А. А. Болибрух

Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений

МЦНМО

А. А. Болибрух

Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 517.927.7
ББК 22.161.6
Б79

Болибрух А. А.
Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений / Под ред. Д. В. Аносова, В. П. Лексина
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
220 с.
ISBN 978-5-4439-2640-7

В лекциях начала аналитической теории дифференциальных уравнений излагаются с точки зрения расслоений с мероморфными связностями на римановой сфере. Этот подход позволяет добиться значительного прогресса в решении таких знаменитых старых задач, как проблема Римана—Гильберта и задача о биркгофовой стандартной форме, а также в исследовании изомонодромных деформаций фуксовых систем.

Лекции, начинающиеся с основ теории и требующие от читателя знакомства лишь со стандартными курсами обыкновенных дифференциальных уравнений и комплексного анализа, выводят его на передний край этой бурно развивающейся в последнее время области математики, имеющей важные приложения к задачам математической физики.

Подготовлено на основе книги:
Болибрух А. А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений / Под ред. Д. В. Аносова, В. П. Лексина. — М.: МЦНМО, 2009.— 220 с. — ISBN 978-5-94057-510-8

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2640-7

Предисловие

С именем А. А. Болибруха (1950—2003) связаны самые существенные достижения последнего времени в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области, в значительной степени изменившие облик этой теории[1]. (Достаточно упомянуть о его результатах по 21-й проблеме Гильберта, где — редкий случай — ответ оказался противоположным ожиданиям самого Гильберта.)

Настоящая книга содержит значительную часть результатов этой теории — как давно успевших стать классическими, так и новых. Конечно, книга такого объема, которая начинается «с самого начала» и изложение в которой является довольно подробным, не может быть исчерпывающей. Но так как она написана с современных позиций, это не создаст дополнительных трудностей читателю, желающему познакомиться с иными результатами в этой области по другим источникам.

Книга состоит из двух частей. Первая часть — это переиздание книги А. А. Болибруха «Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения» (М.: МЦНМО, 2000), которая является авторской обработкой читавшегося им спецкурса (см. введение к этой части). Продолжением последнего был спецкурс об изомонодромных деформациях[2]. А. А. Болибрух намеревался издать текст этого спецкурса как продолжение предыдущей книги. Однако он заболел и умер, не оставив соответствующих письменных материалов. Вторая часть настоящей книги основана, в первую очередь, на статьях А. А. Болибруха и записях второго спецкурса, сделанных в основном его учениками И. В. Вьюгиным, Р. Р. Гонцовым, В. А. Побережным. Обработка этих записей проведена ими под нашей редакцией. При написании лекции 18 использован собственный черновик доклада А. А. Болибруха. Приложение 4 — это краткая сводка сведений о некоторых топологических понятиях и фактах, фигурирующих во второй части лекций. Оно предназначено для начальной ориентировки читателя, впервые сталкивающегося с этими вещами. (Если же он захочет познакомиться с ними детальнее, ему, конечно, придется обратиться к соответствующим учебникам. Приложение 4, по крайней мере, подскажет ему, какие понятия в первую очередь нужно изучить в связи с нашей основной темой.)

Д. В. Аносов, В. П. Лексин

---

[1] Жизни и деятельности А. А. Болибруха посвящена наша статья [2], см. с. 195 наст. изд.

[2] В указанном введении А. А. Болибрух в качестве одной из трех основных целей первого спецкурса назвал подготовку слушателей ко второму спецкурсу.

Часть I

Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения

Введение

Настоящее издание является обработкой семестрового спецкурса с тем же названием, который читался мною в разные годы в Московском физико-техническом институте, в университетах городов Ниццы и Страсбурга, а также в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

Чтение этого спецкурса преследовало следующие цели:

— познакомить студентов-физиков и аналитиков с понятиями расслоения и связности и показать, как эти понятия эффективно используются в аналитической теории дифференциальных уравнений;

— рассказать о некоторых старых задачах аналитической теории дифференциальных уравнений (проблема Римана—Гильберта, задача о биркгофовой стандартной форме), продвижение в исследовании которых в самое последнее время было связано с применением простейших алгебро-геометрических методов;

— подготовить слушателей к спецкурсу об изомонодромных деформациях, который обычно читался в следующем после чтения настоящего спецкурса семестре.

Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений была в основном создана трудами математиков XIX столетия, и к концу первой четверти XX века основные задачи этой теории, такие как проблема Римана—Гильберта или задача о биркгофовой стандартной форме, считались решенными положительно. В каком-то смысле эта математическая дисциплина оказалась на некоторое время на периферии развития математики.

Однако после открытия в начале 1970-х годов метода изомонодромных деформаций аналитическая теория дифференциальных уравнений получила новый мощный импульс к своему развитию. Оказалось, что многие знаменитые нелинейные уравнения математической физики могут быть проинтерпретированы как уравнения изомонодромных деформаций систем линейных дифференциальных уравнений. При этом важную информацию о поведении решений этих уравнений можно получить, исследуя соответствующие изомонодромные деформации линейных систем и, в частности, фуксовых систем дифференциальных уравнений. Но чтобы построить изомонодромное семейство, надо вначале решить обратную задачу теории монодромии — задачу Римана—Гильберта. Так эта проблема вновь оказалась в центре внимания многих математиков. В начале 1980-х годов выяснилось, что в доказательстве положительной разрешимости этой проблемы имеются пробелы и она нуждается в дальнейшем исследовании. Изучению этой задачи и посвящен, в основном, настоящий спецкурс.

С точки зрения алгебраической геометрии, система линейных дифференциальных уравнений — это связность в тривиальном расслоении (при выбранной тривиализации расслоения). Такой подход позволяет применить к исследованию проблемы Римана—Гильберта некоторые простейшие алгебро-геометрические методы, которые оказываются чрезвычайно эффективными. Например, исходную задачу о построении системы фуксовых дифференциальных уравнений с заданной монодромией и особыми точками (в чем и состоит проблема Римана—Гильберта) удается разбить на две независимые части: построение на расширенной комплексной плоскости расслоения с логарифмической связностью, имеющей заданную монодромию, и исследование вопроса о голоморфной тривиальности построенного расслоения. Именно на этом пути удалось найти контрпример к этой проблеме и сформулировать достаточные условия ее положительной разрешимости.

Конечно, расширенная комплексная плоскость (сфера Римана) — не самый сложный с точки зрения алгебраической геометрии объект и все результаты по проблеме Римана—Гильберта (как и соответствующие доказательства) могут быть изложены в рамках методов комплексного анализа и аналитической теории дифференциальных уравнений, без использования понятий расслоения, связности и т. д., но при этом теряется понимание сути происходящего и становятся неясными мотивировки вводимых определений и методов доказательств.

С другой стороны, попытки исключить уравнения из рассмотрения и говорить лишь о связностях и локальных системах приводят к потере связи с приложениями. Поэтому я старался при чтении спецкурса постоянно подчеркивать эту связь и часто давал формулировки соответствующих результатов одновременно в терминах связностей и систем уравнений.

В первых трех лекциях спецкурса вводятся понятия голоморфного расслоения (главного и векторного) и связности. Эти лекции (как и спецкурс в целом) не претендуют на систематическое введение в теорию векторных расслоений. Мы ограничиваемся здесь лишь основными понятиями и необходимыми для дальнейшего примерами.

Следующие три лекции посвящены локальной теории систем дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками. Здесь представлена, в частности, теория нормирований Левеля, которая отсутствует в стандартной учебной литературе по аналитической теории дифференциальных уравнений.

Системы с регулярными особыми точками на всей расширенной комплексной плоскости рассматриваются в лекции 7, а в лекции 8 рассказывается о постановке проблемы Римана—Гильберта и о методе исследования этой проблемы.

В лекции 9 приводится элементарное (использующее лишь простейшие факты из одномерного комплексного анализа) доказательство теоремы Биркгофа—Гротендика о том, что всякое голоморфное векторное расслоение на расширенной комплексной плоскости эквивалентно сумме одномерных расслоений.

Основные результаты по проблеме Римана—Гильберта представлены в лекциях 10 и 11, первая часть лекции 12 посвящена задаче о биркгофовой стандартной форме, а во второй ее части приводится список известных результатов, формулируются некоторые нерешенные задачи, а также указывается список литературы «для дальнейшего чтения»[1].

Подготовка и издание этого спецкурса были бы невозможны без поддержки и участия кафедры высшей математики МФТИ, кафедры дифференциальных уравнений мехмата МГУ, моих коллег из отделений математики университетов Ниццы и Страсбурга, которым я благодарен за поддержку и помощь.

Я также благодарен сотрудникам Московского центра непрерывного математического образования за организацию публикации спецкурса.

[1] В настоящем издании общий список литературы приводится в конце книги. — *Прим. ред.*

Лекция 1

Понятие главного расслоения. Примеры

Понятие расслоения находится примерно в таком же отношении к понятию прямого произведения, как понятие многообразия к евклидову пространству: и многообразие, и расслоение конструируются из отдельных кирпичиков, в первом случае — из шаров евклидова пространства, во втором — из декартовых произведений окрестностей точек многообразия на стандартный слой.

Прежде чем дать инвариантное (бескоординатное) определение расслоения, напомним некоторые необходимые для дальнейшего определения.

Определение 1.1. *Группой Ли* G называется многообразие G, являющееся группой и такое, что групповые операции

1) $G\times G\to G$ $((g, h)\mapsto gh)$;

2) $G\to G$ $(g\mapsto g^{-1})$

являются непрерывными (гладкими, аналитическими и т. д.) отображениями многообразий.

Пример 1.1. Примерами групп Ли являются:

1) группа $\mathbb{R}$ (группа действительных чисел) по сложению;

2) окружность S^1, рассматриваемая как множество комплексных чисел, модуль которых равен единице; групповая операция в этом случае — умножение комплексных чисел;

3) группа $\mathbb{Z}_2=\{+1, -1\}$ по умножению (пример дискретной группы Ли);

4) общая линейная группа над полем $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) — $\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ ($\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$) — группа невырожденных действительных (комплексных) матриц размера $p\times p$ по умножению.

Определение 1.2. *Непрерывным* (*гладким*, *аналитическим* и т. д.) *действием группы Ли* G на многообразии X справа называется непрерывное (гладкое, аналитическое и т. д.) отображение

$$X\times G\to X\quad ((x, g)\mapsto xg)$$

такое, что

1) $\forall x\in X\ \forall g, h\in G: x(gh)=(xg)h$;

2) $\forall x\in X: xe=x$.

Аналогичным образом определяется левое действие G на X.

Пример 1.2. Примерами действия групп являются следующие:

1) группа G действует справа на многообразии $X \times G$ по правилу $(x,\ g)h = (x,\ gh)$;

2) группа $\mathbb{Z}_2$ из п. 3 примера 1.1 действует на многоообразии S^1 из п. 2 примера 1.1 (обычным умножением комплексных чисел);

3) группа $\mathrm{GL}(p,\ \mathbb{R})$ $(\mathrm{GL}(p,\ \mathbb{C}))$ действует слева на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$ $(\mathbb{C}^p)$ (умножением матрицы на вектор).

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы дать определение главного расслоения.

Определение 1.3. *Главным расслоением P со структурной группой G* называется четверка $P = (P_E,\ B,\ \pi,\ G)$, где:

1) P_E, B — многообразия, G — группа Ли, действующая справа на P_E, $\pi\colon P_E \to B$ — сюръективное отображение;

2) для любого $x \in B$ существует окрестность $U \subset B$ точки x и гомеоморфизм $f_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "f_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times G \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & U & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

коммутативна (см. рис. 1) и

$$f_U(\tilde{x}g) = f_U(\tilde{x})g \quad \text{(эквивариантность } f_U\text{)}$$

для любых $\tilde{x} \in \pi^{-1}(U),\ g \in G$.

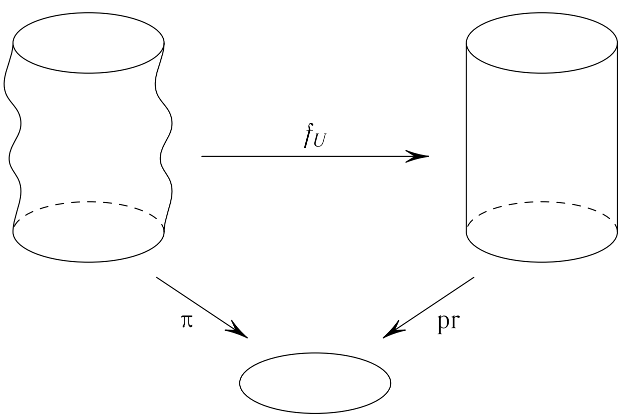

Рис. 1

Пространство P_E называется *тотальным пространством расслоения*, B — *базой расслоения*, π — *проекцией*, $\pi^{-1}(x) \cong G$ — *слоем расслоения*. Свойство 2 означает, что расслоение P *локально тривиально* (устроено как «простое» прямое произведение над U).

Если все многообразия[1] и отображения, участвующие в определении расслоения, непрерывны (гладкие, аналитические и т. д.), то говорят о *топологическом* (*гладком*, *аналитическом* и т. д.) *расслоении* P.

Простейшим примером главного расслоения является прямое произведение.

Пример 1.3. Рассмотрим

$$P = (B \times G,\, B,\, \mathrm{pr},\, G),$$

где действие G на $B \times G$ определяется как в п. 1 примера 1.2, а через pr обозначена проекция на первый сомножитель. Очевидно, что все условия определения 1.3 выполнены.

Приведем пример «нетривиального» главного расслоения.

Пример 1.4. Следующее расслоение: $P = (S^1, S^1, \pi, \mathbb{Z}_2)$, где $\pi(z) = z^2$, а группа $\mathbb{Z}_2$ действует на S^1 так же, как в п. 2 примера 1.2, является «нетривиальным» (пространство расслоения S^1 не гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times \mathbb{Z}_2$, так как последнее пространство несвязно).

Следующее расслоение хорошо известно в топологии. Оно называется расслоением Хопфа.

Пример 1.5. Рассмотрим расслоение $P = (S^3, S^2, \pi, S^1)$, где сфера S^3 реализована как подмножество точек (z_1, z_2) пространства $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющих условию $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, сфера $S^2 = \bar{\mathbb{C}}$ — как множество комплексных прямых пространства $\mathbb{C}^2$, проходящих через начало координат (в этом случае каждой точке сферы ставится в соответствие число $z_1 : z_2$, где, в свою очередь, (z_1, z_2) — направляющий вектор прямой), а отображение π задано соотношением $\pi(z_1, z_2) = z_1 : z_2$. Нетрудно видеть, что прообраз каждой точки гомеоморфен окружности, так как если $\pi(z_1', z_2') = \pi(z_1, z_2)$, то $z_1' = tz_1$, $z_2' = tz_2$ и $|t|^2 = 1$, то есть $t \in S^1$. Докажите самостоятельно, что P действительно является главным аналитическим расслоением со структурной группой S^1.

Какие главные расслоения считать эквивалентными? Ответ на этот вопрос дает следующее определение.

[1] При некоторой модификации определения топологического главного расслоения не требуется, чтобы P_E было многообразием. Такой вариант (который как раз и излагается во многих учебниках) используется как в самой топологии, так и кое-где за ее пределами, но для целей настоящей книги достаточно более ограничительного варианта, приведенного в основном тексте. — *Прим. ред.*

Определение 1.4. Два главных расслоения P и $P' = (P'_E, B, \pi', G)$ называются *эквивалентными*, если существует такой эквивариантный гомеоморфизм f между P_E и P'_E, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} P_E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & P'_E \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

коммутативна. (Если речь идет об эквивалентности гладких, аналитических и т. д. расслоений, то требуется, чтобы отображение f было диффеоморфизмом, биголоморфным и т. д. отображением.)

Главное расслоение называется *тривиальным*, если оно эквивалентно прямому произведению.

Отметим здесь, что коммутативность диаграммы (1.2) означает, что отображение f переводит слой $\pi^{-1}(x)$ расслоения P над точкой x в слой $(\pi')^{-1}(x)$ расслоения P' над той же точкой.

Перейдем теперь к координатному описанию главного расслоения. Рассмотрим покрытие $\{U_i\}$ базы B такое, что над каждым U_i расслоение P тривиально, и рассмотрим локальные тривиализации (1.1) расслоения P над этими окрестностями (т. е. зафиксируем гомеоморфизмы f_{U_i}, которые мы будем обозначать через f_i). Пусть окрестности U_i, U_j имеют непустое пересечение. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} (U_i \cap U_j) \times G \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[l, "f_i"'] \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\pi"] & (U_i \cap U_j) \times G \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & U_i \cap U_j. & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Отображение

$$f_j \circ (f_i)^{-1} \colon (U_i \cap U_j) \times G \to (U_i \cap U_j) \times G \tag{1.4}$$

переводит точку (x, e) в $(x, g^*(x))$. Из эквивариантности этого отображения следует, что для любых $x \in B$, $g \in G$ имеет место соотношение

$$(x, g) = (x, e)g \mapsto (x, g^*(x))g = (x, g^*(x)g).$$

Обозначим $g^*(x)$ через $g_{ji}(x)$. Итак, мы доказали, что

$$f_j \circ (f_i)^{-1}(x, g) \equiv (x, g_{ji}(x)g), \quad \text{где} \quad g_{ji} \colon U_i \cap U_j \to G. \tag{1.5}$$

Из конструкции этого отображения легко следует, что $g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$ для любого $x \in U_i \cap U_j$ (здесь через g^{-1} обозначается элемент группы G,

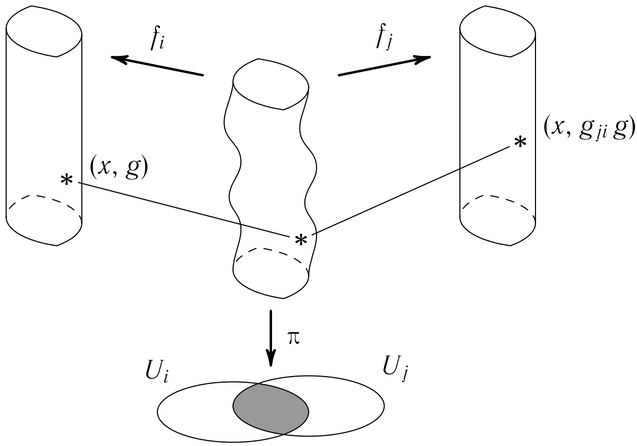

Рис. 2

обратный к g), так как $f_j\circ(f_i)^{-1}\circ f_i\circ(f_j)^{-1}=\mathrm{id}$. Действительно,

$$(x,\ g) = f_j\circ(f_i)^{-1}\circ f_i\circ(f_j)^{-1}(x,\ g) = f_j\circ(f_i)^{-1}(x,\ g_{ij}\,g) = (x,\ g_{ji}\,g_{ij}\,g)$$

для любого g, откуда получаем $g_{ji}(x)\,g_{ij}(x)\equiv e$.

Если три окрестности U_i, U_j, U_k имеют непустое пересечение, то, рассматривая для каждой пары из них диаграммы типа (1.3), с учетом тождества $f_j\circ(f_i)^{-1}\circ f_i\circ(f_k)^{-1}\circ f_k\circ(f_j)^{-1}=\mathrm{id}$ получаем $g_{ji}(x)\,g_{ik}(x)\,g_{kj}(x)\equiv \equiv e$. Действительно,

$$\begin{aligned}(x,\ g) &= f_j\circ(f_i)^{-1}\circ f_i\circ(f_k)^{-1}\circ f_k\circ(f_j)^{-1}(x,\ g) = \\ &= f_j\circ(f_i)^{-1}\circ f_i\circ(f_k)^{-1}(x,\ g_{kj}\,g) = f_j\circ(f_i)^{-1}(x,\ g_{ik}\,g_{kj}\,g) = \\ &= (x,\ g_{ji}\,g_{ik}\,g_{kj}\,g),\end{aligned}$$

откуда и следует указанное тождество.

Итак, мы доказали первую часть следующей леммы.

Лемма 1.1. *По главному расслоению P, покрытию $\{U_i\}$ и фиксированным тривиализациям $\{f_i\}$ расслоения P над $\{U_i\}$ можно построить набор отображений* (1.5), *обладающих следующими свойствами*:

$$g_{ij}(x) \equiv (g_{ji}(x))^{-1}, \qquad g_{ji}(x)\,g_{ik}(x)\,g_{kj}(x) \equiv e. \tag{1.6}$$

И обратно, по любому покрытию $\{U_i\}$ многообразия B и по любому набору отображений (1.5), *обладающих свойствами* (1.6), *можно построить главное расслоение $\widetilde{Q}=(\widetilde{Q}_E,\ B,\ \pi',\ G)$. Если набор* *отображений $\{g_{ij}\}$ был построен по главному расслоению P, то расслоение $\widetilde{Q}$ будет эквивалентно расслоению P.*

Доказательство. Докажем вторую часть леммы. Рассмотрим несвязное объединение $Q=\bigsqcup_i(U_i\times G)$ и введем на этом множестве следующее отношение эквивалентности $\sim$: если $x\in U_i\cap U_j$, то

$$\begin{aligned} &(x,\ g)\sim(x,\ g_{ji}(x)g) &&\text{для } (x,\ g)\in(U_i\times G),\ (x,\ g_{ji}(x)g)\in(U_j\times G),\\ &(x,\ g)\sim(x,\ g) &&\text{для любых } x\in U_i,\ g\in G. \end{aligned}$$

Из свойств (1.6) следует, что это действительно отношение эквивалентности.

Обозначим через $\widetilde{Q}_E$ многообразие $Q/{\sim}$, а через $\langle x,\ g\rangle$ — точку $\widetilde{Q}_E$ (класс эквивалентности пары $(x,\ g)$). Определим действие группы G на $\widetilde{Q}_E$ формулой $\langle x,\ g\rangle h=\langle x,\ gh\rangle$, а отображение $\tilde{\pi}\colon\widetilde{Q}_E\to B$ — соотношением $\tilde{\pi}(\langle x,\ g\rangle)=x$. Читателю предоставляется проверить, что так построенная четверка $\widetilde{Q}=(\widetilde{Q}_E,\ B,\ \tilde{\pi},\ G)$ действительно является главным расслоением со структурной группой G.

Если отображения (1.5) построены по расслоению P с фиксированными локальными тривиализациями $\{f_i\}$, то эквивалентность расслоений P и $\widetilde{Q}$ устанавливается с помощью гомеоморфизма $f\colon\widetilde{Q}_E\to P_E$, где f совпадает с f_i^{-1} на $U_i\times G$. Покажем, что это отображение корректно определено. Для этого надо убедиться в том, что отображения f_i^{-1} и f_j^{-1} совпадают на общей области определения. Действительно, если $x\in U_i\cap U_j$, $(x,\ g)\in U_i\times G$, то по построению $(x,\ g)$ и $(x,\ g_{ji}g)$ определяют одну и ту же точку $\langle x,\ g\rangle\in\widetilde{Q}_E$ и согласно (1.4)

$$f_i^{-1}(x,\ g)=f_j^{-1}\circ f_j\circ f_i^{-1}(x,\ g)=f_j^{-1}(x,\ g_{ji}g).$$

Эквивариантность отображения f и коммутативность диаграммы (1.2) немедленно следуют из построения. $\square$

Набор отображений $\{g_{ji}\}$ называется *склеивающим коциклом* расслоения P. Действительно, с помощью этого набора расслоение P «склеивается» из стандартных кирпичиков $U_i\times G$. Функции $\{g_{ji}\}$ называются также *функциями перехода*.

В качестве примера изучим координатное описание расслоений из примеров 1.3, 1.5.

Пример 1.6. Для произвольного покрытия $\{U_i\}$ базы B расслоения P примера 1.3 (пример расслоения, являющегося прямым произведением) в качестве тривиализирующих отображений естественно выбрать $f_i=\mathrm{id}$; поэтому соответствующий склеивающий коцикл будет иметь вид $g_{ji}(x)\equiv e$.

В случае расслоения Хопфа рассмотрим на базе $S^2=\bar{\mathbb{C}}$ две координаты: $z=z_2/z_1$ при $z_1\neq 0$ (координата «окрестности нуля») и $t=z_1/z_2$ при $z_2\neq 0$ (координата «окрестности бесконечности»). Рассмотрим покрытие сферы S^2 (или, что то же самое, покрытие расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$) двумя окрестностями $U_0=\{z\mid z\in\mathbb{C}\}$ и $U_\infty=\{t\mid t\in\mathbb{C}\}$. Тривиализации расслоения Хопфа над этими окрестностями задаются соответственно отображениями $f_0\colon (z_1,\, z_2)\mapsto(z,\, \exp(i\arg z_1))$ и $f_\infty\colon (z_1,\, z_2)\mapsto(t,\, \exp(i\arg z_2))$. Координаты t и z точки из $U_0\cap U_\infty$ связаны соотношением $t=1/z$, поэтому отображение $f_\infty\circ f_0^{-1}$, записанное в координате z, переводит точку $(z,\, \exp(i\arg z_1))$ в точку $(z,\, \exp(i\arg z_2))$. Поскольку

$$\exp(i\arg z_2)=\exp(i\arg zz_1)=\exp(i\arg z)\exp(i\arg z_1),$$

то $g_{\infty 0}(z)=\exp(i\arg z)$.

Итак, окончательно, расслоение Хопфа имеет следующее координатное описание:

$$U_0=\mathbb{C},\quad U_\infty=\bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\},\quad g_{\infty 0}(z)=\exp(i\arg z),\quad g_{\infty 0}\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to S^1.$$

Замечание 1.1. Расслоение Хопфа получается из расслоения $\mathcal{O}^*(-1)$, имеющего координатное описание

$$U_0=\mathbb{C},\quad U_\infty=\bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\},\quad g_{\infty 0}(z)=z,\quad g_{\infty 0}\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\},$$

«редукцией» $z\mapsto\exp(i\arg z)$ структурной группы $\mathbb{C}^*$ к S^1.

Склеивающий коцикл определяется расслоением не однозначно. Он зависит от выбора покрытия и от выбора локальных тривиализаций $\{f_i\}$. Рассмотрим подробнее последнюю зависимость. Пусть f_U, f'_U — различные тривиализации расслоения P над U. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} U\times G \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[l, "f'_U"'] \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\pi"] & U\times G \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & U. & \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

Отображение

$$f_U\circ(f'_U)^{-1}\colon U\times G\to U\times G \tag{1.8}$$

переводит точку $(x,\, e)$ в $(x,\, h_U(x))$. Из эквивариантности этого отображения следует, что для любых $x\in U$, $g\in G$ имеет место соотношение

$$(x,\, g)=(x,\, e)g\mapsto(x,\, h_U(x))g=(x,\, h_U(x)g).$$

Итак, мы доказали, что

$$f_U\circ(f'_U)^{-1}(x,\, g)\equiv(x,\, h_U(x)g),\quad \text{где } h_U\colon U\to G. \tag{1.9}$$

Так как $f'_U \circ (f_U)^{-1} \circ f_U \circ (f'_U)^{-1} = \mathrm{id}$, точно так же, как и выше, доказывается, что $f'_U \circ (f_U)^{-1}(x,\ g) = (x,\ h_U^{-1} g)$.

Пусть окрестности U_i, U_j имеют непустое пересечение. Обозначая f_{U_i} через f_i и h_{U_i} через h_i и используя тождество

$$f'_j \circ (f'_i)^{-1} = f'_j \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f'_i)^{-1},$$

получаем соотношение

$$g'_{ji} = h_j^{-1} g_{ji} h_i,$$

где через $\{g'_{ji}\}$ обозначен склеивающий коцикл, соответствующий локальным тривиализациям $\{f'_i\}$ расслоения P. Действительно, для любых $x \in U_i \cap U_j$, $g \in G$ получаем

$$\begin{aligned}(x,\ g'_{ji} g) &= f'_j \circ (f'_i)^{-1}(x,\ g) = f'_j \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f'_i)^{-1}(x,\ g) = \\ &= f'_j \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1}(x,\ h_i g) = f'_j \circ (f_j)^{-1}(x,\ g_{ji} h_i g) = \\ &= (x,\ h_j^{-1} g_{ji} h_i g),\end{aligned}$$

откуда и вытекает требуемое равенство.

Определение 1.5. Коциклы $\{g_{ji}\}$, $\{g'_{ji}\}$, соответствующие покрытию $\{U_i\}$ многообразия B, называются *эквивалентными*, если для каждого U_i существует отображение $h_i : U_i \to G$ такое, что

$$h_j(x) g'_{ji}(x) \equiv g_{ji}(x) h_i(x). \tag{1.10}$$

(Под $h_j g'_{ji}$ понимается произведение в группе G.)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Главные расслоения*

$$P = (P_E,\ B,\ \pi,\ G) \quad \text{и} \quad P' = (P'_E,\ B,\ \pi',\ G)$$

эквивалентны тогда и только тогда, когда склеивающие коциклы $\{g_{ji}\}$, $\{g'_{ji}\}$ этих расслоений, соответствующие некоторому покрытию базы B, эквивалентны.

Доказательство. Если расслоения P и P' эквивалентны и $\{U_i\}$, $\{f_i\}$ — тривиализация расслоения P с достаточно мелким покрытием $\{U_i\}$ и со склеивающим коциклом $\{g_{ji}\}$, то в качестве тривиализации расслоения P' можно выбрать то же покрытие с отображениями $\{f'_i\}$ и коциклом $\{g'_{ji}\}$. Отображения h_i определяются следующим образом: $h_i = f_i \circ f^{-1} \circ (f'_i)^{-1}$, где f из (1.2). Дальнейшее доказательство необходимости почти дословно повторяет приведенный выше вывод формулы (1.10).

Пусть теперь P и P' — два расслоения с тривиализациями $\{U_i\}$, $\{f_i\}$ и $\{U_i\}$, $\{f'_i\}$ и эквивалентными коциклами $\{g_{ji}\}$ и $\{g'_{ji}\}$ соответственно.

Действуя так же, как в лемме 1.1, построим по коциклу $\{g_{ji}\}$ расслоение $\widetilde{Q}$, эквивалентное P, а по коциклу $\{g'_{ji}\}$ — расслоение $\widetilde{Q}'$, эквивалентное P'. Для доказательства теоремы достаточно показать, что расслоения $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{Q}'$ эквивалентны. Построим отображение $\tilde{f}\colon \widetilde{Q}'_E \to \widetilde{Q}_E$ следующим образом.

На каждом $U_i \times G$ рассмотрим отображение $\tilde{f}_i\colon (x,\ g) \mapsto (x,\ h_i(x)g)$. Покажем, что семейство отображений $\{\tilde{f}_i\}$ корректно определяет отображение $\tilde{f}\colon \widetilde{Q}'_E \to \widetilde{Q}_E$. Для этого достаточно проверить, что для любого $x \in U_i \cap U_j$ точки $(x,\ g)$ и $(x,\ g'_{ji}g)$, которые задают одну и ту же точку в $\widetilde{Q}'_E$, отображаются в точки $(x,\ g^*)$ и $(x,\ g')$ соответственно, определяющие одну и ту же точку в $\widetilde{Q}_E$, то есть необходимо проверить выполнение тождества $g_{ji}g^* = g'$. Но согласно построению $g^* = h_i g$, $g' = h_j g'_{ji} g$, и из (1.10) получаем $g_{ji}g^* = g_{ji}h_i g = h_j g'_{ji} g = g'$. Корректность определения отображения $\tilde{f}$ доказана. Проверка того, что это отображение действительно задает эквивалентность расслоений $\widetilde{Q}'$ и $\widetilde{Q}$, предоставляется читателю. □

Как уже было отмечено в примере 1.6, если расслоение P эквивалентно прямому произведению P', то коцикл $\{g'_{ji}\}$ можно выбрать равным единичному $g'_{ji}(x) \equiv e$. Поэтому из теоремы 1.1 получаем

Следствие 1.1. *Главное расслоение $P = (P_E,\ B,\ \pi,\ G)$ со склеивающим коциклом $\{g_{ji}\}$ тривиально тогда и только тогда, когда для каждого U_i существует отображение $h_i\colon U_i \to G$ такое, что*

$$h_j(x) \equiv g_{ji}(x)h_i(x). \tag{1.11}$$

Пусть расслоение P тривиально. Рассмотрим вновь конструкцию леммы 1.1. Если $x \in U_i \cap U_j$, то для любого $g \in G$ точки $(x,\ g) \in U_i \times G$ и $(x,\ g_{ji}g) \in U_j \times G$ определяют одну и ту же точку $\langle x,\ g\rangle \in \widetilde{Q}_E$. Поэтому в силу (1.11) набор отображений $\{s_i\}$, $s_i\colon U_i \to U_i \times G$, где $s_i(x) = (x,\ h_i(x))$, корректно определяет отображение $\tilde{s}\colon B \to \widetilde{Q}_E$, для которого $\mathrm{pr} \circ \tilde{s} = \mathrm{id}$. Так как расслоения $\widetilde{Q}$ и P эквивалентны и эта эквивалентность устанавливается с помощью отображения f (см. лемму 1.1), то отображение $s\colon B \to P_E$, где $s = f \circ \tilde{s}$, также обладает тем свойством, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$.

Определение 1.6. Непрерывное (гладкое, аналитическое и т. д.) отображение $s\colon B \to P_E$ такое, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$, называется *непрерывным* (*гладким*, *аналитическим* и т. д.) *сечением* расслоения P.

Предложение 1.1. *Главное расслоение P тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет сечение.*

Доказательство. Необходимость была доказана в терминах склеивающего коцикла. Докажем ее непосредственно из определения тривиального расслоения. Поскольку прямое произведение

$$P' = (B \times G,\, B,\, \mathrm{pr},\, G)$$

всегда имеет единичное сечение $x \mapsto (x,\, e)$, то тривиальное расслоение P имеет сечение $s(x) = f^{-1}(x,\, e)$, где гомеоморфизм f осуществляет эквивалентность P и P'.

Докажем достаточность. Пусть $s\colon B \to P_E$ — сечение расслоения P. Для любого $x \in B$ слой $\pi^{-1}(x)$ гомеоморфен группе G. Отождествим эти два многообразия и для любого $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x) \cong G$ рассмотрим элемент $g(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot (s(\pi(\tilde{x})))^{-1}$, где под «$\cdot$» понимается умножение в группе G. Так определенный элемент $g(\tilde{x})$ не зависит от способа отождествления $\pi^{-1}(x)$ и G (докажите это, используя п. 2 определения 1.3). Эквивалентность расслоения P прямому произведению устанавливается теперь с помощью гомеоморфизма $f\colon P_E \to B \times G$, где $f(\tilde{x}) = (\pi(\tilde{x}),\ g(\tilde{x}))$. $\square$

Упражнения

1.1. Найдите координатное описание расслоения примера 1.4.

1.2. Докажите, что расслоение $\mathcal{O}^*(-1)$ замечания 1.1 нетривиально как:

а) голоморфное расслоение, б) непрерывное расслоение.

1.3. Докажите, что расслоение Хопфа топологически (как непрерывное расслоение) нетривиально.

1.4. Зададим расслоение $\mathcal{O}^*(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, координатным описанием

$$U_0 = \mathbb{C}, \quad U_\infty = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \quad g_{0\infty}(z) = z^k, \quad g_{0\infty}\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Докажите, что это расслоение голоморфно и топологически тривиально тогда и только тогда, когда $k = 0$.

Заметим, что при $k = -1$ это расслоение, как и положено, совпадает с расслоением замечания 1.1, так как последнее задано коциклом $g_{\infty 0}(z) = z$, а $g_{0\infty}(z) = (g_{\infty 0}(z))^{-1}$.

Лекция 2

Понятие векторного расслоения. Примеры

Определение векторного расслоения напоминает определение главного расслоения. Отличие состоит в том, что в качестве «стандартных кирпичиков» в этом случае используются прямые произведения окрестностей точек многообразия на стандартное евклидово пространство, в котором действует группа линейных преобразований.

Определение 2.1. *Векторным* (действительным) *расслоением* F *ранга* p называется тройка $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$, где:

1) F_E, B — многообразия, $\tilde{\pi}\colon F_E \to B$ — сюръективное отображение;

2) для любого $x \in B$ множество $\pi^{-1}(x)$ является линейным пространством;

3) для любого $x \in B$ существуют окрестность $U \subset B$ точки x и гомеоморфизм $\tilde{f}_U\colon \tilde{\pi}^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^p$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}^{-1}(U) \arrow[rr, "\tilde{f}_U"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & U \times \mathbb{R}^p \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & U & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

коммутативна и отображение

$$\tilde{f}_U^x\colon \tilde{\pi}^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p,$$

где через $\tilde{f}_U^x$ обозначено ограничение отображения $\tilde{f}_U$ на слой $\tilde{\pi}^{-1}(x)$, является изоморфизмом линейных пространств.

Пространство F_E называется тотальным пространством расслоения, B — базой расслоения, $\tilde{\pi}$ — проекцией, $\tilde{\pi}^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^p$ — слоем расслоения. Свойство 3 означает, что расслоение F *локально тривиально* (устроено как «простое» прямое произведение над U).

Если все многообразия и отображения, участвующие в определении расслоения, непрерывны (гладкие, аналитические и т. д.), то говорят о топологическом (гладком, аналитическом и т. д.) расслоении F.

Аналогичным образом определяется комплексное векторное расслоение. Простейшим примером векторного расслоения является прямое произведение.

Пример 2.1. Рассмотрим $F = (B \times \mathbb{R}^p, B, \mathrm{pr})$, где через pr обозначена проекция на первый сомножитель. Очевидно, что все условия определения 2.1 выполнены.

По каждому главному расслоению со структурной группой $\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ можно построить векторное расслоение следующим образом.

Рассмотрим главное расслоение $P = (P_E, B, \pi, \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}))$. Обозначим через F_E пространство $P_E \times \mathbb{R}^p/{\sim}$, где

$$(\tilde{x}g, v) \sim (\tilde{x}, gv) \quad \text{для любых } \tilde{x} \in P_E,\ g \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^p.$$

(Напомним, что группа $\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ действует на P_E справа, а на $\mathbb{R}^p$ — слева.) Будем обозначать точки пространства F_E через $\langle \tilde{x}, v\rangle$ (класс эквивалентности пары $(\tilde{x}, v)$). Определим отображение $\tilde{\pi}\colon F_E \to B$ следующим образом: $\tilde{\pi}(\langle \tilde{x}, v\rangle) = \pi(\tilde{x})$.

Лемма 2.1. *Тройка* $F = (F_E, B, \pi)$ *является векторным расслоением ранга* p.

Доказательство. Поскольку

$$(\mathrm{GL}(p, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^p/{\sim}) \cong \mathbb{R}^p$$

(гомеоморфность этих двух пространств устанавливается с помощью отображения $\langle g, v\rangle \mapsto gv$), то диаграмма (1.1) после умножения пространств $\pi^{-1}(U)$ и $U \times \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^p$ и взятия отношения эквивалентности приобретает вид (2.1):

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \times \mathbb{R}^p/{\sim} \arrow[rr, "\tilde{f}_U"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & (U \times \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})) \times \mathbb{R}^p/{\sim} \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\
& U, &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

где $\tilde{f}_U(\langle \tilde{x}, v\rangle) := \langle f_U(\tilde{x}), v\rangle$. Читателю предоставляется проверить, что все условия определения 2.1 выполнены (следуют из соответствующих условий определения 1.3). □

Определение 2.2. Построенное выше расслоение называется *ассоциированным с исходным главным расслоением.*

Эквивалентность векторных расслоений определяется аналогично эквивалентности главных расслоений.

Определение 2.3. Два векторных расслоения F и $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$ называются *эквивалентными*, если существует такой гомеоморфизм $\tilde{f}$ между F_E и F'_E, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F_E \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & F'_E \arrow[dl, "\tilde{\pi}'"] \\
& B &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

коммутативна и отображение $\tilde{f}|_{\tilde{\pi}^{-1}(x)}$ является изоморфизмом линейных пространств для любого $x \in B$.

(Если речь идет об эквивалентности гладких, аналитических и т. д. расслоений, то требуется, чтобы отображение $\tilde{f}$ было диффеоморфизмом, биголоморфным и т. д. отображением.)

Векторное расслоение называется *тривиальным*, если оно эквивалентно прямому произведению.

Перейдем теперь к координатному описанию векторного расслоения. Рассмотрим покрытие $\{U_i\}$ базы B такое, что над каждым U_i расслоение F тривиально, и локальные тривиализации (2.1) расслоения F над этими окрестностями (т. е. зафиксируем гомеоморфизмы $\tilde{f}_{U_i}$, которые мы будем обозначать через $\tilde{f}_i$). Пусть окрестности U_i, U_j имеют непустое пересечение. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & \tilde{\pi}^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[l, "\tilde{f}_i"'] \arrow[r, "\tilde{f}_j"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\
& U_i \cap U_j. &
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Отображение
$$\tilde{f}_j^x \circ (\tilde{f}_i^x)^{-1} \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \tag{2.5}$$
для любого $x \in U_i \cap U_j$ является автоморфизмом линейного пространства $\mathbb{R}^p$ и, стало быть, в стандартном базисе этого пространства задается некоторой матрицей $g_{ji}(x)$. Тем самым для любых U_i, U_j с непустым пересечением определяются отображения
$$g_{ji} \colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Из конструкции этих отображений точно так же, как в случае главного расслоения (см. соотношения (1.6)), легко следует, что $g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$ для любого $x \in U_i \cap U_j$ (здесь через g^{-1} обозначается матрица, обратная к g) и если три окрестности U_i, U_j, U_k имеют непустое пересечение, то $g_{ji}(x)\, g_{ik}(x)\, g_{kj}(x) \equiv I$, где через I обозначена единичная матрица размера $(p \times p)$.

Лемма 2.2. *По векторному расслоению F, покрытию $\{U_i\}$ и фиксированным тривиализациям $\{\tilde{f}_i\}$ расслоения F над $\{U_i\}$ можно построить набор отображений* (2.6), *обладающих следующими свойствами*:
$$g_{ij}(x) \equiv (g_{ji}(x))^{-1}, \quad g_{ji}(x)\, g_{ik}(x)\, g_{kj}(x) \equiv I. \tag{2.7}$$

И обратно, по любому покрытию $\{U_i\}$ многообразия B и по любому набору отображений (2.6), *обладающих свойствами* (2.7), *можно построить векторное расслоение $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$. Если набор отображений $\{g_{ij}\}$ был построен по векторному расслоению F, то расслоение F' будет эквивалентно расслоению F.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.1. Рассмотрим несвязное объединение $\widetilde{Q} = \bigsqcup_i (U_i \times \mathbb{R}^p)$ и введем на этом множестве следующее отношение эквивалентности $\sim$: если $x \in U_i \cap U_j$, то

$$\begin{aligned} &(x, v) \sim (x, g_{ji}(x)v) && \text{для } (x, v) \in (U_i \times \mathbb{R}^p),\ (x, g_{ji}(x)v) \in (U_j \times \mathbb{R}^p), \\ &(x, v) \sim (x, v) && \text{для любых } x \in U_i,\ v \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Из свойств (2.7) следует, что это действительно отношение эквивалентности.

Обозначим через F'_E многообразие $\widetilde{Q}/\sim$, а через $\langle x, v\rangle$ — точку F'_E (класс эквивалентности пары (x, v)). Определим отображение $\tilde{\pi}' \colon F'_E \to B$ соотношением $\tilde{\pi}'(\langle x, v\rangle) = x$. Читателю предоставляется проверить, что так построенная тройка $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$ действительно является векторным расслоением.

Если отображения (2.6) построены по расслоению F с фиксированными локальными тривиализациями $\{\tilde{f}_i\}$, то эквивалентность расслоений F и F' устанавливается с помощью гомеоморфизма $\tilde{f} \colon F_E \to F'_E$, где $\tilde{f}$ совпадает с $\tilde{f}_i$ на $\tilde{\pi}^{-1}(U_i)$ (проверьте самостоятельно корректность определения этого отображения). □

Из описания конструкции ассоциированного с главным векторного расслоения и из предыдущей леммы получаем следствие.

Следствие 2.1. *Главное расслоение и ассоциированное с ним векторное расслоение определяют один и тот же склеивающий коцикл $\{g_{ji}\}$.*

Доказательство. Рассмотрим вновь диаграмму (2.2). Поскольку

$$\tilde{\pi}^{-1}(U_i \cap U_j) = \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p/\sim,$$

то тривиализации $\tilde{f}_i$ ассоциированного векторного расслоения можно выбрать следующим образом: $\tilde{f}_i(\langle \tilde{x}, v\rangle) = \langle f_i(\tilde{x}), v\rangle$. Пусть $(\tilde{x}, v)$ — представитель класса эквивалентности $\langle \tilde{x}, v\rangle$, а $((x, I), v)$ — представитель $\langle x, v\rangle \in ((U_i \cap U_j) \times \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})) \times \mathbb{R}^p/\sim \cong (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p$. Тогда

$$\tilde{f}_j \circ (\tilde{f}_i)^{-1}(\langle x, v\rangle) = \langle f_j \circ f_i^{-1}(x, I), v\rangle = \langle (x, g_{ji}(x)), v\rangle = \langle x, g_{ji}(x)v\rangle.$$

Следовательно, $\tilde{f}^x_j \circ (\tilde{f}^x_i)^{-1}(v) = g_{ji}(x)v$ для любого фиксированного x и любого $v \in \mathbb{R}^p$. □

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с расслоениями следующего примера.

