Проф. Г. И. ДРИНФЕЛЬД

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ чисел π и e

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1952

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга доступна широкому кругу читателей: студентам университетов, учительских и педагогических институтов, преподавателям и учащимся средних школ, техникумов, педагогических училищ и просто любителям математики. Для понимания первых трех глав ее требуется только знание школьного курса алгебры и элементов тригонометрии. Лишь четвертая, очень короткая, глава требует самых скромных сведений из интегрального исчисления. Эти сведения можно почерпнуть из любого учебника математического анализа. Однако без четвертой главы работа имела бы незаконченный характер.

Отдельные главы книги имеют самостоятельное значение и могут читаться независимо одна от другой с учетом следующего указания: для понимания третьей главы нужно предварительно прочитать из первой главы § 1, из второй — §§ 2, 3, 6, 7, если читателю неизвестны приведенные в этих параграфах факты.

Опытный учитель, мы надеемся, сумеет использовать §§ 6, 7, 8 первой главы и почти всю вторую главу в преподавании. Вся же книжка может быть использована в работе математических кружков.

Автор выражает благодарность проф. А. К. Сушкевичу и доц. Л. Я. Гиршвальду, замечаниями которых он воспользовался при редактировании рукописи.

Глава I

СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Понятие об алгебраических и трансцендентных числах.

Определение 1. *Число α, вещественное или невещественное, называется алгебраическим, если существует уравнение вида*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

с рациональными коэффициентами, для которого α является корнем.

Например, любое рациональное число $\frac{p}{q}$ (p, q — целые числа) является алгебраическим, так как оно, очевидно, является корнем уравнения

$$qx - p = 0.$$

Иррациональные числа вида

$$a + \sqrt[n]{b}, \qquad (2)$$

где a, b — рациональные числа, как легко показать, тоже являются алгебраическими. Действительно, число (2) является корнем уравнения

$$(x - a)^n - b = 0,$$

а это уравнение, если воспользоваться формулой Ньютона, приводится к виду (1).

Комплексные числа вида

$$a + bi,\ a + \sqrt{b}\, i,$$

где a, b — рациональны, тоже являются алгебраическими числами. Первое из них является корнем уравнения

$$x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0,$$

а второе — корнем уравнения

$$x^2 - 2ax + (a^2 + b) = 0.$$

В качестве последнего примера, укажем, что числа вида

$$\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n},$$

где n — целое положительное число, тоже являются алгебраическими, так как они служат корнем уравнения

$$x^n + 1 = 0.$$

Действительно, по формуле Моавра

$$\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

В дальнейшем мы можем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) суть *целые* числа. В самом деле, если это не так, то нам достаточно будет умножить уравнение (1) на наименьшее кратное знаменателей чисел a_0, $a_1, \ldots a_n$, чтобы получить уравнение того же вида, но с целыми коэффициентами.

Если α является корнем уравнения вида (1) с целыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots a_n$ и коэффициентом a_0, равным единице, то α называется *целым* алгебраическим числом. Упомянутые в приведенных выше примерах числа $a + bi$, $a + \sqrt{b}\, i$, если a, b — целые числа и число $\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ суть целые алгебраические числа.

Определение 2. *Каждое не алгебраическое число называется трансцендентным.* Иными словами — число α называется трансцендентным, если не существует ни одного уравнения вида (1) с рациональными (целыми) коэффициентами, которое имело бы α своим корнем.

Основной целью настоящей главы является доказательство существования трансцендентных чисел.

§ 2. Эквивалентные множества. Понятие множества, также как понятие совокупности, от которого оно не отличается, принадлежит к числу первичных понятий, то-есть не подлежит определению через какие-нибудь более простые понятия. Мы предпочитаем пользоваться термином „множество", когда хотим подчеркнуть, что речь идет о совокупности объектов, обладающих некоторым общим признаком. Можно, например, говорить о множестве стульев в школьном здании, о множестве кур на колхозной птицеферме, о множестве окружностей с общим центром в данной точке, о множестве натуральных чисел, о множестве простых чисел и т. п. Первые два из упомянутых множеств являются примерами конечных множеств, остальные — бесконечных.

Определение 3. *Множество называется конечным, если оно содержит вполне определенное (конечное) число элементов, и бесконечным, если нет такого числа N, чтобы число элементов множества было меньше этого числа.*

Можно также сказать, что множество называется конечным, если, нумеруя его элементы числами 1, 2, 3,... мы заканчиваем нумерацию вполне определенным числом n, и бесконечным, если процесс нумерации не может быть закончен.

Строго говоря, имея дело с неконечным множеством, нельзя говорить о нумерации в обычном смысле, надо обобщить понятие о нумерации, и мы это сделаем, введя следующее.

Определение 4. *Два множества называются эквивалентными, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между элементами этих множеств*, то-есть, если каждому элементу одного множества можно сопоставить определенный элемент другого множества, и наоборот.

Так, например, эквивалентными являются следующие множества: множество прописных букв латинского алфавита, множество строчных букв того же алфавита и множество чисел 1, 2, ... 25; множество положительных целых чисел и множество отрицательных целых чисел; множество окружностей с общим центром в данной точке и множество положительных чисел;

множество точек отрезка AB с длиной, равной единице, и множество точек отрезка CD с длиной, равной некоторому (любому) положительному числу k.

Последние два примера мы поясним.

Множество окружностей с центром в данной точке действительно эквивалентно множеству положительных чисел, так как каждой окружности соответствует положительное число — длина радиуса, и наоборот, каждому положительному числу соответствует окружность с радиусом, длина которого равна этому числу.

Взаимно-однозначное соответствие между точками двух отрезков можно установить графически, как указано на рис. 1, или, если угодно, аналитически с помощью формул

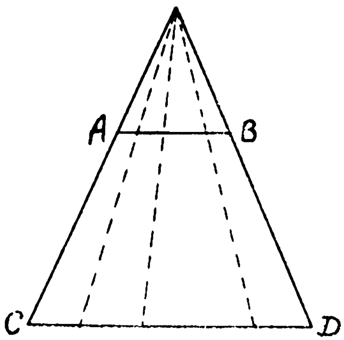

Рис. 1.

$$y = a + (b - a)\,x,\ x = \frac{y - a}{b - a},$$

приводящих каждому числу x, удовлетворяющему условию $0 \leqslant x \leqslant 1$, число y, удовлетворяющее условию $a \leqslant y \leqslant b$, и наоборот.

Последний из рассмотренных нами примеров обнаруживает, в частности, что бесконечное множество может быть эквивалентным своей части. Для конечных множеств, легко видеть, это невозможно.

Введя понятие об эквивалентных множествах, мы, очевидно, обобщили привычное понятие о нумерации, так как обычная нумерация есть не что иное как установление взаимно-однозначного соответствия между элементами некоторой совокупности и числами 1, 2,... n.

§ 3. Счетные и несчетные множества. Простейшими, в известном смысле, после конечных множеств, следует считать так называемые счетные множества.

Определение 5. *Множество M называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел* 1, 2,... n,... Примерами счетных множеств являются: само множество натуральных чисел;

множество чисел 2, 4, 6,... $2n$,...; множество чисел 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$; множество чисел $1!, 2!, 3!, \ldots n!, \ldots$

Ниже мы укажем более сложные и очень важные примеры счетных множеств, а сейчас докажем существование несчетных множеств.

Теорема 1. *Множество вещественных чисел, содержащихся между двумя любыми данными числами a, b, несчетно.*

Так как в конце предыдущего параграфа мы доказали, что множество чисел, содержащихся между данными числами a, b, эквивалентно множеству чисел, содержащихся между 0 и 1, то нам достаточно доказать теорему для случая $a=0$, $b=1$.

Напомним, что каждое вещественное число однозначно (если не пользоваться периодическими дробями с девяткой в периоде) представимо в виде бесконечной десятичной дроби, и что две такие дроби представляют разные числа, если хотя бы два занимающие одинаковое положение знака этих дробей не равны.

Допустим теперь, что наша теорема неверна, то-есть, что множество вещественных чисел, содержащихся между 0 и 1, счетно. Следовательно, элементами этого множества являются числа $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, где

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots \\ a_2 &= 0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= 0,\omega_1\omega_2\ldots\omega_n\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

и таблица (1) должна содержать *любой* элемент нашего множества. Рассмотрим теперь число

$$0,c_1c_2c_3\ldots c_n\ldots \tag{2}$$

где c_1 — любая цифра, отличная от α_1; c_2 — любая цифра, отличная от β_2 и т. д.; c_n — любая цифра отличная от ω_n и т. д.

В силу сделанного в начале доказательства замечания, число (2) не равно ни одному из чисел (1) и не должно, следовательно, содержаться между 0 и 1. Между тем, очевидно,

$$0 \leqslant 0{,}c_1c_2 \ldots c_n \ldots \leqslant 1.$$

Мы пришли, таким образом, к противоречию и доказали тем самым, что наше предположение о счетности множества чисел, содержащихся между 0 и 1, невозможно.

Доказанная теорема позволит нам позже установить существование трансцендентных чисел.

§ 4. Теоремы о счетных множествах. Введем важное понятие о сумме множеств.

Определение 6. *Суммой множеств $A, B, \ldots$ называется множество M, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств $A, B, \ldots$, причем любой элемент любого из множеств $A, B, \ldots$ содержится в M.*

Например, множество вещественных чисел является суммой множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел, множество натуральных чисел является суммой множества четных чисел и множества нечетных чисел.

Теорема 2. *Сумма счетного множества конечных множеств есть счетное множество.*

Действительно, пусть $M_1, M_2, \ldots M_k, \ldots$ суть конечные множества и содержат соответственно $n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots$ элементов. Обозначим элементы множества M_1 символами $a_1, a_2, \ldots a_{n_1}, \ldots$, элементы множества M_2 символами $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots a_{n_1+\bar{n}_2}$ (если M_2 не содержит элементов из M_1, то $\bar{n}_2 = n_2$; если M_2 содержит только элементы из M_1, то $\bar{n}_2 = 0$) и т. д.

Множество элементов $a_1, a_2, \ldots a_m, \ldots$ очевидно счетно и является суммой множеств $M_1, M_2, \ldots M_k, \ldots$

В качестве полезного примера применения доказанной теоремы приведем утверждение:

Теорема 3. *Множество рациональных чисел* (положительных и отрицательных) *счетно.*

Назовем высотой рационального числа $\frac{a}{b}$ (a, b—целые) число $|a| + |b|$ и заметим, что множество рациональных чисел с данной высотой n конечно. Так, например, только числа $\pm\frac{3}{1}$, $\pm\frac{2}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$ имеют высоту 4.

Обозначим через M_1 множество рациональных чисел с высотой 1 $\left(\text{число } \frac{0}{1}\right)$, через M_2—множество чисел с высотой 2 $\left(\text{числа } \pm\frac{1}{1}\right)$, через M_3—множество чисел с высотой 3, ..., через M_n—множество чисел с высотой n и т. д.

Множество всех рациональных чисел является суммой множеств $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$ и, в силу теоремы 2, оно счетно.

Заметим, что множество положительных рациональных чисел можно „перенумеровать" по схеме, приводимой на рис. 2, пропуская, при обходе таблицы по пути, указанному стрелками, уже перенумерованные числа.

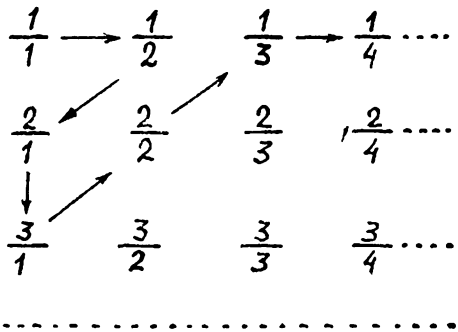

Рис. 2.

Если мы приписывали бы положительным рациональным числам только номера 2, 4, 6, ..., а нулю и отрицательным рациональным числам нумера 1, 3, 5, ..., то мы перенумеровали бы все множество рациональных чисел.

Теорема 2 допускает важное обобщение.

Теорема 4. *Сумма счетного множества счетных множеств является счетным множеством. В частности, сумма конечного числа счетных множеств есть счетное множество.*

Обозначим элементы счетного множества M_1 через $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots$, элементы счетного множества M_2 через $a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots$ и вообще — элементы счетного множества M_n через $a_{1n}, a_{2n}, \ldots$. Назовем высотой элемента a_{mn} число $m+n$.

