BOREL—STÄCKEL

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Э. БОРЕЛЬ
Профессоръ Сорбонны

Элементарная математика

I. АРИѲМЕТИКА и АЛГЕБРА

Переводъ съ нѣмец. изданія, обработаннаго проф. П. ШТЕККЕЛЕМЪ,

подъ редакціей прив.-доцента В. Ф. КАГАНА

съ приложеніемъ его статьи

О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Франціи и Германіи

MATHESIS

ОДЕССА
Типографія „Техникъ", Успенская ул., д. № 56.
1911.

В. Ф. КАГАНЪ

О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Франціи и Германіи

РЕФОРМА

преподаванія математики въ среднихъ школахъ Франціи и Германіи.

Въ теченіе послѣднихъ десяти лѣтъ въ Германіи и во Франціи происходитъ чрезвычайно интенсивное движеніе въ пользу реформы преподаванія математики въ средней школѣ. Реформа эта, впрочемъ, во Франціи уже почти цѣликомъ проведена; въ Германіи она начинаетъ лишь осуществляться въ меньшихъ ея государствахъ; вопросъ же о систематическомъ проведеніи ея во всей странѣ остается открытымъ и находится еще въ стадіи разработки, споровъ и соглашеній. Но сторонники и руководители движенія очень настойчивы, и мы врядъ ли ошибемся, если скажемъ, что дѣйствующая въ настоящее время международная коммиссія по преподаванію математики призвана къ жизни, главнымъ образомъ, для того, чтобы придать этому движенію, такъ сказать, міровой характеръ.

Настоящее сочиненіе Эм. Бореля, профессора Сорбонны, обработанное П. Штёкелемъ, профессоромъ политехническаго института въ Карлсруэ, представляетъ собой руководство по математикѣ для средней школы въ духѣ этой реформы. Мы считаемъ поэтому полезнымъ предпослать переводу краткое изложеніе сущности и задачъ реформы.

I.

Въ Германіи это движеніе въ такой мѣрѣ тѣсно связано съ организаціей, съ ходомъ развитія средней школы и даже съ борьбой за равноправіе различныхъ ея типовъ, что мы считаемъ необходимымъ прежде всего, хотя бы въ немногихъ словахъ, познакомить читателя съ организаціей и постановкой преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи[1]). Впрочемъ, мы будемъ имѣть въ виду, главнымъ образомъ, прусскую школу; школы остальныхъ германскихъ государствъ, въ общемъ, построены по тому же типу; о болѣе существенныхъ же уклоненіяхъ будутъ сдѣланы указанія.

Въ настоящее время въ Германіи имѣются четыре типа общеобразовательныхъ среднихъ учебныхъ заведеній (Höhere Schulen). Гимназіи (Gymnasium), реальныя гимназіи (Realgymnasium), высшія реальныя училища (Oberrealschulen) представляетъ собой первые три типа. Всѣ эти учрежденія суть девятиклассныя учебныя заведенія, при чемъ приготовительный классъ сюда не включенъ: дѣти поступаютъ въ первый классъ (sexta) въ десятилѣтнемъ возрастѣ, послѣ трехлѣтняго обученія въ приготовительныхъ классахъ, и оканчиваютъ среднюю школу въ возрастѣ 19 — 20 лѣтъ. Имѣются учебныя заведенія, состоящія изъ 6 первыхъ классовъ гимназіи или реальной гимназіи (Progymnasium, Realprogymnasium); мы не относимъ этихъ послѣднихъ къ особымъ типамъ, такъ какъ ихъ программы почти вполнѣ совпадаютъ съ программами первыхъ шести классовъ полной гимназіи. Но шестиклассныя реальныя училища (Realschulen) представляютъ собой особый (четвертый) типъ учебныхъ заведеній; они имѣютъ свою своеобразную программу и стоятъ на рубежѣ между средними учеб-

---

[1]) F. Klein. „Hundert Jahre mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen Preussens“. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 13. (1904).

F. Klein. „Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen“. Vorträge, bearbeitet von R. Schimmack. Leipzig, 1907.

K. Fricke. „Die heutige Lage des naturwissenschaftlich - mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen“. Въ сборникѣ „Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte“, herausgegeben von A. Gutzmer. Leipzig, 1908.

F. Marotte. „L'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne“. Paris, 1905. Извлеченіе изъ этой книжки помѣщено также въ очень интересномъ сборникѣ „Conférences du Musée pédagogique 1904“. L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques par M. M. H. Poincaré, G. Lippmann, L. Poincaré, P. Langevin, E. Borel, F. Marotte avec une introduction de M. Liard. Paris, 1904.

ными заведеніями общеобразовательнаго и спеціальнаго характера. Мы здѣсь оставимъ, однако, эти реальныя училища въ сторонѣ и будемъ имѣть въ виду только полныя среднія учебныя заведенія общеобразовательнаго типа. Мы будемъ называть классы по порядку первымъ, вторымъ и т. д., хотя они тамъ имѣютъ особыя названія[1]).

Германія—страна, въ которой классицизмъ пустилъ болѣе глубокіе корни, чѣмъ гдѣ бы то ни было, и школа филологическаго типа (гимназія) съ обширными программами по древнимъ языкамъ имѣла здѣсь за собой вѣками освященныя традиціи единственной общеобразовательной школы, открывающей двери въ университетъ. Старая германская гимназія давала по математикѣ и естествознанію совершенно ничтожныя свѣдѣнія. Наполеоновскій разгромъ вызвалъ въ Германіи реформу всѣхъ устоевъ политической и общественной жизни, въ томъ числѣ, конечно, и реформу школы. Планы преподаванія были выработаны подъ общимъ руководствомъ Гумбольта Сюверномъ (J. W. Süwern, 1816). Программа по математикѣ была задумана Сюверномъ чрезвычайно широко. Онъ настаивалъ на 6 часахъ математики въ каждомъ изъ 9 классовъ. Тотъ курсъ, который въ настоящее время проходится на всемъ протяженіи гимназіи, по плану Сюверна, долженъ былъ заканчиваться уже въ 5-мъ классѣ. Программу же старшихъ классовъ составляли довольно обширные отдѣлы высшей математики: общая теорія уравненій и методы приближеннаго ихъ рѣшенія, начала ученія о рядахъ, методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, сферическая тригонометрія, аналитическая геометрія, начала неопредѣленнаго анализа, рядъ Тайлора, прикладная математика, въ особенности, механика.

Само собой разумѣется, что дѣйствительно осуществить такую программу было невозможно; въ особенности, если принять во вниманіе, что филологи, въ свою очередь, отнюдь не были склонны поступаться требованіями по древнимъ языкамъ. Программы эти постепенно урѣзывались и измѣнялись, пока,

[1]) Первый классъ называется sexta, второй — quinta, третій — quarta, четвертый — untertertia, пятый — obertertia, шестой — untersecunda, седьмой — obersecunda, восьмой — unterprima, девятый — oberprima.

наконецъ, правилами 1834 года о требованіяхъ на испытаніяхъ зрѣлости не были установлены программы, мало отличающіяся уже отъ тѣхъ, которыя дѣйствуютъ въ настоящее время (см. ниже).

Къ первой четверти XIX столѣтія относится также возникновеніе реальныхъ гимназій и высшихъ реальныхъ училищъ. Реальныя гимназіи сохранили только одинъ изъ древнихъ языковъ — латинскій, а высшія реальныя училища вовсе освобождены отъ древнихъ языковъ. Зато здѣсь усилено преподаваніе естествознанія, математики и новыхъ языковъ (французскій и англійскій). Однако, всѣ правовыя привилегіи (за исключеніемъ тѣхъ, которыя относятся къ отбыванію воинской повинности) были первоначально сохранены за гимназіями: въ силу старыхъ традицій, пожалуй, даже усилившихся временно подъ вліяніемъ такъ называемаго новаго гуманизма, общеобразовательными учрежденіями признавались только строго классическія гимназіи; только онѣ давали свободный доступъ въ университетъ. Но вмѣстѣ съ тѣмъ съ этого именно времени начинается упорная борьба за предоставленіе реальнымъ школамъ тѣхъ же правъ, что и гимназіямъ. Реалисты постепенно получили права для поступленія на медицинскій и нѣкоторыя отдѣленія философскаго факультета. Наконецъ, въ 1900 г. была созвана въ Берлинѣ конференція по вопросамъ средняго образованія, въ которой принялъ участіе и самъ императоръ Вильгельмъ. На этой конференціи огромнымъ большинствомъ было признано желательнымъ дать всѣмъ тремъ типамъ полной средней школы одинаковыя права, что и было проведено въ законодательномъ порядкѣ въ 1902 г. Впрочемъ, право поступленія на богословскій факультетъ и по этому закону даютъ только классическія гимназіи.

Вмѣстѣ съ тѣмъ всѣ стадіи этой борьбы сопровождались нѣкоторыми измѣненіями въ программахъ всѣхъ трехъ типовъ школы, а въ особенности—реальныхъ. Руководящей нитью, можно сказать, строгимъ девизомъ всѣхъ этихъ измѣненій являлось требованіе общаго образованія. Средняя школа, открывающая молодымъ людямъ доступъ въ университетъ, должна быть чужда всякаго спеціальнаго или утилитарнаго характера; она должна служить общему развитію человѣческаго духа, должна формальнымъ, главнымъ образомъ, развитіемъ ума подготовлять юношу къ воспріятію высшей и чистой науки, какая культивируется въ университетахъ вообще, а въ германскихъ въ особенности. Противники реальнаго образованія усматривали опасность именно въ томъ, что естествознаніе и математика придаютъ реальнымъ школамъ болѣе спеціальный характеръ, чѣмъ это допустимо въ „общеобразовательной школѣ"; сторонники его, напротивъ, утверждали, что положительное знаніе содержитъ въ себѣ наиболѣе мощныя средства для развитія молодого ума. Тѣ и другіе сошлись на томъ, что равноправныя школы должны сохранить только тѣ дисциплины соотвѣтствующихъ наукъ, которыя способны, хотя и съ различныхъ сторонъ, содѣйствовать этому возвышенному идеалу гармоническаго развитія человѣческаго духа.

Приведемъ теперь краткія свѣдѣнія о программахъ этихъ учебныхъ заведеній. Число уроковъ по математикѣ удобно обозрѣть въ слѣдующей таблицѣ:

КЛАССЫ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Всего
Гимназія	4	4	4	3	3	4	4	4	4	34
Реальн. гимназія	4	4	4	5	5	5	5	5	5	42
В. Р. училище	5	5	6	6	5	5	5	5	5	47

Что касается самыхъ программъ, то онѣ отличаются въ гимназіяхъ отъ программъ нашихъ гимназій только слѣдующимъ. Изъ курса алгебры опущены неопредѣленныя уравненія и непрерывныя дроби; вмѣсто этого, въ видѣ объединенія алгебры и геометріи, въ старшемъ классѣ вводится ученіе о координатахъ и краткія свѣдѣнія изъ аналитической геометріи, включая сюда и «элементы ученія о коническихъ сѣченіяхъ». Геометрія начинается пропедевтическимъ курсомъ при 2-хъ недѣльныхъ часахъ; въ программу входитъ рѣшеніе конструктивныхъ задачъ и здѣсь попутно излагается ученіе о гармоническомъ дѣленіи и трансверсаляхъ, а также приложеніе алгебры къ геометріи.

Въ программу же реальныхъ гимназій и высшихъ реальныхъ училищъ, сверхъ того, внесено: ученіе о комплексныхъ числахъ, болѣе сложныя уравненія и системы уравненій второй степени и болѣе высокихъ степеней (двучленныя, возвратныя); общее рѣшеніе уравненій 3-ей степени; строка Ньютона при какихъ угодно показателяхъ (особенно подробно въ в. р. училищахъ); ученіе о maxima и minima и, наконецъ, только въ высшихъ реальныхъ училищахъ, нѣкоторые пріемы приближеннаго рѣшенія численныхъ уравненій. Наконецъ, въ программу геометріи для реальныхъ гимназій и в. р. училищъ включены слѣдующіе отдѣлы: сферическая геометрія съ приложеніемъ къ космографіи; начертательная геометрія; синтетическая теорія коническихъ сѣченій; аналитическая геометрія на плоскости (аналитическая теорія коническихъ сѣченій).

Нельзя не отмѣтить, что программы высшихъ реальныхъ училищъ отличаются очень мало отъ программъ реальныхъ гимназій, несмотря на значительно большее число часовъ. Здѣсь требуется, однако, болѣе детальное и тщательное прохожденіе различныхъ частей курса.

Прежде чѣмъ перейти къ вопросу о предполагаемыхъ реформахъ въ преподаваніи математики, мы должны сказать еще нѣсколько словъ о постановкѣ преподаванія естествознанія. Естественнымъ наукамъ, включая сюда физику и химію, отводится въ классическихъ гимназіяхъ 18 часовъ, въ реальныхъ —29, въ высшихъ реальныхъ училищахъ—36. Но одно обстоятельство здѣсь существенно важно отмѣтить, такъ какъ оно сыграло очень большую роль въ томъ движеніи, о которомъ идетъ рѣчь. Съ 1879 г. изъ курса старшихъ классовъ вовсе исключено естествознаніе въ узкомъ смыслѣ этого слова, т. е. біологическія науки и даже минералогія и геологія. Поводомъ къ этому послужилъ такъ называемый Мюллеровскій инцидентъ. То была эпоха, когда ученіе Дарвина, съ одной стороны, такъ сказать, заполонило естествознаніе, а съ другой стороны, вызывало наибольшее раздраженіе въ клерикальныхъ сферахъ. Преподаватель естествознанія въ небольшомъ городкѣ Липштадтѣ, Г. Мюллеръ позволилъ себѣ слишкомъ свободное изложеніе ученія Дарвина въ школѣ. Это надѣлало много шума, и министръ народнаго просвѣщенія съ одобренія палаты исключилъ вовсе естествознаніе изъ курса старшихъ классовъ средней школы.

Какъ видно изъ предыдущаго, дѣйствующія въ настоящее время въ Пруссіи и даже во всей Германіи нормы являются результатомъ конференціи 1900 года. На этой именно конференціи и былъ впервые поставленъ вопросъ о дальнѣйшей реформѣ преподаванія математики въ средней школѣ. Иниціаторомъ движенія является маститый профессоръ Гёттингенскаго университета Ф. Клейнъ (F. Klein). Человѣкъ, занимающій одно изъ первыхъ мѣстъ среди германскихъ ученыхъ, обладающій чрезвычайно широкимъ и разностороннимъ математическимъ образованіемъ, необычайно энергичный, съ живымъ, чтобы не сказать страстнымъ, темпераментомъ, но въ то же время выдержанный и уравновѣшенный и съ рѣдкимъ даромъ слова, Ф. Клейнъ равно импонируетъ какъ профессорской и учительской коллегіи, такъ и обществу и даже правительству. Не будетъ преувеличеніемъ сказать, что все движеніе создано Клейномъ. Однако, на конференціи 1900 г. нужно было быть очень осторожнымъ, чтобы еще не стать на пути предстоявшаго уравненія въ правахъ реальной школы съ классической, чтобы не запугать противниковъ этой реформы. Клейнъ это очень хорошо понималъ, тѣмъ болѣе, что и эта реформа очень многимъ обязана его энергіи. Вотъ почему въ своей рѣчи на конференціи онъ ограничился лишь краткимъ указаніемъ на то, что среди представителей математическихъ наукъ очень распространено убѣжденіе въ необходимости коренной реформы преподаванія математики. Сущность этой реформы должна заключаться, съ одной стороны, въ оживленіи преподаванія математики путемъ сближенія ея теоретическихъ частей съ прикладными, а съ другой стороны, во введеніи въ курсъ средней школы первыхъ началъ высшей математики.[1] На этой конференціи вопросъ о реформѣ не получилъ, однако, дальнѣйшаго движенія: интересъ конференціи былъ сосредоточенъ, какъ мы видѣли, на другихъ вопросахъ, да и Клейнъ ограничился своимъ замѣчаніемъ. Но съ этого именно времени Клейнъ начинаетъ проводить свои тенденціи очень энергично; ближайшимъ его сотрудникомъ въ этомъ дѣлѣ является профессоръ физики въ Гёттингенскомъ университетѣ

[1] „Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. Berlin 6—8 Juni, 1900". Halle, 1901. стр. 153-155.

Е. Рике (E. Riecke). Въ печати, на лекціяхъ, въ засѣданіяхъ ученыхъ обществъ Клейнъ подробно излагаетъ свои идеи. находитъ сторонниковъ, привлекаетъ ихъ къ интенсивному распространенію этихъ идей и къ ихъ осуществленію въ школѣ, насколько это возможно безъ измѣненія дѣйствующихъ нормъ. Особенно благодарной почвой, проводящей новые взгляды какъ разъ въ надлежащее русло, въ среду работающихъ и еще начинающихъ преподавателей, являются каникулярные курсы для учителей, которые устраиваются въ Гёттингенѣ черезъ каждые два года. Съ 1900 г. эти лекціи публикуются, и мы получаемъ возможность такимъ образомъ подробно познакомиться со взглядами Клейна и со всѣмъ ходомъ движенія[1]). Въ журналѣ „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" съ 1909 г. выдѣленъ особый отдѣлъ подъ названіемъ „Reformbewegung", въ которомъ ведется хроника всего движенія.

Мы изложимъ прежде всего, въ чемъ заключается сущность и задача реформы по мнѣнію Клейна и его сторонниковъ; затѣмъ изложимъ историческій ходъ движенія; наконецъ, сообщимъ возраженія, которыя выставляются противниками его.

„Врядъ ли есть предметъ", говоритъ Ф. Клейнъ, „въ преподаваніи котораго царила бы такая рутина, какъ въ преподаваніи математики". Курсъ элементарной математики вылился въ опредѣленныя рамки и точно замеръ въ разъ на всегда установив-

---

[1]) F. Klein und E. Riecke. „Ueber angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen" Leipzig, 1900.

F. Klein und E. Riecke. „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen". Leipzig, 1904. Сборникъ выпущенъ Клейномъ и Рике, но содержитъ рядъ статей другихъ авторовъ, изъ которыхъ особенно интересна статья Гёттинга:

E. Götting, „Ueber das Lehrziel im mathemathischen Unterricht der höheren Lehranstalten."

F. Klein. „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus". Vorlesungen, gehalten im Wintersemester 1907—08, ausgearbeitet von E. Hellinger. Литографированныя лекціи. (Въ ближайшемъ времени выйдутъ въ русскомъ переводѣ въ изданіи т-ва „Mathesis").

Кромѣ того статьи и книги, уже указанныя на стр. II.

шихся предѣлахъ. Отъ времени до времени по тому или иному поводу однѣ задачи замѣняются другими, исключаются одни параграфы и вводятся другіе; но, по существу, на всемъ матеріалѣ школьной математики это почти не отражается, и новые учебники алгебры носятъ отпечатокъ алгебры Эйлера, какъ новые учебники геометріи—отпечатокъ геометріи Лежандра. Можно подумать, что математика—мертвая наука, что въ ней ничего не мѣняется, что въ этой области знанія нѣтъ новыхъ идей,—по крайней мѣрѣ. такихъ, которыя могли бы сдѣлаться достояніемъ неспеціалистовъ, предметомъ общаго образованія. Между тѣмъ это далеко не такъ. Математика XIX столѣтія несомнѣнно принесла съ собой огромный рядъ замѣчательныхъ идей, которыя наложили глубокій отпечатокъ на всѣ отрасли положительнаго знанія, на господствующія философскія воззрѣнія, даже, выражаясь подлинными словами Клейна, на „весь строй нашей культуры“. Совершенно недопустимо поэтому, чтобы образованный человѣкъ былъ совершенно чуждъ всего того, что составляетъ все содержаніе современной математики.

Какое же понятіе въ современной математикѣ доминируетъ? Это есть понятіе о функціи. Изученіе функціи составляетъ предметъ, можно сказать, всей высшей математики; установленіе функціональной зависимости между различнаго рода факторами составляетъ задачу прикладной математики. Между тѣмъ въ программу средней школы понятіе о функціи почти вовсе не входитъ; о немъ вскользь упоминаютъ въ тригонометріи; даже аналитическая геометрія, какъ увѣряетъ Клейнъ, въ нѣмецкой школѣ преподается такъ, что понятіе о функціи остается въ тѣни.

Здѣсь именно должна начаться реформа. Понятіе о функціи должно играть основную, такъ сказать, руководящую роль въ курсѣ средней школы. Понятіе это должно быть выяснено дѣтямъ уже въ четвертомъ классѣ и съ этой поры оно должно проникать собой весь курсъ алгебры и геометріи. Сначала нужно выяснить это понятіе графически, начиная съ простѣйшихъ частныхъ примѣровъ; затѣмъ нужно приводить многообразные примѣры функціональной зависимости изъ повседневной жизни; наконецъ, — нужно изучить простѣйшія алгебраическія функціи: линейныя, квадратныя и т. д., пріучить учащихся изслѣдовать ходъ ихъ измѣненія, ихъ особенныя (критическія) точки. При этомъ нужно заставлять учащихся самихъ вычерчивать соотвѣтствующія кривыя, пользоваться клѣтчатой бумагой и т. д. Въ конечномъ результатѣ каждая кривая и каждое алгебраическое выраженіе должно претворяться въ умѣ юноши въ нѣкоторую функціональную зависимость. Приверженцы реформы придумали даже новый терминъ—„functionales Denken"; переведемъ его дословно „функціональное мышленіе", хотя слово „функціональный" у насъ употребляется обыкновенно въ иномъ значеніи.

Такъ вотъ—развить въ юношѣ способность къ функціональному мышленію составляетъ первую задачу реформы. Клейнъ подчеркиваетъ при этомъ, что здѣсь дѣло отнюдь не должно сводиться къ тому, чтобы дать учащимся опредѣленіе функціи. „Учениковъ многому учатъ", говоритъ Клейнъ, „и не мало чего они выучиваютъ; но не многое дѣйствительно становится полнымъ достояніемъ ихъ ума". Нужно, чтобы понятіе о функціи и его значеніе въ математикѣ и въ ея элементарныхъ приложеніяхъ было вполнѣ усвоено учащимися, сдѣлалось бы ихъ полнымъ достояніемъ. А для этого, какъ уже сказано, нужно, чтобы понятіе о функціи проникало собой все преподаваніе въ школѣ.

Но изученіе функцій, ихъ возрастанія и убыванія необходимо и естественно приводитъ къ понятію о производной. Мы приходимъ ко второму требованію реформаторовъ: въ программу средней школы должны быть внесены элементы высшей математики. Въ какомъ объемѣ, въ какой послѣдовательности это должно быть сдѣлано, это должно зависѣть отчасти отъ типа учебнаго заведенія, отчасти—отъ преподавателя; но это должно быть сдѣлано во всякомъ случаѣ. Это мотивируется слѣдующимъ образомъ. Основныя понятія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія играютъ въ настоящее время такую роль во всѣхъ отрасляхъ и приложеніяхъ математики, что обойтись безъ нихъ совершенно невозможно. Въ механикѣ при опредѣленіи понятій о скорости, объ ускореніи, о центробѣжной силѣ, во всевозможныхъ отдѣлахъ физики, которыя въ средней школѣ проходятся, мы фактически оперируемъ надъ производными; почему же не назвать ихъ настоящимъ именемъ? Клейнъ высказываетъ убѣжденіе, что искусственные пріемы, къ которымъ прибѣгаютъ въ каждомъ частномъ случаѣ, чтобы избѣжать понятія о производной и объ интегралѣ, только сбиваютъ учащихся, создаютъ въ ихъ головѣ путаницу и даже отнимаютъ много лишняго времени. Было бы гораздо проще и продуктивнѣе выяснить эти понятія въ общемъ видѣ на урокахъ математики, а потомъ пользоваться ими въ приложеніяхъ. Клейнъ указываетъ, что придуманы даже особые термины, которые представляютъ собой только иное, быть можетъ, нѣсколько болѣе образное названіе производной; такъ, напримѣръ, во многихъ элементарныхъ сочиненіяхъ по механикѣ и физикѣ можно въ настоящее время встрѣтить терминъ Gefälle (Potentialgefälle, Temperaturgefälle, паденіе потенціала, температуры), истинное значеніе котораго есть производная.

Клейнъ приводитъ слѣдующее правило, заимствованное изъ наиболѣе распространенныхъ въ Германіи учебниковъ элементарной математики, для опредѣленія максимума и минимума нѣкотораго „выраженія" (чтобы не сказать: функціи). „Нужно въ этомъ выраженіи замѣнить x черезъ x' и полученное новое выраженіе вычесть изъ первоначальнаго; полученную разность нужно раздѣлить на $x - x'$ и опредѣлить, во что обратится частное, если мы сдѣлаемъ $x' = x$. Этотъ послѣдній результатъ, содержащій, слѣдовательно, только x, нужно приравнять нулю; полученное такимъ образомъ уравненіе даетъ значеніе x, при которомъ выраженіе пріобрѣтаетъ наибольшее или наименьшее значеніе". „И вотъ такую тираду (содержащую къ тому же совершенно ненужныя неточности)", восклицаетъ Клейнъ: „намъ предлагаютъ вмѣсто того, чтобы одинъ разъ опредѣлить, что такое производная, а затѣмъ указать, что значенія независимой перемѣнной, при которыхъ функція достигаетъ максимума или минимума (буде таковы существуютъ), обращаютъ производную въ нуль". Любопытно, что самый этотъ пріемъ германскія руководства приписываютъ нѣкоему Шельбаху (K. Schellbach). Карлъ Шельбахъ въ теченіе продолжительнаго времени состоялъ преподавателемъ математики въ наиболѣе извѣстной гимназіи въ Берлинѣ (Friedrich-Wilhelm-Gymnasium). Это былъ очень даровитый педагогъ, изъ школы котораго вышли многіе выдающіеся германскіе математики, составляющіе въ настоящее время украшеніе германскихъ университетовъ: Г. Канторъ, А. Клебшъ, Л. Фуксъ, Л. Кенигсбергеръ, Е. Нетто, К. Нейманъ, А. Шёнфлисъ, Г. Шварцъ. Шельбахъ былъ большимъ сторонникомъ введенія элементовъ высшаго анализа въ среднюю школу. Но эпоха, когда онъ дѣйствовалъ, представляла собой реакцію противъ несомнѣннаго перегруженія Сювернской программы, и расширеніе программы по математикѣ начальствомъ рѣшительно не допускалось. Шельбахъ былъ, такимъ образомъ, вынужденъ „скрывать производныя отъ глазъ начальства" и облекъ потому извѣстное правило въ такую форму, какая „подобаетъ" средней школѣ; и вотъ этотъ пріемъ пріобрѣтаетъ названіе „правила Шельбаха"!

Клейнъ указываетъ далѣе, что элементы, хотя бы самыя основныя понятія изъ анализа безконечно малыхъ, въ приложеніи къ физикѣ въ такой мѣрѣ необходимы, что нѣкоторые авторы оказываются вынужденными предпослать своему изложенію, хотя бы на нѣсколькихъ страницахъ, краткія свѣдѣнія изъ началъ анализа.

Итакъ, представляется яснымъ, что введеніе началъ анализа безконечно малыхъ въ курсъ средней школы въ высшей степени желательно; сторонники реформы находятъ это безусловно необходимымъ. Вопросъ, такимъ образомъ, заключается только въ томъ, насколько это фактически осуществимо. Первый наиболѣе серьезный вопросъ, который возникаетъ при всякой попыткѣ расширенія курса, заключается въ опасности переобремененія учащихся. Клейнъ категорически заявляетъ что никакое переобремененіе недопустимо; число часовъ, удѣляемыхъ математикѣ, не подлежитъ увеличенію; новые отдѣлы должны быть введены за счетъ другихъ частей программы, традиціонно въ ней сохраняющихся и могущихъ быть опущенными безъ всякаго вреда для дѣла.

Прежде всего въ учебныхъ завденіяхъ различныхъ типовъ начала анализа безконечно малыхъ должны быть введены въ различномъ объемѣ. Въ гимназіяхъ можно ограничиться только самыми понятіями о производной и объ интегралѣ и выводомъ производныхъ и интеграловъ для нѣсколькихъ простѣйшихъ функцій; въ реальныхъ гимназіяхъ сюда могли бы быть присоединены еще основныя теоремы дифференціальнаго исчисленія, а въ высшихъ реальныхъ училищахъ можно было бы наладить уже довольно систематическій курсъ приблизительно въ томъ видѣ, въ какомъ онъ теперь читается на 1-мъ курсѣ нѣкоторыхъ высшихъ спеціальныхъ учебныхъ заведеній. Сообразно съ этимъ и сокращать дѣйствующія программы пришлось бы въ различной степени. Такъ, въ гимназіяхъ пришлось бы выиграть лишь немного времени, и этого можно было бы легко достигнуть, если отказаться отъ болѣе сложныхъ конструктивныхъ задачъ (которыя здѣсь иногда доводятся до Аполлоніевой задачи), отъ болѣе сложныхъ уравненій, требующихъ искусственныхъ способовъ рѣшенія. Въ реальныхъ учрежденіяхъ необходимо освободить значительно больше времени; но здѣсь гораздо больше и балласта, который Клейнъ предлагаетъ выбросить съ совершенно легкимъ сердцемъ. Онъ, считаетъ, напримѣръ, совершенно безполезнымъ рѣшеніе уравненій 3-ьей степени, тѣмъ болѣе, что практически пользоваться формулой Кардана учащіеся не умѣютъ, да часто и не могутъ. Онъ считаетъ, что излагаемый въ средней школѣ выводъ строки Ньютона для всевозможныхъ показателей неудовлетворителенъ, поглощаетъ много времени и потому безполезенъ. Онъ находитъ, что изъ сферической геометріи слѣдуетъ ограничиться болѣе элементарными свѣдѣніями и, въ крайнемъ случаѣ, онъ готовъ отказаться отъ ученія о комплексныхъ величинахъ въ пользу ученія о безконечно малыхъ. Этимъ, безъ сомнѣнія, можно выиграть необходимое время, тѣмъ болѣе, что въ высшихъ реальныхъ училищахъ его и такъ удѣлено математикѣ много.

Такимъ образомъ это опаснѣйшеее возраженіе, по мнѣнію реформаторовъ, совершенно устраняется. Остаются возраженія другого рода. Прежде всего, не нарушается ли основной девизъ общеобразовательной средней германской школы, не вносятся ли такимъ образомъ въ программу общаго образованія спеціальныя вещи, которыя нужны только будущимъ математикамъ? Клейнъ и его сторонники рѣшительно это отрицаютъ. Тѣ идеи, которыя предполагается сообщить учащимся и которыя составляютъ квинтъ-эссенцію ученія безконечно малыхъ, можетъ быть, болѣе, чѣмъ какіе бы то ни было элементы математики, могутъ способствовать общему развитію ума. Какъ уже было сказано выше, эти идеи проникаютъ собою всѣ различныя приложенія математики,—Клейнъ говоритъ больше — всѣ стороны современной культуры. Да и можетъ ли быть въ настоящее время какая бы то ни было рѣчь о томъ, что начала высшей математики нужны только математикамъ? Они теперь безусловно необходимы химику, физику, біологу, медику; они проложили себѣ путь въ нѣкоторыя дисциплины юридическаго факультета; неужели, наконецъ, противъ этого рѣшатся возвысить голосъ даже заклятые враги реальной школы — германскіе филологи, которые такъ настаиваютъ на философскомъ образованіи? Развѣ можетъ быть въ настоящее время рѣчь о философскомъ образованіи на какой бы то ни было ступени безъ знакомства съ началами высшей математики? Итакъ, основной принципъ, который твердо проводится въ германской школѣ въ теченіе столѣтія и который былъ еще разъ настойчиво подтвержденъ конференціей 1900 года, какъ основное условіе равноправія школъ, предлагаемой реформой не только не будетъ нарушенъ, но получитъ этимъ путемъ прямое осуществленіе.

Поднимаются, однако, возраженія другого рода. Достояніемъ средней школы должны быть только элементарныя вещи, въ частности, элементарная математика. Клейнъ готовъ съ этимъ согласиться; но вопросъ переходитъ, такъ сказать, съ педагогической точки зрѣнія на логическую. Что такое элементарная математика, чѣмъ опредѣляются ея границы? Клейнъ разбираетъ всевозможныя опредѣленія элементарной математики, какія обыкновенно предлагаются, и обнаруживаетъ ихъ несостоятельность, по крайней мѣрѣ отсутствіе въ нихъ опредѣленныхъ границъ. Клейнъ указываетъ, что начала науки, которыя такъ обычно относятъ къ средней школѣ, менѣе всего элементарны съ точки зрѣнія ихъ доступности. Опредѣленіе элементарной математики, какъ той части, которая свободна отъ ученія о предѣлахъ, явно также не выдерживаетъ критики. Конечно, если сказать, что элементарной математикой называется та, которая не восходитъ до дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія или, можетъ быть, еще лучше та, которая предусмотрѣна дѣйствующими программами средней школы, то мы будемъ стоять на болѣе опредѣленной почвѣ; но врядъ ли кто либо найдетъ тогда возможнымъ отказываться отъ высшей математики въ средней школѣ только потому, что эти вещи не элементарны: вѣдь онѣ сдѣлаются элементарными съ того момента, какъ получатъ законодательную санкцію и войдутъ въ новыя программы. Клейнъ знаетъ только одно правильное опредѣленіе элементарной математики: элементарно то, что доступно юношѣ школьнаго возраста среднихъ способностей. Съ этой точки зрѣнія, по его убѣжденію, начала анализа безконечно малыхъ въ настоящее время безусловно элементарны. Конечно, многое зависитъ здѣсь отъ изложенія. Это естественно приводитъ насъ къ третьему основному положенію реформаторовъ.

Преподаваніе должно быть нагляднымъ. Клейнъ слишкомъ опытный математикъ и педагогъ, чтобы не понять, какую скользкую почву можетъ составить этотъ принципъ и какъ трудно его провести во всей чистотѣ; онъ и останавливается поэтому подробно на выясненіи того, что онъ, собственно, подъ этимъ разумѣетъ. Онъ полагаетъ, что на первыхъ ступеняхъ преподаванія надо отказаться отъ строго логическихъ тенденцій; нужно больше интуиціи, нужно возможно большее число примѣровъ изъ повседневной жизни. Особенно много Клейнъ и его приверженцы ставятъ на графическія изображенія алгебраическихъ функцій. Онъ считаетъ неоходимымъ, чтобы учащіеся сами вычерчивали такого рода изображенія, чтобы они широко пользовались клѣтчатой бумагой, чтобы они знакомились съ термометрическими, барометрическими, статистическими кривыми, съ графиками желѣзныхъ дорогъ и т. д. Тѣмъ не менѣе, Клейнъ настаиваетъ, чтобы въ двухъ старшихъ классахъ логическая сторона дѣла, по возможности, въ достаточной мѣрѣ выяснялась. Слѣдующее положеніе, очень существенное, мы считаемъ необходимымъ привести въ подлинныхъ выраженіяхъ: „во всякомъ случаѣ нужно избѣгать выдавать за доказательство такого рода соображенія, которыя рѣшительно не представляютъ собой такового". (Unter allen Umständen vermeide man es, eine Ueberlegung als Beweis anzugeben, wenn sie das in keiner Weise ist)[1]. Реформаторы много говорятъ объ эвристической формѣ преподаванія; но на этомъ мы уже не будемъ подробно останавливаться: врядъ ли какой-либо педагогъ въ настоящее время не знаетъ, какую пользу могутъ иногда приносить эвристическіе

[1]) „Der mathematische Unterricht" (см. вын. на стр. VIII), стр. 165.

пріемы обученія; но врядъ ли кто-либо, дѣйствительно знающій школу, будетъ утверждать, что ихъ возможно широко проводить при существующей организаціи школы [2]).

Итакъ, функціональное мышленіе, начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, наглядное преподаваніе, и прежде всего графическія изображенія—вотъ тѣ начала, которыя должны быть призваны освѣжить и оживить преподаваніе математики въ средней школѣ.

Обратимся теперь къ тому, что было сдѣлано для осуществленія этой реформы. Чтобы получить поддержку, Клейнъ и его приверженцы примкнули къ движенію натуралистовъ, которое, впрочемъ, и они поддерживаютъ съ полнымъ сознаніемъ правильности его задачъ. Какъ мы указали выше, съ 1879 г. естествознаніе было устранено изъ старшихъ классовъ средней школы; конференція же 1900 г. и послѣдовавшія за ней новыя программы оставили эту сторону дѣла безъ измѣненія. Это и вызвало движеніе со стороны біологовъ. Вопросъ былъ выдвинутъ впервые на 73-ьемъ съѣздѣ германскихъ естествоиспытателей и врачей, имѣвшемъ мѣсто въ Гамбургѣ въ 1901 г. Именно, секціи зоологіи, ботаники, минералогіи и геологіи, анатоміи и физіологіи выработали рядъ тезисовъ, касающихся необходимости преподаванія біологическихъ наукъ въ старшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній. Особый комитетъ, который, собственно, эти тезисы выработалъ, настоялъ на томъ, чтобы они были доложены общему собранію. Они, дѣйствительно, и были сообщены въ 1903 г. общему собранію съѣзда германскихъ естествоиспытетлей и врачей въ Касселѣ. Здѣсь выступилъ съ своими заявленіями и Клейнъ. Онъ сообщилъ, что реформа преподаванія положительнаго знанія (Realien) занимаетъ не только естествоиспытателей, но и математиковъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ Клейнъ въ краткихъ словахъ развернулъ свою программу. Хотя тезисы и заявленія Клейна вызвали въ собраніи полное сочувствіе и были даже сдѣланы предложенія о томъ,

---

[2]) См., напримѣръ, дискуссію по поводу доклада Маротта въ французскомъ сборникѣ, приведенномъ на стр. VIII.

чтобы собраніе приняло всѣ тезисы, но противъ этого былъ самъ Клейнъ. Онъ находилъ, что собраніе, въ сущности, не было достаточно подготовлёно къ обсужденію вопросовъ такой серьезной важности, и принятіе въ этомъ смыслѣ резолюціи могло бы быть равносильнымъ сдачѣ всего дѣла въ архивъ. Клейнъ предложилъ вмѣсто этого передать тезисы для ближайшей разработки президіуму съ тѣмъ, чтобы вопросъ былъ подвергнутъ разностороннему обсужденію на съѣздѣ въ Бреславлѣ. И дѣйствительно, въ 1904 г. на Бреславльскомъ съѣздѣ вопросъ получилъ гораздо болѣе детальную разработку. Ему было посвящено особое общее собраніе, подготовленное президіумомъ. Засѣданіе было открыто рѣчью К. Фрике (K. Fricke) „О современномъ состояніи преподаванія естествознанія и математики въ средней школѣ". За нимъ слѣдовали доклады Клейна—„О преподаваніи математики и физики" и проф. Меркеля (Fr. Merkel, Goettingen) — „О преподаваніи біологическихъ наукъ"; въ заключеніе проф. Лейбушеръ (G. Leubuscher — Meinigen) представилъ соображенія о возможности проведенія реформы съ точки зрѣнія школьной гигіены. Наконецъ, слово было предоставлено цѣлому ряду представителей различныхъ ученыхъ обществъ, интересующихся естествознаніемъ и математикой. Мы не станемъ здѣсь излагать подробностей этихъ докладовъ, которыя читатель найдетъ въ отчетѣ, указанномъ на стр. VIII; приведемъ только слѣдующую резолюцію, принятую съѣздомъ: „Вполнѣ признавая большую важность вопросовъ, которые были подвергнуты обсужденію, собраніе высказываетъ президіуму пожеланіе, чтобы эти вопросы были подвернуты дальнѣйшей разработкѣ въ особой коммиссіи. Коммиссія эта должна имѣть возможно болѣе разнообразный составъ и должна представить такую сводку всѣхъ сдѣланныхъ здѣсь предложеній, которая могла бы объединить различныя требованія и послужила бы предметомъ обсужденія слѣдующаго съѣзда".

Въ составъ коммиссіи вошли выдающіеся представители германскаго ученаго и педагогическаго міра (Гутцмеръ, Клейнъ, Крепелинъ, Ферворнъ и др.). Коммиссія дѣйствовала три года и, несомнѣнно, проявила очень интенсивную дѣятельность. Уже къ съѣзду въ Меранѣ (1905) она составила подробныя программы для среднихъ учебныхъ заведеній основныхъ трехъ типовъ съ объяснительными записками къ нимъ. Къ съѣзду въ Штутгартѣ (1906) были выработаны программы для другихъ среднихъ учебныхъ заведеній (женскія гимназіи, реальныя училища, реформированныя школы); наконецъ, къ съѣзду въ Дрезденѣ (1907) былъ представленъ подробный планъ, касающійся подготовленія учителей. Въ 1908 г. предсѣдатель коммиссіи проф. Гутцмеръ выпустилъ подробный докладъ о ея дѣятельности (см. выноску на стр. VIII). Докладъ содержитъ 323 стр. убористаго текста и представляетъ собой несомнѣнно цѣнный вкладъ въ педагогическую литературу. Но наиболѣе важное значеніе имѣетъ программа, выработанная коммиссіей еще въ первый годъ ея дѣятельности. Эта „Меранская программа“ стала лозунгомъ реформы средней школы и мы считаемъ необходимымъ привести программу по математикѣ цѣликомъ. Предварительно сдѣлаемъ еще, однако, слѣдующія замѣчанія. Провести черезъ весь курсъ, такъ сказать, функціональную постановку коммиссія признала вполнѣ желательнымъ и возможнымъ. Что же касается началъ высшей математики, то отъ введеніи ихъ въ гимназію коммиссія отказалась, но признала желательнымъ введеніе этихъ отдѣловъ въ курсъ реальныхъ учрежденій. Подробный планъ выработанъ, однако, только для гимназій. Коммиссія нашла, что реальныя школы еще слишкомъ недавно пережили довольно коренную ломку при уравненіи ихъ въ правахъ съ гимназіями; къ тому же программы въ различныхъ реальныхъ учрежденіяхъ значительно отличаются одна отъ другой, и довольно трудно, да и не нужно, вырабатывать для нихъ общую схему.

Меранская программа[1])

I классъ (sexta).

Основные способы производства дѣйствій надъ цѣлыми числами, отвлеченными и именованными, въ ограниченномъ интервалѣ.[2]) Упражненія въ десятичной нумераціи и въ простѣйшихъ

---

[1]) Набранное въ разрядку представляетъ болѣе существенное нововведеніе реформы.

[2]) Въ объяснительной запискѣ указывается, что нужно ограничиваться числами до милліона.

вычисленіяхъ въ десятичной системѣ въ видѣ подготовки къ дѣйствіямъ надъ дробями. Ознакомленіе съ германскими мѣрами, вѣсами и монетами.

II классъ (quinta).

Счетъ (Rechnen). Дальнѣйшія упражненія въ дѣйствіяхъ надъ именованными десятичными числами; ознакомленіе съ иностранными мѣрами и монетами; упражненія въ производствѣ измѣреній различнаго рода протяженій; простѣйшія вычисленія площадей и объемовъ; зависимость между объемомъ и вѣсомъ. (При всѣхъ этихъ вычисленіяхъ нужно стараться научить дѣтей подсчитывать примѣрный результатъ до подробныхъ вычисленій). О дѣлимости чиселъ. Простыя дроби (сначала въ видѣ именованныхъ чиселъ).

Пропедевтическій курсъ геометріи [1]). Ознакомленіе съ основными пространственными представленіями, однако такъ, чтобы преобладали планиметрическіе образы и соотношенія. Пространственныя протяженія, плоскости, линіи, точки; выясненіе этихъ понятій на окружающихъ предметахъ, по возможности, разнообразнѣе. Плоскія фигуры, сначала, какъ части границы тѣлъ, а затѣмъ, какъ самостоятельные образы, на которыхъ нужно выяснить понятія о направленіи, объ углѣ, о параллелизмѣ, о симметріи. Упражненія въ употребленіи циркуля и линейки; постоянныя упражненія въ черченіи и въ производствѣ измѣреній.

III классъ (quarta).

Счетъ. Десятичныя дроби. Сокращенныя и приближенныя вычисленія (простѣйшіе случаи). Тройныя правила (избѣгать всякаго увлеченія схематическими правилами). Задачи изъ обыкновенной гражданской жизни (проценты, учетъ векселей, процентныя скидки). Подготовленіе къ обученію ариѳметики путемъ повторнаго рѣшенія важнѣйшихъ задачъ въ буквенныхъ обозначеніяхъ. Толкованіе заданныхъ буквенныхъ выраженій и вычисленіе таковыхъ при подстановкѣ численныхъ значеній. Связь между устными вычисленіями и употребленіемъ скобокъ.

---

[1]) Старыя программы относили этотъ курсъ къ 3-му классу.

Геометрія. Ученіе о прямыхъ, объ углахъ и о треугольникахъ. Движеніе фигуръ. Зависимость однихъ элементовъ треугольника отъ другихъ; частные случаи (прямоугольные, равнобедренные, равносторонніе треоугольники). Простыя теоремы о параллелограммахъ, основанныя на построеніи этихъ фигуръ.

IV классъ (Untertertia).

Ариѳметика. Систематическая сводка основныхъ правилъ ариѳметическихъ дѣйствій, выраженныхъ буквами. Понятіе объ относительныхъ величинахъ (выяснить сначала на конкретныхъ примѣрахъ, а затѣмъ на числовой прямой). Дѣйствія надъ относительными величинами. Дальнѣйшія упражненія въ нахожденіи численныхъ значеній буквенныхъ выраженій при положительныхъ и отрицательныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ. Выясненіе функціональнаго характера буквенныхъ выраженій. Разница между тождествами и уравненіями. Уравненія первой степени съ одной неизвѣстной.

Геометрія. Продолженіе ученія о параллелограммѣ, трапеція. Основныя предложенія ученія о кругѣ. Разборъ того вліянія, которое оказываетъ измѣненіе длинъ отдѣльныхъ элементовъ на величину фигуры. Построенія, примыкающія къ этому курсу; однако, всякія задачи, требующія искусственныхъ методовъ, должны быть рѣшителлно устранены.

V классъ (obertertia)

Ариѳметика. Дополненіе и развитіе дѣйствій надъ буквенными выраженіями; разложеніе многочленовъ. Простѣйшія предложенія о пропорціяхъ. Уравненія первой степени съ одной и съ нѣсколькими неизвѣстными. Зависимость буквеннаго выраженія отъ входящихъ въ него перемѣнныхъ. Графическое изображеніе линейныхъ функцій и примѣненіе этого изображенія къ рѣшенію уравненій.

Геометрія. Сравненіе и измѣреніе площадей болѣе сложныхъ прямолинейныхъ фигуръ. Приближенное вычисленіе площадей криволинейныхъ фигуръ. Повтореніе задачъ, относящихся къ пространственнымъ вычисленіямъ, и повтореніе вычисленій, которыя производились уже со второго класса.

VI классъ (Untesecunda).

Ариѳметика. Степени и корни. Уравненія второй степени съ одной неизвѣстной. Соотношенія между коэффиціентами и корнями. Изслѣдованіе квадратнаго выраженія, зависящаго отъ одной перемѣнной, графическимъ методомъ. Рѣшеніе задачъ второй степени съ одной неизвѣстной посредствомъ пересѣченія прямыхъ и параболъ. Графифическое изображеніе, какъ средство нагляднаго выраженія эмпирическихъ результатовъ.

Геометрія. Ученіе о подобіи и о подобномъ расположеніи фигуръ. Пропорціональныя линіи въ кругѣ. Приближенныя вычисленія длины окружности и площади круга при помощи правильныхъ многоугольниковъ. Подробное изслѣдованіе зависимости отношеній сторонъ треугольника отъ его угловъ, — въ особенности, въ прямоугольныхъ треугольникахъ (какъ подготовка къ тригонометріи); практическія задачи, измѣренія при помощи астролябіи.

VII классъ (Obersecunda).

Ариѳметика. Развитіе понятія о степени. Выясненіе перехода отъ этого понятія къ показательной функціи. Понятіе о логариѳмахъ и ихъ примѣненіяхъ. Ариѳметическіе ряды перваго порядка и геометрическіе ряды. Приложеніе къ вычисленію сложныхъ процентовъ и ренты (простѣйшія задачи, заимствованныя изъ дѣйствительной жизни). Графическое изображеніе взаимной зависимости логариѳма и антилогариѳма. Рѣшеніе квадратныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными путемъ вычисленія и графическими методами. Счетная линейка.

Геометрія. Тригонометрія въ связи съ конструктивной планиметріей. Примѣненіе къ практическимъ задачамъ, связаннымъ съ рѣшеніемъ треугольниковъ и четырехугольниковъ. Характеристика взаимной зависимости измѣненія угловъ и ихъ функцій какъ на основаніи формулъ гоніометріи, такъ и путемъ графическаго ихъ изображенія. Рѣшенія соотвѣтствующихъ задачъ различными способами, построеніемъ и вычисленіемъ. Ознакомленіе съ гармоническимъ соотвѣтствіемъ и съ началами новой геометріи въ качествѣ заключительной главы планиметріи.

VIII классъ (Unterprima)

Связный обзоръ изученныхъ до сихъ поръ функцій. Изученіе ихъ возрастанія и убыванія (по возможности введеніе понятій о дифференціалѣ и интегралѣ). Многочисленные примѣры изъ геометріи, физики и механики. Простѣйшія предложенія изъ теоріи соединеній; примѣры. Общій обзоръ систематическаго развитія понятія о числѣ вплоть до комплексныхъ чиселъ включительно.

Геометрія. Стереометрія въ связи съ важнѣйшими началами проективной геометріи. Упражненія въ стереометрическомъ черченіи. Простѣйшія предложенія сферической тригонометріи. Математическая географія, включая ученіе о картографіи.

IX классъ.

1. Ученіе о коническихъ сѣченіяхъ, какъ въ аналитической, такъ и въ синтетической обработкѣ; элементарныя приложенія къ астрономіи.

2. Повтореніе всего курса, главнымъ образомъ, путемъ рѣшенія сложныхъ задачъ, путемъ вычисленія и графическимъ методомъ.

3. Обзоръ важнѣйшихъ частей курса съ исторической и философской точки зрѣнія.

Мы не будемъ приводить объяснительной записки, которая содержитъ повторенія того, что уже изложено выше, и нѣкоторыя детали относительно того, какъ провести функціональное мышленіе.

Какъ видно изъ этой программы, изъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія вводятся только начатки; но реформаторы настаиваютъ на томъ, чтобы въ реальныхъ учебныхъ заведеніяхъ это было проведено въ значительно большемъ размѣрѣ.

Въ дальнѣйшей своей дѣятельности коммиссія выработала программы для учебныхъ заведеній другихъ типовъ (женскихъ гимназій, учительскихъ институтовъ и т. д.) Очень интересны программы по физикѣ, вопросъ о практическихъ занятіяхъ и т. д. Вообще, если принять во вниманіе, что коммиссія детально разсмотрѣла и согласовала проекты преподаванія по всѣмъ отдѣламъ положительнаго знанія, то нужно будетъ признать, что она проявила очень интенсивную и плодотворную дѣятельность. Отчетъ коммиссіи представляетъ глубочайшій интересъ для всѣхъ, интересующихся педагогическимъ дѣломъ вообще и преподаваніемъ точныхъ наукъ, въ частности. Мы считаемъ нужнымъ обратить вниманіе читателя на то, что въ концѣ отчета приведены подробныя библіографическія указанія, относящіяся къ реформѣ преподаванія точнаго знанія въ средней школѣ.

Тенденціи реформаторовъ, породившія въ Германіи такъ много сторонниковъ, естественно имѣютъ и серьезныхъ противниковъ. Въ литературѣ вопроса можно найти не мало статей въ этомъ направленіи. Но наиболѣе рѣшительно выступили противъ тенденцій Клейна Г. Гольцмюллеръ, бывшій долгое время директоромъ реальнаго училища и средняго техническаго учебнаго заведенія, и М. Симонъ, извѣстный въ Германіи педагогъ. [1])

Возраженія противниковъ движенія сводятся, главнымъ образомъ, къ слѣдующему.

Во-первыхъ, относительно „функціональнаго мышленія" всѣ согласны съ тѣмъ, что понятіе о функціи должно найти мѣсто въ школьномъ преподаваніи, что оно должно быть достаточно подчеркнуто и выяснено; противники полагаютъ, однако, что эта сторона дѣла сторонниками реформы слишкомъ муссируется. „Нельзя не подивиться тому шуму" пишетъ Рихтеръ, „который

---

[1]) G. Holzmüller „Ist es möglich und wünschenswerth die Differential- und Integralrechnung in den Lehrplan der höheren Schulen aufzunehmen?" Monatschrift für höhere Schulen. II, 1903.

M. Simon. „Zu den Klein-Gutzmerchen Vorschlägen", Südwestdeutsche Schulblätter. 24. 1904.

M. Simon „Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik„ 2. Auflage. München. 1908.

поднять по вопросу о „функціональномъ мышленіи“ [1]). Находятъ что понятіе это очень доступно ученикамъ и безъ „крупной реформы“, „безъ всякаго переворота“ можетъ быть включено въ программу школьнаго знанія.

Клейнъ возражаетъ на это, что безъ переворота можетъ быть проведена вся реформа, что ни о какомъ переворотѣ собственно не было и рѣчи. Но, если его противники полагаютъ, что его предложенія сводятся къ тому, чтобы сообщить ученикамъ, что такое функція, то они ошибаются. Провести эту идею черезъ все преподаваніе—вотъ въ чемъ заключается задача; а это требуетъ существеннаго измѣненія установившейся системы преподаванія въ школѣ.

Далѣе Гольцмюллеръ и Симонъ согласно заявляютъ, что начала анализа совсѣмъ не такъ легки, какъ это утверждаютъ Клейнъ и его сторонники. Прежде всего, что это будетъ за анализъ? Сколько-нибудь строгая постановка этого предмета въ школѣ невозможна,— этого не отрицаютъ и сторонники реформы [2]). А въ такомъ случаѣ получится своего рода научный флиртъ, „кокетничаніе съ высшимъ анализомъ“ (Гольцмюллеръ), что въ школѣ совершенно недопустимо. Конечно, кое что изъ установившейся программы дѣйствительно можно опустить; но это освободитъ лишь очень мало времени, котораго не хватитъ на выполненіе задачъ, предлагаемыхъ реформаторами; ихъ противники считаютъ, что это пойдетъ лишь въ ущербъ серьезности усвоенія дѣйствующихъ программъ; они сомнѣваются также, чтобы высшую математику можно было отнести къ предметамъ общаго образованія.

Мы затрудняемся входить въ дальнѣйшія детали этого спора. Что „Меранская программа“, не ломая существенно дѣйствующаго строя преподаванія математики въ средней школѣ, все же вноситъ въ него новую струю, это въ настоящее время отрицаютъ весьма немногіе; что „Меранская программа“ для многихъ дѣйствительно сдѣлалась своего рода символомъ вѣры, непогрѣшимымъ источникомъ обновленія школы, что въ этомъ, какъ недвусмысленно указываютъ противники, есть немало угод-

---

1) „Zeitschrift f. mathem. Unterricht“, 1910. стр. 226.

2) Клейнъ это отрицаетъ.

ничества предъ вліятельнымъ руководителемъ движенія, въ этомъ несомнѣнно есть доля правды; но вѣдь безъ этого ни одно движеніе не обходится.

Чтобы судить, однако, о той настойчивости и увлеченіи, съ которыми ведутъ свое дѣло реформаторы, не безынтересно будетъ сообщить слѣдующую подробность. Когда Клейнъ прочиталъ статью Гольцмюллера, онъ поѣхалъ къ нему и послѣ ряда бесѣдъ склонилъ его на свою сторону. Клейнъ, однако, и этимъ не удовольствовался и убѣдилъ Гольцмюллера сообщить публично, что онъ отказывается отъ своей оппозиціи. Письмо Гольцмюллера дѣйствительно приложено къ книгѣ „Neue Beiträge", указанной на стр. VIII. Непримиримымъ остается только Максъ Симонъ; онъ по прежнему стоитъ во главѣ небольшой оппозиціи и считаетъ требованія реформаторовъ „сплошнымъ преступленіемъ".

Между тѣмъ приверженцы реформы энергично добиваются проведенія ея въ жизнь. Уже отчетъ Коммиссіи заканчивается обращеніемъ къ властямъ и къ обществу съ просьбой ознакомиться съ ея дѣятельностью и тенденціями, содѣйствовать проведенію въ жизнь предлагаемыхъ реформъ. Вопросъ вентилировался уже на оффиціальныхъ съѣздахъ директоровъ прусскихъ среднихъ учебныхъ заведеній [1]) и не безъ успѣха для реформаторовъ. Въ циркулярѣ саксонскаго министра народнаго просвѣщенія отъ 8/IV 1908 г. сказано, что „преподавателю математики предоставляется въ старшихъ классахъ высшихъ реальныхъ училищъ знакомить учащихся съ началами анализа безконечно малыхъ, если классъ достаточно къ тому подготовленъ. Рекомендуется (во всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ) знакомить учениковъ съ графическимъ изображеніемъ эмпирическихъ соотношеній на клѣтчатой бумагѣ, съ примѣненіемъ этого къ рѣшенію подходящихъ уравненій, съ изображеніемъ уравненія $y = \log x$" [2])

[1]) „Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen in den Provinzen des Königreichs Preussen". Neunte Directoren-Versammlung in Schleswig-Holstein, Berlin, 1907. Bericht von K. Baer.—Sechsundzwanzigste Directoren Versammlung in Westfalen. Berlin, 1907. Bericht von Suur und Gottschalk. Отчеты выходятъ отдѣльными выпусками; приведенные выпуски помѣчены номерами 73 и 75.

[2]) Zeitschrift f. d. Mathematischen Unterricht. 1908.

Это, конечно, первые шаги къ осуществленію реформы; но при энергіи, проявляемой руководителями движенія, рѣшительные шаги въ этомъ направленіи врядъ ли заставятъ себя долго ждать.

Въ послѣдніе годы движеніе распространилось и на сосѣднія государства. Въ Австріи и въ Швейцаріи въ различнаго рода ученыхъ обществахъ были сдѣланы доклады о предполагаемыхъ въ Германіи реформахъ, о дѣятельности Коммиссіи Общества Естествоиспытателей и врачей и всюду приняты резолюціи, благопріятныя реформѣ[1]). Мы полагаемъ, что, именно желая получить, такъ сказать, міровую санкцію проекта реформы, Клейнъ и внесъ на IV Международномъ Математическомъ Конгрессѣ, состоявшемся въ Римѣ въ 1908 г., предложеніе объ организаціи особой международной коммиссіи, которая выяснила бы постановку преподаванія математики во всѣхъ культурныхъ странахъ и реформы, которыя признаются желательными. Въ настоящее время эта коммиссія функціонируетъ[2]), но результаты ея дѣятельности выяснятся лишь на слѣдующемъ конгрессѣ, который состоится въ Кэмбриджѣ въ 1911 г.

II.

Пока въ Германіи идутъ эти горячіе споры, во Франціи реформа уже совершилась. Правда, здѣсь реформа была связана съ общимъ преобразованіемъ всего строя преподаванія въ средней школѣ; но, что касается математики, то всѣ требованія германскихъ реформаторовъ здѣсь, по существу, удовлетворены; въ частностяхъ же реформа здѣсь идетъ даже дальше.

Ознакомиться съ сущностью реформы можно лучше всего по книгѣ, выпущенной фирмой Delalain и носящей названіе: „Планъ и программы преподаванія въ мужскихъ лицеяхъ и кол-

---

1) A. Höfler „Vorschläge zu einer zeitgemässen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien und Realschulen“. Zeitschrift f. mathem. u. naturw. Unterricht. 1906.

H. Fehr „Der Funktionsbegriff im mathemathischen Unterricht der Mittelschule“. Verhandlungen der Vereinigung der Mathematiklehrer an Schweizerischen Mittelschulen. Zürich, 1905. Отпечатано также въ „L'Enseignement mathématique“ за 1905 г.

2) Подробнѣе о задачахъ и дѣятельности коммиссіи см. „Вѣстникъ Оп. Физики и Элементарной Математики“, №№ 475—476, 485—486, 487, 488, 498, 502, 505, 514.

легіяхъ" [1]). Болѣе краткія свѣдѣнія о реформѣ можно найти въ спеціальныхъ статьяхъ Марота и Каро [2]). Написанныя въ нѣсколько менѣе оффиціальномъ тонѣ, эти статьи даютъ возможность легче разобраться въ довольно сложной системѣ средняго образованія во Франціи. Но составить себѣ вполнѣ ясное представленіе можно, только подробно ознакомившись съ упомянутой первой книжкой. Послѣднее изданіе этой книжки содержитъ: 1) письмо министра народнаго просвѣщенія къ предсѣдателю коммиссіи по народному образованію палаты депутатовъ, излагающее общій характеръ и сущность реформы; 2) самый текстъ новаго закона, принятаго палатой, и декретъ президента республики отъ 31 мая 1902 г.; 3) циркуляры и распоряженія министра народнаго просвѣщенія, нормирующіе примѣненіе этого закона; 4) подробныя программы по всѣмъ предметамъ преподаванія въ средней школѣ, въ приготовительныхъ и спеціальныхъ классахъ; 5) объяснительныя записки къ этимъ программамъ (объяснительная записка къ программѣ по математикѣ въ старшемъ классѣ составлена особой коммиссіей, во главѣ которой стоялъ П. Аппель).

Какъ видно изъ упомянутаго выше письма министра, почвой для реформы и здѣсь служила та же борьба между классической и реальной системой образованія. Подъ нѣсколько иными названіями, въ нѣсколько иной формѣ мы видимъ здѣсь тѣ же теченія.

Слово „sciences", которое обычно переводится на русскій языкъ словомъ „науки", имѣетъ во Франціи, какъ извѣстно, болѣе узкое значеніе: подъ нимъ разумѣютъ точное и положительное знаніе,— вѣрнѣе, математику, физику, химію и біологическія науки. Науки же гуманитарныя носятъ во Франціи названіе „lettres".

---

1) „Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garçons". Paris. Delalain frères. 1909.

2) Marotte F. „Les récentes réformes de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire français". Jahresbericht der Math.-Vereinigung, 13. (1904).

I. Caro. „Die Reform des höheren Schulwesens in Frankreich". Monatschrift für höhere Schulen., II, 1903.

Среднія французскія общеобразовательныя учебныя заведенія до упомянутой реформы раздѣлялись, главнымъ образомъ, на два типа: классическія школы (enseignement classique), культивировавшія древніе языки и вообще гуманитарныя науки (latin, grec et lettres), и новыя школы (enseignement moderne), въ которыхъ преподавались новые языки и преобладало точное знаніе (langues vivantes, sciences). Званіе баккалавра, соотвѣтствующее нашему аттестату зрѣлости, давали только классическія школы и только онѣ давали доступъ во всѣ факультеты (по нашему—въ университетъ). Новыя школы значительно различались по предоставляемымъ ими правамъ. Нужно, однако, сказать, что въ бóльшую часть высшихъ учебныхъ заведеній Франціи, не только техническихъ, но даже и такихъ, какъ École Normale и École Centrale, учащіеся поступаютъ по конкурсному испытанію; къ этимъ испытаніямъ допускались учащіеся, окончившіе любую среднюю школу.

Весь этотъ порядокъ кореннымъ образомъ измѣняется закономъ 1902 года. Этотъ законъ создаетъ одну общую среднюю школу съ различными подраздѣленіями, которыя всѣ даютъ оканчивающимъ званіе баккалавра. Средняя школа представляетъ собой непосредственное продолженіе начальной школы (enseignement primaire), въ которой обученіе продолжается 4 года (не считая classe enfantine); первые два года составляютъ „приготовительное отдѣленіе“ (division préparatoire), вторые два — „элементарное отдѣленіе“ (division élémentaire). Такъ какъ подготовительный курсъ продолжается, такимъ образомъ, во Франціи годомъ больше, чѣмъ въ Германіи, что существенно отражается также на программахъ, то первый классъ французской средней школы (classe de sixième) соотвѣтствуетъ второму классу германской средней школы. Сама средняя школа, согласно новому закону, распадается на 2 цикла, первый въ 4 года, второй въ 3 года обученія. Программы составлены съ такимъ разсчетомъ, чтобы первый циклъ представлялъ собой уже болѣе или менѣе законченное цѣлое; часть молодыхъ людей можетъ заканчивать этимъ цикломъ свое образованіе и непосредственно вступать въ практическую жизнь; второй циклъ ведетъ къ званію баккалавра.

Первый циклъ распадается на два отдѣленія A и B (Divisions A et B); учащіеся могутъ, по желанію, выбирать тотъ или другой отдѣлъ. Отдѣленіе A соотвѣтствуетъ старой классической школѣ; здѣсь уже съ перваго класса преподается латинскій языкъ при 7 недѣльныхъ часахъ, а съ третьяго класса и греческій языкъ при 3 часахъ; впрочемъ, греческій языкъ остается необязательнымъ; тѣ же учащіеся, которые обучаются греческому языку, освобождаются отъ одного часа черченія и 2 часовъ новыхъ языковъ. Отдѣленіе B соотвѣтствуетъ новой школѣ; здѣсь древніе языки вовсе не преподаются, зато здѣсь усилено преподаваніе отечественнаго языка, новыхъ языковъ, математики и естествознанія.

Второй циклъ охватываетъ три года, но здѣсь происходитъ новая бифуркація. Отдѣленіе A носитъ чисто классическій характеръ; сюда поступаютъ учащіеся изъ отдѣленія A перваго цикла съ дополнительнымъ экзаменомъ по греческому языку, если они таковому не обучались. Основу преподаванія составляютъ классическіе языки и lettres; математикѣ и естествознанію удѣлено, сравнительно, мало мѣста. Отдѣленіе B сохраняетъ только латинскій языкъ и замѣняетъ греческій языкъ болѣе детальнымъ изученіемъ новыхъ языковъ. Сюда поступаютъ учащіеся, шедшіе въ первомъ циклѣ по отдѣленію A; оно предусмотрѣно, главнымъ образомъ, для тѣхъ учениковъ этого отдѣленія, которые греческому языку не обучались; но и тѣмъ, которые его изучали, предоставляется теперь отъ него освободиться, если онъ имъ оказался не подъ силу или не по вкусу. Далѣе, въ отдѣленіи C также преподается изъ древнихъ языковъ только латинскій, но греческій языкъ замѣняется болѣе обширными курсами математики и естествознанія. Сюда поступаютъ учащіеся изъ отдѣленія A перваго цикла; однако, и учащимся отдѣленія B перваго цикла предоставляется сюда доступъ, но только по экзамену по латинскому языку. Наконецъ, четвертое отдѣленіе D совершенно свободно отъ древнихъ языковъ; здѣсь подробно преподаются новые языки, математика и естествознаніе. Сюда поступаютъ учащіеся изъ отдѣленія B перваго цикла. Для второго цикла получается такимъ образомъ слѣдующая схема: (стр. XXXVI).

Впрочемъ, это подраздѣленіе сохраняется только въ теченіе первыхъ двухъ лѣтъ второго цикла; на третьемъ году обученія учащіеся отдѣленія A и B соединяются въ одинъ классъ,

A	B	C	D
латинскій, греческій, lettres.	латинскій, новые языки, lettres.	латинскій, sciences.	новые языки, sciences.

такъ называемый классъ философіи (classe de philosophie); отдѣленія C и D также соединяются въ одинъ классъ — математическій (classe de mathématiques). По окончаніи философскаго или математическаго класса учащіеся подвергаются экзамену на званіе баккалавра. Дипломъ баккалавра даетъ одни и тѣ же права независимо отъ того, по какому отдѣленію молодой человѣкъ обучался. Однако, во многія высшія учебныя заведенія, какъ уже было указано выше, званіе баккалавра еще доступа не открываетъ, — кандидаты должны выдержать конкурсный экзаменъ. Экзаменъ этотъ производится, главнымъ образомъ, по предметамъ чистой и прикладной математики, включая сюда, впрочемъ, физику и химію. Поэтому при лицеяхъ имѣется еще дополнительный классъ, предназначенный для подготовленія къ конкурсному испытанію. Этотъ классъ называется **классомъ спеціальной математики** (classe de mathématique speciales). Само собой разумѣется, что посѣщеніе этого класса необязательно: желающіе могутъ готовиться дома. Такимъ образомъ, на пути отъ начала обученія грамотѣ до спеціальной высшей школы юноша долженъ пройти во Франціи слѣдующіе циклы: 1) дѣтскій классъ (одинъ годъ, посѣщается сравнительно немногими), 2) приготовительный курсъ (2 года); 3) элементарный курсъ (2 года); этимъ заканчивается начальная школа; 4) первый циклъ средней школы (4 года), 5) второй циклъ средней школы (3 года), 6) классъ спеціальной математики. Слѣдующая таблица даетъ наглядную сводку всей системы: (стр. XXXVII).

Это глубоко продуманная систмеа. Какъ объясняетъ министръ въ своемъ письмѣ (см. выше стр. XXXIII), она имѣетъ троякую цѣль: 1) сохранить въ равновѣсіи всѣ типы средняго ообразованія; 2) предоставить родителямъ свободный выборъ типа по склонностямъ и дарованіямъ юноши, 3) не предрѣшать этимъ окончательно его карьеры, а предоставить ему возможность при пере-

<table>
<tr><th>Годы обученія</th><th colspan="6">К Л А С С Ы</th></tr>
<tr><td>1-ый</td><td colspan="6">Дѣтскій классъ (Classe enfantine); внѣ обязательнаго курса.</td></tr>
<tr><td>2-ой
3-ій</td><td colspan="4">Приготовительное
отдѣленіе</td><td>(Première classe préparatoire)
(Seconde classe préparatoire)</td><td rowspan="2">Начальная школа.
École primaire.</td></tr>
<tr><td>4-ый
5-ый</td><td colspan="4">Элементарное
отдѣленіе</td><td>(Classe de huitième)
(Classe de Septième)</td></tr>
<tr><td>6-ой
7-ой
8-ой
9-ый</td><td colspan="2">Отдѣленіе
A
Division
A</td><td colspan="2">Отдѣленіе
B
Division
B</td><td>Classe de sixième
Classe de cinquième
Classe de quatrième
Classe de troisième</td><td>Первый циклъ средней школы.
École secondaire, premier cycle.</td></tr>
<tr><td>10-ый
11-ый</td><td>Отд. A
Div. A</td><td>Отд. B
Div. B</td><td>Отд. C
Div. C</td><td>Отд. D
Div. D</td><td rowspan="2">Classe de première
Classe de seconde</td><td rowspan="2">Второй циклъ средней школы.
École secondaire, seconde cycle.</td></tr>
<tr><td>12-ый</td><td colspan="2">Классъ философіи
Classe de philosophie</td><td colspan="2">Классъ математики
Classe de mathématiques</td></tr>
<tr><td>13-ый</td><td colspan="6">Классъ специальной математики. Classe de mathématiques speciales.</td></tr>
</table>

ходѣ къ старшему циклу перейти безъ большой затраты труда въ то отдѣленіе, которое окажется ему болѣе по сердцу.

Обращаясь теперь къ программамъ математики, мы не будемъ приводить ихъ полностью, какъ мы это сдѣлали съ „Меранской программой". Дѣло въ томъ, что при большомъ числѣ цикловъ и отдѣленій это не только заняло бы очень много мѣста, но и не дало бы рельефной картины курса математики. Мы постараемся выяснить содержаніе и характеръ программы, не приводя ихъ дословно.

Прежде всего приведемъ, однако, распредѣленіе часовъ, удѣляемыхъ математикѣ въ различныхъ циклахъ и отдѣленіяхъ. Обозначая годы обученія, мы всегда будемъ разумѣть ту нумерацію, которая принята въ таблицѣ на стр. XXXVII. Въ дѣтскомъ классѣ число часовъ не обозначено.

Начальная школа.

	Пригот. отд.		Элемент. отд.		Всего
Годъ обученія:	2-ой	3-і й	4-ый	5-ый	
Число часовъ:	3	3	4	4	14.

Первый циклъ средней школы.

КЛАССЪ	I (VI)	II (V)	III (IV)	IV (III)	Всего
Годъ обученія:	6-ой	7-ой	8-ой	9-ый	
Число часовъ въ отд. А:	2	2	2	3	9
Число часовъ въ отд. В:	4 + 1	4	5	4 + 1	19

Въ первой строкѣ въ скобкахъ помѣчена французская нумерація классовъ; въ послѣдней строкѣ 4 + 1 означаетъ 4 урока математики и 1 урокъ геометр. черченія, который ведется преподавателемъ математики.

Второй циклъ средней школы.

КЛАССЪ	V (II)	VI (I)	Классъ филос.	Классъ матем.	Всего
Годъ обученія:	10-ый	11-ый	12-ый	12-ый	
Число часовъ въ отд. А и В:	2	2+2 фак.	2 фак.		8
Число часовъ въ отд. С и D:	5+2	5+2		8+2	24

Мы получаемъ такимъ образомъ въ собственно средней школѣ 17 часовъ математики въ классическихъ (гуманитарныхъ) отдѣленіяхъ и 43 въ реальныхъ. Но нужно принять во вниманіе, что по сравненію съ германской и нашей школой элементарное отдѣленіе начальной школы по своей программѣ тоже примыкаетъ къ средней школѣ; при такомъ счетѣ число часовъ дорастаетъ до 25 и 51.

Что касается самыхъ программъ, то существенно характернымъ является концентрическая система съ большимъ числомъ концентровъ. Приготовительное отдѣленіе начальной школы составляетъ первый концентръ, элементарное — второй, первый циклъ средней школы — третій, второй циклъ — четвертый, математическій классъ — даже пятый. Каждый концентръ представляетъ собой довольно замкнутое цѣлое и составляетъ развитіе предыдущаго. Далѣе нужно подчеркнуть стремленіе, замѣтное во всей программѣ и въ объяснительныхъ запискахъ, не раздѣлять курса математики на отдѣльные и разрозненные предметы, а по возможности объединить весь матеріалъ въ одно цѣлое въ его связи съ приложеніями къ физикѣ, механикѣ и космографіи. Это вполнѣ совпадаетъ съ тенденціями германскихъ реформаторовъ.

Какъ мы сказали, элементарное отдѣленіе начальной школы тѣсно примыкаетъ къ средней, составляя какъ бы начальный ея циклъ; это видно уже и изъ нумераціи классовъ (см. французскія названія на стр. XXXVII). Мы будемъ съ нихъ начинать обзоръ программъ, оставляя, слѣдовательно, въ сторонѣ только дѣтскій и приготовительные классы, которые соотвѣтствуютъ приготовительнымъ классамъ германской школы.

Въ программахъ элементарной школы нѣтъ еще названія „ариѳметика", есть только „счетъ" (calcul). Тѣмъ не менѣе въ этихъ двухъ классахъ полагается научить учениковъ производить дѣйствія надъ цѣлыми числами, десятичными (раньше) и простыми дробями, обращать простыя дроби въ десятичныя и обратно и, наконецъ, рѣшать простѣйшія задачи на тройныя правила приведеніемъ къ единицѣ. При рѣшеніи задачъ нужно ознакомить учащихся съ метрической системой мѣръ, простѣйшими геометрическими фигурами (уголъ, квадратъ, прямоугольникъ, треугольникъ, кругъ), измѣреніемъ площадей простѣйшихъ фигуръ и объемовъ простѣйшихъ тѣлъ. Это составляетъ, такимъ образомъ, начальный концентръ. Ни о какой теоріи тутъ еще не должно быть рѣчи; дѣтямъ даютъ наглядныя поясненія, а цѣло курса заключается въ выработкѣ техники счета и въ усвоеніи важнѣйшихъ мѣръ и способовъ измѣренія.

Съ этимъ запасомъ знаній дѣти вступаютъ собственно въ среднюю школу. По самому замыслу системы въ отдѣленіи А математикѣ отводится мало мѣста. Мы начнемъ поэтому съ отдѣленія B.

Въ I (VI) классѣ мы опять находимъ математику только въ формѣ „счета". Здѣсь предлагается, прежде всего, повторить предыдущій концентръ, пріучить дѣтей производить дѣйствія надъ цѣлыми числами и дробями болѣе бойко, детальнѣе ознакомить ихъ съ метрической системой, продѣлать болѣе сложныя задачи на тройныя правила (все еще приведеніемъ къ единицѣ). Но въ объяснительной запискѣ указывается, что при рѣшеніи этихъ послѣднихъ задачъ слѣдуетъ уже ознакомить учащихся съ буквенными обозначеніями и простѣйшими формулами. Нѣтъ еще не только алгебры, нѣтъ еще, собственно, ариѳметики, но есть уже буквенный алгориѳмъ. Юноша, такимъ образомъ, даже не пріучается къ той обычной у насъ точкѣ зрѣнія, что буквенныя обозначенія знаменуютъ переходъ къ алгебрѣ. Этотъ классъ посвящается болѣе тщательному изученію того же матеріала; по существу онъ не вноситъ почти ничего новаго.

Во II (V) классѣ появляется „ариѳметика" и продолжается въ III (IV) классѣ. Это новый концентръ ариѳметики, который представляетъ собой обычный систематическій курсъ ариѳметики, со включеніемъ правилъ извлеченія квадратнаго корня и суммованія ариөметической и геометрической прогрессіи. Правда, объяснительная записка и здѣсь предлагаетъ преподавателю отнюдь не входить въ теоретическія тонкости, но курсъ долженъ быть выясненъ учащимся много подробнѣе и детальнѣе; нѣкоторое время должно быть удѣлено важнѣйшимъ пріемамъ коммерческаго счета. Только въ IV (III), послѣднемъ классѣ перваго цикла, появляется алгебра. Такъ какъ съ пріемами буквеннаго исчисленія учащіеся уже ознакомились, то здѣсь программа предписываетъ короткій, но довольно цѣльный курсъ алгебры: дѣйствія надъ одночленами и многочленами; численныя уравненія первой степени съ одной и съ двумя неизвѣстными и второй степени съ одной неизвѣстной; употребленіе логариөмическихъ таблицъ съ четырьмя десятичными знаками и примѣненіе ихъ къ вычисленію сложныхъ процентовъ; понятіе о функціи; аналитическое и графическое изученіе функцій $ax+b$ и $\frac{ax+b}{a'x+b'}$.

Со II класса начинается краткій курсъ геометріи вмѣстѣ съ геометрическимъ черченіемъ; во II и III классахъ проходится планиметрія, въ IV стереометрія; сюда примыкаютъ краткія свѣдѣнія по съемкѣ плановъ, межеванію и нивелировкѣ.

„Нужно помнить“, говорится въ объяснительной запискѣ, „что учащіеся въ первомъ циклѣ еще дѣти и что нѣкоторые изъ нихъ должны оставить лицей по окончаніи этого цикла. Вслѣдствіе этого имъ необходимо давать много практическихъ примѣровъ, притомъ реальныхъ, а не искусственныхъ; теорія должна сводиться къ объясненіямъ на конкретныхъ примѣрахъ,—по крайней мѣрѣ, вначалѣ. Лишь постепенно и съ большой осторожностью можно знакомить учащихся съ наиболѣе простыми отвлеченными понятіями, выясняя имъ на многочисленныхъ примѣрахъ необходимость точныхъ опредѣленій и строго логическихъ разсужденій“. Но проведенію болѣе или менѣе строго научной системы въ этомъ концентрѣ еще нѣтъ мѣста; этому посвящается слѣдующій концентръ, — V (II) и IV (I) классы. Программу этихъ классовъ составляетъ болѣе детальное и научное изученіе алгебры, геометріи и тригонометріи. (Мы имѣемъ въ виду отдѣленія C и D, какъ продолженіе отдѣленія B перваго цикла).

Программа во многихъ частяхъ повторяетъ только тотъ же матеріалъ, что былъ въ первомъ концентрѣ; но объяснительная записка указываетъ, что здѣсь онъ долженъ быть разработанъ болѣе подробно и болѣе строго. Читатель замѣтилъ, конечно, что основныя требованія германскихъ реформаторовъ — понятіе о функціи, графическое и аналитическое изученіе простѣйшихъ функцій — вошли уже въ программу старшаго класса перваго цикла. Теперь вводятся понятіе о производной, значеніе знака производной въ вопросѣ о возрастаніи и убываніи функцій, нахожденіе производныхъ изученныхъ простѣйшихъ функцій. Наконецъ, къ курсу геометріи примыкаютъ начала начертательной геометріи. Этимъ замыкается концентръ, уже четвертый, если считать съ приготовительнаго отдѣленія.

Математическій классъ, какъ мы уже сказали выше (стр. XXXIX), представляетъ собой, въ сущности, новый заключительный концентръ. Здѣсь мы находимъ: повторительный курсъ ариѳметики съ дополненіями (періодическія дроби, приближенныя вычисленія), повторительный курсъ алгебры, въ которомъ число изучаемыхъ функцій значительно увеличено (квадратная и биквадратная цѣлыя функціи; отношеніе двухъ цѣлыхъ квадратныхъ функцій; тригонометрическія функціи, ихъ производныя; производная площади криволинейной фигуры, разсматриваемой, какъ функція абсциссы); — повторительный курсъ геометріи и тригонометріи, усиленный началами ученій о полярахъ, о векторахъ, о картографическихъ проекціяхъ, о коническихъ сѣченіяхъ. Наконецъ, сюда примыкаютъ элементарные курсы начертательной геометріи и механики.

Всѣ требованія, на которыхъ настаиваютъ Клейнъ и его приверженцы, здѣсь проходятъ красною нитью и проводятся частью даже съ избыткомъ. Клейнъ не безъ основанія взываетъ почти въ каждой изъ своихъ рѣчей: „Франція насъ опередила, она осуществила всѣ пожеланія, за которыя мы еще ведемъ такую упорную борьбу!“

Нѣсколько словъ еще объ отдѣленіи А перваго цикла и объ отдѣленіяхъ А и В второго цикла средней школы. Мы будемъ очень близки къ истинѣ, если скажемъ, что эти отдѣленія въ теченіе всего курса проходятъ то, что составляетъ программу перваго цикла отдѣленія В. Такимъ образомъ, и учащіеся этихъ отдѣленій знакомятся съ понятіемъ о функціи, изучаютъ важнѣйшія функціи, графическое ихъ изображеніе; а программа философскаго класса умножаетъ число изучаемыхъ функцій и вводитъ понятіе о производной и даже ея обращеніи. Мы должны, однако, сказать, что съ трудомъ себѣ представляемъ, какъ можно справиться въ этомъ классѣ съ такой программой; практика же еще не можетъ дать отвѣта на этотъ вопросъ: въ старшемъ классѣ новыя программы входятъ въ силу только въ текущемъ году.

Программа класса спеціальной математики содержитъ довольно обширный курсъ высшей математики; но этотъ классъ по значенію своему уже выходитъ за предѣлы средней школы.

III.

Какъ бы подробно ни была написана программа, она никогда не даетъ еще достаточно яснаго представленія о томъ, что собственно имѣли въ виду составители программы и что проходится въ школѣ. Въ короткія рубрики, отмѣченныя въ программѣ, можно вложить чрезвычайно различное содержаніе. Лишь книги могутъ дать объ этомъ ясное представленіе; притомъ книги двоякаго рода: учебники, предназначенные для учениковъ, и дидактическія сочиненія, написанныя для учителей. Клейнъ самъ читаетъ курсы для учителей и издаетъ эти курсы; такимъ образомъ, сочиненія второго рода мы имѣемъ, такъ сказать, изъ первоисточника. Мы упоминали уже о книгахъ Клейна „Преподаваніе математики въ среднихъ учебныхъ заеденіяхъ" и „Элементарная математика съ высшей точки зрѣнія" [1]). Первое сочиненіе содержитъ изложеніе организаціи преподаванія математики въ Германіи въ средней и въ высшей школѣ, а также взглядовъ и тенденцій реформаторовъ. Книга очень интересна, но, по существу, относится почти исключительно къ германской школѣ. Второе сочиненіе представляетъ собой лекціи по элементарной математикѣ для учителей; онѣ представляютъ во многихъ отношеніяхъ высокій интересъ; въ настоящее время печатается рус-

---

[1]) „Der Mathematische Unterricht an den höheren Schulen" (см. ссылку на стр. VIII). „Elementare Mathematik vom höheren Standpunkte aus".

скій переводъ ихъ подъ редакціей пишущаго эти строки; въ предисловіи къ русскому изданію мы будемъ имѣть случай поговорить о нихъ подробнѣе.

Къ числу немногихъ сочиненій дидактическаго характера, вышедшихъ изъ подъ пера сторонниковъ реформы, принадлѐжитъ новое сочиненіе проф. Гёфлера „Дидактика преподаванія математики“ [1]). Это большое сочиненіе содержитъ обзоръ преподаванія математики во всѣхъ ея отдѣлахъ и на всѣхъ ея ступеняхъ. Къ сожалѣнію, при обширномъ объемѣ этого сочиненія, столь недавно лишь вышедшаго въ свѣтъ, мы еще не имѣли возможности съ нимъ ближе познакомиться и вынуждены ограничиться этими указаніями.

Однако, Клейнъ хорошо понимаетъ, что наиболѣе ясное представленіе о задачахъ реформы могъ бы дать только хорошій учебникъ, написанный въ духѣ реформы. Но въ этомъ отношеніи дѣло обстоитъ въ Германіи хуже. Клейнъ самъ, очевидно, не чувствуетъ себя призваннымъ написатьт акого рода книгу; не написали таковой и его приверженцы. Клейнъ съ горечью жалуется, что авторы новыхъ учебниковъ, упомянувъ въ двухъ словахъ о томъ, что такое функція, утверждаютъ, что приняли во вниманіе тенденціи реформы. Даже книга Гётинга очень мало его въ этомъ отношеніи удовлетворяетъ. Небольшая книжка преподавателя дрезденской учительской семинаріи проф. Дреслера „Ученіе о функціи“ [2]), быть можетъ, лучше другихъ передаетъ тенденціи реформы. Это дѣйствительно очень недурной элементарный учебникъ, выясняющій понятіе о функціи;—много примѣровъ и упражненій. Но авторъ выдѣляетъ ученіе о функціяхъ въ особый отдѣлъ, между тѣмъ какъ реформаторы желали бы провести это черезъ весь курсъ преподаванія математики. Отсутствіе подходящаго руководства Клейнъ объясняетъ тѣмъ, что учебники пишутъ только по дѣйствующимъ въ школахъ программамъ. Именно поэтому Клейнъ вынужденъ обратиться къ французскимъ руководствамъ и, какъ лучшее изъ нихъ, рекомендуетъ книгу Бореля.

---

[1]) Prof. A. Höfler. „Didaktik des Mathematischen Unterrichts“. Leipzig, Teubner, 1910.

[2]) Prof. H. Dressler. „Die Lehre von den Funktionen“. Theorie und Aufgabensammlung für alle höheren Lehranstallten. Leipzig, 1908.

Вотъ что говоритъ Клейнъ своимъ слушателемъ по поводу этой книги[1]: „Я очень хотѣлъ бы склонить Васъ (Ihnen ans Herz legen) познакомиться съ новымъ руководствомъ для преподаванія ариѳметики, съ „Курсомъ алгебры“ Бореля. Вы тогда убѣдитесь, что новыя идеи не остаются въ однѣхъ только программахъ... Къ тому же авторъ — это тотъ же Эм. Борель, котораго вы хорошо знаете, какъ автора выдающихся абстрактныхъ сочиненій по математикѣ. Нужно сказать, что во Франціи представители высшей науки удѣляютъ много вниманія школѣ, которую они стараются держать на уровнѣ современнаго знанія“.

Учебники Бореля разбиты на отдѣльные концентры сообразно новой французской программѣ. Между тѣмъ для преподавателя другой страны, въ которой такое раздѣленіе на циклы не принято, это имѣетъ меньшее значеніе; интересъ сосредоточенъ, главнымъ образомъ, на новой обработкѣ матеріала, на новомъ матеріалѣ, на „функціональномъ мышленіи“, какъ сказалъ бы приверженецъ германскихъ реформаторовъ. Это именно, главнымъ образомъ, и побудило профессора Штёкеля переработать нѣсколько книгу Бореля; это же заставило и насъ отдать предпочтеніе нѣмецкой переработкѣ. Объ остальныхъ основаніяхъ для переработки указано въ предисловіи проф. Штёкеля. Нужно, однако, сказать, что обработка не представляетъ собой коренного измѣненія книги; она лишь объединяетъ матеріалъ, примыкая, главнымъ образомъ, къ циклу, соотвѣтствующему отдѣленіямъ C и D. Къ тому же переводъ былъ пересмотрѣнъ авторомъ. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, передъ собой руководство, написанное выдающимся ученымъ и переработанное другимъ, не менѣе выдающимся математикомъ.

Какъ всякое созданіе рукъ человѣческихъ, книга не лишена, конечно, недостатковъ. Стремленіе къ упрощенію, къ освобожденію теоріи отъ логическихъ тонкостей, недоступныхъ дѣтямъ школьнаго возраста, иногда заставляетъ автора грѣшить противъ правила Клейна — никогда не выдавать за доказательство того, что ни въ какомъ случаѣ не составляетъ доказательства (стр. XXI). Такъ, напримѣръ, въ § 48 однозначность разложенія числа на простыхъ сомножителей мотивируется такого рода сообра-

[1] „Der mathematische Unterricht“, стр. 42.

женіями, которыя не только не доказываютъ предложенія, но и не выясняютъ его; въ § 116, на нашъ взглядъ, недостаточно выяснена разница между приведеніемъ подобныхъ членовъ и сложеніемъ; можно было бы указать еще кое-какіе недочеты, но существенными мы ихъ не считаемъ.

Имѣя въ виду, что книга можетъ служить учебнымъ пособіемъ и учебникомъ въ такихъ учебныхъ заведеніяхъ, которыя не связаны опредѣленной программой, мы сочли нужнымъ при переводѣ замѣнить германскія мѣры и монеты русскими, а мѣры метрической системы оставили безъ измѣненія.

Настоящія строки были уже въ печати, когда я получилъ послѣднія книжки нѣкоторыхъ журналовъ, принесшія очень интересныя свѣдѣнія по излагаемому здѣсь вопросу. Въ іюньской книжкѣ „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung" (1910) сообщено, что Шиммакъ (сотрудникъ Клейна, о которомъ намъ уже приходилось упоминать) выпустилъ брошюру объ успѣхахъ движенія по реформѣ преподаванія математики за послѣдніе 3 года (R. Schimmack. „Die Fortschritte der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland 1907 — 1910"). Мы еще не успѣли познакомиться съ этимъ сочиненіемъ и вынуждены ограничиться настоящимъ указаніемъ.

Важнѣе, однако, свѣдѣнія, содержащіяся въ іюльской книжкѣ журнала „L'Enseignement mathématique" (1910). Здѣсь сообщено, что въ Австріи въ текущемъ году введены новыя программы преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, которыя въ большой мѣрѣ отражаютъ тенденціи реформы. Въ указанномъ журналѣ приведены подробныя извлеченія изъ программъ.

Кромѣ того, мы получили свѣдѣнія, что и въ Петербургѣ даже въ кругахъ, близко стоящихъ къ дѣлу управленія среднимъ образованіемъ, тенденціи реформы подверглись тщательному обсужденію. Такъ какъ, однако, объ этомъ не было опубликовано, то мы вынуждены ограничиться настоящимъ указаніемъ.

В. Каганъ.

ПРЕДИСЛОВІЕ
автора къ нѣмецкому изданію.

При составленіи французскихъ учебниковъ, которые появляются здѣсь въ нѣмецкой обработкѣ, я придерживался нашихъ оффиціальныхъ программъ 1902 и 1905 года. Эти книги предназначаются поэтому для учениковъ второго цикла и именно отдѣленій С и D[1]), — слѣдовательно, для учащейся молодежи въ возрастѣ отъ 14 до 17 лѣтъ. Въ этихъ двухъ отдѣленіяхъ устранено преподаваніе греческаго языка. Ученики отдѣленія С изучаютъ латинскій языкъ и, по желанію, нѣмецкій или англійскій; ученики отдѣленія D изучаютъ нѣмецкій и англійскій. Такимъ образомъ, оказалось возможнымъ посвятить пять часовъ въ недѣлю изученію математики (ариѳметики, алгебры, геометріи и тригонометріи).

Существенное различіе между новыми учебными планами и старыми состоитъ въ томъ, что ученики названныхъ классовъ получаютъ теперь понятіе о графическомъ изображеніи, о перемѣнной величинѣ и о функціи. Многіе считаютъ это нововведеніе слишкомъ смѣлымъ, но результаты вполнѣ оправдываютъ его: ученики слѣдятъ за новымъ преподаваніемъ съ величайшимъ рвеніемъ и полнымъ пониманіемъ. Тѣ изъ нихъ, которые изучаютъ потомъ математику и физику, оказываются превосходно приготовленными къ аналитической геометріи и дифференціальному исчисленію, такъ какъ они освоились съ основными понятіями этихъ наукъ еще въ томъ возрастѣ, когда умъ гибокъ. Тѣ же, которые посвятятъ себя изученію химіи, описательныхъ естественныхъ наукъ, медицины, техники, уже усваиваютъ въ школѣ знанія, которыя окажутся для нихъ очень полезными; не говорю уже о томъ, что такое обученіе математикѣ даетъ очень цѣнный вкладъ въ общее образованіе человѣка. Само собою разумѣется, не слѣдуетъ излагать начала аналитической геометріи и исчисленія безконечно малыхъ ученикамъ въ возрастѣ отъ 14 до 17 лѣтъ въ той отвлеченной

---

1) См. статью редактора русскаго перевода.

формѣ, которая обычна въ высшемъ преподаванiи, какъ оно ведется во Францiи въ „classe de mathématiques spéciales“ и въ Германiи на первыхъ курсахъ въ университетахъ. Напротивъ того, преподаванiе должно быть конкретнымъ, и эта точка зрѣнiя имѣла рѣшающее значенiе при составленiи учебнаго плана ариѳметики и алгебры. Какъ показалъ опытъ (я говорю только о Францiи), „строгое“ изложенiе элементовъ дѣйствуетъ на учениковъ просто запугивающимъ образомъ. Они не понимаютъ, зачѣмъ доказывать обстоятельно вещи, которыя имъ представляются понятными сами по себѣ; они видятъ въ этомъ простую игру словъ и приходятъ, наконецъ, къ заключенiю, что символы алгебры имѣютъ лишь отдаленное отношенiе къ дѣйствительности. Однако, начало алгебры коренится уже въ наблюденiи обыкновенныхъ фактовъ и въ потребностяхъ повседневной жизни. Если не принимать этого во вниманiе, то возникаетъ опасность, что самые способные ученики потеряютъ охоту къ математикѣ; она будетъ представляться имъ собранiемъ какихъ-то заоблачныхъ вещей, не имѣющихъ ничего общаго съ дѣйствительной жизнью, между тѣмъ какъ наша жизнь совершенно проникнута математикой. Я старался возможно яснѣе выдвинуть эту тѣсную связь формулъ алгебры съ фактами повседневной жизни не только въ примѣрахъ и задачахъ, но и въ теоретическомъ изложенiи. Я не стѣснялся приводить многочисленныя примѣненiя и надѣюсь, что теоремы получили благодаря этому наглядное значенiе и, слѣдовательно, не кажутся произвольнымъ созданiемъ ума. Объясненiе отрицательныхъ чиселъ, правила умноженiя алгебраическихъ чиселъ, составленiе уравненiй въ задачахъ первой и второй степени, графическое представленiе функцiй, особенно линейныхъ, — все это пояснено многочисленными примѣрами изъ повседневной жизни. По этой же причинѣ я всегда указывалъ, какъ важно обращать вниманiе на выборъ единицъ въ формулахъ и задачахъ.

Было бы, однако, неправильно держаться этого способа изложенiя только въ алгебрѣ; напротивъ того, въ ариѳметикѣ я придерживался того же самаго взгляда. Для философiи математики, конечно, чрезвычайно важно развивать основныя положенiя ариѳметики, какъ бы исходя изъ предположенiя, что читатель не имѣетъ никакого понятія объ ариѳметикѣ. Но этотъ способъ изложенія предполагаетъ читателей съ такимъ философскимъ образованіемъ, какого невозможно ожидать въ данномъ случаѣ. Въ преподаваніи, напротивъ того, слѣдуетъ исходить изъ того, чтó ученики, по ихъ мнѣнію, знаютъ; иначе они придутъ къ тому, что будутъ смотрѣть на математику, какъ на собраніе фокусовъ,—а это было бы самой плохой услугой, какую имъ только можетъ оказать учитель. Поэтому я всегда старался держаться поближе къ дѣйствительности; такъ, напримѣръ, при элементарныхъ вычисленіяхъ съ цѣлыми числами я не пытался излагать теорію вычисленій ученику, который еще совсѣмъ не умѣетъ производить эти вычисленія. Напротивъ того, ученику, владѣющему вполнѣ вычисленіями, я объяснялъ, какъ функціонируетъ тотъ механизмъ, которымъ онъ уже давно пользуется.

Считаю пріятнымъ долгомъ поблагодарить профессора Штёккеля за стараніе и трудъ, которые онъ затратилъ на нѣмецкое изданіе ариѳметики и алгебры. Да способствуетъ это изданіе тому, чтобы преподаваніе математики во всѣхъ странахъ поднялось на высшую степень и чтобы великія идеи Декарта, Ньютона и Лейбница, которыя оказали такое сильное вліяніе на физическое и духовное развитіе человѣка, составили неотъемлемую составную часть средняго образованія.

St. Paul des Fonts, 3 августа 1908 г.

Эмиль Борель.

ПРЕДИСЛОВІЕ

издателя нѣмецкой переработки.

Первой побудительной причиной къ тому, чтобы выпустить нѣмецкое изданіе элементарныхъ учебниковъ Э. Бореля, были впечатлѣнія, которыя я вынесъ при многочисленныхъ спорахъ по вопросу о реформѣ преподаванія математики, вызванныхъ выступленіемъ Ф. Клейна на школьной конференціи 1900 года. Мнѣ казалось, что несогласіе возникало часто оттого, что спорящія стороны вкладывали часто различное содержаніе въ одни и тѣ же слова. Многіе являются противниками выясненія ученикамъ понятій о перемѣнныхъ, о функціи по тѣмъ соображеніямъ, что такія трудныя понятія, какъ ирраціональныя числа, непрерывность, дифференцируемость, общее понятіе о функціи вещественной и комплексной перемѣнной ни въ какомъ случаѣ не соотвѣтствуютъ уровню школы. Мнѣ казалось, что дѣйствительнымъ средствомъ для примиренія спорящихъ сторонъ и вмѣстѣ съ тѣмъ для проведенія желаемой реформы было бы показать на примѣрѣ, чтó именно разумѣютъ подъ этимъ требованіемъ сторонники реформы и какимъ образомъ возможно ея осуществленіе въ преподаваніи, начиная съ низшей уже ступени. Подобный примѣръ представляютъ учебники Бореля, а именно слѣдующіе три томика:

1. Arithmétique et Notions d'Algèbre (Troisième A). Paris, Armand Colin, 1903.
2. Algèbre, Premier cycle, Paris, 1903.
3. Algèbre, Second cycle, Paris, 1903 (Troisième édition, 1905).

Для того, чтобы этотъ методъ преподаванія ариѳметики и алгебры сталъ доступенъ нѣмецкимъ учителямъ, недостаточно было простого перевода. Переработка и соединеніе трехъ томиковъ въ одно цѣлое скорѣе соотвѣтствовало этой цѣли по тремъ причинамъ.

Во-первыхъ, эти три томика не представляютъ собой послѣдовательнаго курса, въ которомъ глава слѣдуетъ за главой; напротивъ того, въ каждомъ изъ нихъ встрѣчается часть содержанія другого томика. Именно, обѣ части алгебры начинаются съ подробнаго повторенія (révision), которое составляетъ переходъ отъ предыдущаго курса и служитъ связью съ нимъ; вмѣстѣ съ тѣмъ, однако, здѣсь имѣются многія дополненія. Какъ ни велико значеніе подобныхъ повтореній въ преподаваніи, мнѣ не казалось, однако, чтобы они были нужны въ послѣдовательномъ курсѣ, предназначенномъ для учителей. Конечно, я не упустилъ изъ виду этихъ дополнительныхъ замѣчаній и воспроизвелъ ихъ въ надлежащихъ мѣстахъ.

Въ тѣсной связи съ этимъ находится и вторая причина. Въ ариѳметикѣ изложеніе, изъ педагогическихъ соображеній, очень подробно, что напрасно задерживаетъ чтеніе и утомляетъ читателя. Я надѣюсь, что сокращенія, которыя я сдѣлалъ, не уничтожили своеобразнаго отпечатка искуснаго изложенія Бореля. Кто-либо, быть можетъ, спроситъ, не было бы ли лучше совершенно опустить эту часть, такъ какъ вѣдь въ ней можетъ быть рѣчь только о совершенно элементарныхъ предметахъ. Но читатель увидитъ уже съ первой главы, почему слѣдовало сохранить ариѳметику. Это оригинальное произведеніе Бореля представляетъ собой новую обработку стараго матеріала. А именно: въ ариѳметику входитъ цѣлый рядъ предложеній, которыя обыкновенно находятъ себѣ мѣсто въ буквенномъ исчисленіи. Эти предложенія здѣсь всюду выражены въ словахъ, что дѣлаетъ содержаніе болѣе яснымъ, чѣмъ при употребленіи однѣхъ только буквъ. Привожу нѣсколько примѣровъ: уже въ ариѳметикѣ излагается сложеніе и вычитаніе суммъ и разностей, а также умноженіе выраженій въ скобкахъ на число и даже, наконецъ, возведеніе въ квадратъ бинома. Доказательства даются въ „интуитивной“ формѣ. А именно, подобно тому, какъ въ геометріи возможно доказать общее предложеніе на отдѣльной фигурѣ или на нѣсколькихъ отдѣльныхъ фигурахъ, точно такъ же и въ ариѳметикѣ можно доказать общее предложеніе на отдѣльномъ числовомъ примѣрѣ или на нѣсколькихъ хорошо подобранныхъ числовыхъ примѣрахъ; въ обоихъ случаяхъ должно быть, конечно, выяснено, что основанія доказательства, достаточныя въ отдѣльномъ случаѣ, имѣютъ силу и вообще. Методъ Бореля, по моему мнѣнію, представляетъ то преимущество, что ученикъ пріобрѣтаетъ больше довѣрія къ излагаемымъ предложенія по сравненію съ тѣмъ, какое онъ получаетъ, если ему преподносятъ эти предложенія въ отвлеченной формѣ тождества, связывающаго буквенныя величины. Сверхъ того, эти примѣры выбраны въ связи съ задачами изъ повседневной жизни, и преподаваніе математики пріобрѣтаетъ такимъ образомъ ту живую связь съ дѣйствительностью, которой Борель совершенно справедливо приписываетъ величайшее значеніе.

Еще въ одномъ мѣстѣ я рѣшилъ сдѣлать сокращеніе. Въ девятой главѣ второго тома „Алгебры" Борель, послѣ нѣкоторыхъ предварительныхъ замѣчаній, излагаетъ введеніе въ ученіе о производныхъ съ помощью понятія о предѣлѣ,— ученіе, о которомъ авторъ говоритъ самъ, что оно предназначается только для лучшихъ учениковъ. Задача—представить это изложеніе въ такой формѣ, которая удовлетворила бы нѣмецкихъ учителей, превосходитъ мои силы.

Я приступаю къ третьей, не менѣе важной причинѣ, которую слѣдуетъ привести въ пользу переработки. Переводить съ французскаго на нѣмецкій языкъ статьи и сочиненія по высшей математикѣ для человѣка, владѣющаго этимъ предметомъ, такъ легко, что подобные переводы кажутся почти излишними. Совершенно иначе обстоитъ дѣло, какъ я увидѣлъ къ моему удивленію, съ сочиненіями по элементарной математикѣ. Причина этого та, что здѣсь большое значеніе имѣетъ словесное выраженіе, а въ этомъ отношеніи французскій и нѣмецкій языки очень различны между собою. Это различіе сказывается прежде всего въ запасѣ словъ. Представимъ наудачу нѣсколько примѣровъ. Французъ говоритъ о parties d'une somme (части суммы), когда нѣмецъ говоритъ о Summanden (слагаемыя); французъ не знаетъ die beiden Katheten (катеты) прямоугольнаго треугольника, а только les deux côtés de l'angle droit (стороны прямого угла); зато онъ можетъ говорить о termes d'une fraction (члены дроби); между тѣмъ какъ нѣмецъ не имѣетъ общаго названія для числителя и знаменателя дроби[1]).

[1]) Такого же рода затрудненія мы испытывали и при изданіи русскаго перевода. По русски нѣтъ, напримѣръ, термина, который соотвѣтствовалъ бы нѣмецкому einen Bruch erweitern (помножить числителя и знаменателя на одно и то же число); постоянно стараясь пользоваться установившимися русскими терминами, мы лишь изрѣдка и, нужно ска-

Наконецъ въ элементарномъ учебникѣ слѣдовало измѣнить также различнаго рода данныя, именно приспособить ихъ къ нѣмецкой жизни, и притомъ не только монеты, мѣры длины и тяжести, но и остальное въ примѣрахъ, что носитъ спеціально французскій характеръ: топографическія изображенія, планы желѣзнодорожнаго движенія и т. п.; только такимъ образомъ нѣмецкому учителю будетъ данъ матеріалъ, которымъ онъ можетъ воспользоваться непосредственно при преподаваніи.

Такимъ образомъ возникло нѣмецкое изданіе „Ариѳметики" и „Алгебры" Бореля. Будемъ надѣяться, что оно будетъ способствовать тому, чтобы преподаваніе математики въ Германіи заняло положеніе, соотвѣтствующее значенію математики для точнаго познанія природы и для современной культуры. Хотя эта книга и предназначается прежде всего для учителей математики, но мнѣ кажется, что она можетъ принести пользу и другимъ. Прежде всего я имѣю въ виду абитуріентовъ классическихъ учебныхъ заведеній, которые хотятъ посвятить себя изученію естествознанія, медицины, техники. Опытъ показываетъ, что эти молодые люди часто встрѣчаютъ значительныя затрудненія вслѣдствіе того, что преподаватели университетовъ нерѣдко предполагаютъ у нихъ такую степень математическаго образованія, какой они не обладаютъ. Достаточно вспомнить, какъ часто прибѣгаютъ къ графическому представленію. Поэтому, пока намѣченная реформа преподаванія математики еще не проведена, это сочиненіе можетъ послужить къ пополненію столь прискорбныхъ пробѣловъ. Далѣе, я имѣю въ виду все болѣе и болѣе многочисленную категорію не-математиковъ, которые въ болѣе зрѣломъ возрастѣ бываютъ вынуждены вернуться къ математикѣ, хотя они давно перестали ею заниматься. Когда они берутся за одно изъ новыхъ и очень полезныхъ сочиненій, служащихъ для введенія въ высшую математику, то чаще всего ихъ усердіе очень скоро ослабѣваетъ, и въ концѣ концовъ, они отказываются оть надежды проникнуть въ тайны исчисленія безконечно малыхъ. Причина этого въ большей части случаевъ лежитъ въ томъ, что у нихъ нѣтъ ясна-

зать, не безъ опаски позволили себѣ приблизиться къ терминологіи оригинала. Напримѣръ, мы сохранили выраженіе: „умножить скобки на число". *Прим. ред.*

го пониманія элементовъ. Въ этомъ отношеніи наша книжка можетъ быть полезной: чрезвычайно отчетливое изложеніе, разъясняемое примѣрами изъ повседневной жизни, незамѣтно приводитъ къ такой высотѣ метематическаго знанія, при которой врядъ ли будетъ трудно добраться до вершинъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.

Э. Борель любезно согласился присоединить нѣсколько вступительныхъ словъ къ нѣмецкому изданію. Въ этомъ предисловіи онъ сообщаетъ читателю основныя положенія, которыя имѣли для него рѣшающее значеніе при составленіи „Ариѳметики“ и „Алгебры“. Не менѣе обязанъ я ему за совѣты, которыми онъ облегчилъ мнѣ соединеніе трехъ томиковъ въ этотъ одинъ томъ.

П. Штеккель.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Ариѳметика.

Замѣченныя опечатки.

Страница.	Строка.	Напеч гано.	Должно быть.
XIV	1 сн.	II	VIII
34	9 сн.	монета,	монета
34	8 сн.	5 граммовъ	20 граммовъ
43	11 сн.	отдѣляемъ,	отдѣляемъ
45	1 св.	подписываютъ	подписываемъ
65	8 сн.	общими кратными	кратными
68	14 сн.	говорятъ	говорятъ,

АРИѲМЕТИКА.

Глава I.

ДЕСЯТИЧНОЕ СЧИСЛЕНІЕ.

1. Что̀ разумѣютъ подъ множествомъ предметовъ и подъ количествомъ предметовъ даннаго множества, мы предполагаемъ здѣсь извѣстнымъ. Существуютъ дикія племена, которыя знаютъ только значеніе словъ: одинъ, два, три, четыре (т. е. значеніе соотвѣтственныхъ словъ ихъ языка); если же, напримѣръ, количество животныхъ въ стадѣ превосходитъ четыре, то они говорятъ просто, что животныхъ въ этомъ стадѣ много. Народы, стоящіе на высшей ступени развитія, знаютъ уже давно, что необходимо умѣть обозначать количество предметовъ даннаго множества болѣе точнымъ образомъ. Въ этомъ и состоитъ задача счисленія.

Самымъ распространеннымъ является десятичное счисленіе [1]). Устанавливаютъ сперва десять цифръ:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

которымъ даютъ извѣстныя названія. Цифра 0 означаетъ, что нѣтъ ни одного предмета; цифра же 1, — что есть только одинъ предметъ.

2. Если хотятъ опредѣлить количество овецъ въ стадѣ, то можно поступить слѣдующимъ образомъ. Можно пропустить всѣхъ овецъ мимо лица, которое ставитъ черточку на доскѣ каждый разъ, какъ мимо него проходитъ овца; какъ только пишущій поставитъ десять черточекъ на одной линіи, онъ переходитъ къ слѣдующей линіи, и такимъ образомъ получается, напримѣръ, слѣдующая запись:

```
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | |
```

[1]) Возможно считать и иначе: многіе купцы, напримѣръ, придерживаются обычая считать дюжинами и дюжинами дюжинъ, или гроссами.

Здѣсь три ряда по десяти черточекъ и четыре черточки въ незаполненномъ ряду. Это количество называется „тридцать четыре“ и письменно обозначается такъ: 34; оно состоитъ изъ трехъ десятковъ и четырехъ единицъ.

Если получится болѣе девяти рядовъ, содержащихъ по десяти черточекъ каждый, то нужно соединять эти ряды въ группы по десяти; каждая группа въ десять рядовъ, заключающихъ каждый по десяти черточекъ, образуетъ сотню. Если имѣется болѣе девяти сотенъ, то соединяютъ эти сотни по десяти, и каждая такая группа изъ десяти сотенъ называется тысячей.

Если имѣются 4 тысячи, 5 сотенъ, 3 десятка и 2 единицы, то пишутъ 4532 и говорятъ: четыре тысячи пятьсотъ тридцать два. Цифра 2 обозначаетъ простыя единицы, или единицы перваго разряда; цифра 3 обозначаетъ десятки, или единицы второго разряда; цифра 5 обозначаетъ сотни, или единицы третьяго разряда и т. д. Если нѣтъ на лицо единицъ какого-нибудь разряда, то отсутствіе ихъ обозначается цифрой 0, и такимъ образомъ остальныя цифры сохраняютъ свои мѣста. Сообразно этому пишутъ 508, чтобы обозначить 5 сотенъ и 8 единицъ, такъ какъ 58 означало бы только 5 десятковъ и 8 единицъ. По этой причинѣ цифры, отличныя отъ нуля, называются значащими цифрами. Если мы будемъ ниже говорить просто о единицахъ, то будемъ подъ этимъ разумѣть простыя единицы.

Основное соглашеніе. Цифра, стоящая влѣво отъ другой цифры, обозначаетъ единицы непосредственно высшаго разряда, т. е. такія единицы, которыя происходятъ отъ соединенія десяти единицъ того разряда, которому принадлежитъ цифра, стоящая вправо. Кромѣ того, послѣдняя цифра обозначаетъ простыя единицы.

Слѣдуетъ при этомъ замѣтить, что первой цифрой въ числѣ называется всегда та цифра, которая занимаетъ первое мѣсто съ лѣвой стороны, а послѣдней цифрой — та, которая наиболѣе удалена вправо.

3. Способъ десятичнаго счета, или десятичная система счисленія, даетъ возможность писать всѣ числа. Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы велико ни было количество предметовъ, — напримѣръ, количество зеренъ хлѣба въ мѣшкѣ, — ихъ всегда возможно соединить въ группы по десяти. Такимъ образомъ получится опредѣленное количество десятковъ, а количество оставшихся единицъ будетъ меньше десяти. Далѣе, какъ мы уже видѣли, мы можемъ также соединить десятки въ группы по десяти въ каждой и получимъ такимъ образомъ количество сотенъ и т. д. Этотъ процессъ долженъ закончиться, потому что количество единицъ высшаго рязряда, заключающихся въ данномъ множествѣ, уменьшается съ каждымъ шагомъ, и наступитъ моментъ, когда ихъ окажется менѣе десяти. Тогда процессъ самъ собой закончится, и количество хлѣбныхъ зеренъ будетъ выражено въ десятичной системѣ.

4. **Опредѣленіе**. Говорятъ, что два количества равны между собою въ томъ случаѣ, если ихъ единицы можно распредѣлить такимъ образомъ, что каждой единицѣ одного количества соотвѣтствуетъ одна и только одна единица другого и наоборотъ. Такъ, мы скажемъ, что количество копеекъ у Павла равно количеству шаровъ у Петра въ томъ случаѣ, когда возможно расположить на столѣ копейки Павла и рядомъ съ ними шары Петра такъ, чтобы около каждой копейки лежалъ шаръ и около шара—копейка. Точно такъ же мы скажемъ, что количество чернильницъ въ классѣ равно количеству учениковъ, если возможно распредѣлить чернильницы такъ, чтобы каждый ученикъ имѣлъ одну только чернильницу, и чтобы каждая чернильница принадлежала одному только ученику.

Если же, напротивъ того, возможно распредѣлить чернильницы такъ, чтобы каждый ученикъ имѣлъ по одной чернильницѣ, но чтобы при этомъ остались лишнія чернильницы, то въ такомъ случаѣ говорятъ, что количество чернильницъ превосходитъ количество учениковъ, или что оно больше количества учениковъ; количество же учениковъ въ такомъ случаѣ меньше количества чернильницъ.

Мы должны признать за основное положеніе, т. е. признать непосредственно яснымъ, что два данныхъ количества либо равны другъ другу, либо первое больше второго, либо второе больше перваго. Такъ, напримѣръ, чернильницъ можетъ быть столько же, сколько и учениковъ, или чернильницъ будетъ больше, чѣмъ учениковъ, или же учениковъ будетъ больше, чѣмъ чернильницъ. Слѣдуетъ уяснить себѣ, что основное положеніе въ этомъ случаѣ выражаетъ слѣдующее: пусть будутъ розданы чернильницы ученикамъ въ опредѣленномъ порядкѣ такъ, чтобы каждый ученикъ получилъ одну чернильницу. Если при этой раздачѣ окажется недостатокъ въ чернильницахъ, то невозможно, чтобы при другой раздачѣ каждый ученикъ получилъ по чернильницѣ или чтобы оказались лишнія чернильницы. Это и есть *основное положеніе неизмѣнности количества.*

Если только правильно понято значеніе этого положенія, то нетрудно доказать, что два равныхъ количества въ десятичномъ счисленіи всегда пишутся одинаковымъ образомъ, а два неравныхъ количества — различно. А именно, согласно опредѣленію равенства, количество черточекъ (2) равно количеству считаемыхъ предметовъ, такъ какъ каждой черточкѣ соотвѣтствуетъ предметъ и каждому предмету черточка. Далѣе, изъ основного положенія неизмѣнности количества слѣдуетъ, что количество черточекъ на таблицѣ равно количеству предметовъ, какимъ бы образомъ мы ихъ ни считали, т. е. какимъ бы образомъ мы ни располагали предметы и черточки. Поэтому, если два количества равны, то имъ будетъ соотвѣтствовать всегда одна и та же таблица черточекъ, т. е. одно и то же количество единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д.

Если же, напротивъ того, два количества не равны, то имъ будутъ соотвѣтствовать различныя таблицы черточекъ, а слѣдовательно, и различное письменное изображеніе.

5. Необходимо умѣть рѣшать, какое изъ двухъ данныхъ количествъ, написанныхъ по десятичной системѣ, больше. Для этого существуетъ слѣдующее правило, которое можно уяснить себѣ изъ разсмотрѣнія таблицъ черточекъ.

Правило. Если даны два числа, написанныя по десятичной системѣ, и если въ нихъ неодинаковое количество цифръ, то бо̀льшимъ изъ нихъ будетъ то, въ которомъ больше цифръ. Если же въ нихъ одинаковое количество цифръ, то бо̀льшимъ изъ нихъ будетъ то, въ которомъ первая цифра больше. Если же оба числа начинаются съ одной и той же цифры, то бо̀льшимъ изъ нихъ будетъ то, въ которомъ слѣдующая цифра больше. Если же слѣдующія цифры также равны, то нужно обратить вниманіе на слѣдующія за ними цифры и т. д. Если всѣ цифры равны, то самыя числа также равны.

Такимъ образомъ можно числа расположить послѣдовательно, подобно тому, какъ располагаются слова въ словарѣ.

6. Вмѣсто количествъ говорятъ также о цѣлыхъ числахъ, при чемъ слово цѣлыя служитъ для отличія этихъ чиселъ отъ другихъ родовъ чиселъ, которыми мы будемъ заниматься впослѣдствіи. Обыкновенно въ элементарныхъ разсужденіяхъ о цѣлыхъ числахъ слово „цѣлый" опускается и, краткости ради, говорятъ просто о числахъ вмѣсто того, чтобы говорить о количествахъ или о цѣлыхъ числахъ Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ также придерживаться этого обычая; но не слѣдуетъ упускать изъ виду, что теоремы, которыя будутъ доказаны въ слѣдующихъ главахъ, относятся только къ цѣлымъ числамъ, и что ихъ не слѣдуетъ примѣнять безъ разбора къ другимъ видамъ чиселъ, которые будутъ введены впослѣдствіи.

7. Употребляютъ знакъ $=$ (равно) для выраженія равенства двухъ чиселъ, знакъ $\neq$ (отлично отъ), чтобы указать, что два числа не равны, знаки $>$ (больше, чѣмъ) и $<$ (меньше, чѣмъ), чтобы показать, что одно число больше, чѣмъ другое; при этомъ отверстіе знака всегда обращено въ сторону большаго числа. Такъ, напримѣръ, пишутъ:

$$145 = 145$$

и называютъ это равенствомъ. Далѣе пишутъ:

$$143 \neq 138,$$
$$3 < 5,$$
$$107 < 110,$$
$$2350 > 998,$$
$$2402 > 2399,$$
$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 \ldots$$

и говорятъ, что это — неравенства.

Рядъ 0, 1, 2, 3, 4,... всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, слѣдующихъ одно за другимъ въ возрастающемъ порядкѣ, называется натуральнымъ рядомъ цѣлыхъ чиселъ.

ЗАДАЧИ КЪ I-ой ГЛАВѢ.

Задачи на счисленіе требуютъ знанія четырехъ дѣйствій. Безъ этого знанія счисленіе представляетъ только эмпирическое средство считать и писать числа (съ помощью таблицъ черточекъ). Поэтому мы даемъ задачи на счисленіе позже, послѣ ученія о четырехъ дѣйствіяхъ.

Глава II.

СЛОЖЕНІЕ и ВЫЧИТАНІЕ.

I. СЛОЖЕНІЕ.

8. **Опредѣленіе и свойства.** Вотъ у меня 3 шара въ одномъ мѣшкѣ и 4 шара въ другомъ. Если мы всѣ эти шары вложимъ въ третій мѣшокъ, то мы скажемъ, что количество шаровъ, находящихся въ третьемъ мѣшкѣ, т. е. 7, есть сумма количествъ шаровъ, находившихся въ обоихъ мѣшкахъ, и напишемъ:

$$3 + 4 = 7$$

(читается: 3 плюсъ 4 равно 7).

Сложеніе, слѣдовательно, есть такое дѣйствіе, которое имѣетъ цѣлью разысканіе суммы двухъ (или нѣсколькихъ) данныхъ чиселъ, или слагаемыхъ. Точнѣе говоря: сумму двухъ чиселъ, написанныхъ по десятичной системѣ, требуется написать тоже по этой системѣ.

Мы укажемъ теперь нѣсколько теоремъ, относящихся къ сложенію и представляющихъ собою слѣдствія основного положенія о неизмѣнности количества; мы постараемся наглядно ихъ пояснить примѣрами изъ повседневной жизни.

Сумма нѣсколькихъ чиселъ не зависитъ отъ ихъ порядка. Вотъ у меня пять мѣшковъ съ шарами, а здѣсь стоитъ ящикъ. Я опорожняю послѣдовательно пять мѣшковъ въ ящикъ. Количество шаровъ, которые окажутся въ ящикѣ, будетъ одно и то же, въ какой бы послѣдовательности мы ни составляли сумму.

Кромѣ того безразлично, положимъ ли мы сперва шары изъ нѣсколькихъ мѣшковъ въ одинъ мѣшокъ, а затѣмъ эту сумму переложимъ въ ящикъ, или будемъ ихъ класть по очереди изъ каждаго мѣшка въ отдѣльности.

Теорема I. При сложеніи нѣсколькихъ чиселъ можно замѣнить нѣкоторыя изъ нихъ ихъ суммой или, наоборотъ, можно одно изъ чиселъ представить въ видѣ суммы и эту сумму замѣнить ея слагаемыми.

Скобки употребляются для того, чтобы выразить, что сложенія, указанныя въ скобкахъ, должны быть выполнены раньше тѣхъ сложеній, которыя относятся къ цѣлымъ скобкамъ. Установивъ это, мы получаемъ, какъ примѣры къ этой теоремѣ, равенства въ родѣ слѣдующихъ:

$$3 + 2 + 4 + 1 = (3 + 2) + (4 + 1) = 5 + 5,$$
$$5 + 6 = (2 + 3) + (4 + 2) = 2 + 3 + 4 + 2.$$

Предположимъ далѣе, что Павелъ, Петръ, Яковъ и Иванъ хотѣли соединить всѣ копейки, которыя у нихъ были, чтобы купить что-то въ складчину. Они могутъ въ такомъ случаѣ передать всѣ свои деньги одному изъ своей среды, напримѣръ, Павлу; или Петръ можетъ передать свои копейки Павлу, а Яковъ свои Ивану, послѣ чего Иванъ передастъ все, что теперь имѣетъ, Павлу. Одинъ изъ нихъ,—скажемъ, Петръ,—могъ разложить свои копейки въ три кармана сюртука и отдать потомъ послѣдовательно содержимое своихъ кармановъ. Результатъ, въ концѣ концовъ, постоянно будетъ тотъ же.