Пример 2.2. Рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{O}(k)$ ранга 1, заданное следующим координатным описанием:

$$U_0 = \mathbb{C}, \quad U_\infty = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \quad g_{0\infty}(z) = z^k, \quad g_{0\infty} \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^*,$$

где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$. Это расслоение ассоциировано с расслоением $\mathcal{O}^*(k)$ упражнения 1.4.

Конструкции, аналогичные конструкциям лекции 1 (см. диаграмму (1.7) и соотношение (1.8)), приводят к аналогу теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *Векторные расслоения $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$ и $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$ эквивалентны тогда и только тогда, когда склеивающие коциклы $\{g_{ji}\}$, $\{g'_{ji}\}$ этих расслоений, соответствующие некоторому покрытию базы B, эквивалентны* (*в смысле определения* 1.5).

Если расслоение F эквивалентно прямому произведению F', то коцикл $\{g'_{ji}\}$ можно выбрать равным единичному: $g'_{ji}(x) \equiv I$. Поэтому из теоремы 2.1 получаем следствие.

Следствие 2.2. *Векторное расслоение $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$ со склеивающим коциклом $\{g_{ji}\}$ тривиально тогда и только тогда, когда для каждого U_i существует отображение $h_i \colon U_i \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ такое, что*

$$h_j(x) \equiv g_{ji}(x) h_i(x). \tag{2.8}$$

Обозначим через h_i^l l-й столбец матрицы h_i, получим отображение

$$h_i^l \colon U_i \to \mathbb{R}^p. \tag{2.9}$$

Если расслоение F тривиально, то в силу (2.8) корректно определены отображения $s^l \colon B \to F_E$, $l = 1, \ldots, p$, где

$$s^l(x) = (\tilde{f}_i)^{-1}((x, h_i^l(x)))$$

на U_i (проверьте это). Ясно, что $\tilde{\pi} \circ s^l = \mathrm{id}$, то есть отображение s^l является сечением расслоения F (в смысле определения 1.6, в котором в случае векторного расслоения надо формально поменять P на F и P_E на F_E.)

Таким образом, из (1.11) получаем

Следствие 2.3. *Векторное расслоение F со склеивающим коциклом $\{g_{ji}\}$ имеет сечение тогда и только тогда, когда для каждого U_i существует отображение $s_i \colon U_i \to \mathbb{R}^p$ такое, что*

$$s_j(x) \equiv g_{ji}(x) s_i(x). \tag{2.10}$$

(В зависимости от непрерывности, гладкости или аналитичности отображений s_i, g_{ji} говорят о непрерывном, гладком или аналитическом сечении.)

Из того, что невырожденность матрицы $h_i(x)$ эквивалентна линейной независимости столбцов этой матрицы при всех x, и из следствия 2.2 аналогично предложению 1.1 получаем

Предложение 2.1. *Векторное расслоение F ранга p тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет p сечений (непрерывных, гладких или аналитических в зависимости от типа расслоения), линейно независимых над каждой точкой базы.*

Пример 2.3. Покажем, что расслоение $\mathcal{O}(k)$ примера 2.1 тривиально тогда и только тогда, когда $k=0$ (и тем самым решим упражнение 1.4). Действительно, если это расслоение топологически тривиально, то существуют непрерывные функции $h_0\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ и $h_\infty\colon \bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}^*$ такие, что $h_0(z)=g_{0\infty}(z)h_\infty(z)=z^k h_\infty(z)$ в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Так как $h_0(z)$ не обращается в нуль в односвязной области $\mathbb{C}$, то многозначная функция $\ln(h_0(z))$ допускает выделение однозначных ветвей в $\mathbb{C}$. То же самое верно и для функции $\ln(h_\infty(z))$ в $\bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$. Следовательно, и функция $h(z)=\ln(h_0(z))-\ln(h_\infty(z))$ должна допускать выделение однозначных ветвей в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Но согласно предположению $h(z)=k\ln z$, и эта функция допускает выделение однозначных ветвей в указанной области тогда и только тогда, когда $k=0$. Таким образом, исходное расслоение при $k\neq 0$ топологически и, следовательно, аналитически нетривиально.

С другой стороны, при $k=0$ расслоение $\mathcal{O}(k)$ является прямым произведением и поэтому тривиально как топологически, так и аналитически.

Рассмотрим два следующих очень важных примера векторных расслоений.

Пример 2.4. Пусть $\{U_i\}$ — покрытие гладкого многообразия B, $c_i = (U_i,\, \xi^i,\, \mathbb{R}^p)$, $\xi^i\colon U_i\to\mathbb{R}^p$ — карты. Для любых U_i, U_j, имеющих непустое пересечение, определим отображение

$$g_{ji}\colon U_i\cap U_j \to \mathrm{GL}(p,\mathbb{R}), \qquad g_{ji}(x) = J_{\xi^j\circ(\xi^i)^{-1}}(\xi^i(x)),$$

где $J_f = ((\partial f^\alpha/\partial x^\beta))$ — якобиева матрица вектор-функции $f\colon \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$. Построенное по покрытию $\{U_i\}$ и указанному склеивающему коциклу $\{g_{ji}\}$ векторное расслоение называется *касательным расслоением многообразия B* и обозначается через τ_B.

Векторное расслоение, построенное по тому же покрытию и склеивающему коциклу $\{g^*_{ji}\}$, $g^*_{ji}(x)=(g^t_{ji}(x))^{-1}$, называется *кокасательным расслоением* многообразия B и обозначается через τ^*_B (значком ^{t} здесь и далее обозначается операция транспонирования).

(Заметим, что часто касательный вектор к многообразию B в точке x так и определяется — как класс эквивалентных пар $(c_i,\, h^i)$, где c_i — карта, $h^i\in\mathbb{R}^p$, а отношение эквивалентности задается соотношением $h^j=J_{\xi^j\circ(\xi^i)^{-1}}(\xi^i(x))h^i$.)

Посмотрим, как выглядят эти расслоения в случае сферы Римана $S^2 = \bar{\mathbb{C}}$ (мы рассматриваем комплексные касательное и кокасательное расслоения). Как и в примере 1.6, рассмотрим карты $U_0 = \mathbb{C}$ и $U_\infty = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ с координатами z и $t = 1/z$ соответственно. Тогда согласно определению для касательного расслоения получаем $g_{\infty 0} = dt/dz = -1/z^2$, $g_{0\infty} = -z^2$, т. е. $\tau_{S^2} \cong \mathcal{O}(2)$, и для кокасательного расслоения имеем $\tau^*_{S^2} \cong \mathcal{O}(-2)$.

Предложение 2.2. *Комплексные и вещественные касательное и кокасательное расслоения к сфере Римана нетривиальны.*

Доказательство. Топологическая нетривиальность рассматриваемых комплексных расслоений следует из примера 2.3. Если бы одно из рассматриваемых вещественных расслоений было бы тривиально, то существовало бы нигде не обращающееся в нуль сечение (s_1, s_2) этого расслоения, из которого можно было бы составить нигде не обращающееся в нуль сечение $s = s_1 + is_2$ соответствующего комплексного расслоения. Но это невозможно в силу нетривиальности последнего расслоения. □

В терминах склеивающего коцикла легко определяются следующие важные операции над расслоениями.

Определение 2.4. Пусть векторные расслоения F и F' рангов p и q над B заданы покрытием $\{U_i\}$ и склеивающими коциклами $\{g_{ij}\}$ и $\{g'_{ij}\}$ соответственно. Векторное расслоение ранга $p+q$, заданное коциклом $\{g^{\oplus}_{ij}\}$,

$$g^{\oplus}_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}), \qquad g^{\oplus}_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g_{ij}(x) & 0 \\ 0 & g'_{ij}(x) \end{pmatrix},$$

называется *прямой суммой расслоений F и F'* и обозначается через $F \oplus F'$.

Векторное расслоение ранга pq, заданное коциклом $\{g^{\otimes}_{ij}\}$, где

$$g^{\otimes}_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(pq, \mathbb{R})$$

и где, в свою очередь, матрица $g^{\otimes}_{ij}(x)$ состоит из блоков $H_{kl}(x)$, $k = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$,

$$H_{kl}(x) = \begin{pmatrix} h_{k1}(x)h'_{1l}(x) & \ldots & h_{kp}(x)h'_{1l}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{k1}(x)h'_{ql}(x) & \ldots & h_{kp}(x)h'_{ql}(x) \end{pmatrix}$$

($h_{kl}(x)$ и $h'_{kl}(x)$ — элементы матриц $g_{ij}(x)$ и $g'_{ij}(x)$ соответственно), называется *тензорным произведением расслоений F и F'* и обозначается через $F \otimes F'$. Матрица $g^{\otimes}_{ij}(x)$ называется *тензорным* или *кронекеровским произведением матриц $g_{ij}(x)$ и $g'_{ij}(x)$*.

Расслоение F' называется *подрасслоением* расслоения F, если для некоторого покрытия $\{U_i\}$ базы B и склеивающих коциклов $\{g'_{ij}\}$ и $\{g_{ij}\}$ этих расслоений выполнено соотношение

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g'_{ij}(x) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Из приведенных определений немедленно следует, что $\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l) = \mathcal{O}(k+l)$ и что расслоение $\mathcal{O}(k_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_n)$ задается коциклом

$$g_{0\infty}^{\oplus}(z) = \operatorname{diag}(z^{k_1}, \dots, z^{k_n}). \tag{2.11}$$

Упражнения

2.1. Докажите, что расслоение $\mathcal{O}(k)$ тогда и только тогда имеет голоморфные сечения, когда $k \geqslant 0$.

Сечение касательного расслоения τ_B называется *векторным полем* на B (непрерывным, гладким или аналитическим в зависимости от типа сечения), сечение кокасательного расслоения τ_B^* называется *дифференциальной* 1*-формой* на B. Тем самым, получаем следующее утверждение. *На сфере Римана* $\bar{\mathbb{C}}$ *не существует ненулевых голоморфных дифференциальных* 1*-форм.*

2.2. Докажите, что на сфере S^2 не существует нигде не обращающегося в нуль непрерывного векторного поля (задача о том, что нельзя причесать ежа).

(*Указание*: покажите, что если существует одно такое поле, то существует и другое непрерывное векторное поле, линейно независимое в каждой точке с первым.)

2.3. Многообразие B, касательное расслоение которого тривиально (в топологическом смысле, то есть послойно гомеоморфно прямому произведению), называется *параллелизуемым*.

Из предложения 2.1 немедленно получаем, что *многообразие размерности p параллелизуемо тогда и только тогда, когда на нем имеется p линейно независимых в каждой точке непрерывных векторных полей.*

Примером параллелизуемого многообразия является окружность S^1, реализованная как окружность единичного радиуса с центром в начале координат плоскости $\mathbb{R}^2$. Векторное поле v на S^1 определяется так: $v(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)^t$, где через ^{t} обозначена операция транспонирования.

Согласно предложению 2.2 сфера S^2 не параллелизуема.

Докажите, что сфера S^3 параллелизуема.

(*Решение*. Реализуйте S^3 как сферу единичного радиуса с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^4$ и рассмотрите векторные поля $(-x_2, x_1, -x_4, x_3)^t$, $(-x_3, x_4, x_1, -x_2)^t$, $(-x_4, -x_3, x_2, x_1)^t$.)

2.4. Векторное расслоение над B называется *стабильно тривиальным*, если его прямая сумма с некоторым тривиальным расслоением над B тривиальна.

Докажите, что расслоение τ_{S^2} стабильно тривиально.

2.5. Для любого векторного расслоения $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$ ранга p с коциклом $\{g_{ji}\}$ *детерминантным расслоением* $|F|$ называется одномерное векторное расслоение, заданное коциклом $\{\det g_{ji}\}$.

Докажите, что если F тривиально, то и $|F|$ тривиально.

2.6*. Докажите, что расслоение $\mathcal{O}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(k_n)$ топологически тривиально тогда и только тогда, когда $k_1 + \ldots + k_n = 0$, то есть тогда и только тогда, когда его детерминантное расслоение тривиально.

Лекция 3

Связность в векторном расслоении. Локальная система

График вектор-функции f, определенной на многообразии B, можно интерпретировать как сечение $s\colon B \to B \times \mathbb{R}^p$, $s(x) = (x, f(x))$, тривиального расслоения $(B \times \mathbb{R}^p, B, \mathrm{pr})$, и наоборот. В этом смысле сечение произвольного векторного расслоения является обобщением понятия функции.

Пусть v — векторное поле на B. Напомним, что для любой гладкой вектор-функции f на B производная $\partial_v f$ этой функции вдоль v определяется следующим образом:

$$\partial_v f = df(v),$$

где под дифференциалом вектор-функции понимается набор дифференциалов ее компонент $f^1, \ldots, f^p$. В локальных координатах $\xi^1, \ldots, \xi^p$

$$\partial_v f = ((\mathrm{grad}\, f^1, v), \ldots, (\mathrm{grad}\, f^p, v))^t,$$

где ^{t} означает транспонирование.

Другими словами, сечения тривиального расслоения можно дифференцировать вдоль любого векторного поля базы. А как обстоит дело с сечениями произвольного векторного расслоения? Поскольку любое векторное расслоение локально тривиально, то возникает естественное желание определить понятие производной сечения локально над каждой окрестностью U_i так же, как это делалось выше в случае тривиального расслоения над всей базой. Вопрос только в том, «склеятся» ли полученные таким образом локальные сечения в глобальное? Рассмотрим предложенную конструкцию подробнее.

Обозначим через $\Gamma(F)$ множество (пучок) локальных гладких (аналитических) сечений расслоения F, а через $\Gamma(F, U)$ — множество гладких (аналитических) сечений расслоения F над окрестностью U. Оба этих множества являются *модулями* над кольцом функций (непрерывных, гладких или аналитических в зависимости от типа расслоения), определенных на базе B или соответственно на U. Последнее, в частности, означает, что сечения можно складывать и умножать на функции (эти операции определяются «поточечно» в каждом слое). Если заданы локальные тривиализации $\{U_i\}$, $\{\tilde{f}_i\}$, $\{g_{ij}\}$ расслоения F, то над каждой окрестностью U_i возникает набор из p линейно независимых сечений $s^i_j = (\tilde{f}_i)^{-1} \circ \tilde{e}_j$, где

$$\tilde{e}_j \colon U_i \to U_i \times \mathbb{R}^p, \quad x \mapsto (x,\, e_j),$$

e_j — j-й элемент стандартного базиса в $\mathbb{R}^p$. Эти сечения являются базисом модуля $\Gamma(F,\, U_i)$. Поэтому для любого локального сечения $s \colon V \to F_E$ над V и любого $x \in U_i$ имеем над U_i

$$s(x) = y^1_i(x) s^i_1(x) + \ldots + y^p_i(x) s^i_p(x)$$

(или, в сокращенной записи, $s = (s^i) y_i$), где вектор-функции $y_i = (y^1_i, \ldots$ $\ldots, y^p_i)^t \colon U_i \to \mathbb{R}^p$ удовлетворяют соотношениям (2.10) по построению.

Попробуем определить производную сечения s вдоль векторного поля v над U_i следующим образом:

$$\partial_v s|_{U_i} = (s^i) \partial_v y_i. \tag{3.1}$$

Для того чтобы локальные сечения $\partial_v s|_{U_i}$ определяли сечение над V, необходимо (и достаточно), чтобы вектор-функции $\partial_v y_i$ удовлетворяли соотношениям (2.10). Однако

$$\partial_v y_j = \partial_v (g_{ji} y_i) = g_{ji}\, \partial_v y_i + (\partial_v g_{ji}) y_i, \tag{3.2}$$

то есть соотношение (2.10) выполняется тогда и только тогда, когда $\partial_v g_{ji} \equiv 0$. В общем же случае такое определение производной не годится.

Заметим, что «невязка» в формуле (3.2) линейна по y_i, и подправим определение (3.1) производной следующим образом:

$$\nabla_v s|_{U_i} = (s^i) \nabla_v y_i, \quad \nabla_v y_i = \partial_v y_i - A^i_v y_i, \tag{3.3}$$

где $A^i_v \colon U_i \to \mathrm{GL}(p,\, \mathbb{R})$ — некоторая матричная функция. Нетрудно видеть, что операция ∇ действительно будет дифференцированием (то есть будет $\mathbb{R}$-линейным отображением, удовлетворяющим правилу Лейбница) при любых A^i_v. Осталось лишь так подобрать A^i_v, чтобы для вектор-функций $\nabla_v y_i$ выполнялись соотношения (2.10). Имеем:

$$\begin{aligned}\nabla_v y_j &= \partial_v y_j - A^j_v y_j = g_{ji}\, \partial_v y_i + (\partial_v g_{ji}) y_i - A^j_v g_{ji} y_i = \\ &= g_{ji} (\partial_v + (g_{ji})^{-1} \partial_v g_{ji} - (g_{ji})^{-1} A^j_v g_{ji}) y_i.\end{aligned}$$

Из (3.3) и (2.10) получаем $A^i_v = -(g_{ji})^{-1}\, \partial_v g_{ji} + (g_{ji})^{-1} A^j_v g_{ji}$, или, заменяя g_{ji} на $(g_{ij})^{-1}$,

$$A^i_v = (\partial_v g_{ij})(g_{ij})^{-1} + g_{ij} A^j_v (g_{ij})^{-1}. \tag{3.4}$$

Таким образом, если для данного векторного поля v на базе B и любой локальной тривиализации $\{U_i\}$, $\{\tilde{f}_i\}$, $\{g_{ij}\}$ векторного расслоения F

существует набор матриц $\{A_v^i\}$, удовлетворяющих соотношениям (3.4), то в пространстве $\Gamma(F)$ гладких (аналитических) локальных сечений расслоения F можно ввести операцию дифференцирования ∇_v, которая называется *ковариантной производной вдоль векторного поля* v.

Как ввести операцию дифференцирования сечений вдоль любого векторного поля? Вместо того, чтобы для каждого v задавать набор матриц A_v^i, можно задать набор матричных дифференциальных 1-форм $\{\omega^i\}$ на B, удовлетворяющих условиям

$$\omega^i = (dg_{ij})(g_{ij})^{-1} + g_{ij}\omega^j(g_{ij})^{-1}. \tag{3.5}$$

(Матричная дифференциальная форма — это матрица, элементами которой являются дифференциальные формы.) Тогда для любого векторного поля v матрицы A_v^i из (3.4) определяются так: $A_v^i = \omega^i(v)$ (или, в локальных координатах $\xi^1, \ldots, \xi^p$, $A_v^i = B_1^i v^1 + \ldots + B_p^i v^p$, где $\omega^i = B_1^i d\xi^1 + \ldots + B_p^i d\xi^p$, $v = v^1(\xi)\partial/\partial\xi^1 + \ldots + v^p(\xi)\partial/\partial\xi^p$). И мы приходим к понятию *связности* в векторном расслоении.

Определение 3.1. Говорят, что в векторном расслоении F *задана связность*, если для любой локальной тривиализации $\{U_i\}$, $\{\tilde{f}_i\}$, $\{g_{ij}\}$ этого расслоения задан набор матричных дифференциальных 1-форм $\{\omega^i\}$, удовлетворяющих соотношениям (3.5).

Итак, задание связности обеспечивает возможность (ковариантного) дифференцирования сечений вдоль любых векторных полей. Дадим теперь инвариантное (не зависящее от координатного описания расслоения) определение связности.

Определение 3.2. *Связностью* в векторном расслоении F называется $\mathbb{R}$- ($\mathbb{C}$-)линейное отображение

$$\nabla\colon \Gamma(F) \to \Gamma(\tau_B^* \otimes F)$$

такое, что

$$\forall s \in \Gamma(F)\colon \nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s) \tag{3.6}$$

(правило Лейбница), где f — произвольная гладкая функция на B, а под $\otimes$ понимается тензорное (кронекеровское) произведение матриц.

В базисе $s_1^i, \ldots, s_p^i$ локальных сечений расслоения F над U_i имеем

$$(\nabla(s_1^i), \ldots, \nabla(s_p^i)) = -(s_1^i, \ldots, s_p^i)\omega^i,$$

где ω^i — некоторая матричная дифференциальная 1-форма в U_i, которая называется *формой связности* ∇ в данном базисе.

Для любого сечения s согласно (3.6) имеем над U_i (в сокращенной записи):

$$s = (s^i)y_i, \quad \nabla(s) = (\nabla(s^i))y_i + (s^i)\,dy_i = -(s^i)\omega^i y_i + (s^i)\,dy_i,$$

поэтому для координат $y_i = (y_i^1, \ldots, y_i^p)^t$ сечения s получаем

$$\nabla_{(s^i)}(y_i) = dy_i - \omega^i y_i. \tag{3.7}$$

Поскольку координатные вектор-функции y_i и y_j сечения s над $U_i \cap U_j$ связаны соотношениями (2.10), из (3.7) и того, что $\nabla_{(s^i)}(y_i) = g_{ij}\nabla_{(s^j)}(y_j)$, действуя так же, как при выводе соотношения (3.4), получаем, что формы связности ω^i удовлетворяют соотношениям (3.5).

И обратно, если для любых локальных тривиализаций расслоения F заданы матричные формы ω^i, удовлетворяющие соотношениям (3.5), то по формулам (3.7) в расслоении F можно ввести связность в смысле определения 3.2 (проверьте это самостоятельно). Тем самым мы доказали, что *определения* 3.1 *и* 3.2 *эквивалентны.*

Во всяком ли векторном расслоении можно ввести связность? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 3.1. *В любом гладком векторном расслоении можно ввести связность.*

Указание: рассмотрите локальные тривиализации расслоения F и гладкое разбиение единицы $\{\lambda_i\}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$; так как над каждым U_i расслоение тривиально, в $F|_{U_i}$ можно ввести некоторую связность ∇_i; покажите, что линейная комбинация $\sum \lambda_i \nabla_i$ является корректно определенной связностью в F.

Определение 3.3. Сечение s называется *горизонтальным* (по отношению к связности ∇), если $\nabla(s) = 0$.

Из (3.7) следует, что в базисе $s_1^i, \ldots, s_p^i$ локальных сечений расслоения F над U_i координаты горизонтальных сечений удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$dy = \omega^i y. \tag{3.8}$$

Если расслоение тривиально, то в базисе $s_1, \ldots, s_p$ глобальных сечений расслоения F координаты горизонтальных сечений удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$dy = \omega y. \tag{3.9}$$

В другом базисе сечений (при другой тривиализации расслоения F) $s_1', \ldots, s_p'$ согласно (3.5) уравнение горизонтальных сечений принимает вид

$$dy' = \omega' y',$$

где

$$y' = \Gamma y, \quad \omega' = d\Gamma\Gamma^{-1} + \Gamma\omega\Gamma^{-1} \tag{3.10}$$

(и где, в свою очередь, $(s_1, \ldots, s_p) = (s'_1, \ldots, s'_p)\Gamma$). Заметим, что преобразования (3.10) называются *калибровочными преобразованиями* формы связности.

Итак, *связность в тривиальном расслоении задает систему дифференциальных уравнений с точностью до калибровочных преобразований* (3.10).

Рассмотрим отображение

$$\widetilde{\nabla}\colon \Gamma(\tau_B^* \otimes F) \to \Gamma(\Lambda^2 \tau_B^* \otimes F),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница $\widetilde{\nabla}(fs) = df \wedge s + f\widetilde{\nabla}(s)$ для любой гладкой функции f и $s \in \Gamma(\tau_B^* \otimes F)$ и такое, что

$$\forall \alpha \in \Gamma(\tau_B^*),\ \forall s \in \Gamma(F)\colon \widetilde{\nabla}(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s - \alpha \wedge \nabla(s).$$

(Здесь $\Lambda^2 \tau_B^*$ обозначает расслоение внешних дифференциальных форм степени 2 на B. Это расслоение получается факторизацией пространства расслоения $\tau_B^* \otimes \tau_B^*$ по отношению эквивалентности $x \otimes y \sim -y \otimes x$.) Отображение

$$K := \widetilde{\nabla} \circ \nabla\colon \Gamma(F) \to \Gamma(\Lambda^2 \tau_B^* \otimes F)$$

является линейным над кольцом гладких (аналитических) функций, определенных на базе B. Действительно, для любой такой функции f и любого сечения s расслоения F имеем:

$$K(fs) = \widetilde{\nabla}(df \otimes s + f\nabla s) = \\ = d^2 f \otimes s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + f\widetilde{\nabla} \circ \nabla s = fK(s).$$

Следовательно, отображение K определяет некоторый тензор на пространстве $\Gamma(F)$, рассматриваемом как модуль над кольцом гладких (аналитических) функций на базе B. Этот тензор называется *тензором кривизны связности* ∇.

Рассмотрим матрицу Ω отображения K в базисе $(s) = (s_1, \ldots, s_p)$ локальных сечений расслоения F. Эта матрица определяется равенством $K(s) = -(s)\Omega$ (знак «$-$» выбирается для удобства). Поэтому имеет место соотношение

$$(s)\Omega = -K(s) = -\widetilde{\nabla} \circ \nabla(s) = -\widetilde{\nabla}(-(s)\omega) = \\ = (s)d\omega + (\nabla(s)) \wedge \omega = (s)d\omega - (s)\omega \wedge \omega = (s)(d\omega - \omega \wedge \omega).$$

Следовательно,

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega. \tag{3.11}$$

Определение 3.4. Связность ∇ называется *плоской*, если ее кривизна равна нулю.

Получив соотношение (3.11), мы тем самым доказали следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Связность ∇ является плоской тогда и только тогда, когда для ее матрицы ω в любом базисе локальных сечений расслоения F выполнено тождество*

$$d\omega = \omega \wedge \omega. \tag{3.12}$$

Напомним, что система уравнений (3.9) называется *вполне интегрируемой*, если пространство решений этой системы имеет размерность p (максимально возможная размерность). Заметим, что если размерность базы больше единицы, то система (3.9) является переопределенной (число уравнений больше числа неизвестных), так как производная по каждой координате дает свою систему из p уравнений. Поэтому в общем случае эта система вовсе не обязательно является вполне интегрируемой.

Что означает выполнение тождества (3.12) для уравнения (3.9) локальных горизонтальных сечений? Ответ на этот вопрос дает следующее предложение.

Предложение 3.1. *Система* (3.9) *с формой ω связности ∇ вполне интегрируема тогда и только тогда, когда связность ∇ плоская.*

Доказательство. Условие Фробениуса полной интегрируемости системы $(d-\omega)y=0$ имеет следующий вид[1]: на пространстве $B \times \mathbb{C}^p$

$$d\left(dy^j - \sum_{k=1}^{p} \omega_{jk} y^k\right) \in J\left(dy^1 - \sum_{k=1}^{p} \omega_{1k} y^k, \ldots, dy^p - \sum_{k=1}^{p} \omega_{pk} y^k\right),$$

где J — идеал в кольце дифференциальных форм, порожденный формами $dy^i - \sum\limits_{k=1}^{p} \omega_{ik} y^k$. Нетрудно проверить[2], что это условие равносильно такому: для формы $\omega = (\omega_{ij})$ со значениями в алгебре $\mathrm{gl}(p, \mathbb{C})$ комплексных матриц размера $(p \times p)$ имеет место соотношение $d\omega = \omega \wedge \omega$. Если связность плоская, то условие Фробениуса выполнено и поэтому система (3.9) вполне интегрируема.

Если же система (3.9) вполне интегрируема, то для любой фундаментальной матрицы Y этой системы (т. е. такой матрицы, столбцы которой

[1] Теорема Фробениуса изложена в [25]. Хотя в представленных там формулировках участвуют вещественные гладкие многообразия, но доказательства без существенных изменений переносятся на случай комплексных многообразий ввиду теоремы о существовании и единственности (голоморфного) решения для обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. — *Прим. ред.*

[2] Подробнее об этом см. в лекции 13. — *Прим. ред.*

образуют базис в пространстве решений) последовательно получаем:

$$dY = \omega Y, \quad \omega = (dY)Y^{-1},$$

$$d\omega = -dY \wedge d(Y^{-1}) = dY \wedge Y^{-1}(dY)Y^{-1} = \omega \wedge \omega. \qquad \square$$

Рассмотрим векторное расслоение F с плоской связностью ∇. Пучок локальных горизонтальных сечений расслоения F называется *локальной системой*. В своей знаменитой книге «Équations différentielles à points singuliers réguliers»[1] П. Делинь пишет: «Имеется эквивалентность между понятиями локальной системы и векторного расслоения с плоской связностью».

Это утверждение Делиня делается понятным после рассмотрения следующей теоремы.

Теорема 3.3. *В гладком (голоморфном) векторном расслоении F можно ввести плоскую гладкую (голоморфную) связность тогда и только тогда, когда коцикл $\{g_{ji}\}$, задающий расслоение, можно выбрать так, что $\forall j, i$: $g_{ji} \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Если расслоение задано постоянным коциклом, то ввести в нем гладкую (голоморфную) связность очень просто: для этого достаточно для каждой окрестности U_i с тривиализацией f_i, определяющей постоянный коцикл, положить $\omega^i = 0$. Ясно, что соотношение (3.5) выполнено и, тем самым, согласно определению 3.1 в расслоении введена связность (гладкая, если расслоение гладкое, и голоморфная, если расслоение голоморфное). Очевидно, что эта связность плоская.

Рассмотрим расслоение F с плоской связностью ∇ и локальной тривиализацией $(\{U_i\}, \{f_i\}, \{g'_{ji}\})$ со связными односвязными $\{U_i\}$. Над каждой окрестностью U_i рассмотрим p линейно независимых в каждой точке горизонтальных сечений $s_1^i, \ldots, s_p^i$ (гладких — в гладком случае и голоморфных — в голоморфном). Построим новую локальную тривиализацию этого расслоения следующим образом. Определим $\tilde{f}_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^p$ на точках $s_j^i(x)$ равенством $\tilde{f}_i(s_j^i(x)) = (x, e_j)$, где e_j — j-й элемент стандартного базиса в $\mathbb{R}^p$ (в голоморфном случае надо заменить $\mathbb{R}^p$ на $\mathbb{C}^p$), а затем распространим на остальные точки по линейности, используя тот факт, что для любого $\tilde{x} \in \pi^{-1}(U_i)$ $\tilde{x} = \sum_{j=1}^{p} c^j s_j^i(\pi(\tilde{x}))$. Тогда согласно соотношению (3.5) и тому, что для любого i $\omega_i \equiv 0$ (по определению в базисе из локальных горизонтальных сечений форма связности всегда нулевая), получаем $dg_{ji} = 0$. $\square$

Тем самым, зная пучок локальных горизонтальных сечений (т. е. локальную систему), можно восстановить расслоение с плоской связно-

[1] *Deligne P.* Berlin: Springer-Verlag, 1970. (Lecture Notes in Math.; Vol. 163).

стью, и наоборот. В этом смысле и можно понимать эквивалентность этих двух понятий.

В дальнейшем мы будем заниматься изучением горизонтальных сечений голоморфного расслоения с плоской связностью. Поскольку в общем случае ввести голоморфную плоскую связность в таком расслоении нельзя, мы будем рассматривать *мероморфные связности*, т. е. такие связности, матрицы которых в базисе из локальных голоморфных сечений являются мероморфными функциями точки базы. Более того, мы в основном ограничим свое рассмотрение случаем, когда база одномерна.

Заметим, что в этом случае любая меромофная связность является плоской и любая система вида (3.9) — вполне интегрируемой, так как в этом случае в локальной координате z произвольная мероморфная форма имеет вид $\omega = B(z)\,dz$ и, значит, $d\omega = 0 = \omega\wedge\omega$.

Упражнения

3.1. Докажите «в лоб», не используя условие Фробениуса, а используя индукцию по размерности базы, достаточность условий предложения 3.1.

3.2. Докажите, что если в векторном расслоении F введена связность ∇ (с формами $\{\omega^i\}$ в некоторых локальных тривиализациях расслоения), то в детерминантном расслоении (см. упражнение 2.5) $|F|$ возникает связность $|\nabla|$ с формами связности $\{\operatorname{tr}\omega^i\}$ в соответствующих локальных тривиализациях детерминантного расслоения.

Указание: используйте соотношение (3.5) и формулу Лиувилля

$$d\det X = (\operatorname{tr} A)\det X,$$

где $X(z)$ — фундаментальная матрица пространства решений системы $dy = Ay$.

Лекция 4

Мероморфные связности с регулярными особыми точками. Локальная теория — 1

Рассмотрим комплексно-аналитическое расслоение с одномерной (имеется в виду комплексная размерность) базой B. Предположим, что в F введена мероморфная связность ∇ (то есть такая связность, матрицы которой в базисах локальных голоморфных сечений мероморфны). Пусть $x_0 \in B$ — особая точка этой связности. Рассмотрим окрестность O точки x_0, выберем в O локальную координату z так, что $z(x_0)=0$, и зафиксируем какую-либо тривиализацию расслоения F над O. Как и прежде, будем обозначать через $y(z)$ вектор-столбец координат сечения s над O в фиксированном базисе локальных сечений. Матрица ω связности ∇ имеет вид $\omega(z)=B(z)\,dz$, где по условию матрица $B(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $\dot{O}$ и мероморфна в точке $z=0$. Согласно соотношению (3.7) $\nabla_s(y)=dy-\omega y$, или, в терминах ковариантной производной вдоль векторного поля d/dz,

$$\nabla_{d/dz}y = \frac{dy}{dz} - B(z)y. \tag{4.1}$$

Соответствующее уравнение (3.9) горизонтальных сечений выглядит в этом случае следующим образом:

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y. \tag{4.2}$$

Тем самым изучение особых точек мероморфной связности ∇ сводится к изучению особых точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений (4.2) с мероморфными коэффициентами.

Определение 4.1. Особая точка системы (4.2) (связности ∇) называется *фуксовой особой точкой*, если матрица $B(z)$ коэффициентов этой системы (матрица ω данной связности) имеет в указанной точке полюс первого порядка.

Мероморфная связность, все особые точки которой являются фуксовыми особыми точками, называется *логарифмической* или *фуксовой связностью*. Система уравнений (3.9) на базе B, заданная логарифмической связностью в тривиальном расслоении, называется фуксовой системой.

Дальнейшая классификация особых точек мероморфных связностей связана с характером поведения горизонтальных сечений связности в этих точках. Упомянутую классификацию удобнее проводить в терминах решений системы уравнений (3.9) (или (4.2) в случае одномерной базы).

Определение 4.2. Особая точка z_0 системы уравнений (3.9) (мероморфной связности ∇) называется *регулярной особой точкой*, если все решения системы (3.9) имеют в этой точке не более чем степенной рост при стремлении z к z_0 по внутренности произвольного конуса с вершиной в z_0, не содержащего целиком окрестности O точки z_0.

В противном случае точка z_0 называется *иррегулярной особой точкой*.

Поскольку решения системы (3.9) являются, вообще говоря, многозначными функциями с точкой ветвления z_0, нам приходится использовать именно такое определение степенного роста.

Пример 4.1. Рассмотрим систему вида (4.2)

$$\frac{dy}{dz} = \begin{pmatrix} 1/z & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$$

с фуксовой особой точкой $z=0$. Фундаментальная матрица $Y(z)$ пространства решений этой системы (то есть матрица, столбцы которой образуют базис пространства решений) имеет вид

$$Y(z) = \begin{pmatrix} z & z\ln z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что точка $z=0$ является регулярной особой точкой для этой системы, так как функция $\ln z$ (точнее, любая ее ветвь) растет не быстрее чем $1/z$ при приближении к точке 0 по внутренности любого сектора с центром в точке 0, не совпадающего со всей комплексной плоскостью. Заметим здесь, что при стремлении z к точке 0 по подходящей спирали можно добиться экспоненциального роста функции $\ln z$.

Пример 4.2. Рассмотрим систему уравнений (состоящую из одного уравнения)

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{y}{z^2}.$$

Точка $z=0$ является иррегулярной особой точкой для этой системы, так как ее общее решение имеет вид $y=ce^{1/z}$.

Следующая теорема устанавливает связь между фуксовостью и регулярностью системы в особой точке.

Теорема 4.1. *Фуксова особая точка системы* (4.2) *является регулярной особой точкой.*

Доказательство. Представим матрицу $B(z)$ системы (4.2) в виде $B(z)=B_0(z)/z$, где $B_0(z)$ голоморфна в единичном круге D с центром в нуле. Для любого z определим нормы вектор-столбца $y(z)$ и матрицы $B_0(z)$ следующим образом:

$$\|y(z)\| = \sqrt{|y^1(z)|^2 + \ldots + |y^p(z)|^2}, \quad \|B_0(z)\| = \max_{\|y(z)\|=1} \|B_0(z)y(z)\|.$$

Тогда из неравенства $\big|\|a\| - \|b\|\big| \leqslant \|a-b\|$ следует, что

$$\big|d\,\|y(z)\|\big| \leqslant \|dy(z)\|.$$

Пусть $\max_D \|B_0(z)\| = K$. Из системы (4.2) с учетом предыдущих неравенств получаем для $z \in \dot{D}$

$$\big|d\,\|y(z)\|\big| \leqslant K\|y(z)\|\frac{|dz|}{|z|}, \qquad \left|\frac{d\,\|y\|}{\|y\|}\right| \leqslant K\frac{|dz|}{|z|}. \tag{4.3}$$

Для произвольной точки $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi} \in \dot{D}$ рассмотрим отрезок J с началом в точке z_0 и концом в точке $z_1 = e^{i\varphi}$. Проинтегрируем обе части последнего неравенства в (4.3) по J, получим

$$\left|\int_J \frac{d\,\|y\|}{\|y\|}\right| \leqslant \int_J \left|\frac{d\,\|y\|}{\|y\|}\right| \leqslant \int_J K\frac{|dz|}{|z|},$$

$$\big|\ln\|y(z_1)\| - \ln\|y(z_0)\|\big| \leqslant K\int_{\rho_0}^{1}\frac{d\rho}{\rho} = -K\ln\rho_0.$$

Поэтому

$$\|y(z_0)\| \leqslant \|y(z_1)\|\,|z_0|^{-K}.$$

Так как множество значений любой ветви решения $y(z)$ ограничено по норме на границе круга D, последнее неравенство завершает доказательство теоремы. □

Итак, множество систем с регулярными особыми точками содержит множество фуксовых систем. Следующий пример показывает, что обратное включение не имеет места.

Пример 4.3. Система

$$\frac{dy}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/z^2 & -1/z \end{pmatrix} y$$

не является фуксовой в точке $z = 0$, однако эта точка является регулярной особой точкой для данной системы, поскольку фундаментальная матрица пространства решений имеет вид

$$Y(z) = \begin{pmatrix} z & 1/z \\ 1 & -1/z^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим точку $z_0 \in \dot{O}$ и некоторую фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы (4.2), рассмотренной в малой окрестности этой точки. Для любой петли γ, лежащей в $\dot{O}$, с началом в z_0 матрица $Y(z)$ допускает аналитическое продолжение вдоль γ, результатом которого вновь является некоторая (вообще говоря, другая) фундаментальная матрица $Y'(z)$ той же системы. Поскольку любые две фундаментальные матрицы одной и той же системы в окрестности неособой точки связаны соотношением

$$Y'(z) = Y(z)G_\gamma, \quad G_\gamma \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}),$$

получаем соответствие $\gamma \mapsto G_\gamma$. Из теоремы о монодромии стандартного курса теории функций комплексного переменного следует, что это соответствие зависит лишь от гомотопического класса петли γ. (Гомотопический класс петли — это класс всех петель, которые могут быть получены из данной петли непрерывной деформацией, не задевающей особой точки 0 и оставляющей на месте начальную точку z_0. Множество гомотопических классов таких петель называется фундаментальной группой множества $\dot{O}$ и обозначается $\pi_1(\dot{O}, z_0)$. Это множество действительно является группой: групповая структура порождается произведением петель, то есть последовательным обходом петель-сомножителей, роль единичного элемента играет класс стягиваемых петель, обратного элемента — класс петли, проходимой в обратном направлении[1]). Тем самым, возникает отображение

$$\chi_0 \colon \pi_1(\dot{O}, z_0) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

фундаментальной группы $\pi_1(\dot{O}, z_0)$ в группу $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, которое является гомоморфизмом групп (проверьте это!) и называется *представлением* (*локальным*) *монодромии* или просто *монодромией* исходной системы в точке $z = 0$.

Группа $\pi_1(\dot{O}, z_0)$ устроена очень просто: она изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел; в качестве образующей этой группы выберем класс σ петли, обходящей $z = 0$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Матрица $G = \chi_0(\sigma)$ называется *матрицей монодромии* фундаментальной матрицы $Y(z)$. (Заметим, что если выбрать другую фундаментальную матрицу $\widetilde{Y}$, то ее матрица монодромии $\widetilde{G}$ будет связана с G соотношением $\widetilde{G} = S^{-1}GS$, где $\widetilde{Y} = YS$. Проверьте это.)

[1] Основные сведения о фундаментальной группе и связанных с нею накрытиях приводятся почти в любом учебнике алгебраической топологии, за исключением тех, которые специально посвящены какому-нибудь одному ее разделу, не требующему (по крайней мере, вначале) привлечения фундаментальной группы. Сам А. А. Болибрух включил в список литературы один такой учебник [19], но можно назвать и ряд других (некоторые из них заметно менее элементарны, но раздел о фундаментальной группе везде примерно одинаков [22], [23], [24]). — *Прим. ред.*

Напомним, что для любой матрицы H с ненулевыми собственными значениями можно определить матрицу $\ln H$ следующим образом. Приведем матрицу H с помощью невырожденной матрицы S к блочно-диагональному виду

$$H' = S^{-1}HS = \mathrm{diag}(H_1, \ldots, H_k), \quad k \leqslant p,$$

где, в свою очередь, каждый блок H_i является верхнетреугольной матрицей с единственным собственным значением λ^i. Заметим, что $H_i = \lambda^i I + \lambda^i N_i$, где N_i — нильпотентная матрица. Поэтому

$$\ln H_i = \ln(\lambda^i(I + N_i)) = \ln\lambda^i I + \ln(I + N_i) = \ln\lambda^i I + \sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{j-1}(N_i)^j/j,$$

поскольку $(N_i)^p = 0$ в силу нильпотентности. Рассмотрим матрицу $\ln H' = \mathrm{diag}(\ln H_1, \ldots, \ln H_k)$ и определим $\ln H := S\ln H' S^{-1}$. Заметим, что $\ln H$ определен с точностью до выбора собственных значений $\ln\lambda^i$, которые, в свою очередь, определены с точностью до слагаемых $2\pi i l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через E матрицу $(1/2\pi i)\ln G$. Выберем раз и навсегда собственные значения ρ^j матрицы E так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\rho^j < 1. \tag{4.4}$$

Определим матрицу z^E следующим образом:

$$z^E = \exp(E\ln z) = I + E\ln z + \ldots + E^n \ln^n z/n! + \ldots$$

Тогда при аналитическом продолжении вдоль петли σ матричная функция z^E переходит в

$$\exp(E(\ln z + 2\pi i)) = z^E \exp(2\pi i E) = z^E G,$$

то есть матрица z^E имеет ту же монодромию, что и исходная фундаментальная матрица $Y(z)$. Поэтому имеет место следующая лемма.

Лемма 4.1. *Фундаментальная матрица $Y(z)$ имеет следующее разложение в окрестности $\dot{O}$ точки $z = 0$:*

$$Y(z) = M(z)z^E, \tag{4.5}$$

где $M(z)$ — однозначная матричная функция в $\dot{O}$.

Доказательство. Матрица $Y(z)z^{-E}$ при продолжении вдоль петли σ переходит в матрицу $Y(z)G(z^E G)^{-1} = Y(z)z^{-E}$, то есть она допускает выделение регулярных ветвей в $\dot{O}$. Другими словами, если зафиксировать ветви $Y(z)$ и z^E в окрестности точки z_0, то матрица $M(z) = Y(z)z^{-E}$ действительно будет однозначной матричной функцией в $\dot{O}$. $\square$

Пример 4.4. Система

$$\frac{dy}{dz} = \begin{pmatrix} 1/z & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$$

имеет фундаментальную матрицу $Y(z)$ вида

$$Y(z) = \begin{pmatrix} z & z\ln z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При аналитическом продолжении вдоль петли σ эта матрица переходит в

$$Y'(z) = \begin{pmatrix} z & z\ln z + 2\pi i z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & z\ln z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица G монодромии и матрица E равны

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$Y(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая техническая лемма, касающаяся характера поведения матричной функции z^E в окрестности нуля.

Лемма 4.2. *Элементы a_{ij} матрицы z^E имеют вид*

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{p} z^{\rho^l} P^l_{ij}(\ln z), \tag{4.6}$$

где ρ^l — собственные значения матрицы E, а $P^l_{ij}(\ln z)$ — многочлены от $\ln z$ степени не больше $p-1$.