Сумма множеств $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$ состоит из элементов с высотой 2, элементов с высотой 3 и т. д., то-есть является счетной суммой конечных множеств и как таковая, по теореме 2, является счетным множеством.

$$\begin{array}{llll}
a_{11} \rightarrow & a_{21} & a_{31} \rightarrow & \ldots \\
a_{21} & a_{22} & a_{32} & \ldots\ldots \\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots\ldots \\
a_{14} & a_{24} & a_{34} & \ldots\ldots
\end{array}$$

Рис. 3.

Справедливость нашей теоремы следует также из возможности нумерации по схеме, указанной на рис. 3. В качестве полезного примера применения теоремы 4 (и теорем 1, 3) докажем утверждение:

Теорема 5. *Множество иррациональных чисел, содержащихся между любыми двумя данными числами a, b, несчетно.*

Действительно, если бы это множество было счетным, то множество всех вещественных чисел, содержащихся между числами a, b, как сумма двух счетных множеств (множества рациональных чисел, счетность которого установлена, и множества иррациональных чисел) было бы счетным, но это противоречило бы теореме I.

§ 5. Существование трансцендентных чисел. В настоящем параграфе мы докажем, что существуют трансцендентные числа, и что множество таких чисел несчетно, в то время как множество алгебраических чисел счетно.

Теорема 6. *Множество алгебраических чисел счетно.*

Действительно, мы можем рассматривать множество всех алгебраических чисел как сумму множества M_1 алгебраических чисел, являющихся корнями уравнеиий первой степени с целыми коэффициентами, множества M_2 алгебраических чисел, являющихся корнями уравнений второй степени и т. д.

Таким образом, множество всех алгебраических чисел является суммой счетного множества множеств M_1, $M_2, \ldots$ Наша теорема, ввиду теоремы 4, будет доказана, если мы докажем счетность каждого из множеств $M_1, M_2, \ldots M_k, \ldots$

Рассмотрим множество M_k. Назовем высотой уравнения

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x + a_k = 0 \qquad (1)$$

число

$$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_k|. \qquad (2)$$

Так как числа $a_0, a_1, \ldots a_k$ целые, то можно найти лишь конечное число их, чтобы сумма (2) была равна заданному числу N. Это означает, что множество уравнений (1) с высотой, равной 1, конечно, множество уравнений (1) с высотой, равной 2, конечно и т. д.

Так как уравнение (1) имеет не более чем k различных корней, то конечны множества алгебраических чисел, удовлетворяющих уравнениям k-ой степени с высотой $1, 2, \ldots$ Следовательно, множество M_k является суммой счетного множества конечных множеств, и потому оно счетно.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Теорема 7. *Множество трансцендентных чисел несчетно.* Более того, множество вещественных трансцендентных чисел несчетно.

Действительно, множество всех вещественных чисел, по теореме 1, несчетно и является суммой счетного множества алгебраических чисел и множества трансцендентных чисел. Из теоремы 4 немедленно следует, что последнее множество не может быть счетным.

Таким образом, с помощью весьма простых средств и соображений, мы установили существование бесконечного множества трансцендентных чисел. Приведенное нами доказательство было найдено в 1873 году Г. Кантором*.

§ 6. О построениях с помощью циркуля и линейки. Мы намерены показать, что построение с помощью циркуля и линейки отрезка данной длины l возможно тогда и только тогда, когда l является корнем алгебраического уравнения определенного вида и, следовательно, заведомо невозможно, если l трансцендентное число. Доказательству соответствующей теоремы мы предпошлем несколько замечаний.

Замечание I. В декартовой системе координат графиком уравнения

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

* Родился в Петербурге в 1845 году, там же получил начальное образование.

где A, B, C — коэффициенты, не зависящие от x, y, является прямая.

Наоборот, уравнение любой прямой в декартовых координатах можно привести к виду (1), то-есть координаты любой точки данной прямой удовлетворяют одному и тому же уравнению вида (1). Этот факт мы считаем известным из школьного курса.

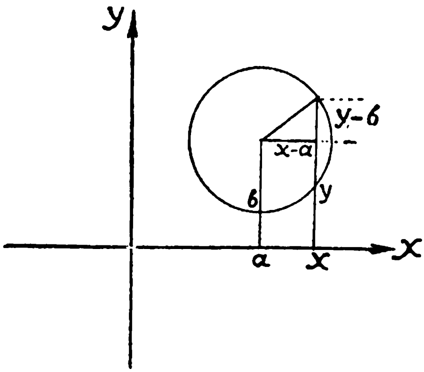

Рис. 4.

Замечание II. Из теоремы Пифагора следует (см. рис. 4), что координаты x, y любой точки на окружности радиуса r с центром в точке (a, b) удовлетворяют зависимости

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \tag{2}$$

то-есть зависимости вида

$$x^2+y^2+Kx+Ly+M=0. \tag{3}$$

Так как уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$\left(x+\frac{K}{2}\right)^2+\left(y+\frac{L}{2}\right)^2=\frac{K^2+L^2-4N}{4}, \tag{4}$$

и выражение

$$\left(x+\frac{K}{2}\right)^2+\left(y+\frac{L}{2}\right)^2$$

равно квадрату расстояния точки (x, y) от точки $\left(-\frac{K}{2}, -\frac{L}{2}\right)$, то графиком уравнения (3), в прямоугольных декартовых координатах, является геометрическое место точек равноудаленных от даной точки, то-есть окружность*.

* Предполагается, что $I=\frac{K^2+L^2-4N}{4}>0$. Если $I=0$, то окружность вырождается в точку; если $I<0$, то x, y не могут оба быть вещественными.

Таким образом, уравнение (3) является уравнением окружности, и наоборот, графиком зависимости (3) является окружность.

Замечание III. Совместное решение уравнений (1) и (3) означает нахождение точки, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям, то-есть нахождение точки, лежащей на прямой и окружности—точки пересечения этих двух линий.

Наоборот, для того чтобы аналитически найти точку пересечения прямой и окружности надо решить совместно уравнения (1) и (3) этих линий.

Определение 7. *Вещественное число α называется: числом типа A_1, если оно является корнем некоторого квадратного уравнения (или уравнения первой степени) с рациональными коэффициентами; числом типа A_2, если оно является корнем некоторого квадратного уравнения (или уравнения первой степени) с вещественными коэффициентами типа A_1; . . . ; числом типа A_k, если оно является корнем некоторого квадратного уравнения (или уравнения первой степени) с вещественными коэффициентами типа A_{k-1}.*

Например, числа $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ суть числа типа A_1, так как они являются корнями уравнения

$$x^2-2x-1=0,$$

числа $-2+\sqrt{3-\sqrt{2}}$, $-2-\sqrt{3-\sqrt{2}}$ суть числа типа A_2, так как они являются корнями уравнения

$$x^2+4x+(1+\sqrt{2})=0. \tag{5}$$

Теорема 8. *Каждое число α типа A_k, где k — вполне определенное (конечное) число является алгебраическим числом.*

Действительно, число α является корнем квадратного уравнения, коэффициенты которого получаются из рациональных чисел с помощью применения некоторого числа рациональных арифметических действий и некоторого числа извлечений квадратного корня. Освобождаясь известными из школьного курса способами от иррациональностей, мы прийдем к уравнению быть может высокой степени, но алгебраическому с *рацио-*

нальными коэффициентами, для которого α является корнем.

Например, числа $-2+\sqrt{3-\sqrt{2}}$, $-2-\sqrt{3-\sqrt{2}}$ являются корнями уравнения

$$x^4+8x^3+18x^2+8x-1=0,$$

которое получается из уравнения (5), если в нем освободится от иррациональности.

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема 9. *Отрезок длины α можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда α является числом типа A_k, где k — конечное число.*

Следствие. *Если α—трансцендентное число, то построение отрезка длины α с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Как известно из школьного курса, если вещественное число a является корнем квадратного уравнения, то построение с помощью циркуля и линейки отрезка длины a наверно возможно, если возможно такое построение для отрезков с длинами, равными коэффициентам уравнения. Поэтому всегда можно построить с помощью циркуля и линейки отрезок с длиной α, если α — число типа A_1. Но тогда построение возможно и в том случае, когда α — число типа A_2 и т. д.

Следовательно, если α число типа A_k (k—конечно), то построение с помощью циркуля и линейки отрезка с длиной α возможно.

Допустим теперь, что можно построить с помощью циркуля и линейки отрезок с длиной α и докажем, что α является числом типа A_k, где k — конечное число.

Действительно, возможность построения нашего отрезка означает, что его концы можно найти путем проведения *конечного числа* прямых, описывания *конечного числа* окружностей и нахождения точек пересечения получаемых линий. Иными словами, построение отрезка с помощью циркуля и линейки является конечной цепью построений, каждым звеном которой является проведение прямой через две заданные точки и проведение окружности данного радиуса с центром в данной точке. При этом точки, через которые проводится прямая, центр и радиус окружности должны определяться предыдущими построениями. Следовательно, первым звеном упомянутой цепи построений является проведение прямых через точки с рациональными координатами, окружностей с радиусами рациональной длины и центрами с рациональными координатами и нахождение пересечения этих линий. Уравнения таких прямых и окружностей будут, как легко сообразить, содержать лишь рациональные коэффициенты. Следовательно, координаты их точек пересечения будут числами типа

Второе звено нашей цепи построений приведет к числам типа A_2 и т. д. Наконец, последнее звено приводит к числу α, и оно должно, таким образом, принадлежать некоторому типу A_k.

Наша теорема, таким образом, доказана полностью.

§ 7. Исторические замечания. Одной из самых древших задач, занимавших умы многих математиков и, еще больше, умы людей слабо знакомых с математикой, в течение веков была задача о квадратуре круга. Задача заключалась в следующем: с помощью циркуля и линейки построить квадрат равновеликий данному кругу. так как при радиусе, равном единице, площадь круга равна π, то задача сводится к построению отрезка с длиной π, потому что, вообще, как известно из школьного курса, если возможно построение отрезка с длиной a, то возможно и построение отрезка с длиной a^2 и наоборот.

Простота формулировки задачи являлась вызовом математике и математикам, она же соблазняла и нематематиков. Последних часто прельщали и мнимые "выгоды", которые они по неведению ждали от решения задачи.

Петербургский академик Л. Эйлер (1707—1787) первый пришел к убеждению, что задача о квадратуре круга невозможна и притом высказал предположение, что число π не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению с рациональными коэффициентами. Таким образом, Эйлер первый высказал предположение о существовании трансцендентных чисел и о трансцендентности числа π. Кстати сказать, обозначение отношения длины окружности к диаметру буквой π было найдено Эйлером. Им же был введен термин „трансцендентность".

Предположение Эйлера о существовании трансцендентных чисел было строго доказано впервые лишь в 1844 году французским математиком Лиувиллем, а трансцендентность числа π (и, следовательно, невозможность квадратуры круга) была доказана лишь в 1882 году.

Лиувилль доказал существование трансцендентных чисел, установив следующий достаточный, но не необходимый, признак трансцендентности: если число α иррационально и существуют три бесконечно-возрастающие последовательности целых чисел

$$\begin{array}{ll} p_1, p_2, \ldots p_k, \ldots & (p_k \to \infty, \text{ когда } k \to \infty) \\ q_1, q_2, \ldots q_k, \ldots & (q_k \to \infty, \text{ когда } k \to \infty) \\ m_1, m_2, \ldots m_k, \ldots & (m_k \to \infty, \text{ когда } k \to \infty) \end{array}$$

такие, что

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{C}{q_k^{m_k}}$$

то α — трансцендентное число.

Пользуясь этим признаком, можно, например, доказать трансцендентность числа

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2!}} + \frac{1}{2^{3!}} + \cdots + \frac{1}{2^{k!}} + \ldots$$

Доказательство признака Лиувилля не элементарно. Кроме того, из него вытекает существование трансцендентных чисел, но он не дает никаких указаний о характере множества этих чисел.

Приведенное нами доказательство существования трансцендентных чисел Г. Кантора вполне элементарно и к тому же оно устанавливает несчетность множества трансцендентных чисел. Однако, доказательство Кантора является только доказательством существования, без указания хотя бы одного конкретного числа, которое являлось бы трансцендентным.

Применимость признака Лиувилля весьма ограничена. В частности, с помощью этого признака не удалось доказать трансцендентность числа π и числа

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Трансцендентность числа e была доказана лишь в 1873 году (Эрмит), а трансцендентность числа π, как уже упоминалось, в 1882 году (Линдеман) методами, которые носят частный характер и неприменимы к доказательству трансцендентности других чисел.

