектор $[\bar{x}, \bar{u}] \geqslant 0$ стационарен тогда и только тогда, когда он является решением уравнения

$$(c - (c - A^T u)^+, x) = (b + (Ax - b)^+, u). \tag{16.3}$$

Ниже задачи P и $P^{\#}$ – это задачи (11.3) и (11.4).

Теорема 16.1 *Если* $[\bar{x}, \bar{u}] \in \mathrm{Arg}P \times \mathrm{Arg}P^{\#}$, *то вектор* $[\bar{x}, \bar{u}]$ *является стационарным, т.е. удовлетворяет уравнению* (16.3).

Однако стационарный вектор $[\bar{x}, \bar{u}] \geqslant 0$ не обязан давать оптимальные решения задач P и $P^{\#}$, т.е. не обязательно $\bar{x} \in \mathrm{Arg}P$ и $\bar{u} \in \mathrm{Arg}P^{\#}$. Но если $\bar{x}$ удовлетворяет неравенствам системы $A_0 x \leqslant b^0$ и $\bar{u}$ – неравенствам системы $B_0^T u \geqslant c^0$, причем выполняются условия

$$((A_j\bar{x} - b^j)^+, \bar{u}^j) = \|(A_j\bar{x} - b^j)^+\|_{p(j)} \cdot \|\bar{u}^j\|^*_{p(j)}, \quad j = 1, ..., m_0,$$

$$((c^i - B_i^T\bar{u})^+, \bar{x}^i) = \|(c^i - B_i^T\bar{u})^+\|_{q(i)} \cdot \|\bar{x}^i\|^*_{q(i)}, \quad i = 1, ..., n_0,$$

то $\bar{x}$ – оптимальный вектор задачи P и $\bar{u}$ – оптимальный вектор задачи $P^{\#}$, в которых положено

$$R_j = \|\bar{u}^j\|^*_{p(j)}, \quad j = 1, ..., m_0, \quad r_i = \|\bar{x}^i\|_{q(i)}, \quad i = 1, ..., n_0.$$

Для оптимальности векторов $\bar{x} \geqslant 0$ и $\bar{u} \geqslant 0$ в задачах P и $P^{\#}$ можно выписать необходимые и достаточные условия, однако они достаточно громоздки. Поэтому мы ограничимся случаем задач P_0 и $P_0^{\#}$, т.е. (11.5) и (11.6).

Теорема 16.2. *Пусть* $0 \leqslant \bar{x} \leqslant r$ *и* $0 \leqslant \bar{u} \leqslant R$. *Векторы* $\bar{x}$ *и* $\bar{u}$ *тогда и только тогда оптимальны для* P *и* $P^{\#}$, *когда выполняются соотношения*

$$(A\bar{x} - b - (A\bar{x} - b)^+, \bar{u}) = 0, \quad ((c - A^T\bar{u})^+, \bar{x} - r) = 0,$$

$$(c - A^T\bar{u} - (c - A^T\bar{u})^+, \bar{x}) = 0, \quad ((A\bar{x} - b)^+, \bar{u} - R) = 0.$$

Предположим, что P и $P^{\#}$ суть l-задачи, т.е. в них все нормы $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$ вида $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$. В задаче P положим

$$R_j = R_0 v_j, \quad v_j > 0, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{m_0} v_j \|(A_j x - b^j)^+\|_{p(j)}.$$

Напомним ранее введенное обозначение

$$M(r) = \{ x \geqslant 0 \mid A_0 x \leqslant b^0, \quad \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i \quad (i = 1, \ldots, n_0)\}.$$

Пусть

$$\widetilde{M}(R_0, r) = \operatorname{Arg}\max\{ f_0(x) \mid x \in M(r)\}.$$

Выпишем задачу

$$\max\{(c, x) \mid x \in \widetilde{M}(R_0, r)\}. \tag{16.4}$$

Теорема 16.3. *Если P – l-задача, то при достаточно большом $R_0 > 0$*

$$\operatorname{Arg}(16.4) = \operatorname{Arg} P,$$

причем в этом случае в P параметры R_j и v_j связаны соотношением $R_j = R_0 v_j$ $(j = 1, \ldots, m_0)$.

Эта теорема разъясняет аппроксимационный смысл задачи P, а именно: вначале решается задача минимизации невязки $f_0(x) = \sum_{j=1}^{m_0} v_j \|(A_j x - b^j)^+\|_{p(j)}$ на множестве $M(r)$, а затем на аппроксимационном множестве $\widetilde{M}$ последней отыскивается максимум функции (c, x). Смысл теоремы состоит в том, что сформулированная двухэтапная задача эквивалентна задаче P.

На самом деле при подходящем выборе параметров R_j $(j = 1, \ldots, m_0)$ задача P будет эквивалентна заключительной из задач:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \min\{\|(A_1 x - b^1)^+\|_{p(1)} \mid x \in M(r)\},\\
&(2) \quad \min\{\|(A_2 x - b^2)^+\|_{p(2)} \mid x \in \operatorname{Arg}(1)\},\\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(m_0) \quad \min\{\|(A_{m_0} x - b^{m_0})^+_{p(m_0)} \mid x \in \operatorname{Arg}(m_0 - 1)\},\\
&\qquad \max\{(c, x) \mid x \in \operatorname{Arg}(m_0)\}.
\end{aligned} \tag{16.5}
$$

Это соответствует методу последовательной коррекции, который будет рассмотрен в гл. IV.

Задачу P, т.е. (11.3), можно эквивалентно переписать в форме

$$
\begin{aligned}
&\sup\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|t^j\|_{p(j)} \mid A_j x \leqslant b^j + t^j, \ A_0 x \leqslant b^0,\\
&[x, t^1, \ldots, t^{m_0}] \geqslant 0, \ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i \ (j = 1, \ldots, m_0; \ i = 1, \ldots, n_0)\}.
\end{aligned} \tag{16.6}
$$

Для нее образуем функцию Лагранжа

$$F(x; t; u; s) =$$

$$= (c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|t^j\|_{p(j)} - \sum_{j=1}^{m_0} (u^j, A_j x - t^j - b^j),$$

отразив в ней не все ограничения, а только $A_j x - t^j \leqslant b^j$ ($j = 1, \ldots, m_0$); здесь $s = [c, A, b]$.

Задача (16.6) эквивалентна задаче

$$\sup_{\substack{x \in M(r) \\ t \geqslant 0}} \inf_{u \geqslant 0} F(x, t, u; s), \tag{16.7}$$

где

$$M(r) = \{ x \geqslant 0 \mid A_0 x \leqslant b^0, \ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i \ \ (i = 1, \ldots, n_0)\},$$

$$u^T = [u^1, \ldots, u^{m_0}], \ \ t = [t^1, \ldots, t^{m_0}].$$

Т е о р е м а 16.4. *В условиях теоремы* 12.1

$\mathrm{Arg} P^{\#} = \mathrm{Arg}_u$ (16.7).

Если l – любое ненулевое направление в пространстве размерности вектора $s = [c, A, b]$, то с использованием формулы (4.17) получается

Т е о р е м а 16.5. *Пусть оптимальные множества* $\mathrm{Arg} P$ *и* $\mathrm{Arg} P^{\#}$ *не пусты и ограничены. Справедлива формула*

$$\frac{\partial \tilde{f}_{R,r}(s)}{\partial l} = \max_{x \in \mathrm{Arg} P} \ \min_{u \in \mathrm{Arg} P^{\#}} [(c, x) + (b - Ax, u)]. \tag{16.8}$$

В частности, если $\mathrm{Arg} P = \{ \tilde{x} \}$, $\mathrm{Arg} P^{\#} = \{ \tilde{u} \}$, т.е. задачи P и $P^{\#}$ однозначно разрешимы, то

$$\frac{\partial \tilde{f}_{R,r}(s)}{\partial b_j} = \tilde{u}_j, \quad \frac{\partial \tilde{f}_{R,r}(s)}{\partial c_i} = \tilde{x}_i, \quad \frac{\partial \tilde{f}_{R,r}(s)}{\partial a_{ji}} = -\tilde{u}_j \tilde{x}_i,$$

$$j = 1, \ldots, m; \ \ i = 1, \ldots, n.$$

МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Коррекция несобственных задач ЛП так или иначе связана с аппроксимацией несовместных систем линейных неравенств. Рассмотрим этот вопрос особо.

§ 17. Аппроксимация несовместных систем линейных неравенств

Пусть задана произвольная система линейных неравенств, разбитая на две подсистемы

$$Ax \leqslant b, \qquad Bx \leqslant d, \qquad x \geqslant 0 \tag{17.1}$$

так, что $Q = \{x \geqslant 0 \mid Bx \leqslant d\} \neq \phi$, т.е. подсистема $Bx \leqslant d$, $x \geqslant 0$ совместна. Эта подсистема может быть и пустой (т.е. подсистема не выделяется).

Вектор $(Ax - b)^+ \in E_m$ есть вектор невязок подсистемы $Ax \leqslant b$, отвечающий вектору $x \in E_n$. Вектору невязок можно поставить в соответствие меру невязки $d((Ax - b)^+)$.

Пусть задана функция $d(y)$, определенная на $E_m^+ = \{y \geqslant 0 \mid y \in E_m\}$ и обладающая свойствами: $d(0) = 0$; $d(y) > 0$ при $0 \neq y \geqslant 0$; $d(y) \geqslant d(z)$ при $y \geqslant z \geqslant 0$. С помощью функции $d(y)$ сформируем функцию невязки $g(x) = d([Ax - b]^+)$ для системы $Ax \leqslant b$. Задачу аппроксимации системы (9.1) можно теперь поставить в таком виде:

$$\min\{g(x) \mid x \in Q\} \qquad (=: \tilde{g}). \tag{17.2}$$

В (17.2) $\tilde{g} = 0$ тогда и только тогда, когда система (9.1) совместна. Число $\tilde{g}$ называется *уклонением системы* (17.1) на Q по функции невязки $g(x)$.

Приведем примеры функций невязки $g(x)$:

1) $g_0(x) = \|(Ax - b)^+\|_0$;

2) $g_1(x) = \|(Ax - b)^+\|_1$;

3) $g_2(x) = \|(Ax - b)^+\|^2$;

4) $g_3(x) = (r, (Ax - b)^+)$.

Здесь $\|z\|_0 = \|[z_1, \ldots, z_m]\|_0 = \max\limits_j |z_j|$, $\|z\|_1 = \sum\limits_{j=1}^m |z_j|$, $\|z\| = (\sum\limits_{j=1}^m z_j^2)^{1/2}$, $r = [r_1, \ldots, r_m] > 0$.

Приведем одну из конкретных процедур отыскания невязки системы (17.1) при $Q = E_n^+$ и

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} r_j l_j^{+2}(x),$$

где $l_j(x) = (a_j, x) - b_j$, a_j – j-я строка матрицы A, $b = [b_1, \ldots, b_m]^T$. Этому соответствует запись задачи (17.2) в виде

$$\min_{x \geqslant 0} \sum_{j=1}^{m} r_j [l_j^+(x)]^2 \quad (=: E). \tag{17.3}$$

Если система линейных ограничений записана в канонической форме

$$Ax = b, \qquad x \geqslant 0,$$

то ее квадратичная аппроксимация, соответствующая постановке (17.3), примет вид

$$\min_{x \geqslant 0} \sum_{j=1}^{m} r_j l_j^2(x).$$

Построим отображение (фейеровское [9]) $x \to \varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \left[x - \frac{\lambda}{\delta} \sum_{j=1}^{m} r_j l_j^+(x) a_j \right]^+; \tag{17.4}$$

здесь $0 < \lambda \leqslant 1$, $\delta = \sum_{j=1}^{m} r_j \|a_j\|^2$. Исходя из произвольного начального вектора x_0, можно индуктивно породить последовательность $\{x^k\}_0^{+\infty}$ с помощью рекуррентного соотношения $x^{k+1} = \varphi(x^k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Построенная последовательность сходится к точке $\bar{x} \geqslant 0$ минимума функции $g(x)$; следовательно, $\lim_{k \to \infty} g(x^k) = E$, где E определено согласно (17.3) [9].

Выпишем аналог процесса (17.4) для системы смешанного вида:

$$l_j(x) = 0, \; j \in J_1; \qquad l_j(x) \leqslant 0, \; j \in J_2, \tag{17.5}$$

но с регуляризацией (по Тихонову). Если положить $g(x) = \sum_{j \in J_1} r_j l_j^2(x) + \sum_{j \in J_2} r_j l_j^{+2}(x)$, то минимизирующий эту функцию процесс запишется в виде

$$x^{k+1} = \varphi_g(x^k), \tag{17.6}$$

где $\varphi_g(x) = x - \dfrac{\lambda}{\delta} \left[\sum_{j \in J_1} r_j l_j(x) a_j + \sum_{j \in J_2} r_j l_j^+(x) a_j \right]$.

Регуляризация функции $g(x)$ будет состоять в добавлении к ней слагаемого $\epsilon \|x\|^2$, $\epsilon > 0$. Тогда точка минимума функции

$$g_\epsilon(x) = g(x) + \epsilon \|x\|^2$$

будет аппроксимировать проекцию нуля на $\operatorname{Arg}\min_x g(x)$, причем тем точней, чем меньше $\epsilon > 0$. Процесс минимизации функции $g_\epsilon(x)$ в соответствии с (17.6) будет задаваться рекуррентным соотношением

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\lambda}{d}\,[\sum_{j\in J_1} r_j l_j(x^k)\,a_j + \sum_{j\in J_2} r_j l_j^+(x^k)\,a_j + \epsilon x^k],$$

где $d = \delta + \epsilon n$, $0 < \lambda \leqslant 1$. Выписанный процесс поиска точки минимума функции $g_\epsilon(x)$ является устойчивым относительно вариации данных системы (17.5), т.е. ее коэффициентов и свободных членов.

Процесс $x^{k+1} = \varphi(x^k)$ в силу итерационного оператора (17.4) при $r_j = 1$ ($j = 1, \ldots, m$) минимизирует, как уже было сказано, функцию невязки $g_2(x)$ системы (17.1). Отыскание минимума функций невязок $g_0(x)$, $g_1(x)$ и $g_3(x)$ сводится к решению некоторых задач линейного программирования. Выпишем эти задачи. Задача (17.2) при $g(x) = g_0(x)$ эквивалентна задаче ЛП

$$\min\{t \mid l_j(x) \leqslant t,\ \ t \geqslant 0,\ \ x \in Q\ \ (j = 1, \ldots, m)\};$$

при $g(x) = g_1(x)$ – задаче ЛП

$$\min\{\sum_{j=1}^m t_j \mid l_j(x) \leqslant t_j,\ \ t_j \geqslant 0,\ \ x \in Q\ \ (j = 1, \ldots, m)\};$$

при $g(x) = g_3(x)$ – задаче ЛП

$$\min\{\sum_{j=1}^m r_j t_j \mid l_j(x) \leqslant t_j,\ \ t_j \geqslant 0,\ \ x \in Q\ \ (j = 1, \ldots, m)\}.$$

К вопросу аппроксимации несовместной системы линейных неравенств (пусть (17.1)) можно подойти не только с описанных позиций, т.е. с позиций задачи (17.2). Можно предложить подход на основе паретовской минимизации вектора невязки $(Ax - b)^+$ на множестве $Q = \{x \geqslant 0 \mid Bx \leqslant d\} \neq \phi$ (см. § 6), т.е.

$$\min\nolimits_\pi \{(Ax - b)^+ \mid Bx \leqslant d,\quad x \geqslant 0\}. \tag{17.7}$$

Хотя бы одну точку $\tilde{x}$, реализующую такую аппроксимацию, можно найти (как это объяснено в § 6) согласно задаче

$$\min\{(v, (Ax - b)^+) \mid Bx \leqslant d,\ \ x \geqslant 0\},$$

где $v > 0$. Последняя же имеет вид задачи (17.2) при $g(x) = (v, (Ax - b)^+)$, т.е. вид функции $g_3(x)$. Если требуется найти специальное решение задачи (17.7), например такое, которое минимизирует какой-либо функционал (c^0, x), то достаточно перейти к задаче

$$\min\{(c^0, x) + (v, (Ax - b)^+) \mid Bx \leqslant d,\ \ x \geqslant 0\}.$$

Смысл этой редукции изложен в § 6.

§ 18. Метод параметризации

Существо этого метода было изложено в § 9. Здесь мы рассмотрим его различные реализации применительно к несобственным задачам ЛП.

Перепишем задачу (7.1) в виде

$$L: \max \{ l_0(x) \mid l_j(x) \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \quad x \geqslant 0 \} ; \tag{18.1}$$

здесь $l_0(x) = (c, x)$, $l_j(x) = (a_j, x) - b_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Эта задача разными способами может быть параметризирована, т.е. погружена в класс параметрических задач

$$L_y: \max \{ l_0[y](x) \mid l_j[y](x) \leqslant 0 \ (j = 1, \ldots, m), \quad x \geqslant 0 \} , \tag{18.2}$$

где y – векторный параметр с некоторой областью определения Y, при некотором значении которого $y = y_0$ задача (18.2) превращается в задачу (18.1), т.е. $l_0[y_0](x) \equiv l_0(x)$, $l_j[y_0](x) \equiv l_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Пусть

$$Y_0 = \{ y \in Y \mid \text{ задача (18.2) разрешима} \} .$$

Выбрав тем или иным образом функцию $\varphi(y)$ – *функцию качества аппроксимации*, мы можем поставить задачу

$$\min \{ \varphi(y) \mid y \in Y_0 \} . \tag{18.3}$$

Если $\tilde{y} \in \operatorname{Arg}$ (18.3), то задачей, аппроксимирующей (18.1) по критерию $\varphi(y)$, будет

$$\max \{ l_0[\tilde{y}](x) \mid l_j[\tilde{y}](x) \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \quad x \geqslant 0 \} . \tag{18.4}$$

Рассмотрим некоторые способы параметризации задачи (18.1) и соответствующих ее коррекций.

18.1. Поставим в соответствие задаче (18.1) (т.е. задаче (7.1)) задачу

$$L_\Delta: \max \{ (c - \Delta c, x) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad x \geqslant 0 \} ,$$

роль параметра в которой играет $y = [\Delta c, \Delta b]$. Выбрав в качестве $\varphi(y)$, например, одну из функций $\| \Delta c \|_i + \| \Delta b \|_i$ $(i = 0, 1)$, задачу аппроксимации (18.3) можно будет переписать в таком виде:

$$\min \{ \| \Delta c \|_i + \| \Delta b \|_i \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad [x, \Delta b] \geqslant 0,$$

$$A^T u \geqslant c - \Delta c, \quad [u, \Delta c] \geqslant 0 \} , \quad i = 0, 1. \tag{18.5}$$

Действительно, в рассматриваемом случае

$$Y_0 = \{ [\Delta c, \Delta b] \geqslant 0 \mid M(\Delta b) \neq \phi, \quad M^*(\Delta c) \neq \phi \} ,$$

где $M(\Delta b) = \{ x \mid Ax \leqslant b + \Delta b, x \geqslant 0 \}$, $M^*(\Delta c) = \{ u \mid A^T u \geqslant c - \Delta c, u \geqslant 0 \}$. Отсюда и следует правомерность перезаписи задачи (18.3) в форме (18.5).

Задача (18.5), как легко видеть, разбивается на две самостоятельные задачи:

$$\min \{ \| \Delta b \|_i \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \ [x, \Delta b] \geqslant 0 \} , \tag{18.6}$$

$$\min \{ \| \Delta c \|_i \mid A^T u \geqslant c - \Delta c, \quad [u, \Delta c] \geqslant 0 \} , \tag{18.7}$$

$i = 0, 1.$

Заметим, что если L – НЗ ЛП 1-го рода, то минимум в (18.6) равен нулю; если же L – НЗ ЛП 2-го рода, то минимум в (18.7) равен нулю. В случае, когда L – НЗ ЛП 3-го рода, минимумы в (18.6) и (18.7) положительны. Последнее говорит о том, что в случае НЗ ЛП 3-го рода требуется корректировка как вектора b, так и вектора c.

Рассмотренная здесь коррекция алгоритмически реализуется в рамках методов ЛП. Действительно, пусть в (18.6) $i = 0$, т.е. $\| \Delta b \|_0 = \max\limits_j | \Delta b_j |$.

Тогда (18.6) можно переписать в форме задачи ЛП:

$$\min \{ t \mid \Delta b_j \leqslant t \quad (j = 1, \ldots, m), \quad Ax \leqslant b + \Delta b, \quad [x, \Delta b] \geqslant 0 \}.$$

Последнюю можно решить любым из методов ЛП.

Если $i = 1$, то (18.6) переписывается в виде

$$\min \{ \sum_{j=1}^{m} t_j \mid \Delta b_j \leqslant t_j \quad (j = 1, \ldots, m), \quad Ax \leqslant b + \Delta b, \quad [x, \Delta b] \geqslant 0 \}.$$

Это также задача ЛП с переменным вектором $[x, \Delta b, t_1, \ldots, t_m]$.

Задачу (18.7) аналогичным образом можно свести к линейной программе.

18.2. Рассмотрим параметризацию в форме задачи L_Δ с выбором критерия аппроксимации $\varphi(y) = (r, \Delta b) + (R, \Delta c)$, где

$$r = [r_1, \ldots, r_m] > 0, \qquad R = [R_1, \ldots, R_n] > 0.$$

Тогда задача аппроксимации (18.3) запишется в форме

$$\min \{ (r, \Delta b) + (R, \Delta c) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \ [x, \Delta b] \geqslant 0,$$
$$A^T u \geqslant c - \Delta c, \ [u, \Delta c] \geqslant 0 \}.$$

Она распадается на две самостоятельных задачи ЛП:

$$\min \{ (r, \Delta b) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \ [x, \Delta b] \geqslant 0 \}, \tag{18.8}$$

$$\min \{ (R, \Delta c) \mid A^T u \geqslant c - \Delta c, \ [u, \Delta c] \geqslant 0 \}. \tag{18.9}$$

Если L – НЗ ЛП 1-го рода, то в задаче (18.9) минимум достигается при $\widetilde{\Delta c} = 0$, и дело сводится к решению задачи (18.8). Если же L – НЗ ЛП 2-го рода, то минимум в (18.8) достигается при $\widetilde{\Delta b} = 0$, при этом необходимо решить задачу (18.9).

Если $\widetilde{\Delta b} \in \operatorname{Arg}$ (18.8), $\widetilde{\Delta c} \in \operatorname{Arg}$ (18.9), то для задачи L скорректированной будет задача

$$\max \{ (c - \widetilde{\Delta c}, x) \mid Ax \leqslant b + \widetilde{\Delta b}, \ x \geqslant 0 \}, \tag{18.10}$$

а для L^* – задача

$$\min \{ (b + \widetilde{\Delta b}, u) \mid A^T u \geqslant - c - \Delta\widetilde{c}, \quad u \geqslant 0 \}. \tag{18.11}$$

Таким образом, коррекция задачи L по критерию $\varphi(y) = (r, \Delta b) + (R, \Delta c)$ сводится к решению задач (18.8) и (18.9), а затем (18.10) и (18.11). В случае НЗ ЛП 1-го рода необходимо решить (18.8), а затем (18.10) при $\widetilde{\Delta c} = 0$, т.е.

$$\max \{ (c, x) \mid Ax \leqslant b + \widetilde{\Delta b}, \ x \geqslant 0 \}. \tag{18.12}$$

В случае же НЗ ЛП 2-го рода надо решить (18.9), а затем (18.11) при $\widetilde{\Delta b} = 0$, т.е.

$$\max \{ (c - \widetilde{\Delta c}, x) \mid Ax \leqslant b, \ \ x \geqslant 0 \} . \tag{18.13}$$

Следовательно, в рассматриваемых случаях анализ несобственной задачи ЛП носит двухэтапный характер: вначале решается задача коррекции модели (на основе параметризации), а потом ищется решение откорректированной задачи. Возникает вопрос: нельзя ли эти два этапа соединить в одной задаче? Оказывается, можно.

18.3. Рассмотрим задачу ЛП в записи

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b, \ x \in Q\} , \tag{18.14}$$

где Q – многогранник, заданный системой линейных неравенств. Если $Q = E_n^+$, то задача (18.14) превращается в задачу L, т.е. в (18.1). Пусть (18.14) – НЗ ЛП 1-го рода. Поставим ей в соответствие задачу

$$\max \{(c, x) - r_0 (r, (Ax - b)^+ \mid x \in Q \} , \tag{18.15}$$

где $r = [r_1, \ldots, r_m] > 0, r_0 > 0$ – скалярная величина. Последняя задача может быть переписана в виде

$$\max \{(c, x) - r_0 (r, \Delta b) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \ x \in Q, \ \Delta b \geqslant 0 \} . \tag{18.16}$$

Задача (18.16) реализует соединение двух этапов коррекции, описанных в п. 18.2:

$$\min \{(r, \Delta b) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \ \ x \in Q, \ \Delta b \geqslant 0 \} , \tag{18.17}$$

$$\max \{ (c, x) \mid Ax \leqslant b + \widetilde{\Delta b}, \ \ x \in Q \} , \tag{18.18}$$

где $\widetilde{\Delta b} \in \operatorname{Arg}$ (18.17). При $Q = E_n^+$ это задачи (18.8) и (18.12).

Т е о р е м а 18.1. *Если* (18.14) – *НЗ ЛП* 1-*го рода, то при достаточно большом* $r_0 > 0$ *задача* (18.16) *эквивалентна задаче* (18.18) *в смысле совпадения множества тех* $\tilde{x}$, *на которых достигается в этих задачах экстремум.*

Рассмотрим аналогично случай НЗ ЛП 2-го рода. Пусть в (18.14) $Q = E_n^+$. Тогда надлежит соединить в одну задачи (18.9) и (18.11) при $\widetilde{\Delta b} = 0$. Это реализует задача

$$\min \{(b, u) + R_0 (R, (c - A^T u)^+) \mid x \geqslant 0\},$$

или, в другой записи,

$$\min \{(b, u) + R_0 (R, \Delta c) \mid A^T u \geqslant c - \Delta c, \ [u, \Delta c] \geqslant 0\} . \tag{18.19}$$

Т е о р е м а 18.2. *Если* (18.14) *при* $Q = E_n^+$ – *НЗ ЛП* 2-*го рода, то при достаточно большом* $R_0 > 0$ *задачи* (18.19) *и* (18.11) *при* $\widetilde{\Delta b} = 0$ *эквивалентны в смысле совпадения множеств тех* $\tilde{u}$, *на которых достигается в этих задачах экстремум.*

Обратим внимание на частный случай способа коррекции несовместной системы ограничений (пусть в форме (18.8)). Можно зафиксировать вектор $\overline{\Delta b} > 0$ и в качестве приращения вектора b рассматривать $\Delta b = t\overline{\Delta b}$, где t – параметр. Тогда задача (18.8) запишется так:

$$\min\{t(r, \overline{\Delta b}) \mid Ax \leqslant b + t\overline{\Delta b} \quad [x, t] \geqslant 0\}.$$

Аналогично задача (18.9) заменится на

$$\min\{\mu(R, \overline{\Delta c}) \mid A^T u \geqslant c - \mu\overline{\Delta c}, \ [u, \mu] \geqslant 0\},$$

где $\overline{\Delta c} > 0$ – фиксированный вектор.

Векторы $\overline{\Delta b}$ и $\overline{\Delta c}$ задают пропорции возможных вариаций (изменений) вектора b (вектора ресурсов) и вектора c (вектора цен на ресурсы).

Остановимся еще на случае коррекции задачи (18.14) при ее параметризации в виде

$$\max\{(c, x) \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad x \in Q\} \tag{18.20}$$

и при $\varphi(\Delta b) = \|\Delta b\|^2$. Пусть $Q = \{x \geqslant 0 \mid Bx \leqslant d\} \neq \phi$ и $A^T u + B^T v \geqslant c$, $[u, v] \geqslant 0$ – совместная система, т.е. (18.4) – несобственная задача ЛП 1-го рода.

Корректирующая задача может быть записана в виде

$$\min\{\|(\Delta b)^+\|^2 \mid Ax \leqslant b + \Delta b, \quad x \in Q\}$$

или

$$\min\{\|(Ax - b)^+\|^2 \mid Bx \leqslant d, \ x \geqslant 0\}.$$

Последняя эквивалентна (асимптотически при $r \to +\infty$) задаче

$$\min_{x \geqslant 0}\{\|(Ax - b)^+\|^2 + r\|(Bx - d)^+\|^2\}. \tag{18.21}$$

Вид этой задачи совпадает с (17.3), поэтому для ее решения можно применить фейеровский метод, изложенный для (17.3) (см. § 17).

18.4. Существенно более трудными (и в смысле теоретического анализа, и в смысле алгоритмов) является вопрос о коррекции задачи (7.1) в случае, когда параметризация ее осуществляется по всему массиву исходной информации. Этот вопрос был изучен А.А. Ватолиным [10, § 12, 13]. Его можно свести к аппроксимации симметрической задачи, поставленной в соответствие исходной модели ЛП, т.е. к аппроксимации некоторой системы линейных неравенств.

Итак, рассмотрим в качестве объекта аппроксимации систему линейных неравенств в форме

$$Ax \leqslant b, \quad x \in M_0, \tag{18.22}$$

а также в форме

$$Ax = b, \quad x \in M_0. \tag{18.23}$$

Здесь $A = [\alpha_{ji}]_{m,n}$, $b = [b_1, \ldots, b_m]^T \in \mathbf{R}^m$, $M_0 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid A_0 x \leqslant b^0\} \neq \phi$, $A_0 = [\alpha^0_{ji}]_{m',n}$, $b^0 \in \mathbf{R}^{m'}$.

Системам (18.22), (18.23) поставим в соответствие системы

$$(A + H)x \leqslant b - p, \quad x \in M_0, \tag{18.24}$$

$$(A + H)x = b - p, \quad x \in M_0, \tag{18.25}$$

где $H = [h_{ji}]_{m,n}$, $p = [h_{1,n+1}, \ldots, h_{m,n+1}]^T \in \mathbf{R}^m$ – матрица и вектор параметров. Введем обозначения:

$$h_j = [h_{j1}, \ldots, h_{j,n+1}]^T \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$[H, p] = [h_{ji}]_{m, n+1},$$

$$h = [h_{11}, \ldots, h_{1,n+1}, h_{21}, \ldots, h_{m,n+1}] \in \mathbf{R}^{m(n+1)},$$

$$K_1 = \{ h \mid \text{система (18.24) совместна} \},$$

$$K_2 = \{ h \mid \text{система (18.25) совместна} \}.$$

Задачи аппроксимации систем (18.22), (18.23) запишем соответственно в виде

$$D_i\colon \ \inf \{ \Phi(h) \mid h \in K_i \cap S \} \quad (=: \sigma_i), \qquad i = 1, 2.$$

где $\Phi(h)$ – функция качества аппроксимации, $S \subset \mathbf{R}^{m(n+1)}$.

В дальнейшем будем считать, что Φ и S удовлетворяют следующим условиям:

$$\Phi(h) = \varphi(\Psi(h_1), \ldots, \Psi(h_m)),$$

$$S = \underbrace{P \times P \times \ldots \times P}_{m} \subset \mathbf{R}^{m(n+1)}, \qquad P \subset \mathbf{R}^{n+1},$$

где функция Ψ и множество P таковы, что для любого неотрицательного числа γ выполняется

$$Q(\gamma) = P \cap \{ u \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \Psi(u) \leqslant \gamma \} = \gamma Q,$$

$Q = Q(1)$ – выпуклое полиэдральное множество, содержащее начало координат и ограниченное, $Q \neq \{0\}$, $\Psi(0) = 0$. Например, Ψ может быть выпуклой кусочно линейной положительно однородной функцией, отображающей $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}_+$, а P – выпуклым полиэдральным конусом с вершиной в начале координат. Заметим, что на вид функции φ мы пока никаких ограничений не накладываем.

Ниже формулируются теоремы, заключающие в себе методы решения задач D_1 и D_2 соответственно. Каждый из этих методов представляет собой схему, по которой решение задачи D_1 или D_2 (с билинейными ограничениями) сводится к решению конечного набора задач (18.26) или (18.30) соответственно, в которых ограничения линейны, а в качестве целевой функции выступает функция φ. В частности, если φ выпукла, то решение задач D_1, D_2 сведется к решению задач выпуклого программирования (ВП) с линейными ограничениями, если же φ выпукла и кусочно линейна – к решению задач ЛП.