Доказательство. Приведем матрицу E с помощью невырожденной матрицы S к блочно-диагональному виду

$$E' = S^{-1}ES = \mathrm{diag}(E_1, \ldots, E_k), \quad k \leqslant p,$$

где, в свою очередь, каждый блок E_l является верхнетреугольной матрицей с единственным собственным значением ρ^l. Заметим, что $E_l = \rho^l I + N_l$, где N_l — нильпотентная матрица. Поэтому

$$z^{E_l} = \exp(E_l \ln z) = \exp((\rho^l I + N_l)\ln z) = \exp(\rho^l I \ln z)\left(\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(N_l)^j \ln^j z}{j!}\right),$$

поскольку $(N_l)^p = 0$ в силу нильпотентности. Итак, окончательно получаем:

$$z^{E_l} = z^{\rho^l} P(\ln z),$$

где $P(\ln z)$ — многочлен от $\ln z$ с матричными коэффициентами степени не больше $p-1$.

Поскольку $z^E = Sz^{E'}S^{-1}$, где $z^{E'} = \mathrm{diag}(z^{E_1}, \ldots, z^{E_k})$, утверждение леммы следует из вида матриц z^{E_l}. □

Следствие 4.1. *Точка $z=0$ является регулярной особой точкой для системы* (4.2) *тогда и только тогда, когда матрица $M(z)$ в разложении* (4.5) *мероморфна в нуле.*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что матрица z^E имеет степенной рост в нуле (в частности, $\forall\varepsilon>0$: $z^E z^\varepsilon \to 0$, когда $z\to 0$, оставаясь внутри произвольного сектора с вершиной в нуле). Поэтому регулярность особой точки $z=0$ эквивалентна тому, что матрица $M(z)$ имеет в нуле степенной рост, что, в свою очередь, в силу однозначности $M(z)$ эквивалентно ее мероморфности. □

Рассмотрим подробнее систему из примера 4.3. Эта система получена стандартной заменой $y^1=u$, $y^2=u'$ из скалярного линейного дифференциального уравнения $z^2u''+zu'-u=0$ второго порядка, общее решение которого имеет вид $u(z)=c_1z+c_2/z$.

Для произвольного скалярного линейного дифференциального уравнения p-го порядка

$$u^{(p)} + q_1(z)u^{(p-1)} + \ldots + q_p(z)u = 0 \tag{4.7}$$

с мероморфными коэффициентами монодромия определяется точно так же, как и для системы. Без каких-либо изменений переносится на случай уравнений и доказательство леммы 4.1. Сказанное выше относится и к определению понятия регулярной особой точки. С определением фуксовости дело обстоит иначе.

Определение 4.3. Точка $z=0$ называется *фуксовой особой точкой* для уравнения (4.7), если для любого $i=1, \ldots, p$

$$q_i(z) = \frac{r_i(z)}{z^i}, \tag{4.8}$$

где функции $r_i(z)$ голоморфны в точке $z=0$.

В отличие от систем, для уравнений понятия фуксовости и регулярности эквивалентны.

Теорема 4.2. *Точка $z=0$ является регулярной особой точкой для линейного скалярного дифференциального уравнения p-го порядка с мероморфными коэффициентами тогда и только тогда, когда эта точка является для него фуксовой особой точкой.*

Доказательство. *Достаточность.* Перейдем от фуксова уравнения (4.7), (4.8) к системе следующим образом:

$$y^1 = u, \quad y^2 = zu', \quad \ldots, \quad y^p = z^{p-1}u^{(p-1)}.$$

Получим систему (4.2) с матрицей коэффициентов

$$B(z) = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -r_p & -r_{p-1} & -r_{p-2} & -r_{p-3} & \ldots & (p-1)-r_1 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Эта система фуксова, следовательно, все ее решения имеют степенной рост в нуле. Значит, и решения исходного уравнения имеют степенной рост в нуле. Достаточность доказана.

Необходимость. Выберем фундаментальную систему решений $u_1, \ldots, u_p$ уравнения (4.7), для которой матрица монодромии имеет верхний треугольный вид. Тогда из (4.5) и из следствия 4.1 вытекает, что $u_1(z) = z^\rho v(z)$, где функция $v(z)$ голоморфна в точке 0 и не обращается там в нуль. (Строго говоря, из следствия 4.1 вытекает существование лишь мероморфной функции $v(z)$, но после преобразования $z^\rho v(z) = z^\rho z^{-r}(z^r v(z))$, где r — порядок полюса функции $v(z)$ в нуле, мы получим требуемый вид для решения u_1.)

Докажем необходимость теоремы по индукции по порядку уравнения (4.7).

При $p = 1$ это уравнение имеет вид $u' + q_1(z)u = 0$, а решение $u(z) = z^\rho v(z)$. Поэтому $q_1(z) = -u'/u = -\rho/z - v'/v$ имеет полюс первого порядка в нуле.

Пусть утверждение теоремы верно для любого уравнения порядка меньшего или равного $p - 1$. Докажем его справедливость для любого уравнения порядка p.

Сделаем в уравнении (4.7) замену $u(z) = u_1(z)x(z)$, где u_1 определено выше. Получим уравнение

$$x^{(p)} + \left(q_1(z) + \binom{p}{p-1}\frac{u_1'}{u_1}\right)x^{(p-1)} + \ldots$$
$$\ldots + \left(q_j(z) + \binom{p-j+1}{p-j}\frac{u_1'}{u_1} + \ldots + \binom{p}{p-j}\frac{u_1^{(j)}}{u_1}\right)x^{(p-j)} + \ldots$$
$$\ldots + \left(q_p(z) + \binom{1}{0}\frac{u_1'}{u_1} + \ldots + \binom{p}{0}\frac{u_1^{(p)}}{u_1}\right)x = 0,$$

которое можно записать в виде

$$x^{(p)} + b_1(z)x^{(p-1)} + \ldots + b_p(z)x = 0. \tag{4.10}$$

Поскольку порядок полюса функции $u_1^{(j)}/u_1$ в нуле не превосходит числа j (что немедленно следует из вида u_1), то уравнения (4.7) и (4.10) фуксовы или нефуксовы в нуле одновременно.

Заметим, что уравнение (4.10) имеет решение $x_1 \equiv \mathrm{const}$ (поскольку исходное уравнение имеет решение u_1 и в силу произведенной замены $u(z) = u_1(z)x(z)$). Значит, $b_p(z) \equiv 0$ (и, значит, коэффициент q_p имеет в нуле полюс порядка не больше чем p), поэтому порядок уравнения (4.10) можно понизить заменой $y = x'$. Согласно предположению индукции в нуле порядок полюса коэффициента $b_j(z)$, $j < p$, не превосходит числа j. Значит, уравнение (4.10), а стало быть, и уравнение (4.7) фуксово в нуле. $\square$

Лекция 5

Мероморфные связности с регулярными особыми точками. Локальная теория — 2

Прежде чем продолжить изучение структуры пространства решений системы (4.2) в окрестности регулярной особой точки, необходимо уточнить следующее обстоятельство. Поскольку мы имеем дело с многозначными функциями в $\dot{O}$, надо либо каждый раз пояснять, о какой ветви данной функции идет речь, либо перейти на риманову поверхность функции $\ln z$ (именно такой характер ветвления имеют все наши функции) над $\dot{O}$.

Эту риманову поверхность можно представлять себе как спиральную полосу, бесконечную в обе стороны и лежащую в цилиндре с направляющей $\dot{O}$ (еще проще представить себе внешнюю границу этой римановой поверхности: это спираль на поверхности цилиндра, накрывающая границу окрестности O; она может быть проинтерпретирована как риманова «поверхность» функции $\arg z$). Обозначим указанную риманову поверхность через O^*. С топологической точки зрения, она устроена следующим образом: точками O^* являются классы гомотопически эквивалентных путей в $\dot{O}$ с началом в точке z_0 и с фиксированным концом (докажите это, используя стандартное определение римановой поверхности логарифма как результата склейки бесконечного числа окрестностей O с разрезом вдоль $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$). Поэтому фундаментальная группа $\pi_1(\dot{O}, z_0)$ действует слева на O^* следующим образом:

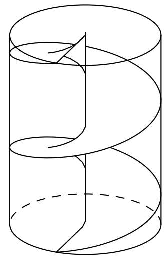

Рис. 3

$$\forall \gamma \in \pi_1(\dot{O}, z_0),\ \forall \tilde{z} \in O^* \colon \gamma\tilde{z} = [g\tau],$$

где g — петля из гомотопического класса γ, τ — путь с началом в точке z_0, гомотопический класс которого задает точку $\tilde{z}$, $[g\tau]$ — гомотопический класс пути, определяющего соответствующую точку из O^* и являющегося произведением (последовательным обходом) петли g и пути τ.

Определим отображение $\pi\colon O^* \to \dot{O}$ следующим образом: $\pi(\tilde{z}) = z'$, где z' — конечная точка пути, гомотопический класс которого определяет точку $\tilde{z} \in O^*$. Зададим правое действие группы $\pi_1(\dot{O}, z_0)$ на O^*: пусть $\tilde{z}\gamma := \gamma^{-1}\tilde{z}$.

Упражнение 5.1. Покажите, что четверка $(O^*, \dot{O}, \pi, \pi_1(\dot{O}, z_0))$ является главным расслоением со структурной группой $\pi_1(\dot{O}, z_0)$.

Эта четверка называется *универсальным накрытием*, а O^* — *универсальным накрывающим пространством* пространства $\dot{O}$. Допуская некоторую вольность речи, мы будем называть само O^* универсальным накрытием.

Договоримся раз и навсегда о том, что точки из O^* будут обозначаться через $\tilde{z}$, а соответствующие им точки $\pi(\tilde{z})$ из $\dot{O}$ — через z. В этих обозначениях соотношение (4.5) выглядит следующим образом: $Y(\tilde{z}) = M(z)\tilde{z}^E$.

Для произвольной функции $f(\tilde{z})$, заданной на O^*, и для любого $\gamma \in \pi_1(\dot{O}, z_0)$ определим действие γ на f следующим образом:

$$(\gamma^* f)(\tilde{z}) = f(\gamma\tilde{z}). \tag{5.1}$$

Упражнение 5.2. Докажите, что для фундаментальной матрицы $Y(\tilde{z})$ системы (4.2) и для образующей σ группы $\pi_1(\dot{O}, z_0)$ выполнено соотношение

$$\sigma^* Y = YG.$$

Вернемся к рассмотрению структуры пространства решений системы (4.2), которое мы будем обозначать через X, в окрестности регулярной особой точки $z=0$. В новых обозначениях регулярность этой точки означает существование такой константы Q, что для любого решения $y(\tilde{z}) \in X$ и любого сектора $S \subset \dot{O}$

$$\frac{y(\tilde{z})}{|z|^Q} \to 0, \quad \text{когда } z \to 0,\ z \in \dot{O},\ \tilde{z} \in \widetilde{S},\ z = \pi(\tilde{z}),$$

где $\widetilde{S}$ — произвольный сектор из $\pi^{-1}(S)$, накрывающий сектор S. (В дальнейшем предел всегда будет пониматься в указанном смысле — по секторам,— но специально оговариваться это, как правило, не будет.) Мы будем по-прежнему говорить, что функция $y(\tilde{z})$ имеет степенной рост в нуле.

Пусть функция $y(\tilde{z})$ имеет степенной рост в нуле.

Определение 5.1. *Нормированием $\varphi(y)$ скалярной функции y* в нуле называется целое число

$$\varphi(y) := \sup\left\{k \in \mathbb{Z} \mid \forall\lambda < k\ \frac{y(\tilde{z})}{|z|^\lambda} \to 0, \text{ когда } z \to 0\right\}, \quad \varphi(0) := \infty.$$

Нормированием матричной функции называется минимум нормирований ее компонент.

Пример 5.1. Нормирование мероморфной в нуле функции равно порядку ее нуля или порядку ее полюса (со знаком минус) в точке $z=0$;

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\ln\tilde{z}\right) = -1; \quad \varphi(\sqrt{\tilde{z}}) = 0; \quad \varphi\begin{pmatrix}1+z^2\ln\tilde{z}\\ 1/z+\ln\tilde{z}\end{pmatrix} = -1.$$

Упражнение 5.3. Докажите, что если собственные значения ρ^j матрицы E удовлетворяют неравенству (4.4), то нормирование матричной функции $\tilde{z}^E$ в нуле равно нулю.

Нормирование на пространстве решений системы с регулярной особой точкой можно ввести также следующим образом. Из лемм 4.1 и 4.2 следует, что любое решение $y(\tilde{z})$ может быть записано в виде так называемой конечной логарифмической суммы

$$y(\tilde{z}) = \sum_{j,\, l \in \sigma} f_{jl}(z)\tilde{z}^{\rho_j}(\ln \tilde{z})^{b_l},$$

где f_{jl} — ряды Лорана с конечной главной частью, числа ρ_j удовлетворяют соотношению (4.4), b_l — целые неотрицательные, и подобные члены (относительно пар $(\rho_j,\, b_l)$) приведены.

Нормированием решения $y(\tilde{z})$ *в нуле* называется минимум нормирований рядов f_{jl} по всем $j,\ l \in \sigma$, где, в свою очередь, под нормированием функции $f_{jl}(z)$ в нуле понимается порядок ее нуля или порядок ее полюса (со знаком минус) в точке $z = 0$.

Упражнение 5.4. Докажите, что определения нормирования, приведенные выше, эквивалентны.

Рассмотрим вновь пространство решений X системы (4.2) с регулярной особой точкой $z = 0$ на универсальной накрывающей O^*.

Предложение 5.1. *Нормирование* φ *задает отображение* $\varphi\colon X \to \to \mathbb{Z} \cup \infty$, *обладающее следующими свойствами*:

а) $\varphi(y_1 + y_2) \geqslant \min(\varphi(y_1),\ \varphi(y_2))$, *причем если* $\varphi(y_1) \neq \varphi(y_2)$, *то имеет место равенство*;

б) $\varphi(cy) = \varphi(y)$ *для любого* $c \in \mathbb{C} \setminus 0$;

в) $\varphi(\sigma^* y) = \varphi(y)$.

Доказательство. Пункты а) и б) утверждения предложения следуют непосредственно из определения нормирования (проверьте это самостоятельно). Докажем п. в), использовав второе определение нормирования.

Поскольку $\sigma^* \tilde{z}^a = \exp(2\pi i a)\tilde{z}^a$ и $\sigma^* \ln \tilde{z} = \ln \tilde{z} + 2\pi i$, то из вида логарифмической суммы немедленно следует, что

$$\varphi(\sigma^* y) \geqslant \varphi(y).$$

(Действие σ^* не может привести к появлению функций $f_{jl}(z)$ с меньшим порядком нуля или с бóльшим порядком полюса.)

Но то же самое, очевидно, верно и для $(\sigma^*)^{-1}$. Поэтому в цепочке

$$\varphi(y) = \varphi((\sigma^*)^{-1} \circ \sigma^* y) \geqslant \varphi(\sigma^* y) \geqslant \varphi(y)$$

все неравенства являются равенствами. Утверждение в) доказано. $\square$

Из свойств а) и б) следует, что нормирование φ принимает на X конечное число значений $\infty > \psi^1 > \ldots > \psi^m$ и задает фильтрацию

$$0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^m = X \tag{5.2}$$

пространства X линейными подпространствами

$$X^k = \{y \in X \mid \varphi(y) \geqslant \psi^k\}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Согласно свойству в) оператор σ^* сохраняет эту фильтрацию. Обозначим через k_l размерность фактор-пространства X^l/X^{l-1}, а через ${}^l\sigma^*$ — ограничение σ^* на X^l.

Рассмотрим базис $e_1^1, \ldots, e_{k_1}^1$ пространства X^1, в котором матрица оператора ${}^1\sigma^*$ имеет верхний треугольный вид, дополним его до базиса $e_1^1, \ldots, e_{k_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{k_2}^2$ пространства X^2, в котором верхний треугольный вид имеет матрица оператора ${}^2\sigma^*$, и т. д. (Для построения элементов $e_1^l, \ldots, e_{k_l}^l$ достаточно рассмотреть произвольный базис $\bar{e}_1^l, \ldots, \bar{e}_{k_l}^l$ фактор-пространства X^l/X^{l-1}, в котором матрица индуцированного оператором ${}^l\sigma^*$ оператора ${}^{l,l-1}\sigma^* \colon X^l/X^{l-1} \to X^l/X^{l-1}$ имеет верхний треугольный вид, а затем выбрать произвольных представителей этого базиса в X^l.)

Построенный базис $(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ пространства X обладает следующими свойствами:

1) нормирование φ принимает на элементах базиса (e) все свои значения $\psi^1, \ldots, \psi^m$ (с учетом кратностей $k_1, \ldots, k_m$);

2) $\varphi(e_{l+1}) \leqslant \varphi(e_l)$, $l = 1, \ldots, p-1$;

3) матрица G оператора σ^* имеет в этом базисе верхний треугольный вид.

Определение 5.2. Базис (e) пространства X решений системы (4.2) с регулярной особой точкой 0, удовлетворяющий свойствам 1)—3), называется *левелевским*.

Пример 5.2. Пусть оператор σ^* приводится к жордановой клетке. Тогда соответствующий жорданов базис (e) будет левелевским базисом пространства X.

Любой другой левелевский базис пространства X может быть получен из (e) верхнетреугольным преобразованием.

Доказательство. Обозначим через Y^l подпространство размерности l пространства X, натянутое на векторы $e_1, \ldots, e_l$ жорданова базиса (e). Фильтрация

$$0 \subset Y^1 \subset \ldots \subset Y^p = X$$

является единственной фильтрацией длины p пространства X, инвариантной относительно действия σ^*, поскольку элементы $e_1, \ldots, e_p$ образуют цепочку присоединенных векторов, т. е.

$$\sigma^*(e_l) = \lambda e_l + e_{l-1}, \quad l = 2, \ldots, p, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0.$$

Другими словами, любое подпространство X^l пространства X размерности d_l, инвариантное относительно действия σ^*, совпадает с Y^{d_l}. Отсюда немедленно следует, что жорданов базис (e) ассоциирован с фильтрацией (5.2), т. е. удовлетворяет свойствам 1, 2. Так как (e) удовлетворяет и свойству 3, то (e) — левелевский базис пространства X.

Вторая часть утверждения следует из того, что в условиях примера любой базис, в котором матрица оператора монодромии имеет верхнетреугольный вид, может быть получен из жорданового некоторым верхнетреугольным преобразованием. □

Рассмотрим пространство решений X системы (4.2) с регулярной особой точкой $z = 0$ и произвольный левелевский базис (e) пространства X. Обозначим через G матрицу оператора σ^* в базисе (e), а через $A = \mathrm{diag}(\varphi^1, \ldots, \varphi^p)$ — диагональную целочисленную матрицу нормирований этого базиса, т. е. $\varphi^l = \varphi(e_l)$. Рассмотрим матрицу E из (4.4).

Лемма 5.1. *Матрицы $z^A G z^{-A}$ и $z^A E z^{-A}$ голоморфны в точке $z = 0$. Нормирование матричной функции $z^A \tilde{z}^E z^{-A}$ в точке 0 равно нулю.*

Доказательство. Матрицы G и E согласно определению 5.2 имеют верхний треугольный вид, а для нормирований базиса (e) выполнены неравенства $\varphi^k \geqslant \varphi^m$ при $k \leqslant m$. Поскольку элемент $\tilde{c}_{km}$ произведения $z^A C z^{-A}$ для произвольной верхней треугольной матрицы $C = ((c_{km}))$ равен

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{km} &= c_{km} z^{\varphi^k - \varphi^m}, \qquad && k \leqslant m, \\ \tilde{c}_{km} &= 0, && k > m, \end{aligned}$$

то, тем самым, $z^A C z^{-A}$ — голоморфная в точке 0 матрица, что верно, в частности, для $C = G$ и $C = E$.

Второе утверждение леммы немедленно следует из вида матрицы $\tilde{z}^E$ (см. лемму 4.2 и упражнение 5.3), который влечет $\varphi(\tilde{z}^E) \geqslant 0$, и из того, что диагональные элементы матрицы $z^A \tilde{z}^E z^{-A}$ равны $\tilde{z}^{\rho^j}$, $j = 1, \ldots, p$, и $\varphi(\tilde{z}^{\rho^j}) = 0$. □

Теорема 5.1. *Для фундаментальной матрицы $Y_e(\tilde{z})$, построенной по левелевскому базису (e) пространства решений X системы (4.2) в $\dot{O}$ с регулярной особой точкой 0, имеет место следующее разложение*:

$$Y_e(\tilde{z}) = U(z) z^A \tilde{z}^E, \tag{5.3}$$

где матрица $U(z)$ однозначна и голоморфна в окрестности точки 0.

Доказательство. Однозначность матрицы $U(z)$ следует из леммы 4.1. Пусть $r = \max_i \operatorname{Re} \rho^i$, $0 < \varepsilon < (1-r)/2$. Для доказательства голоморфности достаточно показать, что

$$\lim_{z\to 0} U(z)\tilde{z}^{r+2\varepsilon} = 0.$$

(Здесь, как и ранее, предел понимается по секторам.) Но

$$U(z)\tilde{z}^{r+2\varepsilon} = Y_e(\tilde{z})\tilde{z}^{-E}z^{-A}\tilde{z}^{r+2\varepsilon} = N_1(\tilde{z})N_2(\tilde{z}),$$

где

$$N_1(\tilde{z}) = Y_e(\tilde{z})\tilde{z}^{-A+\varepsilon I}, \quad N_2(\tilde{z}) = z^A\tilde{z}^{-E}z^{-A}\tilde{z}^{r+\varepsilon}.$$

Поскольку j-й столбец матрицы $N_1(\tilde{z})$ равен

$$e_j(\tilde{z})\tilde{z}^{-\varphi(e_j)+\varepsilon},$$

то из определения нормирования следует, что $\lim\limits_{z\to 0} N_1(\tilde{z}) = 0$.

Из леммы 4.2 и выбора r получаем, что матрица $\tilde{z}^{-E+rI}$ имеет вид (4.6) (с заменой ρ^j на $r-\rho^j \geqslant 0$). Поэтому так же, как в доказательстве второй части леммы 5.1, имеем:

$$\varphi\left(z^A\tilde{z}^{-E+rI}z^{-A}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{z\to 0} N_2(\tilde{z}) = \lim_{z\to 0} z^A\tilde{z}^{-E+rI}z^{-A}\tilde{z}^{\varepsilon} = 0. \qquad \square$$

Наряду с левелевским базисом полезно рассматривать также базис, который мы будем называть *слабо левелевским*. Определяется он следующим образом.

Если оператор монодромии σ^* имеет единственное собственное значение, то слабо левелевский базис совпадает с левелевским. В общем случае разложим пространство решений X в сумму корневых подпространств $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, отвечающих попарно различным собственным значениям $\lambda^1, \ldots, \lambda^s$ оператора монодромии. Обозначим сужение σ^* на X_i через σ_i^*. Нормирование φ, ограниченное на X_i, порождает фильтрацию этого подпространства, аналогичную (5.2), и оператор σ_i^* сохраняет эту фильтрацию. Рассмотрим для каждого X_i соответствующий левелевский базис. Базис, полученный объединением построенных левелевских базисов по всем $i = 1, \ldots, s$, называется *слабо левелевским* базисом пространства решений X.

Упражнение 5.5. Докажите, что слабо левелевский базис пространства X ассоциирован с фильтрацией (5.2) всего пространства X. Другими словами, докажите, что нормирование φ принимает на слабо левелевском базисе все свои значения с учетом кратностей.

В слабо левелевском базисе матрица G оператора монодромии σ^* имеет блочно-диагональный вид $G=\operatorname{diag}(G_1, \ldots, G_s)$, поэтому лемма 5.1 (в которой под матрицей A понимается матрица нормирований слабо левелевского базиса) остается справедливой и для этого базиса. Действительно, проверка голоморфности соответствующих матриц сводится к поблочной, а для каждого отдельного блока слабо левелевский базис является левелевским.

Теорема 1.1 также остается справедливой для слабо левелевского базиса. Ее доказательство теперь дословно совпадает с доказательством теоремы в случае левелевского базиса.

В качестве примера к теореме 1.1 рассмотрим системы из примеров 4.3 и 4.1.

Пример 5.3. Для системы

$$\frac{dy}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/z^2 & -1/z \end{pmatrix} y,$$

имеющей фундаментальную матрицу

$$Y(z) = \begin{pmatrix} z & 1/z \\ 1 & -1/z^2 \end{pmatrix},$$

имеем

$$\varphi\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1/z \\ -1/z^2 \end{pmatrix} = -2,$$

поэтому разложение (5.3) для матрицы $Y(\tilde{z})$ в O^* имеет вид

$$Y(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} z & z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} z^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}},$$

так как $E=0$ в данном случае (монодромия отсутствует).

Пример 5.4. Для системы

$$\frac{dy}{dz} = \begin{pmatrix} 1/z & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y,$$

с фундаментальной матрицей

$$Y(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} z & z\ln\tilde{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\varphi\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \varphi\begin{pmatrix} z\ln\tilde{z} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

поэтому разложение (5.3) для матрицы $Y(\tilde{z})$ в O^* имеет вид

$$Y(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \tilde{z}^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Заметим, что матрица $U(z)$ в последнем примере (в отличие от предыдущего) не просто голоморфна, а голоморфно обратима в нуле. Оказывается, именно это свойство выделяет фуксовы системы среди всех систем с регулярной особой точкой $z=0$. Более точно, имеет место следующая теорема, принадлежащая голландскому математику А. Х. М. Левелю.

Теорема 5.2. *Система* (4.2) *с регулярной особой точкой* $z=0$ *фуксова в этой точке тогда и только тогда, когда в разложении* (5.3)

$$Y_e(\tilde{z}) = U(z) z^A \tilde{z}^E \tag{5.4}$$

для фундаментальной матрицы $Y_e(\tilde{z})$, *построенной по левелевскому* (*слабо левелевскому*) *базису* (e) *пространства решений* X *системы* (4.2) *в* $\dot{O}$, *матрица* $U(z)$ *голоморфно обратима в окрестности точки* 0.

Доказательство теоремы будет приведено в следующей лекции.

Упражнения

5.6. Докажите, что любой слабо левелевский базис может быть получен из некоторого левелевского базиса верхнетреугольным преобразованием и последующей «тасовкой» блоков (где под «тасовкой» понимается такое преобразование, которое сохраняет порядок векторов каждого из блоков, на которые разбит базис).

5.7. Докажите, что лемма 5.1 и теорема 5.1 верны для разложения (5.3), построенного по любому ассоциированному с фильтрацией (5.2) базису.

Лекция 6

Мероморфные связности с регулярными особыми точками. Локальная теория — 3

Доказательство достаточности условий теоремы 5.2 сводится к непосредственной проверке. Основная трудность заключается в доказательстве необходимости этих условий.

Доказательство теоремы 5.2. *Достаточность.* Введем следующие обозначения:

$$L(z) = A + z^A E z^{-A}, \quad L(0) = \lim_{z \to 0}(A + z^A E z^{-A}).$$

Заметим, что согласно лемме 5.1 (справедливой как для левелевского, так и для слабо левелевского базисов) матричная функция $L(z)$ голоморфна в O. Это — верхнетреугольная матрица, диагональ которой совпадает с диагональю матрицы $A+E$. Обозначим диагональные элементы матрицы $L(z)$ через

$$\beta^j = \varphi^j + \rho^j, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Эти числа называются *показателями системы* (4.2) *в нуле.*

Поскольку матрица $Y_e(\tilde{z})$ является решением матричного уравнения

$$\frac{dY_e}{dz} = B(z) Y_e, \tag{6.1}$$

то

$$B(z) = \frac{dY_e}{dz} \cdot Y_e^{-1} = \left(\frac{dU}{dz} U^{-1} + \frac{U}{z} L(z) U^{-1}\right). \tag{6.2}$$

Следовательно, матрица $zB(z)$ голоморфна в точке $z=0$, и система (4.2) фуксова в нуле. Достаточность доказана.

Необходимость. Проведем вначале доказательство для слабо левелевского базиса. Напомним, что в этом случае матрица E имеет блочно-диагональный вид $E = \operatorname{diag}(E_1, \ldots, E_s)$, где, в свою очередь, для любого i

$$E_i = \rho^i I + N_i, \tag{6.3}$$

N_i — верхнетреугольная нильпотентная матрица. Обозначим через R матрицу $R = \operatorname{diag}(\rho^1 I, \ldots, \rho^s I)$. Ясно, что матрицы R и E коммутируют. Действительно, умножение этих матриц сводится к поблочному умножению, но каждый блок матрицы R является скалярной матрицей.

Матрицу A нормирований можно записать в таком же блочном виде $A=\mathrm{diag}(A_1,\ \ldots,\ A_s)$, где каждый блок A_i имеет вид

$$A_i=\begin{pmatrix}\psi_i^1 I & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \psi_i^2 I & \ldots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & \ldots & \psi_i^{m_i} I\end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

$\psi_i^1>\ldots>\psi_i^{m_i}$, и где размер l-го диагонального блока равен размерности факторпространства X_i^l/X_i^{l-1} из левелевской фильтрации подпространства X_i.

Разобьем матрицы $L(z)$, $L(0)$ на блоки таких же размеров, как у матрицы E, а матрицы E_i, $L_i(z)$, $L_i(0)$ — на блоки тех же размеров, что у матрицы A_i, получим:

$$E_i=\begin{pmatrix}E_{11}^i & E_{12}^i & \ldots & E_{1m_i}^i\\ 0 & E_{22}^i & \ldots & E_{2m_i}^i\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & \ldots & E_{m_im_i}^i\end{pmatrix},$$

$$L_i(z)=\begin{pmatrix}\psi_i^1 I+E_{11}^i & z^{\psi_i^1-\psi_i^2}E_{12}^i & \ldots & z^{\psi_i^1-\psi_i^{m_i}}E_{1m_i}^i\\ 0 & \psi_i^2 I+E_{22}^i & \ldots & z^{\psi_i^2-\psi_i^{m_i}}E_{2m_i}^i\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & \ldots & \psi_i^{m_i} I+E_{m_im_i}^i\end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

$$L_i(0)=\begin{pmatrix}\psi_i^1 I+E_{11}^i & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \psi_i^2 I+E_{22}^i & \ldots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & \ldots & \psi_i^{m_i} I+E_{m_im_i}^i\end{pmatrix}.$$

Пусть система (6.1) фуксова в точке 0. Тогда $B(z)=B_0(z)/z$, где матричная функция $B_0(z)$ голоморфна в нуле. Из (6.1) и (6.2) в этом случае получаем:

$$B_0(z)U(z)=z\frac{dU}{dz}+U(z)L(z),\qquad B_0(0)U(0)=U(0)L(0). \tag{6.6}$$

Мы будем доказывать необходимость утверждения теоремы от противного. Предположим, что $\det U(0)=0$, и рассмотрим ядро $\mathrm{Ker}\,U(0)$ матрицы $U(0)$, т. е. все векторы из $\mathbb{C}^p$, которые переводятся матрицей $U(0)$ в нуль. Из последнего соотношения в (6.6) следует, что линейное преобразование $L(0)$ переводит $\mathrm{Ker}\,U(0)$ в себя. Обозначим через $c\in\mathrm{Ker}\,U(0)$ собственный вектор этого преобразования. Тогда $L(0)c=\beta_i^l c$, где $\beta_i^l=\rho^i+\psi_i^l$ для некоторых i, l. Тем самым, из вида (6.5) матрицы $L(0)$

следует, что вектор c имеет следующую блочную структуру

$$c=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ c_i\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad c_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ c_i^l\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad c_i^l=\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_t\end{pmatrix},$$

где t — размер блока $\psi_i^l I+E_{ll}^i$ матрицы $L_i(0)$. Другими словами, единственные априори ненулевые компоненты вектора c находятся в строках с теми же номерами, что и элементы указанного блока матрицы $L(0)$.

Из сказанного выше и из блочного вида матрицы $L(0)$ следует, что

$$\tilde{z}^{A+R}c=\tilde{z}^{L(0)}c=\tilde{z}^{\beta_i^l}c.$$

Рассмотрим решение $y_c=Y_ec$. Из вида вектора c следует, что $\varphi(y_c)=\psi_i^l$. Мы покажем, что $\varphi(y_c)>\psi_i^l$, и, тем самым, придем к противоречию (из которого будет следовать, что предположение о вырожденности матрицы $U(0)$ неверно).

Обозначим матрицу $E-R$ через $\widetilde{E}$. Из (6.3) следует, что матрица $\widetilde{E}=\operatorname{diag}(N_1,\ldots,N_s)$ нильпотентна. Используя тот факт, что матрицы E и R коммутируют, представим вектор-функцию $\tilde{z}^{-\beta_i^l}y_c$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}^{-\beta_i^l}y_c&=Y_e\tilde{z}^{-\beta_i^l}c=U(z)z^A\tilde{z}^E\tilde{z}^{-A-R}c=U(z)z^A\tilde{z}^{\widetilde{E}}z^{-A}c=\\
&=U(z)\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k!}\ln^k\tilde{z}[z^A\tilde{E}z^{-A}]^k\right)c=\\
&=U(z)\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k!}\ln^k\tilde{z}[L(z)-A-R]^k\right)c=\\
&=U(z)\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k!}\ln^k\tilde{z}[L(0)-A-R+O(z)]^k\right)c=\\
&=U(z)\left(I+O(z\ln^{p-1}\tilde{z})+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k!}\ln^k\tilde{z}[L(0)-A-R]^k\right)c=\\
&=U(z)c+O(z\ln^{p-1}\tilde{z})c=U(0)c+O(z\ln^{p-1}\tilde{z})c=O(z\ln^{p-1}\tilde{z}),
\end{aligned}$$

так как $(L(0)-A-R)c=0$ и $U(0)c=0$.

Поэтому для любого числа $\lambda < \psi_i^l + 1$ получаем

$$y_c(\tilde{z})\tilde{z}^{-\lambda} = y_c(\tilde{z})\tilde{z}^{-\psi_i^l - 1 + \varepsilon} = y_c(\tilde{z})\tilde{z}^{-\psi_i^l - \rho^i}\tilde{z}^{\rho^i - 1 + \varepsilon} = O(z \ln^{p-1} \tilde{z})\tilde{z}^{\rho^i - 1 + \varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ и $\mathrm{Re}(\rho^i - 1 + \varepsilon) > -1$. Поэтому

$$y_c(\tilde{z})\tilde{z}^{-\lambda} \to 0, \quad \text{когда} \quad z \to 0$$

(предел, как всегда, берется по секторам).

Следовательно, $\varphi(y_c) \geqslant \psi_i^l + 1$, что противоречит равенству $\varphi(y_c) = \psi_i^l$. Полученное противоречие означает, что предположение о вырожденности матрицы $U(0)$ было неверным. Значит, матрица $U(z)$ голоморфно обратима в нуле.

Для произвольного левелевского базиса данная теорема следует из теоремы 5.1 и из того факта, что в разложении

$$Y'(\tilde{z}) = U'(z)z^{A'}\tilde{z}^{E'}$$

для левелевского базиса (в котором мы пометили все матрицы штрихами, чтобы отличать его от соответствующего разложения для слабо левелевского базиса) имеет место неравенство $\operatorname{tr} A' \geqslant \operatorname{tr} A$ (на самом деле имеет место равенство, как это следует из упражнения 5.5, но для наших целей достаточно и неравенства).

Действительно, из последнего неравенства следует, что порядок нуля голоморфной функции $\det U'(z)$ в нуле не превосходит порядка нуля $\det U(z)$ (так как $Y' = YS$ и $\det Y' = \det S \det Y$, $\det S \neq 0$). Но, согласно доказанному, последняя функция в точке $z = 0$ в нуль не обращается. Значит, матрица $U'(z)$ голоморфно обратима в нуле. □

Из разложения (5.3) для фуксовой системы следует, что числа $\beta^j = \varphi^j + \rho^j$, $j = 1, \ldots, p$, являются *показателями асимптотик* базисных решений системы в нуле. (Поэтому они и называются показателями системы (4.2) в точке 0.)

Из второго соотношения (6.6) получаем

Следствие 6.1. *Показатели фуксовой системы*

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_0(z)}{z}y \tag{6.7}$$

в нуле совпадают с собственными значениями матрицы $B_0(0)$ *коэффициентов этой системы.*

Как найти матрицу монодромии фуксовой системы по матрице ее коэффициентов? В так называемом нерезонансном случае это сделать несложно. Напомним, что система (6.7) называется *нерезонансной*, если никакие два собственных значения матрицы $B_0(0)$ не отличаются на натуральное число. В противном случае система называется *резонансной в нуле*.

Предложение 6.1. *Если фуксова система* (6.7) *нерезонансна в нуле*, *то матрица монодромии этой системы сопряжена к матрице* $\exp(2\pi i B_0(0))$.

Доказательство. Рассмотрим вновь разложение (5.3), построенное по слабо левелевскому базису (e). В условиях предложения каждая из матриц A_i в разложении (6.4) является скалярной, т. е. $\psi_i^1 = \ldots = \psi_i^{m_i}$, ибо в противном случае разность

$$\beta_i^1 - \beta_i^{m_i} = \psi_i^1 + \rho^i - \psi_i^{m_i} - \rho^i = \psi_i^1 - \psi_i^{m_i}$$

была бы натуральным числом. Так как в силу следствия 6.1 числа β_i^j являются собственными значениями матрицы $B_0(0)$, то отсюда следовала бы резонансность системы (6.7) в нуле.

Следовательно, матрицы A и E коммутируют, поэтому $L(0) = A + E$, и из (6.6) получаем:

$$B_0(0) = U(0)(A+E)U^{-1}(0),$$
$$\exp(2\pi i B_0(0)) = U(0)\exp(2\pi i(A+E))U^{-1}(0) = U(0)GU^{-1}(0). \qquad \square$$

Из доказательства достаточности теоремы также легко вытекает следующее полезное утверждение, доказательство которого мы оставляем читателю.

Предложение 6.2. *Пусть некоторая* (*не обязательно левелевская*) *фундаментальная матрица* Y_e *системы* (4.2) *представлена в виде* (5.3), *где* $U(z)$ *голоморфно обратима в нуле*, A — *некоторая диагональная целочисленная матрица* (*диагональные элементы которой не обязательно образуют невозрастающую последовательность*), E — *произвольная матрица. Если матричная функция* $z^A E z^{-A}$ *голоморфна в нуле*, *то система* (4.2) *фуксова в нуле.*

Упражнение 6.1. Используя утверждение упражнения 5.7, докажите, что теорема 5.2 имеет место для разложения (5.3), построенного по любому базису, ассоциированному с фильтрацией (5.2).

Вернемся к фуксовым скалярным дифференциальным уравнениям. Каждое такое уравнение в окрестности особой точки $z = 0$ имеет вид (4.7), (4.8):

$$z^p u^{(p)} + z^{p-1} r_1(z) u^{(p-1)} + \ldots + r_p(z) u = 0, \tag{6.8}$$

где функции $r_1(z), \ldots, r_p(z)$ голоморфны в точке нуль.

Наряду с уравнением (6.8) рассмотрим уравнение Эйлера

$$z^p u^{(p)} + z^{p-1} r_1(0) u^{(p-1)} + \ldots + r_p(0) u = 0. \tag{6.9}$$

Напомним, что решения последнего уравнения находятся следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-p+1)+\ldots+\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-p+i+1)r_i(0)+ \\ +\ldots+r_p(0)=0. \quad (6.10)$$

Каждому корню λ_i кратности k_i этого уравнения отвечает ровно k_i решений $\tilde{z}^{\lambda_i}\ln^l\tilde{z}$, $l=0, \ldots, k_i-1$, уравнения (6.9).

Корни λ_i уравнения (6.10) являются показателями асимптотик решений уравнения Эйлера в нуле.

Фуксово уравнение (6.8) можно рассматривать как голоморфную деформацию соответствующего уравнения Эйлера (при которой числа $r_i(0)$ заменяются на голоморфные функции $r_i(z)$; кстати, это удобный способ запомнить определение фуксова уравнения). Можно ожидать, что при этом корни уравнения (6.10) (которое называется *определяющим уравнением* для фуксова уравнения (6.8)) будут по-прежнему играть роль показателей асимптотик для решений последнего уравнения. Заключительная часть лекции будет посвящена доказательству этого факта.

Теория Левеля переносится без каких-либо изменений на случай скалярных фуксовых уравнений: точно так же определяются нормирования, фильтрации, показатели и т. д. вплоть до теоремы 5.1 включительно. Единственное отличие состоит в том, что в разложении (5.3) для скалярного фуксова уравнения, которое мы перепишем в виде

$$Y_p(\tilde{z})=U_p(z)z^A\tilde{z}^E, \quad (6.11)$$

матрицы $Y_p(\tilde{z})$ и $U_p(z)$ имеют размер $1\times p$, т. е. являются векторами. Элементы $e_1, \ldots, e_p$ матрицы Y_p образуют левелевский (слабо левелевский) базис в пространстве решений уравнения (6.8), а элементы матрицы $U_p(z)$ голоморфны в нуле согласно теореме 5.1.

Так же, как в доказательстве достаточности теоремы 4.2, с помощью замены

$$y^1=u, \quad y^2=zu', \quad \ldots, \quad y^p=z^{p-1}u^{(p-1)} \quad (6.12)$$

перейдем от уравнения (6.8) к фуксовой системе (6.7) с матрицей коэффициентов

$$B_0(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -r_p & -r_{p-1} & -r_{p-2} & -r_{p-3} & \ldots & (p-1)-r_1 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Лемма 6.1. *Левелевские показатели уравнения* (6.8) *и системы* (6.7), (6.13) *совпадают.*

Доказательство. Покажем, что у системы и уравнения совпадают нормирования. Действительно, преобразование (6.12) переводит решение u уравнения в вектор-решение $y = (u, zu', \ldots, z^{p-1}u^{(p-1)})^t$ системы, где значок t означает транспонирование. Так как для любой мероморфной функции u всегда выполнено неравенство $\varphi(z^l u^{(l)}) \geqslant \varphi(u)$, то из определения нормирования следует, что $\varphi(y) = \varphi(u)$. Таким образом, каждый элемент подпространства X^i левелевской фильтрации (5.2) построенной системы получается преобразованием (6.12) из соответствующего элемента подпространства X^i_p аналогичной фильтрации для уравнения (6.8). А значит, и матрицы нормирований построенных фильтраций, и матрицы монодромии системы и уравнения в соответствующих этим фильтрациям левелевских базисах совпадают. □

Согласно следствию 6.1 показатели построенной системы являются корнями характеристического уравнения

$$\det(B_0(0) - \lambda I) = 0. \qquad (6.14)$$

Приведем матрицу $B_0(0) - \lambda I$ к нижнему треугольному виду следующим образом. Вначале умножим i-й столбец этой матрицы на число $\mu_i = \lambda(\lambda - 1)\cdots(\lambda - i + 2)$, где $i = 2, \ldots, p$. Затем прибавим к каждому столбцу полученной матрицы сумму всех столбцов с меньшими номерами, получим нижнетреугольную матрицу V, определитель которой равен

$$\det V = Q(\lambda)P(\lambda),$$

где $Q(\lambda) = (-1)^p \prod\limits_{i=2}^{p} \mu_i$, а многочлен $P(\lambda)$ совпадает с многочленом, стоящим в левой части определяющего уравнения (6.10).

Поскольку $\det V(\lambda) = \det(B_0(0) - \lambda I)(-1)^p Q(\lambda)$, получаем, что характеристическое уравнение (6.14) построенной системы совпадает с определяющим уравнением исходного фуксова уравнения (6.8). Тем самым, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 6.3. *Левелевские показатели β^j фуксова уравнения* (6.8) *являются корнями определяющего уравнения* (6.10).

И мы убеждаемся, что описанная выше голоморфная деформация уравнения Эйлера (6.9), приводящая к фуксову уравнению (6.8), действительно не меняет показателей асимптотик решений уравнения в нуле.

Замечание 6.1. Преобразование (6.12) — не единственное преобразование, переводящее фуксово уравнение в фуксову систему. Любое преобразование вида

$$y^1 = u, \quad y^2 = h(z)zu', \quad \ldots, \quad y^p = (h(z)z)^{p-1}u^{(p-1)} \qquad (6.15)$$

с голоморфной не обращающейся в нуль функцией $h(z)$ также приводит к фуксовой системе (проверьте это самостоятельно, вычислив матрицу коэффициентов этой системы).

Нетрудно видеть, что при этом преобразовании левелевские показатели уравнения и системы вновь совпадают, т. е. лемма 6.1 имеет место и для этого преобразования (доказательство в этом случае дословно повторяет доказательство леммы 6.1).

Упражнения

6.2. Матрица $B(z)$ системы (4.2) с регулярной особой точкой в нуле всегда может быть записана в виде $B(z)=B_0(z)/z^k$, где $B_0(0)\neq 0$. Число $r=k-1$ называется *рангом Пуанкаре* особенности.

Докажите неравенство $b\geqslant r$, где через b обозначен порядок нуля функции $\det U(z)$ из разложения (5.3) для левелевского базиса пространства решений системы.