Замечательные результаты общего характера были получены советскими математиками А. О. Гельфондом (родился в 1906 году, лауреат Сталинской премии, член-корреспондент Академии наук СССР) и Р. О. Кузьминым (родился в 1891 году, умер в 1950 году, член-корреспондент Академии наук СССР).

§ 8. Результаты А. О. Гельфонда и Р. О. Кузьмина. В 1900 году, в докладе на всемирном конгрессе математиков, один из крупнейших математиков последней четверти XIX века и первой четверти XX века Д. Гильберт сформулировал 23 математические проблемы, решение которых требовало разработки новых и значительного усовершенствования старых методов в математике. В то время (1900 год) казалось, что подхода к разрешению проблем Гильберта нет. Одной из наиболее трудных проблем Гильберта была следующая (седьмая):

Пусть α — любое алгебраическое, отличное от единицы число, а β — любое алгебраическое, нерациональное число. Будет ли алгебраическим или трансцендентным число α^β? В частности, являются ли трансцендентными числа* $2^{\sqrt{2}}$ и e^π? В течение тридцати лет эта проблема не поддавалась решению, хотя теорией трансцендентных чисел занимались многие. Заметим, кстати, что значительные результаты в этой теории были получены одним из старейших советских математиков Д. Д. Мордухай-Болтовским (Ростов — Пятигорск, скончался в 1952 году).

В 1929—1930 годах московский математик Александр Осипович Гельфонд показал, что если α — алгебраическое (отличное от 0 и 1) число, а β — мнимое иррациональное число, подчиненное еще одному добавочному условию (так называемая квадратичная иррациональность), то α^β — трансцендентно. Это было значитель-

---

* В следующей главе будет сказано, как определяются степени с иррациональными и мнимыми показателями и будет показано, что $e^\pi = (-1)^{-i}$.

ным продвижением в решении проблемы Гильберта, но еще не полным решением. В частности, полученный результат еще не давал ответа на вопрос о числах $2^{\sqrt{2}}$ и e^{π}.

В том же, 1930 году, ленинградский математик Родион Осиевич Кузьмин показал, что требование мнимости показателя β излишне. Тем самым была установлена трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$.

Наконец, в 1934 году, пользуясь очень сложными методами современного математического анализа, А. О. Гельфонд полностью разрешил седьмую проблему Гильберта. Заметим, что ряд других, тоже очень трудных, проблем Гильберта также были разрешены советскими математиками — С. Н. Бернштейном Н. Г. Чеботаревым, Л. С. Понтрягиным.

Глава II

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. Некоторые сведения из теории пределов. Напомним следующие определения:

Определение 1. *Число a называется пределом числовой последовательности*

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots, \tag{1}$$

если для любого положительного числа ε можно показать число N такое, что

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

при всяком n, удовлетворяющем условию $n \geqslant N$. Обычна запись

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Определение 2. *Число A называется пределом функции $f(x)$ при x равном a, если для любого положительного числа ε можно указать положительное число η такое, что*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{2}$$

при всяком значении x, удовлетворяющем условию

$$|x - a| < \eta.$$

Пользуются записями

$$A = \lim_{x \to a} f(x), \quad A = \lim_{x = a} f(x)$$

Замечание. Записи

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x), \qquad A = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

означают, что неравенство (2) имеет место, соответственно, при

$$x > M, \quad x < -M,$$

где M — некоторое положительное число, определяемое заданным числом ε.

Из школьного курса математики известны следующие теоремы о пределах:

1. *Если существуют пределы слагаемых и число слагаемых фиксировано, то существует предел суммы, и он равен сумме пределов слагаемых.* То-есть

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n + \cdots + k_n) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n + \cdots + \lim_{n \to \infty} k_n,$$

$$\lim_{x \to a} \{f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)\} =$$

$$= \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + \cdots + \lim_{x \to a} f_m(x).$$

2. *Если существуют пределы сомножителей и число сомножителей фиксировано, то существует предел произведения, и он равен произведению пределов сомножителей.* То-есть

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n \cdots k_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n \cdots \lim_{n \to \infty} k_n,$$

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) f_2(x) \cdots f_m(x)] =$$

$$= \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \cdots \lim_{x \to a} f_m(x).$$

В частности, если α — постоянная, то

$$\lim_{n \to \infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n \to \infty} a_n, \quad \lim_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x).$$

3. *Если существуют пределы членов отношения и предел знаменателя отличен от нуля, то существует предел частного, и он равен частному пределов членов отношения.* То-есть

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}; \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}.$$

4. *Предел величины, заключенной между двумя величинами, имеющими общий предел A, существует и равен A.* То-есть, если для всех значений n, начиная с некоторого,

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = A,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} c_n = A.$$

Аналогично, если для любого, достаточно близкого a, значения x

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant F(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} F(x) = A,$$

то

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = A.$$

5. *Если* x_n *ограниченная величина* и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$,

то

$$\lim_{n \to \infty} x_n y_n = 0.$$

В качестве полезного для нас в дальнейшем примера докажем, что для любого значения x, не зависящего от n,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Действительно, если r целое число и $r+1>2|x|$, то

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\frac{|x|^r}{r!}\cdot\frac{|x|^{n-r}}{(r+1)(r+2)\ldots n}<$$

$$<\frac{|x|^r}{r!}\frac{|x|^{n-r}}{(r+1)^{n-r}}=\frac{|x|^r}{r!}\left(\frac{|x|}{r+1}\right)^{n-r}<\frac{|x|^r}{r!}\cdot\frac{1}{2^{n-r}}$$

Но величина $\frac{|x|^r}{r!}$ не зависит от n, а $\frac{1}{2^{n-r}}\to 0$, если $n\to\infty$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^r}{r!}\cdot\frac{1}{2^{n-r}}=0$$

и тем более

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.$$

В дальнейшем нам понадобятся еще некоторые факты из теории пределов, которые не входят в школьный курс математики и поэтому будут нами доказаны.

Теорема 1. *Каждая, ограниченная сверху (снизу), неубывающая (невозрастающая) последовательность, имеет предел.*

Ограниченность последовательности (1) сверху означает существование такого числа M, что при любом n

$$a_n<M.$$

Аналогично определяется ограниченность снизу.

Последовательность называется неубывающей, если при $n>m$

$$a_n\geqslant a_m$$

и невозрастающей, если

$$a_n\leqslant a_m.$$

Доказательство теоремы вполне элементарно, но требует знания теории иррациональных чисел. Мы проведем это доказательство, исходя сначала из определения иррационального числа с помощью сечения в области рациональных чисел. Для определенности будем предполагать последовательность неубывающей и ограниченной сверху.

Отнесем к правому классу B каждое рациональное число, большее *любого* элемента последовательности

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots,$$

а к левому классу A — все остальные рациональные числа, то-есть каждое рациональное число не большее *хотя бы одного* элемента последовательности.

В силу ограниченности последовательности сверху оба класса существуют. Ясно, что любое число из класса A меньше каждого числа из класса B и что любое рациональное число находится в одном из классов A, B. Таким образом классы A, B определяют сечение в области рациональных чисел, то-есть определяют некоторое число α, которое не меньше любого числа из класса A и не больше любого числа из класса B. Докажем, что

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Действительно, пусть задано любое число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется в нашей последовательности элемент a_k такой, что

$$\alpha - a_k < \varepsilon, \tag{3}$$

так как, если бы такого элемента не было, то-есть при любом k было бы

$$\alpha - a_k \geqslant \varepsilon$$

и тем более

$$\alpha - a_k > \frac{\varepsilon}{2},$$

то мы имели бы

$$a_k < \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha$$

при любом k, но тогда α не отделяет класс A от класса B.

Если неравенство (3) справедливо для некоторого k, то, так как последовательность неубывающая, неравенство

$$\alpha - a_n < \varepsilon$$

справедливо при любом $n \geqslant k$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha.$$

Если исходить из представления вещественных чисел с помощью бесконечных десятичных дробей, то доказательство теоремы можно провести следующим образом.

Мы можем считать, что наша последовательность ограничена сверху *целым* числом M (иначе мы заменили бы M ближайшим целым числом, большим M). Пусть m — ближайшее целое число, меньшее чем a_1. Таким образом

$$m \leqslant a_n \leqslant M, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Рассмотрим числа

$$m, m+1, m+2, \ldots M-1, M.$$

Пусть $c+1$ является первым из них, которое не меньше любого элемента нашей последовательности (в крайнем случае: $c+1 = M$). Следовательно, существует элемент a_k такой, что

$$a_k \geqslant c.$$

Но тогда $a_n \geqslant c$ при любом $n \geqslant k$.
Итак

$$c \leqslant a_n \leqslant c+1, \; n \geqslant k.$$

Теперь рассмотрим числа

$$c; \; c, 1; \; c, 2; \ldots; \; c, 9; \; c+1; \qquad (c, \alpha = c + 0, \alpha).$$

Повторив предыдущее рассуждение, прийдем к выводу, что существуют числа c, α_1 и $c, \alpha_1 + 0{,}1 = c, \overline{\alpha_1 + 1}$ и такое число k_1, что

$$c, \alpha_1 \leqslant a_n \leqslant c, \overline{\alpha_1 + 1} \text{ при } n \geqslant k_1.$$

После этого рассмотрим числа

$$c, \alpha_1; c, \alpha_1 1; \; c, \alpha_1 2; \ldots; \; c, \alpha_1 9; c, \overline{\alpha_1 + 1}$$

и прийдем к заключению, что существуют числа $c, \alpha_1 \alpha_2$ и $c, \alpha_1 \alpha_2 + 0{,}01 = c_1, \alpha_1 \overline{\alpha_2 + 1}$ и такое число k_2, что

$$c, \alpha_1 \alpha_2 \leqslant an \leqslant c, \alpha_1 \overline{\alpha_2 + 1}, \text{ при } n \geqslant k_2.$$

Продолжая эти рассуждения, мы определим бесконечную десятичную дробь

$$a = c, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots,$$

для которой

$$c, \alpha_1 \ldots \alpha_m \leqslant a \leqslant c, \alpha_1 \ldots \overline{\alpha_m + 1},$$

причем $c, \alpha_1 \alpha_2, \ldots \alpha_m \leqslant a_n \leqslant c, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \overline{\alpha_m + 1}$, при любом $n \geqslant k_m$.

Следовательно,

$$|a_n - a| \leqslant c, \alpha_1 \ldots \overline{\alpha_m + 1} - c, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \frac{1}{10^m} < \varepsilon, \ n \geqslant k_m,$$

если взять m достаточно большим. Значит

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Теорема 2. *Если $a > 0$ и рациональные числа*

$$h_1, h_2, \ldots h_m, \ldots \tag{4}$$

образуют последовательность, для которой

$$\lim_{n \to \infty} h_n = 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} a^{h_n} = 1. \tag{5}$$

Сначала докажем, что

$$\lim_{m \to \infty} a^{\frac{1}{m}} = 1, \qquad m - \text{целое}. \tag{6}$$

Пусть $a > 1$. Тогда

$$a^{\frac{1}{m}} = 1 + \alpha_m, \quad \alpha_m > 0$$

и поэтому

$$a = (1 + \alpha_m)^m = 1 + m\alpha_m + \ldots,$$

где ненаписанные слагаемые положительны. Следовательно,

$$a > 1 + m\alpha_m; \qquad \alpha_m < \frac{a - 1}{m}.$$

Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = 0$$

и поэтому

$$\lim_{m\to\infty} a^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Если $a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по доказанному

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = 1.$$

По теореме о пределе частного, имеем

$$\lim_{m\to\infty} a^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}} = 1.$$

При $a = 1$ наше утверждение очевидно.

Теперь докажем, что справедливо равенство (5). Действительно, пусть

$$|h_n| = \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{\frac{q_n}{p_n}}$$

и пусть m ближайшее к $\frac{q_n}{p_n}$ целое число, не больше чем $\frac{q_n}{p_n}$. Тогда

$$m \leqslant \frac{q_n}{p_n} \leqslant m+1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{m+1} \leqslant |h_n| \leqslant \frac{1}{m}$$

и $m \to \infty$, если $n \to \infty$.

При $a > 1$ и $h_n > 0$, имеем*

$$a^{\frac{1}{m+1}} \leqslant a^{h_n} \leqslant a^{\frac{1}{m}}$$

При $a < 1$, наоборот,

$$a^{\frac{1}{m+1}} \geqslant a^{h_n} \geqslant a^{\frac{1}{m}}.$$

В обоих случаях на основании равенства (6) и теоремы о пределе переменной, заключенной между двумя переменными, имеющими общий предел, получим

$$\lim_{n \to \infty} a^{h_n} = 1.$$

Доказанная теорема позволяет ввести понятие о степени положительного числа с *иррациональным* показателем.