Введем ряд обозначений. Пусть

$$t = [t_1, \ldots, t_m] \in \mathbf{R}^m,$$

$$u = [u_1, \ldots, u_{n+1}]^T,$$

$$d_j = [a_{j1}, \ldots, a_{jn}, -b_j]^T, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$B = [A_0, -b^0].$$

Пусть, далее, $C = \{c^1, \ldots, c^{l_0}\}$ – произвольное подмножество совокупности вершин выпуклого полиэдрального множества Q, обладающее свойством

$$\forall \bar{u} \in U = \{u = [x_1, \ldots, x_n, 1]^T \mid x \in M_0\}, \qquad \exists c^l \in C:$$

$$c^l \in \operatorname{Arg\,min}\{(\bar{u}, u) \mid u \in Q\}.$$

Положив $L = \{1, \ldots, l_0\}$, обозначим

$$T_1 = \{t \mid \exists h \in K_1 \cap S,\ t_j = \Psi(h_j)\ \ (j = 1, \ldots, m)\},$$

$$K_1(l) = \{t \mid\ t \geqslant 0,\ t_j \geqslant (d_j, u)\ \ (j = 1, \ldots, m),\ Bu \leqslant 0,$$

$$u_{n+1} > 0,\ (c^l, u) = -1\},\quad l \in L,\quad T_2 = \bigcup_{l \in L} K_1(l),$$

$$G_1(t) = \{h \in K_1 \cap S \mid \Psi(h_j) \leqslant t_j \quad (j = 1, \ldots, m)\},$$

$$M_1(h) = \{x \in M_0 \mid (A + H)x \leqslant b - p\}.$$

Вектор $h(t, l)$ определим посредством соотношений

$$h_j(t, l) = t_j c^l, \qquad l = 1, \ldots, l_0.$$

Пусть функция φ определена на $\mathbf{R}^m_+$; $\widetilde{K}_1$ и $V_1(l)$ $(l \in L)$ – оптимальные множества задачи D_1 и задач

$$\inf\{\varphi(t) \mid t \in K_1(l)\}\ \ (:= v_1(l)),\quad l \in L. \tag{18.26}$$

Положим $v_1 = \min\{v_1(l) \mid l \in L\}$ (если $\exists l$, $v_1(l) = -\infty$, то $v_1 = -\infty$; если $K_1(l) = \phi$, то $v_1(l) = +\infty$),

$$L_1 = \{l \mid v_1(l) = v_1\},\quad L(t) = \{l \in L \mid t \in K_1(l)\}.$$

Теорема 18.3. 1) *Для любого* $t \in K_1(l) \subset T_2$ $(l \in L)$ *справедливо*

$$h(t, l) \in K_1 \cap S,\quad \Psi(h_j(t, l)) = t_j,\quad j = 1, \ldots, m. \tag{18.27}$$

Если при некотором $c^l \neq 0$ $(l \in L)$ *совместна система*

$$Ax \leqslant b,\qquad \sum_{i=1}^{n} c^l_i x_i = -c^l_{n+1},\qquad x \in M_0, \tag{18.28}$$

то $T_2 \subset T_1 = \mathbf{R}^m_+$ *и при упомянутом* l *для любого* $t \geqslant 0$ *выполняется* (18.27).

2) *Пусть для каждого* $l \in L$ *система* (18.28) *несовместна. Тогда* $T_1 = T_2$, $\sigma_1 = v_1$, $h(t, l) \in \widetilde{K}_1$ *для любых* $l \in L_1$, $t \in V_1(l)$. *Если, кроме того, функция* φ *удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant t^1 \leqslant t^2 \Rightarrow \varphi(t^1) \leqslant \varphi(t^2), \tag{18.29}$$

то $h(t, l) \in G_1(t) \subset \widetilde{K}_1$ (*для любых* $l \in L_1$, $t \in V_1(l)$), *причем*

$$\bigcup_{h \in G_1(t)} M_1(h) = \bigcup_{K \in J} M_1(h(t, k))$$

для любого J, *удовлетворяющего условию* $L(t) \subset J \subset L$.

3) *Если* M_0 *ограничено, то неравенство* $u_{n+1} > 0$ *в определении множеств* $K_1(l)$ $(l \in L)$ *можно заменить на* $u_{n+1} \geqslant 0$, *а если, кроме того, известно, что* $|M_0| \neq 1$ ($|M_0|$ – *мощность множества* M_0), *то это неравенство можно опустить.*

Обращаясь к рассмотрению задачи D_2, будем дополнительно предполагать, что множество Q обладает свойством симметричности: $Q = -Q$. Введем обозначения:

$$M_2(h) = \{x \mid (A+H)x = b - p,\ x \in M_0\},$$

$$M_2'(t, l) = \{x \mid [x_1, \dots, x_n, 1]^T = u,\ (d_j + h_j(t, l), u) \leqslant 0,$$

$$(d_j - h_j(t, l), u) \geqslant 0 \quad (j = 1, \dots, m),\ Bu \leqslant 0\},$$

$$G_2(t) = \{h \in K_2 \cap S \mid \Psi(h_j) \leqslant t_j \quad (j = 1, \dots, m)\},$$

$$K_2(l) = \{t \mid t_j = (d_j, u) \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$Bu \leqslant 0,\quad u_{n+1} > 0,\quad (c^l, u) = -1\},\qquad T_3 = \bigcup_{l \in L} K_2(l),$$

Пусть функция φ определена на $\mathbf{R}_+^m$, $\widetilde{K}_2$ – оптимальное множество задачи D_2, $V_2(l)$ – множества векторов $[s, t] \in \mathbf{R}^{2m}$, являющихся решением соответственно задач

$$\inf\{\varphi(s) \mid s \geqslant t,\ s \geqslant -t,\ t \in K_2(l)\}\ (:= v_2(l)),\qquad l \in L. \tag{18.30}$$

Величины v_2, L_2 определим аналогично v_1, L_1, т.е.

$$v_2 = \min\{v_2(l) \mid l \in L\},\qquad L_2 = \{l \in L \mid v_2(l) = v_2\}.$$

Теорема 18.4. 1) *Для любого* $t \in K_2(l) \subset T_3$ $(l \in L)$ *справедливо*

$$h(t, l) \in K_2 \cap S,\quad \Psi(h_j(t, l)) = |t_j|,\quad j = 1, \dots, m. \tag{18.31}$$

Если при некотором $c^l \neq 0$ $(l \in L)$ *совместна система*

$$Ax = b,\qquad \sum_{i=1}^{n} c_i^l x_i = -c_{n+1}^l,\qquad x \in X, \tag{18.32}$$

то (18.31) *справедливо для каждого* $t \in \mathbf{R}^m$.

2) *Пусть для каждого* $l \in L$ *система* (18.32) *несовместна, а функция* φ *удовлетворяет условию* (18.29). *Тогда*

$$\sigma_2 = v_2 = \varphi(s),\quad \Psi(h_j(t, l)) = |t_j| \leqslant s,\quad j = 1, \dots, m,$$

$$h(t, l) \in G_2(s) \subset \widetilde{K}_2,\qquad \bigcup_{h \in G_2(s)} M_2(h) = \bigcup_{k \in L_2} M_2'(s, k)$$

для любых $l \in L_2$, $[s, t] \in V_2(l)$.

3) *Если* M_0 *ограничено, то неравенство* $u_{n+1} > 0$ *в определении множеств* $K_2(l)$ $(l \in L)$ *можно заменить на* $u_{n+1} \geqslant 0$, *а если, кроме того, известно, что* $|M_0| \neq 1$, *то это неравенство можно опустить.*

З а м е ч а н и е. Из теоремы 18.3 следует, что если $\varphi(t)$ – выпуклая кусочно линейная функция, т.е. $\varphi(t) = \max\{(\bar{t}^K, t) + r_k \mid K = 1, \ldots, K'\}$, то решение задачи D_1 сводится к решению набора задач вида

$$\inf\{\theta \mid \theta \geqslant (\bar{t}^K, t) + r_K \quad (K = 1, \ldots, K'), \quad t \in K_1(l)\}, \quad l \in L,$$

с линейными целевой функцией и ограничениями. Аналогичное утверждение справедливо и для задачи D_2.

Приведем два примера применения сформулированных теорем. Число задач (18.26) или (18.30) определяется мощностью множества L, которая в свою очередь зависит от вида функций φ, Ψ и множеств P, M_0. Пусть множество M_0 имеет вид

$$S = \{h \mid h_{ji} = 0 \qquad \forall i \in I'\}, \tag{18.33}$$

где $I' = \{1, \ldots, n+1\} \setminus I$, $\phi \neq I \subset \{1, \ldots, n+1\}$. Смысл условия (18.33) заключается в том, что столбцы исходной матрицы $[A, b]$ с номерами $i \in I'$ фиксированы и корректироваться не могут. Относительно M_0 будем предполагать, что $M_0 \subset \mathbf{R}^n_+$.

Рассмотрим следующие два варианта выбора функций φ и Ψ.

1) Пусть

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j t_j,$$

$$\Psi(h_j) = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i |h_{ji}|,$$

где α_j, β_i положительны, и, таким образом,

$$\Phi(h) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_j \beta_i |h_{ji}|.$$

Как нетрудно заметить, в рассматриваемом случае

$$Q = \{u \in \mathbf{R}^{n+1} \mid u_i = 0 \qquad (\forall i \in I'),$$

$$\sum_{i \in I} \beta_i |u_i| \leqslant 1\},$$

а в качестве c^l можно взять столбцы матрицы $E\mu$ с номерами $i \in I$, где E – единичная матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$, $\mu = -[\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_{n+1}^{-1}]^T$, т.е. в данном случае $|L| = |I|$.

Тогда задачи (18.26), (18.30), к решению которых можно свести в силу теорем 18.3 и 18.4 решение задач D_1, D_2, примут соответственно вид

$$\inf\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j t_j \mid t \geqslant 0, \ \ t_j \geqslant (d_j, u) \ \ (j = 1, \dots, m),$$

$$Bu \leqslant 0, \ \ u_{n+1} > 0, \ \ u_l = \beta_l\}, \qquad l \in L,$$

$$\inf\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j t_j \mid s \geqslant t, \ \ s \geqslant -t, \ \ t_j = (d_j, u) \ \ (j = 1, \dots, m),$$

$$Bu \leqslant 0, \ \ u_{n+1} > 0, \ \ u_l = \beta_l\}, \qquad l \in L.$$

2) Пусть $\varphi(t) = \max\limits_{j \in N_m} \alpha_j t_j$, $\Psi(h_j) = \max\limits_{i \in N_{n+1}} \beta_i \mid h_{ji} \mid$, где, по-прежнему, α_j, β_i положительны. Тогда

$$\Phi(h) = \max_{j \in N_m, \ i \in N_{n+1}} \alpha_j \beta_i \mid h_{ji} \mid .$$

В данном случае $Q = \{ u \in \mathbf{R}^{n+1} \mid u_i = 0 \ \ (\forall i \in I'), \ \max\limits_{i \in I} \beta_i \mid u_i \mid \leqslant 1 \}$, причем, очевидно, в качестве C можно взять множество, состоящее из единственного элемента c^1 с компонентами

$$c_i^1 = \begin{cases} -\beta_i^{-1}, & i \in I, \\ 0, & i \in I'. \end{cases}$$

Тогда, согласно теоремам 18.3 и 18.4 и с учетом сформулированного выше замечания, решение каждой из задач D_1, D_2 можно свести к решению единственной задачи, имеющей соответственно вид

$$\inf\{\theta \mid \theta \geqslant \alpha_j t_j, \ \ t_j \geqslant (d_j, u) \ \ (j = 1, \dots, m), \ \ t \geqslant 0,$$

$$Bu \leqslant 0, \ \ u_{n+1} > 0, \ \ (c^1, u) = -1\},$$

$$\inf\{\theta \mid \theta \geqslant \alpha_j s_j, \ \ t_j = (d_j, u) \ \ (j = 1, \dots, m),$$

$$s \geqslant t, \ \ s \geqslant -t, \ \ Bu \leqslant 0, \ \ u_{n+1} > 0, \ \ (c^1, u) = -1\}.$$

Напомним, что в случае ограниченности M_0 во всех приведенных в этом пункте задачах ограничение $u_{n+1} > 0$ можно заменить на $u_{n+1} \geqslant 0$ или опустить.

§ 19. Методы последовательной коррекции

Методы этой группы основываются на сведении несобственной задачи к той или иной задаче последовательной оптимизации [10, § 6, п. 6.1].

Пусть

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0 \tag{19.1}$$

– произвольная система линейных неравенств. Выделив в ней некоторую совместную подсистему $A_0x \leqslant b^0$, $x \geqslant 0$, а дополнение записав в виде $A_1x \leqslant b^1$, аппроксимацию системы (19.1) можно подчинить задаче

$$\min\{d_1([A_1x - b^1]^+) \mid A_0x \leqslant b^0, \; x \geqslant 0\}, \tag{19.2}$$

где $d_1(\cdot)$ – функция от вектора невязок $z = [A_1x - b^1]^+$ подсистемы $A_1x \leqslant b^1$ такая, что $d(0) = 0$, $d(z) > 0$ при $z > 0$ и $d(z) \geqslant d(\bar{z})$ при $z \geqslant \bar{z} \geqslant 0$. Если $A_1x \leqslant b^1 \sim l_j(x) = (a_j, x) - b_j \leqslant 0$ $(j \in J_1)$, то примерами функции d могут быть $d(z) = \|z\|^2$, $\Sigma|z_i|$, $\max\limits_i |z_i|$ и т.д. Если $\tilde{x} \in \operatorname{Arg}$ (19.2), то системе (19.1), пусть несовместной, можно поставить в соответствие скорректированную систему

$$A_0x \leqslant b^0, \qquad A_1x \leqslant b^1 + [A_1\tilde{x} - b^1]^+.$$

Описанная ситуация является индуктивно исходной для коррекции несобственной задачи по методу последовательной оптимизации. А именно, пусть система ограничений (19.1) задачи

$$\max\{(c, x) \mid Ax \leqslant b, \; x \geqslant 0\} \tag{19.3}$$

разбита на подсистемы $A_jx \leqslant b^j$ $(j = 1, \dots, s)$ и $A_0x \leqslant b^0$, $x \geqslant 0$ так, что $M_0 = \{x \geqslant 0, A_0x \leqslant b^0\} \neq \phi$. Предположим также, что упорядоченность подсистем отвечает упорядоченности ограничений по их важности. Подсистеме с номером j поставим в соответствие функцию невязки $g_j(x) = d_j([A_jx - b^j]^+)$, где функции $d_j(\cdot)$ обладают отмеченными выше свойствами $(j = 1, \dots, s)$. Построим последовательность задач:

$$(1): \quad \min\{g_1(x) = d_1((A_1x - b^1)^+) \mid x \in M_0\},$$

$$(2): \quad \min\{g_2(x) = d_2((A_2x - b^2)^+) \mid x \in \operatorname{Arg}(1)\},$$

. . . .

$$(s): \quad \min\{g_s(x) = d_s((A_sx - b^s)^+) \mid x \in \operatorname{Arg}(s-1)\},$$

$$\max\{(c, x) \mid x \in \operatorname{Arg}(s)\}. \tag{19.4}$$

Последнюю из них, а именно (19.4), мы и будем считать аппроксимирующей задаче для (19.3) по методу последовательной коррекции. Частным случаем такой коррекции является следующая:

$$\max\{(c, x) \mid x \in \tilde{M}\}, \tag{19.5}$$

где $\widetilde{M} = \operatorname{Arg}\min\{(r, (Ax-b)^+) \mid A_0x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\}$, $0 < r \in \mathbf{R}^m$. Решение задачи (19.5) эквивалентно решению задачи ЛП:

$$\max\{(c, x) - \gamma(r, u) \mid Ax - b \leqslant u,\ \ A_0x \leqslant b^0,\ [x, u] \geqslant 0\}$$

при достаточно большом $\gamma > 0$.

Разрешимость задачи (19.5) гарантируется только тогда, когда (19.3) – несобственная задача 1-го рода. Если для задачи (19.4) функции $g_j(x)$ имеют вид $g_j(x) = (r^j, (A_jx - b^j))$, $r^j > 0$, то и в этом случае разрешимость задачи (19.4) обеспечивается лишь при условии, что (19.3) – несобственная задача 1-го рода. Можно еще отметить, что при указанных условиях задача (19.4) эквивалентна задаче

$$\max\{(c, x) - \sum_{j=1}^{s} \gamma_j g_j(x) \mid A_0x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\} \tag{19.6}$$

при подходящим образом выбранных $\gamma_j > 0$ ($j = 1, \ldots, s$). Общий смысл подбора констант γ_j состоит в том, что при достаточно большом $\gamma_1 > 0$ обеспечивается эквивалентность задачи (1) задаче

$$\max\{(c, x) - \gamma_1 g_1(x) \mid A_0x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\}.$$

Далее, при достаточно большом γ_2, зависящем от γ_1, обеспечивается эквивалентность задачи (2) задаче

$$\max\{(c, x) - \sum_{j=1}^{2} \gamma_j g_j(x) \mid A_0x \leqslant b^0,\ \ x \geqslant 0\}$$

и т.д. Наконец, получаем эквивалентность задач (19.4) и (19.6).

§ 20. Другие методы коррекции

20.1. Коррекция по Парето. Пусть функции $g_j(x)$ ($j = 1, \ldots, s$) из § 19 не упорядочены по важности; это соответствует тому, что не упорядочены по важности выделенные подсистемы ограничений $A_jx \leqslant b^j$ ($j = 1, \ldots, s$). Тогда можно поставить задачу паретовской минимизации вектора $G(x) = [g_1(x), \ldots, g_s(x)]$ на $M_0 = \{x \geqslant 0 \mid A_0x \leqslant b^0\}$:

$$\min\nolimits_\pi \{G(x) \mid x \in M_0\} \tag{20.1}$$

и на оптимальном множестве $\Pi = \operatorname{Arg}_\pi$ (20.1) этой задачи искать максимальное значение функции (c, x), т.е.

$$\max\{(c, x) \mid x \in \Pi\}. \tag{20.2}$$

Смысл задачи (20.1) определен в § 6, п. 6.2. Конструктивное описание множества π-точек задачи (20.1), т.е. множества Π, затруднительно. Но выделение той или иной совокупности элементов этого множества можно осуществлять довольно простым способом, а именно путем формирования так называемых сверток функций $g_j(x)$ $(j = 1, \dots, s)$ в форме функции $\Phi(x) = \varphi(g_1(x), \dots, g_s(x))$ и решения задачи

$$\min\{\Phi(x) \mid x \in M_0\}. \tag{20.3}$$

Один из простейших видов свертки имеет вид $\Phi_0(x) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j g_j(x)$, где $\lambda_j > 0$ $(j = 1, \dots, s)$. Беря разные векторы $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_s] > 0$, будем получать разные множества Arg (20.3) $\subset$ *П*. Используя идею метода штрафных функций, можно осуществить редукцию задачи (20.2) к задаче

$$\max\{(c, x) - \gamma \sum_{j=1}^{s} \lambda_j g_j(x) \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0,\ 1 - \epsilon \leqslant \lambda_j \leqslant 1\}, \tag{20.4}$$

где γ — достаточно большое число, ϵ — достаточно малое число. Задача (20.4) будет приближенно решать задачу (20.1).

20.2. Методы дискретной аппроксимации. Для несовместных систем неравенств существует понятие *комитета* как некоторого обобщения понятия решения, а именно: комитетом системы неравенств называется конечная совокупность векторов (*членов комитета*) такая, что каждое из неравенств системы удовлетворяется более чем половиной членов комитета [10, § 16].

Пусть $\Omega = \{\sigma\}$ — то или иное множество комитетов, например, в задаче (19.3), а $g(\sigma)$ — функция, оценивающая комитет σ с точки зрения смысла критериальной функции (c, x). Тогда задачу (19.3) можно заменить на задачу

$$\max\{g(\sigma) \mid \sigma \in \Omega\}. \tag{20.5}$$

Если Ω — множество комитетов, состоящих из одинакового числа членов q, то функция $g(\sigma)$ может иметь вид

$$g(\sigma) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (c, x^i),$$

где $\sigma = [x^1, \dots, x^q]$, $x^i \in E_n$, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$ $(i = 1, \dots, q)$. В частности, если система в (19.3), т.е. система $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$, совместна, то комитетом является любое ее решение, и тогда функция $g(\sigma)$ принимает вид (c, x), т.е. (20.5) совпадает с (19.3).

20.3. Сведение несобственных задач ЛП к задачам оптимизации на покрытиях. Рассмотрим задачу ЛП в форме

$$\max\{(c, x) \mid Ax \leqslant b\}. \tag{20.6}$$

Систему ее ограничений разобьем на подсистемы

$$A_j x \leqslant b^j, \quad j = 1, \dots, s, \tag{20.7}$$

Сформулируем следующую основную задачу:

$$\min_{t \in I_1 \cap \{c_i\}} \max_{\mu \in I_2 \cap \{c_i\}} \max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b,$$

$$x \geqslant 0, \ \exists t \in I_1 \quad \forall \mu \in I_2\}. \tag{21.3}$$

Хотя эта задача выглядит несколько громоздко, ее смысл проясняется через выделение частных случаев. Введем допустимое множество задачи (21.3):

$$M(I_1, I_2) = \{x \geqslant 0 \mid Ax \leqslant b, \ \exists t \in I_1 \quad \forall \mu \in I_2\}. \tag{21.4}$$

Если $I_2 = \phi$, то это множество можно записать так:

$$\underline{M} = \{x \geqslant 0 \mid Ax \leqslant b, \ \underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A}, \ \underline{b} \leqslant b \leqslant \overline{b}\}. \tag{21.5}$$

Следовательно, в (21.5) вектор $x \geqslant 0$ допустим тогда и только тогда, когда существуют A: $\underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A}$ и b: $\underline{b} \leqslant b \leqslant \overline{b}$, при которых x удовлетворяет неравенству $Ax \leqslant b$.

С применением обозначения (21.4) задача (21.3) запишется в виде

$$\min_{t \in I_1 \cap \{c_i\}} \max_{\mu \in I_2 \cap \{c_i\}} \max \{(c, x) \mid x \in M(I_1, I_2)\}.$$

Если $\underline{c} = \overline{c}$ $(= c)$ (вектор c задан точно), то последняя, т.е. (21.3), превращается в задачу

$$\max \{(c, x) \mid x \in M(I_1, I_2)\}. \tag{21.6}$$

Если к тому же $M(I_1, I_2) = \underline{M}$, т.е. $I_2 = \phi$, то (21.6) принимает вид

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0, \ \underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A}, \ \underline{b} \leqslant b \leqslant \overline{b}\}. \tag{21.7}$$

При $I_1 = \phi$ и точном задании вектора c (21.3) будет записываться следующим образом:

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0 \ \forall A \in [\underline{A}, \overline{A}], \ \forall b \in [\underline{b}, \overline{b}]\}. \tag{21.8}$$

Определение. Вектор $\tilde{x}$, решающий задачу (21.3), назовем *слабо оптимальным* по I_1 и *сильно оптимальным* по I_2.

В соответствии с этим определением оптимальный вектор задачи (21.7) будет слабо оптимальным по I, а (21.8) – сильно оптимальным по I.

Оказывается, что все выписанные задачи эквивалентны явно задаваемым задачам линейного программирования.

Положим

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} \overline{c}_i, & \text{если} \quad c_i \in I_1, \\ \underline{c}_i, & \text{если} \quad c_i \in I_2. \end{cases}$$

Аналогично вводим $\widetilde{b}_j$ и $\widetilde{a}_{ji}$. В соответствии с этим полагаем

$$\widetilde{c} = [\widetilde{c}_1, \dots, \widetilde{c}_n]^T, \quad \widetilde{b} = [\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_m]^T, \quad \widetilde{A} = [\widetilde{a}_{ji}]_{j,\, i = 1}^{m,\, n}.$$

Теорема 21.1. *Задача* (21.3) *эквивалентна задаче*

$$\max\{(\widetilde{c}, x) \mid \widetilde{A}x \leqslant \widetilde{b},\ x \geqslant 0\}.$$

Теорема 21.2. *Имеет место равенство*

$$M(I_1, I_2) = \{x \geqslant 0 \mid \widetilde{A}x \leqslant \widetilde{b}\}.$$

Частными случаями теоремы 21.1 являются следующие утверждения.

Теорема 21.3. *Задача* (21.7) *эквивалентна задаче*

$$\max\{(c, x) \mid \underline{A}x \leqslant \overline{b},\ x \geqslant 0\}.$$

Теорема 21.4. *Задача* (21.8) *эквивалентна задаче*

$$\max\{(c, x) \mid \overline{A}x \leqslant \underline{b},\ x \leqslant 0\}.$$

Последние две теоремы сформулированы в предположении точного задания вектора c, т.е. $c = \underline{c} = \overline{c}$.

Материал этого параграфа в более широком плане и более детализированно рассмотрен в работе [2].

ваться так, что величина штрафа F является функцией не только невязок $(A_j x - b^j)^+$ $(j = 1, \ldots, m_0)$, но и точки x, в которой эти невязки вычисляются.

§ 23. Взаимная двойственность задач P и $P^\#$

Обозначим $\nu_3 = n - \nu_1, \nu_4 = m - \nu_2$. Зафиксируем разбиение вектора $z \in \mathbf{R}^\nu$:

$$z = [z^1, z^2] \in \mathbf{R}^\nu, \quad z^1 \in \mathbf{R}^{\nu_3}, \quad z^2 \in \mathbf{R}^{\nu_4}. \tag{23.1}$$

Произвольной функции F над $\mathbf{R}^\nu$ поставим в соответствие функции $(F)_1$, $(F)_2$ над $\mathbf{R}^\nu$, определяемые по правилу

$$(F)_1(z) = F((z^1)^+, z^2), \ (F)_2(z) = F(z^1, (z^2)^+).$$

Лемма 23.1. *Пусть F допустима. Тогда*

$$(F)_i^* = (F^\oplus)_j, \qquad j = 3 - i, \qquad i = 1, 2.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $i = 1$. В силу определений

$$(F)_1^*(y^1, y^2) = \sup\{(y^1, z^1) + (y^2, z^2) - F((z^1)^+, z^2) \mid z \in \mathbf{R}^\nu\}. \tag{23.2}$$

Так как ввиду допустимости F для $z^2 = 0$ и любого $z^1 \leqslant 0$ выполняется $F((z^1)^+, z^2) = 0$, то в случае $y^1 \notin \mathbf{R}_+^{\nu_3}$ выражение в (23.2) равно $+\infty$. Если же $y^1 \in \mathbf{R}_+^{\nu_3}$, то для любого $[z^1, z^2]$, очевидно, $(y^1, (z^1)^+) \geqslant (y^1, z^1)$ и в то же время $(F)_1((z^1)^+, z^2) = (F)_1(z^1, z^2)$. Отсюда следует, что в этом случае верхнюю грань в (23.2) достаточно взять лишь по $z = [z^1, z^2]$, удовлетворяющим условиям $z^1 \in \mathbf{R}_+^{\nu_3}$, $z^2 \in \mathbf{R}^{\nu_4}$. Учитывая, что для таких z выполняется $(F)_1(z^1, z^2) = F(z^1, z^2)$ и, кроме того, $\operatorname{dom} F \in \mathbf{R}_+^\nu$, в итоге получаем

$$(F)_1^*(y^1, y^2) = F^*(y^1, y^2) + \delta(y^1 \mid \mathbf{R}_+^{\nu_3}). \tag{23.3}$$

Зафиксируем произвольные $y^1 \in \mathbf{R}^{\nu_3}$, $y^2 = [y_1^2, \ldots, y_{\nu_4}^2] \in \mathbf{R}^{\nu_4}$. Положим $I = \{i \mid y_i^2 > 0\}$, $I' = \{i \mid y_i^2 \leqslant 0\}$. Каждому $v = [v_1, \ldots, v_{\nu_4}] \in \mathbf{R}_+^{\nu_4}$ сопоставим вектор $\pi(v) = [\pi(v)_1, \ldots, \pi(v)_{\nu_4}] \in \mathbf{R}_+^{\nu_4}$ по правилу

$$\pi(v)_i = \begin{cases} v_i, & i \in I, \\ 0, & i \in I'. \end{cases}$$

Легко заметить, что для любого $z^2 \in \mathbf{R}_+^{\nu_4}$

$$((y^2)^+, z^2) = ((y^2)^+, \pi(z^2)) = (y^2, \pi(z^2)). \tag{23.4}$$

Очевидно, $\pi(z^2) \geqslant 0$, $z^2 - \pi(z^2) \geqslant 0$, как только $z^2 \geqslant 0$. Поэтому для каждого $[z^1, z^2] \in \operatorname{dom} F$ в силу определения допустимой функции справедливо

$$[z^1, \pi(z^2)] \in \operatorname{dom} F,$$
$$F(z^1, \pi(z^2)) \leqslant F(z^1, z^2). \tag{23.5}$$

Используя (23.4), (23.5), получаем

$$(F^*)_2(y^1,y^2)=$$
$$=\sup\{(y^1,z^1)+((y^2)^+,z^2)-F(z^1,z^2)\mid[z^1,z^2]\in\operatorname{dom}F\}\leqslant$$
$$\leqslant\sup\{(y^1,z^1)+(y^2,\pi(z^2))-F(z^1,\pi(z^2))\mid[z^1,z^2]\in\operatorname{dom}F\}\leqslant$$
$$\leqslant\sup\{(y^1,z^1)+(y^2,v)-F(z^1,v)\mid[z^1,v]\in\operatorname{dom}F\}=$$
$$=F^*(y^1,y^2).$$

С другой стороны, так как $F\in\mathbf{R}_+^\nu$, то $((y^2)^+,z^2)\geqslant(y^2,z^2)$ для любого $[z^1,z^2]\in\operatorname{dom}F$, откуда непосредственно вытекает $(F^*)_2(y^1,y^2)\geqslant\geqslant F^*(y^1,y^2)$. Таким образом,

$$F^*(y^1,y^2)=(F^*)_2(y^1,y^2). \tag{23.6}$$

Как нетрудно заметить, доказываемое равенство является следствием соотношений (23.3) и (23.6). В виду симметричности определения допустимой функции относительно разбиения $z=[z^1,z^2]$ утверждение леммы для случая $i=2$ следует из полученного. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если F допустима, то $(F)_i$ $(i=1,2)$ – выпуклые собственные полунепрерывные снизу функции.*

Действительно, согласно лемме 23.1, из допустимости F следует допустимость $F^\oplus$. Тогда требуемое утверждение вытекает из определения сопряженных и допустимых функций, поскольку

$$(F)_i=((F^\oplus)^\oplus)_i=(F^\oplus)^*_{3-i}$$

в силу лемм (22.1) и (23.1).

Напомним, что выпуклым полиэдральным множеством называется непустое множество решений конечной системы линейных неравенств (нестрогих). Под *выпуклой кусочно линейной* функцией на $W\subset\mathbf{R}^n$ будем понимать функцию вида

$$\varphi(x)=\begin{cases}\max\limits_i l_i(x), & x\in W,\\ +\infty, & x\notin W,\end{cases}$$

где $\{l_i(x)\}$ – некоторый конечный набор аффинных функций, W – выпуклое полиэдральное множество (возможно, совпадающее с $\mathbf{R}^n$).

Л е м м а 23.2. *Если допустимая функция F является выпуклой кусочно линейной, то функции $(F)_1$, $(F)_2$ также выпуклы и кусочно линейны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что F является выпуклой кусочно линейной функцией тогда и только тогда, когда F – выпуклая функция, надграфик которой является выпуклым полиэдральным множеством. В силу [20, следствие 19.1.2] это в свою очередь эквивалентно тому, что $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z)=\inf\{\sum_{i=1}^k\alpha_i\beta_i\mid\sum_{i=1}^k\alpha_id_i=z,\quad\sum_{i=1}^{k'}\alpha_i=1,\quad\alpha_i\geqslant0\ (i=1,\ldots,k)\}, \tag{23.7}$$

где $\alpha_i\in\mathbf{R}$, $\beta_i\in\mathbf{R}$, $d_i\in\mathbf{R}^\nu$ $(i=1,\ldots,k)$, $k'\leqslant k$. Другими словами, $\operatorname{epi}F$ – надграфик функции F – есть выпуклая оболочка точек $[d_i,\beta_i]\in\mathbf{R}^{\nu+1}$

$(i=1,\ldots,k')$ и направлений $[d_i, \beta_i] \in \mathbf{R}^{\nu+1}$ $(i=k'+1,\ldots,k)$, а также направления $[0,0,\ldots,0,1]$ "вверх". Покажем, что надграфик функции $(F)_1$ также представим в аналогичном виде, а именно

$$\operatorname{epi}(F)_1 = \operatorname{epi} F - \operatorname{cone}\{e_1^{\nu+1}, \ldots, e_{\nu_3}^{\nu+1}\}. \qquad (23.8)$$

Здесь cone – знак выпуклой конусной оболочки, символом e_i^k обозначается i-й единичный орт пространства $\mathbf{R}^k$ ($e_1^k = [1,0,\ldots,0]$ и т.д.). Как нетрудно заметить, (23.8) эквивалентно тому, что

$$(F)_1(z) = \inf\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\beta_i \mid \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{\nu_3} \alpha_{k+i} e_i^{\nu} = z, \quad \sum_{i=1}^{k'} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,k+\nu_3)\}. \qquad (23.9)$$

Обозначив $K = \operatorname{cone}\{e_1^\nu, \ldots, e_{\nu_3}^\nu\}$ и учитывая (23.7), это равенство можно преобразовать к виду

$$(F)_1(z) = \inf\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\beta_i \mid \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d_i = z',$$

$$\sum_{i=1}^{k'} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,k), \quad z \in z' - K\} = \inf\{F(z') \mid z' \in z + K\}.$$

Наконец, поскольку $\operatorname{dom} F \subset \mathbf{R}_+^\nu$ и F монотонно не убывает на $\mathbf{R}_+^\nu$, то

$$\inf\{F(z') \mid z' \in z + K\} = F((z^1)^+, z^2) = (F)_1(z),$$

где $[z^1, z^2] = z$. Итак, $\operatorname{epi}(F)_1$ представим в виде (23.8), откуда в силу вышесказанного следует, что $(F)_1$ – выпуклая кусочно линейная функция. Случай функции $(F)_2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 23.3. *Если F допустима и кусочно линейна, то $F^\oplus$ также допустима и кусочно линейна.*

Доказательство следует из определения функции $F^\oplus$ и свойств выпуклых кусочно линейных функций (см. начало доказательства леммы 23.2 и [20, теоремы 19.2, 19.4]).