6.3*. Докажите, что для любой голоморфной в окрестности O точки нуль функции $U(z)$, голоморфно обратимой вне $z=0$, найдется такая голоморфно обратимая в O функция $\Gamma(z)$, что

$$\Gamma(z)U(z) = z^C V(z),$$

где $C=\operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_p)$, $c_1\geqslant\ldots\geqslant c_p\geqslant 0$, числа c_i — целые для всех i, а матрица $V(z)$ голоморфно обратима в нуле.

(Приведенное утверждение обычно называется в математической литературе леммой Соважа.)

6.4.** Докажите[1] неравенство $b\leqslant (p(p-1)/2)r$.

(*Указание*: примените лемму Соважа, а затем докажите неравенство $c_i-c_{i+1}\leqslant r$ для всех i.)

6.5. Докажите, что в разложении (6.11) для фуксова уравнения (6.8) первый элемент вектор-строки U_p не равен нулю в точке нуль.

6.6. Докажите, что левелевские показатели фуксова уравнения (6.8) в точке $z_0\neq 0$ голоморфности его коэффициентов суть числа $0, 1, \ldots$ $\ldots, p-1$.

[1] Знак *, как обычно, используется здесь для обозначения трудных задач. Два таких знака соответствуют очень трудной задаче. Так, например, задача 6.4 является по сути одним из основных результатов кандидатской диссертации молодого французского математика Э. Кореля.

Лекция 7

Мероморфные связности с регулярными особыми точками. Глобальная теория

Рассмотрим голоморфное векторное расслоение F ранга p с мероморфной связностью ∇ на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим особые точки связности через $a_1, \ldots, a_n$. Мы будем предполагать, что эти точки являются регулярными особыми точками для ∇ и что точка ∞ является для связности точкой голоморфности (выполнения последнего условия всегда можно добиться, сделав в базе расслоения подходящее дробно-линейное преобразование, переводящее точку ∞ в точку голоморфности связности).

Для каждой особой точки a_i так же, как и в начале лекции 4, рассмотрим окрестность O_i этой точки и некоторую тривиализацию расслоения F над O_i. В соответствующем базисе локальных сечений связность ∇ определяет систему линейных дифференциальных уравнений (4.2)

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y. \tag{7.1}$$

с регулярной особой точкой a_i.

Вся предыдущая локальная теория может быть применена к системе (7.1), рассматриваемой в окрестности O_i этой точки (для этого достаточно формально перейти к локальной координате $\xi = z - a_i$). В результате мы получим соответствующие матрицы, нормирования, показатели и т. д. Теперь все они будут зависеть от индекса i, и мы будем их обозначать через Y_i (вместо Y_e), U_i, A_i, E_i, ρ_i^j, φ_i^j, β_i^j.

Из соотношения (3.10) следует, что матрицы A_i, E_i и числа ρ_i^j, φ_i^j, β_i^j не зависят от выбора тривиализации расслоения над O_i, в то время как матрицы Y_i, U_i умножаются слева на голоморфно обратимую матричную функцию $\Gamma(z)$ при переходе от локального базиса голоморфных сечений $(s_1, \ldots, s_p)$ к $(s_1, \ldots, s_p)\Gamma^{-1}$. Числа $\{\beta_i^j\}$ называются *показателями связности ∇ в точке a_i*.

Какой вид имеет связность с логарифмическими особыми точками, если расслоение тривиально? Как связаны между собой левелевские фильтрации и показатели связности ∇ в различных точках? При каких условиях на показатели связность с регулярными особыми точками является логарифмической (фуксовой)? В дальнейшем мы последовательно ответим на эти вопросы.

Рассмотрим вначале случай тривиального расслоения F. В базисе из глобальных голоморфных сечений этого расслоения связность ∇ задает систему уравнений (3.9)

$$dy = \omega y \tag{7.2}$$

(записанную в инвариантной бескоординатной форме) на всей расширенной комплексной плоскости.

Обозначим через B_i вычет матричной дифференциальной 1-формы ω в точке a_i. Если система (7.2) фуксова (построена по логарифмической связности ∇), то форма $\omega - \sum\limits_{i=1}^{n} B_i\, dz/(z-a_i)$ голоморфна на всей сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и, стало быть, равна нулю. (На расширенной комплексной плоскости не существует ненулевых голоморфных дифференциальных форм, см. упражнение 2.1.) Поэтому в координате z фуксова система (7.2) принимает вид

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z-a_i}\right) y, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i = 0. \tag{7.3}$$

Следующая теорема связывает априори независимые друг от друга локальные левелевские фильтрации (точнее, показатели) системы в различных особых точках.

Теорема 7.1. *Сумма Σ всех показателей пространства X решений системы* (7.1) *с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ является целым числом и не превосходит нуля*:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j \leqslant 0. \tag{7.4}$$

Система с регулярными особыми точками является системой типа Фукса на $\overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда

$$\Sigma = 0. \tag{7.5}$$

Доказательство. Рассмотрим форму $\operatorname{tr} B(z)\, dz$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть Y_i — фундаментальная матрица пространства X, построенная по левелевскому базису (e^i). Тогда согласно формуле Лиувилля $\det Y_i = c_0 \exp(\int \operatorname{tr} B(z)\, dz)$ в окрестности точки a_i имеем:

$$\operatorname{tr} B(z)\, dz = d \ln \det Y_i.$$

Поскольку из (5.3) (где координата z заменена[1] на $z-a_i$ и все матрицы снабжены индексом i) следует, что

$$\det Y_i = h(z)(z-a_i)^{b_i+\sum_{j=1}^{p}\beta_i^j},$$

где b_i — порядок нуля функции $\det U_i(z)$ в точке a_i и $h(a_i)\neq 0$, то

$$\mathrm{res}_{a_i} \operatorname{tr} B(z)\, dz = b_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j, \qquad b_i \geqslant 0.$$

По теореме о сумме вычетов получаем

$$\sum_{i=1}^{n} b_i + \Sigma = 0, \tag{7.6}$$

откуда следует первое утверждение предложения и неравенство (7.4).

Согласно теореме 5.2 фуксовость системы в точках $a_1, \ldots, a_n$ эквивалентна выполнению условий $b_1=\ldots=b_n=0$. Отсюда следует заключительное утверждение теоремы. □

На время вновь вернемся к скалярным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим фуксово уравнение (т. е. уравнение, имеющее лишь фуксовы особенности)

$$u^{(p)} + q_1(z)u^{(p-1)} + \ldots + q_p(z)u = 0 \tag{7.7}$$

с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ на расширенной комплексной плоскости. Мы будем предполагать вначале, что точка $a_n=\infty$ является особой точкой для этого уравнения. Последнее означает, что в локальной координате $\zeta=1/z$ в окрестности точки ∞ $(\zeta=0)$ коэффициенты $\tilde{q}_i$ уравнения

$$\frac{d^p u}{d\zeta^p} + \tilde{q}_1(\zeta)\frac{d^{p-1}u}{d\zeta^{p-1}} + \ldots + \tilde{q}_p(\zeta)u = 0, \tag{7.8}$$

полученного из (7.7) заменой $z=1/\zeta$, имеют фуксову особенность при $\zeta=0$.

Поскольку

$$\frac{d^j}{dz^j} = \left(-\zeta^2\frac{d}{d\zeta}\right)^j = \sum_{i=1}^{j} c_i^j \zeta^{j+i}\frac{d^i}{d\zeta^i},$$

[1] В начале лекции 5 было сделано уточнение о возможности понимания решений системы (7.1) как многозначных функций переменной $z\in\dot{O}_i$ либо как однозначных функций переменной $\tilde{z}$ на универсальном накрытии проколотой окрестности $\dot{O}_i$ точки a_i. В этой лекции и далее появляющиеся функции вновь понимаются как функции аргумента z (и обозначение $\tilde{z}$ не используется), нужно только иметь в виду упомянутое уточнение. — *Прим. ред.*

где $c_j^j = (-1)^j$, то коэффициенты преобразованного уравнения имеют вид:

$$\tilde{q}_1(\zeta) = (-1)^p \zeta^{-2p}\Big(c^p_{p-1}\zeta^{2p-1} + c^{p-1}_{p-1}\zeta^{2p-2}q_1(1/\zeta)\Big),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tilde{q}_k(\zeta) = (-1)^p \zeta^{-2p}\Big(c^p_{p-k}\zeta^{2p-k} + c^{p-1}_{p-k}\zeta^{2p-k-1}q_1(1/\zeta) + \dots$$

$$\dots + c^{p-m}_{p-k}\zeta^{2p-k-m}q_m(1/\zeta) + \dots + c^{p-k}_{p-k}\zeta^{2p-2k}q_k(1/\zeta)\Big),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tilde{q}_{p-1}(\zeta) = (-1)^p \zeta^{-2p}\Big(c^p_1\zeta^{p+1} + c^{p-1}_1\zeta^p q_1(1/\zeta) + \dots +$$

$$+ c^{p-m}_1\zeta^{p-m+1}q_m(1/\zeta) + \dots + c^1_1\zeta^2 q_{p-1}(1/\zeta)\Big),$$

$$\tilde{q}_p(\zeta) = (-1)^p \zeta^{-2p} q_p(1/\zeta).$$

Условие фуксовости уравнения (7.8) в точке $\zeta = 0$ равносильно условию голоморфности функций

$$R_i(\zeta) = \zeta^{-i}q_i\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad i = 1, \dots, p,$$

в этой точке.

Поскольку условие (4.8) фуксовости уравнения в точках $a_1, \dots, a_{n-1}$ означает, что для любого i

$$q_i(z) = \frac{r_i(z)}{(z-a_1)^i \cdots (z-a_{n-1})^i},$$

где $r_i(z)$ — голоморфная во всей комплексной плоскости функция, то из условия голоморфности функции $R_i(\zeta)$ следует, что $r_i(z) = O(z^{k_i})$ на бесконечности, где $(n-1)i \geqslant i + k_i$. По теореме Лиувилля получаем, что $r_i(z)$ — многочлен степени k_i, причем для k_i выполнено неравенство

$$k_i \leqslant (n-2)i.$$

Следовательно, коэффициент $q_i(z)$ фуксова уравнения (7.7) содержит ровно $k_i + 1$ независимых параметров (коэффициентов многочлена r_i).

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{p}(k_i+1) \leqslant (n-2)p(p+1)/2 + p$, получаем следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Фуксово скалярное дифференциальное уравнение p-го порядка с n особыми точками на сфере Римана зависит от*

$$N_{\mathrm{eq}} = \frac{(n-2)p(p+1)}{2} + p \tag{7.9}$$

независимых параметров.

Если особая точка a_n совпадает с бесконечно удаленной точкой, то коэффициенты $q_i(z)$ этого уравнения имеют вид

$$q_i(z) = \frac{r_i(z)}{(z-a_1)^i \cdots (z-a_{n-1})^i}, \tag{7.10}$$

где $r_i(z)$ — многочлены степени $k_i \leqslant (n-2)i$.

Обозначим показатели уравнения (7.7) в точке a_i через β_i^j, $j=1, \ldots$ $\ldots, p$. Следующая теорема устанавливает связь между этими показателями.

Теорема 7.2. *Для показателей β_i^j фуксова дифференциального уравнения* (7.7) *на сфере Римана с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ выполнено следующее соотношение* (*называемое соотношением Фукса*):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^j = \frac{(n-2)p(p-1)}{2}. \tag{7.11}$$

Доказательство. Пусть точка ∞ не входит в число особых точек уравнения (7.7) (выполнения этого условия всегда можно добиться с помощью подходящего дробно-линейного преобразования сферы Римана; при этом показатели уравнения в особых точках не меняются, см. упражнение 7.1). Перейдем от уравнения (7.7) к системе (7.1) с помощью замены

$$y^1 = u, \quad y^2 = \prod_{i=1}^{n}(z-a_i)\frac{du}{dz}, \quad \ldots, \quad y^p = \prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{p-1}\frac{d^{p-1}u}{dz^{p-1}}. \tag{7.12}$$

Поскольку в окрестности каждой особой точки a_i эта замена имеет вид (6.15), то согласно замечанию 6.1 построенная так система (7.1) будет фуксовой в этих точках с теми же самыми показателями, что и у уравнения.

Выберем какой-нибудь базис $(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ в пространстве решений исходного уравнения. Из вида замены следует, что соответствующая фундаментальная матрица $Y(z)$ системы будет иметь вид

$$Y(z) = \Gamma(z)W(z), \quad \text{где} \quad \Gamma(z) = \operatorname{diag}\left(1, \ \prod_{i=1}^{n}(z-a_i), \ \ldots, \ \prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{p-1}\right)$$

и $W(z)$ — матрица Вронского базиса (e).

Поскольку, как было показано ранее,

$$\frac{d^j u}{dz^j} = \frac{1}{z^{2j}}\sum_{i=1}^{j} c_i^j z^{j-i}\frac{d^i u}{d\zeta^i},$$

то

$$W(z) = \Gamma_1(z)\Gamma_2(z)V(\zeta), \quad \text{где} \quad \Gamma_1(z) = \operatorname{diag}\bigl(1, z^{-2}, \ldots, z^{-2(p-1)}\bigr),$$

$\Gamma_2(z)$ — нижнетреугольная матрица с элементами $c^j_j = (-1)^j$ на главной диагонали и $V(\zeta)$ — матрица Вронского базиса (e) в координате $\zeta = 1/z$, т. е.

$$V(\zeta) = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_p \\ \dfrac{de_1}{d\zeta} & \ldots & \dfrac{de_p}{d\zeta} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^{p-1}e_1}{d\zeta^{p-1}} & \ldots & \dfrac{d^{p-1}e_p}{d\zeta^{p-1}} \end{pmatrix}.$$

Исходное фуксово уравнение не имеет особенности в бесконечности, т. е. матрица $V(\zeta)$ голоморфно обратима при $\zeta = 0$. Однако построенная система имеет дополнительную особую точку в ∞. Причем

$$\det Y(z) = \det(\Gamma(z)\Gamma_1(z)\Gamma_2(z)V(\zeta)) = z^b h(z),$$

где $b = (n-2) + 2(n-2) + \ldots + (p-1)(n-2) = \dfrac{(n-2)p(p-1)}{2}$, а функция $h(z)$ голоморфна в точке ∞ и не обращается там в нуль.

Вновь, как и в доказательстве теоремы 7.1, рассмотрим сумму вычетов формы $\operatorname{tr} B(z)\,dz = d \ln\det Y$. Вычет в бесконечности этой формы равен $-b = -\dfrac{(n-2)p(p-1)}{2}$, а сумма вычетов в особых точках a_i равна сумме $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p}\beta^j_i$ показателей системы (которые, как было показано выше, совпадают с показателями уравнения). Утверждение теоремы вновь следует из теоремы о сумме вычетов. □

Рассмотрим вновь векторное расслоение F с мероморфной связностью ∇ с регулярными особыми точками на сфере Римана и какое-либо координатное описание $(\{U_i\}, \{f_i\}, \{g_{ij}\}, \{\omega^i\})$ пары (F, ∇).

Определение 7.1. *Степенью $c_1(F)$ расслоения F* называется сумма вычетов связности $|\nabla|$ детерминантного расслоения $|F|$, где под детерминантным расслоением понимается одномерное расслоение со склеивающим коциклом $\{\det g_{ij}\}$, а под связностью $|\nabla|$ — связность в $|F|$ с формами связности $\{\operatorname{tr}\omega^i\}$ (см. упражнение 3.2).

Из доказательства теоремы 7.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 7.1. *Для суммы показателей Σ мероморфной связности ∇ с регулярными особыми точками в векторном голоморфном* *расслоении F на сфере Римана выполнено следующее неравенство*:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j \leqslant c_1(F). \tag{7.13}$$

Связность с регулярными особыми точками является логарифмической (фуксовой) тогда и только тогда, когда

$$\Sigma = c_1(F). \tag{7.14}$$

Важной характеристикой плоской мероморфной связности ∇ в расслоении F является ее представление монодромии, которое определяется следующим образом.

Рассмотрим неособую точку $z_0 \in B$ (где B — база расслоения) и некоторый базис локальных горизонтальных сечений $(s) = (s_1, \ldots, s_p)$ связности, рассмотренной в малой окрестности этой точки. Для любой петли γ, лежащей в $B \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, с началом в z_0 рассмотрим конечное покрытие петли связными односвязными окрестностями из $B \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, над которыми расслоение тривиально. Набор сечений (s) допускает аналитическое продолжение из пересечения первой и второй окрестностей во всю вторую окрестность, из второй в третью и т. д. (в каждой из окрестностей координаты горизонтальных сечений являются решениями соответствующей системы линейных уравнений (3.8) и, стало быть, они продолжаются на всю окрестность). Результатом такого продолжения вдоль всей петли γ вновь является некоторый (вообще говоря, другой) базис горизонтальных сечений (s') связности ∇. Поскольку любые два базиса горизонтальных сечений одной и той же связности в окрестности неособой точки связаны соотношением $(s) = (s')G_\gamma$, $G_\gamma \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, получаем соответствие $\gamma \mapsto G_\gamma$. Из теоремы о монодромии курса теории функций комплексного переменного следует, что это соответствие зависит лишь от гомотопического класса петли γ. (Заметьте, что в отличие от локального случая мы пишем $(s) = (s')G$, а не $(s') = (s)G$.) Тем самым, возникает отображение

$$\chi\colon\ \pi_1(B \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \tag{7.15}$$

фундаментальной группы $\pi_1(B \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0)$ в группу $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, которое является гомоморфизмом групп и называется *представлением монодромии* или просто *монодромией* связности. Группа $\operatorname{Im}\chi$ называется *группой монодромии* связности. (Если бы мы определили монодромию как в локальном случае, то получили бы не гомоморфизм, а антигомоморфизм (т. е. $\chi(\gamma\delta) = \chi(\delta)\chi(\gamma)$) — проверьте это, — что совершенно несущественно в локальном случае в силу коммутативности фундаментальной группы, но очень важно в глобальном.)

Рассмотрим в качестве базы B сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Фундаментальная группа $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0)$ устроена следующим образом: ее образующими являются гомотопические классы петель $g_1, \ldots, g_n$, каждая из петель g_i есть результат последовательного обхода некоторого пути γ_i, соединяющего точку z_0 с некоторой точкой из ε-окрестности точки a_i, окружности радиуса $\varepsilon/2$ с центром в a_i, проходимой по часовой стрелке, и того же пути γ_i, проходимого в обратном направлении. Поскольку произведение этих петель гомотопно петле, обходящей все особые точки по большому кругу, то это произведение стягивается по расширенной комплексной плоскости к точке z_0 «через» точку ∞. Поэтому образующие $g_1, \ldots, g_n$ связаны соотношением $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n = e$. Можно показать, что других соотношений в этой группе нет.

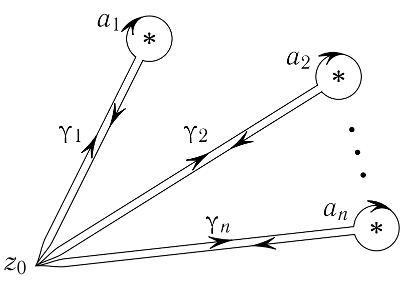

Рис. 4

Матрицы $G_i = \chi(g_i)$, $i = 1, \ldots, n$, называются *матрицами монодромии* связности. Из соотношения в фундаментальной группе следует, что $G_1 \cdot \ldots \cdot G_n = I$. Если заменить начальную точку z_0 на z_0' или выбрать другой базис локальных горизонтальных сечений связности, то матрицы монодромии заменятся на сопряженные $G_i' = S^{-1} G_i S$, $i = 1, \ldots, n$ (докажите это).

Для системы линейных дифференциальных уравнений (для связности в тривиальном расслоении) определение представления монодромии упрощается: вместо базиса (s) локальных горизонтальных сечений нужно взять фундаментальную матрицу $Y(z)$ пространства решений (т. е. матрицу координат базиса (s) в базисе глобальных сечений) и продолжить ее вдоль петли γ; результатом продолжения будет матрица $Y'(z)$ такая, что $Y(z) = Y'(z)G$ и т. д.

Для скалярного линейного дифференциального уравнения p-го порядка (7.7) на расширенной комплексной плоскости с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ монодромия определяется так же, как для системы уравнений, только продолжать надо не фундаментальную матрицу решений, а некоторый базис $(e_1, \ldots, e_p)$ решений уравнения в окрестности неособой точки z_0.

Рассмотрим расслоение F с голоморфной плоской связностью ∇. В этом случае монодромию связности можно «вычислить» следующим образом.

По теореме 3.3 это расслоение допускает координатное описание $(\{U_i\}, \{g_{ij}\})$ с постоянными функциями перехода $\{g_{ij}\}$ и с нулевыми формами связности $\omega^i = 0$. Рассмотрим конечное покрытие петли γ окрестностями $U_1, \ldots, U_m$ такое, что $z_0 \in U_1$. В каждой из окрестностей уравнение (3.8) горизонтальных сечений выглядит следующим образом: $dy = 0$.

Выберем в окрестности U_1 базис (s) горизонтальных сечений связности с матрицей координат I. Тогда продолжение этого базиса в окрестность U_2 будет иметь матрицу координат $g_{21}I$, в окрестность U_3 — $g_{32}g_{21}I$ и т. д. После продолжения вдоль всей петли получим базис горизонтальных сечений (s') с матрицей координат $g_{1m}g_{mm-1}\cdot\ldots\cdot g_{21}$. Значит, $(s') = (s)g_{1m}g_{mm-1}\cdot\ldots\cdot g_{21}$ и

$$(s) = (s')G_\gamma, \quad G_\gamma = (g_{1m}g_{mm-1}\cdot\ldots\cdot g_{21})^{-1}, \tag{7.16}$$

где G_γ — матрица монодромии связности вдоль петли γ.

Упражнения

7.1. Покажите, что дробно-линейное преобразование сферы Римана переводит фуксовы системы и уравнения в фуксовы системы и уравнения с теми же показателями в соответствующих особых точках.

7.2. Используя результаты упражнений 6.2 и 6.4 и равенство (7.6), докажите следующее усиление неравенства (7.4), принадлежащее Э. Корелю:

$$-\frac{p(p-1)}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^j \leqslant -\sum_{i=1}^{n} r_i, \tag{7.17}$$

где r_i — ранг Пуанкаре системы (7.1) в точке a_i (напомним, что ранг r_i Пуанкаре системы равен числу $k_i - 1$, где k_i — порядок полюса матрицы системы в особой точке a_i).

7.3. *Гипергеометрическим уравнением* называется фуксово уравнение второго порядка с особыми точками $0, 1, \infty$ и со следующими показателями в этих точках: $\beta_0^1 = \beta_1^1 = 0$, $\beta_0^2 = 1 - \gamma$, $\beta_1^2 = \gamma - \alpha - \beta$, $\beta_\infty^1 = \alpha$, $\beta_\infty^2 = \beta$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Используя предложения 6.3 и 7.1, докажите, что гипергеометрическое уравнение имеет вид

$$u'' + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}u' - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)}u = 0. \tag{7.18}$$

7.4. Докажите, что любое фуксово уравнение второго порядка с тремя особыми точками на сфере Римана может быть приведено к гипергеометрическому с помощью дробно-линейного преобразования аргумента z и с помощью замены неизвестной функции $v = z^a(z-1)^b u$.

7.5. Используя результаты упражнений 6.2, 6.4 и равенство (7.6), докажите следующее усиление неравенства (7.13):

$$c_1(F) - \frac{p(p-1)}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^j \leqslant c_1(F) - \sum_{i=1}^{n} r_i, \tag{7.19}$$

где r_i — ранг Пуанкаре связности в точке a_i.

Лекция 8

Проблема Римана—Гильберта. Метод решения

Рассмотрим «обратную» задачу теории фуксовых уравнений: задачу восстановления фуксова уравнения по его монодромии

$$\chi\colon\ \pi_1(\overline{\mathbb{C}}\setminus\{a_1,\,\ldots,\,a_n\},\ z_0)\to \mathrm{GL}(p,\,\mathbb{C}). \tag{8.1}$$

Эта задача впервые упоминается Риманом в одной из заметок конца 1850-х годов. В 1900 г. она была включена Д. Гильбертом в число его «Математических проблем» под номером 21 и сформулирована следующим образом:

«*Показать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии*».

Сложилась традиция, по которой эта проблема применительно к фуксовым системам называется в литературе проблемой Римана—Гильберта.

Долгое время считалось, что проблема Римана—Гильберта полностью решена И. Племелем в работе 1908 г. Однако в начале 1980-х годов в его доказательстве были обнаружены лакуны (Ю. С. Ильяшенко и Т. Kohn). Оказалось, что Племель решил проблему, аналогичную проблеме Римана—Гильберта, в классе систем с регулярными особыми точками. Что же касается фуксовых систем, то вопрос оставался открытым.

В 1989 году А. Болибрухом был построен контрпример к проблеме Римана—Гильберта для случая системы трех уравнений с четырьмя особыми точками. Оказалось, что геометрический подход, связанный с теорией расслоений (впервые введенный при рассмотрении этой задачи Х. Рерлем в 1957 году) позволяет легко передоказать результаты Племеля и получить новые продвижения в проблеме Римана—Гильберта. Эти и некоторые другие результаты и будут объектом нашего рассмотрения на последующих лекциях.

От какого количества N_{re} параметров зависит представление монодромии (8.1) системы уравнений (скалярного уравнения)? При фиксированных особых точках в силу соотношения $G_1\cdot\ldots\cdot G_n=I$ (см. лекцию 7) монодромия определяется матрицами локальной монодромии $G_1,\,\ldots,\,G_{n-1}$, это $p^2(n-1)$ параметров. Поскольку представление определяется с точностью до эквивалентности, то матрицы задаются с точностью до сопряжения $S^{-1}G_iS$. Если $S_1^{-1}G_iS_1=S_2^{-1}G_iS_2$ для всех $i=1,\,\ldots,\,n-1$, то для неприводимого представления по лемме Шура получаем $S_1S_2^{-1} = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$. Поэтому число параметров следует уменьшить на $p^2 - 1$. Окончательно получаем

$$N_{\mathrm{re}} = p^2(n-1) - (p^2-1) = p^2(n-2) + 1.$$

Каждая фуксова система задается набором матриц коэффициентов-вычетов $B_1, \ldots, B_{n-1}$ (так как $B_1 + \ldots + B_n = 0$). Поэтому множество фуксовых систем с теми же особыми точками зависит от такого же числа непрерывных параметров, если эти системы рассматривать с точностью до эквивалентности $B_i \sim S^{-1}B_iS$, $i = 1, \ldots, n-1$ (переход к эквивалентной системе соответствует замене $y \mapsto Sy$ неизвестной функции, которая не меняет монодромии системы).

Обозначим множество фуксовых систем, рассматриваемых с точностью до эквивалентности, описанной выше, через $\mathcal{S}$, а множество классов эквивалентных представлений — через $\mathcal{M}$. В диаграмме

$$\begin{array}{c} \mathcal{S} \\ {\scriptstyle \mu}\big\downarrow \\ \mathcal{M} \end{array} \tag{8.2}$$

через μ обозначено отображение монодромии. Из теоремы об аналитической зависимости решения уравнения от параметра следует, что это отображение является голоморфным над пространством эквивалентных неприводимых представлений. (Как мы докажем позднее, μ является локально биголоморфным отображением над этим пространством, во что нетрудно поверить из соображений размерности, приведенных выше.)

В формулировке проблемы Римана—Гильберта утверждается, что μ — сюръективное отображение.

Отметим здесь, что задача построения фуксового скалярного дифференциального уравнения с заданными особыми точками и монодромией имеет отрицательное решение (что было известно еще Пуанкаре). Действительно, разность между числом параметров, от которых зависит представление монодромии, и числом параметров, от которых зависит произвольное фуксово уравнение, согласно предложению 7.1 равна

$$\Delta = N_{\mathrm{re}} - N_{\mathrm{eq}} = \frac{(n-2)p(p-1)}{2} - p + 1. \tag{8.3}$$

Заметим, что $\Delta > 0$ при $n > 3$ и $p > 1$. При $n = 3$ число Δ равно нулю лишь для $p = 2$.

Отмеченное выше неравенство $\Delta > 0$ означает, что при $n > 3$, $p > 1$ и при $n = 3$, $p > 2$ построение фуксова уравнения с заданной монодромией возможно в общем случае лишь при появлении дополнительных, так называемых *ложных особых точек*, не дающих вклада в монодромию (т. е. таких точек, в которых коэффициенты уравнения имеют особенности, но решения не ветвятся).

Число Δ дает оценку сверху для числа таких точек.

Вернемся к проблеме Римана—Гильберта. Метод исследования этой задачи будет состоять в следующем. Вначале мы построим расслоение (точнее, серию расслоений) на сфере Римана с логарифмической связностью, имеющей заданную монодромию и заданные особые точки. Тем самым, исходная задача сведется к вопросу о тривиальности этого расслоения (точнее, какого-либо из построенных расслоений), ибо в тривиальном расслоении логарифмическая связность задает фуксову систему дифференциальных уравнений.

Затем мы исследуем вопрос о тривиальности построенного расслоения (серии расслоений) и получим условия разрешимости проблемы Римана—Гильберта.

Первый этап реализации этого плана состоит в построении на проколотой сфере Римана $B=\overline{\mathbb{C}}\setminus\{a_1, \ldots, a_n\}$ расслоения F с голоморфной связностью ∇, имеющей заданную монодромию (8.1).

Рассмотрим конечное покрытие пространства B связными односвязными окрестностями $\{U_i\}$ со связными односвязными пересечениями. Выберем в каждой окрестности по точке z_0^i и соединим точку z_0 с этими точками путями η_i. Внутри каждого множества $U_i\cup U_j$ с непустым пересечением $U_i\cap U_j$ соединим точки z_0^i и z_0^j путем δ_{ij}. Обозначим через g_{ij} матрицу

$$g_{ij} = \chi\big([\eta_i\circ\delta_{ij}\circ\eta_j^{-1}]\big),$$

где через $\xi\circ\zeta$ обозначается путь, являющийся результатом последовательного обхода путей ξ и ζ (предполагается, что конец пути ξ совпадает с началом пути ζ), а через ξ^{-1} — путь ξ, проходимый в обратном направлении. Гомотопический класс пути ξ обозначается через $[\xi]$, а гомотопический класс постоянной петли z_0 — через e.

Ясно, что $g_{ij}=(g_{ji})^{-1}$ и $g_{ij}\,g_{jk}\,g_{ki}=I$ в случае непустого пересечения $U_i\cap U_j\cap U_k$.

Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}\chi\big([\eta_i\circ\delta_{ij}\circ\eta_j^{-1}]\big)\chi\big([\eta_j\circ\delta_{jk}\circ\eta_k^{-1}]\big)\chi\big([\eta_k\circ\delta_{ki}\circ\eta_i^{-1}]\big) &=\\ =\chi\big([\eta_i\circ\delta_{ij}\circ\eta_j^{-1}\circ\eta_j\circ\delta_{jk}\circ\eta_k^{-1}\circ\eta_k\circ\delta_{ki}\circ\eta_i^{-1}]\big) &=\\ =\chi\big([\eta_i\circ\delta_{ij}\circ\delta_{jk}\circ\delta_{ki}\circ\eta_i^{-1}]\big) = \chi(e) = I&,\end{aligned}$$

так как петля $\delta_{ij}\circ\delta_{jk}\circ\delta_{ki}$ гомотопна постоянной петле.

Рассмотрим векторное расслоение F на B, построенное по покрытию $\{U_i\}$ и постоянному коциклу $\{g_{ij}\}$ (см. лекцию 2). Действуя так же, как в теореме 3.3, введем в расслоении F голоморфную связность ∇, задав ее нулевыми формами $\omega_i = 0$ в данном координатном описании расслоения F.

Предложение 8.1. *Построенная связность* ∇ *имеет заданную монодромию* (8.1).

Доказательство. Рассмотрим петлю γ, лежащую в B, и конечное покрытие этой петли окрестностями $U_1, \ldots, U_m$. Можно считать, что $z_0 \in U_1$ и $\eta_1 = z_0$. Согласно (7.16) монодромия связности вдоль пути γ равна $G_\gamma = (g_{1m} g_{mm-1} \cdots g_{21})^{-1}$.

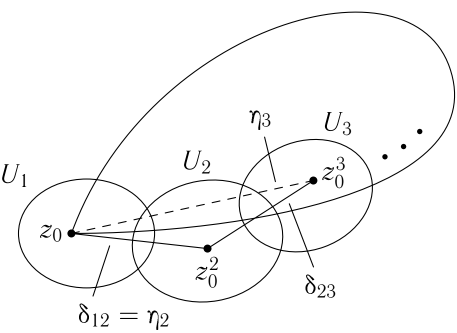

Рис. 5

Но в нашем случае

$$
\begin{aligned}
(g_{1m} g_{mm-1} \cdots g_{21})^{-1} &= g_{21}^{-1} \cdots g_{mm-1}^{-1} g_{1m}^{-1} = g_{12} \cdots g_{m-1m} g_{m1} = \\
&= \chi\big([\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \eta_2^{-1}]\big) \cdots \chi\big([\eta_{m-1} \circ \delta_{m-1m} \circ \eta_m^{-1}]\big) \chi\big([\eta_m \circ \delta_{m1} \circ \eta_1^{-1}]\big) = \\
&= \chi\big([\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \eta_2^{-1} \circ \ldots \circ \eta_{m-1} \circ \delta_{m-1m} \circ \eta_m^{-1} \circ \eta_m \circ \delta_{m1} \circ \eta_1^{-1}]\big) = \\
&= \chi\big([\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \ldots \circ \delta_{m-1m} \circ \delta_{m1} \circ \eta_1^{-1}]\big) = \chi([\gamma]),
\end{aligned}
$$

так как петля $\delta_{12} \circ \ldots \circ \delta_{m-1m} \circ \delta_{m1}$ гомотопна петле γ. □

Лемма 8.1. *Любое голоморфное векторное расслоение на проколотой сфере Римана B с голоморфной связностью, имеющей монодромию* (8.1), *эквивалентно расслоению* (F, ∇).

Доказательство. Докажем, что любые два расслоения (F^1, ∇^1) и (F^2, ∇^2), удовлетворяющие условиям леммы, эквивалентны.

Рассмотрим покрытие базы B связными односвязными множествами U_i, над которыми оба расслоения тривиальны, и соединим точку z_0

(принадлежащую множеству U_0) с каждой окрестностью U_j путем γ_j. Для каждого расслоения рассмотрим над U_0 базисы локальных горизонтальных сечений $({}^0s^i) = ({}^0s^i_1, \ldots, {}^0s^i_p)$, $i = 1, 2$, имеющие одну и ту же монодромию (т. е. такие базисы, для которых результат аналитического продолжения вдоль любой петли γ приводит к базису $({}^0s^i)G_\gamma^{-1}$ с одной и той же матрицей G_γ как для $i = 1$, так и для $i = 2$).

Обозначим через $({}^\alpha s^i)$ результат продолжения базиса $({}^0s^i)$ в окрестность U_α вдоль γ_α. Для окрестностей U_α и U_β с непустым пересечением имеем: $({}^\alpha s^i)\, g^i_{\alpha\beta} = ({}^\beta s^i)$ с постоянной матрицей $g^i_{\alpha\beta}$ (матрицы координат любых двух базисов горизонтальных сечений удовлетворяют одной и той же системе линейных уравнений и, стало быть, отличаются на постоянную матрицу). Но так как монодромии у исходных базисов при $i = 1, 2$ совпадают, то $g^1_{\alpha\beta} = g^2_{\alpha\beta}$ (докажите это).

Расслоения (F^1, ∇^1) и (F^2, ∇^2) эквивалентны, так как они имеют одинаковое координатное описание $(\{U_i\}, \{g_{ij}\})$ с нулевыми формами связностей ∇^1 и ∇^2. □

Следующий этап состоит в продолжении построенного расслоения на всю сферу Римана до расслоения с логарифмической связностью ∇', совпадающей с исходной связностью вне особых точек $a_1, \ldots, a_n$.

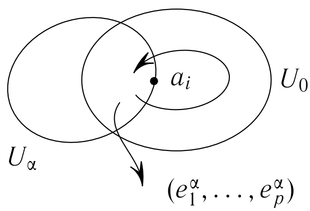

Рис. 6

Рассмотрим окрестность U_α нашего покрытия, граница которой содержит точку a_i. Рассмотрим базис горизонтальных сечений $(e^\alpha_1, \ldots, e^\alpha_p)$ связности ∇ над U_α. Поскольку монодромия связности ∇ по построению совпадает с (8.1), то при аналитическом продолжении вдоль малой петли δ_i, обходящей точку a_i против часовой стрелки, этот базис перейдет в базис $(e^\alpha_1, \ldots, e^\alpha_p)G_i$, где G_i — матрица, сопряженная к матрице монодромии в точке a_i (см. вторую часть лекции 7). Рассмотрим функцию $(z - a_i)^{-E_i}$ в окрестности U_α, точнее, некоторую ветвь этой функции.

Сечения $(\xi^0_1, \ldots, \xi^0_p) = (e^\alpha_1, \ldots, e^\alpha_p)(z - a_i)^{-E_i}$, где собственные значения матрицы $E_i = (1/2\pi i) \ln G_i$ нормализованы согласно неравенствам (4.4), образуют базис голоморфных сечений расслоения F над $O_i \setminus \{a_i\}$ (и, значит, расслоение F голоморфно тривиально над $O_i \setminus \{a_i\}$). Действительно, точно так же, как при доказательстве леммы 4.1, получаем, что при продолжении вдоль δ_i этот базис переходит в себя. Сечения $(\xi_1^0, \ldots, \xi_p^0)$ уже не являются горизонтальными, и форма связности ∇ в этом базисе согласно (3.5) имеет вид

$$\omega^{\xi} = E_i \frac{dz}{z - a_i}. \tag{8.4}$$

Продолжим расслоение F в точку a_i следующим образом. Рассмотрим цилиндр $O_i \times \mathbb{C}^p$ (тривиальное векторное расслоение над O_i) с базисом сечений $(s_1, \ldots, s_p)$, где $s_i = (z, e_i)$, а e_i — i-й элемент стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^p$.

Приклеим цилиндр $O_i \times \mathbb{C}^p$ к пространству расслоения F_E, отождествив при всех i сечения ξ_i^0 с s_i над $O_i \setminus \{a_i\}$ и продолжив склейку на $(O_i \setminus \{a_i\}) \times \mathbb{C}^p$ по линейности. Получим расслоение над $B \cup O_i$. Какой вид имеет координатное описание этого расслоения в окрестности точки a_i?

Обозначим окрестность O_i через U_0. Если в качестве исходного базиса $(e^{\alpha}) = (e_1^{\alpha}, \ldots, e_p^{\alpha})$ выбран базис, соответствующий исходной локальной тривиализации расслоения F, т. е. $(e^{\alpha}) g_{\alpha\beta} = (e^{\beta})$ для непустых $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$, то по построению $g_{0\alpha}(z) = (z - a_i)^{E_i}$. Для любой другой окрестности U_{β}, содержащей точку a_i в своем замыкании, $g_{0\beta}(z)$ является результатом аналитического продолжения функции $g_{0\alpha}(z)$ в U_{β} вдоль пути δ_i. После такого продолжения, вернувшись в U_{α}, получим вместо выбранной первоначально ветви $(z - a_i)^{E_i}$ ветвь $(z - a_i)^{E_i} G_i$, что и обеспечивает корректность продолжения расслоения. Проверьте это на координатном языке, показав, что набор $\{g_{0i}, g_{ij}\}$ действительно является коциклом.

Любой другой базис $(\tilde{e}^{\alpha})$ горизонтальных сечений связан с базисом (e^{α}) соотношением $(\tilde{e}^{\alpha}) = (e^{\alpha}) S_i$ и при продолжении вдоль δ_i переходит в $(\tilde{e}^{\alpha}) \widetilde{G}_i$, где $\widetilde{G}_i = S_i^{-1} G_i S_i$. Выберем такой базис $(\tilde{e}^{\alpha})$, для которого матрица $\widetilde{G}_i$ является верхнетреугольной. Обозначим через Λ_i диагональную матрицу с целочисленными элементами λ_i^j, $j = 1, \ldots, p$, образующими невозрастающую последовательность: $\lambda_i^j \geqslant \lambda_i^{j+1}$, $j = 1, \ldots, p-1$. Будем называть такие матрицы *допустимыми*.

Рассмотрим базис локальных сечений $(\xi^{\Lambda_i}) = (\tilde{e}^{\alpha})(z - a_i)^{-\widetilde{E}_i}(z - a_i)^{-\Lambda_i}$ расслоения F над $O_i \setminus \{a_i\}$ и продолжим расслоение F в точку a_i аналогично тому, как это было сделано выше, заменив сечения базиса (ξ^0) на (ξ^{Λ_i}). Форма ω^{Λ_i} связности ∇ в этом базисе согласно (3.5) имеет вид:

$$\omega^{\Lambda_i} = \left(\Lambda_i + (z - a_i)^{\Lambda_i} \widetilde{E}_i (z - a_i)^{-\Lambda_i}\right) \frac{dz}{z - a_i}. \tag{8.5}$$

Так как матрица $(z-a_i)^{\Lambda_i}\widetilde{E}_i(z-a_i)^{-\Lambda_i}$ голоморфна в точке a_i (см. лемму 5.1), то форма ω^{Λ_i} имеет логарифмическую особенность в этой точке.

Функция перехода $\tilde{g}_{0\alpha}$ построенного расслоения (в исходном координатном описании) записывается в виде

$$\tilde{g}_{0\alpha} = (z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{\widetilde{E}_i}S_i^{-1} = (z-a_i)^{\Lambda_i}S_i^{-1}(z-a_i)^{E_i}.$$

Рассмотрим набор $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, состоящий из допустимых матриц $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ (будем называть такой набор *допустимым*). Продолжим расслоение F в каждую точку a_i с помощью соответствующей матрицы Λ_i, получим голоморфное векторное расслоение F^Λ на всей сфере Римана с логарифмической связностью ∇^Λ. Обозначим множество всех таких расслоений через $\mathcal{F}$.

Расслоение F^0 со связностью ∇^0 (т. е. продолжение, построенное по набору $\Lambda_1 = \ldots = \Lambda_n = 0$) называется *каноническим продолжением* исходного расслоения (F, ∇).

Продолжение $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ расслоения (F, ∇) зависит также от выбора матриц $S_1, \ldots, S_n$ (от способа приведения матриц монодромии к верхней треугольной форме), от исходного координатного описания расслоения F и от выбора ветвей функций $(z-a_i)^{E_i}$. Последние две зависимости несущественны, так как они сводятся к соответствующему изменению матриц $S_1, \ldots, S_n$. Что касается зависимости расслоения от $S_1, \ldots, S_n$, то она действительно очень важна. Два расслоения, построенные по одному и тому же допустимому набору Λ, но по разным матрицам S_i, вообще говоря, могут быть не эквивалентны.

Однако в дальнейшем для краткости изложения мы будем опускать эту зависимость (постоянно «держа» ее в уме).

Все сказанное выше не относится к каноническому продолжению (F^0, ∇^0), которое зависит лишь от исходного представления (8.1).

Предложение 8.2. *Множество $\mathcal{F}$ содержит все голоморфные векторные расслоения с логарифмическими связностями на сфере Римана с данными особыми точками и данной монодромией.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное расслоение F' с логарифмической связностью ∇', имеющей данные особые точки и монодромию (8.1). Согласно лемме 8.1 $(F', \nabla')|_B = (F, \nabla)$. В базисе локальных голоморфных сечений (ξ) над окрестностью O_i точки a_i связность ∇' задает фуксову систему линейных дифференциальных уравнений (7.1). В пересечении O_i с окрестностью U_α, граница которой содержит в своем замыкании a_i, рассмотрим левелевскую фундаментальную матрицу

$$Y(z) = U(z)(z-a_i)^{A_i}(z-a_i)^{E_i}$$

пространства решений этой системы.

Базис (s^α) горизонтальных сечений связности ∇' над $O_i \cap U_\alpha$ с матрицей координат $Y(z)$ имеет вид $(s^\alpha) = (\xi)Y(z)$. Перейдем от локальной тривиализации (ξ) расслоения F' к $(\xi') = (\xi)U(z)$ (так как $U(z)$ голоморфно обратима в O_i в силу фуксовости системы, то элементы базиса (ξ') вновь будут голоморфными сечениями), получим

$$(\xi') = (s^\alpha)(z - a_i)^{-E_i}(z - a_i)^{-A_i}.$$

Значит, расслоение F' над O_i эквивалентно продолжению расслоения F, построенному по допустимой матрице $\Lambda_i = A_i$ (и некоторой матрице S_i). □

Поскольку фуксова система на сфере Римана с данными особыми точками и монодромией может быть рассмотрена как связность в некотором тривиальном расслоении, в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Представление* (8.1) *может быть реализовано в качестве представления монодромии некоторой фуксовой системы на сфере Римана с заданными особыми точками* $a_1, \ldots, a_n$ *тогда и только тогда*, *когда множество* $\mathcal{F}$ *расслоений*, *построенных по представлению* (8.1), *содержит хотя бы одно голоморфно тривиальное расслоение.*

Таким образом, мы свели проблему Римана—Гильберта к исследованию вопроса о голоморфной тривиальности некоторого расслоения (множества расслоений) на сфере Римана. Но какой вид имеет произвольное голоморфное векторное расслоение на сфере Римана? При каких условиях оно тривиально? На эти вопросы отвечает теорема Биркгофа—Гротендика, которая и станет предметом нашего рассмотрения на следующей лекции.