Определение 3. *Пусть α — иррациональное число и*

$$r_1, \ r_2, \ldots r_n, \ldots \tag{7}$$

последовательность рациональных чисел, для которой

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \alpha. \tag{7_1}$$

Тогда, по определению

$$a^{\alpha} = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} \tag{8}$$

(последовательность (7) образуют, например, числа a; a, α_1; $a, \alpha_1 \alpha_2$; ..., если $\alpha = a, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$).

Чтобы можно было принять такое определение, естественность его очевидна, надо доказать, что предел (8) существует и не зависит от выбора последовательности (7).

Если последовательность (7) неубывающая, то последовательность

$$a^{r_1}, \ a^{r_2}, \ldots \ a^{r_n}, \ldots \tag{9}$$

---

* Предоставляем читателю рассмотреть случай $h_n < 0$.

не убывает при $a \geqslant 1$ и не возрастает при $a \leqslant 1$. В первом случае —

$$a^{r_n} < a^r,$$

где r — любое рациональное число, большее α, во втором случае —

$$a^{r_n} \geqslant a^{r_1}.$$

Значит, по теореме 1, в обоих случаях существует предел последовательности (9), то-есть, существует предел (8).

Теперь докажем независимость предела (8) от выбора последовательности (7). Пусть последовательность рациональных чисел

$$s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$$

отлична от последовательности (7), но имеет тот же предел α

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \alpha.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} (r_n - s_n) = \lim_{n \to \infty} r_n - \lim_{n \to \infty} s_n = \alpha - \alpha = 0 \qquad (9)$$

и

$$\lim_{n \to \infty} (a^{r_n} - a^{s_n}) = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}(a^{r_n - s_n} - 1) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \to \infty} (a^{r_n - s_n} - 1) = 0, \qquad (10)$$

так как

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = a^{\alpha},$$

а на основании (9) и теоремы 2

$$\lim_{n \to \infty} (a^{r_n - s_n} - 1) = 0.$$

Из (10) следует, что предел

$$\lim_{n \to \infty} a^{s_n}$$

существует и

$$\lim_{n \to \infty} a^{s_n} = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = a^{\alpha}.$$

Замечание 1. Так как о последовательности $s_1, \ldots s_n, \ldots$ мы не предполагали, что она неубывающая (невозрастающая), то из наших последних рассуждений следует, что в определении 3 обязательно лишь условие (7_1).

Замечание 2. Из тех же рассуждений следует, что

$$\lim_{n \to \infty} a^{s_n} = a^{\alpha},$$

каковы бы ни были числа s_n, рациональны или нет, лишь бы

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \alpha.$$

§ 2. Показательная функция. Число *e*.

Определение 4. *Функция*

$$y = a^x$$

называется показательной.

При $a > 0$ эта функция определена для любого вещественного значения x, то-есть, каждому x, рациональному или иррациональному, соответствует вполне определенное число a^x.

Особую роль в математике (и приложениях) выполняет показательная функция с основанием, которое, следуя Л. Эйлеру, обозначают буквой e и которое является пределом последовательности

$$1 + 1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots, \tag{1}$$

то-есть, по определению

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

n — целое положительное число. Прежде всего, нам надо доказать, что рассматриваемый предел существует.

Для этого заметим, что по формуле Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+ \qquad (2)$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

В последнем выражении при возрастании n увеличивается число слагаемых и возрастают сами слагаемые. Поэтому последовательность (1) является *возрастающей*. В то же время, из (2) следует

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}<$$
$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}<$$
$$<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

Следовательно, последовательность (1) *ограничена* сверху.

Из теоремы 1 § 1 следует, что рассматриваемый нами предел существует.

Позже мы покажем, как можно быстро и с любой точностью вычислить число e.

Исторически последовательность (1) появилась вместе с логарифмами *. Особая роль числа e и функции e^x

* См., например, Л. Я. Гиршвальд. История открытия логарифмов. Издательство ХГУ, Харьков, 1952.

в математике и приложениях связана с тем, что эта функция обладает следующим замечательным свойством: скорость изменения функции e^x относительно x равна самой функции e^x. Этот факт будет нами доказан ниже (в § 4, где будет также указано, что надо понимать под скоростью изменения функции). Очень полезными, при вычислении пределов, являются следующие утверждения.

Лемма 1. *Каким бы ни было n, лишь бы $|n| \to \infty$, имеем*

$$\lim_{|n| \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Действительно, пусть $n > 0$. Обозначим через m ближайшее к n целое число, не большее чем n. Тогда

$$m \leqslant n < m + 1$$

и поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Но

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m = \lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} : \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)\right] = e;$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right) = e.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Если $n < 0$ (но $|n| \to \infty$), то при обозначении $n = -k$ $k > 0$), получим:

$$\lim_{|n| \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-k} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{-k} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{k-1}\right)^k =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right) = e.$$

Таким образом, лемма доказана полностью. Очевидно, что можно заменить формулировку леммы следующей, часто более удобной, формулировкой:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Лемма 2. Если a не зависит от x, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+ax\right)^{\frac{1}{x}}=e^a \quad \text{или:} \lim_{|n|\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a .$$

Так как

$$\left(1+ax\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\left(1+ax\right)^{\frac{1}{ax}}\right]^a,$$

то при целом a лемма немедленно следует из теоремы о пределе произведения. Если a не целое, то доказательство не очень усложняется. Мы его опускаем.

Весьма важным свойством многих функций является свойство непрерывности, которое заключается в следующем:

Определение 5. *Функция* $f(x)$ *называется непрерывной при* $x=x_0$ *(в точке* $x=x_0$*), если существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и притом*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

то-есть, если разность

$$f(x)-f(x_0)$$

сколь угодно мала одновременно с разностью

$$x-x_0.$$

Легко доказать, что *показательная функция непрерывна* при любом значении x. Действительно,

$$a^x-a^{x_0}=a^{x_0}(a^{x-x_0}-1).$$

Возмем рациональное число $h > 0$ столь малым, чтобы имело место неравенство

$$|a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

Это возможно ввиду теоремы 2 (§ 1). Затем, пусть

$$|x - x_0| < h.$$

Тогда

$$|a^x - a^{x_0}| < a^{x_0} |a^h - 1| < \varepsilon,$$

чем и доказана непрерывность функции a^x.

Замечание. Логарифмы, вычисленные при основании e, называются натуральными и обозначаются символом $\ln N$.

Так как

$$N = a^{\log_a N}, \quad N = e^{\ln N},$$

то

$$a^{\log_a N} = e^{\ln N}.$$

Отсюда следует

$$\log_a N \cdot \ln a = \ln N; \quad \log_a N = \ln N \cdot \log_a e,$$

то-есть

$$\log_a N = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln N; \quad \ln N = \frac{1}{\log_a e} \cdot \log_a N.$$

Эти формулы устанавливают связь между логарифмами, вычисленными при некотором основании a и натуральными логарифмами.

§ 3. Разложение функции e^x в степенной ряд. Иррациональность числа e.

Определение 6. *Если числовая последовательность*

$$a_1, \ a_1 + a_2, \ a_1 + a_2 + a_3, \ldots, \ a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

имеет предел a, то пишут

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

и говорят, что число a представлено рядом

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

или, что ряд (1) сходится и имеет суммой число a.

Определение 7. *Если при некоторых значениях x последовательность*

$$a_0,\ a_0+a_1x,\ a_0+a_1x+a_2x^2, \dots$$

$$a_0+a_1x+\dots+a_nx^n, \dots$$

имеет предел $f(x)$, то говорят, что при этих значениях x сходится степенной ряд

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

и что суммой этого ряда является $f(x)$. Это записывают так

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

Теорема 3. *При любом значении x*

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Применяя формулу Ньютона, имеем

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+n\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{n^2}+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\dots r}\frac{x^r}{n^r}+\dots+\frac{x^n}{n^n}=$$

$$=1+v_1+v_2+\cdots+v_r+\cdots+v_n,$$

где

$$v_r=\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\dots r}\frac{x^r}{n^r}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\ \dots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\frac{x^r}{r!}.$$

Заметим, что

$$v_{r+s}=v_r\ \frac{\left(1-\frac{r}{n}\right)\left(1-\frac{r+1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{r+s-1}{n}\right)}{(r+1)(r+2)\dots(r+s)}\ x^s. \quad (4)$$

Пусть $x>0$. Тогда из (4) следует

$$v_{r+s} < v_r\left(\frac{x}{r+1}\right)^s. \tag{5}$$

Полагая $n>r>x$, из (5) находим

$$v_{r+1}+v_{r+2}+\cdots+v_n<$$

$$<v_r\left[\frac{x}{r+1}+\frac{x^2}{(r+1)^2}+\cdots+\frac{x^{n-r}}{(r+1)^{n-r}}\right]<$$

$$<v_r\left[\frac{x}{r+1}+\frac{x^2}{(r+1)^2}+\cdots+\frac{x^{n-r}}{(r+1)^{n-r}}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{v_r x}{r+1-x}. \tag{6}$$

Сопоставив равенство (3) с неравенством (6), получим

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\frac{xv_r}{r+1-x}<1+v_1+v_2+\ldots+v_r<$$

$$<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{7}$$

При фиксированном r, будем неограниченно увеличивать n.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} v_r=\frac{x^r}{r!}$$

и по лемме 2 предыдущего параграфа

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=e^x,$$

то из (7) следует

$$e^x-\frac{x^{r+1}}{r!\,(r+1-x)}<1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}\leqslant e^x.$$

Последние неравенства имеют место при любом r. Увеличивая теперь r неограниченно, получим

$$\lim_{r \to \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}\right) = e^x,$$

то-есть

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots,$$

что и требовалось доказать.

Столь же элементарно доказывается справедливость (2) и при $x < 0$, но на этом мы уже останавливаться не будем.

Равенство (2) позволяет вычислять значения функции e^x с любой точностью и достаточно быстро. Мы ограничимся (для вычислительных задач этого достаточно), тем, что найдем с точностью до 0,00001 само число e.

Положив в (2) $x = 1$, получим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \tag{8}$$

Следовательно,

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \delta_n,$$

где

$$\delta_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right\} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots\right\} = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}.$$

В частности

$$\delta_9 < \frac{11}{10 \cdot 10!} = \frac{11}{3628800} < \frac{1}{300\,000} < 0{,}00001.$$

Таким образом, с точностью до 0,00001,

$$e \cong 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \cong 2{,}71828.$$

Из равенства (8) весьма просто следует

Теорема 4. *Число e — иррационально.*

Допустим противиое. Пусть

$$e = \frac{p}{q},$$

где p, q — целые числа.

Из равенства (8) получим тогда

$$\frac{p}{q} - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \frac{1}{(q+1)!} + \\ + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots = \delta_q.$$

После умножения на $q!$, найдем

$$p(q-1)! - \left\{2 \cdot q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + 1\right\} = q!\,\delta_q. \quad (10)$$

Выражение, стоящее в левой части последнего равенства, является *целым числом.* Что касается выражения, стоящего в правой части, то на основании (9)

$$q!\,\delta_q < q! \frac{q+2}{(q+1)!\,(q+1)} = \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1$$

и, следовательно, $q!\,\delta_q$ является *правильной дробью.* Таким образом, равенство (10) невозможно, и число e не может быть рациональным.

В заключение параграфа покажем, что

$$\lim_{x \to \infty} x^m e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0 \quad (11)$$

при любом конечном m. Это замечание дает представление о быстроте роста функции e^x и быстроте убывания функции e^{-x} при $x \to \infty$.

Равенство (11) следует из того, что

$$\frac{x^m}{e^x} = \frac{x^m}{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^m}{m!}+\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}+\dots} <$$

$$< \frac{x^m}{\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}} = \frac{(m+1)!}{x}.$$

Но при конечном (пусть даже очень большом) m и $x \to \infty$, имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(m+1)!}{x} = 0.$$

Следовательно, подавно

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0.$$

§ 4. Скорость изменения функции e^x.

Определение 8. *Производной функции* $f(x)$ *называется предел*

$$f'(x) = \lim_{|h| \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{1}$$

если он существует.