Задачу P, в которой (допустимая) функция F является выпуклой и кусочно линейной, назовем *l-задачей*. В силу леммы 23.3 P является l-задачей тогда и только тогда, когда l-задачей является $P^\#$.

Введем обозначения для допустимых множеств и целевых функций задач P и $P^\#$:

$$M = \{x \mid A_0 x \leqslant b^0, \quad \Gamma(x) \in \operatorname{dom} F, \quad x \geqslant 0\},$$

$$M^\# = \{u \mid B_0^T u \geqslant c^0, \quad \Gamma^\#(u) \in \operatorname{dom} F^\oplus, \quad u \geqslant 0\},$$

$$f(x) = (c, x) - RF(\Gamma(x)), \quad f^\#(u) = (b, u) + RF^\oplus(\Gamma^\#(u)).$$

Оптимальные значения и оптимальные множества задач P, $P^\#$ обозначим соответственно через γ и $\gamma^\#$, $\widetilde{M}$ и $\widetilde{M}^\#$. Здесь и в дальнейшем будем полагать, как это обычно делается, $\gamma = -\infty$, $\gamma^\# = +\infty$, если допустимые множества M, $M^\#$ пусты. Через $\operatorname{ri} W$ обозначим относительную внутренность множества W.

Сформулируем утверждение о двойственности, связывающей задачи P и $P^{\#}$.

Теорема 23.1. *Для задач P, $P^{\#}$ справедливы утверждения*:

1°. $\gamma \leqslant \gamma^{\#}$.

2°. *Если $\gamma < +\infty$ и задача P удовлетворяет условию (регулярности)*

$$\exists \bar{x}: \ A_0\bar{x} \leqslant b^0, \ \bar{x}^0 \geqslant 0, \ \Gamma(\bar{x}) \in \mathrm{ri}\,\mathrm{dom}(F)_2, \tag{23.10}$$

то $-\infty < \gamma = \gamma^{\#} < +\infty$, причем $\widetilde{M}^{\#} \neq \phi$.

3°. *Если $\gamma^{\#} > -\infty$ и задача $P^{\#}$ удовлетворяет условию (регулярности)*

$$\exists \bar{u}: \ B_0^T\bar{u} \geqslant c^0, \ \bar{u}^0 \geqslant 0, \ \Gamma_0^{\#}(\bar{u}) \in \mathrm{ri}\,\mathrm{dom}(F^{\circledast})_1, \tag{23.11}$$

то $-\infty < \gamma = \gamma^{\#} < +\infty$, причем $\widetilde{M} \neq \phi$.

4°. *Если для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in M \mid f(x) \geqslant \alpha\}$ непусто и ограничено, то $-\infty < \gamma = \gamma^{\#} < +\infty$, причем $\widetilde{M} \neq \phi$.*

5°. *Если для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}$ множество $\{u \in M^{\#} \mid f^{\#}(u) \leqslant \alpha\}$ непусто и ограничено, то $-\infty < \gamma = \gamma^{\#} < +\infty$, причем $\widetilde{M}^{\#} \neq \phi$.*

6°. *Если $M \neq \varphi$ или $M^{\#} \neq \phi$, причем P является задачей, то $\gamma = \gamma^{\#}$. При этом, если $\gamma \neq \pm\infty$, то $\widetilde{M} \neq \phi$, $\widetilde{M}^{\#} \neq \phi$.*

Доказательство. Пусть $t \in \mathbf{R}^{\nu_4}$ и разбиение $t = [t_1, \ldots, t_{m_0}]$ соответствует разбиению $[u^1, \ldots, u^{m_0}]$ переменной u двойственной задачи.

Обозначив

$$f'(x, t) = -(c, x) + R(F)_2(\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_{n_0} x^{n_0}, \mu_1 t_1, \ldots, \mu_{m_0} t_{m_0}),$$

перепишем задачу (22.1) в виде

$$\begin{aligned} -\gamma &= \inf\{f'(x, t) \mid A_j x - b^j - t_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m_0), \\ &A_0 x \leqslant b^0, \ -x^0 \leqslant 0\}. \end{aligned} \tag{23.12}$$

Функция Лагранжа задачи (23.12) имеет вид

$$\Phi'(x, t, u, v) = f'(x, t) + \sum_{j=1}^{m_0} (A_j x - b^j - t_j, u^j) +$$

$$+ (A_0 x - b^0, u^0) - \sum_{i=1}^{\nu_1} x_i^0 v_i,$$

где $v = [v_1, \ldots, v_{\nu_1}] \in \mathbf{R}^{\nu_1}$. Учитывая известные свойства относительных внутренностей выпуклых множеств и [20, теорема 28.2], нетрудно заметить, что выполнение для задачи (23.12) предположений утверждения 2° доказываемой теоремы обеспечивает существование вектора $[\tilde{u}, \tilde{v}] \in \mathbf{R}^{m+\nu_1}$ такого, что $\tilde{u}^0 \geqslant 0$, $\tilde{v} \geqslant 0$ и

$$-\gamma = \inf_{x, t} \Phi'(x, t, \tilde{u}, \tilde{v}) \neq \pm\infty. \tag{23.13}$$

Обозначим допустимое множество задачи (23.12) через M' и наряду с F' рассмотрим функцию $\Phi(x, t, u) = \Phi'(x, t, u, v) + \sum_{i=1}^{\nu_1} x_i^0 v_i$. Так как

$\tilde{u}^0 \geqslant 0$, то для любого $[x, t] \in M'$ выполняется

$$(A_j x - b^j - t_j, \tilde{u}^j) = 0, \quad (A_0 x - b^0, \tilde{u}^0) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$

и поэтому $\Phi(x, t, \tilde{u}) \leqslant f'(x, t) \quad \forall [x, t] \in M'$. Отсюда получаем

$$-\gamma = \inf_{[x, t] \in M'} f'(x, t) \geqslant \inf_{[x, t] \in M'} \Phi(x, t, u) \geqslant$$

$$\geqslant \inf \{\Phi(x, t, u) \mid t \in \mathbf{R}^{\nu_4}, \ x^0 \geqslant 0\}. \tag{23.14}$$

В то же время в силу (23.13) и неотрицательности $\tilde{v}$, очевидно,

$$-\gamma \leqslant \inf \{\Phi'(x, t, \tilde{u}, \tilde{v}) \mid t \in \mathbf{R}^{\nu_4}, \ x^0 \geqslant 0\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf \{\Phi(x, t, \tilde{u}) \mid t \in \mathbf{R}^{\nu_4}, \ x^0 \geqslant 0\}.$$

Ввиду (23.14) отсюда следует

$$-\gamma = \inf \{\Phi(x, t, \tilde{u}) \mid t \in \mathbf{R}^{\nu_4}, \ x^0 \geqslant 0\} \neq \pm\infty. \tag{23.15}$$

Функция $\Phi(x, t, u)$ может быть преобразована к виду

$$\Phi(x, t, u) = -(b, u) - \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - B_i^T u, x^i) - \sum_{j=1}^{m_0} (u^j, t_j) +$$

$$+ (B_0^T u - c^0, x^0) + R(F)_2 (\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_{n_0} x^{n_0}, \ \mu_1 t_1, \ldots, \mu_{m_0} t_{m_0}).$$

В соответствии с известными свойствами сопряженных функций имеем

$$\inf_{x, t} \{- \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - B_i^T u, x^i) - \sum_{j=1}^{m_0} (u^j, t_j) +$$

$$+ R(F)_2 (\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_{n_0} x^{n_0}, \ \mu_1 t_1, \ldots, \mu_{m_0} t_{m_0})\} =$$

$$= R(F)_2^* (\xi_1 (c^1 - B_1^T u), \ldots, \ \xi_{n_0} (c^{n_0} - B_{n_0}^T u), \ \eta_1 u^1, \ldots, \ \eta_{m_0} u^{m_0}),$$

где числа ξ_i, η_j взяты из условия $\xi_i \lambda_i = \eta_j \mu_j = R^{-1}$ $(i = 1, \ldots, n_0; \ j = 1, \ldots, m_0)$. Используя лемму (23.1), заключаем, что полученное выражение равно

$$RF^{\oplus} (\xi_1 (c^1 - B_1^T u)^+, \ldots, \ \xi_{n_0} (c^{n_0} - B_{n_0}^T u)^+, \ \eta_1 u^1, \ldots, \ \eta_{m_0} u^{m_0}).$$

Таким образом,

$$\sup_{u^0 \geqslant 0, u} \ \inf_{x^0 \geqslant 0, x, t} \Phi(x, t, u) = \sup_{u^0 \geqslant 0, u} \{-(b, u) -$$

$$- RF^{\oplus} (\xi_1 (c^1 - B_1^T u)^+, \ldots, \ \xi_{n_0} (c^{n_0} - B_{n_0}^T u)^+, \ \eta_1 u^1, \ldots, \ \eta_{m_0} u^{m_0}) +$$

$$+ \inf_{x^0 \geqslant 0} (B_0^T u - c^0, x^0)\} = -\inf \{f^{\#}(u) \mid B_0^T u \geqslant c^0, \ u^0 \geqslant 0\} = -\gamma^{\#}. \tag{23.16}$$

Отсюда с учетом очевидного равенства

$$\gamma = \inf_{x^0 \geqslant 0, x, t} \ \sup_{u^0 \geqslant 0, u} \Phi(x, t, u)$$

вытекает соотношение $\gamma \leqslant \gamma^{\#}$.

Как было показано выше, в случае выполнения предположений утверждения 2° доказываемой теоремы найдется $\tilde{u} \in \mathbf{R}^m$ такой, что $\tilde{u}^0 \geqslant 0$ и выполняется (23.15). Учитывая (23.16) и неравенство $\gamma \leqslant \gamma^{\#}$, отсюда получаем

$\gamma = \gamma^{\#} \neq \pm\infty$, $\tilde{u} \in \tilde{M}^{\#}$. Этим завершено обоснование справедливости утверждений 1°, 2°. Утверждение 3° доказывается аналогично.

Опишем схему доказательства утверждений 4°, 5°. Представим задачу P в виде

$$-\gamma = \inf_x (FO)(x), \tag{23.17}$$

$$(\Phi u_*)(x) = -(c, x) + RF(\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_{n_0} x^{n_0},$$
$$\mu_1 (A_1 x - b^1 - u_*^1)^+, \ldots, \mu_{m_0} (A_{m_0} x - b^{m_0} - u_*^{m_0})^+) +$$
$$+ \delta([x^0, A_0 x - b^0 - u_*^0] | \ \mathbf{R}_+^{\nu_1} \times \mathbf{R}_-^{\nu_2}),$$

где $\mathbf{R}_-^{\nu_2} = -\mathbf{R}_+^{\nu_2}$, $u_* = [u_*^0, u_*^1, \ldots, u_*^{m_0}] \in \mathbf{R}^m$. Другими словами, здесь P рассматривается как выпуклая программа, связанная с выпуклой бифункцией Φ [20, с. 310]. Используя лемму (23.1), с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно показать, что для сопряженной к Φ бифункции Φ^* справедливо

$$(\Phi^* x_*)(u) = -(b, u) - RF^{\circledast}(\xi_1 (c^1 - B_1^T u + x_*^1)^+, \ldots$$
$$\ldots, \xi_{n_0} (c^{n_0} - B_{n_0}^T u + x_*^{n_0})^+, \ \eta_1 u^1, \ldots, \eta_{m_0} u^{m_0}) -$$
$$- \delta([c^0 - B_0^T u + x_*^0, u^0] | \ \mathbf{R}_-^{\nu_1} \times \mathbf{R}_+^{\nu_2}),$$

где аналогично $\mathbf{R}_-^{\nu_1} = -\mathbf{R}_+^{\nu_1}$, $x_* = [x_*^0, \ldots, x_*^{n_0}] \in \mathbf{R}^n$. Отсюда следует, что задача $P^{\#}$ представима в виде

$$-\gamma = \sup_u (\Phi^* O)(u), \tag{23.18}$$

т.е. связана с вогнутой бифункцией Φ^*. Как нетрудно видеть, из допустимости F и $(F^{\circledast})^{\circledast} = F$ вытекают выпуклость, собственность и замкнутость бифункции Φ. Тогда выполнение соотношения $\gamma = \gamma^{\#} \neq \pm\infty$ обеспечивается непустотой и ограниченностью любого из множеств

$$\begin{gathered} \{x | \ (\Phi O)(x) \leqslant -\alpha\} = \{x \in M | \ f(x) \geqslant \alpha\}, \\ \{u | \ (\Phi^* O)(u) \geqslant -\beta\} = \{u \in M^{\#} | \ f^{\#}(u) \leqslant \beta\} \end{gathered} \tag{23.19}$$

и зависимостями между выпуклыми программами (23.17) и (23.18) [20, теорема 30.4]. Соотношения $\tilde{M} \neq \phi$, $\tilde{M}^{\#} \neq \phi$ следуют из ограниченности соответствующих множеств из (23.19) и замкнутости функций $(\Phi O)(x)$, $(\Phi^* O)(u)$.

В силу леммы 23.3 свойство выпуклости и кусочной линейности выполняется или не выполняется для функций F и $F^{\circledast}$ одновременно. С другой стороны, в силу леммы 23.2 выпуклость и кусочная линейность функций F, $F^{\circledast}$ обеспечивает выпуклость и кусочную линейность функций $(F)_2$, $(F^{\circledast})_1$. Как нетрудно видеть, последнее обстоятельство влечет полиэдральность (в смысле [20, с. 317]) программ (23.17), (23.18), что в свою очередь вместе с любым из условий $M \neq \phi$ или $M^{\#} \neq \phi$ гарантирует выполнение равенства $\gamma = \gamma^{\#}$ [20, теорема 30.4]. При этом в случае $\gamma \neq \pm\infty$ из выпуклости и кусочной линейности функций

$$(c, x) - R(F)_2 (\Gamma(x)) + \delta([b^0 - A_0 x, x^0] | \ \mathbf{R}_+^{\nu_2 + \nu_1}),$$
$$(b, u) + R(F^{\circledast})_1 (\Gamma^{\#}(u)) + \delta([B_0^T u - c^0, u^0] | \ \mathbf{R}_+^{\nu_1 + \nu_2})$$

следует непустота множеств $\tilde{M}$, $\tilde{M}^{\#}$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Для произвольных* $x \in M, u \in M^{\#}$ *справедливо* $f(x) \leqslant \leqslant f^{\#}(u)$.

Из теоремы 23.1 вытекает, что задачи P и $P^{\#}$ связаны регулярной двойственностью. А именно, справедливо

С л е д с т в и е 2. *Пусть одна из задач* $P, P^{\#}$ *разрешима и удовлетворяет соответствующему условию регулярности* (23.10) *или* (23.11). *Тогда обе задачи разрешимы и их оптимальные значения совпадают.*

Используя теорему 23.1, можно сформулировать ряд условий, каждое из которых гарантирует одновременную разрешимость задач $P, P^{\#}$ и справедливость равенства $\gamma = \gamma^{\#}$. Обеспечение выполнения одного из этих условий при формировании задач P, $P^{\#}$ будет гарантировать свойство собственности последних.

С л е д с т в и е 3. *В условиях, обеспечивающих разрешимость* P *и* $P^{\#}$ *и совпадение их оптимальных значений, решение этих задач сводится к нахождению решения системы выпуклых неравенств*

$$f^{\#}(u) - f(x) \leqslant 0, \ \ A_0 x \leqslant b^0, \ \ B_0^T u \geqslant c^0, \ \ x^0 \geqslant 0, \ \ u^0 \geqslant 0.$$

Обозначим через $f(b, c)$, $g(b, c)$ оптимальные значения задач P, $P^{\#}$ как функции параметров b (вектор ресурсов) и c (вектор цен). Производную функции h в точке v по направлению v' обозначим через $\partial h(v)/\partial v'$. Положим $f_b(c) = f_c(b) = f(b, c)$, $g_b(c) = g_c(b) = g(b, c)$. Используя представления (23.17), (23.18), полученные при доказательстве теоремы 23.1, и известные факты выпуклого анализа (см., например, [20, с. 313–316]), получаем

С л е д с т в и е 4. 1) *Функции* $f(b, c)$, $g(b, c)$ *выпуклы по* c *и вогнуты по* b.

2) *Пусть выполнены предположения утверждения* 4° *теоремы* 23.1 *или же условия*

$$M \neq \phi; \ \ \exists \bar{u}, \ B_0^T \bar{u} > c^0, \ \ \bar{u}^0 > 0, \ \ \Gamma^{\#}(\bar{u}) \in \mathrm{ri\,dom}(F^{\circledast})_1.$$

Тогда $\widetilde{M} \neq \phi$ *и для любого* $c' \in \mathbf{R}^n$

$$\partial f_b(c)/\partial c' = \partial g_b(c)/\partial c' = \sup\{(c', x) \mid \ x \in \widetilde{M}\}.$$

3) *Пусть выполнены предположения утверждения* 5° *теоремы* 23.1 *или же условия*

$$M^{\#} \neq \phi; \ \ \exists \bar{x}, \ \ A_0 \bar{x} < b^0, \ \ \bar{x}^0 > 0, \ \ \Gamma(\bar{x}) \in \mathrm{ri\,dom}(F)_2.$$

Тогда $\widetilde{M}^{\#} \neq \phi$ *и для любого* $b' \in \mathbf{R}^m$

$$\partial g_c(b)/\partial b' = \partial f_c(b)/\partial b' = \inf\{(b', u) \mid \ u \in \widetilde{M}^{\#}\}.$$

Условия оптимальности для задач $P, P^{\#}$ сформулируем в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а 23.2 *Пусть* $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, $\tilde{u} \in \widetilde{M}^{\#}$. *Если обеспечено выполнение равенства* $\gamma = \gamma^{\#}$, *то*

$$RF(\Gamma(\tilde{x})) + RF^{\circledast}(\Gamma^{\#}(\tilde{u})) = \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - B_i^T \tilde{u}, \ \tilde{x}^i) + \sum_{j=1}^{m_0} (\tilde{u}^j, \ A_j \tilde{x} - b^j),$$

$$(A_0 \tilde{x} - b^0, \ \tilde{u}^0) = 0, \ \ (c^0 - B_0^T \tilde{u}, \ \tilde{x}^0) = 0. \tag{23.20}$$

Обратно, из $\tilde{x} \in M$, $\tilde{u} \in M^{\#}$ *и выполнения условий* (23.20) *следует* $\tilde{x} \in \tilde{M}$, $\tilde{u} \in \tilde{M}^{\#}$.

Доказательство проводится, либо опираясь на тот факт, что $[\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}]$, где $\tilde{t}_j = A_j\tilde{x} - b^j$ $(j = 1, ..., m_0)$, – седловая точка функции Φ (см. доказательство теоремы 23.1), либо с использованием схем, стандартных для выпуклого анализа (см., например, [23, с. 74]).

§ 24. Аппроксимационный смысл задач P и $P^{\#}$

Пусть $x \geqslant 0$ и $u \geqslant 0$ таковы, что $A_0x \leqslant b^0$, $B_0^Tu \geqslant c^0$. Векторам x и u соответствуют Δb и Δc – (минимальные) невязки систем ограничений задач L и L^*, т.е.

$$\Delta b \in \Omega_b(x) =$$
$$= \operatorname{Arg\,min}\{F(\lambda_1 x^1, ..., \lambda_{n_0} x^{n_0}, \mu_1 t_1^+, ..., \mu_{m_0} t_{m_0}^+) | \ A_jx \leqslant b^j + t_j$$
$$(j = 1, ..., m_0)\} \subset \mathbf{R}^{\nu_4},$$
$$\Delta c \in \Omega_c(u) =$$
$$= \operatorname{Arg\,min}\{F^{\circledast}(\xi_1 s_1^+, ..., \xi_{n_0} s_{n_0}^+, \eta_1 u^1, ..., \eta_{m_0} u^{m_0}) | \ B_i^Tu \geqslant c^i - s_i$$
$$(i = 1, ..., n_0)\} \subset \mathbf{R}^{\nu_3},$$

где разбиения $t = [t_1, ..., t_{m_0}] \in \mathbf{R}^{\nu_4}$, $s = [s_1, ..., s_{n_0}] \in \mathbf{R}^{\nu_3}$ соответствуют разбиениям $[b^1, ..., b^{m_0}]$, $[c^1, ..., c^{n_0}]$. Для выполнения условий $\Omega_b(x) \neq \neq \phi$, $\Omega_c(u) \neq \phi$ необходимо, чтобы F и $F^{\circledast}$ как функции от t и s не равнялись тождественно $+\infty$ на множествах

$$\{t | \ t_j \geqslant A_jx - b^j \quad (j = 1, ..., m_0)\},$$
$$\{s | \ s_i \geqslant c^i - B_i^Tu \quad (i = 1, ..., n_0)\}$$

соответственно. Поскольку эти функции, очевидно, монотонно не убывают, то соотношения $\Omega_b(x) \neq \phi$, $\Omega_c(u) \neq \phi$ можно переписать в следующем эквивалентном виде: $\Gamma(x) \in \operatorname{dom} F$, $\Gamma^{\#}(u) \in \operatorname{dom} F^{\circledast}$. Это позволяет представить условия, налагаемые на векторы x, u, фигурирующие в определении множеств $\Omega_b(x)$, $\Omega_c(u)$, в виде $x \in M$, $u \in M^{\#}$.

Пусть зафиксированы некоторые

$$\bar{x} \in M, \ \bar{u} \in M^{\#}, \ \Delta c \in \Omega_c(\bar{u}), \ \Delta b \in \Omega_b(\bar{x}).$$

Тогда ограничения задач линейного программирования

$$\max\{(c^0, x^0) + \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - \Delta c^i, x^i) | \ A_0x \leqslant b^0, \ A_jx \leqslant b^j + \Delta b^j$$
$$(j = 1, ..., m_0), \ x \geqslant 0\}, \tag{24.1}$$

$$\min\{(b^0, u^0) + \sum_{j=1}^{m_0} (b^j + \Delta b^j, u^j) | \ B_0^Tu \geqslant c^0, \ B_i^Tu \geqslant c^i - \Delta c^i$$
$$(i = 1, ..., n_0), \ u \geqslant 0\} \tag{24.2}$$

совместны и, следовательно, их оптимальные значения конечны и равны.

Определение. Пару векторов $\bar{x} \in M$, $\bar{u} \in M^{\#}$ назовем *стационарной* для задач L и L^{*}, если для любых $\Delta c \in \Omega_c(\bar{u})$, $\Delta b \in \Omega_b(\bar{x})$ выполняется

$$\bar{x} \in \mathrm{Arg}(24.1), \quad \bar{u} \in \mathrm{Arg}(24.2).$$

Нетрудно видеть, что пара $\bar{x} \in M$, $\bar{u} \in M^{\#}$ тогда и только тогда является стационарной для задач L и L^{*}, когда она удовлетворяет равенству

$$(c^0, x^0) + \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - \Delta c^i, x^i) = (b^0, u^0) + \sum_{j=1}^{m_0} (b^j + \Delta b^j, u^j) \tag{24.3}$$

при любых $\Delta c \in \Omega_c(\bar{u})$, $\Delta b \in \Omega_b(\bar{x})$.

Теорема 24.1. *Пусть задача P собственная и $\bar{x} \in \tilde{M}$, $\bar{u} \in \tilde{M}^{\#}$. Тогда пара $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ является стационарной для задач L и L^{*}.*

Доказательство. Из теоремы 23.2 и соотношений (22.3) следует

$$F^{\circledast}(\Gamma^{\#}(u)) = \sum_{i=1}^{n_0} (\xi_i(c^i - B_i^T \bar{u}),\ \lambda_i \bar{x}^i) + $$
$$+ \sum_{j=1}^{m_0} (\eta_j, \bar{u}^j, \mu_j(A_j \bar{x} - b^j)) - F(\Gamma(\bar{x})).$$

Используя лемму 23.1, это равенство можно переписать в виде

$$(F)_2^{*}(\Gamma^{\#}(\bar{u})) = (\Gamma(\bar{x}),\ \Gamma^{\#}(\bar{u})) - (F)_2(\Gamma(\bar{x})).$$

В силу следствия 1 и известных свойств субдифференциалов выпуклых функций (см., например, [20, теорема 23.5]) отсюда получаем

$$\Gamma^{\#}(\bar{u}) \in \partial(F)_2(\Gamma(\bar{x})), \quad \Gamma(\bar{x}) \in \partial(F)_2^{*}(\Gamma_0^{\#}(u)). \tag{24.4}$$

Здесь и дальше символ типа $\partial\omega(\bar{z})$ обозначает субдифференциал выпуклой функции $\omega(z)$ в точке $z = \bar{z}$. Согласно лемме 23.1 и другому свойству субдифференциала [20, теорема 23.9]]

$$\begin{aligned} &\partial(F)_2(\Gamma(\bar{x})) = S_1^{-1}\varphi(\bar{x}, \bar{t}), \\ &\partial(F)_1^{*}(\Gamma_0^{\#}(\bar{u})) = S_2^{-1}\partial\psi(\bar{s}, \bar{u}), \end{aligned} \tag{24.5}$$

где S_1, S_2 – матрицы размерности $\nu \times \nu$, на главной диагонали которых стоят соответственно числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_0}$, $\mu_1, \dots, \mu_{m_0}$ и $\xi_1, \dots, \xi_{n_0}$, $\eta_1, \dots, \eta_{m_0}$;

$$\bar{t}_j = A_j \bar{x} - b^j, \quad \bar{s}_i = c^i - B_i^T \bar{u}, \quad j = 1, \dots, m_0; \quad i = 1, \dots, n_0,$$
$$\varphi(x, t) = F(\lambda_1 x^1, \dots, \lambda_{n_0} x^{n_0}, \mu_1 \overset{+}{t}_1, \dots, \mu_{m_0} \overset{+}{t}_{m_0}),$$
$$\psi(s, u) = F^{\circledast}(\xi_1 \overset{+}{s}_1, \dots, \xi_{n_0} \overset{+}{s}_{n_0}, \eta_1 u^1, \dots, \eta_{m_0} u^{m_0}).$$

Из соотношений (22.3), (24.4), (24.5) получаем

$$[\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{n_0}, \bar{u}^1, \dots, \bar{u}^{m_0}] \in \partial(R\varphi(\bar{x}, \bar{t})),$$
$$[\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n_0}, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{m_0}] \in \partial(R\psi(\bar{s}, \bar{u})).$$

Отсюда, в частности, следует

$$\begin{aligned} &[\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^{m_0}] \in \partial(R\varphi_1(\bar{t})), \\ &[\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n_0}] \in \partial(R\psi_1(\bar{s})), \end{aligned} \tag{24.6}$$

где $\varphi_1(t) = \varphi(\bar{x}, t)$, $\psi_1(s) = \psi(s, \bar{u})$.

Пусть $\Delta b \in \Omega_b(\bar{x})$. Тогда, очевидно, $t = \bar{t}$ является допустимой точкой, а $t = \Delta b$ – решением задачи $\min\{R\varphi_1(t) \mid A_j\bar{x} \leqslant b^j + t_j \ (j = 1, \ldots, m_0)\}$. Поэтому $R\varphi_1(\Delta b) \leqslant R\varphi_1(\bar{t})$. Отсюда в силу (24.6) получаем

$$\sum_{j=1}^{m_0} (\bar{u}^j, \Delta b^j - \bar{t}_j) \leqslant R\varphi_1(\Delta b) - R\varphi_1(\bar{t}) \leqslant 0. \tag{24.7}$$

Аналогичным способом доказываются неравенства

$$\sum_{i=1}^{n_0} (\bar{x}^i, \Delta c^i - \bar{s}_i) \leqslant R\psi_1(\Delta c) - R\psi_1(\bar{s}) \leqslant 0. \tag{24.8}$$

Учитывая соотношения (23.20) теоремы 23.2, выполняющиеся для $x = \bar{x}$, $u = \bar{u}$, а также неравенства (24.7), (24.8), имеем

$$(c^0, \bar{x}^0) + \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - \Delta c^i, \bar{x}^i) = (c^0, \bar{x}^0) + \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - \bar{s}_i - (\Delta c^i - \bar{s}_i, \bar{x}^i) \geqslant$$

$$\geqslant (c^0, x^0) + \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - \bar{s}_i, \bar{x}^i) = (B_0^T\bar{u}, \bar{x}^0) + \sum_{i=1}^{n_0} (B_i^T\bar{u}, \bar{x}^i) =$$

$$= (A_0\bar{x}, \bar{u}^0) + \sum_{j=1}^{m_0} (A_j\bar{x}, \bar{u}^j) = (b^0, \bar{u}^0) + \sum_{j=1}^{m_0} (b^j + \bar{t}_j, \bar{u}^j) \geqslant$$

$$\geqslant (b^0, u^0) + \sum_{j=1}^{m_0} (b^j + \bar{t}_j + \Delta b^j - \bar{t}_j, \bar{u}^j) = (b^0, u^0) + \sum_{j=1}^{m_0} (b^j + \Delta b^j, \bar{u}^j).$$

Так как оптимальные значения задач (24.1), (24.2) совпадают, а векторы $\bar{x}$, $\bar{u}$ допустимы для этих задач, то из полученных соотношений следует справедливость (24.3). Теорема доказана.