Упражнения

8.1. Покажите, что при $n = 2$ представление (8.1) для любого $p > 0$ всегда может быть реализовано как представление монодромии некоторого фуксового скалярного дифференциального уравнения порядка p.

8.2. Докажите, что для любого коммутативного представления (8.1) (т. е. такого представления, для которого группа $\operatorname{Im}\chi$ абелева) проблема Римана—Гильберта имеет положительное решение, явно построив соответствующую систему.

8.3. Расслоение (F, ∇), построенное в начале лекции по представлению (8.1), можно построить другим, бескоординатным способом.

Рассмотрим универсальное накрытие $\widetilde{B}$ проколотой сферы Римана B и точку $\tilde{z}_0$ такую, что $\pi(\tilde{z}_0) = z_0$, где $\pi\colon \widetilde{B} \to B$ — проекция (как и ранее, мы используем знак ˜ для точек, лежащих в накрытии). Отождествим фундаментальную группу $\pi_1(B, z_0)$ с группой Δ скольжений накрытия. Определим действие элемента σ из Δ справа на точки из $\widetilde{B}$ так же, как в упражнении 5.1: $\tilde{z} \cdot \sigma = \sigma^{-1}\tilde{z}$. Для любой функции $f(\tilde{z})$ на $\widetilde{B}$ положим $\sigma^* f(\tilde{z}) = f(\tilde{z} \cdot \sigma)$.

Тройка $(\widetilde{B}, \pi, B)$ может быть рассмотрена как главное расслоение с дискретной структурной группой Δ. Рассмотрим главное расслоение $P = (P_E, B, \pi_P, \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}))$, ассоциированное с построенным с помощью представления

$$\chi\colon\ \Delta \cong \pi_1(B, z_0) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}). \tag{8.6}$$

Тотальное пространство P_E этого расслоения биголоморфно эквивалентно пространству $\widetilde{B} \times \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})/\!\sim$, где отношение эквивалентности определяется следующим образом:

$$\forall \sigma \in \Delta \quad (\tilde{z} \cdot \sigma, \chi(\sigma^{-1})G) \sim (\tilde{z}, G).$$

Обозначим точки из P_E через $\langle \tilde{z}, G \rangle$ и рассмотрим голоморфное отображение

$$T\colon\ \widetilde{B} \to P_E, \quad T(\tilde{z}) = \langle \tilde{z}, I \rangle. \tag{8.7}$$

Докажите, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{B} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & P_E \arrow[dl, "\pi_P"] \\ & B. & \end{tikzcd} \tag{8.8}$$

8.4. Докажите, что для любого голоморфного сечения $U : B \to P_E$ имеет место тождество

$$T(\tilde{z}) = U(\pi(\tilde{z}))Y(\tilde{z}), \tag{8.9}$$

где $Y(\tilde{z})$ — голоморфная функция на $\widetilde{B}$ со значениями в $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$.

8.5. Докажите, что

$$\sigma^* Y(\tilde{z}) = Y(\tilde{z})\chi(\sigma), \quad \sigma \in \Delta. \tag{8.10}$$

8.6. Докажите, что матричная функция $Y(\tilde{z})$ является фундаментальной матрицей пространства решений некоторой системы $dy = \omega y$ на сфере Римана с заданными особыми точками и монодромией (8.1).

8.7. Докажите, что векторное расслоение, ассоциированное с построенным главным расслоением, эквивалентно расслоению F, построенному в начале лекции.

Лекция 9

Теорема Биркгофа—Гротендика

Теорема Биркгофа—Гротендика дает описание голоморфного векторного расслоения на сфере Римана.

Теорема 9.1. *Любое голоморфное векторное расслоение E на сфере Римана эквивалентно прямой сумме одномерных расслоений*

$$E \cong \mathcal{O}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(k_p), \tag{9.1}$$

где числа k_i целые, $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_p$ и расслоение $\mathcal{O}(k)$ задается следующим координатным описанием: $\mathcal{O}(k) = (\mathbb{C},\ \overline{\mathbb{C}} \setminus 0,\ \ g_{0\infty} = z^k)$.

Набор чисел $k_1, \ldots, k_p$ называется *типом расщепления* расслоения.

Обозначим через D_0, D_∞, K следующие подмножества на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant R\}, \quad D_\infty = \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \colon |z| \geqslant r\}, \quad K = D_0 \cap D_\infty,$$

где $r < R$.

Для множества M через $H(M)$ будем обозначать банахово пространство матричнозначных функций, голоморфных внутри M и непрерывных вплоть до границы M, а через $H^0(M)$ — подпространство голоморфно обратимых матричнозначных функций пространства $H(M)$. Для краткости мы будем называть такие функции голоморфными и, соответственно, голоморфно обратимыми в M.

Банаховы пространства $H(D_\infty)$, $H(D_0)$, $H(K)$ будут рассматриваться с нормой $\|N\| = \max_z \|N(z)\|$.

Рассмотрим вначале случай, когда расслоение E задано следующим координатным описанием $E = (D_0, D_\infty,\ g_{0\infty} = M(z))$.

Предложение 9.1. *Расслоение* $E = (D_0, D_\infty,\ g_{0\infty} = M(z))$ *эквивалентно прямой сумме* (9.1) *одномерных расслоений.*

Докажем это предложение в серии лемм.

Лемма 9.1. *Если в условиях предложения* 9.1 *дополнительно выполнено условие* $\|M - I\| < \varepsilon$ *для достаточно малого* $\varepsilon > 0$, *то расслоение E тривиально.*

Доказательство. Любая функция $G(z)$ из $H(K)$ раскладывается в ряд Лорана в K следующим образом:

$$G(z) = P_+ G(z) + P_- G(z),$$

где

$$P_+G(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=R} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

$$P_-G(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=r} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

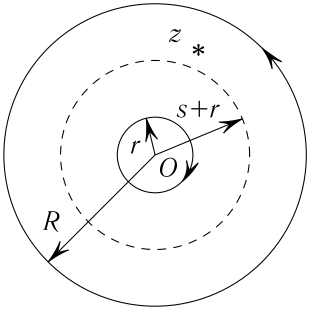

Рис. 7

Оператор P_+ отображает $H(K)$ в $H(D_0)$, а оператор P_- — в $H(D_\infty)$. Покажем, что эти операторы ограничены по норме.

Обозначим через s число $(R-r)/2$. Если

$$r \leqslant |z| < s + r,$$

то

$$\|P_+G(z)\| \leqslant \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=R} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right\| < \frac{\|G\|}{2\pi} \oint\limits_{|\zeta|=R} \frac{1}{s}|d\zeta| \leqslant \frac{\|G\|R}{s}.$$

Если же $s + r \leqslant |z| \leqslant R$, то

$$\|P_+G(z)\| \leqslant \|G\| + \|P_-G(z)\| \leqslant \|G\| + \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=r} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right\| < \frac{\|G\|(r+s)}{s}.$$

Таким образом,

$$\|P_+\| \leqslant \max\left(\frac{R}{s}, \frac{r+s}{s}\right) = \frac{2R}{R-r}.$$

Аналогичная оценка имеет место и для нормы оператора P_-.

Обозначим через $B(z)$ матрицу $I - M(z)$, тогда $\|B\| < \varepsilon$. Выберем

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\min(\|P_+\|^{-1}, \|P_-\|^{-1}).$$

Положим $W_1 = P_-B$ и $W_{n+1} = P_-(BW_n)$ для $n = 1, 2, \ldots$ Ряды

$$B_+ = P_+B + \sum_{n=1}^{\infty} P_+(BW_n) \quad \text{и} \quad B_- = -\sum_{n=1}^{\infty} W_n \tag{9.2}$$

сходятся в D_0 и в D_∞ соответственно и $\|B_+\| \leqslant 1/2$, $\|B_-\| \leqslant 1/2$. Поэтому $(I - B_+) \in H^0(D_0)$, $(I - B_-) \in H^0(D_\infty)$. Для функции $M(I - B_-)$ последовательно получаем

$$M(I - B_-) = (I - B)(I - B_-) = I - B_- - \left(B + \sum_{n=1}^{\infty} BW_n\right),$$

где

$$B+\sum_{n=1}^{\infty} BW_n = P_+\Big(B+\sum_{n=1}^{\infty} BW_n\Big)+P_-\Big(B+\sum_{n=1}^{\infty} BW_n\Big) =$$
$$= B_+ + P_-B+\sum_{n=1}^{\infty} P_-(BW_n) = B_+ + \sum_{n=1}^{\infty} W_n = B_+ - B_-.$$

Поэтому $M(I-B_-)=I-B_+$ и, следовательно, $M=UW$, где $U=I-B_+$, $W=(I-B_-)^{-1}$, что и означает голоморфную тривиальность расслоения E. □

Вторая часть доказательства состоит в замене функции $M(z)$ на некоторую рациональную функцию, что соответствует переходу от голоморфного расслоения к эквивалентному алгебраическому расслоению.

Лемма 9.2. *Для любой матричнозначной функции* $M(z)\in H^0(K)$ *найдутся матричнозначная рациональная функция* $F(z)\in H^0(K)$ *и такие функции* $W(z)\in H^0(D_\infty)$, $U(z)\in H^0(D_0)$, *что*

$$U(z)M(z) = F(z)W(z).$$

Доказательство. Приблизим функцию $M(z)$ в K равномерно матричнозначными рациональными функциями $B_N(z)$ с полюсами лишь в точках 0 и ∞. Для этой цели можно использовать части ряда Лорана функции $M(z)$ со степенями, бо́льшими некоторого числа $-N$ и меньшими числа N.

Выберем рациональную функцию $B(z)$ так, чтобы норма $\|MB^{-1}-I\|$ была мала и можно было применить к функции MB^{-1} лемму 9.1. Имеем

$$MB^{-1} = U_1W_1, \quad M = U_1W_1B,$$

где $U_1\in H^0(D_0)$, $W_1\in H^0(D_\infty)$.

Функцию W_1B можно равномерно приблизить рациональной функцией $H(z)$ в K, вновь использовав для этой цели подходящий кусок ряда Лорана, так, чтобы норма $\|H^{-1}W_1B-I\|$ была достаточно мала.

Вновь применяя лемму 9.1, получаем

$$H^{-1}W_1B = U_2W_2,$$

где функции U_2, W_2 принадлежат тем же пространствам, что и U_1, W_1. Поэтому

$$U_2 = H^{-1}W_1BW_2^{-1}, \quad M = U_1HU_2W_2 = U_1FW_2, \quad F = HU_2.$$

Из первого приведенного выше равенства следует, что матричнозначная функция $U_2(z)$ мероморфна в D_∞. С другой стороны, по построению функция U_2 голоморфно обратима в D_0. Таким образом, U_2 — рациональная функция.

Следовательно, $F(z)$ также рациональная функция. Положим $U^{-1} = U_1$, $W = W_2$. $\square$

Следующая лемма (которая называется леммой Соважа) завершает доказательство предложения 9.1.

Лемма 9.3. *Для любой мероморфной в D_0 матричнозначной функции $F(z)$, голоморфно обратимой в $D_0 \setminus \{0\}$, найдутся функции $U(z)$ и $W(z)$, голоморфно обратимые соответственно в D_0 и D_∞ и такие, что*

$$U(z)F(z) = z^{\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & k_p \end{pmatrix}} W(z), \tag{9.3}$$

где числа k_i целые и $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_p$.

Доказательство. Умножив, если необходимо, функцию F на z^{cI} с подходящим целым числом c, сведем доказательство леммы к случаю, когда функция F является голоморфной в D_0.

Пусть F уже имеет вид

$$F(z) = L(z) z^{\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & k_p \end{pmatrix}}$$

с некоторыми целыми $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_p$ и голоморфной матрицей $L(z)$. Если $\det L(0) \neq 0$, то доказывать нечего. Пусть $\det L(0) = 0$. Тогда найдется число $i < p$ такое, что первые i столбцов $m_1, \ldots, m_i$ матрицы $L(0)$ линейно независимы и

$$m_{i+1} = s_1 m_1 + \ldots + s_i m_i$$

для некоторых чисел $s_1, \ldots, s_i$. (Мы предполагаем, что $i > 0$, т. е. что $m_1 \neq 0$, ибо в противном случае можно сразу же увеличить число k_1, не прибегая к описанной ниже процедуре.)

Рассмотрим функцию

$$W_3(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -s_1 z^{k_{i+1}-k_1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -s_2 z^{k_{i+1}-k_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -s_i z^{k_{i+1}-k_i} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Лишь $(i+1)$-й столбец матрицы W_3 отличен от столбцов единичной матрицы.) Ясно, что матричнозначная функция $W_3(z)$ голоморфно обратима в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ и мероморфна в $\overline{\mathbb{C}}$.

Из приведенной конструкции немедленно следует, что

$$L(z)z^{\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & k_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & k_p\end{pmatrix}} W_3(z) = L'(z)z^{\begin{pmatrix} k'_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & k'_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & k'_p\end{pmatrix}},$$

где $k'_j = k_j$ для $j \neq i+1$ и $k'_{i+1} = k_{i+1}+1$, а матрица $L'(z)$ голоморфна в D_0 и голоморфно обратима в $D_0\setminus\{0\}$.

После умножения справа на подходящую постоянную матрицу можно добиться выполнения условия $k'_1 \geqslant \ldots \geqslant k'_p$. Так как $k'_1+\ldots+k'_p > k_1+\ldots+k_p$, то, повторив, если необходимо, описанную процедуру, получим через конечное число шагов разложение (9.3). □

Если $\det F(z) \neq 0$ в $D_0\setminus\{0\}$, то для завершения доказательства предложения 9.1 остается лишь применить лемму 9.3 к функции $F(z)$, построенной в лемме 9.2, и заметить, что в силу леммы 9.3 расслоение E эквивалентно расслоению с функцией перехода z^K, $K = \operatorname{diag}(k_1, \ldots, k_p)$, а последнее означает, что $E \cong \mathcal{O}(k_1)\oplus\ldots\oplus\mathcal{O}(k_p)$.

Если же $\det F(z) = 0$ для $z = b_1, \ldots, b_m$ из $D_0\setminus(K\cup\{0\})$, то вначале надо применить лемму 9.3 к каждой точке b_i (заменив z на $z-b_i$). При этом получим на i-м шаге эквивалентное расслоение с функцией склейки $F'_i(z) = L'(z)(z-b_i)^K$, которое, в свою очередь, эквивалентно расслоению с функцией склейки $F_i = L'(z)z^K$, так как $(z/(z-b_i))^K \in H^0(D_\infty)$. Но при этом уже $\det F_i(z)\neq 0$ для $z = b_1, \ldots, b_i$.

После m-го шага получим эквивалентное расслоение с функцией склейки F_m (которую мы вновь обозначим через F) с ненулевым определителем в $D_0\setminus\{0\}$. □

Обозначим через D_a и D_b два пересекающихся по множеству K' и не лежащих друг в друге круга с центрами в точках a, b и радиусами соответственно r_a и r_b. Для произвольного $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству $\varepsilon < (r_a + r_b - |a-b|)/2$, обозначим через D_a^ε, D_b^ε круги с центрами в тех же точках a и b и радиусами соответственно $r_a-\varepsilon$ и $r_b-\varepsilon$. Эти круги вновь имеют непустое пересечение.

Предложение 9.2. *Если голоморфное векторное расслоение E голоморфно тривиально над D_a и D_b, то оно голоморфно тривиально и над $D_a^\varepsilon \cup D_b^\varepsilon$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Расслоение E над $D = D_a\cup D_b$ может быть задано следующим координатным описанием: $E = (D_a, D_b, g_{ab} = M(z))$. Выберем число δ таким, чтобы выполнялось неравенство $2\delta < \varepsilon$, и обозначим пересечение $D_a^{i\delta}\cap D_b^{i\delta}$, $i = 1, 2$, через K_i.

Граница множества K_1 состоит из дуги γ_a граничной окружности круга D_a^δ, лежащей в D_b^δ, и из дуги γ_b граничной окружности круга D_b^δ, лежащей в D_a^δ. Обозначим через c и d точки пересечения этих дуг.

Воспользуемся обозначениями, введенными в начале лекции перед доказательством предложения 9.1, со следующим изменением. Будем обозначать через $H(M)$ пространство функций, голоморфных в M, непрерывных вплоть до границы M и удовлетворяющих в каждой точке замыкания множества M условию Гёльдера $\mathrm{Hol}(\mu)$ для любого $\mu < 1$. Напомним, что функция f удовлетворяет в точке z_0 условию Гёльдера $\mathrm{Hol}(\mu)$, если существует такая константа c, что

$$|f(z) - f(z_0)| < c|z - z_0|^\mu$$

для точек z, достаточно близких к z_0.

Для любой матричнозначной функции $G(z) \in H(K_1)$ рассмотрим функции $F_G(z) = G(c)(z-d)/(c-d) + G(d)(z-c)/(d-c)$ и $H(z) = G(z) - F_G(z)$. Заметим, что функция $H(z)$ обращается в нуль в точках c и d пересечения дуг.

Определим операторы $P_+ \colon H(K_1) \to H(D_a^\delta)$ и $P_- \colon H(K_1) \to H(D_b^\delta)$ следующим образом:

$$P_+G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_a} \frac{H(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + F_G(z), \qquad P_-G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_b} \frac{H(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Ясно, что

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_a\cup\gamma_b} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = P_+G(z) + P_-G(z) \quad \text{и} \quad P_+I = I, \qquad P_-I = 0.$$

Докажем, что образы операторов P_+ и P_- действительно принадлежат указанным выше пространствам. Для этого надо показать, что для каждой функции $G(z) \in H(K_1)$ функции $P_+G(z)$ и $P_-G(z)$ принадлежат классу $\mathrm{Hol}(\mu)$ в пространствах $\overline{D}_a^\delta$, $\overline{D}_b^\delta$ при любом $\mu < 1$.

Проверка в точках, отличных от точек c, d, не представляет никакого труда, так как, например, для $z \in \gamma_b$, $z \neq c$, $z \neq d$ функция $P_+G(z)$ голоморфна в окрестности этой точки и $P_-G(z) = G(z) - P_+G(z)$, а функция G принадлежит $\mathrm{Hol}(\mu)$ по условию.

Рассмотрим поведение функции $P_-G(z)$ в окрестности точки c в D_b^δ. Обозначим дугу γ_b через cd.

Для несобственного интеграла $A = \int\limits_{cd} \frac{H(\zeta)}{\zeta - c}\,d\zeta$, любого $\zeta_0 \in \gamma_b$ и любых фиксированных $0 < \mu < 1$ и $\mu' = \mu + \varepsilon < 1$ имеем:

$$A = \int\limits_{c\zeta_0} \frac{H(\zeta)}{\zeta - c}\, d\zeta + \int\limits_{\zeta_0 d} \frac{H(\zeta)}{\zeta - c}\, d\zeta,$$

$$\left| \int\limits_{c\zeta_0} \frac{H(\zeta)}{\zeta - c}\, d\zeta \right| \leqslant K \int\limits_{c\zeta_0} \frac{|c-\zeta|^{\mu'}}{|\zeta - c|} |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant K|c-\zeta_0|^{\mu} \int\limits_{c\zeta_0} \frac{1}{|\zeta - c|^{1-\varepsilon}} |d\zeta| \leqslant KC|c-\zeta_0|^{\mu},$$

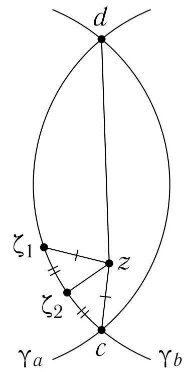

Рис. 8

так как последний интеграл сходится и, стало быть, ограничен некоторой константой $C(\varepsilon)$.

Для любого фиксированного z из D_b вблизи точки c рассмотрим точку ζ_1 на дуге γ_b, находящуюся от z на таком же расстоянии, что и c (если на дуге γ_b нет такой точки, то расстояние от z до этой дуги равно $|z-c|$, и все последующие оценки существенно упрощаются). Обозначим через ζ_2 середину дуги $c\zeta_1$.

Имеем:

$$\left| \int\limits_{c\zeta_1} \frac{H(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta \right| \leqslant \left| \int\limits_{c\zeta_1} \frac{H(\zeta_2) + H(\zeta) - H(\zeta_2)}{(\zeta - z)}\, d\zeta \right| \leqslant A_1 + A_2,$$

где

$$|A_1| = \left| \int\limits_{c\zeta_1} \frac{H(\zeta_2)}{(\zeta - z)}\, d\zeta \right| = \left| H(\zeta_2) \int\limits_{c\zeta_1} d\ln(\zeta - z) \right| \leqslant K|\zeta_2 - c|^{\mu} 2\pi \leqslant K_0 |c - z|^{\mu}.$$

Далее,

$$|A_2| \leqslant K_2 \int\limits_{c\zeta_1} \frac{|\zeta_2 - \zeta|^{\mu'}}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leqslant K_2 |\zeta_2 - \zeta_1|^{\mu} \int\limits_{c\zeta_1} \frac{1}{|\zeta - z|^{1-\varepsilon}} |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant K_2 C_2(\varepsilon) |c - z|^{\mu},$$

так как последний интеграл ограничен числом $C'|c-z|^{\varepsilon}$. (Проверьте этот факт, доказав его вначале для случая, когда дуга $c\zeta_1$ является отрезком, пользуясь тем, что $|z-\zeta_2| = |c-z|\cos\beta$ для некоторого угла β и $|\zeta - z| = |z-\zeta_2|/\cos\varphi$, где φ меняется от $-\beta$ до β; затем модифицируйте доказательство для случая, когда $c\zeta_1$ — дуга окружности).

Оценим следующую разность:

$$\left| \int\limits_{cd} \frac{H(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta - \int\limits_{cd} \frac{H(\zeta)}{(\zeta - c)}\, d\zeta \right| \leqslant \left| \int\limits_{c\zeta_1} \frac{H(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta \right| + \left| \int\limits_{c\zeta_1} \frac{H(\zeta)}{(\zeta - c)}\, d\zeta \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\zeta_1 d} \frac{H(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta - \int\limits_{\zeta_1 d} \frac{H(\zeta)}{(\zeta - c)}\, d\zeta \right| \leqslant K''(\varepsilon)|c-z|^{\mu} + \int\limits_{\zeta_1 d} \frac{|H(\zeta)|\,|z-c|}{|\zeta - z|\,|\zeta - c|} |d\zeta|.$$

Но для точек ζ, принадлежащих дуге $\zeta_1 d$, имеем

$$\frac{|H(\zeta)|\,|z-c|}{|\zeta-z|\,|\zeta-c|} < \frac{K|\zeta-c|^{\mu'}}{|\zeta-c|}\frac{|z-c|}{|\zeta-z|} = K\left|\frac{\zeta-c}{\zeta-z}\right|^{\mu}\frac{|z-c|}{|\zeta-z|^{1-\mu}}\frac{1}{|\zeta-c|^{1-\varepsilon}} =$$
$$= K|z-c|^{\mu}\left|\frac{\zeta-c}{\zeta-z}\right|^{\mu}\left|\frac{z-c}{\zeta-z}\right|^{1-\mu}\frac{1}{|\zeta-c|^{1-\varepsilon}} < \frac{K'|z-c|^{\mu}}{|\zeta-c|^{1-\varepsilon}},$$

так как $|\zeta-c|/|\zeta-z|<2$, $|z-c|<|\zeta-z|$ (напомним, что точка z находится вблизи точки c и $H(c)=0$). Поэтому

$$\int\limits_{\zeta_1 d}\frac{|H(\zeta)|\,|z-c|}{|\zeta-z|\,|\zeta-c|}|d\zeta| \leqslant \widetilde{K}|c-z|^{\mu},$$

поскольку интеграл $\int\limits_{cd}\frac{1}{|\zeta-c|^{1-\varepsilon}}|d\zeta|$, как уже было доказано, сходится.

Следовательно,

$$\left|P_-G(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_b}\frac{H(\zeta)}{(\zeta-c)}\,d\zeta\right| < K_c|z-c|^{\mu}.$$

Значит,

$$\lim_{z\to c,\ z\in D_b} P_-G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_b}\frac{H(\zeta)}{(\zeta-c)}\,d\zeta,$$

и $P_-G(z)$ принадлежит классу $\mathrm{Hol}(\mu)$ для любого $\mu<1$.

Заметим здесь, что если две функции принадлежат классу $\mathrm{Hol}(\mu)$, то же самое верно и для их произведения (докажите это).

Поскольку для точек z из меньшего пространства $D_b^{2\delta}$

$$|P_-G(z)| \leqslant \frac{S\|H\|_{D_b^{\delta}}}{\delta},$$

где

$$\|H\|_{D_b^{\delta}} < \max_{z\in D_b^{\delta}}(|G(z)|+|F_G(z)|) < \left(\frac{4r_b}{|c-d|}+1\right)\|G\|_{D_b^{\delta}},$$

а через S обозначена длина дуги γ_b, то получаем, что норма оператора $P'_- = T\circ P_-$, где T — оператор ограничения на подпространство $H(D_b^{2\delta})$, ограниченна. То же самое верно и для соответствующего оператора $P'_+ = T\circ P_+$.

Перейдем теперь собственно к доказательству предложения 9.2. Проведем его по той же схеме, что и доказательство предложения 9.1.

Доказательство леммы 9.1 переносится на наш случай без каких-либо изменений за исключением того, что ряды (9.2) будут сходиться в кругах $D_*^{2\delta}$ и, следовательно, расслоение с функцией склейки M, близкой к единице, окажется тривиальным не на $D_a \cup D_b$, а на меньшем множестве $D_a^\varepsilon \cup D_b^\varepsilon$, где число ε может быть выбрано сколь угодно малым.

Поскольку по теореме Рунге любая голоморфная в односвязной области функция может быть внутри этой области (т. е. на каждом компактном подмножестве области) равномерно приближена многочленами от z, действуя так же, как в лемме 9.2, заменим исходное расслоение на эквивалентное алгебраическое (с полиномиальной функцией склейки F) на множестве $D_a^\varepsilon \cup D_b^\varepsilon$.

Если $\det F(e) = 0$ для некоторой точки $e \in D_a \setminus D_b$, применим к функции $F(z)$ в окрестности точки e лемму 9.3, получим $F(z) = U(z)(z-e)^K W(z)$. Поскольку функция $(z-e)^K W(z)$ голоморфно обратима в D_b, замена F на рациональную функцию U не меняет типа исходного расслоения. Проделав описанную выше процедуру для всех точек из $D_a \setminus D_b$, в которых $\det F(z) = 0$, получим расслоение E' над $D_a^\varepsilon \cup D_b^\varepsilon$ с рациональной функцией склейки F', эквивалентное исходному.

Поскольку функция F' голоморфно обратима в D_a, то $F' = U(z)W(z)$, где $W(z) = I$, $U(z) = F'(z) \in H^0(D_a)$. Поэтому построенное расслоение E' голоморфно тривиально, а значит, голоморфно тривиально и исходное расслоение.

Заметим, что предложение остается верным для любых двух связных односвязных ограниченных множеств D_a, D_b со связным односвязным пересечением, граница которого является кусочно-гладкой кривой. Доказательство в этом случае почти дословно повторяет приведенное выше.

В качестве следствия получаем следующее важное утверждение.

Лемма 9.4. *Голоморфное расслоение на сфере Римана голоморфно тривиально над любым кругом D конечного радиуса.*

Доказательство. Для каждой точки z из D рассмотрим круговую окрестность U_z^1 с центром в z, над которой расслоение голоморфно тривиально. Обозначим через U_z^2 окрестность вдвое меньшего радиуса. Выберем из покрытия круга $\overline{D}$ окрестностями U_z^2 конечное подпокрытие $\{U_i^2\}$, $i = 1, \ldots, n$, и рассмотрим соответствующее покрытие $\{U_i^1\}$, в которое вписано $\{U_i^2\}$. Перенумеруем эти покрытия так, чтобы множества

$$\{W_i^j\}, \quad W_1^j = U_1^j, \quad \ldots, \quad W_k^j = \bigcup_{i=1}^k U_i^j, \quad j = 1, 2,$$

обладали следующим свойством: для любого k множества W_k^j и $W_k^j \cap U_{k+1}^j$ связны и односвязны.

Согласно предложению 9.2 расслоение тривиально над любым компактным подмножеством из W_2^1 и, стало быть, тривиально над окрестностью множества W_2^2. По замечанию к доказательству предложения 9.2 расслоение тривиально над некоторой окрестностью множества W_3^2 и т. д.

Через конечное число шагов получаем, что расслоение голоморфно тривиально над множеством W_n^2, которое содержит исходный круг D. $\square$

Ясно, что лемма верна также и для любого круга с центром в точке ∞ (не совпадающего с $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$). Для доказательства достаточно отобразить этот круг в круг конечного радиуса с помощью дробно-линейного отображения, тривиализовать расслоение над этим кругом и рассмотреть обратное отображение.

Доказательство теоремы 9.1. Из леммы 9.4 следует, что любое расслоение на сфере Римана допускает координатное описание $E = (D_0,\ D_\infty,\ g_{0\infty} = M(z))$ для некоторых r, R. Доказательство теоремы следует теперь из предложения 9.1. $\square$

Упражнения

9.1. Докажите, что любое голоморфное векторное расслоение на сфере Римана голоморфно тривиально над любым кольцом K.

9.2. Найдите тип расщепления (числа k_i в (9.1)) следующих расслоений:

1) F^1: $\left(O_0 = \mathbb{C},\ \ O_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0,\ \ g_{0\infty}^1 = \begin{pmatrix} z & a \\ 0 & 1/z \end{pmatrix}\right)$;

2) F^2: $\left(O_0 = \mathbb{C},\ \ O_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0,\ \ g_{0\infty}^2 = \begin{pmatrix} z & 0 \\ a & 1/z \end{pmatrix}\right)$, $a \in \mathbb{C}$.

При каких значениях числа a голоморфно тривиально расслоение 1, расслоение 2?

9.3. Докажите, что тип расщепления расслоения на сфере Римана определяется однозначно голоморфным типом расслоения, т. е. докажите, что если для одного и того же расслоения имеются два представления в виде прямой суммы (9.1) с числами $\{k_i\}$ и $\{k_i'\}$, то $k_i = k_i'$ для любого i.

9.4. Введем в множестве расслоений на сфере Римана понятие близости следующим образом. Будем говорить, что расслоения F^i, $i = 1,\ 2$, близки, если найдутся такие координатные описания $F^i = (\{U_j\},\ \{g_{jk}^i\})$ этих расслоений с одним и тем же покрытием $\{U_j\}$ базы и с функциями склейки $\{g_{jk}^i\}$, непрерывными вплоть до границ соответствующих множеств $U_j \cap U_k$, что $\|g_{jk}^1 - g_{jk}^2\| < \varepsilon$ для всех j, k и для некоторого малого $\varepsilon > 0$.

Докажите, что любое голоморфное расслоение, близкое к голоморфно тривиальному, голоморфно тривиально.

9.5. Докажите, что любое голоморфное расслоение, близкое к голоморфному расслоению с типом расщепления, удовлетворяющим условию $k_1 - k_p \leqslant 1$, имеет тот же тип расщепления.

9.6. Докажите, что утверждение предыдущего упражнения неверно для расслоений с типом расщепления, удовлетворяющим условию $k_1 - k_p > 1$:

1) приведите пример такого расслоения с типом расщепления $k_1 - k_p > 1$, для которого имеется сколь угодно близкое к нему голоморфно тривиальное расслоение;

2)* докажите, что для любого расслоения с типом расщепления $k_1 - k_p > 1$ найдется сколь угодно близкое к нему расслоение с типом расщепления $k_1 - k_p \leqslant 1$.

9.7. Докажите, что расслоение F на проколотой сфере Римана, построенное в лекции 8, голоморфно тривиально.

Лекция 10

Следствия теоремы Биркгофа—Гротендика

В этой лекции мы рассмотрим некоторые следствия теоремы Биркгофа—Гротендика применительно к проблеме Римана—Гильберта.

Введем в множестве расслоений на сфере Римана понятие близости следующим образом. Будем говорить, что расслоения F^i, $i = 1$, 2, близки, если найдутся такие координатные описания $F^i = (\{U_j\}, \{g^i_{jk}\})$ этих расслоений с одним и тем же покрытием $\{U_j\}$ базы и с функциями склейки $\{g^i_{jk}\})$, непрерывными вплоть до границ соответствующих множеств $U_j \cap U_k$, что $\| g^1_{jk} - g^2_{jk} \| < \varepsilon$ для всех j, k и для некоторого малого $\varepsilon > 0$.

Предложение 10.1. *Голоморфное расслоение, близкое к голоморфно тривиальному расслоению, голоморфно тривиально.*

Доказательство. Вернемся к доказательству предложения 9.2 и леммы 9.4. Из ограниченности операторов P'_- и P'_+ следует, что если функция склейки $M(z)$ достаточно близка к единичной, то в разложении $M = UW$ функции $U \in H^0(D^\varepsilon_a)$, $W \in H^0(D^\varepsilon_b)$ также близки по норме к матрице I. Последнее означает, что когда мы переходим к новой тривиализации расслоения, заменяя окрестности D_a, D_b на окрестность $D^\varepsilon_a \cup D^\varepsilon_b$, а функции склейки g_{a*}, g_{b*} — на $U^{-1} g_{a*}$, $W g_{b*}$, то функции склейки в новом координатном описании расслоения вновь будут близки к единичным.

Через конечное число шагов леммы 9.4 получим расслоение E предложения 9.1, в котором функция склейки $g_{0\infty}$ над каждым пересечением $U_i \cap U_j$ (в исходном координатном описании расслоения) равна $T g_{ij} S$, где g_{ij} — исходная функция склейки, а функции T, S являются произведениями конечного числа (не превосходящего количества элементов исходного покрытия) функций, близких к единичной матричной функции. Поэтому функция $g_{0\infty}$ близка к единичной в кольце K и, значит, согласно лемме 9.1 исходное расслоение тривиально. $\square$

Из доказанного предложения немедленно следует результат Лаппо-Данилевского по проблеме Римана—Гильберта, полученный им в 1928 году с помощью матричных рядов.

Теорема 10.1 (Лаппо-Данилевский). *Если матрицы монодромии $G_1, \ldots, G_n$ представления χ в* (8.1) *близки по норме к единичной матрице, то представление χ может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы.*

Доказательство. Рассмотрим построение расслоения F лекции 8. Так как покрытие, по которому строится это расслоение, конечно, то каждая из функций склейки g_{ij} (которых также конечное число) этого покрытия является произведением конечного числа экземпляров матриц $G_1, \ldots, G_n$. Значит, если эти матрицы достаточно близки к единичной, то же самое верно и для матриц g_{ij}.

С помощью матрицы S приведем матрицу E_i к блочному диагональному виду с единственным собственным значением для каждого блока и рассмотрим подходящую блочно-скалярную матрицу Λ_i такую, чтобы действительные части собственных значений матрицы $\widetilde{E}_i^0 = \Lambda_i + E_i$ лежали между $-1/2$ и $1/2$. Обозначим через E_i^0 матрицу $S\widetilde{E}_i^0 S^{-1}$. Тогда если матрица G_i близка к единичной, то матрица E_i^0 близка по норме к нулевой матрице.

Действуя так же, как при построении канонического продолжения расслоения (см. лекцию 8), продолжим расслоение F в особые точки с помощью функций склейки $g_{0\alpha}(z) = (z - a_i)^{E_i^0}$. Уменьшим элементы U_α исходного покрытия до U'_α так, чтобы они не содержали в своем замыкании особых точек (но так, чтобы вместе с окрестностями O_i особых точек по-прежнему образовывали покрытие сферы Римана). Теперь в замыкании каждого U'_α соответствующая функция $\ln(z - a_i)$ ограниченна, поэтому для достаточно близких к единичной матрице матриц G_i матричные функции $E_i^0 \ln(z - a_i)$ будут близки по норме к нулю в соответствующих U'_α, и, значит, функции склейки $g_{0\alpha}(z) = (z - a_i)^{E_i^0}$ будут близки к единичной матрице.

Утверждение теоремы следует теперь из предложения 10.1 и теоремы 8.1. $\square$

Вернемся к формулировке теоремы Биркгофа—Гротендика. Какая свобода имеется в определении типа расщепления расслоения (чисел $k_1, \ldots, k_p$)?

Лемма 10.1. *Тип расщепления голоморфного расслоения на сфере Римана определяется однозначно этим расслоением.*

Доказательство. Пусть расслоение E эквивалентно расслоениям $(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}} \setminus 0, z^{K^i})$, где $K^i = \operatorname{diag}(k_1^i, \ldots, k_p^i)$, $k_1^i \geqslant \ldots \geqslant k_p^i$, $i = 1, 2$. Тогда найдутся такие матричные функции $U(z)$ и $W(z)$, голоморфно обратимые соответственно в $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$, что

$$U(z)z^{K^1} = z^{K^2}W(z), \qquad W(z) = z^{-K^2}U(z)z^{K^1}.$$

Предположим, что $K^1 \neq K^2$. Пусть для определенности $k_j^1 = k_j^2$ для $j = 1, \ldots, l-1$ и $k_l^1 > k_l^2$. Так как для элементов u_{ij} и w_{ij} матриц U и W

имеет место соотношение $w_{ij} = z^{k_j^1 - k_i^2} u_{ij}$, то функции $w_{ij}(z)$ при $i \geqslant l$, $j \leqslant l$ в силу сделанного предположения голоморфны в нуле и обращаются там в нуль. Так как матрица W голоморфна вне нуля, то по теореме Лиувилля получаем $w_{ij}(z) \equiv 0$ при $i \geqslant l$, $j \leqslant l$. Но тогда $\det W(z) \equiv 0$ (так как при любом z строки этой матрицы с номерами $l, \ldots, p$ принадлежат подпространству размерности $p - l$ пространства $\mathbb{C}^p$ и, стало быть, являются линейно зависимыми), что противоречит голоморфной обратимости этой матричнозначной функции. Значит, $K^1 = K^2$. □

Тем самым, имеет место следующее утверждение.

Следствие 10.1. *Два расслоения на сфере Римана голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые типы расщепления.*

Расслоение E на сфере Римана голоморфно тривиально тогда и только тогда, когда его тип расщепления имеет вид $(0, \ldots, 0)$.

Из теоремы Биркгофа—Гротендика немедленно следует, что каждое расслоение на сфере Римана мероморфно тривиально. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Предложение 10.2. *У любого голоморфного векторного расслоения E на сфере Римана существует базис мероморфных сечений, голоморфный вне одной произвольной наперед заданной точки.*

Доказательство. Рассмотрим координатное описание (9.1) расслоения E и произвольную точку $b \in \mathbb{C}$. Функции $w_i = ((z-b)/z)^{k_i}$, $v_i = (z-b)^{k_i}$ голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$ и $\mathbb{C}$ соответственно (за исключением точки b), и столбцы матриц $W = \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_p)$, $V = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_p)$ задают координатное описание требуемого базиса (так как $V = g_{0\infty} W$). □

В качестве следствия получаем следующее утверждение, принадлежащее Племелю.

Теорема 10.2 (Племель). *Любое представление* (8.1) *может быть реализовано как представление монодромии некоторой системы с регулярными особыми точками, фуксовой во всех точках, кроме, быть может, одной, с любыми наперед заданными допустимыми нормированиями в фуксовых точках.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное расслоение E из построенного в лекции 8 множества $\mathcal{F}$ расслоений с данной монодромией и данными особыми точками. Положим $b = a_i$ и рассмотрим базис $(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ сечений этого расслоения, построенный в предыдущем предложении.

В базисе из этих сечений логарифмическая связность ∇ определяет систему линейных дифференциальных уравнений с данными особыми точками и монодромией, фуксову во всех особых точках и имеющую регулярную особенность в точке a_i.

Действительно, так как этот базис лишь мероморфен в точке a_i, то $(\xi^{\Lambda_i}) = (e)U(z)$, где (ξ^{Λ_i}) — голоморфный базис локальных сечений расслоения E над окрестностью O_i точки a_i, задающий продолжение расслоения F, построенного по монодромии (8.1), в точку a_i (см. лекцию 8), и матричная функция $U(z)$ мероморфна в a_i.

Поэтому согласно (3.10) и (8.5) форма ω_i связности имеет в O_i следующий вид:

$$\omega_i = dU\,U^{-1} + U\big(\Lambda_i + (z-a_i)^{\Lambda_i}\widetilde{E}_i(z-a_i)^{-\Lambda_i}\big)U^{-1}\frac{dz}{z-a_i}. \tag{10.1}$$

А фундаментальная матрица пространства решений этой системы (горизонтальных сечений связности) вблизи точки a_i записывается следующим образом:

$$Y_i(z) = U(z)(z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{\widetilde{E}_i}.$$

Поэтому точка a_i — регулярная особая для построенной системы. В силу произвольности выбранного расслоения из $\mathcal{F}$ нормирования в точках, отличных от a_i, могут быть выбраны произвольными допустимыми. □

Для расслоения $E \in \mathcal{F}$ можно выбрать эквивалентное координатное описание $(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_i, 0\}, (z-a_i)^K)$ с теми же числами k_i, что и в (9.1) (эквивалентность этого описания исходному устанавливается с помощью функций $U = I$ и $W = (z/(z-a_i))^K$). В соответствующем этой тривиализации базисе (e^i) локальных голоморфных сечений над O_i матрица ω_i связности ∇ имеет вид (10.1) с заменой матрицы U на голоморфно обратимую матрицу V, где $(\xi^{\Lambda_i}) = (e^i)V(z)$. Поэтому в глобальном базисе $(e^i)(z-a_i)^K$ мероморфных сечений расслоения E (который голоморфен вне a_i) связность ∇ в окрестности O_i будет иметь вид

$$\omega_i' = -\frac{K}{z-a_i}\,dz + (z-a_i)^{-K}\omega_i(z-a_i)^K, \tag{10.2}$$

а фундаментальная матрица горизонтальных сечений связности вблизи точки a_i (фундаментальная матрица пространства решений соответствующей системы) запишется следующим образом:

$$Y_i(z) = (z-a_i)^{-K}V(z)(z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{\widetilde{E}_i}. \tag{10.3}$$

В качестве немедленного следствия получаем следующее важное утверждение.

Предложение 10.3. *Степень $c_1(E)$ расслоения E равна сумме чисел k_i, определяющих тип расщепления этого расслоения.*

Доказательство. Согласно определению 7.1 и следствию 7.1

$$c_1(E) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^j.$$

С другой стороны, для построенной системы с матрицей (10.2)

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{a_i} \operatorname{tr} \omega_i' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j - \operatorname{tr} K,$$

так как эта система фуксова в точках, отличных от a_i (см. доказательство теоремы 7.1), и ее фундаментальная матрица в точке a_i имеет вид (10.3). Поэтому $\operatorname{tr} K = c_1(E)$. □

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма, связывающая тип расщепления расслоения с показателями системы в особой точке.

Лемма 10.2. *Для любой голоморфно обратимой в нуле матричнозначной функции $U(z)$ и для любой диагональной целочисленной матрицы K найдется многочлен $\Gamma(z)$ от $1/z$ с матричными коэффициентами, голоморфно обратимый вне точки нуль и такой, что*

$$\Gamma(z) z^K U(z) = \widetilde{U}(z) z^D, \tag{10.4}$$

где матрица $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_p)$ может быть получена из матрицы K некоторой перестановкой ее диагональных элементов, а $\widetilde{U}(z)$ голоморфно обратима в нуле.

Доказательство. Для доказательства леммы нам понадобится следующее утверждение технического характера.

Лемма 10.3. *Пусть матричнозначная функция $W(z)$ размера $(l,\ p-l)$ мероморфна в точке нуль и голоморфна в некоторой проколотой окрестности $\dot{O}$ этой точки, а матричнозначная функция $V(z)$ размера $(p-l,\ p-l)$ голоморфно обратима в полной окрестности O нуля. Тогда найдется такая матричная функция $\Gamma(z)$, мероморфная на всей сфере Римана и голоморфно обратимая вне точки нуль, что*

$$\Gamma(z) \begin{pmatrix} W(z) \\ V(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W'(z) \\ V(z) \end{pmatrix}, \tag{10.5}$$

где матричнозначная функция $W'(z)$ голоморфна в нуле и $W'(0) = 0$.