Функцию $f'(x)$ можно считать *скоростью* изменения функции $f(x)$, так как, если $f(x)$ означает путь, пройденный точкой, движущейся прямолинейно, за время x, то $f(x+h)-f(x)$ есть путь, пройденный точкой за время $(x+h)-x=h$, отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

является средней скоростью за время h (начиная с момента x), а предел (1)—скоростью в момент x. Например, если

$$f(x) = \frac{a}{2}x^2$$

(свободное падение), то

$$f'(x)=\lim_{|h|\to 0}\frac{\frac{a}{2}(x+h)^2-\frac{a}{2}x^2}{h}=$$

$$=\lim_{|h|\to 0}(2x+h)\frac{a}{2}=ax$$

— известному выражению для скорости свободно падающего, с ускорением a, тела.

Теорема 5. *Скорость изменения функции e^x равна e^x.*

То-есть

$$(e^x)'=e^x. \tag{2}$$

Предварительно докажем, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1. \tag{3}$$

Действительно, из равенства

$$e^h=1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\frac{h^4}{4!}+\cdots$$

следует

$$\frac{e^h-1-h}{h}=\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\frac{h^3}{4!}+\cdots$$

и поэтому

$$\left|\frac{e^h-1}{h}-1\right|<\frac{|h|}{2}+\frac{|h|^2}{2^2}+\frac{|h|^3}{2^3}+\cdots=\frac{\frac{|h|}{2}}{1-\frac{|h|}{2}}.$$

Значит, если $h\to 0$, то

$$\frac{e^h-1}{h}-1\to 0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь имеем

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} =$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Таким образом, теорема доказана.

Легко сообразить, что нет надобности рассматривать показательные функции с основанием, меньшим единицы. Легко также видеть, что все установленное нами для функции e^x переносится на функцию a^x $(a > 1)$, *, так как

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{(x \ln a)}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots$$

Заметим лишь, что

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Читатель может это легко проверить.

Установленные нами свойства показательной функции [существование, непрерывность, возрастание (при

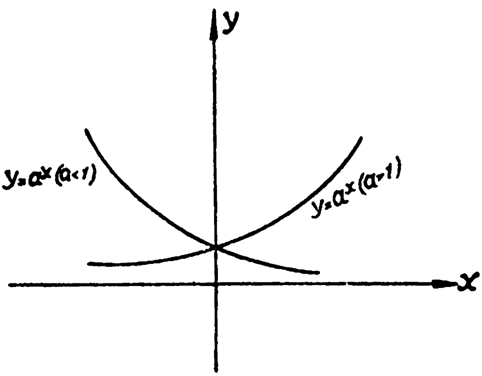

Рис. 5.

$a > 1$)] позволяют нам построить график этой функции. Он имеет вид, указанный на рис. 5. После этого становится очевидным, что каждое положительное число имеет логарифм при любом положительном основании.

---

* При $a < 1$ изменится формулировка замечания в конце § 3.

§ 5. Теорема сложения. Важнейшее свойство показательной функции, заключающееся в том, что

$$a^x \cdot a^y \equiv a^{x+y}$$

хорошо известно из школьного курса. При целых и при дробных рациональных показателях оно следует из определения степени, а так как

$$\lim_{h \to \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{h \to \infty} a^{s_n} = \lim_{h \to \infty} a^{r_n + s_n},$$

то оно верно для иррациональных показателей.

Приводимая ниже теорема показывает, что упомянутое свойство является характерным для показательной функции.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ непрерывна и при любых значениях x и y справедливо тождество*

$$f(x) \cdot f(y) \equiv f(x+y), \tag{2}$$

то функция $f(x)$, если она не равна тождественно нулю, является показательной функцией.

Введем обозначение

$$f(1) = a$$

и положим сначала в (2) $x = y$. Получим

$$f(2x) = [f(x)]^2.$$

Теперь положим $y = 2x$. Получим

$$f(3x) = f(x) \cdot f(2x) = [f(x)]^3.$$

По индукции имеем

$$f(nx) \equiv [f(x)]^n, \tag{3}$$

n — целое, положительное число.

Действительно, если

$$f(kx) = [f(x)]^k,$$

то из (2) следует

$$f[(k+1)x] = f(kx) \cdot f(x) = [f(x)]^{k+1}.$$

Положив в (3) $x = 1$, получим

$$f(n) = [f(1)]^n = a^n. \tag{4}$$

Теперь положим в (3) $x=\frac{m}{n}$. Получим

$$f(m)=\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n$$

и, принимая во внимание (4),

$$a^m=\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n.$$

Таким образом,

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=a^{\frac{m}{n}} \tag{5}$$

Положив в (2) $x=y=0$, найдем

$$[f(0)]^2=f(0)$$

и, следовательно*,

$$f(0)=1,$$

но тогда из того же равенства (2) следует

$$f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(-\frac{m}{n}\right)=f(0)=1,$$

а отсюда, принимая во внимание (5), получаем

$$f\left(-\frac{m}{n}\right)=a^{-\left|\frac{m}{n}\right|}. \tag{6}$$

Равенства (5) — (6) обнаруживают справедливость того, что

$$f(r_k)=a^{r_k} \tag{7}$$

для любого *рационального* числа r_k. Пусть α — иррациональное число, его можно положить равным пределу последовательности рациональных чисел

$$\alpha=\lim_{k\to\infty} r_k\ ,$$

---

* $f(0)\neq 0$, так как в противном случае было бы $f(x)f(-x)=0$ при любом x.

а в равенстве (7) перейти к пределу, полагая $k \to \infty$.

Ввиду *непрерывности* функции $f(x)$, получим

$$\lim_{k \to \infty} f(r_k) = f(\alpha)$$

и так как

$$\lim_{k \to \infty} a^{r_k} = a^{\alpha},$$

то

$$f(\alpha) = a^{\alpha}.$$

Наша теорема полностью доказана.

Замечание. В доказанной теореме речь шла, собственно говоря, о решении уравнения (2). Подобные уравнения называются функциональными и рассматривались еще Л. Эйлером. Уравнение

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \tag{8}$$

называется уравнением Эйлера. Предполагая функцию $f(x)$ непрерывной (или только монотонной), легко показать, что решением уравнения (8) является

$$f(x) = ax.$$

§ 6. Разложение в ряд функций $\sin x$, $\cos x$.

Мы установим некоторые леммы, полезные не только для нахождения разложения $\sin x$, $\cos x$ в ряд.

Лемма 1. $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$; $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Действительно,

$$|\cos x - 1| = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x^2}{4};$$

$$|\cos x - \cos x_0| = 2 \left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| <$$

$$< 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x - x_0}{2} \right|.$$

Следовательно,

$$\cos x - 1 \to 0, \text{ если } x \to 0,$$

$$\cos x - \cos x_0 \to 0, \text{ если } x \to x_0.$$

Следствие. Функция $\cos x$ непрерывна при любом значении x.

Столь же просто доказывается непрерывность $\sin x$.

Лемма 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Мы можем считать, что $x < \frac{\pi}{2}$. Тогда (см. рис. 6), сравнивая площади треугольника OAB, сектора $OAMB$ и треугольника ONP, которые равны, соответственно,

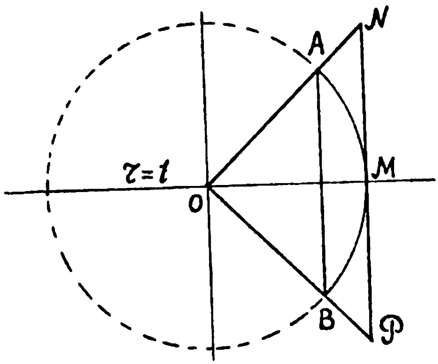

Рис. 6.

$\cos x \sin x$, x, $\operatorname{tg} x$, получаем $\cos x \sin x < x < \operatorname{tg} x$. Следовательно,

$$\frac{\sin x}{\cos x \sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$

то-есть

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Но, на основании леммы 1, имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Воспользовавшись только что доказанной леммой, легко показать, что

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

то-есть найти скорости изменения функций $\sin x$, $\cos x$.

Мы оставляем читателю проведение доказательства.

Следуя Л. Эйлеру, но уточняя его рассуждения, мы докажем утверждение:

Теорема 6. *При любом значении* x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \quad (2)$$

Для доказательства воспользуемся формулой Муавра

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz, \quad (3)$$

которая при целом n, при очевидности ее для $n=1$, легко проверяется методом полной индукции. Действительно, если предположить, что

$$(\cos z + i \sin z)^k = \cos kz + i \sin kz,$$

k — целое, положительное, то

$$\begin{aligned}(\cos z + i \sin z)^{k+1} &= (\cos kz + i \sin kz)(\cos z + i \sin z) = \\ &= (\cos z \cos kz - \sin kz \sin z) + \\ &\quad + i (\sin kz \cos z + \sin z \cos kz) \\ &= \cos (k+1) z + i \sin (k+1) z.\end{aligned}$$

Применив к левой части равенства (3) формулу Ньютона, получим

$$\begin{aligned}&\cos nz + i \sin nz = \\ &\left\{\cos^n z - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} z \sin^2 z + \cdots + (-1)^k \sin^n z\right\} + \\ &+ i \left\{n \cos^{n-1} z \sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos^{n-3} z \sin^3 z + \right. \\ &\left. + \ldots + (-1)^{k-1} n \cos z \sin^{n-1} z\right\} \quad (4)\end{aligned}$$

если, для определенности, положить n четным: $n = 2k$.

Из равенства (4) следует

$$\sin nz = n\cos^{n-1} z\sin z -$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z\sin^3 z + \cdots +$$

$$+(-1)^{k-1} n\cos z\sin^{n-1} z \tag{5}$$

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2} z\sin^2 z + \cdots +$$

$$+(-1)^k \sin nz \tag{6}$$

Положив в равенстве (5)

$$z = \frac{x}{n},$$

получим

$$\sin x = n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} -$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n} + \cdots +$$

$$+(-1)^{k-1} n\cos\frac{x}{n}\sin^{n-1}\frac{x}{n}.$$

Последнее равенство запишем следующим образом

$$\sin x = n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} -$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n} + \cdots +$$

$$+(-1)^r\frac{n(n-1)\ldots(n-2r)}{(2r+1)!}\cos^{n-2r-1}\frac{x}{n}\sin^{2r+1}\frac{x}{n} +$$

$$+S_{n,r},$$

где

$$S_{n,r}=(-1)^{r+1}\frac{n(n-1)\dots(n-2r-2)}{(2r+3)!}\cos^{n-2r-3}\frac{x}{n}\sin^{2r+3}\frac{x}{n}+$$

$$+\dots+(-1)^{k-1}n\cos\frac{x}{n}\sin^{n-1}\frac{x}{n}.$$

Так как

$$\left|\cos\frac{x}{n}\right|\leq 1,\qquad \left|\sin\frac{x}{n}\right|<\frac{|x|}{n},$$

то

$$|S_{n,r}|<\frac{n(n-1)\dots(n-2r-2)}{(2r+3)!}\,\frac{|x|^{2r+3}}{n^{2r+3}}+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-2r-4)}{(2r+5)!}\cdot\frac{|x|^{2r+5}}{n^{2r+5}}+\dots+n\,\frac{|x|^{n-1}}{n^{n-1}}<$$

$$<\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}+\frac{|x|^{2r+5}}{(2r+5)!}+\dots+\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}<$$

$$<\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}+\frac{|x|^{2r+5}}{(2r+5)!}+\dots+\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}+\dots<$$

$$<\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}\left\{1+\frac{|x|^2}{(2r+4)^2}+\frac{|x|^4}{(2r+4)^4}+\dots\right\}=$$

$$=\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{(2r+4)^2}},$$

если $|x|<2r+4$.

Таким образом,

$$\left|\sin x-\left\{n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n}-\right.\right.$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n}+\dots+$$

$$\left.\left.+(-1)^r\frac{n(n-1)\dots(n-2r)}{(2r+1)!}\cos^{n-2r-1}\frac{x}{n}\sin^{2r+1}\frac{x}{n}\right\}\right|<$$

$$<\frac{|x|^{2r+3}}{(2r+3)!}:\left(1-\frac{x^2}{(2r+4)^2}\right).\qquad(7)$$

Подчеркнем, что выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, не зависит от n.

Без особого труда можно показать*, оставляем это читателю, что

$$\lim_{n \to \infty} \cos^{n-p} \frac{x}{n} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} n(n-1)\ldots(n-s)\sin^{s+1}\frac{x}{n} = x^{s+1}. \qquad (8)$$

Заметив это, будем считать r фиксированным и перейдем в неравенстве (7) к пределу, полагая $n \to \infty$. Ввиду (8) получим

$$\left|\sin x - \left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x^{2r+3}}{(2r+3)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{(2r+4)^2}}. \qquad (9)$$

Так как пределом правой части последнего неравенства, при $r \to \infty$, является нуль, то из него получаем

$$\sin x = \lim_{r \to \infty} \left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}.$$

Тем самым доказано равенство (1). Аналогично, без каких-либо изменений, доказывается равенство (2).