Для дальнейшего нам понадобится рассмотреть два несколько более частных вида задач P и $P^{\#}$. Пусть вначале в задаче (22.1) $R = 1$, а функция F имеет вид

$$F(\Gamma(x)) = R_1F_1(\lambda_1x^1, \ldots, \lambda_{n_0}x^{n_0}) + R_2F_2(\mu_1(A_1x - b^1)^+, \ldots$$
$$\ldots, \mu_{m_0}(A_{m_0}x - b^{m_0})^+),$$

где $F_1(z^1)$, $F_2(z^2)$ – допустимые функции переменных $z^1 \in \mathbf{R}^{\nu_3}$ и $z^2 \in \mathbf{R}^{\nu_4}$; R_1, R_2 – положительные параметры. Заметим, что из допустимости F_1, F_2 следует допустимость F. Непосредственно проверяется равенство

$$(R_1F_1 + R_2F_2)^{\oplus}([z^1, z^2]) = R_1F_1^{\oplus}(R_1^{-1}z^1) + R_2F_2^{\oplus}(R_2^{-1}z^2).$$

Таким образом, мы получаем следующую частную реализацию задач (22.1), (22.2):

$$\sup\{(c, x) - R_1F_1(\lambda_1x^1, \ldots, \lambda_{n_0}x^{n_0}) - R_2F_2(\mu_1(A_1x - b^1)^+, \ldots$$
$$\ldots, \mu_{m_0}(A_{m_0}x - b^{m_0})^+) \mid A_0x \leqslant b^0, x \geqslant 0\}, \tag{24.9}$$

$$\inf\{(b, u) + R_1F_1^{\oplus}(\xi_1(c^1 - B_1^Tu)^+, \ldots, \xi_{n_0}(c^{n_0} - B_{n_0}^Tu)^+) +$$
$$+ R_2F_2^{\oplus}(\eta_1u^1, \ldots, \eta_{m_0}u^{m_0}) \mid B_0^Tu \geqslant c^0, u \geqslant 0\}, \tag{24.10}$$

где положительные параметры связаны условиями

$$\lambda_i \xi_i = R_1^{-1}, \ \mu_j \eta_j = R_2^{-1}, \ i = 1, \dots, n_0; \ j = 1, \dots, m_0.$$

Аналогичным образом, полагая в задачах (22.1), (22.2)

$$R = 1, \ F(\Gamma(x)) = \sum_{i=1}^{n_0} r_i \varphi_i(\lambda_i x^i) + \sum_{j=1}^{m_0} R_j F_j(\mu_j (A_j x - b^j)^+),$$

где φ_i, F_j $(i = 1, \dots, n_0; \ j = 1, \dots, m_0)$ – произвольные допустимые функции над соответствующими пространствами, получаем следующую частную реализацию задач (22.1), (22.2):

$$\sup\{(c,x) - \sum_{i=1}^{n_0} r_i \varphi_i(\lambda_i x^i) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j F_j(\mu_j (A_j x - b^j)^+) \mid$$

$$A_0 x \leqslant b^0, \ x \geqslant 0\}, \tag{24.11}$$

$$\inf\{(b,u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \varphi_i^{\oplus}(\xi_i (c^i - B_i^T u)^+) + \sum_{j=1}^{m_0} R_j F_j^{\oplus}(\eta_j u^j) \mid$$

$$B_0^T u \geqslant c^0, \ u \geqslant 0\}, \tag{24.12}$$

в которых положительные параметры связаны условиями

$$\lambda_i \xi_i = r_i^{-1}, \ \mu_j \eta_j = R_j^{-1}, \ i = 1, \dots, n_0; \ j = 1, \dots, m_0.$$

Перейдем теперь к рассмотрению вопросов, касающихся способов выбора параметров в задачах (22.1), (22.2), (24.9) – (24.12). Введя обозначения

$$M_1 = \{x \mid A_0 x \leqslant b^0, \ x^0 \geqslant 0\},$$

$$\widetilde{M}_1 = \operatorname{Arg\,min}\{F(\Gamma(x)) \mid x \in M_1\},$$

рассмотрим задачу

$$\sup\{(c,x) \mid x \in \widetilde{M}_1\}. \tag{24.13}$$

Пусть $\zeta = \min\{F(\Gamma(x)) \mid x \in M_1\}$ конечно. Тогда $\widetilde{M}_1 = \{x \mid F(\Gamma(x)) \leqslant \leqslant \zeta\} \cap M_1$, и задача (24.13) принимает вид

$$\sup\{(c,x) \mid F(\Gamma(x)) \leqslant \zeta, \quad x \in M_1\}. \tag{24.14}$$

Выпишем соответствующую задаче (24.14) функцию Лагранжа

$$T(x,z) = (c,x) - z(F(\Gamma(x)) - \zeta), \quad z \in \mathbf{R}.$$

В случае выполнения условий теоремы Куна – Таккера для задачи (выпуклого программирования) (24.14) функция $T(x,z)$ имеет седловую точку $[\bar{x}, \bar{z}]$ на множестве $M_1 \times \mathbf{R}_+$, т.е.

$$T(x,\bar{z}) \leqslant T(\bar{x},\bar{z}) \leqslant T(\bar{x},z) \quad \forall x \in M_1, \quad \forall z \in \mathbf{R}_+. \tag{24.15}$$

Отметим, что соотношения (24.15) будут выполняться при некотором $[\bar{x}, \bar{z}] \in M_1 \times \mathbf{R}_+$ и в случае, если оптимальное значение задачи (24.13) конечно и P является l-задачей. Это следует из того, что в данной ситуации $F(\Gamma(x))$ будет выпуклой кусочно линейной функцией, а $\widetilde{M}_1$ – выпуклым полиэдральным множеством. Обозначим $\varphi(x) = F(\Gamma(x))$.

Т е о р е м а 24.2. *Пусть выполняется любое из условий*:

1) *справедливо* (24.15), *причем* $\Gamma(x') \in \operatorname{int}\operatorname{dom}(F)_2$ *или же* $0 \in \operatorname{ri}\operatorname{dom}\varphi$ *при некотором* $x' \in M_1$;

2) P *является* l*-задачей и оптимальное значение задачи* (24.13) *конечно. Тогда при* $R > \bar{z}$ *оптимальные множества задач* P *и* (24.13) *совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии со сделанным перед формулировкой теоремы замечанием, условия теоремы обеспечивают выполнение соотношений (24.15). Как хорошо известно (и легко проверяется), это означает, что $\bar{x}$ – решение задачи (24.14) и

$$\bar{z}(\varphi(\bar{x}) - \zeta) = 0. \qquad (24.16)$$

Так как, согласно (24.15), $T(x, \bar{z}) \leqslant T(\bar{x}, \bar{z})$ $\forall x \in M_1$, то

$$0 \in \partial(-(c, \bar{x}) + \bar{z}(\varphi(\bar{x}) - \zeta) + \delta(\bar{x} \mid M_1)) \qquad (24.17)$$

(здесь имеется в виду субдифференциал по x в точке $\bar{x}$). Из условия $\Gamma(x') \in \operatorname{int}\operatorname{dom}(F)_2$ (где $x' \in M_1$) с учетом очевидного равенства $\operatorname{dom}\varphi = \{x \mid \Gamma(x) \in \operatorname{dom}(F)_2\}$ следует $x' \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$. С другой стороны, принимая во внимание лемму 3, нетрудно заметить, что в случае 2) φ выпукла, кусочно линейна, $M_1 \cap \operatorname{dom}\varphi \neq \phi$. Перечисленные факты позволяют заключить, что предположения теоремы обеспечивают выполнение условий разложимости субдифференциала (24.17) в сумму (см., например, [20, теорема 23.8]), т.е.

$$c = \bar{z}h_1 + h \qquad (24.18)$$

при некоторых $h_1 \in \partial\varphi(\bar{x})$, $h \in \partial\delta(\bar{x} \mid M_1)$.

Таким образом, задача (24.14) разрешима, и ее оптимальный вектор $\bar{x}$ удовлетворяет условиям (24.16), (24.18). Тогда к задаче (24.14) применима теорема 25.1 [6], поскольку, как видно из доказательства этой теоремы, предположение о регулярности задачи (24.14) может быть заменено условиями (24.16), (24.18). В силу упомянутой теоремы оптимальные значения и оптимальные множества задач (24.14) и

$$\max\{(c, x) - R(\varphi(x) - \zeta)^+ \mid x \in M_1\} \qquad (24.19)$$

совпадают при $R > \bar{z}$. Наконец, учитывая, что $(\varphi(x) - \zeta)^+ = \varphi(x) - \zeta$ $\forall x \in M_1$ в силу определения ζ, получаем требуемое утверждение.

Выбор параметров r_i, R_i $(i = 1, \ldots, n_0; j = 1, \ldots, m_0)$ в задачах (24.11), (24.12) свяжем с одной постановкой задачи последовательного программирования. Упорядочив произвольным образом функции $\varphi_i(\lambda_i x^i)$, $F_j(\mu_j(A_j x - b^j)^+)$ $(i = 1, \ldots, n_0;\ j = 1, \ldots, m_0)$, обозначим их через $f_1(x), \ldots, f_{n_0+m_0}(x)$. Положим $f_{n_0+m_0+1}(x) = -(c, x)$. Параметр r_i (или R_j), являющийся коэффициентом при функции $f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n_0 + m_0)$, обозначим через α_k. Поставим задаче (24.11) в соответствие задачу последовательного программирования

$$\max\{(c, x) \mid x \in M'_{m_0+n_0}\}, \qquad (24.20)$$

где множество $M'_{m_0+n_0}$ определяется из соотношений

$$M'_j = \operatorname{Arg}\min\{f_j(x) \mid x \in M'_{j-1}\}, \quad j = 1, \ldots, m_0 + n_0 + 1, \quad M'_0 = M.$$

Обозначим

$$\Psi_1(x) = f_1(x), \Psi_{j+1}(x, \beta_1, \ldots, \beta_j) = f_{j+1}(x) +$$
$$+ \beta_j \Psi_j(x, \beta_1, \ldots, \beta_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, m_0 + n_0.$$

Рассмотрим последовательность задач

$$\min\{\Psi_j(x, \beta_1, \ldots, \beta_{j-1}) \mid x \in M'\}, \tag{24.21}$$

оптимальные значения которых обозначим через E_j ($j = 1, \ldots, m_0 + n_0 + 1$). Константы α_j и β_j свяжем соотношениями $\alpha_j = \beta_j \times \ldots \times \beta_{m_0+n_0}$ ($j = 1, \ldots, m_0 + n_0$). Тогда при $j = m_0 + n_0 + 1$ задачи (24.11) и (24.21) эквивалентны.

Теорема 24.3. *Пусть задача* (24.20) *разрешима, а функции* φ_i, F_j ($i = 1, \ldots, n_0$; $j = 1, \ldots, m_0$) *выпуклы и кусочно линейны* (*т.е.* (24.11) *является l-задачей*).

1) *Если* $\beta_1 > \bar{v}_1$, *где* $\bar{v}_1$ – *двойственная оценка, отвечающая неравенству* $\Psi_1(x) \leqslant E_1$ *в задаче*

$$\min\{f_2(x) \mid x \in M_0' \cap \{x \mid \Psi_1(x) \leqslant E_1\}\},$$

то $\operatorname{Arg\,min}\{\Psi_2(x, \beta_1) \mid x \in M_0'\} = M_2'$.

2) *Если выбор параметров* $\beta_i > 0$ ($i = 1, \ldots, t-1$) *уже обеспечил выполнение равенства*

$$\operatorname{Arg\,min}\{\Psi_j(x, \beta_1, \ldots, \beta_{j-1}) \mid x \in M_0'\} = M_j'$$

при любых $j \leqslant t \leqslant m_0 + n_0$, *то при* $\beta_t > \bar{v}_t$, *где* $\bar{v}_t$ – *двойственная оценка, отвечающая неравенству* $\Psi_t(x, \beta_1, \ldots, \beta_{t-1}) \leqslant E_t$ *в задаче*

$$\min\{f_{t+1}(x) \mid x \in M'_t = M_0' \cap \{x \mid \Psi_t(x, \beta_1, \ldots, \beta_{t-1}) \leqslant E_t\}\},$$

выполняется

$$\operatorname{Arg\,min}\{\Psi_{t+1}(x, \beta_1, \ldots, \beta_t) \mid x \in M_0'\} = M'_{t+1}. \tag{24.22}$$

В частности, при $t = m_0 + n_0$ из (24.22) следует, что оптимальные множества задач (24.11) и (24.20) совпадают. Как нетрудно видеть, условия теоремы 24.3 в совокупности со свойствами допустимых функций обеспечивают выполнение условий теоремы 9.3 [10], следствием которой и является данная теорема.

Для задач (24.9), (24.10), может быть сформулирован соответствующий аналог теоремы 24.3, определяющий возможный способ выбора их параметров.

§ 25. Частные реализации

Ряд частных реализаций задач (22.1), (22.2) уже был рассмотрен ранее – это задачи (22.4) и (22.5), (24.9) – (24.12). В этом параграфе будет специально рассмотрен случай, когда функция штрафа F зависит от норм невязок. А именно, пусть функция F имеет следующий конкретный вид:

$$F(\Gamma(x)) = \varphi(\lambda_1 \| x^1 \|_{q(1)}, \ldots, \lambda_{n_0} \| x^{n_0} \|_{q(n_0)},$$
$$\mu_1 \| (A_1 x - b^1)^+ \|_{p(1)}, \ldots, \mu_{m_0} \| (A_{m_0} x - b^{m_0})^+ \|_{p(m_0)}) + \delta(\Gamma(x) \mid \mathbf{R}_+^{\nu}). \tag{25.1}$$

Здесь $\| \cdot \|_{q(i)}$, $\| \cdot \|_{p(j)}$ ($i = 1, \ldots, n_0$; $j = 1, \ldots, m_0$) – нормы в соответствующих пространствах, φ – функция над $\mathbf{R}^{n_0+m_0}$. Через $\|\cdot\|^*$, как и прежде, обозначим норму, сопряженную к $\|\cdot\|$. Например, если $w = [w_1, \ldots, w_k]$, то сопряженными к нормам

$$\|w\|_0 = \max_{j=1,\ldots,k} \{\alpha_j |w_j|\},$$

$$\|w\|_1 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j |w_j|,$$

$$\|w\|_2 = (\sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j^2)^{1/2},$$

где $\alpha_j > 0$ $(j = 1, \ldots, k)$, будут нормы

$$\|w\|_0^* = \sum_{j=1}^{k} \alpha^{-1} |w_j|,$$

$$\|w\|_1^* = \max_{j=1,\ldots,k} \{\alpha_j^{-1} |w|\},$$

$$\|w\|_2^* = (\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{-1} w_j^2)^{1/2}.$$

Все выписанные нормы являются монотонными.

Лемма 25.1. *Пусть нормы* $\|\cdot\|_{q(i)}$, $\|\cdot\|_{q(i)}^*$, $\|\cdot\|_{p(j)}$, $\|\cdot\|_{p(j)}^*$ $(i = 1, \ldots, n_0;\ j = 1, \ldots, m_0)$ *монотонны,* φ – *выпуклая, собственная, полунепрерывная снизу функция, монотонно не убывающая на множестве* $\mathbf{R}_+^{n_0+m_0}$ *и удовлетворяющая условию* $\varphi(0) = 0$, *а также любому из условий*:

а) $\varphi(v) = \varphi(|v_1|, \ldots, |v_{n_0+m_0}|)$ $\forall v \in \mathbf{R}^{n_0+m_0}$;

б) $\operatorname{dom} \varphi \subset \mathbf{R}_+^{n_0+m_0}$;

в) $\varphi(v) = \varphi(v^+)$ $\forall v \in \mathbf{R}^{n_0+m_0}$.

Тогда функция F, *определенная согласно* (25.1), *допустима, причем*

$$F^{\oplus}(\Gamma^{\#}(u)) = \varphi^*(\xi_1 \|(c^1 - B_1^{\mathrm{T}} u)^+\|_{q(1)}^*, \ldots, \xi_{n_0} \|(c^{n_0} - B_{n_0}^{\mathrm{T}} u)^+\|_{q(n_0)}^*,$$
$$\eta_1 \|u^1\|_{p(1)}^*, \ldots, \eta_{m_0} \|u^{m_0}\|_{p(m_0)}^*) + \delta(\Gamma^{\#}(u) | \mathbf{R}_+^{\nu}). \qquad (25.2)$$

Доказательство. Проверка допустимости функции F проводится непосредственно. Убедимся в справедливости равенства (25.2). Пусть $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ – произвольные взаимно сопряженные и монотонные нормы в пространстве $\mathbf{R}^k$. Как нетрудно видеть,

$$\{w \mid \|w\|^* \leqslant \|w^*\|^*\} \cap \{w \mid w > w^*\} = \phi \quad \forall w^* \in \mathbf{R}_+^k.$$

В силу теоремы отделимости отсюда вытекает

$$(w, w^0) \leqslant (w^*, w^0) \quad \forall w \in \{w \mid \|w\|^* \leqslant \|w^*\|^*\}$$

при некотором $w^0 \in \mathbf{R}_+^k$, $w^0 \neq 0$. Из полученных соотношений следует, что $\alpha w^0 \in \partial \|w^*\|^*$ при некотором $\alpha \in \mathbf{R}_+^1$ [6, лемма 18.1]. Так как функция $\|\cdot\|^*$, очевидно, является сопряженной к функции $\delta(w | \{w \mid \|w\| < 1\})$, причем последняя полунепрерывна снизу, то из $\alpha w^0 \in \partial \| w^* \|^*$ следует

$$\alpha w^0 \in \operatorname{Arg\,max} \{ (w^*, w) \mid \| w \| \leqslant 1 \}$$

[20, теорема 23.5]. Заметим, что $\alpha w^0 \geqslant 0$.

Таким образом, для любого $w^* \geqslant 0$

$$\| w^* \|^* = \max \{ (w^*, w) \mid \| w \| \leqslant 1 \} =$$
$$= \max \{ (w^*, w) \mid w \geqslant 0, \ \| w \| \leqslant 1 \} .$$

Отсюда следует, что для $s \in \mathbf{R}^1_+$

$$\max \{ (w^*, w) \mid w \geqslant 0, \| w \| = s \} = s \| w^* \|^* \quad \forall w^* \in \mathbf{R}^k_+. \tag{25.3}$$

Как нетрудно заметить, для любой функции φ, удовлетворяющей условиям доказываемого утверждения, выполняется

$$\sup_{v} \{ (v^*, v) - \varphi(v) \} = \sup_{v \geqslant 0} \{ (v^*, v) - \varphi(v) \} \quad \forall v^* \geqslant 0. \tag{25.4}$$

Обозначим аргументы функций F и $F^{\oplus}$ через $z = [z^1, \ldots, z^{n_0+m_0}] \in \mathbf{R}^{\nu}$, $y = [y^1, \ldots, y^{n_0+m_0}] \in \mathbf{R}^{\nu}$. Положим

$$\rho(z, y) = (y, z) - \varphi(\| z^1 \|_{q(1)}, \ldots, \| z^{n_0} \|_{q(n_0)},$$
$$\| z^{n_0+1} \|_{p(1)}, \ldots, \| z^{n_0+m_0} \|_{p(m_0)}),$$
$$v = [v_1, \ldots, v_{n_0+m_0}] \in \mathbf{R}^{n_0+m_0} .$$

Используя определение функции $F^{\oplus}$ и свойства (25.3), (25.4), получаем

$$F^{\oplus}(y) = \sup_{z} \{ \rho(z, y) - \delta(z \mid \mathbf{R}^{\nu}_+) \} + \delta(y \mid \mathbf{R}^{\nu}_+) =$$
$$= \sup_{v \geqslant 0} \sup \{ (y, z) - \varphi(v) \mid z \geqslant 0, \ \| z^i \|_{q(i)} = v_i,$$
$$\| z^{n_0+j} \|_{p(j)} = v_{n_0+j} \ (i = 1, \ldots, n_0; j = 1, \ldots, m_0) \} + \delta(y \mid \mathbf{R}^{\nu}_+) =$$
$$= \sup_{v \geqslant 0} \{ \sum_{i=1}^{n_0} v_i \| y^i \|^*_{q(i)} + \sum_{j=1}^{m_0} v_{n_0+j} \| y^{n_0+j} \|^*_{p(j)} - \varphi(v) \} +$$
$$+ \delta(y \mid \mathbf{R}^{\nu}_+) = \varphi^*(\| y^1 \|^*_{q(1)}, \ldots, \| y^{n_0} \|^*_{q(n_0)},$$
$$\| y^{n_0+1} \|^*_{p(1)}, \ldots, \| y^{n_0+m_0} \|^*_{p(m_0)}) + \delta(y \mid \mathbf{R}^{\nu}_+).$$

Подставляя в это равенство $y = \Gamma^{\#}(u)$, получаем (25.2). Утверждение доказано.

Таким образом, при выполнении предположений леммы 25.1 задачи (22.1), (22.2), соответствующие конкретному виду (25.1) функции F, запишутся в виде

$$P\colon \ \sup \{ (c, x) - R\varphi(\lambda_1 \| x^1 \|_{q(1)}, \ldots, \lambda_{n_0} \| x^{n_0} \|_{q(n_0)},$$
$$\mu_1 \| (A_1 x - b^1)^+ \|_{p(1)}, \ldots, \mu_{m_0} \| (A_{m_0} x - b^{m_0})^+ \|_{p(m_0)}) \mid A_0 x \leqslant b^0, x \geqslant 0 \}, \tag{25.5}$$

$$P^{\#}\colon \ \inf \{ (b, u) +$$
$$+ R\varphi^*(\xi_1 \| (c_1 - B_1^{\mathsf{T}} u)^+ \|^*_{q(1)}, \ldots, \xi_{n_0} \| (c^{n_0} - B_{n_0}^{\mathsf{T}} u)^+ \|^*_{q(n_0)},$$
$$\eta_1 \| u^1 \|^*_{p(1)}, \ldots, \eta_{m_0} \| u^{m_0} \|^*_{p(m_0)}) \mid L_0^{\mathsf{T}} u \geqslant c^0, \ u \geqslant 0 \} . \tag{25.6}$$

Пусть, например, в задаче (25.5) функция $\varphi(v)$ имеет вид

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i^{-1} |v_i|^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{m_0} \beta_j^{-1} |v_{n_0+j}|^{\beta_j}, \tag{25.7}$$

где параметры α_i, β_j выбираются из условий

$$1 \leqslant \alpha_i \leqslant +\infty, \quad 1 \leqslant \beta_j \leqslant +\infty, \quad i = 1, \ldots, n_0; \; j = 1, \ldots, m_0. \tag{25.8}$$

При этом оперирование с бесконечными величинами производится по правилам:

$$-(+\infty) = -\infty, \quad z \pm \infty = \pm\infty,$$

$$(+\infty)^{-1} z^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ +\infty, & z > 1 \end{cases}$$

(z – произвольное действительное число). Тогда непосредственная проверка показывает, что сопряженной к функции $\omega(z) = \alpha^{-1} |z|^{\alpha}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant +\infty$, является $\omega^*(z) = \sigma^{-1} |z|^{\sigma}$, в которой параметр σ выбирается из условия $\alpha^{-1} + \sigma^{-1} = 1$, причем в данном условии по определению считается $(+\infty)^{-1} = 0$. Отсюда получаем

$$\varphi^*(v) = \sum_{i=1}^{n_0} \sigma_i^{-1} |v_i|^{\sigma_i} + \sum_{j=1}^{m_0} \tau_j^{-1} |v_{n_0+j}|^{\tau_j},$$

где параметры σ_i, τ_j находятся из условий

$$\alpha_i^{-1} + \sigma_i^{-1} = 1, \;\; \beta_j^{-1} + \tau_j^{-1} = 1, \quad 1 \leqslant \sigma_i \leqslant +\infty,$$

$$1 \leqslant \tau_j \leqslant +\infty, \quad i = 1, \ldots, n_0; \quad j = 1, \ldots, m_0. \tag{25.9}$$

Учитывая, что функция φ вида (25.7), очевидно, удовлетворяет всем условиям утверждения леммы 25.1 (и, в частности, условию а)), и полагая $R = 1$, получаем соответствующую ей частную реализацию задач (25.5), (25.6):

$$P\colon \sup \{ (c, x) - \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i^{-1} \| \lambda_i x^i \|_{q(i)}^{\alpha_i} - \sum_{j=1}^{m_0} \beta_j^{-1} \| \mu_j (A_j u - b^j)^+ \|_{p(j)}^{\beta_j} \mid A_0 x \leqslant b^0, \; x \geqslant 0 \}, \tag{25.10}$$

$$P^{\#}\colon \inf \{ (b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} \sigma_i^{-1} \| \xi_i (c^i - B_i^{\mathsf T} u)^+ \|_{q(i)}^{*\sigma_i} + \sum_{j=1}^{m_0} \tau_j^{-1} \| \eta_j u^j \|_{p(j)}^{*\tau_j} \mid B_0^{\mathsf T} u \geqslant c^0, \; u \geqslant 0 \}, \tag{25.11}$$

где параметры $\lambda_i > 0$, $\mu_j > 0$, $\xi_i > 0$, $\eta_j > 0$, $\alpha_i, \beta_j, \sigma_i, \tau_j$ выбираются из условия (25.8), (25.9) и

$$\lambda_i \xi_i = \mu_j \eta_j = 1, \quad i = 1, \ldots, n_0; \; j = 1, \ldots, m_0.$$

Приведем несколько примеров задач, получающихся из (25.10), (25.11) при различных вариантах выбора параметров:

1) При $B_0 = A$, $n_0 = 1$, $\alpha_1 = \sigma_1 = 2$, $\beta_j = 1$, $\tau_j = +\infty$ $(j = 1, \ldots, m_0)$ получаем задачи

$$\sup\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| (A_j x - b^j)^+ \|_{p(j)} - r \| x \|_q^2 \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\},$$

$$\inf\{(b, u) + (4r)^{-1} \| (c - A^{\mathrm{T}} u)^+ \|_q^{*2} \mid\ u \geqslant 0,\ \| u^j \|_{p(j)}^* \leqslant R_j$$

$$(j = 1, \ldots, m_0)\},$$

где R, r — произвольные положительные параметры. В частности, если $\| x \|_q$ — евклидова норма, то первую из выписанных задач можно рассматривать как регуляризацию (по Тихонову) задачи

$$\sup\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| (A_j x - b^j)^+ \|_{p(j)} \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\},$$

аппроксимирующей несобственную задачу 1-го рода L.

2) При $A_0 = \phi, B_0 = A, m_0 = 1, \beta_1 = \tau_1 = 2$ получаем задачи

$$\sup\{(c, x) - \mu \| (Ax - b)^+ \|_p^2 \mid x \geqslant 0\},$$

$$\inf\{(b, u) + \eta \| u \|_p^{*2} \mid A^{\mathrm{T}} u \geqslant c,\ u \geqslant 0\},$$

$$\mu > 0, \quad \eta > 0, \quad \mu\eta = 4^{-1},$$

отвечающие несобственности 1-го рода задачи L.

3) При $A_0 = \phi$, $B_0 = \phi$, $m_0 = n_0 = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = \sigma_1 = \tau_1 = 2$ задачи (25.10), (25.11) запишутся в следующем симметричном виде:

$$\sup\{(c, x) - \mu \| (Ax - b)^+ \|_p^2 - \lambda \| x \|_q^2 \mid x \geqslant 0\}, \tag{25.12}$$

$$\inf\{(b, u) + \xi \| (c - A^{\mathrm{T}} u)^+ \|_q^{*2} + \eta \| u \|_p^{*2} \mid u \geqslant 0\}, \tag{25.13}$$

соответствующем случаю несобственности 3-го рода задач L и L^* (положительные параметры μ, λ, ξ, η выбираются из условий $\lambda\xi = \mu\eta = 4^{-1}$).

4) Наконец, при $\alpha_j = +\infty$, $\beta_i = 1$, $\sigma_i = 1$, $\tau_j = +\infty$ $(j = 1, \ldots, m_0;\ i = 1, \ldots, n_0)$ получаем пару задач:

$$\sup\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} \mu_j \| (A_j x - b^j)^+ \|_{p(j)} \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0,$$

$$\| x^i \|_{q(i)} \leqslant \xi_i \quad (i = 1, \ldots, n_0)\}$$

$$\inf\{(b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} \xi_i \| (c^i - B_i^{\mathrm{T}} u)^+ \|_{q(i)}^* \mid B_0^{\mathrm{T}} u \geqslant c^0,$$

$$u \geqslant 0,\ \| u^j \|_{p(j)}^* \leqslant \mu_j \quad (j = 1, \ldots, m_0)\},$$

рассматривавшихся в гл. III. Здесь μ_j, ξ_i $(j = 1, \ldots, m_0;\ i = 1, \ldots, n_0)$ — произвольные положительные параметры.

§ 26. Двойственность для несобственных задач в бесконечномерных пространствах

При перенесении полученных результатов на бесконечномерный случай первая бросающаяся в глаза трудность состоит в невозможности применения операции +, фигурирующей в определении аргумента $\Gamma(x)$ функции F и определенной лишь для конечномерных пространств. Различные попытки обобщения этой операции (например, рассмотрение ее как проектирование на конус, сопряженный конусу "неотрицательных векторов" — в гильбертовом пространстве или обобщение ее с помощью еще более сложной конструкции, использующей уже две пары сопряженных конусов, — в банаховом пространстве) приводят к необходимости введения дополнительных ограничений на виды используемых конусов, соответствующих аналогов функции F или норм. Так как нам представлялось важным сохранение, с одной стороны, общности предположений, а с другой — достаточной простоты и естественности всей конструкции, то для обобщения был избран иной путь. А именно, ниже вначале строится пара задач $P, P^{\#}$ общего вида (содержащая в себе, в частности, и все постановки, возникающие в результате обобщения операции +), а затем приводится пример ее частной реализации, представляющий собой обобщение на бесконечномерный случай формы (25.5), (25.6) задач (22.1), (22.2).

Как методика доказательства основных утверждений, так и сама схема исследования задач P, $P^{\#}$ (включая и несобственные задачи выпуклого программирования 1-го рода) в бесконечномерном случае представляют собой естественное (хотя и не автоматическое) перенесение на этот случай построений подробно рассмотренного выше случая конечномерного линейного программирования. При этом роль своего рода ориентира может выполнять работа [8]. С учетом сказанного ограничимся ниже лишь приведением общего вида задач $P, P^{\#}$ (и их частной реализации), а также формулированием теоремы двойственности.

Отметим также, что, хотя перенесение теории двойственности для несобственных задач линейного программирования на бесконечномерный случай потребовало лишь усложнения техники доказательств, тем не менее оно носит принципиальный характер, так как потенциально существенно расширяет сферу возможных применений (некоторые задачи математической физики, теория оптимального управления, теория приближения функций и др.).

Выпишем общий вид исходной пары двойственных задач линейного программирования:

$$L:\ \sup\{(c,x) \mid b - Ax \in K,\ \ x \in C\}, \tag{26.1}$$

$$L^*:\ \inf\{(b,u) \mid A^*u - c \in C^*,\ \ u \in K^*\}. \tag{26.2}$$

Здесь $x \in X, u \in U, c \in X^*, b \in U^*$; X, U — некоторые вещественные линейные топологические пространства; X^*, U^* — сопряженные им пространства (непрерывных линейных функционалов); A — непрерывный линейный оператор, действующий из X в U^*; A^* — сопряженный ему оператор; $C \subset X, K \subset U^*$ — выпуклые замкнутые конусы; $C^*=\{x^* \in X^* \mid (x^*, x) \geqslant 0\ \forall x \in C\}, K^*=\{u \in U \mid (u, u^*) \geqslant 0\ \ \forall u^* \in K\}$ — сопряженные им конусы. Нам будет удобнее считать все упомянутые пространства рефлексивными банаховыми (хотя приводимая ниже теорема 26.1 имеет аналог и для случая линейных пространств в двойственности, наделенных слабыми топологиями).

Для дальнейшего потребуется конкретизировать форму (26.1), (26.2) задач L, L^* путем введения разбиения оператора A, аналогичного "разрезу" матрицы A задачи L. Это повлечет за собой соответствующее разбиение введенных пространств и конусов. В целях краткости изложения предположим вместо этого сразу, что

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad U = \prod_{j=1}^{m} U_j, \quad X^* = \prod_{i=1}^{n} X_i^*, \quad U^* = \prod_{j=1}^{m} U_j^*,$$

где X_i, X_i^*, U_j, U_j^* $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ – рефлексивные банаховы пространства и (сильно) сопряженные им. Тогда, если положить $(x^*, x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^*, x_i)$, где $x = [x_1, \ldots, x_n] \in X_1 \times \ldots \times X_n = X$, $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*] \in X^*$, то X, X^* (и аналогично U, U^*) будут рефлексивными банаховыми пространствами, например с нормами $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$, $\|x^*\| = \max_i \|x_i^*\|$. Здесь и дальше все нормы обозначаются знаком $\|\cdot\|$. Пусть

$$C = C_1 \times \ldots \times C_n, \qquad K = K_1 \times \ldots \times K_m,$$
$$C^* = C_1^* \times \ldots \times C_m^*, \qquad K^* = K_1^* \times \ldots \times K_m^*,$$

где $C_i \subset X_i$, $C_i^* \subset X_i^*$, $K_j \subset U_j^*$, $K_j^* \subset U_j$ $(j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$ – выпуклые замкнутые конусы и сопряженные к ним. Наконец, пусть A_{ji} $(j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$ – линейные непрерывные операторы, действующие из X_i в U_j^*; A_{ji}^* – сопряженные им операторы. Таким образом, задачи (26.1), (26.2) могут быть переписаны в виде

$$L: \sup \{(c, x) = \sum_{i=1}^{n} (c_i, x_i) \mid b_j - A_j x \in K_j (j = 1, \ldots m),\ x \in C\},$$

$$L^*: \inf \{(b, u) = \sum_{j=1}^{m} (b_j, u_j) \mid A_i' u - c_i \in C_i^* \ (i = 1, \ldots, n),\ u \in K^*\},$$

где по определению

$$A_j x = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} x,$$

$$A_i' u = \sum_{j=1}^{m} A_{ji}^* u_j, \quad c = [c_1, \ldots, c_n] \in X^*, \quad b = [b_1, \ldots, b_m] \in U^*.$$

Аналогично конечномерному случаю, зафиксировав номера $0 \leqslant m_0 \leqslant m$, $0 \leqslant n_0 \leqslant n$, выделим подсистемы (*директивных*) ограничений задач L и L^*:

$$b_j - A_j x \in K_j, \quad j = 1, \ldots, m_0, \quad A_i' u - c_i \in C_i^*, \quad i = 1, \ldots, n_0.$$

Введем функции Φ и Ψ. Функцию $\Phi(y)$ над пространством $Y = X_{n_0+1} \times \ldots \times X_n \times U^*_{m_0+1} \times \ldots \times U^*_m$ назовем *допустимой*, если она удовлетворяет условиям:

1) Φ выпуклая, собственная, полунепрерывная снизу,

$\operatorname{dom} \Phi \subset C_{n_0+1} \times \ldots \times C_n \times U^*_{m_0+1} \times \ldots \times U^*_m$;

2) для любого фиксированного $[x_{n_0+1}, \ldots, x_n] \in C_{n_0+1} \times \ldots \times C_n$ функция $\Phi(x_{n_0+1}, \ldots, x_n, \ldots)$ монотонно не убывает по конусу $K_{m_0+1} \times \ldots \times K_m$.