Доказательство. Если матрица $W(z)$ имеет полюс порядка m в нуле, то она может быть представлена в следующем виде (в O):

$$z^m W(z) = Q^1(z) + z^{m+1} H^1(z), \tag{10.6}$$

где $Q^1(z)$ — матричный многочлен от z степени m и матрица $H^1(z)$ голоморфна в нуле. Представим $V(z)$ в аналогичном виде:

$$V(z) = Q^2(z) + z^{m+1} H^2(z).$$

Тогда $\det Q^2(0) \neq 0$ согласно условию леммы. Поэтому найдется многочлен $R(z)$ от z степени m такой, что

$$R(z)Q^2(z) = -Q^1(z) + z^{m+1}H^3(z) \tag{10.7}$$

с голоморфной матричной функцией $H^3(z)$. Действительно, пусть $Q^i(z) = \sum_{j=0}^{m} Q^i_j z^j$, $i = 1, 2$, тогда $R(z) = \sum_{j=0}^m R_j z^j$, где R_j однозначно определяются из нижнетреугольной системы

$$\begin{cases} R_0 Q_0^2 & = -Q_0^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ R_0 Q_m^2 + \ldots + R_m Q_0^2 & = -Q_m^1 \end{cases}$$

с $\det Q_0^2 = \det Q^2(0) \neq 0$. Рассмотрим матричную функцию

$$\Gamma(z) = \begin{pmatrix} I^l & z^{-m}R(z) \\ 0 & I^{p-l} \end{pmatrix}. \tag{10.8}$$

Из (10.6), (10.7) немедленно получаем (10.5). □

Замечание 10.1. Если в предыдущей лемме переставить местами W и V, то утверждение леммы останется верным. Для доказательства надо лишь заменить матрицу Γ на следующую матрицу:

$$\Gamma(z) = \begin{pmatrix} I^{p-l} & 0 \\ z^{-m}R(z) & I^l \end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

Перейдем к доказательству основной леммы. Без ограничения общности можно считать, что

$$K = \operatorname{diag}(k_1 I^{m_1}, \ldots, k_t I^{m_t}),$$

где $k_1 > \ldots > k_t$ и I^j — единичная матрица размера (j, j).

Вначале рассмотрим случай, когда все главные миноры матрицы $U(z)$ не равны нулю в точке нуль. В этом случае мы дополнительно докажем, что в (10.4) $D = K$.

Будем доказывать лемму по индукции по числу t скалярных блоков матрицы K. Для $t = 1$ можно взять $\Gamma(z) = I$. Пусть утверждение леммы доказано для числа блоков, меньшего t. Докажем его для случая t блоков.

Преобразуем выражение $z^K U(z)$ следующим образом:

$$z^K U(z) = z^{K'} U'(z) z^{K''},$$

где

$$K' = \operatorname{diag}((k_1 - k_{t-1})I^{m_1}, \ldots, (k_{t-2} - k_{t-1})I^{m_{t-2}}, 0 \cdot I^{m_{t-1}}, 0 \cdot I^{m_t}),$$
$$K'' = \operatorname{diag}(k_{t-1} I^{n_1}, k_t I^{m_t}), \quad n_1 = p - m_t,$$

у матрицы $U'(z)$ последние m_t столбцов голоморфны в нуле, а матрица $U^t(z)$, составленная из первых $p-m_t$ столбцов матрицы $U'(z)$, имеет вид

$$U^t = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix},$$

где, в свою очередь, матрица V является голоморфной квадратной матрицей размера $(n_1 \times n_1)$ и согласно предположению $\det V(0) \neq 0$, а матрица $W(z)$ имеет в нуле полюс порядка $m = k_{t-1} - k_t$.

Применим к паре V, W лемму 10.3 и замечание 10.1 с матрицей $\Gamma_t(z)$ вида (10.9) с $m = k_{t-1} - k_t$, $l = m_t$. Тогда

$$\Gamma_t(z) \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ W' \end{pmatrix}$$

с голоморфной матрицей $W'(z)$.

Заметим, что поскольку первые $p - m_t$ строк матрицы T, составленной из последних m_t столбцов матрицы U', имеют в точке 0 нуль порядка $k_{t-1} - k_t$, матрица $U'' = \Gamma_t(z) U'$ будет голоморфна в нуле.

Из приведенного построения немедленно следует, что матрица $\Gamma'_t(z) = z^{K'} \Gamma_t z^{-K'}$ голоморфно обратима вне нуля.

Согласно построению получаем

$$\Gamma'_t(z) z^K U(z) = z^{K'} \Gamma_t z^{-K'} z^{K'} U'(z) z^{K''} = z^{K'} U''(z) z^{K''},$$

где матрица $U''(z)$ голоморфно обратима в нуле и все ее главные миноры не обращаются в нуль в точке 0 (докажите это).

Согласно предположению индукции существует матрица $\Gamma'(z)$ такая, что

$$\Gamma'(z) z^{K'} U''(z) = \widetilde{U}(z) z^{K'},$$

где матрица $\widetilde{U}(z)$ голоморфно обратима в нуле.

Обозначим через $\Gamma(z)$ матрицу $\Gamma(z) = \Gamma'(z)\Gamma'_t(z)$. Тогда

$$\Gamma(z) z^K U(z) = \Gamma'(z) z^{K'} U''(z) z^{K''} = \widetilde{U}(z) z^{K'} z^{K''} = \widetilde{U}(z) z^K.$$

Если некоторые из главных миноров матрицы $U(z)$ зануляются в нуле, то найдется постоянная невырожденная матрица S, умножение на которую справа сводится к перестановке столбцов матрицы $U(z)$ и такая, что все главные миноры новой матрицы $U' = US$ будут отличны от нуля в точке 0. Применяя полученный выше результат к матрице U', получаем

$$\Gamma(z) z^K U'(z) = \widetilde{U}'(z) z^K,$$

поэтому

$$\Gamma(z) z^K U(z) = \Gamma(z) z^K U'(z) S^{-1} = \widetilde{U}'(z) z^K S^{-1} = \\ = \widetilde{U}'(z) S^{-1} z^{SKS^{-1}} = \widetilde{U}(z) z^D. \quad \square$$

Следующий результат также обычно приписывается Племелю.

Теорема 10.3. *Если хотя бы одна из матриц G_i представления* (8.1) *приводится к диагональному виду, то это представление может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы.*

Доказательство. Пусть матрица G_i диагонализируема. Согласно теореме 10.2 представление (8.1) может быть реализовано системой, фуксовой вне точки a_i и такой, что фундаментальная матрица пространства решений этой системы имеет в окрестности точки a_i вид (10.3) с диагональной матрицей E_i и с нулевой матрицей Λ_i.

Применим к матрицам $-K$, $V(z)$ лемму 10.2. Согласно этой лемме найдется такая матричная функция $\Gamma(z)$, голоморфно обратимая вне точки a_i, что

$$\Gamma(z)(z-a_i)^{-K}V(z) = \widetilde{V}(z)(z-a_i)^{D},$$

где D — целочисленная диагональная матрица, а $\widetilde{V}(z)$ голоморфно обратима в нуле.

Перейдем от построенной системы к системе с фундаментальной матрицей $Y' = \Gamma Y(z)$ (то есть перейдем от базиса $(e^i)(z-a_i)^K$ к базису $(e^i)(z-a_i)^K\Gamma^{-1}$ и рассмотрим систему, задаваемую связностью ∇ в этом базисе). Новая система будет по-прежнему фуксовой во всех точках, отличных от a_i (так как матрица замены $\Gamma(z)$ голоморфно обратима вне этой точки), а в точке a_i ее фундаментальная матрица согласно построению примет вид

$$Y_i'(z) = \Gamma(z)Y_i(z) = \widetilde{V}(z)(z-a_i)^{D+E_i},$$

так как матрицы D и E_i диагональные. Поскольку матрица $\widetilde{V}(z)$ голоморфно обратима в точке a_i, построенная система фуксова в нуле (в чем можно убедиться непосредственным вычислением матрицы коэффициентов $\omega = (dY_i')Y_i'^{-1}$; проверьте это). □

Одним из важных результатов по проблеме Римана—Гильберта является следующая теорема, доказанная независимо Болибрухом и Костовым[1].

[1] А. А. Болибрухом было получено еще одно интересное достаточное условие положительной разрешимости проблемы Римана—Гильберта: *представление монодромии скалярного фуксова уравнения* (4.7) *может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы* (*с теми же особенностями*). Оно не было включено автором в курс лекций ввиду сложности существовавшего на тот момент доказательства. Недавно получено его значительное упрощение [10], которое мы поместили в настоящем издании в качестве приложения 1. — *Прим. ред.*

Теорема 10.4. *Любое неприводимое представление* (8.1) *может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы.*

(Напомним, что представление называется *неприводимым*, если у матриц монодромии этого представления нет общего инвариантного подпространства, отличного от нулевого подпространства и от всего пространства.)

Мы докажем эту теорему в следующей лекции, а пока используем ее для доказательства следующего результата, принадлежащего Деккерсу.

Теорема 10.5. *Любое представление* (8.1) *размерности два может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы.*

Доказательство. Если представление (8.1) неприводимо, то эта теорема следует из предыдущей.

Пусть представление (8.1) приводимо. Тогда все матрицы монодромии этого представления могут быть одновременно приведены к верхнему треугольному виду (так как они имеют размер 2×2, то приводимость означает наличие общего собственного вектора у этих матриц). Если хотя бы у одной из этих матриц диагональные элементы различны, то она диагонализируема, и настоящая теорема следует из теоремы 10.3. В противном случае все матрицы монодромии коммутируют, и требуемая фуксова система выписывается по этим матрицам следующим образом:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{E_i}{z - a_i} + \frac{E_n + D}{z - a_n}\right) y,$$

где $D = -\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$. □

Упражнения

10.1. Докажите, что степень любого голоморфного подрасслоения тривиального голоморфного векторного расслоения на сфере Римана не превосходит нуля.

10.2. Докажите, что любое голоморфное подрасслоение степени ноль тривиального голоморфного векторного расслоения на сфере Римана тривиально.

Лекция 11

Контрпример к проблеме Римана—Гильберта

Вернемся к теореме Биркгофа—Гротендика. Какие подрасслоения может иметь тривиальное расслоение E на сфере Римана? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Предложение 11.1. *Степень любого подрасслоения F тривиального голоморфного векторного расслоения E на сфере Римана не превосходит нуля.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда согласно теореме 9.1 у расслоения F, а значит, и у расслоения E есть одномерное подрасслоение F^1 степени $c_1(F^1) = k_1$, большей нуля.

Согласно лемме 9.4 и определению 2.4 расслоение E может быть задано следующим координатным описанием: ($\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$, $g_{0\infty}$), где

$$g_{0\infty}(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & v(z) \\ 0 & M(z) \end{pmatrix},$$

а $M(z)$ — функция склейки факторрасслоения $F' = E/F^1$.

Функции $(1, 0, \ldots, 0)^t$, $(z^{k_1}, 0, \ldots, 0)^t$, где ^{t} означает транспонирование, задают координатное описание глобального ненулевого голоморфного сечения s расслоения E, зануляющегося в нуле. Но такого сечения у тривиального расслоения быть не может. Действительно, обозначим через f вектор-функцию координат этого сечения в глобальном базисе голоморфных сечений расслоения E (который существует в силу тривиальности расслоения E). Тогда f — голоморфная функция на всей сфере Римана, зануляющаяся в нуле, т. е. по теореме Лиувилля $f \equiv 0$ и, стало быть, сечение s тождественно равно нулю, что противоречит его построению. Значит, $k_1 \leqslant 0$, и степень подрасслоения F не превосходит нуля. □

Следствие 11.1. *Каждое подрасслоение степени нуль тривиального голоморфного векторного расслоения тривиально.*

Доказательство. Если это подрасслоение нетривиально, то его тип расщепления содержит положительное число $k_1 > 0$, что означает наличие одномерного подрасслоения положительной степени. Но последнее невозможно согласно предложению 11.1. □

Доказанное в предложении 11.1 утверждение является частным случаем более общего утверждения, тесно связанного с понятием стабильности расслоения, которое было введено Мамфордом в 1950-х годах.

Для расслоения E обозначим через $\varkappa(E)$ число $c_1(E)/\operatorname{rg}(E)$, где через $\operatorname{rg}(E)$ обозначен ранг расслоения E. Это число называется *наклоном* расслоения E.

Определение 11.1. Расслоение E называется *стабильным* (*полустабильным*), если для любого подрасслоения $F \subset E$ имеет место неравенство $\varkappa(F) < \varkappa(E)$ ($\varkappa(F) \leqslant \varkappa(E)$).

На сфере Римана, очевидно, нет стабильных расслоений. Действительно, для любого расслоения E можно рассмотреть его одномерное подрасслоение F из разложения (9.1) с максимальным k_1. Ясно, что

$$\varkappa(F) = k_1 \geqslant \frac{k_1 + \ldots + k_p}{p} = \varkappa(E).$$

Что касается полустабильных расслоений, то имеет место следующее утверждение.

Предложение 11.2. *Голоморфное векторное расслоение E на сфере Римана полустабильно тогда и только тогда, когда его тип расщепления имеет вид* $(k, \ldots, k)$.

Расслоение E тривиально тогда и только тогда, когда оно полустабильно и его степень равна нулю.

Доказательство. Если для типа расщепления расслоения E имеет место неравенство $k_l > k_{l+1}$ для некоторого l, то

$$\frac{k_1 + \ldots + k_l}{l} = \frac{1}{p}\left(k_1 + \ldots + k_l + \frac{p-l}{l}(k_1 + \ldots + k_l)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{k_1 + \ldots + k_l + k_l(p-l)}{p} > \frac{k_1 + \ldots + k_l + k_{l+1} + \ldots + k_p}{p}.$$

Но последнее неравенство означает, что наклон расслоения, являющегося прямой суммой первых l одномерных расслоений из (9.1), больше наклона всего расслоения E, что противоречит полустабильности этого расслоения.

Если расслоение E имеет тип расщепления $(k, \ldots, k)$, то любое его подрасслоение F обязано иметь тип расщепления $(k'_1, \ldots, k'_l)$, где $k'_i \leqslant k$, $i = 1, \ldots, l$. Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство предложения 11.1 с заменой неравенства $k_1 > 0$ на $k_1 > k$. У расслоения E в этом случае есть глобальный базис сечений, голоморфный вне нуля и такой, что эти сечения, поделенные на z^k, образуют базис в слое расслоения E над точкой нуль. Поэтому по тем же соображениям, что и в предложении 11.1, функция f координат голоморфного ненулевого сечения s, имеющего нуль порядка $k_1 > k$ в нуле, тождественно равна нулю, что вновь приводит к противоречию, означающему, что все k'_i не превосходят числа k. Поэтому наклон подрасслоения F не превосходит наклона исходного расслоения.

Вторая часть утверждения является непосредственным следствием первой части. $\square$

Как видно из предыдущего предложения, понятия стабильности и полустабильности расслоения на сфере Римана не слишком содержательны. Однако вспомним, что в проблеме Римана—Гильберта мы имеем дело не просто с расслоением, а с расслоением E, в котором имеется логарифмическая связность ∇. Будем говорить, что подрасслоение F расслоения E *стабилизируется* связностью ∇, если $\nabla(\Gamma(F)) \subset \Gamma(\tau_B^* \otimes F)$, другими словами, если связность переводит локальные сечения подрасслоения F в локальные сечения того же подрасслоения с коэффициентами в дифференциальных 1-формах.

Определение 11.2. Пара (E, ∇) называется *стабильной* (*полустабильной*), если для любого подрасслоения $F \subset E$, которое стабилизируется связностью ∇, имеет место неравенство $\kappa(F) < \kappa(E)$ ($\kappa(F) \leqslant \kappa(E)$).

Следующее утверждение играет решающую роль в доказательстве различных достаточных условий положительной разрешимости проблемы Римана—Гильберта.

Теорема 11.1. *Рассмотрим расслоение $E \in \mathcal{F}$ с логарифмической связностью ∇, построенное по представлению* (8.1) *с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$. Если пара (E, ∇) полустабильна, то для типа расщепления этого расслоения имеют место следующие неравенства*:

$$k_i - k_{i+1} \leqslant n - 2, \quad i = 1, \ldots, p-1. \tag{11.1}$$

Доказательство. Рассмотрим базис мероморфных сечений расслоения E, голоморфный вне точки a_i и такой, что форма ω' связности ∇ имеет в этом базисе вблизи точки a_i вид (10.2):

$$\omega' = -\frac{K}{z - a_i}\,dz + (z - a_i)^{-K}\omega(z - a_i)^K,$$

а фундаментальная матрица пространства решений системы

$$dy = \omega' y$$

в окрестности точки a_i представляется в виде (10.3):

$$Y_i(z) = (z - a_i)^{-K} V(z)(z - a_i)^{\Lambda_i}(z - a_i)^{E_i},$$

где форма ω имеет логарифмическую особенность в a_i. Напомним, что набор диагональных элементов матрицы K совпадает с типом расщепления расслоения E.

Предположим, что для некоторого l имеет место неравенство $k_l - k_{l+1} > n - 2$. Так как элементы ω_{mj} и u_{mj} матричных дифференциальных форм ω' и ω при $m \neq j$ связаны соотношением

$$\omega_{mj}(z) = u_{mj}(z)(z - a_i)^{-k_m + k_j},$$

то для $m > l$, $j \leqslant l$ согласно предположению получаем $k_j - k_m > n-2$. Поэтому порядки нулей дифференциальных форм $\omega_{mj}(z)$ с указанными индексами в точке a_i больше числа $n-3$, в то время как сумма порядков полюсов в особых точках, отличных от a_i, не превосходит числа $n-1$ (так как форма ω' имеет логарифмические особенности в этих точках). Так как форма ω' голоморфна в бесконечности, то ее коэффициенты имеют нуль порядка 2 в этой точке. Окончательно получаем, что для коэффициентов форм $\omega_{mj}(z)$ с указанными индексами сумма порядков нулей на сфере Римана больше числа $n-1$, в то время как сумма порядков полюсов не превосходит этого числа. Значит, эти формы тождественно равны нулю, и, стало быть, форма ω' имеет вид:

$$\omega' = \begin{pmatrix} \omega^1 & * \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

где размер матричной формы ω^1 равен $(l,\, l)$.

Поэтому существует такая постоянная невырожденная матрица S, что

$$Y_0(z) = Y_i(z)S = (z-a_i)^{-K}U_0(z),$$

где, в свою очередь,

$$U_0 = \begin{pmatrix} U^1 & * \\ 0 & U^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим векторное расслоение F^1 ранга l со связностью ∇^1, форма связности которой в выбранном базисе сечений совпадает с ω^1. Согласно построению связность ∇ стабилизирует подрасслоение F^1 и совпадает на нем со связностью ∇^1, а степень подрасслоения F^1 равна $k_1 + \ldots + k_l$. Поэтому, действуя так же, как при доказательстве предложения 2, получаем

$$\kappa(F^1) = \frac{k_1 + \ldots + k_l}{l} > \frac{k_1 + \ldots + k_p}{p} = \kappa(E).$$

Но полученное неравенство противоречит полустабильности пары $(E,\, \nabla)$. Таким образом неравенство (11.1) действительно имеет место. □

Если представление (8.1) неприводимо, то любое из построенных расслоений $E \in \mathcal{F}$ с логарифмической связностью ∇ стабильно как пара $(E,\, \nabla)$ в смысле определения 11.2 (так как никакое подрасслоение не стабилизируется в этом случае связностью, ибо последнее означало бы, что у всех матриц монодромии есть общее инвариантное подпространство). Поэтому для типов расщеплений всех расслоений $E \in \mathcal{F}$, построенных по неприводимому представлению, имеют место неравенства (11.1).

Впрочем, к тому же выводу можно прийти, не используя понятие стабильности. Действительно, если неравенство (11.1) не выполняется, то доказательство теоремы 11.1 приводит к системе (11.2), монодромия которой, очевидно, приводима (так как она «содержит» монодромию подсистемы с матрицей ω^1), что противоречит исходному предположению.

Теперь мы имеем все необходимое для доказательства теоремы 10.4.

Доказательство теоремы 10.4. Рассмотрим векторное расслоение E из $\mathcal{F}$, построенное по неприводимому представлению (8.1) и матрицам $\Lambda_2 = \ldots = \Lambda_n = 0$, $\Lambda_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\lambda_i - \lambda_{i+1} > (n-2)(p-1)$, $i = 1, \ldots, p-1$.

Вновь рассмотрим базис мероморфных сечений расслоения E, голоморфный вне точки a_1 и такой, что фундаментальная матрица пространства решений системы

$$dy = \omega y,$$

построенной по логарифмической связности ∇, в окрестности точки a_1 имеет вид

$$Y_1(z) = (z-a_1)^{-K} V(z)(z-a_1)^{\Lambda_1}(z-a_1)^{E_1}$$

и эта система является фуксовой вне точки a_1.

Согласно лемме 10.2 существует такая матрица $\Gamma(z)$, голоморфно обратимая вне точки a_1, что

$$\Gamma(z)(z-a_1)^{-K} V(z) = U(z)(z-a_1)^{D},$$

где матрица D получена из $-K$ некоторой перестановкой диагональных элементов, а матрица $U(z)$ голоморфно обратима в точке a_1. Так как для элементов матрицы K имеют место неравенства (11.1), то для любых соседних диагональных элементов матрицы D получаем $|d_i - d_{i+1}| \leqslant (n-2)(p-1)$. Поэтому матрица $H_1 = D + \Lambda_1$ допустима, т. е. для диагональных элементов h_i этой матрицы выполнено условие $h_i > h_{i+1}$, $i = 1, \ldots, p-1$.

Перейдем от построенной системы с матрицей коэффициентов ω и фундаментальной матрицей Y_1 к системе с фундаментальной матрицей $Y_1' = \Gamma(z) Y_1$.

Так как матрица $\Gamma(z)$ голоморфно обратима вне точки a_1, новая система будет вновь фуксовой вне a_1. В окрестности точки a_1 матрица Y_1' будет иметь вид

$$Y_1' = \Gamma(z) Y_1 = U(z)(z-a_1)^{D}(z-a_1)^{\Lambda_1}(z-a_1)^{E_1} = U(z)(z-a_1)^{H_1}(z-a_1)^{E_1}$$

с голоморфно обратимой матрицей $U(z)$, допустимой матрицей H_1 и верхнетреугольной матрицей E_1. Поэтому построенная система будет фуксовой и в точке a_1 (см. лекцию 8). $\square$

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что контрпримеры к проблеме Римана—Гильберта (если таковые имеются) следует искать среди приводимых представлений.

Рассмотрим специальный тип представлений (8.1), который в дальнейшем будем называть *Б-представлениями.*

Определение 11.3. Представление (8.1) называется *Б-представлением*, если это представление приводимо и если жорданова нормальная форма каждой из матриц монодромии G_i состоит ровно из одной жордановой клетки.

Теорема 11.2. *Б-представление* (8.1) *может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы тогда и только тогда, когда тип расщепления канонического продолжения* F^0 *расслоения* F, *построенного по этому представлению, равен* $(k, \ldots, k)$ (*т. е. когда расслоение* F^0 *полустабильно*).

Доказательство. Если тип расщепления канонического продолжения равен $(k, \ldots, k)$, то согласно теореме 10.2 и соотношению (10.3) найдется система уравнений на сфере Римана с заданной монодромией и особыми точками, фуксовая в точках $a_2, \ldots, a_n$, имеющая в этих точках нулевые нормирования и такая, что ее фундаментальная матрица в окрестности точки a_1 имеет вид (10.3) с нулевой матрицей Λ_1 и скалярной матрицей $K = kI$:

$$Y_1(z) = (z - a_1)^{-kI} V(z)(z - a_1)^{E_1}. \tag{11.3}$$

Но

$$(z - a_1)^{-kI} V(z)(z - a_1)^{E_1} = V(z)(z - a_1)^{-kI}(z - a_1)^{E_1}.$$

Значит, эта система фуксова и в точке a_1. (В этом случае тривиальным оказывается расслоение, построенное из расслоения F с помощью допустимых матриц $\Lambda_1 = -kI$, $\Lambda_2 = \ldots = \Lambda_n = 0$.)

Пусть теперь Б-представление (8.1) реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы (7.3) с матрицами нормирований $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$. Последнее означает согласно теореме 8.1, что соответствующее расслоение $E \in \mathcal{F}$, построенное по данному представлению и допустимым матрицам $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$, голоморфно тривиально. Пусть размерность подпредставления χ' нашего Б-представления χ равна l. Обозначим через X_l соответствующее подпространство пространства решений X системы, инвариантное относительно действия монодромии χ. Приведем все матрицы монодромии представления χ одновременно к блочному верхнетреугольному виду

$$G_i = \begin{pmatrix} G_i' & * \\ 0 & G_i'' \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и рассмотрим соответствующую фундаментальную матрицу $Y(z)$, в базисе из столбцов которой матрицы монодромии имеют указанный вид.

Согласно примеру 5.2 первые l элементов любого левелевского базиса пространства X в любой особой точке принадлежат подпространству X_l. Поэтому согласно теореме 5.2 в окрестности точки a_i матрица Y представима следующим образом:

$$Y(z) = U_i(z)(z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{E_i}S_i,$$

где матрицы E_i, S_i имеют такой же блочный верхнетреугольный вид, что и матрицы G_i, а допустимая матрица Λ_i имеет вид $\Lambda_i = \mathrm{diag}(\Lambda_i', \Lambda_i'')$.

Тем самым, у расслоения E имеется подрасслоение F' ранга l, построенное по представлению χ' и допустимым матрицам Λ_i'. Заметим, что степень этого расслоения неотрицательна и она равна нулю тогда и только тогда, когда все матрицы Λ_i скалярные: $\Lambda_i = c_i I$, $i = 1, \ldots, n$.

Действительно, пусть $\Lambda_i = \mathrm{diag}(\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^p)$. Тогда в силу допустимости имеем $\lambda_i^1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_i^p$ и

$$\frac{\lambda_i^1 + \ldots + \lambda_i^l}{l} \geqslant \frac{\lambda_i^1 + \ldots + \lambda_i^p}{p},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все числа λ_i^j равны. Поэтому для наклона этого подрасслоения (который равен степени, деленной на l) имеем

$$\begin{aligned}\kappa(F') = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}(\Lambda_i' + E_i') = \sum_{i=1}^{n}\Big(\rho_i + \frac{\lambda_i^1 + \ldots + \lambda_i^l}{l}\Big) \geqslant \\ \geqslant \sum_{i=1}^{n}\Big(\rho_i + \frac{\lambda_i^1 + \ldots + \lambda_i^p}{p}\Big) = \kappa(E) = c_1(E) = 0,\end{aligned}$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда все матрицы Λ_i скалярные.

Но расслоение E тривиально, следовательно, согласно предложению 11.1 расслоение F' должно иметь неположительную степень и наклон. Поэтому $\kappa(F') = c_1(F') = 0$ и $\Lambda_i = c_i I$, $i = 1, \ldots, n$.

Преобразуем построенную систему к системе с фундаментальной матрицей

$$Y'(z) = \Big(\prod_{i=2}^{n}(z-a_i)^{-c_i}(z-a_1)^{c}\Big)Y(z), \qquad c = \sum_{i=2}^{n} c_i.$$

Эта система будет по-прежнему фуксовой во всех точках. Она имеет нулевые нормирования в точках $a_2, \ldots, a_n$. В точке a_1 согласно построению фундаментальная матрица этой системы может быть представлена в виде (11.3) с $k = -(c + c_1)$. Но последнее означает, что тип расщепления канонического продолжения F^0 расслоения, построенного по исходному Б-представлению, равен $(k, \ldots, k)$. □

Следствие 11.2. *Если Б-представление может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы, то степень канонического продолжения F^0 расслоения F, построенного по этому представлению, должна делиться нацело на ранг представления.*

Оказывается, существуют Б-представления, которые этому свойству не удовлетворяют.

Следующий пример является контрпримером к утверждению Гильберта. Он означает, что проблема Римана—Гильберта имеет в общем случае отрицательное решение.

Пример 11.1. Рассмотрим матрицы

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

и произвольный набор точек a_1, a_2, a_3. Представление χ с особыми точками a_1, a_2, a_3 и матрицами монодромии G_i, $i = 1, 2, 3$, не может быть реализовано в качестве представления монодромии какой-либо фуксовой системы.

Доказательство. Заметим, что $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = I$, матрица G_2 может быть преобразована к матрице G_1, а матрица G_3 может быть преобразована к жордановой клетке с собственным значением -1. Действительно, для матрицы G_2 имеем

$$S_2^{-1} G_2 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

а для матрицы G_3 получаем

$$S_3^{-1} G_3 S_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 0 & 16 & 4 & 3 \\ 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению 7.1 степень канонического продолжения равна

$$c_1(F^0) = \operatorname{tr} E_1 + \operatorname{tr} E_2 + \operatorname{tr} E_3 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \not\equiv 0 \pmod 4.$$

Поэтому согласно следствию 11.2 это представление не может быть реализовано как представление монодромии какой-либо фуксовой системы. □

Замечание 11.1. Утверждение следствия 11.2 может быть записано в эквивалентной форме: если Б-представление реализуется некоторой фуксовой системой, то произведение $\prod_{i=1}^{n} \mu_i$ собственных значений матриц монодромии этого представления должно равняться единице.

Замечание 11.2. Фуксова система, представление монодромии которой является Б-представлением, с помощью замены $Y' = SY$, где S — некоторая постоянная невырожденная матрица, может быть приведена к блочному верхнетреугольному виду (11.2).

Доказательство. Вернемся к доказательству теоремы 11.2. Поскольку тривиальное расслоение E содержит тривиальное подрасслоение F', то глобальный базис голоморфных сечений расслоения E можно выбрать следующим образом. Сначала рассмотрим глобальный базис голоморфных сечений подрасслоения F', а затем дополним его до базиса голоморфных сечений всего расслоения. В этом базисе (переход к которому и задается матрицей S) форма ω' связности ∇ будет иметь требуемый вид (11.2). □

Упражнения

11.1. Докажите утверждение замечания 11.1.

11.2. Пусть представление монодромии фуксовой системы приводимо. Обозначим через X_l подпространство пространства X решений системы, инвариантное относительно действия монодромии. Докажите, что сумма показателей подпространства X_l (т. е. сумма показателей левелевского базиса подпространства X_l, который определяется точно так же, как и в случае всего пространства, по фильтрации, задаваемой монодромией) не превосходит нуля.

11.3. В условиях предыдущего упражнения докажите, что если сумма показателей подпространства X_l равна нулю, то с помощью замены $Y' = SY$ с постоянной невырожденной матрицей S исходная фуксова система может быть приведена к блочному верхнетреугольному виду (11.2).

11.4. Докажите, что для любого неприводимого представления (8.1) и любого целого положительного числа d существует фуксова система с данной монодромией такая, что для любой особой точки разность между любыми двумя нормированиями в этой точке по модулю больше числа d.

11.5*. Докажите, что любое верхнетреугольное представление (8.1) (т. е. такое представление, все матрицы монодромии которого могут быть одновременно приведены к верхнетреугольному виду) ранга три может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы.

11.6. Докажите, что любое приводимое представление (8.1) может быть реализовано некоторой системой вида (11.2) с регулярными особыми точками, фуксовой во всех особых точках, кроме одной, и имеющей произвольные допустимые нормирования в фуксовых точках.

Лекция 12

Биркгофова стандартная форма

Методы, развитые для исследования проблемы Римана—Гильберта, находят применение и в других задачах аналитической теории дифференциальных уравнений. К их числу относится задача о биркгофовой стандартной форме.

Рассмотрим в окрестности бесконечно удаленной точки систему линейных дифференциальных уравнений

$$z\frac{dy}{dz} = C(z)y \tag{12.1}$$

с матрицей коэффициентов $C(z)$ размера $(p,\ p)$ и вида

$$C(z) = z^r\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-n}, \quad C_0 \neq 0, \quad r \geqslant 0, \tag{12.2}$$

где ряд сходится в некоторой окрестности $O_\infty = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \colon |z| > R\}$ точки ∞.

Напомним, что число r называется *рангом Пуанкаре* системы (12.1) в особой точке ∞. Если $r > 0$, то эта особая точка является, вообще говоря, иррегулярной особой точкой.

Под действием преобразования

$$x = \Gamma(z)y \tag{12.3}$$

система (12.1) переходит в систему

$$z\frac{dx}{dz} = \widetilde{C}(z)x, \tag{12.4}$$

где

$$\widetilde{C}(z) = z\frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1} + \Gamma C(z)\Gamma^{-1}. \tag{12.5}$$

Если $\Gamma(z)$ голоморфно обратимо в O_∞, то $\Gamma(z)$ называется *аналитическим преобразованием*. Если же $\Gamma(z)$ аналитично в $\dot{O}_\infty$, а функции Γ, Γ^{-1} лишь мероморфны в точке ∞, то $\Gamma(z)$ называется *мероморфным преобразованием*. Ясно, что аналитическое преобразование, в отличие от мероморфного, не меняет ранг Пуанкаре системы.

В 1913 году Биркгоф доказал, что любая система (12.1) аналитическим преобразованием может быть приведена к такой системе (12.4), в которой матрица коэффициентов $\widetilde{C}(z)$ имеет вид:

$$\widetilde{C}(z) = \widetilde{C}_r z^r + \ldots + \widetilde{C}_0, \tag{12.6}$$

т.е. $\widetilde{C}(z)$ является многочленом степени r от переменной z.

С тех пор система вида (12.4), (12.6) называется *биркгофовой стандартной формой* исходной системы (12.1).

Однако доказательство Биркгофа оказалось ошибочным, и в начале 1950-х годов Гантмахер привел контрпример к утверждению Биркгофа. Рассмотрим этот контрпример.

Пример 12.1. Система уравнений

$$z\frac{dy}{dz} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)y$$

не может быть приведена аналитическим в окрестности бесконечности преобразованием к биркгофовой стандартной форме.

Доказательство. Пусть такое преобразование $\Gamma(z) = \Gamma_0 + \Gamma_1/z + \ldots$ существует. Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma_0 = I$ (выполнения этого условия всегда можно добиться, заменив преобразование $\Gamma(z)$ на $\Gamma'(z) = \Gamma_0^{-1}\Gamma(z)$; ясно, что если исходное преобразование приводит систему к биркгофовой стандартной форме, то же самое верно и для преобразования $\Gamma'(z)$).

Так как ранг Пуанкаре исходной системы равен нулю, то матрица $\widetilde{C}$ коэффициентов преобразованной системы, находящейся в биркгофовой стандартной форме, должна быть постоянной матрицей.

Из (12.5) получаем

$$\widetilde{C}\left(I + \frac{1}{z}\Gamma_1 + \ldots\right) = -\frac{1}{z}\Gamma_1 + \left(I + \frac{1}{z}\Gamma_1\right)\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + \ldots,$$

откуда, собирая матричные коэффициенты при z^0 и при z^{-1}, находим:

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Gamma_1 = -\Gamma_1 + \Gamma_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда из последнего равенства получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что невозможно (так как для матричных элементов с индексами (1, 2) получаем равенство $0 = 1$). $\square$

Заметим, что матрица монодромии исходной системы является жордановой клеткой (докажите это). Как оказалось, доказательство Биркгофа проходит лишь для случая, когда матрица монодромии системы (12.1) в точке ∞ может быть приведена к диагональному виду.

Однако позднее было установлено, что препятствием к аналитической редукции системы к биркгофовой стандартной форме является ее приводимость.

Система (12.1) называется *приводимой*, если с помощью аналитического преобразования (12.3) она может быть приведена к виду (12.4) с матрицей коэффициентов $\widetilde{C}$, имеющей блочный верхнетреугольный вид:

$$\widetilde{C}(z) = \begin{pmatrix} C' & * \\ 0 & C'' \end{pmatrix}. \tag{12.7}$$

В противном случае система называется *неприводимой.*

Задача о приведении системы к биркгофовой стандартной форме очень важна для приложений: она возникает в теории Галуа дифференциальных уравнений, в теории изомонодромных деформаций и т. д.

Эта задача, которая на первый взгляд выглядит как локальная (и исходная система, и искомое преобразование определены лишь локально в окрестности точки ∞), на самом деле носит глобальный характер, так как итоговая система задана уже на всей сфере Римана. Поэтому ее естественно переформулировать в терминах расслоений и связностей.

Рассмотрим фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы (12.1), в базисе из столбцов которой матрица G монодромии системы имеет верхний треугольный вид. Тогда

$$Y(z) = T(z)z^{E}, \tag{12.8}$$

где матричная функция $T(z)$ однозначна и голоморфно обратима в $\dot{O}_\infty$, а $E=(1/2\pi i)\ln G$, причем собственные значения ρ^j матрицы E удовлетворяют неравенствам (4.4).

Зададим расслоение F с помощью следующего координатного описания: $F=(O_\infty,\ O_0=\mathbb{C},\ g_{\infty 0}=T(z))$. Формы

$$\omega_\infty = \frac{C(z)}{z}\,dz \quad \text{и} \quad \omega_0 = \frac{E}{z}\,dz,$$

определенные в окрестностях O_∞ и O_0 соответственно, задают в расслоении F связность ∇, голоморфную вне точек 0, ∞, имеющую логарифмическую особенность в нуле и полюс порядка $r+1$ в бесконечности.

Действительно, из (12.1) следует, что

$$\frac{C(z)}{z}\,dz = dY(z)(Y(z))^{-1} = dT(z)(T(z))^{-1} + T(z)\frac{E}{z}\,dz(T(z))^{-1}$$

и, следовательно, $\omega_\infty = d g_{\infty 0} g_{\infty 0}^{-1} + g_{\infty 0}\omega_0 g_{\infty 0}^{-1}$ (см. (3.5)).

Любое расслоение на сфере Римана мероморфно тривиально (см. предложение 10.2). Рассмотрим базис (e) из p сечений расслоения F, линейно независимых и голоморфных вне точки нуль и мероморфных в этой точке. В базисе из этих сечений форма $(\widetilde{C}(z)/z)\,dz$ связности ∇ имеет вид:

$$\widetilde{C}(z) = \widetilde{C}_r z^r + \ldots + \widetilde{C}_0 + \frac{\widetilde{C}_{-1}}{z} + \ldots + \frac{\widetilde{C}_{-k}}{z^k}. \tag{12.9}$$

Действительно, на координатном языке последнее утверждение означает существование такой голоморфно обратимой в окрестности O_∞ матрицы Γ и такой голоморфно обратимой в $\mathbb{C}\setminus 0$ и мероморфной в нуле матричной функции $U(z)$, что $\Gamma g_{\infty 0} = U(z)$ (здесь столбцы матриц Γ и U задают координатное описание элементов базиса (e)). Поэтому система линейных дифференциальных уравнений (12.4) с фундаментальной матрицей

$$\widetilde{Y}(z) = \Gamma(z)Y(z) = \Gamma(z)T(z)z^E = U(z)z^E,$$

определенной во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и с матрицей коэффициентов (12.9) не имеет особых точек на сфере Римана, за исключением точек нуль и бесконечность, причем точка нуль является для нее регулярной особой точкой. Поэтому матрица $\widetilde{C}(z)$ является рациональной функцией с единственным полюсом в нуле в комплексной плоскости и с полюсом порядка r в бесконечности.

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема 12.1. *Любая система* (12.1) *с помощью аналитического преобразования может быть приведена к системе* (12.4) *на сфере Римана с матрицей коэффициентов* $\widetilde{C}(z)$ *вида* (12.9). *Причем особая точка нуль будет для этой системы регулярной особой точкой.*

Теорема 12.1 означает, что, решая задачу о биркгофовой стандартной форме, мы с самого начала можем рассматривать вместо системы (12.1) систему (12.4) с матрицей коэффициентов вида (12.9), для которой точка нуль является регулярной особой точкой.

Приведем матрицу монодромии G с помощью матрицы S к верхнему треугольному виду (возможно, к отличному от того, к которому она была приведена в разложении (12.8)) и рассмотрим произвольную допустимую матрицу $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, т. е. матрицу с целочисленными диагональными элементами, удовлетворяющими неравенствам $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p$.

Зададим расслоение F^Λ с помощью следующего координатного описания: $F^\Lambda = (O_\infty,\ O_0 = \mathbb{C},\ g^\Lambda_{\infty 0} = T(z)z^{-\Lambda})$. Формы

$$\omega_\infty = \frac{C(z)}{z}\,dz \quad \text{и} \quad \omega^\Lambda_0 = (\Lambda + z^\Lambda E z^{-\Lambda})\frac{dz}{z},$$

определенные в окрестностях O_∞ и O_0 соответственно, задают в расслоении F^Λ связность ∇^Λ, голоморфную вне точек $0, \infty$, имеющую логарифмическую особенность в нуле и полюс порядка $r+1$ в бесконечности.

Голоморфный тип построенного расслоения зависит от матрицы Λ и от способа приведения матрицы монодромии к верхнему треугольному виду (т. е. от матрицы S).

Обозначим множество построенных расслоений со связностями через $\mathcal{E}$.

Следующее утверждение аналогично теореме 8.1 и доказывается почти так же (с некоторыми упрощениями, так как приходится следить всего за одной фуксовой точкой).

Теорема 12.2. *Система* (12.1) *может быть приведена аналитическим преобразованием к биркгофовой стандартной форме тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{E}$ содержит хотя бы одно голоморфно тривиальное расслоение.*

Имеет место в этом случае и аналог теоремы 11.1.

Теорема 12.3. *Рассмотрим расслоение $E \in \mathcal{E}$ со связностью ∇, построенное по неприводимой системе* (12.1). *Для типа расщепления этого расслоения имеют место следующие неравенства*

$$k_i - k_{i+1} \leqslant r, \quad i = 1, \ldots, p-1. \tag{12.10}$$

Доказательство. Согласно теореме 9.1 найдутся такие матрицы $\Gamma \in H^0(O_\infty)$, $U \in H^0(\mathbb{C})$, что

$$\Gamma g^\Lambda_{\infty 0}(z) = \Gamma T(z) z^{-\Lambda} = z^{-K} U(z),$$

где диагональные элементы матрицы K задают тип расщепления расслоения E (см. формулу (10.3)).

Аналитическое преобразование исходной системы, задаваемое матрицей Γ, переводит ее в систему (12.4), где

$$\frac{\widetilde{C}(z)}{z}\,dz = -\frac{K}{z}\,dz + z^{-K}\omega z^K, \quad \omega = dUU^{-1} + U(\Lambda + z^\Lambda E z^{-\Lambda})U^{-1}\frac{dz}{z},$$

а фундаментальная матрица пространства решений системы (12.4) в $\mathbb{C}$ представляется в виде

$$Y'(z) = z^{-K} U(z) z^\Lambda z^E. \tag{12.11}$$

Заметим, что форма ω имеет логарифмическую особенность в 0.

Предположим, что для некоторого l имеет место неравенство $k_l - k_{l+1} > r$. Так как элементы ω'_{ij} и ω_{ij} матричных дифференциальных форм $\widetilde{C}(z)\,dz/z$ и ω при $i \neq j$ связаны соотношением

$$\omega'_{ij}(z) = \omega_{ij}(z) z^{-k_i+k_j},$$

то для $i > l$, $j \leqslant l$ согласно предположению получаем $k_j - k_i > r$. Поэтому порядки нулей дифференциальных форм $\omega'_{ij}(z)$ с указанными индексами в точке 0 больше числа $r-1$, в то время как порядки полюсов коэффициентов этих форм в бесконечности не превосходят числа $r-1$ (так как форма $\widetilde{C}(z)\,dz/z$ имеет полюс порядка $r+1$ в ∞). Значит, эти формы тождественно равны нулю, и, стало быть, форма $\widetilde{C}(z)\,dz/z$ имеет вид (12.7). Значит, исходная система приводима. Полученное противоречие означает, что неравенства (12.10) имеют место. $\square$

Теперь мы имеем все необходимое для доказательства следующего утверждения, которое аналогично теореме 10.4.

Теорема 12.4. *Любая неприводимая система* (12.1) *может быть преобразована к биркгофовой стандартной форме с помощью аналитического преобразования* (12.3).

Доказательство. Рассмотрим расслоение $F \in \mathcal{E}$, построенное по допустимой матрице Λ, удовлетворяющей условию $\lambda_i - \lambda_{i+1} > r(p-1)$, $i = 1, \ldots, p-1$.

Действуя так же, как при доказательстве предыдущего утверждения, приведем исходную систему с помощью аналитического преобразования к виду (12.4) с фундаментальной матрицей (12.11).

Согласно лемме 10.2 существует такая матрица $\Gamma'(z)$, голоморфно обратимая вне точки 0, что

$$\Gamma'(z)z^{-K}U(z) = U''(z)z^{D},$$

где матрица D получена из $-K$ некоторой перестановкой диагональных элементов, а матрица $U''(z)$ голоморфно обратима в $\mathbb{C}$. Так как для элементов матрицы K имеют место неравенства (12.10), то для любых соседних диагональных элементов матрицы D получаем $|d_i - d_{i+1}| \leqslant r(p-1)$. Поэтому матрица $H = D + \Lambda$ допустима, т. е. для диагональных элементов h_i этой матрицы выполнено условие $h_i > h_{i+1}$, $i = 1, \ldots, p-1$.