С помощью разложений (1), (2) легко, и сколь-угодно точно, вычисляются значения функций $\sin x$, $\cos x$. Для примера (и частичной проверки наших результатов) вычислим $\sin 30°$. Воспользовавшись только двумя членами разложения (1) для $\sin x$, получим

$$\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} \cong \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \cong 0{,}49,$$

что лишь на 0,01 отличается от точного значения $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

---

* Воспользовавшись тем, что

$$1 \geqslant \cos^2 u = 1 - \sin^2 u \geqslant 1 - u^2$$

и лемой 2.

§ 7. Показательная функция с комплексным аргументом. Формула Эйлера. Логарифмы комплексных величин.

Если числа a, b, a_k, b_k вещественны и

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots;$$
$$b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots, \tag{1}$$

то говорят, что комплексное число $a + bi$ представимо рядом

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots + (a_n + b_n i) + \cdots$$

и является суммой этого ряда. Таким образом, по определению

$$a + bi = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots + (a_n + b_n i) + \cdots,$$

если имеют место равенства (1).

Рассмотрим ряд

$$1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \cdots + \frac{(xi)^m}{m!} + \cdots \tag{2}$$

Вещественные члены этого ряда, выписанные в порядке их следования, образуют ряд

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots,$$

а коэффициенты при мнимых членах — ряд

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

Эти ряды, как мы знаем из предыдущего параграфа, имеют суммами, соответственно $\cos x$ и $\sin x$. Поэтому, суммой ряда (2) является $\cos x + i \sin x$. Таким образом, имеем

$$\cos x + i \sin x = 1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} +$$
$$+ \frac{(xi)^3}{3!} + \cdots \frac{(xi)^m}{m!} + \cdots \tag{3}$$

Определение 9. *Под символом* e^{y+xi} *мы понимаем выражение*

$$e^{y+xi}=e^{y}\left\{1+(xi)+\frac{(xi)^2}{2!}+\cdots+\frac{(xi)^m}{m!}+\cdots\right\}. \tag{4}$$

В частности при $y=0$

$$e^{xi}=1+(xi)+\frac{(xi)^2}{2!}+\cdots+\frac{(xi)^m}{m!}+\cdots \tag{5}$$

Приведенное определение оправдывается следующими соображениями:

1°. Выражение, стоящее в правой части равенства (5), имеет вполне определенный смысл (3).

2°. При $x=0$, выражение в правой части (4) становится равным e^y, то-есть e^{y+xi} обращается в e^y.

3°. Функция $f(z)=e^z$, с комплексным показателем z, обладает характерным свойством показательной функции с вещественным аргументом, так как она удовлетворяет теореме сложения

$$f(z)\cdot f(u)=f(z+u).$$

Действительно, пусть

$$z=y+xi, \qquad u=w+vi.$$

Из (4) и (3) следует

$$e^z=e^y(\cos x+i\sin x).$$

Точно также

$$e^u=e^w(\cos v+i\sin v).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}e^z\cdot e^u&=e^y(\cos x+i\sin x)\cdot e^w(\cos v+i\sin v)=\\&=e^{y+w}\{(\cos x\cos v-\sin x\sin v)+i(\sin x\cos v+\\&\quad+\cos x\sin v)\}=\\&=e^{y+w}\{\cos(x+v)+i\sin(x+v)\}=\\&=e^{(y+w)+i(x+v)}=e^{z+u}.\end{aligned}$$

Из равенств (3) и (5) следует

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x. \tag{6}$$

Эта замечательная формула принадлежит Эйлеру и является одной из важнейших формул математики. Мы получим из этой формулы ряд важных следствий.

1. Заменив в равенстве (6) x на $-x$, получим

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x. \tag{7}$$

Складывая и вычитая равенства (6) и (7), соответственно, получим

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \tag{8}$$

Эти формулы тоже называются формулами Эйлера.

Полезно заметить, что, возведя равенства (8) в квадрат и сложив результаты, получим

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

2. Модулем выражения $\cos x + i \sin x$ является

$$|\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Поэтому

$$|e^{xi}| = 1, \qquad |e^{y+xi}| = e^{y}.$$

3. Так как любое комплексное число $a + bi$ представимо (тригонометрическая форма комплексного числа) в виде

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \tag{9}$$

где r — модуль, φ — аргумент числа $a + bi$, то

$$a + bi = re^{\varphi i}. \tag{10}$$

Это очень важная, так называемая, показательная форма комплексного числа.

4. Так как

$$r = e^{\ln r}$$

и поэтому

$$a + bi = e^{\ln r} \cdot e^{\varphi i} = e^{\ln r + \varphi i}, \tag{11}$$

то, казалось бы, естественно назвать натуральным логарифмом комплексного числа $a + bi$ число $\ln r + \varphi i$, то-есть положить

$$\mathrm{Ln}(a + bi) = \ln r + \varphi i. \tag{12}$$

Однако, вместе с равенством (6) справедливы также и равенства

$$a+bi=r[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)],$$

где k — любое целое число. Поэтому, вместе с равенствами (10) — (11) имеют место равенства

$$a+bi=re^{(\varphi+2k\pi)i};$$

$$a+bi=e^{\ln r+(\varphi+2k\pi)i}. \qquad (13)$$

Равенство (13) обнаруживает, что следует ввести такое

Определение 10. *Натуральным логарифмом комплексного числа $a+bi$ называется каждое число $\alpha+\beta i$ такое, что*

$$e^{\alpha+\beta i}=a+bi.$$

При таком определении, из равенства (13) следует, что

$$\mathrm{Ln}(a+bi)=\ln r+\varphi i+2k\pi i, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (14)$$

и что число (12) является лишь одним из логарифмов комплексного числа, так называемым *главным значением логарифма*.

Ясно, что по главному значению логарифма числа можно найти все его логарифмы по формуле (14).

Замечание. Если $b=0$, $a>0$, то-есть, если мы имеем вещественное положительное число, то $\varphi=0$ $[a=a(\cos 0+i\sin 0)]$. Следовательно,

$$\mathrm{Ln}\, a=\ln a+2k\pi i, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

и главным логарифмом является вещественное число $\ln a$. Таким образом, в школьном курсе математики рассматривается только один из логарифмов вещественного, положительного, числа — главное значение логарифма.

Если $b=0$, $a<0$, то-есть, если мы имеем отрицательное вещественное число, то $\varphi=\pi$ $[a=|a|(\cos\pi+$ $+i\sin\pi)]$.

Следовательно,

$$\mathrm{Ln}\, a=\ln|a|+\pi i+2k\pi i, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

и среди логарифмов отрицательного вещественного числа нет ни одного вещественного.

Собственно говоря, это обстоятельство и имеют в виду в школьном курсе, когда говорят, что отрицательное число не имеет логарифма.

5. Положив в формуле Эйлера (6) $x=\pi$, получим

$$e^{\pi i}=-1. \tag{15}$$

Это замечательное соотношение, связывающее число e и π, позволяет (см. главу III) доказать трансцендентность числа π.

Замечание. Если возвести равенство (15) в квадрат, то получится

$$e^{2\pi i}=1,$$

но отсюда нельзя сделать заключение о наличии противоречия: $2\pi i=0$. Дело, попросту, заключается в том, что 0 и $2\pi i$ являются *двумя* (из многих) логарифмами числа 1.

Глава III.

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЧИСЛА π

§ 1. Элементарные симметрические функции. Во многих вопросах алгебры большую роль играют так называемые симметрические функции корней алгебраического уравнения. Например, с помощью рассмотрения таких функций доказывается теорема о том, что общее уравнение выше четвертой степени не решается в радикалах. Некоторые элементарные факты теории симметрических функций будут нами использованы для доказательства трансцендентности числа π.

Определение 1. *Функция*

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

n-переменных называется симметрической, если она не меняется при любой перестановке ее аргументов — независимых переменных.

Например, функции

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}},\ \cos(x_2-x_1)$$

суть симметрические, функции

$$x_1+x_2^2,\ x_1x_3+x_2,\ \sin(x_1-x_2)$$

не являются симметрическими.

Определение 2. *Элементарными симметрическими функциями n-переменных называются выражения*

$$p_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$p_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \sum_{i,j} x_i x_j, \; i \neq j$$

$$p_3 = x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_k x_r x_s + \ldots = \sum_{k,r,s} x_k x_r x_s, \; k \neq r \neq s$$

. . . .

$$p_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

Замечание. В алгебре рассматривают и тот случай, когда функция меняется при перестановках аргументов, но, при некоторых *численных* значениях аргументов, от их перестановки не меняется *численное* значение функции. Например, функция $x_1^2 + x_2 x_3 + x_4^2$ не является симметрической в смысле определения 1, но при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = a$ значение функции не меняется при любой перестановке аргументов.

Мы всегда будем иметь в виду симметричность в смысле определения 1 и нас будут интересовать значения симметрических функций, принимаемые ими, когда $x_1, x_2, \ldots x_n$ суть корни уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \qquad (2)$$

Для краткости мы будем пользоваться выражением: симметрические функции корней уравнения.

Обобщением известной теоремы о корнях квадратного уравнения (формулы Виета) является следующее утверждение.

Теорема 1. *Ели $x_1, x_2, \ldots x_n$ суть корни уравнения (2), то*

$$p_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \; p_2 = \frac{a_2}{a_0}, \; p_3 = -\frac{a_3}{a_0}, \ldots p_n = (-1)^n \left| \frac{a_n}{a_0} \right|. \qquad (3)$$

Действительно, если $x_1, x_2, \dots x_n$ являются корнями уравнения (2), то

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv$$
$$\equiv a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Отсюда, раскрыв скобки в правой части, получим

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv$$
$$\equiv a_0 x^n - a_0 p_1 x^{n-1} + a_0 p_2 x^{n-2} \dots + (-1)^n a_0 p_n.$$

Сравнив в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получим формулы (3).

Следствие. *Если коэффициенты уравнения* (2) *целые числа, то элементарные симметрические функции величин* $a_0 x_1, a_0 x_2, \dots a_0 x_n$ *суть целые числа. Действительно,*

$$a_0 x_1 + \dots + a_0 x_n = a_0 (x_1 + \dots + x_n) = -a_1;$$
$$(a_0 x_1)(a_0 x_2) + \dots + (a_0 x_{n-1})(a_0 x_n) =$$
$$= a_0^2 (x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n) = a_0 a_2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(a_0 x_1)(a_0 x_2) \dots (a_0 x_n) = a_0^n x_1 x_2 \dots x_n = a_0^{n-1} (-1)^n a_n$$

§ 2. Формулы Ньютона. Ньютон указал формулы, позволяющие выразить суммы одинаковых степеней корней уравнения (2) через коэффициенты этого уравнения.

Теорема 2. *Пусть* $x_1, x_2, \dots x_n$ *корни уравнения*

$$F(x) \equiv x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n = 0 \qquad (4)$$

и

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n; \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2; \\ s_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ s_n &= x_1^n + x_2^n + \dots x_n^n. \end{aligned} \qquad (5)$$

Тогда справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
&s_1+b_1=0;\\
&s_2+s_1 b_1+2b_2=0;\\
&s_3+s_2 b_1+s_1 b_2+3b_3=0;\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$s_{n-1}+s_{n-2}b_1+s_{n-3}b_2+\ldots+(n-1)b_{n-1}=0;$$

$$s_n+s_{n-1}b_1+s_{n-2}b_2+\ldots+s_1 b_{n-1}+nb_n=0,$$

из которых следует

$$
\begin{aligned}
&s_1=-b_1;\\
&s_2=b_1^2-2b_2;\\
&s_3=-b_1^3+3b_1 b_2-3b_3.\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Функции (5) называются *основными симметрическими функциями* или степенными суммами, а равенства (6) — (7) называются формулами Ньютона. Для доказательства этих формул, введем в рассмотрение функции

$$
\begin{aligned}
&\omega_1(x)=x+b_1;\\
&\omega_2(x)=x^2+b_1x+b_2;\\
&\omega_3(x)=x^3+b_1x^2+b_2x+b_3;\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$\omega_{n-1}(x)=x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

и заметим, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\omega_1(x_i)=s_1+nb_1;\\
&\sum_{i=1}^{n}\omega_2(x_i)=s_2+b_1 s_1+nb_2;\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_{n-1}(x_i)=s_{n-1}+b_1 s_{n-2}+b_2 s_{n-3}+$$
$$+\ldots+b_{n-2}s_1+nb_{n-1}.$$

Так как $x_1, x_2, \ldots x_n$ корни уравнения (4), то мы имеем тождество

$$F(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

из которого следует

$$\frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{F(x)}{x - x_n} \equiv (x - x_2)(x - x_3)\ldots$$

$$\ldots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + \ldots + \qquad (10)$$

$$+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Легко проверить, что после раскрытия скобок в правой части этого тождества и приведения подобных членов, на основании формул (3), получится выражение *)

$$nx^{n-1} + (n-1)b_1 x^{n-2} + (n-2)b_2 x^{n-3} + \\ + \ldots + b_{n-1}. \qquad (11)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{array}{l|l}
x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n & x - x_i \\
\cline{2-2}
\underline{x^n - x_i x^{n-1}} & x^{n-1} + \omega_1(x_i) x^{n-2} + \\
(b_1 + x_i) x^{n-1} + b_2 x^{n-2} & + \omega_2(x_i)^{n-3} + \ldots \omega_{n-1}(x_i) \\
\underline{(b_1 + x_i) x^{n-1} - x_i (x_i + b_1) x^{n-2}} & \\
\qquad (x_i^2 + x_i b_1 + b_2) x^{n-2} + \ldots &
\end{array}$$

Поэтому левая часть тождества (10) равна

$$nx^{n-1} + x^{n-2}\sum_{i=1}^{n}\omega_1(x_i) + x^{n-3}\sum_{i=1}^{n}\omega_2(x_i) + \ldots + \\ + \sum_{i=1}^{n}\omega_{n-1}(x_i). \qquad (12)$$

---

* Это выражение является производной от $F(x)$.