Эти различныя замѣчанія понятны сами собой, такъ что ихъ можно было бы счесть излишними. Но не слѣдуетъ упускать изъ виду, что и вся математика есть система выводовъ (болѣе или менѣе непосредственныхъ) изъ такого рода замѣчаній, которыя точно такъ же понятны сами собой, какъ и эти. Но для того, чтобы эти выводы являлись вполнѣ установленными, необходимо, чтобы въ умѣ не оставалось никакого сомнѣнія относительно исходной точки.

9. Объясненіе правилъ производства дѣйствій. Частные случаи. а) Пусть будутъ даны два однозначныхъ числа для сложенія,—напримѣръ, 7 и 5. Это дѣйствіе обозначаютъ слѣдующимъ образомъ: $7 + 5$. Чтобы прибавить 5 къ 7-ми, нужно послѣдовательно прибавлять къ числу 7 всѣ единицы числа 5, т. е. пять разъ по единицѣ. Можно, слѣдовательно, составить такую таблицу:

	1	2	3	4	5
7	8	9	10	11	12.

Когда прибавимъ одну единицу къ 7-ми, то получимъ 8, прибавимъ 2 — получимъ 9 и т. д.; прибавимъ, наконецъ, 5 единицъ — получимъ 12. Къ этому сводится пріемъ, который мы называемъ сложеніемъ по пальцамъ. На практикѣ при счетѣ нужно знать на память результаты, которые получаются при сложеніи двухъ однозначныхъ чиселъ.

Вмѣсто того, чтобы говорить, что нужно сложить два числа, выраженныя каждое одной цифрой, мы ради краткости говоримъ, что нужно сложить эти цифры. Подъ этимъ мы разумѣемъ, что нужно присчитать одно изъ чиселъ, выраженныхъ этими цифрами, къ другому.

b) Пусть будутъ даны для сложенія два числа, которыя состоятъ оба изъ одной значащей цифры (2) и одинаковаго количества слѣдующихъ за нею нулей,—напримѣръ, 30 и 40, или 400 и 700, или 6000 и 9000. Чтобы сложить 30 и 40, слѣдуетъ вспомнить, что 30 означаетъ 3 десятка, а 40 — 4 десятка. Если соединить обѣ группы черточекъ, представляющихъ эти числа, то получится, очевидно, 7 десятковъ, —напишемъ 70. Поэтому складываютъ только цифры десятковъ, не обращая вниманія на нули, которые попросту приписываются. Точно такъ же:

$$200 + 300 = 500,$$
$$30000 + 60000 = 90000.$$

Правило это становится менѣе простымъ, когда сумма обѣихъ значащихъ цифръ равна 10 ти или больше 10-ти. Пусть будутъ даны, напримѣръ, числа 600 и 700. Если мы представимъ ихъ въ видѣ группъ черточекъ, то мы получимъ 6 сотенъ и 7 сотенъ и, соединивъ ихъ, получимъ болѣе 10-ти сотенъ. Согласно принципу десятичнаго счисленія, мы должны соединить 10 сотенъ, такъ что получится одна единица ближайшаго высшаго разряда, а именно тысяча. Остаются еще сверхъ того 3 сотни, и мы получаемъ сумму 1300. И въ этомъ случаѣ сумма получается, слѣдовательно, такимъ образомъ, что складываютъ значащія цифры, не принимая въ разсчетъ нулей, которые приписываются затѣмъ справа къ полученному числу. Точно такъ же:

$$3000 + 8000 = 11000,$$
$$50000 + 60000 = 110000,$$
$$300 + 700 = 1000.$$

c) Послѣдній частный случай представляетъ сложеніе чиселъ, состоящихъ изъ одной значащей цифры и **неодинаковаго** количества нулей. Пусть, напримѣръ, требуется сложить:

$$40 + 5 + 300 + 60000 + 8000.$$

Слѣдуетъ только уяснить себѣ значеніе каждаго изъ этихъ чиселъ, чтобы понять, что ихъ сумма образуетъ число, которое можно непосредственно написать по десятичной системѣ. А именно, здѣсь имѣются 5 единицъ, 4 десятка, 3 сотни, 8 тысячъ, 6 десятковъ тысячъ; сумма, слѣдовательно, составляетъ 68345.

Точно такъ же мы получили бы:

$$400 + 6 + 3000 = 3406,$$
$$50 + 30000 = 30050,$$
$$500 + 60000 = 60500.$$

Наоборотъ, каждое число, написанное по десятичной системѣ, можно представить себѣ въ видѣ суммы столькихъ чиселъ, сколько въ ней значащихъ цифръ; при этомъ каждое число состоитъ изъ одной значащей цифры и столькихъ нулей, сколько цифръ стоитъ за нею въ данномъ числѣ. Такимъ образомъ:

$$6854 = 6000 + 800 + 50 + 4.$$

На это замѣчаніе смотрятъ иногда, какъ на составную часть **счета**. Оно, во всякомъ случаѣ, составляетъ существенное къ нему добавленіе, но можно, однако, обойтись и безъ него. Можно вѣдь себѣ представить, что нѣкто по опыту научился считать до ста, т. е. хорошо понимаетъ значеніе словъ **сорокъ шесть**, **сорокъ, шесть** и знаетъ также письменное изображеніе этихъ чиселъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ не знаетъ еще, что $46 = 40 + 6$.

10. Общій случай. Пусть требуется сложить два какихъ-либо числа,— напримѣръ, 2317 и 541. Мы сведемъ это сложеніе къ разсмотрѣннымъ уже случаямъ. Именно:

$$2317 = 2000 + 300 + 10 + 7,$$
$$541 = \qquad 500 + 40 + 1.$$

Чтобы сложить эти два числа, мы можемъ сложить различныя составныя части суммъ, которыя равны этимъ числамъ; а такъ какъ величина суммы не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, то мы можемъ написать послѣдовательно:

$$2317 + 541 = 2000 + 300 + 10 + 7 + 500 + 40 + 1.$$
$$2317 + 541 = 2000 + 300 + 500 + 10 + 40 + 7 + 1.$$

Но

$$\begin{aligned} 300 + 500 &= 800, \\ 10 + 40 &= 50, \\ 7 + 1 &= 8. \end{aligned}$$

Если мы поэтому замѣнимъ составныя части всей суммы вычисленными суммами ихъ, то мы можемъ написать:

$$2317 + 541 = 2000 + 800 + 50 + 8 = 2858.$$

На практикѣ при счетѣ нѣтъ надобности производить это разложеніе и слѣдующее за нимъ соединеніе. Пишутъ, напротивъ того, числа одно подъ другимъ такимъ образомъ, чтобы цифры одного разряда находились въ одномъ и томъ же столбцѣ:

$$\begin{array}{r} 2317 \\ 541 \\ \hline 2858. \end{array}$$

Для полученія результата достаточно сложить цифры, стоящія въ одномъ столбцѣ, и сумму подписать подъ этимъ столбцомъ. Наше разсужденіе приводитъ, слѣдовательно, къ хорошо извѣстному практическому правилу, которое, такимъ образомъ, является доказаннымъ.

Въ избранномъ нами примѣрѣ сумма цифръ одного и того же разряда была постоянно меньше десяти. Въ противномъ случаѣ правило становится нѣсколько болѣе сложнымъ.

Пусть будетъ дано, напримѣръ, сложить числа 345, 456, 527. Въ такомъ случаѣ:

$$\begin{aligned} 345 &= 300 + 40 + 5, \\ 456 &= 400 + 50 + 6, \\ 527 &= 500 + 20 + 7, \end{aligned}$$

и поэтому:

$$345+456+527=300+400+500+40+50+20+5+6+7.$$

Но

$$5 + 6 + 7 = 18 = 10 + 8.$$

Замѣняя поэтому $5 + 6 + 7$ черезъ $10 + 8$, можно написать такъ:

$$345+456+527=300+400+500+40+50+20+10+8.$$

Къ десяткамъ $40+50+20$, которые взяты изъ данныхъ чиселъ, прибавляется, слѣдовательно, еще одинъ десятокъ, который получается отъ сложенія единицъ. При этомъ говорятъ, что цифру 1 нужно держать въ умѣ. Точно такъ же:

$$40 + 50 + 20 + 10 = 120 = 100 + 20,$$

и поэтому

$$345 + 456 + 527 = 300 + 400 + 500 + 100 + 20 + 8.$$

Наконецъ,

$$300 + 400 + 500 + 100 = 1000 + 300 = 1300.$$

Въ концѣ концовъ получимъ:

$$345 + 456 + 527 = 1300 + 20 + 8 = 1328.$$

На практикѣ при выполненіи сложенія придерживаются слѣдующаго правила:

Правило производства дѣйствія 1-ое. Чтобы сложить нѣсколько чиселъ, пишутъ ихъ одно подъ другимъ такъ, что цифры, представляющія единицы одного и того же разряда, находятся въ одномъ столбцѣ. Складываютъ въ умѣ цифры, стоящія въ правомъ столбцѣ и подписываютъ подъ нимъ результатъ, если онъ меньше 10-ти; если же онъ больше или равенъ 10-ти, то подписывается только цифра единицъ, а цифру десятковъ держатъ въ умѣ. Къ этому числу, которое держатъ въ умѣ, прибавляютъ послѣдовательно всѣ цифры столбца десятковъ и поступаютъ точно такъ же, какъ и при сложеніи цифръ предыдущаго столбца. Такъ продолжаютъ поступать, пока не будутъ исчерпаны всѣ столбцы. Подъ послѣднимъ столбцомъ подписываютъ весь результатъ, независимо отъ того, будетъ ли онъ больше или меньше 10-ти. Число, которое будетъ выражено написанными цифрами, и есть искомая сумма.

Ни этого, ни послѣдующихъ правилъ производства дѣйствій не нужно заучивать наизусть. Слѣдуетъ, напротивъ того, внимательно прочитавъ его, закрыть книгу и попробовать формулировать правило самому. Такимъ образомъ можно убѣдиться не только въ усвоеніи механизма дѣйствія, но и въ томъ, понята ли причина, почему поступаютъ такъ, а не иначе.

Въ нашемъ примѣрѣ дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 345 \\ 456 \\ 527 \\ \hline 1328. \end{array}$$

При этомъ говорятъ обыкновенно для краткости, но, конечно, неправильно: 5 и 6 будетъ 11, и 7 будетъ 18; пишу 8, въ умѣ 1; 1 и 4 будетъ 5, и 5 будетъ 10, и 2 будетъ 12; пишу 2, въ умѣ 1; 1 и 3 будетъ 4, и 4 будетъ 8, и 5 будетъ 13; пишу 13.

II. ВЫЧИТАНІЕ.

11. Опредѣленіе и свойства. На прилавкѣ лежатъ 9 рублей. Я беру изъ нихъ 4. Тогда остается 5 рублей. Говорятъ, что это число 5 есть разность чиселъ 9 (уменьшаемое) и 5 (вычитаемое) и пишутъ:

$$9 - 4 = 5$$

(читается: 9 минусъ 4 равно 5).

Вычитаніе, слѣдовательно, есть дѣйствіе, которое имѣетъ цѣлью нахожденіе разности двухъ данныхъ чиселъ.

Если отнять отъ нѣкотораго множества опредѣленное количество предметовъ, а затѣмъ опять прибавить ихъ то, очевидно, получится прежнее множество. Отсюда вытекаетъ новое пониманіе нашего опредѣленія вычитанія, а именно — вычитаніе можно разсматривать, какъ дѣйствіе, обратное сложенію.

Опредѣленіе. Вычитаніе есть такое дѣйствіе, которое имѣетъ цѣлью къ двумъ даннымъ числамъ подыскать третье (разность), которое, будучи прибавлено ко второму числу (вычитаемому), дастъ сумму, равную первому числу (уменьшаемому).

Чтобы вычитаніе было возможно, уменьшаемое не должно быть меньше вычитаемаго. Если на прилавкѣ лежатъ только 9 рублей, то я не могу взять 12-и рублей. Если же я возьму 9 рублей, то не останется ничего; слѣдовательно, если уменьшаемое равно вычитаемому, то разность равна нулю.

Изъ опредѣленія вычитанія и основного положенія о неизмѣнности количества вытекаютъ нѣкоторыя важныя его свойства.

Теорема 2. Чтобы изъ даннаго числа вычесть сумму нѣсколькихъ чиселъ, можно вычесть изъ него послѣдовательно всѣ слагаемыя.

Если я хочу, напримѣръ, вычесть сумму $2+3$, равную 5-ти, изъ 9-ти, то все равно, скажу ли я: $9-5=4$, или $9-2=7$, $7-3=4$. Если я имѣю 9 рублей и хочу изъ нихъ дать 2 рубля Якову и 3 Ивану, то все равно, дамъ ли я послѣдовательно каждому его деньги, или дамъ сразу 5 рублей Петру, поручивъ ему раздѣлить ихъ между обоими, т. е.

$$9-(2+3)=9-2-3;$$

здѣсь скобки означаютъ, что сложеніе $2+3$, указанное внутри скобокъ, должно быть выполнено раньше вычитанія, которое указано знакомъ минусъ, стоящимъ передъ скобками.

Теорема 3. Чтобы къ какому-нибудь числу прибавить разность двухъ чиселъ, слѣдуетъ прибавить къ нему уменьшаемое и отъ полученной суммы отнять вычитаемое.

У меня 8 рублей, и мнѣ должны дать $(5-2)$ рубля. Это можно сдѣлать двоякимъ образомъ. Мнѣ могутъ дать разность $5-2$, т. е. 3 рубля, или же мнѣ могутъ дать 5 рублей и потребовать сдачи 2 рубля. Поступятъ ли однимъ или другимъ способомъ, я ни въ томъ ни въ другомъ случаѣ не буду ни богаче ни бѣднѣе:

$$8+(5-2)=8+5-2.$$

Теорема 4. Чтобы отъ какого нибудь числа отнять разность двухъ чиселъ, слѣдуетъ отъ даннаго числа отнять уменьшаемое и къ полученной разности прибавить вычитаемое.

Я имѣю 10 рублей и долженъ 3 рубля. Если у меня имѣются мелкія монеты, то я заплачу 3 рубля, и у меня останется еще 7. Если же у меня есть только монета въ пять рублей, то я могу ее отдать и потребовать 2 рубля сдачи. Результатъ тотъ же самый: вмѣсто того, чтобы отдать сразу $(5-2)$ рубля, я отдалъ 5 рублей и получилъ обратно 2 рубля, т. е.

$$10-(5-2)=10-5+2.$$

12. Общее названіе для суммы и разности—скобки. Общее названіе для слагаемаго, уменьшаемего и вычитаемаго — членъ. Общее названіе для сложенія и вычитанія —соединеніе. Пользуясь этими названiями, мы можемъ, обобщая теорему 1-ую, высказать слѣдующую очень важную теорему:

Теорема 5. Если нужно соединить нѣсколько членовъ, или нѣсколько скобокъ, или нѣсколько членовъ и нѣсколько скобокъ вмѣстѣ, то порядокъ, въ которомъ мы это сдѣлаемъ, не имѣетъ значенiя.

У меня 6 рублей. Кромѣ того, я долженъ получить 3 рубля отъ Якова и 1 рубль отъ Ивана. Затѣмъ я долженъ уплатить 4 рубля Павлу и 2 рубля Петру. Въ какомъ бы порядкѣ ни были произведены эти различныя операцiи, результатъ будетъ тотъ же самый. Когда я уплачу, что слѣдуетъ, Павлу, у меня останется $(6 - 4)$ рублей. Если затѣмъ мнѣ уплатитъ Яковъ, то я буду имѣть $(6 - 4 + 3)$ рублей. Когда я уплачу Петру, то у меня останется $(6 - 4 + 3 - 2)$ рублей, а если, наконецъ, Иванъ уплатитъ мнѣ свой долгъ, то я буду имѣть $(6 - 4 + 3 - 2 + 1)$ рублей. Если бы я разсчитался сначала съ Петромъ, потомъ съ Яковомъ, Иваномъ и Павломъ, то я имѣлъ бы $(6 - 2 + 3 + 1 - 4)$ рублей.

Слѣдовательно, имѣетъ мѣсто равенство:

$$6 - 4 + 3 - 2 + 1 = 6 - 2 + 3 + 1 - 4.$$

Здѣсь производство дѣйствiй въ томъ порядкѣ, въ которомъ они указаны, является возможнымъ. Но если бы я имѣлъ 2 рубля, долженъ былъ бы получить 5 рублей и уплатить изъ нихъ 6, то я, конечно, не могъ бы уплатить прежде, чѣмъ получилъ бы долгъ. Мы вернемся къ этому въ алгебрѣ, въ теорiи такъ называемыхъ отрицательныхъ чиселъ.

Теорема 6. Разность остается безъ измѣненiя, если мы къ уменьшаемому и вычитаемому прибавимъ одно и то же число или если мы отъ нихъ отнимемъ одно и то же число.

Эту теорему можно считать непосредственнымъ слѣдствiемъ предыдущей, но полезно высказать и разобрать ее отдѣльно.

У меня 6 рублей, и я долженъ уплатить изъ нихъ 4. Мнѣ даютъ 3 рубля подъ условiемъ, чтобы я и уплатилъ лишнихъ 3 рубля. Это не измѣняетъ моего достоянiя. Можно, слѣдовательно, написать:

$$6 - 4 = (6 + 3) - (4 + 3) = 9 - 7.$$

Положимъ теперь, что я имѣю 9 рублей и долженъ изъ нихъ завтра уплатить 7. Я отдаю 3 рубля еще сегодня подъ условіемъ, что завтра уплачу тремя рублями меньше. Мое достояніе не измѣнилось. Можно, слѣдовательно, написать:

$$9 - 7 = (9 - 3) - (7 - 3) = 6 - 4.$$

13. Объясненіе правилъ производства дѣйствія. Частные случаи. Самый простой случай при вычитаніи представляется тогда, когда и уменьшаемое и вычитаемое имѣютъ только по одной цифрѣ. Въ этомъ случаѣ такъ же, какъ и при сложеніи, нужно знать результаты на память.

Если результатъ вычитанія извѣстенъ, то его можно найти, пользуясь опредѣленіемъ вычитанія, какъ дѣйствія, обратнаго сложенію. Пусть, напримѣръ, дано отнять 8 отъ 14-ти. Въ такомъ случаѣ дѣло сводится къ тому, чтобы узнать, какое число слѣдуетъ прибавить къ 8-ми, чтобы получить 14. Нужно только написать слѣдующую таблицу:

8	9	10	11	12	13	14
	1	2	3	4	5	6,

и мы увидимъ, что этимъ числомъ будетъ 6. То, что называютъ вычитаніемъ на пальцахъ, и сводится, въ сущности, къ этому пріему. Почти такъ же просто поступаютъ въ томъ случаѣ, когда уменьшаемое и вычитаемое состоятъ оба изъ одной значащей цифры и одинаковаго количества нулей. Правило, которое было указано въ соотвѣтственномъ случаѣ при сложеніи, даетъ намъ и здѣсь тотчасъ же результатъ. Такъ, напримѣръ:

$$90 - 60 = 30,$$
$$900 - 600 = 300.$$

Общій случай. Пусть требуется отнять 2436 отъ 5849. Имѣемъ:

$$5849 = 5000 + 800 + 40 + 9,$$
$$2436 = 2000 + 400 + 30 + 6.$$

Примѣняя теоремы 2 и 5, получаемъ:

$$\begin{aligned} 5849 - 2436 &= 5000 + 800 + 40 + 9 - 2000 - 400 - 30 - 6 \\ &= 5000 - 2000 + 800 - 400 + 40 - 30 + 9 - 6 \\ &= 3000 + 400 + 10 + 3 \\ &= 3413. \end{aligned}$$

На практикѣ эту задачу записываютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 5849 \\ \underline{2436} \\ 3413. \end{array}$$

Достаточно отнять каждую цифру отъ цифры, стоящей надъ нею. Слѣдовательно, здѣсь приходится выполнять тѣ же самыя дѣйствія, какія мы выполняли при прежнемъ разложеніи.

Въ нашемъ примѣрѣ каждое отдѣльное вычитаніе было возможно. Если же мы захотимъ отнять 345 отъ 622, то мы замѣтимъ, что при разложеніи

$$622 - 345 = 600 - 300 + 20 - 40 + 2 - 5$$

мы не можемъ отнять 5 отъ 2 и 40 отъ 20. Это затрудненіе устраняется съ помощью теоремы 6, такъ какъ, руководствуясь ею, можно написать:

$$\begin{aligned} 622 - 345 &= 622 + 100 + 10 - (345 + 100 + 10) \\ &= 600 - 300 - 100 + 100 + 20 - 40 - 10 + 10 + 2 - 5 \\ &= 600 - 400 + 120 - 50 + 12 - 5 \\ &= 200 + 70 + 7 \\ &= 277. \end{aligned}$$

При практическомъ выполненіи дѣйствія поступаютъ слѣдующимъ образомъ: подписываютъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такимъ образомъ, чтобы единицы одного и того же разряда находились другъ подъ другомъ, т. е. такъ:

$$\begin{array}{r} 622 \\ \underline{345} \\ 7. \end{array}$$

Теперь мы замѣчаемъ, что нельзя отнять 5 отъ 2; поэтому отнимаемъ 5 отъ 12, получается 7; такимъ образомъ, мы прибавили 10 къ 622; поэтому нужно прибавить также 10 къ 345 или, другими словами, во второмъ столбцѣ мы отнимаемъ 5 вмѣсто 4.

Ученіе о вычитаніи можно изложить еще проще, если принять во вниманіе, что вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію. Чтобы выяснить этотъ пріемъ надлежащимъ образомъ, воспользуемся на время слѣдующей записью вмѣсто обыкновенной:

$$\begin{array}{r} 345 \\ \cdots \\ \hline 622 \end{array}$$

Мы разсматриваемъ 622, какъ сумму 345 и другого неизвѣстнаго числа, которое мы обозначили тремя точками. Выполняя сложеніе 345 и неизвѣстнаго числа въ умѣ, мы, очевидно, не можемъ получить въ требуемой суммѣ въ столбцѣ единицъ цифру 2, если будемъ прибавлять къ цифрѣ 5 какую нибудь цифру, такъ какъ мы получили бы въ такомъ случаѣ 5, 6, 7, 8 или 9. Но такъ какъ мы заучили наизусть суммы первыхъ десяти чиселъ, то мы знаемъ, что должны прибавить 7 къ 5, чтобы получить 12. Мы говоримъ поэтому: 5 и **7** составляетъ 12, пишу 7 и сохраняю 1 въ умѣ:

$$\begin{array}{r} 345 \\ ..7 \\ \hline 622. \end{array}$$

Мы подписываемъ, слѣдовательно, цифру 7 вмѣсто третьей точки. Затѣмъ мы говоримъ: 1 въ умѣ и 4 будетъ 5, и **7** будетъ 12 (мы пишемъ цифру 7 въ тотъ моментъ, когда ее произносимъ); пишу 7 и держу 1 въ умѣ:

$$\begin{array}{r} 345 \\ .77 \\ \hline 622. \end{array}$$

Наконецъ: 1 въ умѣ и 3 будетъ 4, и **2** будетъ 6; пишемъ цифру 2 въ тотъ моментъ, когда ее произносимъ:

$$\begin{array}{r} 345 \\ 277 \\ \hline 622. \end{array}$$

Очевидно, мы можемъ поступить такимъ же образомъ, пользуясь обыкновенной записью:

$$\begin{array}{r} 622 \\ 345 \\ \hline 277. \end{array}$$

Можно, слѣдовательно, высказать слѣдующее правило:

Правило производства дѣйствія 2-ое. Чтобы выполнить вычитаніе, подписываютъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ, располагая соотвѣтственно другъ подъ другомъ единицы одинаковыхъ разрядовъ. Чтобы получить цифру единицъ въ разности, отнимаютъ цифру единицъ второй строки отъ цифры, стоящей надъ нею; если это вычитаніе невозможно, то къ верхней цифрѣ прибавляютъ 10 и сохраняютъ 1 въ умѣ. Затѣмъ такимъ же образомъ находятъ цифру десятковъ, при чемъ не слѣдуетъ забывать увеличить вычитаемую цифру на число, сохраненное въ умѣ. Такимъ образомъ ведутъ дѣйствія до конца, пока остаются еще цифры.

Можно, впрочемъ, употреблять одно изъ слѣдующихъ короткихъ, но, конечно, неправильныхъ выраженій:

$$\begin{array}{r} 3567 \\ 958 \\ \hline 2609 \end{array}$$

произносимъ: 8 отъ 17, остается 9, 1 въ умѣ; 1 и 5 будетъ 6, 6 отъ 6 остается 0; 9 отъ 15 остается 6, 1 въ умѣ; 1 отъ 3 остается 2. Или: 8 и **9** будетъ 17, 1 въ умѣ; 1 и 5 составитъ 6, и **0** будетъ 6; 9 и **6** будетъ 15, 1 въ умѣ; 1 и **2** будетъ 3.

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ II-ой.

1. Какого вѣса будетъ предметъ, къ которому нужно прибавить гирю въ 10 граммовъ и 3 гирьки по 1 грамму, чтобы уравновѣсить 1 киллограммъ?

2. У Ивана есть участокъ земли въ 30 гектаровъ. Онъ продаетъ для построекъ 450 кв. метровъ Петру, 600 Якову, 500 Павлу. Сколько кв. метровъ остается у Ивана?

3. Имѣется куча песку въ 3 кубическихъ метра. Изъ нея берутъ сперва 15 литровъ, затѣмъ 60 литровъ, затѣмъ 9 гектолитровъ. Каковъ будетъ объемъ остального песку?

4. Населеніе различныхъ провинцій прусскаго государства въ 1890 и 1900 годахъ представлено въ слѣдующей таблицѣ:

Провинціи	Населеніе	
	1890	1900
Восточная Пруссія	1 958 663	1 996 626
Западная Пруссія	1 433 681	1 563 658
Округъ города Берлина	1 578 794	1 888 848
Бранденбургъ	2 541 783	3 108 554
Померанія	1 520 889	1 634 832
Познань	1 751 642	1 887 275
Силезія	4 224 458	4 668 857
Саксонія	2 580 010	2 832 616
Шлезвигъ Гольштейнъ	1 219 523	1 387 968
Ганноверъ	2 278 361	2 590 939
Вестфалія	2 428 661	3 187 777
Гессенъ-Нассау	1 664 426	1 897 981
Рейнскія провинціи	4 710 391	5 759 798
Гогенцоллернъ	66 085	66 780

Требуется разсчитать, какъ велико было населеніе Пруссіи въ 1890 и въ 1900 годахъ, и на сколько оно увеличилось за 10-лѣтній промежутокъ?

5. Сложить слѣдующія числа: 3 часа 15 минутъ 34 секунды, 4 часа 5 минутъ 25 секундъ, 1 часъ 50 минутъ 12 секундъ.

6. У отца 5 дѣтей. Младшему 12 лѣтъ; слѣдующія старше его на 4, 6, 9 и 11 лѣтъ. Какую сумму составятъ лѣта всѣхъ пятерыхъ дѣтей?

7. Выполнить слѣдующія сложенія:

$$12\,542 + 9\,999,$$
$$13\,425 + 9\,998,$$
$$14\,529 + 99\,997.$$

8. Выполнить слѣдующія вычитанія:

$$4\,325 - 999,$$
$$32\,567 - 9\,998,$$
$$43\,650 - 9\,996.$$

9. Отъ 10 000 отнять слѣдующія числа: 3 457, 2 994, 3 435, 5 149, 9 834, 8 991.

10. Воспользоваться результатами предыдущей задачи, чтобы замѣнить слѣдующія вычитанія сложеніями:

$$23\,451 - 3\,457,$$
$$24\,630 - 2\,994,$$
$$3\,752 - 3\,435,$$
$$9\,650 - 5\,149,$$
$$38\,421 - 9\,834,$$
$$9\,857 - 8\,991.$$

11. Предложенъ слѣдующій рядъ дѣйствій:

$$23\,457 - 4\,522 + 4\,627 - 9643\,.$$

Ихъ можно замѣнить слѣдующими:

$$23\,457 + (10\,000 - 4\,522) + 4\,627 + (10\,000 - 9\,643) - 10\,000 - 10\,000.$$

Разности $10\,000 - 4\,522$ и $10\,000 - 9\,643$ получить нетрудно; поэтому нужно только выполнить сложеніе четырехъ чиселъ, а затѣмъ отъ результата отнять дважды по 10 000. Выполнить это.

12. Примѣнить методъ предыдущей задачи къ вычисленію слѣдующихъ выраженій:

$$4\,253 - 245 + 6\,324 - 997 + 12\,645 - 8\,994\,,$$
$$2\,634 - 345 + 346\,752 - 98\,649 - 9\,939\,,$$
$$4\,675 - 246 + 367\,538 - 89\,698 - 3\,975\,.$$

13. Показать, что любое число, меньшее 121, можно получить, складывая или вычитая числа 1, 3, 9, 27, 81 или только нѣкоторыя изъ нихъ, при чемъ ни одного изъ этихъ чиселъ не придется брать больше одного раза; напримѣръ:

$$62 = 81 - 27 + 9 - 1\,,$$
$$14 = 27 - 9 - 3 - 1\,,$$
$$105 = 81 + 27 - 3\,.$$

Составить подобнымъ же образомъ числа, содержащіяся между 30 и 40, и числа, содержащіяся между 90 и 100.

Глава III.

УМНОЖЕНІЕ ЦѢЛЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

I. ОПРЕДѢЛЕНІЕ и СВОЙСТВА.

14. Мы опредѣлили сложеніе (**8**), какъ дѣйствіе, цѣлью котораго является найти сумму двухъ или нѣсколькихъ данныхъ чиселъ — слагаемыхъ. Часто случается, что въ такой суммѣ всѣ слагаемыя равны между собою. Если, напримѣръ, нужно вычислить сумму

$$3 + 3 + 3 + 3,$$

то говорятъ короче, что эта сумма равна произведенію $3 \cdot 4$ (читать: четырежды три):

$$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12.$$

Составленіе произведенія называется умноженіемъ. Умноженіе, слѣдовательно, есть сокращенное сложеніе.

Руководствуясь теоремой 1 (**8**), мы можемъ выполнить это сложеніе такимъ образомъ, что разложимъ сперва каждое слагаемое на сумму единицъ, затѣмъ отъ каждаго слагаемаго возьмемъ по 1, что составитъ сумму 4, и это дѣйствіе повторимъ три раза. Вмѣсто суммы $3 + 3 + 3 + 3$ мы получимъ тогда равную ей сумму $4 + 4 + 4$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4.$$

На этомъ основаніи числа 3 и 4 носятъ общее названіе сомножителей произведенія 12; отсюда же выводится слѣдующая важная теорема:

Теорема 7. Произведеніе двухъ сомножителей не измѣнится, если мы ихъ переставимъ.

Эта теорема нуждается въ существенномъ дополненіи. Именно, согласно первоначальному опредѣленію умноженія, какъ сокращеннаго сложенія, второй сомножитель долженъ быть отличенъ отъ единицы. Хотя изъ опредѣленія и слѣдуетъ, что произведеніе $1 \cdot 4$ равно суммѣ $1 + 1 + 1 + 1$, т. е. 4-мъ, но произведеніе $4 \cdot 1$ еще не было опредѣлено. Теперь мы дадимъ ему опредѣленіе; именно: мы потребуемъ, чтобы предыдущая теорема имѣла мѣсто также въ этомъ случаѣ и чтобы поэтому было:

$$4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4.$$

Теорема 8. Произведеніе единицы на какое-нибудь число равно этому числу.

Далѣе, второй сомножитель по опредѣленію долженъ быть отличенъ отъ нуля. Если мы поступимъ подобно тому, какъ поступили съ сомножителемъ 1, то убѣдимся въ справедливости теоремы:

Теорема 9. Произведеніе нуля на какое-нибудь число или какого-нибудь числа на нуль равно нулю.

Если ни одинъ изъ двухъ сомножителей не равенъ нулю, то и произведеніе не равно нулю, такъ какъ оно представляетъ собою сумму нѣсколькихъ равныхъ чиселъ, изъ которыхъ ни одно не равно нулю.

Теорема 10. Произведеніе равно нулю въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ сомножителей равенъ нулю.

15. Произведеніе нѣсколькихъ сомножителей. Запись

$$3 \cdot 4 \cdot 5$$

означаетъ, что нужно сперва составить произведеніе $3 \cdot 4 = 12$, а затѣмъ произведеніе $12 \cdot 5 = 60$; оно называется произведеніемъ трехъ чиселъ 3, 4, 5. Вообще произведеніемъ трехъ чиселъ называютъ число, которое получается, если умножимъ произведеніе двухъ чиселъ на третье. Мы покажемъ, что и здѣсь, какъ въ случаѣ произведенія двухъ чиселъ, окончательный результатъ не зависитъ отъ порядка этихъ трехъ чиселъ; въ виду этого и здѣсь эти три числа называютъ просто сомножителями произведенія. Еще болѣе общимъ будетъ слѣдующее опредѣленіе:

Опредѣленіе. Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ есть то число, которое получается, если умножить первое число на второе, полученное произведеніе на третье число, новое произведеніе на четвертое число и т. д., пока не будутъ исчерпаны всѣ числа.

Мы покажемъ, что и это произведеніе тоже не зависитъ отъ порядка чиселъ; по этой причинѣ эти числа называются и здѣсь **сомножителями** произведенія. Основаніемъ всего этого служитъ слѣдующая теорема:

Теорема 11. Величина произведенія трехъ сомножителей не измѣнится, если мы въ немъ два рядомъ стоящихъ сомножителя замѣнимъ ихъ произведеніемъ.

Разсмотримъ произведеніе

$$2 \cdot 3 \cdot 5$$

и докажемъ, что оно равно произведенію

$$2 \cdot 15,$$

которое получится, если замѣнимъ стоящихъ рядомъ сомножителей 3 и 5 ихъ произведеніемъ 15. Для вычисленія произведенія $2 \cdot 3 \cdot 5$ мы должны составить сначала произведеніе $2 \cdot 3$ или $3 \cdot 2$, т. е. сумму трехъ чиселъ, изъ которыхъ каждое равно 2; затѣмъ это произведеніе мы должны умножить на 5, т. е. составить сумму:

$$(2+2+2)+(2+2+2)+(2+2+2)+(2+2+2)+$$
$$+(2+2+2);$$

если опустимъ скобки, то получимъ сумму 15-ти чиселъ, изъ которыхъ каждое равно 2, т. е. произведеніе $2 \cdot 15$ или $15 \cdot 2$, что и требовалось доказать.

Теорема 12. Обратно, въ произведеніи двухъ сомножителей можно замѣнить каждаго сомножителя равнымъ ему произведеніемъ двухъ сомножителей.

Это обращеніе не отличается отъ предложенія, которое мы только-что доказали; а именно оно выражетъ, что

$$2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ произведеніи трехъ сомножителей можно переставить любыхъ двухъ *рядомъ стоящихъ* сомножителей. Въ самомъ дѣлѣ, пусть дано произведеніе

$$4 \cdot 5 \cdot 6.$$

Чтобы показать, что мы можемъ переставить, напримѣръ, сомножителей 5 и 6, достаточно написать:

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 30 = 4 \cdot 6 \cdot 5.$$

При этомъ мы примѣняемъ послѣдовательно прямую и обратную теорему.

Теперь мы можемъ безъ труда доказать общую теорему:

Теорема 13. Въ произведеніи нѣсколькихъ сомножителей можно переставлять сомножителей, какъ угодно.

Пусть, напримѣръ требуется доказать, что

$$5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5.$$

Мы покажемъ, что можно, переставляя рядомъ стоящихъ сомножителей второго произведенія, привести ихъ въ тотъ порядокъ, въ которомъ они находятся въ первомъ произведеніи. Съ этой цѣлью поставимъ 5 на первое мѣсто, переставляя его послѣдовательно съ числами, которыя стоятъ влѣво отъ 5-ти, на что мы по предыдущему имѣемъ право. Такимъ образомъ мы получимъ:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5 &= 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \\ &= 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \\ &= 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2. \end{aligned}$$

Переставимъ затѣмъ сомножителя 2 на второе мѣсто, но такимъ образомъ, чтобы не сдвинуть 5; тогда получимъ:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6. \end{aligned}$$

Затѣмъ переставимъ 3 на третье мѣсто, не измѣняя мѣстъ множителей 5 и 2. Такимъ образомъ получимъ:

$$5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6,$$

что и требовалось доказать.

Цѣлесообразность примѣненнаго нами способа основывается на томъ обстоятельствѣ, что сомножители, разъ поставленные на свои мѣста, остаются на нихъ; для этого нужно начинать всегда съ того сомножителя, который долженъ стоять на первомъ мѣстѣ, затѣмъ обратиться къ тому, который нужно поставить на второе мѣсто, и т. д.

16. Умноженіе суммы или разности на какое-нибудь число. а) Здѣсь находится 8 дѣтей. Если я хочу каждому изъ нихъ дать по 2 шара, то мнѣ нужно $2 \cdot 8$ шаровъ. Если я затѣмъ хочу дать каждому ребенку еще по 3 шара, то мнѣ нужно $3 \cdot 8$ шаровъ. Слѣдовательно, я раздамъ всего $(2 \cdot 8 + 3 \cdot 8)$ шаровъ. Но я могу произвести эту раздачу шаровъ еще иначе, давая каждому ребенку сразу по $2+3$ шара; при этомъ мнѣ нужно имѣть $5 \cdot 8$ шаровъ. Какъ бы я ни поступалъ, я долженъ на основаніи положенія о неизмѣнности количества придти къ тому же самому результату:

$$5 \cdot 8 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8,$$
$$40 = 16 + 24.$$

Можно также написать:

$$(2 + 3) \cdot 8 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8.$$

Скобки, поставленныя въ лѣвой части, указываютъ, что нужно выполнить сложеніе $2 + 3 = 5$ до умноженія на 8, между тѣмъ какъ въ правой части сперва выполняется умноженіе, а потомъ сложеніе.

Такія же соглашенія относительно порядка, въ которомъ слѣдуетъ производить сложенія и умноженія, относятся также и къ слѣдующимъ равенствамъ этого пункта.

Теорема 14. Для умноженія суммы на какое-нибудь число, можно умножить слагаемыя въ отдѣльности на это число и сложить полученныя произведенія.

Чтобы дать примѣръ, въ которомъ сумма содержитъ болѣе двухъ слагаемыхъ, предположимъ, что отецъ даетъ каждому изъ своихъ пятерыхъ дѣтей въ воскресенье по 4 копейки, въ понедѣльникъ по 3 копейки, во вторникъ по 2. Сколько копеекъ долженъ онъ для этого имѣть? Въ воскресенье онъ долженъ дать $4 \cdot 5$, въ понедѣльникъ $3 \cdot 5$ и во вторникъ $2 \cdot 5$; слѣдовательно, всего:

$$(4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5) \text{ копеекъ},$$

или

$$20 + 15 + 10 = 45 \text{ копеекъ}.$$

Съ другой стороны, каждый ребенокъ получаетъ $4+3+2 = 9$ копеекъ; всѣ пятеро дѣтей вмѣстѣ получаютъ, слѣдовательно, $9 \cdot 5 = 45$ копеекъ. Результатъ непремѣнно будетъ тотъ же: 45 копеекъ. Сообразно съ этимъ пишутъ:

$$(4 + 3 + 2)\, 5 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5.$$

Для удобства принято знакъ умноженія послѣ скобокъ опускать, что не можетъ подать повода къ ошибкѣ.

b) Теперь мы разсмотримъ слѣдующій вопросъ: шестеро дѣтей имѣютъ каждый по 7 копеекъ. Каждый ребенокъ расходуетъ по 3 копейки. Сколько останется у нихъ всѣхъ вмѣстѣ? Здѣсь мы можемъ также поступить двоякимъ образомъ. Мы можемъ сказать: дѣти имѣли всѣ вмѣстѣ $7 \cdot 6 = 42$ копейки, истратили $3 \cdot 6 = 18$ копеекъ; слѣдовательно, у нихъ осталось $7 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = 24$ копейки. Но мы можемъ сказать и иначе: у каждаго ребенка осталось $(7 - 3)$ копеекъ; слѣдовательно, у всѣхъ вмѣстѣ останется $(7 - 3) \cdot 6 = 24$ копейки. Результатъ въ обоихъ случаяхъ непремѣнно будетъ одинъ и тотъ же, и потому будетъ имѣть мѣсто равенство:

$$(7 - 3)\, 6 = 7 \cdot 6 - 3 \cdot 6.$$

Теорема 15. Чтобы умножить разность двухъ чиселъ на какое-нибудь число, можно умножить уменьшаемое и вычитаемое на это число и второе произведеніе вычесть изъ перваго.

c) Теоремы 14 и 15 могутъ быть соединены въ слѣдующую теорему:

Теорема 16. Для умноженія скобокъ на нѣкоторое число, можно умножить члены ихъ отдѣльно на это число и соединить полученныя произведенія.

Поэтому, если выраженіе

$$6 - 3 + 4 - 5 + 2$$

нужно умножить на 5, то достаточно умножить каждый его его членъ на 5 и сохранить знаки.

Слѣдовательно:

$$(6 - 3 + 4 - 5 + 2) \cdot 5 = 6 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 - 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5.$$

II. ОБЪЯСНЕНІЕ ПРАВИЛА ПРОИЗВОДСТВА ДѢЙСТВІЯ.

17. Частные случаи. Для объясненія правила производства умноженія, мы различаемъ опять нѣсколько случаевъ. Мы начнемъ съ трехъ простѣйшихъ случаевъ, въ которыхъ возможно написать произведеніе сразу.

Первый случай. Оба сомножителя суть однозначныя числа. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ знать результаты наизусть; если же мы ихъ не знаемъ, то можно получить результатъ, основываясь на опредѣленіи умноженія, какъ сокращеннаго сложенія. Слѣдуетъ, однако, избѣгать заглядывать въ таблицу умноженія; такъ называютъ таблицу, въ которой выписаны произведенія чиселъ 1, 2, 3..., 8, 9 другъ на друга.

Второй случай. Одинъ сомножитель есть любое число, другой изображается единицей со слѣдующими за нею нулями (мы будемъ говорить короче: состоитъ изъ 1 съ нулями).

Пусть требуется помножить 325 на 1000 или 1000 на 325. Мы должны, слѣдовательно, составить сумму изъ 325 чиселъ, равныхъ каждое 1000. Мы раздѣлимъ ихъ на группы по 10 и получимъ 32 раза по 10000 и 5 разъ по 1000. Умножая 32 на 10000, мы получимъ 3 раза по 100000 и 2 раза по 10000. Вмѣстѣ мы имѣемъ: три раза по 100000, два раза по 10000 и 5 разъ по 1000, что составитъ 325000. Этимъ объясняется слѣдующее правило:

Правило производства дѣйствія 3-ье. Для умноженія какого-нибудь числа на число, состоящее изъ 1 съ нулями, слѣдуетъ приписать къ множимому справа столько нулей, сколько ихъ есть во множителѣ.

Если оба сомножителя представляютъ 1 съ нулями, то правило производства дѣйствія 3-ье еще упрощается. Пусть требуется, напримѣръ, умножить 10000 на 100. Получается 1000000, т. е. нулей въ произведеніи будетъ столько, сколько ихъ есть въ обоихъ сомножителяхъ вмѣстѣ. Поэтому имѣетъ мѣсто слѣдующее правило:

Правило производства дѣйствія 4-ое. Для составленія произведенія нѣсколькихъ чиселъ, изъ которыхъ каждое состоитъ изъ 1 съ нулями, достаточно поставить послѣ 1 столько нулей, сколько ихъ есть во всѣхъ отдѣльныхъ сомножителяхъ вмѣстѣ.

Третій случай. Оба сомножителя состоятъ изъ одной значащей цифры съ нѣсколькими нулями.

Пусть требуется умножить 3000 на 400.

$$3000 = 3 \cdot 1000,$$
$$400 = 4 \cdot 100;$$

слѣдовательно, на основаніи теоремъ п. 16-го:

$$\begin{aligned} 3000 \cdot 400 &= 3 \cdot 1000 \cdot 4 \cdot 100 \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 1000 \cdot 100 \\ &= 12 \cdot 100000 \\ &= 1\,200000. \end{aligned}$$

Результатъ приводитъ насъ къ слѣдующему правилу:

Правило производства дѣйствія 5-ое. Для перемноженія двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое состоитъ изъ значащей цифры и нѣсколькихъ нулей, слѣдуетъ перемножить значащія цифры и приписать къ произведенію справа столько нулей, сколько ихъ есть въ обоихъ сомножителяхъ вмѣстѣ.

Если произведеніе уже само оканчивается нулемъ, то слѣдуетъ приписывать нули сомножителей вслѣдъ за этимъ нулемъ. Напримѣръ:

$$40 \cdot 50 = 2000.$$

18. Общіе случаи. Изслѣдуемъ теперь тѣ случаи, когда невозможно, какъ въ предыдущихъ случаяхъ, написать произведеніе сразу, — въ которыхъ, наоборотъ, необходимо производить вычисленіе. При этомъ мы различаемъ два общихъ случая, смотря по тому, будетъ ли въ одномъ изъ сомножителей только одна значащая цифра, или въ обоихъ сомножителяхъ будетъ по нѣсколько значащихъ цифръ.

Первый случай. Одинъ изъ сомножителей имѣетъ только одну значащую цифру. Пусть требуется помножить 2375 на 300. Мы знаемъ, что

$$2375 \cdot 300 = 2375 \cdot 3 \cdot 100;$$

мы должны, слѣдовательно, помножить только 2375 на 3 и къ произведенію приписать справа два нуля.

Чтобы умножить 2375 на 3, мы поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} 2375 \cdot 3 &= (2000 + 300 + 70 + 5) \cdot 3 \\ &= 2000 \cdot 3 + 300 \cdot 3 + 70 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \\ &= 6000 + 900 + 210 + 15. \end{aligned}$$

Теперь мы пришли къ сложенію, которое выполнимъ слѣдующимъ образомъ:

$5 \cdot 3$	15
$70 \cdot 3$	210
$300 \cdot 3$	900
$2000 \cdot 3$	6000
	7125.

Числа, которыя намъ приходится здѣсь складывать, имѣютъ, самое большее, двѣ значащія цифры; кромѣ того, они сожатъ нули, количество которыхъ постоянно возрастаетъ на единицу. Вслѣдствіе этого можно выполнить сложеніе, не выписывая нулей, такъ какъ не приходится держать въ умѣ болѣе одной цифры заразъ, а это нетрудно. Говорятъ, поэтому, такъ: трижды $5 = 15$, пишу **5**, въ умѣ 1; при этомъ пишется цифра 5 справа. Далѣе: трижды $7 = 21$ и 1 въ умѣ будетъ 22; пишу **2**, держу 2 въ умѣ. Такимъ образомъ мы сложили и второй рядъ. Далѣе: трижды $3 = 9$, и 2 въ умѣ составитъ 11; пишу **1**, держу въ умѣ 1; наконецъ, дважды $3 = 6$ и 1 въ умѣ будетъ **7**. Если поступать такимъ образомъ, то можно получить произведеніе, не дѣлая никакихъ вычисленій письменно. Въ результатѣ получаемъ:

$$2375 \cdot 300 = 712500.$$

Правило производства дѣйствія 6-ое. Чтобы умножить какое-нибудь число на другое, состоящее изъ значащей цифры съ нулями, пишутъ сперва нули въ такомъ количествѣ, въ какомъ они находятся во множителѣ. Эти нули составятъ послѣднія цифры произведенія. Затѣмъ умножаютъ всѣ цифры перваго сомножителя на значащую цифру второго, начиная справа. Записываютъ цифру единицъ каждаго произведенія, сохраняютъ цифру десятковъ въ памяти и прибавляютъ къ слѣдующему произведенію. Такъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ исчерпаны всѣ цифры.

Какъ при сложеніи, мы ради краткости и при умноженіи будемъ говорить объ умноженіи двухъ цифръ; подъ произведеніемъ двухъ цифръ мы разумѣемъ произведеніе чиселъ, обозначенныхъ этими цифрами.

19. Второй случай. Оба числа могутъ быть какія угодно. Пусть, напримѣръ, требуется умножить 2345 на 875. Въ такомъ случаѣ поступаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$875 = 800 + 70 + 5,$$
$$2345 \cdot 875 = 2345\,(800 + 70 + 5)$$
$$= 2345 \cdot 800 + 2345 \cdot 70 + 2345 \cdot 5;$$

Нужно, слѣдовательно, согласно предыдущему правилу, умножить 2345 послѣдовательно на 800, на 70 и на 5 и сложить затѣмъ полученныя частныя произведенія. Вычисленіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 2345 \cdot 875 \\ \hline 11725 \\ 16415_0 \\ 18760_{00} \\ \hline 2051875. \end{array}$$

Подъ первой чертой подписываютъ произведеніе 2345 на 5, затѣмъ произведеніе на 70, затѣмъ произведеніе на 800. Нули, которые должны стоять съ правой стороны этихъ произведеній и которые мы обозначили меньшими цифрами, обыкновенно опускаются, т. е. выписываютъ только произведеніе на 5, на 7 и на 8, обращая при этомъ вниманіе на то, чтобы послѣдняя цифра каждаго произведенія приходилась подъ предпослѣдней цифрой предыдущаго произведенія; при этомъ говорятъ, что *отступаютъ на одно мѣсто влѣво*. Если второй сомножитель заключаетъ въ себѣ нули, то соотвѣтствующія частныя произведенія нужно отодвигать на нѣсколько мѣстъ влѣво. Такъ, напримѣръ, умноженіе 2345 на 807005 располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 2345 \cdot 807005 \\ \hline 11725 \\ 16415 \\ 18760 \\ \hline 1892426725. \end{array}$$

20. Замѣчаніе, касающееся счисленія. Теоремы, выведенныя при изложеніи умноженія, даютъ намъ возможность дополнить то, что мы говорили объ устномъ и письменномъ счисленіи.

Если дано число, напримѣръ 264356432, то можно написать, руководствуясь предыдущими объясненіями:

$$\begin{aligned} 264\,356\,432 &= (2 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4)\ 1\,000\,000 \\ &+ (3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6)\ 1\,000 \\ &+ (4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2); \end{aligned}$$

Этому разложенію соотвѣтствуетъ и способъ выговариванія этого числа. Въ устной рѣчи опускаютъ только знаки сложенія и умноженія и читаютъ, слѣдовательно, такъ:

Двѣсти шестьдесятъ четыре милліона триста пятьдесятъ шесть тысячъ четыреста тридцать два.

Легко замѣтить, что въ устномъ счисленіи производится двоякое разложеніе числа, а именно, какъ это иногда называютъ, по классамъ: единицы, тысячи, милліоны и т. д. и по разрядамъ: единицы, десятки, сотни. Съ этой точки зрѣнія устное счисленіе не есть чисто десятичное: оно имѣетъ одновременно основанія 10 и 1000.

21. Степени. Опредѣленіе. Произведеніе нѣсколькихъ равныхъ между собою сомножителей называется степенью.

Число, которое повторяется нѣсколько разъ сомножителемъ, называется основаніемъ степени; число, которое показываетъ, сколько разъ основаніе степени повторяется сомножителемъ, называется показателемъ степени. Пишутъ:

$17 \cdot 17 \cdot 17 = 17^3$ (читается: 17 въ третьей степени);

17 — основаніе степени, 3 показатель ея.

Если показатель 2, то степень называется квадратомъ своего основанія; если показатель 3, 4,..., то степень будетъ третья, четвертая,... Такъ, напримѣръ, 100 — квадратъ десяти, 1000 — третья и 1000000 — шестая степень этого основанія.

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ III.

14. Сколько секундъ въ году, состоящемъ изъ 365 дней?

15. Сколько вѣситъ 5 милліоновъ рублей серебромъ, если монета, въ одинъ рубль вѣситъ 5 граммовъ?

16. Умножить 998 на 10 003 (обратить при этомъ вниманіе на то что 998 = 1 000 — 2).

17. Умножить 995 на 9994.

18. Умножить 2992 на 39995.

19. Вычислить произведенія 142 857 на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 7.

20. Умножить число 111 111 само на себя.

21. Умножить число 12345679 на 9.

22. Умножить 181818, 272 727, 545 454 на 11.

23. Какъ велика площадь аллеи, ширина которой равна 2-мъ метрамъ, а длина 57 метрамъ?

24. Какова площадь прямолинейной улицы, длина которой составляетъ 5 километровъ, а ширина 6 метровъ?

25. Вычислить квадраты слѣдующихъ чиселъ: 3 004, 2 008, 5 004, 21 000 34.

26. Вычислить шестую степень трехъ.

27. Вычислить десятую степень двухъ.

28. Часъ имѣетъ 60 минутъ, минута 60 секундъ. Сколько секундъ въ 2 часахъ 30 минутахъ 50 секундахъ; въ 2 часахъ 35 минутахъ 43 секундахъ; въ 6 часахъ 34 минутахъ 57 секундахъ; въ 15 часахъ 18 минутахъ 34 секундахъ?

29. Доказать, что квадратъ цѣлаго числа никогда не оканчивается цифрами 2, 3, 7, 8.

Глава IV.

ДѢЛЕНІЕ.

I. ОПРЕДѢЛЕНІЕ и СВОЙСТВА.

22. Подобно тому, какъ вычитаніе было опредѣлено, какъ дѣйствіе, обратное сложенію, такъ же и дѣленіе представляетъ дѣйствіе, обратное умноженію.

Опредѣленіе. Дѣленіе есть дѣйствіе, имѣющее цѣлью найти по двумъ даннымъ числамъ третье число — частное, которое, будучи умножено на второе число — дѣлителя, дастъ произведеніе, равное первому числу — дѣлимому.

Такъ, напримѣръ, частное 12 и 3 равно 4. Пишутъ:

$$12 : 3 = 4 \text{ (читается: 12, дѣленное на 3, дастъ 4);}$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

Если дѣлимое отлично отъ нуля, то и дѣлитель долженъ быть отличнымъ отъ нуля, такъ какъ произведеніе, одинъ изъ сомножителей котораго равенъ нулю, будетъ также равно нулю и, слѣдовательно, не можетъ быть равно дѣлимому, отличному отъ нуля. Случай, когда и дѣлимое и дѣлитель равны оба нулю, мы исключаемъ изъ нашего разсмотрѣнія въ ариѳметикѣ, но вернемся къ нему въ алгебрѣ. Слѣдовательно, въ ариѳметикѣ мы всегда будемъ предполагать, что дѣлитель отличенъ отъ нуля, также и въ тѣхъ случаяхъ, когда это не будетъ ясно указано при выраженіи теоремъ.

23. Остатокъ при дѣленіи. Для нахожденія частнаго отъ дѣленія 156 на 13, пишемъ произведенія 13-ти на послѣдовательныя цѣлыя числа:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169.

Мы получаемъ во второмъ ряду все бóльшія и бóльшія числа, при чемъ каждое изъ нихъ написано подъ тѣмъ множителемъ, отъ умноженія на который оно получилось. Число 156 стоитъ подъ 12-тью; слѣдовательно, частное отъ дѣленія 156 на 13 равно 12-ти.

Если же мы хотимъ раздѣлить на 13 число 108, то мы видимъ изъ нашей таблицы, что нѣтъ цѣлаго числа, произведеніе котораго на 13 было бы равно 108. Слѣдовательно, дѣленіе въ этомъ случаѣ не можетъ быть выполнено. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что 108 не дѣлится на 13. Напротивъ того, 156 дѣлится на 13. Говорятъ также, что 156 есть кратное числа 13, 108 не есть кратное числа 13.

Опредѣленіе. Число называется кратнымъ другого числа или, другими словами, дѣлится на это другое число, если оно равно произведенію этого другого числа на какое-нибудь цѣлое число.

Мы сказали только-что, что 108 не дѣлится на 13. Если мы разсмотримъ рядъ кратныхъ 13:

13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130,

то мы увидимъ, что 108 находится между двумя послѣдовательными кратными 104 и 117, которыхъ частныя при дѣленіи на 13 будутъ 8 и 9. Говорятъ, что 8 есть частное съ недостаткомъ, а 9 — частное съ избыткомъ отъ дѣленія 108 на 13. Мы будемъ всегда имѣть въ виду частное съ недостаткомъ, если не будетъ выражено опредѣленно противное.

Опредѣленіе. Если дѣлимое не дѣлится на дѣлителя, то самое большее число, произведеніе котораго на дѣлителя меньше дѣлимаго, и будетъ частнымъ съ недостаткомъ.

Такъ, напримѣръ, пусть будетъ поставленъ слѣдующій вопросъ: У Павла 56 рублей. Сколько книжекъ можетъ онъ купить на эти деньги, если каждая книжка стоитъ 4 рубля. Онъ можетъ купить только 14 книжекъ, такъ какъ $4 \cdot 14 = 56$, $4 \cdot 15 = 60$.

Пусть теперь будетъ поставленъ подобный же вопросъ. У Павла 59 рублей. Сколько книжекъ можетъ онъ купить на эти деньги, если каждая книжка стоитъ 4 рубля. И въ этомъ случаѣ онъ можетъ купить только 14 книжекъ, такъ какъ $4 \cdot 14 = 56$, а $4 \cdot 15 = 60$. Слѣдовательно, отвѣтъ на вопросъ представитъ частное съ недостаткомъ[1]). Послѣ покупки у него еще останется разница между 59 и 56 рублями, т. е. 3 рубля. Число 3 называется остаткомъ отъ дѣленія 59 на 7.

Опредѣленіе. Если дѣлимое не дѣлится на дѣлителя, то остаткомъ называется разность между дѣлимымъ и произведеніемъ дѣлителя на частное съ недостаткомъ. Это опредѣленіе распространяется и на тотъ случай, когда дѣлимое дѣлится на дѣлителя; тогда говорятъ, что остатокъ равенъ нулю.

24. Основное равенство дѣленія. Для чиселъ 59 и 7 частное съ недостаткомъ было 8 и остатокъ 3, такъ какъ мы имѣли:

$$59 - 7 \cdot 8 = 3.$$

Можно вмѣсто этого писать также:

$$59 = 7 \cdot 8 + 3.$$

Это равенство и является основнымъ равенствомъ дѣленія. Оно выражаетъ, что дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ.

Остатокъ всегда меньше дѣлителя. Если составимъ рядъ кратныхъ дѣлителя

$$7, \ 14, \ 21, \ 28, \ 35, \ 42, \ 49, \ 56, \ 63,$$

то дѣлимое 59 будетъ находиться между двумя изъ этихъ кратныхъ, а именно между 56 и 63. Разность между 59 и 56, конечно, меньше разности между 63 и 56, т. е. меньше дѣлителя 7.

Если, наоборотъ, дано равенство:

$$38 = 8 \cdot 4 + 6,$$

то можно его понимать такъ, что 4 есть частное отъ дѣленія 38 на 8, а 6—остатокъ, такъ какъ 6 меньше 8. Если бы было дано равенство:

---

[1]) Въ качествѣ примѣра вопроса, отвѣтомъ на который будетъ служить частное съ избыткомъ, можно привести слѣдующій вопросъ. У Петра въ библіотекѣ 653 книжки. Онъ хочетъ разложить эти книжки по шкафамъ, изъ которыхъ каждый можетъ вмѣстить ровно 100 книжекъ. Сколько такихъ книжныхъ шкафовъ долженъ онъ купить? Очевидно, что онъ долженъ купить 7 такихъ шкафовъ, такъ какъ 6-ти недостаточно, но седьмой шкафъ будетъ неполонъ.

$$39 = 4 \cdot 8 + 7,$$

то изъ него, нельзя было бы заключить что 8 есть частное 39 на 4, такъ какъ 7 больше 4-хъ. Въ самомъ дѣлѣ:

$$39 = 4 \cdot 9 + 3;$$

частное отъ дѣленія 39 на 4 будетъ 9, а остатокъ 3.

25. Теоремы, касающіяся дѣленія. Мы докажемъ два важныхъ предложенія, которыя намъ будутъ полезны впослѣдствіи.

Теорема 17. Если умножимъ дѣлимое и дѣлителя на одно и тоже число, то вмѣстѣ съ тѣмъ и остатокъ умножится на это число; частное же останется безъ измѣненія.

Мы докажемъ сперва это предложеніе примѣромъ изъ ежедневной жизни. Положимъ, что намъ поставлены слѣдующіе два вопроса.

У Павла 27 руб. Сколько книжекъ онъ можетъ купить, если каждая книжка стоитъ 4 руб., и сколько у него останется?

У Петра 27 монетъ по 10 руб. каждая. Сколько паръ платья онъ можетъ себѣ купить, если за каждую пару нужно заплатить 4 монеты по 10 руб. каждая, и сколько у него останется денегъ?

Очевидно, что Павелъ можетъ купить 6 книгъ, а Петръ 6 паръ платья, и у перваго останется 3 руб. а у второго 3 монеты по 10-ти руб., т. е. 30 руб. Частное 6 осталось тѣмъ же, второй остатокъ въ 10 разъ больше перваго, такъ какъ дѣлимое и дѣлитель были во второмъ примѣрѣ въ 10 разъ больше, чѣмъ въ первомъ. Основное равенство для Павла будетъ:

$$(1) \qquad 27 = 4 \cdot 6 + 3,$$

а для Петра:

$$(2) \qquad 27 \cdot 10 = 4 \cdot 10 \cdot 6 + 3 \cdot 10.$$

Чтобы доказать нашу теорему только съ помощью основныхъ равенствъ, нужно лишь показать, что равенство (2) есть слѣдствіе равенства (1), а это дѣлается слѣдующимъ образомъ. По теоремѣ 14, для умноженія суммы на 10, нужно умножить слагаемыя на 10 и сложить полученныя произведенія. Слѣдовательно:

$$27 \cdot 10 = 4 \cdot 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10;$$

остается только въ суммѣ переставить сомножителей 6 и 10, чтобы получить основное равенство для второго дѣленія. Остатокъ будетъ 3 · 10. Это слѣдуетъ изъ того, что результаты умноженія двухъ неравныхъ чиселъ 3 и 4 на одно и то же число 10 неравны въ томъ же смыслѣ, какъ и сомножители, т. е. меньшій сомножитель даетъ меньшее произведеніе.

Перейдемъ теперь къ тому случаю, когда мы не умножаемъ, а дѣлимъ дѣлимое и дѣлителя на тоже самое число. Теорема, которая относится къ этому случаю, можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

Теорема 18. Если дѣлимое и дѣлителя раздѣлимъ на одно и то же число (при чемъ предполагается, что оба они дѣлятся на это число), то и остатокъ раздѣлится на то же самое число, а частное останется безъ измѣненія.

Нѣтъ надобности въ подробномъ доказательствѣ этой теоремы, такъ какъ можно сейчасъ же замѣтить, что она, въ сущности, совпадаетъ съ предыдущей; разница состоитъ лишь въ томъ, что измѣненъ порядокъ двухъ разсматриваемыхъ дѣленій, а именно 17 : 6 и (17 · 20) : (6 · 20).

Для примѣненія этихъ теоремъ на практикѣ, поставимъ себѣ задачу раздѣлить 35000 на 8000; если раздѣлимъ 35 на 8, то получимъ частное 4 и остатокъ 3; поэтому частное отъ дѣленія 35000 на 8000 будетъ также 4, а остатокъ будетъ 3000.

II. ОБЪЯСНЕНІЕ ПРАВИЛЪ ПРОИЗВОДСТВА ДѢЙСТВІЯ.

Изложеніе правилъ производства дѣйствія при дѣленіи раздѣлимъ мы на три отдѣла:

1. Опредѣленіе числа цифръ частнаго.
2. Случай, когда частное имѣетъ только одну цифру.
3. Случай, когда частное многозначное.

26. Опредѣленіе числа цифръ частнаго. Даны числа 23457 и 474. Сколько цифръ содержитъ частное? Мы составимъ произведенія 474 на 1, 10, 100, 1000 и т. д.

$$
\begin{aligned}
474 \cdot 1 &= 474, \\
474 \cdot 10 &= 4740, \\
474 \cdot 100 &= 47400, \\
474 \cdot 1000 &= 474000.
\end{aligned}
$$

Данное дѣлимое находится между 4740 и 47400. Отсюда слѣдуетъ, что частное отъ дѣленія 23457 на 474 будетъ больше 10-ти и меньше 100; слѣдовательно, будетъ двузначнымъ. Если составимъ произведенія 474 на 11, 12, 13,... 98, 99, то получимъ числа, содержащіяся между 4740 и 47400:

10,	11,	12,	. . .	98,	99,	100,
4740,	5214,	5688,	. . .	46452,	46926,	47400.

А такъ какъ число 23457 лежитъ между 4740 и 47400, то оно, слѣдовательно, находится между двумя послѣдовательными числами второго ряда (или равно одному изъ нихъ). Число перваго ряда, находящееся надъ меньшимъ изъ этихъ двухъ чиселъ (или надъ 23457), и будетъ искомымъ частнымъ. Это частное имѣетъ, слѣдовательно, 2 цифры.

Отсюда выводится слѣдующее правило:

Правило производства дѣйствія 7-ое. Для опредѣленія числа цифръ частнаго, приписываютъ постепенно къ дѣлителю справа по нулю. Останавливаются при этомъ, какъ только получится число, большее, чѣмъ дѣлимое. Количество приписанныхъ нулей равно искомому числу цифръ частнаго.

27. Частное однозначное. Пусть требуется раздѣлить 26637 на 8432. По предыдущему правилу въ частномъ будетъ только одна цифра, такъ какъ 84320 больше, чѣмъ 26637. Для полученія этой цифры, можно было бы умножить послѣдовательно 8432 на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Самое большее изъ этихъ чиселъ, которое, по умноженіи на 8432, дало бы произведеніе меньшее, чѣмъ дѣлимое (или равное ему), и было бы искомымъ частнымъ. Такой, пріемъ, конечно привелъ бы къ цѣли, но былъ бы слишкомъ длиннымъ. При практическихъ вычисленіяхъ предпочитаютъ путь, который уменьшилъ бы количество испытаній, т. е. умноженій. Для этого смотрятъ на первую цифру дѣлителя, въ данномъ случаѣ — 8, и спрашиваютъ себя, сколько разъ это число заключается въ 26, т. е. въ числѣ, которое составятъ двѣ первыя цифры дѣлимаго. Если бы въ дѣлимомъ первая цифра была больше или равна 8-ми, то нужно было бы взять въ дѣлимомъ только одну цифру. Здѣсь 8 заключается въ 26-ти 3 раза; поэтому испытываютъ цифру 3, т. е. умножаютъ дѣлителя на 3, и полученнное произведеніе отнимаютъ отъ дѣлимаго. Изображается вычисленіе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r l} 26637 & : 8432 = 3;\ \text{остатокъ } 1341 \\ \underline{25296} & \\ 1341 & \end{array}$$

Произведеніе чиселъ 8432 и 3 составляетъ 25296, а разность 26637 и 25296 равняется 1341; это, слѣдовательно, и есть остатокъ.

На практикѣ по большей части не пишутъ произведенія 25296, получаемаго отъ умноженія 8432 на 3, умноженіе и вычитаніе выполняютъ сразу. Говорятъ, слѣдовательно, такъ: 3-жды 2 будетъ 6, отъ 7-ми остается 1; записываемъ 1. Далѣе: трижды 3 будетъ 9, отъ 13 остается 4, 1 въ умѣ; записываемъ 4. Далѣе трижды 4 будетъ 12 и 1 будетъ 13, отъ 16 останется 3, 1 въ умѣ; записываемъ 3. Наконецъ: 3 раза 8 будетъ 24 и 1 будетъ 25, отъ 26 останется 1; записываемъ 1.

Случается, что цифра, которую испытываемъ, руководствуясь этимъ правиломъ, слишкомъ велика. Это обнаруживается такимъ образомъ, что, умноживъ ее на дѣлителя, получаемъ произведеніе, большее, чѣмъ дѣлимое. Въ такомъ случаѣ испытываемъ ближайшую меньшую цифру, и такъ далѣе, пока, наконецъ, цифра не окажется подходящей, т. е. ея произведеніе на дѣлителя будетъ меньше дѣлимаго, а остатокъ будетъ меньше, чѣмъ дѣлитель.

На практикѣ, при вычисленіяхъ, особенно, если первая цифра дѣлителя мала (1, 2 или 3), а вторая цифра больше, данное выше правило приводитъ часто къ тому, что взятая цифра оказывается слишкомъ большой. Количество этихъ испытаній можетъ быть, однако, уменьшено съ помощью различныхъ искусственныхъ пріемовъ. Пусть, напримѣръ, дано раздѣлить 345367 на 184534. Руководствуясь правиломъ, мы должны были бы пробовать сперва 3, затѣмъ 2, затѣмъ 1. Сравнимъ, однако, числа, составленныя изъ двухъ первыхъ цифръ дѣлимаго и дѣлителя, и обратимъ вниманіе на то, что 2-жды 18 будетъ 36. Тогда мы тотчасъ увидимъ, что незачѣмъ выполнять умноженіе 184534 на 3 и на 2, т. е. что правильна именно цифра 1.

Пусть дано раздѣлить 34625 на 4975. Можно было бы пробовать сперва 8, потомъ 7, потомъ 6; но такъ какъ данный дѣлитель очень близокъ къ 5000, а $7 \cdot 5000 = 35000$, то мы попробуемъ цифру 6, — и эта цифра вѣрная, такъ какъ получается остатокъ, меньшій, чѣмъ дѣлитель. Мы формулируемъ поэтому слѣдующее правило:

Правило производства дѣйствія 8-ое. Для выполненія дѣленія, въ которомъ частное будетъ однозначное, умножаемъ дѣлителя поочередно на 2, 3, 4, . . . , 9 и отнимаемъ полученныя произведенія отъ дѣлимаго до тѣхъ поръ, пока не найдемъ подходящаго числа; это мы узнаемъ по тому, что произведеніе его на дѣлителя равно или меньше дѣлимаго, а остатокъ меньше дѣлителя.

Это вычисленіе можетъ быть сокращено, если принимать въ разсчетъ величину начальныхъ цифръ дѣлимаго и дѣлителя.

28. Частное многозначное.

Правило производства дѣйствія 9-ое. Въ этомъ случаѣ дѣленіе разлагается на нѣсколько отдѣльныхъ дѣленій, въ которыхъ дѣлителемъ является одно и то же число, а именно данный дѣлитель, а частное состоитъ всегда изъ одной только цифры. Съ этой цѣлью отдѣляемъ, въ данномъ дѣлимомъ, начиная отъ первой цифры, такое количество цифръ, которое составило бы число, дающее однозначное частное. Затѣмъ образуемъ второе дѣлимое, приписывая справа къ первому остатку слѣдующую цифру дѣлимаго или, какъ обыкновенно говорится, снося слѣдующую цифру. Если раздѣлимъ это второе дѣлимое на дѣлителя, то частное представитъ вторую цифру искомаго частнаго, а остатокъ — второй остатокъ. Съ этимъ вторымъ остаткомъ поступаемъ точно такъ же, какъ и съ первымъ, и такъ далѣе, пока не будутъ исчерпаны всѣ цифры дѣлимаго. Послѣднiй остатокъ и составитъ остатокъ отъ дѣленiя.

При примѣненiи этого правила слѣдуетъ еще, во избѣжанiе ошибки, замѣтить слѣдующее. Если какое-нибудь изъ дѣлимыхъ окажется меньше дѣлителя, то въ частномъ нужно поставить нуль и снести еще одну цифру дѣлимаго.

29. Частные случаи. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ достигаютъ скорѣе цѣли, не пользуясь правиломъ 9-ымъ производства дѣйствiя, а поступая иначе. Относительно этого, однако, невозможно дать никакихъ общихъ указанiй. Поэтому мы удовольствуемся тѣмъ, что укажемъ прiемъ, съ помощью котораго выполняется довольно быстро дѣленiе на 2.

Половины чиселъ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 извѣстны. Собразно этому къ цифрѣ 6 мы относимъ въ качествѣ половины 3 и 8, смотря по тому, берется ли половина 6-ти или 16-ти. Точно такъ же къ 2-мъ мы относимъ 1 и 6, къ 4-мъ 2 и 7, къ 8-ми 4 и 9. Къ нулю мы относимъ 0 и 5, т. е. половины нуля и десяти. Тогда сразу можно написать половину двузначнаго числа, вторая цифра котораго четная. Если первая цифра четная, если, напримѣръ, имѣемъ число 84, то беремъ половины обѣихъ цифръ, слѣдовательно, 42. Если первая цифра нечетная, какъ, напримѣвъ въ числѣ 54 или 74, то пишемъ 27 или 37, такъ какъ 2 и 3 — частныя съ недостаткомъ чиселъ 5 и 7 при дѣленiи ихъ на 2, а 7 половина 14-ти, или, если угодно, 7 есть цифра, которую мы относимъ къ 4-мъ въ случаѣ, если передъ 4-мя стоитъ нечетная цифра. Тѣ же замѣчанiя даютъ также возможность написать почти моментально половину трехзначнаго числа, послѣдняя цифра котораго четная; если, напримѣръ, это число будетъ 356, то извѣстно, что половину 34 составитъ 17, что и пишемъ; справа же отъ 17 мы ставимъ цифру 8, представляющую половину 16-ти или то число, которое отнесено къ 6, если передъ 6-ью стоитъ нечетное число. Слѣдовательно, половину 356 составитъ 178.

Чтобы написать половину какого угодно числа, слѣдуетъ разложить его въ умѣ на группы цифръ, которыя, насколько возможно, оканчиваются четнымъ числомъ и подобраны такимъ образомъ, что возможно легко написать половину каждой группы. Пусть будетъ дано, напримѣръ, число 25678314. Разлагаемъ число мысленно и подписываютъ половины подъ каждой группой слѣдующимъ образомъ:

2 56 78 314
1 28 39 157.

Искомая половина, составитъ 1 28 39 157. Если дано число

395 735 178,

всѣ цифры котораго, за исключеніемъ послѣдней, нечетныя, то разлагаютъ его мыслено на группы изъ двухъ только цифръ и выписываютъ затѣмъ половину числа 38-ми, потомъ числа 156-ти, потомъ числа 154 и т. д. Вычисленіе въ подобныхъ случаяхъ будетъ, конечно, нѣсколько длиннѣе.

При изложеніи дѣлимости (п. п. 32, 35, 49) мы укажемъ еще и другіе способы сокращеннаго производства нѣкоторыхъ дѣленій.

30. Вычисленія съ именованными числами. Въ нашихъ примѣрахъ и задачахъ мы имѣли часто дѣло съ именованными числами, какъ 4 шара, 3 руб., 6 книгъ. Они представляютъ предметъ вычисленій въ болѣе тѣсномъ значеніи этого слова; это понятіе охватываетъ дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

а) Вмѣсто того, чтобы складывать и вычитать самыя именованныя числа, можно выполнять вычисленіе съ помощью таблицъ черточекъ (**2**). Изъ равенства

3 шара + 4 шара = 7 шаровъ

слѣдуетъ тогда равенство

$$3 + 4 = 7$$

въ числахъ отвлеченныхъ, и такимъ образомъ совершается переходъ отъ счета къ ариѳметикѣ.

Въ именнованныхъ числахъ наименованіемъ служитъ единица, которая получается путемъ отвлеченія. А именно, разсматривая множество, составленное изъ какихъ нибудь предметовъ (**1**), мы обращаемъ вниманіе на общіе признаки и оставляемъ безъ вниманія индивидуальныя особенности, къ которымъ принадлежатъ также время и мѣсто. Сложеніе и вычитаніе выполнимо только въ томъ случаѣ, если разсматриваемыя именованныя числа представляютъ такіе общіе признаки. Убѣдиться въ правильности сказаннаго можно на слѣдующихъ примѣрахъ:

3 красныя ели + 2 красныя ели = 5 красныхъ елей,
3 красныя ели + 2 пихты = 5 елей,
4 ели + 3 лиственницы = 7 хвойныхъ деревьевъ,
5 елей + 2 дуба = 7 деревьевъ.

Теорема 19. Можно соединять только такія именованныя числа, для которыхъ можетъ быть найдено общее наименованіе. Это же самое наименованіе будетъ имѣть также сумма и разность этихъ чиселъ.

Чтобы вычитаніе было возможно, недостаточно того, чтобы уменьшаемое было больше вычитаемаго, но нужно еще, чтобы наименованіе уменьшаемаго было шире наименованія вычитаемаго.

b) Изъ опредѣленія умноженія, какъ сокращеннаго сложенія, слѣдуетъ, что въ произведеніи второе число отвѣчаетъ на вопросъ, сколько разъ нужно взять первое число слагаемымъ. Второе число должно быть поэтому отвлеченнымъ и только первое можетъ быть именованнымъ:

5 шаровъ · 3 = 5 шаровъ + 5 шаровъ + 5 шаровъ.

Поэтому въ вычисленіяхъ эти числа различаются, какъ множитель и множимое. Въ ариѳметикѣ же оба числа могутъ быть переставлены и называются поэтому сомножителями.

Теорема 20. Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ можетъ имѣть нѣсколько множителей, но только одно множимое. Произведеніе сохраняетъ наменованіе множимаго.

c) **Задача.** Требуется уложить 15 шаровъ въ три одинаковыя коробки поровну. Сколько шаровъ будетъ въ каждой коробкѣ? Отвѣтъ будетъ: (15 шаровъ) : 3 = 5 шаровъ.

Говорятъ, что именованное число 15 шаровъ раздѣлено на 3 равныя части; 5 шаровъ составляютъ третью часть 15-ти шаровъ. Дѣлитель отвѣчаетъ, слѣдовательно, на вопросъ, на сколько частей требуется раздѣлить дѣлимое. Дѣлитель долженъ поэтому быть числомъ отвлеченнымъ.

Изъ основного равенства дѣленія:

17 шаровъ = 5 шаровъ · 3 + 2 шара

слѣдуетъ:

Теорема 21. Если при дѣленіи дѣлимое—именованное число, а дѣлитель—отвлеченное, то частное и остатокъ будутъ также именованными числами, а именно будутъ носить наименованіе дѣлимаго; дѣленіе будетъ въ такомъ случаѣ дѣленіемъ на части.

d) Отъ предыдущей задачи существенно отличается слѣдующая задача:

Задача. Имѣются 24 шара и ихъ требуется разложить въ коробки, изъ которыхъ каждая должна заключать по 6 шаровъ. Сколько коробокъ потребуется? Очевидно, столько, сколько разъ 6 шаровъ заключается въ 24 шарахъ, т. е. 4. Изъ равенства:

$$24 \text{ шара} = 6 \text{ шаровъ} \cdot 4$$

слѣдуетъ въ формѣ записи дѣленія:

$$(24 \text{ шара}) : (6 \text{ шаровъ}) = 4.$$

Дѣленіе означаетъ въ данномъ случаѣ слѣдующее: требуется опредѣлить, сколько разъ можно отнимать по 6-ти шаровъ отъ 24-хъ шаровъ, пока не останется ни одного шара, или, другими словами, нужно опредѣлить число, которое бы показывало, сколько разъ 6 шаровъ заключаются въ 24-хъ шарахъ. Такъ какъ частное отвѣчаетъ на вопросъ сколько разъ, то оно будетъ числомъ отвлеченнымъ. Случая, когда есть остатокъ, мы здѣсь не будемъ разбирать.

Теорема 22. Дѣленіе возможно и въ томъ случаѣ, когда и дѣлимое и дѣлитель—числа именованныя, въ предположеніи, что можно найти общее для обоихъ наименованіе; частнымъ служитъ отвлеченное число. Дѣленіе въ этомъ случаѣ имѣетъ значеніе распредѣленія или дѣленія по содержанію.

Если дѣлимое—число отвлеченное, то и дѣлитель долженъ быть отвлеченнымъ числомъ; задача дѣленія относится тогда уже не къ счету, а къ ариѳметикѣ. Въ ариѳметикѣ дѣленіе можно понимать въ томъ или другомъ смыслѣ, и какъ дѣленіе на части, и какъ дѣленіе по содержанію. Въ случаѣ, когда дѣлителемъ служитъ единица, слѣдуетъ всегда выбирать второе объясненіе дѣленія, такъ какъ въ этомъ случаѣ невозможно говорить о дѣленіи на равныя части.

ЗАДАЧИ КЪ IV-ой ГЛАВѢ.

30. Раздѣлить на 11 слѣдующія числа: 111, 1111, 11 111, 111 111.

31. Раздѣлить числа 1000, 100 000, 1 000 000 000 и т. д, на 37.

32. Превратить 33 457 секундъ въ часы, минуты и секунды.

33. Раздѣлить 40 503 146 на 7 198.

34. Нѣкто долженъ заплатить 63 служащимъ каждому по 31 рублю; но у него въ кассѣ есть только монеты по 10 рублей. Сколько такихъ монетъ долженъ онъ взять?

35. Сколько дней потребуется птицѣ для того, чтобы облетѣть вокругъ земли т. е. совершить путь въ 40 000 километровъ, если она пролетаетъ въ секунду 3 метра.

36. Какія числа, при дѣленіи на 37, дадутъ частное, равное остатку?

37. Дѣлимое 3457, а частное 15. Каковы дѣлитель и остатокъ? Существуетъ ли нѣсколько рѣшеній этой задачи?

38. Частное съ недостаткомъ при дѣленіи не измѣняется, если увеличить дѣлимое на число, меньшее, чѣмъ разность между дѣлителемъ и остаткомъ.

39. Въ нѣкоторомъ дѣленіи сумма частнаго и остатка меньше дѣлителя, уменьшеннаго на 1. Если оставить дѣлимое безъ измѣненія, а дѣлителя уменьшить на единицу, то при новомъ дѣленіи получается то же самое частное, что и раньше.

Глава V.

ДѢЛИМОСТЬ. ОБЩІЙ НАИБОЛЬШІЙ ДѢЛИТЕЛЬ И ОБЩЕЕ НАИМЕНЬШЕЕ КРАТНОЕ.

I. ОБЩІЯ ПРЕДЛОЖЕНІЯ О ДѢЛИМОСТИ.

31. Дѣлимость суммы и разности. Припомнимъ опредѣленіе, данное нами въ предыдущей главѣ.

Опредѣленіе. Если одно число дѣлится безъ остатка на другое, то это второе число называется дѣлителемъ перваго. Такъ, напримѣръ, 12 будетъ дѣлителемъ 36, но не будетъ дѣлителемъ 45.

Вмѣсто того, чтобы сказать, что 12 есть дѣлитель числа 36, можно также сказать, что 12 дѣлитъ 36, или что 36 есть кратное числа 12. Что 36 и 156 суть числа, кратныя 12 это можно также выразить съ помощью равенствъ:

$$36 = 12 \cdot 3, \qquad 156 = 12 \cdot 13.$$

Теорема 23. Если одно и то же число дѣлитъ нѣсколько другихъ чиселъ, то оно дѣлитъ также и ихъ сумму.

Разсмотримъ, напримѣръ, число 6, которое дѣлитъ числа 18, 24 и 30. Имѣемъ:

$$18 = 6 \cdot 3, \qquad 24 = 6 \cdot 4, \qquad 30 = 6 \cdot 5.$$

Я утверждаю что 6 дѣлитъ также сумму $18 + 24 + 30$, т. е. 72. Въ самомъ дѣлѣ:

$$72 = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 6\,(3 + 4 + 5) = 6 \cdot 12.$$

Здѣсь мы воспользовались теоремой 14: Для умноженія суммы на число достаточно умножить на это число каждое изъ ея слагаемыхъ въ отдѣльности и сложить полученныя произведенія.

Можно дать болѣе наглядное и простое доказательство теоремы 23. У Павла 3 монеты по 10 рублей, у Якова ихъ 4, а у Ивана 5. Слѣдовательно, сумма денегъ каждаго дѣлится на 10, такъ какъ у Павла 30 рублей, у Якова 40, у Ивана 50. Если они сложатъ свои деньги вмѣстѣ, то составится сумма въ 120 рублей, которая будетъ также дѣлиться на 10. И дѣйствительно, она будетъ кратной 10-ти рублей, такъ какъ составлена изъ нѣкотораго количества монетъ, по 10 рублей каждая.

Если всѣ слагаемыя суммы дѣлятся на одно и то же число, то сумма ихъ также раздѣлится на это число. Если же, наоборотъ, сумма дѣлится на какое-нибудь число, то изъ этого еще не слѣдуетъ, что слагаемыя ея тоже дѣлятся на это число.

Для разъясненія приведемъ два примѣра:

Примѣръ I. У Павла 12 копеекъ, у Петра 15. Сколько яблокъ, стоящихъ по 3 копейки, могутъ они купить, если сложатъ свои деньги вмѣстѣ? Можно сказать либо такъ: Павелъ можетъ купить $12 : 3 = 4$ яблока, а Петръ $15 : 3 = 5$ яблокъ; вдвоемъ они получатъ, слѣдовательно, $4 + 5 = 9$ яблокъ; — либо такъ: Павелъ и Петръ имѣютъ вмѣстѣ 27 копеекъ; слѣдовательно вмѣстѣ они получатъ $27 : 3 = 9$ яблокъ. Это доказываетъ нашу теорему. Оба разсужденія ведутъ къ тому же результату, чего и слѣдовало ожидать.

Примѣръ II. У Павла 8 копеекъ, а у Петра 13. Сколько яблокъ, стоящихъ по 3 копейки, могутъ они купить, если сложатъ свои деньги вмѣстѣ?

Въ этой задачѣ Павелъ за свои 8 копеекъ можетъ получить только 2 яблока, и у него остается еще 2 копейки; Петръ же за свои 13 копеекъ можетъ получить только 4 яблока, и у него останется еще 1 копейка. Если же они сложатъ свои наличныя деньги, то въ ихъ общей кассѣ будетъ $8 + 13 = 21$ копейка и они смогутъ купить 7 яблокъ. Слѣдовательно, теорема 23 не допускаетъ обращенія, такъ какъ слагаемыя 8 и 13 суммы 21 не дѣлятся на 3.

Изъ этого примѣра мы видимъ, что сумма двухъ чиселъ можетъ дѣлиться на 3, хотя ни одно изъ ея слагаемыхъ на это число не дѣлится.

Теорема 24. Общій дѣлитель двухъ чиселъ дѣлитъ также ихъ разность.

Пусть дано число 4, которое служитъ дѣлителемъ 20 и 12. Мы имѣемъ:

$$20 = 4 \cdot 5, \qquad 12 = 4 \cdot 3;$$

отсюда слѣдуетъ:

$$20 - 12 = 8 = 4 \cdot 2 = 4\,(5 - 3).$$

Относительно частнаго можно сдѣлать замѣчаніе, подобное тому, какое мы сдѣлали при теоремѣ 23:

Для раздѣленія разности двухъ чиселъ на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число уменьшаемое и вычитаемое (конечно, если они оба дѣлятся на это число) и взять разность этихъ отдѣльныхъ частныхъ.

Примѣръ I. Имѣемъ:

$$\begin{aligned}(600 - 24) : 6 &= 576 : 6 = 96\\ &= 100 - 4\\ &= (600 : 6) - (24 : 6).\end{aligned}$$

Примѣръ II. Частное отъ дѣленія 31 на 6 будетъ 5, а остатокъ 1; частное отъ дѣленія 17 на 6 равняется 2, а остатокъ 5. Частное отъ дѣленія (31 — 17) на 6, т. е. 14 на 6 равно 2. Оно не равно разности 5 — 2 т. е. разности частныхъ, которыя получаются при дѣленіи на 6 чиселъ 31 и 17.

Теоремѣ 24 даютъ иногда другое выраженіе, болѣе удобное въ нѣкоторыхъ примѣненіяхъ. А именно, если какое-нибудь число, — напримѣръ, 28 — представлено въ видѣ суммы двухъ другихъ чиселъ, какъ, напримѣръ, $28 = 16 + 12$, то можно сказать, что каждое слагаемое этой суммы равно разности первоначальнаго числа (т. е. суммы) и другого слагаемаго; такъ, напримѣръ, $16 = 28 - 12$; это вѣдь и есть опредѣленіе вычитаніе. Отсюда получается слѣдующая теорема:

Теорема 25. Общій дѣлитель суммы двухъ чиселъ и одного изъ ея слагаемыхъ, служитъ также дѣлителемъ и другого слагаемаго.

32. Дѣлимость и дѣленіе произведенія на какое либо число.

Теорема 26. Для того, чтобы произведеніе нѣсколькихъ сомножителей дѣлилось на какое-нибудь число, достаточно, чтобы одинъ изъ его сомножителей дѣлился на это число.

Пусть будетъ дано, напримѣръ, произведеніе 13 . 15, одинъ изъ сомножителей котораго — 15 дѣлится на 3. Произведеніе тоже раздѣлится на 3, потому что 15 = 5 . 3, вслѣдствіе чего (**16**):

$$13 \cdot 15 = 13 \cdot 5 \cdot 3 = 65 \cdot 3;$$

слѣдовательно, 13 . 15 будетъ кратнымъ 3-хъ, т. е. раздѣлится на 3.

Теорему 26 можно представить въ другой формѣ, которая будетъ выражать тоже самое: Числа, кратныя кратнаго какого-нибудь числа, будутъ также кратными этого числа.

Дадимъ примѣръ изъ ежедневной жизни. У Петра 6 монетъ по 10 рублей каждая. Дѣлится ли его наличность на 5, т. е. выражается ли сумма его денегъ точно нѣкоторымъ количествомъ пятерокъ? Очевидно, выражается, потому что 10 дѣлится на 5, и слѣдовательно, каждая монета въ 10 рублей заключаетъ въ себѣ цѣлое число пятерокъ, а именно въ каждой изъ нихъ заключается 2 раза по 5-ти рублей. У Петра 6 монетъ по 10 рублей каждая; слѣдовательно у него 6 разъ по 2-жды 5 рублей, т. е. 12 разъ по 5 рублей. Чтобы раздѣлить произведеніе 6 . 10 на 5, достаточно будетъ, слѣдовательно, составить новое произведеніе, въ которомъ вмѣсто сомножителя 10 будетъ стоять частное отъ дѣленія его на 5. Полезно будетъ выдѣлить это правило:

Правило производства дѣйствія 10-ое. Чтобы раздѣлить произведеніе нѣсколькихъ сомножителей на какое-нибудь число въ случаѣ, если одинъ изъ этихъ сомножителей дѣлится на это чиcло, достаточно составить новое произведеніе, которое отличается отъ прежняго только тѣмъ что дѣлящійся сомножитель замѣненъ частнымъ отъ этого дѣленія.

Такъ, частное отъ дѣленія произведенія 7 . 15 . 4 на 5 равно 7 . 3 . 4.

Если нѣсколько сомножителей одного и того же произведенія дѣлятся на данное число, то можно раздѣлить любого изъ нихъ, но слѣдуетъ имѣть въ виду, что нельзя дѣлить одновременно нѣсколькихъ изъ нихъ. Такъ, напримѣръ, частное отъ дѣленія произведенія 6 . 10 на 2 равно 3 . 10 или 6 . 5. Если у Павла 6 монетъ по 10 рублей каждая, и если онъ хочетъ раздѣлить свои наличныя деньги на 2 равныя части, то онъ можетъ составить каждую часть изъ трехъ монетъ по 10 рублей, или онъ можетъ размѣнять каждую монету въ 10 рублей на монеты по 5 рублей и составить каждую часть изъ 6 монетъ по 5 рублей каждая.

Замѣчаніе. Произведеніе нѣсколькихъ сомножителей можетъ дѣлиться на такое число, на которое не дѣлится ни одинъ изъ его сомножителей. Условіе, выраженное въ теоремѣ 26 является, слѣдовательно, достаточнымъ, но не необходимымъ. Такъ, напримѣръ, произведеніе $3 \cdot 4 = 12$ дѣлится на 6, хотя ни 3, ни 4 не дѣлятся на 6. Наличныя деньги Павла можно несомнѣнно выразить цѣлымъ числамъ монетъ по 10 рублей каждая, какъ въ томъ случаѣ, если онъ имѣетъ 6 такихъ монетъ, такъ и въ томъ случаѣ, если онъ имѣетъ 8 монетъ по 5 рублей каждая, потому что въ такомъ случаѣ онъ имѣетъ 40 рублей.

33. Дѣленіе числа на произведеніе нѣсколькихъ сомножителей.

Правило производства дѣйствія 11-ое. Чтобы раздѣлить число на произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, можно раздѣлить это число на перваго сомножителя, затѣмъ раздѣлить полученное частное на втораго сомножителя, второе частное на третьяго сомножителя и такъ далѣе, пока не будутъ исчерпаны всѣ сомножители. Послѣднее частное и будетъ искомымъ.

Мы разсмотримъ только тотъ случай, кога всѣ дѣленія выполняются безъ остатка.

Чтобы дать примѣръ изъ ежедневной жизни, предположимъ, что у Павла есть 300 рублей въ 100 рублевыхъ бумажкахъ, и что онъ хочетъ раздѣлить эту сумму поровну между 15-ью лицами. Онъ можетъ расположить эти 15 лицъ группами по 5 человѣкъ въ каждой. Каждой группѣ даетъ онъ $300 : 3 = 100$ рублей, и 5 лицъ, составляющихъ эту группу, должны раздѣлить между собою эти 100 рублей, что составитъ для каждаго лица $100 : 5 = 20$ рублей.

Далѣе, пусть требуется раздѣлить 630 на $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Искомое частное будетъ 15. Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя предыдущее правило, мы найдемъ:

$$630 : 2 = 315,$$
$$315 : 3 = 105,$$
$$105 : 7 = 15.$$

Замѣчаніе. Если требуется раздѣлить число, написанное въ видѣ произведенія нѣсколькихъ сомножителей, на другое произведеніе нѣсколькихъ же сомножителей, то можно дѣлить каждаго сомножителя дѣлимаго на любого сомножителя дѣлителя, — конечно, если всѣ эти дѣленія, могутъ быть выполнены. При этомъ должно обращать вниманіе на то, чтобы раздѣлить на каждаго сомножителя, входящаго въ составъ дѣлителя, но только одинъ разъ. Чтобы разъяснить это замѣчаніе, постараемся раздѣлить произведеніе $42 \cdot 10 \cdot 7$ на произведеніе $3 \cdot 5$. Въ такомъ случаѣ:

$$42 : 3 = 14,$$
$$10 : 5 = 2.$$

Искомое частное будетъ поэтому $14 \cdot 2 \cdot 7$.

Можно также дѣлить одного и того же сомножителя дѣлимаго на нѣсколькихъ сомножителей дѣлителя, но каждымъ множителемъ дѣлителя можно воспользоваться только одинъ разъ.

Примѣръ I. Требуется раздѣлить $36 \cdot 40 \cdot 3$ на $6 \cdot 5 \cdot 4$. Пишемъ:

$$36 : 6 = 6,$$
$$40 : 5 = 8, \qquad 8 : 4 = 2.$$

Искомое частное будетъ $6 \cdot 2 \cdot 3$.

Примѣръ II. Требуется раздѣлить $21 \cdot 30 \cdot 40$ на $5 \cdot 5 \cdot 7$. Множитель 5 встрѣчается въ дѣлителѣ 2 раза; слѣдовательно:

$$21 : 7 = 3,$$
$$30 : 5 = 6,$$
$$40 : 5 = 8.$$

Искомое частное будетъ поэтому $3 \cdot 6 \cdot 8$.

Въ слѣдующей главѣ, когда мы уже познакомимся съ **простыми** числами, мы вернемся къ вопросу о дѣленіи произведенія на произведеніе. Замѣтимъ пока только, что иногда дѣленіе выполняется, хотя и нельзя примѣнить вышеизложеннаго метода дѣленія. Такъ, напримѣръ, мы можемъ легко убѣдиться въ томъ что произведеніе $12 \cdot 35 = 420$ дѣлится на $14 \cdot 10 = 140$, хотя ни 12 ни 35 не дѣлятся ни на 14 ни на 10. Удобно поэтому вводить такъ называемыхъ простыхъ множителей, что мы и дѣлаемъ впослѣдствіи.

II. ДѢЛИМОСТЬ НА 2, 5, 9, 3. ПОВѢРКА СЪ ПОМОЩЬЮ ЧИСЛА 9.

34. Иногда при дѣленіи можно опредѣлить остатокъ, не выполняя дѣленія на самомъ дѣлѣ. Въ частности въ такомъ случаѣ возможно указать, не будетъ ли остатокъ равенъ нулю и, слѣдовательно, не будетъ ли дѣлимое дѣлиться безъ остатка на дѣлителя. Мы ограничимся изложеніемъ признаковъ дѣлимости на 2, 5, 9, 3.

35. Дѣлимость на 2 и на 5. Такъ какъ 10 дѣлится на 2 и на 5, то и каждое кратное 10-ти будетъ дѣлиться на 2 и на 5. Возьмемъ теперь любое число, напримѣръ 5648. Тогда

$$5648 = 5640 + 8;$$

число 5648 можетъ быть, слѣдовательно, представлено въ видѣ суммы, первое слагаемое которой 5640 есть кратное 10-ти, а потому—кратное 2-хъ и 5-ти. Изъ теоремы 23 мы знаемъ, что въ такомъ случаѣ достаточно обратить вниманіе на второе слагаемое 8. Замѣчаемъ, что 8 дѣлится на 2; слѣдовательно, и сумма $5648 = 5640 + 8$ дѣлится на 2. Съ другой стороны, 5648 не дѣлится на 5; въ самомъ дѣлѣ если бы 5 дѣлило сумму 5648, то 5 должно было бы (теорема 25) дѣлить 8, такъ какъ оно дѣлитъ 5640. Точно такъ же мы можемъ убѣдитеся что $6745 = 6740 + 5$ дѣлится на 5, но не дѣлится на 2. Наконецъ, 6750 или 5800 дѣлятся на 10, и, слѣдовательно, дѣлятся какъ на 5, такъ и на 2. Отсюда выводимъ слѣдующее правило:

Правило производства дѣйствія 12-ое. Число, послѣдняя цифра котораго есть 0, 2, 4, 6 или 8, дѣлится на 2 Число, послѣдняя цифра котораго есть 0 или 5, дѣлится на 5.

Пусть читатель самъ разберетъ, почему эти условія необходимы и достаточны для дѣлимости на 2 и на 5.

Это правило мы постараемся сдѣлать нагляднымъ съ помощью примѣра изъ ежедневной жизни. У Павла есть нѣкоторое количество монетъ по 10 копеекъ и монетъ по 1 копейкѣ.

Можетъ ли онъ размѣнять свои деньги на монеты по 2 копейки? или на монеты по 5-ти копеекъ?

Очевидно, каждую монету въ 10 копеекъ можно размѣнять на 2 монеты по 5 копеекъ или на 5 монетъ по 2 копейки. Для того чтобы всѣ наличныя деньги Павла можно было размѣнять на монеты по 2 копейки, онъ, кромѣ монетъ въ 10 копеекъ, либо совсѣмъ не долженъ имѣть монетъ въ одну копейку, либо имѣть ихъ такое количество, которое бы состояло изъ двоекъ, т. е. 2, 4, 6 или 8. Если онъ хочетъ размѣнять свои наличныя деньги на монеты въ 5 копеекъ, то мы должны разсуждать подобнымъ же образомъ. Кромѣ того, мы видимъ, что, если онъ хочетъ имѣть возможно большее количество монетъ по 2 копейки (или монетъ по 5 копеекъ, но только не вмѣстѣ тѣхъ и другихъ), то количество монетъ въ 1 копейку, которое у него останется, зависитъ не отъ количества его монетъ въ 10 копеекъ, а только отъ количества монетъ въ 1 копейку, которыя у него были сверхъ монетъ въ 10 копеекъ. Если, впрочемъ, у Павла 47 или 78 копеекъ, то мы можемъ всегда предположить, что у него 4 или 7 монетъ въ 10 копеекъ, а затѣмъ еще 5 или 8 копеекъ въ монетахъ по одной копейкѣ. Эти замѣчанія ведутъ къ правилу, которое дополняетъ предыдущее правило:

Правило производства дѣйствія 13-ое. Чтобы опредѣлить остатокъ отъ дѣленія числа на 2 или на 5, достаточно, раздѣлить послѣднюю его цифру на 2 или на 5.

Понятно, что этотъ пріемъ основанъ на томъ обстоятельствѣ, что 2 и 5 — дѣлители 10. Подобный же пріемъ примѣняется для вывода признаковъ дѣлимости на 4 и на 25 — дѣлителей ста, а также признаковъ дѣлимости на 8 и 125 — дѣлителей тысячи и т. д.

36. Дѣлимость на 9. У Ивана 2312 рублей, и онъ хочетъ купить за эти деньги возможно большее количество книгъ, цѣною каждая по 9-ти рублей. Сколько рублей останется у него? Очевидно, количество рублей, которые у него останутся, будетъ равно остатку отъ дѣленія 2312 на 9. Мы себѣ поставимъ задачей найти этотъ остатокъ, не выполняя дѣленія; если остатокъ окажется нулемъ, то, слѣдовательно, дѣлимое будетъ дѣлиться на 9.

Чтобы упростить разсужденія, предположимъ, что 2312 рублей Ивана состоятъ изъ 2-хъ бумажекъ по 1000 рублей каждая, 3-хъ — по 100 рублей, одной въ 10 рублей и двухъ по одному рублю. За 1000 рублей онъ можетъ купить 111 книгъ по 9-ти рублей каждая, что будетъ стоить 999 рублей и ему дадутъ 1 рубль сдачи. За бумажку въ 100 рублей ему дадутъ 11 книжекъ по 9 рублей, которыя будутъ стоить 99 рублей, и 1 рубль сдачи. За 10 рублей получитъ онъ 1 книгу за 9 рублей и 1 рубль сдачи. Такимъ образомъ за каждую тысячу, сотню, десятокъ рублей онъ получаетъ извѣстное количество книжекъ и каждый разъ по 1 рублю сдачи. Поэтому количество монетъ въ 1 рубль, которое у него останется послѣ этой покупки, будетъ равно суммѣ числа тысячъ, числа сотенъ, и числа десятковъ рублей и монетъ въ 1 рубль, которыя онъ имѣлъ до покупки. Если онъ, по нашему предположенію, имѣлъ 2312 рублей, то у него останется послѣ покупки $2+3+1+2=8$ рублей. Число 2312 не дѣлится поэтому на 9; остатокъ отъ дѣленія будетъ 8. Складывая отдѣльныя цифры числа 2312, мы получимъ число 8.

Если бы у Ивана было 3 бумажки по 1000 рублей, 4 — по 10-ти, 5 монетъ въ 1 рубль, то у него осталось бы $3+4+2+5=14$ рублей. На эти 14 рублей онъ могъ бы купить еще одну книжку за 9 рублей, и у него осталось бы еще $1+4=5$ рублей. Если сумма цифръ какого-нибудь числа будетъ число многозначное и мы сложимъ цифры этого послѣдняго числа, то полученную сумму мы будемъ называть **второй суммой** цифръ. Сложивъ цифры второй, получимъ третью сумму цифръ и т. д. до послѣдней.

Правило производства дѣйствія 14-ое. Остатокъ отъ дѣленія числа на 9 равенъ его послѣдней суммѣ цифръ. Но, если эта послѣдняя сумма цифръ равна 9, то остатокъ будетъ равенъ нулю, и все число будетъ дѣлиться на 9.

Предыдущее правило можетъ быть доказано съ помощью слѣдующаго вычисленія. А именно:

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1 = 9 \cdot 11 + 1$$
$$1000 = 999 + 1 = 9 \cdot 111 + 1$$
$$10000 = 9999 + 1 = 9 \cdot 1111 + 1.$$

Пусть дано любое число, напримѣръ, 34572. Имѣемъ:

$$34572 = 3 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2$$
$$= 3 \cdot 9 \cdot 1111 + 3 + 4 \cdot 9 \cdot 111 + 4 + 5 \cdot 9 \cdot 11 + 5$$
$$+ 7 \cdot 9 + 7 + 2$$
$$= 9\,(3 \cdot 1111 + 4 \cdot 111 + 5 \cdot 11 + 7) + 3 + 4 + 5 + 7 + 2.$$

Но

$$3 + 4 + 5 + 7 + 2 = 9 \cdot 2 + 3;$$

слѣдовательно, получаемъ:

$$34572 = 9\,(3 \cdot 1111 + 4 \cdot 111 + 5 \cdot 11 + 7 + 2) + 3,$$

Отсюда слѣдуетъ, что остаткомъ отъ дѣленія 34572 на 9 будетъ 3. Это же число 3 будетъ также остаткомъ отъ дѣленія суммы 21 цифръ $3 + 4 + 5 + 7 + 2$ на 9.

37. Дѣлимость на 3. Слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что числа 9, 99, 999 и т. д., которыя дѣлятся на 9, дѣлятся также и на 3. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} 10 &= 3 \cdot 3 + 1, \\ 100 &= 33 \cdot 3 + 1, \\ 1000 &= 333 \cdot 3 + 1, \\ 10000 &= 3333 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

и такъ далѣе, какъ бы велико ни было количество нулей.

Возьмемъ теперь какое-нибудь число — напримѣръ, 65418. Мы будемъ исходить изъ того, что произведеніе числа, кратнаго 3, на какое-нибудь число будетъ тоже кратнымъ 3 (вторая форма теоремы 26, стр. 52), и что сумма нѣсколькихъ кратныхъ 3 будетъ также числомъ, кратнымъ 3. Мы пишемъ поэтому:

$$\begin{aligned} 60000 &= 6 \cdot 10000 = 6 \cdot 3333 \cdot 3 + 6 \\ 5000 &= 5 \cdot 1000 = 5 \cdot 333 \cdot 3 + 5 \\ 400 &= 4 \cdot 100 = 4 \cdot 33 \cdot 3 + 4 \\ 10 &= 1 \cdot 10 = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \\ 8 &= \ .\,8. \end{aligned}$$

Отсюда путемъ сложенія получаемъ:

$$65418 = 60000 + 5000 + 400 + 10 + 8$$
$$= 3\,(6 \cdot 3333 + 5 \cdot 333 + 4 \cdot 33 + 1 \cdot 3) + 6 + 5 + 4 + 1 + 8.$$

Остатокъ отъ дѣленія 65418 на 3 равенъ, слѣдовательно, остатку отъ дѣленія суммы $6 + 5 + 4 + 1 + 8$ на 3. Эта сумма 24 дѣлится на 3; то же справедливо поэтому и относительно даннаго числа.

Правило производства дѣйствія 15-ое. Число дѣлится на 3, эсли его послѣдняя сумма цифръ дѣлится на 3, т. е. если она будетъ равна 3, 6 или 9.

Очевидно, что каждое число, которое дѣлится на 9, будетъ дѣлиться также и на 3, но не наоборотъ.

38. Повѣрка съ помощью числа 9. Подъ этимъ названіемъ разумѣютъ пріемъ, который во многихъ случаяхъ даетъ возможность обнаружить ошибки въ вычисленіяхъ.

Мы ограничимся тѣмъ, что изложимъ этотъ пріемъ въ примѣненіи къ умноженію; въ этомъ случаѣ онъ употребляется чаще всего.

Правило производства дѣйствія 16-ое. Чтобы сдѣлать повѣрку умноженія двухъ чиселъ съ помощью числа 9, нужно сравнить сумму цифръ полученнаго произведенія съ произведеніемъ послѣднихъ суммъ цифръ обоихъ сомножителей. Если разность этихъ суммъ не будетъ ни нулемъ ни кратнымъ 9-ти, то вычисленіе сдѣлано неправильно. Если же разность окажется нулемъ или числомъ, кратнымъ 9-ти, то можно быть увѣреннымъ въ томъ, что либо вычисленіе сдѣлано правильно либо ошибка есть число кратное 9.

Иванъ, Петръ и Яковъ помножили всѣ трое 3917 на 642. Иванъ получилъ 2514724, Петръ—2514714, а Яковъ 399534. Что можно сказать объ этихъ результатахъ?

Составимъ на основаніи изложеннаго выше послѣднія суммы цифръ сомножителей. Получаемъ 2 и 3; произведеніе ихъ будетъ 6.

Иванъ получилъ произведеніе 2514724. Но

$$2 + 5 + 1 + 4 + 7 + 2 + 4 = 25 = 2 \cdot 9 + 7,$$

и мы можемъ поэтому быть увѣрены, что этотъ результатъ ложный. Для результата 2514714, полученнаго Петромъ имѣемъ:

$$2 + 5 + 1 + 4 + 7 + 1 + 4 = 24 = 2 \cdot 9 + 6,$$

а для произведенія Якова 399534:

$$3 + 9 + 9 + 5 + 3 + 4 = 3 \cdot 9 + 6.$$

Слѣдовательно, повѣрка съ помощью числа 9 оставляетъ насъ въ сомнѣніи относительно результатовъ, полученныхъ Петромъ и Яковомъ; она не даетъ намъ возможности утверждать, что одинъ изъ этихъ результатовъ неправиленъ. Въ этомъ случаѣ оказывается, что Яковъ произвелъ свое вычисленіе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 3917 \cdot 642 \\ \hline 7834 \\ 15668 \\ 23502 \\ \hline 399534, \end{array}$$

т. е. что онъ подписалъ неправильно третье частное произведеніе, именно онъ замѣнилъ $23502 \cdot 100$ числомъ $23502 \cdot 10$ и получилъ меньше, чѣмъ слѣдовало, на $23502 \cdot 90$, т. е. меньше на число, кратное 9. По этой причинѣ повѣрка и не дала возможности обнаружить его ошибку.

III. ОБЩІЙ НАИБОЛЬШІЙ ДѢЛИТЕЛЬ И ОБЩЕЕ НАИМЕНЬШЕЕ КРАТНОЕ.

39. Общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ.

Опредѣленіе. Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ двухъ чиселъ называютъ наибольшее число, на которое оба эти числа дѣлятся.

Напримѣръ, числа 48 и 36 дѣлятся оба на 2, 3, 4, 6 и 12. Всѣ эти числа суть общіе дѣлители ихъ, а 12 — наибольшій общій дѣлитель. Числа 21 и 28 дѣлятся оба на 7; 7 — ихъ общій наибольшій дѣлитель. Числа 41 и 15 не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, кромѣ 1. Ихъ общій наибольшій дѣлитель есть 1; ихъ называютъ поэтому числами взаимно простыми.

Опредѣленіе. Два числа называются взаимно простыми, если ихъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ служитъ 1.

Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя основано на слѣдующихъ теоремахъ.

Теорема 27. Если изъ двухъ данныхъ чиселъ большее дѣлится на меньшее, то меньшее есть общій наибольшій дѣлитель этихъ двухъ чиселъ.

Пусть будутъ даны числа 48 и 12. Ихъ общій наибольшій дѣлитель не можетъ быть больше 12-ти, такъ какъ 12 должно на него дѣлится. Далѣе, 48 дѣлится на 12, и 12 дѣлится также на 12, потому что $48 = 12 \cdot 4$ и $12 = 12 \cdot 1$; слѣдовательно, 12 и есть общій наибольшій дѣлитель 48 и 12.

Теорема 28. Если даны два числа, изъ которыхъ большее не дѣлится на меньшее, то ихъ общій наибольшій дѣлитель будетъ также общимъ наибольшимъ дѣлителемъ меньшаго числа и остатка отъ дѣленія большаго числа на меньшее.

Пусть данныя числа будутъ 516 и 48. Въ такомъ случаѣ

$$516 = 48 \cdot 10 + 36,$$

и требуется доказать, что наибольшій общій дѣлитель чиселъ 516 и 48 равенъ наибольшему общему дѣлителю чиселъ 48 и 36.

Сперва покажемъ, что каждый общій дѣлитель 516 и 48 будетъ также общимъ дѣлителемъ 48 и 36, и обратно. Числа 516 и 48 оба дѣлятся на 2; слѣдовательно, и $48 \cdot 10$ дѣлится на 2. Но такъ какъ 516 и $48 \cdot 10$ дѣлятся на 2, то и 36 должно раздѣлиться на 2 (теорема 25). Точно такъ же 36 и 48 дѣлятся на число 6. Слѣдовательно, на него будетъ дѣлиться также $48 \cdot 10$, а также и 516, такъ какъ это послѣднее число есть сумма $48 \cdot 10 + 36$.

Итакъ, оба числа 516 и 48 имѣютъ тѣхъ же самыхъ общихъ дѣлителей, какъ 48 и 36. Если составить двѣ таблицы, изъ которыхъ одна содержитъ общихъ дѣлителей чиселъ 516 и 48, а другая — общихъ дѣлителей чиселъ 48 и 36, то эти таблицы будутъ содержать тѣ же самыя числа. Поэтому и наибольшія числа этихъ таблицъ одинаковы; другими словами: общій наибольшій дѣлитель чиселъ 516 и 48 будетъ также общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ 48 и 36, что и требовалось доказать.

Изъ этихъ двухъ теоремъ выводится сѣдующее практическое правило:

Правило производства дѣйствія 17-ое. Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя двухъ данныхъ чиселъ, дѣлимъ большее число на меньшее. Если дѣленіе выполняется безъ остатка, то меньшее число и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Если остатокъ отличенъ отъ нуля, то нужно искать общаго наибольшаго дѣлителя для него и для меньшаго числа. Такъ нужно продолжать и далѣе, пока не получимъ въ остаткѣ нуль. Тогда послѣдній дѣлитель и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ обоихъ данныхъ чиселъ.

Мы примѣнимъ это правило къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 12012 и 4152. Дѣйствіе располагается на практикѣ слѣдующимъ образомъ:

	2	1	8	2	1	5	2
12012	4152	3708	444	156	132	24	12
3708	444	156	132	24	12	0	

При каждомъ дѣленіи подписываютъ частное подъ дѣлителемъ, чтобы воспользоваться имъ въ слѣдующемъ дѣленіи, какъ дѣлимымъ, не переписывая его. Частное отъ дѣленія 12012 на 4152 будетъ 2, а остатокъ 3708; частное отъ дѣленія 4152 на 3708 будетъ 1, а остатокъ 444 и т. д. Искомый общій наибольшій дѣлитель будетъ, слѣдовательно, 12.

Если мы возьмемъ числа 1713 и 170, то получимъ

	10	13	13
1713	170	13	1
13	1	0	

Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ будетъ единица, такъ какъ она оказалась послѣднимъ дѣлителемъ. Послѣдняго дѣленія нѣтъ надобности выполнять; какъ только получена въ остаткѣ 1, можно быть увѣреннымъ, что данныя числа взаимно простыя.

40. Свойства общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ. Возьмемъ опять числа 12012 и 4152, которыя служили намъ для примѣра. Число 2 есть одинъ изъ ихъ общихъ дѣлителей. Этотъ общій дѣлитель является дѣлителемъ также и для остатка отъ дѣленія ихъ 3708. Такъ какъ на него дѣлятся 4152 и 3708, то будетъ также дѣлиться и остатокъ отъ дѣленія ихъ 444. Точно такъ же мы видимъ, что на него дѣлятся 156, 132, 24, 12, т. е. и общій наибольшій дѣлитель. Мы можемъ поэтому высказать слѣдующую теорему, какъ слѣдствіе пріема, который мы примѣнили для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя:

Теорема 29. Чтобы найти всѣхъ общихъ дѣлителей двухъ чиселъ, достаточно найти всѣхъ дѣлителей ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Точно такъ же доказывается слѣдующая теорема:

Теорема 30. При умноженіи двухъ чиселъ на третье или при дѣленіи ихъ на третье, общій наибольшій дѣлитель обоихъ произведеній или частныхъ получается съ помощью умноженія или дѣленія общаго наибольшаго дѣлителя первоначальныхъ чиселъ на это третье число.

Конечно, здѣсь предполагается, что дѣленія выполнимы, и что третье число не равно нулю.

Пусть, напримѣръ, найденъ общій наибольшій дѣлитель чиселъ 12012 и 4152, т. е. 12. На основаніи этого 120120 и 41520 будутъ имѣть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ 120; точно такъ же $12012 : 6 = 2002$ и $4152 : 6 = 692$ будутъ имѣть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ 2.

Чтобы доказать эту теорему, нужно только составить таблицу послѣдовательныхъ дѣленій. Если вмѣсто данныхъ чиселъ возьмемъ числа въ 10 разъ большія, то и всѣ остатки будутъ въ 10 разъ больше, но частныя останутся безъ перемѣны (теорема 17); слѣдовательно, и общій наибольшій дѣлитель, какъ послѣдній неравный нулю остатокъ, будетъ въ 10 разъ больше.

Если, въ частности, раздѣлимъ 2 числа на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, то получатся 2 числа, которыхъ общій наибольшій дѣлитель равенъ 1, т. е. которыя будутъ взаимнопростыми. Такимъ образомъ получается теорема:

Теорема 31. Частныя двухъ чиселъ отъ дѣленія на общаго наибольшаго дѣлителя ихъ суть числа взаимно простыя.

41. Общій наибольшій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ

Опредѣленіе. Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ нѣсколькихъ чиселъ называется наибольшее число, на которое всѣ эти числа дѣлятся.

Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ основано на слѣдующемъ предложеніи.

Теорема 32. При нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ можно замѣнить два изъ нихъ ихъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

Пусть даны, напримѣръ, числа 240, 360, 660, 144. Общій наибольшій дѣлитель 240 и 360 будетъ 120. Мы хотимъ теперь доказать, что данныя числа имѣютъ такого-же, общаго наибольшаго дѣлителя, какъ и 120, 660 и 144. Для этого, мы докажемъ, что каждый общій дѣлитель 240, 360, 660 и 144 будетъ также общимъ дѣлителемъ 120, 660 и 144, и наоборотъ. Это слѣдуетъ непосредственно изъ того, что во-первыхъ на каждаго общаго дѣлителя 240 и 360 будетъ дѣлиться и 120, и, во-вторыхъ, изъ того что и обратно на каждаго дѣлителя числа 120, а также, слѣдовательно, и на искомаго наибольшаго общаго дѣлителя, дѣлятся и кратныя его 240 и 360.

Такимъ образомъ, нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя четырехъ данныхъ чиселъ сводится къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя 3-хъ чиселъ. Точно такъ же нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя 3-хъ чиселъ можно свести къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя 2-хъ чиселъ, такъ какъ для этого достаточно замѣнить 120 и 660 ихъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ, т. е. 60. Тогда останется найти общаго наибольшаго дѣлителя только для 60 и 144; это будетъ, очевидно, 12.

Правило производства дѣйствія 18-ое. При нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ находятъ сперва общаго наибольшаго дѣлителя первыхъ двухъ чиселъ, потомъ общаго наибольшаго дѣлителя найденнаго числа и третьяго числа, затѣмъ общаго наибольшаго дѣлителя вновь найденнаго числа и четвертаго числа и такъ далѣе, пока не будутъ исчерпаны всѣ числа. Послѣдній общій наибольшій дѣлитель и будетъ искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ.

42. Общее наименьшее кратное. Опредѣленіе. Общимъ наименьшимъ кратнымъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ называется наименьшее изъ ихъ общихъ кратныхъ, т. е.

наименьшее отличное отъ нуля число, которое дѣлится одновременно на всѣ эти числа.

Теорема 33. Общее наименьшее кратное двухъ чиселъ равно частному отъ дѣленія ихъ произведенія на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Если даны, напримѣръ, числа 12012 и 4152, общій наибольшій дѣлитель которыхъ равенъ 12, то ихъ общее наименьшее кратное будетъ равно

$$(12012 \cdot 4152) : 12 = 1001 \cdot 4152 = 4156152.$$

Правило производства дѣйствія 19-ое. Чтобы найти общее наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ, нужно найти сперва общее наименьшее кратное первыхъ двухъ чиселъ, затѣмъ общее наименьшее кратное этого перваго общаго наименьшаго кратнаго и третьяго числа, затѣмъ общее наименьшее кратное этого второго общаго наименьшаго кратнаго и четвертаго числа и такъ далѣе, пока не будутъ исчерпаны всѣ числа. Послѣднее общее наименьшее кратное и будетъ искомымъ.

Пусть будутъ, напримѣръ, даны четыре числа 147, 400, 2160 и 10080. Найдемъ, руководствуясь теоремой 33, общее наименьшее кратное первыхъ двухъ чиселъ 147 и 400, получится 58800; каждое общее кратное данныхъ четырехъ чиселъ будетъ также общимъ кратнымъ чиселъ 58800, 2160 и 10080, и обратно. Найдемъ дальше по тому же правилу общее наименьшее кратное 58800 и третьяго числа 2160, получимъ 529200; каждое общее кратное трехъ чиселъ 58800, 2160 и 10080 будетъ также общимъ кратнымъ чиселъ 529200 и 10080 и обратно. Составимъ, наконецъ, общее наименьшее кратное 529200 и 10080; получимъ 1058400; всѣ общія кратныя 529200 и 10080 будутъ также общими кратными 1058400, и наоборотъ. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ общія кратныя четырехъ данныхъ чиселъ будутъ кратными числа 1058400, т. е. это число и будетъ общимъ наименьшимъ кратнымъ чиселъ 147, 400, 2160 и 10080.

43. Примѣненія общаго наибольшаго дѣлителя и общаго наименьшаго кратнаго. Общій наибольшій дѣлитель и общее наименьшее кратное даютъ нерѣдко рѣшенія задачъ изъ ежедневной жизни; мы приведемъ здѣсь нѣсколько примѣровъ.

Задача I. Нѣкто имѣетъ 52 шара и хочетъ дать ихъ 24 дѣтямъ для игры. Онъ долженъ раздѣлить дѣтей на равныя группы такимъ образомъ, чтобы каждая группа имѣла одно и тоже количество шаровъ, и чтобы этихъ группъ было возможно больше. Количество группъ должно быть общимъ дѣлителемъ 52 и 24, а чтобы этихъ группъ было возможно больше, этотъ дѣлитель долженъ быть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ этихъ чиселъ. Этимъ дѣлителемъ будетъ 4. Слѣдовательно, будетъ 4 группы по 6 дѣтей, и каждая группа получитъ по 13 шаровъ.

Задача II. Нѣкто имѣетъ 36 бѣлыхъ и 48 красныхъ розъ. Онъ хочетъ сдѣлать возможно большее количество букетовъ такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ букетѣ было поровну бѣлыхъ и красныхъ розъ. Количество букетовъ должно быть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ 36 и 48, слѣдовательно, оно будетъ 12. Выйдетъ, слѣдовательно, 12 букетовъ, и въ каждомъ изъ нихъ будетъ по 3 бѣлыхъ и по 4 красныхъ розы.

Задача III. У Ивана есть нѣкоторое количество монетъ по 10 копеекъ каждая; другихъ денегъ у него нѣтъ. Онъ отправляется купить тетради по 8 копеекъ каждая къ купцу, у котораго тоже нѣтъ мелкихъ денегъ. Требуется опредѣлить наименьшее количество тетрадей, которое онъ можетъ купить. Сумма, которую Иванъ издержитъ, выраженная въ копейкахъ, должна быть кратной 10, такъ какъ онъ имѣетъ только монеты по 10 копеекъ. Но это число должно быть также кратнымъ 8, такъ какъ каждая тетрадь стоитъ 8 копеекъ. А такъ какъ онъ хочетъ истратить возможно меньше денегъ, то нужно найти общее наименьшее кратное 10 и 8, т. е. 40. Иванъ купитъ, слѣдовательно, 5 тетрадей и заплатитъ 4 монеты по 10 копеекъ.