Перейдем от системы (12.4) к системе с матрицей коэффициентов $C''(z)$ и фундаментальной матрицей Y'' с помощью аналитической в $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$ замены $Y'' = \Gamma'(z)Y'$. Тогда

$$Y''(z) = U''(z)z^{H}z^{E},$$

т. е. построенная система фуксова в нуле. Согласно построению эта система не имеет особых точек, кроме точек 0 и ∞, значит, матрица $C''(z)$ коэффициентов этой системы голоморфна в $\mathbb{C}$ (напомним, что система имеет вид (12.1)).

В силу аналитичности проведенных замен, матрица $C''(z)$ коэффициентов этой системы имеет полюс того же порядка r в бесконечности, что и матрица исходной системы (12.1). По теореме Лиувилля получаем, что $C''(z)$ — матричный многочлен степени r от z. $\square$

Заключение

Задача о биркгофовой стандартной форме для приводимой системы рассматривалась в работах [31], [6]. Наиболее интересна и пока не решена задача о мероморфном приведении к биркгофовой стандартной форме, использующем не аналитическое, а мероморфное преобразование, не повышающее ранга Пуанкаре особенности.

В настоящее время доказано, что такая редукция всегда возможна для систем ранга 2 и 3, а также для систем, состоящих из двух неприводимых блоков.

Что касается проблемы Римана—Гильберта, то здесь получены следующие результаты.

— Доказано, что для представлений (8.1) ранга три все контрпримеры к проблеме Римана—Гильберта даются теоремой 11.2, т. е. если некоторое представление ранга три не реализуется никакой фуксовой системой, то это обязательно Б-представление с непостоянным типом расщепления канонического продолжения [30], [4].

— Доказано, что все верхнетреугольные представления рангов 3, 4, 5 реализуются фуксовыми системами [43], [4]. Первый пример нереализуемого фуксовой системой верхнетреугольного представления появляется в размерности шесть [43]. Однако вопрос о полной классификации таких представлений в размерности шесть остается открытым.

— Многочисленные достаточные условия реализуемости представления (8.1) фуксовой системой приведены в [30], [4], [40], но и эта задача далека от своего полного решения.

— Показано, что любое представление (8.1) является подпредставлением некоторого представления, реализуемого фуксовой системой [4].

— Вычислена коразмерность подмножества нереализуемых фуксовыми системами представлений в пространстве модулей всех представлений. Эта коразмерность равна $(2n-1)(p-1)$ [30].

— Доказано, что любое представление (8.1) ранга два с тремя особыми точками может быть реализовано как представление монодромии некоторого скалярного фуксового уравнения второго порядка с тремя особыми точками (см. лекцию 8) за исключением следующих приводимых представлений [37]:

$$G_i = \begin{pmatrix} b_i & c_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \prod_{i=1}^{3} G_i = I, \quad c_1c_2c_3 \neq 0,$$

$$G_i = \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \end{pmatrix}, \quad \prod_{i=1}^{3} G_i = I, \quad b_i \neq c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

— Показано, что минимально возможное число дополнительных ложных особых точек m^0 (посчитанных с кратностями, которые совпадают с порядками нулей вронскиана соответствующего «минимального» фуксового уравнения), возникающих при построении скалярного фуксового дифференциального уравнения с неприводимой монодромией (8.1), равно

$$m^0 = \frac{(n-2)\,p(p-1)}{2} - \gamma_m(\chi),$$

где число $\gamma_m(\chi) = p\gamma(\chi)$ называется максимальным фуксовым весом представления (8.1) и определяется следующим образом.

Для любого расслоения $E \in \mathcal{F}$ (см. теорему 8.1) определим «меру нестабильности» этого расслоения $\gamma(E) = k_1 - \kappa(E)$, где $\kappa(E)$ — наклон расслоения E, а k_1 — максимальная степень одномерного подрасслоения этого расслоения. Тогда $\gamma(\chi) = \max\limits_{E \in \mathcal{F}} \gamma(E)$ [4].

Следующая задача представляет значительный интерес для теории изомонодромных деформаций. Можно ли по неприводимому представлению (8.1) построить фуксову систему с данной монодромией и с наперед заданными допустимыми значениями показателей (сумма которых по всем точкам должна равняться нулю)? Ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен [4]. В связи с этим остается открытым следующий важный вопрос: для каких неприводимых представлений (8.1) число таких «запрещенных» показателей конечно (если наборы показателей рассматривать с точностью до эквивалентности, определяемой одновременным добавлением ко всем показателям в одной точке одного и того же целого числа и вычитанием этого же числа в другой точке)?

Следующая естественная задача также пока не решена. Если представление (8.1) монодромии некоторой фуксовой системы является прямой суммой представлений, то верно ли, что эта фуксова система мероморфно эквивалентна прямой сумме фуксовых систем (т. е. такой системе, матрица коэффициентов которой имеет блочный диагональный вид)?[1]

По поводу последних двух задач см. также [32].

[1] Теперь известно, что ответ на этот вопрос отрицателен [9]. — *Прим. ред.*

Часть II

Изомонодромные деформации фуксовых систем

Лекция 13

Понятие изомонодромной деформации. Критерий изомонодромности

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p,$$

на сфере Римана $\bar{\mathbb{C}}$. Понятие изомонодромной деформации этой системы связано с ее вложением в семейство систем

$$\frac{dy}{dz} = B(z, b)y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{13.1}$$

голоморфно зависящее от параметра $b = (b_1, \ldots, b_k)$, принимающего значения в некоторой области пространства $\mathbb{C}^k$ (или, более обще, на каком-то комплексном многообразии). Исходная система совпадает с системой (13.1) при некотором значении $b = b^0$ этого параметра. О таком семействе говорят как о деформации исходной системы (или просто деформации).

Несколько небрежно можно сказать, что семейство (13.1) называется изомонодромным (или изомонодромной деформацией исходной системы), если для любого фиксированного b соответствующая система (13.1) имеет ту же самую монодромию, что и при $b = b^0$. Небрежность сказанного связана с тем, что при различных b система (13.1) имеет, вообще говоря, различные особые точки. Монодромия же, по определению, является некоторым отображением

$$\pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}). \tag{13.2}$$

Так как при различных b получаются различные области $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, то надо уточнить, когда мы считаем одинаковыми соответствующие отображения (13.2). Кроме того, монодромия линейной системы зависит от выбора фундаментальной системы решений. Когда мы имеем дело с семейством систем (13.1), зависящим от b, надо уточнить, как может зависеть от b этот выбор.

На самом деле основным в теории изомонодромных деформаций является тот случай, когда роль параметра b играет набор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ особых точек рассматриваемых систем. Кроме того, мы будем иметь дело с наиболее простым случаем, когда и исходная система, и системы из семейства (13.1) являются фуксовыми, причем параметр a близок к параметру a^0 исходной системы. Приведем (частично повторяясь, а частично делая надлежащие уточнения) полные формулировки для данного случая.

Итак, рассмотрим на сфере Римана фуксову систему p линейных дифференциальных уравнений с особыми точками $a_1^0, \ldots, a_n^0 \in \mathbb{C}$. Такая система может быть записана в виде

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^0}{z - a_i^0}\right) y, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i^0 = 0.$$

При этом семейство (13.1) является семейством фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\right) y, \quad B_i(a^0) = B_i^0, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i(a) = 0, \tag{13.3}$$

голоморфно зависящим от параметра $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D(a^0)$, где $D(a^0)$ — шар малого радиуса с центром в точке $a^0 = (a_1^0, \ldots, a_n^0)$ пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ (мы исключаем из пространства $\mathbb{C}^n$ диагонали $\{a_i = a_j\}$, поскольку рассматриваем случай, когда особенности изменяют свое положение, не совпадая одна с другой). Это семейство задано на пространстве

$$T = \left(\bar{\mathbb{C}} \times D(a^0)\right) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{z - a_i = 0\}$$

(здесь $z \in \bar{\mathbb{C}}$, $(a_1, \ldots, a_n) \in D(a^0)$).

Как и ранее (лекция 7), рассмотрим в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}$ петли $g_1^0, \ldots, g_n^0$ с началом в точке z_0, порождающие группу $\pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}, z_0)$. Пусть $g_1^a, \ldots, g_n^a$ — петли в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ с началом в той же точке z_0, порождающие группу $\pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0)$ и такие, что в пространстве T каждая петля $t_a g_i^a t_a^{-1}$ гомотопна соответствующей петле g_i^0, где t_a — путь, соединяющий точки (z_0, a^0) и $(z_0, a) \in T$.

При малых изменениях параметра a такие гомотопии возможны, поскольку пространство T можно представить как семейство сфер с n выколотыми точками, стягиваемое на любой из своих слоев:

$$\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \hookrightarrow T \hookleftarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}.$$

Так мы получаем канонический изоморфизм между фундаментальными группами

$$\pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}) \cong \pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}),$$

что приводит к существованию канонического изоморфизма

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}\big(\pi_1(\bar{\mathbb{C}}\setminus\{a_1, \ldots, a_n\}),\ \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})\big)/\,\mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \cong\\ \cong \mathrm{Hom}\big(\pi_1(\bar{\mathbb{C}}\setminus\{a_1^0, \ldots, a_n^0\}),\ \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})\big)/\,\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})\end{aligned}$$

между пространствами классов сопряженности представлений (13.2) данных фундаментальных групп. Геометрически это означает, что множество пространств

$$\mathcal{M}_a = \mathrm{Hom}\big(\pi_1(\bar{\mathbb{C}}\setminus\{a_1, \ldots, a_n\}),\ \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})\big)/\,\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

образует локальное семейство многообразий, параметризованное $a\in D(a^0)$.

Заметим, что глобально, в $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i\neq j}\{a_i = a_j\}$, продолжение представления (13.2) из фиксированной точки a вдоль нетривиальной петли при возвращении в точку a может привести к представлению, отличному от исходного.

Определение 13.1. Семейство (13.3) называется *изомонодромным* (или *изомонодромной деформацией* исходной фуксовой системы, соответствующей значению параметра $a = a^0$), если для любого фиксированного $a \in D(a^0)$ соответствующая система из (13.3) имеет ту же самую монодромию, что и при $a = a^0$ (по отношению к гомотопическим классам петель g_i^a и g_i^0 соответственно). Последнее означает, что для каждого значения параметра a найдется фундаментальная матрица $Y(z, a)$ соответствующей системы из (13.3), имеющая одни и те же матрицы монодромии (по отношению к g_i^a) для всех $a \in D(a^0)$. В этом случае семейство матриц $Y(z, a)$ называется *изомонодромным семейством матриц* (или просто *изомонодромной матрицей*).

Пример 13.1. Рассмотрим одномерный случай (семейство систем, состоящих из одного уравнения):

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i(a)}{z - a_i}\right)y, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i(a) = 0.$$

Общее решение $y(z, a)$ данного уравнения имеет вид

$$y(z, a) = c(a)(z - a_1)^{b_1(a)} \ldots (z - a_n)^{b_n(a)},$$

а множитель монодромии, соответствующий петле g_j^a, равен $e^{2\pi i b_j(a)}$. Из этого следует, что данное семейство изомонодромно, только если $b_j(a) \equiv \mathrm{const}$ (напомним, что функции $b_j(a)$ голоморфны).

Согласно теореме об аналитической зависимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра найдется семейство

$\widetilde{Y}(z, a)$ фундаментальных матриц (13.3), аналитическое по совокупности переменных z и a, но указанная теорема не гарантирует того, что это семейство будет изомонодромным. С другой стороны, та же теорема обеспечивает аналитичность по z и a изомонодромного семейства $Y(z, a)$ фундаментальных матриц, если только начальное условие $Y(z_0, a)$ аналитично по a, что, вообще говоря, заранее неизвестно. Однако все же справедлива следующая теорема.

Теорема 13.1. *Для любого изомонодромного семейства* (13.3) *найдется изомонодромное семейство фундаментальных матриц, аналитическое в T по совокупности переменных z и a.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную матрицу $\widetilde{Y}(z, a)$ семейства (13.3), аналитическую по совокупности переменных z и a. Из аналитичности $\widetilde{Y}(z, a)$ следует, что ее матрицы монодромии $G_i(a)$ (по отношению к соответствующим петлям g_i^a) голоморфно зависят от a. Рассмотрим также изомонодромную фундаментальную матрицу $Y(z, a)$ семейства (13.3) и ее матрицы монодромии G_i. Для любого фиксированного a имеет место соотношение $\widetilde{Y}(z, a) = Y(z, a)C(a)$, где $C(a)$ — некоторая матричная функция со значениями в $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$. Тогда

$$G_i(a) = C(a)^{-1} G_i C(a), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13.4}$$

Определим голоморфное отображение

$$\gamma\colon \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \times \ldots \times \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

комплексных многообразий следующим образом:

$$\gamma(X) = \bigl(XG_1X^{-1}, \ldots, XG_nX^{-1}\bigr).$$

Группа $H = \bigl\{A \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \mid AG_iA^{-1} = G_i,\ i = 1, \ldots, n\bigr\}$ является аналитическим подмногообразием в $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$.

Упражнение 13.1. Проверьте, что четверка

$$(\mathrm{GL}(p, \mathbb{C}), \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})/H, \pi, H),$$

где π — стандартная проекция $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ на $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})/H$, а группа H действует на $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ справа умножением (по правилу $(g, h) \mapsto gh$ для любых $g \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, $h \in H$), может быть рассмотрена как голоморфное главное расслоение со структурной группой H (см. [24], §7).

Зафиксируем открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})/H$, над каждым элементом U_α которого данное расслоение имеет голоморфное сечение $\psi'_\alpha\colon U_\alpha \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, $\pi \circ \psi'_\alpha = \mathrm{id}$.

Отображение

$$j\colon \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})/H \to \mathrm{Im}\,\gamma, \quad j(XH) = \gamma(X),$$

является биективным, голоморфным в обе стороны (биголоморфным) отображением двух комплексных многообразий: множества левых смежных классов группы $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ по подгруппе H и образа отображения γ. Действительно, j взаимно однозначно, поскольку из равенства $j(X_1H) = j(X_2H)$ получаем, что $\gamma(X_1) = \gamma(X_2)$ и $X_1^{-1}X_2 \in H$, т. е. классы X_1H и X_2H совпадают. Голоморфность отображения j следует из того, что локально оно может быть представлено в виде композиции $j = \gamma \circ \psi'_\alpha$ голоморфных отображений. По теореме из курса теории функций многих комплексных переменных взаимно однозначность и голоморфность отображения j влекут его биголоморфность.

Вследствие соотношения (13.4) для любого фиксированного a набор матриц $(G_1(a), \ldots, G_n(a))$ принадлежит множеству $\mathrm{Im}\,\gamma$. Поэтому определено отображение

$$\Phi\colon D(a^0) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})/H, \quad \Phi(a) = j^{-1}(G_1(a), \ldots, G_n(a)).$$

Это отображение голоморфно, поскольку голоморфны матричные функции $G_i(a)$ и отображение j^{-1}. А так как $\Phi(a) = j^{-1}(\gamma(C(a)^{-1}))$ и j — биективное отображение, то $\Phi(a) = C(a)^{-1}H$.

Построим открытое покрытие $\{D_\alpha\}$ шара $D(a^0)$ такое, что $\Phi(D_\alpha) \subset \subset U_\alpha$. Тем самым для каждого D_α определено голоморфное отображение $\psi_\alpha\colon D_\alpha \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ соотношением

$$\psi_\alpha = \psi'_\alpha \circ \Phi, \quad \psi_\alpha(a) = \psi'_\alpha(\Phi(a)) = \psi'_\alpha(C(a)^{-1}H).$$

Тогда смежный класс $\psi_\alpha(a)H$ элемента $\psi_\alpha(a)$ совпадает со смежным классом $C(a)^{-1}H$. Действительно,

$$\psi_\alpha(a)H = \pi(\psi_\alpha(a)) = \pi \circ \psi'_\alpha(C(a)^{-1}H) = C(a)^{-1}H.$$

Поэтому $\psi_\alpha(a) = C(a)^{-1}h_\alpha(a)$, $h_\alpha(a) \in H$. Теперь согласно построению имеем

$$\psi_\alpha(a)^{-1}G_i(a)\psi_\alpha(a) = h_\alpha(a)^{-1}C(a)G_i(a)C(a)^{-1}h_\alpha(a) = \\ = h_\alpha(a)^{-1}G_ih_\alpha(a) = G_i.$$

Для всех D_α, D_β с непустым пересечением $D_\alpha \cap D_\beta$ имеем

$$\psi_\alpha(a)^{-1}\psi_\beta(a) = h_\alpha(a)^{-1}C(a)C(a)^{-1}h_\beta(a) = h_\alpha(a)^{-1}h_\beta(a) \in H.$$

Таким образом, коцикл $\{g_{\alpha\beta}\} = \{\psi_\alpha^{-1}\psi_\beta\}$ задает голоморфное главное расслоение $p\colon E \to D(a^0)$ над шаром $D(a^0)$ со структурной группой H. Такое расслоение топологически тривиально согласно предложению 1.1, поскольку существует непрерывное сечение $s\colon D(a^0) \to E$. Существование сечения следует из того факта, что шар $D(a^0)$ стягивается в точку a^0, т. е. существует гомотопия $f_t\colon D(a^0) \to D(a^0)$ такая, что $f_1 = \mathrm{id}$,

$f_0 \equiv a^0$. Начальное отображение f_0 поднимается до непрерывного отображения $\tilde{f}_0\colon D(a^0) \to E$, $\tilde{f}_0 \equiv x \in p^{-1}(a^0)$. Поэтому существует поднятие $\tilde{f}_t\colon D(a^0) \to E$ гомотопии f_t, $p \circ \tilde{f}_t = f_t$ (см. приложение 4). Отображение $\tilde{f}_1\colon D(a^0) \to E$ и будет искомым сечением.

Здесь мы сошлемся на теорему Грауэрта, согласно которой, в частности, топологическая и голоморфная классификации главных расслоений над шаром, имеющих в качестве структурной группы произвольную комплексную группу Ли, совпадают[1]. Таким образом, расслоение E голоморфно тривиально и для любого D_α существует голоморфное отображение $s_\alpha\colon D_\alpha \to H$ такое, что в непустом пересечении $D_\alpha \cap D_\beta$ выполнено соотношение

$$s_\alpha(a) = g_{\alpha\beta}(a)s_\beta(a) = \psi_\alpha(a)^{-1}\psi_\beta(a)s_\beta(a).$$

Обозначим через $\widetilde{C}(a) = \{\psi_\alpha(a)s_\alpha(a)\}$ голоморфное отображение всего шара $D(a^0)$ в $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$. Согласно построению, фундаментальной матрице $\widetilde{Y}(z, a)\widetilde{C}(a)$ соответствуют одни и те же матрицы монодромии

$$\widetilde{C}(a)^{-1}G_i(a)\widetilde{C}(a) = s_\alpha(a)^{-1}\psi_\alpha(a)^{-1}G_i(a)\psi_\alpha(a)s_\alpha(a) = \\ = s_\alpha(a)^{-1}G_i s_\alpha(a) = G_i$$

для всех a из $D(a^0)$. Следовательно, она может быть выбрана в качестве аналитической (по z и a) изомонодромной фундаментальной матрицы семейства (13.3). □

Аналитическая изомонодромная фундаментальная матрица $Y(z, a)$ как функция на T имеет некоторую монодромию, которая в силу аналитичности $Y(z, a)$ зависит лишь от гомотопических классов петель в T с началом в точке (z_0, a^0) (аналитические продолжения $Y(z, a)$ вдоль петель, обходящих гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$, совпадают с продолжениями вдоль соответствующих петель g_i^0, рассматриваемых как петли в $(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}) \times \{a^0\} \subset T$). Из условия изомонодромности этой матрицы следует, что ее матрицы монодромии как функции начальной точки (z_0, a^0) при фиксированном z_0 являются локально постоянными по отношению к изменению a^0. С другой стороны, из определения монодромии системы линейных дифференциальных уравнений следует, что эти матрицы локально постоянны по отношению к изменению z_0 при любом фиксированном a^0. Таким образом, $Y(z, a)$ задает представление монодромии

$$\pi_1(T, (z_0, a^0)) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}),$$

[1] Подробное изложение теоремы Грауэрта см. в [20].

т. е. для любой петли $g \in \pi_1(T, (z_0, a^0))$ и аналитического продолжения g^*Y матрицы Y вдоль g выполнено соотношение

$$g^*Y(z, a) = Y(z, a)G_g^{-1}, \quad G_g \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}).$$

Теорема 13.2. *Семейство* (13.3) *фуксовых систем является изомонодромным тогда и только тогда, когда на T существует матричная голоморфная дифференциальная* 1*-форма ω такая, что*

1) $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{B_i(a)}{z-a_i}\,dz$ *для любого фиксированного* $a \in D(a^0)$;

2) $d\omega = \omega \wedge \omega$.

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим аналитическую изомонодромную матрицу $Y(z, a)$ семейства (13.3). Тогда матричная дифференциальная 1-форма $\omega = dY(z, a)Y^{-1}(z, a)$ является однозначной и может быть рассмотрена как голоморфная форма на T, удовлетворяющая условиям 1, 2 теоремы. Действительно, для всех $g \in \pi_1(T, (z_0, a^0))$ для аналитического продолжения $g^*\omega$ формы ω вдоль петли g имеем

$$g^*\omega = d(g^*Y)(g^*Y^{-1}) = (dYG_g^{-1})(G_gY^{-1}) = (dY)Y^{-1} = \omega.$$

Поскольку для любого фиксированного $a \in D(a^0)$ матрица $Y(z, a)$ является фундаментальной для соответствующей системы из семейства (13.3), то

$$\frac{dY(z, a)}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\right) Y(z, a)$$

и условие 1 теоремы очевидно выполнено.

Для доказательства соотношения 2 нужно воспользоваться правилом Лейбница и равенством нулю квадрата внешнего дифференциала, а также формулой $d(Y^{-1}) = -Y^{-1}(dY)Y^{-1}$ для дифференциала обратной матрицы. Тогда будем иметь

$$d\omega = (d^2Y)Y^{-1} - dY \wedge d(Y^{-1}) = -dY \wedge d(Y^{-1}) =$$
$$= dY \wedge Y^{-1}(dY)Y^{-1} = (dY)Y^{-1} \wedge (dY)Y^{-1} = \omega \wedge \omega.$$

Достаточность. Пусть ω — матричная голоморфная дифференциальная 1-форма на T, удовлетворяющая условиям 1, 2 теоремы. Рассмотрим комплексное многообразие $M = T \times \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ с координатами $((z, a), Y)$ и p^2 дифференциальных уравнений на этом многообразии, записанных в матричном виде

$$dY - \omega Y = 0. \tag{13.5}$$

Согласно общей теореме Фробениуса, для любой точки $((z_0, a^0), Y^0)$ пространства M это уравнение имеет локальное решение $Y = Y(z, a)$ с начальным условием $Y(z_0, a^0) = Y^0$, если матричная голоморфная дифференциальная 1-форма $\Theta = (\theta_{ij}) = dY - \omega Y$ удовлетворяет условию полной интегрируемости (см. также предложение 3.1): для каждого элемента θ_{ij} его дифференциал $d\theta_{ij}$ может быть представлен в виде

$$d\theta_{ij} = \sum_{k,l} \alpha_{kl} \wedge \theta_{kl},$$

где α_{kl} — некоторые голоморфные в M дифференциальные 1-формы. В нашем случае

$$\begin{aligned} d\Theta = d^2Y - d(\omega Y) = -d(\omega Y) = (-d\omega)Y + \omega \wedge dY = \\ = (-d\omega)Y + \omega \wedge (\Theta + \omega Y) = (-d\omega + \omega \wedge \omega)Y + \omega \wedge \Theta = \omega \wedge \Theta, \end{aligned}$$

т. е. условие интегрируемости Фробениуса выполнено.

Поскольку форма ω удовлетворяет условию 1 теоремы, то решение $Y(z, a)$ уравнения (13.5) при каждом фиксированном $a \in D(a^0)$ является фундаментальной матрицей соответствующей системы из семейства (13.3). Более того, матрица $Y(z, a)$ изомонодромна, потому что для всех значений параметра $a \in D(a^0)$ она имеет одни и те же матрицы монодромии по отношению к петлям $g_i^a \in \pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0)$. Эти матрицы совпадают с матрицами монодромии, соответствующими аналитическому продолжению $Y(z, a)$ как функции на T вдоль петель, обходящих гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$. Таким образом, семейство (13.3) является изомонодромным. $\square$

Из теоремы 13.2 следует, что любое изомонодромное семейство (13.3) полностью определяется соответствующей формой ω со свойствами 1, 2, хотя и неоднозначно. Например, наряду с формой ω можно рассмотреть форму $\omega' = \omega + df(a)I$, где $f(a)$ — голоморфная в $D(a^0)$ функция. Тогда ω' будет определять то же семейство, что и ω. Действительно, при любом фиксированном $a \in D(a^0)$ формы ω и ω' совпадают, а условие $d\omega' = \omega' \wedge \omega'$ следует из соотношений

$$d\omega' = d\omega, \quad \omega' \wedge \omega' = \omega \wedge \omega + df \wedge \omega + \omega \wedge df + (df \wedge df)I = \omega \wedge \omega$$

(второе и третье слагаемые отличаются лишь знаком, а четвертое равно нулю).

Нашей дальнейшей целью будет описание общего вида формы ω, определяющей изомонодромное семейство фуксовых систем, но сначала рассмотрим один специальный случай, называемый *деформацией Шлезингера*. Этому посвящена следующая лекция.

Упражнения

13.2. Обобщите пример 13.1 на случай семейства фуксовых систем произвольной размерности p, проверив, что семейство

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i}\right) y, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i = 0,$$

где B_i — попарно коммутирующие постоянные матрицы, является изомонодромным.

13.3. Покажите, что собственные значения матриц-вычетов $B_i(a)$ изомонодромного семейства (13.3) не зависят от a.

Указание. Воспользуйтесь тем, что собственные значения матрицы $B_i(a)$ совпадают с показателями соответствующей системы семейства (13.3) в точке $z = a_i$ и непрерывно зависят от a.

Лекция 14

Изомонодромная деформация Шлезингера

Рассмотрим вопрос о возможном виде формы ω, удовлетворяющей условиям теоремы 13.2. Для исходной фуксовой системы

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^0}{z - a_i^0}\right) y \tag{14.1}$$

попробуем найти форму ω следующего вида:

$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\, d(z - a_i). \tag{14.2}$$

Такая дифференциальная 1-форма называется *формой Шлезингера* (далее мы покажем, что в общем случае возможны и другие реализации ω).

Прежде всего необходимо доказать, что такая специальная изомонодромная деформация системы (14.1) существует. Для этого нужно доказать (согласно теореме 13.2), что имеет решение следующая задача:

$$d\omega_s = \omega_s \wedge \omega_s, \quad B_i(a^0) = B_i^0$$

(условие 1 теоремы 13.2 для формы ω_s очевидно выполнено).

Теорема 14.1. *Условие*

$$d\omega_s = \omega_s \wedge \omega_s$$

для формы ω_s эквивалентно следующему набору соотношений:

$$dB_i(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[B_i(a),\, B_j(a)]}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14.3}$$

где $[B_i,\, B_j] = B_iB_j - B_jB_i$ — коммутатор матриц B_i и B_j.

Доказательство. Поскольку

$$d\left(\frac{d(z - a_i)}{z - a_i}\right) = -\frac{d(z - a_i)}{(z - a_i)^2} \wedge d(z - a_i) = 0,$$

то для дифференциала $d\omega_s$ формы ω_s имеем

$$d\omega_s = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} dB_i \wedge \frac{d(z-a_i)}{z-a_i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_i(a)}{\partial a_j}\, d(a_j - z + z)\right) \wedge \frac{d(z-a_i)}{z-a_i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_i(a)}{\partial a_j}\right) dz \wedge \frac{d(z-a_i)}{z-a_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_i(a)}{\partial a_j} \frac{d(z-a_i)\wedge d(z-a_j)}{z-a_i}.$$

С другой стороны,

$$\omega_s \wedge \omega_s = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i)\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j(a)}{z-a_j}\, d(z-a_j)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i B_j \frac{d(z-a_i)\wedge d(z-a_j)}{(z-a_i)(z-a_j)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{B_i B_j}{a_i-a_j}\left(\frac{1}{z-a_i} - \frac{1}{z-a_j}\right) d(z-a_i)\wedge d(z-a_j).$$

Поскольку

$$dz \wedge d(z-a_1)\wedge \ldots \wedge d(z-a_n) = (-1)^n\, dz\wedge da_1 \wedge \ldots \wedge da_n \neq 0,$$

то дифференциальные 2-формы $dz\wedge d(z-a_i)$, $d(z-a_i)\wedge d(z-a_j)$, $i<j$, линейно независимы над полем мероморфных в $\overline{\mathbb{C}} \times D(a^0)$ функций. Сравнивая коэффициенты при соответствующих $dz\wedge d(z-a_i)$, $d(z-a_i)\wedge d(z-a_j)$ у дифференциальных 2-форм $d\omega_s$ и $\omega_s\wedge\omega_s$, мы получим, что уравнение $d\omega_s = \omega_s\wedge\omega_s$ эквивалентно системе

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_i(a)}{\partial a_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\frac{\partial B_i(a)}{\partial a_j}\frac{1}{z-a_i} - \frac{\partial B_j(a)}{\partial a_i}\frac{1}{z-a_j} = \frac{[B_i, B_j]}{a_i-a_j}\left(\frac{1}{z-a_i} - \frac{1}{z-a_j}\right),$$
$$i, j = 1, \ldots, n,\ i\neq j.$$

Перепишем последнее соотношение в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial B_i(a)}{\partial a_j} - \frac{[B_i, B_j]}{a_i-a_j}\right)\frac{1}{z-a_i} - \left(\frac{\partial B_j(a)}{\partial a_i} - \frac{[B_i, B_j]}{a_i-a_j}\right)\frac{1}{z-a_j} = 0.$$

Поскольку при каждом фиксированном значении параметра $a \in D(a^0)$ функции $1/(z-a_i)$, $1/(z-a_j)$ линейно независимы над $\mathbb{C}$ (при $a_i \neq a_j$), то находящиеся при них коэффициенты должны быть равны нулю. Таким образом, уравнение $d\omega_s = \omega_s \wedge \omega_s$ оказывается эквивалентным системе

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_i(a)}{\partial a_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{14.4}$$

$$\frac{\partial B_i(a)}{\partial a_j} = \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j. \tag{14.5}$$

Домножив обе части (14.5) на da_j и сложив их по всем $j \neq i$, придем к соотношению

$$dB_i - \frac{\partial B_i}{\partial a_i}\, da_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}\, d(-a_j).$$

Теперь домножив обе части (14.5) на $-da_i$ и также сложив их по всем $j \neq i$, получим равенство

$$-\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial a_j}\, da_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}\, da_i.$$

Если при каждом $i = 1, \ldots, n$ мы сложим последние два уравнения и учтем соотношение (14.4), то как раз получим систему уравнений (14.3).

С другой стороны, нетрудно видеть, что уравнения (14.4), (14.5) следуют, в свою очередь, из соотношений (14.3). Тем самым условие $d\omega_s = \omega_s \wedge \omega_s$ для формы ω_s действительно эквивалентно системе уравнений (14.3). □

Система соотношений (14.3) называется *уравнением Шлезингера*. Следующая теорема — о существовании и единственности решения уравнения Шлезингера — позволяет говорить о том, что определяемый этим уравнением специальный вид изомонодромных деформаций фуксовой системы (14.1) действительно существует. Такие изомонодромные деформации называются *деформациями Шлезингера*.

Теорема 14.2. *Уравнение Шлезингера* (14.3) *имеет в* $D(a^0)$ *единственное решение* $\{B_1(a), \ldots, B_n(a)\}$, *удовлетворяющее начальным условиям* $B_i(a^0) = B_i^0$.

Доказательство. Вновь воспользуемся условием интегрируемости Фробениуса. Рассмотрим комплексное многообразие $D(a^0) \times \mathrm{gl}(p, \mathbb{C}) \times \ldots \times \mathrm{gl}(p, \mathbb{C})$ с координатами $(a, B_1, \ldots, B_n)$ и np^2 дифференциальных уравнений на этом многообразии, записанных в матричном виде

$$dB_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для любого набора начальных условий $B_1^0, \ldots, B_n^0$ эти уравнения имеют голоморфное в $D(a^0)$ решение $B_i = B_i(a)$, $B_i(a^0) = B_i^0$, если элементы матричных дифференциальных 1-форм

$$\Omega_i = dB_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[B_i,\, B_j]}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j)$$

удовлетворяют условию интегрируемости Фробениуса. Для того, чтобы проверить это, найдем дифференциалы $d\Omega_i$:

$$\begin{aligned}
d\Omega_i &= d^2 B_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} d[B_i,\, B_j] \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} = \\
&= \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} ([dB_i,\, B_j] + [B_i,\, dB_j]) \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} = \\
&= \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left[\Omega_i - \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \frac{[B_i,\, B_k]}{a_i - a_k}\, d(a_i - a_k),\, B_j\right] \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} + \\
&\quad + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left[B_i,\, \Omega_j - \sum_{k=1,\, k\neq j}^{n} \frac{[B_j,\, B_k]}{a_j - a_k}\, d(a_j - a_k)\right] \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j}.
\end{aligned}$$

Из вида форм $d\Omega_i$ следует, что для выполнения условия интегрируемости Фробениуса достаточно выполнения тождества $\Theta_i \equiv 0$, где

$$\begin{aligned}
\Theta_i = &-\sum_{j,\, k} [[B_i,\, B_k],\, B_j]\, \frac{d(a_i - a_k)}{a_i - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} - \\
&-\sum_{j,\, k} [B_i,\, [B_j,\, B_k]]\, \frac{d(a_j - a_k)}{a_j - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j}
\end{aligned}$$

(суммирование ведется по разным индексам j, k, не совпадающим с i). Заметим, что первая сумма в выражении для Θ_i может быть представлена в виде

$$-\sum_{j<k} \Big([[B_i,\, B_k],\, B_j] - [[B_i,\, B_j],\, B_k]\Big) \frac{d(a_i - a_k)}{a_i - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j}.$$

Учитывая тождество Якоби

$$[[B_i,\, B_k],\, B_j] + [[B_k,\, B_j],\, B_i] + [[B_j,\, B_i],\, B_k] = 0$$

и свойство $[B_j,\, B_i] = -[B_i,\, B_j]$ коммутатора двух матриц, получим соотношение

$$[[B_i,\, B_k],\, B_j] - [[B_i,\, B_j],\, B_k] = -[[B_k,\, B_j],\, B_i] = -[B_i,\, [B_j,\, B_k]].$$

Поэтому

$$\Theta_i = \sum_{j<k} [B_i, [B_j, B_k]] \frac{d(a_i - a_k)}{a_i - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} - \\ - \sum_{j,k} [B_i, [B_j, B_k]] \frac{d(a_j - a_k)}{a_j - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} = \\ = \sum_{j<k} [B_i, [B_j, B_k]] \frac{d(a_i - a_k)}{a_i - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} - \\ - \sum_{j<k} [B_i, [B_j, B_k]] \frac{d(a_j - a_k)}{a_j - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} - \\ - \sum_{j>k} [B_i, [B_j, B_k]] \frac{d(a_j - a_k)}{a_j - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} = \\ = \sum_{j<k} [B_i, [B_j, B_k]] \frac{d(a_i - a_k)}{a_i - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} - \\ - \sum_{j<k} [B_i, [B_j, B_k]] \frac{d(a_j - a_k)}{a_j - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_j)}{a_i - a_j} + \\ + \sum_{j<k} [B_i, [B_j, B_k]] \frac{d(a_j - a_k)}{a_j - a_k} \wedge \frac{d(a_i - a_k)}{a_i - a_k} = \\ = \sum_{j<k} [B_i, [B_j, B_k]] \Big(\frac{d(a_i - a_k) \wedge d(a_i - a_j)}{(a_i - a_k)(a_i - a_j)} - \\ - \frac{d(a_j - a_k) \wedge d(a_i - a_j)}{(a_j - a_k)(a_i - a_j)} + \frac{d(a_j - a_k) \wedge d(a_i - a_k)}{(a_j - a_k)(a_i - a_k)} \Big).$$

Поскольку дифференциальная 2-форма в последних скобках тождественно равна нулю (это проверяется непосредственно, приведением слагаемых к общему знаменателю $(a_i - a_j)(a_i - a_k)(a_j - a_k)$), то мы получаем требуемое равенство $\Theta_i \equiv 0$. □

Рассмотрим следующий пример изомонодромной деформации Шлезингера.

Пример 14.1. Семейство фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a a_i^0} \right) y$$

с постоянными матрицами коэффициентов, удовлетворяющими соотношению $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i = 0$, является изомонодромной деформацией Шлезингера (с параметром деформации $a \in D(1)$, где $D(1)$ — круг малого радиуса с центром в точке $1 \in \mathbb{C}$). Действительно, в этом случае уравнение Шлезингера (14.3) принимает вид

$$0 = dB_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[B_i,\, B_j]}{aa_i^0 - aa_j^0}\, d(aa_i^0 - aa_j^0) = \\ = -\sum_{j=1}^{n} [B_i,\, B_j]\, \frac{da}{a} = -\left[B_i,\, \sum_{j=1}^{n} B_j\right] \frac{da}{a} = 0,$$

поскольку $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j = 0$.

Отметим следующее свойство деформаций Шлезингера. Рассмотрим на T *пфаффову систему*

$$dy = \omega_s y, \quad y = y(z,\, a) \in \mathbb{C}^p,$$

с формой ω_s, удовлетворяющей условию $d\omega_s = \omega_s \wedge \omega_s$. Тогда для произвольной фундаментальной матрицы $Y^s(z,\, a)$ этой системы имеет место следующее тождество:

$$Y^s(\infty,\, a) \equiv \mathrm{const}. \tag{14.6}$$

Действительно, поскольку $dY^s = \omega_s Y^s$, то

$$\frac{\partial Y^s(z,\, a)}{\partial a_i} = -\frac{B_i(a)}{z - a_i} Y^s(z,\, a), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial Y^s(\infty,\, a)}{\partial a_i} = -\frac{B_i(a)}{z - a_i}\bigg|_{z=\infty} Y^s(\infty,\, a) = 0$$

для всех i, и тождество (14.6) имеет место.

Произвольные изомонодромные деформации не сводятся к одним лишь деформациям Шлезингера. В самом деле, для изомонодромной деформации Шлезингера исходной фуксовой системы (14.1) можно рассмотреть семейство с аналитической изомонодромной фундаментальной матрицей $Y'(z,\, a) = \Gamma(a) Y^s(z,\, a)$, где $\Gamma(a) \not\equiv \mathrm{const}$ — голоморфная в $D(a^0)$ матричная функция, $\Gamma(a^0) = I$. Новое семейство

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i'(a)}{z - a_i}\right) y, \quad B_i'(a) = \Gamma(a) B_i(a) \Gamma(a)^{-1},$$

также является изомонодромной деформацией системы (14.1), поскольку $B_i'(a^0) = B_i^0$, но определяющая его форма $\omega = (dY')Y'^{-1}$ имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i'(a)}{z - a_i}\, d(z - a_i) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(a)\, da_i, \tag{14.7}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i(a)\, da_i = (d\Gamma)\Gamma^{-1}$. Ясно, что матрицы $B_i'(a)$ не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнению Шлезингера, а для аналитической изомонодромной фундаментальной матрицы $Y'(z, a)$ этого семейства нормализующее условие (14.6) не будет выполнено.

Деформации, определяемые формами вида (14.7), будем называть *ненормализованными деформациями Шлезингера*.

Упражнения

14.1. Допустим, что бесконечность также является особой точкой изомонодромного семейства Шлезингера

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\right) y.$$

Покажите, что в этом случае $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(a) = \mathrm{const} \neq 0$.

14.2. Докажите следующие свойства решений уравнения Шлезингера.

1) Если матрицы $B_i(a)$ являются решением уравнения Шлезингера, то для любой $C \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ матрицы $CB_i(a)C^{-1}$ также являются решением уравнения Шлезингера.

2) Если $B_i(a)$, $B_i'(a)$ — два решения уравнения Шлезингера и $B_i'(a^0) = CB_i(a^0)C^{-1}$, то $B_i'(a) \equiv CB_i(a)C^{-1}$.

14.3. Покажите, что всякую изомонодромную деформацию, определяемую формой вида (14.7), можно нормализовать калибровочным преобразованием $y' = C(a)y$ (т. е. свести к деформации Шлезингера).

14.4. Деформации, задаваемые формами (14.2) и (14.7), не исчерпывают все возможные виды изомонодромных деформаций фуксовой системы. Для того чтобы увидеть это, рассмотрим семейство фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2a}{a^2-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{z+a} + \begin{pmatrix} 0 & -6a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 2 & 3+3a \\ \dfrac{1}{a+1} & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{z-1} + \begin{pmatrix} -3 & -3+3a \\ \dfrac{1}{a-1} & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{z+1} \right) y. \quad (14.8)$$

1) Докажите изомонодромность этого семейства, проверив, что для дифференциальной 1-формы

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2a}{a^2-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{d(z+a)}{z+a} + \begin{pmatrix} 0 & -6a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z} + \begin{pmatrix} 2 & 3+3a \\ \dfrac{1}{a+1} & -1 \end{pmatrix} \frac{d(z-1)}{z-1} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -3 & -3+3a \\ \dfrac{1}{a-1} & 2 \end{pmatrix} \frac{d(z+1)}{z+1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{2a}{a^2-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{da}{z+a}$$

выполняется условие $d\omega = \omega \wedge \omega$ и при каждом фиксированном значении параметра a форма ω совпадает с формой $B(z, a)\,dz$, где $B(z, a)$ — матрица коэффициентов семейства (14.8).

2) Покажите, что данная деформация не сводится к деформации Шлезингера (ни к нормализованной, ни к ненормализованной), поскольку форма ω не может быть сведена к форме (14.2) или (14.7) с помощью линейного преобразования $y' = C(a)y$.

3) Проверьте, что условие $Y(\infty, a) \equiv \mathrm{const}$ для фундаментальной матрицы пфаффовой системы $dy = \omega y$ выполнено, поэтому данный пример является примером так называемой *нормализованной регулярной деформации*.

14.5. Напомним, что особая точка a_i^0 фуксовой системы (14.1) нерезонансна, если никакие два собственных значения матрицы B_i^0 не отличаются на натуральное число.

1) Докажите, что в нерезонансном случае фуксова система однозначно определяется набором особых точек, монодромией и нормированиями. Это означает, что две фуксовы системы с одинаковыми наборами $\{a_1, \ldots, a_n\}$ нерезонансных особых точек, $\{G_1, \ldots, G_n\}$ матриц монодромии и $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ матриц нормирований связаны одна с другой с помощью линейного преобразования $y' = Cy$, где C — постоянная невырожденная матрица.

Указание. Воспользуйтесь тем, что в данном случае жорданов базис оператора монодромии в каждой особой точке является слабо левелевским.

2) Поскольку собственные значения матриц-вычетов $B_i(a)$ изомонодромного семейства (13.3) не зависят от a (см. упражнение 13.3), то можно говорить также о нерезонансном изомонодромном семействе. Докажите, что всякое такое семейство является либо деформацией Шлезингера, либо ненормализованной деформацией Шлезингера.

14.6. Назовем матрицами связи фуксовой системы матрицы $S_1, \ldots, S_n$ перехода от некоторой фундаментальной матрицы $Y(z)$ к соответствующим левелевским фундаментальным матрицам в каждой особой точке.

Докажите, что в общем (резонансном) случае фуксова система однозначно определяется набором особых точек, монодромией, показателями и матрицами связи.

Лекция 15

Классификация изомонодромных деформаций фуксовых систем

Теперь мы приведем описание общего вида формы ω из теоремы 13.2 — формы, определяющей изомонодромное семейство фуксовых систем. Но прежде чем переходить к формулировке основной теоремы этой лекции, рассмотрим следующее важное утверждение, которое по сути является *теоремой Левеля о виде решений фуксовой системы с параметром* (доказательство см. в приложении 2).

Рассмотрим в окрестности гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$ аналитическую изомонодромную фундаментальную матрицу $Y(z, a)$ изомонодромного семейства (13.3), матрица монодромии G_i которой имеет блочный диагональный вид $G_i = \operatorname{diag}(G_i^1, \ldots, G_i^k)$, где каждый блок G_i^j соответствует одному собственному значению матрицы G_i. Обозначим через $E_i = \operatorname{diag}(E_i^1, \ldots, E_i^k)$ матрицу $\dfrac{1}{2\pi i} \ln G_i$, собственные значения ρ_i^j которой нормализованы следующим образом:

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_i^j < 1.$$

Теорема 15.1. *Для каждой точки $a^* \in D(a^0)$ найдется такая ее окрестность $U' \subset D(a^0)$, что для указанной выше аналитической изомонодромной матрицы $Y(z, a)$ имеет место следующее разложение в окрестности гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$ при $a \in U'$:*

$$Y(z, a)S(a) = U(z, a)(z - a_i)^{\Lambda_i}(z - a_i)^{E_i(a)},$$

где

1) *матрица $S(a)$ голоморфно обратима в U' и имеет тот же самый блочно-диагональный вид, что и E_i;*

2) *матрица $U(z, a)$ голоморфно обратима в окрестности гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$;*

3) *матрица $\Lambda_i = \operatorname{diag}(\Lambda_i^1, \ldots, \Lambda_i^k)$ имеет тот же самый блочно-диагональный вид, что и E_i, где Λ_i^j — целочисленные диагональные матрицы, диагональные элементы которых — нормирования семейства* (13.3) *— образуют невозрастающую последовательность;*

4) *$E_i(a) = S^{-1}(a) E_i S(a)$ — верхнетреугольная матрица того же блочно-диагонального вида, что и E_i.*

Напомним, что особая точка $z = a_i$ фуксовой системы из семейства (13.3) называется *резонансной*, если для какой-либо пары собственных значений матрицы $B_i(a)$ их разность является натуральным числом (тогда матрица $B_i(a)$ называется резонансной). Наибольшее число r_i из всех таких разностей называется *максимальным i-резонансом системы.* Поскольку при изомонодромной деформации (13.3) собственные значения матриц $B_i(a)$ не меняются (они совпадают с показателями семейства — собственными значениями постоянных матриц $\Lambda_i + E_i$, см. следствие 6.1), то можно также говорить о резонансных изомонодромных семействах и их максимальных i-резонансах r_i.