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x в выражениях (11) и (12), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_1 (x_i) = (n-1)\, b_1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_2 (x_i) = (n-2)\, b_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{n-1} (x_i) = b_{n-1}.$$

Эти равенства вместе с равенствами (9) немедленно приводят к первым $n-1$ равенствам (6) и нам остается только доказать последнее из этих равенств. Для этого достаточно заметить, что его левая часть равна

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i),$$

а каждое слагаемое этой суммы равно нулю, так как x_i является корнем уравнения (4).

Замечание. Из тождеств

$$x_i F(x_i) \equiv 0,\ x_i^2 F(x_i) \equiv 0, \ldots, x_i^k F(x_i) \equiv 0$$

следует

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} x_i F(x_i) = s_{n+1} + b_1 s_n + \ldots + b_{n-1} s_2 + b_n s_1;\\
0 &\equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2 F(x_i) = s_{n+2} + b_1 s_{n+1} + \ldots + b_{n-1} s_3 + b_n s_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (13)\\
0 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^k F(x_i) = s_{n+k} + b_1 s_{n+k-1} + \ldots + b_{n-1} s_{k+1} +\\
&\qquad + b_n s_k.
\end{aligned}$$

Равенства (13) позволяют, если воспользоваться формулами (7), выразить через коэффициенты уравнения (4) и $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$

Аналогично можно найти и суммы отрицательных степеней корней уравнения (4), если среди них нет равного нулю.

Отметим следующие важные следствия формул Ньютона.

Следствие 1. *Если коэффициенты уравнения (4) целые числа, то суммы одинаковых степеней корней этого уравнения, то-есть величины* s_1, s_2, ... *тоже целые числа.*

Следствие 2. *Если коэффициенты уравнения*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

целые числа и $x_1, x_2, \ldots x_n$ — *корни этого уравнения, то суммы одинаковых степеней чисел* $a_0 x_1, a_0 x_2, \ldots, \ldots a_0 x_n$ *тоже целые числа.*

Действительно, из формул (7) и (13) следует

$$a_0 x_1 + a_0 x_2 + \ldots + a_0 x_n = -a_1;$$

$$(a_0 x_1)^2 + (a_0 x_2)^2 + \ldots + (a_0 x_n)^2 = a_1^2 - 2a_2 a_0;$$

$$(a_0 x_1)^3 + (a_0 x_2)^3 + \ldots + (a_0 x_n)^3 = -a_1^3 + 3a_0 a_1 a_2 - 3a_3 a_0^2.$$

. . . .

В качестве самого важного для нас следствия из формул Ньютона докажем теорему:

Теорема 3. *Если симметрическая функция* $\Phi(y_1, y_2, \ldots y_n)$ *является многочленом и* $x_1, x_2, \ldots x_n$ — *корни уравнения (4), то*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi(b_1, b_2, \ldots b_n),$$

где φ — *многочлен. В частности, если коэффициенты многочлена* $\Phi(y_1, y_2, \ldots y_n)$ *целые числа, то коэффициенты многочлена* $\varphi(b_1, b_2, \ldots b_n)$ *тоже целые числа.*

Для доказательства теоремы заметим, что если многочлен $\Phi(y_1, y_2, \ldots y_n)$ содержит слагаемое вида Ay_k, то (симметричность!) он содержит также слагаемые $Ay_1, Ay_2, \ldots Ay_n$ и никаких иных слагаемых первой степени не содержит. Точно также, если $\Phi(y_1, y_2, \ldots y_n)$ содержит слагаемые вида $By_k y_l$, Cy_k^2, то он содержит и слагаемые $By_1 y_2, \ldots, By_{n-1} y_n; Cy_1^2, \ldots Cy_n^2$ и никаких других слагаемых второй степени не содержит. Тоже самое можно сказать относительно слагаемых любой степени.

Таким образом, если $\Phi(y_1, y_2, \ldots y_n)$ симметрический многочлен, то он имеет вид

$$\Phi(y_1, \ldots y_n) = A_0 + A_1 \sum_{k} y_k + A_2 \sum_{\substack{k, l \\ k \neq l}} y_k y_l + A_2^1 \sum_{k} y_k^2 + + A_3 \sum_{\substack{k, l, m \\ k \neq l \neq m}} y_k y_l y_m + \ldots$$

Поэтому

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = A_0 + A_1 \sum_{k} x_k + A_2 \sum_{\substack{k, l \\ k \neq l}} x_k x_l + A_2^1 \sum_{k} x_k^2 + + A_3 \sum_{\substack{k, l, m \\ k \neq l \neq m}} x_k x_l x_m + \ldots$$

Но *

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = s_1 = -b_1,$$

$$2 \sum_{\substack{k, l \\ k \neq l}} x_k x_l = x_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1) + x_2 (x_1 + x_2 + + \ldots + x_n - x_2) + \ldots +$$

$$+ x_n (x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_n) = S_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - - (x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2) = s_1^2 - s_2 = b_1^2 - (b_1^2 - 2b_2) = 2b_2,$$

$$\sum_{k} x_k^2 = s_2 = b_1^2 - 2b_2,$$

$$\sum_{k, l} x_k x_l^2 = \sum_{k} x_k (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_k^2)' = \sum_{k} x_k (s_2 - x_k^2) =$$

$$= s_2 \sum_{k} x_k - \sum_{k} x_k^3 = s_1 s_2 - s_3 = -b_1 (b_1^2 - 2b_2) -$$

$$- (-b_1^3 + 3b_1 b_2 - 3b_3) = 3b_3 - b_1 b_2,$$

---

* Вычисление $\Sigma x_k x_l$ приводится только для пояснения метода дальнейших вычислений.

Продолжая такие вычисления, мы очевидно получаем нашу теорему. Из доказанной теоремы и следствия 2 теоремы 2 немедленно следует

Теорема 4. *Если $\Phi(y_1, y_2, \ldots y_n)$ симметрический многочлен с целыми коэффициентами и $x_1, x_2, \ldots x_n$ корни уравнения*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами, то

$$\Phi(a_0 x_1, a_0 x_2, \ldots, a_0 x_n)$$

— целое число.

Именно на эту теорему мы будем опираться в доказательстве трансцендентности числа π.

§ 3. Доказательство трансцендентности π. Мы начнем с доказательства трех вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *При любом целом положительном r и любом x, имеет место равенство*

$$r! e^x = r! + r! x + \frac{r!}{2!} x^2 + \ldots + \frac{r!}{(r-1)!} x^{r-1} + x^r + \\ + x^{r+1} q_r e^{|x|}, \quad (1)$$

где $q_r = q_r(x)$, $|q_r| < 1$.

Мы воспользуемся приведенным во второй главе разложением функции e^x в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^r}{r!} + \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{x^{r+2}}{(r+2)!} + \ldots$$

Из этого разложения следует, что

$$r! e^x = r! + r! x + \frac{r!}{2!} x^2 + \ldots + \frac{r!}{(r-1)!} x^{r-1} + x^r + \\ + x^{r+1} \delta(x, r),$$

где

$$\delta(x, r) = \frac{1}{r+1} + \frac{x}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \ldots$$

Так как

$$|\delta(x, r)| < 1 + \frac{|x|}{1 \cdot 2} + \frac{|x|^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots < e^{|x|},$$

то можно положить

$$\delta(x, r) = q_r(x) e^{|x|}, \quad |q_r| < 1$$

Лемма 2. *Пусть*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n;$$

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(n)}(x);$$

где *

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1};$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)!\, c_{n-1} + n!\, c_n x;$$

$$f^{(n)}(x) = n!\; c_n.$$

Тогда

$$P \cdot e^x = e^{|x|} Q(x) + F(x), \tag{2}$$

где

$$P = c_0 + 1!\, c_1 + 2!\, c_2 + \ldots + n!\, c_n = \sum_{r=0}^{n} c_r \cdot r!; \tag{3}$$

$$Q(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r q_r x^{r+1}, \quad q_r = q_r(x), \ |q_r(x)| < 1. \tag{4}$$

Полагая в равенстве (1) $r = 0, 1, 2, \ldots n$, получим

$$e^x = 1 + x q_0 e^{|x|};$$

$$e^x = 1 + x + x^2 q_1 e^{|x|};$$

$$2!\, e^x = 2! + 2x + x^2 + x^3 q_2 e^{|x|};$$

$$3!\, e^x = 3! + 3! x + 3x^2 + x^3 + x^4 q_3 e^{|x|};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n!\, e^x = n! + n!\, x + \frac{n!}{2!} x^2 + \ldots + n x^{n-1} + x^n + x^{n+1} q_n e^{|x|}.$$

---

* Функции $f', f'', \ldots f^{(n)}$ являются последовательными производными от $f(x)$.

Умножив эти равенства, соответственно, на $c_0, c_1 \ldots c_n$ и сложив, получим равенство (2).

Лемма 3. *Сумма и произведение двух алгебраических чисел являются числами алгебраическими (и притом целыми алгебраическими, если таковыми являются слагаемые и множители).*

Действительно, пусть $\alpha = \alpha_1$ алгебраическое число, являющееся корнем уравнения n-ой степени с рациональными коэффициентами и $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ — остальные корни этого уравнения и пусть $\beta = \beta_1$ — алгебраическое число, являющееся корнем уравнения m-ой степени с рациональными коэффициентами, а $\beta_2, \ldots \beta_m$ — остальные корни этого уравнения. Произведение всех разностей вида $x - \alpha_i \beta_j$, $i = 1, 2, \ldots n$; $j = 1, 2, \ldots m$, очевидно, является многочленом, одним из корней которого является $\alpha\beta = \alpha_1\beta_1$. Следовательно, нам достаточно убедиться в том, что коэффициентами этого многочлена суть рациональные числа. Но эти коэффициенты суть симметрические функции от аргументов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и аргументов $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$. Дважды применив теорему 3, мы убедимся в справедливости нашего утверждения о произведении алгебраических чисел. Аналогично доказывается утверждение о сумме.

Теперь мы приступим к доказательству того, что π *транцендентное число.*

Пусть π алгебраическое число. На основании леммы 3, число πi тоже алгебраическое и, следовательно, является корнем уравнения вида *.

$$p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0 \qquad (5)$$

с целыми коэффициентами. Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ — корни этого уравнения, одним из них является πi.

Так как $e^{\pi i} = -1$ (см. главу II, § 7), то

$$(e^{\beta_1} + 1)(e^{\beta_2} + 1) \ldots (e^{\beta_m} + 1) = 0. \qquad (6)$$

---

* Из всех таких уравнений рассматривается уравнение наименьшей степени — неприводимое уравнение.

Раскрыв скобки в левой части этого равенства, получим

$$1+\sum_{k=1}^{m} e^{\beta_k}+\sum_{k,\,l} e^{\beta_k+\beta_l}+\dots+e^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_m} \quad (7)$$

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ те из показателей β_k, $\beta_k+\beta_l, \dots, \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_m$, которые отличны от нуля, а через $\alpha_{n+1}, \dots \alpha_N$ остальные* (равные нулю). Присоединив соответствующие слагаемые в левой части (7) к первому, можем записать равенство (7) в виде

$$K+e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\dots+e^{\alpha_n}=0, \quad (8)$$

где K — целое положительное число.