ЗАДАЧИ КЪ V-ой ГЛАВѢ.

40. Доказать, что при дѣленіи числа на 4 или на 25 получается тотъ же остатокъ, что и при дѣленіи на 4 или на 25 числа, составленнаго изъ двухъ послѣднихъ его цифръ.

41. Опредѣлить остатки при дѣленіи слѣдующихъ чиселъ на 2, 3, 4, 5, 9, 25:

36, 375, 2 003, 3 651, 434 257, 32 578, 111 111,
1 111 122, 123 456 789, 987 654 321.

42. Найти общ. н. дѣлителя чиселъ 68 532 и 23 451,

43. Найти общ. н. дѣлителя чиселъ 111 111 и 1 111.

44. Найти общ. н. дѣлителя чиселъ 10 000 001 и 10 001.

45. Найти общ. н. дѣлителя чиселъ 1 000 000 001 и 1 000 001.

46. Найти общее наименьшее кратное чиселъ 24, 36, 60, 100.

47. Въ велосипедѣ съ колесами, соединенными цѣпью, маленькое колесо имѣетъ 8 зубцовъ, а большое 18. Требуется опредѣлить наименьшее количество взмаховъ педали, послѣ котораго оба колеса придутъ въ первоначальное положеніе.

48. Въ одномъ экипажѣ переднія колеса имѣютъ 3 метра въ окружности, заднія 4 метра. Требуется опредѣлить кратчайшее разстояніе, при которомъ каждая пара колесъ сдѣлаетъ четное число оборотовъ.

49. Пароходы первой компаніи выѣзжаютъ изъ гавани каждые 12 дней; пароходы второй компаніи — только каждые 28 дней. Если 1-го января 1908 года, вышли изъ гавани пароходы обѣихъ компаній то когда въ первый разъ вновь наступитъ совпаденіе дней отъѣзда пароходовъ обѣихъ компаній?

50. Доказать слѣдующія предложенія:

a) Каждое число отличается отъ суммы его цифръ числомъ, кратнымъ 9.

b) Сумма цифръ суммы двухъ чиселъ либо равна суммѣ обѣихъ суммъ цифръ либо отличается отъ нея числомъ, кратнымъ 9.

c) Сумма цифръ разности двухъ чиселъ либо равна разности обѣихъ суммъ цифръ либо отличается отъ нея числомъ, кратнымъ 9.

51. Вывести изъ предложеній b) и c) предыдущей задачи повѣрку съ помощью числа 9 для сложенія и вычитанія.

52. Сдѣлать повѣрку съ помощью числа 9 сложеній въ задачѣ 4.

53. Произвести такую же повѣрку вычитаній въ задачахъ 8 и 10.

54. Произвести такую же повѣрку умноженій въ задачахъ 16—20.

Глава VI.

ПРОСТЫЯ ЧИСЛА.

I. ОПРЕДѢЛЕНІЕ И СВОЙСТВА ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

44. Опредѣленіе простыхъ чиселъ. Простыми числами называются такія числа, которыя не имѣютъ другихъ дѣлителей, кромѣ самихъ себя и единицы; числа 1 не относятъ къ простымъ числамъ.

Число 7, напримѣръ, а также 11 суть числа простыя; напротивъ, 6 — не простое число.

Не слѣдуетъ смѣшивать опредѣленія простыхъ чиселъ съ опредѣленіемъ чиселъ взаимнопростыхъ. Поэтому числа простыя въ смыслѣ послѣдняго опредѣленія, называютъ иногда числами абсолютно простыми. Прибавленіемъ слова абсолютно имѣютъ въ виду указать, что свойство числа, которое выражается терминомъ простое число, зависитъ только отъ него самого, а не отъ его отношенія къ другимъ числамъ. Такъ напримѣръ 7 — простое число, 11 — тоже простое число; а числа 6 и 35 — числа взаимнопростыя или, какъ говорятъ 6 есть число простое относительно 35; но 6 не будетъ простымъ числомъ относительно 12; точно такъ же 35 не будетъ простымъ относительно 10.

Если напишемъ натуральный рядъ чиселъ (7) и вычеркнемъ въ немъ всѣ непростыя числа, то получимъ натуральный рядъ простыхъ чиселъ. Легко убѣдиться, что этотъ рядъ начинается съ чиселъ 2, 3, 5, 7, 11, 13. Но рѣшить, будетъ ли данное число простымъ, становится труднѣе, когда мы обращаемся къ бóльшимъ числамъ.

45. Задача. Опредѣлить, будетъ ли данное число простымъ.

Пусть дано, напримѣръ, число 127. Мы сейчасъ же замѣчаемъ, что оно не дѣлится ни на 2, ни на 3, ни на 5. Далѣе

127 не дѣлится ни на 4, ни на 6; въ самомъ дѣлѣ, если бы оно дѣлилось на эти числа, то должно было бы дѣлиться и на 2. Далѣе $127 = 7 \cdot 18 + 1$, слѣдовательно 127 не дѣлится и на 7. Оно не дѣлится ни на одно изъ чиселъ 8, 9, 10: если бы оно дѣлилось на 8 или на 10, то должно было бы дѣлиться на 2, а если бы дѣлилось на 9, то дѣлилось бы и на 3. Точно такъ же не дѣлится оно и на 11, потому что $127 = 11 \cdot 11 + 6$. Такимъ образомъ, число 127 не дѣлится ни на одно изъ чиселъ отъ 1 до 11, и его частное съ недостаткомъ при дѣленіи на 11 будетъ 11. Отсюда слѣдуетъ, что 127 число простое. Иначе его можно было бы разложить на произведеніе двухъ сомножителей, которые при этомъ не могли бы быть больше 11, потому что произведеніе $11 \cdot 12$ уже больше, чѣмъ 127; а два числа, большія 11, во всякомъ случаѣ дадутъ произведеніе, большее 127. Если бы, слѣдовательно, 127 не было простымъ числомъ, то одинъ изъ его дѣлителей долженъ былъ бы заключаться среди чиселъ 2, 3, 4, . . ., 10, 11. Мы, однако, убѣдились уже раньше въ противномъ.

Предыдущее разсужденіе основано на томъ, что частное съ недостаткомъ отъ дѣленія 127 на 11 не превышаетъ 11; если принять во вниманіе, что относительно каждаго дѣлителя, который не будетъ простымъ числомъ, можно разсуждать такъ же, какъ мы разсуждали только-что относительно 4, 6, 8, 9, 10, то мы придемъ къ слѣдующему правилу.

Правило производства дѣйствія 20-ое. Чтобы узнать, будетъ ли данное число простымъ, достаточно дѣлить его поочередно на простыя числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, пока частное съ недостаткомъ не станетъ меньше дѣлителя. Если ни одно изъ этихъ дѣленій не выполняется нацѣло, то данное число будетъ простымъ.

Опредѣленіе. Простыя числа, на которыя дѣлится данное число, мы будемъ называть его простыми дѣлителями; единица не считается простымъ дѣлителемъ числа.

Каждое непростое число, имѣетъ двухъ или болѣе простыхъ дѣлителей. Въ самомъ дѣлѣ, если мы будемъ испытывать поочередно числа 2, 3, 4, 5, 6, . . . въ качествѣ дѣлителей, то первый дѣлитель, при которомъ дѣленіе будетъ выполняться нацѣло, долженъ быть числомъ простымъ; иначе должно было бы выполняться нацѣло одно изъ предыдущихъ дѣленій. Поэтому **наименьшій отличный отъ 1 дѣлитель какого-нибудь числа всегда будетъ числомъ простымъ.**

Цѣлыя числа, которыхъ наименьшій простой дѣлитель есть 2, называются **четными числами**, нуль также причисляется къ четнымъ числамъ. Всѣ остальныя числа, включая и 1, называются **нечетными** числами.

Если извѣстны всѣ простыя числа до 100, то предыдущее правило дастъ возможность узнать, будетъ ли число, меньшее 10000, простымъ; въ самомъ дѣлѣ, число, меньшее 10000, не можетъ быть произведеніемъ двухъ такихъ сомножителей, которыя оба больше 100. Найти же простыя числа до ста очень легко. А именно, легко убѣдиться, что $7 \cdot 7 = 49$, $7 \cdot 11 = 77$ $7 \cdot 13 = 91$ суть единственныя числа, ниже 100, которыя, не будучи простыми, не дѣлятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. **Поэтому, если оставимъ въ сторонѣ 49, 77 и 91, то по однимъ уже признакамъ дѣлимости на 2, 3, 5, легко замѣтить, будетъ ли данное число, меньшее 100, простымъ нѣтъ.**

46. Таблицы простыхъ чиселъ. Примѣнятъ указанный способъ къ числамъ, имѣющимъ болѣе 3 цифръ, очень затруднительно; при числахъ 5-ти и 6-тизначныхъ онъ почти непримѣнимъ. Поэтому составлены таблицы простыхъ чиселъ, т. е. печатные перечни, заключающіе въ себѣ всѣ простыя числа до извѣстнаго предѣла.

Для непростыхъ чиселъ эти таблицы указываютъ обыкновенно величину самаго меньшаго первоначальнаго дѣлителя; ими можно поэтому пользоваться при разложеніи числа на первоначальныхъ сомножителей — операція, которой мы вскорѣ займемся.

Чтобы составить такую таблицу, можно пользоваться такъ называемымъ **рѣшетомъ Эратосѳена**. Для этого беремъ прямоугольную таблицу, каждая клѣтка которой соотвѣтствуетъ одному числу. Въ этой таблицѣ мы располагаемъ числа такъ, какъ показано на приложенномъ чертежѣ.

При этомъ нѣтъ никакой надобности дѣйствительно выписывать числа, соотвѣтствующія отдѣльнымъ клѣткамъ. Достаточно написать, напримѣръ, три первыя строки, заключающія числа до

29, а слѣдующія строки, которыя содержатъ числа отъ 30 до 129, достаточно обозначить номерами.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4 2	5	6 2	7	8 2	9 3
1	10 2	11	12 2	13	14 2	15 3	16 2	17	18 2	19
2	20 2	21 3	22 2	23	24 2	25 5	26 2	27 3	28 2	29
3	2		2	3	2	5	2		2	3
4	2		2		2	3	2		2	7
5	2	3	2		2	5	2	3	2	
6	2		2	3	2	5	2		2	3
7	2		2		2	3	2	7	2	
8	2	3	2		2	5	2	3	2	
9	2	7	2	3	2	5	2		2	3
10	2		2		2	3	2		2	
11	2	3	2		2	5	2	5	2	7
12	2	11	2	3	2	5	2		2	3

Число 2 есть несомнѣнно число простое. Слѣдующія числа черезъ одно дѣлятся на 2, и 2 будетъ ихъ наименьшимъ дѣлителемъ. Поэтому мы ставимъ въ каждую вторую клѣтку мелкимъ шрифтомъ дѣлителя 2. Число 3, которое слѣдуетъ за 2, тоже простое число; поэтому мы его выписываемъ, начиная съ клѣтки, въ которой стоитъ первое 3, въ каждую 3-ью клѣтку,

т. е. въ клѣтки 6-тую, 9-тую, 12-тую, 15-тую, 18-тую и т. д. Всѣ эти числа будутъ дѣлиться на 3. Если мы желаемъ имѣть только наименьшаго дѣлителя каждаго числа, то не нужно вписывать числа 3 въ тѣ клѣтки, гдѣ уже стоитъ 2. Число 4, которое слѣдуетъ за 3, не простое число, такъ какъ въ его клѣткѣ уже стоитъ дѣлитель 2. Мы обращаемся поэтому къ числу 5 и вписываемъ его, начиная съ клѣтки, въ которой оно стоитъ, въ каждую 5-тую клѣтку. Въ нашей таблицѣ 5 вписано только въ тѣ клѣтки, гдѣ нѣтъ ни 2, ни 3. Точно такъ же берутъ далѣе первое слѣдующее за 5 число, въ клѣтку котораго еще не вписанъ ни одинъ дѣлитель; это будетъ число 7. Слѣдовательно, 7 не дѣлится ни на одно число, т. е. есть число простое. Теперь мы вписываемъ опять число 7 въ каждую 7-ую клѣтку, начиная съ той, гдѣ 7 стоитъ первоначально и т. д.

Клѣтки, въ которыя не будетъ вписано ни одного дѣлителя, представляютъ мѣста простыхъ чиселъ.

Въ рѣшетѣ Эрастосѳена первая клѣтка, въ которой вписано въ качествѣ дѣлителя нѣкоторое простое число, соотвѣтствуетъ квадрату этого числа; такъ, напримѣръ, дѣлитель 7 вписанъ первый разъ въ клѣткѣ, соотвѣтствующей числу 49.

Можно было бы примѣнить этотъ пріемъ къ однимъ нечетнымъ числамъ и четныхъ чиселъ не выписывать вовсе; кратныя 3 стояли бы все-таки на каждомъ 3-тьемъ мѣстѣ, кратныя 5 на каждомъ 5-томъ, и т. д.

Но было бы невозможно выписывать только тѣ числа, которыя не дѣлятся ни на 2, ни на 3; кратныя 5 не стояли бы уже на каждомъ 5-томъ мѣстѣ, и т. д.

Въ настоящее время составлены очень обширныя таблицы простыхъ чиселъ и простыхъ дѣлителей; нѣкоторыя изъ нихъ доходятъ до нѣсколькихъ милліоновъ. Но, какъ далеко мы ни заходимъ въ этомъ процессѣ, мы все еще находимъ новыя простыя числа. Поэтому приходится поставить вопросъ, ограничено ли количество простыхъ чиселъ или, напротивъ, число ихъ безгранично. Отвѣтомъ на этотъ вопросъ служитъ теорема:

Теорема 34. Рядъ простыхъ чиселъ неограниченъ.

Эта теорема означаетъ, что для каждаго даннаго простого числа существуетъ большее простое число; поэтому существуетъ третье простое число, большее, чѣмъ второе, далѣе четвертое, большее, чѣмъ третье, и т. д. безъ конца.

Чтобы доказать, что рядъ простыхъ чиселъ неограниченъ, мы покажемъ, что существуетъ простое число, большее, чѣмъ 11. А такъ какъ мы будемъ вести доказательство съ помощью разсужденія общаго характера, т. е. разсужденія, которое въ той же формѣ можетъ быть примѣнено къ каждому другому простому числу, то отсюда будетъ вытекать правильность теоремы для любого простого числа.

Итакъ, мы хотимъ доказать, что существуетъ простое число большее, чѣмъ 11. Для этого мы составимъ произведеніе

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

простыхъ чиселъ до 11 включительно и, прибавивъ къ нему 1, получимъ 2311. Если мы теперь раздѣлимъ 2311, напримѣръ, на 3, то получимъ частное $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и остатокъ 1; въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго равенства имѣемъ:

$$2311 = (2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \cdot 3 + 1;$$

слѣдовательно, 2311 не дѣлится на 3. Это самое разсужденіе показываетъ, что 2311 не дѣлится ни на одно изъ чиселъ 2, 5, 7, 11. Отсюда слѣдуетъ заключить, что 2311 либо будетъ само простымъ числомъ, либо же имѣетъ простого дѣлителя, большаго, чѣмъ 11; во всякомъ случаѣ, слѣдовательно, существуетъ простое число, большее, чѣмъ 11, что и требовалось доказать.

II. РАЗЛОЖЕНІЕ ЧИСЕЛЪ НА ПРОСТЫХЪ СОМНОЖИТЕЛЕЙ.

47. Разложеніе числа на простыхъ сомножителей. Опредѣленіе. Разложить какое-нибудь число на простыхъ сомножителей значитъ найти произведеніе простыхъ сомножителей, равное этому числу.

Такъ, напримѣръ, равенства:

$$70 = 2 \cdot 7 \cdot 5,$$
$$240 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2,$$
$$36 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3,$$

представляютъ разложеніе чиселъ 70, 240, 36 на простыхъ сомножителей. Обыкновенно пишутъ произведенія простыхъ чиселъ, располагая сомножителей въ порядкѣ ихъ величины. Пишутъ, слѣдовательно:

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5,$$
$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2.$$

Чтобы обозначать произведеніе нѣсколькихъ равныхъ сомножителей, употребляются такъ называемые показатели. Показатель служитъ для того, чтобы отмѣтить, сколько разъ простое число, надъ которымъ стоитъ показатель, должно быть взято сомножителемъ; показатель 1 совсѣмъ не ставится (21).

Правило производства дѣйствія 21-ое. Чтобы разложить какое-нибудь число на его простыхъ сомножителей, мы дѣлимъ его на наименьшаго изъ его простыхъ дѣлителей и записываемъ этого дѣлителя. Затѣмъ дѣлимъ полученное частное на его наименьшаго простого дѣлителя и записываемъ этого дѣлителя вслѣдъ за предыдущимъ. Этотъ пріемъ мы повторяемъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ частное, равное единицѣ. Записанныя числа будутъ простые сомножители даннаго числа; они расположены въ порядкѣ ихъ величины.

Если имѣется таблица, указывающая наименьшаго дѣлителя каждаго числа, то нужно только воспользоваться этой таблицей и выполнить дѣленія. Если же такой таблицы нѣтъ, то нужно испытывать послѣдовательныя простыя числа въ качествѣ дѣлителей; при этомъ нужно пользоваться извѣстными намъ признаками дѣлимости. Такъ какъ частное не можетъ заключать въ себѣ ни одного дѣлителя, который бы не заключался въ дѣлимомъ, то при этихъ испытаніяхъ никогда не приходится возвращаться обратно, т. е. пробовать дѣлителя, меньшаго, чѣмъ испытанные уже дѣлители; но, конечно, того же самаго дѣлителя нужно пробовать нѣсколько разъ.

Обыкновенно вычисленіе ведется слѣдующимъ образомъ: Пусть дано число 31620; тогда:

31 620	2
15 810	2
7 905	3
2 635	5
527	17
31	31
1	

$527 : 11 = 47$, $\overline{87}$, $\overline{10}$

$527 : 13 = 40$, $\overline{7}$

$527 : 17 = 31$, $\overline{17}$, $\overline{0}$

Это значитъ: число 31620 имѣетъ дѣлителя 2, котораго мы пишемъ справа. Частное будетъ 15810. Число 15810, равнымъ образомъ, имѣетъ дѣлителя 2, котораго записываемъ справа. Частное 7905 не дѣлится на 2, но дѣлится на 3. Записываемъ дѣлителя 3 справа отъ 7905, а частное 2635 подъ другими частными. 2635 не дѣлится на 3 (останавливаться на томъ, будетъ ли оно дѣлиться на 2, конечно, незачѣмъ), но дѣлится на 5. Записываемъ дѣлителя 5 и частное 527. Это частное не дѣлится на 5 (о дѣленіи на 2 и на 3 незачѣмъ и думать). Оно не дѣлится и на 7, потому что $527 = 520 + 7$, и 520 на 7 не дѣлится, ибо $7 \cdot 70 = 490$, а $520 - 490 = 30$ и не дѣлится на 7. За этимъ слѣдуютъ простыя числа: 11, 13, 17. Вспомогательныя дѣленія показываютъ намъ, что 527 не дѣлится ни на 11, ни на 13, а дѣлится на 17. Частное 31 число простое и имѣетъ вслѣдствіе этого только простого дѣлителя 31. Разложеніе окончено, и мы нашли

$$31620 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31.$$

48. Теорема 35. Каждое число можетъ быть представлено въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей только однимъ способомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы два произведенія простыхъ чиселъ были равны между собою, они должны быть составлены изъ тѣхъ же самихъ сомножителей, и каждый сомножитель въ обоихъ произведеніяхъ долженъ имѣть того же самаго показателя. Это условіе, очевидно, необходимо, но оно тажке достаточно.*)

Эта теорема объясняетъ, съ какой цѣлью введены простыя числа; она представляетъ ключъ къ главнѣйшимъ ихъ примѣнені-

*) Это утвержденіе принимается здѣсь безъ доказательства См. приложеніе въ концѣ книги. Прим. ред.

ямъ. Она выражаетъ характерное свойство произведеній простыхъ чиселъ въ отличіе отъ произведеній такихъ сомножителей, между которыми имѣются и непростыя числа. Эти послѣднія произведенія могутъ быть равны между собою, хотя ихъ сомножители неодинаковы. Напримѣръ:

$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4;$$

Это происходитъ оттого, что 6 не простое число.

49. Примѣненіе къ дѣлимости. Правило производства дѣйствія 22-ое. Чтобы перемножить два или нѣсколько чиселъ, разложенныхъ на простыхъ сомножителей, достаточно каждый изъ различныхъ простыхъ сомножителей, которые являются въ данныхъ числахъ, взять съ показателемъ, равнымъ суммѣ показателей, которые онъ имѣетъ въ этихъ разложеніхъ, — а затѣмъ перемножить полученныхъ такимъ образомъ сомножителей.

Пусть даны, напримѣръ, слѣдующія числа:

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \cdot 3, \\ 90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5, \\ 35 &= 5 \cdot 7. \end{aligned}$$

Произведеніе этихъ чиселъ содержитъ различныхъ простыхъ сомножителей 2, 3, 5, 7, которые входятъ въ данныя разложенія, и не содержитъ никакихъ другихъ. Показатель при 2 долженъ быть равенъ $3 + 1 = 4$, такъ какъ 2 въ число 24 входитъ 3 раза, въ число 90 — 1 разъ, а въ 35 — множителя 2 вовсе нѣтъ. Показатель при 3 будетъ равенъ $1 + 2 = 3$; показатель при 5 равенъ $1 + 1 = 2$, а показатель при 7 равенъ 1. Итакъ:

$$24 \cdot 90 \cdot 35 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Доказательство. Чтобы доказать это правило, нужно только примѣнить теоремы о произведеніи нѣсколькихъ сомножителей (**15**). Тогда мы получимъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned} 24 \cdot 90 \cdot 35 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ &= 2^{3+1} \cdot 3^{1+2} \cdot 5^{1+1}\ 7^1. \end{aligned}$$

Показатель при 2 поэтому окончательно равенъ числу, которое показываетъ, сколько разъ встрѣчается сомножитель 2 въ произведенiи третьей строки, а это число, очевидно, будетъ равно суммѣ чиселъ, которыя показываютъ, сколько разъ встрѣчается 2 въ данныхъ разложенiяхъ, т. е. равно суммѣ показателей числа 2 въ этихъ произведенiяхъ простыхъ чиселъ. То же самое справедливо и относительно другихъ сомножителей.

Правило производства дѣйствiя 23-ье. Чтобы получить частное двухъ чиселъ, разложенныхъ на простыхъ сомножителей, достаточно отнять отъ каждаго показателя дѣлимаго показателя того же сомножителя въ дѣлителѣ. Если разность равна нулю, то этого сомножителя не будетъ въ частномъ. Если этого вычитанiя нельзя выполнить или если дѣлитель заключаетъ такихъ простыхъ сомножителей, которыхъ нѣтъ въ дѣлимомъ, то дѣленiе невозможно.

Такъ какъ дѣленiе есть дѣйствiе обратное умноженiю, то правило 23-ье для дѣленiя представляетъ собой слѣдствiе правила 22-го для умноженiя и теоремы 35.

Пусть, напримѣръ, дано число

$$4320 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$$

раздѣлить на число

$$108 = 2^2 \quad 3^3.$$

Произведенiе частнаго на 108 должно составить 4320. Если предположимъ, что частное разложено на простыхъ сомножителей и умножимъ его по правилу производства дѣйствiя 22-му на 108, то должно получиться проиведенiе простыхъ сомножителей, равное 4320, ибо 4320 можетъ быть разложено только единственнымъ образомъ на простыхъ сомножителей. Поэтому показатель каждаго простого сомножителя въ дѣлимомъ 4320 равенъ суммѣ показателей этого сомножителя въ дѣлителѣ 24 и въ неизвѣстномъ частномъ. Опредѣленiе вычитанiя приводитъ насъ поэтому къ изложенному выше правилу. Этимъ способомъ получимъ:

$$4320 : 108 = 40 = 2^3 \cdot 5 = 2^{5-2} \cdot 5.$$

Если бы нужно было раздѣлить $3^3 \cdot 7^2$ на $2 \cdot 3$, то отвѣтъ гласилъ бы, что первое изъ этихъ чиселъ не дѣлится на второе. Въ самомъ дѣлѣ, если бы это дѣленіе было возможно, и если бы частное было разложено на первоначальныхъ сомножителей, то сомножитель 2 въ дѣлимомъ долженъ былъ бы имѣть показателемъ число, равное суммѣ его показателей въ дѣлителе и въ частномъ, т. е. по крайней мѣрѣ 1. Это, однако, не имѣетъ мѣста.

Точно такъ же обстояло бы дѣло, если бы требовалось раздѣлить $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ на $2 \cdot 3^5$, потому что нѣтъ такого числа, которое, будучи прибавленнымъ къ 5, показателю 3-хъ въ дѣлителѣ, дало бы показателя 3-хъ въ дѣлимомъ, т. е. 2. Можно поэтому высказать слѣдующую важную теорему:

Теорема 36. Для того чтобы число, разложенное на простыхъ сомножителей дѣлилось на другое, необходимо и достаточно, чтобы дѣлимое заключало въ себѣ всѣхъ простыхъ сомножителей, которые находятся въ дѣлителѣ, и чтобы каждый изъ нихъ имѣлъ показателя, по меньшей мѣрѣ равнаго тому, котораго онъ имѣетъ въ дѣлителѣ.

Замѣчаніе. Правило производства дѣйствія 23-ье можетъ быть выражено проще и яснѣе, если примемъ во вниманіе, что сомножителя, который не входитъ въ данное произведеніе, можно считать входящимъ въ его составъ, но только съ показателемъ 0. Въ такомъ случаѣ можно всегда принимать, что дѣлитель имѣетъ тѣхъ же самыхъ сомножителей, что и дѣлимое; при этомъ нѣкоторые сомножители могутъ имѣть показателемъ нуль. Въ такомъ случаѣ частное равно такому произведенію тѣхъ же простыхъ сомножителей, въ которомъ каждый простой сомножитель имѣетъ показателемъ разность его показателей въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, въ предположеніи, что эти вычитанія возможны. Если при этомъ у нѣкоторыхъ простыхъ сомножителей получится показатель 0, то ихъ можно пропустить или, что то же, замѣнить ихъ сомножителемъ 1.

Если, напримѣръ, даны числа

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5, \qquad 15 = 3 \cdot 5,$$

то можно положить $15 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5$, и поэтому получимъ:

$$720 : 15 = 2^{4-0} \cdot 3^{2-1} \cdot 5^{1-1} = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 2.^4 \cdot 3$$

50. Общій наибольшій дѣлитель и общее наименьшее кратное чиселъ, разложенныхъ на простыхъ сомножителей. Теоремы и правила производства дѣйствій предыдущихъ параграфовъ даютъ намъ правила, позволяющія сразу писать общаго наибольшаго дѣлителя и общее наименьшее кратное чиселъ, разложенныхъ на простыхъ сомножителей. А именно, общій наибольшій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ получится, если мы изъ чиселъ, дѣлящихъ всѣ данныя числа, т. е. изъ ихъ общихъ дѣлителей, возьмемъ то, которое содержитъ въ себѣ самое большее количество простыхъ чиселъ и притомъ каждое простое число съ самымъ большимъ показателемъ. Точно такъ же мы получимъ общее наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ, если возьмемъ то общее кратное данныхъ чиселъ, которое содержитъ менѣе всего простыхъ чиселъ, и притомъ каждое простое число съ наименьшимъ показателемъ. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующимъ правиламъ:

Правило производства дѣйствія 24-ое. Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ, разложенныхъ на простыхъ сомножителей, нужно взять простыхъ сомножителей, общихъ всѣмъ числамъ, и каждаго изъ нихъ съ показателемъ *наименьшимъ* изъ тѣхъ, съ которыми онъ входитъ въ эти числа.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы при составленіи общаго наибольшаго дѣлителя мы взяли простого сомножителя, котораго нѣтъ въ одномъ изъ данныхъ чиселъ, или если бы одного изъ имѣющихся сомножителей мы взяли съ показателемъ, бо́льшимъ какого-либо показателя, съ которымъ онъ входитъ въ одно изъ данныхъ чиселъ, то это послѣднее число не раздѣлилось бы на составленное такимъ образомъ произведеніе. Такъ какъ, слѣдовательно, бо́льшаго общаго дѣлителя составить невозможно, то мы этимъ путемъ дѣйствительно получаемъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Примѣръ. Пусть будутъ даны числа:

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5, \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2, \qquad 1000 = 2^3 \cdot 5^3.$$

Ихъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ будетъ $2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4$.

Подобное же разсужденіе приводитъ насъ къ доказательству слѣдующаго правила для нахожденія общаго наименьшаго кратнаго.

Правило производства дѣйствія 25-ое. Для нахожденія общаго наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ, разложенныхъ на простыхъ сомножителей, нужно перемножить всѣхъ простыхъ сомножителей, которые имѣются въ этихъ числахъ; притомъ каждаго сомножителя нужно брать съ самымъ большимъ показателемъ, съ какимъ онъ входитъ въ данныя числа.

Примѣръ. Даны опять числа 240, 36 и 1000. Ихъ общее наименьшее кратное будетъ:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 18000.$$

ЗАДАЧИ КЪ VI-ой ГЛАВѢ.

55. Показать, что число 2311, которое встрѣчается въ доказательствѣ теоремы 34 въ п. 46, есть число простое.

56. Узнать, будутъ ли числа: 191, 1203, 1307, 1501, 2309, 15247, 17231 простыми.

57. Разложить на простыхъ сомножителей слѣдующія числа: 342, 576, 684, 1002.

58. Найти общ. наиб. дѣлителя четырехъ чиселъ задачи 57.

59. Найти общ. наим. кратное чиселъ 11, 101, 1001.

60. Найти общ. наим. кратное чиселъ 9, 99, 999, 9999.

61. Доказать съ помощью разложенія на простыхъ сомножителей, что произведеніе общ. наим. кратнаго двухъ чиселъ на ихъ общ. наиб. дѣлителя равно произведенію этихъ чиселъ.

62. Сколько разъ встрѣчается простой сомножитель 3 въ произведеніи первыхъ 50 чиселъ?

63. Сколько разъ встрѣчается простой сомножитель 7 въ произведеніи первыхъ 100 чиселъ?

64. Сколько разъ встрѣчается простой сомножитель 13 въ произведеніе первыхъ 654 чиселъ?

65. Разложить на простыхъ сомножителей произведеніе первыхъ 121 чиселъ.

Глава VII.

ОБЫКНОВЕННЫЯ ДРОБИ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ И ОСНОВНЫЯ СВОЙСТВА.

51. Понятіе о величинѣ. Мы занимались до сихъ поръ предметами или, точнѣе говоря, индивидами. Слово „индивидъ“ означаетъ недѣлимое. Если, напримѣръ, у меня есть яблоко, и я разрѣжу его на 3 части, то ни одна изъ этихъ частей не можетъ быть болѣе названа яблокомъ; индивидъ — яблоко уничтоженъ. Однако, въ жизни очень часто приходится встрѣчаться съ задачами, подобными слѣдующей:

Задача. Раздѣлить поровну 3 яблока между 4-мя дѣтьми. Сколько получитъ каждый ребенокъ? Если бы было 8 яблокъ для раздачи 4-мъ дѣтямъ, то каждый ребенокъ получилъ-бы по 2 яблока, потому что 2 есть результатъ дѣленія 8 на 4. Но когда мы имѣемъ только 3 яблока, то каждый ребенокъ, очевидно, не получитъ цѣлаго яблока. Можно, однако, разрѣзать каждое яблоко на 4 равныя части и дать каждому ребенку по одной четверти каждаго яблока, такъ что каждый изъ нихъ получитъ по 3 четверти яблока.

Въ дѣйствительности въ этой задачѣ мы дѣлили не яблоки, а массы этихъ яблокъ. Что здѣсь дѣло идетъ только о массѣ, легко понять, если предположимъ, что требуется раздать не 3 яблока, а 8 яблокъ 4-мъ дѣтямъ. Каждый ребенокъ получитъ тогда по 2 яблока, но онъ былъ бы столь же доволенъ, если бы получилъ, согласно предыдущему объясненію, 8 четвертей яблока.

Итакъ, масса, въ противоположность индивиду, дѣлима, и притомъ на любое количество частей. Каждая изъ этихъ частей представляетъ опять нѣкоторую массу. Поэтому массу называютъ — величиной. Кромѣ массы, есть еще и другія величины, напримѣръ, длина, площадь, объемъ, вѣсъ, цѣнность.

Длина можетъ быть раздѣлена на любое количество частей, и каждая часть ея будетъ опять-таки длиной. Если я, напримѣръ, имѣю ленту, длиною въ 1 метръ, то я могу ее разрѣзать на 6 равныхъ частей, на 13 равныхъ частей или на 250 равныхъ частей. Если бы потребовалось разрѣзать ее на милліонъ равныхъ частей, то такое дѣленіе было бы, правда, не выполнимо въ дѣйствительности, но мысленно его возможно себѣ представить. Далѣе, если я имѣю бутылку, заключающую въ себѣ литръ воды, и извѣстное количество стакановъ, то я могу перелить воду изъ бутылки въ стаканы такимъ образомъ, что въ каждомъ стаканѣ будетъ одинаковое количество воды. Такимъ образомъ мы раздѣлили литръ воды, т. е. нѣкоторый объемъ, на опредѣленное число равныхъ частей.

52. Опредѣленіе дробей. Возратимся къ задачѣ, въ которой нужно было раздать 8 яблокъ 4-мъ дѣтямъ. Каждый ребенокъ получаетъ 8 яблокъ : 4 = 2 яблока. Число 2 получено съ помощью дѣленія. Но значеніе слова дѣленіе расширили, именно, стали называть дѣленіемъ также и тотъ пріемъ, посредствомъ котораго 3 яблока раздѣляются на 4 равныя части. Въ первомъ случаѣ частное было 2, во второмъ три четверти.

Частное отъ дѣленія 3-хъ яблокъ на 4 пишется также короче:

$\frac{3}{4}$ яблока (читается: три четверти яблока),

Точно такъ же:

$$3\,\textit{руб.} : 4 = \frac{3}{4}\,\textit{руб.},$$

$$3\,\textit{мет.} : 4 = \frac{3}{4}\,\textit{мет.}$$

Можно поэтому отвлечься отъ наименованія и соединить предыдущія выраженія въ одно равенство:

$$3 : 4 = \frac{3}{4}\cdot$$

Частное $\frac{3}{4}$ тоже называютъ числомъ, а именно дробью. Слѣдовательно, значеніе слова число, подъ которымъ мы до сихъ поръ разумѣли исключительно цѣлое число (6), теперь расширено въ своемъ значеніи, и мы говоримъ, что дроби также суть числа.

Цѣлыя числа могутъ тоже быть представлены въ видѣ дробей, напримѣръ $\frac{8}{4} = 2$. Легко убѣдиться, что любое данное цѣлое число можно представить въ видѣ дроби. Именно, если умножимъ цѣлое число на другое цѣлое число и полученное произведеніе раздѣлимъ на это же число, то получится дробь, равная первоначальному цѣлому числу. Отсюда слѣдуетъ, что понятіе о дроби заключаетъ въ себѣ понятіе о цѣломъ числѣ, какъ частный случай.

Какъ мы уже говорили выше, величины, въ противуположность индивидамъ, имѣютъ свойство дѣлиться на сколько угодно частей. Иногда, однако, величинами называютъ также нѣкоторыя собирательныя понятія, при которыхъ одни дѣленія возможны, другія невыполнимы. Подобное понятіе представляетъ, напримѣръ, дюжина; дюжину платковъ можно раздѣлить на 2, 3, 4, 6 и 12 частей, но нельзя дѣлить на 5 или на 24 части. Полкъ въ 1200 человѣкъ можно раздѣлить на 2, на 3 части, но нельзя раздѣлить на 17 или на 10000 равныхъ частей; можно поэтому говорить о его половинѣ или о его третьей части, но не о семнадцатой или десятитысячной части. Въ послѣдующемъ мы будемъ разсматривать только величины, которыя дѣлятся неограниченно. Въ этомъ предположеніи можно дать слѣдующее опредѣленіе:

Опредѣленіе. Дробь есть ариѳметическій символъ, который выражаетъ, что нѣкоторую величину требуется раздѣлить на опредѣленное число частей и взять опредѣленное число этихъ частей.

Число равныхъ частей, на которыя раздѣлена величина, называется знаменателемъ дроби. Число взятыхъ частей называется числителемъ дроби.

Чтобы написать дробь, подписываютъ знаменателя подъ числителемъ и раздѣляютъ ихъ горизонтальной чертой. Чтобы выговорить дробь, называютъ сперва числителя и прибавляютъ порядковое числительное, производное отъ знаменателя (вторыхъ, третьихъ, четвертыхъ, пятыхъ, шестыхъ, стотысячныхъ, милліонныхъ и т. д.)

53. Если двѣ дроби имѣютъ одного и того же знаменателя, то та дробь будетъ больше, числитель которой больше. Такъ напримѣръ $\frac{7}{12}$ больше, чѣмъ $\frac{5}{12}$, такъ какъ обѣ эти дроби со-

держатъ двѣнадцатыя доли, т. е. одинаковыя части той величины, которую нужно дѣлить, но первая дробь означаетъ 7 такихъ долей, а вторая только 5.

Далѣе, если двѣ дроби имѣютъ одинаковаго числителя, то та дробь больше, у которой знаменатель меньше. Такъ, напримѣръ, $\frac{5}{11}$ больше, чѣмъ $\frac{5}{12}$; въ самомъ дѣлѣ, если 11 лицъ раздѣляютъ между собою 5 яблокъ, то доля каждаго будетъ больше, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда этихъ лицъ будетъ 12. Вообще $\frac{1}{11}$ часть больше, чѣмъ $\frac{1}{12}$, такъ какъ для полученія $\frac{1}{11}$ нужно раздѣлить величину на меньшее число частей, чѣмъ для полученія $\frac{1}{12}$.

Подобнаго же рода соображенія изъ ежедневной жизни приводятъ къ доказательству слѣдующихъ основныхъ теоремъ.

Теорема 37. Чтобы умножить дробь на *цѣлое* число, умножаемъ числителя на цѣлое число и полученное произведеніе дѣлимъ на знаменателя.

Теорема 38. Чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, умножаемъ знаменателя на цѣлое число и дѣлимъ числителя на полученное произведеніе.

Такъ, напримѣръ, $\frac{9}{13}$ въ 3 раза больше, чѣмъ $\frac{3}{13}$; $\frac{5}{12}$ меньше $\frac{5}{4}$ въ 3 раза.

54. Точное частное двухъ цѣлыхъ чиселъ. Часто мы не могли раздѣлить данное количество предметовъ на цѣлое число и должны были удовольствоваться частнымъ съ недостаткомъ или частнымъ съ избыткомъ. Теперь же, послѣ введенія дробей, мы можемъ при каждомъ дѣленіи говорить о точномъ частномъ, исключая лишь, какъ и прежде, тотъ случай, когда дѣлителемъ служитъ нуль. Точнымъ частнымъ мы назовемъ число (дробь), которое, будучи умноженнымъ на дѣлителя, дастъ дѣлимое.

Теорема 39. Частное двухъ цѣлыхъ чиселъ есть дробь, числителемъ которой служитъ дѣлимое, а знаменателемъ дѣлитель.

Такъ, напримѣръ, результатъ дѣленія 14-ти на 3 даетъ отвѣтъ на слѣдующій вопросъ: Нужно раздать 14 яблокъ поровну 3 дѣтямъ; сколько слѣдуетъ дать каждому изъ нихъ? Отвѣтъ гласитъ: Если раздѣлить каждое яблоко на 3 равныя части и дать каждому ребенку третью часть каждаго яблока, то каждый ребенокъ будетъ имѣть всего $\frac{14}{3}$ яблока. Если дѣлимое дѣлится на дѣлителя безъ остатка, то частное будетъ цѣлымъ числомъ. Если, въ частности, дѣлимое равно дѣлителю, то частное будетъ равно 1. Если въ дроби числитель больше знаменателя, то, по п. **53**, дробь будетъ больше 1; если же числитель меньше знаменателя, то дробь будетъ меньше 1.

Опредѣленіе. Всѣ дроби, меньшія, чѣмъ 1, называются *правильными* дробями; тѣ же дроби, которыя больше 1, называются *неправильными* дробями; число 1 можно по желанію считать правильной или неправильной дробью.

Каждая неправильная дробь можетъ быть представлена въ видѣ суммы цѣлаго числа и правильной дроби.

Если хотимъ раздать 12 яблокъ 3-мъ дѣтямъ, то можно дать каждому изъ нихъ по 4 цѣлыхъ яблока. Но какъ раздать 11 яблокъ 4-мъ дѣтямъ? Можно раздѣлить каждое яблоко на 4 части и дать каждому ребенку $\frac{11}{4}$ яблока. Проще, однако, будетъ дать сперва каждому ребенку возможно больше цѣлыхъ яблокъ. Тогда нужно и возможно дать каждому по 2 яблока, т. е. частное съ недостаткомъ отъ дѣленія 11 на 4. Тогда останутся лишнихъ 3 яблока. Эти три яблока дѣлимъ на четверти и даемъ каждому ребенку по 3 четверти. Каждый ребенокъ получитъ поэтому по 2 цѣлыхъ яблока и по 3 четверти яблока или $2+\frac{3}{4}$ яблока. Число яблокъ будетъ слѣдовательно $2+\frac{3}{4}$. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема 40. Точное частное двухъ цѣлыхъ чиселъ равно суммѣ частнаго съ недостаткомъ и правильной дроби, которая будетъ имѣть числителемъ остатокъ, а знаменателемъ дѣлителя.

Такую сумму называютъ иногда смѣшаннымъ числомъ; каждая неправильная дробь можетъ быть, слѣдовательно, преобразована въ смѣшанное число.

Вмѣсто $2+\frac{3}{4}$ пишутъ $2\frac{3}{4}$; знакъ $+$ опускается. Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что этотъ способъ письменнаго изображенія представляетъ собою освященное обычаемъ исключеніе изъ правила, что пропускается только знакъ умноженія. Поэтому этотъ способъ обозначенія можно примѣнять только тогда, когда имѣется увѣренность, что онъ не поведетъ ни къ какой ошибкѣ.

Если числитель дроби больше знаменателя, то можно, руководствуясь теоремой 40, исключить цѣлое число, выполняя дѣленіе числителя на знаменателя, т. е. замѣняя дробь суммой цѣлаго числа и правильной дроби. Эта новая дробь меньше единицы, т. е. она выражаетъ величину, меньшую той, которая взята за единицу.

Обратно, сумму цѣлаго числа и какой-либо дроби всегда можно обратить въ одну дробь. Если, напримѣръ, имѣемъ 2 яблока и $\frac{3}{4}$ яблока, то 2 яблока составятъ 8 четвертей яблока; слѣдовательно, имѣемъ 8 четвертей и 3 четверти, т. е. $\frac{11}{4}$ яблока.

55. Различные способы изображенія дроби. Положимъ, что намъ нужно рѣшить задачу: Сколько почтовыхъ марокъ получится изъ полосы бумаги длиною въ 39 метровъ и шириною въ одну почтовую марку, если каждая почтовая марка имѣетъ $\frac{13}{5}$ *см.* длины? Если мы будемъ изготовлять марки всегда по 5 вмѣстѣ, то каждый разъ понадобится небольшая полоска въ 13 *см.* длины. Сто такихъ полосокъ будутъ имѣть въ длину 13 метровъ; слѣдовательно, изъ цѣлой полосы можно составить $5 \cdot 100 \cdot 3 = 1500$ почтовыхъ марокъ. Длина 39 метровъ будетъ, слѣдовательно, раздѣлена на 1500 равныхъ частей. Отсюда слѣдуетъ, что длина почтовой марки равна $\frac{39}{1500}$ *м.*, или $\frac{3900}{1500}$ *см.* $= \frac{13 \cdot 300}{5 \cdot 300}$ *см.* Съ другой стороны, эта длина намъ задана въ $\frac{13}{5}$ *см.* Слѣдовательно, для одной и той же величины имѣются два способа письменнаго изображенія:

$$\frac{13 \cdot 300}{5 \cdot 300} \text{ см.} = \frac{13}{5} \text{ см.}$$

Отсюда мы заключаемъ что:

$$\frac{13 \cdot 300}{5 \cdot 300} = \frac{13}{5}.$$

Подобную же задачу представляетъ и слѣдующая: 1 килограммъ сахара стоитъ $\frac{2}{5}$ рубля. Сколько будутъ стоить

17 килограммовъ? Мы сейчасъ же убѣждаемся, что отвѣтъ будетъ $\frac{17 \cdot 2}{5}$ рубля $= \frac{34}{5}$ рубля. Отсюда получается цѣна килограмма $\frac{34}{5}$ руб. : 17 $= \frac{34}{5 \cdot 17}$ руб. (теорема 38). Вмѣсто этого мы можемъ написать $\frac{2 \cdot 17}{5 \cdot 17}$ руб. Мы получаемъ, слѣдовательно, подобно тому, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ:

$$\frac{2 \cdot 17}{5 \cdot 17} = \frac{2}{5}.$$

Теорема 41. Если числитель и знаменатель одной дроби соотвѣтственно равны числителю и знаменателю другой дроби, умноженнымъ на одно и то же число, то такія двѣ дроби равны.

Каждая дробь можетъ быть поэтому написана различными способами, и для того, чтобы дроби были равны, нѣтъ никакой необходимости, чтобы ихъ числители и знаменатели были равны порознь.

Теорему 41 можно выразить въ другой, очень удобной формѣ, если ввести слѣдующее опредѣленіе.

Опредѣленіе. Сократить дробь на какое-нибудь число значитъ составить новую дробь, числитель и знаменатель которой равны частнымъ отъ дѣленія числителя и знаменателя данной дроби на это число.

Тогда имѣетъ мѣсто теорема:

Теорема 42. Если мы дробь сократимъ или, обратно, умножимъ ея числителя и знаменателя на одно и то же число, то измѣнится только видъ дроби, величина же ея останется безъ измѣненія.

Эта теорема часто даетъ возможность упростить дробь, т. е. изобразить ее съ помощью меньшихъ чиселъ.

Это упрощеніе достигается сокращеніемъ дроби на общаго дѣлителя числителя и знаменателя ея. Такъ напримѣръ, имѣемъ:

$$\frac{24}{38} = \frac{12}{19}; \quad \frac{250}{450} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}.$$

Если хотятъ упростить дробь настолько, насколько это только возможно, то сокращаютъ ее на общаго наибольшаго дѣлителя числителя и знаменателя. Тогда получается новая дробь, въ которой числитель и знаменатель будутъ числа взаимнопростыя.

Опредѣленіе. Дробь называется несократимой, когда ея числитель и знаменатель суть числа взаимнопростыя.

Точнѣе говоря, несократимой является не самая дробь, а данная ея форма; обыкновенно пользуются, однако, болѣе краткимъ выраженіемъ.

Теорема 43. Двѣ несократимыя дроби равны между собой только въ томъ случаѣ, когда ихъ числители и знаменатели порознь равны между собой.

Въ самомъ дѣлѣ, если дана несократимая дробь, напримѣръ, $\frac{3}{7}$, то можно показать, что всякая другая форма, въ которой можетъ быть изображена та же дробь, приводится путемъ сокращенія къ тому же несократимому виду, т. е. въ настоящемъ случаѣ къ $\frac{3}{7}$. Дѣйствительно, произведеніе несократимой дроби $\frac{3}{7}$ на цѣлое число (теорема 37) только въ томъ случаѣ будетъ также цѣлымъ числомъ, если цѣлое число, на которое мы помножили, будетъ кратнымъ знаменателя 7 (правило производства дѣйствія 23). Но если дробь $\frac{3}{7}$ изображена въ другомъ видѣ, то произведеніе $\frac{3}{7}$ на знаменателя должно быть цѣлымъ числомъ, и потому знаменатель долженъ быть кратнымъ 7. Но въ такомъ случаѣ, если мы хотимъ изобразить дробь $\frac{3}{7}$ въ другомъ видѣ, то новый числитель долженъ быть такимъ же кратнымъ 3-хъ, какъ знаменатель 7-ми; т. е. вторая дробь можетъ быть путемъ сокращенія снова приведена къ несократимому виду $\frac{3}{7}$.

Такимъ образомъ, каждой дроби всегда отвѣчаетъ одна несократимая дробь, которая представляетъ собой простѣйшую форму, въ какой только возможно изобразить эту дробь. Для того же, чтобы двѣ дроби были равны, необходимо и достаточно, чтобы онѣ были тождественны, когда мы ихъ приведемъ къ простѣйшему виду.

56. Одноименныя дроби. Опредѣленіе. Дроби называются *одноименными*, если онѣ имѣютъ одинаковыхъ знаменателей; дроби съ разными знаменателями называются разноименными.

Такъ какъ каждая дробь допускаетъ различныя изображенія, то оказывается всегда возможнымъ сдѣлать любыя двѣ или нѣсколько дробей одноименными, или, какъ говорятъ, привести ихъ къ общему знаменателю. Для этого приходится только сокращать данныя дроби и умножать числителя и знаменателя на одно и то же число.

Пусть даны дроби:

$$\frac{3}{7};\quad \frac{1}{2},\quad \frac{4}{5}.$$

Произведеніе ихъ знаменателей есть $7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$. Помножимъ члены данныхъ дробей соотвѣтственно на $70 : 7 = 10$, $70 : 2 = 35$, $70 : 5 = 14$; тогда получимъ:

$$\frac{30}{70},\quad \frac{35}{70},\quad \frac{56}{70}.$$

Легко убѣдиться, что здѣсь нельзя найти меньшаго общаго знаменателя. Но существуютъ бо́льшіе общіе знаменатели, а именно — всѣ числа, кратныя 70, и только эти кратныя.

Пусть теперь будутъ даны дроби:

$$\frac{5}{6},\quad \frac{7}{9},\quad \frac{4}{21}.$$

Если взять за общаго знаменателя опять произведеніе отдѣльныхъ знаменателей, т. е. 1134, то получимъ одноименные дроби:

$$\frac{945}{1134},\quad \frac{882}{1134},\quad \frac{216}{1134}.$$

Здѣсь, однако, 1134 не будетъ наименьшимъ знаменателемъ, отвѣчающимъ требованіямъ. Для этой цѣли годится уже знаменатель 126, т. е. общее наименьшее кратное отдѣльныхъ знаменателей 6, 9, 21. Пользуясь общ. наим. кратнымъ и умножая оба члена каждой дроби соотвѣтственно на $126 : 6$, $126 : 9$, $126 : 21$, мы представимъ данныя дроби въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{105}{126},\quad \frac{98}{126},\quad \frac{24}{126}.$$

Легко убѣдиться, что въ данномъ случаѣ не можетъ быть меньшаго общаго знаменателя, но могутъ быть большіе, а именно всѣ числа, кратныя 126, и только эти кратныя.

Пусть, наконецъ, будутъ даны дроби:

$$\frac{2}{6},\quad \frac{7}{35}.$$

Общее наименьшее кратное ихъ знаменателей будетъ 210, и дроби наши могутъ быть представлены въ новомъ видѣ такъ:

$$\frac{70}{210}, \quad \frac{42}{210}.$$

Но въ данномъ случаѣ уже при помощи знаменателя 15 можно было бы сдѣлать дроби одноименными. Это можно тотчасъ замѣтить, если только привести каждую изъ нихъ къ несократимому виду:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}$$

Итакъ, чтобы сдѣлать двѣ или нѣсколько дробей одноименными и чтобы при томъ сдѣлать это наиболѣе простымъ способомъ, нужно сперва путемъ сокращенія привести каждую изъ нихъ къ несократимому виду, а затѣмъ найти общее наименьшее кратное знаменателей этихъ дробей и при помощи умноженія числителя и знаменателя каждой изъ данныхъ дробей на надлежащаго множителя сдѣлать это кратное общимъ знаменателемъ.

Такимъ образомъ цѣль всегда достигается. Бываютъ, конечно, случаи, когда можно достигнуть той же цѣли быстрѣе; это бываетъ, если при сокращеніи какой-нибудь дроби приходится дѣлить на то самое число, на которое послѣ придется умножать.

Если, напримѣръ, нужно сдѣлать одноименными слѣдующія дроби:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{11}{12}, \quad \frac{6}{60},$$

то нѣтъ надобности приводить третью дробь къ несократимому виду $\frac{1}{10}$, такъ какъ случайно 60 и есть общій наименьшій знаменатель для этихъ трехъ дробей.

Опредѣленіе. Если мы будемъ разсматривать нѣсколько цѣлыхъ чиселъ, какъ знаменателей несократимыхъ дробей, то общее наименьшее кратное ихъ мы будемъ называть главнымъ знаменателемъ дробей или этихъ знаменателей.

Правило производства дѣйствія 26-ое. Чтобы сдѣлать одноименными, или привести къ общему знаменателю, нѣсколько несократимыхъ дробей, умножаютъ числителя и знаменателя каждой дроби на частное отъ дѣленія главнаго знаменателя на знаменателя соотвѣтствующей дроби.

Для нахожденія главнаго знаменателя и частныхъ отъ дѣленія его на отдѣльныхъ знаменателей, часто бываетъ удобно разложить сперва отдѣльныхъ знаменателей на ихъ первоначальныхъ сомножителей. Пусть, напримѣръ, даны знаменатели 4, 18, 9, 12; въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$4 = 2^2, \qquad 36:\ 4 = 3^2 = 9,$$
$$18 = 2 \cdot 3^2, \qquad 36:18 = \quad 2,$$
$$9 = 3^2 \qquad 36:\ 9 = 2^2 = 4,$$
$$12 = 2^2 \cdot 3, \qquad 36:12 = \quad 3;$$

общее наименьшее кратное $= 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Пользуясь разложеніемъ отдѣльныхъ знаменателей на ихъ первоначальныхъ сомножителей, мы находимъ частныя отъ дѣленія общаго наименьшаго кратнаго на различныхъ знаменателей. Преимущество этого разложенія въ данномъ случаѣ не очень значительно, но часто этимъ путемъ можно гораздо скорѣе достигнуть цѣли.

II. ДѢЙСТВІЯ НАДЪ ДРОБЯМИ.

57. Называть дроби числами оказывается цѣлесообразнымъ потому, что для нихъ дѣйствія сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе могутъ быть опредѣлены такимъ образомъ, что относящіяся къ этимъ дѣйствіямъ теоремы, которыя были нами доказаны въ предыдущихъ параграфахъ для цѣлыхъ чиселъ, останутся въ силѣ и для дробей.

Сложеніе. Для дробей сумма опредѣляется точно такъ же, какъ и для цѣлыхъ чиселъ. Сообразно этому, составить сумму нѣсколькихъ дробей значитъ найти такую дробь, которая отвѣчала бы соединенію величинъ, выражаемыхъ данными дробями. У меня есть, напримѣръ, 2 трети нѣкотораго яблока и 1 четверть того же яблока. Если мы соединимъ эти части, то мы получимъ опредѣленную часть массы яблока, и эту часть нужно выразить одной дробью.

При сложеніи дробей примѣняются слѣдующія правила:

Правило производства дѣйствія 27-ое. Чтобы сложить одноименныя дроби, нужно сумму ихъ числителей раздѣлить на общаго знаменателя.

Правило производства дѣйствія 28-ое. Чтобы сложить разноименныя дроби, нужно ихъ сначала сдѣлать одноименными, а затѣмъ примѣнить предыдущее правило.

Правило 27-ое вытекаетъ непосредственно изъ понятія о сложеніи. Если мы, напримѣръ, складываемъ 5 двѣнадцатыхъ, 6 двѣнадцатыхъ и 3 двѣнадцатыхъ одной и той же величины, то мы, очевидно, получимъ 14 двѣнадцатыхъ той же величины, такъ какъ всѣ двѣнадцатыя доли равны между собой. Что касается правила производства дѣйствія 28, то при приведеніи дробей къ общему знаменателю измѣняется только изображеніе каждой дроби, но не величина ея (теорема 42).

Примѣръ I. Пусть дано сложить $\frac{2}{15}$ и $\frac{7}{10}$. Обшее наименьшее кратное знаменателей 15 и 10 будетъ 30, частныя отъ дѣленія его на 15 и на 10 будутъ 2 и 3. Поэтому данныя дроби будутъ равны $\frac{4}{30}$ и $\frac{21}{30}$, а ихъ сумма будетъ равна $\frac{25}{30}$ или, по упрощеніи, $\frac{5}{6}$ Записываютъ это слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{2}{15}+\frac{7}{10}=\frac{4}{30}+\frac{21}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}.$$

Примѣръ II. Вычислить сумму:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{10}{9}+\frac{7}{12}.$$

Сдѣлавъ дроби одноименными (ср. стр. 90), получимъ сумму:

$$\frac{9}{36}+\frac{2}{36}+\frac{40}{36}+\frac{21}{36}=\frac{72}{36}=2.$$

Сумма данныхъ дробей будетъ, слѣдовательно, равна цѣлому числу 2.

Если нѣкоторыя слагаемыя суть цѣлыя числа, а другія суть дроби, то можно либо соединить отдѣльно цѣлыя числа и отдѣльно дроби, а затѣмъ сложить обѣ суммы, либо написать и цѣлыя числа въ видѣ дробей со знаменателями, равными главному знаменателю данныхъ дробей. Этотъ послѣдній пріемъ удобенъ только въ томъ случаѣ, когда данныя цѣлыя числа очень малы, а число ихъ невелико.

Примѣръ III. Выполнить слѣдующія сложенія:

$$45+\frac{3}{4}+17+50+\frac{5}{6}.$$

Здѣсь

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}=1+\frac{7}{12},$$

$$45+17+50+1=113.$$

Искомая сумма будетъ $113+\frac{7}{12}$ или $113\frac{7}{12}$.

Примѣръ IV. Выполнить слѣдующія сложенія:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+1+\frac{3}{4}.$$

Эта сумма равна:

$$\frac{8}{12}+\frac{10}{12}+\frac{12}{12}+\frac{9}{12}=\frac{39}{12}=\frac{13}{4}=3\tfrac{1}{4}.$$

Если дроби написаны въ видѣ смѣшанныхъ чиселъ, то нужно только вспомнить, что смѣшанное число есть сумма цѣлаго числа и правильной дроби (**54**).

Примѣръ V. Вычислить сумму:

$$2\tfrac{3}{5}+5\tfrac{1}{6}+7\tfrac{3}{8}.$$

Эта сумма равна:

$$2+\frac{3}{5}+5+\frac{1}{6}+7+\frac{3}{8}$$
$$=2+5+7+\frac{3}{5}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$
$$=14+\frac{137}{120}$$
$$=15\frac{17}{120}.$$

58. Вычитаніе. Опредѣленіе. Вычесть одну дробь (вычитаемое) изъ другой (уменьшаемаго) значитъ отъ величины, соотвѣтствующей уменьшаемому, отнять величину, соотвѣтствующую вычитаемому. Правило вычитанія вполнѣ соотвѣтствуетъ правилу сложенія.

Правило производства дѣйствія 29-ое. Чтобы найти разность двухъ одноименныхъ дробей, нужно раздѣлить разность числителей на общаго знаменателя. Чтобы найти разность двухъ разноименныхъ дробей, нужно сначала сдѣлать ихъ одноименными.

Примѣръ. Пусть требуется вычесть:

$$\frac{15}{29}-\frac{13}{27}.$$

Находимъ:

$$\frac{405}{783}-\frac{377}{783}=\frac{28}{783}.$$

Вычитаніе не всегда возможно, потому что отъ данной дроби можно отнимать только дроби, меньшія ея. Но если дроби разноименныя, то не всегда сразу видно, которая изъ двухъ дробей больше; нужно сперва привести обѣ дроби къ общему знаменателю, чтобы узнать, выполнимо ли вычитаніе.

59. Умноженіе. Умноженіе дроби на цѣлое число уже было объяснено (теорема 37). Правило производства дѣйствія въ этомъ случаѣ непосредственно вытекаетъ изъ того, что умноженіе есть сокращенное сложеніе (**14**). Такъ, напримѣръ:

$$\frac{4}{5}\cdot 2 . =\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{8}{5}.$$

Умноженіе цѣлаго числа на дробь, напротивъ того, не можетъ быть выведено изъ сложенія. Его опредѣляютъ, поэтому, требованіемъ, чтобы при составленіи произведенія двухъ чиселъ порядокъ ихъ не имѣлъ значенія. Тогда:

$$2\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\cdot 2=\frac{8}{5}.$$

Къ опредѣленію произведенія двухъ дробей насъ приводитъ слѣдующее разсужденіе.

Положимъ, что намъ дана задача: 1 метръ полотна стоитъ 3 рубля, сколько стоитъ 4 метра того же полотна? Какъ извѣстно, отвѣтъ будетъ $3 \cdot 4$ рубля. Сообразно этому произведеніе двухъ дробей $\frac{3}{4}$ на $\frac{5}{6}$ слѣдуетъ опредѣлить такъ, чтобы оно служило отвѣтомъ на слѣдующую задачу: 1 метръ полотна стоитъ $\frac{3}{4}$ рубля; сколько стоитъ $\frac{5}{6}$ метра того же полотна? Если 1 метръ полотна стоитъ $\frac{3}{4}$ рубля, то $\frac{1}{6}$ метра стоитъ шестую часть этого, слѣдовательно $\frac{3}{4\cdot 6}$ рубля или $\frac{3}{24}$ рубля. Если же $\frac{1}{6}$ метра стоитъ $\frac{3}{24}$ рубля, то $\frac{5}{6}$ метра будутъ стоить въ 5 разъ больше, т. е. $\frac{15}{24}$ рубля. Это и есть искомый результатъ и, слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{24}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}.$$

Отсюда слѣдуетъ правило:

Правило производства дѣйствія 30-ое. Для перемноженія двухъ дробей, нужно произведеніе ихъ числителей раздѣлить на произведеніе знаменателей.

Это правило примѣнимо также къ произведенію нѣсколькихъ дробей; если при этомъ среди нихъ есть цѣлыя числа, то нужно только смотрѣть на эти числа, какъ на дроби, знаменателями которыхъ служитъ единица.

Мы видимъ непосредственно, что величина произведенія нѣсколькихъ сомножителей не зависитъ отъ порядка сомножителей, потому что перестановка сомножителей сводится здѣсь къ тому, что отдѣльно въ числителѣ и знаменателѣ произведенія переставляются цѣлые сомножители. Имѣемъ, напримѣръ:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 5\cdot 2}{4\cdot 6\cdot 3},$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 5\cdot 3}{3\cdot 6\cdot 4}.$$

Если требуется составить произведеніе нѣсколькихъ дробей, то часто бываетъ удобно сдѣлать сокращенія до выполненія умноженій; для этой цѣли слѣдуетъ пользоваться замѣчаніями, сдѣланными въ п. 33. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ можно съ правой стороны сократить числителя и знаменателя на $2\cdot 3=6$; тогда останется въ числителѣ 5, а въ знаменателѣ 12.

Можно было бы легко доказать, что относительно умноженія суммъ и разностей дробей остаются въ силѣ тѣ же самыя теоремы, которыя были доказаны въ предыдущихъ главахъ для цѣлыхъ чиселъ. Мы, однако, не станемъ этого дѣлать, такъ какъ эти доказательства были бы длинны и утомительны, между тѣмъ какъ теоремы непосредственно очевидны; мы ограничимся тѣмъ, что приведемъ еще слѣдующую теорему:

Теорема 44. Для умноженія суммы на дробь, нужно только умножить слагаемыя на эту дробь и сложить полученныя произведенія.

Если требуется напримѣръ умножить $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ на $\frac{7}{8}$, то можно выполнить сложеніе и результатъ его $\frac{19}{12}$ умножить на $\frac{7}{8}$; по правилу производства дѣйствія 30-му произведеніе будетъ равно $\frac{19 \cdot 7}{12 \cdot 8}$. Но можно также составить сумму про..зведеній обоихъ слагаемыхъ на $\frac{7}{8}$; т. е. $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}$. Такъ какъ общимъ знаменателемъ будетъ 96, то получимъ теперь $\frac{63 + 70}{96} = \frac{133}{96} = \frac{19 \cdot 7}{12 \cdot 8}$.

60. Дѣленіе. Дѣленіе дроби на цѣлое число уже опредѣлено (теорема 38), а именно, какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Точно такъ же поступаютъ, если и дѣлимое и дѣлитель суть дроби. Частнымъ будетъ, слѣдовательно, дробь, произведеніе которой на дѣлителя равно дѣлимому. Чтобы выразить правило дѣленія дробей въ простой формѣ, дадимъ сначала слѣдующее опредѣленіе.

Опредѣленіе. Два числа называются *обратными*, если ихъ произведеніе равно единицѣ.

Если дана дробь, то легко написать сразу обратную ей дробь; именно, это будетъ дробь, числителемъ которой служитъ знаменатель даной дроби, а знаменателемъ — числитель ея. Такъ, напримѣръ, дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$ будетъ взаимно-обратными. Установивъ это, получаемъ правило:

Правило производства дѣйствія 31-ое. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на дробь, достаточно его умножить на обратную дробь.

Положимъ, что нужно раздѣлить $\frac{3}{4}$ на $\frac{5}{7}$. По опредѣленію дѣло сводится къ тому, чтобы найти дробь, которая, будучи умножена на $\frac{5}{7}$, даетъ въ произведеніи $\frac{3}{4}$. Я утверждаю, что эта дробь будетъ равна

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если мы эту дробь умножимъ на $\frac{5}{7}$, то получимъ:

$$\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 5}{4 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{3}{4},$$

такъ какъ результатъ можно будетъ сократить на $7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$.

ЗАДАЧИ КЪ VII-ой ГЛАВѢ.

66. Сложить слѣдующія дроби:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6},$$

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+\frac{8}{12},$$

$$\frac{15}{20}+\frac{150}{1000}+\frac{30}{99}.$$

67. Сложить слѣдующія смѣшанныя числа:

$$37\tfrac{4}{7}+18\tfrac{2}{3}+19\tfrac{20}{21},$$

$$45\tfrac{7}{12}+94\tfrac{23}{40}+\tfrac{14}{15}+7\tfrac{13}{120}+291\tfrac{41}{60},$$

$$\tfrac{7}{12}+21\tfrac{7}{9}+13\tfrac{17}{18}+5\tfrac{3}{10}+18\tfrac{4}{5}+60\tfrac{73}{180}.$$

68. Выполнить слѣдующія вычитанія:

$$3-\frac{5}{6},$$

$$\frac{4}{3}-\frac{8}{12},$$

$$\frac{5}{4}-\frac{150}{300},$$

$$\frac{12}{5}-\frac{9}{15}.$$

69. Выполнить слѣдующія вычитанія:

$$12\tfrac{5}{36}-9\tfrac{23}{24},$$

$$17\tfrac{11}{13}-16\tfrac{16}{17},$$

$$102\tfrac{70}{91}-102\tfrac{110}{141}.$$

70. Выполнить слѣдующія сложенія и вычитанія:

$$\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{6}-\tfrac{3}{4},$$

$$15\tfrac{7}{15}-9\tfrac{2}{9}+4\tfrac{5}{6}+3\tfrac{2}{8}-8\tfrac{17}{24},$$

$$512\tfrac{5}{14}-51\tfrac{4}{6}-236\tfrac{10}{21}+29\tfrac{27}{28}.$$

71. Выполнить слѣдующія умноженія:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5},$$

$$\frac{9}{12}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{12}.$$

72. Выполнить слѣдующія умноженія:

$$2\tfrac{3}{4}\cdot 5\tfrac{7}{8}\cdot 3\tfrac{8}{3},$$

$$6\tfrac{2}{3}\cdot 2\tfrac{3}{4}\cdot 3\tfrac{1}{2}.$$

73. Выполнить слѣдующія дѣленія:

$$\frac{12}{15} : \frac{2}{3},$$

$$\frac{15}{18} : \frac{3}{4}.$$

74. Выполнить слѣдующія дѣленія:

$$2\tfrac{3}{4} : 5\tfrac{2}{3},$$

$$5\tfrac{1}{2} : 3\tfrac{1}{4}.$$

75. У предпринимателя была опредѣленная сумма денегъ на постройку желѣзнодорожной линіи. Когда онъ истратилъ $\frac{3}{4}$ этой суммы, то только $\frac{2}{3}$ всей линіи были готовы. Какую часть желѣзнодорожной линіи сможетъ онъ построить на всѣ свои деньги?

76. Извѣстно, что $\frac{2}{3}$ гектара земли въ предмѣстьи стоятъ столько же, сколько стоятъ $\frac{4}{7}$ кв. метра въ центрѣ города. Сколько гектаровъ земли можно было бы купить въ предмѣстьи за стоимость участка въ 456 $\frac{1}{3}$ километровъ, находящагося въ центрѣ города.

77. Одинъ фонтанъ наполняетъ нѣкоторый водоемъ въ 8 часовъ, другой — въ 6 часовъ, а третій — въ 4 часа. Въ какое время наполняютъ водоемъ всѣ три фонтана, если они бьютъ одновременно?

78. Черезъ одинъ кранъ бассейнъ наполняется въ 5 часовъ, черезъ другой — въ $6\frac{3}{4}$; третій опорожняетъ его въ $4\frac{5}{6}$ часа. Во сколько времени наполнится бассейнъ, если открыть всѣ три крана сразу?

79. Одинъ господинъ обѣщалъ своему слугѣ 300 рублей въ годъ и платье. Послѣ 7 мѣсяцевъ онъ его разсчиталъ, заплативъ $167\frac{1}{2}$ рубля и платье. Во сколько цѣнитъ онъ платье?

80. Переднія колеса экипажа имѣютъ $2\frac{3}{4}$ метра въ окружности; заднія $3\frac{5}{6}$ метра. Каково наименьшее разстояніе, которое долженъ проѣхать экипажъ, чтобы всѣ колеса сдѣлали цѣлое число полныхъ оборотовъ? Каково будетъ число этихъ оборотовъ для переднихъ и для заднихъ колесъ?

81. Для исполненія нѣкоторой работы одному работнику потребуется 8 часовъ, а другому 12 часовъ. Сколько времени потребуется для исполненія этой работы, если оба работника будутъ работать вмѣстѣ?

82. Для исполненія нѣкоторой работы одному работнику потребуется $3\frac{3}{4}$ рабочихъ дня по 10-ти часовъ въ день, другому $3\frac{1}{2}$ дня по 12-ти часовъ, третьему 4 дня по 9 часовъ, четвертому $3\frac{5}{8}$ дней по 8 часовъ. Сколько часовъ потребуется всѣмъ четыремъ работникамъ для исполненія этой работы, если они станутъ работать всѣ вмѣстѣ?

83. Обѣ стрѣлки часовъ стоятъ въ полдень какъ разъ одна на другой. Въ которомъ часу онѣ окажутся въ первый разъ одна на продолженіи другой?

84. Одна крестьянка принесла яблоки на рынокъ. Первому покупателю, котораго она встрѣтила, она продала половину всего, что имѣла, и въ добавокъ еще $\frac{1}{2}$ яблока, второму лицу — половину остатка и еще

$\frac{1}{2}$ яблока, третьему опять половину остатка и еще $\frac{1}{2}$ яблока и т. д. Сколько яблокъ у нея было, если послѣ четвертой продажи у нея ничего не осталось?

85. Сколько яблокъ должно было бы быть у крестьянки (см. предыдущую задачу), чтобы у нея не осталось ничего только послѣ седьмой продажи?

86. Въ одной бутылкѣ находится 1 литръ вина. Первое лицо выливаетъ изъ нея $\frac{1}{10}$ часть и замѣняетъ вылитое вино водою, второе лицо опять выливаетъ $\frac{1}{10}$ и замѣняетъ вылитое вино водою, третье лицо дѣлаетъ тоже, четвертое тоже и т. д. Узнать сколько вина останется въ бутылкѣ послѣ 6-го раза?

87. Отецъ оставилъ каждому изъ своихъ четырехъ сыновей по $\frac{1}{4}$ своего имущества. Трое изъ нихъ имѣютъ соотвѣтственно 3, 4, 7 дѣтей, и они раздѣляютъ свое состоянiе поровну между своими дѣтьми. Четвертый сынъ, который не былъ женатъ, раздѣляетъ свою часть между своими 14 племянниками. Вычислить долю каждаго племянника, если извѣстно, что дѣти изъ семьи, въ которой было только трое, получаютъ вмѣстѣ на 1200 рублей меньше, чѣмъ дѣти той семьи, въ которой ихъ было четверо?

Глава VIII.

ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ, ПРИБЛИЖЕННЫЯ ЧАСТНЫЯ.

I. ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ.

61. Опредѣленіе. Дробь называется десятичной, если знаменатель ея представляетъ собой какую-нибудь степень числа 10. Для десятичныхъ дробей употребляется особый способъ письменнаго изображенія, который основывается на слѣдующемъ разсужденіи. Разсмотримъ дробь

$$\frac{124039}{10000}.$$

Мы знаемъ, что

$$124039 = 100000 + 20000 + 4000 + 30 + 9;$$

слѣдовательно можно написать:

$$\frac{124039}{10000} = \frac{100000}{10000} + \frac{20000}{10000} + \frac{4000}{10000} + \frac{30}{10000} + \frac{9}{10000}$$
$$= 10 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{1000} + \frac{9}{10000}.$$

Такимъ образомъ, каждая десятичная дробь можетъ быть представлена въ видѣ суммы цѣлыхъ чиселъ и элементарныхъ десятичныхъ дробей; числителями этихъ элементарныхъ десятичныхъ дробей служатъ цѣлыя числа, меньшія 10, а знаменатели суть степени числа 10. Разсматриваемую дробь $\frac{124039}{10000}$ пишутъ въ видѣ:

12,4039 (читать: 12 цѣлыхъ, четыре, нуль, три, девять).

Число 12, стоящее влѣво отъ запятой, называется цѣлымъ числомъ десятичной дроби, а цифры справа отъ запятой, называются десятичными знаками. Онѣ означаютъ соотвѣтственно десятыя доли, сотыя, тысячныя и т. д., т. е. десятичныя доли единицы, изъ которыхъ каждая послѣдующая представляетъ всегда десятую часть предыдущей. Десятыя доли, сотыя, тысячныя и т. д. называютъ также десятичными знаками перваго, втораго, третьяго и т. д. разрядовъ. Сумма ихъ называется десятичной частью разсматриваемой дроби $\frac{124039}{10000}$. Она равна правильной дроби 0,4039. Эта десятичная часть можетъ быть получена изъ данной дроби, если отдѣлить въ числителѣ справа налѣво столько цифръ, сколько въ знаменателѣ нулей слѣдуетъ за 1, и поставить 0, передъ этими цифрами.

Счисленіе десятичныхъ дробей основано на слѣдующихъ предложеніяхъ, составляющихъ обобщеніе основныхъ положеній письменнаго счисленія (глава I):

I. Цифра, стоящая непосредственно влѣво отъ запятой означаетъ единицы перваго разряда (2).

II. Каждая цифра, стоящая вправо отъ другой, выражаетъ единицы, въ 10 разъ меньшія, нежели предыдущая.

III. Если въ десятичной дроби нѣтъ единицъ опредѣленнаго разряда, то мѣсто ихъ отмѣчается нулемъ для того, чтобы другія цифры занимали надлежащія мѣста. Въ частности, мѣсто единицъ перваго разряда должно быть отмѣчено нулемъ, если нѣтъ единицъ этого разряда.

62. Сложеніе и вычитаніе. Вычисленія съ десятичными дробями производятся почти совершенно такъ же, какъ съ цѣлыми числами. Въ самомъ дѣлѣ, данныя десятичныя дроби можно сдѣлать одноименными, помножая числителя и знаменателя каждой дроби на надлежащую степень 10-ти. Это умноженіе производится такимъ образомъ, что мы приписываемъ справа за послѣднимъ десятичнымъ знакомъ столько нулей, сколько единицъ въ показателѣ соотвѣтствующей степени 10-ти.

Мы начнемъ со сложенія и вычитанія десятичныхъ дробей и дадимъ для этихъ дѣйствій слѣдующее правило:

Правило производства дѣйствія 32-ое. При сложеніи и вычитаніи десятичныхъ чиселъ поступаютъ такъ же, какъ и при цѣлыхъ числахъ. При этомъ нужно только имѣть въ виду слѣдующее: 1) когда мы подписываемъ числа одно подъ другимъ, запятыя также должны находиться одна подъ другой; 2) нужно приписывать или, по крайней мѣрѣ, представлять себѣ въ умѣ надлежащее количество нулей за десятичными цифрами для того, чтобы всѣ числа имѣли одинаковое количество десятичныхъ знаковъ, 3) въ результатѣ нужно ставить запятую подъ столбцомъ запятыхъ.

Пусть требуется, напримѣръ, найти сумму:

$$3{,}5 + 12 + 0{,}063 + 0{,}3571\,,$$

если напишемъ эти дроби въ видѣ обыкновенныхъ дробей, то онѣ примутъ видъ:

$$\frac{35}{10} + 12 + \frac{3}{1000} + \frac{3571}{10000}\,,$$

или, если приведемъ дроби къ одному знаменателю:

$$\frac{35000}{10000} + \frac{120000}{10000} + \frac{30}{10000} + \frac{3571}{10000}.$$

Если мы расположимъ вычисленіе такъ, какъ это указываетъ правило 32, то мы увидимъ, что сложеніе производится такимъ же образомъ, какъ сложеніе числителей въ дробяхъ, приведенныхъ къ одному знаменателю. Такъ, напримѣръ:

3,5	3,5000	35000
12	12,0000	120000
0,003	0,0030	30
0,3571	0,3571	3571
15,8601	15,8601	158601.

Мы расположили въ этомъ примѣрѣ сложеніе сначала такъ, такъ его выполняютъ обыкновенно. Во второмъ столбцѣ мы сдѣлали дроби одноименными, т. е. дѣйствительно приписали справа къ десятичнымъ знакамъ недостающіе нули, которые мы прежде лишь представляли себѣ приписанными. Наконецъ, въ третьемъ столбцѣ мы выписали сложеніе цѣлыхъ чиселъ, выражающихъ количества десятитысячныхъ долей въ предыдущихъ числахъ. Всѣ три столбца приводятъ къ тѣмъ же вычисленіямъ, и результатъ поэтому равенъ:

$$\frac{158601}{10000} = 15{,}8601.$$

Правило вычитанія можно доказать такимъ же образомъ.

63. Умноженіе. Правило производства дѣйствія 33-ье. Для перемноженія двухъ десятичныхъ дробей поступаютъ такъ, какъ будто бы это были цѣлыя числа, т. е. не принимаютъ вовсе въ рзсчетъ запятыхъ. Изъ полученнаго цѣлаго числа образуютъ десятичную дробь, отдѣляя запятой столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ содержатъ оба сомножителя вмѣстѣ.

Пусть дано найти произведеніе:

$$1{,}12 \cdot 0{,}025.$$

Если мы напишемъ эти числа въ видѣ обыкновенныхъ дробей, то получимъ:

$$1{,}12 \cdot 0{,}025 = \frac{112}{100} \cdot \frac{25}{1000} = \frac{112 \cdot 25}{100000} = \frac{2800}{100000}.$$
$$= 0{,}02800 = 0{,}028.$$

Вычисленіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 1{,}12 \\ 0{,}025 \\ \hline 560 \\ 224 \\ \hline 0{,}02800 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 112 \\ 25 \\ \hline 560 \\ 224 \\ \hline 2800. \end{array}$$

Оно совпадаетъ съ вычисленіемъ, которое производится при умноженіи числителей 112 и 25. Отдѣляя десятичные знаки, не слѣдуетъ забывать принять въ расчетъ и нули, которыми заканчивается произведеніе $112 \cdot 25 = 2800$; необходимо также слѣва приписать столько нулей чтобы одинъ изъ нихъ стоялъ влѣво отъ запятой.

Чтобы убѣдиться, что предыдущее доказательство обладаетъ необходимою общностью, слѣдуетъ принять во вниманіе, что число десятичныхъ знаковъ въ каждомъ изъ сомножителей соотвѣтственно равно количеству нулей, которые находятся въ знаменателяхъ 100 и 1000, когда сомножители представлены въ видѣ обыкновенныхъ дробей. Знаменатель написаннаго въ такомъ же видѣ произведенія будетъ 100000, т. е. произведеніе 100 на 1000. Онъ содержитъ, слѣдовательно (17), столько нулей, сколько ихъ въ числахъ 100 и 1000 вмѣстѣ. Поэтому число десятичныхъ знаковъ, которые нужно отдѣлить въ произведеніи, дѣйствительно равно суммѣ чиселъ, выражающихъ, сколько ихъ есть въ обоихъ сомножителяхъ.

Дѣленіе. Правила сложенія, вычитанія и умноженія показываютъ, что сумму, разность и произведеніе десятичныхъ дробей можно безъ затрудненій получить въ видѣ десятичныхъ дробей. Иначе обстоитъ дѣло съ частнымъ, вычисленіе котораго путемъ приведенія данныхъ десятичныхъ дробей къ одному знаменателю тотчасъ же можно свести къ дѣленію двухъ цѣлыхъ чиселъ. Но такъ какъ знаменатель получающейся въ результатѣ дроби, вообще говоря, не представляетъ собой степени 10 и даже не можетъ быть приведенъ къ такой степени, то дѣленіе десятичныхъ дробей существенно отличается отъ предыдущихъ дѣйствій. Выполненіе такихъ дѣленій на практикѣ стоитъ въ связи съ ученіемъ о приближенныхъ частныхъ, къ которому мы теперь переходимъ.

II. ПРИБЛИЖЕННЫЯ ЧАСТНЫЯ.

64. Опредѣленіе частнаго съ точностью до десятичнаго знака даннаго разряда. Пусть требуется раздѣлить 13 рублей между 3 лицами поровну. Если эти 13 рублей состоятъ изъ рублевыхъ монетъ, и размѣнять этихъ денегъ нельзя, то мы имѣемъ 13 недѣлимыхъ единицъ. Въ такомъ случаѣ придется ограничиться тѣмъ, чтобы дать каждому лицу по 4 рубля, при чемъ останется 1 рубль. Мы говорили раньше, что 4 есть частное съ недостаткомъ отъ дѣленія 13 на 3. Теперь мы его назовемъ точнѣе частнымъ съ недостаткомъ до единицы, чтобы указать ясно, что каждое лицо оказалось въ убыткѣ менѣе, чѣмъ на единицу, т. е. менѣе, чѣмъ на 1 рубль.

Допустимъ теперь, что мы могли бы размѣнять наши 13 рублей на гривенники. Въ такомъ случаѣ мы имѣли бы 130 такихъ монетъ и дали бы каждому лицу по 43 монеты; остается, однако, лишнимъ одинъ гривенникъ. Съ другой стороны, 43 есть частное съ недостаткомъ отъ дѣленія 130 на 3; а такъ какъ 43 гривенника составляютъ столько же, сколько 4 рубля и 3 гривенника, то мы скажемъ, что 4,3 рубля есть частное съ недостаткомъ до $\frac{1}{10}$ рубля отъ дѣленія 13 рублей на 3, ибо мы не доплачиваемъ каждому лицу менѣе, чѣмъ 10 копеекъ, т. е. менѣе, чѣмъ $\frac{1}{10}$ рубля.

Если бы мы могли размѣнять наши 13 рублей на копейки, то мы имѣли бы 1300 копеекъ и могли бы дать каждому лицу по 433 копейки. Каждое лицо получило бы по 4 рубля и 33 сотыхъ рубля. Поэтому 4,33 есть частное съ недостаткомъ до $\frac{1}{100}$ отъ дѣленія 13 на 3. Чтобы дать каждому лицу еще по одной копейкѣ, не хватитъ денегъ, такъ какъ произведеніе 4,33 рубля на 3 равно 12,99 рубля, а эта сумма меньше 13 рублей; произведеніе 4,34 рубля на 3 составитъ 13,02 рубля и, слѣдовательно, больше 13-ти рублей.

Изъ этого примѣра можно понять, въ чемъ заключается этотъ пріемъ, и уяснить себѣ, какимъ образомъ можно получать все болѣе и болѣе точныя частныя, т. е. частныя, которыя все болѣе и болѣе приближаются къ истинному частному; послѣднее въ данномъ случаѣ равно $\frac{13}{3}$ рубля, но его, однако, невозможно выплатить обычными монетами.

Чтобы выразить изложенное точнѣе, мы дадимъ слѣдующее опредѣленіе:

Опредѣленіе. При дѣленіи цѣлыхъ чиселъ или десятичныхъ дробей подъ частнымъ съ недостаткомъ до одной десятой, до одной сотой, до одной тысячной и т. д. подразумѣваютъ дробь, у которой знаменателемъ соотвѣтственно служитъ 10, 100, 1000 и т. д., а числителемъ — такое цѣлое число, произведеніе котораго на дѣлителя съ недостаткомъ наиближе подходитъ къ 10-крртному, 100-кратному, 1000-кратному дѣлимому и т. д. Такъ въ предыдущемъ примѣрѣ 4,33, или $\frac{433}{100}$ будетъ частнымъ съ недостаткомъ до одной сотой отъ дѣленія 13 на 3; потому что

$$433 \cdot 3 < 13 \cdot 100 < 434 \cdot 3.$$

Если такое произведеніе окажется въ точности равнымъ 10-кратному, 100-кратному, 1000-кратному дѣлимому, то полученная десятичная дробь будетъ точнымъ частнымъ.

65. Вычисленіе приближеннаго частнаго. Правило производства дѣйствія 34-ое. Чтобы найти частное двухъ десятичныхъ дробей съ точностью до десятичнаго знака даннаго разряда, отбрасываютъ запятую въ дѣлителѣ, а въ дѣлимомъ передвигаютъ ее на столько знаковъ вправо, сколько въ дѣлителѣ десятичныхъ знаковъ. Затѣмъ выполняютъ дѣленіе такъ, какъ будто дѣлимое и дѣлитель цѣлыя числа. Прежде, чѣмъ снести цифру дѣлимаго, стоящую непосредственно послѣ запятой, въ частномъ послѣ полученныхъ уже цифръ ставятъ запятую. Затѣмъ продолжаютъ дѣленіе, пока въ частномъ не получатся десятичные знаки требуемаго разряда. Чтобы получить въ частномъ достаточное количество цифръ, въ дѣлимомъ, въ случаѣ надобности, приписываютъ нули справа отъ десятичныхъ знаковъ.

Пусть будетъ дано, напримѣръ, раздѣлить 2,342 на 1,32 и вычислить частное съ точностью до 0,001. Прежде всего умножаемъ дѣлимое и дѣлителя на 100, а затѣмъ располагаемъ дѣленіе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l} 234,200 : 132 = 1,774 \\ \ \ 1022 \\ \ \ \ \ \ 980 \\ \ \ \ \ \ \ \ 560 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 32 \end{array}$$

Доказательство предыдущаго правила. Если будемъ смотрѣть на предыдущее дѣленіе, какъ на дѣленіе 234200 на 132, то увидимъ, что

$$234200 = 132 \cdot 1774 + 32;$$

слѣдовательно:

$$132 \cdot 1774 < 234200 < 132 \cdot 1775.$$

Раздѣлимъ обѣ части неравенства на 100000, получаемъ:

$$\frac{132 \cdot 1774}{100\,000} < \frac{234\,200}{100\,000} < \frac{132 \cdot 1775}{100\,000},$$

$$\frac{132}{100} \cdot \frac{1774}{1000} < \frac{234\,200}{100\,000} < \frac{132}{100} \cdot \frac{1775}{1000},$$

$$1,32 \cdot 1,774 < 2,342 < 1,32 \cdot 1,775;$$

и эти послѣднія неравенства выражаютъ, что число 1,774, найденное по выведенному правилу, будетъ частнымъ съ точностью до одной тысячной при дѣленіи 2,342 на 1,32. Если бы мы въ остаткѣ получили нуль, то первое изъ этихъ неравенствъ превратилось бы въ равенство, и частное было бы точнымъ.

66. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

Опредѣленіе. Обратить обыкновенную дробь въ десятичную, значитъ найти десятичную дробь, равную данной обыкновенной. Для нахожденія этой десятичной дроби, нужно раздѣлить числителя на знаменателя и продолжать дѣленіе достаточно далеко. Примѣры:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \begin{array}{l} 3{,}00 : 4 = 0{,}75 \\ \underline{\ 20} \\ \ \ 0 \end{array}$$

$$\frac{112}{25} = 4{,}48 \qquad \begin{array}{l} 112{,}00 : 25 = 4{,}48 \\ \underline{\ 120} \\ \underline{\ 200} \\ \quad 0 \end{array}$$

Если дѣленіе не выполняется, то обратить данную дробь въ десятичную невозможно. Если вычислять въ подобныхъ случаяхъ по правилу производства дѣйствія 34-му приближенныя частныя, то оказывается, что въ частномъ повторяются періодически тѣ же самыя цифры. Мы не имѣемъ, однако, возможности заняться здѣсь разсмотрѣніемъ періодическихъ десятичныхъ дробей и ограничимся нѣсколькими примѣрами:

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \qquad \begin{array}{l} 2{,}0000 : 3 = 0{,}666 \\ \underline{\ 20} \\ \underline{\quad 20} \\ \qquad 20 \end{array}$$

Какъ бы далеко мы ни продолжали дѣленіе, мы будемъ, очевидно, всегда получать въ остаткѣ 2; дѣлимымъ будетъ постоянно служить 20, такъ что въ частномъ придется постоянно писать цифру 6. Другой примѣръ:

$$\frac{30}{11} = 2{,}7272\ldots \qquad \begin{array}{l} 30{,}000 : 11 = 2{,}727 \\ \underline{\ 80} \\ \underline{\quad 30} \\ \underline{\qquad 80} \\ \qquad\ \ 3 \end{array}$$

Остатки поперемѣнно будутъ 8 и 3, частныя же поперемѣнно будутъ 7 и 2.

ЗАДАЧИ КЪ VIII-ой ГЛАВѢ.

88. Выполнить слѣдующія сложенія:

$$2{,}035 + 0{,}034 + 0{,}0002,$$
$$34{,}05 + 3{,}002 + 4{,}008,$$
$$45{,}342 + 84{,}356 + 0{,}001.$$

89. Выполнить слѣдующія вычитанія:

$$2{,}345 - 1{,}357,$$
$$2{,}3 - 0{,}0002,$$
$$4 - 0{,}34501,$$
$$8{,}34 - 0{,}003.$$

90. Выполнить слѣдующія сложенія и вычитанія:

$$0{,}748 - 0{,}2375 + 0{,}845 - 0{,}2576,$$
$$13{,}46 + 217{,}04 - 8{,}374,$$
$$27{,}27 - 13{,}025 + 270{,}49 - 9{,}5099.$$

91. Выполнить слѣдущія умноженія:

$$0{,}01 \cdot 0{,}01,$$
$$0{,}035 \cdot 0{,}0024,$$
$$300{,}2 \cdot 3{,}04.$$

92. Выполнить слѣдующія дѣленія съ точностью до десятыхъ долей:

$$3 : 42,$$
$$0{,}2 : 0{,}012,$$
$$0{,}003 : 0{,}0045,$$
$$6{,}0001 : 0{,}2.$$

93. Выполнить тѣ же самыя дѣленія до тысячныхъ долей.

94. Хотятъ раздѣлить милліонъ рублей между 6342 лицами. Сколько получитъ каждое лицо?

95. Золотой слитокъ имѣетъ четырехугольную форму. Онъ имѣетъ 2,50 сантиметра ширины и 3 см. длины. Какова его толщина, если онъ вѣситъ 12 килограммовъ, и если кубическій метръ золота вѣситъ 19 330 киллограмовъ?

96. Желѣзная проволка имѣетъ круговое сѣченіе, діаметръ котораго составляетъ 1,25 миллиметра. Вычислить вѣсъ такой проволоки, которая охватывала бы окружность земли по экватору; вѣсъ кубическаго сантиметра желѣза составляетъ 7,5 граммовъ. Взять для π приближенное значеніе $\frac{22}{7}$.

Глава IX.

КВАДРАТЪ; КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ.

67. Квадратомъ числа называется произведеніе этого числа на себя самого (21). Мы уже объяснили значеніе показателей; поэтому:

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16,$$

$$52^2 = 52 \cdot 52 = 2704,$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16},$$

$$(0{,}3)^2 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09.$$

Теорема 45. Квадратъ суммы двухъ чиселъ равенъ суммѣ квадратовъ этихъ чиселъ, увеличенной на ихъ удвоенное произведеніе.

Дѣйствительно, если мы разсмотримъ сумму $9 + 5$, то:

$$\begin{aligned}(9+5)^2 = (9+5)(9+5) &= (9+5)\cdot 9 + (9+5)\,5 \\ &= 9\cdot 9 + 5\cdot 9 + 9\cdot 5 + 5\cdot 5 \\ &= 9^2 + 5^2 + 2\cdot 9\cdot 5\,.\end{aligned}$$

Теорема 46. Квадратъ несократимой дроби есть несократимая дробь, которая получается отъ дѣленія квадрата числителя на квадратъ знаменателя.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дана несократимая дробь $\frac{12}{35}$. Числитель и знаменатель не содержатъ общихъ простыхъ сомножителей, потому что

$$\frac{12}{35} = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 7}.$$

Поэтому мы получаемъ:

$$\left(\frac{12}{35}\right)^2 = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 7} \cdot \frac{2\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 7} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 7\cdot 5\cdot 7}$$

Полученная въ результатѣ дробь также несократима, такъ какъ числитель и знаменатель ея разложены на простыхъ сомножителей и не имѣютъ ни одного общаго простого сомножителя; вмѣстѣ съ тѣмъ числитель равенъ $12 \cdot 12 = 12^2$, а знаменатель равенъ $35 \cdot 35 = 35^2$.

68. Квадратный корень. Опредѣленіе. Подъ квадратнымъ корнемъ изъ даннаго числа разумѣютъ число, квадратъ котораго равенъ данному числу.

Квадратный корень изъ даннаго числа обозначается знакомъ $\sqrt{}$ (знакъ корня). Подъ горизонтальной чертой подписывается данное число. Такъ, напримѣръ, квадратный корень изъ 160000 пишется слѣдующимъ образомъ: $\sqrt{160\,000}$ (читать: корень квадратный изъ 160000); имѣемъ:

$$\sqrt{160\,000} = 400\,.$$

Точно такъ же

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5;$$

въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$400^2 = 160000, \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, \qquad (0{,}5)^2 = 0{,}25.$$

Единственныя цѣлыя числа, представляющія собою полные квадраты, т. е. имѣющія точные квадратные корни, это квадраты цѣлыхъ чиселъ. Иначе говоря, если квадратный корень изъ цѣлаго числа не есть цѣлое же число, то этотъ корень не можетъ быть и дробью, знаменатель которой отличается отъ 1. Въ самомъ дѣлѣ, каждая дробь равна нѣкоторой несократимой дроби, а квадратъ несократимой дроби не можетъ быть сократимой дробью и, слѣдовательно, никакъ не можетъ быть цѣлымъ числомъ.

Мы приводимъ здѣсь наименьшія квадратныя числа, которыя лучше всего выучить наизусть:

Числа:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Квадраты:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100
Числа:	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20
Квадраты:	121,	144,	169,	196,	225,	256,	289,	324,	361,	400.

Подобно тому, какъ невозможность найти во всѣхъ случаяхъ точное частное привела къ опредѣленію приближеннаго частнаго, невозможность во всѣхъ случаяхъ найти дробь, кваратъ который равенъ данному числу, приводитъ къ опредѣленію приближеннаго квадратнаго корня.

69. Приближенный квадратный корень. Опредѣленіе. Квадратнымъ корнемъ изъ какого-нибудь числа съ точностью до единицы называется самое большое цѣлое число, квадратъ котораго меньше даннаго числа.

Въ этомъ смыслѣ 6 есть приближенный квадратный корень изъ 38, потому что $6^2 = 36$ меньше 38, между тѣмъ какъ $7^2 = 49$ больше 38. Точно такъ же приближеннымъ корнемъ изъ 100,3 будетъ 10, потому что $10^2 = 100$ меньше, чѣмъ 100,3, а $11^2 = 121$ больше, чѣмъ 100,3.

Опредѣленіе. Квадратнымъ корнемъ изъ какого-нибудь числа съ точностью до одной десятой, до одной сотой и т. д. называется самая большая дробь со знаменателемъ 10, 100 и т. д., квадратъ которой будетъ меньше даннаго числа.

Такъ, напримѣръ, квадратный корень изъ 2 съ точностью до одной сотой будетъ равенъ 1,41, потому что:

$$(1{,}41)^2 = 1{,}41 \cdot 1{,}41 = 1{,}9881,$$
$$(1{,}42)^2 = 1{,}42 \cdot 1{,}42 = 2{,}0164.$$

Такимъ образомъ 1,41 дѣйствительно будетъ самой большой дробью со знаменателемъ 100, квадратъ которой меньше 2.

Теорема 47. Чтобы найти квадратный корень изъ даннаго числа съ точностью до одной десятой, до одной сотой и т. д., нужно вычислить квадратный корень съ точностью до 1 съ недостаткомъ изъ произведенія этого числа на квадратъ 10, 100 и т. д. и раздѣлить полученный результатъ на 10, 100 и т. д.

Въ самомъ дѣлѣ, квадратный корень изъ 20000 съ точностью до единицы съ недостаткомъ равенъ 141, т. е. имѣютъ мѣсто неравенства:

$$(141)^2 < 20000 < (142)^2,$$

поэтому, дѣля обѣ части на $10000 = 100^2$, находимъ:

$$\frac{(141)^2}{(100)^2} < 2 < \frac{(142)^2}{(100)^2},$$

т. е. по опредѣленію квадрата:

$$\left(\frac{141}{100}\right)^2 < 2 < \left(\frac{142}{100}\right)^2,$$

$$(1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2;$$

чѣмъ и доказывается наша теорема. Если бы вмѣсто 20000 было взято квадратное число, то первое неравенство въ каждой строкѣ превратилось бы въ равенство.

Эта теорема даетъ возможность свести извлеченіе квадратнаго корня съ точностью до $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ и т д. къ извлеченію квадратнаго корня съ точностью до единицы.

70. Правило извлеченія квадратнаго корня. Правило производства дѣйствія 35-ое. Чтобы извлечь квадратный корень изъ десятичной дроби съ точностью до единицы, оставляютъ безъ вниманія десятичные знаки, если таковые имѣются и разсматриваютъ только цѣлую часть. Все число разбиваютъ, начиная справа, на группы или грани, по двѣ цифры въ грани; послѣдняя грань можетъ имѣть, однако, либо одну, либо двѣ цифры, Чтобы получить первую цифру квадратнаго корня нужно взять квадратный корень съ недостаткомъ изъ первой грани слѣва съ точностью до единицы. Эту цифру нужно возвысить въ квадратъ и вычесть результатъ изъ лѣвой грани. Съ этого момента дѣйствіе сводится къ ряду дѣленій.

Къ первому остатку присоединяютъ слѣдующую грань. Отъ полученнаго такимъ образомъ числа отдѣляютъ послѣднюю цифру и дѣлятъ остальное число на удвоенную найденную уже первую цифру квадратнаго корня. Получится либо вторая цифра квадратнаго корня или цифра слишкомъ большая. Для испытанія ея пишутъ частное справа отъ удвоенной найденной первой цифры корня и умножаютъ полученное такимъ образомъ число на испытуемую цифру. Если это произведеніе можно вычесть изъ числа, которое образуется изъ перваго остатка и второй грани, то испытуемая цифра годится, а разность будетъ вторымъ остаткомъ. Если же вычитаніе невозможно, то испытуемая цифра слишкомъ велика. Такимъ же образомъ испытываютъ слѣдующую меньшую цифру и такъ далѣе, пока испытуемая цифра не окажется пригодной: она составитъ тогда вторую цифру корня.

Далѣе, ко второму остатку сносятъ слѣдующую грань и поступаютъ при нахожденіи третьей цифры корня точно такъ же, какъ поступали при нахожденіи второй цифры. Цифру, подлежащую испытанію, опредѣляютъ слѣдующимъ образомъ: отъ числа, состоящаго изъ второго остатка и снесенной грани, отдѣляютъ справа одну цифру и дѣлятъ лѣвую часть на удвоенное число, которое составляется изъ найденныхъ уже цифръ корня. Эту цифру подвергаютъ испытанію; именно, ее пишутъ справа отъ удвоенной найденной уже части корня и на нее же умножаютъ составленное такимъ образомъ число; полученное произведеніе вычитаютъ изъ числа, которое составлено изъ второго остатка и третьей грани. Этотъ процессъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ исчерпаны всѣ грани. Послѣдній остатокъ и будетъ остаткомъ всего вычисленія.

Примѣръ. Требуется извлечь квадратный корень изъ 33571. Вычисленіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{3\;35\;71} \;=\; 183 \\
1 \\
\hline
23\;\;:2 = 8 \\
224\;\;\;= 28 \cdot 8 \\
\hline
\;\;11\;7\;\;:36 = 3 \\
\;\;10\;89\;\;\;\;= 363 \cdot 3 \\
\hline
\;\;\;\;\;\;82
\end{array}$$

Первая цифра корня будетъ 1, квадратъ ея также равенъ 1; слѣдовательно, первый остатокъ равенъ 2. Изъ правила слѣдуетъ, что вторая цифра будетъ частное отъ дѣленія 23 на 2. Это частное есть 11. Мы испытываемъ, однако, только 9, потому что 10 и 11 не могутъ быть пригодны. Для испытанія числа 9, умножаемъ въ умѣ 29 на 9 и находимъ, что произведенія нельзя отнять отъ 235. Тогда испытываемъ цифру 8, т. е. вычисляемъ произведеніе $28 \cdot 8 = 224$ и отнимаемъ его отъ

235. Вторымъ остаткомъ будетъ 11. Чтобы получить третью цифру, дѣлимъ 117 на 36, т. е. на удвоенное 18. Испытываемъ частное 3; оно оказывается пригоднымъ, такъ какъ $3 \cdot 363 = 1089$ можно отнять отъ 1171; остатокъ будетъ 82. Это и есть остатокъ отъ всего вычисленія. Корень будетъ 183. Читатель можетъ сдѣлать повѣрку и убѣдиться, что $33571 = 183 \cdot 183 + 82$.

Замѣчаніе. Остатокъ не можетъ быть больше, чѣмъ удвоенный квадратный корень; въ самомъ дѣлѣ, если бы онъ былъ больше, то квадратъ числа, которое получается увеличеніемъ на 1 числа, найденнаго для квадратнаго корня, былъ бы меньше даннаго числа или равенъ ему; слѣдовательно, найденное число не было бы квадратнымъ корнемъ изъ даннаго числа съ недостаткомъ и съ точностью до 1.

Правило производства дѣйствія 36-ое. Для извлеченія квадратнаго корня изъ цѣлаго числа или изъ десятичной дроби съ точностью до одной тысячной (съ недостаткомъ) переносятъ запятую на шесть знаковъ вправо, т. е. на число знаковъ вдвое большее, чѣмъ мы желаемъ получить. Чтобы возможно было перенести запятую такимъ образомъ, отприписываютъ, въ случаѣ надобности, нули. Затѣмъ отбрасываютъ цифры, которыя стоятъ вправо отъ перенесенной запятой, а изъ полученнаго такимъ образомъ цѣлаго числа извлекаютъ квадратный корень (съ недостаткомъ) съ точностью до 1. Полученное число даетъ число искомыхъ тысячныхъ долей. Поэтому въ результатѣ нужно отдѣлить справа три десятичныхъ знака.

Для извлеченія квадратнаго корня изъ обыкновенной дроби въ большей части случаевъ оказывается самымъ удобнымъ обратить ее сперва въ десятичную (**66**) и затѣмъ поступать по правиламъ производства дѣйствія 35 и 36. Правда, здѣсь является новое затрудненіе. А именно, такъ какъ десятичная дробь, взятая вмѣсто обыкновенной, вообще есть только приближенное частное, то, чтобы опредѣлить, какую степень точности имѣетъ найденное число, требуется особое изслѣдованіе. Мы не можемъ входить здѣсь въ болѣе точное изслѣдованіе этого вопроса; замѣтимъ только, что на практикѣ обыкновенно удостовѣряются непосредственнымъ испытаніемъ, имѣетъ ли результатъ требуемую степень точности.

ЗАДАЧИ КЪ IX-ой ГЛАВѢ.

97. Найти приближенный квадратный корень изъ 3500, 3275, 3850 съ точностью до 1.

98. Найти квадратный корень изъ 10 000 000 и 967 584 съ точностью до единицы.

99. Найти квадратные корни изъ чиселъ 2, 3, 10 съ точностью до одной тысячной.

100. Опредѣлить радіусъ круга, котораго площадь вмѣщаетъ 25 гектаровъ, принимая приближенное значеніе π въ 3,14.

101. Опредѣлить радіусъ круга, котораго площадь занимаетъ 3 кв. мм.

102. Опредѣлить діаметръ сѣченія мѣдной проволоки, если 1 куб. см. мѣди вѣситъ 8,95 гр., и если 1225 км. этой проволоки вѣсятъ 10 000 кг. Предполагается, что сѣченіе проволки имѣетъ форму круга.

103. Полъ квадратной комнаты выложенъ 784 квадратными каменными плитами. Сколько такихъ плитъ лежитъ вдоль каждой боковой стѣны?

104. Прямоугольное поле имѣетъ 712 м. длины и 518 м. ширины. Какъ велико разстояніе отъ одного его угла до противоположнаго угла?

105. Если хотятъ изслѣдовать, будетъ ли цѣлое число простымъ или нѣтъ, то по правилу 20 нужно лишь опредѣлить, дѣлится-ли оно на тѣ числа, которыхъ квадратъ меньше даннаго числа. До какого числа нужно въ виду этого дойти, если хотимъ изслѣдовать въ этомъ смыслѣ числа 8 543, 83 731, 997099?

106. По третьему закону **Кеплера** время обращенія планетъ вокругъ солнца, получается, если умножимъ квадратный корень частнаго отъ дѣленія кубовъ среднихъ разстояній планеты и земли отъ солнца на время обращенія земли вокругъ солнца, которое составляетъ 365,256 сутокъ. Если частное среднихъ разстояній Юпитера и земли равно 5,2028, то во сколько дней происходитъ обращеніе Юпитера вокругъ солнца?

107. Третій законъ **Кеплера** справедливъ также соотвѣтственно и для временъ обращенія спутниковъ вокругъ главной планеты. Опредѣлить отсюда время обращенія перваго спутника Марса, если извѣстно, что первый спутникъ отдаленъ отъ центра Марса на 6400 км., второй же на 23 400 км., и что второй спутникъ обходитъ вокругъ Марса въ 30,25 часа.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ АРИѲМЕТИКИ.

108. Говорятъ, что число написано по *восьмиричной* системѣ счисленія (число 8 называется тогда *основаніемъ* системы), если каждая цифра, стоящая влѣво отъ другой, выражаетъ единицы, большія въ 8 разъ. Чтобы написать какое нибудь число по этой системѣ, достаточно имѣть

слѣдующіе 8 знаковъ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Число 345 будетъ означать тогда $3 \cdot 8 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 5 = 192 + 32 + 5 = 229$; другими словами, оно будетъ равнозначнымъ числу 229, написанному по десятичной системѣ; требуется изобразить по десятичной системѣ слѣдующія числа, написанныя по другимъ системамъ счисленія; система, по которой они написаны, указана послѣ каждаго числа:

2 347 (основаніе 8),
3 458 (основаніе 9),
161 360 (основаніе 7),
301 402 (основаніе 5),
10 034 (основаніе 6),
3 010 321 (основаніе 4),
20 121 202 (основаніе 3),
101 010 121 (основаніе 3),
101 011 010 111 (основаніе 2),

109. Число 3645, написанное по десятичной системѣ, изобразить по восьмиричной системѣ.

110. Число 10 000 написано по системѣ, которой основаніемъ служитъ 9. Изобразить его по системѣ съ основаніемъ 7.

111. Если хотятъ примѣнить систему счисленія, основаніе которой больше 10, то нужно ввести новыя цифры. Такъ, напримѣръ, по системѣ съ основаніемъ 14, числа 10, 11, 12 13 должны быть изображены каждое особымъ письменнымъ знакомъ. Мы условимся, употреблять буквы азбуки въ обычномъ ихъ порядкѣ, т. е. a, b, c, d, ...; для обозначенія чиселъ 10, 11, 12, 13, 14 ....

Поэтому обозначеніе

$a\,b$ (при основаніи 12)

выражаетъ:

$10 \cdot 12 + 11 = 131$ (при основаніи 10).

Обозначеніе:

$d\,0\,b$ (при основаніи 14)

выражаетъ:

$13 \cdot 14 \cdot 14 + 11$ (при основаніи 10).

Написать слѣдующія числа по десятичной системѣ:

a 1306 (основаніе 12),
134 501 (основаніе 11),
$abcd$ (основаніе 20),
3481 (основаніе 15).

112. Возьмемъ промежутокъ времени въ 400 лѣтъ по грегоріанскому календарю; напримѣръ съ 1-го января 1601 г. по 31 декабря 2000 г. Требуется доказать, что количество дней въ этомъ промежуткѣ времени будетъ кратнымъ 7.

113. Сколько разъ 1-ое января падаетъ на воскресенье въ теченіе промежутка времени, даннаго въ предыдущей задачѣ? Сколько разъ придется 14 іюля на четвергъ?

114. Расположить въ порядкѣ величинъ всѣ несократимыя правильныя дроби, у которыхъ знаменатель меньше 10.

115. Опредѣлить вѣсъ воздуха, заключеннаго въ комнатѣ, имѣющей высоту въ 3,50 м., длину въ 6,75 м. и ширину въ 4,35 м. Вѣсъ 1 литра воздуха слѣдуетъ считать въ 1,293 гр.

116. Вычислить цѣну листа чистаго золота, который имѣетъ въ длину 2,20 см., въ ширину 1,35 см. и въ толщину 0,1 мм.; вѣсъ 1-го куб. см. золота составляетъ 19,33 гр., а 1 кг. золота стоитъ 1281,35 руб.

117. Переднія колеса локомотива имѣютъ 54 см. въ діаметрѣ, а двѣ пары заднихъ колесъ 1,04 м. Колеса вагона того поѣзда, къ которому прицѣпленъ локомотивъ, имѣютъ 86 см. въ діаметрѣ. Послѣ сколькихъ оборотовъ всѣ колеса опять придутъ въ то же самое положеніе?

118. Двѣ улицы пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Вся длина одной изъ нихъ представляетъ 500 м., ширина 20 м., ширина каждаго ея троттуара 3 м.; длина второй улицы составляетъ 600 м., ея ширина 12 м., а ширина каждаго ея троттуара 1,75 м. Обѣ улицы хотятъ вымостить деревянными кубиками, которыхъ толщина равна 12 см. Сколько будутъ вѣситъ всѣ эти деревянные кубики, если 1 куб. м. употребленнаго дерева вѣситъ 475 кг.?

119. Нѣкто хочетъ примѣнить искусственное удобреніе къ полю въ 34 м. длиною и 38 м. шириною; онъ расчитываетъ класть по 750 кг. на 1 гектаръ. Сколько центнеровъ удобренія потребуется для этого?

120. Географическая карта изготовлена въ масштабѣ 1 : 80000. Какова будетъ площадь участка въ гектарахъ, представленная на картѣ прямоугольникомъ, котораго стороны равны 3,5 мм., и 8,4 мм.?

121. Брошюра имѣетъ 124 страницы (считая и страницы обложки). Если кипа въ 125 такихъ брошюръ имѣетъ 1 м. въ высоту, то какую толщину имѣетъ въ нихъ бумага?

122. Содержаніе чистаго металла въ трехъ слиткахъ смѣси серебра и мѣди составляетъ соотвѣтственно: 0,900; 0,850; 0,675. Вѣсъ второго составляетъ $\frac{3}{4}$ вѣса перваго, а вѣсъ третьяго $\frac{5}{8}$ вѣса втораго. Вычислить ихъ вѣса, если во всѣхъ трехъ слиткахъ вмѣстѣ заключается 1 кг. чистаго серебра.

123. Содержаніе чистаго металла въ нѣмецкой серебряной монетѣ равно 0,9. Какъ велика стоимость серебра, которое заключается въ 100 маркахъ серебряныхъ денегъ, если 1 кг. чистаго серебра стоитъ 106 марокъ, и если монета въ 1 марку вѣситъ 5 граммовъ?

АЛГЕБРА.

Глава X.

УПОТРЕБЛЕНІЕ БУКВЪ; АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ ВЫРАЖЕНІЯ.

I. УПОТРЕБЛЕНІЕ БУКВЪ.

71. Въ ариѳметикѣ нерѣдко приходится имѣть дѣло съ задачами, которыя въ своемъ выраженіи отличаются только данными (числами). Напримѣръ, купцу, продающему сукно, всегда встрѣчаются задачи такого рода:

2 мт. сукна стоятъ 6 руб. Сколько стоитъ 3 мт. того же сукна?

4 мт. сукна стоятъ 16 руб. Сколько стоитъ 5 мт. того же сукна?

Для рѣшенія такихъ задачъ приходится постоянно прибѣгать къ однимъ и тѣмъ же разсужденіямъ, но они относятся къ различнымъ даннымъ; и только вслѣдствіе этого вычисленія и результаты бываютъ различны.

Если намъ данъ рядъ задачъ, которыя рѣшаются помощью однихъ и тѣхъ же разсужденій, то утомительно каждый разъ повторять ихъ на ново и желательно имѣть правило, которое показывало бы способъ рѣшенія всѣхъ этихъ задачъ.

Напримѣръ, обѣ вышеприведенныя задачи могутъ быть соединены въ одну общую задачу: Извѣстное число метровъ сукна стоитъ данное число рублей; что стоитъ то или другое число метровъ того же сукна? — Получается правило: Чтобы найти искомое число рублей, нужно раздѣлить данную стоимость на то число метровъ, цѣна которыхъ дана, и полученное частное умножить на то число метровъ, стоимость которыхъ мы ищемъ [1]).

---

1) Чтобы получить подобное правило, было бы достаточно, собственно говоря, рѣшить одну задачу соотвѣтствующаго типа. Начинающимъ нужно, однако, настоятельно рекомендовать рѣшать много подобныхъ задачъ, повторяя каждый разъ разсужденія, такъ какъ только такимъ образомъ они поймутъ правило и смогутъ примѣнять его впослѣдствіи безъ ошибокъ.

Въ двухъ поставленныхъ выше задачахъ мы по этому правилу находимъ:

$$\frac{6}{2} \cdot 3 \text{ руб.} = 9 \text{ руб.}$$

$$\frac{16}{4} \cdot 5 \text{ руб.} = 20 \text{ руб.}$$

Можетъ показаться страннымъ, что для рѣшенія такой простой задачи мы предлагаемъ столь сложное правило. Но, если бы мы выбрали не простую задачу, то правило стало бы еще болѣе сложнымъ; чтобы его понять и примѣнить, нужно было бы приложить, по меньшей мѣрѣ, столько труда, сколько понадобилось бы, если бы мы для каждаго примѣра повторяли всѣ разсужденія.

Одна изъ цѣлей алгебры и, собственно, главная цѣль низшей алгебры заключается именно въ томъ, чтобы дать намъ такой сокращенный языкъ, который дѣлаетъ возможнымъ легко устанавливать подобныя общія соображенія и просто выражать общія правила.

Для этой цѣли достаточно въ неопредѣленныхъ выраженіяхъ: извѣстное число метровъ, извѣстное число рублей и т. п. вмѣсто словъ „извѣстное число" поставить буквы, т. е. обозначать величины буквами, которыя въ каждой отдѣльной задачѣ замѣняются опредѣленными числами, или, какъ выражаются въ этомъ случаѣ, опредѣленными значеніями. Необходимо при этомъ замѣтить, что въ одной и той же задачѣ одна и та же буква всегда должна имѣть одно и то же значеніе.

Собственно говоря, можно въ выраженіи правила подставлять вмѣсто буквы любое число. Случаются, однако, задачи, въ которыхъ извѣстныя буквы обозначаютъ только цѣлыя числа; это имѣетъ, напримѣръ, мѣсто, если рѣчь идетъ о количествѣ индивидовъ или же если значеніе, приписываемое буквѣ, отвѣчаетъ на вопросъ: сколько разъ? Наконецъ, мы должны еще подчеркнуть, что, по нашему опредѣленію, буквы занимаютъ мѣсто отвлеченныхъ чиселъ; именованныя числа никогда не обозначаются буквами.

Возвратимся теперь къ приведенному выше примѣру и формулируемъ общую задачу такъ:

Если p метровъ сукна стоятъ a рублей, то сколько стоятъ q метровъ того же сукна?

Послѣ введенія буквъ легко вывести правило, которое мы выше дали безъ обоснованія. Если p метровъ стоятъ a руб., то 1 м. стоитъ a руб., дѣленное на p, или $\frac{a}{p}$ руб. а q метровъ стоятъ въ q разъ больше, т. е. $\frac{a}{p} \cdot q$ руб.; или, если опустить знакъ умноженія:

$$\frac{a}{p} q \text{ руб.}$$

Если же мы, какъ это принято, для краткости обозначимъ неизвѣстное количество рублей черезъ x, то рѣшеніе выразится слѣдующимъ равенствомъ:

$$x = \frac{a}{p} q.$$

Этотъ простой результатъ замѣняетъ предложенное выше сложное правило: дѣйствительно, съ помощью этого равенства можно для каждой задачи разсматриваемаго типа тотчасъ написать рѣшеніе.

72. Равенство $x = \frac{a}{p} q$ называется также алгебраической формулой; лѣвая часть его есть неизвѣстное число x, правая часть — алгебраическое выраженіе $\frac{a}{p} q$.

Опредѣленіе. *Алгебраическое выраженіе* есть соединеніе буквъ и чиселъ, связанныхъ между собою знаками дѣйствій. Такимъ образомъ, если мы вмѣсто каждой буквы поставимъ число, то по правиламъ производства дѣйствій можно будетъ выполнить требуемыя вычисленія. Конечный результатъ вычисленія называется *значеніемъ* выраженія или *числовой величиной выраженія* для данныхъ частныхъ значеній буквъ.

Напримѣръ, данное алгебраическое выраженіе $\frac{a}{p} q$ имѣетъ значеніе 9, если мы въ немъ вмѣсто a подставимъ 6, вмѣсто p — 2, вмѣсто q — 3, — короче, если положимъ:

$$a = 6,\ p = 2,\ q = 3.$$

То же выраженіе имѣетъ значеніе 20, если положимъ:

$$a = 16,\ p = 4,\ q = 5.$$

Отсюда видимъ, что значеніе алгебраическаго выраженія зависитъ отъ значеній, которыя мы даемъ входящимъ въ него буквамъ.

II. ВЫЧИСЛЕНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ВЫРАЖЕНІЙ.

73. Примѣръ, который мы привели выше, очень простъ. Въ случаѣ же болѣе сложныхъ алгебраическихъ выраженій легко могутъ возникнуть сомнѣнія относительно порядка, въ которомъ нужно производить отдѣльныя вычисленія, — поэтому необходимо въ этомъ отношеніи установить очень точныя правила.

Положимъ, напримѣръ, что нужно вычислить значеніе выраженія

$$a + b \cdot c,$$

въ которомъ должно быть:

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4.$$

Если бы мы не установили точнаго правила, то могло бы возникнуть сомнѣніе, нужно ли 3 умножить на 4 и произведеніе прибавить къ 2, что даетъ:

$$2 + 12 = 14$$

или же нужно сложить 2 съ 3 и сумму умножить на 4, что даетъ $5 \cdot 4 = 20$.

Поэтому мы устанавливаемъ, какъ это мы сдѣлали и въ ариѳметикѣ (**16**), что здѣсь слѣдуетъ избрать первый способъ вычисленія; въ случаяхъ же, когда нужно избрать второй, способъ мы и здѣсь будемъ пользоваться (**16**) слѣдующимъ обозначеніемъ:

$$(a + b)\, c;$$

это выраженіе отличается отъ предшествующаго тѣмъ, что въ немъ сумма $a + b$ взята въ скобки[1]).

---

1) Слово скобки употребляется въ двоякомъ смыслѣ. Во первыхъ подъ скобками подразумѣваютъ письменный знакъ ( ), [ ], { }. Во вторыхъ скобки обозначаютъ выраженіе, заключенное въ такой знакъ; во второмъ смыслѣ мы употребляли уже слово скобки въ п. 12.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующимъ правиламъ:

Правило 1-ое. Чтобы вычислить значеніе даннаго алгебраическаго выраженія, въ которомъ нѣтъ никакихъ скобокъ, производятъ сперва указанныя умноженія и дѣленія, а потомъ сложенія и вычитанія.

Правило 2-ое. Возведеніе въ степень и извлеченіе корня производится раньше основныхъ четырехъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

Правило 3-ье. Если требуется произвести вычисленія въ иномъ порядкѣ, чѣмъ предписано правилами 1-ымъ и 2-ымъ, то ставятъ скобки.

Иногда, впрочемъ, для большей ясности употребляютъ скобки и въ такихъ случаяхъ, гдѣ порядокъ вычисленій опредѣляется уже правилами 1-ымъ и 2-ымъ.

74. Положимъ, напримѣръ, что нужно найти численное значеніе выраженія:

$$\left(a+\frac{b}{c}d\right)\left(b+\frac{c^2}{d}\right)+(a+12)(b-3)+\frac{c}{d}(a+3),$$

при

$$a=1,\quad b=8,\quad c=4,\quad d=2.$$

Прежде всего вычисляемъ скобки, при чемъ для каждыхъ скобокъ можно примѣнить правило 1-ое. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\begin{aligned} 1+\frac{8}{4}\cdot 2 &= 1+4=5, \\ 8+\frac{4^2}{2} &= 8+8=16, \\ 1+12 &= 13, \\ 8-3 &= 5, \\ 1+3 &= 4. \end{aligned}$$

Потомъ точно такъ же по правилу 1-му производимъ остальныя вычисленія:

$$5\cdot 16+13\cdot 5+\frac{4}{2}\cdot 4=80+65+8=153.$$

Искомое значеніе есть 153.

Пусть еще дано будетъ выраженіе:

$$\left(a+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}\right)\left(a^2+\frac{b}{c}-d\right)+(a+1)\frac{b^2}{c^2d}.$$

Если мы припишемъ буквамъ a, b, c, d тѣ же значенія, что раньше, то значеніе выраженія будетъ:

$$\left(1+\frac{8}{4}+\frac{4}{2}\right)\left(1^2+\frac{8}{4}-2\right)+(1+1)\frac{8^2}{4^2\cdot 2}=5\cdot 1+2\cdot 2=9.$$

Предлагаемъ читателю произвести промежуточныя вычисленія, которыя мы опускаемъ.