Функцию $\Psi(z)$ над пространством $Z = X^*_{n_0+1} \times \ldots \times X^*_n \times U_{m_0+1} \times \ldots \times U_m$ назовем *допустимой*, если она удовлетворяет условиям:

1) Ψ выпуклая, собственная, полунепрерывная снизу,

$\operatorname{dom} \Psi \subset X^*_{n_0+1} \times \ldots \times X^*_n \times K^*_{m_0+1} \times \ldots \times K^*_m$;

2) для любого фиксированного $[u_{m_0+1}, \ldots, u_m] \in K^*_{m_0+1} \times \ldots \times K^*_m$ функция $\Psi(\ldots, u_{m_0+1}, \ldots, u_m)$ монотонно не убывает по конусу $C^*_{n_0+1} \times \ldots \times C^*_n$.

Зафиксировав систему положительных параметров R, λ_i, μ_j, ξ_i, η_j, удовлетворяющих условиям

$\lambda_i \xi_i = \mu_i \eta_j = R^{-1}$, $i = n_0 + 1, \ldots, n$; $j = m_0 + 1, \ldots, m$,

выпишем задачи

$$P: \sup \{ (c, x) - R\, \Phi(\lambda_{n_0+1} x_{n_0+1}, \ldots, \lambda_n x_n, \mu_{m_0+1}(A_{m_0+1} x - b_{m_0+1}), \ldots, \mu_m (A_m x - b_m)) \mid b_j - A_j x \in K_j \ (j = 1, \ldots, m_0), \quad x \in C \}, \tag{26.3}$$

$$P^{\#}: \inf \{ (b, u) + R \Psi(\xi_{n_0+1}(c_{n_0+1} - A'_{n_0+1} u), \ldots, \xi_n (c_n - A'_n u), \ \eta_{m_0+1} u_{m_0+1}, \ldots, \eta_m u_m) \mid A'_i u - c_i \in C^*_i \ (i = 1, \ldots, n_0), \ u \in K^* \}, \tag{26.4}$$

в которых Φ, Ψ – допустимые функции над соответствующими пространствами.

По аналогии с конечномерным случаем через γ, $\gamma^{\#}$ и M, $M^{\#}$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}^{\#}$ обозначим оптимальные значения и допустимые и оптимальные множества задач P и $P^{\#}$, через $\Gamma(x)$, $\Gamma^{\#}(x)$ – аргументы функций Φ, Ψ.

Т е о р е м а 26.1. *Пусть в задачах P, $P^{\#}$ одна из функций Φ, Ψ является допустимой, а вторая – ей сопряженной. Тогда:*

1) *функции Φ, Ψ допустимы и взаимно сопряжены, $\gamma \leqslant \gamma^{\#}$;*

2) *если $\gamma < +\infty$ и выполняется условие*

$\exists\ x' \in M$, $\Gamma(x') \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \Phi$, $\quad b_j - A_j x' \in \operatorname{int} K_j$, $j = 1, \ldots, m_0$,

то $-\infty < \gamma = \gamma^{\#} < \infty$, *причем* $\widetilde{M}^{\#} \neq \phi$;

3) *если* $\gamma^{\#} > -\infty$ *и выполняется условие*

$\exists u' \in M^{\#}$ $\quad \Gamma^{\#}(u') \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \Psi$, $\quad A'_i u' - c_i \in \operatorname{int} C^*_i$, $\quad i = 1, \ldots, n_0$,

то $-\infty < \gamma = \gamma^{\#} < +\infty$, *причем* $\widetilde{M} \neq \phi$.

В случае, когда L – несобственная задача 1-го рода, можно положить $\Phi(z) = \Phi(z_2)$, где $z = [z_1, z_2]$, $z_1 \in X_{n_0+1} \times \ldots \times X_n$, $z_2 \in U^*_{m_0+1} \times \ldots \times U^*_m$. Тогда для $\Psi(z^*) = \Phi^*(z^*)$ имеем

$$\Psi(z^*) = \Phi^*(z_2^*), \quad z^* = [z_1^*, z_2^*],$$

$$z_1^* \in X^*_{n_0+1} \times \ldots \times X^*_n, \quad z_2^* \in U_{m_0+1} \times \ldots \times U_m.$$

Если, например, в качестве Ψ выбрать (допустимую) функцию, коническая огибающая Ψ^C которой совпадает с $\delta(z_2^* \mid K^*_{m_0+1} \times \ldots \times K^*_m)$ (для этого достаточно, чтобы в некоторой окрестности нуля Ψ совпадала с $\delta(z_2^* \mid K^*_{m_0+1} \times \ldots \times K^*_m)$ или, например, с функцией $\|z_2^*\|^2 + \delta(z_2^* \mid K^*_{m_0+1} \times \ldots \times K^*_m)$), то задача P примет вид

$$\sup\{(c, x) - R\Phi(\mu_{m_0+1}(A_{m_0+1}x - b_{m_0+1}), \ldots$$

$$\ldots, \mu_m(A_m x - b_m)) \mid b_j - A_j x \in K_j \quad (j = 1, \ldots, m_0), \ x \in C\},$$

где функция Φ монотонно не убывает по конусу $K_{m_0+1} \times \ldots \times K_m$, равна нулю, если $b_j - A_j x \in K_j$ $(j = m_0 + 1, \ldots, m)$, и больше или равна нулю в противном случае [14, теорема 6.8.7]. Данные свойства соответствуют представлению о Φ как о функции, "штрафующей" за нарушение ограничений $b_j - A_j x \in K_j$ $(j = m_0 + 1, \ldots, m)$.

Обозначим через $\|z - N\|$ расстояние от точки z до множества N в метрике, определяемой нормой $\|\cdot\|$. Приведем пример частной реализации задач (26.3), (26.4), являющийся обобщением формы (25.5), (25.6) задач (22.1), (22.2)

$$\sup\{(c, x) - R\varphi(\lambda_{n_0+1}\|x_{n_0+1}\|, \ldots, \lambda_n\|x_n\|,$$

$$\mu_{m_0+1}\|(b_{m_0+1} - A_{m_0+1}x) - K_{m_0+1}\|, \ldots$$

$$\ldots, \mu_m\|(b_m - A_m x) - K_m\|) \mid b_j - A_j x \in K_j \ (j = 1, \ldots, m_0), \ x \in C\}, \tag{26.5}$$

$$\inf\{(b, u) + R\varphi^*(\xi_{n_0+1}\|(A'_{n_0+1}u - c_{n_0+1}) - C^*_{n_0+1}\|, \ldots$$

$$\ldots, \xi_n\|(A'_n u - c_n) - C^*_n\|, \eta_{m_0+1}\|u_{m_0+1}\|, \ldots, \eta_m\|u_m\|) \mid$$

$$A'_i u - c_i \in C^*_i \quad (i = 1, \ldots, n_0), \ u \in K^*\}. \tag{26.6}$$

Как и в конечномерном случае, можно показать, что в этих задачах функция

$$\Phi(\Gamma(x)) = \varphi(\lambda_{n_0+1}\|x_{n_0+1}\|, \ldots, \lambda_n\|x_n\|,$$

$$\mu_{m_0+1}\|(b_{m_0+1} - A_{m_0+1}x) - K_{m_0+1}\|, \ldots, \mu_m\|(b_m - A_m x) - K_m\|)$$

$$+ \delta([x_{n_0+1}, \ldots, x_n] \mid C_{n_0+1} \times \ldots \times C_n)$$

допустима, если φ удовлетворяет условиям, перечисленным в формулировке леммы 25.1.

ГЛАВА VI

НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данной главе вопросы противоречивости модели оптимизации будут рассмотрены в применении к задачам выпуклого программирования — и преимущественно к задачам квадратичного программирования. Модели квадратичного программирования играют двоякую роль: с одной стороны, класс этих моделей расширяет класс линейных оптимизационных задач, с другой — они выступают в роли регуляризующих некорректные задачи ЛП. Нельзя также не сказать и о том, что квадратичные задачи играют свою конструктивную роль в вопросах квадратичной аппроксимации произвольных нелинейных задач математического программирования.

§ 27. Задача квадратичного программирования

Задачу выпуклого квадратичного программирования запишем в виде

$$P\colon \max \{-x^TQx + (c, x) \mid Ax \leqslant b\}\,; \qquad (27.1)$$

здесь Q — неотрицательно определенная симметричная матрица, что эквивалентно свойству неотрицательности квадратичной формы x^TQx, т.е. $x^TQx \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathrm{E}_n$. Если при этом Q невырождена, т.е. $\|Q\| \neq \phi$, то Q будет положительно определенной, что соответствует свойству $x^TQx > 0 \quad \forall x \neq 0$. Если Q — положительно определенная матрица, то функция $f(x) = -x^TQx + (c, x)$ будет сильно выпуклой, что в случае совместности системы $Ax \leqslant b$ обеспечивает разрешимость задачи (27.1) и единственность ее оптимального вектора. Заметим, что в случае разрешимости задачи (27.1) ее оптимальное множество при любой неотрицательно определенной матрице Q будет некоторым выпуклым полиэдральным множеством (т.е. может быть задано некоторой конечной системой линейных неравенств).

Связь неотрицательной (положительной) определенности матрицы Q и неположительной (отрицательной) определенности простая: Q неотрицательно (положительно) определена тогда и только тогда, когда $-Q$ положительно (отрицательно) определена.

В отношении задачи (27.1) в предположении ее разрешимости коснемся только вопросов двойственности. В соответствии с постановкой задачи нелинейного программирования в форме (4.13), а двойственной – в форме (4.14) двойственная к (27.1) примет вид

$$\min \{F(x, u) \mid \nabla_x F(x, u) = 0, \; u \geqslant 0\}, \tag{27.2}$$

где $F(x, u) = (c, x) - x^T Q x - (u, Ax - b)$. Так как

$$\nabla_x F(x, u) = c - 2Qx - A^T u = (c - Qx - A^T u) - Qx,$$

а функцию Лагранжа $F(x, u)$ можно записать в форме

$$F(x, u) = x^T (c - Qx - A^T u) + (b, u),$$

то задача (27.2) принимает вид

$$P^*: \min \{ x^T Q x + (b, u) \mid A^T u = c - 2Qx, \; u \geqslant 0\}. \tag{27.3}$$

Последняя также является задачей выпуклого квадратичного программирования. Заметим, что только классы задач линейного и квадратичного программирования обладают свойством замкнутости при взятии операции сопряжения задач, входящих в эти классы.

Задачи (27.1) и (27.3) связывает

Теорема 27.1 (двойственности [6, § 24]). *Если системы ограничений в задачах* (27.1) *и* (27.3) *совместны, то последние разрешимы и их оптимальные значения совпадают.*

Эта теорема может принимать разные формулировки, например: из разрешимости задачи (27.1) следует разрешимость задачи (27.3) и совпадение их оптимальных значений.

Если матрица Q в (27.1) невырожденная, т.е. $\|Q\| \neq 0$ (тогда существует Q^{-1}), то для разрешимости задач (27.1) и (27.3) достаточно, чтобы $M \neq \phi$, т.е. чтобы система ограничений в задаче (27.1) была совместной. Действительно, в этом случае система ограничений в задаче (27.3) будет автоматически совместной, ибо, взяв любое $\bar{u} \geqslant 0$, соответствующее $\bar{x}$ можно подсчитать по формуле $\bar{x} = \dfrac{1}{2} Q^{-1} (c - A^T \bar{u})$.

По аналогии с линейным случаем (§ 3, см. (3.12)) решение задач P и P^* сводится к нахождению хотя бы одного решения системы неравенств (с подсистемой линейных уравнений):

$$\begin{aligned} &Ax \leqslant b; \;\; A^T u = c - 2Qx, \;\; u \geqslant 0, \\ &x^T Q x + (b, u) \leqslant (c, x) - x^T Q x. \end{aligned} \tag{27.4}$$

Эта система содержит линейные ограничения и одно выпуклое квадратичное неравенство, которое в (27.4) записано так, чтобы явно подчеркнуть, что в левой его части стоит целевая функция задачи P^*, а в правой – целевая функция задачи P. После приведения подобных оно запишется в форме $(c, x) - (b, u) - 2x^T Q x \geqslant 0$; здесь в левой части стоит выпуклая функция. Система (27.4) может решаться фейеровскими методами [9, гл. II].

Несколько более общей записью задачи (27.1) является такая:

$$\max \{(c,x)-(x-p)^T Q(x-p) \mid Ax \leqslant b\}; \tag{27.5}$$

здесь $p \in E_n$. Двойственная задача (27.3) в этом случае принимает вид

$$\min \{(x-p)^T Q(x-p)+(b-Ap,u)+(c,p) \mid A^T u = c-2Q(x-p), \quad u \geqslant 0\}. \tag{27.6}$$

Эти задачи связаны между собой сформулированной выше теоремой двойственности. Обратим внимание еще на одно обстоятельство, обращенное к задаче (27.6). Если матрица Q невырождена, то из ограничений задачи (27.6) следует $x-p=\frac{1}{2}Q^{-1}(c-A^T u)$. Подставив значение $x-p$ в целевую функцию, получим эквивалентное представление задачи (27.6):

$$\min \left\{\frac{1}{4}(c-A^T u)^T Q^{-1}(c-A^T u)+(b-Ap,u)+(c,p) \mid u \geqslant 0\right\}. \tag{27.7}$$

Оно интересно тем, что в нем отсутствует переменная x исходной задачи (как в линейном случае). При $p=0$ задача (27.7) примет вид

$$\min \left\{\frac{1}{4}(c-A^T u)^T Q^{-1}(c-A^T u)+(b,u) \mid u \geqslant 0\right\}$$

– двойственной к (27.1).

§ 28. Регуляризация неустойчивых задач ЛП по Тихонову

Запишем задачу ЛП

$$L\colon \max \{(c,x) \mid Ax \leqslant b\} \quad (=: \tilde{f}) \tag{28.1}$$

с множеством допустимых решений $M=\{x \mid Ax \leqslant b\}$. Наряду с L рассмотрим задачу

$$L_\alpha\colon \max \{(c,x)-\alpha\|x-p\|^2 \mid Ax \leqslant b\} \quad (=: \tilde{f}_\alpha), \tag{28.2}$$

$\alpha > 0$, $p \in \mathbf{R}^n$. Она имеет вид задачи (27.1) при $Q=\alpha E$, где E – единичная матрица, т.е. $\alpha\|x-p\|^2=(x-p)^T[\alpha E](x-p)$.

О задаче L_α говорят, что она *регуляризирует* (по Тихонову [21]) задачу L. Регуляризация задачи – это прием обеспечения ее устойчивости в зависимости от вариаций той или иной части ее исходных данных (см. §8).

Рассмотрим геометрический смысл регуляризованной задачи (28.2). Имеет место непосредственно проверяемое равенство

$$(c,x)-\alpha\|x-p\|^2=-\alpha\left\|x-\left(p+\frac{c}{2\alpha}\right)\right\|^2+(c,p)+\frac{1}{4\alpha}\|c\|^2. \tag{28.3}$$

В силу элементарного свойства

$$\max_{x \in N} g(x) = -\min_{x \in N}(-g(x)),$$

справедливого для любых функций $g(x)$ и множества N, из (28.3) заключаем, что

$$\tilde{f}_\alpha = -\alpha \min \left\{ \left\| x - \left(p + \frac{c}{2\alpha}\right) \right\|^2 \mid Ax \leqslant b \right\} + (c, p) + \frac{1}{4\alpha} \| c \|^2;$$

при этом

$$\arg L_\alpha = \arg\min \left\{ \left\| x - \left(p + \frac{c}{2\alpha}\right) \right\|^2 \mid Ax \leqslant b \right\} \ (=: \tilde{z}_\alpha). \qquad (28.4)$$

Положим $p + \dfrac{c}{2\alpha} = z_\alpha$ и разъясним смысл этого соотношения. Правая часть в (28.4) – это проекция $\tilde{z}_\alpha$ точки z_α на M, т.е. ближайший из M элемент к z_α (рис. 12).

Для проекции элемента z на множество $N \subset \mathbf{R}^n$ введем обозначение $\pi_N(z)$, так что $\tilde{z}_\alpha = \pi_M(z_\alpha)$.

Подведем итог. Оптимальный вектор задачи L_α (он определяется единственным образом) есть не что иное, как проекция элемента $z_\alpha = p + \dfrac{c}{2\alpha}$ на M – допустимое множество задачи L. Под $\tilde{M}$ будем понимать (как и прежде) оптимальное множество задачи (28.1). Элементарно проверяется

Лемма 28.1. *При достаточно малых $\alpha > 0$ справедливо равенство*

$$\pi_M\left(p + \frac{c}{2\alpha}\right) = \pi_{\tilde{M}}(p),$$

т.е. проекция точки $p + \dfrac{c}{2\alpha}$ на M совпадает с проекцией точки p на оптимальное множество $\tilde{M}$ задачи линейного программирования (28.1).

На рис. 13 проиллюстрирован факт совпадения проекции p на $\tilde{M}$ с проекцией $z_\alpha = p + \dfrac{c}{2\alpha}$ на M.

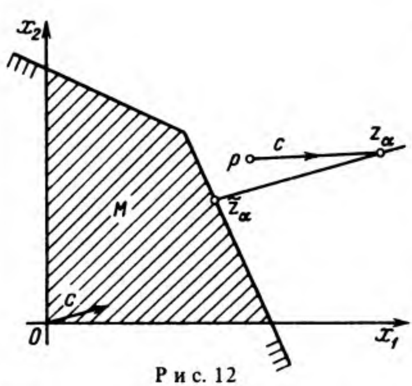

Рис. 12

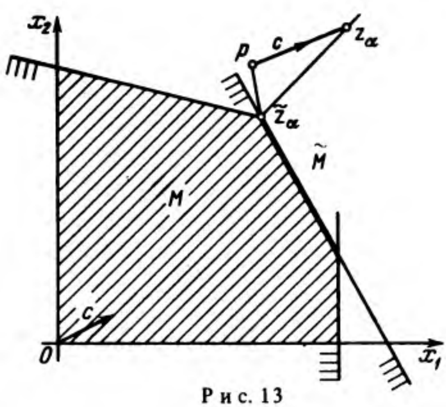

Рис. 13

Таким образом, мы выяснили геометрическое содержание задачи (28.2) по отношению к задаче (28.1) в случае разрешимости последней. Смысл же перехода от L к L_α состоит в том, что оптимальное значение $\tilde{f}_\alpha = f_\alpha(c, A, b)$ задачи (28.2) как функции от вектора информации $s = [c, A, b]$, определяющей задачу L, будет непрерывно зависеть от вектора s, хотя сама исходная задача L этим свойством может и не обладать. Более точно этот факт можно выразить следующим образом. Пусть $\{s_t\}$ – последовательность реализаций информационного вектора s, причем $\{s_t\} \to s$.

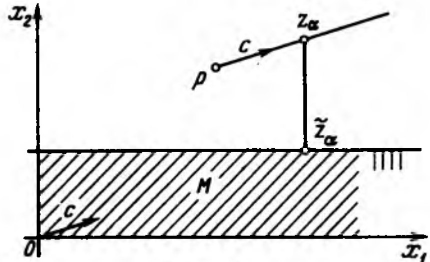

Рис. 14

Справедлива [21, гл. IX, § 3]

Теорема 28.1. *Если система $Ax < b$ совместна, то при достаточно малом $\alpha > 0$ справедливы соотношения*

$$\{(c, \tilde{x}_t)\} \to \tilde{f}, \quad |\tilde{x}_t - \tilde{M}| \to 0, \quad t \to +\infty,$$

где

$$\tilde{x}_t = \arg(28.2)\,|_{s = s_t}, \qquad s_t = [c^t, A_t, b^t], \qquad |\tilde{x}_t - \tilde{M}| := \min_{y \in \tilde{M}} \|\tilde{x}_t - y\|.$$

Далее проиллюстрируем геометрический смысл задачи (28.2) на случай задачи (28.1), когда в ней $M \neq \phi$ и $\tilde{f} = +\infty$, т.е. L – несобственная задача 2-го рода. Задача (28.2) и при $\tilde{f} = +\infty$ будет разрешимой, что было уже отмечено применительно к задаче (27.1) при $M \neq \phi$ и невырожденности матрицы Q. Используя преобразование (28.3) и соотношение (28.4), рассматриваемый случай можно охарактеризовать рис. 14.

В соответствии с (27.6) при $Q = \alpha E$ задача, двойственная к (28.2), будет иметь вид

$$L^*_\alpha : \min \{-\alpha \|x - p\|^2 + (b, u) + (c - A^T u, p) \mid A^T u =$$

$$= c - 2\alpha(x - p), \ u \geqslant 0\}. \qquad (28.5)$$

Теорему двойственности для задач L_α и L^*_α можно сформулировать в следующем виде:

Если $M = \{x \mid Ax \leqslant b\} \neq \phi$, то задачи L_α и L^*_α разрешимы и их оптимальные значения совпадают.

§ 29. Несобственные задачи квадратичного программирования: классификация

Классифицируем состояния задач (27.1) и (27.3) (в их взаимности) по признакам разрешимости и пустоты или непустоты их допустимых множеств M и M^*, где $M = \{ x \mid Ax \leqslant b\}$, $M^* = \{ [x, u] \mid A^T u = c - 2Qx,\ u \geqslant 0\}$. Классификация несобственных задач квадратичного программирования несколько отличается от классификации несобственных задач линейного программирования, однако терминологически мы ее сохраним.

Выделим случай, когда задачи P и P^* разрешимы (тогда их оптимальные значения совпадают). Это эквивалентно свойству

$M \neq \phi,\ \ M^* \neq \phi.$

Выделим альтернативы:

1°. $M = \phi,\ \ M^* \neq \phi.$

2°. $M \neq \phi,\ \ M^* = \phi.$

3°. $M = \phi,\ \ M^* = \phi.$

В зависимости от выполнения одной из этих альтернатив о задаче P будем говорить (по аналогии с ЛП) как о несобственной задаче 1-го, 2-го или 3-го рода соответственно. Однако в ЛП этим альтернативам соответствует одновременная неразрешимость задач L и L^* (см. § 11), чего нет в случае задач квадратичного программирования. Охарактеризуем это с помощью выделения подальтернатив.

1.1. $M = \phi$ & P^* разрешима (следовательно, $M^* \neq \phi$).

Приведем пример, иллюстрирующий эту ситуацию. Для разрешимой задачи $\max\{-x^2 \mid -x \leqslant 0\} = 0$ двойственной будет разрешимая задача

$$\min\{F(x, u_0) = -x^2 - u_0(-x) \mid \nabla_x F(x, u_0) = -2x + u_0 = 0,\ u_0 \geqslant 0\} = 0.$$

Теперь мы реконструируем исходную задачу, добавив к ее ограничению $-x \leqslant 0$ противоречивую систему неравенств $y + 1 \leqslant 0,\ -y + 1 \leqslant 0$:

$$\max\{-x^2 \mid -x \leqslant 0,\ \ y + 1 \leqslant 0,\ \ -y + 1 \leqslant 0\}. \qquad (l)$$

Двойственной к (l) будет разрешимая задача

$$\min\{F(z, u) = -x^2 - u_0(-x) - u_1(y + 1) - u_2(-y + 1) \mid \nabla_z F(z, u) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2x + u_0 \\ -u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0,\ \ u = [u_0, u_1, u_2] \geqslant 0\}; \qquad (l^*)$$

здесь $z = [x, y]$. Таким образом, построен пример квадратичной задачи (l) с противоречивой системой ограничений такой, что двойственная к ней задача (l^*) разрешима.

1.2. $M = \phi$, $M^* \neq \phi$, но P^* неразрешима. Этот случай реализуется на задаче

$$\max\{-x^2 \mid x + 1 \leqslant 0,\ -x + 1 \leqslant 0\}.$$

Пусть $F(x, u) = -x^2 - u_1(x + 1) - u_2(-x + 1)$ — ее функция Лагранжа.

Двойственной задачей будет

$$\inf \{F(x, u) \mid \nabla_x F(x, u) = -2x - u_1 + u_2 = 0, \; u = [u_1, u_2] \geqslant 0\}.$$

Легко подсчитать ее значение; оно равно $(-\infty)$.

О б а л ь т е р н а т и в е 2°. В силу теоремы 27.1 из разрешимости P (что предполагает $M \neq \phi$) следует $M^* \neq \phi$; поэтому альтернатива означает $\operatorname{opt} P = +\infty$.

Альтернативу 3° реализует следующая общая конструкция. Возьмем произвольную несобственную задачу ЛП 3-го рода

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leqslant b\},$$

т.е. такую, что $\{x \mid Ax \leqslant b\} = \phi$ и $\{u \geqslant 0 \mid A^T u = c\} = \phi$. Построим задачу квадратичного программирования с переменной $z = [x, y] \in E_{n+1}$:

$$\max \{-y^2 + (c, x) \mid -y \leqslant 0, \; Ax \leqslant b\}.$$

Ее функция Лагранжа будет иметь вид

$$F(z, u_0, u) = -y^2 + (c, x) + u_0 y - (u, Ax - b), \quad z = [x, y],$$

а система ограничений двойственной задачи —

$$F_x(z, u_0, u) = 0, \quad F_y(z, u_0, u) = 0, \quad [u_0, u] \geqslant 0,$$

т.е.

$$A^T u = c, \quad -2y + u_0 = 0, \quad [u_0, u] \geqslant 0.$$

Эта система несовместна, так как несовместна ее подсистема $A^T u = c, u \geqslant 0$.

Классификацию задач квадратичного программирования (27.1) мы делали в предположении неотрицательной определенности матрицы Q. Если же матрица Q положительно определенная (тогда существует Q^{-1}), то классификационная ситуация упрощается, а именно:

1) либо $M \neq \phi$, и тогда $M^* \neq \phi$, т.е. задача P собственная;

2) либо $M = \phi \,\&\, M^* \neq \phi$, и тогда P несобственная 1-го рода. При этом, если за счет приращения Δb обеспечивается совместность системы $Ax \leqslant b + \Delta b$, то задача превращается в собственную.

Таким образом, при невырожденности матрицы Q несобственность 2-го и 3-го рода исключается.

Еще раз отметим, что свойство $M^* \neq \phi$ в рассматриваемом случае обеспечивается тем, что если в системе ограничений задачи P^*, т.е. задачи (27.3), взять любое $\bar{u} \geqslant 0$, то соответствующее x отыскивается по формуле $\bar{x} = \frac{1}{2} Q^{-1}(c - A^T \bar{u})$. Это и дает автоматическую совместность системы ограничений задачи P^*, т.е. $M^* \neq \phi$.

В случае задачи (28.2), регуляризирующей задачу ЛП (28.1), матрица $Q = \alpha E$ имеет обратную: $Q^{-1} = \alpha^{-1} E$. Следовательно, ее классификационное описание исчерпывается альтернативами 1) и 2), приведенными выше.

§ 30. Двойственность для несобственных задач квадратичного программирования

Вначале мы приведем реализацию двойственности для несобственной задачи выпуклого программирования, записанной в форме

$$\max\{f_0(x) \mid f_j(x) \leqslant 0 \quad (j=1,\ldots,m)\}, \tag{30.1}$$

здесь $\{-f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ – выпуклые дифференцируемые функции. Положим $M=\{x \mid f_j(x) \leqslant 0\ (j=1,\ldots,m)\}$, $M^*=\{u \geqslant 0 \mid \max\limits_x F(x,u) < +\infty\}$, где $F(x,u)=f_0(x)-\sum\limits_{j=1}^{m} u_j f_j(x)$ – функция Лагранжа, отвечающая задаче (30.1). Ниже мы будем исходить из предположения $M^* \neq \phi$; в случае $M=\phi$ это будет соответствовать несобственности 1-го рода. Пусть $[f_1(x),\ldots,f_m(x)]=[F_0(x),F_1(x),\ldots,F_{m_0}(x)]$ – произвольное разбиение вектора функций на подвекторы $F_j(x)$ $(j=0,1,\ldots,m_0 \leqslant m)$. Будем считать, что подсистема неравенств $F_0(x) \leqslant 0$ совместна. По аналогии с задачей (11.9) составим задачу

$$C\colon \max\{f_0(x)-\sum_{j=1}^{m_0} R_j \|F_j^+(x)\|_{p(j)} \mid F_0(x) \leqslant 0\}; \tag{30.2}$$

здесь $R_j>0$, $\|\cdot\|_{p(j)}$ – произвольные монотонные вместе со всеми сопряженными нормы в соответствующих пространствах $(j=1,\ldots,m_0)$. Используя некоторую общую идею [10, § 23], этой задаче можно поставить в соответствие двойственную задачу

$$C^{\#}\colon \inf\{F(x,u) \mid \nabla_x F(x,u)=0,\ u \geqslant 0, \\ \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j \quad (j=1,\ldots,m_0)\}; \tag{30.3}$$

здесь $[u^0,\ldots,u^{m_0}]^T$ – разрез вектора $u^T=[u_1,\ldots,u_m]$, соответствующий разрезу вектора $[f_1(x),\ldots,f_m(x)]$ на подвекторы $F_j(x)$.

Задачи C и $C^{\#}$ связывает

Т е о р е м а 30.1 (двойственности) [10, § 23]. *Пусть задача C разрешима и удовлетворяет условию регулярности, например, в форме: существует допустимый вектор $\bar{x}$ подсистемы $F_0(x) \leqslant 0$, удовлетворяющий ее нелинейным неравенствам строго. Тогда $C^{\#}$ разрешима и их оптимальные значения совпадают.*

Еще раз оговорим, что теорема справедлива в предположении $M^* \neq \phi$.

Интересно отметить, что если исходная задача (30.1) разрешима и $[\bar{x},\bar{u}]$ – ее точка Куна – Таккера, то при $R_j \geqslant \|\bar{u}^j\|^*_{p(j)}$ $(j=1,\ldots,m_0)$ оптимальные значения задач (30.1) C и $C^{\#}$ совпадают. Следовательно, задача C по отношению к (30.1) реализует метод точной штрафной функции, причем при более сильном требовании $R_j > \|\bar{u}^j\|^*_{p(j)}$ имеет место совпадение и оптимальных множеств задач (30.1) и (30.2).

Вернемся к рассмотрению задач квадратичного программирования.

Пусть система неравенств $Ax \leqslant b$ в задаче (27.1) разбита на подсистемы $A_j x \leqslant b^j$ $(j=0,1,\ldots,m_0)$. В соответствии с (30.2) составим задачу

$$C_w\colon \max\{(c,x)-x^TQx-\sum_{j=1}^{m_0} R_j \|(A_jx-b^j)^+\|_{p(j)} \mid A_0x \leqslant b^0\}. \tag{30.3*}$$

Здесь относительно R_j и $\|\cdot\|_{p(j)}$ предположения те же. Двойственная к C_w примет вид

$$C_w^{\#}:\ \min\{x^TQx+(b,u)\mid A^Tu=c-2Qx,\ u\geqslant 0,$$

$$\|u^j\|^*_{p(j)}\leqslant R_j\quad (j=1,\ldots,m_0)\}. \tag{30.4}$$

Аналог теоремы 30.1 будет звучать так:

Теорема 30.2. *Если задача C_w разрешима, то разрешима и задача $C_w^{\#}$, при этом их оптимальные значения совпадают.*

На случай $Q=\alpha E$, т.е. на случай регуляризованной задачи (28.2), задачи C_w и $C_w^{\#}$ запишутся следующим образом:

$$C_\alpha:\ \max\{(c,x)-\alpha\|x-p\|^2-\sum_{j=1}^{m_0}R_j\|(A_jx-b^j)^+\|_{p(j)}\mid A_0x\leqslant b^0\}, \tag{30.5}$$

$$C_\alpha^{\#}:\ \min\{(b,u)+\alpha\|x-p\|^2+(c-A^Tu,p)\mid A^Tu=c-2\alpha(x-p),\ u\geqslant 0,$$

$$\|u^j\|^*_{p(j)}\leqslant R_j\quad (j=1,\ldots,m_0)\}. \tag{30.6}$$

Эти задачи связывает та же теорема 30.2, но в связи с невырожденностью $Q=\alpha E$, обеспечивающей строгую вогнутость целевой функции в задаче (30.5), ее разрешимость гарантируется при разрешимости подсистемы $A_0x\leqslant b^0$.

