ХАРЬКОВСКОЕ ВЫСШЕЕ ВОЕННОЕ УЧИЛИЩЕ
имени МАРШАЛА СОВЕТСКОГО СОЮЗА Н. И. КРЫЛОВА

Г.И.ДРИНФЕЛЬД, И.А.ЯКОВЛЕВ

ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

(Лекция)

Харьков
1973

I. Разложение функции $\csc \pi z$ в ряд элементарных дробей

Разложим функцию $f(x)=\cos zx$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ в ряд Фурье. Ввиду четности функции имеем

$$b_\kappa=0,\quad \kappa=1,2,\ldots;\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos zx\,dx=\frac{2\sin\pi z}{\pi z};$$

$$a_\kappa=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos zx\,\cos\kappa x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\cos(z+\kappa)x+\right.$$

$$\left.+\cos(z-\kappa)x\right]dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\pi(z+\kappa)}{z+\kappa}+\frac{\sin\pi(z-\kappa)}{z-\kappa}\right]=$$

$$=\frac{\sin\pi z}{\pi}(-1)^\kappa\left[\frac{1}{z+\kappa}+\frac{1}{z-\kappa}\right];\quad \kappa=1,2,\ldots$$

Таким образом,

$$\cos zx=\frac{\sin\pi z}{\pi}\left\{\frac{1}{z}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z+\kappa}+\frac{1}{z-\kappa}\right](-1)^\kappa\cos\kappa x\right\},\ -\pi\leq x\leq\pi$$

При $x=\pi$ получаем

$$\cos\pi z=\frac{\sin\pi z}{\pi}\left\{\frac{1}{z}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z+\kappa}+\frac{1}{z-\kappa}\right]\right\}.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-\nu},\qquad (I)$$

если последнюю сумму понимать так: слагаемые, соответствующие $\nu=\kappa$ и $\nu=-\kappa$, обязательно объединяются.

Теперь легко найти нужное нам разложение.

Действительно,

$$\frac{1}{\sin \pi y} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}(1-y)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{y}{2}-\tau} + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1-y}{2}-\tau}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-2\tau} - \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-(2\tau-1)}\right\}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{\pi}{\sin \pi y} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau}}{y-\tau} \qquad (2)$$

2. Функция $\Gamma(a)$

Одно из (эквивалентных) определений этой функции таково:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad a > 0.$$

Сходимость интеграла легко проверить. Функцию $\Gamma(a)$ можно рассматривать как обобщение факториала, так как при целом n

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n).$$

Полученная рекуррентная формула дает

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\Gamma((n-1)+1) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\,\Gamma(1), \quad (\text{I})$$

но

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Значит,

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (3)$$

Докажем формулу более общую, чем формула (3):

$$\Gamma(a+n+1) = (a+n)(a+n-1)\ldots a\,\Gamma(a). \qquad (4)$$

Эта формула полезна тем, что благодаря ей достаточно табулировать $\Gamma(a)$ только при $0<a<1$. Например,

$$\Gamma\left(\frac{17}{3}\right)=\Gamma\left(\frac{2}{3}+4+1\right)=\left(4+\frac{2}{3}\right)\left(3+\frac{2}{3}\right)\left(2+\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{2}{3}\right)\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Формула (4) тоже легко доказывается с помощью интегрирования по частям. Действительно,

$$\Gamma(a+n+1)=\int_0^\infty x^{a+n}e^{-x}dx=-x^{a+n}e^{-x}\Big|_0^\infty+$$
$$+(a+n)\int_0^\infty x^{a+n-1}e^{-x}dx=(a+n)\Gamma(a+n).$$

Значит,

$$\Gamma(a+n+1)=(a+n)\Gamma(a+n)=(a+n)(a+n-1)\Gamma(a+n-1)=\ldots=$$
$$=(a+n)(a+n-1)\ldots(a+1)a\Gamma(a).$$

3. Функция $B(a,b)$

По определению

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad a>0,\ b>0.$$

Сходимость интеграла легко проверить.

Функция $B(a,b)$ симметрична:

$$B(a,b)=B(b,a).$$

Введем замену переменной:

$$x=1-y,\quad dx=-dy.$$

Получаем

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^1(1-y)^{a-1}y^{b-1}dy=B(b,a).$$

Докажем еще важную формулу:

$$B(a,b)=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx=\int_0^\infty\frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}dx. \tag{5}$$

Действительно, полагая

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2},$$

заметим, что при $x = 0$ будет $y = 0$, а при $x = 1$ будет $y = \infty$.