75. Иногда разсматриваютъ сложныя выраженія, вродѣ слѣдующаго:

$$\frac{a+b}{c}d+\frac{a+c}{b+d}+\sqrt{a^2+21}.$$

Въ этомъ выраженіи нѣтъ скобокъ, зато оно содержитъ дроби, какъ, напримѣръ, $\frac{a+c}{b+d}$, въ которой числитель $a+c$ и знаменатель $b+d$ суть алгебраическія выраженія. Оно содержитъ также знакъ корня, который относится къ алгебраическому выраженію a^2+21. Въ виду этого мы даемъ еще слѣдующее правило въ дополненіе къ предыдущимъ:

Правило 4-ое. Черта въ обозначеніяхъ дроби и корня замѣняетъ скобки.

Такимъ образомъ, пишемъ $\frac{a+c}{b+d}$ вмѣсто $(a+c):(b+d)$ и $\sqrt{a+b+c}$ вмѣсто $\sqrt{\ }(a+b+c)$. Выраженіе, которое мы разсматривали раньше, должно быть поэтому вычислено такъ, какъ если бы оно было написано слѣдующимъ образомъ:

$$[(a+b):c]\cdot d+(a+c):(b+d)+\sqrt{\ }(a^2+21).$$

Если придадимъ буквамъ a, b, c, d слѣдующія значенія:

$$a=10,\quad b=6,\quad c=8,\quad d=3,$$

то скобки будутъ имѣть значеніе[1]):

$$\begin{aligned} 10+6&=16,\\ 10+8&=18,\\ 6+3&=9,\\ 100+21&=121, \end{aligned}$$

---

1) Для сокращенія часто говорятъ „значеніе скобокъ“ вмѣсто значеніе выраженія, „заключающагося въ скобкахъ“.

и само выраженіе имѣетъ значеніе:

$$\frac{16}{8}\cdot 3+\frac{18}{9}+\sqrt{121}=6+2+11=19.$$

Иногда бываетъ необходимо для того, чтобы установить желаемый порядокъ вычисленій, включать однѣ скобки въ другія, т. е. употреблять скобки различнаго вида, заключающіяся однѣ въ другихъ[1]). Здѣсь мы прежде всего вычислили внутреннія скобки, потомъ скобки, внутри которыхъ первыя помѣщаются, и т. д.

76. Чтобы привести примѣръ изъ повседневной жизни, разсмотримъ слѣдующую задачу:

Наслѣдство раздѣлено на равныя части между n наслѣдниками. Часть каждаго наслѣдника состоитъ изъ суммы въ a руб., увеличенной, во-первыхъ, на процентныя деньги съ этой суммы за годъ, считая по p процентовъ, и, во-вторыхъ, на b руб. Опредѣлить, сколько составляетъ все наслѣдство.

Сначала мы опредѣляемъ часть, причитающуюся одному наслѣднику. Сумма въ a руб., отданная во ростъ по p процентовъ, обратится по истеченіи года въ

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ руб.}$$

Если прибавимъ еще b руб., то часть, причитающаяся каждому наслѣднику, выразится въ рубляхъ слѣдующимъ образомъ:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)+b.$$

Чтобы опредѣлить, сколько составляетъ все наслѣдство, мы должны умножить эту часть на n (число наслѣдниковъ), такъ какъ всѣ части равны между собою. Чтобы записать послѣднее вычисленіе, употребимъ скобки другого вида, такъ что сумма всего наслѣдства въ рубляхъ выразится формулой:

---

1) Достаточно было бы употреблять скобки одного вида. Однако, тогда при болѣе сложныхъ выраженіяхъ нужно было бы очень много вниманія, чтобы правильно усмотрѣть, гдѣ каждыя скобки начинаются и гдѣ онѣ кончаются; поэтому удобнѣе употреблять скобки, отличающіяся формой или, по крайней мѣрѣ, величиной.

$$x = n\left[a\left(1+\frac{p}{100}\right)+b\right].$$

Если, напримѣръ, положимъ:

$$n = 4, \quad a = 100, \quad p = 3, \quad b = 500,$$

то получимъ:

$$x = 4\,(103 + 500) = 4 \cdot 603 = 2412.$$

Слѣдовательно, искомое наслѣдство состоитъ изъ 2412 рублей.

Для упражненія въ употребленіи различныхъ скобокъ разсмотримъ еще слѣдующее выраженіе:

$$\left[(a^2+b)(c-d)+\frac{a+b}{c+d}\right]\left[(a+b)(c^2-d^2)+\frac{a}{c}(b+d)\right]+ab.$$

Требуется положить въ немъ:

$$a = 4, \quad b = 8, \quad c = 2, \quad d = 1.$$

Получаемъ:

$$\left(24 \cdot 1 + \frac{12}{3}\right)\left(12 \cdot 3 + \frac{4}{2} \cdot 9\right) + 4 \cdot 8 = 28 \cdot 54 + 32 = 1544.$$

Предлагаемъ читателю произвести промежуточныя вычисленія, которыя мы опускаемъ.

III. ЗАМѢЧАНІЯ.

77. Впослѣдствіи, когда мы будемъ заниматься алгебраическими вычисленіями, мы покажемъ, какъ преобразовывать алгебраическія выраженія или же замѣнять одно алгебраическое выраженіе другимъ, тождественнымъ ему. Два алгебраическихъ выраженія называются тождественными, если они во всѣхъ случаяхъ принимаютъ одинаковыя значенія, т. е. независимо отъ того, какъ будутъ выбраны значенія буквъ входящихъ въ нихъ. Не трудно, напримѣръ, убѣдиться, что выраженія $(a+b)(a-b)$ и $a^2 - b^2$ тождественны.

78. Замѣчаніе относительно обозначеній въ алгебрѣ. Примѣненіе буквъ представляетъ собою, какъ мы видѣли, сокращенный языкъ. Мы говоримъ a руб. вмѣсто того, чтобы сказать: извѣстное число рублей или сумма, данная въ задачѣ. Какъ каждый языкъ, алгебраическій способъ обозначенія произволенъ, т. е. если мы хотимъ обозначить извѣстное число рублей, то можемъ выбрать для этого по желанію обозначенія a, или b, или A, или Z и т. д. Но этотъ способъ обозначенія долженъ быть выдержанъ, т. е. въ предѣлахъ одного и того же изслѣдованія каждая буква должна имѣть одинъ точно опредѣленный смыслъ; для обозначенія одной величины нельзя поэтому употреблять въ разныхъ мѣстахъ разныя буквы, — и обратно; каждой буквѣ должна соотвѣтствовать одна лишь величина. Это можно выразить еще иначе: разсматриваемыя величины и употребляемыя буквы должны соотвѣтствовать другъ другу взаимно однозначно.

Не слѣдуетъ, однако, думать, что является совершенно безразличнымъ избрать то или другое обозначеніе. Если при одномъ и томъ же изслѣдованіи мы вводимъ большое количество буквъ, то очень удобно выбирать ихъ не какъ попало, а слѣдовать правиламъ, освященнымъ обычаемъ, къ которымъ можно скоро привыкнуть. Одно изъ самыхъ старыхъ обыкновеній состоитъ въ томъ, что извѣстныя величины обозначаютъ первыми буквами алфавита a, b, c, d, e, f, g, h, а неизвѣстныя — послѣдними x, y, z, u, v, w.

Затѣмъ имѣются извѣстныя соединенія буквъ, болѣе привычныя для употребленія, чѣмъ другія; такъ, напримѣръ, алгебраисты охотно вводятъ одновременно группы буквъ, слѣдующихъ одна за другой въ алфавитномъ порядкѣ. Если, напримѣръ, имѣемъ три величины, сходныя по значенію, то обозначаемъ ихъ буквами a, b, c, — или же f, g, h, — или l, m, n, — или p, q, r, — или x, y, z, — или u, v, w. Напротивъ того, непринято обозначать ихъ, напримѣръ, буквами n, o, p или e, f, g. Кромѣ того, охотно пишутъ рядомъ буквы, которыя занимаютъ въ каждой изъ вышеприведенныхъ группъ одно и тоже мѣсто. Напримѣръ, если даны намъ три денежныя суммы, отданныя въ ростъ на одинъ годъ по различнымъ процентнымъ таксамъ, то обозначаемъ эти три суммы буквами a, b, c, процентныя таксы — буквами p, q, r, а наращенныя суммы — буквами x, y, z.

Такимъ образомъ, получаемъ:

$$x = a\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

$$y = b\left(1+\frac{q}{100}\right),$$
$$z = c\left(1+\frac{r}{100}\right).$$

Эти формулы легче написать безъ ошибокъ, чѣмъ, напримѣръ, слѣдующія:

$$z = a\left(1+\frac{q}{100}\right),$$
$$x = b\left(1+\frac{d}{100}\right),$$
$$y = r\left(1+\frac{c}{100}\right),$$

гдѣ три начальныя суммы обозначены буквами a, b, r, а процентныя таксы буквами q, d, c.

Иногда вмѣстѣ со строчными буквами употребляютъ одновременно одноименныя съ ними прописныя буквы A, B, C, X, Y, Z; однако, избѣгаютъ употреблять прописныя буквы при изслѣдованіяхъ, въ которыхъ возможно смѣшеніе съ геометрическими обозначеніями.

Часто употребляютъ и греческія буквы. Вводятъ ихъ чаще всего группами, которыя соотвѣтствуютъ опредѣленнымъ группамъ обычно употребляемыхъ буквъ. Такъ, α, β, γ, (альфа, бэта, гамма) соотвѣтствуютъ буквамъ a, b, c; λ, μ, ν (ламбда, ми, ни) соотвѣтствуютъ буквамъ l, m, n; ξ η, ζ, (кси, эта, дзета) соотвѣтствуютъ буквамъ x, y, z [1]). На первыхъ порахъ мы будемъ избѣгать употребленія этихъ буквъ, чтобы не доставить читателямъ новыхъ затрудненій; постепенно, однако же, мы будемъ вводить ихъ въ нѣкоторыя задачи, такъ какъ необходимо мало по малу привыкать къ ихъ употребленію. Во всякомъ случаѣ тому, кто хочетъ идти нѣсколько глубже въ изученіи математики, необходимо знать греческія буквы.

79. Приведенныя нами обозначенія недостаточны, если у насъ имѣется много величинъ одинаковаго рода: въ этомъ случаѣ мы скоро исчерпали бы алфавитъ и не могли бы удержать въ памяти обозначеній. Въ такихъ случаяхъ лучше обозначать величины одинаковаго рода одной и той же буквой, снабжен-

---

1) Принято считать η соотвѣтствующимъ y; единственнымъ основаніемъ для этого служитъ, повидимому, сходство въ изображеніи этихъ буквъ.

ной разными указателями, т. е. писать: a_0, a_1, a_2, a_3, . . ., что читается такъ: a съ указателемъ нуль, a съ указателемъ единица, a съ указателемъ два и т. д,, или короче: a нулевое, a первое, a второе и т. д. Употребляютъ также слѣдующія обозначенія: a', a'', a''', a^{IV}, . . . ; и тогда говорятъ: a съ чертой, a съ двумя чертами, a съ тремя чертами, a съ четырьмя чертами и т. д.

Предположимъ, что намъ нужно, вычислить, какую сумму получитъ къ концу года капиталистъ, который раздѣлилъ свое состояніе на шесть капиталовъ и отдалъ ихъ въ ростъ по шести различнымъ процентнымъ таксамъ. Обозначимъ капиталы черезъ a_1, a_2 a_3, a_4, a_5, a_6 и соотвѣтствующія процентныя таксы черезъ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6; тогда сумма, получаемая по истеченіи года, выражается формулой:

$$x = a_1\left(1+\frac{p_1}{100}\right)+a_2\left(1+\frac{p_2}{100}\right)+a_3\left(1+\frac{p_3}{100}\right)$$
$$+a_4\left(1+\frac{p_4}{100}\right)+a_5\left(1+\frac{p_5}{100}\right)+a_6\left(1+\frac{p_6}{100}\right).$$

Очевидно, что будетъ гораздо проще писать и употреблять формулу съ указанными обозначеніями, чѣмъ вводить двѣнадцать различныхъ, наудачу выбранныхъ буквъ.

ЗАДАЧИ[1]) КЪ X-ой ГЛАВѢ.

124. Вычислить значеніе x по формулѣ:

$$x = a(b-c)+b(c-a),$$

принимая:

$$a=10, \qquad b=25, \qquad c=15.$$

125. Вычислить значеніе того же выраженія, принимая:

$$a=3{,}14, \qquad b=6{,}171, \qquad c=4{,}303.$$

---

1) Во всѣхъ этихъ задачахъ нужно вычислять значенія данныхъ выраженій, не преобразовывая алгебраически этихъ выраженій, т. е. не выполняя алгебраическаго вычисленія; правила для послѣдняго рода вычисленій будутъ изложены и пояснены примѣрами лишь въ XIII-ой главѣ. При дѣленіи и извлеченіи корня нужно всегда вычислять результаты съ точностью до тысячныхъ долей.

126. Вычислить значенія y по формулѣ:

$$y = a + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} - b,$$

принимая:

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{5}{6}, \quad d = 0{,}34.$$

127. Вычислить значеніе z по формулѣ:

$$z = (a + b)\,[c + (a + b)\,(c + d)] + a\,(b - c)\,[c + (a - b)\,d],$$

принимая:

$$a = 4, \quad b = 3, \quad c = 2, \quad d = 1.$$

128. Вычислить значеніе z по предыдущей формулѣ, принимая:

$$a = \frac{3}{4} \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{7}{15}, \quad d = 0{,}345.$$

129. Даны четыре числа p_0, q_0, p_1, q_1. Полагаемъ:

$$\begin{aligned} p_2 &= 2p_1 + p_0, \\ q_2 &= 2q_1 + q_0, \\ p_3 &= 2p_2 + p_1, \\ q_3 &= 2q_2 + q_1, \\ p_4 &= 2p_3 + p_2, \\ q_4 &= 2q_3 + q_2 \end{aligned}$$

и т. д.

Вычислить значенія p_2, q_2, p_3, $q_3, \ldots, p_8$, q_8, принимая:

$$p_0 = 2, \qquad p_1 = 5,$$
$$q_0 = 1 \qquad q_1 = 3.$$

Вычислить съ точностью до тысячныхъ долей значенія дробей:

$$\frac{p_0}{q_0}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_8}{q_8}.$$

130. Если стороны треугольника имѣютъ длины a, b, c, см. и если положимъ:

$$2s = a + b + c,$$

то площадь F въ кв. см. выражается формулой:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

При этихъ условіяхъ требуется вычислить въ гектарахъ и арахъ площадь такого треугольнаго участка земли, котораго стороны имѣютъ протяженія 2 км., 1200 м. и 1,4 км.

131. Рѣшить ту же задачу, принимая:

$$a = 235{,}25, \qquad b = 402{,}75, \qquad c = 350{,}50.$$

132. Вычислить значеніе x по формулѣ:

$$x=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{a+b+c+d}},$$

принимая:

$$a=5,\quad b=8,\quad c=12,\quad d=8.$$

133. Рѣшить ту же задачу, принимая:

$$a=0{,}5,\quad b=0{,}08,\quad c=0{,}1,\quad d=\frac{4}{7}.$$

134. Вычислить значеніе y по формулѣ:

$$y=\sqrt{a+1-\sqrt{b-5}},$$

принимая:

$$a=11,\quad b=14.$$

135. Вычислить значеніе x по формулѣ:

$$x=a(b+c)+b(c+a)+c(a+b),$$

принимая:

$$a=2,\quad b=3,\quad c=4.$$

136. Вычислить значеніе того же выраженія, принимая:

$$a=2{,}135,\quad b=3{,}125,\quad c=4{,}005.$$

137. Вычислить значеніе того же выраженія, принимая:

$$a=\frac{3}{4},\quad b=\frac{5}{6},\quad c=\frac{12}{11}.$$

138. Вычислить значеніе того же выраженія, принимая:

$$a=\frac{2}{3},\quad b=0{,}0034,\quad c=3{,}2007.$$

139. Вычислить значеніе y по формулѣ:

$$y=a[b(a+c)+c^2]+(b-c)[ab+c(a-b)],$$

принимая:

$$a=4,\quad b=3,\quad c=2.$$

140. Вычислить значеніе z по формулѣ:

$$z=\frac{a(b+c)+c(a+b)}{a[b(a+c)+c(a-b)]+c}+(b+c)\frac{a}{b-c},$$

принимая:

$$a=6,\quad b=5,\quad c=3.$$

141. Вычислить значеніе x по формулѣ:

$$x=(a+b)\sqrt{c-3}+c\sqrt{a+12}+b\sqrt{a-c},$$

принимая:

$$a=13,\quad b=2,\quad c=12.$$

142. Вычислить значенія x, y, z по формуламъ:

$$x = A\sqrt{a^2+1} + (A+1)\sqrt{a^2+3},$$
$$y = B\sqrt{b^2+1} + (B+1)\sqrt{b^2+3},$$
$$z = C\sqrt{c^2+1} + (C+1)\sqrt{c^2+3},$$

принимая:

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4,$$
$$A = \tfrac{2}{3}, \quad B = 0{,}03, \quad C = \sqrt{2}.$$

143. Къ металлическому бруску длиной въ a м. припаянъ брусокъ другого металла длиной въ b м., такъ что вмѣстѣ образуется стержень длиной въ $(a+b)$ м. Если мы будемъ нагрѣвать стержень до t^0, то его длина x м. выразится формулой:

$$x = a(1+\alpha t) + b(1+\beta t),$$

гдѣ α и β суть числа, называемыя коэффиціентами линейнаго расширенія. Вычислить x, принимая:

$$a = 3, \quad b = 4, \quad t = 50,$$
$$\alpha = 0{,}00001, \quad \beta = 0{,}00002.$$

144. Рѣшить ту же задачу, принимая, что α и β имѣютъ тѣ же значенія, но:

$$a = 30, \quad b = 0{,}5, \quad t = 100.$$

145. Рѣшить ту же задачу, принимая:

$$a = 30, \quad b = 53, \quad t = 200.$$

146. Капиталистъ отдалъ въ ростъ три суммы a, b, c руб. по процентнымъ таксамъ p, q, r со ста; эти суммы лежали сотвѣтственно A, B, C лѣтъ. Наросшія процентныя деньги x руб. выражаются формулой:

$$x = \frac{apA + bqB + crC}{100}.$$

Вычислить эти процентныя деньги, принимая:

$$a = 10\,000, \quad p = 3, \quad A = 1;$$
$$b = 20\,000, \quad q = 3{,}5, \quad B = 2,$$
$$c = 30\,000, \quad r = 4, \quad C = 3.$$

147. Рѣшить ту же задачу, принимая, что суммы лежатъ соотвѣтственно: 18 мѣсяцевъ, 2 года 3 мѣсяца, 6 мѣсяцевъ, и полагая:

$$a = 1\,000, \quad p = 4$$
$$b = 2\,000, \quad q = 5,$$
$$c = 3\,000, \quad r = 3.$$

148. Рѣшить ту же задачу, принимая, что суммы лежатъ соотвѣтственно: 3 дня, 2 дня, 1 день, и полагая:

$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ милліонамъ}, & p &= 3\,, \\ b &= 3 \text{ милліонамъ} & q &= 2{,}5\,, \\ c &= 10 \text{ милліонамъ}, & r &= 2{,}25\,. \end{aligned}$$

Коммерческій годъ считается въ 360 дней.

149. Рѣшить ту же задачу, принимая, что суммы лежатъ соотвѣтственно 1 годъ, 6 мѣсяцевъ, 15 дней и полагая:

$$\begin{aligned} a &= 1345{,}50\,, & p &= 3\,, \\ b &= 1450{,}80\,, & q &= 3{,}5\,, \\ c &= 23460\ \ , & r &= 3{,}25\,. \end{aligned}$$

150. Сохранимъ для треугольника тѣ же обозначенія, что въ задачѣ 130. Кромѣ того, обозначимъ выраженные въ сантиметрахъ радіусъ описаннаго круга черезъ r, радіусы же вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ соотвѣтственно черезъ ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c. Тогда получимъ формулы:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

$$r = \frac{abc}{4F}\,, \qquad \rho = \frac{F}{s}\,, \qquad \rho_a = \frac{F}{s-a}\,, \qquad \rho_b = \frac{F}{s-b}\,, \qquad \rho_c = \frac{F}{s-c}\,.$$

Примѣнить эти формулы къ случаю:

$$a = 3\,, \qquad b = 4\,, \qquad c = 5$$

и провѣрить соотношеніе

$$4r = \rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho.$$

151. Примѣнить предыдущія формулы, принимая:

$$a = 15\,, \qquad b = 14\,, \qquad c = 13.$$

152. Примѣнить предыдущія формулы, принимая:

$$\begin{aligned} &1. \quad a = 3\,, \qquad b = 3\,, \qquad c = 4\,, \\ &2. \quad a = 3\,, \qquad b = 4\,, \qquad c = 4\,, \\ &3. \quad a = 4\,, \qquad b = 4 \qquad\ \ c = 4\,. \end{aligned}$$

153. Поле имѣетъ форму треугольника, стороны котораго имѣютъ длины 2 км., 3 км., 1200 м. Что стоитъ поле, если 1 гектаръ земли стоитъ 3000 м.

154. Даны числа u_0 и u_1. Требуется опредѣлить числа u_2, u_3, u_4, u_5, ... по формуламъ:

$$\begin{aligned} u_2 &= 2u_1 + u_0\,, \\ u_3 &= 2u_2 + u_1\,, \\ u_4 &= 2u_3 + u_2\,, \\ u_5 &= 2u_4 + u_3\,, \\ &\dots\dots\dots\,, \end{aligned}$$

законъ составленія которыхъ очевиденъ; онѣ могли бы быть замѣнены одной формулой:

$$u_{n+1}=2u_n+u_{n-1},$$

въ которой n придаютъ послѣдовательно значенія 1, 2, 3, 4,...

Требуется вычислить $u_2, u_3, \ldots, u_9, u_{10}$, принимая:

$$u_0=0, \qquad u_1=1.$$

155. Вычислить u_2, u_3, u_4, u_5, принимая:

$$u_{n+1}=3u_n-u_{n-1},$$
$$u_0=1, \qquad u_1=1.$$

156. Вычислить $u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$ по формуламъ:

$$u_3=u_2+u_1+u_0,$$
$$u_4=u_3+u_2+u_1,$$
$$u_5=u_4+u_3+u_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

т. е.

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n+u_{n-1},$$

и принимая:

$$u_0=0, \qquad u_1=6, \qquad u_2=1.$$

157. Числамъ $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{10}$, или, короче, числамъ u, приписываются значенія, вычисленныя въ задачѣ 154. Найти числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ (или числа x) по формуламъ:

$$x_0=\frac{1}{1+u_0},$$
$$x_1=\frac{1}{1+u_1},$$
$$x_2=\frac{1}{1+u_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Эти формулы можно также замѣнить одной общей формулой:

$$x_n=\frac{1}{1+u_n},$$

гдѣ указатель n получаетъ послѣдовательно значенія 0, 1, 2, 3, ...

158. Числа u имѣютъ значенія, вычисленныя въ задачѣ 156. Найти числа $y_0, y_1, \ldots, y_{10}$ по общей формулѣ:

$$y_n=\sqrt{u_n^2+1}.$$

159. Числа u имѣютъ значенія, вычисленныя въ задачѣ 156. Найти числа z_0, z_1, z_2, z_3 по общей формулѣ:

$$z_n=\frac{u_n+2}{u_n+1}.$$

160. Числа u и числа z имѣютъ тѣ же значенія, что въ предыдущей задачѣ. Найти числа s_0, s_1, s_2, s_3, по формулѣ:

$$s_n = \frac{z_n + u_{n+1} + u_{n+2}}{n+3}.$$

161. Числа u имѣютъ значенія, вычисленныя въ задачѣ 154. Вычислить числа t_0, t_1, ..., t_6 по формулѣ:

$$t_n = \frac{u_n + u_{n+1} + 3u_{n+2}}{u_{n+3} + u_{n+4}}.$$

Глава XI.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЯ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЯ ЧИСЛА.

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ЗАМѢЧАНІЯ.

80. Нѣкій житель Франкфурта н. М. часто путешествуетъ по линіи Гамбургъ — Ганноверъ — Франкфуртъ н. М. — Страсбургъ — Базель то по направленію къ Гамбургу, то по направленію къ Базелю. Онъ ежедневно обозначаетъ на чертежѣ разстояніе, на которомъ онъ находится отъ Гамбурга. Въ понедѣльникъ это разстояніе составляло 120 км., во вторникъ 80 км. Какое разстояніе проѣхалъ онъ отъ понедѣльника до вторника? На этотъ вопросъ нельзя сразу отвѣтить, потому что данныя недостаточны. Если, напримѣръ, оба города, въ которыхъ путешественникъ находился въ понедѣльникъ и во вторникъ, лежатъ по одну и ту же сторону отъ Франкфурта, (по направленію къ Гамбургу или къ Базелю — безразлично), то путешественнику нужно проѣхать только 40 км., чтобы прибыть изъ одного города въ другой. Если же одинъ изъ этихъ городовъ лежитъ между Франкфуртомъ и Гамбургомъ, а другой между Франкфуртомъ и Базелемъ, то ему придется проѣхать 200 км.

Какъ видно изъ этого примѣра, для того чтобы отвѣтить на вопросъ о мѣстонахожденіи путешественника, нужно знать не только разстояніе, отдѣляющее его отъ Франкфурта, но и направленіе, въ которомъ онъ удаляется отъ этого города, а именно отъ Франкфурта къ Базелю, или отъ Франкфурта къ Гамбургу. Чтобы различать эти два направленія, условимся первое называть положительнымъ, а второе отрицательнымъ. Если путешественникъ удалился отъ Франкурта на 80 км. въ положительномъ направленіи, то условились говорить, что разстояніе его отъ Франкфурта составляетъ $+80$ км. (читается: плюсъ 80 км.); если же онъ удалился на 80 км. въ отрицательномъ направленіи, то условились говорить, что разстояніе его отъ Франкфурта составляетъ — 80 км. (читается: минусъ 80 км.); + 80 есть положительное число, — 80 есть отрицательное число.

Положительныя и отрицательныя числа являются, такимъ образомъ, прежде всего сокращеннымъ способомъ обозначенія; будетъ короче сказать или написать: путешественникъ удалился отъ Франкфурта на + 80 км., чѣмъ: путешественникъ удалился отъ Франкфурта на 80 км. по направленію къ Базелю.

Это преимущество является, однако, далеко не единственнымъ при введеніи вышеназванныхъ чиселъ; къ тому же сказаннаго выше недостаточно, чтобы объяснить, отчего для различенія этихъ чиселъ мы употребляемъ знаки + и —, сложенія и вычитанія, а не какіе-нибудь другіе знаки.

Чтобы лучше понять обозначенія + 80 км. и — 80 км., разсмотримъ подробнѣе слѣдующую очень простую задачу.

81. Примемъ опять, что направленіе отъ Франкфурта къ Базелю выбрано нами за положительное, и потому направленіе отъ Франкфурта къ Гамбургу за отрицательное, и положимъ, что мы вычислили разстояніе путешественника отъ Гамбурга, считая разстояніе между Франкфуртомъ и Гамбургомъ равнымъ 548 км. Если путешественникъ удалился отъ Франкфурта на + 80 км., т. е. на 80 км. по направленію къ Базелю, то разстояніе его отъ Гамбурга будетъ:

$$548 \text{ км.} + 80 \text{ км.} = 628 \text{ км.}$$

Если, обратно, разстояніе его отъ Франкфурта есть — 80 км., т. е. если онъ удалился по направленію къ Гамбургу на 80 км., то теперь его разстояніе отъ Гамбурга составитъ только:

$$548 \text{ км.} - 80 \text{ км.} = 468 \text{ км.}$$

Отсюда видно, что въ обоихъ случаяхъ разстояніе путешественника отъ Гамбурга получается такимъ образомъ, что къ разстоянію 548 км. отъ Гамбурга до Франкфурта приписываемъ разстояніе путешественника отъ Франкфурта съ соотвѣтствующимъ знакомъ и выполняемъ указанное этимъ знакомъ + или — вычисленіе.

Итакъ, если мы говоримъ, что разстояніе путешественника отъ Франкфурта есть $+$ 80 км., то это, другими словами, значитъ, что разстояніе его отъ Франкфурта на 80 км. больше, чѣмъ разстояніе между Гамбургомъ и Франкфуртомъ; если же мы говоримъ, что разстояніе его отъ Франкфурта составляетъ — 80 км., то это значитъ, что разстояніе его отъ Гамбурга на 80 км. меньше чѣмъ разстояніе между Гамбургомъ и Франкфуртомъ. Наше сокращенное обозначеніе, такимъ образомъ, вполнѣ оправдывается.

82. Теперь дадимъ примѣръ другого рода.

Иванъ, Петръ и Павелъ родились всѣ трое въ январѣ 1900 года. Между днемъ рожденія Ивана и днемъ рожденія Петра (будемъ говорить короче: между Иваномъ и Петромъ) имѣется промежутокъ въ 4 дня, между Иваномъ и Павломъ — въ 12 дней. Сколько дней между Петромъ и Павломъ?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ нужно знать, родились ли Петръ и Павелъ раньше Ивана или позже. Если они родились оба раньше или оба позже, то дни ихъ рожденія отдѣлены одинъ отъ другого $12 - 4 = 8$ днями. Если же одинъ изъ нихъ родился раньше Ивана, а другой позже него, то дни ихъ рожденія отдѣлены одинъ отъ другого $12 + 4 = 16$ днями.

Итакъ, чтобы задача стала опредѣленной, недостаточно знать промежутки времени, отдѣляющіе дни рожденія Петра и Павла отъ дня рожденія Ивана; столь же необходимо знать, были ли эти дни рожденія раньше или позже дня рожденія Ивана. Если Петръ родился 12-ью днями послѣ Ивана, то говорятъ, что между Иваномъ и Петромъ $+$ 12 дней. Если же Павелъ родился 4-мя днями раньше Ивана, то говорятъ что между Иваномъ и Павломъ — 4 дня.

Такимъ образомъ, если Иванъ родился 15-го января, то Петръ родился $(15 + 12)$, т. е. 27-го января, а Павелъ $(15 - 4)$, т. е. 11-го января. Отсюда между Петромъ и Павломъ 16 дней.

83. Разсмотримъ еще одинъ примѣръ.

У насъ зима. Вчера въ полдень термометръ показывалъ 2^0; сегодня показываетъ 3^0. Теплѣе ли сегодня, чѣмъ вчера? Чтобы узнать это, мы должны прежде всего освѣдомиться, стоялъ ли термометръ вчера и сегодня выше или ниже точки замерзанія воды или, какъ говорятъ, выше или ниже нуля. Если вчера онъ показывалъ 2° выше нуля, а сегодня 3° ниже нуля, то температура упала на 5°; напротивъ того, она повысилась на одинъ градусъ, если вчера было 2° тепла, а сегодня 3° тепла.

Если термометръ показываетъ 2° выше нуля, то температура выше температуры замерзающей воды; если термометръ показываетъ 3° ниже нуля, то она ниже температуры замерзанія воды. Чтобы получить выраженіе, обнимающее оба случая, будетъ цѣлесообразно въ первомъ случаѣ говорить, что температура есть $+2^\circ$, во второмъ же -3°.

II. СЛОЖЕНІЕ И ВЫЧИТАНІЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХЪ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

84. Мы видѣли уже въ главѣ VII-ой, что полезно называть дроби также числами, потому что, во-первыхъ, цѣлыя числа содержатся среди дробей, а, во-вторыхъ, четыре дѣйствія (сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе) надъ дробями опредѣляются такъ, что теоремы, доказанныя для цѣлыхъ чиселъ въ главахъ II-ой, III-ьей и IV-ой либо остаются безъ измѣненія, либо же еще упрощаются; а именно, въ то время, какъ въ области цѣлыхъ чиселъ дѣленіе не всегда выполнимо, въ области дробей оно оказывается всегда возможнымъ, если только дѣлитель отличенъ отъ нуля.

Задачи изъ повседневной жизни подали поводъ къ тому, чтобы еще больше расширить понятіе о числѣ, а именно — ввести положительныя и отрицательныя, или такъ называемыя алгебраическія числа[1]). Покажемъ, что и для этихъ чиселъ можно такъ опредѣлить четыре дѣйствія, что вышеупомянутыя теоремы либо остаются безъ измѣненія, либо принимаютъ даже болѣе простую форму. Напримѣръ, прежде не всегда возможно было выполнить вычитаніе одного числа изъ другого, — теперь же такую задачу всегда можно рѣшить, потому что разность двухъ алгебраическихъ чиселъ можно (п. 90) разсматривать

[1]) Въ высшей математикѣ понятіе о числѣ подверглось еще большему расширенію; тамъ говорятъ объ алгебраическихъ числахъ еще въ болѣе широкомъ смыслѣ слова, чѣмъ здѣсь.

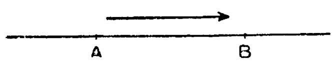
также, какъ сумму двухъ алгебраическихъ чиселъ. Такимъ образомъ мы приходимъ къ такому понятію объ алгебраической суммѣ, которое заключаетъ въ себѣ, какъ частные случаи, сумму и разность въ первоначальномъ смыслѣ этихъ словъ.

Начнемъ со сложенія и вычитанія.

85. Прямолинейные отрѣзки. Прежде всего разсмотримъ примѣръ, приведенный нами уже раньше, — именно, примѣръ, въ которомъ положительныя и отрицательныя числа служатъ для того, чтобы измѣрять длины, отсчитываемыя въ противоположныхъ направленіяхъ.

Чтобы взять самый простой примѣръ, вообразимъ прямую линію, выберемъ на ней направленіе движенія, которое мы назовемъ положительнымъ направленіемъ и обозначимъ стрѣлкой; направленіе, противоположное положительному направленію, назовемъ направленіемъ отрицательнымъ. Такая прямая называется осью съ опредѣленнымъ направленіемъ или, короче, осью.

Вообразимъ себѣ путешественника, который проходитъ по оси равными шагами, при чемъ идетъ то впередъ, то назадъ, но смотритъ всегда въ положительномъ направленіи. Чтобы придти изъ A въ B (фиг. 1-ая), путешественникъ идетъ впередъ; чтобы изъ B придти въ A, онъ долженъ идти назадъ. Такъ какъ путешественникъ дѣлаетъ одинаковые шаги, то онъ можетъ измѣрять разстояніе отсчитываніемъ шаговъ. Мы будемъ разсматривать число шаговъ, пройденныхъ имъ впередъ, какъ положительное, а число шаговъ, пройденныхъ имъ обратно, какъ отрицательное. Если ему понадобится сдѣлать, напримѣръ, 50 шаговъ, чтобы пройти растояніе отъ A до B, то говорятъ, что отъ A до B $+50$ шаговъ, а отъ B до A -50 шаговъ.



Фиг. 1.

Подъ прямолинейнымъ отрѣзкомъ мы подразумѣваемъ часть оси, обращая притомъ вниманіе на направленіе, въ которомъ эта часть пробѣгается. Если напримѣръ, путешественникъ идетъ изъ A въ B, то говорятъ, что онъ проходитъ отрѣзокъ $\overline{AB}$; если же онъ направляется изъ B въ A, то говорятъ, что онъ проходитъ отрѣзокъ $\overline{BA}$. Такимъ образомъ $\overline{AB}$ обозначаетъ не то же самое, что $\overline{BA}$, потому что вѣдь не одно и то же — отправляюсь ли я изъ Берлина въ Потсдамъ или же изъ Потсдама въ Берлинъ. Хотя въ обоихъ случаяхъ я проѣзжаю одно и то же разстояніе, которое сможетъ быть обозначено, равнымъ образомъ, черезъ AB и черезъ BA; но ѣду я не въ одномъ и томъ же направленіи.

Если нашъ путешественникъ дѣлаетъ $+50$ шаговъ, чтобы пройти отрѣзокъ $\overline{AB}$, то пишемъ:

$$\overline{AB} = +50.$$

Въ противномъ случаѣ нужно писать:

$$\overline{BA} = -50,$$

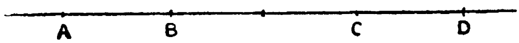
потому что слѣдуетъ сдѣлать — 50 шаговъ, чтобы пройти отрѣзокъ $\overline{BA}$, т. е. нужно сдѣлать 50 шаговъ назадъ, чтобы изъ B придти въ A.

Числа $+50$ и -50 называются алгебраическими числами, измѣряющими отрѣзки, или же алгебраическими значеніями отрѣзковъ $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$. При этомъ за единицу длины принимаемъ шагъ пѣшехода. Само собой разумѣется, что можно было избрать всякую другую единицу. Существенно лишь то, чтобы точно опредѣлить, какую единицу мы избираемъ, и сохранить ту же единицу въ теченіе одного и того же изслѣдованія.

Алгебраическое число, измѣряющее данный отрѣзокъ, зависитъ не только отъ избранной единицы длины, но и отъ направленія, которое мы на данной оси приняли за положительное; если мы измѣнимъ направленіе стрѣлки, оставляя фигуру въ остальномъ безъ перемѣны, то теперь число, измѣряющее отрѣзокъ $\overline{AB}$, будетъ -50, а число, измѣряющее отрѣзокъ $\overline{BA}$, будетъ $+50$. Итакъ, съ положительнымъ направленіемъ дѣло обстоитъ точно такъ же, какъ съ единицей длины; въ началѣ изслѣдованія можно его избрать произвольно, но въ теченіе изслѣдованія нельзя его измѣнять. Число 50 называется абсолютнымъ значеніемъ чиселъ $+50$ и -50; оно опредѣляетъ общую длину отрѣзковъ AB и BA или, говоря иначе, геометрическое разстояніе $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$. Вообще подъ абсолютнымъ значеніемъ положительнаго и отрицательнаго числа разумѣютъ то число, которое получится, если отбросить знакъ.

86. Два отрѣзка, лежащіе на одной и той же оси, называются равными, если они измѣряются однимъ и тѣмъ же алгебраическомъ числомъ; они должны, слѣдовательно, имѣть одинаковыя длины и одно и то же направленіе.

Отрѣзки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны между собой (фиг. 2-ая); отрѣзокъ $\overline{AB}$, однако, не равенъ отрѣзку $\overline{DC}$; напротивъ того, этотъ отрѣзокъ $\overline{DC}$ равенъ отрѣзку $\overline{BA}$.



Фиг. 2.

Отрѣзки $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ называются противоположными; говорятъ также, что $\overline{DC}$ и $\overline{AB}$ противоположны другъ другу, такъ какъ $\overline{DC}$ равно $\overline{BA}$.

Алгебраическія числа, измѣряющія два противоположныхъ отрѣзка, суть такія два числа, которыя имѣютъ то же самое абсолютное значеніе и противоположные знаки; иногда говорятъ короче, но не точно, что они равны и противоположны по знаку. Подобно отрѣзкамъ алгебраическія числа, измѣряющія ихъ, называются также противоположными.

Положимъ, что нашъ путешественникъ дѣлаетъ 5 шаговъ впередъ, а потомъ 2 шага назадъ. Онъ проходитъ сначала (фигура 3-ья) отрѣзокъ $\overline{AB} = +5$, а потомъ отрѣзокъ $\overline{BC} = -2$.

Фиг. 3.

Очевидно, что онъ пришелъ бы въ ту же точку C, если бы онъ попросту сдѣлалъ 3 шага впередъ, т. е. если бы онъ прошелъ отрѣзокъ $\overline{AC} = +3$.

Такимъ образомъ, выходитъ одно и то же, пройду ли я послѣдовательно отрѣзки $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, или только отрѣзокъ $\overline{AC}$. Поэтому мы говоримъ, что отрѣзокъ $\overline{AC}$ есть сумма отрѣзковъ $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ и пишемъ:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Отсюда видно, какая разница между понятіемъ отрѣзокъ и понятіемъ длина. Длина AB составляетъ 5 шаговъ, длина BC

— 2 шага; сумма ихъ равна 7 шагамъ; въ самомъ дѣлѣ, путешественникъ, проходящій послѣдовательно обѣ эти длины, дѣлаетъ въ общемъ 7 шаговъ, а не 3. Но если онъ дѣлаетъ сначала 5 шаговъ впередъ а потомъ 2 шага назадъ, то онъ приходитъ въ ту же точку, какъ если бы онъ сдѣлалъ только 3 шага впередъ; а когда говорятъ объ отрѣзкахъ, то имѣютъ въ виду только эту конечную точку. Насъ не занимаетъ также вопросъ объ утомленіи путешественника, который могъ сдѣлать даже 1003 шага впередъ и 1000 шаговъ назадъ; мы интересуемся исключительно тѣмъ, въ какую точку онъ придетъ.

Алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{AC}$, именно $+3$, называется суммой алгебраическихъ значеній отрѣзковъ $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, т. е. суммой чиселъ $+5$ и -2. Мы можемъ поэтому написать:

$$(+5) + (-2) = +3.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ для этого частнаго случая правило сложенія положительнаго числа съ отрицательнымъ; формула, которую мы только-что написали, означаетъ слѣдующее: 5 шаговъ впередъ и затѣмъ 2 шага назадъ даютъ 3 шага впередъ.

Точно такъ же можно было бы доказать, что:

$$(+5) + (+2) = +7,$$
$$(-5) + (+2) = -3,$$
$$(-5) + (-2) = -7.$$

Эти формулы, примѣнительно къ избранному примѣру, означаютъ: 5 шаговъ впередъ и затѣмъ 2 шага впередъ даютъ 7 шаговъ впередъ; 5 шаговъ назадъ и затѣмъ 2 шага впередъ даютъ 3 шага назадъ; 5 шаговъ назадъ и затѣмъ 2 шага назадъ даютъ 7 шаговъ назадъ. Отсюда вытекаетъ правило:

Правило 5-ое. Чтобы сложить два числа съ одинаковыми знаками, складываютъ ихъ абсолютныя значенія и ставятъ передъ суммой общій знакъ. Чтобы сложить два числа съ противоположными знаками, вычитаютъ изъ бóльшаго абсолютнаго значенія меньшее и ставятъ передъ разностью знакъ числа, имѣющаго большее абсолютное значеніе.

Примѣры. На основаніи этого правила:

$$(+3)+(-4)=-1\,,$$
$$(+125)+(-210)=-85\,,$$
$$(-3250)+(-3)=-3253\,,$$
$$(-1000)+(+2)=-998\,,$$
$$(-1010)+(+2000)=+990\,,$$
$$(+134)+(-134)=0\,.$$

Изъ этого правила видимъ, что сумма двухъ противоположныхъ чиселъ всегда равна нулю; дѣйствительно, такъ какъ дѣло идетъ только о разстояніи отъ начальной точки, то извѣстное число шаговъ впередъ и такое же число шаговъ назадъ даютъ тотъ же результатъ, какъ если бы мы не двигались съ мѣста, т. е. не сдѣлали ни одного шага.

87. Положительныя и отрицательныя промежутки времени. Другой способъ вывода правила 5-го, состоитъ въ томъ, что мы употребляемъ положительныя и отрицательныя числа, какъ числа, измѣряющія не длины, а промежутки времени.

Промежутокъ времени, раздѣляющій два событія (два момента времени), имѣетъ абсолютное значеніе; число, его выражающее, зависитъ отъ избранной единицы времени, т. е. года, дня, часа, минуты, секунды. Если одно событіе совершается послѣ другого черезъ 15 минутъ, то говорятъ, что промежутокъ времени, раздѣляющій ихъ, имѣетъ значеніе 15, когда единицей служитъ минута; онъ имѣетъ значеніе $\frac{1}{4}$, когда единицей служитъ часъ, и 900, когда за единицу принимаемъ секунду. При началѣ изслѣдованія единицу можно избрать произвольно, но она должна быть точно указана и не должна измѣняться въ теченіе всего изслѣдованія.

Если мы наблюдаемъ два событія A и B (если, напримѣръ, A есть моментъ, когда мои часы показываютъ полдень, а B — моментъ, когда часы астрономической обсерваторіи показываютъ полдень), то желательно знать не только раздѣляющій ихъ, промежутокъ времени, но также и то, которое изъ этихъ событій наступило позже. Говорятъ, что промежутокъ времени $\overline{AB}$ равенъ $+15$, если событіе B произошло на 15 минутъ позже событія A, и равенъ -15, если событіе B произошло 15-ью минутами раньше событія A. Въ первомъ случаѣ мои часы показываютъ полдень 15-ью минутами раньше, чѣмъ часы астрономической обсерваторіи; они спѣшатъ на четверть часа. Во второмъ случаѣ они отстаютъ на 15 минутъ.

Если мы наблюдаемъ три событія A, B, C, то промежутокъ времени $\overline{AC}$ всегда равенъ суммѣ промежутковъ времени $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, коль скоро эта сумма получена по выше изложенному правилу.

Очень легко доказать это замѣчаніе. Если, напримѣръ, событіе B наступаетъ черезъ 5 минутъ послѣ A, а C — на 8 минутъ раньше B, то C произошло 3-мя минутами раньше A.

Поэтому:

$$\overline{AB} = +5, \quad \overline{BC} = -8, \quad \overline{AC} = -3,$$

и равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

обратится въ такое:

$$5 + (-8) = -3,$$

вполнѣ согласно съ правиломъ **5**. Такимъ же образомъ можно вести доказательство и въ другихъ случаяхъ; предлагаемыя ниже задачи содержатъ различные примѣры, которые слѣдуетъ продѣлать, чтобы вникнуть въ правила производства дѣйствій и ихъ отношеніе къ дѣйствительности.

88. Кредитъ и дебетъ. Однимъ изъ приложеній правила **5** для производства дѣйствій надъ положительными и отрицательными числами къ повседневной жизни являются разсчеты по кредиту и дебету. У Павла въ банкѣ имѣется имущество въ 1000 р. Если онъ внесетъ туда еще 50 р., то его имущество увеличится на 50 р., т. е. будетъ составлять 1050 р. Если же онъ возьметъ изъ банка 50 р., то у него будетъ на 50 р. меньше, т. е. у него останется 950 р. Поэтому для Павла цѣлесообразно, при счетѣ своего имущества въ банкѣ, обозначать знакомъ + взносы, а знакомъ — полученія. Итакъ, если Павелъ получаетъ изъ банка 50 р., то онъ долженъ отмѣтить въ своей записной книжкѣ — 50 р.; если онъ вноситъ въ банкъ 50 р., то долженъ отмѣтить въ своей записной книжкѣ + 50 р. Состояніе, которое у него остается, можетъ быть найдено, если всѣ эти числа алгебраически прибавить къ первоначальному его имуществу.

Примѣръ I. У Павла было имущество въ 1000 р. Онъ произвелъ слѣдующіе взносы и полученія: $+120$ р., -250 р., $+70$ р., -500 р. Какое состояніе у него осталось?

Отвѣтъ. По указанному правилу получаемъ:

$$(+1000)+(+120)+(-250)+(+70)+(-500),$$

т. е., если выполнимъ послѣдовательно намѣченныя дѣйствія: $1000+120=1120$; $1120-250=870$; $870+70=940$; $940-500=440$. Итакъ, у него остается состояніе въ 440 р.

Примѣръ II. У Павла было состояніе въ 1000 р. Банкъ выплачиваетъ ему 1250 р. Какъ велико теперь его состояніе?

Примѣняя правило сложенія, получимъ:

$$1000+(-1250)=-250.$$

Отсюда видно, что Павлу выплатили на 250 р. больше, чѣмъ у него было; слѣдовательно, онъ имѣетъ въ банкѣ долгъ въ 250 р. Мы можемъ выразить это короче: его состояніе составляетъ: -250 р.

Примѣръ III. У Павла въ банкѣ долгъ въ 250 р. Онъ дѣлаетъ взносъ въ 500 р. Какъ велико теперь его состояніе?

Отвѣтъ. Мы имѣемъ:

$$(-250)+(+500)=250.$$

Итакъ, Павелъ имѣетъ теперь имущество въ 250 р. У него былъ долгъ въ 250 р.; но суммой 500 р., которую онъ внесъ, онъ уплатилъ эти 250 р. долга, и у него еще осталось имущество въ 250 р.

Примѣръ IV. У Павла въ банкѣ долгъ въ 250 р. Ему выплачиваетъ банкъ еще 100 р. Въ какомъ состояніи теперь его дебетъ и кредитъ?

Отвѣтъ. Мы имѣемъ:

$$(-250)+(-100)=-350.$$

Отсюда видно, что состояніе Павла равно -350 р., т. е. онъ долженъ 350 р. Онъ былъ долженъ 250 р., ему выплатили еще 100 р.; поэтому его долгъ увеличился до 350 р.

Предшествующіе примѣры убѣдили насъ въ томъ, что правило 5-ое сложенія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ даетъ намъ всегда правильные результаты, т. е. результаты, соотвѣтствующіе дѣйствительности. Такимъ образомъ, эти числа даютъ намъ сокращенный способъ выражать въ очень простой формѣ легко доступные пониманію и всѣмъ хорошо извѣстные факты. Мы можемъ усматривать въ этомъ только переводъ на алгебраическій языкъ замѣчаній, которыя сами по себѣ понятны. Если понять эту мысль, то легко привыкнуть къ этому языку. Дальнѣйшія занятія алгеброй обнаружатъ еще отчетливѣе тѣ преимущества, которыя даетъ его примѣненіе.

89. Сумма нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ. Намъ пришлось уже въ одномъ примѣрѣ (п. **88**) вычислить сумму нѣсколькихъ положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ: сумма эта представляетъ результатъ, который получится, если прибавимъ второе число къ первому, третье—къ полученной суммѣ первыхъ двухъ, четвертое—къ новой суммѣ и т. д. Для такихъ су́ммъ имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема, представляющая собой обобщеніе теоремы 1-ой (п. **8**).

Теорема 48. Сумма нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.

Имѣемъ, напримѣръ:

$$(+12)+(-5)+(-18)+(+13)=(-5)+(+12)+(+13)+(-18).$$

Дѣйствительно, представимъ себѣ, что Павелъ получилъ отъ Ивана 12 р. и отъ Якова 13 р.; съ другой стороны, онъ истратилъ на покупки: 5 р. у булочника и 18 р. у мясника. Окончательное состояніе его кассы будетъ, очевидно, то же самое, въ какомъ бы порядкѣ онъ ни выполнялъ свои операціи; это состояніе кассы сводится къ тому, что онъ обладаетъ 2 рублями.

Такимъ же образомъ могутъ быть доказаны слѣдующія полезныя теоремы:

Теорема 49. Величина суммы не измѣняется, если мы замѣнимъ нѣсколько слагаемыхъ ихъ суммой.

Теорема 50. Чтобы прибавить къ какому-нибудь числу сумму нѣсколькихъ другихъ чиселъ, достаточно прибавить послѣдовательно отдѣльныя слагаемыя.

Теорема 51. Чтобы вычислить сумму нѣсколькихъ чиселъ, можно поступить слѣдующимъ образомъ: сложить положительныя числа, сложить абсолютныя значенія отрицательныхъ чиселъ, вычесть изъ большей суммы меньшую и передъ результатомъ поставить знакъ большей суммы.

Примѣръ I. Требуется вычислить сумму:

$$2357 + (-324) + 325 + (-1024) + 1004.$$

Такъ какъ:

$$-324 + 325 = 1,$$
$$-1024 + 1004 = -20,$$

то остается, слѣдовательно, произвести такое вычисленіе:

$$2357 + 1 - 20 = 2338.$$

Примѣръ II. Требуется вычислить:

$$234 + (-27) + 3 + (-33) + 3 + (-300).$$

По теоремѣ 51-ой пишемъ:

$$234 + 3 + 3 = 240,$$
$$27 + 33 + 300 = 360,$$
$$360 - 240 = 120,$$

Сумма равна -120.

Въ этихъ примѣрахъ ради упрощенія при сложеніип оложительныхъ чиселъ мы опускали скобки и знакъ.

90. Вычитаніе. Вычитаніе въ случаѣ алгебраическихъ чиселъ также опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное сложенію.

Опредѣленіе. Вычесть одно число изъ другого значитъ найти такое третье число, которое будучи прибавлено къ первому, дастъ второе.

Если, напримѣръ, мы вычтемъ 3 изъ 5, то получимъ 2, такъ какъ $2 + 3 = 5$; если мы вычтемъ -3 изъ 5, то получимъ 8, такъ какъ $8 + (-3) = 5$; если мы 5 вычтемъ изъ -3, то получимъ -8, такъ какъ $-8 + 5 = -3$.

Теорема 52. Чтобы вычесть алгебраическое число, достаточно прибавить противоположное число. Итакъ, что бы вычесть 3, слѣдуетъ прибавить (-3); чтобы вычесть (-3) достаточно прибавить 3.

Такимъ образомъ вычитаніе сводится къ сложенію, а понятія **сумма** и **разность** соединяются въ болѣе общее понятіе **алгебраической суммы**. Положимъ, напримѣръ, что требуется вычислить:

$$4-(-5)+(-7)-(+4)-(-3)+12.$$

Если мы вмѣсто этого напишемъ алгебраическую сумму

$$4+5+(-7)+(-4)+3+12,$$

то нужно будетъ только выполнить сложенія. Теоремы, доказанныя нами для послѣдовательныхъ сложеній, примѣнимы такимъ образомъ и къ вычитанію. Въ частности, результатъ не измѣнится, если мы измѣнимъ порядокъ производства дѣйствій; напримѣръ:

$$4-(-3)-(-5)+(-7)=4+(-7)-(-3)-(-5).$$

Этимъ путемъ мы получаемъ слѣдующую теорему, вполнѣ согласную съ теоремами 3 и 4 въ п. **11**, но имѣющую болѣе общее значеніе, такъ какъ она справедлива и для отрицательныхъ чиселъ:

Теорема 53. Чтобы прибавить къ какому-нибудь числу разность двухъ другихъ чиселъ, достаточно прибавить къ нему уменьшаемое и вычесть вычитаемое. Чтобы вычесть изъ какого-нибудь числа разность двухъ другихъ чиселъ, достаточно вычесть уменьшаемое и прибавить вычитаемое.

Предшествующія теоремы приводятъ къ важному правилу относительно практическихъ вычисленій надъ положительными и отрицательными числами:

Правило 6. Если передъ скобками стоитъ знакъ $+$, то можно ихъ опустить. Если передъ скобками стоитъ знакъ $-$, то можно опустить ихъ, только измѣнивъ предварительно знакъ передъ каждымъ числомъ, стоявшимъ внутри скобокъ, на противоположный.

Примѣръ. Вычислить выраженіе:

$$2-3+(a-b-5)-(c-a),$$

полагая:

$$a=-5, \qquad b=-3, \qquad c=2.$$

Получимъ:

$$2 - 3 - 5 + 3 - 5 - 2 - 5 = -15.$$

Замѣчаніе относительно вычисленія алгебраическихъ выраженій. Какъ мы видимъ изъ даннаго примѣра, можетъ случиться, что данная буква, напримѣръ a, обозначетъ отрицательное число,— напримѣръ — 5. Въ такомъ случаѣ, если мы напишемъ — a, то это значитъ, что мы должны вычесть — 5 т. е. прибавить + 5; такимъ образомъ $-a = +5$. Вообще — a обозначаетъ всегда число, противоположное числу a. Иногда такимъ образомъ приходится даже ставить одинъ за другимъ больше двухъ знаковъ —. Предыдущія разъясненія показываютъ, что два рядомъ стоящихъ знака — мы можемъ опустить или, что то же, замѣнить знакомъ +. Если, слѣдовательно, $a = -5$, то $-a = -(-5)$, т. е. $-a = +5$. Дальше, если намъ нужно вычесть — a, то это все равно, что прибавить a, т. е. вычесть 5. Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, мы имѣемъ три знака — рядомъ; такъ какъ мы можемъ два изъ нихъ уничтожить, то останется только одинъ.

Примѣръ I. Вычислить выраженіе:

$$a - b - (-c) + (-d),$$

полагая:

$$a = 10, \qquad b = -4, \qquad c = 3, \qquad d = -7.$$

Получимъ:

$$10 + 4 + 3 + 7 = 24.$$

Примѣръ II. Вычислить выраженіе:

$$-a - (-b) + (-c) - (-d),$$

полагая:

$$a = 4, \qquad b = -6, \qquad c = -3, \qquad d = 7.$$

Получимъ:

$$-4 - 6 + 3 + 7 = 0.$$

91. Разсмотримъ теперь нѣсколько задачъ изъ повседневной жизни, къ которымъ примѣнимы теоремы и правила, изложенныя въ п.п. **89** и **90**.

Задача I. 1-го января Петръ былъ долженъ Ивану 50 р., 6-го Иванъ получилъ отъ Петра 40 р., 12-го Петръ выдалъ Ивану товару на 28 р.; 15-го Иванъ поручилъ Петру уплатить за него Павлу 33 р., 18-го Петръ одолжилъ у Ивана 60 р., 22-го Иванъ получилъ отъ Петра 100 р. Какъ заключить ихъ счета?

Условимся считать долги Петра Ивану положительными. Въ такомъ случаѣ суммы, передаваемыя Иваномъ Петру, увеличиваютъ долгъ Петра; слѣдовательно, мы должны считать ихъ положительными; напротивъ того, суммы, передаваемыя Петромъ Ивану, мы должны считать отрицательными, такъ какъ онѣ уменьшаютъ долгъ Петра. Сообразно этому мы можемъ написать:

1	января	$+50$
6	„	-40
12	„	-28
15	„	-33
18	„	$+60$
22	„	-100.

Отсюда получаемъ:

$$+50-40-28-33+60-100=-91.$$

Результатъ составляетъ -91 р. Это значитъ къ концу января Иванъ долженъ Петру 91 р.

Примѣчаніе. Чтобы рѣшать задачи такого рода, купцы примѣняютъ обыкновенно особый пріемъ, вытекающій изъ теоремы 51 (п. **89**); именно они записываютъ положительныя и отрицательныя числа, которыя они называютъ кредитомъ и дебетомъ, въ двухъ графахъ. Тогда достаточно сосчитать отдѣльно каждую графу, меньшій результатъ вычесть изъ большаго и разность обозначить знакомъ большаго результата, т. е. знакомъ той графы, къ которой относится этотъ результатъ.

Задача II. Путешественникъ отправляется изъ нѣкотораго мѣста, находящагося на высотѣ 320 м. Онъ поднимается по желѣзной дорогѣ на 50 м., на лошадяхъ на 200 м., пѣшкомъ на 2320 м., — потомъ спускается пѣшкомъ на 2240 м., поднимается на лошадяхъ на 50 м. и, наконецъ, спускается по желѣзной дорогѣ на 412 м. внизъ. На какой высотѣ онъ послѣ этого находится?

Условимся считать положительнымъ каждое число метровъ, пройденное при восхожденіи, и отрицательнымъ — при нисхожденіи; тогда получимъ:

$$320 + 50 + 200 + 2320 - 2240 + 50 - 412 = 288.$$

Искомая высота равна 288 м.

Задача III. Два путешественника находятся на пути между Гамбургомъ и Франкфуртомъ н. М. Первый находится на 25 км. ближе къ Гамбургу, чѣмъ второй. Первый дѣлаетъ 20 км. по направленію къ Франкфурту, второй 15 км. по направленію къ Гамбургу. Какое разстояніе между ними теперь?

Направленіе отъ Гамбурга къ Франкфурту условимся считать положительнымъ. Дальше, подъ разстояніемъ между первымъ и вторымъ путешественникомъ мы будемъ разумѣть путь, взятый съ надлежащимъ знакомъ, который долженъ совершить первый путешественникъ, чтобы нагнать второго. Это разстояніе составляло вначалѣ $+25$, такъ какъ первому путешественнику придется подвинуться на 25 км. по направленію отъ Гамбурга къ Франкфурту, чтобы нагнать второго. Когда первый путешественникъ проходитъ извѣстную часть пути, то разстояніе уменьшается на эту часть пути; именно, если онъ проходитъ $+3$, то это значитъ, что онъ подвигается на 3 км. по направленію къ Франкфурту, — искомое разстояніе будетъ тогда равно $25 - 3 = 22$ км.; если же, напротивъ того, онъ проходитъ -3, т. е. подвигается на 3 км. по направленію къ Гамбургу, то разстояніе будетъ равно $25 - (-3) = 28$ км. Наоборотъ, путь, который проѣзжаетъ второй путешественникъ, слѣдуетъ прибавить къ разстоянію; оно будетъ увеличиваться, когда этотъ путь имѣетъ положительное значеніе, и уменьшаться, когда этотъ путь имѣетъ отрицательное значеніе.

Итакъ, первый путешественникъ проѣзжаетъ $+20$ км. а второй -15 км. Слѣдовательно, разстояніе между ними выразится въ километрахъ такъ:

$$25 - 20 + (-15) = -10.$$

Отвѣтъ поэтому выразится слѣдующимъ образомъ: Искомое разстояніе равно 10 км., при чемъ второй путешественникъ находится ближе къ Гамбургу, чѣмъ первый.

Задача IV. Путешественники находятся въ тѣхъ пунктахъ, куда они прибыли по предыдущей задачѣ. Затѣмъ первый подвигается на 12 км. по направленію къ Гамбургу, а второй на 3 км. по направленію къ Франкфурту. Гдѣ находятся они теперь?

Если мы примемъ то же условіе относительно знаковъ, что и въ предыдущей задачѣ, то мы увидимъ, что сначала разстояніе между ними равно -10 км. а затѣмъ первый дѣлаетъ -12 км., а второй $+3$ км. Слѣдовательно, ихъ разстояніе въ километрахъ выразится такъ:

$$-10-(-12)+3=5.$$

Окончательное разстояніе равно, слѣдовательно, 5 км., при чемъ первый путешественникъ находится ближе къ Гамбургу.

92. Задачи 162—167, помѣщенныя въ концѣ этой главы, мы рекомендуемъ рѣшать сначала по алгебраическимъ правиламъ — а потомъ, просто руководствуясь „здравымъ смысломъ". Тогда мы убѣдимся, что не только получатся тѣ же результаты, но что придется даже производить тѣ же вычисленія. Такимъ образомъ читатель будетъ пріобрѣтать все больше и больше довѣрія къ орудіямъ алгебры. Очень важно, чтобы это довѣріе являлось плодомъ собственнаго опыта. Пусть начинающій, впрочемъ, не удивляется, если алгебраическое рѣшеніе этихъ задачъ кажется ему болѣе длиннымъ и труднымъ, чѣмъ рѣшеніе по „здравому смыслу". Начинать необходимо съ такихъ именно примѣровъ и только впослѣдствіи можно посредствомъ алгебры рѣшать болѣе трудныя задачи, въ которыхъ непосредственное разсужденіе оказалось бы болѣе сложнымъ. Однако, прежде чѣмъ отказаться отъ этого непосредственнаго разсужденія, необходимо убѣдиться въ томъ, что алгебраическія формулы и знаки, которыми мы это разсужденіе замѣняемъ, совершенно ему равносильны.

III. УМНОЖЕНІЕ И ДѢЛЕНІЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХЪ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

93. Умноженіе цѣлыхъ чиселъ мы опредѣлили, какъ сокращенное сложеніе, при которомъ всѣ слагаемыя равны между собой (п. **14**). Точно такъ же можно было потомъ (п. **53**) опредѣлить и умноженіе дроби на цѣлое число, между тѣмъ какъ при опредѣленіи произведенія цѣлаго числа на дробь мы должны были воспользоваться требованіемъ перемѣстительности множителя и множимаго (п. **59**). Однако, этотъ способъ оказался уже недостаточнымъ при умноженіи дроби на дробь, — и въ этомъ случаѣ мы пришли къ новому опредѣленію умноженія, разсматривая задачу изъ обыденной жизни.

Подобнымъ образомъ обстоитъ дѣло съ умноженіемъ алгебраическихъ чиселъ. По первоначальному опредѣленію умноженія имѣемъ:

$$(-5)\cdot 3=(-5)+(-5)+(-5)=-15.$$

Изъ требованія перемѣстительности вытекаетъ, что слѣдуетъ также положить:

$$3\cdot(-5)=-15.$$

Но произведеніе двухъ отрицательныхъ чиселъ, напротивъ того, нуждается въ новомъ опредѣленіи. Примѣры изъ повседневной жизни, которые мы обстоятельно разсмотримъ въ слѣдующей главѣ (п. **107**), приводятъ къ слѣдующему опредѣленію:

Опредѣленіе. Подъ произведеніемъ двухъ отрицательныхъ чиселъ разумѣютъ произведеніе абсолютныхъ значеній обоихъ сомножителей.

На основаніи этого опредѣленія имѣемъ:

$$(-3)\cdot(-5)=+15.$$

94. Произведеніе нѣсколькихъ сомножителей. Произведеніе нѣсколькихъ сомножителей опредѣляется, какъ результатъ, получаемый отъ умноженія перваго сомножителя на второго, полученнаго произведенія на третьяго, полученнаго произведенія на четвертаго и т. д.

Пусть будетъ предложено напримѣръ, произведеніе:

$$(-2)\cdot 4\cdot(-5)\cdot 6\cdot(-3)\cdot 2,$$

По опредѣленію мы имѣемъ:

$$(-2)\cdot 4 = -8, \quad (-8)\cdot(-5) = 40, \quad 40\cdot 6 = 240,$$
$$240\cdot(-3) = -720, \quad (-720)\cdot 2 = -1440.$$

Итакъ, разсматриваемое произведеніе равно -1440.

Знакъ произведенія нѣсколькихъ сомножителей. Если мы, согласно предыдущимъ опредѣленіямъ, будемъ вычислять произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, то замѣтимъ, что каждый отрицательный сомножитель вызываетъ перемѣну знака, между тѣмъ какъ при положительномъ сомножителѣ знакъ сохраняется. Отсюда заключаемъ, что знакъ произведенія зависитъ исключительно отъ числа отрицательныхъ сомножителей; если это число четное, то (п. **45**) произведеніе есть число положительное; если, оно нечетное, то произведеніе получается отрицательное.

Теорема 54. Значеніе произведенія нѣсколькихъ сомножителей не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ этихъ сомножителей. Чтобы доказать, что значеніе произведенія не измѣняется при перестановкѣ сомножителей, достаточно показать, что абсолютное значеніе остается тѣмъ же и что знакъ тоже остается безъ перемѣны. Но абсолютное значеніе произведенія равно произведенію абсолютныхъ значеній сомножителей. По теоремѣ 13 ариѳметики это значеніе не зависитъ отъ порядка сомножителей. Что же касается знака, то онъ зависитъ лишь отъ числа отрицательныхъ сомножителей.

Точно такъ же мы можемъ доказать слѣдующую теорему.

Теорема 55. Въ произведеніи нѣсколькихъ сомножителей можно, не мѣняя значенія окончательнаго произведенія, подставить вмѣсто двухъ или нѣсколькихъ сомножителей ихъ произведеніе, или же, обратно, замѣнить любого сомножителя, который, въ свою очередь, представляетъ собой произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, этими сомножителями.

95. Теорема 56. Чтобы умножить сумму на нѣкоторое число, достаточно умножить всѣ слагаемыя на это число и сложить полученные результаты.

Ограничимся тѣмъ, что покажемъ справедливость этой теоремы на примѣрахъ.

Примѣръ I. Имѣемъ:

$$[2+(-3)+(-4)+17]\cdot 10$$
$$=2\cdot 10+(-3)\cdot 10+(-4)\cdot 10+17\cdot 10.$$

Такъ какъ

$$2\cdot 10=20,\quad (-3)\cdot 10=-30,\quad (-4)\cdot 10=-40,$$
$$17\cdot 10=170$$

и

$$20+(-30)+(-40)+170=120=12\cdot 10$$
$$=[2+(-3)+(-4)+17]\cdot 10.$$

Примѣръ II. Имѣемъ:

$$[2+(-5)+(-7)+4]\cdot(-10)$$
$$=2\cdot(-10)+(-5)\cdot(-10)+(-7)\cdot(-10)+4\cdot(-10).$$

Такъ какъ

$$2\cdot(-10)=-20,\quad (-5)\cdot(-10)=50,\quad (-7)\cdot(-10)=70,$$
$$4\cdot(-10)=-40,$$

и

$$-20+50+70-40=60=(-6)\cdot(-10)$$
$$=[2+(-5)+(-7)+4]\cdot(-10).$$

Итакъ, мы получимъ одинъ и тотъ же результатъ, вычислимъ ли мы сначала сумму и затѣмъ произведемъ умноженіе, или же сперва умножимъ каждое изъ слагаемыхъ и тогда сложимъ полученныя произведенія.

96. Дѣленіе. Дѣленіе въ случаѣ алгебраическихъ чиселъ опредѣляется также, какъ дѣйствіе, обратное умноженію.

Опредѣленіе. Раздѣлить одно число (дѣлимое) на другое (дѣлителя) значитъ найти третье число, которое, будучи умножено на дѣлителя, даетъ дѣлимое.

Примѣры:

$$(-12):(-4)=+3,$$
$$(-30):6=-5,$$
$$30:(-6)=-5.$$

Такимъ образомъ, абсолютнымъ значеніемъ частнаго двухъ чиселъ служитъ частное ихъ абсолютныхъ значеній; кромѣ того, частное есть число положительное или отрицательное въ зависимости отъ того, имѣютъ ли данныя числа одинъ и тотъ же знакъ или противоположные знаки.

97. Алгебраическія дроби. Опредѣленіе. Частное двухъ алгебраическихъ чиселъ называется алгебраической дробью.

Такъ напримѣръ, слѣдующія частныя суть алгебраическія дроби:

$$\frac{-3}{4}, \quad \frac{-6}{-5}, \quad \frac{7{,}2}{-4}.$$

По опредѣленію дѣленія они могутъ также быть изображены въ видѣ алгебраическихъ чиселъ:

$$-\frac{3}{4}, \quad \frac{6}{5}, \quad -\frac{7{,}2}{4}.$$

Для практики производства алгебраическихъ вычисленій полезно знать нѣкоторыя правила, по которымъ производятся вычисленія надъ такими дробями. При этомъ мы можемъ считать, что знаменатель дроби есть цѣлое число. Это не представляетъ никакого ограниченія, такъ какъ имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Теорема 57. Значеніе алгебраической дроби не измѣнится, если мы числителя и знаменателя ея умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же алгебраическое число.

Напримѣръ:

$$\frac{-0{,}6}{0{,}5} = \frac{6}{-5} = -\frac{6}{5};$$

Здѣсь числитель и знаменатель умножены на -10. Точно такъ же имѣемъ:

$$\frac{-1{,}2}{-1{,}0} = +\frac{6}{5};$$

здѣсь числитель и знаменатель раздѣлены на $-0{,}2$.

Сложеніе алгебраическихъ дробей. Изъ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что по тѣмъ же правиламъ, которыя примѣняются при вычисленіяхъ съ положительными числами (правила производства дѣйствій 27, 28, 29) можно приводить къ одному знаменателю и алгебраическія дроби; отсюда слѣдуетъ далѣе, что при изученіи сложенія и вычитанія мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ лишь тѣхъ дробей, которыя имѣютъ одинаковыхъ знаменателей.

Правило 7-ое. Чтобы получить сумму или разность нѣсколькихъ алгебраическихъ дробей съ одинаковыми знаменателями, достаточно сложить или вычесть ихъ числителей и подъ результатомъ подписать общаго знаменателя.

98. Умноженіе алгебраическихъ дробей.

Правило 8. Произведеніе двухъ алгебраическихъ дробей есть дробь, у которой числитель равенъ произведенію числителей, а знаменатель — произведенію знаменателей данныхъ дробей.

Примѣры:

$$\frac{3}{-4}\cdot\frac{5}{-6}=\frac{15}{24},\quad \frac{3}{-4}\cdot\frac{-5}{6}=\frac{-15}{-24},\quad \frac{3}{-4}\cdot\frac{-5}{-6}=\frac{-15}{24}.$$

Доказательство правила. Согласно опредѣленію умноженія абсолютное значеніе произведенія равно произведенію абсолютныхъ значеній сомножителей. Это же абсолютное значеніе мы и получимъ, слѣдуя предложенному правилу 8. Остается только показать, что полученный знакъ оказывается правильнымъ. Чтобы это обнаружить, мы разберемъ послѣдовательно всѣ возможные случаи; напримѣръ, въ первомъ примѣрѣ оба сомножителя суть отрицательныя числа, произведеніе есть число положительное, какъ и должно быть, и т. д.

Дѣленіе алгебраическихъ дробей. Опредѣленіе. Два алгебраическихъ числа называются взаимно обратными, если ихъ произведеніе равно единицѣ. Теперь можно сказать:

Правило 9. Чтобы получить частное двухъ алгебраическихъ дробей, достаточно дѣлимое помножить на число, обратное дѣлителю.

Примѣры:

$$\frac{3}{4}:\frac{-5}{-6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{-6}{-5}=\frac{-18}{-20},\quad \frac{3}{-4}:\frac{5}{-6}=\frac{3}{-4}\cdot\frac{-6}{5}=\frac{-18}{-20},$$

$$\frac{-3}{-4}:\frac{5}{-6}=\frac{-3}{-4}\cdot\frac{-6}{5}=\frac{18}{-20}.$$

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ XI-ой..

162. На линіи Гамбургъ—Франкфуртъ на М.—Базель между Франкфуртомъ и Гамбургомъ лежатъ слѣдующіе города: Гиссенъ въ 66 км. отъ Франкфурта, Марбургъ въ 96 км. отъ Франкфурта, Кассель въ 200 км. отъ Франкфурта, Гёттингенъ въ 258 км. отъ Франкфурта, Ганноверъ въ 359 км. отъ Франкфурта, Люнебургъ въ 491 км. отъ Франкфурта; между Франкфуртомъ и Базелемъ: Дармштадъ, въ 27 км. отъ Франкфурта, Гейдельбергъ въ 88 км. отъ Франкфурта, Карльсруэ въ 143 км. отъ Франкфурта, Фрейбургъ въ 278 кл. отъ Франкфурта. Требуется вычислить разстоянія отъ Марбурга до Гёттингена, отъ Касселя до Гейдельберга, отъ Люнебурга до Ганновера, отъ Касселя до Гиссена, отъ Фрейбурга до Дармштадта, отъ Ганновера до Карльсруэ.

163. Иванъ старше Якова на 3 мѣсяца и 6 дней и моложе Петра на 6 мѣсяцевъ и 5 дней. Какая разница въ возрастѣ между Петромъ и Яковомъ?

164. Даны 4 точки A, B, C, D на одной оси (п. 85). Примемъ за единицу длины сантиметръ и положимъ, что отрѣзокъ $\overline{AB}$ равенъ $+7$, отрѣзокъ $\overline{BC} = -4$, а отрѣзокъ $\overline{CD} = +13$. Вычислить отрѣзки $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, и $\overline{BD}$; сдѣлать чертежъ.

165. Даны 4 точки A, B, C, D на одной оси (п. 85). Единицей длины служитъ миллиметръ; отрѣзокъ $\overline{BA}$ равенъ $+8$, отрѣзокъ $\overline{BC} = -18$, а отрѣзокъ $\overline{AD} = +35$. Требуется вычислить отрѣзки $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ и $\overline{CD}$; сдѣлать чертежъ.

166. На велосипедныхъ гонкахъ Петръ прибылъ позже Ивана 2 минутами 13 секундами и раньше Якова 15 минутами 56 секундами. Какой промежутокъ времени раздѣляетъ моментъ прибытія Ивана отъ момента прибытія Якова?

167. Карманные часы Петра по сравненію съ городскими часами отстаютъ на 3 минуты, а городскіе часы на 8 минутъ впереди по сравненію съ вокзальными часами. Сколько минутъ разницы между карманными часами Петра и часами на вокзалѣ?

168. Произвести слѣдующія вычисленія:

$$4-(-5)+7\,,$$
$$3-6+2-12\,,$$
$$(-5)-3-(-15)+(-2)\,.$$

169. Произвести слѣдующія вычисленія:

$$3+4-5-2-7+8-4\,,$$
$$3+2-5-7-9+14,$$
$$3-(2-5)-(6-3-9)+(3-6-4)\,,$$
$$3-5-2-(3-9-4-12)\,.$$

170. Произвести слѣдующія вычисленія:

$$3-4-5-2+3\,,$$
$$4-5-6-7-8-9+17-4+35\,,$$
$$3{,}012-2{,}014+4{,}345-2{,}375\,,$$
$$\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\,.$$

171. Вычислить значеніе x по формулѣ задачи 124, принимая:

$$a=-3\,,\qquad b=-2\,,\qquad c=-17\,.$$

172. Вычислить значеніе y по формулѣ задачи 139, принимая:

$$a=-3\,,\qquad b=-5\,,\qquad c=-32\,.$$

173. Рѣшить ту же задачу, принимая:

$$a=-\frac{2}{3}\,,\qquad b=\frac{5}{6}\,,\qquad c=\frac{3}{4}\,.$$

174. Вычислить значеніе z въ задачѣ 127, принимая:

$$a=-3{,}2\,,\qquad b=3{,}4\,,\qquad c=-3{,}5\,,\qquad d=-34\,.$$

175. Произвести слѣдующія вычисленія:

$$3{,}125-4{,}375+2{,}5\,,$$
$$3{,}15-(3{,}5-8{,}135-4{,}5+3)+(-3{,}35)\,,$$
$$4{,}15-(-8{,}75-3-2{,}5)+(-3+4{,}52)\,.$$

176. Купецъ долженъ нѣсколькимъ фабрикамъ слѣдующія суммы: 323,50 р., 312,35 р., 402,75 р. Съ другой стороны ему должны разные покупатели: 300 р., 250 р., 477,45 р. У него въ кассѣ: 1000 р. — Сколько у него будетъ послѣ ликвидаціи всѣхъ счетовъ?

177. У купца долгъ въ разныхъ банкахъ: 3640 р., 2350 р., 4500 р. Разные покупатели должны ему: 2000 р., 3000 р., 1500 р. Въ кассѣ у него 492,75 р. Каково его состояніе?

178. Произвести слѣдующія вычисленія:

$$32\cdot(-15)\,,$$
$$4\cdot(-5)\cdot2\cdot(-3)\cdot(-6)\,,$$
$$2{,}5\cdot(-3{,}4)\cdot(-1{,}2)\,,$$
$$-15\cdot(-3{,}4)\cdot(-1)\,.$$

179. Произвести слѣдующія вычисленія:

$$(3-4-5)\,6+(2-6+7)\cdot(-9)\,,$$
$$(3-4-5)\cdot(-2)+(6-8)\cdot(-12)\,.$$

180. У купца 10000 р. въ кассѣ. Онъ долженъ уплатить за 145 тюковъ нѣкотораго товара по 18 р. за каждый и получить за 112 тюковъ другого товара, по 16 р. за каждый. Какъ измѣнится состояніе его кассы?

181. Произвести слѣдующія дѣленія:

$$4:(-3),$$
$$42{,}5:(-3{,}4),$$
$$-3{,}5:0{,}7,$$
$$-4{,}5:(-0{,}9),$$
$$-3:(-1).$$

182. Произвести слѣдующія умноженія:

$$\frac{-3}{4}\cdot\frac{5}{6},$$
$$\frac{-5}{7}\cdot\frac{-4}{2},$$
$$\frac{-6}{4}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{7}{-8}\cdot\frac{6}{-4}\cdot\frac{-3}{-2}.$$

183. Произвести слѣдующія дѣленія:

$$\frac{3}{4}:\frac{-5}{6},$$
$$\frac{3}{4}:\frac{-2}{-5},$$
$$\frac{-2}{3}:\frac{-3}{5}.$$

184. Произвести слѣдующія вычисленія:

$$\left(2+\frac{-3}{4}-5\right):\frac{-2}{3}+(3+5)\cdot\frac{-3}{4},$$
$$\left[\left(3-5+\frac{1}{2}\right):\frac{-3}{-4}+\left(-3-\frac{2}{3}-4\right)\cdot\frac{-2}{3}\right]\cdot\frac{-1}{2}.$$

185. Вычислить значеніе выраженія:

$$a(b'c''-c'b'')+a'(b''c-c''b)+a''(bc'-cb')$$

принимая:

$$a=1,\quad a'=-1,\quad a''=1,$$
$$b=1,\quad b'=2,\quad b''=4,$$
$$c=1,\quad c'=-\frac{1}{2},\quad c''=\frac{1}{2}.$$

186. Вычислить значеніе x по формулѣ:

$$x=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}},$$

принимая:

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{4},\quad c=1,$$
$$a'=-\frac{2}{3},\quad b'=-3,\quad c'=-1.$$

187. Рѣшить задачу 154, принимая:

$$u_0 = -1, \qquad u_1 = -2.$$

188. Рѣшить задачу 155, принимая:

$$u_0 = -\frac{1}{2}, \qquad u_1 = 1.$$

189. Рѣшить задачу 156, принимая:

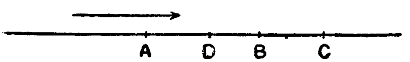
$$u_0 = -1, \qquad u_1 = 1, \qquad u_2 = -2{,}5.$$

Глава XII.

ПРИМѢНЕНІЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХЪ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХЪ ЧИСЕЛЪ; РАВНОМѢРНОЕ ДВИЖЕНІЕ.

I. ОПРЕДѢЛЕНІЕ ТОЧКИ НА ОСИ И СОБЫТІЯ ВО ВРЕМЕНИ.

99. Опредѣленіе точки на оси. Подъ осью мы разумѣли прямую линію, на которой установлено положительное направленіе; противоположное направленіе мы называемъ отрицательнымъ (**85**). Если дана ось и на ней извѣстно положеніе точки A, то, чтобы найти положеніе на ней другой точки B, достаточно знать единицу длины и алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{AB}$. Если же намъ извѣстны обѣ точки A и B, то для опредѣленія положенія третьей точки C на оси мы можемъ поступать двояко: а именно: можно задать либо разстояніе $\overline{AC}$, либо $\overline{BC}$. Если же мы теперь будемъ считать всѣ три точки A, B и C за извѣстныя, то мы можемъ опредѣлить положеніе четвертой точки D тремя способами, въ зависимости отъ того, воспользуемся ли мы для этого точкой A, точкой B или точкой C.



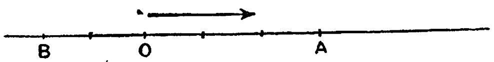
Фиг. 4.

Такъ, напримѣръ, на фигурѣ 4-ой опредѣлены послѣдовательно точки B, C и D, такимъ образомъ, что точка A принята за извѣстную и затѣмъ начерчены слѣдующіе отрѣзки:

$$\overline{AB} = 5, \qquad \overline{BC} = 3, \qquad \overline{CD} = -5.$$

Однако, употребленный здѣсь способъ можетъ быть иногда неудобнымъ въ томъ отношеніи, что, напримѣръ, для разысканія относительнаго положенія точекъ A и D нужно предварительно сдѣлать вычисленіе: въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы изъ A придти въ D, нужно пройти черезъ промежуточные пункты B и C. Чтобы избѣжать этого неудобства, лучше всего положеніе каждой точки опредѣлять по отношенію къ одной опредѣленной, постоянной точкѣ. Эту точку называютъ **начальной точкой** и обозначаютъ ее обыкновенно буквой O (origo = начало). На основаніи того, что установлено въ п.п. **85** и **86**, положеніе точки A по отношенію къ точкѣ O опредѣляется алгебраическимъ значеніемъ отрѣзка $\overline{OA}$. Этотъ отрѣзокъ называютъ **абсциссой** точки A, а отсюда точку O принято точнѣе называть **началомъ абсциссъ**.

Такъ, напримѣръ, на фигурѣ 5 абсцисса точки A равна 3, а абсцисса точки B равна — 2; это легко видѣть, такъ какъ ось раздѣлена черточками на равныя части (скала). Сводя все вышеизложенное, мы можемъ сказать:

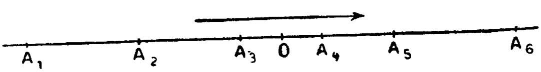


Фиг. 5.

Опредѣленіе. Если дана ось, постоянная точка O на этой оси и единица длины, то абсцисса какой-либо точки A на оси есть алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{OA}$.

100. Измѣненія абсциссы. Если точка A движется по оси, между тѣмъ какъ начальная точка O сохраняетъ свое прежнее положеніе, то абсцисса точки A измѣняется. Всякому положительному или отрицательному числу соотвѣтствуетъ одна и только одна точка A, абсцисса которой выражается этимъ числомъ.

Изслѣдуемъ измѣненія абсциссы, когда точка A, исходя отъ точки, лежащей въ отрицательномъ направленіи и очень отдаленной, постоянно подвигается въ положительномъ направленіи и принимаетъ послѣдовательно положенія A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, (фиг. 6). Абсцисса точки A_1 равна алгебраическому значенію отрѣзка $\overline{OA_1}$. Она выражается, слѣдовательно, отрицательнымъ числомъ, абсолютное значеніе котораго равно длинѣ OA_1. Это абсолютное значеніе тѣмъ больше, чѣмъ болѣе точка A_1 удалена отъ точки O. Если теперь движущаяся точка достигаетъ положеній A_2 и A_3, то абсцисса остается отрицательной, но абсолютное значеніе ея становится все меньше и меньше. Оно будетъ равнымъ нулю, когда точка A совпадаетъ съ точкой O. Если точка A будетъ продолжать двигаться въ томъ же напра-



Фиг. 6.

вленіи, то абсцисса станетъ положительной. Вначалѣ она очень мала, но постепенно становится все больше и больше (положенія A_4, A_5, A_6).

Опредѣленіе. Если разность двухъ чиселъ $a-b$ есть число положительное, то говорятъ, что число a больше числа b; если же разность $a-c$ есть число отрицательное, то говорятъ, что число a меньше числа c.

Въ этомъ случаѣ также пишутъ (ср. п. **7**):

$$a > b;\ a < c.$$

Напримѣръ:

$$7 > 4;\ 4 < 7;$$

такъ какъ $7-4$ есть число положительное. Точно такъ же:

$$7 > -4;\ -4 < 7;$$

такъ какъ $7-(-4)=11$ есть число положительное. И наконецъ:

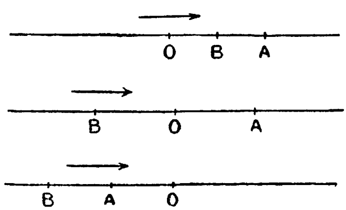
$$-4 > -7;\ -7 < -4;$$

такъ какъ $(-4)-(-7)=-4+7=3$ есть число положительное

Если поэтому a есть положительное число, а b — отрицательнэе, то всегда $a > b$. Если же a и b суть оба числа отрицательныя, то $a > b$ въ томъ и только въ томъ случаѣ когда абсолютное значеніе a меньше абсолютнаго значенія b.

Алгебраическое число называется правильной дробью, если оно одновременно больше, чѣмъ -1, и меньше, чѣмъ $+1$; оно называется неправильной дробью, если оно меньше, чѣмъ -1, или больше чѣмъ $+1$.

Изображеніе числа посредствомъ точки, абсцисса которой равна этому числу, даетъ намъ простой образъ, разъясняющій и оправдывающій понятія больше и меньше въ примѣненіи къ алгебраическимъ числамъ. Обозначимъ черезъ A точку, абсцисса которой есть a, а черезъ B точку, абсцисса которой есть b. Тогда не трудно доказать (фиг. 7), что при



Фиг. 7.

$$a > b$$

точка A будетъ лежать направо отъ точки B на фигурѣ. Мы начертили фигуру для трехъ случаевъ: когда оба числа a и b имѣютъ положительныя значенія, когда a имѣетъ положительное, а b отрицательное значеніе, и, наконецъ, когда оба числа имѣютъ отрицательныя значенія.

Если мы примемъ во вниманіе опредѣленіе понятія больше, то результаты измѣненій абсциссы можно будетъ выразить слѣдующимъ образомъ.

Если точка A движется въ положительномъ направленіи, то абсцисса ея постоянно возрастаетъ т. е. принимаетъ все большія и большія значенія.

Напримѣръ, въ фигурѣ 6 мы имѣемъ:

$$\overline{OA_6} > \overline{OA_5} > \overline{AO_4} > \overline{AO_3} > \overline{OA_2} > \overline{OA_1}.$$

101. Разстояніе между двумя точками. Задача. Пусть даны абсциссы двухъ точекъ A и B. Требуется вычислить алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{AB}$.

Обозначимъ абсциссы данныхъ точекъ A и B черезъ a и b, т. е. положимъ

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b.$$

Намъ нужно вычислить алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{AB}$. По предложеніямъ, установленнымъ въ предыдущей главѣ, мы имѣемъ:

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$$

Повторимъ, что это означаетъ: Пройти отъ A до B значитъ то же, что пройти отъ A до O и потомъ отъ O до B.

Поэтому имѣемъ:

$$\overline{AB} = \quad -a + b = b - a.$$

Эта формула даетъ алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{AB}$, если мы ради краткости будемъ это алгебраическое значеніе обозначать черезъ $\overline{AB}$.

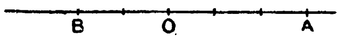
Правило 10-ое. Чтобы получить алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{AB}$, расположеннаго на оси, нужно вычесть абсциссу начальной точки A изъ абсциссы конечной точки B.

Абсолютное значеніе алгебраическаго числа $b - a$ даетъ всегда положительную длину отрѣзка $\overline{AB}$ или, иначе говоря, разстояніе между точками A и B.

Изъ правила 10-го слѣдуетъ, что алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{BA}$ равно $a - b$. Если мы поэтому примемъ начальную точку отрѣзка за конечную и наоборотъ, то измѣнится лишь знакъ алгебраическаго значенія этого отрѣзка.

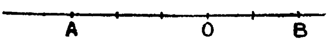
Начинающимъ полезно уяснить себѣ правило 10 на примѣрахъ.

Примѣръ I.



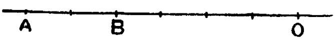
$$\overline{OA} = a = 3, \qquad \overline{OB} = b = -2,$$
$$\overline{AB} = -2 - 3 = -5.$$

Примѣръ II.



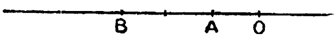
$$\overline{OA} = a = -3, \qquad \overline{OB} = b = 2,$$
$$\overline{AB} = 2 - (-3) = 5$$

Примѣръ III.



$$\overline{OA} = a = -6, \qquad \overline{OB} = b = -4,$$
$$\overline{AB} = -4 - (-6) = 2.$$

Примѣръ IV.



Фиг. 8.

$$\overline{OA} = a = -1, \qquad \overline{OB} = b = -3,$$
$$\overline{AB} = -3 - (-1) = -2.$$

102. Опредѣленіе событія во времени. Чтобы опредѣлить положеніе событія (момента) во времени, избираютъ вполнѣ опредѣленный моментъ времени, который называютъ началомъ временъ, и единицу времени. Моментъ времени нѣкотораго событія выражаютъ положительнымъ числомъ, если событіе происходитъ позже начала временъ, и отрицательнымъ, если оно происходитъ раньше[1]); абсолютное значеніе этого числа выражаетъ промежутокъ времени, отдѣляющій это событіе отъ начала временъ.

Для примѣра примемъ за начало временъ полдень 12-го января 1908 года, за единицу времени — часъ. Если различличныя событія происходятъ 12-го января въ 11 часовъ вечера, 13-го января въ 8 часовъ утра, 11-го января въ 9 часовъ вечера, 12-го января въ 8 часовъ утра, то ихъ времена послѣдовательно равны: $+11$, $+20$, -15, -4.

103. Промежутокъ времени, отдѣляющій два событія. Если намъ извѣстны времена двухъ событій A и B, то промежутокъ времени, отдѣляющій ихъ, равенъ времени событія B, уменьшенному на время событія A. Полученный такимъ образомъ промежутокъ времени имѣетъ положительное значеніе, если событіе A происходитъ раньше B, и отрицательное значеніе, если событіе A происходитъ послѣ B. Напримѣръ, промежутокъ времени, отдѣляющій два событія, времена которыхъ суть -15 и $+20$, равенъ $20-(-15)=35$, т. е. отъ 9-ти часовъ вечера 11 января до 8-ми часовъ утра 13 января прошло 35 часовъ.

Замѣчаніе относительно исчисленія времени. Въ христіанскихъ странахъ принято для исчисленія времени считать началомъ время рожденія Іисуса Христа,— т. е. считаютъ такъ, какъ если бы Христосъ родился 1-го января 1-го года въ полночь[2]); слѣдовательно, этотъ моментъ времени долженъ быть обозначенъ нулемъ. Событіе, падающее на середину 1-го года, имѣетъ время, которое обозначаютъ черезъ $\frac{1}{2}$ или 0,5, если за единицу принимается годъ; событіе, падающее на середину 10-го года, имѣетъ время 9,5.

Годы до Рождества Христова хронологи называютъ: 1-мъ годомъ до Рождества Христова, 2-мъ годомъ до Рождества Христова и т. д.; нулемъ не обозначается никакой годъ. Та-

1) По существу можно было бы выбрать знаки въ обратномъ порядкѣ; но соглашеніе, установленное въ текстѣ, является общеупотребительнымъ.

2) Мы оставляемъ въ сторонѣ небольшія затрудненія, проистекающія отъ того, что сначала пользовались Юліанскимъ календаремъ, а потомъ ввели Грегоріанскій; точно такъ же мы, ради простоты, не принимаемъ во вниманіе високосныхъ годовъ, а считаемъ всѣ годы равными.

кимъ образомъ, событію, происшедшему 1-го октября 1-го года до Рождества Христова, т. е. за 3 мѣсяца до Рождества Христова, соотвѣтствуетъ время $-\frac{1}{4}$, а событію, происшедшему 1-го мая въ 34 году до Р. Х., т. е. за 33 г. и 7 м. до Р. Х., соотвѣтствуетъ время $-33\frac{7}{12}$,— все въ предположеніи, что за единицу времени принимается годъ. Теперь очень легко вычислить промежутокъ времени, раздѣляющій два событія, изъ которыхъ одно происходитъ до Р. Х., а другое послѣ Р. Х.

Примѣръ. Нѣкто родился 1-го мая 12-го года до Р. Х., а умеръ 1-го сентября 45-го года послѣ Р. Х. Какъ долго онъ жилъ?

Если примемъ за единицу времени годъ, то моментъ времени его рожденія выразится числомъ $-11\frac{7}{12}$ а моментъ смерти числомъ $44\frac{8}{12}$. Поэтому число лѣтъ, которое онъ прожилъ выразится такъ:

$$44\frac{8}{12}-\left(-11\frac{7}{12}\right)=44\frac{8}{12}+11\frac{7}{12}=55\frac{15}{12}=56\frac{3}{12}.$$

Отвѣтъ, слѣдовательно, будетъ: 56 лѣтъ 3 мѣсяца.

II. ИЗМѢНЕНІЯ НАЧАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

104. Точки на оси, измѣненіе начальной точки абсциссъ. Часто приходится измѣнять начало абсциссъ; это значитъ, что извѣстны абсциссы различныхъ точекъ на оси для начальной точки O, а нужно вычислить абсциссы тѣхъ же точекъ, если начальной точкой на оси будетъ избрана другая точка O'. Для этого, очевидно, необходимо знать положеніе точки O' по отношенію къ O, т. е. алгебраическое число, измѣряющее отрѣзокъ $\overline{OO'}$; иначе говоря, нужно считать извѣстною абсциссу новой начальной точки по отношенію къ старой.

Достаточно тогда примѣнить формулу:

$$\overline{OA}=\overline{OO'}+\overline{O'A},$$

такъ какъ отсюда слѣдуетъ:

$$\overline{O'A}=\overline{OA}-\overline{OO'}.$$

Такимъ, образомъ получаемъ правило:

Правило 11-ое. Абсцисса точки A по отношенію къ новому началу равна абсциссѣ A по отношенію къ старому началу безъ абсциссы новаго начала по отношенію къ старому.

Если обозначимъ черезъ a абсциссу точки A по отношенію къ точкѣ O, черезъ a' абсциссу точки A по отношеніи къ O', черезъ d абсциссу точки O' по отношеніи къ O, то будетъ имѣть мѣсто основная формула:

$$a' = a - d,$$

которую слѣдуетъ знать также въ эквивалентной формѣ:

$$a = a' + d,$$

105. Измѣненіе начала временъ. Въ случаѣ измѣненія начала временъ получимъ, естественно, то же правило; мы ограничимся его формулировкой;

Правило 12-ое. Время событія по отношенія къ новому началу равно его времени по отношенію къ старому началу, уменьшенному на время новаго начала по отношенію къ старому.

Примѣръ I. Возьмемъ за начало временъ моментъ, когда карманные часы Павла показываютъ полдень, и за единицу примемъ минуту. Когда Павелъ уходилъ, часы его показывали 12 часовъ и 23 минуты; слѣдовательно, время было равно 23. Мы желаемъ узнать, который часъ показывали въ тотъ же моментъ часы Якова. Примемъ за новое начало моментъ, когда карманные часы Якова показывали полдень. Если въ это мгновеніе карманные часы Павла показываютъ 12 часовъ 11 минутъ, то время новаго начала въ отношеніи къ старому будетъ $+11$. Поэтому время, когда Павелъ ушелъ, будетъ по отношенію къ новому началу $23 - 11 = 12$. Итакъ, карманные часы Якова показывали тогда 12 часовъ 12 минутъ.

Примѣръ II. Требуется при тѣхъ же условіяхъ опредѣлить, который часъ показываютъ карманные часы Павла, когда часы Якова показываютъ 12 часовъ и 3 минуты.

Въ этомъ примѣрѣ старымъ началомъ будетъ полдень по карманнымъ часамъ Якова, а новымъ началомъ—полдень по карманнымъ часамъ Павла. Отсюда время этого новаго начала въ отношеніи къ старому будетъ -11. Итакъ, мы получаемъ

$3-(-11)=14$; слѣдовательно, отвѣтъ будетъ $+14$, т. е. карманные часы Павла показываютъ 12 часовъ 14 минутъ.

III. УРАВНЕНІЕ РАВНОМѢРНАГО ДВИЖЕНІЯ.

106. Опредѣленіе равномѣрнаго движенія. Мы будемъ разсматривать нѣкоторую точку A, движущуюся по оси. Говорятъ, что движеніе точки A равномѣрно, если пути, проходимые ею въ равные промежутки времени, всегда равны, каковы бы ни были эти равные промежутки времени. Такимъ образомъ, путь, который точка проходитъ въ продолженіе часа всегда одинъ и тотъ же; — точно такъ же точка всегда проходитъ одинъ и тотъ же путь въ продолженіе минуты или въ продолженіе секунды.

При этомъ опредѣленіи не слѣдуетъ забывать, что точка движется по оси, т. е. что пути только тогда могутъ быть разсматриваемы, какъ равные, когда числа, ихъ измѣряющія, равны какъ по своему абсолютному значенію, такъ и по знаку.

Человѣкъ, идущій вдоль улицы равными шагами, подвигается приблизительно равномѣрно, если онъ идетъ все въ одномъ и томъ же направленіи; дѣло обстоитъ иначе, если онъ ходитъ, напримѣръ, въ полѣ туда и назадъ.

Скорость равномѣрнаго движенія есть путь, проходимый въ единицу времени. Для опредѣленія скорости нужно знать: 1) родъ движенія, 2) положительное направленіе, 3) единицу длины, 4) единицу времени.

Изъ опредѣленія скорости слѣдуетъ, что она измѣряется положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, смотря по тому, перемѣщается ли движущаяся точка въ положительномъ или въ отрицательномъ направленіи; отсюда мы и скорость называемъ для краткости положительной или отрицательной.

Когда говорятъ о скорости движущейся точки, то часто указываютъ единицу длины и единицу времени; напримѣръ, говорятъ, что скорость нѣкотораго автомобиля равна 30 км. въ часъ. Можно также сказать: скорость равна 30, если километръ и часъ принимаемъ за единицы. То-же самое будетъ сказать: скорость равна 500, если принимаемъ за единицы метръ и минуту, или же равна $833\frac{1}{3}$, если принимаемъ за единицы сантиметръ и секунду; потому что пройти 30 км. въ часъ это значитъ пройти 500 м. въ минуту или $833\frac{1}{3}$ см. въ секунду.

107. Уравненіе равномѣрнаго движенія. Мы желаемъ опредѣлить, какой путь s можно пройти въ t секундъ при скорости, равной c см. въ секунду. Если t равно, напримѣръ, 12, то можно разсуждать слѣдующимъ образомъ: путь, проходимый въ одну секунду, равенъ, по опредѣленію, c см. Путь, который можно пройти въ 12 секундъ, въ двѣнадцать разъ больше. Если мы обозначимъ черезъ c алгебраическое число, измѣряющее его, когда за единицу длины принятъ сантиметръ, то мы получимъ равенство

$$s = 12c,$$

или же болѣе общее,—для t секундъ:

$$s = ct.$$

Такимъ образомъ, путь, пройденный тѣломъ, измѣряется произведеніемъ скорости на число, измѣряющее время. Это—формула равномѣрнаго движенія; ее называютъ также уравненіемъ равномѣрнаго движенія.

Въ этомъ доказательствѣ мы предполагали, что число t имѣетъ положительное значеніе. Тогда s имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и c, что соотвѣтствуетъ нашему замѣчанію о знакѣ скорости. Если скорость имѣетъ положительное значеніе, то и путь выражается положительнымъ числомъ; движущаяся точка двигалась постоянно въ положительномъ направленіи, она прошла положительный отрѣзокъ. Обратное имѣетъ мѣсто, когда скорость имѣетъ отрицательное значеніе.

Примемъ теперь, что t есть число отрицательное. Какъ мы должны понимать путь, который пройденъ въ отрицательный промежутокъ времени? Въ данный моментъ движущаяся точка находится въ A; въ моментъ времени -3, т. е. 3 секунды тому назадъ (если секунда принята за единицу времени) она находилась въ B. Мы говоримъ, что отрѣзокъ $\overline{AB}$ есть путь, соотвѣтствующій промежутку времени -3; это есть отрѣзокъ, который мы должны пройти, чтобы изъ даннаго положенія придти въ то положеніе, которое движущаяся точка занимаетъ въ моментъ времени -3; точно такъ же, какъ путь, проходимый ею въ продолженіе времени $+3$, представляетъ отрѣзокъ, который нужно пройти, чтобы изъ даннаго положенія придти въ то положеніе, въ которомъ движущаяся точка находится въ моментъ $+3$.

Каково алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{AB}$? Оно противоположно значенію отрѣзка $\overline{BA}$. Но алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{BA}$, который точка проходитъ въ промежутокъ времени $+3$, равно $3c$ см. Слѣдовательно, мы получимъ:

$$\overline{AB} = c \cdot (-3),$$

т. е., и въ этомъ случаѣ

$$s = ct.$$

Если поэтому t имѣетъ отрицательное значеніе, а скорость положительное, то $\overline{AB}$ будетъ отрицательнымъ отрѣзкомъ. Если, напротивъ того, скорость отрицательна, то $\overline{AB}$ будетъ положительнымъ отрѣзкомъ. Итакъ, s имѣетъ положительное значеніе, если c и t имѣютъ отрицательныя значенія. Мы придемъ къ тому же самому выводу, если въ уравненіи

$$s = ct$$

при отрицательныхъ c и t примѣнимъ опредѣленіе произведенія двухъ отрицательныхъ чиселъ, данное нами раньше (п. **93**). Въ этомъ мы вновь находимъ оправданіе даннаго выше опредѣленія умноженія, къ которому, впрочемъ, привели бы насъ и другія задачи изъ повседневной жизни.

Примѣръ. Поѣздъ идетъ по пути Берлинъ-Ганноверъ, который мы принимаемъ за прямолинейный со скоростью 80 км. въ часъ по направленію изъ Ганновера въ Берлинъ. Въ 12 минутъ перваго онъ находится на разстояніи 30 км. отъ Берлина. Гдѣ былъ онъ въ 3 минуты перваго?

Примемъ направленіе изъ Берлина къ Ганноверу за положительное, за единицу длины примемъ километръ, за единицу времени — минуту. Въ такомъ случаѣ скорость равна $-\frac{4}{3}$, потому что 80 км. въ часъ соотвѣтствуютъ $\frac{4}{3}$ км. въ минуту, и движеніе происходитъ въ отрицательномъ направленіи. Намъ извѣстно мѣстопребываніе поѣзда A въ 12 минутъ перваго; мы хотимъ опредѣлить мѣстопребываніе его B въ 3 минуты перваго. Отрѣзокъ

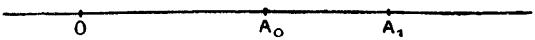
$\overline{AB}$ пройденъ слѣдовательно, въ 9 минутъ. Отсюда по общей формулѣ:

$$\overline{AB} = -9 \cdot (-\tfrac{4}{3}) = +12.$$

Такъ какъ разстоянie между точкой A и Берлиномъ равно 30 км., то разстоянie точки B отъ Берлина равно $30 + 12 = 42$ км. Итакъ, отвѣтъ: Поѣздъ былъ на разстоянiи 42 км. отъ Берлина.

108. Общая форма уравненiя равномѣрнаго движенiя. Только-что разсмотрѣнный примѣръ приводитъ насъ къ тому, чтобы поставить болѣе общую задачу: Извѣстна абсцисса движущейся точки въ данный моментъ времени. Какъ велика та же абсцисса въ другой моментъ времени?

Обозначимъ черезъ t_0 время, для котораго намъ извѣстна абсцисса x_0 движущейся точки; движущаяся точка



Фиг. 9.

находится тогда въ точкѣ A_0. Мы желаемъ опредѣлить абсциссу x_1 точки A_1, въ которой находится движущаяся точка въ моментъ t_1, если она движется равномѣрно со скоростью v, причемъ абсциссы и скорости измѣряются одной и той же единицей длины.

Имѣемъ, съ одной стороны:

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_0} + \overline{A_0A_1};$$

съ другой стороны:

$$\overline{A_0A_1} = v\,(t_1 - t_0),$$

такъ какъ $\overline{A_0A_1}$ есть путь, пройденный въ промежутокъ времени $t_1 - t_0$. Это время положительное, если t_1 обозначаетъ моментъ, слѣдующiй за t_0, и отрицательное въ противоположномъ случаѣ.

Но такъ какъ $\overline{OA_1} = x_1$, $\overline{OA_0} = x_0$, то получимъ:

$$x_1 = x_0 + v\,(t_1 - t_0).$$

Это самая общая форма, которую можно придать уравненiю равномѣрнаго движенiя. Въ этой формулѣ x_0 обозначаетъ абсциссу, соотвѣтствующую моменту t_0, а x_1, абсциссу, соотвѣтствующую моменту t_1.

По этой формулѣ очень быстро рѣшается задача предыдущаго пункта. Если мы обозначимъ искомое разстояніе черезъ x_1, то будемъ имѣть:

$$x_0 = 30, \qquad v = -\tfrac{4}{3},$$
$$t_0 = 12, \qquad t_1 = 3,$$

въ предположеніи, что единицей времени служитъ минута, а началомъ времени—полдень; отсюда слѣдуетъ:

$$x_1 = 30 + (-\tfrac{4}{3}) \cdot (3 - 12) = 30 + (-\tfrac{4}{3}) \cdot (-9) = 42,$$

что согласно съ найденнымъ выше результатомъ.

Разсмотримъ еще одну задачу.

Задача. Два велосипедиста ѣдутъ по одной улицѣ, первый со скоростью $+4$, второй со скоростью -5, причемъ за единицы приняты метръ и секунда. Въ 12 минутъ 13 секундъ перваго абсцисса перваго велосипедиста равна -50, абсцисса втораго равна $+300$. Каково разстояніе между ними въ 13 минутъ 2 секунды перваго?

Если примемъ за начало времени 12 минутъ перваго, то будемъ имѣть: $t_0 = 13$, $t_1 = 62$, такъ какъ за единицу времени принята секунда. Дальше, если обозначимъ черезъ x_0 и x_1 абсциссы перваго велосипедиста въ моменты времени t_0 и t_1, а абсциссы второго въ тѣ же моменты времени—черезъ y_0 и y_1, то, по предположенію, будетъ:

$$x_0 = -50, \qquad y_0 = +300.$$

По общей же формулѣ будетъ:

$$x_1 = x_0 + 4\,(t_1 - t_0),$$
$$y_1 = y_0 - 5\,(t_1 - t_0),$$

такъ какъ скорость перваго велосипедиста 4, а скорость второго — 5. Если мы въ эти формулы подставимъ вмѣстѣ x_0, y_0, t_0, t_1 ихъ значенія, то получимъ:

$$x_1 = -50 + 4\,(62 - 13) = -50 + 4 \cdot 49 = +146,$$
$$y_1 = 300 - 5\,(62 - 13) = 300 - 5 \cdot 49 = +55.$$

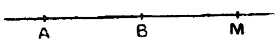
Разстояніе между двумя велосипедистами въ 13 минутъ 2 секунды перваго равно поэтому $146 - 55 = +91$; оно составляетъ, слѣдовательно, 91 метръ. Дальше, если въ это время первый велосипедистъ находится въ A, а второй въ B, такъ что абсцисса точки A больше абсциссы точки B, то алгебраическое число, измѣряющее отрѣзокъ $\overline{AB}$, будетъ равно -91.

IV. ОПРЕДѢЛЕНІЕ ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ ПРИ ПОМОЩИ ОТНОШЕНІЯ ЕЯ РАЗСТОЯНІЙ ОТЪ ДВУХЪ ПОСТОЯННЫХЪ ТОЧЕКЪ ЭТОЙ ПРЯМОЙ.

109. Предварительныя замѣчанія. Существуютъ различные способы, посредствомъ которыхъ можно численнымъ заданіемъ опредѣлить положеніе точки на оси. Такія числа называютъ координатами точки. Такъ, напримѣръ, абсцисса точки есть ея координата.

Опредѣленіе. Подъ отношеніемъ, въ которомъ данная точка M на оси дѣлитъ отрѣзокъ $\overline{AB}$, лежащій на той же оси, мы разумѣемъ значеніе алгебраической дроби $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

Это отношеніе $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ не измѣняется, если мы измѣняемъ направленіе, избранное нами за положительное. При такомъ измѣненіи отрѣзки $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$ оба мѣняютъ свои знаки и, слѣдовательно, ихъ частное остается безъ перемѣны. Поэтому разсматриваемое отношеніе не зависитъ отъ того, какое направленіе будетъ избрано за положительное, такъ что отношеніе можетъ быть этимъ путемъ опредѣлено на прямой, и нѣтъ необходимости превращать прямую въ ось.

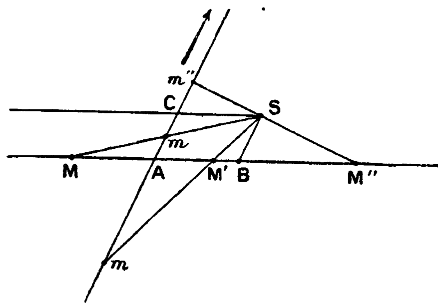


Фиг. 10.

Затѣмъ, отношеніе $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ не зависитъ также отъ выбора единицы длины. Поэтому его называютъ однородной координатой точки M по отношенію къ основнымъ точкамъ A и B. Прилагательное однородный означаетъ, что координата не зависитъ отъ единицы длины. Абсцисса точки не будетъ однородной координатой; дѣйствительно, если она равна 3, когда за единицу принятъ метръ, то она будетъ равна 300, если за единицу примемъ сантиметръ. Если же, напротивъ того, мы разсматриваемъ нѣкоторую точку M, для которой $\overline{MA} = 2\,\overline{MB}$ (фиг. 10), то отношеніе $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, равное 2, будетъ его однородной координатой, которая не зависитъ отъ единицы измѣренія.

110. Опредѣленіе точки посредствомъ однородной координаты. Мы желаемъ показать, что каждому положительному или отрицательному числу соотвѣтствуетъ одна и только одна точка, однородная координата которой равна этому числу. Для этого сдѣлаемъ слѣдующій чертежъ (фиг. 11).

Возьмемъ нѣкоторую точку S внѣ AB, соединимъ ее съ B и проведемъ черезъ A прямую, паралельную SB. Пусть C будетъ точкой пресѣченія этой прямой съ другой прямой, проведенной черезъ точку S паралельно AB. Четырехуголь $ABSC$ будетъ тогда параллелограммомъ. Будемъ разсматривать прямую AC, какъ ось, и на ней примемъ направленіе отъ A къ C за положительное. За начальную точку абсциссъ изберемъ точку A, а за единицу длины примемъ длину AC; тогда абсцисса точки A будетъ равна 0, а абсцисса точки C будетъ равна 1.



Фиг. 11.

Кромѣ того, пусть M будетъ перемѣнная точка прямой AB, Проведемъ SM и обозначимъ черезъ m точку пересѣченія прямыхъ SM и AC. Теперь докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема 58. Отношеніе $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ по величинѣ и знаку равно абсциссѣ точки m, если положительное направленіе, единица длины и начальная точка избраны такъ, какъ мы установили выше.

Мы разсмотримъ три случая, въ зависимости отъ того, лежитъ ли перемѣнная точка въ M, M' или въ M''; этимъ положеніямъ будутъ соотвѣтствовать точки m, m', m''. Изъ чертежа видно, что $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ точно такъ же, какъ $\frac{\overline{M''A}}{\overline{M''B}}$, имѣетъ положительное значеніе; абсциссы $\overline{Am}$ и $\overline{Am''}$ точно такъ же имѣютъ положительныя значенія. Отношеніе $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$ имѣетъ отрицательное значеніе, и вмѣстѣ съ тѣмъ отрицательное значеніе имѣетъ также и абсцисса $\overline{Am'}$. Итакъ, относительно знака не возникаетъ никакихъ затрудненій; достаточно поэтому обнаружить требуемую зависимость между абсолютными значеніями.

Треугольники MAm и MBS подобны, такъ какъ прямая Am паралельна BS. Отсюда

$$\frac{MA}{MB}=\frac{Am}{BS}.$$

Но $BS=AC=1$, такъ какъ мы приняли AC за единицу длины; отсюда, дѣйствительно, находимъ, что:

$$\frac{MA}{MB}=Am.$$

Подобные треугольники $M'Am'$ и $M'BS$ даютъ:

$$\frac{M'A}{M'B}=\frac{Am'}{BS}=Am'$$

а треугольники $M''Am''$, $M''BS$ даютъ подобное же равенство.

Мы можемъ теперь доказать слѣдующую теорему:

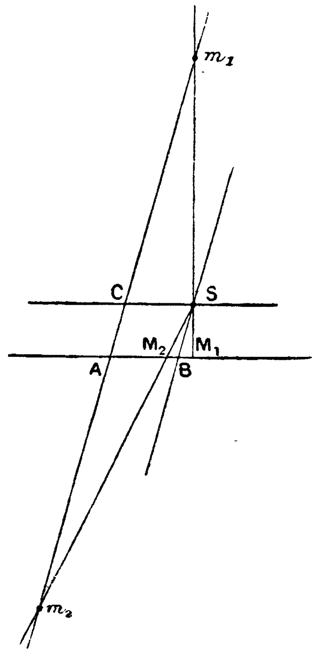
Теорема 59. Каждому положительному или отрицательному числу x соотвѣтствуетъ на оси AB вполнѣ опредѣленная точка M, однородная координата которой равна x.

Каждому числу x на вспомогательной прямой AC соотвѣтствуетъ опредѣленная точка m, абсцисса которой равна x. Чтобы поэтому получить точку M, достаточно провести прямую Sm и взять точку пересѣченія ея съ прямой AB.

Мы сказали, что абсцисса не есть однородная координата; между тѣмъ мы только что доказали, что однородная координата точки M равна абсциссѣ точки m. Могло бы казаться, что здѣсь кроется противорѣчіе. Нужно, однако, принять во вниманіе, что на вспомогательной прямой за единицу длины взята длина AC. Поэтому абсцисса точки m представляетъ собой вполнѣ опредѣленное число; оно не можетъ измѣниться отъ измѣненія единицы длины, такъ какъ мы точно оговорили, что единицей служитъ длина AC, строго опредѣляемая чертежемъ.

111. Нѣкоторыя исключенія. Всякой точкѣ m на прямой AC соотвѣтствуетъ точка M на прямой AB — и обратно. Однако, есть два исключенія. Во первыхъ, если прямая SM совпадаетъ съ SB, при чемъ точка M совпадаетъ съ точкой B, то не существуетъ точки m, такъ какъ прямая SM въ этомъ случаѣ параллельна AC. Во вторыхъ, если точка m совпадаетъ съ C, то не существуетъ вовсе точки M, такъ какъ теперь прямая Sm параллельна AB.

Разсмотримъ сначала первый изъ этихъ двухъ исключительныхъ случаевъ; дадимъ точкѣ M два положенія, очень близкихъ къ точкѣ B, одно — вправо, другое — влѣво отъ нея. Каждому такому положенію, какъ M_1 или M_2, соотвѣтствуетъ на вспомогательной прямой нѣкоторая точка, соотвѣтственно m_1 или m_2, абсцисса которой имѣетъ положительное или отрицательное значеніе, абсолютная же величина абсциссы тѣмъ больше, чѣмъ ближе къ B лежатъ точки M_1 или M_2. Такимъ образомъ, чѣмъ дальше точки m_1 и m_2 удаляются въ положительную или отрицательную сторону, тѣмъ больше точки M_1 и M_2 приближаются къ точкѣ B (фиг. 12) Это приводитъ насъ къ мысли выразиться такъ, что точка B соотвѣтствуетъ безконечно удаленной точкѣ прямой AC. Но это выраженіе не говоритъ ничего больше того, что было сказано выше, такъ какъ собственно нѣтъ такой безконечно удаленной точки, т. е. этой точкой пересѣченія не можетъ служить ни одна точка прямой AC, которую мы бы могли на ней отмѣтить. Мы вводимъ ее, однако, для того, чтобы каждой безъ исключенія точкѣ прямой AB соотвѣтствовала точка на прямой AC, и наоборотъ. Говорятъ также, что однородная координата точки B безконечно велика. Таково значеніе отношенія



Фиг. 12.

$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, если точка M совпададаетъ съ B, т. е. если $\overline{MB} = O$; и въ самомъ дѣлѣ, если $\overline{MB}$ очень мало, то отношеніе это по абсолютному значенію своему очень велико, и притомъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше $\overline{MB}$. Если $\overline{MB} = O$, то отношеніе это остается не опредѣленнымъ. Поэтому для обозначенія его нужно изобрѣсти новое слово; говорятъ, что отношеніе это безконечно велико, и пишутъ въ этомъ случаѣ:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \infty .$$

Точно такъ же нѣтъ (второй исключительный случай) ни одной точки на прямой AB, однородная координата которой была бы равна $+1$, такъ какъ SC паралельно AB. Само собой разумѣется, что нѣтъ такой точки M на AB, для которой $\overline{MA} = \overline{MB}$. Однако, мы говоримъ, что безконечно удаленная точка на AB имѣетъ однородную координату 1, и что эта точка будетъ точкой пересѣченія прямыхъ AB и SC. Въ этомъ случаѣ отношеніе $\overline{MA}$ къ $\overline{MB}$ будетъ тѣмъ ближе къ 1, чѣмъ дальше отстоитъ M отъ точекъ A и B.

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ XII.

190. Если мы примемъ за начало уровень воды въ океанѣ и за единицу длины метръ, то высоты нижепоименованныхъ горъ будутъ:

Гауризанкаръ (Азія)	8840
Чимборассо (Ю.-Америка) . . .	6253
Калиманджаро (Африка) . . .	6100
Эльборусъ (Европа)	5630
Большой Араратъ (Азія) . . .	5280
Монбланъ (Европа)	4810
Этна (Европа)	3313.

Въ какихъ числахъ выразились бы высоты этихъ горъ, если бы вмѣсто морского уровня мы отнесли ихъ къ высотѣ Монблана?

191. Величайшія глубины, измѣренныя въ моряхъ, суть слѣдующія:

	Широта	Долгота	Глубина
Тихій океанъ . . .	30° 25′ S.	179° W.	9416 м.
Японское море . . .	45° N.	150° O.	8510 м.
Атлантическій океанъ	19° 39′ N.	68° 44′ W.	8340 м.
Индійскій океанъ . .	23° S.	98° 15′ O.	5820 м.
Средиземное море . .	35° 45′ N.	16° O.	4400 м.

Эти глубины измѣрены отъ уровня морской поверхности. Въ какихъ числахъ выразятся онѣ, если за начальную точку примемъ вершину Чимборассо?

192. Слѣдующая таблица даетъ высоту положенія нѣкоторыхъ городовъ и заселенныхъ мѣстъ:

Токъ Діалунгъ (Азія)	4977 м.
Станція Пикъ (С.-Америка)	4358 м.
Якора (Ю.-Америка)	4170 м.
Обсерваторія Пикъ дю Миди (Франція) . . .	2870 м.
Богота (Ю.-Америка)	2650 м.
Сенъ-Веранъ (Франція)	2010 м.

Требуется вычислить высоту этихъ мѣстъ:

1) по отношенію къ вершинѣ Гауризанкара,

2) по отношенію къ вершинѣ Монблана,

3) по отношенію къ вершинѣ Этны,

4) по отношенію ко дну Средиземнаго моря на 35° 45′ сѣверной широты и 16° восточной долготы (Задача 191).

193. Когда въ Берлинѣ полдень, то часы нижеприведенныхъ обсерваторій показываютъ:

Антверпенъ	11	час.	24	мин.	4	сек.
Бернъ	11	»	36	»	11	»
Брюссель	11	»	23	»	54	»
Христіанія	11	»	49	»	19	»
Кенигсбергъ	12	»	28	»	24	»
Мадридъ	10	»	51	»	40	»
Миланъ	11	»	43	»	11	»
Москва	1	»	36	»	42	»
Парижъ	11	»	15	»	46	»
Римъ	11	»	56	»	20	»

Который часъ показываютъ всѣ эти часы, когда часы въ Бернѣ показываютъ полдень?

194. Путешественникъ ѣдетъ на автомобилѣ, который движется равномѣрно со скоростью — 30 км. въ часъ по дорогѣ отъ Берлина къ Лейпцигу, при чемъ за положительное принимаемъ направленіе отъ Берлина къ Лейпцигу. Въ полдень онъ находится на разстояніи 100 км. отъ Берлина. Гдѣ былъ онъ въ 48 минутъ двѣнадцатаго?

195. Поѣздъ идетъ со скоростью 10 м. въ секунду. Въ полдень онъ находится на разстояніи 50 км. отъ точки отправленія. Гдѣ будетъ онъ въ 12 мин. 13 секундъ перваго?

196. Два поѣзда отправляются по одной линіи, одинъ со скоростью + 40 км. въ часъ, другой со скоростью — 8 км. въ часъ. Въ 12 минутъ перваго абсцисса перваго поѣзда равна 12 км., въ 30 минутъ 15 секундъ перваго абсцисса второго поѣзда равна 400 км. Какое разстояніе раздѣляетъ оба поѣзда въ 15 минутъ второго?

197. Гдѣ и когда встрѣтятся два поѣзда предыдущей задачи, если они продолжаютъ двигаться съ тѣми же скоростями?