Выше объектом исследования была задача (27.1) без предположений ее разрешимости. В ее записи в явном виде нет требования неотрицательности переменных, т.е. $x\geqslant 0$, как это было (практически повсюду) в предыдущих главах. Это было сделано для того, чтобы можно было тождественно воспользоваться теоремой 23.3 [10] (здесь это теорема 30.1). Практические соображения подсказывают целесообразность привести вид задачи (27.3) на случай, когда исходная задача квадратичного программирования записана в форме

$$\max\{(c,x)-x^TQx\mid Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0\}, \tag{30.7}$$

т.е. с требованием $x\geqslant 0$. Именно такая форма задачи имеет хорошие экономические и технические интерпретации.

Функция Лагранжа для (30.7) имеет вид $F(x,u,v)=(c,x)-x^TQx-(u,Ax-b)+(v,x)=(x,c-Qx-A^Tu+v)+(b,u)$; здесь $0\leqslant u\in E_m$, $0\leqslant v\in E_n$.

Подсчитаем градиент $\nabla_xF(x,u,v)=c-2Qx-A^Tu+v$. Из $\nabla_xF(x,u,v)=0$ следует $c-Qx-A^Tu+v=Qx$. Так как функция Лагранжа минимизируется при этом ограничении, то она может быть переписана в форме $F(x,u)=(b,u)+x^TQx$. Уравнение $\nabla_xF(x,u,v)=c-2Qx-A^Tu+v=0$ в силу $v\geqslant 0$ может быть заменено на $A^Tu\geqslant c-2Qx$. Следовательно, задача (27.3) на случай исходной задачи (30.7) принимает вид

$$\min\{(b,u)+x^TQx\mid A^Tu\geqslant c-2Qx,\ u\geqslant 0\}. \tag{30.8}$$

§ 31. Регуляризация неустойчивых аппроксимаций несобственных задач линейного программирования

Ниже об устойчивости задач линейного программирования мы будем говорить в смысле $\tilde{f}$-устойчивости [6, § 26], т.е. устойчивости оптимального значения задачи в зависимости от вариаций того или иного выделенного подмножества информационного множества задачи.

Из совокупности условий, через которые формулируется устойчивость задач ЛП, выделяются своей ролью два: условие телесности многогранника, задаваемого системой линейных ограничений, и условие ограниченности либо этого многогранника, либо оптимального множества задачи. Условия

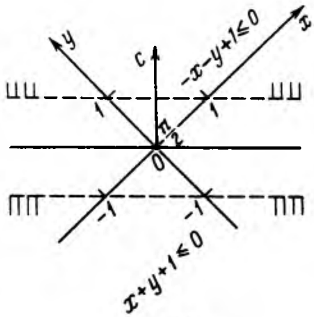

Рис. 15

типа ограниченности, задаваемые априори, выглядят не вполне естественными в линейном (и вообще в математическом) программировании. Что касается условия телесности в задачах, аппроксимирующих несобственные задачи ЛП (или просто несовместные системы линейных неравенств), то оно по существу своему не выполняется. Вот простая иллюстрация этому.

Пусть система $Ax \leqslant b$ несовместна. Аппроксимируем ее, подчинив задаче

$$\min_x \|(Ax - b)^+\|_0 =: E;$$

здесь $\|z\|_0 = \max\limits_{i=1,\dots,m} |z_i|$, $z = [z_1, \dots, z_m]$. Систему линейных неравенств

$$Ax \leqslant b + \bar{E}, \quad \bar{E} = [\overbrace{E, \dots, E}^{m}],$$

можно считать аппроксимирующей исходную. Многогранник, задаваемый ею, очевидно, внутренних точек не имеет.

Сказанное говорит о том, что вопросы регуляризации неустойчивых аппроксимаций несобственных задач ЛП являются актуальными.

Рассмотрим пример конкретной неразрешимой задачи ЛП, аппроксимация которой осуществляется в силу, например, (18.15). Запишем задачу

$$\max\{x + y \mid x + y + 1 \leqslant 0,\ -x - y + 1 \leqslant 0\}. \qquad (l)$$

Она является несобственной 1-го рода (легко проверяется). Вектор-нормаль целевой функции есть $c^T = [1, 1]$. Изобразим эту задачу графически (рис. 15). Применительно к (l) выпишем задачу (18.15) при $r = [1, 1]$ и

$Q = E_2$ следующим образом:

$$\max_{E_2} \{x + y - r_0 [(x + y + 1)^+ + (- x - y + 1)^+ \}, \quad r_0 > 0. \tag{l}_1$$

Смысл аппроксимации задачи (l), заложенный в $(l)_1$, состоит в максимизации $(x + y)$ на оптимальном множестве Π задачи

$$\min_{E_2} [(x + y + 1)^+ + (- x - y + 1)^+], \tag{l}_2$$

т.е. $\Pi = \mathrm{Arg}(l)_2$. В нашем примере Π – прямая, изображенная на рисунке.

Эта же прямая будет оптимальным множеством для задачи $\max \{x + y \mid [x, y] \in \Pi\}$. Задачи $(l)_1$ и $(l)_2$ неустойчивы относительно вариаций их задающей информации, т.е. коэффициентов в целевой функции и коэффициентов ограничений, а также их свободных членов. В силу простоты примера отмеченная неустойчивость легко может быть усмотрена из графического рисунка. Пусть, например, первый коэффициент (-1) в неравенстве $-x - y + 1 \leqslant 0$ заменен на $\dfrac{1}{-1 + \epsilon}$ при малом $\epsilon > 0$. Тогда система $-x - y + 1 \leqslant 0$, $\dfrac{1}{1 - \epsilon} x + y + 1 \leqslant 0$ совместна и максимум функции $x + y$ на ней равен $+\infty$. Значение задачи $(l)_1$ также будет равно $+\infty$. Регуляризация задачи $(l)_1$ в форме

$$\max_{E_2} \{(x + y) - (x^2 + y^2) - r_0 [(x + y + 1)^+ + (- x - y + 1)^+]\}$$

делает ее устойчивой по всей системе задающей ее информации; здесь $0 < \alpha$ – параметр регуляризации.

Перейдем к задаче регуляризации аппроксимаций в общем случае. Регуляризация целевой функции в (27.1) дает $(c, x) - x^T Q x - \alpha \| x \|^2 = (c, x) - x^T (\alpha E + Q) x = (c, x) - x^T Q_\alpha x$, где $Q_\alpha = \alpha E + Q$. Даже при вырожденности Q матрица Q_α невырождена и положительно определена. Если система $Ax \leqslant b$ несовместна, то задача

$$\max \{(c, x) - x^T Q_\alpha x \mid Ax \leqslant b\}$$

является несобственной 1-го рода. Она редуцирует аппроксимационную задачу вида (30.3), т.е. в данном случае задачу

$$\max \{(c, x) - x^T Q_\alpha x - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| (A_j x - b^j)^+ \|_{p(j)} \mid A_0 x \leqslant b^0\}. \tag{31.1}$$

Двойственная ей задача в соответствии с (30.4) примет вид

$$\min \{(b, u) + x^T Q_\alpha x \mid A^T u = c - 2Q_\alpha x, \quad u \geqslant 0,$$

$$\| u^j \|^*_{p(j)} \leqslant R_j \quad (j = 1, \dots, m_0)\}. \tag{31.2}$$

Т е о р е м а 31.1. *Пусть система $A_0 x < b^0$ совместна. Тогда оптимальное значение $v(s)$ задачи* (31.1) *как функции от информационного вектора $s = [c, A, b]$ конечно и непрерывно зависит от s. В силу теоремы двойственности* (30.2) *отмеченное свойство непрерывности выполняется и для двойственной задачи* (31.2).

Заметим, что если в выражении $Q_\alpha = Q + \alpha E$ матрица Q нулевая, т.е. (27.1) – задача ЛП, то задачи (31.1) и (31.2) примут вид задач (30.5) и (30.6), в которых нужно положить $p = 0$.

В самом общем виде метод одновременной аппроксимации и регуляризации можно описать с помощью следующей схемы. Пусть задача L погружается в класс параметрических задач $Z = \{ L(y),\ y \in Y_0 \}$. Если $d_y(x)$ – та или иная функция невязки (по переменной x) системы ограничений задачи $L(y)$, а $\varphi(y)$ – функция качества аппроксимации задачи $L(y)$ в классе задач Z, то можно сформулировать задачу:

$$\sup \{ l_0[y](x) - r_0 d[y](x) - K\varphi(y) - \alpha \| x - p \|^2 \mid y \in Y_0 \}; \tag{31.3}$$

здесь $l_0[y](x)$ – параметрическая функция, в которую преобразовалась функция (c, x) при переходе от L к $L(y)$, $r_0 > 0, K > 0, \alpha > 0$. Последняя, являясь устойчивой, и решает при достаточно больших r_0, K и α^{-1} (точно или асимптотически точно по r_0 и K) задачу аппроксимации исходной задачи. Частным случаем (31.3) является задача

$$\max_x \{ (c, x) - r_0 d_R(x) - \alpha \| x - p \|^2 \}, \tag{31.4}$$

где $R = [R_1, \ldots, R_m] > 0$, $d_R(x) = (R, (Ax - b)^+)$. Относительно ее справедлива

Т е о р е м а 31.2. *Пусть L – несобственная задача ЛП 1-го рода, $\tilde{M} = \operatorname{Arg}\min\limits_x (R, (Ax - b)^+)$. Тогда задача (31.4), являясь s-устойчивой, при достаточно больших r_0 и α^{-1} дает наименьший по норме вектор из множества*

$$\operatorname{Arg}\max \{ (c, x) \mid x \in \tilde{M} \}.$$

Смысл такого рода теорем укладывается в смысл общих теорем для задач последовательного программирования (см., например, [5]), поэтому в специальных доказательствах они не нуждаются.

Говоря о регуляризации аппроксимаций для несобственных задач ЛП, следует подчеркнуть, что реализация схемы двойственности для них в форме задач P и $P^\#$ из § 11 или § 22 (см. (22.1) и (22.1)) уже содержит в себе регуляризацию, пусть не тихоновского смысла, т.е. содержит возможность обеспечить $\tilde{f}$-устойчивость аппроксимаций, заложенных в задачах P и $P^\#$.

Проиллюстрировать сказанное можно на многих частных реализациях этих задач, например на $\{P_0, P_0^\#\}$ или $\{\bar{P}, \bar{P}^\#\}$ (см. § 11). Возьмем последнюю пару:

$$\bar{P}:\ \max \{ (c, x) - R_0 \| (Ax - b)^+ \|_p \mid \| x \|_q \leqslant r_0,\ x \geqslant 0 \},$$

$$\bar{P}^\#:\ \min \{ (b, u) + r_0 \| (c - A^T u)^+ \|_q^* \mid \| u \|_p^* < R_0,\ u \geqslant 0 \}.$$

Эти задачи s-устойчивы по всей системе информации $s = [c, A, b]$, что обеспечивается свойством компактности для допустимых областей. Это справедливо и для первой пары $\{P_0, P_0^\#\}$.

Более общий вид задач P и $P^{\#}$, рассмотренных в гл. V, допускает реализацию в форме (25.12), (25.13):

$$\max\left\{(c, x) - R_0 \|(Ax - b)^+\|_p^2 - \frac{1}{4} r_0 \|x\|_q^2 \mid x \geqslant 0\right\}, \tag{31.5}$$

$$\min\left\{(b, u) + r_0 \|(c - A^T u)^+\|_q^{*2} + \frac{1}{4} R_0 \|u\|_p^{*2} \mid u \geqslant 0\right\}. \tag{31.6}$$

Здесь имеет место тихоновская регуляризация аппроксимаций, которые имеют такой смысл:

1) ищется $\max(c, x)$ на $\operatorname{Arg}\min\limits_{x \geqslant 0} \|(Ax - b)^+\|_p^2$;

2) ищется $\min(b, u)$ на $\operatorname{Arg}\min\limits_{u \geqslant 0} \|(c - A^T u)^+\|_q^{*2}$.

Но дело не только в том, что в задачах (31.5), (31.6) в явном виде содержится тихоновская регуляризация, но и в том, что эти задачи находятся во взаимной двойственности.

СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ И ДОБАВЛЕНИЯ

Имея практическую направленность, изложенный в предыдущих главах материал относится к линейным моделям и частично к квадратичным. Тем не менее ниже мы коснемся вопроса двойственности для несобственных задач выпуклого программирования, исходя из того что двойственность — это центральный вопрос теории несобственных задач математического программирования. Некоторый выход за рамки линейных моделей может оказаться для читателей полезным.

§ 32. Двойственность для несобственных задач выпуклого программирования 1-го рода

Задачу выпуклого программирования рассмотрим в форме

$$\sup\{f_0(x) \mid f_j(x) \leqslant 0 \ (j=1,\dots,m),\ x \in M\}, \tag{32.1}$$

где $\{-f_0(x),\ f_1(x),\ \dots,\ f_m(x)\}$ — выпуклые функции, M — выпуклое множество. В дальнейшем будем считать, что

$$M = \operatorname{dom}(-f_0), \qquad M \subset \operatorname{dom} f_j,$$

$$\operatorname{ri} M \subset \operatorname{ri}\operatorname{dom} f_j, \qquad j = 1,\dots,m,$$

где $\operatorname{ri} M$ — относительная внутренность множества M. Обозначив

$$F(x,u) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x), \qquad u = [u_1,\dots,u_m],$$

$$M^* = \{u \mid \sup_{x \in M} F(x,u) < +\infty\}, \qquad g_0(x) = \sup_{x \in M} F(x,u),$$

запишем двойственную к (32.1) задачу в виде

$$\inf\{g_0(x) \mid u \in M^*,\ u \geqslant 0\}. \tag{32.2}$$

Рассмотрим случай, когда (32.1) — несобственная задача 1-го рода, т.е. допустимое множество задачи (32.2) не пусто. Как и ранее (см. § 11), зафиксируем разбиение $u = [u^0, u^1, \dots, u^{m_0}]$ $(0 \leqslant m_0 \leqslant m)$. Ему соответствует разбиение

$$[f_1(x), \dots, f_m(x)] = [F_1(x), \dots, F_{m_0}(x)].$$

Сохраняя обозначения ν_2 и ν_4 (т.е. ν_2 – размерность вектора u^0, $\nu_4 = m - \nu_2$; см. § 23), в качестве Φ выберем произвольную допустимую функцию над пространством $\mathbf{R}^{\nu_4}$. Задачам (32.1) и (32.2) поставим в соответствие

$$\sup\{f_0(x) - R\Phi(\mu_1 F_1^+(x), \dots, \mu_{m_0} F_{m_0}^+(x)) \mid F_0(x) \leqslant 0,\ x \in M\}, \tag{32.3}$$

$$\inf\{g_0(x) + R\Phi^{\#}(\eta_1 u^1, \dots, \eta_{m_0} u^{m_0}) \mid u \in M^*,\ u \geqslant 0\}, \tag{32.4}$$

где положительные параметры R, μ_j, η_j выбраны из условия $\mu_j \eta_j = \mathbf{R}^{-1}$ $(j = 1, \dots, m)$.

Исследование сформулированных таким образом задач (32.3), (32.4) и их связей с задачами (32.1), (32.2) может быть проведено по той же схеме, что и для задач (22.1), (22.2) (с получением аналогичных результатов). Мы здесь ограничимся лишь формулировкой теоремы двойственности.

Пусть γ, $\gamma^{\#}$ – оптимальные значения, а $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}^{\#}$ – оптимальные множества задач (32.3), (32.4). Целевую функцию задачи (32.3) обозначим через $f(x)$. Положим $(\Phi)(z) = \Phi(z^+)$, $z \in \mathbf{R}^{\nu_4}$, $\Gamma(x) = [\mu_1 F_1(x), \dots, \mu_{m_0} F_{m_0}(x)]$.

Т е о р е м а 32.1. *Справедливы следующие утверждения*:

1°. $\gamma \leqslant \gamma^{\#}$.

2°. *Пусть* $\gamma < +\infty$ *и существует такой допустимый вектор* $\bar{x}$ *задачи* (32.3), *что* $\bar{x} \in \operatorname{ri} M$, $\Gamma(\bar{x}) \in \operatorname{ri} \operatorname{dom}(\Phi)$, *причем* $f_j(\bar{x}) < 0$ *для всех функций* $f_j(x)$ $(j = 1, \dots, \nu_2)$, *не являющихся аффинными. Тогда* $-\infty < \gamma = \gamma^{\#} < +\infty$, $\widetilde{M}^{\#} \neq \phi$.

3°. *Пусть функции* $\{-f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ *полунепрерывны снизу и для некоторого* $\alpha \in \mathbf{R}^1$ *множество*

$$\{x \mid f(x) \geqslant \alpha,\ F_0(x) \leqslant 0,\ x \in M\}$$

непусто и ограничено. Тогда $\gamma = \gamma^{\#}$, $\widetilde{M} \neq \phi$.

Реализуем несколько другой подход к двойственности для несобственных задач выпуклого программирования, намечающий общий подход к анализу двойственности для произвольных математических программ. Как уже было отмечено в § 4, если $L(x, u)$ – функция Лагранжа задачи линейного программирования L (пусть в форме (4.7)), то задача $\max\limits_{x \geqslant 0} \min\limits_{u \geqslant 0} L(x, u)$ эквивалентна L (в случае разрешимости последней), а $\min\limits_{u \geqslant 0} \max\limits_{x > 0} L(x, u)$ эквивалентна L^*, т.е. (4.9). Следовательно, собственную задачу ЛП можно определить через разрешимость задач $\max\limits_{x \geqslant 0} \min\limits_{u \geqslant 0} L(x, u)$ и $\min\limits_{u \geqslant 0} \max\limits_{x > 0} L(x, u)$, что дает совпадение их значений.

Если рассматриваемая здесь задача (32.1) разрешима, то она эквивалентна задаче

$$\Gamma:\ \sup_{x \in M}\ \inf_{u > 0}\ F(x, u) =: \bar{f}. \tag{32.5}$$

Двойственную к ней можно определить как

$$\Gamma^*:\ \inf_{u > 0}\ \sup_{x \in M}\ F(x, u) =: \underline{f}. \tag{32.6}$$

Задача (32.1) называется *собственной*, если (32.5) и (32.6) разрешимы и $\bar{f} = \underline{f}$. В противном случае задача называется *несобственной*.

В нелинейном случае возможно соотношение $-\infty < \bar{f} < \underline{f} < +\infty$, т.е. значения задач Γ и Γ^* конечны, даже достижимы по каждой из операций sup и inf; вместе с тем $\bar{f} < \underline{f}$ (неравенство $\bar{f} \leqslant \underline{f}$ выполняется всегда).

Пусть $x^T = [x^1, \dots, x^{n_0}]$ – произвольное разбиение вектора x на подвекторы; $\|x^i\|_{q(i)}$, $\|u^j\|_{p(j)}$ $(i = 1, \dots, n_0;\ j = 1, \dots, m_0)$ – произвольные нормы, монотонные вместе со своими сопряженными $\|\cdot\|^*_{q(i)}$, $\|\cdot\|^*_{p(j)}$; $r_i > 0$, $R_j > 0$ $(i = 1, \dots, n_0;\ j = 1, \dots, m_0)$ – положительные параметры. Выше предполагается разбиение вектора $u^T = [u^0, u^1, \dots, u^{m_0}]$ и соответствующее этому разбиение $f_1(x), \dots, f_m(x)] = [F_0(x), \dots, F_{m_0}(x)]$.

Положим

$$M(r) = \{x \in M \mid \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i \quad (i = 1, \dots, n_0)\},$$

$$M^\#(R) = \{u \geqslant 0 \mid \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j \quad (j = 1, \dots, m_0)\}.$$

Выпишем задачи:

$$\Gamma_{r,R}:\ \sup_{x \in M(r)}\ \inf_{u \in M^\#(R)}\ F(x, u) =: \tilde{f}, \tag{32.7}$$

$$\Gamma^\#_{r,R}:\ \inf_{u \in M^\#(R)}\ \sup_{x \in M(r)}\ F(x, u) =: \underset{\sim}{f}, \tag{32.8}$$

$$C:\ \sup\{f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|F_j^+(x)\|_{p(j)} \mid F_0(x) \leqslant 0,\ \ x \in M,$$

$$\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i \quad (i = 1, \dots, n_0)\}.$$

Задача C есть аналог задачи (11.3); вместе с тем она является частным случаем задачи (32.3). Связи между задачами (32.1), C, $\Gamma_{r,R}$ и $\Gamma^\#_{r,R}$ были изучены в монографии [10, § 23]. Здесь же мы кратко охарактеризуем эти связи.

В случае разрешимости задачи (32.1) и выполнимости условий регулярности она эквивалентна задаче C при достаточно больших R_j; эквивалентность понимается в смысле совпадения оптимальных значений этих задач и выполнимости включения $\operatorname{Arg} C \subset \operatorname{Arg}$ (32.1).

Важное свойство задачи C состоит в ее эквивалентности задаче $\Gamma_{r,R}$ (что в силу сказанного выше дает эквивалентность $\Gamma_{r,R} \sim$ (32.1) в случае разрешимости последней). Поэтому естественно в качестве двойственного объекта $C^{\#}$ к C взять $\Gamma^{\#}_{r,R}$. Таким образом, полагаем $C^{\#} := \Gamma^{\#}_{r,R}$.

Теорема 32.2 (двойственности). *Если задача выпуклого программирования C разрешима и удовлетворяет условию регулярности (например в форме $\exists \bar{x} \in M^0$, $F_0(\bar{x}) < 0$, $\|\bar{x}^i\|_{q(i)} < r_i$ $(i = 1, \dots, n_0)$; M^0 – внутренность множества M), то разрешима и задача $C^{\#}$, т.е. $\Gamma^{\#}_{r,R}$; при этом их значения совпадают.*

Как и в линейном случае, пара C и $C^{\#}$ допускает много частных реализаций. Выпишем две из них.

Пусть $M = E_n^+$, т.е. $M = \{x \geqslant 0\}$. Тогда следующие пары будут (#)-двойственными:

$$C_0:\ \max\{f_0(x) - (R, F^+(x)) \mid x \geqslant 0,\ \|x\|_q \leqslant r_0\},$$

$$C_0^{\#}:\ \min_{0 \leqslant u \leqslant R}\ \max_{\substack{u \geqslant 0 \\ \|x\|_q \leqslant r_0}} F(x, u);$$

$$C_1:\ \max\{f_0(x) - R_0 \|F^+(x)\|_p \mid 0 \leqslant x \leqslant r\},$$

$$C_1^{\#}:\ \min_{\substack{\|u\|_p^* \leqslant R_0 \\ u \geqslant 0}}\ \max_{0 \leqslant x \leqslant r} F(x, u);$$

$$C_2:\ \max\{f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|F_j^+(x)\|_{p(j)} \mid F_0(x) \leqslant 0,\ x \geqslant 0\},$$

$$C_2^{\#}:\ \min_{u \in M^{\#}(R)}\ \max_{x \geqslant 0} F(x, u);$$

здесь $r_0 > 0$, $R_0 > 0$, $R^T = [R_1, \dots, R_m] > 0$, $r^T = [r_1, \dots, r_n] > 0$, фигурирующие в задачах нормы предполагаются монотонными (вместе со своими сопряженными). Разрешимость пар C_0, $C^{\#}$ и C_1, $C_1^{\#}$ и совпадение оптимальных значений в них гарантируется.

При определенных условиях, которые будут оговорены ниже, задача $C^{\#}$, т.е. (32.8), может быть записана как задача математического программирования обычного вида. Пусть в исходной задаче (32.1) $M = E_n$; при этом для нее допускается несобственность только первого рода, т.е.

$$M^* = \{u \geqslant 0 \mid \max_x F(x, u) > -\infty\} \neq \phi. \tag{32.9}$$

Тогда при $F(x) = [F_1(x), ..., F_{m_0}(x)]$ (т.е. компонента F_0 не выделяется) пара задач C_2, $C_2^{\#}$ запишется так:

$$C_3:\ \max_x \{ f_0(x) - \sum_{j=1}^{m} R_j \| F_j^+(x) \|_{p(j)} \},$$

$$C_3:\ \min_{\| u^j \|_{p(j)}^* \leqslant R_j} \max_{x \in E_n} \Gamma(x, u).$$

При $u \in M^*$ для внутренней задачи в $C_3^{\#}$ можно выписать необходимое (а в случае, когда (32.1) – задача ВП, и достаточнее) условие

$$\nabla_x F(x, u) = 0.$$

Это дает возможность записать задачу $C_{3,0}^{\#}$ в виде

$$\min \{ F(x, u) \mid \nabla_x F(x, u) = 0,$$

$$u \geqslant 0,\ \| u^j \|_{p(j)}^* \leqslant R_j \quad (j = 1, ..., m_0) \}.$$

Задачи C_3 и $C_{3,0}^{\#}$ связывает

Теорема 32.3. *Пусть* (32.1) – *задача ВП и функции* $\{ f_i(x) \}_0^m$ *дифференцируемы.*

1. *Если выполнено условие* (32.9) *и задача* C_3 *разрешима, то разрешима и задача* $C_{3,0}^{\#}$; *при этом их оптимальные значения совпадают.*

2. *Если задача* $C_{3,0}^{\#}$ *разрешима,* $[\bar{x}, \bar{u}]$ – *ее оптимальный вектор и* $F(\bar{x}, \bar{u})$ *строго вогнута в некоторой окрестности точки* $\bar{x}$, *то* $\bar{x}$ – *оптимальный вектор задачи* C_3; *при этом оптимальные значения этих задач совпадают.*

Замечание. Условие дифференцируемости функций $\{ f_i(x) \}_0^m$ можно снять, заменив ограничение $\nabla_x F(x, u) = 0$ в задаче $C_{3,0}^{\#}$ на $0 \in \partial_x F(x, u)$, где $\partial_x F(x, u)$ – субдифференциал вогнутой по x функции $F(x, u)$, в которой u понимается как параметр.

§ 33. Двойственность для несобственных задач линейного дискриминантного анализа

Под задачей *дискриминантного анализа* в распознавании образов понимают задачу строгого разделения непересекающихся множеств $M \subset E_n$ и $N \subset E_n$ некоторой гиперповерхностью $\Gamma = \{ x \mid f(x) = 0 \}$, где функция $f(x)$, называемая *дискриминантной*, берется из того или иного класса функций $\mathfrak{F}$. Здесь разделимость множеств M и N с помощью функции $f(x)$ понимается в смысле

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in M, \quad f(y) < 0 \quad \forall y \in N. \tag{33.1}$$

Если $\mathcal{F}$ – класс афинных функций, то (33.1) можно переписать в виде

$$(f, x) + \alpha > 0 \quad \forall x \in M, \qquad (f, x) + \alpha < 0 \quad \forall x \in N; \tag{33.2}$$

здесь $f \subset E_n$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$. Задача поиска дискриминантной функции $f(x)$, разделяющей множества M и N, может быть пополнена условиями некоторой нормировки на f (например в форме $\| f \| \leqslant 1$) и включением в постановку некоторой функции $\varphi(f)$ качества разделимости, которую необходимо, например, максимизировать. Возникающую задачу можно записать в виде

$$\sup \{ \varphi(f) \mid (33.1),\ f \in \mathcal{F},\ f \in F_0 \}, \tag{33.3}$$

где включение $f \in F_0$ означает условие нормировки. Задачу (33.3) можно определить как задачу *оптимального дискриминантного анализа.*

Ниже мы будем рассматривать задачу линейной дискриминации при условии, что M и N – конечные множества. Следовательно, можно записать

$$M = \{ a_1, \dots, a_s \}, \qquad N = \{ a_{s+1}, \dots, a_m \}.$$

Так как искомым элементом является $f \in E_n$, в (33.2) целесообразно сделать переобозначения $f \to x$, $x \to a_j$. Тогда соотношения (33.2) примут вид

$$\begin{aligned} &(a_j, x) + \alpha > 0, \quad j = 1, \dots, s, \\ &(a_i, x) + \alpha < 0, \quad i = s+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{33.4}$$

Можно сделать еще одно упрощение. Положив $\bar{x} = [x, \alpha] \in E_{n+1}$, $\bar{a}_j = [a_j, 1] \in E_{n+1}$ $(j = 1, \dots, m)$, последние соотношения можно переписать в форме

$$(\bar{a}_j, \bar{x}) > 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

$$(\bar{a}_i, \bar{x}) < 0, \quad i = s+1, \dots, m,$$

т.е. неоднородные соотношения (33.4) можно заменить однородными:

$$\begin{aligned} &(a_j, x) > 0, \quad j = 1, \dots, s, \\ &(a_i, x) < 0, \quad i = s+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{33.5}$$

Задачу именно в этой форме можно и понимать как задачу линейной дискриминации. Система (33.5) может быть как совместной, так и несовместной. В случае ее несовместности понятие решения может быть заменено на некоторое его обобщение – *комитетное решение* (или просто *комитет*). Комитетные конструкции в распознавании образов рассматриваются в [14, гл. IV]. Здесь этого вопроса мы касаться не будем.

Искомая переменная в (33.5) входит однородно, поэтому систему строгих неравенств можно заменить системой нестрогих неравенств с помощью положительных параметров $\epsilon_k > 0$ $(k = 1, \dots, m)$:

$$\begin{aligned} &(a_j, x) \geqslant \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, s; \\ &(a_i, x) \leqslant \epsilon_i, \quad i = s+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{33.6}$$

Такое преобразование системы (33.5) является оправденным как с точки зрения обычного, так и комитетного решения.

Мы уже говорили о нормализации искомой функции f; в обозначениях соотношений (33.4) – (33.6) это элемент x. Простейший вид нормализации может быть таким: $0 \leqslant x \leqslant \bar{x}$. Мы сразу запишем более общий вид нормализации

$$A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0. \tag{33.7}$$

Вводя обозначения

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_s \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{s+1} \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix},$$

$$\epsilon^1 = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_s]^T, \quad \epsilon^2 = [\epsilon_{s+1}, \dots, \epsilon_m]^T,$$

задачу поиска дискриминирующего элемента x можно определить как задачу решения системы линейных неравенств

$$A_1 x \geqslant \epsilon^1, \quad A_2 x \leqslant -\epsilon^2, \quad A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0 \tag{33.8}$$

– совместную или несовместную. Наконец, вводя (в соответствии с (33.3)) линейный критерий разделимости (δ, x), задачу оптимальной дискриминации (33.3) в предположениях линейности можно записать в форме

$$D\colon \max\{(\delta, x) \mid A_1 x \geqslant \epsilon^1,\ A_2 x \leqslant -\epsilon^2,\ A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\}. \tag{33.9}$$

Эта задача может быть как разрешимой, так и неразрешимой, т.е. как собственной, так и несобственной. К ней можно записать формально двойственную, но вопрос состоит в том, чтобы эту двойственную задачу прочитать как задачу оптимальной линейной дискриминации некоторых множеств в конечномерном пространстве. И это возможно. В реализации этой возможности и состоит суть данного параграфа. Ценой этой возможности является предположение $\delta > 0$, т.е. вектор $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_n]^T$, определяющий целевую функцию в задаче (33.9), имеет положительные координаты.

Приведем системы ограничений в задаче (33.9) к виду

$$-A_1 x \leqslant -\epsilon^1, \quad A_2 x \leqslant -\epsilon^2, \quad A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0.$$

Положим

$$A = \begin{bmatrix} -A_1 \\ A_2 \\ A_0 \end{bmatrix}, \qquad b = [-\epsilon_1, -\epsilon^2, b^0].$$

Тогда система ограничений задачи запишется в виде $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$. Разобьем матрицу A произвольным образом на две вертикальные подматрицы B_1 и B_2, так что

$$A = [B_1 B_2] = \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{01} & A_{02} \end{bmatrix}.$$

Двойственная к (33.9) будет иметь вид

$$\min\{(b, u) \mid A^T u \geqslant \delta,\ u \geqslant 0\},$$

или, в развернутом виде,

$$D^*:\ \min\{([-\epsilon^1, -\epsilon^2, b^0], u) \mid B_1^T u \geqslant$$

$$\geqslant \delta^1,\ B_2^T u \leqslant -\delta^2,\ u \geqslant 0\}, \tag{33.10}$$

где

$$B_1^T = [-A_{11}^T,\ A_{21}^T,\ A_{01}^T],$$

$$B_2^T = [A_{12}^T,\ -A_{22}^T,\ -A_{02}^T], \qquad \begin{bmatrix} \delta^1 \\ \delta^2 \end{bmatrix} = \delta:$$

Мы видим, что задача D^* реализует задачу дискриминации двух множеств M^* и N^*, первое из которых состоит из векторов-строк матрицы B_1^T, а второе – из векторов-строк матрицы B_2^T; искомый дискриминирующий элемент – это u, причем на него наложено требование неотрицательности.