Следовательно,

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a-1}} \cdot \frac{1}{(1+y)^{b-1}} \cdot \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy.$$

4. Вычисление $B(a, 1-a)$

Вычислим необходимый для дальнейшего интеграл

$$B(a,1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \quad 0<a<1.$$

Имеем

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_1^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy.$$

Сделав замену $y = \frac{1}{x}$, получим

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{-a}}{1+x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x^{a-1}+x^{-a})(1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots)\,dx =$$

$$= \frac{1}{a} + \left[\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a}\right] + \left[\frac{1}{2+a} - \frac{1}{2-a}\right] + \ldots =$$

$$= \frac{1}{a} - \left[\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1}\right] + \left[\frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+2}\right] + \ldots =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^r}{a-r}.$$

Обоснование законности почленного интегрирования опускаем.

На основании равенства (2) можем заключить, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{6}$$

5. Связь между функциями B и Γ

Эта замечательная связь выражается формулой

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \tag{7}$$

которую надо доказать:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}dx\,dy.$$

В последнем интеграле выполним замену: $x=\frac{u}{1+z}$, $y=\frac{uz}{1+z}$ (рис.I.2). Имеем:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+z} & \frac{z}{1+z} \\ \frac{-u}{(1+z)^2} & \frac{u}{(1+z)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+z)^2},$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{(1+z)^{a-1}}\cdot\frac{u^{b-1}z^{b-1}}{(1+z)^{b-1}}\cdot e^{-u\frac{1+z}{1+z}}\frac{u}{(1+z)^2}\,du\,dz =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{a+b-1}e^{-u}\frac{z^{b-1}}{(1+z)^{a+b}}\,du\,dz =$$

$$= \int_0^\infty u^{a+b-1}e^{-u}du\int_0^\infty \frac{z^{b-1}}{(1+z)^{a+b}}\,dz =$$

$$= B(a,b)\,\Gamma(a+b).$$

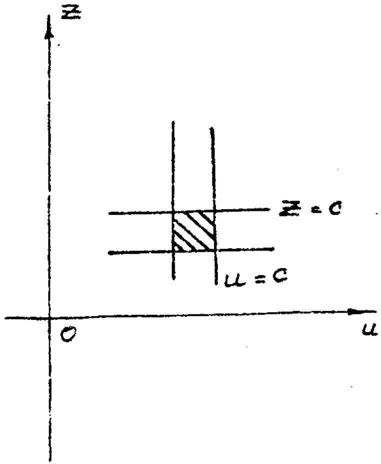

Рис.I.

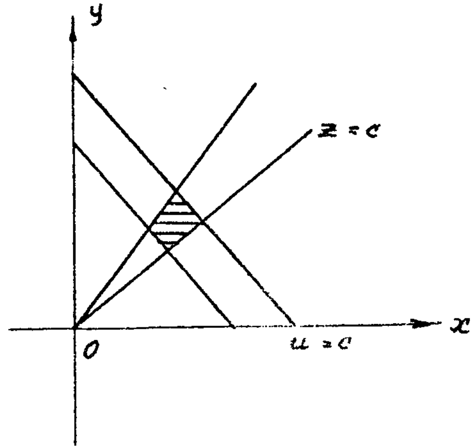

Рис.2.

Итак,

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,. \qquad (8)$$

6. Формула дополнения

Из формулы (8) получаем

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}=B(a,1-a)\,,$$

но $\Gamma(1)=1$ (см.стр. 4), и на основании формулы (6) имеем

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}\,. \qquad (9)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что достаточно табулировать $\Gamma(a)$ для $0<a\leqslant\frac{1}{2}$, а также что

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi\,; \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,;$$

Вычислим важный для теории вероятностей интеграл (Пуассона):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx=\int_0^{\infty}(y^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-y^2}dy^2=2\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$$

Значит

$$\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Примеры.

I. Вычислим $\int_0^{\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$ (n - целое положительное число). Выполнив замену $x^2=y$, получаем

$$\int_0^{\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx=\int_0^{\infty}y^{n}e^{-y}\,d\sqrt{y}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}y^{(n-\frac{1}{2})}e^{-y}dy=$$

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+(n-1)+1\right)=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

2. Вычислим $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$. Полагая $x = y^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$, имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{n}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}-1} dy =$$

$$= \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}.$$

3. Вычислим интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx\ (m>-1,\ n>-1)$. Выполнив замену переменной $\sin x = y^{\frac{1}{2}}$, $\cos x = (1-y)^{\frac{1}{2}}$, $\cos x\, dx = y^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{2}$, найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{m}{2}} (1-y)^{\frac{n-1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{m+1}{2}-1} (1-y)^{\frac{n+1}{2}-1} dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}.$$