193. На прямой даны двѣ точки A и B. Нанести на чертежъ точки M, однородныя координаты кототорыхъ $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ имѣютъ значенія:

$$2,\quad 3,\quad 4,\quad -1,\quad -2,\quad -3,\quad -4,$$

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4}.$$

Указать при каждой точкѣ ея однородную координату.

199. Часы въ Нью-Іоркѣ въ сравненіи съ часами Берлина отстаютъ на 5 часовъ 49 минутъ 29 секундъ. Часы Петербурга въ сравненіи съ часами Берлина спѣшатъ на 1 часъ 8 минутъ 36 секундъ. Какая разница между нью-іоркскимъ и петербургскимъ временемъ?

200. Подъ Юліанскимъ періодомъ разумѣютъ счисленіе времени, которое изобрѣлъ Іосифъ Скалигеръ, хронологъ 16 столѣтія, для того чтобы легко устанавливать и сравнивать между собою историческіе моменты. Начало Юліанскаго періода относится къ 4713-му году до христіанской эры, такъ что 1-ый годъ нашего христіанскаго лѣтосчисленія какъ разъ совпадаетъ съ 4714 годомъ лѣтосчисленія Скалигера. Требуется, пользуясь этими данными, опредѣлить для христіанской эры слѣдующіе моменты времени, отнесенныя къ Юліанскому періоду Скалигера.

Начало іудейскаго лѣтосчисленія: 7 октября 953;
начало счисленія по Олимпіадамъ: іюль 3938;
основаніе Рима: 3961;
начало лѣтосчисленія Набонассара: 26 февраля 3967;
начало Гегиры: 16 іюля 5335;
начало республиканскаго календаря: 22 сентября 6505.

201. Велосипедистъ подвигается по дорогѣ изъ Гамбурга во Франкфуртъ на М. со скоростью $+15$ км. въ часъ, при чемъ направленіе отъ Гамбурга къ Франкфурту принято за положительное. Въ 3 часа онъ находится отъ Гамбурга на разстояніи 40 км. Гдѣ будетъ онъ въ 5 часовъ? Гдѣ былъ онъ въ 30 минутъ второго?

202. Два автомобилиста ѣдутъ, одинъ со скоростью 30 км. въ часъ другой со скоросью — 15 км. въ часъ. Въ 23 минуты третьяго пространство, раздѣляющее ихъ, равно 3 км. Какъ велико оно въ 40 минутъ третьяго? Какъ велико было оно въ 12 минутъ третьяго?

203. Вообразимъ себѣ платформу, подобную подвижному пути парижской выставки 1900 года, которая движется равномѣрно, скользя сама по себѣ. Прохожій пробѣгаетъ платформу, двигаясь равномѣрно. Требуется показать, что дѣйствительная скорость прохожаго, т. е. та скорость, которую могъ бы измѣрить наблюдатель, стоящій внѣ платформы (абсолютная скорость), равна его собственной скорости на платформѣ (относительная скорость) увеличенной на скорость платформы (скорость переносная).

204. Въ предыдущей задачѣ примемъ, что скорость платформы равна 5 км. въ часъ, и что прохожій подвигается по платформѣ со скоростью, равной 6 км. Какою представляется его скорость для наблюдателя, стоящаго внѣ платформы, 1) если онъ движется въ томъ же направленіи, какъ и платформа? 2) если онъ движется въ противоположномъ направленіи?

205. Какъ велико разстояніе между Полярной Звѣздой и землею, если скорость свѣта въ пустомъ пространствѣ равна 300 000 км. въ секун-

ду и свѣтъ Полярной Звѣзды употребляетъ 46 лѣтъ 6 мѣсяцевъ на то, чтобы достигнуть земли?

206. Разстояніе между Сиріусомъ и землей равно $83 \cdot 10^{18}$ км. Сколько времени долженъ употребить свѣтъ, чтобы пройти это разстояніе?

207. Примемъ, что скорость звука въ воздухѣ равна 340 м. въ секунду. На какомъ разстояніи долженъ произойти звукъ, чтобы мы восприняли его лишь черезъ 30 секундъ послѣ возникновенія?

208. Скорость скораго поѣзда Берлинъ-Гамбургъ составляетъ 84 км. въ часъ. Сколько метровъ дѣлаетъ онъ въ 5 секундъ?

209. Начальная скорость ружейной пули равна 450 м. въ секунду. Примемъ, что движеніе ея равномѣрно и прямолинейно. Какое время понадобится чтобы снарядъ достигъ цѣли, отстоящей на 2 км.?

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНІЯ ГЛАВЪ X, XI, XII.

210. Вычислить значеніе x по формулѣ:

$$x = [a(b-c)+d]\left[\frac{a+b}{c-d}-(b-3)(a^2-5)\right],$$

принимая:

$$a=-1,\quad b=2,\quad c=3,\quad d=4.$$

211. Рѣшить ту же задачу, принимая:

$$a=\frac{-2}{3},\qquad b=\frac{3}{4},\qquad c=0{,}35,\qquad d=-0{,}1.$$

212. Вычислить значеніе y по формулѣ:

$$y=\{[(a+b)c+1](a-b)+2\}\cdot\{[(a+b)c+1]d-3\},$$

принимая:

$$a=2,\quad b=-1,\quad c=1,\quad d=-2.$$

213. Рѣшить ту же задачу, принимая:

$$a=\frac{-1}{2},\qquad b=-0{,}1,\qquad c=\frac{3}{-2},\qquad d=1.$$

214. Объемъ нѣкотораго тѣла выражается формулой:

$$V=\frac{3abcd}{a+b+c+d},$$

гдѣ a, b, c, d обозначаютъ четыре длины, выраженныя въ метрахъ. V выражено въ кубическихъ метрахъ. Нужно вычислить объемъ V, зная, что упомянутыя длины равны соотвѣтственно 35 см., 120 мм., 2 м., $2\frac{5}{6}$ м.

215. Движущаяся точка перемѣщается по оси со скоростью — 35, причемъ за единицы длины и времени приняты метръ и секунда. Въ 12 ч. абсцисса ея была равна 25 км. Какъ велика она въ 5 минутъ 35 секундъ перваго?

216. По линіи желѣзной дороги идутъ два поѣзда другъ другу на встрѣчу. Въ полдень они находятся другъ отъ друга на разстояніи въ 75 км. Вычислить, когда они встрѣтятся, зная, что скорость перваго равна 22,75 м. въ секунду, а скорость второго составляетъ $1\frac{1}{3}$ км. въ минуту?

217. На оси даны начачальная точка O и другая начальная точка O', абсцисса которой по отношенію къ точкѣ O равна 12 мм. На той же оси даны еще три точки A, B, C, абсциссы которыхъ по отношенію къ точкѣ O соотвѣтственно равны: 8, $\frac{2}{3}$, —0,15, при чемъ единицей длины служитъ сантиметръ, и три точки A', B', C', абсциссы которыхъ по отношенію къ точкѣ O' равны соотвѣтственно: $\frac{-2}{150}$, 0,002, $\frac{-4}{875}$, при чемъ единицей служитъ метръ. Вычислить отрѣзки AA', BB', CC'. Сдѣлать чертежъ.

218. Пусть a и b будутъ абсциссы двухъ точекъ A и B, а c—абсцисса точки C, середины отрѣзка AB. Требуется доказать, что c выражается формулой:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Доказать эту формулу сначала въ предположеніи, что a и b имѣютъ положительныя значенія, а затѣмъ показать, что общій случай можно свести къ этому частному посредствомъ измѣненія начальной точки.

219. На оси даны n точекъ; опредѣлить на той же оси точку O, обладающую свойствомъ, что, если ее принять за начало, то сумма абсциссъ этихъ n точекъ будетъ равна нулю.

220. Нѣкоторое число молодыхъ людей организуютъ состязаніе въ видѣ велосипедной гонки на слѣдующихъ условіяхъ: они отправляются въ одно и то же время и устанавливаютъ моменты прибытія къ цѣли. Затѣмъ устанавливается нѣкоторый моментъ времени A, и тѣ, которые пріѣдутъ раньше этого времени, получать столько копеекъ, сколько секундъ прошло между моментомъ ихъ прибытія и временемъ A; между тѣмъ тѣ, которые прибудутъ послѣ момента A, уплатятъ столько же копеекъ, сколько секундъ прошло отъ момента A до ихъ прибытія. Какимъ образомъ нужно избрать моментъ A, чтобы общая сумма копеекъ, полученная выигравшими, равнялась общей суммѣ, уплоченной проигравшими?

Примѣнить рѣшеніе къ случаю, когда 5 состязающихся прибываютъ послѣдовательно въ нижеслѣдующіе моменты:

Иванъ	въ 12 ч. 15 м. 35 с.
Яковъ	въ 12 ч. 8 м. 15 с.
Павелъ	въ 11 ч. 59 м. 45 с.
Людовикъ	въ 12 ч. 13 м. 50 с.
Филиппъ	въ 12 ч. 20 м. 40 с.

221. Состязаніе на большомъ разстояніи организуется на условіяхъ, подобныхъ условіямъ предыдущей задачи; устанавливаютъ однако, что сумма, которую нужно уплатить или получить, составляетъ 5 копеекъ за минуту и что время прибытія считаютъ въ круглыхъ четвертяхъ часа. Каковъ будетъ результатъ состязанія, если 8 состязающихся прибыли въ 11 ч. 30 м., 12 состязающихся — въ 11 ч. 45 м., 30 — въ 12 ч. 0 м., 18 — въ 12 ч. 15 м., 6 — въ 12 ч. 30 м., 2 — въ 12 ч. 45 м. и 1 — въ 1 ч. 15 м.?

222. Два велосипедиста ѣдутъ въ одномъ и томъ же направленіи по круговому пути длиной въ 500 м. Скорость перваго равна 30 км. въ часъ, скорость второго 8,75 м. въ секунду. Дальше, извѣстно, что первый проѣзжаетъ начальную точку (стартъ) въ 12 ч. 2 м. 15 с., между тѣмъ какъ другой проходитъ черезъ нее лишь въ 1 ч. 1 м. 5 с. Въ какое время между 12 ч. и 1 ч. нагонитъ одинъ велосипедистъ другого?

223. Одинъ путешественникъ отправляется въ полдень и идетъ безъ остановки со скоростью 4 км. въ часъ. Второй путешественникъ, отправляющійся въ 1 ч., хочетъ догнать его и рѣшаетъ поступить слѣдующимъ образомъ. Въ продолженіе 55 мин. онъ будетъ идти со скоростью 6 км. въ часъ, отдохнетъ 5 мин., а затѣмъ будетъ идти дальше съ той же скоростью. Когда второй путешественникъ догонитъ перваго?

224. Доказать, что n-тая степень отрицательнаго числа будетъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, смотря по тому, будетъ ли n четнымъ или нечетнымъ числомъ. Вычислить значеніе выраженія:

$$3+(-1)^n 4+(-1)^{2n} 5+(-1)^{5n+1} 7,$$

при чемъ n принимаемъ послѣдовательно за четное и нечетное.

225. Вычислить значеніе y по формулѣ:

$$y=5x^4-4x^2+3,$$

принимая: $x=-2$.

226. Вычислить значеніе z по формулѣ:

$$z=3x^2y^2-4x^2y+\frac{1}{10}xy^2-xy+y^4,$$

принимая: $x=-0{,}1$; $y=10$.

227. Въ какомъ соотношеніи находятся при произвольномъ выборѣ начальной точки абсциссы четырехъ точекъ A, B, C, D на прямой, образующихъ гармоническую группу, т. е. такихъ точекъ, для которыхъ

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\,?$$

228. Что вытекаетъ изъ предшествующаго равенства, если примемъ, что начало абсциссъ совпадаетъ съ серединою AB? Что вытекаетъ изъ него, если начальная точка совпадаетъ съ точкой A?

229. Доказать, что для разстояній l, m, n точки P внутри равносторонняго треугольника отъ сторонъ этого треугольника имѣютъ мѣсто равенство:

$$l+m+n=h,$$

въ которомъ h обозначаетъ высоту треугольника. Какое соглашеніе въ отношеніи знака нужно сдѣлать для того, чтобы это равенство было справедливо при всякомъ положеніи точки P въ плоскости треугольника?

Глава XIII.

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАГО СЧИСЛЕНІЯ.

I. ОДНОЧЛЕНЫ, МНОГОЧЛЕНЫ, ПОДОБНЫЕ ЧЛЕНЫ.

112. Раціональныя алгебраическія выраженія. Подъ алгебраическимъ выраженіемъ мы понимали (п. 72) соединеніе чиселъ, буквъ и знаковъ дѣйствій, составленное такъ, что можно вычислить значеніе выраженія, когда входящимъ въ него буквамъ приписаны оредѣленныя численныя значенія.

Опредѣленіе. Алгебраическое выраженіе называется раціональнымъ, если дѣйствія, которыя нужно произвести *надъ буквами*, суть сложеніе, вычитаніе, умноженіе [1]) и дѣленіе, но не извлеченіе корня.

Сообразно съ этимъ выраженія

$$\frac{a}{b}, \quad 3a, \quad \sqrt{3}bc + \sqrt{7}d$$

будутъ раціональными алгебраическими выраженіями, несмотря на то, что третье изъ нихъ заключаетъ въ себѣ знаки корня; эти знаки извлеченія корня относятся, однако, исключительно къ числамъ. Напротивъ того,

$$b + 3\sqrt{a}, \quad \sqrt{a+b}, \quad \sqrt{c}+\sqrt{d}$$

суть ирраціональныя алгебраическія выраженія. Мы будемъ заниматься почти исключительно раціональными выраженіями. Иногда намъ придется, впрочемъ, натолкнуться и на ирраціональныя выраженія, но мы не будемъ излагать ученія о нихъ во всей полнотѣ.

113. Одночлены. Опредѣленіе. Подъ одноченомъ разумѣютъ произведеніе нѣсколькихъ чиселъ и буквъ.

---

1) Возведеніе въ степень съ цѣлымъ показателемъ представляетъ частный случай умноженія, такъ какъ, напримѣръ, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Например, выраженіе

$$(-3)\cdot a\cdot(-15)\cdot b\cdot a\cdot c\cdot 7\quad a\cdot b$$

есть одночленъ.

Такъ какъ значеніе произведенія не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей (теорема 54), то можно всѣ числовые сомножители поставить рядомъ и написать слѣва; точно также можно достигнуть того, чтобы сомножители, изображенные однѣми и тѣми же буквами, стояли рядомъ. Такимъ образомъ, одночленъ, только что разсмотрѣнный нами, можно изобразить еще такъ:

$$(-3)\cdot(-15)\cdot 7\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot c.$$

Можно сдѣлать еще дальнѣйшее упрощеніе. Значеніе произведенія не измѣняется, если мы замѣнимъ нѣсколько сомножителей ихъ произведеніемъ (теорема 55). Такъ какъ

$$(-3)\cdot(-15)\cdot 7=+315,$$
$$a\cdot a\cdot a=a^3,$$
$$b\cdot b=b^2,$$

то нашъ одночленъ можно, окончательно, представить въ слѣдующей упрощенной формѣ:

$$315a^3b^2c,$$

въ которой уже нѣтъ ни одного письменно отмѣченнаго знака дѣйствія; знаки умноженія здѣсь частью подразумѣваются, частью же замѣнены показателями.

Мы будемъ всегда писать одночлены въ этой упрощенной формѣ. Численный множитель, въ данномъ случаѣ 315, который обыкновенно пишутъ слѣва, называется **коэффиціентомъ**. Одночленъ

$$-3a^2b$$

имѣетъ коэффиціентъ -3. Коэффиціентъ одночлена можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ числомъ. Одночленъ, коэффиціентомъ котораго служитъ нуль, равенъ нулю, такъ какъ произведеніе нѣсколькихъ сомножителей равно нулю, если одинъ изъ сомножителей есть нуль (теорема 10).

Коэффиціентъ 1 не пишется. Одночленъ $-x^2y^3$ имѣетъ коэффиціентъ -1.

114. Подобные одночлены; сложеніе и вычитаніе. **Опредѣленіе.** Говорятъ, что два одночлена подобны, если они либо тождественны, либо различаются только коэффиціентами.

Напримѣръ, одночлены:

$$\sqrt{3}a^2bc^3, \qquad 15a^2bc^3, \qquad -12a^2bc^3$$

подобны. Точно такъ же обстоитъ дѣло съ одночленами:

$$\frac{3}{4}x^2y^2, \qquad 15x^2y^2, \qquad -14x^2y^2, \qquad x^2y^2.$$

Одночлены съ коэффиціентомъ нуль всегда подобны.

Правило 13. Сумма нѣсколькихъ подобныхъ одночленовъ представляетъ собой одночленъ, который подобенъ каждому изъ нихъ и имѣетъ коэффиціентомъ сумму коэффиціентовъ отдѣльныхъ одночленовъ.

Примѣръ I. Пусть требуется сложить подобные одночлены:

$$12a^3b^2c^4x, \qquad 15a^3b^2c^4x, \qquad -a^3b^2c^4x, \qquad -35a^3b^2c^4x.$$

У этихъ одночленовъ коэффиціентами служатъ числа $+12$, $+15$, -1, -35, сумма которыхъ

$$+12+15-1-35=-9$$

Слѣдовательно, искомая сумма: $-9a^3b^2c^4x$.

Примѣръ II. Требуется сложить подобные одночлены:

$$15x^2y^3, \qquad x^2y^3, \qquad -14x^2y^3, \qquad x^2y^3, \qquad -3x^2y^3,$$

коэффиціенты которыхъ суть 15, 1, -14, 1, -3. Сумма этихъ коэффиціентовъ:

$$15+1-14+1-3=0.$$

Слѣдовательно, сумма этихъ одночленовъ будетъ одночленъ, который подобенъ даннымъ одночленамъ и имѣетъ коэффиціентомъ нуль; поэтому она равна нулю.

Доказательство правила. Правило это доказывается на основаніи теоремы 56 (п. **95**). Для того, чтобы умножить сумму на число, достаточно помножить на это число всѣ слагаемыя этой суммы и сложить полученныя произведенія. Если мы опять возьмемъ первый примѣръ, то мы увидимъ на основаніи этой теоремы, что произведеніе -9 на $a^3b^2c^4x$ равно суммѣ произведеній чиселъ 12, 15, — 1, — 35 на $a^3b^2c^4x$, такъ какъ — 9 равно суммѣ чиселъ 12, 15, — 1, — 35:

$$-9a^3b^2c^4x = 12a^3b^2c^4x + 15a^3b^2c^4x + (-a^3b^2c^4x) + (-35a^3b^2c^4x),$$

что и требовалось доказать.

Точно такъ же можно доказать правило для вычитанія, которое мы сейчасъ приведемъ:

Правило 14-ое. Разность двухъ подобныхъ одночленовъ представляетъ собой такой одночленъ, который подобенъ каждому изъ нихъ и имѣетъ коэффиціентомъ разность отдѣльныхъ коэффиціентовъ.

Пусть, напримѣръ, требуется вычесть $5a^2b$ изъ $8a^2b$. Вычтемъ 5 изъ 8, что дастъ 3. Искомая разность будетъ $3a^2b$. Если бы нужно было вычесть $8a^2b$ изъ $5a^2b$, то слѣдовало бы вычесть 8 изъ 5, что дало бы — 3; тогда результатъ былъ бы $-3a^2b$.

Замѣчаніе. Не будетъ лишнимъ замѣтить, что въ предшествующемъ доказательствѣ мы не дѣлали никакого предположенія относительно значеній, приписываемыхъ буквамъ a, b, c, x, встрѣчающимся въ разсматриваемыхъ одночленахъ. Поэтому, результатъ вычисленій является правильнымъ независимо отъ того, каковы будутъ значенія этихъ буквъ. При доказательствахъ мы имѣемъ право пользоваться основными предложеніями, которыя мы установили для вычисленій надъ числами, потому что наше разсужденіе можетъ быть повторено для каждой системы частныхъ значеній, приписываемыхъ буквамъ. Оно приводитъ поэтому къ результату, не зависящему отъ этихъ частныхъ значеній. Это же замѣчаніе имѣетъ мѣсто и для остальныхъ правилъ алгебраическаго вычисленія.

115. Многочлены. Опредѣленіе. Подъ многочленомъ мы подразумѣваемъ сумму нѣсколькихъ одночленовъ. Такъ, напримѣръ, выраженіе:

$$a^3b + x^2y + 12ax^3 + 35xy^3$$

есть многочленъ, потому что оно представляетъ сумму одночленовъ a^3b, x^2y, $12ax^3$, $35xy^3$. Выраженіе

$$a^2b^3 - 3ab - 2xy + 5a^3$$

точно такъ же есть многочленъ, такъ какъ оно представляетъ собой сумму одночленовъ a^3b^2, $-3ab$, $-2xy$, $5a^3$.

Иногда говорятъ, что многочленъ это выраженіе, составленное изъ ряда одночленовъ съ положительными коэффиціентами, которые отдѣлены другъ отъ друга знаками $+$ и $-$. Лучше, однако, придерживаться нашего перваго опредѣленія, такъ какъ оно даетъ для всѣхъ случаевъ отчетливое опредѣленіе членовъ многочлена.

Опредѣленіе. Членами многочлена называются одночлены, сумма которыхъ составляетъ многочленъ. Такъ, многочленъ

$$5a^2b - 8a^3 - a^2 + x^4$$

имѣетъ четыре члена: $5a^2b$, $-8a^3$, $-a^2$, x^4.

Многочленъ, имѣющій два члена, называется двучленомъ; многочленъ съ тремя членами называется трехчленомъ.

116. Приведеніе подобныхъ членовъ. Опредѣленіе. Если два изъ членовъ многочлена суть подобные одночлены, то говорятъ также, что это подобные члены многочлена. Два или нѣсколько подобныхъ членовъ могутъ быть замѣнены ихъ суммой безъ измѣненія значенія многочлена. Это называютъ приведеніемъ подобныхъ членовъ. Для производства приведенія нужно лишь примѣнять правила сложенія одночленовъ.

Примѣръ 1. Предположимъ, что данъ многочленъ:

$$35a^2b + 15xy - 12a^2b + a^3 - xy + 14a^2b - 50a^2b - 8a^3.$$

Для того, чтобы сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, удобно написать многочленъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{lll}
35a^2b & +15xy & \\
-12a^2b & & +a^3 \\
 & -xy & \\
+14a^2b & & \\
-50a^2b & & -8a^3.
\end{array}$$

Такъ какъ теперь подобные члены подписаны другъ подъ другомъ такъ, что образуютъ колонны (вертикальные столбцы), то нужно попросту выполнить сложеніе коэффиціентовъ каждой отдѣльной колонны:

$$35 - 12 + 14 - 50 = -13,$$
$$15 - 1 = 14,$$
$$1 - 8 = -7.$$

Поэтому данный многочленъ можно написать въ болѣе простомъ видѣ:

$$-13a^2b + 14xy - 7a^3.$$

Примѣръ II. Пусть данъ многочленъ:

$$x^3 + 5x^2 - 8 - 3x^3 - 2x^2 + 15 + 6x - 2 - 3x.$$

Находимъ, что онъ равенъ

$$(1 - 3)x^3 + (5 - 2)x^2 + (6 - 3)x + (-8 + 15 - 2),$$

т. е. равенъ

$$-2x^3 + 3x^2 + 3x + 5.$$

Мы предполагаемъ постоянно въ дальнѣйшемъ изложенiи, что многочлены упрощены уже, насколько возможно, по правиламъ, изложеннымъ въ настоящемъ пунктѣ.

117. Степень одночлена и многочлена. Опредѣленiе. Подъ степенью одночлена по отношенiю къ нѣкоторой заключающейся въ немъ буквѣ, разумѣютъ показателя этой буквы одночлена. Такъ, напримѣръ,

$$3ab^2c^3x^2y$$

есть одночленъ 2-й степени относительно x, 3-ьей степени относительно c, 1-ой степени относительно y и т. д.; онъ имѣетъ нулевую степень по отношенiи къ z, такъ какъ онъ не содержитъ вовсе множителя z. Подъ степенью одночлена по отношенiю къ совокупности нѣсколькихъ буквъ разумѣютъ сумму его степеней по отношенiю къ каждой изъ этихъ буквъ. Такъ, напримѣръ, вышеприведенный одночленъ имѣетъ степень 3 по отношенiю къ совокупности буквъ x и y, степень 6 по отношенiю къ совокупности буквъ a, b, c; степень этого многочлена по отношенiю ко всей совокупности входящихъ въ него буквъ, или такъ называемое измѣренiе этого многочлена, равна 9.

Опредѣленiе. Подъ степенью многочлена по отношенiю къ буквѣ понимаютъ степень того изъ членовъ, который имѣетъ по отношенiю къ этой буквѣ наивысшую степень. Точно такъ же опредѣляютъ степень многочлена по отношенію къ совокупности нѣсколькихъ буквъ. Такъ, многочленъ

$$3a^2x^3 + 6a^4x - a^5x^2$$

будетъ степени 5-ой по отношенію къ a и степени 3-ьей по отношенію къ x. Его измѣреніе равно 7. Измѣреніе многочлена, слѣдовательно, не равно суммѣ его степеней относительно отдѣльныхъ буквъ, такъ какъ членъ, степень котораго будетъ наивысшей по отношенію къ a, отличенъ отъ члена, имѣющаго наивысшую степень относительно x.

Замѣтимъ, что

$$x^3 + 3x^2 + 6 - 2x^3 + x + x^3$$

есть многочленъ 2-ой степени относительно x. Мы въ этомъ убѣдимся, когда соединимъ подобные члены; такъ какъ онъ тогда приметъ видъ:

$$3x^2 + 6 + x.$$

Нельзя было бы сказать, что этотъ многочленъ по отношенію къ x будетъ степени 3-ьей, такъ какъ предыдущее опредѣленіе степени имѣетъ мѣсто лишь въ предположеніи, что многочленъ упрощенъ, насколько возможно, на основаніи правилъ п. **116**-го.

118. Расположенные многочлены. Опредѣленіе. Расположить многочленъ по степенямъ буквы x значитъ соединить въ одинъ всѣ члены, содержащіе эту букву въ одной и той же степени, а затѣмъ расположить ихъ въ порядкѣ восходящихъ или нисходящихъ степеней. Предположимъ, что намъ данъ многочленъ:

$$x^3 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 6 + 7x.$$

Чтобы расположить его, нужно написать его слѣдующимъ образомъ:

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 6,$$

или же

$$-6 + 7x - 5x^2 - x^3 + x^4.$$

Въ первомъ случаѣ многочленъ расположенъ по нисходящимъ степенямъ x, во второмъ случаѣ—по восходящимъ степенямъ.

Пусть теперь буденъ данъ многочленъ:

$$ax + 3x^2 + b + cx^2 - a^2x^2 - bx - 8.$$

Чтобы расположить его по нисходящимъ степенямъ x, пишемъ такъ:

$$3x^2 + cx^2 - a^2x^2 + ax - bx + b - 8.$$

Здѣсь сначала идутъ члены, содержащіе x^2; затѣмъ слѣдуютъ члены, содержащіе x, и, наконецъ, всѣ члены, не содержащіе буквы x, или же не зависящіе отъ x.

Если мы расширимъ понятіе о коэффиціентѣ (п. **113**), то тѣмъ самымъ будетъ расширено и понятіе о подобныхъ одночленахъ; тогда станетъ возможнымъ дальнѣйшее упрощеніе многочлена (п. **116**):

$$(3 + c - a^2)x^2 + (a - b)x + b - 8.$$

Говорятъ, что въ этомъ расположенномъ многочленѣ $3 + c - a^2$ служитъ коэффиціентомъ при x^2, $a - b$ —коэффиціентомъ при x, а $b - 8$ представляетъ членъ, не зависящій отъ x. Съ этой точки зрѣнія разсматриваютъ многочленъ такъ, какъ будто онъ содержитъ лишь 3 члена и, слѣдовательно, представляетъ трехчленъ по отношенію къ x; этой буквѣ x въ этомъ случаѣ удѣлено особое вниманіе.

119. Часто случается, что мы, какъ въ послѣднемъ примѣрѣ, дѣлимъ буквы, входящія въ многочленъ на двѣ группы. Однѣ изъ нихъ называются неизвѣстными или перемѣнными; ихъ обыкновенно обозначаютъ послѣдними буквами алфавита: x, y, z, u, v, w, t, s, . . . Другія, которыя мы разсматриваемъ, какъ извѣстныя, обозначаютъ обыкновенно первыми буквами алфавита: a, b, c, . . . Правда, иногда мы бываемъ вынуждены обозначить извѣстную величину черезъ x, а неизвѣстную черезъ a; но въ такихъ случаяхъ мы будемъ предварительно особо отмѣчать это отступленіе отъ обычныхъ обозначеній.

Если мы будемъ относительно многочлена, содержащаго извѣстныя и неизвѣстныя величины, говорить о его степени безъ болѣе точныхъ указаній, то мы всегда будемъ разумѣть степень многочлена по отношенію къ совокупности неизвѣстныхъ. Такъ, напримѣръ, говорятъ, что

$$(a^2 - b^2)x + c^2y - 3 - x - y$$

есть многочленъ первой степени (именно по отношенію къ x и къ y.)

Въ этомъ случаѣ мы принимаемъ за подобные члены тѣ, которые содержатъ тѣ же неизвѣстныя съ тѣми же показателями, и, не заботясь объ остальныхъ буквахъ, соединяемъ подобные члены, какъ мы это дѣлали въ п. **118**.

Если, напримѣръ, намъ данъ многочленъ

$$-a^3x^2y+3x^2y-bxy^2+cxy^2+ax+3x-y,$$

то мы пишемъ:

$$(-a^3+3)x^2y+(-b+c)xy^2+(a+3)x-y;$$

это многочленъ третьей степени по отношенію къ x и y; коэффиціентомъ при x^2y служитъ $(-a^3+3)$ и т. д.

II. СЛОЖЕНІЕ, ВЫЧИТАНІЕ И УМНОЖЕНІЕ ОДНОЧЛЕНОВЪ И МНОГОЧЛЕНОВЪ.

120. Правила дѣйствій надъ одночленами и многочленами являются непосредственнымъ слѣдствіемъ правилъ и теоремъ, касающихся дѣйствій надъ числами. Въ предшествующемъ пунктѣ мы пользовались уже нѣкоторыми изъ этихъ правилъ, которыя, собственно говоря, понятны сами по себѣ. Однако, точности ради, мы приведемъ ихъ здѣсь опять.

121. Сложеніе и вычитаніе одночленовъ. Правила 13 и 14 въ п. **114** относились къ случаю, когда всѣ одночлены подобны. Это ограниченіе мы теперь отбросимъ.

Правило 15. Для того, чтобы сложить нѣсколько одночленовъ, достаточно ихъ написать рядомъ вмѣстѣ съ ихъ знаками. Для того, чтобы вычесть одночленъ, достаточно прибавить противоположный одночленъ, т. е. тотъ же одночленъ съ обратнымъ знакомъ при коэффиціентѣ.

Прилагая это правило, мы получимъ многочленъ, въ которомъ слѣдуетъ, если возможно, сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ.

Примѣръ I. Сложить одночлены:

$$15a^2x, \quad -3a^2x, \quad 15a^3y, \quad -a^2x, \quad -a^3y.$$

Получимъ многочленъ

$$15a^2x-3a^2x+15a^3y-a^2x-a^3y,$$

который можно проще написать такъ:

$$11a^2x + 14a^3y.$$

Примѣръ II. Сложить одночлены

$$a^3x, \quad -a^2y, \quad a^3$$

и изъ полученнаго результата вычесть одночлены:

$$-a^3x, \quad -3a^2y, \quad -a^4, \quad 2a^2y.$$

Получимъ:

$$a^3x - a^2y + a^3 + a^3x + 3a^2y + a^4 - 2a^2y,$$

или проще:

$$2a^3x + a^3 + a^4.$$

122. Сложеніе и вычитаніе многочленовъ. Правило 16-ое. Для того, чтобы прибавить или вычесть многочленъ, достаточно всѣ члены этого многочлена послѣдовательно прибавить или вычесть.

Въ полученномъ такимъ образомъ результатѣ дѣлаютъ, если возможно, приведеніе подобныхъ членовъ.

Примѣръ I. Требуется сложить слѣдующіе многочлены:

$$3a^2x + b^3 + 6 + a^4,$$
$$-b^3 - 8 + 2a^4 + 3a^2x,$$
$$-3b^2 - 6a^4 + 15a^2x - 9.$$

Получается многочленъ

$$3a^2x + b^3 + 6 + a^4 - b^3 - 8 + 2a^4 + 3a^2x - 3b^2 - 6a^4 + 15a^2x - 9,$$

или же, послѣ приведенія подобныхъ членовъ:

$$21a^2x - 3b^2 - 3a^4 - 11.$$

Примѣръ II. Вычесть многочленъ:

$$3a^2x - 9a^3x^2 - 6a^2x^2$$

изъ многочлена:

$$9a^2x + 18a^3x^2 - a^2x^2$$

Получимъ:

$$9a^2x + 18a^3x^2 - a^2x^2 - 3a^2x + 9a^3x^2 + 6a^2x^2,$$

или проще:

$$6a^2x + 27a^3x^2 + 5a^2x^2.$$

Послѣднее правило можетъ быть замѣнено другимъ, если отдѣльные многочлены, которые нужно сложить или вычесть, заключены въ скобки. Тогда имѣетъ мѣсто правило 6-ое (п. **90**) которое мы здѣсь еще разъ повторимъ:

Если передъ скобками стоитъ знакъ $+$, то можно опустить скобки. Если передъ скобками стоитъ знакъ $-$, то можно опустить скобки, измѣнивъ одновременно всѣ знаки на обратные.

Примѣръ. Требуется вычислить:

$$a^3 + b^2 - (3a^3 - 2b^2) + (-a^3 + b^2) - (-6a^3 + 4b^2).$$

Получимъ:

$$a^3 + b^2 - 3a^3 + 2b^2 - a^3 + b^2 + 6a^3 - 4b^2,$$

или же, послѣ приведенія подобныхъ членовъ:

$$3a^3.$$

Примѣчаніе. Чтобы облегчить приведеніе подобныхъ членовъ, часто бываетъ удобно всѣ подобные члены подписывать одинъ подъ другимъ; это примѣчаніе особенно полезно, если мы складываемъ расположенные многочлены.

Примѣръ. Составить сумму слѣдующихъ многочленовъ:

$$3x^3 - 5x^2 + 3x - 4,$$
$$-2x^3 - x^2 - 6,$$
$$9x^2 - 6x - 7,$$
$$8 - x^3.$$

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rrrr}
3x^3 & -5x^2 & +3x & -4 \\
-2x^3 & -x^2 & & -6 \\
 & 9x^2 & -6x & -7 \\
-x^3 & & & +8 \\
\hline
0\cdot x^3 & +3x^2 & -3x & -9.
\end{array}$$

Складываемъ коэффиціенты одинаковыхъ степеней x, стоящіе другъ подъ другомъ, и получаемъ искомый результатъ:

$$0\cdot x^3 + 3x^2 - 3x - 9,$$

т. е., такъ какъ одночленъ съ коэффиціентомъ нуль равенъ нулю:

$$3x^2 - 3x - 9.$$

123. Умноженіе одночленовъ. Произведеніе двухъ одночленовъ представляетъ такой одночленъ, коэффиціентъ котораго равенъ произведенію коэффиціентовъ сомножителей, а буквенная часть есть произведеніе буквенныхъ частей сомножителей.

Пусть требуется, напримѣръ, перемножить два одночлена:

$$\frac{3}{4}x^2y, \qquad -\frac{5}{6}ab^2.$$

Произведеніе $\frac{3}{4}$ на $-\frac{5}{6}$ будетъ $-\frac{5}{8}$. Отсюда искомое произведеніе:

$$-\frac{5}{8}x^2yab^2.$$

Точно такъ же произведеніе одночленовъ

$$-\frac{2}{3}ab^3, \qquad -\frac{3}{4}a^2b$$

равно:

$$\frac{1}{2}ab^3a^2b, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}a^3b^4.$$

Такимъ образомъ, каждая изъ буквъ, входящихъ въ произведеніе имѣетъ показателемъ сумму показателей ея въ обоихъ сомножителяхъ. Изъ этого замѣчанія вытекаетъ правило:

Правило 17-ое. Чтобы составить произведеніе двухъ или нѣсколькихъ одночленовъ, пишутъ сначала произведеніе коэффиціентовъ. Потомъ пишутъ всѣ буквы, встрѣчающіяся въ сомножителяхъ, и каждую изъ нихъ берутъ съ показателемъ, равнымъ суммѣ показателей, которые эта буква имѣетъ въ различныхъ сомножителяхъ.

Положимъ, что требуется составить произведеніе слѣдующихъ одночленовъ:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}a^3b^2c, \qquad -\frac{2}{\sqrt{2}}ax^2y^3, \qquad -\frac{5}{3}ab^3x^2.$$

Произведеніе коэффиціентовъ $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{-2}{\sqrt{2}}$, $\frac{-5}{3}$ равно $\frac{3\cdot 2\cdot 5}{2\cdot 3}=5$.

Показатель буквы a будетъ равенъ $3+1+1=5$, показатель буквы b точно такъ же будетъ равенъ $2+3=5$, показатель при c будетъ 1; показателемъ буквы x будетъ $2+2=4$, показатель y будетъ 3. Поэтому произведеніе равно:

$$5a^5b^5cx^4y^3.$$

124. Умноженіе многочлена на одночленъ. Правило 18-ое. Чтобы умножить многочленъ на одночленъ, нужно каждый членъ многочлена умножить на этотъ одночленъ и сложить полученныя произведенія.

Примѣръ. Пусть требуется умножить многочленъ

$$3a^2 - 2b^3 + x + 5y$$

на одночленъ

$$-abx^2$$

Получимъ:

$$-3a^3bx^2 + 2ab^4x^2 - abx^3 - 5abx^2y.$$

125. Уможеніе двухъ многочленовъ. Правило 19-ое. Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, достаточно умножить одинъ изъ нихъ послѣдовательно на всѣ члены другого и сложить полученные результаты.

Примѣръ. Пусть требуется умножить многочленъ

$$a^2b - ab + 3b^2$$

на многочленъ

$$a^2 - 2ab + 3b^2$$

Сначала умножаемъ первый многочленъ на a^2; получаемъ:

$$a^4b - a^3b + 3a^2b^2.$$

Затѣмъ умножаемъ его на $-2ab$; получаемъ:

$$-2a^3b^2 + 2a^2b^2 - 6ab^3.$$

Наконецъ, умножаемъ на $3b^2$ и получимъ:

$$3a^2b^3 - 3ab^3 + 9b^4.$$

Остается лишь сложить эти три отдѣльныя произведенія; тогда получимъ:

$$a^4b - a^3b + 3a^2b^2 - 2a^3b^2 + 2a^2b^2 - 6ab^3 + 3a^2b^3, \\ - 3ab^3 + 9b^4,$$

или же, послѣ приведенія подобныхъ членовъ:

$$a^4b - a^3b + 5a^2b^2 - 2a^3b^2 - 9ab^3 + 3a^2b^3 + 9b^4.$$

126. Случай расположенныхъ многочленовъ; практическое замѣчаніе. Если требуется перемножить два многочлена, содержащіе одну только букву x, то бываетъ удобно расположить ихъ для производства дѣйствія особымъ образомъ, который мы разъяснимъ на двухъ примѣрахъ.

Примѣръ I. Пусть требуется перемножить два многочлена:

$$3x^3 - 2x^2 + 6x + 1,$$
$$2x^2 + 5x - 7.$$

Расположимъ ихъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rrrrrr}
\multicolumn{6}{l}{(3x^3 - \ 2x^2 + \ 6x \ + \ 1)\cdot(2x^2 + 5x - 7)} \\
\hline
6x^5 & -\ 4x^4 & +12x^3 & +\ 2x^2 & & \\
 & 15x^4 & -10x^3 & +30x^2 & +5x & \\
 & & -21x^3 & +14x^2 & -42x & -7 \\
\hline
6x^5 & +11x^4 & -19x^3 & +46x^2 & -37x & -7.
\end{array}$$

Мы написали сначала одинъ многочленъ рядомъ съ другимъ и провели черту, подъ которой подписали отдѣльныя произведенія. Ихъ въ данномъ случаѣ три; мы получимъ ихъ, умножая первый многочленъ на каждый членъ второго. Эти произведенія подписываемъ одно подъ другимъ, такъ что очень легко составить ихъ сумму. Сумму эту мы пишемъ подъ второй чертой.

Примѣръ II. Многочленъ

$$x^4 + x^2 + 2x + 1$$

требуется умножить на многочленъ

$$x^3 - x^2 - 1.$$

Произведемъ дѣйствія такъ:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
\multicolumn{8}{r}{(x^4 + \ x^2 + 2x \ + 1)\cdot(x^3 - x^2 - 1)} \\
\hline
x^7 & & +x^5 & +2x^4 & +\ x^3 & & & \\
 & -x^6 & & -\ x^4 & -2x^3 & -\ x^2 & & \\
 & & & -\ x^4 & & -\ x^2 & -2x & -1 \\
\hline
x^7 & -x^6 & +x^5 & & -\ x^3 & -2x^2 & -2x & -1.
\end{array}$$

Здѣсь оставлены пустыми мѣста, соотвѣтствующія степенямъ отсутствующихъ членовъ.

Примѣчаніе. Равенство.

$$(x^3 + x^2 + 2x + 1)\cdot(x^3 - x^2 - 1)$$
$$= x^7 - x^6 + x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1,$$

выражающее результатъ произведенныхъ вычисленій, называется **тождествомъ**, такъ какъ обѣ стороны станутъ **тождественными** (п. **77**) послѣ упрощенія. Точно такъ же равенство

$$x(x-1)=2x^2-x(x+1)$$

будетъ **тождествомъ**. Въ отдѣлѣ задачъ мы предлагаемъ нѣсколько тождествъ, въ справедливости которыхъ нужно убѣдиться.

III. ДѢЛЕНІЕ ОДНОЧЛЕНОВЪ; ДѢЛЕНІЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕНЪ.

127. Дѣленіе одночленовъ. Говорятъ, что одночленъ дѣлится на другой одночленъ, если существуетъ третій одночленъ, который, будучи умноженъ на второй, дастъ первый одночленъ. Поэтому правило дѣленія представляетъ непосредственное слѣдствіе правила умноженія.

Правило 20-ое. Частное отъ дѣленія двухъ одночленовъ имѣетъ коэффиціентъ равный частному отдѣльныхъ коэффиціентовъ и содержитъ каждую букву съ показателемъ, равнымъ разности ея показателей въ дѣлимомъ и дѣлителѣ.

Примѣръ. Пусть требуется раздѣлить $35a^3b^2xy$ на $7abx$. Получимъ:

$$5a^2by.$$

Здѣсь мы не должны приписывать буквы x, такъ какъ по правилу показатель ея долженъ быть равенъ нулю. Поэтому мы присоединимъ слѣдующее дополнительное замѣчаніе.

Примѣчаніе. Въ частномъ можно опускать каждую букву, показатель которой есть нуль; другими словами, сомножителя x^0 можно замѣнить единицей (ср. п. **49**).

128. Правило дѣлимости. Мы высказали правило дѣленія въ предположеніи, что дѣлимое дѣлится на дѣлителя; тогда оно представляетъ непосредственное слѣдствіе правила умноженія. Для того чтобы дѣленіе совершалось на цѣло, необходимо и достаточно, чтобы дѣлитель не содержалъ ни одной буквы, которой нѣтъ въ дѣлимомъ и чтобы показатель каждой буквы въ дѣлителѣ не превышалъ показателя той же буквы въ дѣлимомъ. Если дѣлимое не дѣлится на дѣлителя, то мы ограничиваемся обозначеніемъ дѣленія и получаемъ такимъ образомъ дробь.

129. Дѣленіе многочлена на одночленъ. Правило 21-ое. Чтобы раздѣлить многочленъ на одночленъ, достаточно всѣ члены многочлена послѣдовательно раздѣлить на этотъ одночленъ и полученные результаты сложить.

Примѣръ. Многочленъ

$$3a^2x^4 + 5abx^3 + ax$$

требуется раздѣлить на одночленъ $15ax$. Получимъ:

$$\frac{1}{5}ax^3 + \frac{1}{3}bx^2 + \frac{1}{15}.$$

Примѣчаніе. Для того, чтобы многочленъ (въ которомъ выполнено приведеніе подобныхъ членовъ) дѣлился на одночленъ, необходимо и достаточно, чтобы каждый изъ его членовъ дѣлился на одночленъ.

130. Замѣчаніе относительно дѣленія. Если дѣленія нельзя выполнить, то мы ограничиваемся тѣмъ, что обозначаемъ его, при чемъ употребляемъ способъ обозначенія дробей. А именно, если A и B два какія-нибудь алгебраическія выраженія, то $\frac{A}{B}$ представляетъ такое алгебраическое выраженіе, значеніе котораго равно частному отъ дѣленія значенія A на значеніе B; оно, слѣдовательно, равно частному отъ дѣленія A на B, такъ какъ по опредѣленію дѣленія имѣемъ:

$$\frac{A}{B} \cdot B = A.$$

При примѣненіяхъ этого основнаго равенства, слѣдуетъ обращать особое вниманіе на тотъ случай, когда B равно нулю для нѣкоторыхъ значеній входящихъ въ него буквъ. Дѣло въ томъ, что мы не можемъ ничего сказать о частномъ отъ дѣленія числа на нуль; лишь позже, въ ученіи объ уравненіяхъ первой степени мы придемъ къ тому, что будемъ обозначать такое частное знакомъ ∞, который называется безконечностью (ср. п. **111**); тогда же разсмотримъ и тотъ случай, когда выраженія A и B одновременно равны нулю. Здѣсь мы хотѣли лишь обратить вниманіе на то, что слѣдуетъ особенно осторожно относиться къ случаю, когда знаменатель B дроби $\frac{A}{B}$ равенъ нулю и что этотъ вопросъ мы подвергнемъ еще болѣе обстоятельному изслѣдованію.

Это замѣчаніе имѣетъ особенно важное значеніе для слѣдующаго пункта, которымъ мы закончимъ эту главу.

131. Раціональныя дроби. Опредѣленіе. Подъ раціональной дробью мы разумѣемъ дробь, члены которой суть многочлены, или же, въ частномъ случаѣ, одночлены.

Слѣдующія выраженія могутъ служить примѣрами раціональныхъ дробей:

$$\frac{3a^2b}{5b^2c^3}, \quad \frac{a-b}{c-d}, \quad \frac{a^2+x^2-y^3}{a^2x^4-y^5+z}.$$

Подъ степенью раціональной дроби разумѣемъ степень той составной части ея, которая имѣетъ высшую степень. Такъ, напримѣръ, дробь

$$\frac{ax+b}{a'x+b'},$$

которую мы впослѣдствіи обстоятельно изслѣдуемъ, называется дробью первой степени по отношенію къ x. Это есть даже наиболѣе общее выраженіе дроби первой степени по отношенію къ x, если примемъ, что a, b, a', b' суть какія-либо не зависящія отъ x, т. е. не содержащія x, алгебраическія выраженія.

Для дѣйствій надъ раціональными дробями справедливы тѣ же правила, что и для дѣйствій надъ численными дробями. Это непосредственно слѣдуетъ изъ п. п. **22, 54, 130** и изъ того обстоятельства, что правила, имѣющія мѣсто для чиселъ, остаются въ силѣ и для буквъ.

Въ частности, дробь можно упростить, дѣля ея числителя и знаменателя на общаго сомножителя (сокращеніе). Можно также привести нѣсколько дробей къ одному знаменателю, умножая числителя и знаменателя каждой изъ нихъ на надлежащимъ образомъ выбраннаго множителя.

Если числитель и знаменатель дроби суть одночлены, то для составленія общаго наибольшаго дѣлителя и общаго наименьшаго кратнаго остаются въ силѣ тѣ же правила, что и въ ариѳметикѣ для произведенія простыхъ сомножителей и поэтому очень легко приводить подобныя дроби къ самому простому виду. Также легко привести нѣсколько дробей къ ихъ простѣйшему общему знаменателю. При этомъ мы считаемъ дробь тѣмъ проще, чѣмъ ниже степень числителя и знаменателя; это не значитъ, что они меньше, такъ какъ численное ихъ значеніе зависитъ, очевидно, отъ значеній, приписываемыхъ входящимъ въ нихъ буквамъ. Въ подобномъ же смыслѣ нужно понимать и выраженіе „простѣйшій общій знаменатель“.

Пусть будетъ, напримѣръ, дана дробь

$$\frac{3a^2bc}{6abc^2}.$$

Упрощаемъ ее, сокращая на $3abc$, и находимъ:

$$\frac{a}{2c}.$$

Если же мы примемъ:

$$a = 10, \qquad b = 0{,}001, \qquad c = 20,$$

то получимъ:

$$3a^2bc = 6,$$
$$6abc^2 = 24,$$

такъ что данная дробь обратится въ $\frac{6}{24}$, а упрощенная въ $\frac{10}{40}$. Съ алгебраической точки зрѣнія мы должны, несмотря на это, вторую дробь разсматривать, какъ болѣе простую.

Если знаменатели дробей суть многочлены, то мы не имѣемъ возможности дать здѣсь общія правила, по которымъ находятся общій наибольшій дѣлитель и общее наименьшее кратное знаменателей. Поэтому приходится ограничиться тѣмъ, чтобы сперва упростить дроби, а потомъ въ каждой изъ нихъ умножить числителя и знаменателя на произведеніе остальныхъ знаменателей. Впрочемъ, навыкъ укажетъ намъ упрощенія, которыми нерѣдко можно пользоваться.

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ XIII-ой.

230. Сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ въ слѣдующихъ многочленахъ:

$$13a^3x-8a^3-25a^2x+a^3+6^2-12a+35b^2,$$

$$x^3-5x+3x^3-8x^2-12x+\frac{5}{3}x^2+\frac{3}{4}x+15,$$

$$\frac{3}{2}x+5x^2-12x^2y+\frac{3}{4}x^2-x-xy^2-x^2y,$$

$$\frac{3}{4}x-4x-5x+12+\frac{3}{7}+x^2-\frac{6}{5}x-\frac{1}{2}x^2.$$

231. Составить произведенія одночленовъ:

$$12a^2bc \text{ и } 13abc^2,$$

$$4xy^2 \text{ и } \frac{2}{3}xy,$$

$$16x^2y^3 \text{ и } \frac{3}{4}xz,$$

$$4abc \text{ и } \frac{2}{3}a^2bx.$$

232. Составить произведеніе шести одночленовъ:

$$\frac{2}{3}a^3b,\quad 2abx\quad 4ax,\quad \frac{1}{6}xy,\quad 9y^2,\quad 3xy.$$

233. Составить произведеніе шести одночленовъ:

$$3ax,\quad -2ax^2,\quad -3a^2x^4,\quad \frac{1}{5}ay,\quad -y^2,\quad 0{,}2x.$$

234. Составить произведеніе пяти одночленовъ:

$$\frac{1}{4}ax,\quad -3x^2,\quad -3xy,\quad 12ax^3,\quad -ay^2.$$

235. Составить произведеніе слѣдующихъ одночленовъ:

$$\frac{3}{5}ax^2,\quad \frac{5}{4}a^3bxy,\quad \frac{-5}{7}a^2x^2y^2.$$

236. Составить произведеніе слѣдующихъ одночленовъ:

$$\frac{3}{5}a^4x^3,\quad \frac{-1}{3}a^2x^4,\quad \frac{-5}{6}a^3x^7,\quad \frac{2}{5}abx^2.$$

237. Составить произведеніе слѣдующихъ одночленовъ:

$$-\frac{5}{7}a^2x^5,\quad \frac{3}{4}abcx^7y,\quad \frac{-5}{6}a^2c^2y^8,\quad -\frac{3}{4}xy^3.$$

238. Сложить слѣдующіе многочлены:

$$3x^2 + ax + 6,$$
$$-5x + 3ax^2 + c + 6,$$
$$-8ax + 5x^2 + c^2 + 6$$

и расположить результатъ относительно x.

239. Сложить слѣдующіе многочлены:

$$5x^3 - 8ax^2 + 5bx - c,$$
$$ax^2 - 3x^3 - 4c - 12bx,$$
$$9cx^2 + 12ax^3 + 5bx - 15$$

и расположить результатъ относительно x.

240. Умножить многочленъ

$$13ax - 2y^2 + \frac{1}{4}ay + 6y^3$$

на одночленъ $-5axy$.

241. Умножить многочленъ

$$-3x^2 + 12ax + 5 - 3x^4$$

на одночленъ $2ax$.

242. Перемножить многочлены:

$$3x^2 - 5ax - 4,$$
$$2x - 3a$$

243. Перемножить многочлены:

$$3x^2 - 5x - 2,$$
$$3x - 4.$$

244. Перемножить слѣдующіе три многочлена:

$$(a - bx - x^2) \quad (x + y) \quad (z + 3).$$

245. Умножить $a + b$ на $a - b$.
246. Умножить $a^2 + ab + b^2$ на $a - b$.
247. Умножить $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ на $a - b$.
248. Умножить $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$ на $a - b$.
249. Умножить $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ на $a + b$.
250. Вычислить квадратъ двучлена $a + b$.
251. Вычислить третью степень двучлена $a + b$.
252. Вычислить квадратъ многочлена $a + b + c$.
253. Вычислить третью степень многочлена $a + b + c$.
254. Вычислить квадратъ многочлена $a + b + c + d$.
255. Умножить $x^3 + 2x^2 - x - 1$ на $x^2 - x - 4$.
256. Умножить $x^2 - 2$ на $x^2 - 3x + 5$.
257. Умножить $x^2 - 2x + 5$ на $x^2 + 2x + 5$.
258. Составить произведеніе слѣдующихъ многочленовъ:

$$3x^3 - 5x^2 + 6x - 7,$$
$$2x^2 - 6x + 5.$$

259. Составить произведеніе слѣдующихъ многочленовъ:

$$2x^2 - 6x + 4,$$
$$4x^2 - 8x + 3.$$

260. Составить произведеніе слѣдующихъ многочленовъ:

$$x^2 + 2ax + a^2 - b^2,$$
$$x^2 + 2bx + b^2 - a^2 - 3ab$$

и расположить результатъ по отношенію къ x.

261. Составить произведеніе слѣдующихъ многочленовъ:

$$ax^2 + bx + c,$$
$$a'x^2 + b'x + c'$$

и расположить результатъ по отношенію къ x.

262. Привести слѣдующія дроби къ одному знаменателю:

$$\frac{1}{a+b}, \quad \frac{2}{a-b}, \quad \frac{4a}{a^2-b^2}, \quad \frac{6a^2}{a^2+b^2}.$$

Нужно замѣтить, что за общій знаменатель можно взять $a^4 - b^4$.

263. Сократить слѣдующія дроби:

$$\frac{4a^3bcx}{2b^2c^2y^2}, \quad \frac{15a^3bc^2xy}{50abcx^2z}, \quad \frac{15a^4bc^3xyz}{12abc^4y^2}.$$

264. Сократить слѣдующія дроби:

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}, \quad \frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}, \quad \frac{a^5-b^5}{a^3+b^3}.$$

Предлагается воспользоваться при этомъ результатами задачъ 245—249.

265. Составить произведеніе слѣдующихъ дробей:

$$\frac{a^3b^2x}{ab^2y}, \quad \frac{ab^2x^2}{cxz}, \quad \frac{3ab^4x}{5a^2bx^2y}.$$

Упростить результатъ.

266. Составить сумму слѣдующихъ дробей:

$$\frac{ax}{y}, \quad \frac{by}{x}, \quad \frac{ab + a^2 - b^2 + 3a - 5b}{xy}.$$

267. Выполнить слѣдующія сложенія и вычитанія:

$$\frac{a^2x}{y} + \frac{by}{x} - \frac{(a^2+b^2)y^2}{x^2} - \frac{3abx^2}{y^2}.$$

268. Выполнить слѣдующія вычисленія:

$$\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b},$$
$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b},$$
$$\frac{a^2}{b-c} + \frac{b^2}{c-a} + \frac{c^2}{a-b},$$
$$\frac{a^3}{b-c} + \frac{b^3}{c-a} + \frac{c^3}{a-b}.$$

269. Доказать справедливость тождества:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}.$$

270. Доказать справедливость тождества:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right).$$

271. Доказать справедливость тождества:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{1}{(x-a)(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(x-b)(b-a)(b-c)}$$
$$+\frac{1}{(x-c)(c-a)(c-b)}.$$

272. Доказать тождество:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2.$$

273. Доказать тождество:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$$
$$+(ay-bx)^2.$$

274. Доказать тождество:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}=\frac{1}{(x-a)(a-b)(a-c)(a-d)}$$
$$+\frac{1}{(x-b)(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{1}{(x-c)(c-a)(c-b)(c-d)}$$
$$+\frac{1}{(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

275. Доказать тождества:

$$x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+\cdots+a^{m-1}),$$
$$x^{2m}-a^{2m}=(x+a)(x^{2m-1}-ax^{2m-2}+a^2x^{2m-3}-\cdots-a^{2m-1}),$$
$$x^{2m+1}+a^{2m+1}=(x+a)(x^{2m}-ax^{2m+1}+\cdots+a^{2m});$$

m обозначаетъ какое угодно положительное цѣлое число.

276. Доказать тождество:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a)=0.$$

277. Доказать тождество:

$$4[(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')]$$
$$=(2ac'+2ca'-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c').$$

Глава XIV.

УРАВНЕНІЯ И НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

I. УРАВНЕНІЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЙ НЕИЗВѢСТНОЙ.

132. Объ уравненіяхъ вообще. Подъ уравненіемъ подразумѣваемъ равенство (ср. п. **7**) двухъ алгебраическихъ выраженій, въ которыхъ одна или нѣсколько буквъ разсматриваются, какъ неизвѣстныя или какъ перемѣнныя величины. Такимъ образомъ, уравненіе состоитъ изъ двухъ алгебраическихъ выраженій, связанныхъ знакомъ $=$; это двѣ части уравненія. Выраженіе, написанное слѣва, называется лѣвой частью уравненія, второе — его правой частью. Члены, встрѣчающіеся въ этихъ алгебраическихъ выраженіяхъ, называются также членами самого уравненія.

Равенство можетъ быть также тождествомъ (п. **77**). Если же оно не представляетъ собой тождества, то двѣ его части могутъ только тогда быть равны другъ другу, когда мы припишемъ буквамъ опредѣленныя значенія. Напримѣръ,

$$2x + 3 = x + 5$$

есть уравненіе съ одной неизвѣстной x; равенство въ этомъ случаѣ дѣйствительно имѣетъ мѣсто только при $x = 2$; оно несправедливо, напримѣръ, при $x = 1$.

Точно такъ же

$$x + 4 = y + 6 - 3x$$

есть уравненіе съ двумя неизвѣстными или двумя перемѣнными x и y. Здѣсь равенство имѣетъ мѣсто, напримѣръ, при $x = 2$, $y = 6$, или при $x = -4$, $y = -18$, или же при $x = 1$, $y = 2$; оно не имѣетъ мѣста, напротивъ того, при $x = 0$, $y = 0$. Итакъ, обѣ части этого уравненія равны не для всѣхъ значеній перемѣнныхъ x и y, а только для опредѣленныхъ системъ значеній этихъ перемѣнныхъ.

Относительно тѣхъ значеній неизвѣстныхъ, при которыхъ лѣвая часть уравненія дѣйствительно равна правой, говорятъ, что они **удовлетворяютъ** уравненію. Значеніе или система значеній, для которыхъ уравненіе справедливо, называется **рѣшеніемъ** уравненія.

Часто разсматриваютъ уравненія, которыя, кромѣ **перемѣнныхъ** или **неизвѣстныхъ**, содержатъ еще другія буквы, называемыя въ противоположность имъ **постоянными** или **данными величинами**; обыкновенно употребляютъ (п. **78**, **119**) для обозначенія **неизвѣстныхъ** послѣднія буквы алфавита а для обозначенія **данныхъ величинъ**—первыя.

Разсмотримъ, напримѣръ, слѣдующее уравненіе:

$$x + a - 3 = 5x - 6a + 3y.$$

Оно справедливо при $x = a$, $y = a - 1$; мы убѣдимся въ этомъ, если **подставимъ** эти значенія вмѣсто x и y, т. е. если x замѣнимъ черезъ a, а y черезъ $a - 1$.

133. Общія предложенія. Теорема 60. Къ обѣимъ частямъ уравненія можно прибавить одну и ту же величину, не измѣняя рѣшенія или рѣшеній уравненія.

Изъ этого непосредственно яснаго предложенія вытекаетъ слѣдующая важная теорема:

Теорема 61. Любой членъ уравненія можно перенести изъ одной его части въ другую, мѣняя лишь при этомъ его знакъ на обратный.

Доказательство. Пусть дано уравненіе:

$$3x + 5y + 7 = 8a - 9 + x;$$

требуется перенести членъ x изъ правой части въ лѣвую. Для этого достаточно прибавить къ обѣимъ частямъ уравненія по $-x$. Тогда въ правой части $x - x$ дастъ 0 и, слѣдовательно, получимъ:

$$3x + 5y + 7 - x = 8a - 9;$$

предложеніе, такимъ образомъ, доказано.

Теперь ясно, что мы можемъ вообще **всѣ** члены уравненія перенести въ лѣвую часть его. Правая часть тогда станетъ равной нулю. Поэтому каждому уравненію можно придать видъ:

$$A = O,$$

гдѣ A обозначаетъ болѣе или менѣе сложное алгебраическое выраженіе; мы будемъ, однако, разсматривать почти исключительно такія уравненія, въ которыхъ A можетъ быть сведено къ многочлену. Подъ степенью уравненія подразумѣваютъ въ этомъ случаѣ степень этого многочлена по отношенію къ совокупности всѣхъ неизвѣстныхъ.

Если A есть сумма раціональныхъ дробей, то можно привести эти дроби къ одному знаменателю и составить ихъ сумму. Уравненіе приметъ тогда видъ:

$$\frac{M}{N} = O,$$

гдѣ M и N многочлены. Теперь мы разсмотримъ какое-либо рѣшеніе уравненія:

$$M = O;$$

при этомъ мы предположимъ, что выраженіе M содержитъ неизвѣстныя. Если знаменатель N для разсматриваемаго значенія неизвѣстной или для разсматриваемой системы значеній отличенъ отъ нуля, то изъ равенства $M = O$ слѣдуетъ, очевидно, равенство $\frac{M}{N} = O$. Если же выраженіе N также обращается въ 0 для этого значенія или этой системы значеній, то нельзя сказать, какое значеніе получаетъ лѣвая часть, если въ нее будутъ подставлены наши значенія, такъ какъ частное отъ дѣленія нуля на нуль не имѣетъ опредѣленнаго значенія (п. **22**, **136**).

Пусть, напримѣръ, дано уравненіе:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3} = 0 .$$

Для $x = 2$ имѣемъ:

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 ,$$
$$2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 ;$$

слѣдовательно, $x = 2$ будетъ рѣшеніемъ уравненія. Напротивъ того, при $x = 3$ имѣемъ:

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0 ,$$
$$3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 ;$$

слѣдовательно, $x = 3$ не будетъ рѣшеніемъ этого уравненія. Отсюда приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема 62. Если уравненіе можетъ быть приведено къ такому виду, который выражаетъ, что частное двухъ многочленовъ должно быть равно нулю, то рѣшенія его получаются такимъ образомъ, что разыскиваются значенія неизвѣстныхъ, для которыхъ числитель исчезаетъ, а знаменатель отличенъ отъ нуля.

Поэтому, предложенное уравненіе $\frac{M}{N} = 0$ можно замѣнить уравненіемъ $M = 0$, при условіи, что мы потомъ посмотримъ, обращаютъ ли найденныя значенія неизвѣстныхъ знаменателя N въ нуль или нѣтъ.

Можетъ также случиться, что знаменателемъ N служитъ число, напримѣръ, 15 или 35; такого знаменателя, очевидно, можно всегда опустить, не измѣняя рѣшеній уравненія; вскорѣ мы приведемъ такого рода примѣры.

Если знаменатель содержитъ лишь извѣстныя буквы, напримѣръ, равенъ $3a - 5$, то слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что онъ въ зависимости отъ значеній этихъ буквъ (здѣсь буквы a) либо равенъ нулю, либо отличенъ отъ нуля, каковы бы ни были значенія неизвѣстныхъ, такъ какъ онъ не зависитъ отъ значеній, приписываемыхъ неизвѣстнымъ. Это замѣчаніе важно при такъ называемомъ изслѣдованіи рѣшеній задачъ, къ которому мы скоро перейдемъ.

134. Примѣры уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Примѣръ I. Пусть дано будетъ уравненіе:

$$3 + 5x = 8x - 1.$$

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть, получимъ:

$$5x - 8x + 3 + 1 = 0,$$

или же по упрощеніи:

$$-3x + 4 = 0.$$

Степень выраженія въ лѣвой части по отношенію къ x равна единицѣ. Поэтому уравненіе называется уравненіемъ первой степени. Если перенесемъ извѣстный членъ въ правую часть, то получимъ:

$$-3x = -4.$$

Для того, чтобы уравненіе удовлетворялось, необходимо и достаточно, чтобы произведеніе числа x на -3 было равно -4; слѣдовательно x, по опредѣленію дѣленія, должно быть равно частному отъ дѣленія -4 на -3, и поэтому:

$$x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Это и есть рѣшеніе предложеннаго уравненія. Читатель безъ труда убѣдиться, что это единственное рѣшеніе.

Примѣръ II. Пусть дано уравненіе:

$$6x + (x-3)(x-1) = x^2 - \frac{3x}{7} + \frac{13}{4}.$$

Послѣ перенесенія всѣхъ членовъ въ лѣвую часть и выполненія дѣйствій получимъ:

$$6x + x^2 - 4x + 3 - x^2 + \frac{3x}{7} - \frac{13}{4} = 0,$$

т. е.

$$\left(6 - 4 + \frac{3}{7}\right)x + 3 - \frac{13}{4} = 0.$$

Это, слѣдовательно, есть уравненіе первой степени, которое можно написать еще такъ:

$$\frac{17}{7}x = \frac{1}{4}.$$

Отсюда, разсуждая, какъ прежде, получимъ:

$$x = \frac{1}{4} : \frac{17}{7} = \frac{7}{68}.$$

Изъ этихъ примѣровъ вытекаетъ правило:

Правило 22-ое. Если послѣ перенесенія всѣхъ членовъ въ лѣвую часть и послѣ приведенія всѣхъ подобныхъ членовъ мы получаемъ уравненіе первой степени. то слѣдуетъ перенести извѣстный членъ въ правую часть; чтобы получить рѣшеніе, тогда останется только раздѣлить правую часть на коэффиціентъ при неизвѣстной.

Примѣчаніе. Если уравненіе имѣетъ настолько простой видъ, что мы въ немъ сразу узнаемъ уравненіе первой степени, то достаточно примѣнить лишь вторую часть правила, т. е. перенести всѣ неизвѣстные члены въ лѣвую часть, а извѣстные въ правую.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе:

$$\frac{3}{2}x + 7 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}x - 9.$$

Сначала получаемъ:

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)x = -9 - 7 + \frac{7}{4};$$

затѣмъ послѣдовательно находимъ:

$$\frac{1}{4}x = \frac{7-64}{4} = -\frac{57}{4},$$

$$x = -\frac{57}{4} : \frac{1}{4} = -57.$$

135. Уравненія съ буквенными коэффиціентами. Правило 22-ое остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда уравненіе, кромѣ x, содержитъ другія данныя буквы a, b, c,... Напримѣръ, дано уравненіе:

$$3ax + b = cx + 4.$$

Пишемъ его такъ:

$$(3a - c)x = 4 - b;$$

отсюда слѣдуетъ, что x равняется частному отъ дѣленія $4 - b$ на $3a - c$; если поэтому воспользуемся принятыми обозначеніями раціональныхъ дробей, то получимъ:

$$x = \frac{4-b}{3a-c}.$$

Эта дробь не допускаетъ дальнѣйшаго упрощенія. Но если бы у насъ было:

$$3abx = a^3b^2,$$

то по правилу дѣленія одночленовъ мы получили бы:

$$x = \frac{a^3b^2}{3ab} = \frac{1}{3}a^2b.$$

Изъ уравненія:

$$(a - b)x = a^2 - b^2,$$

слѣдуетъ:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b};$$

но мы имѣли тождество (п. **77**):

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b).$$

Слѣдовательно, если мы предположимъ, что $a - b$ не равно нулю, то путемъ сокращенія получимъ:

$$x = a + b.$$

Въ этомъ случаѣ x имѣетъ только одно значеніе, удовлетворяющее уравненію. Но если бы $a - b$ было равно нулю, то предложенное уравненіе превратилось бы въ тождество, т. е. удовлетворялось бы при любомъ значеніи x.

Изъ предшествующихъ разсужденій вытекаетъ слѣдующее важное правило:

Правило 23-ье. Для того, чтобы рѣшить уравненіе первой степени, слѣдуетъ привести его къ нормальному виду

$$Ax = B,$$

гдѣ A и B — алгебраическія выраженія, не содержащія x. Рѣшеніе выражается тогда формулой:

$$x = \frac{B}{A},$$

въ предположеніи, что знаменатель A не обращается въ нуль.

136. Изслѣдованіе уравненія. Разсмотримъ уравненіе первой степени въ нормальной формѣ:

$$ax = b,$$

гдѣ a и b обозначаютъ два какія угодно данныя числа. Изслѣдовать это уравненіе значитъ разобрать различные случаи, которые могутъ имѣть мѣсто въ зависимости отъ значеній a и b; эти значенія могутъ быть положительными и отрицательными, но возможно также значеніе нуль.

1. Сначала примемъ, что a не обращается въ 0. Тогда, каково бы ни было b, существуетъ одно и только одно число, которое, будучи умножено на a, дастъ произведеніе b; это число обозначается черезъ $\frac{b}{a}$. Уравненіе $ax = b$ будетъ поэтому удовлетворено, если въ него вмѣсто x подставимъ $\frac{b}{a}$, и только въ этомъ случаѣ; слѣдовательно, оно имѣетъ только одно рѣшеніе. Мы можемъ поэтому высказать слѣдующую теорему:

Теорема 63. Если коэффиціентъ a при x не равенъ нулю, то уравненіе первой степени $ax=b$ имѣетъ только одно рѣшеніе.

2. Теперь мы разсмотримъ случай, когда a равно нулю Тогда можно сказать, что нѣтъ вовсе уравненія, потому что въ алгебраическихъ выраженіяхъ, которыя мы имѣемъ въ виду сдѣлать равными, вовсе не встрѣчается x. Дѣйствительно, этотъ случай не можетъ имѣть мѣста если мы разсматриваемъ уравненія, въ которыхъ, кромѣ x, встрѣчаются только числа, потому что никому не можетъ придти въ голову назвать равенство, не содержащее x, уравненіемъ относительно x. Однако, если имѣются буквенные коэффиціенты, то можетъ случиться, что по существу задачи мы вынуждены придать въ извѣстныхъ случаяхъ буквѣ a значеніе нуль. Насколько важно это замѣчаніе, выяснится лишь въ слѣдующей главѣ; однако, мы еще здѣсь разсмотримъ, во что обратится рѣшеніе въ этомъ особомъ случаѣ.

2a. Прежде всего примемъ, что $a=0$, но b отлично отъ нуля. Тогда не существуетъ такого числа x, которое, будучи умножено на a, дало бы въ произведеніи b; слѣдовательно, уравненіе невозможно. Если, однако, a — число очень малое, то $\frac{b}{a}$ по абсолютному значенію будетъ очень велико и тѣмъ больше, чѣмъ меньше a. Поэтому говорятъ, что x безконечно велико для $a=0$, и обозначаютъ это рѣшеніе знакомъ ∞, о которомъ мы уже упоминали въ п.п. **111** и **130**.

2b. Допустимъ, наконецъ, что числа a и b оба равны нулю. Въ этомъ случаѣ каждое число удовлетворяетъ уравненію, такъ какъ каждое число, будучи умножено на нуль, даетъ нуль. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что наше уравненіе неопредѣленное, такъ какъ всякое число можетъ быть разсматриваемо, какъ его рѣшеніе. Формула $x=\frac{b}{a}$ даетъ въ этомъ случаѣ $x=\frac{0}{0}$, такъ какъ b и a оба равны нулю; поэтому символъ $\frac{0}{0}$ называютъ иногда знакомъ неопредѣленности.

Предшествующее изслѣдованіе можетъ быть представлено въ слѣдующей таблицѣ:

Изслѣдованіе уравненія $ax=b$.			
Допущенія :	Рѣшеніе :	Говорятъ, что уравненіе :	Формула или знакъ :
$a \neq 0$	однозначное	опредѣленное	$x=\dfrac{b}{a}$
$a=0, \quad b \neq 0$	не существуетъ	невозможное	$x=\infty$
$a=0, \quad b=0$	какое угодно число	неопредѣленное	$x=\dfrac{0}{0}$

II. СИСТЕМА УРАВНЕНІЙ ПЕРВОЙ СПЕПЕНИ СО МНОГИМИ НЕИЗВѢСТНЫМИ.

137. Система уравненій. Говорятъ, что нѣсколько уравненій образуютъ систему, если предполагается, что каждая изъ неизвѣстныхъ или перемѣнныхъ, обозначаемая въ нихъ одной и той же буквой, будетъ замѣняться во всѣхъ уравненіяхъ однимъ и тѣмъ же числомъ. Если эти числа удовлетворяютъ всѣмъ уравненіямъ системы, то система ихъ значеній представляетъ рѣшеніе системы уравненій.

Такъ, напримѣръ, для системы:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$$

рѣшеніемъ будетъ служить система значеній $x=2$, $y=1$; для системы:

$$\begin{cases} x+y+z=13 \\ 2x^2+3y^2-z=4 \end{cases}$$

рѣшеніемъ будетъ — система значеній $x=1$, $y=2$, $z=10$.

Говорятъ, что двѣ системы эквивалентны, если онѣ имѣютъ одинаковыя рѣшенія, т. е. если каждое рѣшеніе первой системы будетъ однимъ изъ рѣшеній второй и каждое рѣшеніе второй системы будетъ однимъ изъ рѣшеній первой.

Способъ, которымъ мы пользовались для рѣшенія уравненія первой степени съ одной неизвѣстной, сводился къ тому, что мы замѣняли это уравненіе болѣе простымъ уравненіемъ. Теперь, для того, чтобы рѣшить систему уравненій со многими неизвѣстными, мы попытаемся замѣнить ее болѣе простой эквивалентной ей системой.

Мы начнемъ съ нѣкоторыхъ системъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными, которыя можно рѣшить очень простымъ способомъ; затѣмъ мы изслѣдуемъ общій случай двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

138. Система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными. Если дана система уравненій первой степени, то мы упрощаемъ сперва каждое изъ уравненій, поступая такимъ образомъ, какъ мы это дѣлали въ случаѣ одной неизвѣстной, т. е. переносимъ всѣ неизвѣстные члены въ лѣвую часть, а всѣ извѣстные въ правую.

Если, напримѣръ, даны уравненія:

$$\begin{cases} 3 + 2x = 4 - 5y \\ 2 - 2y = 6 - 3x, \end{cases}$$

то мы можемъ ихъ привести къ нормальному виду:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

Чтобы рѣшить эту систему, примѣнимъ способъ подстановки. Мы должны опредѣлить значенія x и y, которыя удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ. Если бы было извѣстно значеніе x, то значеніе y опредѣлялось бы первымъ уравненіемъ по формулѣ:

$$y = \frac{1-2x}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x,$$

при чемъ x имѣетъ опредѣленное уже значеніе Это значеніе y, согласно опредѣленію системы, должно удовлетворять и второму уравненію, въ которомъ x имѣетъ то же значеніе. Если мы подставимъ это значеніе y во второе уравненіе, то получимъ:

$$3x - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x\right) = 4.$$

Но это — уравненіе первой степени съ одной неизвѣстной x, которое даетъ для x лишь одно значеніе. Если мы знаемъ это значеніе x, то значеніе y мы получимъ изъ вышеприведеннаго уравненія:

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x.$$

Теперь займемся подробнымъ вычисленіемъ. Уравненіе для x даетъ послѣдовательно:

$$3x + \frac{4}{5}x = 4 + \frac{2}{5},$$

$$\frac{19}{5}x = \frac{22}{5},$$

$$x = \frac{22}{19}.$$

Тогда будетъ:

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x = \frac{19 - 44}{5 \cdot 19} = \frac{-25}{5 \cdot 19} = \frac{-5}{19}.$$

Изъ этого пріема вытекаетъ слѣдующее правило:

Правило 24-ое. Чтобы рѣшить систему двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными x и y по способу подстановки, рѣшаемъ одно изъ двухъ уравненій относительно одной изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ, относительно y, такъ, какъ будто значеніе другой неизвѣстной x намъ дано, и выраженіе, полученное для y, подставляемъ въ другое уравненіе. Такимъ образомъ получается уравненіе съ одной неизвѣстной x, рѣшить которое мы уже умѣемъ. Когда найдено значеніе x, то для того, чтобы найти y, можно воспользоваться любымъ изъ двухъ данныхъ уравненій, замѣнивъ въ немъ предварительно x найденнымъ значеніемъ.

139. Случай невозможности и неопредѣленности. Мы привели рѣшеніе системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными къ рѣшенію одного уравненія первой степени съ одной неизвѣстной. Въ зависимости отъ того, будетъ ли это уравненіе опредѣленнымъ, невозможнымъ или неопредѣленнымъ, мы называемъ и самую систему опредѣленной, невозможной или неопредѣленной. Мы уже привели примѣръ опредѣленной системы, т. е. системы, имѣющей только одно рѣшеніе. Ниже мы дадимъ примѣры случаевъ невозможности и неопредѣленности.

Примѣръ I. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 15, \\ 6x + 9y = 18. \end{cases}$$

Первое уравненіе даетъ:

$$y = \frac{15 - 4x}{6} = \frac{15}{6} - \frac{4}{6}x = \frac{5}{2} - \frac{2}{3}x.$$

Подставляя во второе уравненіе вмѣсто y его значеніе, будемъ имѣть:

$$6x + 9\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}x\right) = 18,$$

$$(6 - 6)x = 18 - \frac{45}{2} = -\frac{9}{2}.$$

Слѣдовательно, коэффиціентъ при x равенъ нулю, но членъ, независящій отъ x, не равенъ нулю; уравненіе невозможно. Поэтому предложенная система также невозможна, т. е. нѣтъ такихъ значеній x и y, которыя ей удовлетворяютъ.

Примѣръ II. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 18, \\ 6x + 9y = 27. \end{cases}$$

Изъ перваго уравненія мы получаемъ:

$$y = \frac{18 - 4x}{6} = 3 - \frac{2}{3}x,$$

а второе принимаетъ видъ:

$$6x + 9\left(3 - \frac{2}{3}x\right) = 27,$$

$$(6 - 6)x = 27 - 27.$$

Но это—тождество, такъ какъ коэффиціентъ x и извѣстный членъ оба равны нулю. Здѣсь x остается неопредѣленнымъ, т. е. всякое значеніе x удовлетворяетъ уравненію. Поэтому x можно произвольно выбрать; y же выразиться тогда формулой:

$$y = 3 - \frac{2}{3}x.$$

Слѣдовательно, если x положимъ, напримѣръ, равнымъ 3, то $y = 1$; для $x = -3$ будетъ $y = 5$ и т. д.

Неопредѣленность въ этомъ случаѣ называется простой. Подъ этимъ разумѣютъ, что мы можемъ избрать произвольно одно лишь неизвѣстное, другое же будетъ этимъ уже опредѣлено.

140. Система, содержащая больше двухъ уравненій. Способъ подстановки можетъ быть примѣняемъ безъ существенныхъ измѣненій и для рѣшенія системы 3, 4 и т. д. уравненій съ 3, 4 и т. д. неизвѣстными. Мы покажемъ это на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Примѣръ I. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=16, \\ 5x-8y+2z=1, \\ 3x-\ \ y-2z=5. \end{cases}$$

Первое уравненіе даетъ:

$$z=\frac{16-2x-3y}{4}=4-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y.$$

Если мы подставимъ это значеніе въ оба другія уравненія, то получимъ:

$$\begin{cases} 5x-8y+2\left(4-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y\right)=1, \\ 3x-y-2\left(4-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y\right)=5, \end{cases}$$

или же послѣ упрощенія:

$$\begin{cases} 4x-\frac{19}{2}y=-7, \\ 4x+\frac{1}{2}y=13. \end{cases}$$

Это—система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

Первое изъ этихъ уравненій даетъ:

$$y=\frac{-7-4x}{-\frac{19}{2}}=\frac{14}{19}+\frac{8}{19}x;$$

второе обращается тогда въ:

$$4x+\frac{1}{2}\left(\frac{14}{19}+\frac{8}{19}x\right)=13,$$

т. е. будетъ:

$$\frac{80}{19}x=\frac{240}{19},$$

или, наконецъ:

$$x = 3.$$

Теперь получимъ:

$$y = \frac{14}{19} + \frac{8}{19}x = \frac{14+24}{19} = 2,$$

$$z = 4 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 4 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

Этимъ вполнѣ разрѣшена предложенная система.

Примѣръ II. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 14, \\ 2y - 4t = -7, \\ x + z = 10, \\ z + 2t = 9. \end{cases}$$

Первое уравненіе даетъ:

$$t = 14 - x - y - z.$$

Если мы подставимъ это значеніе t въ другія уравненія, то получимъ систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

$$\begin{cases} 2y - 4(14 - x - y - z) = -7, \\ x + z = 10, \\ z + 2(14 - x - y - z) = 9, \end{cases}$$

т. е. послѣ упрощенія:

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 4z &= 49, \\ x + z &= 10, \\ -2x - 2y - z &= -19. \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ:

$$z = \frac{49 - 4x - 6y}{4} = \frac{49}{4} - x - \frac{3}{2}y.$$

Отсюда получаемъ, по способу подстановки:

$$\begin{cases} x + \frac{49}{4} - x - \frac{3}{2}y = 10, \\ -2x - 2y - \left(\frac{49}{4} - x - \frac{3}{2}y\right) = -19, \end{cases}$$

т. е. будетъ:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}y = -\frac{9}{4}, \\ -x - \frac{1}{2}y = -\frac{27}{4}. \end{cases}$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ:

$$y = \frac{3}{2}.$$

Здѣсь мы имѣемъ особый случай, состоящій въ томъ, что въ это уравненіе не входитъ x. Это, однако, отнюдь не ведетъ къ измѣненію нашего способа. Посредствомъ подстановки во второе уравненіе, получимъ:

$$-x - \frac{3}{4} = -\frac{27}{4},$$

т. е.:

$$-x = -6,$$

$$x = 6.$$

Такъ какъ теперь x и y извѣстны, то мы имѣемъ:

$$z = \frac{49}{4} - x - \frac{3}{2}y = \frac{49}{4} - 6 - \frac{9}{4} = 4,$$

и отсюда, наконецъ, получаемъ:

$$t = 14 - x - y - z = 14 - 6 - \frac{3}{2} - 4 = \frac{5}{2}.$$

Такимъ образомъ, система рѣшена.

Примѣчаніе. Нерѣдко можно значительно сократить вычисленія, если удачно выбрать то уравненіе, изъ котораго мы опредѣляемъ значеніе одного неизвѣстнаго. При этомъ выборѣ приходится руководствоваться прежде всего навыкомъ въ вычисленіяхъ; вообще же мы можемъ лишь сказать, что слѣдуетъ стараться получать возможно болѣе простыя выраженія.

Примѣръ. Возьмемъ опять предыдущую систему:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 14, \\ 2y - 4t = -7, \\ x + z = 10, \\ z + 2t = 9. \end{cases}$$

Обращаемъ вниманіе на то, что третье уравненіе даетъ очень простое значеніе для x, а именно:

$$x = 10 - z.$$

Если мы это значеніе подставимъ въ первое уравненіе, т. е. единственное уравненіе, которое еще содержитъ x, то получимъ:

$$(10 - z) + y + z + t = 14;$$

такимъ образомъ первыя два уравненія содержатъ теперь лишь y и t. Эти уравненія будутъ:

$$\begin{cases} y + t = 4, \\ 2y - 4t = -7. \end{cases}$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ:

$$y = 4 - t;$$

тогда второе обращается въ:

$$-6t = -15,$$

т. е.

$$t = \frac{-15}{-6} = \frac{5}{2}.$$

Теперь мы находимъ послѣдовательно:

$$y = 4 - t = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2},$$

$$z = 9 - 2t = 9 - 5 = 4,$$

$$x = 10 - z = 10 - 4 = 6.$$

III. РѢШЕНІЕ И ИЗСЛѢДОВАНІЕ СИСТЕМЫ ДВУХЪ УРАВНЕНІЙ СЪ ДВУМЯ НЕИЗВѢСТНЫМИ.

141. Общія замѣчанія о системахъ уравненій. Напомнимъ, что подъ *системой* уравненій мы понимаемъ совокупность нѣсколькихъ уравненій, которыя удовлетворяются одновременно, т. е. при однихъ и *тѣхъ же значеніяхъ* неизвѣстныхъ, и что, далѣе, *рѣшеніемъ* системы называется каждая совокупность значеній неизвѣстныхъ, которая удовлетворяетъ *всѣмъ* уравненіямъ системы. Такъ, напримѣръ, для системы, разсмотрѣнной въ концѣ предыдущаго параграфа, значенія

$$x = 6, \qquad y = \frac{3}{2}, \qquad z = 4, \qquad t = \frac{5}{2}$$

представляютъ собою рѣшеніе.

Далѣе мы назвали двѣ системы уравненій **эквивалентными** въ томъ случаѣ, когда онѣ имѣютъ тѣ же рѣшенія. Чтобы получить систему, эквивалентную данной, употребляютъ обыкновенно способъ, состоящій въ томъ, что образуютъ такъ называемыя **линейныя сочетанія** уравненій данной системы. Мы сейчасъ выяснимъ, что слѣдуетъ подъ этимъ понимать.

Предположимъ сначала, что намъ даны 3 уравненія и что они написаны такимъ образомъ, что правыя ихъ части равны нулю, т. е. эти уравненія имѣютъ видъ:

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$$

гдѣ A, B, C обозначаютъ нѣкоторыя алгебраическія выраженія. Подъ **линейнымъ сочетаніемъ** этихъ уравненій подразумѣваемъ каждое уравненіе слѣдующаго вида:

$$aA + bB + cC = 0,$$

гдѣ a, b, c обозначаютъ постоянныя. Такъ, напримѣръ, уравненіе

$$2A - \frac{3}{5}B + \frac{1}{10}C = 0$$

будетъ линейнымъ сочетаніемъ данныхъ уравненій. То же самое можно сказать объ уравненіи

$$10A - \frac{3}{4}C = 0;$$

въ этомъ случаѣ

$$a = 10, \qquad b = 0, \qquad c = -\frac{3}{4};$$

такъ какъ b равно нулю, то въ линейное сочетаніе не входитъ B. Числа a, b, c называются **множителями сочетанія**, соотвѣтствующими уравненіямъ $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; для того чтобы линейное сочетаніе **дѣйствительно содержало** то или иное изъ выраженій A, B, C, напримѣръ, B, необходимо и достаточно, чтобы соотвѣтствующій множитель b былъ отличенъ отъ нуля.

Чтобы составить линейное сочетаніе уравненій данной системы, нѣтъ необходимости переносить всѣ члены въ лѣвую часть, какъ мы это дѣлали выше. А именно, если даны, напримѣръ, уравненія

$$A = A', \qquad B = B', \qquad C = C',$$

въ которыхъ A, B, C, A', B', C' суть произвольныя алгебраическія выраженія, то тѣ же уравненія можно представить въ видѣ:

$$A - A' = 0, \qquad B - B' = 0, \qquad C - C' = 0.$$

Теперь мы составимъ слѣдующее линейное сочетаніе:

$$a(A - A') + b(B - B') + c(C - C') = 0.$$

Это уравненіе можно изобразить и такъ:

$$aA + bB + cC = aA' + bB' + cC',$$

и мы видимъ, что оно получается изъ данныхъ уравненій по слѣдующему правилу:

Правило 25-ое. Линейное сочетаніе нѣсколькихъ данныхъ уравненій, получается слѣдующимъ образомъ: составляютъ такое новое уравненіе, лѣвая часть котораго равна суммѣ произведеній лѣвыхъ частей данныхъ уравненій, на извѣстныя постоянныя, а правая часть равна суммѣ произведеній правыхъ частей данныхъ уравненій на тѣ же постояннныя, взятыя въ томъ же порядкѣ.

На практикѣ удобно писать множителей за предложенными уравненіями; затѣмъ, когда это представляется удобнымъ, помѣщаютъ подобные члены въ одинъ столбецъ.

Примѣръ. Составить линейное сочетаніе слѣдующихъ уравненій:

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 4x - 3z + y = 2, \\ z - x - 3y = -6 \end{cases}$$

при помощи множителей:

$$2, \qquad -1, \qquad -2.$$

Дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rrrrl|r} 2x & - & y & & = 5 & 2, \\ 4x & + & y & - 3z & = 2 & -1, \\ -x & - & 3y & + z & = -6 & -2. \end{array}$$

Мы видимъ что коэффиціентъ каждой неизвѣстной въ линейномъ сочетаніи уравненій получается слѣдующимъ образомъ:

коэффиціентъ при этой неизвѣстной въ каждомъ уравненіи помножается на множителя, стоящаго за этимъ уравненіемъ, и полученныя произведенія складываются. Напримѣръ, коэффиціентъ при x будетъ:

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) = 4 - 4 + 2 = 2,$$

коэффиціентъ при y:

$$(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) = -2 - 1 + 6 = 3,$$

коэффиціентъ при z:

$$(-3) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 3 - 2 = 1;$$

правая же часть въ результатѣ будетъ:

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-6) \cdot (-2) = 10 - 2 + 12 = 20.$$

Слѣдовательно, линейное сочетаніе будетъ:

$$2x + 3y + z = 20.$$

142. Эквивалентность двухъ системъ. Каждое линейное сочетаніе нѣсколькихъ уравненій, естественно, удовлетворяется всѣми системами значеній неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ; дѣйствительно, если для опредѣленныхъ значеній неизвѣстныхъ $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, то и $aA + Bb + cC = 0$, каковы бы ни были множители a, b, c. Слѣдовательно, чтобы составить систему уравненій, эквивалентную данной системѣ, нужно взять столько линейныхъ сочетаній, составленныхъ изъ уравненій заданной системы, сколько у насъ имѣется неизвѣстныхъ. Въ то время, однако, какъ системѣ, состоящей изъ линейныхъ сочетаній, удовлетворяютъ всѣ рѣшенія данной системы, обратное можетъ не имѣть мѣста, такъ что вопросъ объ эквивалентности не исчерпывается тѣмъ, что мы наудачу составляемъ какія-либо линейныя сочетанія данныхъ уравненій. Для послѣдующаго изложенія достаточно, однако, привести одинъ очень важный случай, въ которомъ эквивалентность необходимо имѣетъ мѣсто.

Теорема 64. Когда дана произвольная система уравненій, то мы получимъ эквивалентную ей систему, если одно изъ уравненій этой системы замѣнимъ линейнымъ сочетаніемъ, дѣйствительно содержащимъ въ себѣ это уравненіе, т. е. такимъ, въ которомъ множитель, соотвѣтствующій замѣняемому уравненію, отличенъ отъ нуля.

Пусть, напримѣръ, будетъ дана система:

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \\ C = 0. \end{cases}
$$

По теоремѣ 64 ей будетъ эквивалентна система:

$$
\text{(II)} \qquad \begin{cases} A = 0, \\ aA + bB + cC = 0, \\ C = 0, \end{cases}
$$

при условіи, однако, что множитель b отличенъ отъ нуля, т. е. что линейное сочетаніе, которымъ мы замѣнили второе уравненіе системы (I), дѣйствительно содержитъ это второе уравненіе.

Необходимость этого условія очевидна. А именно, если бы b было равно нулю, то, очевидно, въ системѣ (II) не было бы никакого слѣда второго уравненія системы (I), т. е. никакого слѣда коэффиціентовъ, входящихъ въ B; и такъ какъ тогда рѣшенія этой системы (II) ни въ какой мѣрѣ не зависѣли бы отъ этихъ коэффиціентовъ, то нѣтъ никакого основанія, чтобы они удовлетворяли уравненію $B = 0$.

Чтобы доказать, что для каждаго b, отличнаго отъ нуля, система (II) дѣйствительно эквивалентна системѣ (I), мы должны сначала показать, что каждое рѣшеніе системы (I) удовлетворяетъ системѣ (II), и потомъ, что каждое рѣшеніе системы (II) удовлетворяетъ системѣ (I).

1. Каждое рѣшеніе системы (I) удовлетворяетъ системѣ (II); въ самомъ дѣлѣ, если выраженія A, B, C равны нулю, то обращается въ нуль и выраженіе $aA + bB + cC$.

2. Каждое рѣшеніе системы (II) удовлетворяетъ системѣ (I); въ самомъ дѣлѣ: если удовлетворяется система (II), то одновременно обращаются въ нуль выраженія A, C и $aA + bB + cC$; но такъ какъ A и C равны нулю, то обращаются въ нуль и произведенія aA и cC (теорема 9), такъ что и $bB = 0$; а такъ какъ множитель b не равенъ нулю, то отсюда слѣдуетъ, что $B = 0$ (теорема 10). Слѣдовательно, удовлетворяется система (I).

Такимъ образомъ, теорема 64 вполнѣ доказана.

Мы воспользуемся ею прежде всего для рѣшенія, а затѣмъ для изслѣдованія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

143. Исключеніе посредствомъ сложенія. Если дана система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными, то въ каждомъ изъ уравненій этой системы мы можемъ перенести неизвѣстные члены въ лѣвую часть, извѣстные въ правую и затѣмъ соединить подобные члены. Тогда система приметъ слѣдующій нормальный видъ:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'; \end{cases}$$

здѣсь a, b, c, a', b', c' обозначаютъ числа или алгебраическія выраженія, составленныя изъ извѣстныхъ величинъ. Займемся рѣшеніемъ системы (A). При вычисленіяхъ, необходимыхъ для рѣшенія этой системы, мы встрѣчаемъ величину $ab' - ba'$, которая называется опредѣлителемъ системы. Слѣдуетъ различать случай, когда этотъ опредѣлитель не равенъ нулю, отъ того случая, когда онъ равенъ нулю.

Если

$$ab' - ba' \neq 0,$$

то мы будемъ говорить, что мы имѣемъ дѣло съ общимъ случаемъ; въ п. **145** мы будемъ разсматривать частные случаи, въ которыхъ

$$ab' - ba' = 0$$

Если опредѣлитель $ab' - ba'$ не обращается въ нуль, то коэффиціенты b и b', очевидно, не могутъ быть оба равны нулю.

Если примемъ, что b отлично отъ нуля, то мы получимъ систему, эквивалентную данной, когда замѣнимъ второе уравненіе системы линейнымъ сочетаніемъ при помощи множителей b' и $-b$. Это сочетаніе, составленное по правилу 25 въ п. **141**, будетъ:

$$\begin{array}{l|c} ax + by = c & b' \\ a'x + b'y = c' & -b \end{array}$$

Вслѣдствіе такого выбора множителей неизвѣстная y не входитъ въ линейное сочетаніе; она такимъ образомъ устранена или исключена. Вмѣстѣ съ тѣмъ для x мы получимъ уравненіе:

$$(ab' - ba')x = cb' - bc';$$

заданная система эквивалентна слѣдующей:

$$(A') \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ (ab' - ba')x = cb' - bc'. \end{cases}$$

Второе уравненіе этой системы (A') содержитъ уже только неизвѣстную x. Кромѣ того, коэффиціентомъ при x будетъ служить какъ разъ опредѣлитель $ab' - ba'$, который по условію отличенъ отъ нуля. Отсюда видно, что это уравненіе даетъ для x лишь одно значеніе. Если мы подставимъ это значеніе x въ первое уравненіе системы (A'), то получимъ одно уравненіе съ одной неизвѣстной y, въ которомъ коэффиціентъ b при y отличенъ отъ нуля. Слѣдовательно, уравненіе это даетъ для y также лишь одно значеніе. Но такъ какъ система (A') эквивалентна системѣ (A), то отсюда заключаемъ, что система (A) имѣетъ также лишь одну систему рѣшеній.

Теперь пусть будетъ $b = 0$. Тогда, какъ мы уже замѣтили, b' должно быть отлично отъ нуля, потому что въ противномъ случаѣ опредѣлитель $ab' - ba'$, вопреки предположенію, долженъ былъ бы обратиться въ нуль; слѣдовательно, теперь также будутъ приложимы предшествующія разсужденія; только коэффиціенты a, b и c должны быть повсюду замѣнены черезъ a', b' и c', а коэффиціенты a', b' и c' обратно—черезъ a, b и c.

Отсюда слѣдуетъ теорема:

Теорема 66. Если опредѣлитель $ab' - ba'$ отличенъ отъ нуля, то система (A) имѣетъ всегда только одно рѣшеніе.

При изслѣдованіе мы увидимъ, что это условіе не только достаточно, но и необходимо, т. е. что это предложеніе представляетъ единственный случай, при которомъ система (A) имѣетъ только одно рѣшеніе.

144. Вычисленіе рѣшенія. Чтобы дѣйствительно вычислить рѣшеніе, существованіе котораго мы только-что доказали, достаточно рѣшить систему (A'). Тогда изъ второго уравненія получимъ:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

и если подставимъ это значеніе въ первое уравненіе, то оно превратится въ слѣдующее:

$$by = c - ax = c - \frac{a(cb' - bc')}{ab' - ba'} = \frac{b(ac' - ca')}{ab' - ba'}.$$

Если теперь b отлично отъ нуля, то отсюда слѣдуетъ:

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

это выраженіе для y остается въ силѣ и при $b = 0$; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ получается тотчасъ же

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab'},$$

если опредѣлимъ x изъ уравненія

$$ax = c$$

и значеніе $x = \frac{c}{a}$ подставимъ въ уравненіе

$$a'x + b'y = c'.$$

Можно впрочемъ, избѣжать раздѣленія случаевъ, когда b отлично отъ нуля и когда оно равно нулю, если обратить вниманіе на то, что x можетъ быть исключено изъ уравненій системы (A) при помощи множителей $-a'$ и a. Этимъ путемъ получимъ:

$$(-a'b + b'a)y = -ca' + ac'.$$

Мы можемъ, наконецъ, вывести значеніе y изъ значенія x, если замѣтимъ, что данная система не измѣнится, если мы въ ней одновременно переставимъ x съ y, a съ b и a' съ b' [1]). Подобныя замѣчанія очень полезны, такъ какъ они ведутъ къ упрощенію изслѣдованія.

Какимъ бы изъ указанныхъ пріемовъ мы ни воспользовались, мы приходимъ къ правилу:

Правило 26-ое. Рѣшеніе системы (A) выражается формулами:

1) Мы доказали, что наши уравненія имѣютъ только одну систему рѣшеній; слѣдовательно, какимъ бы способомъ мы ни опредѣляли y, мы можемъ быть увѣрены, что придемъ къ тому же рѣшенію.

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

причемъ знаменателемъ въ обоихъ случаяхъ служитъ опредѣлитель $ab' - ba'$, а числитель каждой изъ неизвѣстныхъ получается изъ знаменателя такимъ образомъ, что каждый коэффиціентъ неизвѣстной, которую мы отыскиваемъ, замѣняется извѣстнымъ членомъ того же уравненія (т. е. если ищемъ x, то a замѣняемъ черезъ c, a' черезъ c'; если ищемъ y, то b замѣняемъ черезъ c, а b' черезъ c').

На практикѣ часто удобнѣе не примѣнять этихъ формулъ, а производить исключеніе непосредственно. Въ виду этого мы предлагаемъ нижеслѣдующее правило:

Правило 27-ое. Чтобы найти неизвѣстную x изъ системы двухъ равненій съ двумя неизвѣстными (A), составляютъ линейное сочетаніе данныхъ уравненій, причемъ въ качествѣ множителя перваго уравненія берутъ коэффиціентъ при y во второмъ уравненіи, а въ качествѣ множителя второго уравненія берутъ коэффиціентъ при y въ первомъ уравненіи. Такимъ образомъ получается уравненіе, не содержащее болѣе y, и изъ него можно опредѣлить x. Для опредѣленія y можно либо воспользоваться этимъ значеніемъ x, а именно подставить его въ одно изъ данныхъ уравненій, либо опять-таки составить линейное сочетаніе, принимая за множителей коэффиціентъ при x во второмъ уравненіи и коэффиціентъ при x въ первомъ съ противоположнымъ знакомъ.

Примѣчаніе I. Нѣтъ необходимости убѣждаться предварительно въ томъ, что опредѣлитель $ab' - ba'$ отличенъ отъ нуля, потому что это обнаруживается само собой при вычисленіи; въ самомъ дѣлѣ, этотъ опредѣлитель является коэффиціентомъ при x (или при y) въ линейномъ сочетаніи, которое мы составили. Если, слѣдовательно, коэффиціентъ этотъ равенъ нулю, то мы замѣтимъ это непосредственно, примѣняя наше правило.

Примѣчаніе II. Часто существуютъ множители болѣе простые, чѣмъ тѣ, которые получаются по правилу 27-му. Если, напримѣръ, коэффиціенты суть цѣлыя числа, отличныя отъ нуля, то вычисленія можно упростить слѣдующимъ образомъ: находимъ общее наименьшее кратное абсолютныхъ значеній коэффиціентовъ при x или при y и въ качествѣ множителя для каждаго уравненія беремъ частное отъ дѣленія этого общаго наименьшаго кратнаго на соотвѣтствующій коэффиціентъ при x или y въ томъ же уравненіи; при, этомъ, однако не слѣдуетъ забывать въ одномъ изъ этихъ частныхъ измѣнить знакъ на обратный.

Примѣръ I. Пусть требуется рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 4, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Возьмемъ 2 множителемъ перваго уравненія, а 5 — множителемъ второго и припишемъ этихъ множителей къ уравненіямъ:

$$\begin{array}{rl|c} 2x + 5y = 4 & & 2 \\ 3x - 2y = 5 & & 5 \\ \hline 19x \qquad = 33 & & \end{array}$$

$$x = \frac{33}{19}.$$

Теперь возьмемъ множителями 3 и — 2:

$$\begin{array}{rl|c} 2x + 5y = 4 & & 3 \\ 3x - 2y = 5 & & -2 \\ \hline 19y = 2 & & \end{array}$$

$$y = \frac{2}{19}.$$

Предоставляемъ читателю провѣрить, удовлетворяютъ ли найденныя для x и y значенія уравненіямъ системы.

Примѣръ II. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 9, \\ 2x + 9y = 7. \end{cases}$$

Такъ какъ коэффиціенты 6 и 9 при y суть числа не взаимно простыя, то ихъ общее наименьшее кратное 18 меньше, чѣмъ ихъ произведеніе. Поэтому выгоднѣе взять множителями 3 и — 2; затѣмъ, для того чтобы исключить x, беремъ множителей

— 1 и 2. При слѣдующемъ расположенiи мы избѣгаемъ повторнаго переписыванiя уравненiй:

$$\begin{array}{r|l|r} 3 & 4x+6y=\ \ 9 & -1 \\ -2 & \underline{2x+9y=\ \ 7} & 2 \\ & 8x \qquad\ = 13 & \\ & 12y \qquad = \ \ 5. & \end{array}$$

Слѣва мы написали множителей, дающихъ уравненiе для x; справа множителей, дающихъ уравненiе для y.

Теперь мы находимъ:

$$\begin{aligned} 3\cdot 4-2\cdot 2 &= \ \ 12-\ \ 4=\ \ 8, \\ 3\cdot 9-2\cdot 7 &= \ \ 27-14=13, \\ (-1)\cdot 6+2\cdot 9 &= -6+18=12, \\ (-1)\cdot 9+2\cdot 7 &= -9+14=\ \ 5 \end{aligned}$$

и получаемъ рѣшенiе:

$$x=\frac{13}{8}, \qquad y=\frac{5}{12}.$$

Читатель можетъ удостовѣриться, что эти значенiя удовлетворяютъ заданнымъ уравненiямъ.

Примѣръ III. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a^2x+b^2y=c^2. \end{cases}$$

Чтобы исключить y, достаточно лишь взять множителями b и -1, а чтобы исключить x, достаточно взять множителями $-a$ и 1. Тогда запись будетъ такая:

$$\begin{array}{r|c|r} b & ax+by=c & -a \\ -1 & \underline{a^2x+b^2y=c^2} & 1 \\ & (ab-a^2)\,x=bc-c^2 & \\ & (-ab+b^2)\,y=-ac+c^2. & \end{array}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$x=\frac{c(b-c)}{a(b-a)},$$

$$y=\frac{c(c-a)}{b(b-a)}.$$

Это рѣшеніе заданной системы предполагаетъ, что множители a, b, $b-a$, на которые приходится дѣлить, отличны отъ нуля; дѣйствительно, если одинъ изъ этихъ множителей исчезаетъ, то обращается въ нуль и опредѣлитель, имѣющій здѣсь значеніе:

$$ab^2 - ba^2 = ab\,(b-a).$$

Примѣръ IV. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2. \end{cases}$$

Чтобы исключить y, можно употребить въ качествѣ множителей 1 и b, а чтобы исключить x, можно взять 1 и $-a$; тогда получимъ:

$$x\left(1+\frac{b}{a}\right) = 1 + 2b,$$

$$y\left(1+\frac{a}{b}\right) = 1 - 2a.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$x = \frac{a(1+2b)}{a+b},$$

$$y = \frac{b(1-2a)}{a+b}$$

при условіи что дѣлитель $a+b$ отличенъ отъ нуля.

145. Случай, когда опредѣлитель равенъ нулю; изслѣдованіе. Разсмотримъ опять общую систему:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Мы видѣли, что система эта имѣетъ лишь одно рѣшеніе, если опредѣлитель $ab' - a'b$ отличенъ отъ нуля; теперь мы посмотримъ, что случится, если опредѣлитель $ab' - ba'$ будетъ равенъ нулю.

Мы различаемъ два случая.

Первый случай. Коэффиціенты a, b, a', b' не всѣ равны нулю. Если въ этомъ случаѣ

$$(1) \qquad a \neq 0,$$

то мы можемъ вмѣсто второго уравненія системы взять линейное сочетаніе, которое получается посредствомъ множителей $-a'$ и a. Такимъ образомъ, мы получимъ систему, эквивалентную системѣ (A):

(B) $$\begin{cases} ax + by = c, \\ (ab' - a'b)y = ac' - ca'. \end{cases}$$

Но, согласно предположенію, $ab' - ba' = 0$. Если поэтому

(2) $$ac' - c'a \neq 0,$$

то второе уравненіе системы (B) невозможно; (ср. п. **136**), т. е. оно не удовлетворяется никакимъ значеніемъ y. Поэтому невозможна и система (B), и то же можно сказать объ эквивалентной ей системѣ (A). Слѣдовательно, условія (1) и (2) влекутъ за собой невозможность системы.

Примемъ теперь, что

(3) $$ac' - ca' = 0.$$

Тогда второе уравненіе системы (B) будетъ неопредѣленнымъ (п. **136**), такъ какъ оно удовлетворяется при любомъ значеніи y. Если же мы припишемъ неизвѣстному y произвольное значеніе, которое мы обозначимъ черезъ y_0, то первое изъ уравненій системы (B) будетъ:

$$ax + by_0 = c,$$

а изъ этого уравненія слѣдуетъ, такъ какъ a отлично отъ нуля:

$$x = \frac{c - by_0}{a}.$$

Отсюда вытекаетъ, что предложенная система имѣетъ рѣшеніе:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c - by_0}{a}, \\ y = y_0, \end{cases}$$

въ которомъ y_0 можетъ быть избрано произвольно. Слѣдовательно, эта система — неопредѣленная, при чемъ неопредѣленность характеризуется тѣмъ, что значеніе одной изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ y, можетъ быть взято произвольно; но если для него выбрано опредѣленное значеніе,—напримѣръ, y_0,— то неизвѣстная x этимъ вполнѣ опредѣлена.

Неизвѣстнымъ, которое можетъ быть выбрано произвольно, является въ данномъ случаѣ y, такъ какъ мы предположили, что одинъ изъ коэффиціентовъ a и a' при x отличенъ отъ нуля. Если же одинъ изъ коэффиціентовъ b и b' при y отличенъ отъ нуля, то мы можемъ точно такъ же произвольно выбрать x, и тогда y будетъ опредѣлено въ зависимости отъ x.

Неопредѣленность, которая здѣсь представляется, какъ слѣдствіе условія (3), называется простой, такъ какъ лишь одна изъ неизвѣстныхъ можетъ быть выбрана произвольно, а другая этимъ уже опредѣляется.

При условіи

(1') $$b \neq 0,$$

мы путемъ исключенія y точно такъ же нашли бы, что это система невозможная, если:

(2') $$bc' - cb' \neq 0,$$

и неопредѣленная, если:

(3') $$bc' - cb' = 0$$

Примѣчаніе. Не лишнимъ будетъ замѣтить, что мы придемъ къ тому же заключенію, а именно, что система неопредѣленная, независимо отъ того, какое неизвѣстное мы исключаемъ. Въ самомъ дѣлѣ, при исчезающемъ опредѣлителѣ $ab' - ba'$ и при предположеніяхъ (1) и (1') соотношеніе (3) имѣетъ слѣдствіемъ уравненіе (3') и обратно. Въ самомъ дѣлѣ, если коэффиціенты a и b отличны отъ нуля, то равенство $ab' - a'b = 0$ можно написать такъ:

(4) $$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

Если теперь имѣетъ мѣсто соотношеніе (3) и вмѣстѣ съ тѣмъ $c = 0$, то и $ac' = 0$, а потому и $c' = 0$, такъ что удовлетворяется и соотношеніе (3'). Если же $c \neq 0$, то соотношеніе (3) даетъ:

(5) $$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}.$$

Если это сопоставимъ съ равенствомъ (4), то получимъ:

(6) $$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

откуда—опять таки вытекаетъ соотношеніе (3′). Если же, наоборотъ, имѣетъ мѣсто равенство (3′), то либо $c=0$ и, слѣдовательно, въ силу соотношенія (3′) $bc'=0$ и попотому $c'=0$, такъ что равенство (3) также имѣетъ мѣсто, — либо же c не равно нулю, и тогда соотношеніе (3′) даетъ:

$$\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}. \tag{5′}$$

Если мы это опять сопоставимъ съ соотношеніемъ (4), то получимъ:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}, \tag{6}$$

откуда вытекаетъ соотношеніе (3).

Второй случай. Всѣ коэффиціенты неизвѣстныхъ равны нулю. Мы слѣдовательно, принимаемъ:

$$a=0, \qquad a'=0, \qquad b=0, \qquad b'=0.$$

Если при этомъ хотя бы одно изъ чиселъ c и c' отлично отъ нуля, то данныя уравненія не могутъ совмѣстно удовлетворяться, каковы бы ни были значенія x и y, такъ какъ лѣвыя части всегда будутъ равны нулю, а изъ правыхъ частей по крайней мѣрѣ одна, по условію, не будетъ равна нулю.

Но если

$$c=0, \qquad c'=0,$$

то данныя уравненія удовлетворяются при всякихъ значеніяхъ x и y. Неопредѣленность здѣсь оказывается двойною, такъ какъ оба неизвѣстныя могутъ быть выбраны произвольно.

146. Результаты изслѣдованія. Результаты изслѣдованія сведены на прилагаемой таблицѣ (стр. 241). Въ слѣдующей главѣ при разсмотрѣніи задачъ первой степени мы дадимъ примѣры изслѣдованія системъ уравненій, которыя частью разобраны въ текстѣ полностью, частью же приведены въ качествѣ задачъ.

IV. НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

147. Численныя неравенства. Подъ неравенствомъ мы разумѣемъ (ср. п. **7**) предложеніе, выражающее, что изъ двухъ чиселъ одно больше другого. Если мы хотимъ выразить, что, например, 4 больше 3, то пишемъ:

$$4 > 3$$

и читаемъ: 4 больше 3. Можно также написать:

$$3 < 4;$$

это читается: 3 меньше 4. Говорятъ, что это два неравенства противоположнаго смысла. Такъ же, какъ въ уравненіяхъ, (п. **132**) оба числа, входящія въ неравенство, называются его частями. Можно переставить обѣ части даннаго неравенства, измѣняя смыслъ его, т. е. замѣняя терминъ меньше терминомъ больше и, обратно, терминъ больше терминомъ меньше.

Изслѣдованіе системы $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Условія	Результатъ	Формулы
$ab' - ba' \neq 0$	Единственное рѣшеніе	$x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ $y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$
$ab' - ba' = 0$, $a \neq 0$, $ac' - ca' \neq 0$	Невозможная система	
$ab' - ba' = 0$, $a \neq 0$, $ac' - ca' = 0$	Простая неопредѣленность	$x = \dfrac{c - by_0}{a}$ $y = y_0$
$a = 0$, $a' = 0$, $b = 0$, $b' = 0$; c и c' не обращаются вмѣстѣ въ нуль	Невозможная система	
$a = 0$, $a' = 0$, $b = 0$, $b' = 0$; $c = 0$, $c' = 0$	Двойная неопредѣленность	$x = x_0$ $y = y_0$

Примѣчаніе. Въ этой таблицѣ x_0 и y_0 обозначаютъ числа, которыя можно выбрать произвольно. Если въ случаѣ $ab' - ba' = 0$ вмѣсто $a \neq 0$ мы взяли бы $b' \neq 0$ и $bc' - cb' = 0$, то соотвѣтственныя формулы должны были бы быть замѣнены слѣдующими:

$$x = x_0, \quad y = \frac{c' - a'x_0}{b'}.$$

Напомнимъ, что всякое отрицательное число меньше (п. **100**) нуля, и что изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ меньше то, которое имѣетъ большее абсолютное значеніе.

Поэтому имѣютъ мѣсто неравенства:

$$-4<-3,$$
$$-2<0,$$
$$-5<1.$$

Далѣе, по опредѣленію (п. **100**), неравенство

$$a>b,$$

выражаетъ, что разность $a-b$ есть положительное число; слѣдовательно,

$$a-b>0.$$

Если мы теперь обозначимъ черезъ c произвольное число, то

$$(a+c)-(b+c)=a-b.$$

Поэтому, если $a-b$ есть положительное число, то и разность $(a+c)-(b+c)$ имѣетъ положительное значеніе; иначе говоря, если

$$a>b,$$

то также

$$a+c>b+c.$$

Если же

$$a<b,$$

то

$$a+c<b+c$$

и также

$$a-c<b-c.$$

Мы можемъ поэтому высказать слѣдующую теорему:

Теорема 66. Смыслъ неравенства не мѣняется, если къ обѣимъ частямъ прибавимъ одно и тоже число или отъ обѣихъ частей отнимемъ одно и тоже число.

Напримѣръ, имѣемъ:

$$-4<-3;$$

поэтому, имѣютъ мѣсто также неравенства:

$$-4+12<-3+12,$$
$$-4-15<-3-15,$$

т. е.:

$$8<9,$$
$$-19<-18.$$

Теорема 67. Смыслъ неравенства не мѣняется, если мы обѣ части умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же *положительное* число. Но смыслъ неравенства измѣнится на противоположный, если мы обѣ его части умножимъ или раздѣлимъ на одно и тоже отрицательное число.

Напримѣръ, имѣемъ:

$$2 < 4.$$

Если мы умножимъ обѣ части на 3, то получимъ:

$$6 < 12,$$

а если мы ихъ раздѣлимъ на 12, то получимъ:

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{3}.$$

Оба эти неравенства имѣютъ тотъ же смыслъ, что и данное неравенство. Напротивъ того, если мы обѣ части умножимъ на — 2, то получимъ:

$$-4 > -8,$$

или же, если мы раздѣлимъ ихъ на — 2, то получимъ:

$$-1 > -2;$$

оба эти неравенства имѣютъ противоположный смыслъ по сравненію съ даннымъ неравенствомъ.

Чтобы доказать теорему 67, достаточно обратить вниманіе на то, что произведеніе всякого числа на положительное число имѣетъ тотъ же знакъ, что и множимое, между тѣмъ какъ произведеніе числа на отрицательное число имѣетъ знакъ, противоположный знаку множимаго. Если, слѣдовательно,

$$a > b,$$

т. е.

$$a - b > 0,$$

а c означаетъ положительное число, то будетъ также:

$$(a - b)\, c > 0,$$
$$ac - bc > 0,$$
$$ac > bc.$$

Если же c есть отрицательное число, то

$$(a-b)\,c<0,$$
$$ac-bc<0,$$
$$ac<bc.$$

То же самое доказательство примѣняется и къ дѣленію.

148. Неравенства первой степени. Подъ неравенствомъ первой степени разумѣютъ такое неравенство, въ которомъ, кромѣ извѣстныхъ величинъ, содержится еще неизвѣстная x въ первой степени. Такъ, напримѣръ, неравенство

$$3x-7-5x>\frac{3}{2}x-9$$

будетъ неравенствомъ первой степени относительно x. Рѣшить неравенство значитъ узнать, какія значенія x удовлетворяютъ ему. Неравенства первой степени съ одной неизвѣстной рѣшаются способомъ, совершенно подобнымъ тому, какой изложенъ нами для рѣшенія уравненій; нужно лишь обращать особое вниманіе на то, что смыслъ неравенства измѣняется, если мы это неравенство умножимъ или раздѣлимъ на отрицательное число.

Поэтому, чтобы рѣшить, напримѣръ, неравенство

$$3x-5>5x+8,$$

мы переносимъ члены, содержащіе x, въ лѣвую часть, а остальные въ правую. Такимъ образомъ получаемъ:

$$-2x>13.$$

Отсюда, дѣля на -2, находимъ:

$$x<-\frac{13}{2};$$

здѣсь смыслъ неравенства измѣняется, такъ какъ -2 есть отрицательное число. Этимъ заданное неравенство разрѣшено; именно, ему удовлетворяютъ всѣ значенія x, которыя меньше, чѣмъ $-\frac{13}{2}$.

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ XIV.

278. Рѣшить уравненія:

$$3x + 5 = x - 4,$$

$$\frac{3}{2}x - 4 = \frac{5}{3}x - 2,$$

$$\frac{3x-6}{7} + \frac{2x-4}{3} = \frac{5x-9}{21},$$

$$\frac{2x-1}{4} + 10x - 3 = 0,$$

$$\frac{5}{6}x - 2(1-x) + 3(1-5x) = \frac{3}{4}.$$

Уравненія, содержащія знаменателя, нужно рѣшить двоякимъ образомъ: отбрасывая знаменателя и не отбрасывая его.

279. Рѣшить уравненія:

$$\frac{5}{2}x - 4 = \frac{5}{3}x - 7,$$

$$\frac{2x-6}{7} + \frac{3x-4}{4} = \frac{5x-9}{28},$$

$$\frac{2x-1}{7} + 10x - 3 = 0,$$

$$\frac{15}{16}x - 2(1-2x) + 3(1-4x) = \frac{3}{5}.$$

280. Рѣшить уравненія:

$$ax - b = cx - d$$

$$(a - bx)c = (a + bx)d,$$

$$\frac{a-bx}{c} = \frac{c-dx}{a},$$

$$\frac{ax-b}{cx-d} = \frac{a+b}{c+d}.$$

281. Рѣшить уравненія:

$$ax + b = cx + d,$$

$$\frac{a+bx}{c} = \frac{c+dx}{a},$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a-b}{c-d},$$

$$\frac{ax-b}{cx-d} = \frac{ax-b'}{cx-d}.$$

282. Рѣшить уравненія:

$$\frac{x-a}{2bc}+\frac{x-b}{2ca}+\frac{x-c}{2ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

$$\frac{a-b}{x-1}+\frac{b-c}{x-2}+\frac{c-a}{x-3}=0,$$

$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=\frac{3x}{a+b+c},$$

$$\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}.$$

283. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$$

284. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2x-y=\frac{3}{5}, \\ x+y=\frac{5}{7}. \end{cases}$$

285. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 3x-5y=4. \end{cases}$$

286. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2x-y=\frac{3}{4}. \\ x+y=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

287. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{5}{6}y=1, \\ \frac{5}{6}x-\frac{3}{4}y=2. \end{cases}$$

288. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 4(2x+3y-5)=\frac{5}{6}(x+3)+\frac{2}{3}(y-4), \\ x+y=1. \end{cases}$$

289. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2x+y=3\left(x-5-\frac{2}{3}y\right), \\ 5x-y=\frac{3}{4}(2-x-y). \end{cases}$$

290. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2(2x+3y-5)=\frac{5}{8}(x+3)+\frac{3}{4}(y-4), \\ x+y=1. \end{cases}$$

291. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 2x-y=3\left(x-5+\frac{2}{3}y\right), \\ 5x+y=\frac{3}{4}(2+x-y). \end{cases}$$

Эту систему требуется рѣшить двояко: по способу подстановки и по способу линейныхъ сочетаній.

292. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ ax-by=d. \end{cases}$$

293. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ bx-ay=d. \end{cases}$$

294. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a^2x+b^2y=c^2. \end{cases}$$

295. Рѣшить и изслѣдовать систему:

$$\begin{cases} ax-by=c, \\ a^2x-b^2y=c^2. \end{cases}$$

296. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x+(3+\lambda)y=3+\lambda, \\ \lambda x+(5+\lambda)y=4+\lambda. \end{cases}$$

Изслѣдовать полученное рѣшеніе въ зависимости отъ значеній λ.

297. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} (2+\lambda)x+(3+\lambda)y=1+\lambda, \\ \lambda x+(5+\lambda)y=9+\lambda. \end{cases}$$

Изслѣдовать полученное рѣшеніе въ зависимости отъ значеній λ.

298. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} (a+\lambda)x+(b+\lambda)y=c+\lambda, \\ (a'+\lambda)x+(b'+\lambda)y=(c'+\lambda). \end{cases}$$

Изслѣдовать полученное рѣшеніе въ зависимости отъ значеній λ.

299. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=12, \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=14, \end{cases}$$

Принять $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$ за вспомогательныя неизвѣстныя.

300. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y-3}=15, \\ \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{y-3}=8. \end{cases}$$

Принять $\dfrac{1}{x-1}$ и $\dfrac{1}{y-3}$ за вспомогательныя неизвѣстныя.

301. Рѣшить систему.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+3y-5}+\dfrac{7}{5x-8y+12}=1, \\ \dfrac{4}{2x+3y-5}-\dfrac{14}{5x-8y+12}=1. \end{cases}$$

Принять $\dfrac{1}{2x+3y-5}$ и $\dfrac{1}{5x-8y+12}$ за вспомогательныя неизвѣстныя. Когда эти вспомогательныя неизвѣстныя будутъ найдены, то для того, чтобы найти x и y, придется рѣшить новую систему первой степени.

302. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=15, \\ \dfrac{4}{x-y}-\dfrac{5}{x+y}=17. \end{cases}$$

303. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y-z=4, \\ x-y-3z=12. \end{cases}$$

304. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+z=6, \\ x-y+3z=12. \end{cases}$$

305. Рѣшить систему:

$$x+y+z=m,$$
$$ax+by+cz=0,$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=0.$$

306. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x-y+2z=\frac{3}{4}, \\ x+y+z\ \ =0, \\ x-y-4z=2. \end{cases}$$

307. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x+3y-z-t=3, \\ x-y\ \ +z+t=\frac{2}{3}, \\ x-\frac{1}{2}y-z\qquad=6, \\ x\qquad\qquad\quad+t=12. \end{cases}$$

308. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} y+z+t=a, \\ z+t+x=b, \\ t+x+y=c, \\ x+y+z=d. \end{cases}$$

309. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x-y-2z=\frac{3}{4}, \\ x+y+z\ \ =0, \\ x-y-4z=1. \end{cases}$$

310. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x+3y-z-t=1, \\ x-y\ \ +z+t=2, \\ x-y\ \ -z\qquad=6, \\ x\qquad\qquad\quad+t=12. \end{cases}$$

311. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} y+z+t=20, \\ z+t+x=30, \\ t+x+y=40, \\ x+y+z=50. \end{cases}$$

312. Рѣшить систему:

$$xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)=c(xy-yz-zx).$$

(Вспомогательныя неизвѣстныя).

313. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} zu+uy+yz=yzu, \\ ux+xz+zu=zux, \\ xy+yu+ux=uxy, \\ yz+zx+xy=xyz. \end{cases}$$

(Вспомогательныя неизвѣстныя).

314. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} x+y+z-u=15, \\ x+y-z+u=23, \\ x-y+z+u=35, \\ -x+y+z+u=2. \end{cases}$$

Сумму $x+y+z+u=s$ принять за вспомогательное неизвѣстное.

315. Рѣшить неравенства:

$$\begin{gathered} 2x-3>5x-5, \\ 4x-8>8x-3, \\ \frac{2}{3}x-3>2x+\frac{3}{7}, \\ -\frac{1}{4}x>5x+\frac{5}{7}. \end{gathered}$$

316. Рѣшить неравенства:

$$\begin{gathered} 2x-3>3x-5, \\ 3x-8>5x-4, \\ x-3>2x+\frac{3}{7}, \\ -\frac{3}{4}x>5x-\frac{5}{7}, \\ -2x>3x+\frac{2}{3}. \end{gathered}$$

317. Рѣшить неравенства:

$$\begin{gathered} ax-b>cx-d, \\ \frac{a-bx}{c}>-\frac{c-bx}{a}. \end{gathered}$$

318. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d, \\ a'x+b'y+c'z=d', \\ a''x+b''y+c''z=d''. \end{cases}$$

319. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} a^3x + b^3y = c^3, \\ a^5x + b^5y = c^5. \end{cases}$$

320. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda \left(1 + \frac{z}{c}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{z}{c}\right), \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu \left(1 - \frac{z}{c}\right). \end{cases}$$

Показать, что рѣшеніе этой системы удовлетворяетъ также уравненію

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{z}{c}\right).$$

321. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda \left(1 + \frac{z}{c}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{z}{c}\right), \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda' \left(1 + \frac{z}{c}\right) \end{cases}$$

и показать, что рѣшеніе не удовлетворяетъ уравненію.

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda'}\left(1 - \frac{z}{c}\right)x$$

322. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} bz - cy = \alpha, \\ cx - az = \beta, \\ ay - bx = \gamma. \end{cases}$$

Показать, что она вообще невозможна, и что она становится неопредѣленной, если сумма $a\alpha + b\beta + c\gamma$ равна нулю.

323. Можно ли опредѣлить λ такъ, чтобы система:

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x + (\lambda + 2)y = 2\lambda + 1, \\ (\lambda + 8)x + (\lambda + 6)y = 2\lambda + 6 \end{cases}$$

была неопредѣленной? И если λ опредѣлено такимъ образомъ, то какъ слѣдуетъ выбрать x, чтобы y имѣло положительное значеніе?

324. Рѣшить уравненіе:

$$\frac{x-3}{x+3} + \frac{1}{2a} = \frac{x+1}{8a}.$$

Если дробь $\frac{1}{2a}$ перенесемъ въ правую часть, то послѣ выполненія вычитанія получимъ:

$$\frac{x-3}{x+3}=\frac{x-3}{8a}.$$

Если $x-3$ отлично отъ нуля, то обѣ дроби лишь тогда могутъ быть равны между собой, когда равны ихъ знаменатели; слѣдовательно,

$$x+3=8a;$$

поэтому должно быть:

$$x=8a-3.$$

Если же $x-3$ равно нулю, то знаменатели, очевидно, могутъ быть различны. Но тогда $x=3$; мы легко убѣдимся, что и это значеніе удовлетворяетъ заданному уравненію.

Глава XV.

ЗАДАЧИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

I. ОБЩІЯ ЗАМѢЧАНІЯ.

149. Чтобы рѣшить задачу съ помощью алгебры, нужно поступить слѣдующимъ образомъ:

1. выбрать неизвѣстныя;
2. составить уравненія, связывающія эти неизвѣстныя;
3. рѣшить уравненія и изслѣдовать эти рѣшенія;
4. изслѣдовать задачу.

Въ предыдущей главѣ мы уже разсматривали рѣшеніе уравненій; теперь скажемъ нѣсколько словъ объ остальныхъ трехъ пунктахъ; для разъясненія этихъ общихъ указаній намъ послужатъ многочисленные примѣры, приведенные ниже.

150. Выборъ неизвѣстныхъ. Если мы хотимъ рѣшить данную задачу съ помощью алгебры, то прежде всего задаемся вопросомъ, какъ слѣдуетъ выбрать неизвѣстныя? Этотъ вопросъ расчленяется на нѣсколько пунктовъ:

1. какія величины мы примемъ за неизвѣстныя?
2. какъ опредѣлять неизвѣстныя по абсолютному значенію?
3. какъ опредѣляются они по знаку?

1. Въ простыхъ задачахъ самый текстъ задачи указываетъ уже, какія величины должны быть избраны за неизвѣстныя; но только навыкъ можетъ научить, что въ извѣстныхъ случаяхъ нужно отдать предпочтеніе нѣкоторымъ неизвѣстнымъ, если мы не хотимъ отказаться отъ преимуществъ, иногда довольно значительныхъ.

2. Если мы уже сдѣлали выборъ величинъ, принимаемыхъ за неизвѣстныя, то слѣдуетъ точно опредѣлить, какимъ образомъ онѣ будутъ выражены численно, такъ какъ въ алгебраическія формулы входятъ лишь *числа*. Для этого слѣдуетъ точно установить относительно кажой неизвѣстной еди-

ницу, которой мы будемъ ее измѣрять. Потомъ, когда мы уже найдемъ рѣшеніе, въ этомъ рѣшеніи неизвѣстной будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое число, и, чтобы знать, что выражаетъ это число, нужно припомнить, что мы приняли за единицу. Далѣе, во многихъ случаяхъ необходимо установить начало счета, напримѣръ, если неизвѣстное измѣряетъ время.

3. Въ очень многихъ задачахъ мы можемъ разсматривать неизвѣстныя, какъ положительныя или какъ отрицательныя количества. Поэтому одновременно съ выборомъ неизвѣстной намъ необходимо точно установить соглашеніе относительно знака и помнить это соглашеніе, когда рѣшеніе будетъ найдено, такъ какъ лишь такимъ образомъ мы узнаемъ истинное значеніе его въ предложенной задачѣ.

Положимъ, что дана слѣдующая задача:

Ивану 3 года 6 мѣсяцевъ, а Петру 1 годъ и 6 мѣсяцевъ. Можетъ ли случиться, что въ нѣкоторый моментъ возрастъ Ивана превышаетъ вдвое возрастъ Петра?

За неизвѣстную примемъ время, отдѣляющее настоящій моментъ отъ того момента времени, когда возрастъ Ивана будетъ или былъ въ два раза больше, чѣмъ возрастъ Петра. Такимъ образомъ, за начало времени принятъ настоящій моментъ. Дальше слѣдуетъ избрать единицу; возьмемъ для этой цѣли годъ или мѣсяцъ. Наконецъ, нужно опредѣлить, примемъ ли мы за положительное будущее время и за отрицательное прошлое или наоборотъ. По этимъ даннымъ можно составить уравненіе для данной задачи и затѣмъ, рѣшивъ уравненіе, изслѣдовать результатъ.

151. Составленіе уравненій. Составить уравненія задачи значитъ написать тѣ уравненія, которымъ должны удовлетворять неизвѣстныя по условіямъ задачи. Условія, которыя не могутъ быть выражены въ формѣ уравненій, разбираются при изслѣдованіи (п. **152**). Мы займемся здѣсь лишь тѣми условіями, которыя могутъ быть выражены посредствомъ уравненій между неизвѣстными и данными величинами. Прежде чѣмъ мы напишемъ эти уравненія, нужно выразить всѣ величины одного и того же рода въ одной и той же единицѣ, при томъ же началѣ счета и тѣхъ же условіяхъ въ отношеніи знака. Уравненія, составленныя безъ соблюденія этихъ правилъ, не будутъ имѣть вообще никакого смысла.

Пусть, напримѣръ будетъ дана слѣдующая задача:

Два велосипедиста ѣдутъ по дорогѣ отъ Гамбурга къ Франкфурту на М. Они находятся оба между Гамбургомъ и Франкфуртомъ, первый на разстояніи 35 км. отъ Гамбурга, второй на разстояніи 30 км. отъ Франкфурта. Первый движется со скоростью 20 км. въ часъ по направленію къ Франфурту, а второй со скоростью 4 м. въ секунду по направленію къ Гамбургу. Спрашивается, когда они встрѣтятся, если разстояніе между Гамбургомъ и Франкфуртомъ равно 548 км.

Примемъ за неизвѣстное то время, которое протекаетъ между даннымъ моментомъ и моментомъ встрѣчи; это время будемъ считать положительнымъ, если оно протекаетъ послѣ начальнаго момента; за единицу же мы примемъ часъ. Такимъ образомъ мы выбрали начало счета временъ, положительное направленіе и единицу его. Далѣе, мы принимаемъ, что велосипедисты должны встрѣтиться черезъ x часовъ.

Но въ нашей задачѣ имѣются и длины. Мы избираемъ за начало счета длинъ, напримѣръ, Гамбургъ, за положительное направленіе, скажемъ направленіе отъ Гамбурга къ Франкфурту и, наконецъ, за единицу длины — километръ. Въ этихъ единицахъ положеніе перваго велосипедиста въ начальный моментъ выразится числомъ $+35$, а скорость его—числомъ $+20$. Положеніе второго велосипедиста выразится числомъ $548 - 30 = 518$, такъ какъ Франкфуртъ отстоитъ отъ Гамбурга на 548 км., а онъ находится въ 30 км. разстоянія отъ Франкфурта по направленію къ Гамбургу. Такъ какъ онъ проѣзжаетъ 4 м. въ секунду, то въ минуту онъ проѣдетъ $4 \cdot 60$, а въ часъ $4 \cdot 60 \cdot 60 = 14400$ м., т. е. 14,4 км. Кромѣ того, онъ подвигается отъ Франкфурта къ Гамбургу, т. е. въ отрицательномъ направленіи. Слѣдовательно, скорость его равна $-14{,}4$.

Теперь мы можемъ уже составить уравненіе задачи; въ самомъ дѣлѣ, намъ остается лишь написать, что въ моментъ времени x оба велосипедиста находятся въ одномъ и томъ же мѣстѣ, т. е. что ихъ разстоянія отъ Гамбурга равны. Согласно формулѣ равномѣрнаго движенія (п. **107**) разстояніе перваго велосипедиста отъ Гамбурга по истеченіи x часовъ равно $(35 + 20x)$ км., а разстояніе второго равно ($518 - 14{,}4\,x$) км. Слѣдовательно, уравненіе задачи будетъ:

$$35 + 20x = 518 - 14{,}4x.$$

152. Изслѣдованіе результата. Рѣшеніе уравненія или уравненій задачи можетъ оказаться опредѣленнымъ, невозможнымъ или неопредѣленнымъ; неопредѣленность можетъ быть простой или двойной и т. д. Если уравненія оказываются опредѣленными, то они приводятъ къ числамъ, которыя могутъ быть положительными или отрицательными, цѣлыми или дробными и т. д. Изслѣдовать задачу значитъ опредѣлить, какіе выводы можно сдѣлать изъ этихъ различныхъ обстоятельствъ по отношенію къ задачѣ.

Положимъ, напримѣръ, что буква x въ уравненіи обозначаетъ нѣкоторое число лицъ, находящихся въ извѣстномъ собраніи, и что мы нашли, рѣшая задачу, $x = \frac{3}{4}$ или $x = -12$. Отсюда мы не можемъ заключить, что уравненіе невозможно, но мы приходимъ къ заключенію, что задача невозможна.

Если данныя величины выражены числами, то изслѣдованіе въ большинствѣ случаевъ, какъ мы покажемъ на примѣрахъ, производится очень легко. Оно бываетъ, однако, часто болѣе сложнымъ, если всѣ данныя величины или нѣкоторыя изъ нихъ выражены буквами, численное значеніе которыхъ неизвѣстно; для того, чтобы въ этомъ случаѣ произвести полное изслѣдованіе, нужно послѣдовательно разобрать различныя предположенія, которыя можно сдѣлать относительно знаковъ и относительно значеній данныхъ величинъ.

II. ЗАДАЧИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЙ НЕИЗВѢСТНОЙ.

153. Опредѣленіе. Задача называется задачей первой степени съ одной неизвѣстной, если ея рѣшеніе можетъ быть сведено къ рѣшенію уравненія первой степени съ одной неизвѣстной.

Это опредѣленіе не такъ просто, какъ кажется съ перваго взгляда. А именно, если дана задача, то число неизвѣстныхъ, которыя нужно ввести для ея рѣшенія, во многихъ случаяхъ можетъ быть различно въ зависимости отъ примѣняемаго способа. Положимъ, что дана слѣдующая задача:

У Павла 3-мя шарами больше, чѣмъ у Петра. Если бы Петръ имѣлъ въ два раза больше шаровъ, чѣмъ онъ дѣйствительно имѣетъ, то у него было бы 5-ью шарами больше, чѣмъ у Павла. Сколько шаровъ имѣютъ Петръ и Павелъ?

Обозначимъ число шаровъ Петра черезъ x, а число шаровъ Павла черезъ y; тогда мы будемъ имѣть двѣ неизвѣстныя. Но если число шаровъ Петра мы обозначимъ черезъ x, то изъ задачи непосредственно слѣдуетъ, что число шаровъ Павла будетъ $x+3$; слѣдовательно, достаточно ввести одну неизвѣстную.

То же самое нужно сказать и относительно степени уравненія. Для примѣра возьмемъ слѣдующую задачу:

Требуется найти такое положительное число, квадратъ котораго, увеличенный на 9, равенъ двойному его квадрату, уменьшенному на 7.

Если мы это число обозначимъ черезъ x, то получимъ уравненіе:

$$x^2+9=2x^2-7;$$

это уравненіе второй степени. Но мы можемъ также принять за неизвѣстную квадратъ искомаго числа. Если мы его обозначимъ черезъ y, то получится уравненіе первой степени:

$$y+9=2y-7.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $y=16$. Сообразно этому квадратъ искомаго положительнаго числа равенъ 16; слѣдовательно, число равно 4.

154. Примѣры задачъ первой степени съ одной неизвѣстной. Задача I. Крестьянка понесла на базаръ нѣкоторое число яицъ, которыя она хотѣла продавать по 2 коп. за штуку. Она разбила 6 изъ нихъ, но остальныя ей удалось продать по 3 коп., и она принесла домой на 20 коп. больше, чѣмъ разсчитывала. Сколько яицъ было у крестьянки, когда она шла на базаръ?

Обозначимъ число яицъ, которое было у крестьянки, когда она уходила изъ дому, черезъ x. Тогда сумма, которую она предполагала принести домой, выразится черезъ $2x$, если мы принимаемъ копейку за единицу. Изъ условія задачи видно, что крестьянка продала $(x-6)$ яицъ по 3 коп.; она получила, слѣдовательно, $3(x-6)$ коп.; съ другой стороны, она выручила на 20 коп. больше, чѣмъ разсчитывала. Итакъ, уравненіе задачи будетъ:

$$3(x-6)=2x+20.$$

Отсюда выводимъ:

$$x=38.$$

Итакъ, мы получаемъ слѣдующій отвѣтъ: уходя изъ дому, крестьянка имѣла 38 яицъ.

Полезно сдѣлать повѣрку результата; если бы онъ не соотвѣтствовалъ условіямъ задачи, то отсюда слѣдовало бы заключить, что мы сдѣлали ошибку. Мы находимъ здѣсь, что 38 яицъ по 2 коп. даютъ 76 коп. Но крестьянка продала на 6 яицъ меньше, т. е. 32 яйца; за то эти 32 яйца она продала по 3 коп. за штуку и, слѣдовательно, выручила 96 коп.; эта сумма дѣйствительно оказывается на 20 коп. больше. Слѣдовательно, мы нашли правильный результатъ.

Задача II. Воръ завладѣлъ велосипедомъ и убѣгаетъ на немъ со скоростью 20 км. въ часъ. Кража замѣчена спустя 3 минуты послѣ того, какъ онъ убѣжалъ, и велосипедистъ отправляется въ погоню со скоростью 22 км. въ часъ. Какое время понадобится ему, чтобы догнать вора?

Будемъ считать искомое время въ минутахъ отъ момента, въ который воръ убѣжалъ, и положимъ, что велосипедистъ догонитъ вора черезъ x минутъ. Въ этотъ моментъ пути, которые оба проѣхали, будутъ равны между собой; воръ ѣхалъ въ продолженіе x минутъ со скоростью 20 км. въ часъ, а велосипедистъ $(x-3)$ минуты со скоростью 22 км. въ часъ. Такъ какъ путь, проходимый въ теченіе одной минуты, въ 60 разъ меньше пути, проходимаго въ часъ, то уравненіе задачи выразится такъ:

$$\frac{20}{60}x=\frac{22}{60}(x-3),$$

или же, по умноженіи обѣихъ частей на 30:

$$10x = 11\,(x - 3).$$

Слѣдовательно:

$$x = 33.$$

Черезъ 33 минуты послѣ того момента, когда воръ убѣжалъ, онъ будетъ настигнутъ велосипедистомъ. Предлагаемъ читателю провѣрить результатъ.

Задача III. Отцу 40 лѣтъ, сыну 16. Когда возрастъ отца будетъ въ 3 раза больше возраста сына?

Мы будемъ считать время въ годахъ и положительнымъ впредь отъ настоящаго момента; положимъ, что послѣ x лѣтъ отецъ будетъ въ три раза старше сына. Къ этому времени возрастъ отца будетъ $(40 + x)$ лѣтъ, а возрастъ сына $(16 + x)$ лѣтъ. Отсюда, по условіямъ задачи:

$$40 + x = 3\,(16 + x),$$

т. е.

$$-2x = 8;$$

отсюда:

$$x = -4.$$

Изслѣдованіе. Мы получаемъ здѣсь, въ качествѣ рѣшенія, отрицательное число. Мы считали x положительнымъ для будущаго времени; сообразно съ этимъ мы видимъ, что прошло уже 4 года съ того времени, какъ возрастъ отца былъ въ три раза больше, чѣмъ возрастъ сына. Тогда отцу было 36, а сыну 12 лѣтъ.

Задача IV. Возрастъ Павла составляетъ a лѣтъ, а возрастъ Якова b лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ возрастъ Павла будетъ въ m разъ больше, чѣмъ возрастъ Якова?

Здѣсь a, b, m обозначаютъ произвольныя положительныя числа. Чтобы составить уравненіе задачи, поступимъ точно такъ же, какъ въ предшествующей задачѣ. Черезъ x лѣтъ возрастъ Павла будетъ составлять $(a + x)$ лѣтъ, а возрастъ Якова $(b + x)$ лѣтъ. Слѣдовательно:

$$a + x = m\,(b + x),$$

или

$$(m - 1)\,x = a - mb,$$

а отсюда слѣдуетъ:

$$x = \frac{a - mb}{m - 1}.$$

Черезъ x лѣтъ, слѣдовательно, возрастъ Павла выразится такъ:

$$a + x = a + \frac{a - mb}{m - 1} = \frac{m(a - b)}{m - 1},$$

а возрастъ Якова:

$$b + x = b + \frac{a - mb}{m - 1} = \frac{a - b}{m - 1}.$$

Отсюда видимъ, что возрастъ Павла въ этотъ моментъ дѣйствительно въ m разъ больше возраста Якова.

Изслѣдованіе. Для того, чтобы рѣшеніе x отвѣчало задачѣ, оно должно прежде всего существовать, и затѣмъ возрасты Павла и Якова спустя x лѣтъ должны выражаться положительными числами.

1. Для того, чтобы рѣшеніе x существовало, $m - 1$ должно быть отлично отъ нуля. Если $m = 1$ и $a - mb \neq 0$, т. е. $a - b \neq 0$, то задача невозможна. Это можно было предвидѣть: если Павелъ и Яковъ въ настоящій моментъ имѣютъ различный возрастъ, а спрашивается, когда они будутъ имѣть одинъ и тотъ же возрастъ, то отвѣтъ будетъ: никогда. Раньше мы говорили, что эту невозможность обозначаютъ символомъ ∞; этотъ символъ можно понимать въ томъ смыслѣ, что по истеченіи очень продолжительнаго времени Павелъ и Яковъ, хотя и не сравняются по возрасту, но различіе ихъ возрастовъ, а именно отношеніе ихъ m все болѣе и болѣе будетъ приближаться къ числу 1.

Если бы было $m = 1$ и одновременно $a = b$, то уравненіе было бы неопредѣленнымъ и задача тоже. Павелъ и Яковъ имѣютъ въ настоящій моментъ одинъ и тотъ же возрастъ. Въ какое время они еще будутъ въ одномъ возрастѣ? Отвѣтъ очевиденъ: во всякое время.

2. Этимъ исчерпывается случай, когда m равно 1; теперь мы изслѣдуемъ по порядку случаи, когда m больше 1 и когда m меньше 1.

Если m больше 1, то $m - 1$ есть число положительное. Для того, чтобы значенія, которыя мы получили для возраста Павла и Якова, были положительными, необходимо и достаточно чтобы $a - b$ имѣло положительное значеніе, т. е чтобы a было больше b. Что же касается значенія x, то оно будетъ положительнымъ или отрицательнымъ въ зависимости отъ того, имѣетъ ли разность $a - mb$ положительное или отрицательное значеніе, т. е. будетъ ли a больше или меньше, чѣмъ mb. Эти результаты на языкѣ повседневной жизни выразятся слѣдующимъ образомъ: для того чтобы въ нѣкоторый моментъ возрастъ Павла былъ въ m разъ больше возраста Якова, при чемъ m больше 1., Павелъ долженъ быть старше Якова; если же Павелъ старше Якова, то искомый моментъ времени еще наступитъ или наступилъ уже раньше, въ зависимости отъ того, окажется ли возрастъ Павла въ данный моментъ больше или меньше, чѣмъ m разъ взятый возрастъ Якова.

Если $a = b$, то находимъ, что возрастъ Павла и возрастъ Якова по истеченіи x лѣтъ будутъ равны нулю. Слѣдовательно, одинъ изъ нихъ будетъ старше другого въ m разъ въ то время, когда возрастъ обоихъ равенъ нулю; это имѣетъ мѣсто для любого значенія m. Однако, это алгебраическое рѣшеніе не представляетъ никакого практическаго интереса: иногда въ такихъ случаяхъ говорятъ, что рѣшеніе *воображаемое*.

Подобнымъ же образомъ можно разобрать случай, когда m меньше 1; слѣдующее замѣчаніе позволяетъ, однако, поступить иначе. Если возрастъ Павла составляетъ половину или $\frac{3}{4}$ возраста Якова, то это значитъ, что возрастъ Якова равенъ двойному возрасту Павла или $\frac{4}{3}$ возраста Павла. Слѣдовательно, если m меньше 1, то достаточно переставить въ текстѣ задачи имена Павла и Якова и замѣнить m черезъ $\frac{1}{m}$; такимъ образомъ, мы приходимъ къ случаю, уже разсмотрѣнному нами, когда m больше 1. Замѣчанія такого рода очень полезны, такъ какъ благодаря имъ можно часто упростить и сократить изслѣдованіе. Результаты изслѣдованія сведены въ прилагаемой таблицѣ (стр. 262).

III. ЗАДАЧИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СО МНОГИМИ НЕИЗВѢСТНЫМИ.

155. Опредѣленіе и общія замѣчанія. Говорятъ, что данная задача есть *задача первой степени со многими неизвѣстными*, если ея рѣшеніе можно свести къ рѣшенію системы уравненій первой степени со многими неизвѣстными. Это опредѣленіе даетъ, однако, мѣсто замѣчаніямъ, подобнымъ тѣмъ, которыя сдѣланы въ п. **153**. А именно: число неизвѣстныхъ и степень уравненій зависитъ иногда отъ способа составленія уравненій; слѣдовательно, число неизвѣстныхъ и степень уравненій въ нѣкоторой мѣрѣ произвольны, такъ что данное выше опредѣленіе не совсѣмъ точно. Практически, однако, число неизвѣстныхъ и степень уравненій обыкновенно получаются непосредственно изъ выраженія задачи.

Предположенія относительно m	Предположенія относительно a и b	Заключенія
$m=1$	$a \neq b$	задача невозможна
	$a=b$	неопредѣленна
$m>1$	$a<b$	невозможна
	$a=b$	воображаемое рѣшеніе
	$b<a<mb$	$x<0$; 1 рѣшеніе, оно выражаетъ прошедшее время
	$a=mb$	$x=0$; 1 рѣшеніе, оно выражаетъ настоящее время
	$a>mb$	$x>0$; 1 рѣшеніе, оно выражаетъ будущее время
$m<1$	$a>b$	невозможна
	$a=b$	воображаемое рѣшеніе
	$mb<a<b$	$x<0$; 1 рѣшеніе, оно выражаетъ прошедшее время
	$a=mb$	$x=0$; 1 рѣшеніе, оно выражаетъ настоящее время
	$a<mb$	$x>0$; 1 рѣшеніе, оно выражаетъ будущее время

Если предложенная задача — опредѣленная, что обычно и имѣетъ мѣсто, то число уравненій должно быть равно числу неизвѣстныхъ; слѣдовательно, задача должна давать намъ возможность составить столько уравненій, сколько у насъ имѣется неизвѣстныхъ.

Иногда можно составить больше уравненій, чѣмъ неизвѣстныхъ. Въ такихъ случаяхъ задача возможна лишь тогда, когда уравненія совмѣстны. Приведемъ примѣръ такого случая: требуется найти два числа, сумма которыхъ равна 8, разность 2, а разность удвоенныхъ чиселъ 4. Здѣсь у насъ три уравненія: $x+y=8$, $x-y=2$, $2x-2y=4$, изъ которыхъ третье эквивалентно второму; поэтому достаточно сохранить первыя два. Уравненіе всегда является лишнимъ, если оно представляетъ собой линейное сочетаніе другихъ уравненій; мы можемъ его отбросить, такъ какъ оно удовлетворяется всякій разъ, какъ удовлетворяются тѣ уравненія, изъ которыхъ оно составлено.

Для того, чтобы рѣшить задачу, не всегда, однако, достаточно написать столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ. Если, напримѣръ, нужно найти два числа, разность которыхъ равна 2, а разность удвоенныхъ чиселъ 4, то мы имѣемъ здѣсь два уравненія: $x-y=2$ и $2x-2y=4$, которыя, очевидно, эквивалентны другъ другу; слѣдовательно, изъ нихъ нельзя опредѣлить неизвѣстныхъ.

Что касается выбора неизвѣстныхъ, то въ сомнительныхъ случаяхъ намъ можетъ помочь лишь навыкъ. Однако, если и удобно избирать въ качествѣ неизвѣстныхъ однѣ величины предпочтительно передъ другими, то это не является все же необходимымъ; дѣйствительно, каждый выборъ неизвѣстныхъ, ведущій къ уравненіямъ первой степени, даетъ возможность получить рѣшеніе посредствомъ болѣе или менѣе продолжительныхъ вычисленій.

156. Примѣры задачъ первой степени со многими неизвѣстными.

Задача I. 6 метровъ сукна и 5 метровъ подкладки стоятъ 41 р., 8 метровъ сукна и 6 метровъ подкладки стоятъ 54 р. Найти цѣну 1 метра сукна и 1 метра подкладки.

Обозначимъ цѣну 1 м. сукна черезъ x р., цѣну 1 м. подкладки черезъ y р. Задача даетъ уравненія:

$$\begin{cases} 6x+5y=41, \\ 8x+6y=54. \end{cases}$$

Второе уравненіе будетъ проще, если мы раздѣлимъ всѣ члены его на 2:

$$4x+3y=27.$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ:

$$y = \frac{27 - 4x}{3} = 9 - \frac{4}{3}x.$$

Если подставимъ это значеніе въ первое уравненіе, то получимъ:

$$6x = 5\left(9 - \frac{4}{3}x\right) = 41,$$

$$\left(6 - \frac{20}{3}\right)x = 41 - 45,$$

$$\frac{-2}{3}x = -4,$$

$$x = \frac{-12}{-2} = 6.$$

Когда же намъ извѣстно x, то:

$$y = 9 - \frac{4}{3}x = 9 - 8 = 1.$$

Слѣдовательно, цѣна 1 м. сукна равна 6 р., а цѣна 1 м. подкладки 1 р.

Задача II. Велосипедистъ ѣдетъ со скоростью 25 км. въ часъ по ровному пути, 15 км. на гору, 30 км. съ горы. Сколько ровнаго пути, подъема и спуска содержитъ дорога въ 100 км., если ему нужно 4 ч. 24 м., чтобы проѣхать ее въ одномъ направленіи, и 4 ч. 36 м., чтобы проѣхать ее въ другомъ направленіи?

Пусть число километровъ ровнаго пути будетъ x, число километровъ подъема пусть будетъ y, число километровъ спуска пусть будетъ z и именно въ одномъ направленіи; въ обратномъ направленіи подъемъ становится спускомъ и обратно Первое уравненіе получимъ, если напишемъ. что совокупность всѣхъ частей пути равна 100 км:

(1) $$x + y + z = 100.$$

Другія два уравненія получимъ, если напишемъ, что время, употребленное велосипедистомъ на проѣздъ по этому пути, составляло 4 ч. 24 м., т. е. 264 мин., въ одну сторону и 4 ч. 36 м., т. е. 276 мин. въ обратную сторону. Чтобы проѣхать x км. со скоростью 25 км. въ часъ, понадобится $\frac{60x}{25}$ минутъ. Если сложимъ вмѣстѣ отдѣльные промежутки времени, полученные нами при помощи аналогичныхъ разсужденій, то получимъ два уравненія:

$$\frac{60x}{25}+\frac{60y}{15}+\frac{60z}{30}=264,$$

$$\frac{60x}{25}+\frac{60y}{30}+\frac{60z}{15}=276.$$

Вмѣсто этого можно написать проще:

(2) $$\frac{12}{5}x+4y+2z=264,$$

(3) $$\frac{12}{5}x+2y+4z=276.$$

Изъ уравненія (1) опредѣлимъ z

(4) $$z=100-x-y$$

и подставимъ его въ уравненія (2) и (3). Получимъ:

$$\frac{12}{5}x+4y+2(100-x-y)=264,$$

$$\frac{12}{5}x+2y+4(100-x-y)=276,$$

или же, по упрощеніи и измѣненіи знаковъ второго уравненія:

(5) $$\frac{2}{5}x+2y=64,$$

(6) $$\frac{8}{5}x+2y=124.$$

Отсюда посредствомъ вычитанія получимъ:

$$\frac{6}{5}x=60,$$

$$x=50.$$

Уравненіе (5) даетъ:

$$y=32-10=22,$$

а уравненіе (4):

$$z=100-50-22=28.$$

Слѣдовательно, при ѣздѣ въ одномъ направленіи было 50 км. ровнаго пути, 22 км. на гору и 28 км. съ горы.

Задача III. Для освѣщенія зала употребляются спиртовыя и керосиновыя лампы. Если мы зажигаемъ 4 керосиновыя и 2 спиртовыя лампы, то расходъ въ часъ составляетъ 50 коп. Если же мы зажигаемъ 2 керосиновыя и 6 спиртовыхъ лампъ, то расходъ въ часъ составляетъ

60 коп. Что стоитъ въ часъ каждая керосиновая и спиртовая лампа?

Пусть расходъ на одну керосиновую лампу составляетъ x коп., а расходъ на спиртовую лампу y коп. въ часъ. Тогда:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 50, \\ 2x + 6y = 60. \end{cases}$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ:

$$y = 25 - 2x,$$

а изъ второго слѣдуетъ теперь

$$2x + 6(25 - 2x) = 60,$$

$$-10x = -90,$$

$$x = 9.$$

Слѣдовательно:

$$y = 25 - 2x = 7.$$

Итакъ, расходъ на керосинъ равенъ 9 коп., а на спиртъ 7 коп. въ часъ.

157. Примѣръ задачи съ изслѣдованіемъ.

Задача IV. Велосипедистъ ѣдетъ со скоростью v км. въ часъ по ровному пути; пусть скорость его на гору равна u, съ горы w, при тѣхъ же единицахъ. Сколько ровнаго пути, подъема и спуска содержитъ дорога въ a км. длиной, если велосипедисту понадобится t часовъ для того, чтобы проѣхать ее въ одну сторону, и t' часовъ, чтобы проѣхать ее обратно?

Обозначимъ длину подъема черезъ x км., длину спуска черезъ y км. (въ одну сторону). Тогда длина ровнаго пути выразится черезъ $(a - x - y)$ км. На обратномъ пути будетъ x км. спуска, y км. подъема и $(a - x - y)$ ровнаго пути. Примѣняя тѣ же разсужденія, что и въ задачѣ II, получимъ уравненія:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{u} + \dfrac{y}{w} + \dfrac{a - x - y}{v} = t, \\ \dfrac{x}{w} + \dfrac{y}{u} + \dfrac{a - x - y}{v} = t', \end{cases}$$

т. е.

$$(2)\qquad \begin{cases} x\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)+y\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)=t-\frac{a}{v}, \\ x\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)+y\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)=t'-\frac{a}{v}. \end{cases}$$

Опредѣлитель этой системы (п. **143**, стр. 231) будетъ:

$$(3)\qquad d=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)^2-\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)^2=\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}\right)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right).$$

По смыслу задачи приходится принять:

$$(4)\qquad u<v<w,$$

т. е. скорость при подъемѣ меньше, чѣмъ на ровномъ пути, а при спускѣ больше. Такъ какъ при этомъ u, v, w имѣютъ положительныя значенія, то

$$(5)\qquad \frac{1}{u}>\frac{1}{v}>\frac{1}{w}.$$

и второй сомножитель $\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)$ опредѣлителя всегда отличенъ отъ нуля. Первый сомножитель, однако, можетъ быть равенъ нулю. Дѣйствительно, онъ исчезаетъ, если:

$$(6)\qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{w}=\frac{2}{v},$$

т. е. если время, нужное для подъема на 1 км. и затѣмъ спуска на 1 км., равно времени, въ теченіе котораго можно пройти 2 км. ровнаго пути. Въ этомъ случаѣ, какъ можно предусмотрѣть, задача оказывается неопредѣленной. Въ самомъ дѣлѣ, если у насъ есть какое либо рѣшеніе задачи, то мы получимъ новое, если вмѣсто какой-либо длины $2l$ км. ровнаго пути возьмемъ l км. подъема и l км. спуска; время, потраченное велосипедистомъ, отъ этого не измѣнится ни на прямомъ, ни на обратномъ пути.

Если опредѣлитель не исчезаетъ, то мы получимъ опредѣленныя значенія для x и y. Для того, чтобы они отвѣчали задачѣ, эти значенія должны быть, во-первыхъ, положительными, а, во-вторыхъ, такими, чтобы выраженіе $a-x-y$ также имѣло положительное значеніе.

Вычислимъ x, y и $a-x-y$:

$$x = \frac{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\left(t - \frac{a}{v}\right) - \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{v}\right)\left(t' - \frac{a}{v}\right)}{d},$$

$$y = \frac{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\left(t' - \frac{a}{v}\right) - \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{v}\right)\left(t - \frac{a}{v}\right)}{d},$$

т. е.

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)t + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right)t' - \frac{a}{v}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right)}{d}, \\ y &= \frac{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)t' + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right)t - \frac{a}{v}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right)}{d}. \end{aligned}\right.$$

Теперь будетъ:

$$(8)\quad a - x - y = \frac{a\left[d + \frac{2}{v}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right)\right] - \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right)(t + t')}{d},$$

или, по сокращенiи:

$$(9)\qquad a - x - y = \frac{a\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w}\right) - (t + t')}{\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v}}.$$

Теперь мы должны изслѣдовать, при какихъ условiяхъ x, y, $a - x - y$ имѣютъ положительныя значенiя. Если мы вычислимъ $x - y$, то получимъ:

$$(10)\qquad x - y = \frac{\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v}\right)(t - t')}{d} = \frac{t - t'}{\frac{1}{u} - \frac{1}{w}}.$$

Мы предоставляемъ читателю доказать эту формулу непосредственно, исходя изъ условiй задачи.

Можно принять, что

$$(11)\qquad t > t',$$

т. е. что при ѣздѣ въ первомъ направленiи затрачивается больше времени, чѣмъ на обратномъ пути; иначе можно было бы то направленiе, которое мы называемъ обратнымъ, принять за прямое и наоборотъ. Но если $t > t'$, то само собой понятно, что:

$$(12)\qquad x > y,$$

т. е. на прямомъ пути больше нужно ѣхать въ гору, чѣмъ съ горы. Поэтому нѣтъ надобности изслѣдовать, когда x имѣетъ положительное значеніе; достаточно опредѣлить, когда имѣетъ положительное значеніе y, ибо тогда x, будучи больше y, конечно, тоже будетъ положительнымъ числомъ. Если мы, сообразно этому, напишемъ, что y и $a - x - y$ имѣютъ положительныя значенія, то получимъ:

$$\frac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)t'+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)t-\frac{a}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)}{d} > 0,$$

$$\frac{a\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}\right)-(t+t')}{\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}} > 0.$$

Теперь примемъ, напримѣръ, что:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v} > 0,$$

т. е. что нужно больше времени, чтобы проѣхать 1 км. въ гору и 1 км. съ горы, чѣмъ 2 км. по ровному пути. Тогда $d > 0$, и предшествующія неравенства можно умножить на d (теорема 67 въ п. **147**) и разрѣшить ихъ относительно a. Такимъ образомъ получимъ:

$$(13) \qquad \frac{t+t'}{\frac{1}{u}+\frac{1}{w}} < a < \frac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)t'+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)t}{\frac{1}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)}.$$

Это—предѣлы, между которыми должно лежать a, чтобы рѣшеніе задачи было пригоднымъ. Но если a должно лежать между этими предѣлами, то должно быть:

$$(14) \qquad \frac{t+t'}{\frac{1}{u}+\frac{1}{w}} < \frac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)t'+\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{w}\right)t}{\frac{1}{v}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{w}\right)};$$

освободившись отъ знаменателей, которые имѣютъ положительныя значенія, послѣ упрощенія получимъ:

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}\right)\left(\frac{t'}{u}-\frac{t}{w}\right) > 0;$$

отсюда, такъ какъ множитель $\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{w}-\frac{2}{v}\right)$ есть число положительное, получаемъ:

(15) $$\frac{t'}{u} - \frac{t}{w} > 0.$$

Итакъ, это условіе (15) должно быть выполнено; иначе задача не будетъ возможной ни для одного значенія a. Если же оно выполнено, то тогда неравенства (13) позволяютъ опредѣлить область, въ которой должно лежать a, чтобы задача была возможной.

Примемъ теперь, что

$$d = 0,$$

т. е.

(16) $$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} = 0.$$

Такъ какъ коэффиціенты при x и y въ уравненіяхъ (2) не исчезаютъ, то мы имѣемъ здѣсь либо случай невозможности, либо случай простой неопредѣленности. Чтобы имѣла мѣсто простая неопредѣленность, необходимо и достаточно, чтобы числители формулъ (7) обратились въ нуль; при этомъ достаточно написать, что числитель выраженія x равенъ нулю, такъ какъ тогда, какъ мы уже видѣли (п. **145**, стр. 239), числитель y точно такъ же обратится въ нуль.

Если напишемъ, что числитель x равенъ нулю, то получимъ:

(17) $$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) t + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right) t' - \frac{a}{v}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right) = 0.$$

Теперь, по условію (16):

(18) $$\begin{gathered} \frac{1}{v} - \frac{1}{w} = \frac{1}{u} - \frac{1}{v}, \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{w} = 2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w}\right), \end{gathered}$$

такъ что уравненіе (17) выразится такъ:

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\left(t + t' - \frac{2a}{v}\right) = 0,$$

т. е.

(19) $$t + t' - \frac{2a}{v} = 0.$$

Это — условіе неопредѣленности. Если оно удовлетворено, то мы можемъ произвольно выбрать значеніе одной изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ, y; значеніе x мы получимъ тогда изъ одного изъ уравненій (2), а именно, принимая во вниманіе соотношеніе (18), находимъ:

(20) $$x = y + \frac{t - \frac{a}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}.$$

Далѣе имѣемъ:

$$a - x - y = a - 2y - \frac{t - \frac{a}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}} = \frac{\frac{a}{u} - t}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}} - 2y.$$

Мы должны такъ выбрать y, чтобы x и y, а также $a - x - y$ имѣли положительныя значенія; поэтому должно быть:

(21) $$\begin{cases} y > 0, \\ \dfrac{\frac{a}{v} - t}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}} < y < \dfrac{\frac{a}{u} - t}{2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)}. \end{cases}$$

Такъ какъ $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$ есть число положительное, то y можетъ удовлетворить этимъ двумъ неравенствамъ только при условіи, что:

$$\frac{a}{u} - t > 0$$

$$\frac{\frac{a}{u} - t}{2} > \frac{a}{v} - t,$$

т. е. если имѣютъ мѣсто соотношенія:

(22) $$a\left(\frac{2}{v} - \frac{1}{u}\right) < t < \frac{a}{u}.$$

Эти условія совмѣстны, такъ какъ $\frac{1}{v}$ меньше, чѣмъ $\frac{1}{u}$; слѣдовательно:

$$\frac{2}{v} - \frac{1}{u} < \frac{1}{v}.$$

Итакъ, если условія (16), (19) и (22) выполнены, то задача оказывается неопредѣленной; тогда мы можемъ выбрать y произвольно въ предѣлахъ, устанавливаемыхъ неравенствами (21), а x будетъ тогда выражаться формулой (20).

Изслѣдованіе можетъ быть сведено въ слѣдующую таблицу:

<table>
<tr><td colspan="3">Соотношенія, вытекающія изъ условія задачи:
$0 < u < v < w, \quad t > 0, \quad t' > 0.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Предположенія, сдѣланныя для сокращенія изслѣдованія:
$t > t', \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} \geqq 0;$
мы пришли бы къ совершенно подобному же изслѣдованію въ случаяхъ, когда эти предположенія не были бы выполнены.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} \neq 0$</td><td>$\frac{t'}{u} - \frac{t}{w} < 0$</td><td>Невозможная задача</td></tr>
<tr><td>$\frac{t'}{u} - \frac{t}{w} > 0$</td><td>Задача возможна, поскольку a удовлетворяетъ неравенствамъ (13); рѣшеніе дается формулами (7)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} = 0$</td><td>$t + t' - \frac{2a}{v} \neq 0$</td><td>Невозможная задача</td></tr>
<tr><td>$t + t' - \frac{2a}{v} = 0$
условія (22) не удовлетворены</td><td>Невозможная задача</td></tr>
<tr><td>$t + t' - \frac{2a}{v} = 0$
$\frac{2}{v} - \frac{1}{u} < \frac{t}{a} < \frac{1}{u}$</td><td>Неопредѣленная задача: значенія y ограничиваются неравенствами (21), а x выразится формулой (20)</td></tr>
</table>

Мы предоставляемъ читателю изслѣдовать предѣльные случаи, т. е. случаи, въ которыхъ одно изъ неравенствъ (13), (15), (22) и т. д. превращается въ равенство. Полезно разсмотрѣть также случаи, когда:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} - \frac{2}{v} < 0,$$

а также случаи, гдѣ скорость v равна u или равна w, и, наконецъ, тотъ случай, когда три скорости u, v, w равны между собою. Полезно также разобрать задачу съ помощью непосредственнаго разсужденія и получить такимъ образомъ тотъ же результатъ изслѣдованія.

Вышесказанное достаточно основательно выясняетъ, въ чемъ заключается изслѣдованіе задачи первой степени съ буквенными данными.

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ XV-ой.

325. Двѣ точки движутся по оси со скоростями v и w (-12 км. въ часъ и 12 м. въ секунду); въ началѣ ихъ абсциссы суть a и b (3 км. и -500 м.). Когда онѣ встрѣтятся? Произвести изслѣдованіе.

326. За два билета второго класса и одинъ билетъ третьяго класса изъ Гамбурга въ Франкфуртъ н. М. уплачено 66,80 м.; за одинъ билетъ второго класса и два билета третьяго класса уплачено 58 м. Опредѣлить цѣну билета второго и третьяго класса.

327. Вычислить произведеніе двухъ трехчленовъ:

$$ax^2+bx+c\,, \qquad x^2+yx+z$$

и опредѣлить y и z такъ, чтобы въ произведеніи коэффиціенты при x^3 и x обратились въ нули.

328. Умножить a^2+2a+5 на $a^2x+ay+z$. Опредѣлить x, y, z такимъ образомъ, чтобы въ произведеніи коэффиціенты при a^3, a^2, a были равны 3.

329. Водоемъ наполняется тремя кранами. Если мы откроемъ два первыхъ крана, то онъ наполнится въ 3 часа. Если откроемъ первый и третій, то онъ наполнится въ 5 ч. Если откроемъ всѣ три, то онъ наполнится въ 2 часа. Сколько литровъ вливаетъ въ продолженіе часа каждый кранъ, если вмѣстимость водоема равна 135 кб. м.?

330. Водоемъ наполняется тремя кранами. Если откроемъ первые два, онъ наполнится въ c часовъ. Если откроемъ первый и третій, онъ наполнится въ b часовъ. Если откроемъ всѣ три, онъ наполнится въ a часовъ. Вмѣстимость водоема равна A кб. м. Сколько литровъ вливаетъ каждый кранъ въ продолженіе секунды? Произвести изслѣдованіе.

331. Вѣса углерода и водорода, содержащихся въ смѣси изъ ацетилена (C_2H_2) и метана (CH_4), составляютъ c и h гр. Опредѣлить вѣса ацетилена и метана, находящихся въ смѣси. Атомные вѣса: углерода 12, водорода 1. Произвести изслѣдованіе.

332. Часы уходятъ каждые 24 часа на 10 минутъ впередъ. Въ полдень они поставлены правильно. Который часъ, когда эти часы показываютъ 6 ч. пополудни?

333. Какой длины будутъ основаніе и высота прямоугольника, площадь котораго увеличивается на 180 кв. м., если основаніе увеличить на 8 м., а высоту на 5 м., и уменьшается на 30 кв. м., если основаніе увеличить на 3 м., а высоту уменьшить на 4 м.?

334. Данъ треугольникъ ABC. Обозначимъ черезъ P, Q, R точки касанія вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB и положимъ:

$$BC=a\,, \quad CA=b\,, \quad AB=c\,,$$

$$AQ=AR=x\,, \quad BR=BP=y\,, \quad CP=CQ=z\,.$$

Вычислить x, y, z, если a, b, c даны.

335. Рѣшить тотъ же вопросъ, замѣнивъ вписанную окужность одной изъ внѣвписанныхъ.

336. Два велосипедиста ѣдутъ въ одномъ и томъ же направленіи по круговому пути, длина котораго равна 500 м.; скорость каждаго изъ нихъ остается постоянной. Ѣдущій быстрѣе обгоняетъ ѣдущаго медленнѣе каждыя 5 м. Затѣмъ одинъ изъ нихъ начинаетъ двигаться въ противоположномъ направленіи, при чемъ скорость его сохраняетъ то же абсолютное значеніе; теперь велосипедисты встрѣчаются каждыя 24 сек. Требуется вычислить ихъ скорости, принимая за единицы километръ и часъ.

337. Два велосипедиста ѣдутъ въ одномъ и томъ же направленіи по круговому пути длиною въ a м. съ постоянною скоростью; движущійся скорѣе нагоняетъ движущагося медленнѣе каждыя n секундъ. Затѣмъ они ѣдутъ въ противоположныхъ направленіяхъ по круговому пути длиною въ b м., при чемъ скорости ихъ по абсолютному значенію остаются тѣ же. Теперь они встрѣчаются каждыя p секундъ. Вычислить ихъ скорости. Произвести изслѣдованіе.

338. Колесо экипажа имѣетъ 4 м. въ окружности. Его фотографируютъ во время ѣзды, при чемъ продолжительность экспозиціи составляетъ $\frac{1}{30}$ сек. На снимкѣ оказывается, что въ продолженіе этого времени каждая спица въ колесѣ повернулась на половину угла, который образуютъ двѣ сосѣднія спицы. Какъ велика скорость экипажа, если колесо имѣетъ 12 одинаково отстоящихъ одна отъ другой спицъ?

339. Пусть будутъ даны три точки A, B, C на оси; опредѣлить такую точку M на той же оси, для которой:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \rho .$$

Произвести изслѣдованіе. — Число ρ называется ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ точекъ A, B, C, M. Изслѣдовать частный случай, когда абсцисса точки A равна 0, а абсцисса точки C равна 1, между тѣмъ какъ абсцисса точки B принимаетъ все бóльшія и бóльшія положительныя значенія и, въ концѣ концовъ, становится безконечно большой.

340. Раздѣлить число A на n частей, пропорціональныхъ n числамъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е. найти числа $x_1, x_2, \ldots x_n$, для которыхъ:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = A ,$$

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n} .$$

Рѣшить эту систему и изслѣдовать рѣшеніе, принимая, что числа a_1, $a_2, \ldots, a_n$ могутъ быть положительными или отрицательными. Показать, что задача будетъ опредѣленной, если сумма:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

отлична отъ нуля.

341. Опредѣлить p, q, r такъ, чтобы въ произведенiи:

$$(x^3+px^2+qx+r)(ax^3+bx^2+cx+d)$$

коэффицiенты при x^5, x^3, x были равны нулю. Произвести изслѣдованiе.

342. Дирижабль пролетаетъ прямолинейный путь съ сѣвера на югъ длиной въ 50 км. и потомъ возвращается назадъ къ исходной точкѣ. Въ продолженiе всего полета вѣтеръ сохраняетъ неизмѣнную скорость и дуетъ постоянно съ сѣвера на югъ. Дѣйствительная скорость дирижабля, если онъ движется въ направленiи вѣтра, равна его собственной скорости, увеличенной на скорость вѣтра; когда же онъ движется противъ вѣтра, то дѣйствительная скорость его равна его собственной скорости, уменьшенной на скорость вѣтра. При этихъ условiяхъ требуется вычислить скорость дирижабля въ километрахъ въ часъ и скорость вѣтра въ метрахъ въ секунду, если продолжительность полета составляетъ t часовъ въ одну сторону и t' часовъ въ обратную сторону. Произвести изслѣдованiе. Примѣнить рѣшенiе къ случаю, когда продолжительность полета въ одну сторону равна 1 ч., а продолжительность полета въ другую сторону составляетъ 2 ч. 15 м.

343. Смѣсь изъ трехъ тѣлъ, для которыхъ имѣютъ мѣсто формулы: H_2O, $C_nH_pO_q$, C_rH_r, содержитъ, какъ установлено анализомъ, a гр. водорода, b гр. углерода и c гр. кислорода. Вычислить вѣса трехъ тѣлъ, входящихъ въ смѣсь. (Атомные вѣса: углерода 12, водорода 1, кислорода 16).

Опредѣлить, въ частности, для какихъ простыхъ значенiй чиселъ n, p, q и r задача становится невозможной или неопредѣленной при надлежащемъ выборѣ вѣсовъ a, b, c.

344. Смѣсь изъ трехъ тѣлъ, для которыхъ имѣютъ мѣсто формулы: H_2O, CO, $C_4H_pO_r$, содержитъ a гр. водорода, b гр. углерода и c гр. кислорода. Вычислить вѣса трехъ тѣлъ, входящихъ въ смѣсь. Произвести изслѣдованiе.

345. Пусть AB будетъ дiаметръ окружности съ центромъ O. Проводимъ двѣ окружности, имѣющiя дiаметры AO и BO. Вычислить дiаметръ окружности, касающейся этихъ трехъ окружностей.

346. Даны двѣ окружности одинаковаго радiуса. Вычислить радiусъ окружности, касающейся этихъ двухъ окружностей и прямой, соединяющей ихъ центры.

347. Дана окружность и касательная къ ней. Опредѣлить на окружности двѣ точки A и B, для которыхъ четыреугольникъ $ABA'B'$ представляетъ собой квадратъ, если AA' и BB' — перпендикуляры, опущенные изъ точекъ A и B на касательную.

348. У купца имѣется двѣ бочки, неполныя и содержащiя неодинаковое количество вина. Онъ вливаетъ изъ первой бочки во вторую столько вина, сколько его содержитъ вторая бочка. Потомъ изъ второй въ первую онъ вливаетъ столько вина, сколько онъ оставилъ въ первой бочкѣ. Наконецъ, онъ вливаетъ изъ первой во вторую столько вина, сколько

онъ оставилъ во второй бочкѣ. Теперь каждая бочка содержитъ 80 литровъ. Сколько литровъ содержала каждая бочка вначалѣ?

349. Вмѣстимость 3 бочекъ съ водой составляетъ 1440 литровъ. Двѣ изъ этихъ бочекъ наполнены, третья пуста. Чтобы наполнить пустую бочку, понадобится все содержимое первой бочки и $\frac{1}{5}$ содержимаго второй или же все содержимое второй бочки и $\frac{1}{3}$ содержимаго первой. Опредѣлить емкость каждой бочки.

350. Скотоводъ имѣетъ нѣкоторое количество корма для коровъ. Если бы онъ продалъ 75 коровъ, то этого запаса хватило бы на 20 дней больше. Если бы онъ, напротивъ того, прикупилъ 100 коровъ, то хватило бы на 15 дней меньше. Сколько коровъ у него и на сколько дней хватитъ корма?

351. Четыре работника должны совершить нѣкоторую работу. A и B могутъ сдѣлать ее въ 10 дней, A и C въ 12 дней, A и D въ 10 дней, а B, C и D въ $7\frac{1}{2}$ дней. Сколько времени каждый изъ работниковъ употребилъ бы, если бы работалъ одинъ, и во сколько времени сдѣлаютъ они работу всѣ вмѣстѣ?

352. Три брата хотятъ купить домъ, который стоитъ 70 000 р. Ни одинъ изъ нихъ въ отдѣльности не обладаетъ такимъ капиталомъ; но если бы старшій далъ второму треть того, что онъ имѣетъ или же третьему четвертую часть того, что онъ имѣетъ, то каждый изъ этихъ двухъ имѣлъ бы достаточно денегъ, чтобы купить домъ. Однако, старшій беретъ взаймы половину состоянія третьяго и покупаетъ домъ. Сколько денегъ у каждаго изъ братьевъ?

Глава XVI.

ИЗСЛѢДОВАНІЕ ДВУЧЛЕНА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ; ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНІЕ.

I. ИЗСЛѢДОВАНІЕ ДВУЧЛЕНА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

158. Общія замѣчанія относительно функцій. Подъ двучленомъ первой степени разумѣютъ выраженіе $ax+b$, въ которомъ a и b суть извѣстныя числа или постоянныя, между тѣмъ какъ x обозначаетъ перемѣнную. Изслѣдовать этотъ двучленъ значитъ опредѣлить, какъ онъ измѣняется, когда x принимаетъ всевозможныя значенія. Обозначимъ значеніе двучлена черезъ y, т. е. напишемъ:

$$y=ax+b.$$

Въ силу этого уравненія каждому опредѣленному значенію перемѣнной x соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе перемѣнной y. Такого рода зависимость между x и y имѣютъ въ виду, когда говорятъ, что перемѣнная y есть функція перемѣнной x или, короче, функція отъ x.

Если y есть функція отъ x, то, вообще говоря, x также представляетъ собой функцію перемѣнной y. А именно, если a не равно нулю, то изъ уравненія $y=ax+b$ слѣдуетъ для x значеніе:

$$x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}\cdot$$

Если же a есть нуль, то x не можетъ быть разсматриваемо, какъ функція отъ y, такъ какъ теперь y должно имѣть значеніе b и не можетъ имѣть никакого другого значенія.

Если мы разсматриваемъ y, какъ функцію отъ x, то принято говорить, что x есть независимая перемѣнная; а именно, мы принимаемъ, что x измѣняется произвольно, т. е. независимо отъ какого бы то ни было условія. Напротивъ того, y называется зависимой перемѣнной, такъ какъ измѣненія ея зависятъ отъ измѣненій x. Если a равно нулю, то y конечно не измѣняется. Но мы понимаемъ это, расширяя понятіе о функціи, какъ особый родъ зависимости; y въ этомъ случаѣ равно b при любомъ значеніи x.

Какую изъ двухъ перемѣнныхъ, которыя входятъ въ уравненіе, связывающее x и y, мы изберемъ за функцію, а какую за независимую перемѣнную, это само по себѣ безразлично. Обыкновенно, однако, обозначаютъ черезъ x независимую перемѣнную, а черезъ y функцію, — и мы будемъ слѣдовать этому обычаю.

Существуютъ очень сложныя функціи, т. е. очень сложныя формулы, которыми опредѣляется значеніе перемѣнной y по данному значенію перемѣнной x. Функція y, которую мы выше опредѣлили, есть одна изъ наиболѣе простыхъ функцій. Она называется **линейной** функціей; мы скоро узнаемъ причину этого названія.

159. Изслѣдованіе линейной функціи. Приступая къ изслѣдованію линейной функціи, мы дадимъ сначала буквамъ a и b простыя численныя значенія. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію:

$$y = 2x + 3.$$

Мы придадимъ x два различныхъ значенія x_1 и x_2 и обозначимъ соотвѣтствующія значенія y черезъ y_1 и y_2.

Тогда:

$$y_1 = 2x_1 + 3,$$
$$y_2 = 2x_2 + 3.$$

Отсюда слѣдуетъ непосредственно:

$$y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1).$$

Отсюда видимъ, что разность двухъ значеній y равна произведенію разности значеній x, взятыхъ въ томъ же порядкѣ, на 2. Сообразно съ этимъ y_2 больше или меньше чѣмъ y_1, въ зависимости отъ того, больше ли x_2 чѣмъ x_1, или меньше. Поэтому говорятъ, что y возрастаетъ, если x возрастаетъ, и убываетъ, если x убываетъ; y называется также **возрастающей** функціей.

Опредѣленіе. Функція y называется возрастающей функціей отъ x, если y возрастаетъ съ возрастаніемъ x, т. е. если бóльшимъ значеніямъ x отвѣчаютъ бóльшія значенія y.

Это опредѣленіе будетъ впослѣдствіи дополнено; мы увидимъ, что существуютъ функціи, возрастающія для извѣстныхъ значеній x, и не возрастающія для другихъ. Но здѣсь рѣчь идетъ о постоянно возрастающей функціи.

Пусть будетъ теперь дана функція:

$$y = -2x + 5.$$

При тѣхъ же обозначеніяхъ:

$$y_1 = -2x_1 + 5,$$
$$y_2 = -2x_2 + 5,$$
$$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1).$$

Разность двухъ значеній y равна въ этомъ случаѣ произведенію разности соотвѣтствующихъ имъ значеній x, взятыхъ въ томъ же порядкѣ, на -2. Слѣдовательно, если x_2 больше чѣмъ x_1, то y_2 меньше чѣмъ y_1. Если x возрастаетъ, то y убываетъ; если x убываетъ, то y возрастаетъ. Поэтому функція y называется убывающей.

Опредѣленіе. Функція y называется убывающей функціей отъ x, если она убываетъ съ возрастаніемъ x, т. е. если бóльшимъ значеніямъ x отвѣчаютъ меньшія значенія y.

Это опредѣленіе точно такъ же будетъ впослѣдствіи дополнено. Но здѣсь можно ограничиться данными опредѣленіями, такъ какъ мы занимаемся здѣсь лишь такими функціями, которыя либо постоянно возрастаютъ, либо постоянно убываютъ, либо сохраняютъ одно и то же значеніе, т. е. не зависятъ отъ x. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема 68. Линейная функція отъ x, опредѣляемая уравеніемъ

$$y = ax + b,$$

постоянно возрастаетъ, если коэффиціентъ при a имѣетъ положительное значеніе; *она постоянно убываетъ*, если коэффиціентъ при a имѣетъ отрицательное значеніе; она сохраняетъ *постоянное* значеніе, если коэффиціентъ при a обращается въ нуль.

Первыя двѣ части этого предложенія вытекаютъ изъ формулы:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1),$$

которая показываетъ, что $y_2 - y_1$ имѣетъ тотъ же знакъ, что $x_2 - x_1$, или противоположный, въ зависимости отъ того, представляетъ ли собой коэффиціентъ a положительное число или отрицательное. Третья часть ясна непосредственно, такъ какъ при $a = 0$ равенство $y = b$ имѣетъ мѣсто постоянно, т. е. для любого значенія x.

Мы вернемся къ этой теоремѣ въ концѣ главы, послѣ того какъ мы выяснимъ графическое изображеніе этихъ функцій.

160. Теперь мы изслѣдуемъ, какъ измѣняется y, если мы станемъ послѣдовательно давать x всевозможныя положительныя и отрицательныя значенія. Это выражаютъ короче, пользуясь знакомъ ∞ (п. п. **111, 130**), а именно говорятъ, что x измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$. Итакъ, мы подставляемъ вмѣсто перемѣнной x сначала отрицательное число, абсолютное которого значеніе очень велико, а потомъ послѣдовательно все бо́льшія и бо́льшія, въ алгебраическомъ смыслѣ, числа, пока не дойдемъ до очень большихъ положительныхъ значеній. Такъ, напримѣръ, мы можемъ перемѣнной x придавать послѣдовательно значенія:

$$-100\,000, \quad -1\,000, \quad -10, \quad 0, \quad +10, \quad +1\,000, \quad +100\,000.$$

Выраженіе «очень большія значенія» само по себѣ не имѣетъ собственно никакого смысла; такъ напримѣръ, длина въ 20 км. очень велика, если мы ее сравнимъ съ протяженіемъ листа бумаги, но очень мала, если мы ее сравнимъ съ протяженіями земного шара; длина въ милліонъ километровъ, въ свою очередь, очень мала, если сравнимъ ее съ разстояніями звѣздъ. Поэтому выраженіе «очень велико» мы должны понимать по отношенію къ другимъ величинамъ, которыя мы разсматриваемъ одновременно съ перемѣнной x, т. е. въ вопросѣ, который насъ занимаетъ, по отношенію къ коэффиціентамъ при a и b.

161. Если x по своему абсолютному значенію очень велико, то абсолютное значеніе y тоже очень велико; если a есть положительное число, то y имѣетъ при весьма большихъ значеніяхъ x тотъ же знакъ, что и x; если же a имѣетъ отрицательное значеніе, то y имѣетъ знакъ, противоположный тому, который имѣетъ x. Пусть будетъ, напримѣръ:

$$y = 2x + 500.$$

Если $x = -10$, то $y = 480$; y получаетъ положительное значеніе, благодаря положительному члену 500. Если $x = -100$, то $y = 300$, т. е. все еще сохраняетъ положительное значеніе. Но если, напротивъ того, $x = -100000$, то y равно $-200000 + 500 = -199500$; положительное слагаемое 500 не мѣшаетъ уже здѣсь перемѣнной y получить отрицательное значеніе; вмѣтѣ съ тѣмъ по своему абсолютному значенію y тогда становится очень велико. Дальше, если

$$y = -3x + 5000,$$

то при $x = 1000000$ будетъ:

$$y = -3000000 + 5000 = -2995000.$$

Отсюда вытекаетъ теорема:

Теорема 69. Если a имѣетъ положительное значеніе, то $y = ax + b$ равно $+\infty$ для $x = +\infty$ и равно $-\infty$ для $x = -\infty$. Если a имѣетъ отрицательное значеніе, то $y = ax + b$ равно $-\infty$ для $x = +\infty$ и равно $+\infty$ для $x = -\infty$.

Если a отлично отъ нуля, то y равно нулю, когда

$$ax + b = 0,$$

т. е. при

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Существуетъ, слѣдовательно, одно и только одно значеніе x, при которомъ y обращается въ нуль Мы обозначимъ это особое значеніе x черезъ x_0, т. е. положимъ:

$$x_0 = -\frac{b}{a};$$

тогда

$$b = -ax_0,$$

и мы получимъ:

$$y = ax + b = ax - ax_0$$

и, наконецъ,

$$y = a(x - x_0).$$

Такой видъ можно всегда придать двучлену первой степени, если коэффиціентъ a отличенъ отъ нуля; при этомъ x обозначаетъ перемѣнную, а x_0 частное значеніе этой перемѣнной. Видъ этого выраженія указываетъ сразу, что y обращается въ нуль когда $x = x_0$, и только въ этомъ случаѣ.

162. Теперь мы имѣемъ возможность составить таблицу, выражающую ходъ измѣненія функцій y, при измѣненіи независимой перемѣнной x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Положимъ сначала, что a есть положительное число. Пусть будетъ, напримѣръ, дана функція:

$$y = 2x - 5.$$

При $x = -\infty$ функція $y = -\infty$. Если x возрастаетъ, то возрастаетъ и y, т. е. y принимаетъ отрицательныя значенія, абсолютныя значенія которыхъ становятся все меньше и меньше. Когда $x = 0$, то $y = -5$; далѣе, когда $x = \frac{5}{2}$, то $y = 0$; когда же x возрастаетъ, начиная съ $\frac{5}{2}$, то y принимаетъ все бóльшія и бóльшія положительныя значенія. Наконецъ, при $x = +\infty$ будетъ $y = +\infty$. Эти замѣчанія можно соединить въ слѣдующую таблицу:

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	им. отрицат. значеніе; возрастаетъ	-5	им. отрицат. значеніе; возрастаетъ	0	им. положит. значеніе; возрастаетъ	$+\infty$

Въ первомъ ряду стоятъ особенныя значенія x, т. е. такія значенія x, для которыхъ имѣютъ мѣсто какія-либо обстоятельства, достойныя особаго вниманія. Эти особенныя значенія расположены въ возрастающемъ порядкѣ. Подъ каждымъ изъ нихъ стоитъ соотвѣтствующее значеніе функціи y, а въ промежуткахъ, раздѣляющихъ эти значенія, кратко отмѣчено, какъ измѣняется y при возрастаніи x въ этомъ промежуткѣ.

163. Теперь разсмотримъ функцію:

$$y = -\frac{3}{2}x - 1.$$

Особенныя значенія x здѣсь суть: $-\infty$, $-\frac{2}{3}$, 0 и $+\infty$; эта функція y убываетъ, такъ какъ коэффиціентъ при x имѣетъ отрицательное значеніе. Такимъ образомъ, получается такая таблица:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	им. положит. значеніе; убываетъ	0	им. отрицат. значеніе; убываетъ	-1	им. отрицат. значеніе; убываетъ	$-\infty$

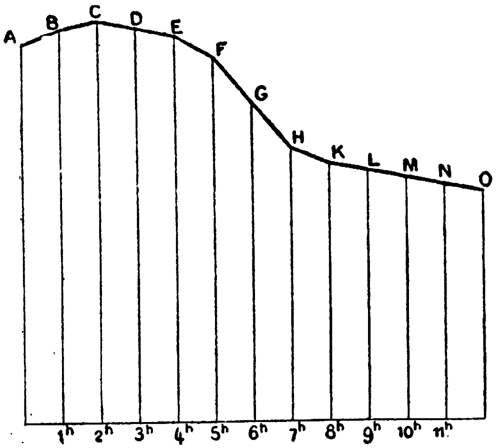
Мы дополнимъ изслѣдованіе двучлена первой степени методомъ графическаго изображенія, къ которому мы теперь перейдемъ.

II. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНІЕ.

164. Графическое изображеніе температуры. Если мы хотимъ составить себѣ представленіе о ходѣ температуры, скажемъ, въ какой-либо августовскій день послѣ полудня на нашей дачной верандѣ, то мы будемъ отъ времени до времени отмѣчать показанія выставленнаго тамъ термометра. Мы смотримъ на термометръ каждый часъ и заносимъ въ нашу записную книжку результаты своихъ наблюденій, напримѣръ, слѣдующимъ образомъ:

Полдень	25°	7 часовъ	18°
1 часъ	26°	8 „	17°
2 „	26,5°	9 „	16,5°
3 „	26°	10 „	16°
4 „	25,5°	11 „	15,5°
5 „	24°	Полночь	15°
6 „	21°		

Эти наблюденія даютъ картину хода измѣненій температуры; при внимательномъ разсмотрѣніи отдѣльныхъ чиселъ можно замѣтить, что самая высокая температура была въ 2 ч., что между 2 и 4 ч. она нѣсколько упала, но между 5 и 6 ч. и между 6 и 7 ч. она падала очень быстро и т. д. Однако, гораздо легче будетъ все это замѣтить, если мы съ помощью чиселъ, занесенныхъ въ нашу записную книжку, представимъ ходъ температуры графически. Мы разумѣемъ подъ этимъ слѣдующее.



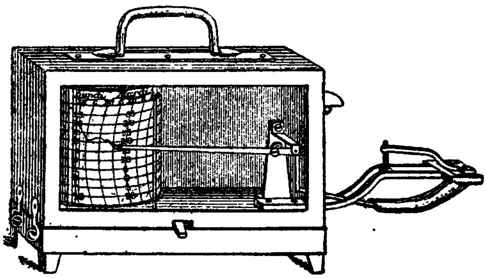
Фиг. 13.

Проведемъ (фиг. 13) горизонтальную прямую линію, на которой на равныхъ разстояніяхъ отмѣтимъ точки, соотвѣтствующія часамъ, въ ихъ послѣдовательномъ порядкѣ: полдень, 1 ч., 2 ч. и т. д. до полуночи. Въ каждой изъ этихъ точекъ мы возставляемъ къ прямой перпендикуляръ, откладываемъ на немъ отъ основанія длину, пропорціональную температурѣ, наблюдаемой нами въ этотъ часъ. Если мы условимся одинъ градусъ термометра обозначать черезъ 2 мм., то длина отрѣзка, проведеннаго перпендикулярно къ горизонтальной линіи изъ точки, соотвѣтствующей полудню, должна быть равна $25 \cdot 2$ мм. $= 50$ мм.; отрѣзокъ, который соотвѣтствуетъ точкѣ, обозначающей 1 ч., имѣетъ длину въ $26 \cdot 2$ мм. $= 52$ мм. и т. д. Такимъ образомъ мы получимъ рядъ точекъ $ABCDE \ldots O$. Если мы соединимъ каждую изъ этихъ точекъ со слѣдующей посредствомъ прямой, то получимъ ломаную линію; эта ломаная линія и называется графическимъ изображеніемъ температуры.

Достаточно одного взгляда на эту фигуру, чтобы замѣтить, какъ измѣнялась температура послѣ полудня. C есть наивысшая точка ломаной линіи; слѣдовательно, въ 2 часа температура была самой высокой. Далѣе, точки D и E лежатъ почти такъ же высоко, какъ и C; слѣдовательно, температура между 2 и 3, между 3 и 4 часами незначительно понизилась. Напротивъ того, прямыя FG и GH опускаются значительно быстрѣе; слѣдовательно, между 5 и 6 и между 6 и 7 часами наступило болѣе значительное измѣненіе температуры и т. д. Все это мы при первомъ взглядѣ на графическое изображеніе замѣчаемъ сразу, между тѣмъ какъ по числамъ, внесеннымъ въ нашу записную книжку, мы должны были бы все это соображать и сопоставлять.

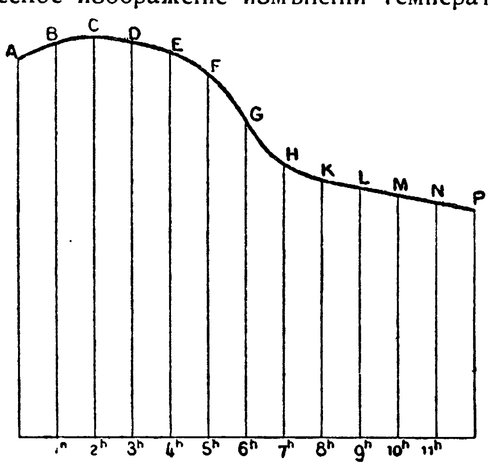
165. Чтобы получить графическое изображеніе, мы наблюдали температуру черезъ каждый часъ. Болѣе точная картина получилась бы, очевидно, если бы мы наблюдали температуру каждую четверть часа, черезъ каждыя 5 минутъ, черезъ каждую минуту. Чертежъ заключалъ бы тогда большее число точекъ, и ломанаялинія имѣла бы большее число сторонъ.

Изобрѣтенъ такъ называемый самопишущій термометръ (фиг. 14), отмѣчающій въ каждое мгновеніе, съ помощью механизма, котораго мы не будемъ здѣсь описывать, на кускѣ бумаги точку A, указывающую температуру этого момента.



Фиг. 14.

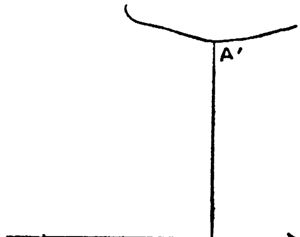
Бумажная лента приводится въ движеніе съ помощью часового механизма, такъ что въ полдень отмѣчается точка A, въ 1 ч. точка B, въ 2 ч. точка C и въ каждый моментъ точка, соотвѣтствующая данному моменту. Совокупность этихъ точекъ образуетъ непрерывную линію, кривую (фиг. 15), которая даетъ намъ полное графическое изображеніе измѣненій температуры.



Фиг. 15.

Предшествующія объясненія могутъ быть сведены въ слѣдующее правило:

Правило 28-ое. Чтобы изобразить графически ходъ измѣненій температуры, проводятъ (фиг. 16) ось Ox, на которой обозначаютъ точками послѣдовательные моменты времени. Для этой цѣли устанавливаютъ единицу длины и единицу времени, начальную точку O абсциссъ и начало временъ Тогда всякій моментъ изобразится нѣкоторой точкой A, абсцисса которой отвѣчаетъ этому моменту.



Фиг. 16.

Потомъ изъ каждой точки A возставляютъ перпендикуляръ къ оси абсциссъ и откладываютъ на немъ кверху отрѣзокъ AA', который служитъ для изображенія температуры. Для этого устанавливаютъ единицу температуры и единицу длины (это можетъ быть та же единица, которая служила для обозначенія времени) и наносятъ точку A' такимъ образомъ, что алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{AA'}$ равно числу, измѣряющему температуру въ избранныхъ единицахъ.

Чтобы получить графическое изображеніе температуры, остается лишь соединить всѣ эти точки A' непрерывной линіей.

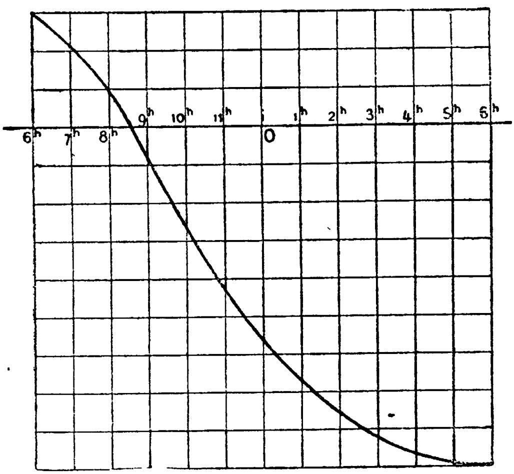
Алгебраическое число, измѣряющее отрѣзокъ $\overline{OA}$, называется абсциссой (п. **99**), а алгебраическое число, измѣряющее отрѣзокъ $\overline{AA'}$,—ординатой точки A'. Для измѣренія обоихъ отрѣзковъ можно употреблять разныя единицы длины; это условіе имѣетъ очень важное значеніе для практическихъ примѣненій графическаго изображенія, такъ какъ часто лишь при различныхъ единицахъ длины бываетъ удобно нанести на чертежъ сплошную линію, и рисунокъ становится благодаря этому отчетливѣе. Но при математическомъ изслѣдованіи графическаго изображенія принято для простоты брать одну и ту же единицу для обоихъ отрѣзковъ и мы будемъ всегда поступать такимъ образомъ, за исключеніемъ случаевъ, когда мы заранѣе предупредимъ о противномъ.

Если за общую единицу принять сантиметръ, то точка A изображаетъ моментъ, до котораго отъ начала временъ прошло столько единицъ времени, сколько въ отрѣзкѣ $\overline{OA}$ сантиметровъ точка же A' изображаетъ температуру, которая заключаетъ столько единицъ температуры, сколько сантиметровъ въ отрѣзкѣ $\overline{AA'}$

166. Положительныя и отрицательныя абсциссы и ординаты. Положимъ теперь, что температура ниже нуля, и, слѣдовательно, измѣряется отрицательнымъ числомъ. Тогда удобно изобразить ее посредствомъ отрѣзка, который лежитъ внизъ отъ оси Ox. Для примѣра положимъ, что мы наблюдали въ продолженіе зимней ночи слѣдующія температуры:

6 часовъ	вечера	$+3^0$		1	часъ	утра	$-6{,}7^0$
7	» »	$+2{,}1^0$		2	»	»	$-7{,}5^0$
8	» »	$+1^0$		3	»	»	$-8{,}2^0$
9	» »	$-0{,}9^0$		4	»	»	$-8{,}7^0$
10	» »	$-2{,}5^0$		5	»	»	$-8{,}9^0$
11	» »	$-4{,}2^0$		6	»	»	-9^0.
Полночь		$-5{,}6^0$					

Графическое изображеніе этого хода температуры мы видимъ на фигурѣ 17; въ ней единица длины абсциссъ (5 мм.) изображаетъ часъ, а единица длины ординатъ (тоже 5 мм.) изображаетъ градусъ.



Фиг. 17.

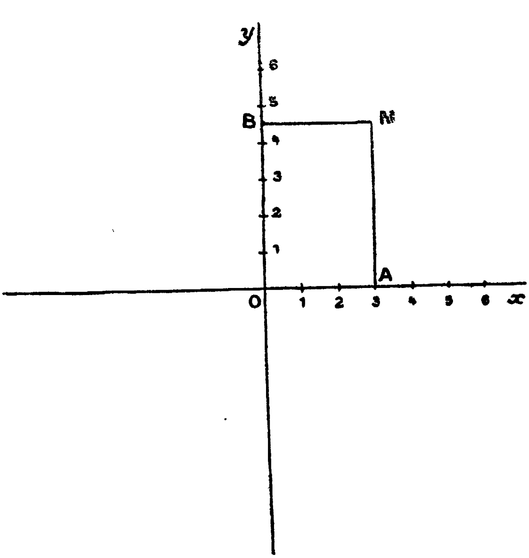
Если за начало временъ принята полночь, то нѣкоторый моментъ времени послѣ полуночи, напримѣръ, 3 часа утра, изобразится абсциссой $+3$, при чемъ начало абсциссъ есть точка 0, соотвѣтствующая полуночи; далѣе, нѣкоторый моментъ до полуночи, напримѣръ, 10 ч. вечера, изобразится абсциссой -2. Мы объяснимъ это точнѣе и дадимъ общее опредѣленіе «системы координатъ», называемой по имени ея изобрѣтателя Декарта («Геометрія» 1637) декартовой.

167. Общее опредѣленіе декартовыхъ координатъ. Будемъ разсматривать двѣ взаимно перпендикулярныя оси Ox, Oy, или, короче говоря,—прямоугольныя оси. Пусть точка M лежитъ въ углѣ xOy, составленномъ положительными направленіями осей (фиг. 18). Изъ точки M мы опускаемъ на оси перпендикуляры MA и MB. Тогда четырехугольникъ $OAMB$ будетъ прямоугольникомъ. Будемъ измѣрять стороны этого прямоугольника одной и той же единицей длины, напримѣръ сантиметромъ.

Имѣемъ на чертежѣ:

$$OA = BM = 3 \text{ см},$$
$$OB = AM = 4{,}5 \text{ см}.$$

Число 3 называется абсциссой точки M, а число 4,5—ея ординатой; оба числа 3 и 4,5, вмѣстѣ взятыя, называются двумя координатами точки. Слѣдовательно, координаты это два числа, которыя служатъ для того, чтобы опредѣлить положеніе точки M на плоскости. Оси Ox и Oy называются осями координатъ; Ox называется осью абсциссъ, а Oy—осью ординатъ. Точка O есть начало координатъ; она служитъ какъ началомъ абсциссъ, такъ и началомъ ординатъ.



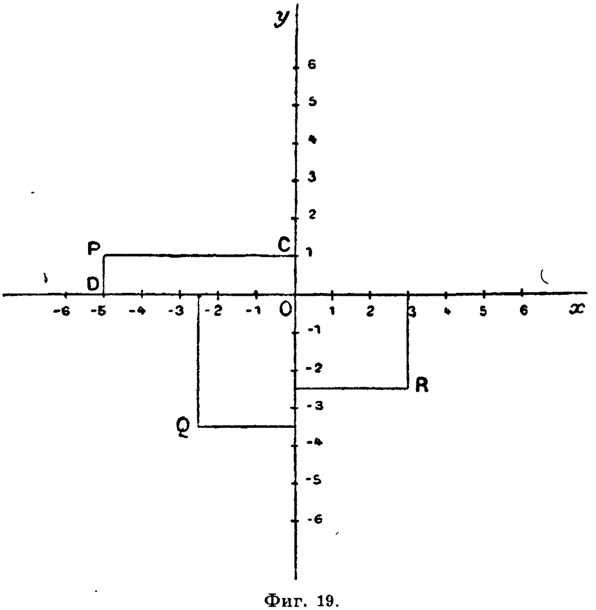
Фиг 18.

Будемъ теперь разсматривать (фиг. 19) точки P, Q, R въ трехъ остальныхъ углахъ, образуемыхъ осями координатъ. Координаты этихъ точекъ опредѣляются такимъ же образомъ. Напримѣръ, начертимъ для точки P прямоугольникъ $OCPD$; координатами точки P тогда служатъ числа, измѣряющія отрѣзки $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$, т. е. -5 и $+1$, такъ какъ отрѣзокъ $\overline{OD}$ имѣетъ отрицательное направленіе, а отрѣзокъ $\overline{OC}$—положительное. Точно такъ же изъ чертежа явствуетъ, что точка Q

имѣетъ абсциссу — 2,5 и ординату — 3,5, а точка R абсциссу $+3$ и ординату — 2,5. Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило:

Правило 29-ое. Если даны двѣ прямоугольныя оси Ox и Oy, то координаты всякой точки M на плоскости опредѣляются такъ: опускаемъ изъ точки M перпендикуляры MA на ось Ox и MB на ось Oy. Тогда абсциссой точки M служитъ алгебраическое число, измѣряющее отрѣзокъ $\overline{OA}$ на оси абсциссъ Ox, а ординатой точки M служитъ алгебраическое число, измѣряющее отрѣзокъ $\overline{OB}$ на оси ординатъ Oy.

Такимъ образомъ мы получаемъ координаты данной точки. Но важно также умѣть построить точку по даннымъ ея координатамъ. Для этого докажемъ слѣдующую теорему.



Фиг. 19.

Теорема 70. Если даны двѣ прямоугольныя оси Ox и Oy, единица длины и два произвольныхъ, положительныхъ или отрицательныхъ числа, то имѣется одна и только одна точка, абсциссой которой будетъ служить первое изъ этихъ чиселъ, а ординатой—второе. Мы получимъ эту точку помощью слѣдующаго построенія: откладываемъ на оси Ox отъ точки O отрѣзокъ $\overline{OA}$, который измѣряется алгебраическимъ числомъ, равнымъ данной абсциссѣ; затѣмъ на оси Oy откладываемъ отрѣзокъ $\overline{OB}$, который измѣряется алгебраическимъ числомъ, равнымъ данной ординатѣ. Тогда искомая точка M будетъ четвертой вершиной прямоугольника, три вершины котораго совпадаютъ съ точками A, O, B.

Опредѣленная такимъ образомъ точка M (черт. 18) имѣетъ координаты, равныя даннымъ числамъ, и представляетъ собою единственную точку такого рода; въ самомъ дѣлѣ, если мы изъ нѣкоторой точки, абсцисса которой равна алгебраическому числу, измѣряющему отрѣзокъ $\overline{OA}$, а ордината—алгебраическому числу, измѣряющему отрѣзокъ $\overline{OB}$, опустимъ перпендикуляръ на ось Ox, то онъ пройдетъ черезъ точку A и, слѣдовательно, совпадетъ съ прямой MA; точно такъ же перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на ось Oy, совпадаетъ съ прямой MB. Слѣдовательно, искомая точка должна совпасть съ точкой M.

168. Частные случаи. Если абсцисса равна нулю, то точка A совпадаетъ съ точкой O, а точка M—съ точкой B. Поэтому точки, абсциссы которыхъ равны нулю, расположены на оси Oy, т. е. на оси ординатъ. Точно такъ же точки, ординаты которыхъ равны нулю, будутъ точками оси абсциссъ. Точка O это единственная точка, обѣ координаты которой равны нулю.

Абсциссу обыкновенно обозначаютъ буквой x, а ординату буквой y. Если нужно различать нѣсколько точекъ, то буквы эти снабжаются указателями: $x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots$, при чемъ обѣ координаты одной и той же точки помѣчаютъ однимъ и тѣмъ же указателемъ. Нерѣдко также употребляютъ для обозначенія абсциссы букву a, а для обозначенія ординаты букву b. Наконецъ, пользуются иногда также греческими буквами α, β (вмѣсто a, b) и ξ, η (вмѣсто x, y).

Вмѣсто того, чтобы сказать: точка M, абсцисса которой равна 2, а ордината равна — 3, говорятъ и пишутъ короче: точка M ($x = 2$; $y = -3$), или еще короче: точка M (2, — 3); т. е. пишутъ сперва абсциссу, потомъ ординату и раздѣляютъ ихъ запятой. Если точка не обозначена буквой, напримѣръ, A, M, P, . . ., то можно сказать: точка $x = 2$, $y = -3$, или еще короче: точка (2, — 3).

III. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНІЕ ДВУЧЛЕНА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

169. Погрузимъ термометръ въ сосудъ, наполненный холодной водой и стоящій вблизи слабаго огня, и будемъ каждую минуту отмѣчать температуру, показываемую термометромъ. Мы получимъ, напримѣръ, слѣдующую, таблицу:

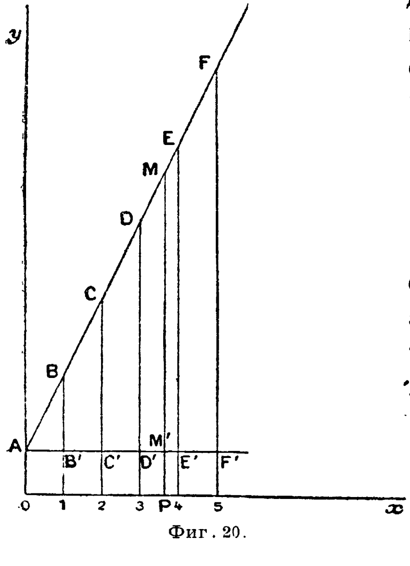
Моментъ времени.	Температура.	Моментъ времени.	Температура.
0	1^0	3 мин.	7^0
1 мин.	3^0	4 мин.	9^0
2 мин.	5^0	5 мин.	11^0.

Если обозначимъ число минутъ черезъ x, а соотвѣтствующее число градусовъ черезъ y, то одного взгляда на таблицу достаточно, чтобы замѣтить, что для значеній x, равныхъ 0, 1, 2, 3, 4, 5, справедливо уравненіе:

$$y = 2x + 1.$$

Слѣдовательно, температура повышается съ каждой минутой на 2^0. Отсюда мы можемъ заключить, что температура возрастаетъ равномѣрно, такъ что, напримѣръ, въ $\frac{1}{5}$ минуты она повышается на $\frac{1}{5}$ отъ 2^0, т. е. на $\frac{2}{5}$ градуса. Ко времени $3\frac{1}{5}$ мин. наблюдаемая температура будетъ $7\frac{2}{5}^0$; и въ этомъ случаѣ между числомъ минутъ x и соотвѣтствующимъ числомъ градусовъ y имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$y = 2x + 1.$$



Фиг. 20.

Это наводитъ насъ на мысль, что разсматриваемое уравненіе справедливо для всѣхъ значеній x, заключающихся между 0 и 5, т. е. для каждаго момента времени, лежащаго между двумя предѣльными моментами, между которыми мы производили наблюденія; поэтому мы говоримъ, что уравненіе это выражаетъ законъ измѣненія температуры въ теченіе даннаго промежутка времени.

Начертимъ графическое изображеніе хода измѣненій температуры. Для этого проведемъ (черт. 20) двѣ прямоугольныя оси Ox, Oy и отложимъ на оси Ox отъ точки O единицу длины пять разъ. Получимъ такимъ образомъ точки 1, 2, 3, 4, 5, соотвѣтствующія временамъ 1, 2, 3, 4, 5, между тѣмъ какъ начало O соотвѣтствуетъ времени 0. Возставимъ въ этихъ точкахъ перпендикуляры къ Ox и сдѣлаемъ $0A = 1$, $1B = 3$, $2C = 5$, $3D = 7$, $4E = 9$, $5F = 11$. Теперь докажемъ, что точки $ABCDEF$ лежатъ на прямой линіи. Для этого черезъ точку A проведемъ прямую, параллельную оси Ox, которая пересѣчетъ наши перпендикуляры въ точкахъ B', C', D', E', F'. Тогда:

$$AB' = 1,\quad AC' = 2,\quad AD' = 3,\quad AE' = 4,\quad AF' = 5,$$
$$B'B = 2,\quad C'C = 4,\quad D'D = 6,\quad E'E = 8,\quad F'F = 10.$$

Слѣдовательно, прямоугольные треугольники $AB'B$, $AC'C$, $AD'D$, $AE'E$, $AF'F$ будутъ подобны между собой, такъ какъ катеты ихъ пропорціональны. Отсюда слѣдуетъ что прямыя AB, AC, AD, AE, AF образуютъ съ прямой AF' тотъ же уголъ и поэтому совпадаютъ, т. е. точки A, B, C, D, E, F лежатъ на одной прямой.

Теперь мы покажемъ, что ходъ измѣненій температуры для наблюдаемаго промежутка времени вполнѣ изображается этой прямой AF, т. е. если мы наблюдаемъ произвольный моментъ времени x, сотвѣтствующій точкѣ P на оси Ox, то температура y въ этотъ моментъ времени будетъ выражаться алгебраическимъ числомъ, измѣряющимъ отрѣзокъ $\overline{PM}$, который получимъ, возставивъ изъ точки P перпендикуляръ къ оси Ox и взявъ точку его пересѣченія M съ прямой AF.

Пусть M' будетъ точка пересѣченія перпендикуляра PM съ прямой AF'. Тогда треугольникъ $AM'M$ будетъ подобенъ треугольнику $AB'B$ и потому:

$$\frac{\overline{M'M}}{\overline{AM'}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{AB'}} = 2.$$

Съ другой стороны:

$$\overline{PM} = \overline{PM'} + \overline{M'M},$$

$$\overline{OP} = \overline{AM'}.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\overline{PM} = 2\,\overline{OP} + 1.$$

Слѣдовательно, если мы обозначимъ отрѣзокъ $\overline{PM}$ черезъ y, а отрѣзокъ $\overline{OP}$ черезъ x, то будетъ имѣть мѣсто уравненіе:

$$y = 2x + 1.$$

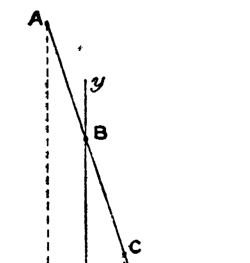
Поэтому алгебраическое значеніе отрѣзка $\overline{PM}$ дѣйствительно даетъ температуру, соотвѣтствующую абсциссѣ $\overline{OP}$.

Итакъ, если ходъ измѣненія температуры въ зависимости отъ времени выражается алгебраически двучленомъ первой степени, то графически онъ изобразится прямой линіей. Вслѣдствіе этого важнаго свойства функція y, опредѣляемая уравненіемъ $y = ax + b$, называется линейной функціей отъ x; графически она изображается прямой линіей.

170. Другіе примѣры. I. Изобразить графически функцію y, которая опредѣляется уравненіемъ

$$y = 4 - 3x,$$

при чемъ x измѣняется отъ -1 до 2.



Фиг. 21

Мы можемъ построить здѣсь слѣдующую таблицу:

$x = -1$	$y = 7$	Точки A
$x = 0$	$y = 4$	„ B
$x = 1$	$y = 1$	„ C
$x = 2$	$y = -2$	„ D

Точно такъ же, какъ въ предшествующемъ случаѣ, можно убѣдиться, что точки A, B, C, D лежатъ (черт. 21) на прямой линіи. Эта прямая пересѣкаетъ ось Ox въ нѣкоторой точкѣ M. Для точки M ордината y равна нулю. Если, слѣдовательно, абсциссу точки M мы обозначимъ черезъ x_0, то $4 - 3x_0 = 0$, и потому:

$$x_0 = \frac{4}{3}.$$

II. Требуется изобразить графически функцію y, которая опредѣляется уравненіемъ

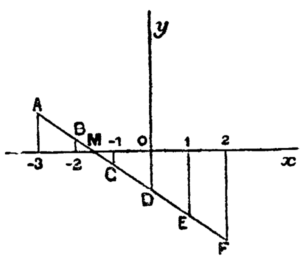
$$y = -1 - \frac{2}{3}x,$$

при чемъ x измѣняется отъ -3 до $+2$.

Составимъ таблицу:

$x = -3$	$y = -1 + 2 = 1$	Точка A
$x = -2$	$y = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$	„ B
$x = -1$	$y = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$	„ C
$x = 0$	$y = -1$	„ D
$x = 1$	$y = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$	„ E
$x = 2$	$y = -1 - \frac{4}{3} = -\frac{7}{3}$	„ F.

Точки A, B, C, D, E, F лежатъ на одной прямой (черт. 22) Эта прямая пересѣкаетъ ось Ox въ нѣкоторой точкѣ M, абсцисса которой равна $-\frac{3}{2}$; для этого значенія x ордината y равна нулю.



Черт. 22.

171. Общее изслѣдованіе линейной функціи. Теперь изслѣдуемъ ходъ измѣненія линейной функціи, при чемъ x будемъ измѣнять отъ $-\infty$ до $+\infty$, т. е. будемъ придавать абсциссѣ x всевозможныя отрицательныя и положительныя значенія.

Пусть, напримѣръ, дана линейная функція:

$$y = 2x + 3.$$

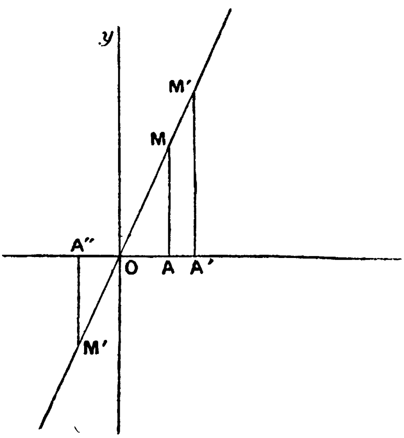
Полное графическое изображеніе хода измѣненія этой функціи мы получимъ слѣдующимъ образомъ: будемъ давать x всевозможныя значенія и вычислять соотвѣтствующія имъ значенія y; потомъ построимъ всѣ точки, координатами которыхъ служатъ соотвѣтствующія значенія перемѣнныхъ x и y; наконецъ, соединимъ эти точки непрерывной линіей. Докажемъ, что эта линія будетъ прямой.

Разсмотримъ сначала болѣе простую функцію:

$$y = 2x.$$

Если мы, какъ и выше (п. **99**), будемъ обозначать алгебраическое значеніе отрѣзка отъ A до B черезъ $\overline{AB}$, то положительной абсциссѣ $\overline{OA}$ будетъ отвѣчать (черт. 23) положительная ордината $\overline{AM}$, которая въ два раза больше, чѣмъ $\overline{OA}$. Точно такъ же положительной абсциссѣ $\overline{OA'}$ будетъ отвѣчать положительная ордината $\overline{A'M'}$, которая въ два раза больше, чѣмъ $\overline{OA'}$. Далѣе, отрицательной абсциссѣ $\overline{OA''}$ будетъ отвѣчать отрицательная ордината $\overline{A''M''}$, которая также въ два раза больше, чѣмъ $\overline{OA''}$. Слѣдовательно, прямоугольные треугольники OAM, $OA'M'$, $OA''M''$ будутъ подобны между собой, такъ какъ катеты ихъ пропорціональны, и потому:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{A''M''}}{\overline{OA''}} = 2.$$



Черт. 23.

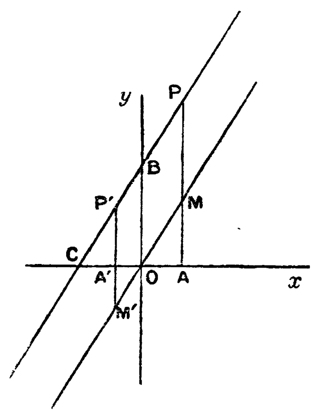
Поэтому углы MOA, $M'OA'$, $M''OA''$ равны между собой, а отсюда слѣдуетъ, что точки M, M', M'' лежатъ на прямой. Если мы эту прямую продолжимъ безконечно, то она изобразитъ вполнѣ функцію $y = 2x$. Каждой парѣ сопряженныхъ значеній x, y соотвѣтствуетъ точка на прямой, и обратно: координаты произвольной точки на прямой удовлетворяютъ уравненію: $y = 2x$. Поэтому говорятъ, что уравненіе $y = 2x$ есть уравненіе прямой, т. е. уравненіе, которому удовлетворяютъ координаты произвольной точки этой прямой. Прямую MM' называютъ также прямой, выражаемой уравненіемъ $y = 2x$, или, короче, прямой $y = 2x$.

Теперь изслѣдуемъ болѣе общее уравненіе:

$$y = 2x + 3.$$

Пусть A будетъ произвольная точка на оси Ox (черт. 24), а $\overline{AM}$ соотвѣтствующая ей ордината прямой $y = 2x$. Тогда мы получимъ ординату $\overline{AP}$ линіи $y = 2x + 3$, если продолжимъ AM за точку M на три единицы длины до точки P. Точно такъ же точкѣ A' на оси Ox соотвѣтствуетъ точка M' прямой $y = 2x$ и такая точка P' линіи $y = 2x + 3$, что $\overline{M'P'}$ равно 3. Такъ какъ отрѣзки $\overline{MP}$, $\overline{M'P'}$ равны и параллельны, то фигура $MPP'M'$ есть параллелограммъ. Точка P' лежитъ, слѣдовательно, на прямой, параллельной къ $M'M$ и проведенной черезъ точку P, и потому всѣ точки линіи $y = 2x + 3$ лежатъ на этой параллельной прямой. Отсюда ясно, что искомая линія совпадаетъ съ этой прямой.

При $x = 0$ функція $y = 2x + 3$ имѣетъ значеніе 3; соотвѣтствующая ордината есть $\overline{OB}$, и фигура $OBPM$ точно такъ же представляетъ собой параллелограммъ. Отрѣзокъ, $\overline{OB}$ называютъ отрѣзкомъ отсѣкаемымъ прямой на оси y-ковъ.



Фиг. 24.

Такъ какъ мы знаемъ теперь, что графическое изображеніе линейной функціи $y = ax + b$ есть прямая, то намъ уже нѣтъ надобности для полученія графическаго изображенія составлять таблицы соотвѣтственныхъ значеній x и y; мы можемъ поступить гораздо проще.

Напримѣръ, чтобы графически изобразить функцію $y = 2x + 3$, достаточно сперва намѣтить точку B и затѣмъ провести черезъ точку B прямую, параллельную MM'.

Можно поступить еще иначе, а именно, кромѣ точки B, взять еще точку C, въ которой прямая пересѣкаетъ ось Ox; для этой точки $2x + 3 = 0$, т. е. $x = -\frac{3}{2}$; тогда остается только соединить точки B и C прямой линіей, и мы получимъ искомую прямую. Отрѣзокъ $\overline{OC}$ называется отрѣзкомъ, отсѣкаемымъ прямой на оси x-овъ.

172. Примѣры. I. Пусть требуется построить прямую:

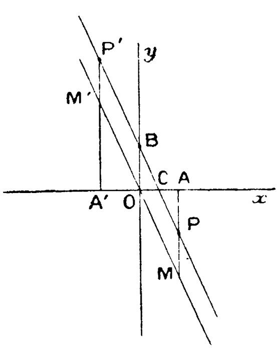
$$y = -2x + 1.$$

Строимъ сначала прямую $y = -2x$. Для этой прямой (прямая MM' на фиг. 25) y и x постоянно имѣютъ противоположные знаки. Прямую $y = -2x + 1$ мы получимъ, соединивъ точки P и P', при чемъ отрѣзки $\overline{MP}$ и $\overline{M'P'}$ равны единицѣ длины; можно также построить на оси y-овъ и на оси x-овъ отрѣзки отсѣкаемые этой прямой $\overline{OB} = 1$ и $\overline{OC} = \frac{1}{2}$ и провести прямую черезъ точки B и C.

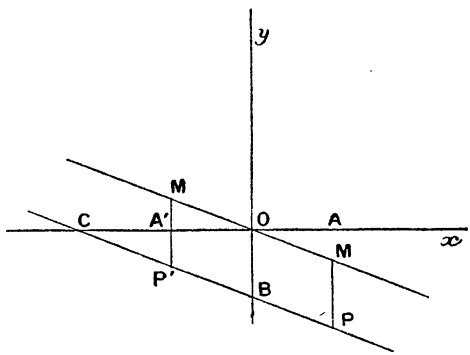
II. Пусть требуется построить прямую, которая выражается уравненіемъ

$$y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

Параллельная прямая будетъ MM' (черт. 26); далѣе $\overline{OB} = -2$, $\overline{OC} = -4$.



Фиг. 25.



Фиг. 26.

173. Опредѣленіе углового коэффиціента прямой, проходящей черезъ двѣ точки. Наклоненіе прямой

$$y = ax + b$$

къ оси x-овъ опредѣляется величиной и знакомъ коэффиціента при x въ ея уравненіи. По этой причинѣ коэффиціентъ при x называется также угловымъ коэффиціентомъ прямой.

Если (x_1, y_1), (x_2, y_2) суть координаты двухъ точекъ прямой $y = ax + b$, то:

$$y_1 = ax_1 + b,$$
$$y_2 = ax_2 + b.$$

Отсюда помощью вычитанія получимъ:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1);$$

слѣдовательно:

(1) $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

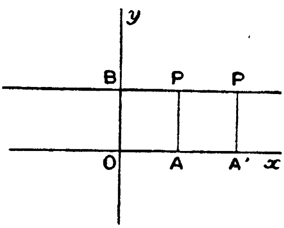
Эта формула даетъ угловой коэффиціентъ прямой, если даны координаты двухъ точекъ прямой.

Отсюда вытекаетъ правило:

Правило 30-ое. Угловой коэффиціентъ прямой равенъ частному отъ дѣленія разности ординатъ двухъ ея точекъ на разность абсциссъ этихъ точекъ, взятыхъ въ томъ же порядкѣ.

Если угловой коэффиціентъ равенъ нулю, то прямая параллельна оси Ox, такъ какъ ордината y имѣетъ тогда постоянное значеніе b и поэтому мы имѣемъ дѣло съ прямой въ родѣ BPP' (черт. 27).

Если угловой коэффиціентъ имѣетъ положительное значеніе, то функція $y = ax + b$ возрастаетъ; если же онъ имѣетъ отрицательное значеніе, то функція эта убываетъ (ср. п. **159**).



Фиг. 27.

Особаго разсмотрѣнія требуютъ прямыя, параллельныя оси Oy. Очевидно, что всѣ точки такой прямой имѣютъ одну и ту же абсциссу, т. е. уравненіе ея будетъ $x = x_1$; въ это уравненіе y не входитъ. Угловой коэффиціентъ такой прямой является безконечнымъ, такъ какъ знаменатель формулы (1), опредѣляющей его, равенъ нулю.

Такъ какъ мы воображаемъ себѣ ось Ox горизонтальной, а ось Oy вертикальной, то угловой коэффиціентъ a равенъ (положительному или отрицательному) частному разности высотъ двухъ точекъ и ихъ горизонтальнаго разстоянія. Это замѣчаніе важно въ примѣненіи къ топографіи, къ которому мы сейчасъ переходимъ.

174. Примѣненіе къ топографіи. Если мы хотимъ начертить карту нѣкоторой мѣстности или планъ поля, дома и т. д., то каждую точку можно изобразить ея проекціей на горизонтальную плоскость, т. е. основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на горизонтальную плоскость. Иногда отмѣчаютъ и высоту каждой точки, т. е. высоту ея положенія надъ извѣстной горизонтальной плоскостью. Тогда наклонъ прямой равенъ частному отъ дѣленія разности высотъ двухъ ея точекъ на разстояніе ихъ проекцій на горизонтальную плоскость. Напримѣръ, наклонъ прямой улицы, имѣющей длину въ 3 км., начинающейся на высотѣ 250 м. надъ уровнемъ моря и кончающейся на высотѣ 310 м. надъ уровнемъ моря, будетъ:

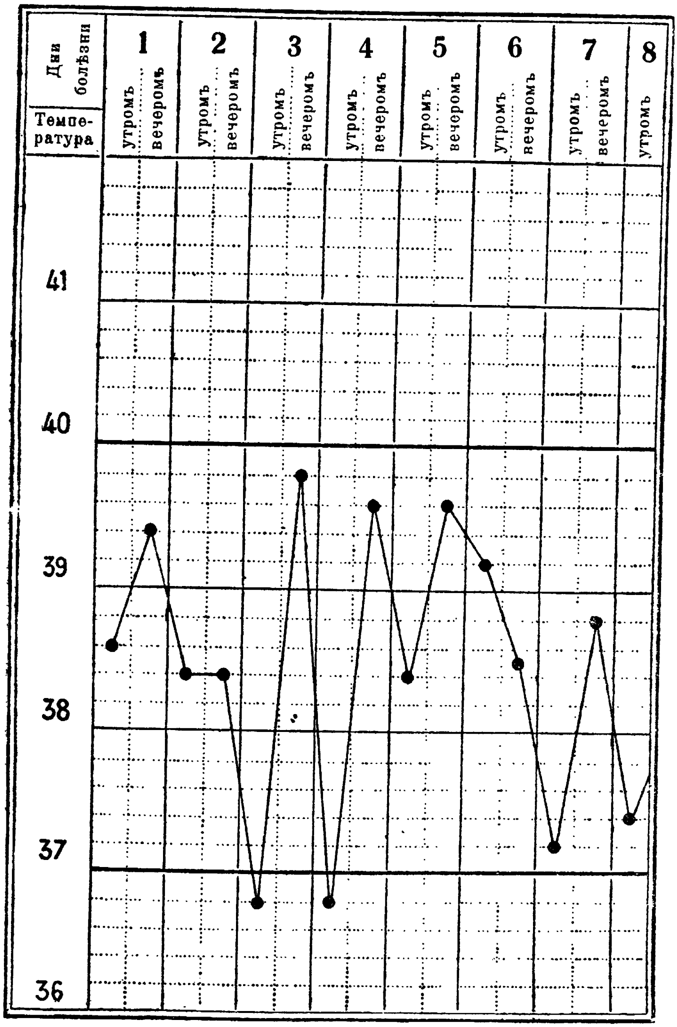
$$\frac{310-250}{3000}=\frac{60}{3000}=\frac{1}{50}.$$

Говорятъ, что наклонъ равенъ $\frac{1}{50}$ или $\frac{2}{100}$, или 2 см. на каждый метръ, или 2 процентамъ (2%). Если мы примемъ за начало координатъ начало улицы O, за ось Ox—проекцію улицы на горизонтальную плоскость, проходящую черезъ O, за ось Oy —вертикальную прямую, проведенную изъ точки O, то линія пересѣченія улицы съ плоскостью xOy выразится уравненіемъ:

$$y=\frac{1}{50}x.$$

При изготовленіи такихъ чертежей часто выбираютъ двѣ различныя единицы длины для абсциссъ и ординатъ, для того, чтобы были виднѣе наклоны, которые въ противномъ случаѣ остаются незамѣтными для глаза. Напримѣръ, можно посредствомъ 1 см. выразить 1 км. горизонтальнаго разстоянія и одновременно съ этимъ высоту лишь въ 100 метровъ; тогда масштабъ будетъ $\frac{1}{100000}$ для абсциссъ и $\frac{1}{10000}$ для ординатъ. Поступая такимъ образомъ, не слѣдуетъ, однако, забывать, что наклоны въ дѣйствительности значительно слабѣе, чѣмъ наклоны схематическаго изображенія.

175. Медицинскія температуры. Во многихъ болѣзняхъ наблюденіе надъ ходомъ температуры больного даетъ врачу цѣнныя указанія; и для него очень важно знать, происходятъ ли измѣненія температуры быстрѣе или медленнѣе. Для этой цѣли можно воспользоваться изображеніемъ температуры, копію котораго мы даемъ; а именно мы приводимъ листъ, который былъ дѣйствительно заполненъ въ одной больницѣ (черт. 28). Температуру наблюдали каждое утро и каждый вечеръ, по возможности, въ одни и тѣ же часы.



Фиг. 28.

Времена наблюденій наносятся на ось абсциссъ, при чемъ одна сторона каждой клѣтки соотвѣтствуетъ промежутку въ

12 часовъ; температуры изображаются отрѣзками, перпендикулярными къ этой оси; при этомъ другая сторона клѣтки соотвѣтствуетъ 2 десятымъ градуса. Изображаемая точка можетъ упасть на одну изъ горизонтальныхъ сторонъ квадрата, или же въ самый центръ квадрата, какъ, напримѣръ, на нашемъ чертежѣ въ шестой день вечеромъ. Мы можемъ такимъ образомъ видѣть десятыя доли градуса; это и есть точность показаній медицинскаго термометра. Болѣе или менѣе сильный наклонъ прямой, соединяющей двѣ точки, указываетъ непосредственно, съ какой быстротой происходили измѣненія температуры. Температурѣ въ 37° и 40° соотвѣтствуютъ болѣе жирныя линіи-эти температуры особенно важны при сужденіи о болѣзни.

Если бы мы производили наблюденія надъ температурой больного въ каждое мгновеніе, то линія, которую мы получили бы, значительно уклонилась бы отъ построенной нами; однако, схематическій чертежъ удовлетворяетъ потребности медицинской практики.

176. Введеніе приращеній Δy и Δx. Возьмемъ опять основную формулу углового коэффиціента прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (п. **173**):

$$(1) \qquad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

и напишемъ ее въ новомъ видѣ, который очень полезно знать.

Пусть x_1 и x_2 будутъ два значенія абсциссы, а y_1 и y_2 — соотвѣтствующія значенія ординаты; тогда полагаемъ:

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1,$$

или, что то же:

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1.$$

Знакъ Δx_1 (читается: дельта x_1) обозначаетъ нѣкоторую положительную или отрицательную величину, которую слѣдуетъ прибавить къ x_1, чтобы получить x_2. Δx_1 называется также приращеніемъ x_1, при чемъ слово „приращеніе“ имѣетъ алгебраическій смыслъ, т. е. обозначаетъ величину, которую мы прибавляемъ, независимо отъ того, имѣетъ ли она положительное или отрицательное значеніе. Соотвѣтственное приращеніе y обозначается знакомъ Δy, такъ что:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1,$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1.$$

Формула для углового коэффиціента прямой, соединяющей обѣ разсматриваемыя точки, получитъ теперь слѣдующій видъ:

$$a = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1},$$

или, проще, если отбросимъ указателей, въ виду того, что x_1, y_1 суть координаты произвольной точки прямой:

(2) $$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отсюда вытекаетъ теорема:

Теорема 71. Величина углового коэффиціента прямой равна частному отъ дѣленія приращенія ординаты на соотвѣтствующее приращеніе абсциссы.

Теперь примемъ, что приращеніе Δx имѣетъ положительное значеніе. Тогда, по опредѣленію (п. **159**), функція y будетъ возрастающей, убывающей или постоянной, смотря по тому, будетъ ли имѣть положительное, отрицательное или нулевое значеніе соотвѣтствующее приращеніе Δy. Если Δx есть положительное число, то коэффиціентъ a имѣетъ, очевидно, тотъ же знакъ, что и Δy, и обращается въ нуль одновременно съ Δy. Слѣдовательно, линейная функція будетъ возрастающей, убывающей или постоянной, въ зависимости отъ того, будетъ ли коэффиціентъ a положительнымъ числомъ, отрицательнымъ или нулемъ (ср. п. **173**).

177. Примѣненіе къ равномѣрному движенію. Обозначимъ черезъ s_0 число, измѣряющее путь, который точка прошла, двигаясь, равномѣрно, до начала счета временъ; далѣе, обозначимъ черезъ s число, измѣряющее путь, пройденный во время t, и, наконецъ, черезъ v обозначимъ скорость точки. Тогда:

$$s = vt + s_0.$$

Это уравненіе отличается отъ уравненія п. **108** только тѣмъ, что здѣсь мы употребили букву s вмѣсто буквы x и положили $t_0 = 0$.

Проведемъ двѣ прямоугольныя оси и вмѣсто Ox и Oy назовемъ ихъ теперь Ot и Os. Дальше, выберемъ единицу длины, и притомъ одну и ту же единицу длины для оси абсциссъ и оси ординатъ, начало временъ, начальную точку путей, положительное направленіе времени, положительное направленіе пути, единицу времени и единицу пути. Затѣмъ возьмемъ соотвѣтствующую данному моменту времени точку, абсцисса которой будетъ равна числу единицъ времени, протекшихъ отъ начала временъ до даннаго момента, а ордината — числу единицъ пути, которыя пройдены отъ начала пути до даннаго положенія движущейся точки.

Если, слѣдовательно, мы обозначимъ абсциссу и ординату черезъ t и s, то получимъ связывающее эти числа уравненіе:

$$s = vt + s_0.$$

Если же мы на время обозначимъ ординату буквой y (вмѣсто s) и абсциссу буквой x (вмѣсто t), то уравненіе приметъ видъ:

$$y = vx + s_0.$$

А это, какъ мы сразу видимъ, есть уравненіе прямой. Итакъ, равномѣрное движеніе графически изображается прямой линіей.

Далѣе мы видимъ, что угловой коэффиціентъ прямой равенъ v, т. е. равенъ скорости. Впрочемъ, это равенство только тогда имѣетъ мѣсто, когда для абсциссъ и ординатъ избрана одна и та же единица длины.

Разсмотримъ, напримѣръ, точку, которая проходитъ 4 километра въ часъ, двигаясь въ положительномъ направленіи, и начинаетъ свое движеніе отъ точки, разстояніе которой отъ начала путей равно 10 км.; чтобы избѣжать недоразумѣній, мы не употребляемъ здѣсь слова абсцисса, такъ какъ пути измѣряются по оси ординатъ.

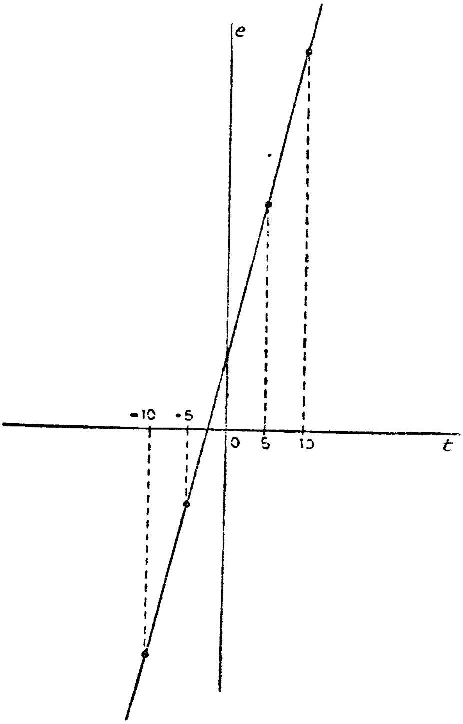
При этихъ положеніяхъ будетъ:

$$s = 4t + 10,$$

причемъ времена t выражены въ часахъ, а пути въ километрахъ. Пусть теперь часу соотвѣтствуетъ на оси абсциссъ 1 мм. и километру на оси ординатъ 1 мм.; тогда мы придемъ къ тому же уравненію между абсциссой и ординатой:

$$s = 4t + 10.$$

Мы получимъ такимъ образомъ чертежъ 29. Для $t = 5$ мы имѣемъ $s = 30$; а именно: абсциссѣ 5 соотвѣтствуетъ ордината 30. Для $t = -5$ мы имѣемъ $s = -10$, что можно легко доказать съ помощью чертежа или разсматривая равномѣрное движеніе.



Фиг. 29.

При обозначеніяхъ, подобныхъ употребленнымъ въ предшествующемъ пунктѣ, имѣемъ:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Теперь $t_2 - t_1$ представляетъ число, которое измѣряетъ промежутокъ времени, протекающій между моментами времени t_1 и t_2, а $s_2 - s_1$ представляетъ число, которое измѣряетъ путь, проходимый въ продолженіе этого промежутка времени; слѣдовательно, скорость равна частному отъ дѣленія числа, измѣряющаго путь, проходимый въ продолженіе опредѣленнаго промежутка времени, на число, измѣряющее этотъ промежутокъ времени. Это частное не зависитъ отъ величины избраннаго промежутка времени; въ этомъ именно и заключается особенность равномѣрнаго движенія.

Мы можемъ также написать:

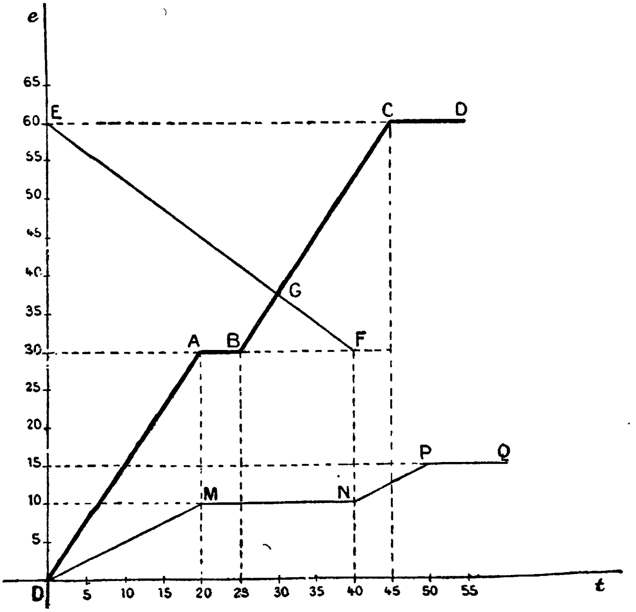
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

и сказать, что скорость равна частному отъ дѣленія приращенія пути на приращеніе времени.

178. Графическое изображеніе расписаній желѣзнодорожнаго движенія. Графическое изображеніе равномѣрнаго движенія находитъ себѣ примѣненіе въ графическихъ расписаніяхъ движенія, которыя представляютъ желѣзнодорожнымъ служащимъ въ удобной формѣ картину движенія по извѣстной линіи. При этомъ, для упрощенія, движеніе поѣзда между двумя станціями принимается за равномѣрное. Въ продолженіе простоя поѣзда на станціи путь не измѣняется; время же измѣняется на величину, равную продолжительности простоя; слѣдовательно, простой изображается отрѣзкомъ, параллельнымъ оси Ot.

На чертежѣ 30 минутѣ отвѣчаетъ 1 мм. и километру отвѣчаетъ 1 мм. Скорость, выраженная въ километрахъ въ минуту, будетъ равна угловому коэффиціенту прямой, изображающей движеніе поѣзда.

На чертежѣ 30 изображены движенія двухъ поѣздовъ, которые одновременно (въ начальный моментъ времени) отправляются со станціи, принятой за начало путей.



Фиг. 30.

Движеніе перваго, скораго поѣзда, изображено линіей $OABCD$. Сначала онъ проходитъ 30 км. въ 20 минутъ. Эта первая часть его движенія изобразится линіей OA. Прибывъ на станцію, отстоящую на 30 км. отъ точки отправленія, поѣздъ стоитъ въ продолженіе 5 минутъ, что изображено отрѣзкомъ $\overline{AB}$, параллельнымъ оси Ot, — такъ какъ въ теченіе этихъ 5 минутъ величина пройденнаго пути не измѣняется. Потомъ поѣздъ проходитъ снова 30 км. въ 20 минутъ, такъ что черезъ 45 минутъ послѣ своего отъѣзда поѣздъ находится на разстояніи 60 км. отъ точки отправленія, что изображается точкой C, имѣющей абсциссу 45 и ординату 60. На новой станціи поѣздъ останавливается на 10 минутъ и т. д.

Линія $OMNPQ$ представляетъ движеніе товарнаго поѣзда, скорость котораго меньше, а остановки чаще и продолжительнѣе.

Прямая EF представляетъ движеніе поѣзда, который движется въ направленіи, противоположномъ направленію движенія предшествующихъ поѣздовъ. Онъ отправляется въ начальный моментъ изъ точки, удаленной на 60 км. отъ начала путей (точка E), и приходитъ черезъ 40 минутъ на станцію, отстоящую отъ этого начала на 30 км. (точка F). Этотъ поѣздъ встрѣчается со скорымъ поѣздомъ, который мы разсматривали раньше, такъ какъ линіи, изображающія оба поѣзда, пересѣкаются въ точкѣ G. Абсцисса этой точки даетъ намъ моментъ встрѣчи, а ея ордината—разстояніе точки встрѣчи отъ начала путей.

Управленіе желѣзныхъ дорогъ составляетъ планы расписаній графическимъ методомъ, такъ какъ лишь такимъ образомъ можно обозрѣть все движеніе. Только послѣ этого изъ графическихъ плановъ можно взять моменты отхода и прихода въ томъ видѣ, какъ мы находимъ ихъ въ путеводителяхъ.

ЗАДАЧИ КЪ XVI-ой ГЛАВѢ.

353. Наблюдались слѣдующія температуры:

Полдень	10^0	4 часа	8^0
1 часъ	12^0	5 часовъ	5^0
2 часа	13^0	6 „	4^0
3 „	11^0	7 „	3^0

Представить графически ходъ измѣненій температуры, при чемъ часу долженъ отвѣчать 1 см. и градусу также 1 см.