Имея пару формально двойственных задач D и D^* – разрешимых или неразрешимых, каждая из которых является задачей оптимальной линейной дискриминации, – мы можем реализовать любой из вариантов схемы двойственности для несобственных задач линейного программирования (гл. III). В общей схеме двойственности фигурирует разбиение матрицы ограничений на горизонтальные и вертикальные подматрицы. Применительно к задаче D разбиение возникло естественным образом:

$$A = \begin{bmatrix} -A_1 \\ A_2 \\ A_0 \end{bmatrix} = [B_1 B_2]. \tag{33.11}$$

Такому разбиению мы и поставим в соответствие задачи P и $P^\#$ – аналоги задач (11.3) и (11.4) (гл. III, § 11), т.е.

$$P:\ \max\{(\delta, x) - R_1 \|(\epsilon^1 - A_1 x)^+\|_{p(1)} -$$

$$- R_2 \|(A_2 x + \epsilon^2)^+\|_{p(2)} \mid A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0,$$

$$\|x^1\|_{q(1)} \leqslant r_1,\ \|x^2\|_{q(2)} \leqslant r_2\},$$

$$P^\#:\ \min\{(b, u) + r_1 \|(\delta^1 - B_1^T u)^+\|^*_{q(1)} +$$

$$+ r_2 \|(B_2^T u + \delta^2)^+\|^*_{q(2)} \mid u \geqslant 0,\ \|u^1\|^*_{p(1)} \leqslant R_1,$$

$$\|u^2\|^*_{p(2)} \leqslant R_2\}.$$

Здесь $\|\cdot\|_{p(i)}$, $\|\cdot\|_{q(i)}$ $(i = 1, 2)$ – произвольные монотонные (вместе со своими сопряженными) нормы соответствующих пространств; $R_i > 0$, $r_i > 0$ $(i = 1, 2)$ – положительные параметры; $u^T = [u^1, u^2, u^0]$ – разбиение вектора u^T на подвекторы u^1, u^2, u^0, соответствующее разбиению матрицы A на горизонтальные подматрицы $(-A_1)$, A_2, A_0; $x^T = [x^1, x^2]$ – разбиение вектора x^T на подвекторы x^1, x^2, соответствующее разбиению матрицы A на вертикальные подматрицы B_1, B_2 (см. (33.11)).

Выписанные задачи P и $P^{\#}$ связаны двойственностью в формулировке теоремы 12.1 (или в ее частных формулировках в зависимости от предположений относительно фигурирующих в задачах норм, например, в формулировке теоремы 12.2).

Если задача (33.9), т.е. D, оптимальной линейной коррекции разрешима, то при достаточно больших $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ оптимальное решение задачи P будет оптимально (по критерию (δ, x)) дискриминирующим решением задачи дискриминации (33.9). Если же задача D неразрешима (например, при несовместности системы (33.5)), то задача P выступает в качестве аппроксимирующей для D. На смысле разных аппроксимаций останавливаться не будем, так как эти вопросы достаточно подробно излагались в гл. III.

Коснемся вопроса о квадратичной разделимости множеств M и N, т.е. разделимости с помощью квадратичной функции. Квадратичная функция имеет вид $f(x) = x^T A_f x + (c_f, x) + \alpha_f$, она полностью задается элементами A_f, c_f, α_f. В схеме дискриминации множеств M и N переменной x придаются значения элементов из M и N, а вид f является искомым; в данном случае искомым является вектор $\tilde{f} = [A_f, c_f, \alpha_f] \in E_{n^2+n+1}$. Делая, как и прежде, переобозначения $c_f \to x$, $\alpha_f \to \alpha$, а прежней переменной x придавая значения из M и N, мы получим в качестве аналога (33.4) следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&a_j^T X a_j + (a_j, x) + \alpha > 0, \qquad j = 1, \dots, s,\\
&a_i^T X a_i + (a_i, x) + \alpha < 0, \qquad i = s+1, \dots, m.
\end{aligned}
\tag{33.12}
$$

Важно отметить, что эта система является линейной относительно искомого элемента $y = [X, x, \alpha] \in E_{n^2+n+1}$, т.е. принципиально она имеет вид (33.5). Если в качестве критериальной функции в задаче выбора y взять (δ, y), $0 < \delta \in E_{n^2+n+1}$, то к новой ситуации можно применить описанную выше схему двойственности для задачи дискриминации. Таким образом, взяв в качестве класса разделяющих (дискриминантных) функций класс квадратичных функций, в задаче оптимального поиска дискриминирующей функции мы не вышли за пределы задач линейного программирования, что несомненно важно с практической точки зрения.

Сделаем следующее замечание относительно общей задачи (33.3) оптимальной дискриминации. Эта задача есть задача математического программирования, в которой переменной является функция f из некоторого класса $\mathcal{F}$, который можно считать линейным пространством, а множество F_0 – частью этого пространства, задаваемого, например, некоторой системой неравенств. Что касается условий (33.1), фигурирующих в задаче (33.1), то при конечности множеств $M = \{a_1, ..., a_s\}$ и $N = \{a_{s+1}, ..., a_m\}$ и переобозначениях $f \to x$, $M \cup N \ni a_k \to f_k$ вместо записи (33.1) будем иметь

$$f_j(x) > 0, \quad j = 1, ..., s;$$

$$f_i(x) < 0, \quad i = s+1, ..., m.$$

Задача же (33.3) запишется в обычной форме задачи математического программирования:

$$\sup\{\varphi(x) \mid f_j(x) > 0 \quad (j = 1, ..., s),$$

$$f_i(x) < 0 \quad (i = s+1, ..., m), \quad x \in F_0 \subset \mathcal{F}\},$$

или

$$\sup\{\varphi(x) \mid f_j(x) \geqslant \epsilon_j \quad (j = 1, ..., s),$$

$$f_i(x) \geqslant -\epsilon_i \quad (i = s+1, ..., m), \quad x \in F_0 \subset \mathcal{F}\}, \ \epsilon_k > 0, \ k = 1, ..., m.$$

Рассматривая эту задачу как произвольную, т.е. не обязательно разрешимую, к ней можно применить схему двойственности, реализованную в § 32 (хотя в этом параграфе реализация относилась к задаче выпуклого программирования, что было важно для формулировки результатов, а не для самой схемы). Сказанным мы хотели подчеркнуть, что двойственность, развитая для несобственных задач математического программирования, успешно может быть применена к несобственным оптимизационным задачам дискриминантного анализа, не обязательно линейного. Что касается содержательных интерпретаций результатов, то это полезно делать "изнутри" самого распознавания образов как научного направления с использованием его терминов и базовых понятий.

Следует еще подчеркнуть, что формально задачи математического программирования и задачи оптимального дискриминантного анализа не есть разные задачи. Возьмем, например, общую задачу линейного программирования

$$\max\{(c, x) \mid Ax \leqslant b\}. \tag{33.13}$$

Ее можно переписать в эквивалентном виде

$$\max\{(\bar{c}, z) \mid \bar{A}z \leqslant 0, -t < 0\},$$

где

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad z = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}, \qquad \bar{A} = [A, -b].$$

Разбив произвольную матрицу $\bar{A}$ на две горизонтальные подматрицы $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$, т.е. $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}$, предыдущую задачу можно переписать в форме

$$\max \{ (\bar{c}, z) \mid (-\bar{A}_1)z \geqslant 0, \ \bar{A}_2 z \leqslant 0, \ -t < 0 \},$$

что имеет вид задачи оптимальной нестрогой разделимости (дискриминации). Если в (33.13) от ограничений $Ax \leqslant b$ перейти к $Ax < b + \Delta b$, $\Delta b > 0$, то в результате изложенных формальных преобразований придем к задаче оптимальной строгой разделимости.

§ 34. Линейная аппроксимация несобственных задач ЛП и симплекс-метод

Мы особо хотели бы остановиться на вопросе о применении стандартного программного обеспечения (в форме, например, программной реализации симплекс-метода) решения собственных задач ЛП для целей анализа задач несобственных. Большинство существующих программ симплекс-метода работает на отказ в случае неразрешимости конкретной задачи ЛП. В этой ситуации пользователь программы вынужден пересматривать модель, корректируя ее по связям и информационному обеспечению. Однако естественно было бы эту работу поручить программной надстройке к симплекс-методу, обеспечивающей режим автоматического выбора метода коррекции решаемой задачи ЛП, саму коррекцию и непосредственное использование для решения последней симплекс-метода.

В гл. IV было предложено несколько способов коррекции несобственных задач ЛП, большинство которых носило линейный характер, т.е. корректирующая модель являлась собственной задачей ЛП. Остановимся несколько подробней на коррекции несобственной задачи ЛП 1-го рода, записанной в каноническом виде:

$$\min \{ (c, x) \mid l_j(x) = (a_j, x) - b_j = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \ x \geqslant 0 \}. \tag{34.1}$$

Задачу коррекции представим в форме

$$\min \{ (c, x) + \sum_{j=1}^{m} r_j \mid l_j(x) \mid \mid x \geqslant 0 \}. \tag{34.2}$$

Последняя в том и только том случае разрешима, когда система неравенств $A^T u \leqslant c$, $|u_j| \leqslant r_j$ $(j = 1, \dots, m)$ совместна. Назначение параметров $r_j > 0$ $(j = 1, \dots, m)$ осуществляет лицо, решающее задачу. Параметр r_j можно трактовать как меру потерь в единицах функционала (c, x) за невязку $|l_j(x)| = 1$, доставляемую вектором x j-му уравнению в задаче (34.1). Задачу (34.2) можно переписать в эквивалентном виде (каноническом):

$$\min\{(c,x)+\sum_{j=1}^{m} r_j(v_j+u_j)\mid (a_j,x)+v_j-u_j=b_j$$

$$(j=1,\dots,m),\ [x,u,v]\geqslant 0\},\tag{34.3}$$

где $u^T=[u_1,\dots,u_m]$, $v^T=[v_1,\dots,v_m]$ - Условия разрешимости для задачи (34.3) те же, что и для (34.2). Если решению подлежит задача (34.1), то программа симплекс-метода с помощью вспомогательных средств автоматически может настраиваться на решение задачи (34.3). Заметим, что если $[\bar x,\bar u,\bar v]\in \operatorname{Arg}$ (34.3) то величины $\bar v_j+\bar u_j=|l_j(\bar x)|$ дают невязки уравнениям задачи (34.1), соответствующие оптимальному вектору $x=\bar x$; при этом $\bar x$ является оптимальным и для задачи

$$\min\{(c,x)\mid (a_j,x)-b_j=\bar u_j+\bar v_j\ \ (j=1,\dots,m),\ x\geqslant 0\}.\tag{34.4}$$

Задаче (34.2) можно придать и такой аппроксимационный смысл. Положим $r_j=r_0r_j^0$, $r_j^0>0$ $(j=1,\dots,m)$. В соответствии с теоремой 18.1 при достаточно большом $r_0>0$ оптимальный вектор задачи (34.2) будет решать задачу

$$\min\{(c,x)\mid x\in\widetilde M\},$$

где

$$\widetilde M=\operatorname{Arg}\min\{\sum_{j=1}^{m} r_j^0\,|l_j(x)|\mid x\geqslant 0\},$$

т.е. смысл аппроксимации таков: вначале минимизируется функция невязки $\sum_{j=1}^{m} r_j^0\,|l_j(x)|$ на множестве E_n^+ неотрицательных x, а затем на оптимальном множестве $\widetilde M$ этой задачи ищется $\min(c,x)$. Сказанное в точности соответствует тому, что вначале ищется минимум $\sum_{j=1}^{m} r_j^0(u_j+v_j)$ на допустимом множестве задачи (34.3), а потом на оптимальном множестве (по переменной x) последней ищется $\min(c,x)$.

Остановимся еще на одном виде линейной аппроксимации, отнесенной к задаче ЛП вида

$$\min\{(c,x)\mid \underline{b}\leqslant Ax\leqslant \bar b,\ x\geqslant 0\}.\tag{34.5}$$

Взяв $\overline{\Delta b}>0$ и $\underline{\Delta b}>0$, можно от (34.5) перейти к задаче

$$\min\{(c,x)+R\mu+rt\mid b-\mu\underline{\Delta b}\leqslant Ax\leqslant$$

$$\leqslant \bar b+t\overline{\Delta b},\ [x,\mu,t]\geqslant 0\}.\tag{34.6}$$

В (34.6) векторы $\overline{\Delta b}$ и $\underline{\Delta b}$ задают структуру возможных изменений верхней и нижней границ для вектора Ax затрат ресурсов (в рамках стандартной интерпретации задачи ЛП). Аппроксимация задачи (34.5) в форме (34.6) является весьма естественной во многих задачах оптимального планирования, в особенности в задачах перспективного планирования.

§ 35. О модели формирования напряженных планов

Рассмотрим некоторые аспекты противоречивых моделей планирования, связанные с формированием напряженных планов (или выверкой директивных планов на напряженность).

Ниже мы будем исходить из модели производства, в качестве элементов которой выступают:

1) M_0 – множество допустимых планов (стратегий) производства $x^T = [x_1, ..., x_n] \in E_n$;

2) $f(x_1, ..., x_n)$ – ведущий (основной) критерий;

3) $\{f_i(x_1, ..., x_n)\}_{i=1}^{s}$ – система оценочных функций (функций-оценок) плана x.

Расшифруем сказанное. Под планом (стратегией) производства здесь понимается набор $x_1, ..., x_n$ его параметров x_i $(i = 1, ..., n)$, определяющих процесс функционирования производства, а также его характеристики: объемы потребления сырья и материалов (на планируемый период), выход продукции, загрузка оборудования и т.д. Предполагается, что множество допустимых стратегий M_0 предусматривает резервы по всем позициям производства для целей обеспечения свойства мобильности планов, их эластичности, возможности маневрирования, что гарантирует их надежность. В качестве ведущего критерия $f(x)$ могут выступать прибыль, трудовые затраты, себестоимость и т.д. Пригодность того или иного критерия диктуется конкретными условиями производства. В роли оценочных показателей планов могут быть: использование производственных мощностей, производительность труда, удельный вес продукции высшей категории качества и др. В дальнейшем будем предполагать, что показателям $f_i(x)$ придано такое содержание, в силу которого каждому из них желательно придать как можно большее значение.

С моделью производства свяжем такую постановку задачи формирования плана $x \in M_0$: найти вектор $\bar{x} \in M_0$, который, например, максимизирует основной критерий $f(x)$ и обеспечивает выход показателей $f_i(x)$ на некоторые их нормативные значения $\tilde{f}_i$ $(i = 1, . . . , s)$. Поиск такого плана будет вестись на множестве $M = \{x \in M_0 \mid f_i(x) \geqslant \tilde{f}_i \quad (i = 1, . . . , s)\}$. Не надуманным, а совершенно естественным и реальным будет случай, когда $M = \phi$. Это означает, что задача выхода на нормативные показатели $\tilde{f}_i$ является нереальной. В этой ситуации любой план из множества M_0 дает хотя бы одному показателю $f_i(x)$ значение, меньшее, чем нормативное. Здесь мы сталкиваемся с противоречивой моделью планирования. Заметим, что если из числа показателей $f_i(x)$ взять только один, например $f_1(x)$, то для него может оказаться возможным выход на нормативное значение $\tilde{f}_1$. Все дело в том, что нельзя этого сделать по всем показателям одновременно.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы формализовать понятия степени напряженности плана. Вместо требований $f_i(x) \geqslant \tilde{f}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ запишем ограничения:

$$f_i(x) \geqslant \lambda \tilde{f}_i, \quad i = 1, \ldots, s, \quad x \in M_0; \tag{35.1}$$

здесь $0 \leqslant \lambda$ – параметр. При $\lambda = 0$ любой план $\bar{x} \in M_0$ удовлетворяет ограничениям (35.1). При $\lambda = 1$ ограничения определяют введенное выше множество M, которое может быть пустым. Если в качестве нормативных значений для показателей $f_i(x)$ взяты числа $\tilde{f}_i = \max\{f_i(x) \mid x \in M_0\}$, то при $\lambda > 1$ система (35.1) всегда несовместна. Множество допустимых относительно ограничений (35.1) стратегий обозначим через M_λ. Минимальное значение λ_0 для параметра λ, обеспечивающее совместность ограничений (35.1), т.е. свойство $M_\lambda \neq \phi$, назовем показателем *предельной напряженности* ограничений (35.1). При $M = \phi$ этот показатель меньше 1, т.е. $\lambda_0 < 1$. План $\bar{x}$, удовлетворяющий (35.1) при $\lambda = \lambda_0$, называется *предельно напряженным*. Отыскание предельно напряженного плана с учетом ведущего критерия $f(x)$ подчиняется задаче: найти максимум $f(x)$ при ограничениях (35.1) и $\lambda = \lambda_0$.

Будем теперь исходить из директивного плана $\bar{x}$. Естественно, он может оказаться недопустимым относительно вхождения в множество M, т.е. $\bar{x} \notin M_0$. Это соответствует неучету тех или иных ограничений, формирующих множество допустимых планов M_0, например таких, как ограничения по лимитам оборудования, рабочей силе, по расходам сырья и материалов и т.д. Ограничимся случаем допустимости плана $\bar{x}$. Сформируем вектор $[\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_s]$ – вектор напряженности плана $\bar{x}$, где $\bar{\lambda}_i = f_i(\bar{x})/\tilde{f}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Число $\bar{\lambda} = \min\limits_i \bar{\lambda}_i$ назовем *показателем напряженности* плана $\bar{x}$. Показатель предельной напряженности λ_0 ограничений (35.1) и $\bar{\lambda}$ связаны неравенством $\bar{\lambda} \leqslant \lambda_0$. Степень напряженности плана $\bar{x}$ характеризуется степенью близости показателя $\bar{\lambda}$ к λ_0, что может быть выражено числом $\lambda(\bar{x}) = \bar{\lambda}/\lambda_0$ – индексом напряженности плана $\bar{x}$ $(\lambda(\bar{x}) \leqslant 1)$. При $\lambda(\bar{x}) = 1$ план $\bar{x}$ *предельно напряженный*. Плановый (директивный) выбор этого индекса связан с анализом состояния конкретных отраслей, группы родственных предприятий, производственных объединений и отдельных производств. Чем совершенней предприятие (в смысле ритмичности функционирования, эффективности управления, четкости и стабильности внешних связей и т.д.), тем индекс напряженности может быть выше, т.е. ближе к единице.

Опишем порядок нахождения плана $\bar{x}$ с индексом напряженности, не меньшим μ. Во-первых, отыскиваем λ_0 как максимальное значение λ, обеспечивающее совместность системы (35.1), что запишется так:

$$\max\{\lambda \mid x \in M_0, \ f_i(x) \geqslant \lambda \tilde{f}_i \quad (i = 1, \ldots, s)\} = \lambda_0. \tag{35.2}$$

Далее вычисляем показатель $\bar{\lambda} = \mu\lambda_0$. Наконец, решаем задачу

$$\max\{f(x) \mid \ x \in M_0, \ f_i(x) \geqslant \bar{\lambda} \tilde{f}_i \quad (i = 1, \ldots, s)\}. \tag{35.3}$$

Оптимальный план этой задачи $\bar{x}$ будет иметь индекс напряженности, не меньший $\mu = \lambda(\bar{x})$. Если множество допустимых планов M_0 задано системой линейных неравенств, а функции $\{f_i(x)\}_{i=1}^{s}$ линейные, то задачи (35.2), (35.3) суть задачи линейного программирования; следовательно, в этом случае отыскание напряженных планов (с заданным индексом напряженности) может быть осуществлено на основе хорошо разработанного аппарата линейного программирования.

Сделаем еще такое добавление. Утвердившийся ныне (в рамках экономико-математической концепции) принцип оптимальности планов формально не противоречит принципу построения напряженных планов. Если иметь только один оценочный критерий $f(x)$, при этом в качестве нормативного его значения взять $\tilde{f} = \max\{f(x) \mid x \in M_0\}$, то оптимальный по критерию $f(x)$ план $\bar{x}$ будет иметь показатель напряженности $f(\bar{x})/\tilde{f} = 1$, т.е. будет предельно напряженным.

Содержательный смысл здесь рассмотренного индекса напряженности $\lambda(\bar{x})$ плана $\bar{x}$ согласуется на случай одного оценочного критерия с понятием уровня напряженности плана $\bar{x}$, которым рекомендовано пользоваться в настоящее время.

В рассмотренной выше модели построения напряженных планов нами учтены такие требования, как его реальность, мобильность и надежность.

Следует отметить, что подход к формализации напряженности плана неоднозначен. Выше реализован только один из возможных подходов, а именно такой, когда выполнимость или невыполнимость плана (в количественном измерении) увязывалось с возможностью или невозможностью выхода на заданную систему нормативных показателей для оценочных функций. Однако напряженность плана можно было бы связать со степенью ресурсной обеспеченности его выполнения. В частности, если выполнение плана объективно связано с безрезервным использованием ресурсов, то такой план должен иметь максимальный индекс напряженности; его выполнение в этих условиях всегда чревато угрозой срыва, технологическими сбоями и другими негативными явлениями.

§ 36. Вопросы программного обеспечения

Как уже отмечалось, до сих пор разработанные пакеты прикладных программ линейного программирования – как отечественные, так и зарубежные – работали на отказ в ситуации, когда задача ЛП неразрешима; в этом случае на печать выдавалась информация о несовместности системы ограничений или неограниченном значении оптимизируемого функционала на многограннике ограничений. Это был явный брак в методологии создания пакетов ЛП. К любому такому пакету необходима была программная надстройка, которая бы средствами этого же пакета корректировала задачу в случае ее неразрешимости. При этом в списке коррекций какой-либо из наиболее естественных способов работал бы по умолчанию (без специальных на то забот пользователя пакетом), а настройка пакета на другие способы осуществлялась в соответствии с инструкцией к пакету, легко понимаемой пользователем.

В настоящее время достаточно широко ведутся разработки по программному обеспечению численного анализа противоречивых задач ЛП.

В Институте математики и механики УрО АН СССР разработано программное обеспечение численного анализа несобственных задач ЛП 1-го рода для ЭВМ БЭСМ-6 и ЕС ЭВМ. Созданные программные комплексы реализуют подход, связанный с непрерывной аппроксимацией неразрешимой задачи ЛП, т.е. с поиском такой вариации всех или выделённой части ее исходных данных, которая бы обеспечивала разрешимость (собственность) задачи и доставляла оптимум дополнительному критерию качества аппроксимации. Методы, осуществляющие оптимальную в указанном смысле коррекцию исходных данных несобственной задачи, опираются на теорию двойственности для несобственных задач ЛП.

1. Пакет производственного планирования ОПТИМА-2 [18]. Пакет ОПТИМА-2 предназначен для специалистов, занимающихся проблемами внедрения современных экономико-математических методов и вычислительной техники в планирование и управление народным хозяйством.

ОПТИМА-2 – проблемно-ориентированный и методо-ориентированный пакет – предназначен для решения разнообразных прикладных задач, которые могут быть представлены как задачи линейного программирования общего вида большой размерности, информационно близкие между собой. Пакет является инструментом, позволяющим проводить оперативное опробование и внедрение в практику планирования новых методов решения задач линейного программирования.

В пакете используются: модифицированный симплекс-метод с мультипликативным представлением обратной матрицы и стандартной процедурой повторения; итерационный метод с использованием штрафных функций; методы фейеровского типа решения систем линейных неравенств. Для решения задач большой размерности разработан механизм стыковки итерационного алгоритма и симплекс-метода. Пакет предоставляет пользователю средства корректировки исходной информации: изменение элементов исходной матрицы, вычеркивание строки и (или) столбца, изменение знака строки, изменение типа ограничений и др. Эти средства и позволяют работать с несобственными задачами, переформировывать модель. Основной способ использования пакета – обращение к нему с заданием на входном языке, являющимся составной частью системного наполнения пакета. В данной версии предусмотрено 29 операторов входного языка. Задание на работу пакета, написанное в соответствии с грамматикой языка, является средством внешнего управления работой пакета. Расшифровку директив исходного задания и обеспечение процесса прохождения задачи на ЭВМ осуществляет управляющая программа.

Пакет ОПТИМА-2 реализован на машине БЭСМ-6.

Создан диалоговый вариант пакета ОПТИМА-2, предоставляющий пользователю возможность: организовать диалог с пользователем с помощью базового набора директив и сформировать ответные сообщения; управлять работой модулей-оптимизаторов.

ОПТИМА-2 находится в стадии опытно-промышленной эксплуатации в рамках автоматизированной системы оптимального объемно-календарного планирования ПО "Уралмаш".

2. Пакет численного анализа несобственных задач ЛП: ДЕЛЬТА-ПЛАН.

2.1. Функциональное назначение. Созданное программное обеспечение предоставляет пользователям возможность для выбранного разбиения всей системы ограничений исходной несобственной задачи ЛП на директивную и одну или несколько факультативных подсистем откорректировать:

– правые части ограничений общего вида, входящие в факультативные подсистемы, и двусторонние границы на переменные (если они были заданы);

– коэффициенты матрицы ограничений, входящих в факультативные подсистемы, принадлежащие выделенному подмножеству столбцов;

– то и другое одновременно.

Для каждой из факультативных подсистем, которые предполагаются ранжированными по степени важности, пользователь может выбрать свой критерий качества аппроксимации из некоторого предлагаемого ему стандартного набора. При этом коррекция данных производится последовательно, в несколько этапов. На первом этапе оптимизируется критерий качества подсистемы с наиболее высоким приоритетом, на втором – подсистемы, непосредственно следующей за ней, и т.д. Минимальный приоритет имеет целевая функция задачи, которая оптимизируется в последнюю очередь.

Критерии качества, заложенные в систему, построены на минимизации суммы взвешенных невязок, на вычислении чебышевского уклонения корректируемой подсистемы, на комбинированном использовании этих показателей.

Кроме процедур коррекции данных, основанной на поиске оптимума заданного критерия качества аппроксимации, в систему программного обеспечения численного анализа несобственных задач ЛП включены методы так называемого "интервального" программирования. Пользователь может задать часть коэффициентов и правых частей исходной задачи не конкретными значениями, а интервалами их возможных значений. Система сама предлагает ему для заданного разбиения коэффициентов на управляемые и неуправляемые (случайные) вариант решения, которое удовлетворяет ограничениям задачи при некотором фиксированном значении управляемых коэффициентов и произвольных значениях остальных, случайных коэффициентов.

2.2. Алгоритмическое наполнение. Каждый метод коррекции исходных данных несобственной задачи ЛП реализуется несколькими процедурами, одна из которых является главной и реализует внешнюю схему метода. Остальные процедуры, называемые функциональными, реализуют отдельные шаги алгоритма, среди которых основными являются шаг построения модели оптимальной коррекции (или модели интервального программирования), шаги алгоритма последовательной оптимизации критериев качества коррекции, шаг интерпретации решения модели в терминах исходной задачи.

Каждая модель коррекции представляет собой задачу ЛП с несколькими целевыми функциями, упорядоченными по важности – линейную задачу последовательного программирования. Ее решение ищется на основе метода скаляризации вектора критериев и опирается на обычные методы решения и параметрического анализа собственной задачи ЛП. К ним относится, в первую очередь, модифицированный симплекс-метод с мультипликативным представлением обратной матрицы, а также итерационные методы фейеровского типа и расширенных штрафных функций, имеющие блок сопряжения с симплекс-методом. Итерационные методы могут непосредственно применяться к исходной несобственной задаче для предварительной приближенной установки и оценки "узких" мест ее системы ограничений.

В дальнейшем предполагается пополнить библиотеку математических алгоритмов оптимизации диалоговыми методами поиска и перебора Парето-оптимальных вершин многогранника.

2.3. Связь с существующими пакетами ЛП. Поскольку для решения обычных (собственных) задач ЛП существуют современные, хорошо развитые программные средства, вновь создаваемое программное обеспечение анализа несобственных задач ЛП было ориентировано на совместную работу с такими средствами. Так, программный комплекс анализа несобственных задач ЛП, создаваемый для ЕС ЭВМ, был "привязан" к расширенной системе программного обеспечения СПО МПР-2, а аналогичный комплекс программ, создаваемый на машину БЭСМ-6, – к системе линейного программирования ЛП БЭСМ-6 [1], созданной в ВЦ АН СССР. Привязка касается единообразия исходных данных пользователя и единообразия выходных форм и результатов. Кроме того, при анализе собственных задач ЛП применяются оптимизационные методы этих систем.

2.4. Логическая схема функционирования. Функциональные процедуры комплекса, предназначенного для ЕС ЭВМ, написаны на фортране. Библиотека этих процедур сопрягается с библиотекой процедур СПО МПР-2 перед выполнением главной программы выбранного пользователем метода коррекции, которая написана на входном языке системы СПО СПР-2. Взаимосвязь по управлению и данным между процедурами СПО МПР-2 и процедурами комплекса осуществляет монитор СПО МПР-2.

Напротив, комплекс программ анализа несобственных задач ЛП для ЭВМ БЭСМ-6, имеет свою системную часть, независимую от системной части ППП ЛП БЭСМ-6 и основанную на аппарате главных и подвижных задач ОС Диспак. Входной язык комплекса является фортрано-ориентированным, как и большинство его процедур, исключая процедуры симплекс-метода и параметрического анализа задачи ЛП, написанные на входном языке системы ЛП БЭСМ-6. Взаимосвязь вызываемых процедур по управлению и данным осуществляет монитор комплекса.

2.5. Апробация программного обеспечения. Программное обеспечение было опробовано на реальных задачах объемно-календарного планирования крупного машиностроительного предприятия с единичным и мелкосерийным типом производства для согласования величин дефицитных ресурсов с напряженными плановыми показателями по выпуску продукции по номенклатуре и в суммарном стоимостном выражении.

$:=$ ($=:$) – левая (правая) часть равенства есть обозначение для правой (левой);

E_n – линейное пространство векторов $x := [x_1, \dots, x_n]^T$, где ^{T} – знак транспонирования матрицы, в частности вектора;

$\mathbf{R}^n$ – пространство E_n, наделенное нормой $\| x \| := (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$;

$x \geqslant y$ означает $x_i \geqslant y_i (i = 1, \dots, n)$, где $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, $y = [y_1, \dots, y_n]^T$;

$E_n^+ := \{x \in E_n \mid x \geqslant 0\}$;

$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – скалярное произведение вектора x и y;

$\alpha^+ := \max\{0, \alpha\}$, где α – число;

$x^+ = [x_1^+, \dots, x_n^+]^T$;

$\| x \|_0 := \max_i |x_i|$; $\| x \|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;

$|x - M| := \inf\{\| x - y \| \mid y \in M\}$, где $M \subset \mathbf{R}^n$;

$\partial\varphi(x)/\partial l$ – производная функции $\varphi(x)$ в точке $x \in E_n$ по направлению $l \in E_n$, т.е.

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial l} := \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(x + tl) - \varphi(x)}{t}.$$

Если P – некоторая оптимизационная задача, то: $\operatorname{Arg} P$ – ее оптимальное множество; $\arg P$ – элемент из $\operatorname{Arg} P$; $\operatorname{opt} P$ – оптимальное значение задачи P.

Если Q – задача $\max_{x \in X} \min_{u \in Y} F(x, u)$, то

$\operatorname{Arg}_x Q := \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \varphi(x)$, где $\varphi(x) := \min_{u \in Y} F(x, u)$.

$\max_\pi(\cdot)$ – символ задачи максимизации по Парето;

$\max_l(\cdot)$ – символ задачи последовательной (лексикографической) оптимизации;

Arg_π – символ множества Парето для задачи $\max_\pi(\cdot)$;

$\operatorname{dom} f := \{x \in D \mid f(x)$ конечно$\}$; $\operatorname{epi} f := \{[x, \mu] \mid f(x) \leqslant \mu, \ x \in \operatorname{dom} f\}$;

$\operatorname{co} M := \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \mid x^i \in M, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geqslant 0 \ (i = 1, \dots, k) \ \forall k\}$ – выпуклая оболочка множества $M \subset E_n$;

$\operatorname{cone} M := \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \mid x^i \in M, \ \alpha_i \geqslant 0 \ (i = 1, \dots, k) \ \forall k\}$ – конусная оболочка множества $M \subset E_n$;

$\Rightarrow$ – знак импликации (логического следования); $\Longleftrightarrow$ – знак эквивалентности;

$\exists$ – квантор существования; $\forall$ – квантор всеобщности; $\forall_j \in S$ – для всех j из S;

ЛП – линейное программирование; НЗ ЛП – НЗ линейного программирования.