В частности,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cos^{14} x\, dx = \frac{1}{2}\ \frac{\Gamma\left(5+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(7+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(13)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(4+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(6+\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{12} = \frac{9!!\ 13!!}{2^{13}\ 12!}\ \pi.$$

7. Формула Стирлинга

Докажем формулу Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

т.е. докажем эквивалентность бесконечно больших величин $n!$ и $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Предварительно заметим, что в применении к функции $\ln(1+x)$ формула Тейлора-Маклорена

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(\theta \cdot x),\quad 0 \le \theta \le 1.$$

дает

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{I0}$$

Воспользуемся равенством

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx. \tag{II}$$

Введем новую переменную (рис.3,4) по формуле:

$$x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2} \qquad -\infty < t < \infty, \tag{I2}$$

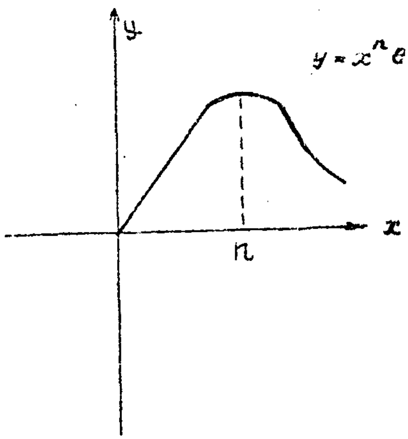

Рис.3.

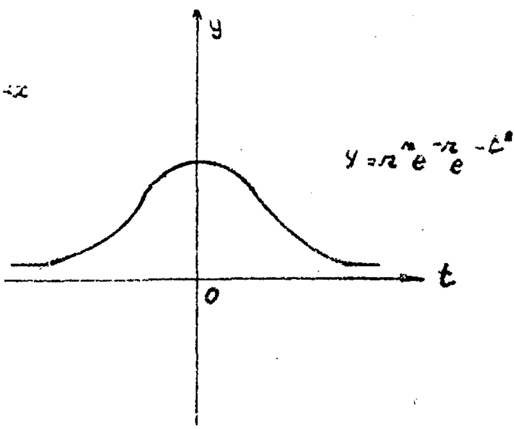

Рис.4.

и вычислим dx. Из (I2) находим:

$$e^{-t^2} = \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}, \quad t^2 = (x-n) - n \ln\frac{x}{n};$$

$$2t\,dt = \left(1 - \frac{n}{x}\right) dx; \quad dx = 2t\,\frac{x}{x-n}\,dt. \tag{I3}$$

На основании (10) получаем

$$t^2=(x-n)-n\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right)=(x-n)-n\left\{\frac{x-n}{n}-\frac{\left(\frac{x-n}{n}\right)^2}{2\left(1+\theta\frac{x-n}{n}\right)^2}\right\}=$$

$$=\frac{n(x-n)^2}{2[n+\theta(x-n)]^2},\qquad 0\leqslant\theta(x)\leqslant 1,$$

$$t=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{x-n}{n+\theta(x-n)}=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{x-n}{(\theta-1)(x-n)+x}=\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\frac{x-n}{x}}{(\theta-1)\frac{x-n}{x}+1}.$$

Отсюда находим $\dfrac{x}{x-n}=\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{n}{2}}+(1-\theta)$

и, подставляя в (13), окончательно найдем dx :

$$dx=2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+(1-\theta)t\right]dt,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Из равенства (11) следует

$$n!=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=\int_{-\infty}^\infty n^n e^{-n}e^{-t^2}2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+(1-\theta)t\right]dt=$$

$$=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}+2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^\infty(1-\theta)t\,e^{-t^2}dt,$$

но

$$\left|\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}(1-\theta)t\,dt\right|\leqslant 2\int_0^\infty e^{-t^2}t\,dt=1,$$

поэтому

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}+n^n e^{-n}\cdot\omega,\ |\omega|\leqslant 1.$$

Значит

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}-1=\frac{\omega}{\sqrt{2\pi n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1.$$

Пример 1. $$\frac{100!}{(50!)^2} \approx \frac{100^{100} e^{-100}\sqrt{200\pi}}{(50^{50} e^{-50}\sqrt{100\pi})^2} = 2^{100}\frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{\pi}} .$$

Пример 2. $$C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{\left[n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right]^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} .$$

Более точно $$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{2n}^{n}\sqrt{\pi n}}{2^{2n}} = 1 .$$

Пример 3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{-1}(2\pi)^{\frac{1}{2n}}(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}} = e .$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Техн.редактор З.М.Синицына   Корректор Е.А.Сальникова

Подписано к печати 28.3.1973

Г-855538   Формат бум. 60х92   Объем 1 печ.л.   Зак.223

Типография ХВВУ