354. Представить то же самое графическое изображеніе при условіи, что часу отвѣчаетъ 2 мм., а градусу — 1 мм.

355. Представить то же самое графическое изображеніе при помощи клѣтчатой бумаги, при чемъ горизонтальной сторонѣ квадрата соотвѣтствуетъ часъ, а вертикальной его сторонѣ два градуса.

356. Наблюдались слѣдующія температуры:

Полдень	10^0	8 часовъ . . .	3^0
2 часа	$11{,}5^0$	10 „ . . .	$0{,}5^0$
4 „	8^0	Полночь. . . .	$-0{,}5^0$
6 часовъ	5^0	2 часа	-1^0

Изобразить графически ходъ измѣненій температуры, если часу отвѣчаетъ 1 см. и градусу 1 см.

357. Представить то же самое графическое изображеніе, если часу соотвѣтствуютъ 2 мм., а градусу 1 мм.

358. Представить то же самое изображеніе на клѣтчатой бумагѣ, при чемъ горизонтальной сторонѣ квадрата соотвѣтствуетъ одинъ часъ, а вертикальной одинъ градусъ.

359. Изобразить графически температуры больного на основаніи слѣдующихъ наблюденій:

	утромъ	вечеромъ
28 іюня	$36{,}9^0$	38^0
29 „	$37{,}5^0$	$38{,}5^0$
30 „	$37{,}4^0$	39^0
1 іюля	$39{,}9^0$	$39{,}5^0$
2 „	39^0	$38{,}8^0$
3 „	$37{,}7^0$	38^0
4 „	37^0	$37{,}6^0$.

Выборъ единицъ длины, соотвѣтствующихъ часу и градусу, предоставляется читателю.

360 Изобразить графически функціи:

$$y = x + 1\,,$$
$$y = 3x + 4\,,$$
$$y = \frac{x}{2} - 3\,,$$

принимая за единицу длины на осяхъ x-овъ и y-овъ сантиметръ.

361. Выполнить то же, принимая за единицу длины миллиметръ.

362. Изобразить графически функціи:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8}\,,$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\,,$$
$$y = -x + \frac{2}{9}\,,$$

принимая за единицу длины дециметръ.

363. Выполнить то же, принимая за единицу длины сантиметръ.

364. Изобразить графически функціи:

$$y = -3x + 500,$$
$$y = -2x - 350,$$
$$y = \frac{x}{4} - 1000,$$

принимая за единицу длины десятую долю миллиметра.

365. Изобразить графически слѣдующія функціи:

$$y = 2x - 1,$$
$$y = -3x + 2,$$
$$y = \frac{x}{3} - 2,$$

принимая за единицу длины сантиметръ.

366. Выполнить то же, принимая за единицу длины миллиметръ.

367. Изобразить графически слѣдующія функціи:

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{8},$$
$$y = \frac{2}{7}x - \frac{3}{5},$$
$$y = -\frac{x}{2} + \frac{2}{5},$$

принимая за единицу длины дециметръ.

368. Изобразить графически слѣдующія функціи:

$$y = -2x + 400,$$
$$y = -3x + 250,$$
$$y = 3\frac{x}{4} - 2000,$$

принимая за единицу длины десятую часть миллиметра.

369. Построить прямыя:

$$y = 3x + 5,$$
$$y = -2x + 7,$$

принимая за единицу длины сантиметръ. Вычислить координаты точки ихъ пересѣченія и провѣрить результатъ вычисленія измѣреніемъ.

370. Рѣшить ту же задачу для прямыхъ:

$$y = \frac{3}{4}x + 10,$$
$$y = 5x - 3,$$

принимая за единицу длины миллиметръ.

371. Рѣшить обѣ предшествующія задачи при помощи клѣтчатой бумаги.

372. Построить прямыя

$$y = 2x + 4,$$
$$y = -3x + 7,$$

принимая за единицу длины сантиметръ. Вычислить координаты точки ихъ пересѣченія и провѣрить результатъ вычисленій измѣреніемъ.

373. Рѣшить ту же задачу для прямыхъ:

$$y = \frac{1}{4}x + 15,$$
$$y = 2x - 3,$$

принимая за единицу длины миллиметръ.

374. Рѣшить обѣ предшествующія задачи, при помощи клѣтчатой бумаги.

375. Вычислить координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ:

$$y = ax + b,$$
$$y = a'x + b'.$$

Произвести изслѣдованіе.

376. Построить прямыя, опредѣляемыя уравненіями

$$x = 2y + 5,$$
$$x = 3y - 4,$$
$$x = 2,$$
$$x = -\frac{y}{5} + \frac{2}{3},$$

принимая за единицу длины сантиметръ.

377. Построить прямыя, изображенныя уравненіями:

$$2x + 3y = 5,$$
$$4x - 5y - 2 = 0,$$
$$3x - 2y + 4 = 0,$$
$$3x - 5 \quad = 0,$$
$$2y + 3 \quad = 0,$$

принимая за единицу длины половину сантиметра.

378. Въ какомъ случаѣ прямыя, изображенныя уравненіями:

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

будутъ параллельны?

379. Какой угловой коэффиціентъ имѣетъ прямая:

$$ax + by = c?$$

380. Наклонъ нѣкоторой улицы принимаемъ за равномѣрный. Опредѣлить высоту точки, отстоящей отъ начала улицы на 15 км., если точки, отстоящія отъ начала на 5 км. и на 40 км., имѣютъ высоты въ 142 м. и 732 м.

381. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $x=2$, $y=3$ и черезъ точку $x=7$, $y=-4$. Сдѣлать чертежъ, принимая за единицу длины сантиметръ.

382. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $x=-2$, $y=-5$ и черезъ точку $x=4$, $y=1$. Принять ту же единицу длины, что и въ предшествующей задачѣ.

383. Показать, что уголъ φ двухъ прямыхъ, имѣющихъ угловые коэффиціенты m и m', опредѣляется слѣдующимъ равенствомъ:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{m'-m}{1+mm'}.$$

Примѣнить эту формулу къ слѣдующимъ примѣрамъ:

1)	$m=2$	$m'=1$
2)	$m=-3$	$m'=-2$
3)	$m=4$	$m'=-1$
4)	$m=-1$	$m'=4$
5)	$m=2$	$m'=-3$.

384. Углы треугольника ABC имѣютъ слѣдующія координаты:

A:	$x=2$	$y=3$
B:	$x=5$	$y=2$
C:	$x=4$	$y=6$.

Составить уравненія сторонъ, опредѣлить ихъ угловые коэффиціенты и вычислить затѣмъ углы треугольника. Сдѣлать чертежъ, принимая за единицу длины сантиметръ.

385. Доказать, что двѣ прямыя только тогда взаимно перпендикулярны, когда величины ихъ угловыхъ коэффиціентовъ m и m' удовлетворяютъ уравненію:

$$mm'=-1.$$

Найти уравненіе прямой, которая проходитъ черезъ начало координатъ и перпендикулярна къ прямой

$$2x-3y=5.$$

Сдѣлать чертежъ, принимая за единицу длины сантиметръ.

386. Найти уравненіе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки $x=y=3$ на прямую

$$2x+5y+1=0$$

и вычислить координаты основанія. Сдѣлать чертежъ, принимая за единицу длины сантиметръ.

387. Составить уравненія высотъ треугольника ABC въ задачѣ 384 и доказать, что всѣ три высоты пересѣкаются въ одной точкѣ. Вычислить координаты точки пересѣченія высотъ.

Глава XVII.

УРАВНЕНІЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

I. РѢШЕНІЕ УРАВНЕНІЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЙ НЕИЗВѢСТНОЙ.

179. Опредѣленія. Подъ уравненіемъ второй степени съ одной неизвѣстной x мы разумѣемъ такое уравненіе, лѣвая часть котораго представляетъ собой многочленъ второй степени относительно неизвѣстной послѣ того, какъ мы перенесемъ въ лѣвую часть всѣ члены уравненія и сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ по отношенію къ x. Сюда относятся уравненія:

$$3 + 5x^2 = x,$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{3}x = x^2 + 7,$$

$$mx^2 - px + 3x^2 - 4 = 9,$$

$$2x^3 + m - nx^2 + 2px - m^2 - p^4 - x^3 = x^3.$$

Обыкновенно лѣвую часть уравненія послѣ упрощенія располагаютъ по убывающимъ степенямъ неизвѣстной x. Поэтому предшествующія уравненія могутъ быть написаны еще слѣдующимъ образомъ:

$$5x^2 - x + 3 = 0,$$

$$-x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{11}{2} = 0,$$

$$(m + 3)x^2 - px - 13 = 0,$$

$$-nx^2 + 2px + (m - m^2 - p^4) = 0.$$

Такимъ образомъ, уравненіе второй степени содержитъ три члена, т. е. лѣвая часть его представляетъ собой трехчленъ второй степени. Первый членъ содержитъ неизвѣстную x въ квадратѣ; второй членъ содержитъ x въ первой степени; послѣдній членъ не зависитъ отъ x; его также называютъ постояннымъ членомъ. Такъ, напримѣръ, въ уравненіи

$$(m + 3)x^2 - (2 - n + p)x + m - n = 0$$

первый членъ есть $(m + 3)x^2$, второй членъ уравненія есть $-(2 - n + p)x$, а послѣдній членъ есть $m - n$.

Въ уравненіи

$$-3x - 1 + x^2 = 0$$

первый членъ есть x^2, второй $-3x$, а послѣдній -1; такъ что уравненіе имѣетъ видъ:

$$x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Въ уравненіи

$$x^2 - 1 = 0$$

первый членъ есть x^2, второй членъ равенъ нулю, а послѣдній членъ равенъ -1.

Мы будемъ писать общее уравненіе второй степени въ нормальномъ видѣ такъ:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

т. е коэффиціентъ перваго члена будемъ обозначать черезъ a, коэффиціентъ второго члена черезъ b и постоянный членъ черезъ c. Чтобы уравненіе дѣйствительно представляло собой уравненіе второй степени, коэффиціентъ a долженъ быть отличенъ отъ нуля. Поэтому мы примемъ, что a не равно нулю. Но, какъ и въ уравненіи первой степени съ буквенными коэффиціентами, здѣсь случается, что коэффиціентъ перваго члена становится равнымъ нулю для частныхъ значеній буквъ; поэтому мы должны будемъ впослѣдствіи изслѣдовать случай, когда въ уравненіи второй степени коэффиціентъ перваго члена становится нулемъ. Вначалѣ, однако, мы будемъ считать, что a отлично отъ нуля. Начнемъ съ изслѣдованія частнаго случая, когда $b = 0$.

180. Случай, когда коэффиціентъ второго члена равенъ нулю. Если дано уравненіе второй степени:

$$2x^2 - 8 = 0,$$

то мы можемъ написать его послѣдовательно въ слѣдующихъ равнозначащихъ формахъ:

$$2x^2 = 8,$$

$$x^2 = \frac{8}{2},$$

$$x^2 = 4.$$

Слѣдовательно, рѣчь идетъ о томъ, чтобы найти число x, квадратъ котораго равенъ 4. Мы знаемъ, что 2 есть единственное положительное число, квадратъ котораго равенъ 4. Я утверждаю, что -2 есть единственное отрицательное число, квадратъ котораго равенъ 4. Въ самомъ дѣлѣ, если a обозначаетъ какое угодно положительное число, то квадратъ числа $-a$ равенъ квадрату числа $+a$. Слѣдовательно, квадратъ числа $-a$ только въ томъ случаѣ будетъ равенъ 4, если $a^2 = 4$, т. е. если $a = 2$.

Поэтому данное уравненіе имѣетъ два рѣшенія или, какъ говорятъ также, два корня: корень 2 и корень -2.

Вмѣсто того, чтобы написать:

$$x = +2,$$
$$x = -2,$$

часто пишутъ одну только формулу:

$$x = \pm 2$$

и говорятъ: x равенъ плюсъ или минусъ двумъ; т. е. заданное уравненіе удовлетворяется какъ при x равномъ $+2$, такъ и при x равномъ -2.

Далѣе, пусть будетъ дано уравненіе:

$$3x^2 - 5 = 0.$$

Отсюда выводимъ:

$$x^2 = \frac{5}{3},$$

и видимъ, что квадратъ x равенъ $\frac{5}{3}$. Существуетъ лишь одно положительное число, квадратъ котораго равенъ $\frac{5}{3}$. Мы обозначаемъ его (ср. п. **68**) черезъ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ и знаемъ изъ ариѳметики, какъ вычислить его съ любою точностью. Отрицательное число $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ есть единственное отрицательное число, квадратъ котораго равенъ $\frac{5}{3}$. Слѣдовательно, данное уравненіе имѣетъ два корня, которые можно изобразить формулой:

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Теперь мы разсмотримъ уравненіе:

$$2x^2 + 5 = 0.$$

Если имѣется нѣкоторое число x, удовлетворяющее этому уравненію, то

$$x^2 = -\frac{5}{2},$$

т. е. квадратъ числа x долженъ быть равенъ отрицательному числу $-\frac{5}{2}$. Мы знаемъ, что квадратъ алгебраическаго числа всегда имѣетъ положительное значеніе независимо отъ того, положительное ли это число или отрицательное. Слѣдовательно, нѣтъ такого числа, квадратъ котораго равенъ $-\frac{5}{2}$, и поэтому заданное уравненіе не имѣетъ корней.

Пусть, наконецъ, будетъ дано уравненіе:

$$3x^2 = 0.$$

Если произведеніе x^2 на 3 равно нулю, то

$$x^2 = 0,$$

и потому $x = 0$, такъ какъ нуль есть единственное число, квадратъ котораго равенъ нулю. Слѣдовательно, заданное уравненіе имѣетъ единственный корень $x = 0$. Принято говорить, что корень 0 въ уравненіи $x^2 = 0$ есть двойной корень. Здѣсь мы еще не можемъ вполнѣ выяснить смыслъ этого выраженія и укажемъ лишь на то, что x^2 есть произведеніе двухъ одинаковыхъ сомножителей x и x, и если x равняется нулю, то эти оба сомножителя тоже равны нулю.

Мы можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ результаты нашего изслѣдованія:

Теорема 72. Пусть

$$a^2x + c = 0$$

будетъ уравненіе второй степени безъ второго члена, въ которомъ коэффиціентъ a отличенъ отъ нуля. Если коэффиціенты a и c имѣютъ противоположные знаки, то уравненіе имѣетъ два корня, выражаемые формулой:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}};$$

здѣсь $\frac{-c}{a}$ есть число положительное, изъ котораго можно извлечь квадратный корень. Если коэффиціенты a и c имѣютъ одинаковые знаки, то уравненіе не имѣетъ корней. Если коэффиціентъ c равенъ нулю, то уравненіе имѣетъ двойной корень $x = 0$.

181. Рѣшеніе общаго уравненія второй степени. Разсмотримъ теперь общее уравненіе второй степени:

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

въ которомъ a должно быть отлично отъ нуля, а относительно значенія коэффиціента b мы не дѣлаемъ никакого предположенія.

Уравненіе (1) эквивалентно слѣдующему уравненію, которое мы получимъ, умноживъ обѣ части даннаго уравненія на $4a$:

$$(2) \qquad 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Но это уравненіе можно написать такъ:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac,$$

или же, прибавивъ къ обѣимъ частямъ по b^2:

$$(3) \qquad 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Теперь становится яснымъ, съ какою цѣлью мы прибѣгли къ такому преобразованію даннаго уравненія (1) въ эквивалентное ему уравненіе (2); а именно, лѣвая сторона уравненія (3) оказывается квадратомъ двучлена $2ax + b$. Поэтому уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ задачѣ, которую мы уже рѣшили въ предыдущемъ пунктѣ. А именно, здѣсь требуется опредѣлить x, если извѣстно, что квадратъ числа $2ax + b$ равенъ $b^2 - 4ac$. Если теперь $b^2 - 4ac$ есть число положительное, то $2ax + b$, по теоремѣ 72, равно $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$; если же $b^2 - 4ac$ есть число отрицательное, то задача невозможна; наконецъ, если $b^2 - 4ac$ равно нулю, то $2ax + b$ тоже должно быть равно нулю.

Слѣдовательно, при $b^2 - 4ac > 0$ получимъ:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Эта формула даетъ два корня уравненія второй степени.

Но если $b^2 - 4ac$ равно нулю, то существуетъ лишь одинъ корень, который мы опять-таки называемъ двойнымъ корнемъ; если же, наконецъ, $b^2 - 4ac$ есть число отрицательное, то корней нѣтъ вовсе. Величину $b^2 - 4ac$, знакъ которой имѣетъ рѣшающее значеніе при различеніи названныхъ трехъ случаевъ, называютъ дискриминантомъ уравненія $ax^2 + bx + c = 0$.[1])

182. Примѣненія. I. Требуется рѣшить уравненіе

$$2x^2 - 5x + 3 = 0.$$

Мы можемъ примѣнить найденную выше формулу, подставляя въ нее вмѣсто a число 2, вмѣсто b число -5 и вмѣсто c число 3; тогда получимъ:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 2\cdot 3}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}.$$

Отсюда корни:

$$\frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

и

$$\frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Въ видѣ упражненія мы примѣнимъ къ данному здѣсь частному уравненію общій способъ, который намъ послужилъ для вывода формулы. Именно, мы умножимъ уравненіе на $4a$, т. е. на 8, и найдемъ:

$$16x^2 - 40x = -24.$$

1) Иногда подъ словомъ дискриминантъ разумѣютъ также четверть этой величины; въ изслѣдованіяхъ, въ которыхъ имѣетъ значеніе лишь знакъ дискриминанта, нѣтъ надобности указывать, беремъ ли мы $b^2 - 4ac$ или четверть этой величины.

Прибавивъ b^2, т. е. 25, получимъ:

$$16x^2 - 40x + 25 = 25 - 24,$$

или

$$(4x - 5)^2 = 1.$$

Но отсюда слѣдуетъ:

$$4x - 5 = \pm 1,$$

и, наконецъ:

$$x = \frac{5 \pm 1}{4};$$

а это тѣ же значенія, которыя мы получили изъ формулы.

II. Требуется рѣшить уравненіе:

$$3x^2 - 8x + \frac{16}{3} = 0.$$

Здѣсь у насъ:

$$b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{16}{3} = 0;$$

слѣдовательно, уравненіе имѣетъ двойной корень:

$$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

III. Требуется рѣшить уравненіе:

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Здѣсь:

$$b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16;$$

итакъ, данное уравненіе не имѣетъ корней.

IV. Требуется рѣшить уравненіе:

$$a^2x^2 - (a^2 + b^2)x + b^2 = 0.$$

Дискриминантъ здѣсь имѣетъ значеніе:

$$(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2;$$

поэтому:

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2a^2},$$

такъ что мы получимъ корни:

$$x' = \frac{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)}{2a^2} = 1,$$

$$x'' = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)}{2a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

183. Случай, когда формула упрощается. Если коэффиціентъ b есть число четное, то мы полагаемъ $b = 2b'$, такъ что b' обозначаетъ половину b. Такъ какъ квадратъ удвоеннаго числа равенъ учетверенному квадрату этого числа, то получимъ формулу:

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a},$$

т. е.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Мы приведемъ еще слѣдующую формулу, которая часто бываетъ полезна. Пусть уравненіе второй степени будетъ дано въ формѣ:

$$x^2 + px + q = 0,$$

гдѣ, слѣдовательно, $a = 1$. Уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$ мы можемъ всегда свести къ этой болѣе простой формѣ, раздѣливъ его на a, которое должно быть отлично отъ нуля.

Теперь получимъ:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0,$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Отсюда слѣдуетъ, если $\frac{p^2}{4} - q > 0$:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

т. е.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

II. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ КОЭФФИЦІЕНТАМИ И КОРНЯМИ.

184. Составленіе уравненія по даннымъ корнямъ. Обозначимъ черезъ x' и x'' два данныхъ числа и зададимся вопросомъ, можно ли составить такое уравненіе второй степени, корнями котораго служили бы эти числа x' и x''. Мы увидимъ, что на этотъ вопросъ слѣдуетъ отвѣтить утвердительно.

Пусть a будетъ произвольное число, отличное отъ нуля. Разсмотримъ тогда уравненіе:

$$a(x - x')(x - x'') = 0.$$

Это уравненіе второй степени. Для того, чтобы произведеніе трехъ сомножителей a, $x - x'$, $x - x''$ обращалось въ нуль, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ этихъ сомножителей былъ равенъ нулю. Но такъ какъ a отлично отъ нуля, то должно быть равно нулю либо $x - x'$, и тогда $x = x'$, либо же $x - x''$, и тогда $x = x''$. Уравненіе, составленное нами, имѣетъ, слѣдовательно, корни x' и x'' и никакихъ другихъ корней не имѣетъ; это можно было предвидѣть, такъ какъ уравненіе второй степени не можетъ имѣть больше двухъ корней.

Пусть будетъ, напримѣръ, $x' = \frac{1}{2}$, $x'' = \frac{1}{3}$. Чтобы освободиться отъ знаменателей, возьмемъ $a = 6$ и составимъ уравненіе:

$$6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0,$$

или, если раскроемъ скобки:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Пусть будетъ, далѣе, $x' = \frac{1}{2}$, $x'' = -3$. Возьмемъ $a = 2$ и получимъ уравненіе:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0,$$

т. е.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0.$$

Если мы въ общемъ уравненіи

$$a(x - x')(x - x'') = 0$$

выполнимъ умноженіе, то получимъ:

$$ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'' = 0.$$

Слѣдовательно, коэффиціентами будутъ: a, $a(x' + x'')$, $ax'x''$; отсюда вытекаетъ правило:

Правило 31-ое. Чтобы составить уравненіе второй степени, имѣющее корнями числа x' и x'', выбираемъ произвольно первый коэффиціентъ a, отличный отъ нуля; тогда второй коэффиціентъ равенъ произведенію изъ $-a$ на сумму корней $x'+x''$, а третій равенъ произведенію изъ $+a$ на произведеніе корней $x'x''$.

Въ частности, если $x'=x''$, то получимъ уравненіе:

$$a(x-x')^2=0,$$

или

$$ax^2-2ax'x+ax'^2=0.$$

Корень x' въ этомъ случаѣ называется двойнымъ корнемъ. Онъ называется двойнымъ потому, что обращаетъ выраженіе $a(x-x')^2$ дважды въ нуль, такъ какъ онъ обращаетъ въ нуль каждаго изъ двухъ сомножителей $x-x'$ этого выраженія.

185. Зависимости между коэффиціентами и корнями. Докажемъ обратное; именно: если дано уравненіе второй степени:

$$ax^2+bx+c=0,$$

корни котораго назовемъ чрезъ x' и x'', то коэффиціенты b и c выразятся формулами:

$$b=-a(x'+x''),$$
$$c=ax'x''.$$

Доказательство не представляетъ затрудненій. По формулѣ въ п. **181** имѣемъ:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

отсюда непосредственно вытекаетъ:

$$a(x'+x'')=-b.$$

Далѣе:

$$x'x''=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Этимъ наше утвержденіе доказано; доказательство остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда $x' = x''$, т. е. когда $b^2 - 4ac$ равно нулю.

Отсюда заключаемъ, что два уравненія второй степени, имѣющія тѣ же корни, имѣютъ пропорціональные коэффиціенты; дѣйствительно, если мы обозначимъ черезъ a', b', c' коэффиціенты другого уравненія второй степени, имѣющаго корнями также x' и x'', то:

$$b' = -a'(x' + x''),$$
$$c' = a'x'x'',$$

и отсюда заключаемъ, что

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Очевидно, справедливо и обратное предложеніе: если два уравненія второй степени имѣютъ пропорціональные коэффиціенты, то корни у нихъ одни и тѣ же.

186. Знаки корней. Зависимости между коэффиціентами и корнями можно записать еще такъ:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a},$$

$$x'x'' = \frac{c}{a};$$

и такимъ образомъ мы приходимъ къ теоремѣ:

Теорема 73. Если уравненіе второй степени имѣетъ корни, то сумма этихъ корней равна частному отъ дѣленія второго коэффиціента на первый, взятому съ обратнымъ знакомъ, а произведеніе корней равно частному отъ дѣленія послѣдняго коэффиціента на первый.

Изъ теоремы 73 можно вывести правило, дающее возможность опредѣлить знаки корней, не рѣшая уравненія. А именно, если произведеніе корней есть число отрицательное, то одинъ изъ корней долженъ быть отрицательнымъ, а другой положительнымъ. Если же произведеніе корней есть число положительное, то оба корня имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; поэтому корни будутъ либо оба положительными, либо оба отрицательными, въ зависимости отъ того, будетъ ли ихъ сумма положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.

Прежде чѣмъ опредѣлять знаки корней, нужно убѣдиться, что корни вообще существуютъ, т. е. что $b^2 - 4ac$ есть число положительное или равное нулю. Для этого можетъ быть полезно слѣдующее замѣчаніе. Если $\frac{c}{a}$ имѣетъ отрицательное значеніе, то c и a имѣютъ противоположные знаки; слѣдовательно, $4ac$ есть число отрицательное, а вслѣдствіе этого $b^2 - 4ac$ необходимо есть число положительное, такъ какъ оба слагаемыхъ b^2 и $-4ac$ суть положительныя числа.

187. Случай, когда a равно нулю. До сихъ поръ мы изслѣдовали случай, когда коэффиціентъ a перваго члена отличенъ отъ нуля. Для того, чтобы узнать, что происходитъ, если коэффиціентъ a обращается въ нуль, предположимъ сначала, что онъ очень малъ (ср. п. **136**), и разсмотримъ, напримѣръ, уравненіе:

$$\frac{1}{1000}x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Упрощенная формула (п. **183**) даетъ:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 0{,}003}}{0{,}001}.$$

Но:

$$\sqrt{1{,}003} = 1{,}00149\ldots$$

Поэтому корни уравненія будутъ:

$$x' = \frac{-1 + 1{,}00149}{0{,}001} = 1{,}49\ldots,$$

$$x'' = \frac{-1 - 1{,}00149}{0{,}001} = -2001{,}49\ldots$$

Мы видимъ, что одинъ изъ корней очень близокъ къ $\frac{3}{2}$, т. е. къ рѣшенію уравненія первой степени, которое мы получимъ, если въ данномъ уравненіи отбросимъ членъ, содержащій x^2. Второй же корень по абсолютной величинѣ очень великъ.

Если разсмотримъ теперь уравненіе

$$\frac{1}{1000000}x^2 + 2x - 3 = 0,$$

то найдемъ:

$$x' = 1{,}499\ldots,$$

$$x'' = -2000001{,}49\ldots;$$

если a убываетъ, то корень x' все болѣе и болѣе приближается къ $\frac{3}{2}$, а абсолютное значеніе корня x'' становится все больше и больше.

Поэтому мы можемъ ожидать, что при $a=0$ и $b \neq 0$ одинъ изъ корней становится равнымъ рѣшенію уравненія первой степени:

$$bx + c = 0,$$

а другой корень обращается въ **безконечность**, т. е. по мѣрѣ того какъ a уменьшается, абсолютное значеніе второго корня становится все больше и больше. Можно легко подтвердить это предположеніе, пользуясь равенствомъ:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}.$$

А именно, если a равно нулю*), то при b, отличномъ отъ нуля, абсолютное значеніе суммы $x' + x''$ возрастаетъ безпредѣльно; слѣдовательно, по меньшей мѣрѣ, одинъ корень по своему абсолютному значенію очень великъ.

Изъ уравненія

$$bx + c = 0$$

слѣдуетъ, что другой корень равенъ $-\frac{c}{b}$, ∞ или же будетъ неопредѣленнымъ, въ зависимости отъ того (ср. п. **136**), будетъ ли $b \neq 0$, или $b=0$, а $c \neq 0$, или же, наконецъ, $b=0$ и $c=0$. Третьяго случая, однако, не приходится принимать въ расчетъ; въ самомъ дѣлѣ, если всѣ коэффиціенты исчезаютъ, то мы имѣемъ дѣло съ тождествомъ (п. **77**).

188. Сводка результатовъ изслѣдованія. Результаты двухъ предыдущихъ пунктовъ могутъ быть сведены въ слѣдующую таблицу (стр. 324).

III. ИЗСЛѢДОВАНІЕ ТРЕХЧЛЕНА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

189. Опредѣленія и обозначенія. Подъ **трехчленомъ второй степени** разумѣютъ выраженіе:

$$ax^2 + bx + c.$$

---

*) Слѣдуетъ сказать: если a стремится къ нулю. *Прим. ред.*

Выраженія: первый членъ и т. д. имѣютъ здѣсь тотъ же смыслъ, что и въ уравненіи второй степени.

При изслѣдованіи трехчлена мы предполагаемъ, что коэффиціентъ a въ первомъ членѣ отличенъ отъ нуля.

Изслѣдованіе уравненія:

$$ax^2+bx+c=0$$

$a \neq 0$	$\frac{c}{a}<0$		Два корня — одинъ положительный, другой отрицательный.
	$\frac{c}{a}>0$	$b^2-4ac>0$, $-\frac{b}{a}>0$.	Два положит. корня.
		$b^2-4ac>0$, $-\frac{b}{a}<0$.	Два отрицат. корня.
		$b^2-4ac=0$.	Двойной корень $x=\frac{-b}{2a}$.
		$b^2-4ac<0$.	Нѣтъ корней.
	$c=0$		Одинъ корень нуль, другой равенъ $\frac{-b}{a}$.
$a=0$, $b \neq 0$			Одинъ корень безконечно великъ, другой равенъ $\frac{-b}{a}$.
$a=0$, $b=0$, $c \neq 0$			Два безконечно большихъ корня; невозможное уравненіе.
$a=0$, $b=0$, $c=0$			Неопредѣленное уравненіе; всякое число есть корень.

Мы часто будемъ обозначать трехчленъ черезъ y и, слѣдовательно, будемъ писать:

$$y=ax^2+bx+c.$$

Но иногда мы будемъ обозначать трехчленъ посредствомъ одного изъ символовъ $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, которые читаются такъ: f малое отъ x, F большое отъ x, φ отъ x. Буква f есть первая буква слова functio (функція), и обозначенія $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ употребляются, чтобы обозначить функцію отъ перемѣнной x. Главное преимущество этого обозначенія состоитъ въ слѣдующемъ. Если мы напишемъ:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

и замѣнимъ x въ трехчленѣ буквой или числомъ, то полученный результатъ обозначаютъ такъ, что въ выраженіи функціи $f(x)$ замѣняютъ x этой буквой или этимъ числомъ. Такъ,

$$f(z) = az^2 + bz + c,$$
$$f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$
$$f(10) = 100a + 10b + c,$$
$$f(-1) = a - b + c.$$

При изслѣдованіи трехчлена второй степени удобно ввести корни уравненія:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

т. е. корни уравненія, которое получимъ, если приравняемъ трехчленъ нулю. Для краткости говорятъ, что эти корни суть нулевыя точки трехчлена; мы будемъ вообще обозначать ихъ черезъ x' и x''. Если

$$b^2 - 4ac > 0,$$

то трехчленъ имѣетъ двѣ различныя нулевыя точки. Если

$$b^2 - 4ac = 0,$$

то трехчленъ имѣетъ двойную нулевую точку. Если же

$$b^2 - 4ac < 0,$$

то трехчленъ не имѣетъ нулевыхъ точекъ.

190. Каноническія формы трехчлена. Каноническими формами трехчлена называются особыя формы, къ которымъ можетъ быть приведенъ трехчленъ и въ которыхъ существенныя свойства его ясно обнаруживаются; именно, существуетъ общая каноническая форма, изъ которой получаются три частныя формы въ зависимости отъ того, будетъ ли дискриминантъ отрицательнымъ, положительнымъ или равнымъ нулю. При введеніи этихъ каноническихъ формъ мы не будемъ ссылаться на результаты, которые мы получили для уравненія второй степени; напротивъ мы здѣсь придемъ къ этимъ результатамъ другимъ путемъ.

1. **Общая каноническая форма**. Такъ какъ мы предположили, что коэффиціентъ a не равенъ нулю, то:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right];$$

поэтому:

$$(1)\qquad ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Эту каноническую форму мы всегда можемъ придать трехчлену. Слѣдовательно, трехчленъ второй степени равенъ произведенію коэффиціента a перваго члена на сумму нѣкоторой постоянной и квадрата линейной функціи отъ x, въ которой коэффиціентъ при x равенъ 1. Какъ скоро увидимъ, этотъ результатъ играетъ очень существенную роль при изслѣдованіи графическаго изображенія трехчлена.

2. **Случай, когда дискриминантъ имѣетъ отрицательное значеніе.** Примемъ теперь, что

$$b^2-4ac<0,$$

или

$$4ac-b^2>0.$$

Въ этомъ случаѣ существуетъ положительное число m, для котораго

$$m^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2},$$

и поэтому равенство (1) можно написать такъ:

$$(2)\qquad ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+m^2\right].$$

Слѣдовательно, трехчленъ равенъ произведенію коэффиціента a перваго члена на сумму двухъ квадратовъ. Въ этомъ случаѣ трехчленъ, очевидно, не можетъ равняться нулю; въ самомъ дѣлѣ, квадратъ всякаго числа имѣетъ положительное значеніе, а сумма двухъ положительныхъ чиселъ можетъ лишь въ томъ случаѣ быть равной нулю, если оба числа равны нулю; между тѣмъ здѣсь m^2 не можетъ быть равнымъ нулю.

3. **Случай, когда дискриминантъ равенъ нулю**. Если

$$b^2-4ac=0,$$

то равенство (1) принимаетъ видъ:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2; \tag{3}$$

полагая здѣсь

$$-\frac{b}{2a}=x',$$

мы придемъ къ равенству:

$$ax^2+bx+c=a(x-x')^2. \tag{3'}$$

Слѣдовательно, трехчленъ равенъ произведенію квадрата двучлена первой степени относительно x, именно $x-x'$, на a.

4. **Случай, когда дискриминантъ имѣетъ положительное значеніе.** Въ этомъ случаѣ

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right],$$

и въ прямоугольныхъ скобкахъ стоитъ разность двухъ квадратовъ. Но эта разность помощью тождества

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

можетъ быть разложена на два сомножителя; такимъ образомъ получится равенство:

$$\left\{\begin{aligned}&ax^2+bx+c=\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Если же мы положимъ:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

то получимъ:

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x''). \tag{4'}$$

Различныя каноническія формы, полученныя нами, можно соединить въ одну таблицу (стр. 328).

Изъ результатовъ, сведенныхъ въ этой таблицѣ, можно получить непосредственно рѣшеніе и изслѣдованіе уравненія второй степени.

Таблица каноническихъ формъ трехчлена: $ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$	
1. Общая форма	(1) $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
2. $b^2-4ac<0$	(2) $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+m^2\right]$, гдѣ $m^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$.
3. $b^2-4ac=0$	(3) $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, (3′) $a(x-x')^2$, гдѣ $x'=-\frac{b}{2a}$.
4. $b^2-4ac>0$	(4) $a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$. (4′) $a(x-x')(x-x'')$, гдѣ $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

191. Знакъ трехчлена. Часто бываетъ полезно опредѣлить знакъ трехчлена второй степени при нѣкоторомъ значеніи x, безъ предварительнаго вычисленія. Мы достигаемъ этого легко съ помощью каноническихъ формъ. Если трехчленъ не имѣетъ нулевыхъ точекъ, то онъ имѣетъ форму (2). Но величина, содержащаяся въ скобкахъ, имѣетъ для любого значенія x положительное значеніе; слѣдовательно, трехчленъ имѣетъ знакъ числа a, т. е. знакъ перваго своего члена. Въ случаѣ двойного корня, изъ формы (3′) непосредственно видно, что трехчленъ имѣетъ знакъ коэффиціента a, если только онъ не равенъ нулю, что имѣетъ мѣсто при $x=x'$.

Если же трехчленъ имѣетъ двѣ различныя нулевыя точки x' и x'', то имѣетъ мѣсто каноническая форма:

(4′) $$a(x-x')(x-x'').$$

Обозначимъ меньшій корень черезъ x'. Пусть, слѣдовательно, будетъ:

$$x' < x''.$$

Тогда для перемѣнной x нужно различать три случая: x меньше чѣмъ x', x лежитъ между x' и x'', или же x больше, чѣмъ x''.

1. Если

$$x < x',$$

то, конечно,

$$x < x'';$$

слѣдовательно, оба сомножителя $x - x'$, $x - x''$ представляютъ собою отрицательныя числа; поэтому произведеніе ихъ есть положительное число, произведеніе же (4') имѣетъ знакъ коэффиціента a.

2. Если имѣютъ мѣсто неравенства:

$$x' < x < x'',$$

то сомножитель $x - x'$ имѣетъ положительное значеніе, сомножитель же $x - x''$ — отрицательное; поэтому произведеніе (4') имѣетъ знакъ, противоположный знаку коэффиціента a.

3. Наконецъ, если $x > x''$, то сомножители $x - x'$ и $x - x''$ имѣютъ оба положительныя значенія, и произведеніе (4') имѣетъ, какъ и въ первомъ случаѣ, знакъ числа a.

Изъ этого изслѣдованія, исчерпывающаго всевозможные случаи, вытекаетъ теорема:

Теорема 74. Трехчленъ второй степени имѣетъ тотъ же знакъ, что и первый его членъ, за исключеніемъ того лишь случая, когда онъ имѣетъ двѣ различныя нулевыя точки x' и x'' и разсматриваемое значеніе x лежитъ между x' и x''.

192. Неравенства второй степени. Предшествующая теорема ведетъ къ рѣшенію неравенствъ второй степени, т. е. неравенствъ вида

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Разсмотримъ сначала первое неравенство. Ему отвѣчаетъ уравненіе

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

которое получимъ, замѣнивъ знакъ $>$ знакомъ $=$.

Мы различаемъ здѣсь три случая, въ зависимости отъ того, имѣетъ ли соотвѣтствующее уравненіе два корня, или одинъ двойной корень, или же не имѣетъ вовсе корней.

1. Соотвѣтствующее уравненіе не имѣетъ корней. Тогда предложенное неравенство всегда удовлетворяется, если a есть число положительное; напротивъ, оно не удовлетворяется ни при какомъ значеніи x, если a есть число отрицательное.

2. Соотвѣтствующее уравненіе имѣетъ двойной корень. Разсуждаемъ такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, съ тою только разницей, что здѣсь при значеніи x, равномъ двойному корню, неравенство превращается въ равенство.

3. Соотвѣтствующее уравненіе имѣетъ два различныхъ корня. Обозначимъ ихъ черезъ x' и x'' и примемъ опять, что $x' < x''$. Если a есть число положительное, то x должно быть либо меньше, чѣмъ x', либо больше, чѣмъ x'', т. е.:

$$\text{либо } x < x', \text{ либо } x > x''.$$

Если a есть число отрицательное, то x должно лежать между x' и x'', т. е.

$$x' < x < x''.$$

Подобнымъ образомъ изслѣдуется неравенство:

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Мы можемъ, впрочемъ, свести его также къ только-что разсмотрѣнному случаю, такъ какъ это неравенство можетъ быть написано еще такъ:

$$-ax^2 - bx - c > 0.$$

Примѣчаніе I. Чтобы узнать, который изъ двухъ корней въ формулѣ п. **181** имѣетъ бо́льшую величину, обратимъ вниманіе на знакъ числа a. Такъ какъ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ обозначаетъ положительное число, квадратъ котораго равенъ $b^2 - 4ac$, то при положительномъ a получимъ:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

напротивъ, при отрицательномъ a:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Примѣчаніе II. Въ третьемъ случаѣ неравенство второй степени разъ замѣняется однимъ изъ двухъ неравенствъ

$$x < x',\ x > x'',$$

а другой разъ—двумя совмѣстными неравенствами

$$x' < x < x''.$$

Слѣдуетъ остерегаться смѣшивать эти два случая. Если, напримѣръ, $x' = 1$ и $x'' = 2$, то въ первомъ случаѣ x должно быть либо меньше 1, либо больше 2, между тѣмъ какъ во второмъ случаѣ x должно лежать между 1 и 2, т. е. одновременно должно быть больше 1 и меньше 2.

Изслѣдованіе многихъ неравенствъ можетъ быть сведено къ изслѣдованію неравенства второй степени; см. задачи 422 до 426.

Рѣшеніе неравенства второй степени можно свести въ слѣдующую таблицу:

Рѣшеніе неравенства: $ax^2+bx+c>0$ $(a \neq 0)$.		
	$a>0$	$a<0$
$b^2-4ac<0$	Неравенство всегда удовлетворяется.	Неравенство никогда не удовлетворяется.
$b^2-4ac=0$	Тоже; сверхъ того, оно превращается въ равенство при $x=\frac{-b}{2a}$.	Тоже; сверхъ того, оно превращается въ равенство при $x=\frac{-b}{2a}$.
$b^2-4ac>0$	Неравенство удовлетворяется, если либо $x<x'$, либо $x>x''$. Здѣсь: $x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и, значитъ, $x'<x''$.	Неравенство удовлетворяется, если одновременно $x'<x<x'$. Здѣсь: $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и, значитъ, $x'<x''$.

193. Сравненіе даннаго числа съ корнями уравненія второй степени. При рѣшеніи задачъ второй степени, которыя мы будемъ разсматривать въ слѣдующей главѣ, нерѣдко приходится рѣшать задачу, которую можно считать обратной только-что разсмотрѣнной задачѣ:

Задача. Пусть дано уравненіе второй степени:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0.$$

Извѣстенъ знакъ числа $f(m)$, гдѣ m есть данное число. Можно ли отсюда заключить, что уравненіе имѣетъ корни, и, если оно ихъ имѣетъ, то будутъ ли эти корни больше или меньше числа m?

Число $f(m)$, опредѣляемое равенствомъ

$$f(m) = am^2 + bm + c,$$

называется результатомъ подстановки числа m въ лѣвую часть даннаго уравненія. Принимая, что числа a и $f(m)$ оба отличны отъ нуля, различаемъ два случая, въ зависимости отъ того, имѣетъ ли $f(m)$ тотъ же знакъ, что и коэффиціентъ a въ первомъ членѣ, или противоположный.

1. Сначала примемъ, что числа a и $f(m)$ имѣютъ противоположные знаки. Тогда произведеніе ихъ имѣетъ отрицательное значеніе, и изслѣдуемый случай характеризуется неравенствомъ

$$af(m) < 0.$$

Достаточно внимательно посмотрѣть на таблицу предыдущей страницы, чтобы увидѣть, что этотъ случай можетъ имѣть мѣсто лишь тогда, когда данное уравненіе имѣетъ корни и m лежитъ между этими корнями; въ самомъ дѣлѣ, во всѣхъ остальныхъ случаяхъ трехчленъ лѣвой части имѣетъ знакъ своего перваго члена. Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема 75-ая. Если результатъ подстановки числа m въ лѣвую часть уравненія второй степени имѣетъ знакъ, противоположный знаку коэффиціента перваго члена, то уравненіе имѣетъ два различныхъ корня, и число m лежитъ между ними.

2. Пусть будетъ теперь

$$af(m) > 0.$$

Тогда необходимо различать нѣсколько случаевъ:

a) предложенное уравненіе не имѣетъ корней; въ такомъ случаѣ $b^2 - 4ac$ есть число отрицательное.

b) уравненіе имѣетъ двойной корень, отличный отъ m; тогда $b^2 - 4ac = 0$;

c) уравненіе имѣетъ два корня x' и x''; тогда $b^2 - 4ac$ есть число положительное; при этомъ m можетъ быть либо меньше, чѣмъ меньшій корень x', либо больше, чѣмъ большій корень x''.

Въ случаѣ c) мы можемъ слѣдующимъ образомъ узнать, что изъ двухъ дѣйствительно имѣетъ мѣсто. По п. **186**:

$$\frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Такъ какъ x' меньше, чѣмъ x'', то каждое число, меньшее, чѣмъ x', будетъ также меньше, чѣмъ $\frac{x'+x''}{2}$, т. е. чѣмъ $-\frac{b}{2a}$; каждое же число, бóльшее, чѣмъ x'', будетъ также больше, чѣмъ $-\frac{b}{2a}$. Чтобы сравнить m съ корнями x' и x'', достаточно сравнить число m съ полусуммой этихъ корней, т. е. съ числомъ $-\frac{b}{2a}$. Если число m будетъ меньше полусуммы, то оно будетъ навѣрное меньше, чѣмъ меньшій корень; если же число m будетъ больше полусуммы, то оно навѣрное будетъ больше, чѣмъ бóльшій корень.

Это изслѣдованіе мы можемъ представить въ таблицѣ, которая помѣщена на стр. 334.

194. Примѣненіе къ изслѣдованію уравненій второй степени. Предшествующіе результаты въ очень многихъ случаяхъ даютъ возможность провести изслѣдованіе уравненій второй степени. Покажемъ на примѣрахъ, какъ нужно вести подобнаго рода изслѣдованіе. Изученіе этихъ примѣровъ и рѣшеніе задачъ, помѣщенныхъ въ концѣ главы, научитъ читателя самостоятельно производить подобное изслѣдованіе, и такимъ путемъ онъ научится этому лучше, чѣмъ заучивая наизусть множество правилъ. Мы свели результаты, которые слѣдуетъ запомнить, къ возможно меньшему числу; замѣтимъ при этомъ, что нѣтъ надобности заучивать эти таблицы наизусть; ихъ нужно только уяснить себѣ и часто примѣнять.

Прибавимъ еще нѣсколько указаній для читателя. Слѣдующая таблица содержитъ, въ качествѣ частнаго случая, изслѣдованіе знака корней въ уравненіи второй степени, которое мы привели на стр. 321. Достаточно здѣсь положить $m = 0$, чтобы

<table>
<tr><th colspan="4">Сравненіе числа m съ корнями уравненія:
$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.</th></tr>
<tr><th colspan="3">Условія.</th><th>Слѣдствія.</th></tr>
<tr><td colspan="3">$a f(m) < 0$</td><td>Уравненіе имѣетъ два корня x' и x''; m лежитъ между этими корнями:
$x' < m < x''$.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$af(m) > 0$</td><td colspan="2">$b^2 - 4ac < 0$</td><td>Уравненіе не имѣетъ корней.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b^2 - 4ac = 0$</td><td>Уравненіе имѣетъ двойной корень x';
$m \neq x'$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$b^2 - 4ac > 0$</td><td>$m < -\frac{b}{2a}$</td><td>Уравненіе имѣетъ два корня x' и x'';
$m < x' < x''$.</td></tr>
<tr><td>$m > -\frac{b}{2a}$</td><td>Уравненіе имѣетъ два корня x' и x'';
$x' < x'' < m$.</td></tr>
</table>

получить указанные уже выше результаты относительно знака корней; именно, при $m = 0$ будетъ $f(m) = c$; слѣдовательно, произведеніе $af(m)$ имѣетъ знакъ произведенія ac, а этотъ знакъ совпадаетъ со знакомъ числа $\frac{c}{a}$.

Приведенная таблица совершенно достаточна для изслѣдованія уравненія второй степени, если только коэффиціентъ a не равенъ нулю. Полезно замѣтить хорошо эту таблицу. Если a равно нулю, то мы пользуемся таблицей на стр. 324. Часто пользуются также таблицей, помѣщенной на стр. 331; но она не заключаетъ въ себѣ ничего такого, чего бы не было въ таблицѣ на стр. 334.

Примѣръ I. Дано уравненіе

$$(\lambda+3)x^2+2(2\lambda+1)x+(\lambda+5)=0.$$

Изслѣдовать, существуютъ ли корни и, какіе они имѣютъ знаки.

Дискриминантъ уравненія, если возьмемъ его въ упрощенной формѣ (п. **183**), будетъ:

$$\begin{aligned} D &= (2\lambda+1)^2-(\lambda+3)(\lambda+5) \\ &= 4\lambda^2+4\lambda+1-\lambda^2-8\lambda-15 \\ &= 3\lambda^2-4\lambda-14. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, онъ обращается въ нуль для значеній λ

$$\lambda'=\frac{2-\sqrt{46}}{3}, \qquad \lambda''=\frac{2+\sqrt{46}}{3}.$$

Произведеніе корней x' и x'' равно

$$P=\frac{\lambda+5}{\lambda+3};$$

слѣдовательно, знакъ его совпадаетъ со знакомъ трехчлена:

$$(\lambda+3)(\lambda+5),$$

нулевыя точки котораго суть -3 и -5.

Сумма корней x' и x'' выразится такъ:

$$S=-\frac{2(2\lambda+1)}{\lambda+3}.$$

Знакъ ея тотъ же, что у трехчлена

$$-(2\lambda+1)(\lambda+3),$$

нулевые точки котораго суть $-\frac{1}{2}$ и -3.

Поэтому особенными значеніями λ, т. е. такими значеніями λ, при которыхъ выраженія D, P и S мѣняютъ свои знаки, будутъ: λ', λ'', -3, -5, $-\frac{1}{2}$. Удобно располагать эти особенныя значенія по ихъ величинѣ. Чтобы установить это расположеніе, можно было бы вычислить λ' и λ'' съ точностью до одной десятой; будетъ проще, однако, воспользоваться результатами п. **193**..

Для этой цѣли полагаемъ:

$$D = F(\lambda) = 3\lambda^2 - 4\lambda - 14.$$

Тогда будетъ:

$$F(-5) = 3 \cdot 25 + 4 \cdot 5 - 14 > 0,$$
$$F(-3) = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 - 14 > 0,$$
$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 14 < 0.$$

Впрочемъ, для опредѣленія знака нѣтъ необходимости вычислять на самомъ дѣлѣ значенія $F(-5)$, $F(-3)$, $F(-\frac{1}{2})$; достаточно лишь сообразить, будутъ ли эти значенія положительныя или отрицательныя.

Такъ какъ λ^2 въ выраженіи D имѣетъ положительный коэффиціентъ, то $-\frac{1}{2}$ лежитъ между λ' и λ''. Далѣе, числа -5 и -3 навѣрное меньше λ', такъ какъ они не могутъ быть больше λ'', потому что λ'' больше, чѣмъ $-\frac{1}{2}$. Расположивъ такимъ образомъ особенныя значенія λ по величинѣ, мы можемъ составить слѣдующую таблицу (стр. 337).

Мы могли бы въ этой таблицѣ не указывать знаковъ P и S въ тѣхъ областяхъ, гдѣ D имѣетъ отрицательное значеніе. Но удобнѣе заполнить всѣ столбцы безъ исключенія; такимъ образомъ можно скорѣе придти къ цѣли и легче избѣжать ошибокъ.

Въ первомъ столбцѣ расположены по величинѣ особенныя значенія λ, а въ трехъ слѣдующихъ столбцахъ приведены знаки или же частныя значенія 0 и ∞ выраженій D, P, S для особенныхъ значеній и для промежутковъ, раздѣляющихъ эти значенія одно отъ другого. Наконецъ, въ послѣднемъ столбцѣ указаны слѣдствія, къ которымъ приводятъ результаты трехъ столбцовъ D, P и S.

Примѣръ II. Сколько возможныхъ значеній даетъ уравненіе

$$5 \cos^2 x - 19 \cos x + 13 = 0$$

для $\cos x$?

Чтобы нѣкоторое значеніе для $\cos x$ было возможнымъ, оно должно лежать въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$. Если мы положимъ

$$\cos x = y$$

и

$$f(y) = 5y^2 - 19y + 13 = 0$$

то нужно будетъ опредѣлить, сколько нулевыхъ точекъ имѣетъ трехчленъ $f(y)$ въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$. Имѣемъ:

$$f(-1) = 5 + 19 + 13 > 0,$$
$$f(1) = 5 - 19 + 13 < 0.$$

λ	D	P	S	Слѣдствія:
$-\infty$	$+$	$+$	$-$	$x' < 0, \quad x'' < 0$
-5	$+$	0	$-$	$x' < 0, \quad x'' = 0$
	$+$	$-$	$-$	$x' < 0, \quad 0 < x''$
-3	$+$	∞	∞	$x' = \infty, \quad x'' = \frac{1}{5}$
	$+$	$+$	$+$	$x' > 0, \quad x'' > 0$
λ'	0	$+$	$+$	$x' = x'' = -\frac{(2\lambda' + 1)}{\lambda' + 3} > 0$
	$-$	$+$	$+$	Нѣтъ корней.
$-\frac{1}{2}$	$-$	$+$	0	Нѣтъ корней.
	$-$	$+$	$-$	Нѣтъ корней.
λ''	0	$+$	$-$	$x' = x'' = -\frac{(2\lambda'' + 1)}{\lambda'' + 3} < 0$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$x' < 0, \quad x'' < 0$

Такъ какъ $f(1)$ имѣетъ отрицательное значеніе, а коэффиціентъ при y^2 въ выраженіи $f(y)$—положительное, то $f(y)$ имѣетъ двѣ различныхъ нулевыхъ точки y' и y'' (п. **193**), и

$$y' < 1 < y''.$$

Такъ какъ, съ другой стороны, $f(-1)$ есть число положительное, то число -1 должно быть меньше, чѣмъ y'; дѣйствительно, такъ какъ y'' больше, чѣмъ 1, то -1 не можетъ быть больше, чѣмъ y''. Слѣдовательно:

$$-1 < y' < 1 < y'',$$

и корень y', лежащій между -1 и $+1$, даетъ единственное возможное рѣшеніе для $\cos x$. Это рѣшеніе:

$$\cos x = \frac{19 - \sqrt{361 - 260}}{10} = \frac{19 - \sqrt{101}}{10} = 0{,}895 \ldots$$

Другой корень

$$y'' = 2{,}905$$

не даетъ никакого рѣшенія.

Примѣръ III. Изслѣдовать уравненіе

$$(\lambda + 4) \sin^2 x - 2(\lambda + 3) \sin x + \lambda + 1 = 0.$$

Для того, чтобы значеніе для $\sin x$ было возможнымъ, оно должно лежать въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$. Полагаемъ опять $\sin x = y$ и

$$f(y) = (\lambda + 4)y^2 - 2(\lambda + 3)y + \lambda + 1.$$

Тогда:

$$D = (\lambda + 3)^2 - (\lambda + 4)(\lambda + 1) = \lambda + 5,$$
$$(\lambda + 4) f(-1) = (\lambda + 4)(4\lambda + 11),$$
$$(\lambda + 4) f(1) = -(\lambda + 4).$$

Слѣдовательно, особенныя значенія для λ, расположенныя по величинѣ, будутъ:

$$-5, \qquad -4, \qquad -\frac{11}{4}.$$

Прибѣгая опять къ разсужденіямъ п. **193**-го, мы можемъ составить слѣдующую таблицу (стр. 339).

Относительно области $(-5, -4)$, которой по таблицѣ соотвѣтствуютъ корни y' и y'', бóльшія 1, могъ возникнуть вопросъ, не лежатъ ли эти корни между -1 и $+1$ и не меньше ли они оба, чѣмъ -1. Чтобы разрѣшить это сомнѣніе, нужно сравнить -1 и $+1$ съ полусуммой корней $\frac{\lambda + 3}{\lambda + 4}$.

Имѣемъ:

$$\frac{\lambda + 3}{\lambda + 4} > 1,$$

такъ какъ $\lambda+4$ имѣетъ здѣсь отрицательное значеніе, и, очевидно,

$$\lambda+3<\lambda+4.$$

Такъ какъ синусъ долженъ лежать между -1 и $+1$, то мы видимъ, что предложенное уравненіе не даетъ ни одного возможнаго значенія для $\sin x$, если $\lambda<-\frac{11}{4}$, и даетъ только одно значеніе, если $\lambda \gtreqless -\frac{11}{4}$.

λ	D	$af(-1)$	$af(1)$	Слѣдствія
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	Нѣтъ корней
-5	0	$+$	$+$	Корни равны $y'=y''=2$
	$+$	$+$	$+$	$1<y'<y''$
-4	$+$	0	0	$y'=\infty, \quad y''=\frac{3}{2}$
	$+$	$-$	$-$	$y'<-1<1<y''$
$-\frac{11}{4}$	$+$	0	$-$	$y'=-1, \quad y''>1$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-1<y'<1<y''$

IV. ИЗСЛѢДОВАНІЕ ТРЕХЧЛЕНА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ; ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНІЕ.

195. Точно такъ же, какъ вслѣдъ за изслѣдованіемъ уравненія первой степени съ одной неизвѣстной мы занялись изслѣдованіемъ линейной функціи $ax+b$, обратимся теперь къ изслѣдованію трехчлена ax^2+bx+c. Начнемъ съ частнаго случая, въ которомъ коэффиціенты b и c равны нулю, и разсмотримъ, слѣдовательно, функцію ax^2; при этомъ сначала положимъ, для простоты, коэффиціентъ a равнымъ 1.

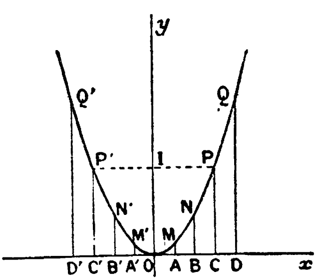
196. Изслѣдованіе функціи $y=x^2$; графическое изображеніе. Мы изслѣдуемъ функцію y, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = x^2$$

Пусть сначала x имѣетъ отрицательное значенiе, очень большое по абсолютной величинѣ. Тогда y будетъ имѣть очень большое положительное значенiе. Если, напримѣръ, $x = -1000$, то $y = +1000000$. Если x возрастаетъ, оставаясь отрицательнымъ, т. е. принимаетъ отрицательныя значенiя, абсолютное значенiе которыхъ все меньше и меньше, то y убываетъ. Напримѣръ, при $x = -10$, $y = +100$; при $x = -2$, $y = +4$; при $x = -1$, $y = +1$; при $= x - \frac{1}{10}$, $y = +\frac{1}{100}$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что y одновременно съ x приближается къ нулю; при $x = 0$ имѣемъ также $y = 0$. Если x продолжаетъ возрастать и принимаетъ все бóльшiя и бóльшiя положительныя значенiя, то y также принимаетъ все бóльшiя и бóльшiя положительныя значенiя. Соединяя эти результаты, мы можемъ составить слѣдующую таблицу:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	положит., убываетъ	0	положит., возраст.	$+\infty$



Фиг. 31.

Слѣдовательно, функцiя y убываетъ въ области $(-\infty, 0)$ и возрастаетъ въ области $(0, +\infty)$.

Чтобы получить графическое изображенiе функцiи $y = x^2$, проведемъ двѣ прямоугольныя оси Ox, Oy (черт. 31) и выберемъ единицу длины $\overline{OB}$. Мы нанесли на чертежѣ точки A, B, C, D, A', B', C', D', абсциссы которыхъ суть:

$$\frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad -\frac{1}{2}, \quad -1, \quad -\frac{3}{2}, \quad -2.$$

Соотвѣтствующiя ординаты должны быть:

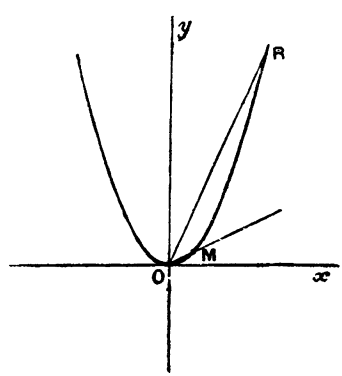
$$\overline{AM} = \frac{1}{4}, \quad \overline{BN} = 1, \quad \overline{CP} = \frac{9}{4}, \quad \overline{DQ} = 4,$$

$$\overline{A'M'} = \frac{1}{4}, \quad \overline{B'N'} = 1, \quad \overline{C'P'} = \frac{9}{4}, \quad \overline{D'Q'} = 4.$$

Если соединимъ точки Q', P', N' M', O, M, N, P, Q сплошной линіей, то получимъ кривую, изображенную на чертежѣ 31. Эта линія должна быть продолжена дальше за точки Q и Q', но размѣры бумаги ограничены, и поэтому можемъ изобразить лишь часть кривой.

Сразу замѣчаемъ, что ординаты $\overline{CP}$, $\overline{C'P'}$, которыя соотвѣтствуютъ абсциссамъ $\overline{OC}$, $\overline{OC'}$, равнымъ по абсолютной величинѣ, но противоположнымъ по знаку, равны между собой. Поэтому прямая PP' параллельна оси Ox и перпендикулярна къ оси Oy. Далѣе, точка I, въ которой эта прямая пересѣкаетъ ось Oy, будетъ серединою отрѣзка PP', такъ какъ O есть середина отрѣзка CC'. Слѣдовательно, по данной точкѣ P мы можемъ получить P', если изъ P опустимъ на Oy перпендикуляръ PI и этотъ перпендикуляръ продолжимъ на разстояніе $IP' = PI$. Поэтому говорятъ, что точка P' расположена симметрично съ точкой P по отношенію къ оси Oy.

Такъ какъ это разсужденіе можетъ быть примѣнено къ каждой точкѣ P части кривой $OMNPQ$, то вѣтви $OM'N'P'Q'$ и $OMNPQ$ называютъ симметричными по отношенію къ оси Oy. Слѣдовательно, кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, которыя симметричны относительно оси Oy; поэтому прямая Oy называется осью симметріи этой кривой.



Фиг. 32.

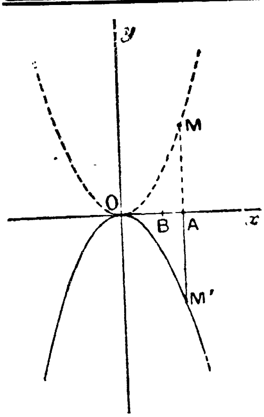
Изслѣдуемъ еще точнѣе форму кривой. Пусть M будетъ нѣкоторая точка кривой (черт. 32). Соединимъ ее съ точкой O. Каковъ наклонъ прямой OM? Если x есть абсцисса точки M, то ордината этой точки равна x^2. Вообще, наклонъ прямой OM равенъ частному отъ дѣленія ординаты M на ея абсциссу; слѣдовательно, здѣсь онъ равенъ x. Если x очень мало, то наклонъ этотъ очень близокъ къ нулю. Если поэтому M приближается къ точкѣ O, то OM стремится совпасть съ Ox. Точно такъ же, если x очень велико, то наклонъ тоже очень великъ, и прямая OR все болѣе и болѣе приближается къ прямой Oy. Эти замѣчанія подтверждаютъ, что кривая имѣетъ приблизительно такой видъ, какой изображенъ на чертежѣ.

197. Изслѣдованіе функцій $y = -x^2$ и $y = ax^2$. Теперь мы разсмотримъ функцію $y = -x^2$. Проведемъ двѣ оси Ox, Oy, выберемъ единицу длины $\overline{OB}$ и начертимъ кривую $y = +x^2$, которую изобразимъ пунктиромъ (черт. 33).

Пусть A будетъ произвольная точка оси Ox, абсцисса которой есть x; этой точкѣ A отвѣчаетъ точка M, ордината которой $\overline{AM} = x^2$. Какая точка кривой $y = -x^2$ соотвѣтствуетъ той же абсциссѣ? Очевидно, точка M', ордината которой $\overline{AM'}$ имѣетъ отрицательное значеніе, но по абсолютной величинѣ равна x^2. Слѣдовательно, точка M' расположена симметрично съ M относительно оси Ox. Итакъ, каждому значенію x отвѣчаютъ въ случаѣ кривыхъ $y = x^2$ и $y = -x^2$ противоположныя ординаты, и мы получимъ вторую кривую, начертивъ кривую, симметричную первой по отношенію къ оси Ox.

Составимъ слѣдующую таблицу, изображающую ходъ измѣненій функціи $y = -x^2$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	отрицат., возраст.	0	отрицат., убываетъ	$-\infty$



Фиг. 33.

Наконецъ, разсмотримъ функцію, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = ax^2,$$

въ которомъ a обозначаетъ отличную отъ 1 положительную постоянную.

Кривая, изображающая функцію $y = ax^2$, имѣетъ видъ, совершенно сходный съ только-что изслѣдованной нами кривой, изображающей функцію $y = x^2$. Можемъ идти дальше и показать, что оба эти уравненія изображаются одной и той же кривой, если мы выберемъ подходящія единицы длины. Начертимъ, напримѣръ, кривую, выражаемую уравненіемъ

$$y = 10x^2.$$

За единицу длины возьмемъ сантиметръ. Это уравненіе можно написать еще такъ:

$$10y = (10x)^2.$$

Если, слѣдовательно, мы возьмемъ $x = \frac{2}{10}$, то получимъ $10x = 2$, и отсюда находимъ:

$$10y = 2^2 = 4; \quad y = \frac{4}{10}.$$

Итакъ, для точки, имѣющей абсциссу $\frac{2}{10}$, ордината будетъ $\frac{4}{10}$. Точно такъ же мы можемъ убѣдиться, что абсциссамъ $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ соотвѣтствуютъ ординаты $\frac{9}{10}$, $\frac{16}{10}$, $\frac{25}{10}$. Если мы, слѣдовательно, начертимъ кривую, уравненіе которой

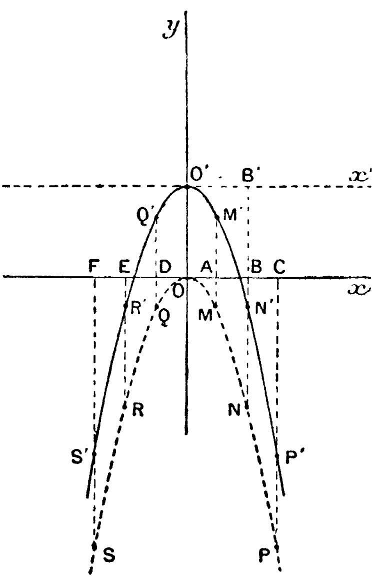
$$y = x^2,$$

принимая за единицу длины миллиметръ, то мы получимъ ту же кривую, какъ если бы мы исходили изъ уравненія

$$y = 10x^2$$

и принимали сантиметръ за единицу длины.

Кривыя, полученныя нами, отличаются одна отъ другой лишь масштабомъ, въ которомъ онѣ начерчены, и, слѣдовательно, подобны. Онѣ называются параболами.



Фиг. 34.

198. Излѣдованіе трехчленовъ съ численными коэффиціентами.

I. Пусть будетъ данъ трехчленъ

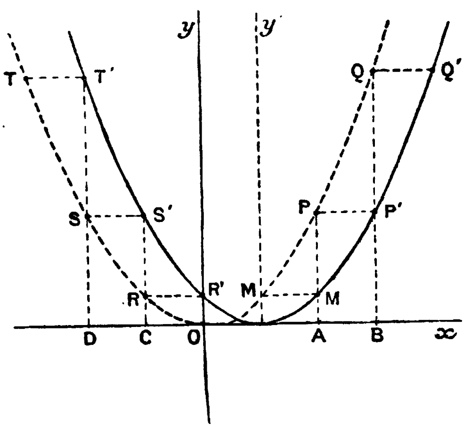
(1) $$y = -2x^2 + 3.$$

Если мы начертимъ параболу, опредѣляемую уравненіемъ

(2) $$y = -2x^2,$$

то увидимъ, что кривая (1) отличается отъ кривой (2) тѣмъ, что для каждой абсциссы ордината увеличена на 3. На чертежѣ 34, гдѣ $\overline{OA}$ представляетъ единицу длины, мы изобразили кривую (2) пунктиромъ; это — кривая $SRQOMNP$. Кривая (1) получится изъ нея, если мы увеличимъ ординаты всѣхъ ея точекъ на одно и то же число 3. Такимъ образомъ мы получимъ кривую $S'R'Q'O'M'N'P'$, при чемъ всѣ отрѣзки $\overline{SS'}$, $\overline{RR'}$, $\overline{QQ'}$ $\overline{OO'}$, $\overline{MM'}$, $\overline{NN'}$, $\overline{PP'}$ имѣютъ алгебраическое значенiе 3. Искомая кривая, которую мы такимъ образомъ нашли, получается, слѣдовательно, изъ вспомогательной кривой, обозначенной пунктиромъ, путемъ **передвиженiя** параллельно оси y-овъ.

Можно поступить еще слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ $\overline{OO'}$ равнымъ 3 и проведемъ $O'x'$ параллельно Ox. Если мы теперь возьмемъ оси $x'O'y$ вмѣсто осей xOy, то абсциссы различныхъ точекъ останутся безъ перемѣны, въ то время какъ ординаты уменьшатся на 3. При этомъ мы должны обратить вниманiе на то, что мы перенесли **ось абсциссъ**. Отсюда получаемъ измѣненiе начала **ординатъ**, такъ какъ начало ординатъ есть точка пересѣченiя оси абсциссъ съ осью ординатъ. Чтобы получить искомую кривую, достаточно, слѣдовательно, начертить кривую



Фиг. 35.

$$y' = -2x^2$$

по отношенiю къ осямъ $x'O'y$.

II. Теперь разсмотримъ уравненiе:

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Искомая кривая получается изъ кривой, выражаемой уравненiемъ:

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

путемъ передвиженiя параллельно оси Ox, такъ какъ для обѣихъ этихъ кривыхъ мы получаемъ тѣ же ординаты, если абсциссы отличаются одна отъ другой на 1. Можно также перенести ось ординатъ, принимая за начало ту точку O' прямой Ox, абсцисса которой равна 1, а за ось ординатъ — перпендикуляръ $O'y'$ къ оси Ox.

На чертежѣ 35 проведена пунктиромъ кривая $TSR\dot{O}MPQ$, которая изображаетъ графически функцію

$$y = \frac{1}{2}x^2;$$

единица длины $\overline{OO'} = \overline{O'A} = \overline{AB}$; искомая кривая есть $T'\,S'\,R'\,O'\,M'\,P'\,Q'$. Она получается изъ предыдущей кривой параллельнымъ перенесеніемъ на разстояніе:

$$\overline{TT'} = \overline{SS'} = \overline{RR'} = \overline{OO'} = \overline{MM'} = \overline{PP'} = \overline{QQ'} = 1.$$

III. Разсмотримъ, наконецъ, трехчленъ

$$y = x^2 + 4x + 3,$$

который можно свести къ канонической формѣ

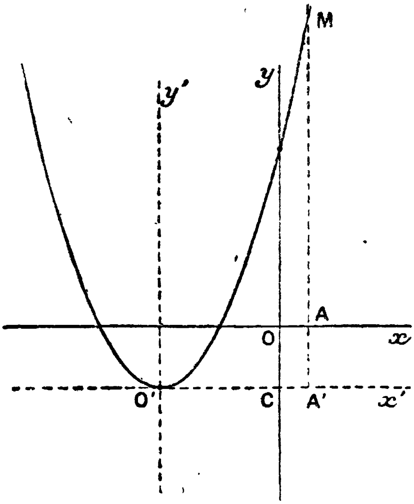
$$y = (x+2)^2 - 1;$$

изъ этой формы видимъ, что искомая кривая получается изъ кривой:

$$y = x^2$$

съ помощью двойного перенесенія: одно изъ нихъ происходитъ параллельно оси Ox, а другое—параллельно оси Oy.

Именно (черт. 36), пусть O' будетъ точка съ абсциссой -2 и ординатой -1, а M—точка искомой кривой съ абсциссой $x = \overline{OA}$ и съ ординатой $y = \overline{AM}$.



Фиг. 36.

Теперь по чертежу

$$\overline{O'A'} = \overline{O'C} + \overline{CA'} = \overline{O'C} + \overline{OA} = x + 2,$$

$$\overline{A'M} = \overline{A'A} + \overline{AM} = \overline{CO} + \overline{AM} = y + 1.$$

Сообразно съ этимъ изъ уравненія

$$y = (x + 2)^2 - 1$$

слѣдуетъ, что

$$\overline{A'M} = \overline{O'A}^2,$$

т. е. что геометрическое мѣсто точки M по отношенію къ осямъ $O\,x'$, $O'y'$ дѣйствительно опредѣляется уравненіемъ:

$$y' = x'^2.$$

Такимъ образомъ, изслѣдованіе трехчленовъ приводитъ къ тѣмъ же кривымъ, что и изслѣдованіе функціи $y = ax^2$. Измѣнилось лишь положеніе кривой по отношенію къ осямъ, но въ каждомъ частномъ случаѣ внимательное разсмотрѣніе чертежа указываетъ положеніе осей $O'x'$ и $O'y'$. Точка O' называется вершиной параболы; прямая $O'y'$, которая, какъ намъ извѣстно, есть ось симметріи, называется осью параболы, а прямая $O'x'$—касательной въ вершинѣ. Къ этому мы еще вернемся (п. **200**).

199. Изслѣдованіе произвольнаго трехчлена. Для того, чтобы изслѣдовать трехчленъ

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

и его графическое изображеніе, проще всего, воспользоваться общей канонической формой:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{2}$$

Тогда имѣютъ мѣсто соображенія, совершенно сходныя съ предыдущими. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ O' точку, координаты которой суть:

$$-\frac{b}{2a}, \qquad -\frac{b^2 - 4ac}{4a};$$

пусть $O'x'$, $O'y'$ будутъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя осямъ Ox, Oy, и пусть, далѣе, x' и y' будутъ координаты нѣкоторой точки по отношенію къ этимъ осямъ; тогда въ качествѣ графическаго изображенія трехчлена получимъ параболу:

$$y' = ax'^2,$$

осью которой будетъ служить прямая $O'y'$, а касательной въ вершинѣ—прямая $O'x'$. Мы не будемъ, однако, останавливаться на изложеніи этого способа, предпочитая приступить непосредственно къ изслѣдованію трехчлена (1), пользуясь при этомъ канонической формой (2).

Въ формулѣ (2) x содержится въ правой части лишь въ выраженіи $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, которое всегда имѣетъ положительное значеніе и только при $x=-\frac{b}{2a}$ обращается въ нуль.

Если, слѣдовательно, a есть число положительное, то произведеніе $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ всегда имѣетъ положительное значеніе, или вовсе исчезаетъ; напротивъ, если a есть число отрицательное, то произведеніе это всегда имѣетъ отрицательное значеніе, или исчезаетъ. Отсюда слѣдуетъ, что y при положительномъ a достигаетъ наименьшаго значенія, или, какъ говорятъ еще, достигаетъ абсолютнаго минимума, если $x=-\frac{b}{2a}$. Напротивъ, если a есть число отрицательное, то y достигаетъ при $x=-\frac{b}{2a}$ абсолютнаго максимума, т. е. принимаетъ при этомъ значеніи x бо́льшее значеніе, чѣмъ при какомъ либо другомъ значеніи x.

Выраженіе $x+\frac{b}{2a}$ возрастаетъ вмѣстѣ съ x. Если $x+\frac{b}{2a}$ имѣетъ положительное значеніе, то $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ измѣняется въ томъ же смыслѣ, т. е. возрастаетъ вмѣстѣ съ x; если же $x+\frac{b}{2a}$ имѣетъ отрицательное значеніе, то его абсолютная величина убываетъ съ возрастаніемъ x; слѣдовательно, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ убываетъ, если x возрастаетъ при отрицательномъ значеніи двучлена $x+\frac{b}{2a}$.

Наконецъ, произведеніе $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ измѣняется въ томъ же смыслѣ, какъ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, или же въ противоположномъ въ зависимости отъ того, имѣетъ ли a положительное или отрицательное значеніе.

На таблицѣ, приведенной на слѣдующей страницѣ, сдѣлана сводка всего изслѣдованія.

Выше, въ п. **191**, мы уже разсмотрѣли, чѣмъ опредѣляется знакъ трехчлена. Мы могли бы теперь получить всѣ результаты произведеннаго выше изслѣдованія путемъ опредѣленія знаковъ, которые имѣютъ минимумъ и максимумъ трехчлена. Если, напримѣръ, a и $4ac - b^2$ суть положительныя числа, то абсолютный минимумъ имѣетъ положительное значеніе; слѣдовательно, y не можетъ обратиться въ нуль. Напротивъ если $4ac - b^2$ есть число отрицательное, то y убываетъ отъ $+\infty$ до этого отрицательнаго минимума и поэтому одинъ разъ обращается въ нуль въ промежуткѣ между $+\infty$ и этимъ отрицательнымъ минимумомъ. Точно также выраженіе y обращается одинъ разъ въ нуль, когда оно возрастаетъ отъ этого отрицательнаго минимума до $+\infty$.

Главные случаи, которые здѣсь встрѣчаются, представлены на чертежахъ отъ 37 до 42. Въ нихъ абсцисса $\overline{OA}$ равна $-\frac{b}{2a}$, и это значеніе x даетъ максимумъ или минимумъ; ордината $\overline{AS}$ равна $\frac{4ac - b^2}{4a}$ и, слѣдовательно, равна значенію y для $x = -\frac{b}{2a}$; S есть вершина параболы.

Примѣчаніе I. Значеніе выраженія $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ зависитъ лишь отъ абсолютнаго значенія двучлена $x + \frac{b}{2a}$. Слѣдовательно, если мы полагаемъ послѣдовательно:

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

и

$$x + \frac{b}{2a} = -t,$$

то это выраженіе принимаетъ одно и то же значеніе; то же самое будетъ имѣть мѣсто и для y. Поэтому значенія абсциссъ:

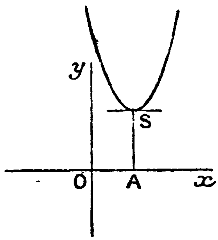
$$x = -\frac{b}{2a} + t$$

и

$$x = -\frac{b}{2a} - t$$

Трехчленъ второй степени.

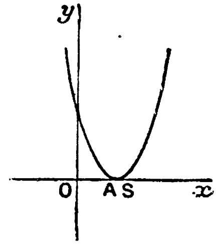
	$x=-\infty$		$x=-\frac{b}{2a}$		$x=+\infty$
$x+\frac{b}{2a}$	$-\infty$	отрицат., возрастаетъ	0	положит., возрастаетъ	$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	положит., убываетъ	0 *абсолютный минимумъ*	положит., возрастаетъ	$+\infty$
$a>0 \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	положит., убываетъ	0 *абсолютный минимумъ*	положит., возрастаетъ	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$+\infty$	положит., убываетъ	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ *абсолютный минимумъ*	положит., возрастаетъ	$+\infty$
$a<0 \quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$-\infty$	отрицат., возрастаетъ	0 *абсолютный максимумъ*	отрицат., убываетъ	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$	$-\infty$	отрицат., возрастаетъ	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ *абсолютный максимумъ*	отрицат., убываетъ	$+\infty$



Фиг. 37.

$a > 0$; $4ac - b^2 > 0$; $\dfrac{4ac - b^2}{4a} > 0$.

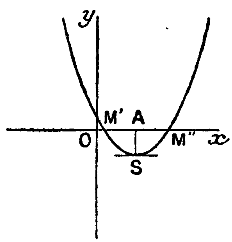
Положительный минимумъ, корней нѣтъ.



Фиг. 38.

$a > 0$; $4ac - b^2 = 0$.

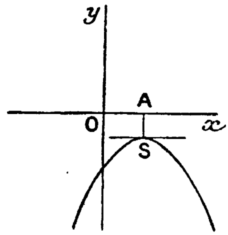
Минимумъ нуль, двойной корень; S и A совпадаютъ.



Фиг. 39.

$a > 0$; $4ac - b^2 < 0$; $\dfrac{4ac - b^2}{4a} < 0$.

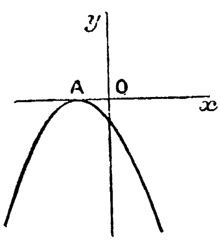
Отрицательный минимумъ, два корня $\overline{OM'}$ и $\overline{OM''}$.



Фиг. 40.

$a < 0$; $4ac - b^2 > 0$; $\dfrac{4ac - b^2}{4a} < 0$.

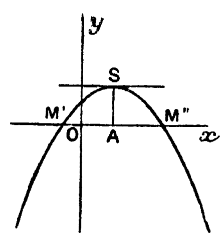
Отрицательный максимумъ, корней нѣтъ.



Фиг. 41.

$a < 0$; $4ac - b^2 = 0$.

Максимумъ нуль, двойной корень; S и A совпадаютъ.



Фиг. 42.

$a < 0$; $4ac - b^2 < 0$; $\dfrac{4ac - b^2}{4a} > 0$.

Положительный максимумъ, два корня $\overline{OM'}$ и $\overline{OM''}$.

даютъ однѣ и тѣ же ординаты, и такимъ образомъ мы опять приходимъ къ доказанной уже симметріи по отношенію къ прямой, параллельной Oy и проходящей черезъ вершину S.

Примѣчаніе II. Нулевыя точки трехчлена суть абсциссы точекъ пересѣченія параболы съ осью Ox. Если парабола касается прямой Ox (черт. 38, 41), то точки пересѣченія совпадаютъ, и потому въ этомъ случаѣ нулевая точка называется двойной.

200. Кривая $x = y^2$. Согласіе съ геометрическимъ опредѣленіемъ параболы. Вмѣсто уравненія

$$y = ax^2 + bx + c$$

изслѣдуемъ теперь подобнымъ же образомъ построенное уравненіе

$$x = ay^2 + by + c,$$

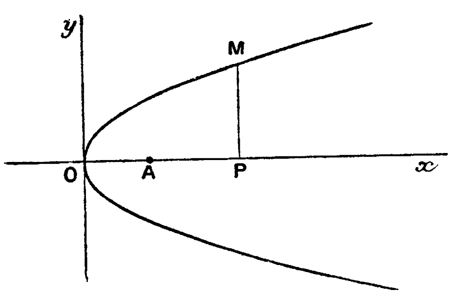
гдѣ буквы x и y замѣщены одна другой. Эта перестановка представляетъ не что иное, какъ перемѣну обозначеній. Ограничимся случаемъ кривой

$$x = y^2,$$

которая соотвѣтствуетъ кривой

$$y = x^2$$

съ тѣмъ различіемъ, что теперь Ox служитъ осью симметріи, а Oy—касательной въ вершинѣ.



Фиг. 43.

Пусть $\overline{OA}$ будетъ единица длины, M—точка кривой, $\overline{PM}$—ея ордината, $\overline{OP}$ (черт. 43) абсцисса.

Такъ какъ OA есть единица длины, то

$$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}, \qquad y = \frac{\overline{PM}}{\overline{OA}},$$

и вслѣдствіе этого

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{OA}^2},$$

или

$$\overline{OA} \cdot \overline{OP} = \overline{PM}^2.$$

Но это уравненіе представляетъ слѣдствіе геометрическаго опредѣленія параболы, какъ мѣста точекъ, разстояніе которыхъ отъ нѣкоторой постоянной точки—фокуса равно разстоянію отъ нѣкоторой постоянной прямой—директриссы. При этомъ $\overline{OA}$ называется двойнымъ параметромъ; именно, $\overline{OA}$ представляетъ двойное разстояніе фокуса отъ директриссы.

Такимъ образомъ доказано, что кривыя, названныя здѣсь параболами, тождественны съ кривыми, которыя носятъ это названіе въ геометріи, и названія ось, вершина, касательная въ вершинѣ находятъ себѣ полное оправданіе.

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ XVII.

388. Рѣшить уравненія:

$$2x^2-3x-3=0;$$
$$2x^2-5x-7=0,$$
$$3x^2-x-\sqrt{2}=0,$$
$$x^2-5x+1=0,$$
$$3x^2-8x+4=0.$$

389. Рѣшить уравненія:

$$2x^2-3x-5=0,$$
$$2x^2-5x-9=0,$$
$$x^2-5x+3=0,$$
$$3x^2-8x+7=0.$$

390. Рѣшить уравненія:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}=1,$$
$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=2,$$
$$\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2x+4}{5x-3},$$
$$\frac{3x-2}{x}=\frac{2x-4}{x+1}+2.$$

391. Рѣшить слѣдующія уравненія:

$$\frac{x-b}{x-a}+\frac{x-a}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},$$
$$\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$$

$$\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)^2+(x-b)^2}=a-b\,.$$

392. Составить уравненіе второй степени, имѣющее корни 5 и — 7.

393. Составить уравненіе второй степени, имѣющее корни 1000 и 0,001.

394. Составить уравненіе второй степени съ корнями $\sqrt{3}$ и $\sqrt{4}$.

495. Какіе знаки имѣютъ корни уравненія

$$(a+3)x^2+(2a+3)x+a+5=0\,,$$

когда a принимаетъ всевозможныя значенія?

Изслѣдовать сначала, при какихъ значеніяхъ a корни вообще существуютъ.

396. Рѣшить ту же задачу для уравненія

$$(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0\,.$$

397. Рѣшить ту же задачу для уравненія

$$(a-2)x^2+2(a-2)x+3a+4=0\,.$$

398. Изслѣдовать существованіе и знаки корней уравненія

$$(2a+3)x^2+(a+1)x+4=0\,,$$

когда a измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$.

399. Рѣшить и изслѣдовать уравненіе

$$x^2(2\cos\alpha+3)+2x(\cos\alpha-1)+3\cos\alpha=0\,,$$

въ которомъ α обозначаетъ данный уголъ.

400. Изслѣдовать уравненіе

$$(a-5)\cos^2 x+(2a+3)\cos x+3a=0\,,$$

гдѣ a—постоянная, а x—неизвѣстный уголъ.

401. Рѣшить неравенство

$$3\cos^2 x-12\cos x+5>0\,,$$

принимая, что уголъ x лежитъ между 0^0 и 180^0.

402. Рѣшить въ томъ же предположеніи неравенство

$$5\sin^2 x+3\sin x-1<0\,.$$

403. Рѣшить и изслѣдовать неравенство:

$$(1+\lambda)x^2-3\lambda x-1>0\,.$$

404. Построить параболу

$$y=\frac{3}{4}x^2\,,$$

принимая сантиметръ за единицу длины.

405. Построить ту же кривую, принимая за единицу длины дециметръ для оси x-овъ и миллиметръ для оси y-овъ.

406. Построить параболу

$$y = 50000x^2,$$

принимая за единицу длины метръ.

407. Построить параболу:

$$y = -0{,}0002x^2,$$

принимая за единицу длины десятую миллиметра.

408. Построить параболу

$$y = x^2,$$

принимая сантиметръ за единицу длины.

409. Построить параболу

$$y = x^2$$

и прямую

$$y = 2x + 3,$$

принимая за единицу длины сантиметръ. Измѣрить абсциссы ихъ общихъ точекъ и показать, что онѣ равны корнямъ уравненія

$$x^2 = 2x + 3$$

(графическое рѣшеніе уравненія второй степени).

410. Построить параболу

$$y = x^2$$

и прямую

$$y = 3x + 4,$$

принимая сантиметръ за единицу длины. Измѣрить абсциссы ихъ общихъ точекъ и показать, что онѣ равны корнямъ уравненія

$$x^2 = 3x + 4.$$

411. Рѣшить ту же задачу для параболы

$$y = \frac{1}{5}x^2$$

и прямой

$$y = 2x + 10,$$

принимая за единицу длины миллиметръ.

412. Рѣшить ту же задачу для параболы

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

и прямой

$$y = 2x + 15,$$

принимая за единицу длины миллиметръ.

413. Рѣшить обѣ предшествующія задачи, пользуясь клѣтчатой бумагой и принимая сторону квадрата за единицу длины.

414. Построить параболу

$$y=\frac{3}{5}x^2,$$

принимая за единицу длины сантиметръ.

415. Построить ту же кривую, принимая за единицы длины десятую часть метра и миллиметръ.

416. Построить параболу

$$y=2x^2-5x+3,$$

принимая за единицу длины сантиметръ. Вычислить абсциссы точекъ пересѣченія этой кривой съ осью x-овъ и провѣрить результатъ вычисленій измѣреніемъ.

417. Изслѣдовать трехчленъ

$$y=\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{4}x-1$$

и начертить отвѣчающую ему кривую, принимая сантиметръ за единицу длины.

418. Построить кривую

$$x=2y^2-5y+1,$$

принимая сантиметръ за единицу длины.

419. Построить слѣдующія кривыя:

$$x=50000y^2+300y-3,$$
$$y=0{,}0001x^2+0{,}01x-1,$$

выбирая надлежащимъ образомъ единицу длины.

420. Если данное уравненіе второй степени имѣетъ корни x' и x'', то подъ уравненіемъ съ обратными корнями разумѣютъ такое уравненіе второй степени, корни котораго суть $\frac{1}{x'}$ и $\frac{1}{x''}$. Доказать, что уравненіе съ корнями, обратными корнямъ уравненія

$$ax^2+bx+c=0,$$

имѣетъ видъ:

$$cx^2+bx+a=0.$$

Произвести на этомъ основаніи изслѣдованіе случая, когда a равно нулю; показать, что мы придемъ такимъ путемъ къ результатамъ п. **187**.

421. Пусть будетъ дано уравненіе второй степени, корни котораго суть x' и x'':

$$ax^2+bx+c=0.$$

Доказать, что уравненіе

$$a(y-h)^2+b(y-h)+c=0$$

имѣетъ корни $y'=x'+h$ и $y''=x''+h$.

Опредѣлить h такъ, чтобы въ этомъ уравненіи не было второго члена. Вывести отсюда новымъ способомъ формулу для рѣшенія уравненія второй степени.

422. Рѣшить неравенство:

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}>0\,.$$

Нужно умножить обѣ части на положительную величину $(ax+b')^2$.

423. Рѣшить неравенство:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0\,.$$

424. Рѣшить неравенство:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)>0\,.$$

425. Рѣшить неравенство:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}>0\,.$$

Нужно умножить обѣ части его на $(a'x^2+b'x+c')^2$.

426. Рѣшить слѣдующія неравенства:

$$\frac{2x+3}{3x-5}<0\,,$$

$$\frac{4x+7}{5x-1}>0\,,$$

$$\frac{7-2x}{3x-5}>0\,,$$

$$\frac{5x^2-6x+1}{x-4}>0\,,$$

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10}>0\,,$$

$$\frac{2x^2-6x+5}{3-4x-8x^2}<0\,.$$

427. Пусть будетъ дано уравненіе второй степени:

$$f(x)=ax^2+bx+c=0\,.$$

Далѣе, пусть будутъ даны числа m и m'; тогда слѣдуетъ доказать, что уравненіе имѣетъ корень, лежащій между m и m', если

$$f(m)f(m')<0\,.$$

Если же

$$f(m)f(m')>0\,,$$

то возможны четыре случая: 1. уравненіе не имѣетъ корней; 2. оба корня уравненія лежатъ между m и m'; 3. корни уравненія больше, чѣмъ m и m'; 4. оба корня меньше, чѣмъ m и m'. Показать, отъ чего зависятъ эти четыре случая по образцу изслѣдованія, произведеннаго въ п. **193**.

428. Изслѣдовать уравненіе:

$$(\lambda+3)\sin^2 x - 4(\lambda+1)\sin x + 2\lambda = 0\,.$$

Нужно воспользоваться предшествующей задачей; при этомъ нужно взять $m = -1$, $m' = 1$.

429. Рѣшить уравненіе четвертой степени:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0\,.$$

Если положить $x^2 = y$, то получится уравненіе второй степени по отношенію къ y, которое можетъ имѣть два корня y' и y''; если оба эти корня положительны, то предложенное уравненіе имѣетъ четыре корня $+\sqrt{y'}$, $-\sqrt{y'}$, $+\sqrt{y''}$, $-\sqrt{y''}$.

430. Рѣшить уравненія:

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 &= 0\,, \\ x^4 - 4x^2 + 4 &= 0\,, \\ x^4 - 6x^2 + 5 &= 0\,, \\ x^4 - 4x^2 + 3 &= 0\,, \\ x^4 + 2x^2 - 3 &= 0\,, \\ 2x^4 + 5x^2 - 7 &= 0\,, \\ x^4 - x^2 + 1 &= 0\,, \\ x^4 + 3x^2 + 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

431. Найти на основаніи теоремы 72-ой въ п. **180** число корней уравненія $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

432. Изслѣдовать уравненіе:

$$(1+\lambda)\cos^4 x - 3\lambda\cos^2 x + 1 = 0\,.$$

Опредѣлить значеніе $\cos x$ при $\lambda = 1$.

433. Опредѣлить a, b, c такъ, чтобы парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

проходила черезъ точки A, B, C со слѣдующими координатами:

A:	$x = 3$	$y = 4$
B:	$x = 1$	$y = 0$
C:	$x = -5$	$y = 2$.

строить параболу, принимая за единицу длины сантиметръ.

Глава XVIII.

ЗАДАЧИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

201. Опредѣленіе. Подъ задачами второй степени разумѣютъ задачи, рѣшеніе которыхъ можно свести къ рѣшенію уравненій второй степени съ одной неизвѣстной (и, кромѣ того, уравненій первой степени съ одной или многими неизвѣстными). Мы разсмотримъ здѣсь лишь тѣ задачи, для которыхъ достаточно рѣшить одно уравненіе второй степени съ одной неизвѣстной.

При этомъ опредѣленіи слѣдуетъ припомнить замѣчанія, которыя мы сдѣлали относительно задачъ первой степени (п. 153).

202. Составленіе уравненія задачи. Изслѣдованіе. Что касается составленія уравненія задачи, то намъ нечего прибавить къ тому, что мы уже сказали объ этомъ относительно задачъ первой степени; что-же касается изслѣдованія, то мы должны, напротивъ того, сдѣлать нѣсколько новыхъ замѣчаній.

А именно, теперь являются три обстоятельства, которыхъ не было въ случаѣ задачъ первой степени:

1. корни могутъ вовсе не существовать;
2. если есть два корня, то слѣдуетъ различать такіе случаи:
   a) лишь одинъ корень отвѣчаетъ задачѣ;
   b) два корня даютъ два различныхъ рѣшенія задачи;
   c) несмотря на то, что оба корня различны, они ведутъ къ одному и тому же рѣшенію задачи;
   d) ни одинъ изъ корней не даетъ рѣшенія задачи.

3. Наконецъ, можетъ существовать двойной корень; мы увидимъ (задача IV), какое важное значеніе имѣетъ это обстоятельство.

При изслѣдованіи задачъ первой степени, какъ мы видѣли, можетъ случиться, что рѣшеніе перестаетъ существовать, становясь безконечнымъ или неопредѣленнымъ. Это имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если въ уравненіи

$$ax + b = 0$$

коэффиціентъ a обращается въ нуль. Если же въ уравненіи второй степени

$$ax^2 + bx + c = 0$$

коэффиціентъ a обращается въ нуль, но при этомъ b не равно нулю, то уравненіе понижается до первой степени и имѣетъ теперь только корень $\frac{-c}{b}$; исчезнувшій корень сталъ безконечно большимъ. Если, далѣе, оба коэффиціента a и b равны нулю, а c не равно нулю, то уравненіе не удовлетворяется ни однимъ конечнымъ значеніемъ x; слѣдовательно, оно имѣетъ два безконечно большихъ корня, или, если угодно, одинъ двойной безконечно большой корень. Наконецъ, если коэффиціенты a, b, c всѣ три равны нулю, то уравненію удовлетворяетъ любое значеніе x; слѣдовательно, корни его остаются неопредѣленными (ср. п. **188**).

203. Простые примѣры задачъ второй степени. **Задача I.** Стороны прямоугольника имѣютъ длины въ 4 м. и 7 м. На какую длину нужно увеличить одну изъ нихъ и уменьшить другую, чтобы площадь равнялась 24 кв. м.?

Пусть искомая длина будетъ равна x м. Если x есть положительное число, то мы удлинимъ ту изъ сторонъ, которая первоначально равнялась 4 м. и укоротимъ ту, которая первоначально равнялась 7 м. Если же x есть отрицательное число, то измѣненіе будетъ обратное. Во всякомъ случаѣ, однако, первая сторона будетъ имѣть длину $(4 + x)$ м., а вторая $(7 - x)$ м. Площадь прямоугольника, выраженная въ квадратныхъ метрахъ, равна произведенію длинъ его сторонъ, выраженныхъ въ метрахъ. Слѣдовательно:

$$(4 + x)\,(7 - x) = 24,$$

т. е.

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Отсюда мы получаемъ:

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2},$$

и корни будутъ:

$$x' = \frac{8}{2} = 4,$$

$$x'' = \frac{-2}{2} = -1.$$

Первый корень даетъ длины сторонъ $4 + 4$ и $7 - 4$, т. е. 8 и 3. Слѣдовательно, получаются два рѣшенія предложенной задачи. Эти рѣшенія ведутъ, однако, къ двумъ конгруэнтнымъ прямоугольникамъ, такъ какъ стороны лишь переставлены. Можно было предвидѣть, что получится лишь одинъ прямоугольникъ. А именно, если одна сторона, укорочена, а другая настолько же удлинена, то сумма ихъ, а, слѣдовательно и периметръ прямоугольника остаются безъ перемѣны. Поэтому вопросъ заключается въ томъ, чтобы найти прямоугольникъ, площадь и периметръ котораго извѣстны. Теперь мы разсмотримъ эту задачу и покажемъ, что дѣйствительно существуетъ только одинъ прямоугольникъ, удовлетворяющій этимъ требованіямъ.

Задача II. Каковы длины сторонъ прямоугольника, площадь котораго равна 30 кв. м., а периметръ 22 м.?

Пусть длины сторонъ прямоугольника будутъ x' м. и x'' м. Тогда периметръ его будетъ $(2x' + 2x'')$ м., а площадь $x'x''$ кв. м. Слѣдовательно:

$$x' + x'' = 11,$$
$$x'x'' = 30.$$

Итакъ, нужно найти два числа, сумма и произведеніе которыхъ извѣстны. Но въ такомъ случаѣ намъ извѣстны коэффиціенты уравненія второй степени, имѣющаго корнями x' и x''., Это уравненіе вообще имѣетъ видъ (п. **184**):

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0;$$

слѣдовательно, въ данномъ случаѣ:

$$x^2 - 11x + 30 = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 30} = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2};$$

т. е. корнями его служатъ числа 5 и 6. Слѣдовательно, либо

$$x' = 5,\ x'' = 6,$$

либо

$$x' = 6,\ x'' = 5.$$

Итакъ, мы имѣемъ два рѣшенія; этимъ двумъ рѣшеніямъ отвѣчаютъ, однако, два конгруэнтныхъ прямоугольника, стороны которыхъ лишь переставлены.

Задача III. Найти два числа, разность которыхъ равна 3, а произведеніе равно 40.

Мы можемъ рѣшить эту задачу подобно предыдущей. Именно, разность двухъ чиселъ равна суммѣ перваго числа и числа, противоположнаго второму. Поэтому будетъ цѣлесообразно обозначить первое число черезъ x', а второе черезъ $-x''$. Эти разсужденія приводятъ къ двумъ уравненіямъ

$$x' + x'' = 3,$$
$$x'x'' = -40.$$

Слѣдовательно, x' и x'' суть корни уравненія:

$$x^2 - 3x - 40 = 0.$$

Отсюда получимъ:

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 40} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2},$$

слѣдовательно, корни будутъ

$$x' = 8,\ x'' = -5.$$

Поэтому искомыя числа x' и $-x''$ равны 8 и 5. Но мы могли бы также положить:

$$x' = -5,\ x'' = +8.$$

Тогда искомыя числа будутъ -5 и -8. Это рѣшеніе отлично отъ перваго; слѣдовательно, задача имѣетъ два рѣшенія.

Задача IV. Опредѣлить прямоугольникъ, периметръ котораго равенъ $4a$ см, а площадь равна площади квадрата со стороной въ d см.

Пусть длины сторонъ прямоугольника будутъ x' см. и x'' см. Тогда:

$$x' + x'' = 2a,$$
$$x'x'' = d^2,$$

Слѣдовательно, x' и x'' суть корни уравненія

$$x^2 - 2ax + d^2 = 0\,.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - d^2}.$$

Изслѣдованіе. Для того, чтобы формула имѣла смыслъ, должно быть $a^2 - d^2 \geqq 0$, т. е. $a^2 \geqq d^2$. Такъ какъ a и d суть числа положительныя, то это условіе равносильно болѣе простому: $a \geqq d$, потому что квадратъ положительнаго числа тѣмъ больше, чѣмъ больше самое число. Поэтому задача возможна лишь тогда, когда периметръ искомаго прямоугольника больше, чѣмъ периметръ даннаго квадрата, или равенъ ему.

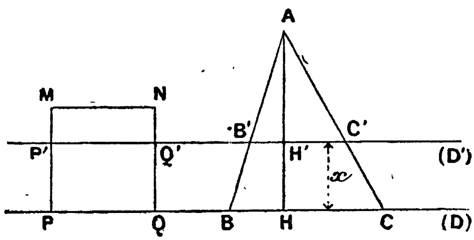
Если периметръ прямоугольника равенъ периметру квадрата, то $x' = x'' = d$, т. е. рѣшеніе дается самимъ квадратомъ, какъ это и можно было предвидѣть, и оно является въ этомъ случаѣ единственнымъ. Тогда уравненіе второй степени имѣетъ двойной корень. Мы можемъ сказать, что этому корню соотвѣтствуетъ двойное рѣшеніе. А именно, если a больше d, то имѣются два прямоугольника, удовлетворяющихъ задачѣ: одинъ съ основаніемъ x' см. и высотой x'' см., а другой съ основаніемъ x'' см. и высотой x' см.; эти прямоугольники, впрочемъ, конгруэнтны. Если теперь $x' = x''$, то каждый изъ этихъ прямоугольниковъ обращается въ квадратъ и квадратъ является поэтому двойнымъ рѣшеніемъ.

Это двойное рѣшеніе имѣетъ важное свойство, которымъ часто обладаютъ двойныя рѣшенія: оно даетъ тотъ прямоугольникъ, который изъ всѣхъ прямоугольниковъ одинаковой съ нимъ площади имѣетъ наименьшій периметръ. Изъ предыдущихъ разъясненій слѣдуетъ, что при данной площади периметръ не можетъ быть меньше $4d$ см; въ самомъ дѣлѣ, если $a < d$, то предложенная задача не имѣетъ рѣшенія; слѣдовательно, наименьшее значеніе периметра $4a$ равно $4d$; это и есть периметръ квадрата.

Можно также стать на другую точку зрѣнія, разсматривая a, какъ постоянную, а d, какъ перемѣнную. Тогда d должно быть меньше, или, въ крайнемъ случаѣ, равно a, и теперь a является наибольшимъ значеніемъ стороны d, т. е. между всѣми прямоугольниками одинаковаго периметра въ $4a$ см. наибольшую площадь имѣетъ квадратъ со стороной въ a см.

Если, напримѣръ, помѣщикъ имѣетъ ограду изъ проволоки опредѣленной длины и хочетъ воспользоваться ею, чтобы оградить возможно большее прямоугольное поле, то онъ долженъ придать этому полю форму квадрата.

204. Задачи второй степени, при изслѣдованіи которыхъ примѣняются свойства трехчлена. Задача V. Треугольникъ и квадратъ имѣютъ основанія на одной и той же прямой D: Требуется провести прямую D', параллельную этой прямой, такимъ образомъ, чтобы сумма площадей частей треугольника и квадрата, отсѣкаемыхъ этой прямой D' и находящихся надъ нею, была равна площади треугольника.



Фиг. 44.

Пусть A, B, C будутъ вершины треугольника, а M, N, P, Q—вершины квадрата (черт. 44); далѣе, пусть AH будетъ высота треугольника, P', Q', B', C', H'—точки пересѣченія прямой D' съ прямыми MP, NQ, AB, AC, AH. Положимъ, далѣе, что выраженные въ сантиметрахъ:

$$BC = a \text{ см}; \qquad AH = h \text{ см}; \qquad PQ = MP = b \text{ см}.$$

Выберемъ за неизвѣстную x разстояніе между параллелями D и D', такъ что опять-таки въ сантиметрахъ:

$$PP' = QQ' = HH' = x \text{ см}.$$

Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}ah$ кв. см. Отношеніе площадей подобныхъ треугольниковъ $A'B'C'$ и ABC равно отношенію квадратовъ ихъ высотъ, т. е. равно $\frac{(h-x)^2}{h^2}$; поэтому площадь треугольника $A'B'C'$ равна

$$\frac{1}{2}ah\frac{(h-x)^2}{h^2} \text{ кв. см}.$$

Далѣе, площадь прямоугольника $MNQ'P'$, очевидно, равна

$b(b-x)$ кв. см. Слѣдовательно, уравненіе задачи будетъ:

$$\frac{1}{2}ah\frac{(h-x)^2}{h^2}+b(b-x)=\frac{1}{2}ah,$$

или, если освободимъ его отъ знаменателей, умножая на $2h$:

$$a(h-x)^2+2hb(b-x)=ah^2.$$

Итакъ, задача приводитъ къ уравненію второй степени:

(1) $$ax^2-2h(a+b)x+2hb^2=0.$$

Чтобы это уравненіе имѣло корни, дискриминантъ его D долженъ имѣть положительное значеніе:

$$D=h^2(a+b)^2-2ahb^2>0.$$

Располагая по степенямъ b, получимъ:

$$b^2(h^2-2ah)+2h^2ab+a^2h^2>0.$$

Такъ какъ h есть число положительное, то мы можемъ раздѣлить обѣ части неравенства на h, не измѣняя его смысла п. **147**); тогда получимъ:

(2) $$b^2(h-2a)+2ahb+a^2h>0.$$

Чтобы рѣшить это неравенство второй степени по отношенію къ b, полезно вычислить дискриминантъ D' лѣвой части его. Находимъ:

$$D'=a^2h^2-a^2h(h-2a)=2a^3h.$$

Дискриминантъ D' всегда имѣетъ положительное значеніе, такъ какъ a и h суть положительныя числа. Слѣдовательно, уравненіе

$$D=0$$

имѣетъ два различныхъ корня b' и b''.

Если теперь

$$h-2a>0,$$

то оба корня будутъ отрицательными (п. **186**). Поэтому неравенство (2) навѣрное удовлетворяется, если b есть положительное число; а это дѣйствительно имѣетъ мѣсто вслѣдствіе геометрическаго значенія числа b.

Если же, наоборотъ:

$$h-2a<0,$$

то одинъ изъ корней,—напримѣръ b'—будетъ отрицательнымъ, а другой b'' положительнымъ; въ этомъ случаѣ, чтобы удовлетворялось неравенство (2), D должно имѣть знакъ, противоположный знаку своего перваго члена, и поэтому должно быть

$$b' < b < b'',$$

или, такъ какъ b есть положительное число:

$$0 < b < b''.$$

Итакъ, если

$$h > 2a,$$

то уравненіе (1) имѣетъ корни для всякаго b; если, наоборотъ, $h < 2a$, то уравненіе (1) имѣетъ корни только тогда, когда:

$$b < b'',$$

т. е. когда выполняется условіе:

$$b < \frac{ah + a\sqrt{2ah}}{2a - h}.$$

Примѣчаніе. Вмѣсто того, чтобы рѣшать неравенство $D > 0$ относительно b, мы могли бы рѣшить его относительно h. Это можетъ, пожалуй, казаться болѣе простымъ; въ самомъ дѣлѣ, дѣля на h, мы получимъ неравенство первой степени относительно h, изъ котораго слѣдуетъ:

$$h > \frac{2ab^2}{(a+b)^2}.$$

Но если мы теперь пожелаемъ опредѣлить значенія b, для которыхъ имѣетъ мѣсто это неравенство, то нужно изслѣдовать дробь, числитель и знаменатель которой оба второй степени относительно b, а этого мы еще не знаемъ.

Изслѣдованіе. Мы нашли условія существованія корней уравненія (1). Теперь остается изслѣдовать, дѣйствительно ли корни, если таковые существуютъ, удовлетворяютъ предложенной геометрической задачѣ. Когда мы составляли уравненіе задачи, мы попросту приняли (черт. 44), что x есть положительное число, что оно меньше b и меньше h. Чтобы не разбрасываться безпредѣльно, мы оставимъ въ сторонѣ вопросъ, къ какимъ задачамъ, родственнымъ съ предложенной, ведутъ значенія x, не лежащія въ этихъ границахъ, и лишь изслѣдуемъ, сколько имѣетъ уравненіе (1) такихъ корней, которые больше 0 и одновременно меньше, чѣмъ b и h. Для этого обозначимъ лѣвую часть уравненія (1) черезъ $f(x)$. Тогда:

$$f(0) = 2hb^2,$$
$$f(b) = ab^2 - 2h(a+b)b + 2hb^2 = ab(b - 2h)$$
$$f(h) = ah^2 - 2h(a+b)h + 2hb^2 = h(2b^2 - 2bh - ah).$$

1. Примемъ сначала, что $b < h$. Тогда x должно лежать между 0 и b, чтобы задача имѣла рѣшеніе. Но $f(0)$ имѣетъ положительное значеніе, а $f(b)$ — отрицательное. Слѣдовательно, существуетъ одно и только одно рѣшеніе задачи.

2. Пусть будетъ теперь $b > h$. Тогда x должно лежать между 0 и h, чтобы задача имѣла рѣшеніе.

Чтобы изслѣдовать, удовлетворяется ли уравненіе $f(x) = 0$ для значеній x, содержащихся между 0 и h, мы разсмотримъ $f(0)$ и $f(h)$. Такъ какъ $f(0) = 2hb^2$ есть положительное число, то дѣло идетъ о знакѣ $f(h)$. Если для сокращенія положимъ:

$$F(b) = 2b^2 - 2bh - ah,$$

то:

$$f(h) = hF(b).$$

Поэтому, для того чтобы было $f(h) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $F(b)$ имѣло положительное значеніе. Но

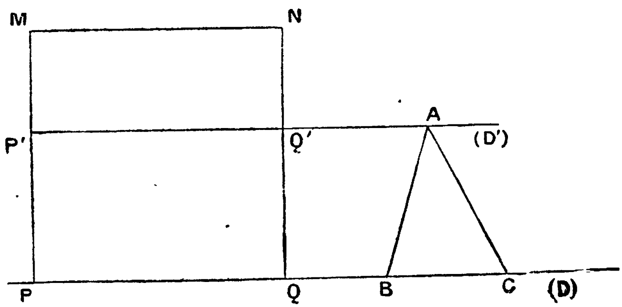
$$F(h) = -ah < 0.$$

Поэтому $F(b)$ имѣетъ корень b_1, большій, чѣмъ h, а именно:

$$b_1 = \frac{h + \sqrt{h^2 + 2ah}}{2}.$$

Тутъ нужно различать два случая. Во-первыхъ, если b лежитъ между h и b_1, то $f(h)$ есть число отрицательное. Слѣдовательно, имѣется лишь одинъ корень x, который лежитъ между 0 и h, и потому существуетъ *одно* лишь рѣшеніе задачи.

Во-вторыхъ, если $b > b_1$, то $f(0)$ и $f(h)$ оба имѣютъ положительныя значенія, и мы не знаемъ навѣрное, имѣетъ ли корни уравненіе $f(x) = 0$. Поэтому мы должны предположить, что выполняются найденныя нами раньше условія, при которыхъ D имѣетъ положительное значеніе. Если же эти условія выполняются, то мы можемъ быть увѣрены, что имѣетъ мѣсто одна изъ слѣдующихъ трехъ возможныхъ комбинацій: либо оба корня меньше 0, либо оба лежатъ между 0 и h, либо, наконецъ, оба больше, чѣмъ h. Чтобы рѣшить, какая именно изъ этихъ трехъ возможныхъ комбинацій будетъ имѣть мѣсто, мы должны сравнить 0 и h съ полусуммою корней, равной $\frac{h(a+b)}{a}$. Но эта полусумма, очевидно, больше h, ибо какъ a и b, такъ и h имѣютъ положительныя значенія; слѣдовательно, оба корня больше, чѣмъ h, и поэтому **предложенная задача не имѣетъ рѣшенія**.



Фиг. 45.

Для того, чтобы предложенная геометрическая задача имѣла рѣшеніе, необходимо и достаточно, чтобы было:

$$b<\frac{h+\sqrt{h^2+2ah}}{2};$$

это рѣшеніе — единственное.

Простое геометрическое разсужденіе подтверждаетъ этотъ результатъ. Изъ условія задачи видно (черт. 44), что площади $MNP'Q'$ и $BCC'B'$ равны между собой. Если теперь x возрастаетъ отъ нуля, то площадь $MNP'Q'$ убываетъ отъ начальнаго значенія b^2, а площадь $BCC'B'$ возрастаетъ отъ нуля. Слѣдовательно, обѣ эти площади могутъ быть равны между собой не болѣе, какъ при одномъ положеніи D'; и такое положеніе всегда существуетъ, если только площадь $MNQ'P'$ не будетъ все еще больше, чѣмъ $BCC'B'$ и при томъ положеніи прямой D', когда она проходитъ черезъ вершину треугольника A

(крайнее положеніе, которое она можетъ занять), въ этомъ случаѣ часть $BCC'B'$, обращается въ треугольникъ ABC (черт. 45). Это условіе можно выразить неравенствомъ:

$$b(b-h) > \frac{1}{2}ah.$$

Такъ какъ a и h имѣютъ положительныя значенія, то, рѣшая это неравенство относительно b, находимъ:

$$b > \frac{h+\sqrt{h^2+2ah}}{2}.$$

Если, въ частности,

$$b = \frac{h+\sqrt{h^2+2ah}}{2},$$

то рѣшеніе дается прямой D', проходящей черезъ точку A; вмѣстѣ съ тѣмъ $x = h$.

205. Примѣръ изслѣдованія тригонометрической задачи Пусть ABC будетъ прямоугольный треугольникъ, а D —проекція вершины A прямого угла на гипотенузу BC. Вычислить уголъ $ACB = \gamma$, если между длинами CA, CD, CB имѣетъ мѣсто равенство:

$$CD + n\,CA + p\,CB = 0,$$

гдѣ n и p суть данныя положительныя или отрицательныя числа.

Такъ какъ

$$CA = CB\cos\gamma$$

и

$$CD = CA\cos\gamma = CB\cos^2\gamma,$$

то уравненіе задачи будетъ:

$$\cos^2\gamma + n\cos\gamma + p = 0, \tag{1}$$

или, если положимъ

$$\cos\gamma = x, \tag{2}$$

то будетъ:

$$x^2 + nx + p = 0. \tag{3}$$

Если корень уравненія (3) удовлетворяетъ задачѣ, то онъ долженъ лежать между 0 и 1, такъ какъ γ есть острый уголъ и потому $\cos\gamma$ имѣетъ положительное значеніе.

Чтобы уравненіе (3) имѣло корни, должно быть:

$$n^2 - 4p > 0.$$

Если теперь положимъ:

$$f(x) = x^2 + nx + p,$$

то

$$f(0) = p,$$
$$f(1) = 1 + n + p.$$

Полусумма корней равна $-\frac{n}{2}$; она либо имѣетъ отрицательное значеніе, либо лежитъ между 0 и 1, либо больше 1, въ зависимости отъ того, есть ли n положительное число, или лежитъ между 0 и -2, или, наконецъ, меньше -2. Теперь мы найдемъ послѣдовательно условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы задача имѣла два, одно или ни одного рѣшенія.

1. Чтобы существовали два рѣшенія, должны одновременно имѣть мѣсто неравенства:

$$\begin{aligned} &(a) \quad n^2 - 4p > 0, \\ &(b) \quad f(0) = p > 0, \\ &(c) \quad f(1) = 1 + n + p > 0, \\ &(d) \quad -2 < n < 0. \end{aligned}$$

Неравенство (a) выражаетъ, что уравненіе (3) имѣетъ два корня. Неравенство (b) имѣетъ слѣдствіемъ, что оба эти корня имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; неравенство (c) — что они либо оба больше 1, либо оба меньше 1 *); неравенство (d), наконецъ, исключаетъ первую комбинацію **), и такимъ образомъ достигается, что оба корня, какъ этого требуетъ задача, суть положительныя правильныя дроби.

Если рѣшимъ предыдущія неравенства относительно n, то получимъ одно изъ двухъ:

*) Если бы одинъ изъ нихъ былъ больше 1, а другой меньше 1, то въ силу неравенства (*b*) этотъ второй корень долженъ былъ бы также быть больше 0. Слѣдовательно, въ промежуткѣ 0...1 заключался бы одинъ только корень. Такъ какъ $f(0) > 0$, то дожно было бы быть $f(1) < 0$, что противорѣчитъ неравенству (*c*). *Прим. ред.*

**) Такъ какъ изъ условія (d) видно, что сумма корней $-n < 2$, то они не могутъ быть оба > 1. *Прим. ред.*

$$n < -2\sqrt{p},$$

или:

$$n > 2\sqrt{p}.$$

Но такъ какъ только первая возможность совмѣстима съ неравенствомъ $n < 0$, то должно быть:

$$\begin{cases} p > 0, \\ n < -2\sqrt{p}, \\ n > -p-1, \\ n > -2. \end{cases}$$

Неравенства $n < 0$ нѣтъ надобности приписывать. Остается изслѣдовать, для какихъ значеній p эти неравенства будутъ совмѣстными, несовмѣстными или неопредѣленными.

Если p больше 1, то $-p-1$ меньше -2, и слѣдуетъ сохранить лишь неравенство $n > -2$, изъ котораго вытекаетъ $n > -p-1$; но если p лежитъ между 0 и 1, то $-p-1$ больше -2, и теперь намъ нужно, обратно, сохранить неравенство $n > -p-1$, имѣющее слѣдствіемъ $n > -2$.

Если p больше 1, то $-2\sqrt{p}$ меньше -2, и n не можетъ быть одновременно меньше $-2\sqrt{p}$ и больше -2. Слѣдовательно, мы должны принять:

$$(4) \qquad \begin{cases} 0 < p < 1, \\ -p-1 < n < -2\sqrt{p}. \end{cases}$$

Оба неравенства совмѣстны, такъ какъ очевидно:

$$-p-1 < -2\sqrt{p};$$

въ самомъ дѣлѣ это неравенство сводится къ слѣдующему:

$$p - 2\sqrt{p} + 1 > 0,$$

или:

$$(\sqrt{p}-1)^2 > 0.$$

Условія (4) необходимы и достаточны для того, чтобы задача имѣла два рѣшенія.

2. Для того, чтобы имѣло мѣсто лишь одно рѣшеніе, необходимо и достаточно, чтобы $f(0)$ и $f(1)$ имѣли противоположные знаки, т. е. чтобы было

$$p(1+n+p) < 0.$$

Это неравенство требуетъ, чтобы было либо

$$(5)\qquad \begin{cases} p > 0, \\ 1 + n + p < 0, \end{cases}$$

либо же:

$$(6)\qquad \begin{cases} p < 0, \\ 1 + n + p > 0. \end{cases}$$

Это — случаи, когда имѣется одно рѣшеніе; въ другихъ случаяхъ нѣтъ ни одного.

Результаты изслѣдованія могутъ быть представлены слѣдующей таблицей:

$p < 0$	$n < -p - 1$	нѣтъ рѣшенія
	$n > -p - 1$	одно рѣшеніе
$0 < p < 1$	$n < -p - 1$	нѣтъ рѣшенія
	$-p - 1 < n < -2\sqrt{p}$	два рѣшенія
	$-2\sqrt{p} < n$	одно рѣшеніе
$p > 1$	$n > -p - 1$	нѣтъ рѣшенія
	$n < -p - 1$	одно рѣшеніе

Мы предоставляемъ читателю разсмотрѣть предѣльные случаи, въ которыхъ нѣкоторыя изъ неравенствъ замѣняются равенствами.

ЗАДАЧИ КЪ XVIII-ой ГЛАВѢ.

434. Нѣкоторое поле имѣетъ форму квадрата. Какъ велика сторона квадрата, если, увеличивая одну сторону на 2 м. и уменьшая другую на 10 м., получимъ прямоугольникъ, площадь котораго равна 88 аровъ? Произвести изслѣдованіе.

435. Данъ прямоугольный треугольникъ, катеты котораго имѣютъ длины въ 3 м. и 4 м. (5 м. и 12 м). Требуется опредѣлить на гипотенузѣ точку, разстояніе которой отъ вершины прямого угла равно 2 м. (3 м.). За неизвѣстное x слѣдуетъ принять разстояніе искомой точки отъ той вершины треугольника, которая противолежитъ сторонѣ въ 3 м. (5 м.).

436. Найти катеты прямоугольнаго треугольника, гипотенуза котораго равна 13 м., а площадь 30 кв. м.

437. Какое значеніе слѣдуетъ придать перемѣнной t, чтобы система:

$$(3+t)x+4y=5-3t,$$
$$2x+(5+t)y=8$$

была невозможной или неопредѣленной?

438. Дана прямая и двѣ точки F и F', лежащія по одну сторону этой прямой. Найти на этой прямой точку M, для которой:

$$MF+MF'=2a \text{ см.},$$

гдѣ a есть данное число. Произвести изслѣдованіе.

Нужно обозначить проекціи точекъ F и F' на данную прямую черезъ P и P' и положить:

$$FP=d \text{ см.},\quad F'P'=d' \text{ см.},\quad PP'=2c \text{ см.},\quad PM=x \text{ см.}$$

439. Данъ треугольникъ ABC. Требуется раздѣлить его прямою, параллельною сторонѣ BC, на двѣ части такъ, чтобы отношеніе площадей этихъ частей было равно данному числу m. Произвести изслѣдованіе.

440. Даны два взаимно перпендикулярныхъ діаметра круга AB и CD. Проведемъ черезъ точку A сѣкущую, которая образуетъ съ прямой AB уголъ φ. Эта сѣкущая пересѣчетъ прямую CD въ нѣкоторой точкѣ P, а окружность (кромѣ A) въ точкѣ Q. Опредѣлить уголъ φ такъ, чтобы $PQ=a$ см. Произвести изслѣдованіе.

441. Дана окружность съ центромъ 0, точка A на окружности и прямая D. Провести черезъ точку A прямую, для которой, если обозначимъ точку ея пересѣченія съ прямой D черезъ P, а точку пересѣченія ея съ окружностью черезъ Q, имѣетъ мѣсто равенство:

$$AP=mAQ,$$

гдѣ m — данное число. Обозначить черезъ C точку пересѣченія прямой OA съ прямой D, черезъ α уголъ, образуемый прямыми AO и D, черезъ R — число, измѣряющее отрѣзокъ AO, черезъ a — число, измѣряющее отрѣзокъ AC и черезъ x — (неизвѣстный) уголъ APQ съ прямой AO.

442. Въ обществѣ, состоящемъ изъ 14 лицъ, мужчинъ и женщинъ, всѣ мужчины вмѣстѣ и всѣ женщины вмѣстѣ издержали по 24 р. Каждый мужчина издержалъ на 1 р. больше, чѣмъ женщина. Изъ сколькихъ мужчинъ и изъ сколькихъ женщинъ состояло это общество?

443. Нѣкто долженъ прибавить извѣстное число къ 4, потомъ это же число вычесть изъ 9 и, наконецъ, оба полученныя такимъ образомъ числа перемножить. Онъ ошибается, прибавляетъ данное число къ 9, вычитаетъ изъ него 4 и перемножаетъ оба полученныя такимъ образомъ числа. Несмотря на это, результатъ получается правильный. Какое число было задано?

444. Нѣкоторое количество монетъ можетъ быть сложено въ квадратъ, причемъ каждая сторона квадрата содержитъ 51 монету. Если бы то же число монетъ было сложено въ два квадрата, то сторона

одного изъ этихъ квадратовъ заключала бы на 21 монету больше, чѣмъ сторона другого. Сколько монетъ содержатъ стороны каждаго квадрата?