НЗ – несобственная задача;

1. *Бурова Н.К., Станевичене Л.И., Станевичюс А.-И.А., Шкляр П.Э.* Система линейного программирования ЛП/БЭСМ-6. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1981.
2. *Ватолин А.А.* О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами//ЖВМ и МФ. – 1984. – **24**, № 11. – С. 1629–1637.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Методы линейного программирования. Ч. 1. – Минск: Изд-во Белорусского ун-та, 1977.
4. *Еремин И.И.* О двойственности для несобственных задач линейного и выпуклого программирования//27. Intern. Wissenschaft. Kolloq. – Techn. Hochschule Ilmenau, DDR, 1982. H. 5. – S. 19–21.
5. *Еремин И.И.* О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. ж. – 1973. – **14**, № 1. – С. 53–63.
6. *Еремин И.И., Астафьев Н.Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976.
7. *Еремин И.И., Ватолин А.А.* Двойственность для несобственных бесконечномерных задач линейного и выпуклого программирования//Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1984. – С. 3–20.
8. *Еремин И.И., Ватолин А.А.* Двойственность для несобственных задач математического программирования. – Препринт/УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1985.
9. *Еремин И.И., Мазуров В.Д.* Нестационарные процессы математического программирования. – М.: Наука, 1979.
10. *Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983.
11. Итеративные методы в теории игр и программировании//Под ред. В.З.Беленького и В.А. Волконского. – М.: Наука, 1974.
12. *Канторович Л.В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Изд-во АН СССР, 1960.
13. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – 3-е изд. – М.: Наука, 1986.
14. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975.
15. *Лэсдон Л.С.* Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975.
16. *Малков У.Х., Станевичюс А.-И.А.* О пакетах и вычислительных методах линейного программирования//Числ. методы механики спл. среды. – 1981. – **12**, № 3. – С. 62–78.
17. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. – М.: Мир, 1984.
18. Пакеты прикладных программ – методы оптимизации: Сб. работ – М.: Наука, 1984.
19. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
20. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
21. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.
22. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968.
23. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Астафьев Н.Н.* Линейный анализ задач выпуклого программирования с разрывом в двойственности//Несобственные модели математического программирования. Ч. 1. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 81–111. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2823–80 Деп.
2. *Астафьев Н.Н.* Аппроксимация разрыва в двойственности//Численные методы оптимизации и их приложения. Вып. 11. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1981. – С. 5–10.
3. *Астафьев Н.Н.* Двойственная задача и бесконечномерное линейное программирование: корректность, разрыв в двойственности, аппроксимация//Тезисы докл. Международной конференции. – Айзенах, ГДР: Вартбург, 1981. – С. 7–11.
4. *Астафьев Н.Н.* Многогранник Лагранжа и аппроксимация выпуклых программ// Seminarberichte. – Humboldt – Universität, 1981. – S. 12–24.
5. *Астафьев Н.Н.* Аппроксимирующие многогранники Лагранжа и разрыв в двойственности//Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 23–29.
6. *Астафьев Н.Н.* Задача бесконечномерного линейного программирования (аппроксимация, разрыв в двойственности, финитные модели)//Труды 27 Международного научного коллоквиума. Т. 1, 2, тетрадь 5. – ГДР: Высшая техническая школа Ильменау, 1982. – С. 23–24.
7. *Астафьев Н.Н.* Линейные неравенства и выпуклость. – М.: Наука, 1982. – 153 с.
8. *Астафьев Н.Н.* Аппроксимация полусобственных задач бесконечномерного линейного программирования//Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 26–33.
9. *Астафьев Н.Н.* Бесконечномерные задачи линейного программирования с разрывом в двойственности//ДАН СССР. – 1984. – Т. 275, № 5. – С. 1033–1036.
10. *Астафьев Н.Н.* Квазифинитные задачи бесконечномерного линейного программирования//II Всесоюз. школа–семинар по оптимизации и ее приложениям в экономике (Ашхабад, 15–22.V.1984): Тезисы докл. – Ашхабад, 1984. – С. 26–27.
11. *Астафьев Н.Н.* Конечномерная аппроксимация задачи бесконечномерного линейного программирования//VII Всесоюз. симпозиум "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования" (Нарва–Йыэссу, 6–14.IV.1984). Тезисы докл. – М.; 1984. – С. 54–55.
12. *Астафьев Н.Н.* Квазифинитные задачи бесконечномерного линейного программирования//Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 54–62.
13. *Астафьев Н.Н.* К регуляризации задачи полубесконечного линейного программирования//Труды 30 Международного научного коллоквиума. – ГДР: Высшая техническая школа Ильменау, 1985. – С. 3–6.
14. *Бабиков Г.В.* О системах линейных неравенств над частично упорядоченными кольцами//Несобственные модели математического программирования. Ч. 2. –

Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1980. – С. 115–162. – Деп. в ВИНИТИ, № 2824–80 Деп.
15. *Бабиков Г.В.* О квазирешениях систем линейных неравенств и уравнений// Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 52–59.
16. *Бордецкий А.Б., Михайлов М.В., Федяев С.В.* Диалоговый ППП для согласования плановых решений на основе анализа несовместности ограничений //Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования: Девятый всесоюзный симпозиум (Минск, 23 февраля – 3 марта 1986 г.). Краткие тезисы докладов. – М., 1986. – С. 118.
17. *Булавский В.А.* Релаксация в задачах с неравенствами//Оптимизация. 1979. – № 23(40). – С. 32–40.
18. *Булавский В.А.* Методы релаксации для систем неравенств: Учеб. пособие. – Новосибирск: НГУ, 1981. – 84 с.
19. *Булавский В.А.* Обобщенные решения и регуляризация систем неравенств//Вычислительные методы линейной алгебры. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 161–174.
20. *Ватолин А.А.* О симметрической аппроксимации несобственных задач линейного программирования//Несобственные модели математического программирования. Ч. 2. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 62–114. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2824–80 Деп.
21. *Ватолин А.А.* Об условиях экстремума в аппроксимации несобственных задач линейного программирования//Численные методы оптимизации и их приложения. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1981. – С. 49–57.
22. *Ватолин А.А.* Метод аппроксимации несобственных задач выпуклого программирования//Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 67–74.
23. *Ватолин А.А.* К анализу задач линейного программирования с интервальными коэффициентами. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1983. – 22 с. – Деп. в ВИНИТИ 03.05.83, № 2363–83 Деп.
24. *Ватолин А.А.* Методы аппроксимации несовместных систем линейных уравнений и неравенств. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1983. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 03.05.83, № 2362–83 Деп.
25. *Ватолин А.А.* Об аппроксимации несобственных задач выпуклого программирования//Матем. заметки. – 1983. – Т. 33, № 4. – С. 627–636.
26. *Ватолин А.А.* Метод линейной коррекции выпукло-вогнутых минимаксных задач//II Всесоюз. школа-семинар по оптимизации и ее приложениям в экономике (Ашхабад, 15–22.V.1984): Тезисы докл. – Ашхабад, 1984. – С. 26–27.
27. *Ватолин А.А.* Об аппроксимации несовместных систем линейных уравнений и неравенств//Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 39–54.
28. *Ватолин А.А.* О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами//ЖВМ и МФ. – 1984. – Т. 24, № 11. – С. 1629–1637.
29. *Ватолин А.А.* Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы//ЖВМ и МФ. – 1984. – Т. 24, № 12. – С. 1907–1908.
30. *Ватолин А.А.* Метод линейной коррекции выпукло-вогнутых минимаксных задач // Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 70–88.
31. *Ватолин А.А.* Методы анализа несобственных задач математического программирования: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Свердловск: Ин-т матем. и мех.: УНЦ АН СССР, 1985.
32. *Вересков А.И., Третьяков Н.В.* Анализ оптимизационных моделей с несовместными ограничениями // Вторая конференция по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством: Тезисы докладов. 20–22 апреля 1983 г., Москва, с. 32–37.
33. *Вересков А.И., Третьяков Н.В.* Метод оптимальной корректировки несовместных задач выпуклого программирования с приоритетом в ограничениях // II Всесоюзная школа–семинар по оптимизации и ее приложениям в экономике (Ашхабад, 15–22 мая 1984): Тезисы докл. – Ашхабад, 1984. – С. 78–79.

34. *Гайнанов Д.Н.* О графах максимальных совместных подсистем несовместных систем линейных неравенств. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 229–81 Деп.
35. *Гайнанов Д.Н.* О комбинаторных свойствах несовместных систем линейных неравенств и многогранников // Матем. заметки. – 1985. – Т. 38, № 3. – С. 463–474.
36. *Гайнанов Д.Н., Новокшенов В.Ю., Тягунов Л.И.* О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств // Матем. заметки. – 1983. – Т. 33, № 2. – С. 293–300.
37. *Голиков А.И.* О некоторых модификациях задачи на минимакс функции Лагранжа // Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования. Девятый симпозиум (г. Минск, 23 февраля – 3 марта 1986 г.). Тезисы докл. – М., 1986. – С. 27–28.
38. *Голуб Л.Г.* Система А–План в управлении строительством // Экономика и мат. методы. – 1984. – Т. 20, № 3. – С. 495–509.
39. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его применения и обобщения. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
40. *Добряков Л.Д., Кантор И.Л.* О решении системы несовместных линейных уравнений в смысле Чебышева // Сиб. матем. ж. – 1965. – Т. 6, № 1. – С. 237–240.
41. *Еремин И.И.* О несовместных системах линейных неравенств // ДАН СССР. – 1961. – Т. 138, № 6. – С. 1280–1283.
42. *Еремин И.И.* Итеративный метод для чебышевских приближений несовместных систем линейных неравенств // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143, № 6. – С. 1253–1256.
43. *Еремин И.И.* О системах неравенств с выпуклыми функциями в левых частях // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1966. – Т. 30, № 2. – С. 256–278.
44. *Еремин И.И.* О задачах выпуклого программирования с противоречивыми ограничениями // Кибернетика. – 1971. – № 4. – С. 124–129.
45. *Еремин И.И.* О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. ж. – 1973. – Т. XIV, № 1. – С. 53–63.
46. *Еремин И.И.* Алгоритмы для несовместных задач математического программирования // Труды 24 Международного научного коллоквиума. Тетрадь 4. – ГДР: Высшая техническая школа Ильменау, 1979. – С. 109–110.
47. *Еремин И.И.* О несобственных задачах линейного и выпуклого программирования // Несобственные модели математического программирования. Ч. 1. – Свердловск: Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 2–80. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2823–80 Деп.
48. *Еремин И.И.* Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256, № 2. – С. 272–276.
49. *Еремин И.И.* Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования. - Препринт / Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1981. – 44 с.
50. *Еремин И.И.* Непрерывная аппроксимация несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Классификация и оптимизация в задачах управления. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. – С. 3–14.
51. *Еремин И.И.* Двойственность для несобственных задач линейного программирования // Мат. заметки. – 1982. – Т. 32, № 2. – С. 229–238.
52. *Еремин И.И.* Двойственность для несобственных задач линейного программирования // Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 3–10.
53. *Еремин И.И.* О двойственности для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Труды 27 Международного научного коллоквиума. Тетрадь 5. – ГДР: Высшая техническая школа Ильменау, 1982. – С. 19–21.
54. *Еремин И.И.* Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования и методы их коррекции // Известия АН СССР. Сер. Тех. кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 20–32.
55. *Еремин И.И.* Несобственные модели линейного и выпуклого программирования // Численный анализ решения задач линейного и выпуклого программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. – С. 3–36.
56. *Еремин И.И.* Двойственность для несобственных задач квадратичного программирования // Методы математического программирования и программное обеспе-

чение: Тезисы докл. научно-технической конференции (Свердловск 16–18 мая 1984 г.). – Свердловск, 1984. – С. 53–54.
57. *Еремин И.И.* Несобственные задачи квадратичного программирования и вопросы регуляризации // Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 47–50.
58. *Еремин И.И.* Противоречивые модели экономики. – Свердловск: Средне-Уральское изд-во, 1986. – 97 с.
59. *Еремин И.И., Астафьев Н.Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
60. *Еремин И.И., Ватолин А.А.* Двойственность для несобственных бесконечномерных задач линейного и выпуклого программирования // Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 3–20.
61. *Еремин И.И., Ватолин А.А.* Двойственность для несобственных задач математического программирования в условиях информационной неопределенности // Стохастическая оптимизация. Международная конференция (СССР. г. Киев, 9–16 сент. 1984 г.). Тезисы докл. Ч. I. – Киев, 1984. – С. 82.
62. *Еремин И.И., Ватолин А.А.* Двойственность для несобственных задач математического программирования. – Препринт / Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1985. – 52 с.
63. *Еремин И.И., Мазуров В.Д.* Нестационарные процессы математического программирования. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
64. *Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные модели оптимального планирования // Всесоюзная конф. "Динамическое программирование" (Свердловск, 30 мая – 1 июня 1979 г.). Тезисы докл. – Свердловск, 1979. – С. 94–96.
65. *Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
66. *Еремин И.И., Мазуров В.Д., Попов Л.Д.* О программном обеспечении численного анализа несобственных задач линейного программирования // VIII Всесоюз. симпозиум "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования". (Нарва–Йыэссу, 6–14 апреля 1984 г.). Тезисы докл. – М., 1984. – С. 71–72.
67. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1964. – 348 с.
68. *Иваницкий А.Ю.* О решении систем линейных алгебраических уравнений с неточными данными // Численный анализ: методы, алгоритмы. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – С. 136–141.
69. *Карчицка Д.Л.* Чебышевские точки системы α $(nP-E)$ $x = d$ // Год. зб. Мат. фак. Ун-т Скопје. – 1981. – № 32. – С. 23–28.
70. *Кисляк В.М., Садчиков А.С.* Анализ несобственных моделей в задачах планирования машиностроительного производства // Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 75–88.
71. *Коробкин А.Д., Михайленко Ю.М.* К анализу несовместности системы ограничений в задачах оптимизации // Применение ЭВМ в оптимальном планировании и управлении. № 4. – Новосибирск, 1979 (1980). – С. 3–25.
72. *Кочиков И.В., Матвиенко А.Н., Ягола А.Г.* Обобщенный принцип невязки для решения несовместных уравнений // ЖВМ и МФ. – 1984. – Т. 24, № 7. – С. 1087–1090.
73. *Криворуцкий Л.Д., Станевичюс А.-И.А., Сташуль Т.В.* Использование экономико-математического анализа для оценки вариантов развития энергетического комплекса страны в противоречивых условиях // IX Всесоюз. симпозиум "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования" (г. Минск, 23 февраля – 3 марта 1986 г.): Краткие тезисы докл. – М., 1986. – С. 146–147.
74. *Крысов Ю.А.* Алгоритм решения задачи планирования производства в диалоговой системе // Известия АН СССР. Тех. кибернетика. – 1984. – № 6. – С. 202–206.
75. *Курносов А.М., Кудин И.Б.* Совершенствование методов математического программирования в горном деле. – М.: Наука, 1984.
76. *Кустиков Е.Н.* Реализация алгоритма последовательного определения "узких мест" производства в оптимизационных расчетах к основным направлениям раз-

вития легкой промышленности // IX Всесоюз. симпозиум "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования" (г. Минск, 23 февраля – 3 марта 1986 г.): Краткие тезисы докл. – М., 1986. – С. 199–200.
77. *Леонов А.С.* Метод минимальной псевдообратной матрицы для решения некорректных задач линейной алгебры // ДАН СССР. – 1985. – Т. 285, № 1. – С. 36–40.
78. *Ляшко И.И., Кудринский В.Ю., Остапчук В.С.* Метод определения обобщенного нормального решения системы линейных алгебраических уравнений // ДАН СССР. Серия А. – 1985. – № 7. – С. 16–20.
79. *Мазуров В.Д.* О комитете системы выпуклых неравенств // Труды ICM – 1966. № 14. – М.: МГУ, 1966. – С. 41.
80. *Мазуров В.Д.* О построении комитета системы выпуклых неравенств // Кибернетика. – 1967. – № 2. – С. 56–59.
81. *Мазуров В.Д.* Методы математического программирования и распознавания образов в планировании производства // Матем. методы в планировании промышленного производства. Вып. 22. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. – С. 3–27.
82. *Мазуров В.Д.* Теория и приложения комитетных конструкций // Методы для нестационарных задач математического программирования. Вып. 29. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. – С. 31–63.
83. *Мазуров Вл.Д.* Об одном классе дискретных задач математического программирования // Несобственные модели математического программирования. Ч. 1. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 112–186. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2823–80 Деп.
84. *Мазуров Вл.Д.* О некоторых дискретных аппроксимациях для несобственных задач // Классификация и оптимизация в задачах управления. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. – С. 15–30.
85. *Мазуров Вл.Д.* Метод допустимых коррекций // Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 11–22.
86. *Мазуров Вл.Д.* Комитетные решения задач планирования // Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 21–25.
87. *Мазуров В.Д.* Комитетное решение несбалансированной транспортной задачи // Математические методы планирования промышленного производства. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 88–90.
88. *Малков У.Х.* Об одном подходе к анализу многокритериальных и, возможно, несовместных моделей линейного программирования // IX Всесоюз. симпозиум "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования" (г. Минск, 23 февраля – 3 марта 1986 г.): Краткие тезисы докл. – М., 1986. С. 150–151.
89. *Мерзляков Ю.И.* О существовании положительных решений у систем линейных уравнений // УМН. – 1963. – Т. 17, вып. 3. – С. 179–186.
90. Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования: Сб. статей. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – 128 с.
91. *Могилевская Р.Л., Шварцман П.А.* Согласование исходных данных линейных оптимизационных задач методами теории неприводимо несовместных подсистем // II Всесоюзная школа–семинар по оптимизации и ее приложениям в экономике (г. Ашхабад, 15–22 мая 1984 г.): Тезисы докл. – Ашхабад, 1984. – С. 186–187.
92. *Молчанов И.Н., Яковлев М.Ф.* Об одном классе итерационных процессов решения несовместных систем линейных алгебраических уравнений // ДАН СССР. – 1973. – Т. 209, № 4. – С. 782–784.
93. *Молчанов Н.Н., Яковлев М.Ф.* Итерационные процессы решения одного класса несовместных систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. – 1975. – Т. 15, № 3. – С. 547–558.
94. *Морозов В.А.* О псевдорешениях//ЖВМ и МФ. – 1969. – Т. 9, № 6. – С. 1387–1391.
95. Несобственные задачи оптимизации: Сб. статей. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – 101 с.
96. Несобственные модели математического программирования: Сб. статей. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, ч. 1, 236 с., № 2823–Деп.; ч. 2, 230 с., № 2824–Деп.
97. *Омельченко Н.В.* Процедура согласования плановых решений с адаптацией допустимой области // IX Всесоюз. симпозиум "Системы программного обеспечения

решения задач оптимального планирования" (г. Минск, 23 февраля – 3 марта 1986 г.) : Краткие тезисы докл. – М., 1986. – С. 160–161.
98. Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования: Сб. статей. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – 136 с.
99. *Перевалов Ю.В.* Некоторые возможности оптимальной коррекции плановых показателей в задачах планирования сталеплавильного производства // Несобственные модели математического программирования. Ч. 2. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 211–228. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2824–80 Деп.
100. *Перевалов Ю.В.* Коррекция плановых показателей в задачах текущего планирования сталеплавильного производства//Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 89–96.
101. *Плотников С.В.* Методы проектирования для несобственных задач выпуклого программирования // Несобственные модели математического программирования. Ч. 2. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 27–61. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2824–80 Деп.
102. *Плотников С.В.* О циклическом проектировании на систему выпуклых множеств с пустым пересечением // Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 60–66.
103. *Попов Л.Д.* Методы итеративной аппроксимации в несобственных задачах линейного программирования 1-го рода // Несобственные модели математического программирования. Ч. 2. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 2–26. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2824–80 Деп.
104. *Попов Л.Д.* Двойственный метод итеративной аппроксимации, использующий модифицированную функцию Лагранжа//Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 42–51.
105. *Попов Л.Д.* Двойственные методы итеративной аппроксимации несобственных задач выпуклого программирования 1-го рода: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1982.
106. *Попов Л.Д.* О методах аппроксимации для несобственных задач выпуклого программирования 2-го и 3-го рода // Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 89–107.
107. *Попов Л.Д.* Линейная коррекция несобственных минимаксных выпукло-вогнутых задач по максиминному критерию // ЖВМ и МФ. – 1986. – Т. 26, № 9. – С. 1100–1110.
108. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация/А.Н. Тихонов и др. – М.: Наука, 1983. – 198 с.
109. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наукова думка, 1969. – 624 с.
110. *Садчиков А.С.* Принятие решений в задаче оптимального годового объемного планирования // Классификация и оптимизация в задачах управления. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. – С. 103 – 113.
111. *Скарин В.Д.* О некоторых методах анализа несобственных задач математического программирования // Несобственные модели математического программирования. Ч. 1. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 187–234.– Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2823–80 Деп.
112. *Скарин В.Д.* К анализу несобственных задач выпуклого программирования с позиций последовательной оптимизации // Несобственные задачи оптимизации. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 30. – 36.
113. *Скарин В.Д.* О применении метода регуляризации для коррекции несобственных задач ЛП 1-го рода // Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 55 – 66.
114. *Скарин В.Д.* Об одном алгоритме численного анализа несобственных задач линейного программирования // Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 63 – 69.
115. *Скарин В.Д.* Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // ЖВМ и МФ. – 1986. – Т. 26, № 3. – С. 439 – 448.

116. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. – 1965. – Т. 5, № 4. – С. 718 – 722.
117. *Тихонов А.Н.* О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. – 1980. – Т. 20, № 6. – С. 1373–1383.
118. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
119. *Тихонов А.Н., Морозов В.А., Кармазин В.И.* О задачах коррекции линейных неравенств // Численный анализ: методы, алгоритмы, приложения. – М.: МГУ, 1985. – С. 3 – 13.
120. *Тихонов А.Н., Рютин А.А., Агаян Г.М.* Об устойчивом методе решения задачи линейного программирования с приближенными данными // ДАН СССР. – 1983. – Т. 272, № 5. – С. 1058–1063.
121. *Фролов В.Н.* Анализ несобственных моделей конкретных задач оптимального планирования // Несобственные модели математического программирования. Ч. 2. – Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1980. – С. 175–210. – Деп. в ВИНИТИ 03.07.80, № 2824–80 Деп.
122. *Фролов В.Н.* Оптимизация плановых программ при слабо согласованных ограничениях. – М.: Наука, 1986. – 166 с.
123. *Фролов В.Н., Чернавин П.Ф.* О построении непротиворечивой системы ограничений в задачах перспективного планирования // Математический анализ территориально-производственных систем. – Новосибирск: Наука, 1984.
124. *Чебышев П.Л.* О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметричные около данной оси //Чебышев П.Л. Собр. соч. Т. 4 – М.: Гостехиздат, 1948. – С. 167–211.
125. *Чернавин П.Ф.* Методы построения непротиворечивых моделей задач перспективного планирования предприятий черной металлургии. Дис. . . . канд. экон. наук. – Устинов: Физ.-тех. ин-т УНЦ АН СССР, 1986.
126. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
127. *Черников С.Н.* Свертывание конечных систем линейных неравенств // ДАН УССР. Сер. А. – 1969. – № 1. – С. 32–35.
128. *Черников С.Н.* Системы линейных неравенств и некоторые их приложения // Математизация знаний и научно-технический прогресс. – Киев: Наукова думка, 1975. – С. 149–175.
129. *Черникова Н.В.* Алгоритм последовательного учета ограничений для решения задачи линейного программирования // Исслед. операций и АСУ. Вып. 7. – Киев, 1976. – С. 19–31.
130. *Щепакин М.Б.* О критерии несовместности системы выпуклых неравенств для одного класса фейеровских приближений // Кибернетика. – 1985. – № 2. – С. 124.
131. *Ablow C.M., Kaylor D.J.* A committee solution of the pattern recognition problem// IEEE Trans. – 1965. – V. 11, № 3.
132. *Ablow C.M., Kaylor D.J.* Inconsistent homogeneous linear inequalities//Bull. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 71, № 5. – P. 724.
133. Anwendungen der linearen parametrischen Optimierung/Hrsg. Lommatzsch K. – Berlin: Akad. – Verlag, 1979. – 190 S.
134. *Astafiev N.N.* On regularisation of semi-infinite linear programming//Abstr. I. 12th IFIP Conf. on System modelling and optimization. – Budapest, 1985. – P. 2–6.
135. *Aubin J.P., Ekeland J.* Estimates of the duality gap in nonconvex optimization//Math. Oper. Res. – 1976. – V. 1, № 3. – P. 225–246.
136. *Balder E.J.* Comment on a note on duality gaps in linear programming over convex sets//J. Optim. Theory and Appl. – 1975. – V. 17, № 3/4. – P. 343–346.
137. *Bastian K., Dibowski K., Tammer K.* Dualitätsbeziehungen für eine Klasse von Optimierungsproblemen//Technische Hochschule Leipzig Wissenschaftliche Zeitschrift. – 1981. – № 5. – S. 311–320.
138. *Bazaraa M.S.* Geometry and resolution of duality gaps//Naval Res. Logist. Quart. – 1973. – V. 20, № 2. – P. 357–366.
139. *Ben-Israel A., Ben Tal A., Zlobec S.* Optimality in non-linear programming: a feasible directions approach. – New York: Wiley-Interscience, 1981.

140. *Bjerhammar A.* Application of calculus of matrices to method of least squares; with special reference to geodetic calculations//Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm. – 1951.– №49.
141. *Blair C.E.* Ascent ray theorems and some applications//Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. – 1983. – V. 215. – P. 2–9.
142. *Blair C.E., Duffin R.J., Jeroslow R.G.* A limiting infisup theorem//J. Optim. Theory and Appl. – 1982. – V. 37, №2. – P. 163–175.
143. *Blair C.E., Jeroslow R.G.* Lagrange dual programs with linear constraints on the multipliers//Constructive Approaches to Mathematical Models: Proceedings of a Conference in Honor of R.J. Duffin, Pittsburg. Pensylvania, 10–14 July, 1978. – P. 137–152.
144. *Borwein J.* Perfect duality. – Dalhousie University, 1979.
145. *Borwein J.* Direct theorems in semi-infinite convex programming. Department of Math., Carnegie-Mellon University. – Pittsburg, PA, 1980.
146. *Borwein J.M.* A note on perfect duality and limiting lagrangeans//Math. Programming. – 1980. – V. 18, №3. – P. 330–337.
147. *Borwein J.M.* The limiting lagrangian as a consequence of Helly's theorem. J. Optim. Theory and Appl. 1981.– V. 33, №4.– P. 497–513.
148. *Charnes A., Cooper W., Kortanek K.* On representations of semi-infinite programs, which have no duality gaps//Manag. Sci. – 1965. – V. 12, №1. – P. 113–121.
149. *De Blasi F.S., Myjak J.* Some genetic properties in convex and non-convex optimization theory//Annales Soc. Math. Polonae. Ser. I: Comment. Math. – 1984. – V. 24, №1. – P. 1–14.
150. *Duffin R.J.* Convex analysis treated by linear programming//Math. Programming. – 1973. – V. 4, №2. – P. 125–143.
151. *Duffin R.J., Jeroslow R.G.* The limiting Lagrangian. – Carnegie-Mellon University, 1979.
152. *Duffin R.J., Jeroslow R.G.* Lagrangean functions and offine minorants//Math. Program. Study. – 1981. – V. 14. – P. 48–60.
153. *Duffin R.J., Jeroslow R.G., Karlovitz L.A.* Duality in semi-infinite linear programming// Lect. Notes Econ. and Math. Syst. – 1983. – V. 215. – P. 50–62.
154. *Duffin R., Karlovitz L.* An infinite linear program with a duality gap//Manag. Sci. – 1965. – V. 12, №1. – P. 122–134.
155. *Elving T.* Block-Iterative methods for consistent and inconsistent linear equations// Numer. Math. – 1980. – V. 35. №1. – P. 1–12.
156. *Erjomin I.I.* Duale uneigentliche lineare und konvexe Optimierungsprobleme//Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization. – 1982. – V. 13, № 2. – S. 167–178.
157. *Gal T.* Postoptimal analysis, parametric programming and related topics. – New York: McGraw-Hill, 1979.
158. *Glashoff K.* Pseudo-solutions of optimization problems. Z. angew//Math. und Mech. – 1974. – Bd. 54, Ht. 4. – S. 218–219.
159. *Grygarova L.* Die Lösbarkeit eines linearen Optimierugnsproblems unter Zufügung einer weiteren Restiktionbedingung//Apl. Mat. – 1972. – V. 17, №5. – P. 352–387.
160. *Hayashi M., Komiya H.* Perfect duality for convexlike programs//J. Optim. Theory and Appl. – 1982. – V. 38, №2. – P. 179–190.
161. *Hollatz H.* Die Konstruktion lösbarer Optimierungsprobleme//Math. Operationsforsch. und Stat. – 1970. – Bd. 1, Ht. 4. – S. 255–263.
162. *Horst R.* A note on the duality gap in nonconvex optimization and a very simple procedure for bid evaluation type problems//European J. Oper. Res. – 1980. – V. 5. – P. 205–209.
163. *Jeroslow R.G.* Asymptotic linear Programming//Oper. Res. – 1973. – V. 21, №5. – P. 1128–1141.
164. *Jeroslow R.G.* Linear programs dependent on a single parameter//Discrete Math. – 1973. – V. 6, №2. – P. 119–140.
165. *Jeroslow R.G.* A limiting Lagrangeans for infinitely constrained convex optimization in R^n//J. Optim. Theory and Appl.–1981. – V. 33. №4. – P. 479–496.
166. *Jeroslow R.G.* Uniform duality in semi-infinite convex optimization//Math. Program. – 1983. – V. 27, №2. – P. 144–154.
167. *Kallina C., Williams A.* Linear programming in reflexive spaces//SIAM Rev. – 1971. – V. 13, №3.

168. *Karney D.F.* Duality gaps in semi-infinite linear programming and approximation problem//Math. Program. – 1981. – V. 20, №2. – P. 129–143.
169. *Karney D.F.* A duality theorem for semi-infinite convex programs and there finite subprograms//Math. Program. – 1983. – V. 27, № 1. – P. 75–82.
170. *Karney D.F., Morloy T.D.* Limiting Lagrangians: A primal approach//J. Optim. Theory and Appl. – 1986. – V. 48, № 1. – P. 163–174.
171. *Kortanek K.O., Soyster A.L.* On refinement of some duality theorems in linear programming over cones//Oper. Res. – 1972. – V. 20, № 1. – P. 137–142.
172. *Kortanek K.O.* Classifying convex extremum problems over linear topologies having separation properties//J. Math. Anal. and Appl. – 1974. – V. 46, № 3. – P. 725–755.
173. *Kortanek K.O.* Perfect duality in generalized convex programming in finite dimensions: Dep. Math., Carnegie-Mellon Univ. Tech. Report №26. – Pittsburg, Pa, 1975.
174. *Kortanek K.O.* Constructing a perfect duality in inifinite programming//Appl. Math. and Optim. – 1977. – V. 3, №4.
175. *Krawczyk S., Rymarczyk M.* Устранение несовместимости системы линейных неравенств (на польск. яз.)//Pr. nauk. AE Wroclawik. – 1979. – № 60. – P. 241–253.
176. *Laczkovich M.* Solvability for infinite systems of linear inequalities//Period. Math. Hung. – 1978. – V. 9, № 1, 2. – P. 63–70.
177. *Mangasarian O.L.* Normal solutions of linear programs//Math. Progr. Study. – 1984. – V. 22. – P. 206–216.
178. *Martinez-Legaz J.E.* Lexicographical order, inequality systems and optimization//Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. – 1984. – V. 59. – P. 203–212.
179. Non-linear parametric optimization/Bank B., Guddat J., Klatte D., Kummer B., Tammer K. – Berlin: Akad. – Verlag, 1982. – 228 p.
180. *Pappalardo M.* On the duality gap in nonconvex optimization//Math. Oper. Res. – 1986. – V. 11, № 1. – P. 30–35.
181. *Rockafellar R., Wets R.* Stochastic convex programming: relatively complete recourse and induced feasibility//SIAM J. Contr. and Optim. – 1976. – V. 14, № 3. – P. 574–589.
182. *Roodman G.* Post-infeasibility analysis in linear programming//Manag. Sci. – 1979. – V. 25, №9. – P. 916–922.
183. *Schnabel R.B.* Determining feasibility of a set of nonlinear inequality constraints// Math. Progr. Study. – 1982. – V. 16. – P. 137–148.
184. Semi-Infinite Programming and Applications (An Intern. Sympos. Austin, Texas, September 8–10, 1981)//Lect. Notes Econ. and Math. Syst. – 1983. – V. 215. – P. 322.
185. *Soyster A.L.* A note on duality gaps in linear programming//J. Optim. Theory and Appl. – 1974. – V. 13, №4. – P. 484–489.
186. *Zlobec S.* Regions of stability for ill-posed convex programs//Apl. mat. – 1982. – V. 27, № 3. – P. 176–191.
187. *Zlobec S., Ben-Israel A.* Perturbed convex programs: continuity of optimal solutions and optimal values//Oper. Res. – Varfahren. – 1978. – V. 31. – P. 737–749.