Числа $p_0\beta_1$, $p_0\beta_2, \dots p_0\beta_m$ суть целые алгебраические числа. Поэтому (лемма 3) целыми алгебраическими числами являются и числа $p_0\alpha_1$, $p_0\alpha_2, \dots$

Очень важно заметить, что если $F(z_1, z_2, \dots z_n)$ *симметрический многочлен с целыми коэффициентами, то* $F(p_0\alpha_1, \dots p_0\alpha_n)$ — *целое число.*

Действительно, если

$$F(p_0\alpha_1, \dots p_0\alpha_n)=a+b\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+c\sum_{\substack{k=1\\ e=1}}^{\substack{e=n\\ k=n}}\alpha_k\alpha_e+\dots,$$

то будет также

$$F(p_0\alpha_1, \dots p_0\alpha_k)=a+b\sum_{k=1}^{N}\alpha_k+c\sum_{\substack{k=1\\ e=1}}^{\substack{e=N\\ k=N}}\alpha_k\alpha_e+\dots,$$

так как каждая из сумм, стоящих в правой части второго равенства, отличается от соответствующей суммы первого равенства слагаемыми или равными $\alpha_{N+1}, \dots \alpha_N$ или содержащим эти числа в качестве множителей, а числа $\alpha_{N+1}, \dots \alpha_N$ равны нулю.

Выражение в правой части последнего равенства является симметрическим многочленом относительно

---

* Один такой показатель заведомо есть, так как, если уравнение (5) имеет корень πi, то оно должно также иметь корень $-\pi i$.

$p_0\alpha_1$, $p_0\alpha_2, \ldots p_0\alpha_N$ и следовательно, относительно $p_0\beta_1$, $p_0\beta_2, \ldots p_0\beta_m$. На основании теоремы 4, отсюда следует, что $F(p_0\alpha_1, \ldots p_0\alpha_n)$ — целое число.

Положим в равенстве (2), последовательно $x=0$, α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ и сложим результаты, помножив предварительно первый из них на K. Получим, на основании (8)

$$0 = KF(0) + F(\alpha_1) + \cdots F(\alpha_n) + \\ + e^{|\alpha_1|} Q(\alpha_1) + \cdots e^{|\alpha_n|} Q(\alpha_n). \qquad (9)$$

Если мы докажем, что для некоторого многочлена $f(x)$ равенство (9) невозможно, если $\beta_1, \ldots \beta_m$ алгебраические числа, то тем самым будет доказана трансцендентность π.

Положим

$$f(x) = \frac{p_0^{nt+t-1} x^{t-1} (x-\alpha_1)^t (x-\alpha_2)^t \ldots (x-\alpha_n)^t}{(t-1)!} \qquad (10)$$

где t — простое число, которое остается пока неопределенным. Многочлен (10) можно представить в видах

$$f(x) = \frac{A_{t-1} x^{t-1} + A_t x^t + \cdots}{(t-1)!};$$

$$f(x) = \frac{B_t p_0^t (x-\alpha_1)^t + B_{t+1} p_0^{t+1} (x-\alpha_1)^{t+1} + \cdots}{(t-1)!}; \qquad (11)$$

$$f(x) = \frac{C^t p_0^t (x-\alpha_2)^t + C_{t+1} p_0^{t+1} (x-\alpha_2)^{t+1}}{(t-1)!} + \cdots$$

. . . .

Первое из равенств (11) непосредственно следует из равенства (10), если в правой его части раскрыть скобки. При этом получим

$$A_{t-1} = (-1)^n p_0^{t-1} (p_0\alpha_1)^t (p_0\alpha_2)^t \ldots (p_0\alpha_n)^t.$$

Произведение в правой части симметрично и поэтому A_{t-1} — *целое число*. Такими же, легко сообразить, являются и числа $A_t, \ldots$

Второе из равенств (11) получается из равенства (10), если записать его в виде

$$f(x)=\frac{p_0^{nt+t-1}[(x-\alpha_1)+\alpha_1]^{t_1}(x-\alpha_1)^t[(x-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_2)]^t}{(t-1)!}\dots$$

и освободиться от квадратных скобок. Аналогично получается третье из равенств (11) и т. д. Важно заметить, что B_t, $B_{t+1},\dots$; C_t, $C_{t+1},\dots$;... являются *многочленами с целыми коэффициентами относительно* $p_0\alpha_1$, $p_0\alpha_2,\dots$

Легко подсчитать, что

$$F(0)=A_{t-1}+tA_t+(t+1)tA_{t+1}+\cdots; \qquad (12)$$

$$F(\alpha_1)=tB_tp_0^t+t(t+1)B_{t+1}p_0^{t+1}+\cdots; \qquad (13)$$

$$F(\alpha_2)=tC_tp_0^t+t(t+1)C_{t+1}p_0^{t+1}+\cdots$$

. . . .

Сумма

$$F(\alpha_1)+F(\alpha_2)+\cdots+F(\alpha_n)$$

является *симметрическим многочленом* с целыми коэффициентами и потому является целым числом. Это число, ввиду(13), делится на t.

Мы будем считать t большим каждого из целых чисел K, p_0, $(p_0\alpha_1))(p_0\alpha_2)\dots(p_0\alpha_n)$. Тогда

$$KF(0)=KA_{t-1}+KtA_t+\cdots$$

будет целым числом, не делящимся на t, так как таким будет первое слагаемое в правой части, в то время как остальные слагаемые будут целыми числами, делящимися на t. Таким образом, сумма, стоящая в первой части равенства (9), при нашем выборе числа t, является целым числом, не делящимся на t, то-есть—*отличным от нуля целым числом.*

Обратнмся к рассмотрению суммы

$$L=e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1)+\cdots e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n).$$

Из равенства (4), первого равенства (11) и того, что

$$|q_r| < 1, \lim_{s \to \infty} \frac{x^s}{s!} = 0,$$

легко усмотреть, что L будет по *модулю меньшим единицы, при достаточно большом* t.

Таким образом, правая часть равенства (9) является суммой целого, отличного от нуля, числа и числа, по модулю меньшего единицы. Такая сумма не может равняться нулю и поэтому равенства (9), при нашем выборе t и $f(x)$, невозможно. Этим и завершено доказательство трансцендентности числа π.

Приведенное доказательство во всем существенном заимствовано из книги покойного почетного академика Дмитрия Александровича Граве „Трактат по алгебраическому анализу“, том II.

Глава IV

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЧИСЛА e

Мы воспользуемся двумя, легко доказываемыми формулами:

$$J_k=\int_0^\infty e^{-x}\, x^k dx=k\,!, \tag{1}$$

k — целое положительное число.

$$U_k=\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx=\int_0^h e^{-x} f(x)\, dx+$$

$$+e^{-h}\int_0^\infty e^{-x} f(x+h)\, dx, \tag{2}$$

h — любое число.

Первая из этих формул следует из того, что, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k\, dx=-x^k e^{-x}\Big|_0^\infty+k\int_0^\infty e^{-x} x^{k-1}\, dx.$$

Таким образом,

$J_k=kJ_{k-1}=k(k-1)J_{k-2}=\cdots=h(k-1)\cdots 2\cdot 1\, J_0$.
Но

$$J_0=\int_0^\infty e^{-x}\, dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$$

и поэтому

$$J_k=k\,!$$

Формула (2) немедленно следует из равенства

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx = \int_0^h e^{-x} f(x)\,dx + \int_h^\infty e^{-x} f(x)\,dx,$$

если во втором интеграле положить

$$x = y + h.$$

Допустим теперь, что число e алгебраическое, то-есть является корнем уравнения

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

с целыми коэффициентами.

Умножив тождество

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n \equiv 0$$

на $\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx$ и воспользовавшись формулой (2), получим тождество

$$0 = a_0 \int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx + a_1 e \left\{ \int_0^1 e^{-x} f(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + e^{-1} \int_0^\infty e^{-x} f(x+1)\,dx \right\} + a_2 e^2 \left\{ \int_0^2 e^{-x} f(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + e^{-2} \int_0^\infty e^{-x} f(x+2)\,dx \right\} + \cdots +$$

$$+ a_n e^n \left\{ \int_0^n e^{-x} f(x)\,dx + e^{-n} \int^\infty e^{-x} f(x+n)\,dx \right\}.$$

Или

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \int_0^\infty e^{-x} f(x+i)\,dx + \sum_{i=1}^{n} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx = 0 \qquad (4)$$

Мы докажем, что если в качестве $f(x)$ взять надлежащую функцию, то первое слагаемое в левой части последнего тождества окажется отличным от нуля целым числом, а второе—правильной дробью. Но сумма таких двух чисел не может быть равной нулю. Таким образом, тождество (4), а вместе с ним и тождество (3) окажутся невозможными. Тем самым будет доказана невозможность предположения, что число e алгебраическое.

Положим

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-n)^p, \quad (5)$$

где p—простое число, выбор которого мы далее уточним. Так как, расположив многочлен (5) по возрастающим степеням x, получим *

$$f(x)=\frac{(-1)^n(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1}+\frac{b_1}{(p-1)!}x^p+\cdots, \quad (6)$$

b_k — целые числа,
то, на основании формулы (1),

$$a_0\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx=\frac{a_0(-1)^n(n!)^p}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx+$$

$$+\frac{a_0b_1}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx+\cdots$$

$$=a_0(-1)^n(n!)^p+a_1b_1p+\cdots \quad (7)$$

---

* Так как p — простое и нечетное, то $(-1)^p=-1$, $(-1)^{np}=(-1)^n$.

На основании той же формулы (1) и ввиду того, что

$$f(x+i)=\frac{1}{(p-1)!}(x+i)^{p-1}(x+i-1)^p\ldots$$

$$\ldots(x+1)^p x^p (x-1)^p\ldots(x-n+i)^p=$$

$$=\frac{c_1}{(p-1)!}x^p+\frac{c_2}{(p-1)!}x^{p+1}+\ldots,$$

$c_к$ — целые числа, при $i>0$, имеем

$$a_i\int\limits_0^\infty e^{-x}f(x+i)\,dx=pA_i, \tag{8}$$

где A_i — целое число.

Из (*I*) и (8) следует

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\int\limits_0^\infty e^{-x}f(x+i)\,dx=(-1)^n a_0(n!)^p+p\sum_{i=1}^{n}A_i.$$

Если взять за p простое число, большее n и всех делителей числа a_0, то первое слагаемое во второй части последнего равенства *не будет делиться на* p. Поэтому сумма (9) является целым числом, *не делящимся на* p, то-есть отличным от нуля.

Переходя к рассмотрению второго слагаемого в левой части тождества (4), заметим, что при изменении x от 0 до i и j от 1 до n, имеем

$$|f(x)|<\frac{1}{(p-1)!}n^{p-1}\cdot\underbrace{n^p\ldots n^p}_{n\text{ раз}}=\frac{1}{(p-1)!}n^{(n+1)p-1}.$$

Кроме того,

$$e^{-x}<1,\quad e^x<e^n$$

и поэтому

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx\right| <$$

$$< \frac{1}{(p-1)!} a^{(n+1)p-1} \{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\} =$$

$$= M_n \frac{k_n^{p-1}}{(p-1)!},$$

где M_n, k_n не зависят от p. Так как

$$\lim_{p \to \infty} \frac{z^{p-1}}{(p-1)!} = 0,$$

то при достаточно большом p (а мы можем взять p сколько угодно большим),

$$M_n \frac{k_n^{p-1}}{(p-1)!} < 1.$$

Этим и заканчивается доказательство того, что e трансцендентное число, так как из последнего неравенства следует, что второе слагаемое в равенстве (4) является правильной дробью и поэтому (первое слагаемое в том же равенстве—целое число!) равенство (4) невозможно.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор проф. *А. К. Сушкевич.* Корректор *Н. Н. Евсеева.*

Подписано к печати 25-XII 1952 г. Объем 3,9 печ. листа, = 1,19 бум. листа = 4,1 уч.-изд. листа. Разм. бум. 84×108 см $^1/_{32}$. В 1 печ. листе 42.050 зн. БЦ 22988. Зак. 1204. Тир. 10000.
Цена 1 руб. 25 коп. по прейскуранту 1952 г.

Отпечатано в типографии издательства Харьковского государственного университета им. А. М. Горького — Харьков, Университетская ул., № 16.