445. Два тѣла движутся, выходя изъ точекъ A и B по прямой линіи на встрѣчу другъ другу, и встрѣчаются по истеченіи 32 секундъ. Одно изъ этихъ тѣлъ употребляетъ на прохожденіе разстоянія отъ A до B на 48 секундъ больше, чѣмъ другое. Сколько времени нужно каждому тѣлу для того, чтобы пройти это разстояніе?

446. Судно должно употребить 4 ч. 12 м., чтобы проплыть по рѣкѣ 12 км. противъ теченія и потомъ то же разстояніе по теченію. Скорость теченія равна 3 км. въ часъ. Съ какой скоростью подвигается судно?

447. Два человѣка выходятъ одновременно изъ точки A и направляются къ точкѣ B, удаленной отъ A на 20 км. Одинъ дѣлаетъ въ часъ на 1 км. больше другого и приходитъ часомъ раньше въ B. Какъ велики ихъ скорости?

448. Въ прямоугольникѣ, стороны котораго равны a см. и b см., начерченъ другой прямоугольникъ. Стороны внутренняго прямоугольника находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ сторонъ наружнаго прямоугольника, а площадь внутренняго прямоугольника равна n-той части остальной площади наружнаго прямоугольника. Опредѣлить длины сторонъ внутренняго прямоугольника. Примѣнить рѣшеніе къ случаю:

$$a=4\,,\qquad b=3\,,\qquad n=1\,.$$

449. Вписать прямоугольникъ данной площади въ треугольникъ. Произвести изслѣдованіе.

450. Вписать въ шаръ цилиндръ, поверхность котораго имѣетъ данную величину. Произвести изслѣдованіе.

451. Даны двѣ прямыя, образующія уголъ α, и на одной изъ нихъ двѣ точки A и B, которыя лежатъ на разстояніяхъ a см. и b см. отъ точки ихъ пересѣченія O. Опредѣлить на другой прямой такую точку M, чтобы уголъ AMB былъ равенъ данному углу α. Принять OM за неизвѣстную. Произвести изслѣдованіе.

452. Дана полуокружность діаметра AB. Пусть M будетъ точка этой полуокружности, а P—проекція точки M на прямую AB. Опредѣлить разстояніе AP подъ условіемъ:

$$AP+PM=mAB,$$

гдѣ m обозначаетъ данное число. Произвести изслѣдованіе.

Глава XIX.

ИЗСЛѢДОВАНІЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНІЕ ХОДА ИЗМѢНЕНІЙ ГОМОГРАФИЧЕСКОЙ ФУНКЦІИ.

I. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ.

206. Опредѣленіе. Подъ гомографической функціей разумѣютъ функцію:

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}, \tag{1}$$

гдѣ a, b, a', b' обозначаютъ данныя постоянныя числа. Гомографическая функція заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, линейную функцію, въ которую она переходитъ при $a' = 0$. Поэтому мы предположимъ, что $a' \neq 0$, такъ какъ линейная функція уже нами изслѣдована и нѣтъ надобности къ ней возвращаться.

Разсмотримъ сначала частный случай, когда:

$$a = b' = 0, \quad a' = b = 1.$$

Уравненіе (1) принимаетъ тогда видъ:

$$y = \frac{1}{x}.$$

207. Изслѣдованіе линіи $y = \frac{1}{x}$. Въ случаѣ функціи $y = \frac{1}{x}$ перемѣнное y имѣетъ всегда тотъ же знакъ, что и x; далѣе, абсолютное значеніе y тѣмъ больше, чѣмъ меньше абсолютное значеніе x, и обратно.

Выбравъ единицы длины, нанесемъ на черт. 46 слѣдующія абсциссы:

$\overline{OC'} = -4,\ \overline{OB'} = -2,\ \overline{OA'} = -1,\ \overline{OD'} = -\frac{1}{2},\ \overline{OE'} = -\frac{1}{4}$

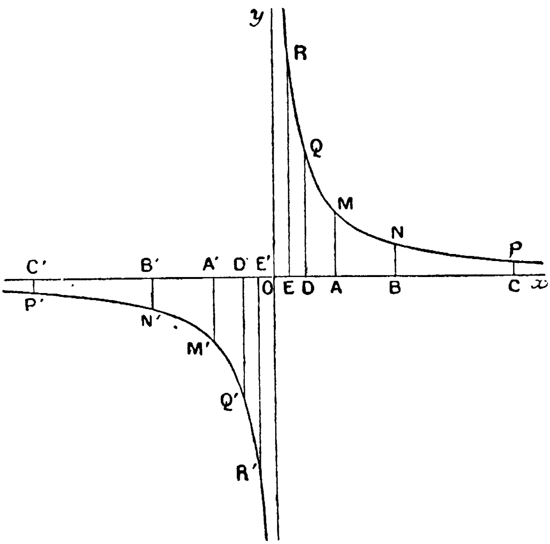
$\overline{OC} = 4,\quad \overline{OB} = 2,\quad \overline{OA} = 1,\quad \overline{OD} = \frac{1}{2},\quad \overline{OE} = \frac{1}{4}.$

Соотвѣтствующія имъ ординаты имѣютъ значенія:

$\overline{C'P'} = -\frac{1}{4},\ \overline{B'N'} = -\frac{1}{2},\ \overline{A'M'} = -1,\ \overline{D'Q'} = -2,\ \overline{E'R'} = -4,$

$\overline{CP} = \frac{1}{4},\quad \overline{BN} = \frac{1}{2},\quad \overline{AM} = 1,\quad \overline{DQ} = 2,\quad \overline{ER} = 4.$

Если мы соединимъ точки P', N', M', Q', R' и точно такъ же точки P, N, M, Q, R непрерывной линіей, то получимъ двѣ криволинейныя вѣтви, какъ видно на чертежѣ. Такъ какъ обѣ вѣтви опредѣляются однимъ и тѣмъ же уравненіемъ, то говорятъ, что онѣ составляютъ одну кривую; мы называемъ ее гиперболой.



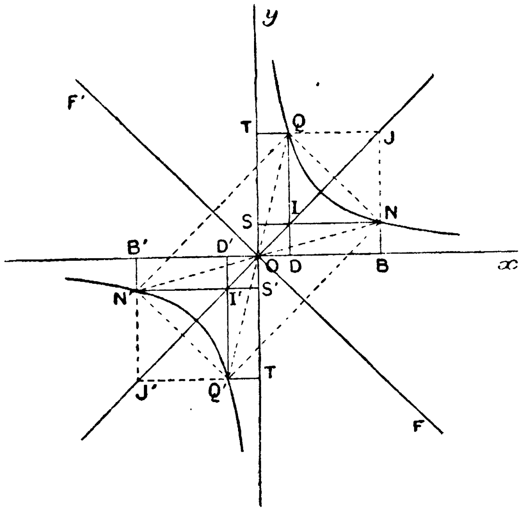
Фиг. 46.

Точно такъ же, какъ у параболы, вѣтви гиперболы безконечны т. е. могутъ быть продолжены неограниченно; при выполненіи чертежа насъ ограничиваютъ только размѣры бумаги или доски, которыми мы пользуемся.

Если, напримѣръ, мы даемъ абсциссѣ x все бóльшія и бóльшія положительныя значенія, то точка C неограниченно отодвигается вправо и ордината CP становится все меньше и меньше. Но такъ какъ она остается всегда положительной, то отсюда слѣдуетъ, что полученная такимъ образомъ безконечная вѣтвь неограниченно приближается къ оси Ox; относительно этой оси говорятъ, что она является **асимптотой** вѣтви.

Опредѣленіе. Прямая называется асимптотой безконечной вѣтви кривой, если разстояніе точки этой вѣтви отъ прямой неограниченно приближается къ нулю, когда эта точка безпредѣльно удаляется по вѣтви.

Мы видимъ что для вѣтви $R'\,Q'\,M'\,N'\,P'$, продолженной влѣво, асимптотой будетъ служить Ox и что для вѣтвей $PNMQR$ и $P'N'M'Q'R'$ асимптотой будетъ прямая Oy. Мы можемъ вывести эти свойства также изъ замѣчаній, которыя мы сейчасъ сдѣлаемъ относительно симметріи гиперболы.



Фиг. 47.

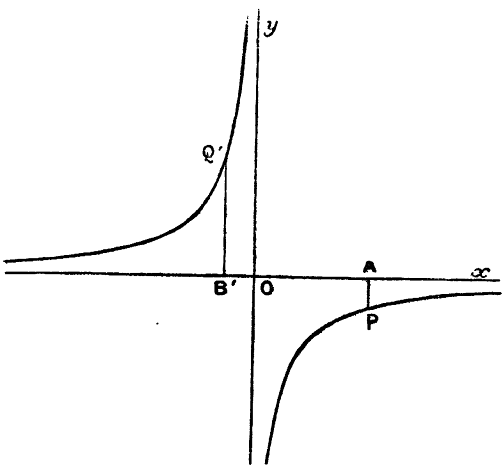
208. Центръ симметріи и оси симметріи. Разсмотримъ точки N, Q, N', Q' гиперболы (черт. 47), координаты которыхъ имѣютъ слѣдующія значенія:

$$
\begin{array}{llll}
N: & x = \overline{OB} = \overline{SN} = 2 & & y = \overline{BN} = \overline{OS} = \frac{1}{2} \\
Q: & x = \overline{OD} = \overline{TQ} = \frac{1}{2} & & y = \overline{DQ} = \overline{OT} = 2 \\
N': & x = \overline{OB'} = \overline{S'N'} = -2 & & y = \overline{B'N'} = \overline{OS'} = -\frac{1}{2} \\
Q': & x = \overline{OD'} = \overline{T'Q'} = -\frac{1}{2} & & y = \overline{D'Q'} = \overline{OT'} = -2.
\end{array}
$$

Мы видимъ, что $\overline{OD} = \overline{OS}$ и $\overline{OB} = \overline{OT}$. Слѣдовательно, четырехугольники $ODIS$ и $OBJT$ суть квадраты, равно какъ и четырехугольники $OD'I'S'$ и $O'B'J'T'$. Отсюда слѣдуетъ, что точки I, J, I', J' лежатъ на равнодѣлящей угла xOy, общей діагонали квадратовъ $NIQJ$ и $N'I'Q'J'$. Эта прямая IOI' перпендикулярна къ отрѣзкамъ NQ и $N'Q'$ и проходитъ черезъ ихъ середины. Поэтому она представляетъ собой ось симметріи гиперболы; точки N и N' расположены симметрично съ Q и Q' по отношенію къ прямой IOI'.

Точка O называется центромъ гиперболы; каждой точкѣ N гиперболы соотвѣтствуетъ точка N', симметричная съ ней по отношенію къ O; это видно непосредственно изъ чертежа.

Наконецъ, изъ существованія оси симметріи и лежащаго на этой оси центра вытекаетъ существованіе второй оси симметріи FOF', перпендикулярной къ первой и проходящей черезъ центръ; она служитъ биссектрисой угла, смежнаго съ угломъ xOy; дѣйствительно, четырехугольникъ $NQN'Q'$, стороны котораго NQ и $N'Q'$ равны и параллельны и діаногали котораго имѣютъ одинаковую длину, есть прямоугольникъ. Поэтому прямая FOF' перпендикулярна къ отрѣзкамъ NQ' и $N'Q$ и проходитъ черезъ ихъ середины.



Фиг. 48.

Такимъ образомъ мы доказали существованіе центра и двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей симметріи.

209. Ходъ измѣненій кривой $y = \frac{c}{x}$. Теперь разсмотримъ случай, когда $a = b' = 0$, $a' = 1$, $b = -1$, такъ что имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$y = -\frac{1}{x}.$$

Разсужденія ведутся здѣсь совершенно подобно тому, что изложено выше. Единственная разница заключается въ томъ, что y имѣетъ всегда знакъ, противоположный знаку перемѣнной x, такъ что кривая лежитъ не въ углѣ xOy и противоположномъ ему при вершинѣ, а въ двухъ другихъ углахъ, образуемыхъ осями (черт. 48); положительной абсциссѣ $\overline{OA}$ отвѣчаетъ отрицательная ордината $\overline{AP}$, а отрицательной абсциссѣ $\overline{OB'}$—положительная ордината $\overline{B'Q'}$. То, что мы сказали относительно асимптотъ, центра и осей симметріи, остается и здѣсь въ силѣ.

Теперь разсмотримъ кривую, которая получается, если

$$a = b' = 0,\ a' = 1,\ b = c,$$

ея уравненіе будетъ, слѣдовательно:

$$y = \frac{c}{x},$$

гдѣ c есть положительное число, отличное отъ 1. Тогда мы можемъ положить $c = a^2$, гдѣ $a = \sqrt{c}$ есть положительное число, и мы получимъ уравненіе кривой въ видѣ:

$$y = \frac{a^2}{x},$$

которое мы можемъ написать еще такъ:

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{\frac{x}{a}}.$$

Слѣдовательно, кривая эта тождественна съ кривой

$$y = \frac{1}{x},$$

если для изображенія этой послѣдней мы выберемъ единицу длины въ a разъ большую, чѣмъ та единица длины, которую мы взяли для изображенія кривой $y = \frac{a^2}{x}$. Если, напримѣръ, $a = 10$, то кривая

$$\frac{1}{10} y = \frac{1}{\frac{1}{10} x},$$

изображенная въ милиметрахъ, совпадаетъ съ кривой

$$y = \frac{1}{x},$$

изображенной въ сантиметрахъ.

Если нужно изобразить кривую

$$y = \frac{c}{x},$$

гдѣ коэффиціентъ c есть число отрицательное, то можно положить $c = -a^2$, такъ что $a = \sqrt{-c}$ опять есть число положительное. Тогда:

$$\frac{y}{a} = \frac{-1}{\frac{x}{a}},$$

и мы получимъ кривую, которая при соотвѣтствующемъ выборѣ единицы длины тождественна съ кривой

$$y = \frac{-1}{x}.$$

II. ОБЩІЙ СЛУЧАЙ.

210. Предварительныя замѣчанія. Гомографическая функція опредѣляется уравненіемъ:

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}. \tag{1}$$

Если мы освободимъ его отъ знаменателя и перенесемъ всѣ члены въ лѣвую часть, то уравненіе приметъ видъ:

$$a'xy + b'y - ax - b = 0. \tag{2}$$

Это—общее гомографическое уравненіе съ двумя перемѣнными x и y; такъ называется уравненіе, которое является уравненіемъ первой степени по отношенію къ каждой изъ перемѣнныхъ x и y. Оно не будетъ, однако, вообще уравненіемъ первой степени по отношенію къ совокупности перемѣнныхъ x и y; это бываетъ лишь въ томъ случаѣ, если a' равно нулю.

Обратно, каждое гомографическое уравненіе съ двумя перемѣнными имѣетъ видъ:

$$Axy + Bx + Cy + D = 0.$$

Мы можемъ его рѣшить либо относительно y, либо относительно x и получимъ:

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C},$$

$$x = -\frac{Cy + D}{Ay + B}.$$

Мы видимъ, что x есть гомографическая функція перемѣнной y и, обратно, y есть гомографическая функція перемѣнной x. Каждому значенію x соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе y въ предположеніи, конечно, что частное имѣетъ смыслъ, т. е. что знаменатель не обращается въ нуль; обратно, каждому значенію y соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе x; ниже (п. **215**) будетъ, впрочемъ, разсмотрѣнъ одинъ особенный случай.

Въ частности, гомографическое уравненіе (2), которое мы вывели изъ соотношенія (1), даетъ:

$$x = \frac{-b'y+b}{a'y-a}; \tag{3}$$

это уравненіе для насъ будетъ важно при изслѣдованіи уравненія (1) (п. **215**).

Если мы дадимъ перемѣнной x въ уравненіи (1) два различныхъ значенія x_1 и x_2 и соотвѣтствующія значенія y обозначимъ черезъ y_1 и y_2, то получимъ:

$$y_1 = \frac{ax_1+b}{a'x_1+b'},$$

$$y_2 = \frac{ax_2+b}{a'x_2+b'}.$$

Отсюда съ помощью вычитанія получимъ:

$$y_2 - y_1 = \frac{ax_2+b}{a'x_2+b'} - \frac{ax_1+b}{a'x_1+b'}$$

$$= \frac{(ax_2+b)(a'x_1+b')-(ax_1+b)(a'x_2+b')}{(a'x_2+b')(a'x_1+b')},$$

или, послѣ легкаго упрощенія:

$$y_2 - y_1 = \frac{(ab'-ba')(x_2-x_1)}{(a'x_2+b')(a'x_1+b')}. \tag{4}$$

Мы видимъ, что знакъ разности $y_2 - y_1$ зависитъ отъ знаковъ четырехъ выраженій $x_2 - x_1$, $a'x_2+b'$, $a'x_1+b'$ и $ab'-ba'$. Мы скоро вернемся къ слѣдствіямъ этой важной формулы. Въ данный моментъ отмѣтимъ еще, что изъ соотношенія:

$$ab'-ba' = 0 \tag{5}$$

слѣдуетъ:

$$y_2 - y_1 = 0,$$

если только x_1 или x_2 не получаютъ такихъ частныхъ значеній, при которыхъ знаменатель формулы (4) исчезаетъ одновременно съ числителемъ. Если имѣетъ мѣсто равенство (5), то говорятъ, что мы имѣемъ дѣло съ особеннымъ случаемъ или съ особеннымъ гомографическимъ уравненіемъ. Этотъ случай мы здѣсь оставляемъ въ сторонѣ и лишь въ концѣ главы скажемъ о немъ нѣсколько словъ.

Не слѣдуетъ смѣшивать выраженій особенный случай и частный случай, такъ какъ съ этими двумя названіями связаны различныя представленія. Каждый опредѣленный случай есть въ извѣстномъ смыслѣ частный, т. е., если мы величинамъ a, b, a', b' дадимъ численныя значенія, напримѣръ 12, 15, —3, 7, то получимъ частный случай гомографической функціи; однако, какъ мы увидимъ ниже, въ этихъ различныхъ частныхъ случаяхъ, точно такъ же, какъ и въ тѣхъ частныхъ случаяхъ, которые мы разсмотрѣли раньше, свойства функціи и изображающей кривой остаются, въ сущности, одни и тѣ же; детальное изслѣдованіе каждаго изъ этихъ частныхъ случаевъ производится такъ же, какъ и изслѣдованіе общаго случая; а именно, соотвѣтствующая кривая, какъ мы увидимъ, будетъ всегда гиперболой.

Особенными мы называемъ, напротивъ того, такіе случаи, въ которыхъ, вслѣдствіе особаго соотношенія между коэффиціентами (въ данномъ случаѣ равенства: $ab' - ba' = 0$), свойства функціи сильно измѣняются; въ случаѣ особенной гомографической функціи, какъ мы увидимъ ниже, гипербола не является геометрическимъ ея изображеніемъ. Въ совокупности опредѣленныхъ соотношеніемъ (5) особенныхъ случаевъ гомографической функціи мы можемъ опять различать столько частныхъ случаевъ, сколько частныхъ численныхъ значеній можно придать буквамъ a, b, a', b', подъ условіемъ, чтобы имѣло мѣсто равенство (5).

211. Изслѣдованіе хода измѣненій гомографической функціи. Гомографическая функція

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

равна частному отъ дѣленія двухъ линейныхъ функцій. При изслѣдованіи функціи, представляющей частное двухъ многочленовъ, нужно прежде всего обратить вниманіе на значеніе или значенія перемѣнныхъ, для которыхъ знаменатель равенъ нулю, или короче: на нулевыя точки знаменателя. Именно, для этихъ значенiй функцiя вообще обращается въ безконечность: это—одно изъ обстоятельствъ, наиболѣе заслуживающихъ вниманiя при изслѣдованiи хода измѣненiй этой функцiи.

Въ разсматриваемомъ случаѣ знаменатель исчезаетъ, если:

$$a'x+b'=0,$$

т. е. при

$$x=-\frac{b'}{a'}.$$

Положимъ:

$$-\frac{b'}{a'}=x',$$

т. е. обозначимъ черезъ x' то значенiе x, для котораго знаменатель y обращается въ нуль; такое значенiе всегда существуетъ, потому что $a'\neq 0$. При $x=x'$ числитель отличенъ отъ нуля; въ самомъ дѣлѣ, если бы онъ обращался въ нуль при $x=x'$, то должно было бы быть:

$$ax'+b=0,$$

или же

$$-a\frac{b'}{a'}+b=0,$$

или, наконецъ:

$$ab'-ba'=0,$$

т. е. функцiя была бы особенной, что мы исключили. Итакъ, при $x=x'$ въ выраженiи функцiи y знаменатель обращается въ нуль, а такъ какъ числитель не равенъ нулю, то y при $x=x'$ обращается въ безконечность. Говорятъ, что x' есть полюсъ функцiи y; это находится въ согласiи со слѣдующимъ общимъ опредѣленiемъ.

Опредѣленiе. Подъ полюсами дроби разумѣютъ тѣ значенiя перемѣнныхъ, при которыхъ дробь обращается въ безконечность вслѣдствiе того, что знаменатель ея исчезаетъ, а числитель отличенъ отъ нуля.

Теорема 76. Не особенная гомографическая функцiя имѣетъ всегда одинъ и только одинъ полюсъ: $\frac{-b'}{a'}$.

Теперь вернемся къ формулѣ:

$$y_2-y_1=\frac{(ab'-ba')(x_2-x_1)}{(a'x_2+b')(a'x_1+b')}. \tag{4}$$

Сначала предположимъ, что

$$x_2 > x_1 > x'.$$

Въ этомъ случаѣ двучлены $a'x_2 + b'$ и $a'x_1 + b'$ имѣютъ оба знакъ a', т. е. оба имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ. Слѣдовательно, ихъ произведеніе имѣетъ положительное значеніе. По предположенію $x_2 - x_1$ есть тоже положительное число. Поэтому разность $y_2 - y_1$ имѣетъ тотъ же знакъ, что и выраженіе $ab' - ba'$.

При предположеніи, что

$$x_1 < x_2 < x',$$

мы получаемъ то же самое; въ самомъ дѣлѣ, значенія двучленовъ $a'x_1 + b'$ и $a'x_2 + b'$ имѣютъ оба знакъ, противоположный знаку коэффиціента a'; они имѣютъ, слѣдовательно, одинаковые знаки и произведеніе ихъ будетъ опять положительнымъ. Поэтому имѣетъ мѣсто теорема:

Теорема 77. Если x возрастаетъ, оставаясь при этомъ все время больше или все время меньше, чѣмъ x', то гомографическая функція постоянно возрастаетъ или постоянно убываетъ, смотря по тому имѣетъ ли $ab' - ba'$ положительное или отрицательное значеніе.

Чтобы вполнѣ изслѣдовать ходъ измѣненій функціи y, остается прослѣдить, что происходитъ, если x обращается въ безконечность. Имѣемъ:

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{a + \frac{b}{x}}{a' + \frac{b'}{x}}.$$

Слѣдовательно, если x становится все больше и больше, то $\frac{b}{x}$ и $\frac{b'}{x}$ становятся все меньше и меньше по абсолютному значенію, и y все меньше отличается отъ дроби $\frac{a}{a'}$. Короче говорятъ, что y при $x = \infty$ равно $\frac{a}{a'}$. Это значитъ, что y тѣмъ менѣе отличается отъ $\frac{a}{a'}$, чѣмъ больше абсолютное значеніе x*).

*) Это опредѣленіе не точно. Дѣло не въ томъ, что y все менѣе отличается отъ $\frac{a}{a'}$, а въ томъ, что y подходитъ къ $\frac{a}{a'}$ неограниченно близко. *Прим. ред.*

Теперь мы обладаемъ необходимыми данными, чтобы изобразить ходъ измѣненій гомографической функціи и можемъ составить нижеприведенную таблицу, при чемъ мы различаемъ два случая, въ зависимости отъ того, будетъ ли $ab' - ba'$ имѣть положительное или отрицательное значеніе.

Для значенія $x = x'$ функція y обращается въ безконечность. Далѣе, y возрастаетъ, если выраженіе $ab' - ba'$ имѣетъ положительное значеніе. Если, слѣдовательно, x возрастаетъ отъ значенія x_1, меньшаго, чѣмъ x', до x', то y становится безконечнымъ, оставаясь положительнымъ. Съ другой стороны, если x возрастаетъ дальше, становясь больше чѣмъ x', то y все еще возрастаетъ и принимаетъ тогда абсолютно очень большія отрицательныя значенія; поэтому здѣсь долженъ имѣть мѣсто разрывъ функціи.

Таблица хода измѣненій гомографической функціи:

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'},$$

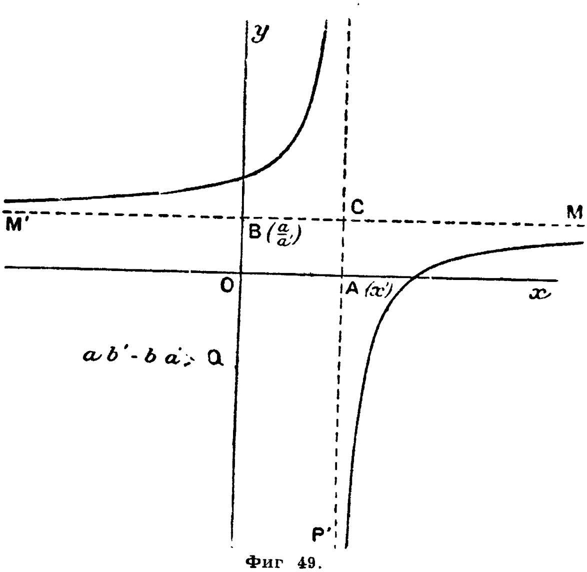
если $a' \neq 0, \quad ab' - ba' \neq 0$

x	$-\infty$,	возрастаетъ,	$x' = -\frac{b'}{a'}$,	возрастаетъ,	$+\infty$
$ab' - ba' > 0$ y	$\frac{a}{a'}$,	возрастаетъ,	∞,	возрастаетъ,	$\frac{a}{a'}$
$ab' - ba' < 0$ y	$\frac{a}{a'}$,	убываетъ,	∞,	убываетъ,	$\frac{a}{a'}$

Говорятъ, что y дѣлаетъ скачокъ отъ $+\infty$ до $-\infty$, если x, возрастая, проходитъ черезъ значеніе x'.

Если же $ab' - ba'$ есть число отрицательное, то y дѣлаетъ скачокъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, когда x, возрастая, проходитъ значеніе x'. Это можетъ быть лучше разъяснено съ помощью геометрическаго изображенія.

212. Геометрическое изображеніе. Очень легко теперь изобразить геометрически ходъ измѣненій функціи y, различая, однако, случаи, когда $ab' - ba'$ имѣетъ положительное или отрицательное значеніе (фиг. 49 и 50). Возьмемъ на оси Ox точку A, абсцисса которой есть x', и на оси Oy—точку B, ордината которой есть $\frac{a}{a'}$. Чертежи будутъ представлять незначительное различіе въ зависимости отъ того, будутъ ли эти величины имѣть положительныя или отрицательныя значенія. Мы не можемъ, однако, изобразить здѣсь всѣ случаи; читатель найдетъ ихъ въ задачахъ. Проведемъ прямую $P'AP$, параллельную оси Oy, и прямую $M'BM$, параллельную оси Ox. Эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ C. Если x получаетъ отрицательныя значенія, очень большія по абсолютной величинѣ, то значеніе y очень близко къ $\frac{a}{a'}$. Слѣдовательно, кривая неограниченно приближается къ прямой $M'B$, эта прямая является асимптотой ея. Далѣе, намъ извѣстно, что y, смотря по знаку числа $ab' - ba'$, постоянно возрастаетъ или убываетъ. Отсюда слѣдуетъ, что для отрицательныхъ значеній x кривая при положительномъ $ab' - ba'$ лежитъ выше асимптоты, а при отрицательномъ $ab' - ba'$—ниже асимптоты $M'BM$. Если теперь x возрастаетъ отъ $-\infty$ до x', то y продолжаетъ измѣняться въ томъ же смыслѣ. Для $x = x'$ y обра-



Фиг. 49.

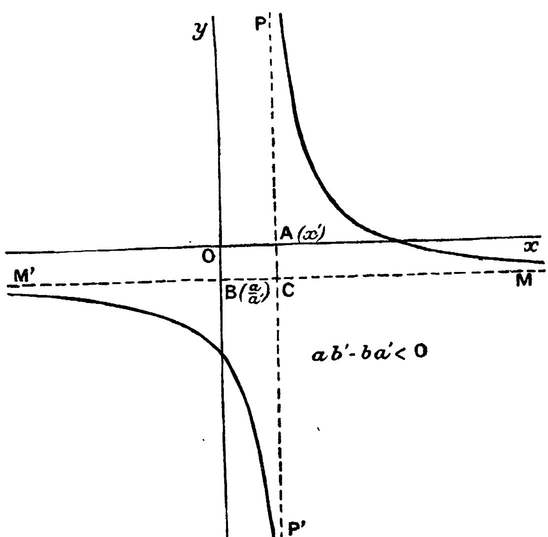
щается въ безконечность, т. е. точка кривой приближается неограниченно къ асимптотѣ $P'AP$. Точно такъ же поступаемъ въ случаѣ значеній x, лежащихъ между x' и $+\infty$.

213. Примѣнимъ предыдущіе результаты къ численнымъ примѣрамъ. Во избѣжаніе ошибокъ полезно въ этихъ примѣненіяхъ опредѣлять знакъ y для каждаго значенія x, опредѣляя знаки числителя и знаменателя. Въ этомъ, собственно, нѣтъ необходимости, такъ какъ предыдущія разсужденія для этой цѣли достаточны и знакъ ими опредѣляется. Если, однако, мы получаемъ одинъ и тотъ же результатъ разными способами, то этимъ мы предохраняемъ себя отъ ошибокъ въ вычисленіяхъ и въ разсужденіяхъ.

I. Положимъ, что требуется изслѣдовать функцію:

$$y = \frac{2x-3}{4x-1}.$$

Числитель обращается въ нуль при $x = \frac{3}{2}$; онъ имѣетъ положительное значеніе при $x > \frac{3}{2}$ и отрицательное при $x < \frac{3}{2}$. Знаменатель обращается въ нуль при $x = \frac{1}{4}$; онъ имѣетъ по-

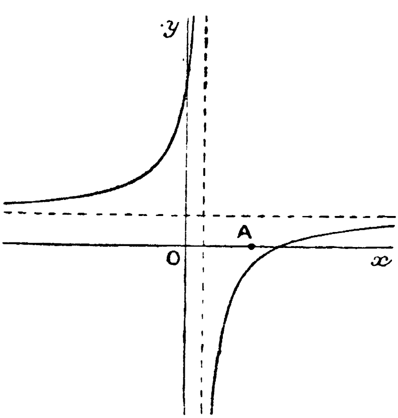


Фиг. 50.

ложительное значеніе при $x > \frac{1}{4}$ и отрицательное при $x < \frac{1}{4}$. При $x = \infty$ значеніе y равно $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Далѣе, $ab' - ba' = -2 + 12 > 0$. Поэтому мы можемъ составить слѣдующую таблицу:

x	$-\infty$	возраст.	$\frac{1}{4}$	возраст.	$\frac{3}{2}$	возраст.	$+\infty$
$2x-3$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$4x-1$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y	$+\frac{1}{2}$	$+$ возраст.	$\pm\infty$	$-$ возраст.	0	$+$ возраст.	$+\frac{1}{2}$

Эта таблица содержитъ, очевидно, лишнія данныя, которыя служатъ для повѣрки. Если, напримѣръ, функція y измѣняется отъ значенія $\frac{1}{2}$ и возрастаетъ, то она должна оставаться положительной, что и указываетъ таблица и т. д. На основаніи таблицы легко получить геометрическое изображеніе (черт. 51); отрѣзокъ OA принятъ за единицу длины.



Фиг. 51.

II. Пусть будетъ дана функція:

$$y = \frac{-2x+1}{x+2}.$$

Здѣсь числитель измѣняетъ знакъ при $x = \frac{1}{2}$, знаменатель при $x = -2$; далѣе, $ab' - ba' = -4 - 1 = -5$ есть число отрицательное, а при $x = \pm\infty$ $y = -2$. Мы имѣемъ поэтому слѣдующую таблицу (стр. 388).

Отсюда легко можно получить графическое изображеніе (черт. 52); отрѣзокъ OA принятъ за единицу длины.

x	$-\infty$	возраст.	-2	возраст.	$\frac{1}{2}$	возраст.	$+\infty$
$-2x+1$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$x+2$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y	-2	$-$ убыв.	$\mp\infty$	$+$ убыв.	0	$-$ убыв.	-2

214. Измѣненіе начала координатъ. Кривая

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'} \tag{1}$$

можетъ быть изображена проще, если мы произведемъ подобно тому, какъ мы это дѣлали въ случаѣ параболы, измѣненіе начала координатъ.

Имѣемъ:

$$y - \frac{a}{a'} = \frac{ax+b}{a'x+b'} - \frac{a}{a'} = \frac{ba' - ab}{a'(a'x+b')}$$

и

$$a'x + b' = a'\left(x + \frac{b'}{a'}\right) = a'(x - x'),$$

если опять положимъ

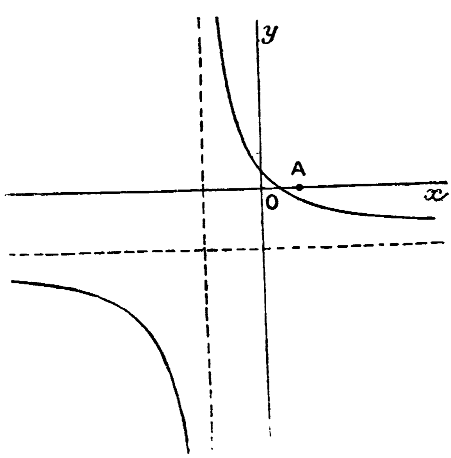
$$x' = -\frac{b'}{a'}. \tag{2}$$

Если мы положимъ еще

$$\frac{a}{a'} = y', \tag{3}$$

то получимъ:

$$y - y' = \frac{ba' - ab'}{a'^2(x-x')}.$$



Фиг. 52.

Слѣдовательно, если мы еще введемъ величину c съ помощью равенства:

$$c = \frac{ba' - ab'}{a'^2} \tag{4}$$
$$= -\frac{ab' - ba}{a'^2},$$

то получимъ:

$$(5) \qquad y - y' = \frac{c}{x - x'}.$$

Итакъ, уравненіе (1) принимаетъ видъ (5), если величины x', y', c опредѣляются равенствами (2), (3) и (4), какъ функціи отъ a, b, a', b'. При этомъ предполагаемъ лишь, что $a' \neq 0$; такъ какъ $ab' - ba'$ отлично отъ нуля, то и c отлично отъ нуля.

Если мы теперь примемъ за начало точку съ координатами $x = x'$, $y = y'$ и проведемъ черезъ O' оси $O'X$, $O'Y$, параллельныя Ox, Oy, то очевидно:

$$X = x - x',$$
$$Y = y - y';$$

точка, координаты которой по отношенію къ осямъ Ox, Oy были x, y, имѣетъ по отношенію къ осямъ $O'X$, $O'Y$ координаты X, Y. Отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ уравненіе (5) написать въ видѣ:

$$Y = \frac{c}{X},$$

т. е. свести его къ частному случаю, разсмотрѣнному нами вначалѣ. Поэтому данное уравненіе выражаетъ гиперболу, имѣющую центромъ точку O', а асимптотами—прямыя $O'X$ и $O'Y$.

Примѣръ. Примѣнимъ это къ уравненію:

$$y = \frac{x-2}{2x-1}.$$

Получаемъ:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{x-2}{2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)}.$$

Слѣдовательно:

$$Y = \frac{-\frac{3}{4}}{X};$$

при этомъ:

$$Y = y - \frac{1}{2}; \qquad X = x - \frac{1}{2}.$$

Мы предоставляемъ читателю сдѣлать чертежъ.

215. Особенный случай. Въ заключеніе скажемъ еще нѣсколько словъ объ особенномъ случаѣ, который мы вначалѣ оставили въ сторонѣ, именно о случаѣ, когда:

(6) $$ab' - ba' = 0.$$

Предполагая, что мы не имѣемъ дѣла просто съ линейной функціей, т. е. предполагая, что

$$a \neq 0,$$

мы можемъ всегда положить:

$$a = ma',$$

т. е. частное $\frac{a}{a'}$ обозначить черезъ m. Тогда уравненіе (6) принимаетъ видъ

$$ma'b' - ba' = 0,$$

или же, такъ какъ a' отлично отъ нуля:

$$b = mb'.$$

Поэтому имѣемъ тождественно:

$$ax + b = ma'x + mb' = m(a'x + b'),$$

и для y получается выраженіе:

$$y = \frac{m(a'x + b')}{a'x + b'}.$$

Если, слѣдовательно, перемѣнная x получаетъ такое значеніе, что $a'x + b'$ отлично отъ нуля, то

$$y = m.$$

Если же, наоборотъ, $a'x + b' = 0$, то y, очевидно, остается неопредѣленнымъ.

Тѣ же результаты мы получимъ изъ нашего уравненія, если рѣшимъ его относительно x (п. **210**). Тогда:

$$x = \frac{b - b'y}{a'y - a}.$$

Если мы здѣсь положимъ:

$$b' = -ha',$$

то уравненіе (6) дастъ:

$$b = -ha.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$x = \frac{h(a'y - a)}{a'y - a};$$

итакъ, $x = h$, если y отлично отъ $\frac{a}{a'} = m$, и остается неопредѣленнымъ, если $y = \frac{a}{a'} = m$.

Итакъ, если гомографическое уравненіе является особеннымъ, то y принимаетъ всегда одно и то же значеніе m, за исключеніемъ случая $x = h$, такъ какъ при этомъ значеніи x функція y остается неопредѣленной. Обратно, если значеніе y дано, то x равно h, за исключеніемъ случая $y = m$; такъ какъ при этомъ значеніи y перемѣнная x остается неопредѣленной.

Предыдущіе результаты можно вывести также изъ уравненія (5), которое приметъ слѣдующій видъ, если мы замѣнимъ x' черезъ h, y' черезъ m и освободимся отъ знаменателя:

$$(x - h)(y - m) = c.$$

Если теперь $ab' - ba' = 0$, то отсюда слѣдуетъ что $c = 0$, и предыдущее уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$(x - h)(y - m) = 0; \tag{7}$$

это и есть форма, къ которой можетъ быть приведено особенное гомографическое уравненіе.

Уравненіе (7) удовлетворяется для $x = h$ при произвольномъ y, а для $y = m$ при произвольномъ x. Геометрически изображается оно системой двухъ прямыхъ:

$$x = h,$$
$$y = m.$$

Чтобы связать этотъ случай съ обыкновенными не особенными гомографическими уравненіями, обыкновенно говорятъ, что гипербола здѣсь вырождается въ свои асимптоты (см. задачу 462).

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ XIX.

453. Построить гиперболу

$$y = \frac{2}{x}$$

принимая за единицу длины сантиметръ.

454. Построить гиперболу

$$y = \frac{-35000}{x},$$

принимая за единицу длины десятую миллиметра.

455. Построить гиперболу

$$y=\frac{0{,}002}{x},$$

принимая за единицу длины метръ.

456. Построить гиперболу.

$$y=\frac{-4{,}5}{x}$$

и прямую

$$y=-x+2,$$

принимая за единицу длины сантиметръ. Доказать, что абсциссы точекъ ихъ пересѣченія удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{-4{,}5}{x}=-x+2.$$

Вычислить корни этого уравненія и провѣрить результатъ вычисленій путемъ измѣренія на чертежѣ.

457. Рѣшить ту же задачу для гиперболы

$$y=\frac{300}{x}$$

и прямой

$$y=x+25,$$

принимая за единицу длины сантиметръ.

458. Рѣшить обѣ предыдущія задачи, пользуясь клѣтчатой бумагой.

459. Изслѣдовать ходъ измѣненій функціи:

$$y=\frac{3x+1}{x-4}$$

и изобразить ее графически, принимая за единицу длины сантиметръ.

460. Изслѣдовать ходъ измѣненій функціи

$$y=\frac{-300}{x-10}$$

и изобразить ее графически, принимая за единицу длины миллиметръ.

461. Построить гиперболу

$$y=\frac{x-2}{3x-1},$$

принимая за единицу длины сантиметръ.

462. Построить гиперболу

$$(y-2)(x-1)=\lambda,$$

принимая за единицу длины сантиметръ. Дать λ послѣдовательно слѣдующія значенія:

$$\lambda = -10, \qquad \lambda = 10,$$
$$\lambda = -4, \qquad \lambda = 4,$$
$$\lambda = -1, \qquad \lambda = 1,$$
$$\lambda = -\frac{1}{4}, \qquad \lambda = \frac{1}{4},$$
$$\lambda = -\frac{1}{10}, \qquad \lambda = \frac{1}{10},$$
$$\lambda = 0.$$

Всѣ эти кривыя нужно построить на той же бумагѣ и при тѣхъ же осяхъ Ox и Oy.

463. Опредѣлить коэффиціенты гомографическаго уравненія

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

изъ условія, что это уравненіе удовлетворяется при слѣдуюшихъ совмѣстныхъ системахъ значеній x и y:

$$x = 1, \qquad y = 3;$$
$$x = 2, \qquad y = 5;$$
$$x = 4, \qquad y = -2.$$

Это опредѣленіе можно осуществить безконечно многими способами, такъ какъ значеніе дроби y не измѣняется, если коэффиціенты a, b, a', b' будутъ умножены на одно и то же число, отличное отъ нуля. Выбрать этого множителя такъ, чтобы цѣлыя числа a, b, a', b' не имѣли общаго дѣлителя и чтобы a было положительнымъ числомъ. Тогда задача является вполнѣ опредѣленной. Сдѣлать чертежъ, принимая за единицу длины сантиметръ.

464. Рѣшить ту же задачу, принимая, что значеніямъ $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ соотвѣтствуютъ по порядку значенія $y = 3, -\frac{1}{2}, -\frac{8}{3}$.

465. Показать, что гомографическое уравненіе, при условіи, что значеніямъ $x = x_1$, x_2, x_3 соотвѣтствуютъ послѣдовательно значенія $y = y_1$, y_2, y_3, можетъ быть приведено къ формѣ:

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{x - x_2}{x - x_3} : \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}.$$

Рѣшить это уравненіе относительно y и показать, что полученное т кимъ образомъ уравненіе можетъ быть приведено къ формѣ:

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

Примѣнить къ рѣшенію задачъ №№ 463 и 464.

Глава XX.

РЯДЫ И ЛОГАРИѲМЫ; СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ.

I. АРИѲМЕТИЧЕСКІЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКІЕ РЯДЫ.

216. Ариѳметическіе ряды. Числа, расположенныя въ опредѣленномъ порядкѣ, образуютъ ариѳметическій рядъ, если разность двухъ смежныхъ чиселъ всегда одна и та же, т. е. имѣетъ одно и то же абсолютное значеніе и одинъ и тотъ же знакъ. Такъ, напримѣръ, числа 3, 5, 7, 9 образуютъ ариѳметическій рядъ, такъ какъ разности $5-3$, $7-5$, $9-7$ равны 2. Точно такъ же ариѳметическій рядъ образуютъ числа 92, 82, 72, 62, 52; такъ какъ разности $82-92$, $72-82$ и т. д. равны -10. Эту постоянную разность называютъ также разностью ариѳметическаго ряда; такъ, въ первомъ изъ нашихъ примѣровъ разность есть 2, во второмъ она есть -10. Числа, образующія рядъ, называются членами ряда. Послѣдовательнымъ членамъ ряда, начиная съ перваго, относятъ числа 1, 2, 3... въ качествѣ указателей занимаемыхъ ими мѣстъ.

Если извѣстенъ первый членъ ариѳметическаго ряда и разность, то легко можно написать другіе члены. А именно, чтобы получить слѣдующій членъ, достаточно лишь прибавить къ предыдущему члену разность.

Примѣръ I. Составить ариѳметическій рядъ изъ 6 членовъ, въ которомъ первый членъ равенъ 7, а разность 5. Послѣдовательные члены этого ряда будутъ:

$$7+5=12;\ 12+5=17;\ 17+5=22;$$
$$22+5=27;\ 27+5=32;$$

искомый рядъ состоитъ, такимъ образомъ, изъ членовъ: 7, 12, 17, 22, 27, 32.

Примѣръ II. Составить ариѳметическій рядъ изъ 5 членовъ, въ которомъ первый членъ равенъ 13, а разность — 8. Поступая такимъ же образомъ, получимъ рядъ: 13, 5, — 3, — 11, — 19.

Часто нѣтъ надобности знать промежуточные члены ряда; а нужно бываетъ найти лишь значенiе члена, занимающаго опредѣленное мѣсто, напримѣръ 31-аго члена или 72-ого члена. Второй членъ получится, если къ первому прибавимъ разность; третiй членъ получится, если разность прибавимъ ко второму члену. Слѣдовательно, третiй членъ равенъ первому, увеличенному на двойную разность. Точно такъ же четвертый членъ получится, если мы къ третьему опять прибавимъ разность; отсюда четвертый членъ равенъ первому, увеличенному на тройную разность. Пятый членъ будетъ равенъ первому, увеличенному на учетверенную разность, и т. д. Сотый членъ, такимъ образомъ, равенъ первому, увеличенному на 99 разъ повторенную разность.

Правило 32. Чтобы получить значенiе члена ариθметическаго ряда, занимающаго въ этомъ ряду опредѣленное мѣсто, прибавляютъ къ первому члену произведенiе разности на число, равное указателю мѣста этого члена, уменьшенному на единицу.

Если мы обозначимъ первый членъ черезъ a, разность черезъ d, указатель мѣста, занимаемаго членомъ, черезъ n и значенiе этого члена черезъ z, то правило 32 можетъ быть выражено формулой:

$$z = a + (n - 1)\,d.$$

Если разность есть число положительное, то члены, слѣдующiе другъ за другомъ, становятся все больше и больше, и рядъ будетъ восходящiй. Напротивъ того, рядъ будетъ нисходящимъ, если разность представляетъ собой число отрицательное. Если же разность равна нулю, то всѣ члены ряда равны между собой.

217. Геометрическiе ряды. Числа, расположенныя въ опредѣленномъ порядкѣ, составляютъ геометрическiй рядъ, если частное двухъ сосѣднихъ чиселъ имѣетъ всегда одно и то же значенiе. Такъ, напримѣръ, числа 3, 6, 12, 24 составляютъ геометрическiй рядъ, такъ какъ

$$6 : 3 = 2;\; 12 : 6 = 2;\; 24 : 12 = 2.$$

Это частное 2 называется также **знаменателемъ** ряда. Точно такъ же образуютъ геометрическій рядъ числа 3600, 360, 36, 3,6, 0,36; знаменатель этого ряда есть 0,1. Числа $+2$, -3, $+\frac{9}{2}$, $\frac{-27}{4}$ образуютъ также геометрическій рядъ, знаменатель котораго есть $-\frac{3}{2}$. Числа, образующія рядъ, называются **членами ряда**. Отдѣльнымъ членамъ, начиная съ перваго, и здѣсь относятъ послѣдовательно числа 1, 2, 3,..., служащія **указателями** занимаемыхъ ими мѣстъ.

Если извѣстенъ первый членъ и знаменатель геометрическаго ряда, то легко вычислить остальные члены одинъ за другимъ, такъ какъ для полученія слѣдующаго члена достаточно предшествующій членъ умножить на знаменателя.

Примѣръ. Составить геометрическій рядъ изъ 5 членовъ, при чемъ первый членъ равенъ 625, а частное 1,2. Мы получимъ послѣдовательно: $625 \cdot 1{,}2 = 750$; $750 \cdot 1{,}2 = 900$; $900 \cdot 1{,}2 = 1080$; $1080 \cdot 1{,}2 = 1296$. Слѣдовательно, искомый рядъ будетъ: 625, 750, 900, 1080, 1296.

Часто нѣтъ надобности знать промежуточные члены и желаютъ знать лишь значеніе члена, занимающаго опредѣленное мѣсто, напримѣръ, 100-аго члена. Второй членъ получимъ, умноживъ первый на знаменателя. Точно такъ же третій членъ равенъ произведенію второго на знаменателя, т. е. равенъ произведенію перваго члена на квадратъ знаменателя. Далѣе, четвертый членъ равенъ произведенію перваго на третью степень знаменателя и т. д. Поэтому имѣетъ мѣсто слѣдующее правило:

Правило 33-ье. Чтобы получить членъ геометрическаго ряда, занимающій въ немъ опредѣленное мѣсто, нужно умножить первый членъ на степень знаменателя, показатель которой равенъ указателю мѣста искомаго члена, уменьшенному на 1.

Если обозначимъ первый членъ черезъ a, знаменателя черезъ q, указатель мѣста, занимаемаго членомъ черезъ n и искомый членъ черезъ z, то правило 33-ье можетъ быть выражено формулой:

$$z = aq^{n-1}.$$

Если частное q есть число положительное и большее 1, то члены становятся все больше и больше; тогда рядъ называется восходящимъ. Напротивъ того, рядъ называется нисходящимъ, если q есть число положительное и меньшее 1. Если q есть число отрицательное, то члены ряда имѣютъ поперемѣнно положительныя и отрицательныя значенія, абсолютное же значеніе ихъ возрастаетъ или убываетъ, въ зависимости отъ того, будетъ ли абсолютное значеніе q больше или меньше 1. Если знаменатель равенъ $+1$, то всѣ члены ряда одинаково велики. При знаменателѣ -1 члены ряда имѣютъ также одинаковое абсолютное значеніе, но знаки ихъ чередуются. Если, наконецъ, знаменатель равенъ нулю, то, начиная со второго члена, всѣ дальнѣйшіе члены равны нулю.

218. Сумма членовъ ариѳметическаго ряда. При многихъ изслѣдованіяхъ нужно бываетъ вычислить сумму нѣкотораго числа послѣдовательныхъ членовъ ариѳметическаго ряда. Мы выведемъ общую формулу, которая опредѣляетъ эту сумму. Способъ, посредствомъ котораго мы выводимъ эту формулу, находитъ себѣ, впрочемъ, примѣненіе и во многихъ другихъ изслѣдованіяхъ.

Итакъ, пусть данъ ариѳметическій рядъ, первый членъ котораго a и разность d. Если n обозначаетъ число членовъ ряда, то, какъ мы видѣли, послѣдній членъ z выражается формулой:

$$z = a + (n - 1)d.$$

Поэтому сумма s этихъ членовъ можетъ быть написана такъ:

$$S = a + [a + d] + [a + 2d] + \cdots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d].$$

Отсюда, если соединимъ подобные члены, слѣдуетъ:

$$S = na + [1 + 2 + \cdots + (n - 2) + (n - 1)]\, d.$$

Коэффиціентъ при d равенъ суммѣ $(n - 1)$ первыхъ цѣлыхъ чиселъ. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ тому, чтобы найти эту сумму. Послѣдовательныя цѣлыя числа также образуютъ ариѳметическій рядъ; слѣдовательно, опредѣленіе суммы членовъ произвольнаго ариѳметическаго ряда сводится къ опредѣленію суммы членовъ этого частнаго ариѳметическаго ряда.

Итакъ, намъ нужно найти сумму n первыхъ цѣлыхъ чиселъ, т. е. сумму

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n.$$

Первыя n цѣлыхъ чиселъ можно разсматривать еще другимъ способомъ, какъ ариѳметическій рядъ, а именно, если мы примемъ n за первый членъ, а -1 за разность.

Сообразно съ этимъ мы можемъ написать:

$$S_1 = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.$$

Если мы теперь сложимъ оба выраженія для S_1 и соединимъ члены, занимающіе въ обѣихъ правыхъ частяхъ одинаковое мѣсто, то получимъ:

$$2S_1 = [1+n] + [2+(n-1)] + \cdots + [(n-1)+2] + [n+1],$$

или:

$$2S_1 = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1).$$

Такъ какъ число скобокъ въ правой части равно n, то получимъ:

$$2S_1 = n(n+1),$$

а потому

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Это и есть сумма n первыхъ цѣлыхъ чиселъ.

Теперь легко вычислить сумму S членовъ ариѳметическаго ряда, въ которую сумма S_1 первыхъ $n-1$ натуральныхъ чиселъ входитъ въ качествѣ коэффиціента при d. Находимъ:

(1) $$S = na + \frac{n(n-1)}{2} d.$$

Впрочемъ, сумма S можетъ быть вычислена и непосредственно помощью способа, аналогичнаго тому, который мы употребляли для опредѣленія S_1. Такъ какъ

$$S = a + (a+d) + \cdots + (z-d) + z$$

и одновременно:

$$S = z + (z-d) + \cdots + (a+d) + a,$$

то помощью сложенія получимъ:

$$2S = (a+z) + (a+z) + \cdots + (a+z) + (a+z).$$

Но всѣ скобки имѣютъ одно и то же значеніе; слѣдовательно:

$$2S = n(a+z)$$

и потому

(2) $$S = \frac{n}{2}(a + z).$$

Эта формула иногда удобнѣе, чѣмъ формула (1). Съ помощью равенства

$$z = a + (n - 1) d$$

можно легко убѣдиться въ томъ, что формулы (1) и (2) согласны между собой*).

Примѣръ. Нечетныя числа образуютъ ариѳметическій рядъ съ разностью 2. Вычислимъ сумму n первыхъ нечетныхъ чиселъ:

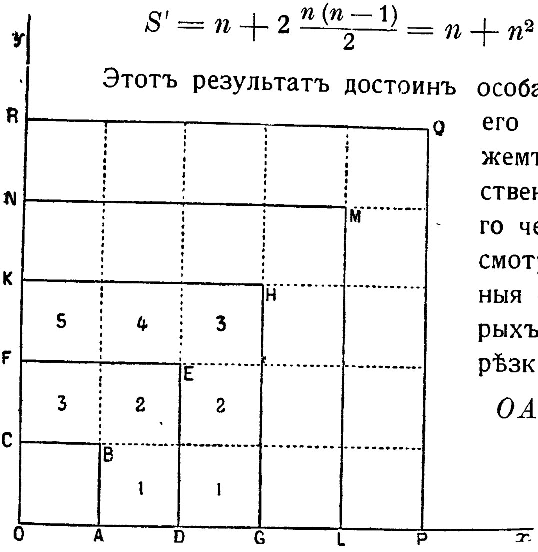
$$S' = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Здѣсь $a = 1$, $d = 2$, слѣдовательно:

$$S' = n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n + n^2 - n = n^2.$$

Этотъ результатъ достоинъ особаго вниманія вслѣдствіе его простоты. Мы можемъ его вывести непосредственно изъ очень простого чертежа (черт. 53). Разсмотримъ двѣ прямоугольныя оси Ox, Oy, на которыхъ отложены равные отрѣзки:

$$OA = AD = DG = GL = LP = OC = CF = FK = KN = NR.$$



Фиг. 53.

Начертимъ квадраты $OABC$, $ODEF$, $OGHK$, $OLMN$, $OPQR$ сплошными линіями и обозначимъ пунктиромъ линіи, которыя дѣлятъ эти квадраты на меньшіе, то-

*) Если обозначимъ формулу $z = a + (n - 1) d$ черезъ (A), то утвержденіе автора можетъ быть выражено такъ: изъ (2) и (A) вытекаетъ (1) (стоитъ только исключить d), а изъ (1) и (A) вытекаетъ (2) (стоитъ только исключить z). *Прим. ред.*

же равной величины. Одинъ изъ большихъ квадратовъ, напримѣръ, $OPQR$, содержитъ, очевидно, столько малыхъ квадратовъ, сколько единицъ заключаетъ квадратъ числа, указывающаго его мѣсто—напримѣръ, въ данномъ случаѣ $5^2 = 25$. Мы можемъ найти число малыхъ квадратовъ еще слѣдующимъ образомъ. Во-первыхъ, мы имѣемъ квадратъ $OABC$, т. е. 1 квадратъ, потомъ заключающіеся въ фигурѣ $ABCFEDA$ малые квадраты, числомъ 3, отмѣченные нумерами 1, 2, 3; потомъ 5 малыхъ квадратовъ, лежащихъ между DEF и GHK; они отмѣчены нумерами 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. Такимъ образомъ, мы находимъ, что число малыхъ квадратовъ равно:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9,$$

т. е. равно суммѣ 5 первыхъ нечетныхъ чиселъ. Изъ чертежа сразу видно, что сумма эта равна $5^2 = 25$.

Теорема 78. Сумма n первыхъ нечетныхъ чиселъ равна n^2.

Сумма квадратовъ n первыхъ цѣлыхъ чиселъ. Въ видѣ примѣненія изложенной теоріи вычислимъ сумму квадратовъ n первыхъ цѣлыхъ чиселъ, которую мы обозначимъ черезъ S_2 подобно тому, какъ сумму n первыхъ цѣлыхъ чиселъ мы обозначали черезъ S_1. Мы исходимъ изъ тождества

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1,$$

и полагаемъ послѣдовательно: $x = 1, 2, \ldots, n$. Такимъ образомъ получимъ:

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1, \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\
4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1, \\
5^3 - 4^3 &= 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1.
\end{aligned}$$

Отсюда, путемъ сложенія, находимъ:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n.$$

Если мы теперь вмѣсто S_1 подставимъ его значеніе $\frac{n(n+1)}{2}$ и отбросимъ знаменателя, то получимъ:

$$\begin{aligned}6S_2 &= 2(n^3+3n^2+3n)-3n^2-3n-2n\\ &= 2n^3+3n^2+n\\ &= n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

Поэтому:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Это и есть искомая формула; подобнымъ способомъ получится также сумма третьихъ степеней n первыхъ цѣлыхъ чиселъ.

219. Сумма членовъ геометрическаго ряда. Теперь мы разсмотримъ геометрическій рядъ, первый членъ котораго обозначимъ черезъ a, а знаменателя черезъ q. Если рядъ имѣетъ n членовъ, то послѣдній членъ z выражается формулой $z = aq^{n-1}$. Чтобы вычислить сумму:

$$S = a + aq + \cdots + aq^{n-1},$$

умножимъ обѣ части на q и получимъ:

$$Sq = aq + aq^2 + \cdots + aq^n.$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ съ помощью вычитанія получаемъ:

$$S(1-q) = a - aq^n.$$

Поэтому

$$S = a\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $q > 1$, то удобнѣе написать:

$$S = a\,\frac{q^n-1}{q-1},$$

что для S даетъ, очевидно, то же самое значеніе.

Можно также написать:

$$S = \frac{zq-a}{q-1},$$

если z обозначаетъ опять послѣдній членъ ряда *).

*) Въ самомъ дѣлѣ,

$$S = a\,\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{aq^n-a}{q-1} = \frac{zq-a}{q-1}.$$

Прим. ред.

Если знаменатель $q > 1$ (восходящій рядъ), то сумма S становится, очевидно, тѣмъ больше, чѣмъ больше дѣлается n и, въ концѣ концовъ, она превосходитъ каждое данное число. Напротивъ того, если $q < 1$ (нисходящій рядъ), то, при положительныхъ a и q, сумма S съ возрастаніемъ n все увеличивается, но не превосходитъ значенія $\frac{a}{1-q}$ и отличается отъ $\frac{a}{1-q}$ тѣмъ менѣе, чѣмъ больше n. Примѣрами нисходящихъ геометрическихъ рядовъ могутъ служить періодическія десятичныя дроби (см. задачи №№ 509 и 510).

II. ЛОГАРИѲМЫ.

220. Опредѣленіе логариѳмовъ. Мы будемъ разсматривать два восходящихъ ряда: ариѳметическій, начинающійся съ нуля, и геометрическій, начинающійся съ 1. Если мы обозначимъ разность ариѳметическаго ряда черезъ d и знаменателя геометрическаго ряда черезъ q, то эти ряды будутъ:

$$0,\quad d,\quad 2d,\quad 3d,\quad 4d, \ldots,\quad nd,$$

$$1,\quad q,\quad q^2,\quad q^3,\quad q^4, \ldots,\quad q^n.$$

Говорятъ, что каждый членъ ариѳметическаго ряда есть логариѳмъ соотвѣтствующаго члена въ геометрическомъ ряду. Такъ, напримѣръ, $3d$ представляетъ логариѳмъ q^3. Пишемъ:

$$\log q^3 = 3d,$$

а читаемъ: логариѳмъ q въ третьей степени равенъ тремъ d. Членъ q^3 называютъ также numerus отъ $3d$, т. е. числомъ, логариѳмъ котораго есть $3d$, или антилогариѳмомъ числа $3d$. Существуютъ различныя системы логариѳмовъ, потому что числа q и d могутъ быть выбраны различными способами. Однако, здѣсь мы разсмотримъ лишь систему такъ называемыхъ обыкновенныхъ логариѳмовъ, для которой логариѳмъ числа 10 равенъ 1.

Мы не будемъ здѣсь показывать, какимъ образомъ можно вычислять логариѳмы чиселъ этой системы. Мы сдѣлаемъ лишь одно замѣчаніе. Если мы для d возьмемъ очень малое число, а для q—число, близкое къ 1, то разность между смежными членами обоихъ рядовъ будетъ очень мала, и отсюда слѣдуетъ, что каждое число съ извѣстнымъ приближеніемъ будетъ содержаться въ каждомъ изъ этихъ двухъ рядовъ. Чтобы получить обыкновенные логариѳмы, берутъ въ соотвѣтственныхъ рядахъ:

$$d = 0{,}0001\,,$$

$$q = 1{,}0002303115\ldots;$$

тогда 1000-й членъ ариѳметическаго ряда равенъ 1, а 10000-ый членъ геометрическаго ряда равенъ 10.

Составлены таблицы, содержащія логариѳмы и антилогариѳмы всѣхъ чиселъ съ извѣстнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ. Мы разъяснимъ ихъ расположеніе и употребленіе, принимая за образецъ двѣ таблицы съ 4 десятичными знаками, находящіяся въ концѣ книги.

221. Устройство четырехзначныхъ таблицъ. Первая таблица (логариѳмы съ 4 десятичными знаками) даетъ логариѳмы всѣхъ чиселъ, содержащихся между 1 и 10 отъ сотой къ сотой, т. е. логариѳмы чиселъ 1,00; 1,01; 1,02;...; 9,99 Эти логариѳмы лежатъ между 0 и 1: таблица даетъ намъ лишь дробныя части (п. **61**) или, какъ говорятъ, мантиссы этихъ логариѳмовъ.

Пусть требуется по таблицѣ отыскать логариѳмъ числа 1,30. Въ столбцѣ N (numerus = число) мы отыскиваемъ число **13**, составленное изъ двухъ первыхъ цифръ даннаго числа, и читаемъ въ ряду, начинающемся съ **13**, число, стоящее въ столбцѣ, обозначенномъ **0**. Находимъ 1139; это искомая мантисса. Слѣдовательно:

$$\log 1{,}30 = 0{,}1139.$$

Чтобы получить логариѳмъ числа 1,31, мы идемъ въ строкѣ, начинающейся съ 13, къ столбцу, обозначенному **1**. Мы находимъ тамъ только три цифры 173. Первая цифра 1, та же, что въ предыдущемъ столбцѣ; она здѣсь подразумѣвается и не приведена лишь для сбереженія мѣста. Итакъ, мы должны читать 1173 и получимъ:

$$\log 1{,}31 = 0{,}1173.$$

Продолжая подвигаться по той же строкѣ, мы получимъ:

$$\log 1{,}32 = 0{,}1206,$$
$$\log 1{,}33 = 0{,}1239$$

и такъ далѣе.

Теперь пусть требуется отыскать логариѳмъ числа 1,59. Въ строкѣ **15** и столбцѣ **9** мы читаемъ *014. Значекъ * означаетъ, что первая цифра не 1, какъ было для предыдущихъ логариѳмовъ той же строки, а 2, т. е. цифра, находящаяся въ началѣ ближайшей слѣдующей строки. Этотъ способъ обозначенія также принятъ лишь для сбереженія мѣста. Такимъ образомъ находимъ:

$$\log 1{,}58 = 0{,}1987,$$
$$\log 1{,}59 = 0{,}2014,$$
$$\log 1{,}60 = 0{,}2041.$$

Строки и столбцы въ таблицѣ сгруппированы по пяти. Это расположеніе имѣетъ цѣлью избѣжать ошибокъ при чтеніи; въ самомъ дѣлѣ, такимъ образомъ легко видѣть положеніе строки или столбца по отношенію къ сосѣднимъ строкамъ или столбцамъ. Мы избѣгаемъ благодаря этому ошибокъ, которыя произошли бы, если бы мы не достаточно точно прослѣдили данную строку или столбецъ и попали бы въ сосѣднюю строку или въ сосѣдній столбецъ. Такъ, мы замѣтимъ, что строки, соотвѣтствующія 10, 15, 20 . . ., слѣдуютъ непосредственно за пустою строкой. Строки 14, 19, 24 предшествуютъ пустой строкѣ, а строки 13, 18, 23 стоятъ непосредственно надъ ними. Наконецъ, строки 12, 17, 22 занимаютъ середину группы изъ 5 строкъ безъ пробѣловъ. То же самое относится къ столбцамъ, съ той разницей, что здѣсь пустая строка замѣняется двойной чертой. Кто приметъ во вниманіе эти замѣчанія, тотъ при нѣкоторомъ навыкѣ будетъ въ состояніи находить логариѳмы съ перваго взгляда.

Вторая таблица (numeri или антилогариѳмы съ 4 десятичными знаками) имѣетъ такое же расположеніе, какъ и первая. Она даетъ антилогариѳмы чиселъ, содержащихся между 0 и 1 отъ тысячной до тысячной, т. е. чиселъ 0,001; 0,002; . . ., 0,999. Пусть требуется, напримѣръ, отыскать антилогариѳмъ числа 0,324. Возьмемъ въ столбцѣ, обозначенномъ буквою L, число **32**, а въ строкѣ, начинающейся съ **32**, столбецъ 4. Здѣсь мы находимъ три цифры 109 и приписываемъ къ нимъ слѣва цифру 2, находящуюся въ первомъ столбцѣ рядомъ съ 31. Сообразно съ этимъ искомый антилогариѳмъ будетъ 2,109. Точно такъ же находимъ, что антилогариѳмъ числа 0,325 равенъ 2,113. Знакъ * обозначаетъ въ этой таблицѣ то же, что и въ предыдущей; онъ показываетъ, что первую цифру, которой мы должны дополнить искомый антилогариѳмъ, нужно искать въ концѣ слѣдующей строки; значитъ, не въ той же или предыдущей строкѣ. Напримѣръ, 7,047 есть антилогариѳмъ числа 0,848.

222. Устройство пятизначныхъ таблицъ. Въ качествѣ образца пятизначной таблицы примемъ таблицу Ф. Г. Гаусса (изданія Eugen Strien'a, Галле на С.) *). Здѣсь мы приведемъ изъ нея лишь небольшую выдержку. Въ столбцахъ, обозначенныхъ буквой N (numerus = число), находятся числа, содержащіяся между 100 и 999, а въ приводимой нами части таблицы — числа отъ 170 до 181. Чтобы получить логариѳмъ числа 1,732, отыскиваемъ въ этомъ столбцѣ число 173 и подвигаемся по строкѣ, содержащей число 173, направо до столбца, отмѣченнаго вверху цифрой 2. Здѣсь мы находимъ цифры 855, которыя вмѣстѣ съ цифрами 23, стоящими подъ знакомъ L, даютъ 5 цифръ 23855 мантиссы искомаго логариѳма. Поэтому:

$$\log 1,732 = 0,23855.$$

Положимъ теперь, что намъ нужно найти логариѳмъ числа 1,7324; онъ не можетъ быть найденъ непосредственно въ таблицѣ. Однако, таблица указываетъ, что онъ лежитъ между 0,23855 и 0,23880. Разность между этими двумя логариѳмами будетъ 0,00025, или, короче, такъ какъ дѣло идетъ только о двухъ послѣднихъ десятичныхъ знакахъ, 25. Но если логариѳмъ при нарастаніи числа на 10 десятитысячныхъ возрастаетъ на 25 единицъ послѣдняго десятичнаго разряда, то мы принимаемъ, что при нарастаніи числа на 4 десятитысячныхъ логариѳмъ возрастаетъ на $\frac{4}{10}$ отъ 25, т. е. на 10 единицъ послѣдняго десятичнаго

*) Устройство таблицъ Пржевальскаго, Августа, Рябкова, Блюмберга, которыми учащіеся пользуются у насъ, отличается отъ этихъ таблицъ столь мало, что это описаніе вполнѣ приложимо и къ нашимъ таблицамъ. *Прим. ред.*

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983

P. P.	**25**
1	2,5
2	5,0
3	7,5
4	10,0
5	12,5
6	15,0
7	17,5
8	20,0
9	22,5

разряда. Для того, чтобы не приходилось вычислять это значеніе, оно дано въ особомъ столбцѣ, обозначенномъ черезъ P. P. (Partes proportionales), въ особой табличкѣ, отмѣченной сверху цифрой **25**; именно, оно находится направо отъ цифры 4. Итакъ, вычисленіе логариѳма числа 1,7324 мы располагаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} \log 1{,}732 \;\; = 0{,}23855 \\ 10 \\ \hline \log 1{,}7324 = 0{,}23865. \end{array}$$

Книга *Ф. Г. Гаусса* не содержитъ отдѣльной таблицы антилогариѳмовъ. Хотя такія таблицы и удобны для многихъ вычисленій, но задача о нахожденіи числа по данному логариѳму можетъ быть рѣшена и безъ ихъ помощи, такъ какъ для этого оказывается достаточной таблица логариѳмовъ. Если, напримѣръ, нужно найти число, логариѳмъ котораго есть 0,24802, то таблица логариѳмовъ указываетъ, что это число лежитъ между 1,7700 и 1,7710. Логариѳмы этихъ чиселъ суть 0,24797 и 0,24822, разность которыхъ равна 25. Сообразно этому мы располагаемъ вычисленіе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 0{,}24802 \\ 0{,}24797 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}7700 \\ 2 \\ \hline 1{,}7702 \end{array}$$

Итакъ, сначала мы составляемъ разность двухъ логариѳмовъ, между которыми лежитъ данный логариѳмъ, табличную разность, въ данномъ случаѣ 25; потомъ беремъ разность между даннымъ логариѳмомъ и ближайшимъ къ нему меньшимъ, находящимся въ таблицѣ, въ данномъ случаѣ 5. Затѣмъ находимъ въ табличкѣ пропорціональныхъ частей 25, что разность логариѳмовъ 5 соотвѣтствуетъ разности чиселъ 2. Слѣдовательно, числомъ логариѳма 0,24802 или антилориѳмомъ числа 0,24802 будетъ 1,7702.

223. Основное свойство логариѳмовъ. Основное свойство логариѳмовъ выражается слѣдующей теоремой.

Теорема 79. Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.

Разсматривая ряды, опредѣляющіе логариѳмы, мы видимъ, что числа q^m и q^n имѣютъ логариѳмы md и nd. Но произведеніе ихъ есть q^{m+n}, а логариѳмъ числа q^{m+n} равенъ $(m+n)\,d$, т. е. равенъ $md+nd$, слѣдовательно, равенъ суммѣ логариѳмовъ отдѣльныхъ сомножителей.

Эта теорема позволяетъ во многихъ случаяхъ значительно упростить вычисленія; въ этомъ и заключается практическая польза логариѳмовъ.

Примѣръ I. Требуется вычислить произведеніе:

$$x = 1{,}33 \cdot 2{,}15 \cdot 2{,}31 \cdot 1{,}48$$

По теоремѣ 79 имѣемъ:

$$\log x = \log 1{,}33 + \log 2{,}15 + \log 2{,}31 + \log 1{,}48.$$

Первая таблица даетъ намъ эти логариѳмы и достаточно лишь сложить ихъ, чтобы получить $\log x$:

$$\begin{array}{r}\log\ 1{,}33 = 0{,}1239\\ \log\ 2{,}15 = 0{,}3324\\ \log\ 2{,}31 = 0{,}3636\\ \log\ 1{,}48 = 0{,}1703\\ \hline \log x \quad = 0{,}9902.\end{array}$$

Зная $\log x$, ищемъ по таблицѣ чиселъ numerus или антилогариѳмъ числа 0,990. Онъ равенъ 9,772; это и есть искомое произведеніе. Послѣдній десятичный знакъ этого числа, конечно, неточенъ, такъ какъ значенія логариѳмовъ, находящіяся въ таблицѣ, суть приближенныя значенія, содержащія лишь 4 десятичныхъ знака. На практикѣ, однако, часто достаточно имѣть три точно установленныхъ десятичныхъ знака. Если, напримѣръ, x обозначаетъ неизвѣстное число рублей, то мы принимаемъ за результатъ 9,77 р., а часто даже 9,75 р.

Примѣръ II. Вычислить y, опредѣляемое формулой:

$$y = 1{,}36 \cdot 1{,}37 \cdot 1{,}38 \cdot 1{,}39 \cdot 1{,}40 \cdot 1{,}41.$$

Найдемъ въ первой таблицѣ логариѳмы данныхъ чиселъ и сложимъ ихъ:

$$\begin{aligned}
\log 1{,}36 &= 0{,}1335\\
\log 1{,}37 &= 0{,}1367\\
\log 1{,}38 &= 0{,}1399\\
\log 1{,}39 &= 0{,}1430\\
\log 1{,}40 &= 0{,}1461\\
\log 1{,}41 &= 0{,}1492\\
\hline
\log y &= 0{,}8484.
\end{aligned}$$

Чтобы получить y, достаточно найти лишь антилогарѳмъ числа 0,8484. Во второй таблицѣ находимъ что антилогариѳмъ числа 0,848 равняется 7,047, а антилогариѳмъ числа 0,849 равняется 7,063. Слѣдовательно, антилогариѳмъ числа 0,8484 лежитъ между этими двумя числами. Если же намъ нужны лишь два десятичныхъ знака, то мы можемъ не производить дальнѣйшихъ вычисленій и принять за результатъ 7,05.

224. Дѣленіе. Теорема 80. Логариѳмъ частнаго получается, если мы вычтемъ логариѳмъ дѣлителя изъ логариѳма дѣлимаго.

Изъ формулы

$$a = bc$$

слѣдуетъ:

$$\log a = \log b + \log c;$$

поэтому, изъ формулы

$$b = \frac{a}{c}$$

слѣдуетъ, что

$$\log b = \log a - \log c.$$

Примѣръ. Вычислить x по формулѣ:

$$x = \frac{8{,}34}{1{,}23}.$$

Примѣняя терему 80, найдемъ:

$$\begin{array}{rl} \log\ 8{,}34 &= 0{,}9212 \\ \log\ 1{,}23 &= 0{,}0899 \\ \hline \log\ x &= 0{,}8313 \\ x &= 6{,}78\ldots \end{array}$$

225. Степени и корни. Употребленіе логариѳмовъ особенно удобно, если нужно вычислить степень даннаго числа или корень изъ даннаго числа. Пусть, напримѣръ:

$$a = b^4.$$

Такъ какъ число a равно произведенію 4 сомножителей b:

$$a = b \cdot b \cdot b \cdot b,$$

то

$$\log\ a = \log\ b + \log\ b + \log\ b + \log\ b,$$

или

$$\log\ a = 4\ \log b,$$

и обратно:

$$\log\ b = \frac{1}{4}\ \log\ a.$$

Итакъ, изъ формулы

$$a = b^4$$

или же изъ равнозначной съ нею формулы

$$b = \sqrt[4]{a}$$

получаемъ для логариѳма числа $a = b^4$ равенство:

$$\log\ a = 4\ \log\ b$$

и, обратно, для логариѳма числа $b = \sqrt[4]{a}$ равенство:

$$\log\ b = \frac{1}{4} \log\ a.$$

Примѣръ I. Пусть требуется вычислить 5-тую степень числа 1,23. Пусть будетъ:

$$x = (1{,}23)^5.$$

Тогда

$$\log\ x = 5\ \log\ 1{,}23 = 5 \cdot 0{,}0899 = 0{,}4495.$$

Нужно, слѣдовательно, отыскать антилогариѳмъ числа 0,4495.

Антилогариѳмъ числа 0,449 равенъ 2,812, а антилогариѳмъ числа 0,450 равенъ 2,818. Слѣдовательно:

$$x = 2{,}815\ldots.$$

Примѣръ II. Требуется вычислить $\sqrt[4]{3{,}14}$. Обозначимъ этотъ корень черезъ y; тогда:

$$\log\, y = \frac{1}{4} \log 3{,}14 = \frac{1}{4} \cdot 0{,}4969 = 0{,}1242.$$

Таблица антилогариѳмовъ даетъ для числа 0,124 антилогариѳмъ 1,330; сообразно съ этимъ $y = 1{,}330\ldots$

226. Логариѳмы чиселъ, не лежащихъ между 1 и 10. Таблица логариѳмовъ, которой мы пользовались, даетъ намъ логариѳмы чиселъ, лежащихъ между 1 и 10. Чтобы получить логариѳмы другихъ чиселъ, мы пользуемся основнымъ свойствомъ:

$$\log a = \log b + \log c,$$

принимая здѣсъ за c степень числа 10.

Если мы ищемъ, напримѣръ, логариѳмъ числа 134, то пишемъ:

$$134 = 1{,}34 \cdot 10^2$$

и отсюда заключаемъ, что

$$\log\, 134 = \log\, 1{,}34 + 2 \log\, 10.$$

Теперь таблица логариѳмовъ даетъ:

$$\log\, 1{,}34 = 0{,}1271;$$

но очевидно,

$$\log\, 10 = 1, \quad \log\, 10^2 = 2.$$

Поэтому получимъ:

$$\log\, 134 = 0{,}1271 + 2 = 2{,}1271.$$

Ясно что log 134 имѣетъ ту же мантиссу, что и log 1,34. Такъ какъ таблица даетъ мантиссы, то для отысканія логариѳма какого угодно числа не нужно обращать вниманія на запятую. Цѣлая часть логариѳма, его характеристика, равна тому числу десятичныхъ знаковъ, которое слѣдуетъ отдѣлить, чтобы получить число, лежащее между 1 и 10. Можно также сказать, что мантисса равна количеству цифръ числа слѣва отъ запятой, уменьшенному на 1.

Примѣры. Найти логариѳмъ числа 120000. Таблица даетъ намъ мантиссу 0792; характеристика равна 5, отсюда искомый логариѳмъ равенъ 5,0792.

Найти логариѳмъ числа 34,5. Таблица даетъ намъ мантиссу 5378. Характеристика равна 1; слѣдовательно, логариѳмъ равенъ 1,5378.

Найти антилогариѳмъ числа 2,343, т. е. число, логариѳмъ котораго равенъ 2,343. Въ таблицѣ антилогариѳмовъ отыскиваемъ число, логариѳмъ котораго 0,343, и умножаемъ его, такъ какъ мантисса равна 2, на $10^2 = 100$. Такимъ образомъ получимъ антилогариѳмъ 220,3.

Найти антилогариѳмъ числа 3. Безъ всякой таблицы мы знаемъ, что 10 есть антилогариѳмъ числа 1, и отсюда антилогариѳмъ числа 3 равенъ 1000.

Примѣненія. Пусть требуется вычислить значенiе:

$$x = 34{,}1 \cdot 46{,}3 \cdot 2{,}35 \cdot 15{,}4.$$

Вычисленiе располагаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{lr}
\log\ 34{,}1 & = 1{,}5328 \\
\log\ 46{,}3 & = 1{,}6656 \\
\log\ \ 2{,}35 & = 0{,}3711 \\
\log\ 15{,}4 & = 1{,}1875 \\
\hline
\log\ x & = 4{,}7570.
\end{array}$$

Теперь мы ищемъ антилогариѳмъ числа 0,757 и находимъ 5,715; переносимъ запятую на 4 знака вправо, такъ какъ характеристика $\log x$ равна 4, и получаемъ:

$$x = 57150.$$

Однако, слѣдуетъ замѣтить, что мы не должны разсчитывать на то, что двѣ послѣднiя цифры будутъ точными. Чтобы получить большее число точныхъ цифръ, нужно было бы пользоваться таблицей съ большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ.

227. Логариѳмы правильныхъ дробей. Отрицательныя мантиссы. Если мы ищемъ логариѳмъ числа 0,00341, то можемъ написать:

$$0{,}00341 = \frac{3{,}41}{1000}.$$

Слѣдовательно:

$$\log 0{,}00341 = \log 3{,}41 - \log 1000 = 0{,}5328 - 3.$$

Итакъ, искомый логариѳмъ равенъ 0,5328 — 3, т. е. равенъ — 2,4672; это—отрицательное число. Точно такъ же дѣло обстоитъ съ логариѳмами всѣхъ положительныхъ чиселъ, меньшихъ 1, слѣдовательно, всѣхъ правильныхъ дробей.

На практикѣ при вычисленіяхъ никогда не производятъ вычитанія; именно, обыкновенно пишутъ:

$$\log 0{,}00341 = 0{,}5328 - 3;$$

вмѣсто этого пишутъ также: $\bar{3}{,}5328$, помѣщая знакъ минусъ надъ цифрой 3. По опредѣленію, это то же, что $-3 + 0{,}5328$, т. е. — 2,4672. Цифра $\bar{3}$ представляетъ отрицательную характеристику.

Примѣръ I. Пусть требуется вычислить произведеніе:

$$x = 23{,}5 \cdot 0{,}824.$$

Получаемъ:

$$\begin{array}{lr} \log 23{,}5 & = 1{,}3711 \\ \log \ 0{,}824 & = \bar{1}{,}9159 \\ \hline \log x & = 1{,}2870. \end{array}$$

Чтобы выполнить сложеніе, поступаютъ сначала такъ, какъ будто рѣчь идетъ о двухъ обыкновенныхъ десятичныхъ числахъ. Но, подходя къ столбцу единицъ, производятъ вычисленіе слѣдующимъ образомъ: 1 въ умѣ, да 1 и $\bar{1}$ будетъ $1 + 1 - 1 = 1$.

Такимъ образомъ получимъ: $x = 19{,}36\ldots$

Примѣръ II. Пусть требуется вычислить произведеніе:

$$x = 234 \cdot 0{,}0325 \cdot 22{,}3 \cdot 0{,}98 \cdot 80.$$

По таблицѣ находимъ:

$$\begin{array}{lr} \log 234 & = 2{,}3692, \\ \log \ 0{,}0325 & = \bar{2}{,}5119, \\ \log 22{,}3 & = 1{,}3483, \\ \log \ 0{,}98 & = \bar{1}{,}9912, \\ \log 80 & = 1{,}9031 \\ \hline \log x & = 4{,}1237. \end{array}$$

Здѣсь въ столбцѣ единицъ 3 сохраняемъ въ умѣ, эти 3 слѣдуетъ прибавить къ мантиссамъ 2, $\bar{2}$, 1, $\bar{1}$, 1; получимъ: $3+2-2+1-1+1=4$. Такимъ образомъ мы находимъ приближенно значеніе $x=13290$.

Примѣръ III. Пусть требуется вычислить $\sqrt[4]{0{,}01621}$.

Здѣсь $\log 0{,}01621 = \bar{2}{,}2098$; возьмемъ четвертую часть его. Для этой цѣли пишемъ:

$$\bar{2}{,}2098 = -2 + 0{,}2098 = -4 + 2{,}2098;$$

беремъ четвертую часть числа -4, т. е. -1, прибавляемъ къ этому четвертую часть числа 2,2098, т. е. 0,5524, и получаемъ $\bar{1}{,}5524$. Число, соотвѣтствующее этому логариѳму, будетъ 0,3568 ...

228. Расположеніе вычисленій. Если мы желаемъ вычислить нѣкоторое выраженіе съ помощью логариѳмовъ, то слѣдуетъ раньше, чѣмъ обращаться къ таблицамъ, надлежащимъ образомъ подготовить и расположить вычисленіе. При этомъ характеристики пишутъ обыкновенно сейчасъ же, такъ какъ ихъ въ таблицѣ нѣтъ.

Примѣръ I. Пусть требуется вычислить значеніе выраженія:

$$x = \frac{3{,}45 \cdot 3{,}34 \cdot 35{,}2}{894 \cdot 0{,}034}.$$

Чтобы найти $\log x$, складываемъ сперва логариѳмы сомножителей, находящихся въ числителѣ, и вычитаемъ изъ этой суммы сумму логариѳмовъ сомножителей, находящихся въ знаменателѣ:

$$\begin{array}{lr}
\log 3{,}45 = 0, & \log 894 \quad = 2, \\
\log 3{,}34 = 0, & \log 0{,}034 = 0, \quad -2 \\
\underline{\log 35{,}2 \;= 1,} & \overline{\log \text{знаменателя} \quad =}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\log \text{числителя} & = \\
\underline{\log \text{знаменателя}} & \underline{=} \\
\log x & = \\
x & =
\end{array}$$

Послѣ того, какъ сдѣлана эта запись, отыскиваемъ по таблицѣ мантиссы:

$$\begin{array}{lrl} \log & 3{,}45 &= 0{,}5378 \\ \log & 3{,}34 &= 0{,}5237 \\ \log & 35{,}2 &= 1{,}5465 \\ \hline \log \text{ числителя} & &= 2{,}6080, \\ \log \text{ знаменателя} & &= 1{,}4828 \\ \hline & \log x &= 1{,}1252. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \log & 894 &= 2{,}9513 \\ \log & 0{,}034 &= 0{,}5315 - 2 \\ \hline \log \text{ знаменателя} & &= 1{,}4828 \end{array}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$x = 13{,}34 \ldots.$$

Если нужно произвести вспомогательныя вычисленія, то слѣдуетъ запись ихъ также приготовить предварительно.

Примѣръ II. Требуется вычислить значеніе выраженія:

$$x = \frac{(34{,}2)^2 \cdot \sqrt[3]{3{,}5}}{\sqrt[4]{3{,}45 \cdot 872}}.$$

Вычисленія удобно расположить слѣдующимъ образомъ:

Вспомогательныя вычисленія:

$$\begin{array}{ll} \log 34{,}2 = 1, & \log 3{,}5 = 0, \\ 2 \log 34{,}2 = & \frac{1}{3} \log 3{,}5 = \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \log & 3{,}45 &= 0, \\ \log & 872 &= 2, \\ \hline \log (3{,}45 \cdot 872) & &= \\ \frac{1}{4} \log (3{,}45 \cdot 872) & &= . \end{array}$$

Главное вычисленіе:

$$\begin{array}{lr} 2 \log 34{,}2 & = \\ \frac{1}{3} \log 3{,}5 & = \\ \hline \log \text{ числителя} & = \\ \hline \log \sqrt[4]{3{,}45 \cdot 872} & = \\ \hline \log x & = \\ x & = \end{array}$$

Только послѣ того, какъ вся эта схема уже составлена, мы обращаемся къ таблицѣ логариѳмовъ, чтобы разыскать недостающія еще мантиссы.

Примѣчаніе. Многія ошибки происходятъ при переписываніи промежуточныхъ результатовъ. Такъ, въ предыдущемъ вычисленіи всѣ логариѳмы главнаго вычисленія перенесены изъ вспомогательныхъ вычисленій. Лучше по возможности избѣгать этихъ перенесеній. Поэтому было бы хорошо отдать предпочтеніе слѣдующему расположенію:

Вспомогательныя вычисленія:	Главное вычисленіе:
$\log\ 34{,}2 = 1,$	$2 \log 34{,}2 =$
$\log\ 3{,}5 = 0,$	$\frac{1}{3} \log\ 3{,}5 =$
$\log\ 3{,}45 = 0,$	$\frac{1}{4} \log\ (3{,}78 \cdot 845) =$
$\log 872 = 2,$	$\log x =$
$\log\ (3{,}45 \cdot 872) =$	$x =$
$\frac{1}{4} \log\ (3{,}45 \cdot 872) =$	

III. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ.

229. Сложные проценты. Одинъ изъ практическихъ вопросовъ, въ которыхъ полезно употребленіе логариѳмовъ, состоитъ въ вычисленіи сложныхъ процентовъ. Въ виду этого мы займемся въ настоящей главѣ ученіемъ о сложныхъ процентахъ на ряду съ ученіемъ о логариѳмахъ.

Говорятъ, что денежная сумма отдана въ ростъ на сложные проценты, если проценты, причитающіеся съ этой суммы не уплачиваются кредитору, а по истеченіи извѣстнаго срока, присоединяются къ капиталу и, въ свою очередь, приносятъ проценты. Промежутокъ времени, послѣ котораго проценты такимъ образомъ капитализируются, составляетъ обыкновенно либо 6 мѣсяцевъ, либо годъ; здѣсь мы разсмотримъ случай, когда этотъ промежутокъ равенъ одному году. Такъ, если Петръ даетъ въ заемъ Павлу 10000 р. по 5 процентовъ со ста на сложные проценты, то это значитъ, что по истеченіи года Павелъ не уплачиваетъ Петру 500 р. процентныхъ денегъ, которыя за это время наросли на 10000 р., но что съ этого момента его долгъ составляетъ 10500 р.; эти деньги по прежнему разсчету при 5% годовыхъ приносятъ въ теченіе слѣдующаго года 525 р. Къ концу второго года долгъ Павла будетъ составлять 10500 р. + 525 р., т. е. 11025 р., которыя принесутъ въ слѣдующій годъ 551, 25 р. процентныхъ денегъ. Къ концу третьяго года долгъ Павла будетъ составлять 11025 + 551,25, т. е. 11576,25 р. и т. д.

На первый взглядъ кажется, что вычисленіе сложныхъ процентовъ не представляетъ собой задачи, которая существенно отличалась бы отъ задачъ на простые проценты, т. е. что это просто частный случай общей задачи исчисленія процентовъ. Однако, именно этотъ частный случай во многихъ практическихъ вопросахъ имѣетъ очень важное значеніе и заслуживаетъ поэтому тщательнаго изслѣдованія. Другимъ основаніемъ необходимости особаго изслѣдованія этото вопроса служатъ тѣ послѣдствія, какія на практикѣ вытекаютъ изъ наращенія капиталовъ сложными процентами. Можетъ казаться совершенно естественнымъ, что не уплаченные проценты увеличиваютъ долгъ и сами, въ свою очередь, приносятъ проценты. Но, съ другой стороны, быстрое нарастаніе процентовъ, накопляющихся въ продолженіе большого числа лѣтъ, ведетъ къ поразительнымъ суммамъ; это привело къ необходимости установить особую регламентацію займовъ на сложные проценты (контроль государства надъ обществами страхованія жизни, земельнаго кредита и т. д.); мы увидимъ ниже, что разрѣшеніе займовъ на сложные проценты безъ всякаго ограниченія повело бы къ совершенно недопустимымъ послѣдствіямъ.

230. Формула сложныхъ процентовъ. Денежная сумма въ A р. отдана въ заемъ на сложные проценты по p процентовъ. Сумма въ A р. приноситъ въ годъ $\frac{Ap}{100}$ р. процентныхъ денегъ, а въ концѣ года процентныя деньги, присоединенныя къ капиталу, образуютъ вмѣстѣ съ нимъ общую сумму долга:

$$\left(A+\frac{Ap}{100}\right) \text{р.} = A\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{р.}$$

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ правилу:

Правило 34-ое. Чтобы получить капиталъ, наращенный процентными деньгами за годъ, нужно умножить начальный капиталъ на $1+\frac{p}{100}$, гдѣ p обозначаетъ таксу процентовъ; это число $1+\frac{p}{100}$ называютъ множителемъ процентнаго наращенія.

Такъ какъ первоначальный капиталъ вовсе не входитъ въ составъ множителя процентнаго наращенія, то мы можемъ примѣнить это правило къ суммѣ $A\left(1+\frac{p}{100}\right)$ р., которая будетъ отдана въ заемъ на слѣдующій годъ; тогда мы найдемъ, что по истеченіи двухъ лѣтъ общій долгъ составитъ:

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)\text{ р.}=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\text{ р.}$$

Мы можемъ примѣнить еще разъ правило 34-ое и получимъ значеніе долга по истеченіи третьяго года:

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{p}{100}\right)\text{ р.}=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\text{ р.}$$

По истеченіи n лѣтъ долгъ составитъ:

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\text{ р.}$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило:

Правило 35-ое. Чтобы найти, во что обратится капиталъ въ A р., отданный въ ростъ на сложные проценты на n лѣтъ, нужно умножить эту сумму A р. на n-тую степень множителя процентнаго наращенія $1+\frac{p}{100}$.

231. Примѣненія. Примѣръ I. Капиталъ въ 10000 р. положенъ на сложные проценты на 20 лѣтъ по 4%. Вычислить, во что обратится долгъ по истеченіи 20 лѣтъ.

Здѣсь

$$A=10000,\qquad p=4,\qquad 1+\frac{p}{100}=1{,}04,\qquad n=20.$$

Отсюда искомая сумма:

$$10000\cdot(1{,}04)^{20}\text{ р.}$$

Это выраженіе мы вычислимъ при помощи логариѳмовъ; имѣемъ:

$$\begin{array}{rl} \log\ 1{,}04 &= 0{,}0170, \\ 20\log\ 1{,}04 &= 0{,}34 \\ \log 10{,}000 &= 4 \\ \hline & \quad 4{,}34. \end{array}$$

Число, соотвѣтствующее логариѳму 4,34, равно 21880. Поэтому искомый результатъ составляетъ 21 880 р.; итакъ, капиталъ въ 10000 р. увеличился больше, чѣмъ вдвое.

Примѣчаніе. Здѣсь нужно было умножить логариѳмъ числа 1,04 на 20. Изъ малой ошибки въ этомъ логариѳмѣ, которая возникла вслѣдствіе того, что мы отбросили десятичные знаки, слѣдующіе за четвертымъ, возникаетъ значительно бо́льшая ошибка; поэтому при рѣшеніи задачъ на сложные проценты полезно для болѣе употребительныхъ значеній таксы процентовъ p имѣть болѣе точныя значенія логариѳмовъ множителя процентнаго наращенія $1+\frac{p}{100}$. Мы даемъ здѣсь эти логариѳмы съ 10 знаками.

p	$1+\frac{p}{100}$	$\log\left(1+\frac{p}{100}\right)$
2	1,02	0,0086 001718
$2\frac{1}{4}$	1,0225	0,0096 633167
$2\frac{1}{2}$	1,0250	0,0107 238654
$2\frac{3}{4}$	1,0275	0,0117 818305
3	1,03	0,0128 372247
$3\frac{1}{4}$	1,0325	0,0138 900603
$3\frac{1}{2}$	1,035	0,0149 403498
$3\frac{3}{4}$	1,0375	0,0159 881054
4	1,04	0,0170 333393

Однако, мы беремъ всегда лишь столько десятичныхъ знаковъ, сколько нужно, чтобы по умноженіи получилось 4 или 5 точныхъ десятичныхъ знаковъ; вообще, слѣдовательно, достаточно имѣть 6 или 7 десятичныхъ знаковъ.

Примѣръ II. Какую сумму слѣдуетъ отдать въ ростъ на сложные проценты по 3 со ста, чтобы получить черезъ 50 лѣтъ 1000 р.?

Если мы обозначимъ искомую сумму черезъ x р., то должно быть:

$$x(1{,}03)^{50} = 1000,$$

и потому

$$\log x = 3 - 50 \log 1{,}03.$$

Но

$$\log 1{,}03 = 0{,}0128372$$

$$50 \log 1{,}03 = 0{,}64186;$$

слѣдовательно, будетъ:

$$\log x \quad = 2{,}35816.$$

Въ таблицѣ мы находимъ, что логариѳму 0,358 соотвѣтствуетъ число 2,280; слѣдовательно, искомая сумма приблизительно равна 228 р.

Примѣръ III. Наслѣдники придворнаго поставщика курфюрста Фридриха Вильгельма Бранденбургскаго требуютъ отъ прусской казны сумму въ 234 марки, которую, по ихъ увѣренію, имъ должны съ 15 февраля 1675 со сложными процентами по 4 со ста. Какую сумму должна была бы выплатить имъ прусская казна 15 февраля 1903 г., если бы требованіе ихъ было признано справедливымъ?

Давность долга составляетъ 1903 — 1675 = 228 лѣтъ. Сообразно съ этимъ, если мы обозначимъ долгъ черезъ x м., будетъ:

$$x = 234 . (1{,}04)^{228}.$$

Но:

$$\begin{array}{rcr} \log 1{,}04 & = & 0{,}0170333 \\ & & 228 \\ \hline & & 1362664 \\ & & 340666 \\ & & 3\,40666 \\ \hline 228 \log 1{,}04 & = & 3{,}8835924 \\ \log\ 234 & = & 2{,}3692 \\ \hline \log x & = & 6{,}25279. \end{array}$$

Число, соотвѣтствующее логариѳму 0,25279, приблизительно равно 1,789. Слѣдовательно, искомая сумма составитъ, круглымъ счетомъ, 1789000 м.

Примѣръ IV. Во что обратится капиталъ въ 1 р., отданный въ ростъ на 1000 лѣтъ на сложные проценты по 2 со ста?

Пусть эта сумма будетъ x р. Тогда:

$$x = (1{,}02)^{1000}.$$

Поэтому:

$$\log x = 1000 \cdot \log 1{,}02 = 8{,}60017.$$

Отсюда слѣдуетъ, что приблизительно $x = 398100000$ р., т. е. искомая сумма составитъ, круглымъ счетомъ, 400 милліоновъ рублей.

ЗАДАЧИ КЪ ГЛАВѢ XX.

466. Найти четвертый членъ ариѳметическаго ряда, первый членъ котораго равенъ 2, а разность равна 5.

467. Найти восьмой членъ геометрическаго ряда, первый членъ кораго равенъ 5, а знаменатель равенъ 2.

468. Разсказываютъ, что изобрѣтатель шахматной игры требовалъ себѣ въ видѣ вознагражденія: 1 хлѣбное зерно за первую клѣтку шахматной доски, 2 зерна за вторую, 4 зерна за третью и такъ, постоянно удваивая, вплоть до 64-й клѣтки. Сколько хлѣбныхъ зеренъ должны были бы ему дать за 64-ую клѣтку?

469. Найти логариѳмы слѣдующихъ чиселъ:

32,5	0,30923
3240	82,4254
60000	0,0082345
3,02	0,0034597
0,304	723200000.

470. Найти антилогариѳмы слѣдующихъ чиселъ:

$\overline{3},342$	$2{,}42523$
$\overline{4},324$	$\overline{2},43834$
$0{,}435$	$\overline{9},57556$
$15{,}234$	$8{,}93782.$

471. Вычислить съ помощью логариѳмовъ слѣдующія выраженія:

$$x = \frac{(0{,}035)^4 \sqrt{875000}}{342 \cdot 3{,}46 \cdot \sqrt[3]{2{,}34}},$$

$$y = \frac{\sqrt{35}\,\sqrt[3]{42}\,\sqrt[5]{26400}}{(1{,}34)^6 (3{,}42)^7}.$$

472. Во что обратится капиталъ въ 500 р., отданный въ ростъ на 8 лѣтъ на сложные проценты, считая по 3% годовыхъ?

473. Какую сумму слѣдуетъ отдать въ ростъ на сложные проценты по 4% годовыхъ, чтобы по истеченіи 75 лѣтъ получить 1000000 р.?

474. Во сколько лѣтъ капиталъ въ 1000 руб., отданный въ ростъ для наращенія сложными процентами изъ 4% годовыхъ, обратится въ 1540 р.?

475. Во сколько лѣтъ капиталъ въ 2000 р. при наращеніи сложными процентами по 3% годовыхъ обратится въ 5000 р.?

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНІЕ ГЛАВЪ XIV ДО XX.

476. Рѣшить и изслѣдовать систему уравненій:

$$\frac{y-3x-4}{x+2y-3}=\frac{4y-4x}{3x+5y-2}=t,$$

гдѣ x и y обозначаютъ неизвѣстныя, а t данное число.

477. Изъ трехъ предстоящихъ событій A, B, C можетъ произойти лишь одно. Напримѣръ, изъ трехъ состязающихся въ бѣгѣ можетъ лишь одинъ прибѣжать первымъ, изъ трехъ кандидатовъ можетъ лишь одинъ быть избранъ и. т. д. Петръ заключаетъ пари на слѣдующихъ условіяхъ. Противникъ даетъ ему нѣкоторую сумму—скажемъ,—x р. и держитъ пари на появленіе событія A; Петръ вернетъ ему ax р., если событіе A случится, и не вернетъ ему ничего, если событіе A не случится. Аналогично устанавливаютъ множители b и c, когда играютъ соотвѣтственно на появленіе событія B или C. На какія суммы нужно держать пари относительно событій A, B, C, чтобы навѣрное выиграть m р. независимо отъ того, какое изъ трехъ событій произойдетъ? Какимъ условіямъ должны удовлетворять множители a, b, c, чтобы всѣ три суммы были положительными? Если эти суммы отрицательны, что всегда будетъ имѣть мѣсто, если Петръ человѣкъ сообразительный, то можно рѣшить лишь слѣдующую задачу: Какимъ образомъ устроить, чтобы противникъ во всякомъ случаѣ терялъ ту же сумму m р.

478. Вычислить стороны треугольника по даннымъ медіанамъ. Въ какомъ случаѣ искомый треугольникъ будетъ прямоугольнымъ?

479. Рѣшить систему уравненій:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b\,. \end{cases}$$

Произвести изслѣдованіе.

480. Рѣшить систему уравненій.

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=b^2. \end{cases}$$

Произвести изслѣдованіе. Задача можетъ быть сведена къ предшествующей.

481. Рѣшить систему уравненій.

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^3+y^3=b^3. \end{cases}$$

Произвести изслѣдованіе. Задачу эту можно свести къ задачѣ № 479, если выразить x^3+y^3 черезъ $x+y$ и xy. Это замѣчаніе имѣетъ мѣсто и для слѣдующихъ двухъ задачъ.

482. Рѣшить и изслѣдовать систему уравненій:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=b^4. \end{cases}$$

483. Рѣшить и изслѣдовать систему уравненій:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^5+y^5=b^5. \end{cases}$$

484. Рѣшить систему уравненій:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

485. Данъ треугольникъ ABC. Опредѣлить на прямой BC такую точку O, чтобы параллелограммъ, составленный прямыми AB, AC и двумя другими прямыми, проходящими параллельно имъ черезъ точку O, имѣлъ данный периметръ.

486. Данъ треугольникъ ABC, съ прямымъ угломъ при вершинѣ A. Требуется опредѣлить на прямой BC точку O такъ, чтобы прямоугольникъ, составленный прямыми AB, AC и параллельными имъ прямыми, проходящими черезъ точку O, имѣлъ данную площадь.

487. Данъ треугольникъ ABC. Мы будемъ говорить, что прямоугольникъ $MNPQ$ вписанъ въ этотъ треугольникъ, если вершина послѣдняго M лежитъ на сторонѣ треугольника AC, вершина N—лежитъ на сторонѣ AB, а вершины P и Q—на сторонѣ BC. Требуется опредѣлить прямоугольникъ, который вписанъ въ треугольникъ ABC, если даны периметръ и площадь этого прямоугольника.

488. Данъ треугольникъ ABC. Требуется опредѣлить прямоугольный треугольникъ, стороны котораго имѣютъ попарно тѣ же разности, что и стороны даннаго треугольника.

489. Въ треугольникѣ ABC даны сторона AB, уголъ A и высота, выходящая изъ вершины A. Опредѣлить остальныя стороны треугольника.

490. Въ треугольникѣ даны сторона, радіусъ описаннаго круга и соотвѣтствующая данной сторонѣ медіана. Вычислить другія стороны. Произвести изслѣдованіе.

491. Въ треугольникѣ даны сторона, сумма двухъ другихъ сторонъ и уголъ A, противолежащій данной сторонѣ. Вычислить двѣ другія стороны. Произвести изслѣдованіе.

492. Данъ шаръ съ центромъ O и малый кругъ (C) этого шара. Обозначимъ черезъ (Σ) меньшую изъ двухъ частей, на которыя шаръ дѣлится плоскостью круга (C), а черезъ (Γ) конусъ, вершиной котораго служитъ точка O, а основаніемъ кругъ (C). Данъ радіусъ шара. Требуется выбрать разстояніе плоскости (C) отъ центра шара такъ, чтобы поверхность сегмента (Σ) была въ m разъ больше боковой поверхности конуса. Произвести изслѣдованіе.

493. Обозначенія остаются тѣ же, что въ предыдущей задачѣ. Требуется опредѣлить разстояніе плоскости (C) отъ центра шара такъ,

чтобы объемъ сферическаго сегмента (Σ) былъ въ p разъ больше объема конуса (Γ). Произвести изслѣдованіе.

494. Въ треугольникѣ даны сторона, разность двухъ другихъ сторонъ и радіусъ описаннаго круга. Вычислить углы B и C. Произвести изслѣдованіе.

495. Даны площадь, периметръ и одинъ уголъ треугольника. Вычислить два другихъ угла. Произвести изслѣдованіе.

496. Разсматриваемъ уравненіе второй степени по отношенію къ x:

$$x^2-6x+5+z(x^2-5x+6)=0. \tag{1}$$

Для какихъ значеній z корни этого уравненія будутъ равны между собой? Обозначимъ эти значенія черезъ z_1 и z_2, общее значеніе корней уравненія (1) при $z=z_1$ обозначимъ черезъ x_1 и общее ихъ значеніе при $z=z_2$ — черезъ x_2. Пусть теперь x' и x'' суть корни уравненія (1) при произвольномъ значеніи z, отличномъ отъ z_1 и z_2. Вычислить значеніе выраженія $\dfrac{(x'-x_1)(x''-x_2)}{(x'-x_2)(x''-x_1)}$ и доказать, что значеніе это не зависитъ отъ z.

497. Вставить n среднихъ ариѳметическихъ (или среднихъ геометрическихъ) между двумя данными числами a и z — значитъ составить ариѳметическій (соотвѣтственно геометрическій) рядъ изъ $n+2$ членовъ, первый членъ котораго равенъ a и послѣдній z. Требуется вставить между 10 и 50 три ариѳметическія среднія.

498. Вставить между числами 1 и 10000 три среднихъ геометрическихъ.

499. Вставить между числами 10 и 24 шесть среднихъ ариѳметическихъ.

500. Вставить между 2 и 64 четыре среднихъ геометрическихъ.

501. Вставить между числами 1,35 и 2,54 двадцать среднихъ ариѳметическихъ.

502. Вставить между 1 и 2 семь среднихъ геометрическихъ.

503. Вычислить суммы ариѳметическихъ и геометрическихъ рядовъ, которые составлены въ задачахъ №№ 498 — 502.

504. Вставить между 15 и -50 четыре среднихъ ариѳметическихъ.

505. Вставить между 10 и 3 шесть среднихъ геометрическихъ.

506. Вставить между 4 и $-\frac{1}{8}$ четыре среднихъ геометрическихъ.

507. Вставить между $+1$ и -1 шесть среднихъ геометрическихъ.

508. Составить суммы рядовъ въ задачахъ №№ 504 и 507.

509. Дана періодическая десятичная дробь:

$$0{,}074\,074\,\overline{074}\ldots$$

Требуется написать ее въ видѣ геометрическаго ряда со знаменателемъ $\frac{1}{1000}$. Потомъ требуется составить сумму n первыхъ членовъ этого ряда и изслѣдовать, что происходитъ съ этой суммой, когда n безконечно возрастаетъ.

510. Рѣшить ту же задачу для періодическихъ десятичныхъ дробей:

$$0{,}3034\,3034\,\overline{3034}\ldots,$$

$$0{,}256\,317\,317\,\overline{317}\ldots.$$

511. Пусть данъ треугольникъ ABC; пусть AH будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на прямую BC, HH_1 — перпендикуляръ, опущенный изъ H на AC, H_1K_1—перпендикуляръ, опущенный изъ H_1 на прямую BC, K_1H_2 — перпендикуляръ изъ точки K_1 на прямую AC, H_2K_2 перпендикуляръ изъ точки H_2 на прямую BC и т. д. Вычислить сумму этихъ перпендикуляровъ, полученныхъ послѣ n-кратнаго повторенія построенія. Что произойдетъ съ этой суммой, если n безконечно возрастаетъ? Выполнить вычисленія для равносторонняго треугольника со стороной $AB = 2$ см., принимая послѣдовательно $n = 4$, $n = 10$, $n = 1000$, $n = 1\,000\,000$.

512. Въ кругъ вписанъ равносторонній треугольникъ. Въ этотъ треугольникъ вписанъ кругъ, въ этотъ кругъ новый равностороній треугольникъ, и такъ далѣе до безконечности. Требуется вычислить сумму площадей круговъ, сумму площадей треугольниковъ и сумму периметровъ треугольниковъ.

513. Одинаковые предметы цилиндрической формы (куски дерева, трубы и т. д.) сложены одни на другіе слѣдующимъ образомъ. Сначала положено извѣстное количество ихъ рядомъ на горизонтальной плоскости, затѣмъ надъ ними уложенъ другой слой этихъ предметовъ такимъ образомъ, чтобы они стояли надъ промежутками между предметами перваго ряда, и такъ далѣе; такимъ образомъ, каждый слѣдующій горизонтальный слой содержитъ однимъ предметомъ менѣе предыдущаго. Сколько предметовъ заключаетъ вся куча, если получилось 12 горизонтальныхъ слоевъ и если самый верхній содержитъ 42 предмета.

514. Одинаковые шары раскладываются на горизонтальной плоскости одинъ возлѣ другого въ формѣ равносторонняго треугольника такимъ образомъ, что помѣщаютъ 5 шаровъ въ первомъ ряду, потомъ 4 образуютъ параллельный рядъ такъ, что каждый изъ этихъ 4 касается двухъ шаровъ изъ первыхъ 5-ти, потомъ 3 образуютъ новый параллельный рядъ, затѣмъ 2 и, наконецъ, 1. Затѣмъ накладываютъ новые шары на всю фигуру такъ, что каждый изъ нихъ лежитъ на трехъ шарахъ. Тогда мы получимъ новый равносторонній треугольникъ, каждая сторона котораго содержитъ 4 шара вмѣсто 5. Продолжаютъ поступать такимъ образомъ, пока не получится трехугольная пирамида, которая заканчивается однимъ шаромъ, образующимъ ея вершину. Сколько на это понадобится шаровъ? Сколько понадобилось бы шаровъ, если бы сторона треугольника, лежащаго въ основаніи пирамиды, содержала 45 шаровъ?.

Алфавитный указатель.

Числа обозначаютъ страницы.

MATHESIS

Четырехзначные логариөмы

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	1761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	3979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	4771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	5441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	6532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981
50	6990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	7782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	8129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	8451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
75	8751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	*004	*009	*015	*020	*025
80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	9294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	9542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
95	9777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

Четырехзначные антилогариѳмы

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	002	005	007	009	012	014	016	019	021
01	023	026	028	030	033	035	038	040	042	045
02	047	050	052	054	057	059	062	064	067	069
03	072	074	076	079	081	084	086	089	091	094
04	096	099	102	104	107	109	112	114	117	119
05	1122	125	127	130	132	135	138	140	143	146
06	148	151	153	156	159	161	164	167	169	172
07	175	178	180	183	186	189	191	194	197	199
08	202	205	208	211	213	216	219	222	225	227
09	230	233	236	239	242	245	247	250	253	256
10	1259	262	265	268	271	274	276	279	282	285
11	288	291	294	297	300	303	306	309	312	315
12	318	321	324	327	330	334	337	340	343	346
13	349	352	355	358	361	365	368	371	374	377
14	380	384	387	390	393	396	400	403	406	409
15	1413	416	419	422	426	429	432	435	439	442
16	445	449	452	455	459	462	466	469	472	476
17	479	483	486	489	493	496	500	503	507	510
18	514	517	521	524	528	531	535	538	542	545
19	549	552	556	560	563	567	570	574	578	581
20	1585	589	592	596	600	603	607	611	614	618
21	622	626	629	633	637	641	644	648	652	656
22	660	663	667	671	675	679	683	687	690	694
23	698	702	706	710	714	718	722	726	730	734
24	738	742	746	750	754	758	762	766	770	774
25	1778	782	786	791	795	799	803	807	811	816
26	820	824	828	832	837	841	845	849	854	858
27	862	866	871	875	879	884	888	892	897	901
28	905	910	914	919	923	928	932	936	941	945
29	950	954	959	963	968	972	977	982	986	991
30	1995	*000	*004	*009	*014	*018	*023	*028	*032	*037
31	2042	046	051	056	061	065	070	075	080	084
32	089	094	099	104	109	113	118	123	128	133
33	138	143	148	153	158	163	168	173	178	183
34	188	193	198	203	208	213	218	223	228	234
35	2239	244	249	254	259	265	270	275	280	286
36	291	296	301	307	312	317	323	328	333	339
37	344	350	355	360	366	371	377	382	388	393
38	399	404	410	415	421	427	432	438	443	449
39	455	460	466	472	477	483	489	495	500	506
40	2512	518	523	529	535	541	547	553	559	564
41	570	576	582	588	594	600	606	612	618	624
42	630	636	642	649	655	661	667	673	679	685
43	692	698	704	710	716	723	729	735	742	748
44	754	761	767	773	780	786	793	799	805	812
45	2818	825	831	838	844	851	858	864	871	877
46	884	891	897	904	911	917	924	931	938	944
47	951	958	965	972	979	985	992	999	*006	*013
48	3020	027	034	041	048	055	062	069	076	083
49	090	097	105	112	119	126	133	141	148	155

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	170	177	184	192	199	206	214	221	228
51	236	243	251	258	266	273	281	289	296	304
52	311	319	327	334	342	350	357	365	373	381
53	388	396	404	412	420	428	436	443	451	459
54	467	475	483	491	499	508	516	524	532	540
55	3548	556	565	573	581	589	597	606	614	622
56	631	639	648	656	664	673	681	690	698	707
57	715	724	733	741	750	758	767	776	784	793
58	802	811	819	828	837	846	855	864	873	882
59	890	899	908	917	926	936	945	954	963	972
60	3981	990	999	*009	*018	*027	*036	*046	*055	*064
61	4074	083	093	102	111	121	130	140	150	159
62	169	178	188	198	207	217	227	236	246	256
63	266	276	285	295	305	315	325	335	345	355
64	365	375	385	395	406	416	426	436	446	457
65	4467	477	487	498	508	519	529	539	550	560
66	571	581	592	603	613	624	634	645	656	667
67	677	688	699	710	721	732	742	753	764	775
68	786	797	808	819	831	842	853	864	875	887
69	898	909	920	932	943	955	966	977	989	*000
70	5012	023	035	047	058	070	082	093	105	117
71	129	140	152	164	176	188	200	212	224	236
72	248	260	272	284	297	309	321	333	346	358
73	370	383	395	408	420	433	445	458	470	483
74	495	508	521	534	546	559	572	585	598	610
75	5623	636	649	662	675	689	702	715	728	741
76	754	768	781	794	808	821	834	848	861	875
77	888	902	916	929	943	957	970	984	998	*012
78	6026	039	053	067	081	095	109	124	138	152
79	166	180	194	209	223	237	252	266	281	295
80	6310	324	339	353	368	383	397	412	427	442
81	457	471	486	501	516	531	546	561	577	592
82	607	622	637	653	668	683	699	714	730	745
83	761	776	792	808	823	839	855	871	887	902
84	918	934	950	966	982	998	*015	*031	*047	*063
85	7079	096	112	129	145	161	178	194	211	228
86	244	261	278	295	311	328	345	362	379	396
87	413	430	447	464	482	499	516	534	551	568
88	586	603	621	638	656	674	691	709	727	745
89	762	780	798	816	834	852	870	889	907	925
90	943	962	980	998	*017	*035	*054	*072	*091	*110
91	8128	147	166	185	204	222	241	260	279	299
92	318	337	356	375	395	414	433	453	472	492
93	511	531	551	570	590	610	630	650	670	690
94	710	730	750	770	790	810	831	851	872	892
95	8913	933	954	974	995	*016	*036	*057	*078	*099
96	9120	141	162	183	204	226	247	268	290	311
97	333	354	376	397	419	441	462	484	506	528
98	550	572	594	616	638	661	683	705	727	750
99	772	795	817	840	863	886	908	931	954	977

школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества. Перев. съ нѣмецк. подъ ред. лаборанта *Е. С. Ельчанинова.* IV+192 стран. 8°. Съ 79 рисунками. 1907. Ц. Р. 1. 20 к.

Превосходная книга, какой намъ давно не хватало. Всюду въ книгѣ сохраняешь благотворное чувство, что находишься въ совершенно надежныхъ рукахъ... учитъ серьезной наукѣ въ болѣе легкой формѣ. *Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Litteratur.*

ШМИДЪ, Б. проф. **Философская хрестоматія** *). Перев. съ нѣмецк. *Ю. А. Говсѣева* подъ ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге.* VIII+172 стр. 8° 1907. Ц. Р. 1. —

...Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 1907. Ц. 50 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики** *). Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ прилож. рѣчи *А. Бальфура*: **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+319 стран. 8°. Съ 5 портрет., 6 таблиц. и 33 рис. Ц. Р. 2. —

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. Р. 1. 50 к.

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій** *) (іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ 3 итальянск. изданія. VIII+146 стр 8°. Съ 21 рис 1910. *Второе изданіе.* Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній** *). 46 стран. 8°. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

ЛАКУРЪ, П. и **АППЕЛЬ, Я. Историческая физика** *). Перев. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физики и Элементарн. Матем.“.* Въ 2-хъ томахъ большого формата, 892 стр. Съ 799 рис. и 6 отдѣльными цвѣтными таблицами. 1908. Ц. Р. 7. 50 к.

«Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ»... *Ж. М. Н. Пр.*

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. **Образованіе міровъ** *). Пер. съ нѣм. подъ ред проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. 1908. Ц. Р. 1. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Педагог. Сборн.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 чертеж. 1908. Ц 35 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

Риги, А. проф. **Электрическая природа матеріи** *). Вступительная лекція. Перев. съ итальянскаго подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физ. и Элем. Матем."*. 28 стр. 8°. *2-е изданіе.* 1911. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго проф. Болоньскаго унив. *Ж. М. Н. Пр.*

Леманъ, О. проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

.....весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ. *Педагогическій Сборникъ.*

Гейбергъ, І. проф. **Новое сочиненіе Архимеда** *). Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

Вейнбергъ, Б. П. проф. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники** *). IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. Р. 1.

«Mathesis» можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

Ковалевскій, Г. проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ** *). Перев. съ нѣмецк. подъ редакц. и съ прим. прив.-доц. *С. О Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. 1909. Ц. Р. 1.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ... *Русская Школа.*

Томпсонъ, Сильванусъ, проф. **Добываніе свѣта** *) Общедоступная лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Британск. Ассоціаціи 1906. Перев. съ англ VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта *Ж. М. Н. Пр.*

Слаби, А. проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опыт Физ. и Элемент. Матем."*. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

Снайдеръ, К. проф. **Картина міра въ свѣтѣ современнаго естествознанія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отдѣльными портретами. 1909. Ц. Р. 1. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Педагог. Сборникъ.*

Рамзай, В. проф **Благородные и радіоактивные газы.** Пер. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат."*. 37 стр. 16°. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

Бруни, К. проф. **Твердые растворы** *). Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп Физ. и Эл. Мат."*. 37 стр. 16°. 1909. Ц. 25 к.

Боллъ, Р. С. проф. **Вѣка и приливы.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* 104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 табл. 1909. Ц. 75 к.

.....настоящее изданіе «Mathesis» слѣдуетъ привѣтствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

Слаби, А. проф. **Безпроволочный телефонъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 28 стр. 8°. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

Линдеманъ, Ф. проф. **Спектръ и форма атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 23 стр. 16°. *2-е изданіе.* 1909. Ц. 15 к.

Кутюра, Л. Алгебра логики. Перев. съ французскаго съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8°. 1909. Ц. 90 к.

Веберъ Г. и **Вельштейнъ І.,** проф. **Энциклопедія элементарной геометріи.** Томъ II, книга I. **Основанія геометріи.** Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* XII+362 стр. 8°. Съ 144 черт. и 5 рис. 1909. Ц. Р. 3.

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. **Курсъ физики** *). Перев. съ нѣмецк. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.*
Т. I. VIII+348 стр. больш ${8}^{0}$. Съ 236 рис. 1910. Ц. Р. 2. 75 к.
Т. II. VIII+466 стр. больш${8}^{0}$. Съ 257 рис. 1910. Ц. Р. 3. 75 к.
Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

ГЕРНЕТЪ В. А. Объ единствѣ вещества. 46 стр. ${16}^{0}$. Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. **Происхожденіе цвѣтовъ спектра.** Съ прил. статьи *В. Ритца.* **„Линейные спектры и строеніе атомовъ“.** 50 стр. ${16}^{0}$. Ц. 30 к.

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Теорія движенія луны.** (Исторія и современное состояніе этого вопроса). 26 стр. ${16}^{0}$. Ц. 20 к.

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Основы метеорологіи** *). XVI+527 стр. больш. ${8}^{0}$. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. Р. 4. —
Честь и слава «Mathesis» за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука! *Ж. М. Н. Пр.*

КЭДЖОРИ, Ф. проф. **Исторія элементарной математики** (съ нѣкоторыми указаніями для препод.) *). Перев. съ англ. подъ ред и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. ${8}^{0}$. Съ рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.
Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна... Мы настоятельно рекомендуемъ «Исторію элемент. мат.» Кэджори. *Вѣст. Воспит.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Введеніе въ изученіе физической химіи.** Перев. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+76 стр. ${16}^{0}$. 1910. Ц. 40 к.

РОУ, С. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги. Пер. съ англ. XVI+173 стр. ${16}^{0}$. Съ 87 рис. и чертежами. 1910. Ц. 90 к.

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Переводъ съ англійск. *І. Левинтова,* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* VIII+162 стр. ${8}^{0}$. Съ 29 рис. 1910. Ц. Р. 1. 20 к.

ГРАФФЪ, К. Комета Галлея *). Пер. съ нѣм. VIII+71 стр. ${16}^{0}$. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изданіе второе исправл. и дополненное 1910. Ц. 30 к.
Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Педагог. Сборникъ.*

НИМФЮРЪ, Р. Воздухоплаваніе *). Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр ${8}^{0}$. Съ 52 рис. 1910. Ц 90 к.

Галлеева Комета въ 1910 году. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной—О кометахъ - О кометѣ Галлея. 32 стр. ${8}^{0}$. Съ 12 иллюстраціями 1910. Ц. 12 к.

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. **Развитіе современной спектроскопіи** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* 45 стр. ${16}^{0}$. 1910. Ц 25 к.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. Парадоксы природы *). Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. ${8}^{0}$. Съ 67 рис. Ц Р. 1.20 к

ВЕБЕРЪ и ВЕЛЬШТЕЙНЪ, проф. **Энциклопедія элементарной математики** *). Т. II, кн. 2 и 3. Тригонометрія, аналитическая геометрія и стереометрія. Перев. съ нѣмец. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+321 стр. ${8}^{0}$. Съ 109 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Что такое алгебра?** *) 72 стр. ${16}^{0}$. Ц. 40 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **Наука и Методъ.** Пер. съ франц. И. Брусиловскаго подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. ${16}^{0}$. 1910. Ц. Р. 1. 50 к.

ЛЁБЪ, Ж. проф. **Динамика живого вещества.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+352 стр. ${8}^{0}$. Съ 64 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.