Из вида матриц E_i, Λ_i в теореме 15.1 следует, что

$$r_i = \max_{j=1,\,\ldots,\,k} \big(\lambda_i^j - \mu_i^j\big), \tag{15.1}$$

где $\lambda_i^j \geqslant \ldots \geqslant \mu_i^j$ — диагональные элементы блока Λ_i^j матрицы $\Lambda_i = \operatorname{diag}(\Lambda_i^1, \ldots, \Lambda_i^k)$.

Теорема 15.2. *Любая матричная дифференциальная* 1*-форма* ω *на пространстве*

$$T = \big(\bar{\mathbb{C}} \times D(a^0)\big) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{z - a_i = 0\},$$

задающая изомонодромную деформацию (13.3) (*см. теорему* 13.2), *имеет вид*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\, d(z - a_i) + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{r_i} \frac{\gamma_{t,\,k,\,i}(a)}{(z - a_i)^t} + \gamma_k(a) \right) da_k, \tag{15.2}$$

где $\gamma_{t,\,k,\,i}(a)$, $\gamma_k(a)$ — *голоморфные в* $D(a^0)$ *матричные функции*, r_i — *максимальный i-резонанс семейства* (13.3).

Доказательство. Пусть $Y(z, a)$ — аналитическая изомонодромная фундаментальная матрица семейства (13.3) такая, что $\omega = (dY)Y^{-1}$, а C_i — такая постоянная невырожденная матрица, что $Y(z, a)C_i$ имеет матрицу монодромии G_i блочно-диагонального вида. Тогда по теореме 15.1 найдется открытое покрытие $\{D_\alpha\}$ шара $D(a^0)$, голоморфно обратимые в D_α матрицы $S_\alpha(a)$ того же блочно-диагонального вида, что и матрица G_i, и голоморфно обратимые в окрестности гиперплоскости $P_i = \{z - a_i = 0\}$ (при $a \in D_\alpha$) матрицы $U_\alpha(z, a)$ такие, что матрица $Y(z, a)C_i$ имеет следующее разложение в окрестности гиперплоскости P_i при $a \in D_\alpha$:

$$Y(z, a)C_i = U_\alpha(z, a)\,(z - a_i)^{\Lambda_i} S_\alpha^{-1}(a)(z - a_i)^{E_i}.$$

Поэтому в окрестности гиперплоскости P_i имеем

$$\omega = (dY)Y^{-1} = (dYC_i)(YC_i)^{-1} = \omega_1 + \omega_2,$$

где

$$\begin{aligned}\omega_1 = {} & \frac{\partial U_\alpha}{\partial z} U_\alpha^{-1}\, d(z-a_i) + \\ & + U_\alpha \left(\frac{\Lambda_i}{z-a_i} + (z-a_i)^{\Lambda_i} \frac{E_i^{\ \alpha}(a)}{z-a_i} (z-a_i)^{-\Lambda_i} \right) U_\alpha^{-1}\, d(z-a_i) + \\ & + \text{некоторая голоморфная форма} = \\ = {} & \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i) + \text{некоторая голоморфная форма.}\end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место, так как сумма первых двух слагаемых в выражении для формы ω_1 равна матрице коэффициентов семейства (13.3), умноженной на $d(z-a_i)$.

Ясно, что форма ω_2 имеет вид

$$\omega_2 = U_\alpha\, (z-a_i)^{\Lambda_i} (dS_\alpha^{-1}) S_\alpha\, (z-a_i)^{-\Lambda_i} U_\alpha^{-1}.$$

Заметим, что форма ω_2 имеет полюс порядка не больше чем r_i вдоль гиперплоскости P_i в силу блочно-диагональной структуры матриц Λ_i и S_α и определения (15.1) максимального i-резонанса r_i изомонодромного семейства. Таким образом,

$$\omega_2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{r_i} \frac{\gamma_{t,\,k,\,i}(a)}{(z-a_i)^t} \right) da_k + \text{некоторая голоморфная форма,}$$

где $\gamma_{t,\,k,\,i}(a)$ — голоморфные в $D(a^0)$ матрицы.

Следовательно, в окрестности гиперплоскости P_i форма ω имеет вид

$$\omega = \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i) + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{r_i} \frac{\gamma_{t,\,k,\,i}(a)}{(z-a_i)^t} \right) da_k + \\ + \text{некоторая голоморфная форма.}$$

По построению матричная дифференциальная 1-форма

$$\gamma = \omega - \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i) - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{r_i} \frac{\gamma_{t,\,k,\,i}(a)}{(z-a_i)^t} \right) da_k$$

голоморфна на $\bar{\mathbb{C}} \times D(a^0)$, поэтому $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(a)\, da_k$, где $\gamma_k(a)$ — голоморфные в $D(a^0)$ матрицы (γ не содержит слагаемое с дифференциалом dz, поскольку на сфере Римана нет ненулевых голоморфных дифференциальных форм, а коэффициенты γ_k не зависят от z, поскольку всякая голоморфная на сфере Римана функция постоянна). □

Следствие 15.1. *Если все матрицы* $B_i(a)$ *семейства* (13.3) *не имеют резонансов, то любая форма* ω, *задающая изомонодромную деформацию* (13.3), *имеет вид*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(a)\, da_i. \tag{15.3}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае $r_i = 0$ для любого i. □

Это следствие показывает, что слагаемое

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{r_i} \frac{\gamma_{t,k,i}(a)}{(z-a_i)^t} \right) da_k$$

в выражении (15.2) для формы ω, задающей изомонодромную деформацию, появляется только в случае резонансного семейства.

Следствие 15.2. *Если для каждой матрицы монодромии* G_i *семейства* (13.3) *и для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *имеет место неравенство*

$$\operatorname{rank}(G_i - \lambda I) \geqslant p-1,$$

то изомонодромная деформация (13.3) *задается дифференциальной формой* ω *вида* (15.3).

Доказательство. Условие следствия означает, что любую аналитическую изомонодромную фундаментальную матрицу $Y(z, a)$ умножением справа на некоторую постоянную невырожденную матрицу C_i можно привести к такому виду, что каждый блок G_i^j ее матрицы монодромии $G_i = \operatorname{diag}(G_i^1, \ldots, G_i^k)$ будет жордановой клеткой. В первой части лекций было показано (см. пример 5.2), что в этом случае при каждом фиксированном $a \in D(a^0)$ столбцы матрицы $Y(z, a)C_i$ образуют слабо левелевский базис в пространстве решений соответствующей системы из семейства (13.3), т. е. к матрице $Y(z, a)C_i$ применима теорема 15.1, где матрицу $S(a)$ можно выбрать единичной. Тогда, как следует из доказательства теоремы 15.2, в окрестности гиперплоскости $P_i = \{z - a_i = 0\}$ форма ω имеет вид

$$\omega = \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i) + \text{некоторая голоморфная форма.}$$

Поэтому матричная дифференциальная 1-форма

$$\gamma = \omega - \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i)$$

голоморфна на $\overline{\mathbb{C}} \times D(a^0)$, т. е. имеет вид $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i(a)\, da_i$, где $\gamma_i(a)$ — голоморфные в $D(a^0)$ матрицы. □

Каждая дифференциальная форма ω, задающая изомонодромную деформацию (13.3), имеет вид $\omega = \omega_s + \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i(z, a)\, da_i$ (см. (15.2), (14.2)). При этом слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i(z, a)\, da_i$ не определяется однозначно «главной частью» ω_s (мы называем эту часть главной, потому что она выписывается непосредственно по коэффициентам фуксова семейства). Например, как говорилось в конце лекции 13, к форме ω можно добавить форму $df(a)I$ (где $f(a)$ — голоморфная в $D(a^0)$ функция), изменяющую слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i(z, a)\, da_i$. Новая форма будет задавать ту же изомонодромную деформацию (13.3), что и форма ω. Однако в случае, когда монодромия фуксова семейства (13.3) неприводима, добавление произвольной формы вида $df(a)I$ — это единственная неоднозначность, которая может возникнуть в выборе формы ω. А именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 15.1. *Если монодромия фуксова семейства* (13.3) *неприводима, то дифференциальная* 1*-форма* ω, *задающая изомонодромную деформацию* (13.3) (*см. теорему* 13.2), *определяется однозначно семейством* (13.3) *с точностью до слагаемого* $df(a)f^{-1}(a)I$, *где* $f(a)$ — *произвольная голоморфная в* $D(a^0)$ *функция, не обращающаяся в нуль.*

Доказательство. Рассмотрим аналитическую изомонодромную матрицу $Y(z, a)$ семейства (13.3) с матрицами монодромии G_i, для которой $\omega = (dY)Y^{-1}$. Любая другая аналитическая изомонодромная матрица $Y'(z, a)$ имеет вид $Y'(z, a) = Y(z, a)R(a)$, где $R(a)$ — голоморфно обратимая в $D(a^0)$ матрица. Матрицы монодромии $R^{-1}(a)G_iR(a)$, соответствующие изомонодромной матрице $Y'(z, a)$, не должны зависеть от a, поэтому для любого i имеем

$$R^{-1}(a)G_iR(a) = R^{-1}(a^0)G_iR(a^0), \quad R(a^0)R^{-1}(a)G_iR(a)R^{-1}(a^0) = G_i.$$

Тогда из леммы Шура следует, что $R(a)R^{-1}(a^0) = f(a)I$ — скалярная матрица, где $f(a)$ — некоторая голоморфная в $D(a^0)$ функция, не обращающаяся в нуль. Поэтому $R(a) = f(a)R(a^0)$ и

$$\omega' = (dY')Y'^{-1} = (dY)Y^{-1} + Y(dR)R^{-1}Y^{-1} = \omega + df(a)f^{-1}(a)I. \quad \square$$

Если монодромия семейства (13.3) приводима, то оно может иметь нетривиальные симметрии вида

$$y' = \Gamma(z, a)y, \quad \Gamma(z, a) = Y(z, a)C(a)Y^{-1}(z, a),$$

где матрица $C(a)$ голоморфна и принадлежит централизатору матриц монодромии G_i аналитической изомонодромной матрицы $Y(z, a)$ (т. е.

$G_i C(a) G_i^{-1} = C(a)$ для всех i). Действительно, тогда матрица $\Gamma(z, a)$, задающая преобразование, однозначна и голоморфна на пространстве $T = \big(\bar{\mathbb{C}} \times D(a^0)\big) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{z - a_i = 0\}$, а преобразованная матрица $Y'(z, a) = \Gamma(z, a) Y(z, a) = Y(z, a) C(a)$ также является аналитической изомонодромной фундаментальной матрицей семейства (13.3). Такие симметрии приводят к появлению различных дифференциальных 1-форм $\Gamma\omega\Gamma^{-1} + (d\Gamma)\Gamma^{-1}$, задающих данную деформацию (13.3).

Упражнения

15.1. Проиллюстрируйте теорему 15.2 примером из упражнения 14.4.

15.2. Покажите, что если изомонодромное семейство фуксовых систем нерезонансно и для его аналитической изомонодромной матрицы $Y(z, a)$, являющейся фундаментальной матрицей пфаффовой системы $dy = \omega y$, выполнено условие нормализации $Y(\infty, a) \equiv \mathrm{const}$ (см. (14.6)), то данная изомонодромная деформация является деформацией Шлезингера, т. е. $\omega = \omega_s$.

15.3. Докажите, что матрицы S из теоремы 15.1 (матрицы связи) постоянны тогда и только тогда, когда изомонодромная деформация (13.3) задается дифференциальной формой ω вида (15.3).

Лекция 16

Подвижные особенности уравнения Шлезингера — 1

В следующих двух лекциях мы изложим геометрический подход к исследованию уравнения Шлезингера, предложенный Б. Мальгранжем[1].

Рассмотрим фуксову систему из семейства (13.3) при $a = a^0$ с матричной 1-формой коэффициентов $\omega^0 = \sum\limits_{i=1}^{n} (B_i^0/(z - a_i^0))\,dz$ как формой связности ∇^s в голоморфно тривиальном векторном расслоении F^s ранга p на сфере Римана. Обозначим через χ монодромию

$$\chi\colon \pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}, z_0) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

связности ∇^s (монодромию фуксовой системы).

Рассмотрим универсальное накрытие Z пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$, проекции

$$p_i\colon Z \to \mathbb{C}, \quad p_i(\tilde{a}) = a_i$$

(здесь подразумевается, что при накрытии $Z \to \mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ точка $\tilde{a}$ переходит в $(a_1, \ldots, a_n)$), и множества

$$D_i = \{(z, \tilde{a}) \mid z = p_i(\tilde{a})\} \subset \bar{\mathbb{C}} \times Z, \quad D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Поскольку вложение

$$i\colon (\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}, z_0) \hookrightarrow \big((\bar{\mathbb{C}} \times Z) \setminus D, (z_0, \tilde{a}^0)\big), \quad i(z) = (z, \tilde{a}^0),$$

индуцирует гомоморфизм i_* соответствующих фундаментальных групп, который является изоморфизмом (это следует из точной гомотопической

[1] Предпошлем приводимым далее точным формулировкам неформальное пояснение. В лекциях 13—15 параметр a был близок к параметру a^0 некоторой исходной системы. Теперь же мы хотели бы рассматривать все возможные значения a, т. е. допустить в качестве параметра любые наборы $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ с единственным ограничением, что $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Буквально это означало бы, что параметр является точкой пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. Однако оно неодносвязно (см. приложение 4) и потому решения $B_i(a)$ уравнения Шлезингера могут быть многозначными функциями от a. Как обычно, мы избавимся от многозначности, рассматривая B_i как функции на универсальном накрытии Z данного пространства.

последовательности расслоения $(\mathbb{C}\times Z)\setminus D\to Z$, см. приложение 4), мы получаем представление

$$\pi_1\big((\bar{\mathbb{C}}\times Z)\setminus D,\,(z_0,\,\tilde a^0)\big)\xrightarrow{\chi\circ i_*^{-1}}\mathrm{GL}(p,\,\mathbb{C}),$$

которое снова будем обозначать через χ.

Определение 16.1. Мероморфная (с особенностями вдоль D) связность ∇, заданная в голоморфном векторном расслоении F на $\bar{\mathbb{C}}\times Z$, называется *логарифмической*, если в локальных координатах $(z',\,a_1,\,\ldots$ $\ldots,\,a_n)$ (таких, что D задается в них уравнением $z'=0$) форма ω связности имеет вид

$$\omega = B_0\frac{dz'}{z'}+B_1\,da_1+\ldots+B_n\,da_n,$$

где $B_i(z',\,a)$ — голоморфные матричные функции.

Как и в случае одномерной базы, построим по представлению χ голоморфное векторное расслоение F' на $(\bar{\mathbb{C}}\times Z)\setminus D$ с голоморфной связностью ∇'. Далее продолжим построенное расслоение на все пространство $\bar{\mathbb{C}}\times Z$ до расслоения F с логарифмической вдоль D связностью ∇, совпадающей с исходной связностью ∇' вне множества особенностей D. Для этого продолжим F' на каждое подмножество $D_i\subset D$. В новой координате $z'=z-p_i(\tilde a)$ имеем $D_i=\{0\}\times Z$. Рассмотрим трубчатую окрестность W множества D_i такую, что $W\subset f^{-1}(U)$, где

$$f\colon \bar{\mathbb{C}}\times Z\to\bar{\mathbb{C}},\qquad f(z',\,\tilde a)=z',$$

— проекция и $U\subset\mathbb{C}$ — диск с центром в нуле. Тогда

$$(F'',\,\nabla'')=(f^*(F^s),\,f^*(\nabla^s))$$

— голоморфно тривиальное расслоение над W с логарифмической вдоль $D_i=f^{-1}(0)$ связностью ∇'', задаваемой формой $f^*\omega^0$. Склеивая локальные горизонтальные сечения расслоения $F'|_{(W\setminus D_i)}$ и соответствующие (имеющие ту же монодромию) горизонтальные сечения расслоения F'' для всех i, мы получим расслоение F на $\bar{\mathbb{C}}\times Z$ с логарифмической вдоль D связностью ∇ такое, что

$$(F,\,\nabla)|_{\bar{\mathbb{C}}\times\{\tilde a^0\}}=(F^s,\,\nabla^s),$$

т. е. пара $(F,\,\nabla)$ является продолжением пары $(F^s,\,\nabla^s)$.

Отметим, что ограничение расслоения F на $\bar{\mathbb{C}}\times\{\tilde a^0\}$ является голоморфно тривиальным и, стало быть, его степень равна нулю. Поскольку при изомонодромной деформации собственные значения матриц-вычетов связности не меняются, то расслоение F, ограниченное на $\bar{\mathbb{C}}\times\{\tilde a\}$, имеет нулевую степень для любой точки $\tilde a\in Z$ (напомним, что степень такого расслоения равна сумме всех собственных значений матриц-вычетов связности по всем особым точкам).

Следующая важная теорема принадлежит Мальгранжу (элементарное доказательство представлено в приложении 3).

Теорема 16.1 (Мальгранж). *Расслоение F голоморфно тривиально над $\bar{\mathbb{C}} \times (Z \setminus \Theta)$, где Θ — аналитическое подмножество множества Z коразмерности один (либо это пустое множество, что также возможно)*[1]. *Множество Θ состоит из тех точек $a^* \in Z$, для которых расслоение $F|_{\bar{\mathbb{C}} \times \{a^*\}}$ не является голоморфно тривиальным.*

Исключительное множество Θ называют Θ-*дивизором Мальгранжа.*

Как было показано ранее, для любых начальных данных уравнение Шлезингера имеет единственное решение $B_1(a), \ldots, B_n(a)$ в некотором диске $D(a^0)$. Мальгранжем также было установлено, что *матрицы $B_1(a), \ldots, B_n(a)$ могут быть продолжены на все пространство Z как мероморфные функции с особенностями вдоль Θ.*

Особые точки продолженных функций $B_1(a), \ldots, B_n(a)$ называются *подвижными особенностями* уравнения Шлезингера (поскольку их расположение зависит от начальных условий $B_1(a^0), \ldots, B_n(a^0)$). Тогда последнее утверждение означает, что *решения уравнения Шлезингера могут иметь в качестве подвижных особых точек только полюсы*[2].

Поскольку при изомонодромной деформации сохраняется не только монодромия, но и нормирования системы в особых точках (см. теорему 15.1), то подвижные особенности уравнения Шлезингера могут быть проинтерпретированы также следующим образом.

Точка a^* является особой точкой решения $\{B_1(a), \ldots, B_n(a)\}$ уравнения Шлезингера, если обобщенная проблема Римана—Гильберта, состоящая в построении фуксовой системы с особенностями $a_1^*, \ldots, a_n^*$ и заданной монодромией и матрицами нормирований, определяемыми исходной системой, имеет отрицательное решение[3].

---

[1] Аналитическое подмножество коразмерности один локально определяется как множество нулей голоморфной функции, т. е. для каждой точки $a^* \in \Theta$ найдутся окрестность $U^* \ni a^*$ и голоморфная в U^* функция $\tau^*(a)$ такие, что $\Theta \cap U^* = \{\tau^*(a) = 0\}$. Функция $\tau^*(a)$ называется *локальной τ-функцией расслоения F* (локальной τ-функцией уравнения Шлезингера). Если $d\tau^*|_{a=a^*} \not\equiv 0$, то по теореме о неявной функции в окрестности точки a^* множество Θ является подмногообразием размерности $n-1$ (см. теорему 16.2 далее).

[2] В таком случае говорят, что уравнение Шлезингера удовлетворяет *свойству Пенлеве*. Мы вернемся к этому свойству в лекции 18.

[3] Формально здесь a и a^* являются точками универсального накрытия Z, но поскольку нас интересуют локальные свойства решений уравнения Шлезингера в окрестности Θ-дивизора, биголоморфно эквивалентной шару в $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$, то в дальнейшем можно понимать под a и a^* соответственно координаты $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$ этих точек.

Мы называем такую проблему Римана—Гильберта «обобщенной», поскольку данные монодромии включают в себя также и асимптотики решений (показатели в особых точках). Эта проблема предъявляет больше требований, чем классическая, которой была посвящена первая часть лекций, и может иметь отрицательное решение даже для двумерного представления (см. упражнение 16.2).

В случае размерности $p=2$ мы дополняем результаты Мальгранжа следующей теоремой.

Теорема 16.2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *представление монодромии χ неприводимо*;

2) *в точке $a^* \in \Theta$ расслоение $F|_{\bar{\mathbb{C}}\times\{a^*\}}$ имеет тип расщепления* $(1, -1)$.

Тогда локально возле точки a^* множество $\Theta \subset Z$ является аналитическим подмногообразием, а решения $B_1(a), \ldots, B_n(a)$ уравнения Шлезингера изомонодромной деформации исходной фуксовой системы имеют полюсы не более второго порядка вдоль Θ около точки a^*.

Последнее означает, что решения уравнения Шлезингера, умноженные на $\tau^*(a)^2$, становятся голоморфными в окрестности точки a^* (где $\tau^*(a)$ — локальная τ-функция расслоения F).

Мы докажем теорему 16.2 в следующей лекции, а сначала приведем простой способ вычисления Θ-дивизора.

Рассмотрим точку $a^* \in \Theta$ и вспомогательную систему

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{{}^*B_i}{z-a_i^*}\right) y,$$

имеющую фуксову особенность и единичную матрицу монодромии в бесконечности и такую, что

1) сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} {}^*B_i$ равна $K = \operatorname{diag}(k_1, \ldots, k_p)$, где $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_p$, матрица K задает тип расщепления расслоения $F|_{\bar{\mathbb{C}}\times\{a^*\}}$ и $\operatorname{tr} K = 0$ (так как степень рассматриваемого расслоения равна нулю);

2) одна из фундаментальных матриц системы в бесконечности имеет вид

$$Y^*(z) = U(z)z^K, \quad U(z) = I + U_1\frac{1}{z} + U_2\frac{1}{z^2} + \ldots,$$

причем дополнительно

$$U(z)z^K = z^K V(z) \tag{16.1}$$

для некоторой голоморфно обратимой в бесконечности матрицы $V(z)$.

Существование матрицы $Y^*(z)$ указанного вида следует из доказательства теоремы 10.3. Поскольку $U(\infty)=I$, то матрица $-K$ нормирований системы в бесконечности совпадает с вычетом матрицы коэффициентов системы в бесконечности, откуда следует п. 1[1].

Пусть $c_1<\ldots<c_t$ — различные числа из совокупности $\{k_1, \ldots, k_p\}$. Тогда $K=\operatorname{diag}(c_1I_1, \ldots, c_tI_t)$, где размер соответствующей единичной матрицы I_j совпадает с кратностью числа c_j. Для произвольной матрицы A рассмотрим разбиение этой матрицы на блоки A^{lm} в соответствии с введенной блочной структурой матрицы K. Тогда из (16.1) получаем, что для любых $m>l$ выполнено

$$U_i^{lm}=0, \quad \text{если } i<c_m-c_l. \tag{16.2}$$

Включим построенную фуксову систему в изомонодромное семейство Шлезингера

$$\frac{dy}{dz}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i}\right)y, \quad {}^*B_i(a^*)={}^*B_i, \quad \sum_{i=1}^{n}{}^*B_i(a)=K, \tag{16.3}$$

определяемое 1-формой

$$\omega^*=\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i}\,d(z-a_i).$$

Обозначим через $Y(z, a)$ фундаментальную матрицу пфаффовой системы $dy=\omega^*y$, имеющую вид

$$\begin{gathered}Y(z, a)=U(z, a)z^K,\\ U(z, a)=I+U_1(a)\frac{1}{z}+U_2(a)\frac{1}{z^2}+\ldots,\end{gathered} \tag{16.4}$$

в бесконечности и такую, что $Y(z, a^*)=Y^*(z)$.

Поскольку

$$\frac{\partial Y(z, a)}{\partial a_i}Y^{-1}(z, a)=-\frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{{}^*B_i(a)}{1-\frac{a_i}{z}},$$

то из (16.4) следует, что

$$\begin{multlined}\frac{\partial U_1(a)}{\partial a_i}\frac{1}{z}+\frac{\partial U_2(a)}{\partial a_i}\frac{1}{z^2}+\ldots=\left(-{}^*B_i(a)\frac{1}{z}-{}^*B_i(a)a_i\frac{1}{z^2}-\ldots\right)\times\\ \times\left(I+U_1(a)\frac{1}{z}+U_2(a)\frac{1}{z^2}+\ldots\right).\end{multlined}$$

[1] Мы оставим здесь без доказательства основное утверждение — соотношение (16.1), которое приводится в [4] (лемма 4.6.1).

И мы получаем соотношение

$$\frac{\partial U_1(a)}{\partial a_i} = -{}^*B_i(a). \tag{16.5}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 16.1. *Среди элементов блоков* ${}^*B_i^{lm}(a)$, $i = 1, \ldots, n$, *с индексами* l, m *такими, что* $c_m - c_l > 1$, *всегда найдется по крайней мере один, не равный тождественно нулю.*

Доказательство. Предположим, что все элементы рассматриваемых блоков тождественно равны нулю. Тогда для каждого фиксированного a калибровочное преобразование $\tilde{y} = z^{-K} y$ переводит систему (16.3) в систему с матрицей коэффициентов

$$\frac{-K}{z} + z^{-K}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{{}^*B_i(a)}{z - a_i}\right) z^K,$$

все блоки которой имеют в бесконечности нуль не менее второго порядка, за исключением, быть может, блоков с индексами типа $(l,\, l+1)$, если $c_{l+1} - c_l = 1$. Ненулевые блоки такого типа имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} {}^*B_i^{l,\, l+1}(a) z/(z - a_i),$$

т. е. обращаются в нуль в бесконечности (так как $\sum\limits_{i=1}^{n} {}^*B_i^{l,\, l+1}(a) = 0$).

Следовательно, преобразованная система может иметь не более чем фуксову особенность в бесконечности, причем вычет ${}^*B_\infty(a)$ формы коэффициентов этой системы в бесконечности является нильпотентной матрицей (ненулевыми блоками матрицы ${}^*B_\infty(a)$ могут быть только блоки с индексами типа $(l,\, l+1)$). Но тогда матрица ${}^*B_\infty(a)$ нерезонансна и, вследствие предложения 6.1, матрица монодромии преобразованной системы в бесконечности равна $e^{2\pi i\, {}^*B_\infty(a)}$, и она же должна быть единичной, что возможно только если ${}^*B_\infty(a) = 0$. Поэтому преобразованная система не имеет особенности в бесконечности.

Но голоморфность преобразованной системы в бесконечности означает выполнение для всех a следующего соотношения, сходного с (16.1):

$$U(z,\, a) z^K = z^K V(z,\, a)$$

для некоторой голоморфно обратимой матрицы $V(z,\, a)$. Но в свою очередь, это соотношение означает, что тип расщепления расслоения $F|_{\bar{\mathbb{C}} \times \{a\}}$ определяется диагональными элементами матрицы K для всех a, что противоречит голоморфной тривиальности расслоения F вне множества Θ. $\square$

Следствие 16.1. *Среди элементов блоков $U_1^{lm}(a)$ с индексами l, m такими, что $c_m - c_l > 1$, найдется по крайней мере один, не равный тождественно нулю.*

Доказательство. Следует немедленно из соотношения (16.5). $\square$

Пусть $u_1(a)$ — ненулевой элемент блока $U_1^{lm}(a)$ из следствия 16.1. Обозначим через α, β его индексы в матрице $U_1(a)$.

Поскольку

$$\frac{dY(z,\, a)}{dz} Y^{-1}(z,\, a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{{}^*B_i(a)}{z - a_i} = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{n} \frac{{}^*B_i(a)}{1 - \frac{a_i}{z}},$$

то из (16.4) получаем соотношение

$$- U_1(a)\frac{1}{z^2} + o(z^{-2}) + \left(I + U_1(a)\frac{1}{z} + o(z^{-1})\right)\frac{K}{z} =$$
$$= \left(\frac{K}{z} + \left(\sum_{i=1}^{n} {}^*B_i(a)a_i\right)\frac{1}{z^2} + o(z^{-2})\right)\left(I + U_1(a)\frac{1}{z} + o(z^{-1})\right).$$

Следовательно,

$$-U_1 + [U_1,\, K] = \sum_{i=1}^{n} {}^*B_i(a)a_i.$$

Поэтому

$$-u_1(a) + k_\beta u_1(a) - k_\alpha u_1(a) = \sum_{i=1}^{n} {}^*b_i^{\alpha\beta}(a)a_i,$$

где ${}^*b_i^{\alpha\beta}(a)$ — элемент матрицы ${}^*B_i(a)$, расположенный на месте $(\alpha,\, \beta)$. Обозначим через $b_1(a)$ сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} {}^*b_i^{\alpha\beta}(a)a_i$. Тогда

$$u_1(a) = cb_1(a), \quad \text{где } c = \frac{1}{k_\beta - k_\alpha - 1} = \frac{1}{c_m - c_l - 1}.$$

Рассмотрим матрицу $\Gamma_1'(z,\, a) = I + \mathcal{E}_{\beta\alpha}$, где $\mathcal{E}_{\beta\alpha}$ — матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента с индексами β, α, который равен $-z/(cb_1(a))$. Учитывая вид матрицы $U(z,\, a)$, получаем, что матрица $U'(z,\, a) = \Gamma_1' U(z,\, a)$ выглядит следующим образом:

$$U'(z,\, a) = \left(U_0'(a) + U_1'(a)\frac{1}{z} + \ldots\right)z^L,$$

где L — диагональная матрица с двумя ненулевыми элементами: 1 на месте $(\alpha,\, \alpha)$ и -1 на месте $(\beta,\, \beta)$, при этом функция $\det U_0'(a)$ не обращается в нуль (проверьте это).

Рассмотрим матрицу $\Gamma_1(z, a) = U_0'(a)^{-1}\Gamma_1'(z, a)$. Калибровочное преобразование $y_1 = \Gamma_1(z, a)y$ преобразует систему семейства (16.3) в фуксову систему с матрицами вычетов $B_i^1(a)$ и фундаментальной матрицей $Y^1(z, a) = \Gamma_1(z, a)Y(z, a)$ вида (16.4) в бесконечности, где все вовлеченные матрицы снабжены теперь верхним индексом 1 и $K^1 = K + L$ (можно считать, что диагональные элементы матрицы K^1 вновь упорядочены по возрастанию, так как этого всегда можно добиться умножением матрицы $Y^1(z, a)$ справа на постоянную невырожденную матрицу). Данное разложение имеет место лишь вне некоторого аналитического подмножества Θ_1 коразмерности один, которое является множеством нулей функции $b_1(a) \not\equiv 0$ (это множество содержит точку a^*, поскольку $b_1(a^*) = u_1(a^*)/c$ и $U_1^{lm}(a^*) = U_1^{lm} = 0$ в силу (16.2)).

Важно заметить, что полученное семейство также является изомонодромным семейством Шлезингера (проверьте это, воспользовавшись упражнением 15.3 и тем, что матрицы $S_1, \ldots, S_n$, $S_\infty = I$ связи семейства (16.3) не зависели от a и не изменились после преобразования $y_1 = \Gamma_1(z, a)y$, голоморфно обратимого в точках $a_1, \ldots, a_n$, а также соотношением $U^1(\infty, a) \equiv I$).

Обозначим через $|K|$ число $|K| = \sum\limits_{i=1}^{p}(k_i)^2$. Тогда согласно приведенному построению $|K^1| \leqslant |K| - 2$. Действительно,

$$|K^1| - |K| = (k_\alpha + 1)^2 + (k_\beta - 1)^2 - (k_\alpha)^2 - (k_\beta)^2 = 2(1 + k_\alpha - k_\beta) \leqslant -2.$$

Если $K^1 \neq 0$, то из того, что $\operatorname{tr} K^1 = 0$, следует существование по крайней мере двух элементов k_i^1, k_j^1 матрицы K^1, удовлетворяющих условию $k_i^1 - k_j^1 > 1$, $i > j$, и таким образом процедуру, описанную выше, можно применить еще раз. Через конечное число s шагов получим фуксово семейство с матрицами вычетов $B_i^s(a)$, голоморфное в бесконечности. Это итоговое семейство будет калибровочно эквивалентно исходному семейству (13.3) с помощью постоянного калибровочного преобразования, т. е. $B_i^s(a) = C^{-1}B_i(a)C$, $i = 1, \ldots, n$, где C — постоянная невырожденная матрица (следует из теоремы единственности для уравнения Шлезингера, см. также упражнение 14.2). И мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 16.1. *Особое множество Θ в окрестности точки a^* совпадает со множеством нулей функции*

$$\tau^*(a) = b_1(a) \ldots b_s(a),$$

где $b_j(a)$ появляется на j-м шаге процедуры, описанной выше, таким же образом, как и функция $b_1(a)$.

Для иллюстрации приведенного метода рассмотрим следующий пример.

Пример 16.1. Фуксова система

$$\frac{dy}{dz}=\left(\frac{1}{z}\begin{pmatrix}0&-3\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{z-1}\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\end{pmatrix}+\frac{1}{z+1}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{z-2}\begin{pmatrix}0&-1\\4&0\end{pmatrix}\right)y \quad (16.6)$$

имеет особые точки $a_1^*=0$, $a_2^*=1$, $a_3^*=-1$, $a_4^*=2$ и ∞. Вычет формы коэффициентов системы в бесконечности равен матрице $-K=\mathrm{diag}(1,\,-1)$, а нормирования в бесконечности суть 1 и -1. Калибровочное преобразование $y'=z^{-K}y$ преобразует эту систему в систему

$$\frac{dy'}{dz}=\left(\frac{1}{z}\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix}+\frac{1}{z-1}\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\end{pmatrix}+\frac{1}{z+1}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{z-2}\begin{pmatrix}0&-4\\1&0\end{pmatrix}\right)y',$$

голоморфную в бесконечности. Это означает, что одна из фундаментальных матриц системы (16.6) в бесконечности имеет вид

$$Y^*(z)=U(z)z^K=z^KV(z),$$

где $U(z)$, $V(z)$ — голоморфно обратимые в бесконечности матрицы. Поэтому систему (16.6) можно рассматривать как вспомогательную систему для некоторого изомонодромного семейства, которое будет построено позже.

Действуя так же, как и ранее, включим эту систему в изомонодромное семейство Шлезингера (16.3).

Используя уравнение Шлезингера

$$d\,{}^*B_i(a)=-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{4}\frac{[\,{}^*B_i(a),\,{}^*B_j(a)]}{a_i-a_j}\,d(a_i-a_j)$$

и начальные условия

$${}^*B_1(a^*)=\begin{pmatrix}0&-3\\0&0\end{pmatrix},\quad {}^*B_2(a^*)=\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\end{pmatrix},$$
$${}^*B_3(a^*)=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix},\quad {}^*B_4(a^*)=\begin{pmatrix}0&-1\\4&0\end{pmatrix},$$

нетрудно вычислить разложения в ряд Тейлора в точке $a^*=(0,\,1,\,-1,\,2)$ для каждой матрицы ${}^*B_i(a)$. В частности, для элементов ${}^*b_i^{12}(a)$ этих матриц получаем

$${}^*b_1^{12}=-3+6a_1-6(a_3+1)+o(|a-a^*|),$$
$${}^*b_2^{12}=3-3(a_2-1)+3(a_3+1)+o(|a-a^*|),$$
$${}^*b_3^{12}=1-6a_1+3(a_2-1)+\frac{11}{3}(a_3+1)-\frac{2}{3}(a_4-2)+o(|a-a^*|),$$
$${}^*b_4^{12}=-1-\frac{2}{3}(a_3+1)+\frac{2}{3}(a_4-2)+o(|a-a^*|).$$

Поэтому

$$b_1(a) = {}^*b_1^{12}(a)a_1 + {}^*b_2^{12}(a)a_2 + {}^*b_3^{12}(a)a_3 + {}^*b_4^{12}(a)a_4 =$$
$$= 3a_1 - 3a_2 - a_3 + a_4 + o(|a - a^*|).$$

Другими словами, мы вычислили комплексную касательную гиперплоскость в точке $a^* = (0,\ 1,\ -1,\ 2)$ к особому множеству Θ для изомонодромного семейства Шлезингера, которое было получено из семейства (16.3) с помощью калибровочного преобразования $y_1 = \Gamma_1(z,\ a)y$, описанного выше.

Действуя таким же образом, нетрудно вычислить m-струю функции $b_1(a)$ для любого m.

Упражнения

16.1. Проделайте самостоятельно вычисления, приводящие к выражениям для функций ${}^*b_1^{12}(a)$, ${}^*b_2^{12}(a)$, ${}^*b_3^{12}(a)$, ${}^*b_4^{12}(a)$ из примера 16.1.

16.2. Рассмотрим фуксову систему

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{1}{z}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{2(z-1)}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{6(z+1)}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3(z-1/2)}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right)y \qquad (16.7)$$

с четырьмя особыми точками $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1/2$.

1) Покажите, что преобразование $y' = z^{-\Lambda_1}y$, где $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(1,\ -1)$ — матрица нормирований системы в точке $a_1 = 0$, переводит эту систему в систему, для которой точка 0 также является фуксовой, но нормирования в ней равны нулю. Выведите отсюда, что система (16.7) в окрестности нуля обладает фундаментальной матрицей вида

$$Y(z) = z^{\Lambda_1}V(z)z^{E_1},$$

где $V(z)$ — голоморфно обратимая в нуле матрица, а E_1 — нормализованный логарифм матрицы монодромии системы в нуле.

2) Покажите, что расслоение F^0 с логарифмической связностью ∇^0, построенное по представлению монодромии системы (16.7) и набору нулевых матриц нормирований, имеет тип расщепления $(1,\ -1)$, т. е. голоморфно нетривиально.

Последнее означает, что обобщенная проблема Римана—Гильберта для особых точек $0,\ 1,\ -1,\ 1/2$, представления монодромии системы (16.7) и нулевых матриц нормирований имеет отрицательное решение.

16.3. Рассмотрим произвольное представление

$$\chi\colon \pi_1(\bar{\mathbb{C}}\setminus\{a_1^*, \ldots, a_n^*\}) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

и набор $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ матриц нормирований такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{tr}(\Lambda_i + E_i) = 0$ (E_i, как обычно, — это нормализованные логарифмы матриц G_i, порождающих группу $\operatorname{Im}\chi$). Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Возможно, существует фуксова система с заданными особыми точками $a_1^*, \ldots, a_n^*$, монодромией χ и матрицами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ нормирований в особых точках. Если же такая система не существует, то рассмотрим вспомогательную фуксову систему с дополнительной особой точкой ∞ и матрицами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ нормирований в особых точках $a_1^*, \ldots, a_n^*$. Вложим эту систему в изомонодромное семейство Шлезингера и применим процедуру по нахождению Θ-дивизора, изложенную в данной лекции, чтобы исключить бесконечность из числа особенностей семейства (такое исключение возможно для значений a, лежащих вне Θ).

Получаем, что для почти всех значений

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in D(a^*) \subset \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i\neq j}\{a_i = a_j\},$$

где $D(a^*)$ — диск с центром в точке a^*, существует фуксова система с заданными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ и монодромией (и даже с заданными нормированиями). Хотя известны примеры представлений, не реализуемых фуксовой системой ни при каком расположении особых точек (см. пример 11.1).

Указание. Проверьте корректность применения леммы 16.1 (которая используется при построении функции $\tau^*(a)\not\equiv 0$) в приведенных рассуждениях.

16.4. Докажите, что для двумерного неприводимого представления χ рассуждение предыдущего упражнения верно, т. е. *для почти всех значений* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D(a^*) \subset \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i\neq j}\{a_i = a_j\}$ *существует фуксова система двух уравнений с особыми точками* $a_1, \ldots, a_n$ *и заданными неприводимой монодромией и матрицами нормирований.*

Указание. В этом случае утверждение леммы 16.1 является прямым следствием неприводимости двумерного представления χ.

Лекция 17

Подвижные особенности уравнения Шлезингера — 2

Доказательство теоремы 16.2. Из условия 2 теоремы следует, что

$$\tau^*(a) = b_1(a) = \sum_{i=1}^{n} {}^*b_i^{12}(a)a_i,$$

т. е. для нахождения локальной τ-функции уравнения Шлезингера в данном случае достаточно применить одно преобразование вида $y_1 = \Gamma_1(z, a)y$ к вспомогательному семейству (16.3).

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^1(a)}{z-a_i} = \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\Gamma_1^{-1} + \Gamma_1\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i}\right)\Gamma_1^{-1},$$

то из вида матрицы $\Gamma_1(z, a)$ следует, что матрицы $b_1(a)^2\, B_i^1(a)$, а следовательно, и матрицы $b_1(a)^2\, B_i(a)$ голоморфны в окрестности точки a^*. Остается показать, что возле этой точки множество Θ является аналитическим подмногообразием, т. е. что $db_1(a)|_{a=a^*} \not\equiv 0$.

Дифференциал $db_1(a)$ в точке a^* имеет вид

$$db_1(a)|_{a=a^*} = \sum_{i=1}^{n} a_i^*\, d\left({}^*b_i^{12}(a)\right)\Big|_{a=a^*} + \sum_{i=1}^{n} {}^*b_i^{12}\, da_i.$$

Для того чтобы найти первое из этих двух слагаемых, воспользуемся уравнением Шлезингера

$$d\,{}^*B_i(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[{}^*B_i(a), {}^*B_j(a)]}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j), \quad {}^*B_i(a^*) = {}^*B_i,$$

которому удовлетворяют матрицы ${}^*B_i(a)$. Тогда будем иметь

$$d\left({}^*b_i^{12}(a)\right)\Big|_{a=a^*} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{{}^*b_i^{12}\,\delta_j - {}^*b_j^{12}\,\delta_i}{a_i^* - a_j^*}\, d(a_i - a_j),$$

где $\delta_i = {}^*b_i^{22} - {}^*b_i^{11}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^*\, d\left({}^*b_i^{12}(a)\right)\Big|_{a=a^*} = -\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\left({}^*b_i^{12}\,\delta_j - {}^*b_j^{12}\,\delta_i\right)a_i^*}{a_i^* - a_j^*}\, d(a_i - a_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left({}^*b_i^{12}\,\delta_j - {}^*b_j^{12}\,\delta_i\right)d(a_i - a_j) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}[{}^*B_i,\, {}^*B_j]^{12}\, d(a_i - a_j),$$

где $[{}^*B_i,\, {}^*B_j]^{12}$ — элемент матрицы $[{}^*B_i,\, {}^*B_j]$, расположенный на месте (1, 2).

Окончательно, в силу соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n} {}^*B_i = K = -\operatorname{diag}(1,\, -1)$, получаем

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}[{}^*B_i,\, {}^*B_j]^{12}\, d(a_i - a_j) = -\sum_{i=1}^{n}\Big[{}^*B_i,\ \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} {}^*B_j\Big]^{12} da_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}[{}^*B_i,\, K]^{12}\, da_i = \sum_{i=1}^{n}(-2\,{}^*b_i^{12})\, da_i,$$

следовательно,

$$db_1(a)|_{a=a^*} = -\sum_{i=1}^{n} {}^*b_i^{12}\, da_i.$$

Итак, линейная часть функции $b_1(a)$ в точке a^* отлична от нуля (в противном случае все ${}^*b_i^{12}$ равны нулю и, следовательно, вспомогательная система и ее монодромия приводимы, что противоречит условию 1 теоремы). □

Как выразить функцию $\tau^*(a)$ и множество Θ в терминах матриц коэффициентов $B_i(a)$ исходного семейства (13.3)? Рассмотрим вновь первый шаг процедуры, изложенной в предыдущей лекции.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i^1(a)}{z - a_i} = \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\Gamma_1^{-1} + \Gamma_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z - a_i}\right)\Gamma_1^{-1},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i^1(a)}{z - a_i}\right)^2 = \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\Gamma_1^{-1}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\Gamma_1^{-1} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z - a_i}\right)\Gamma_1^{-1} +$$

$$+\Gamma_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z - a_i}\right)\Gamma_1^{-1}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\Gamma_1^{-1} + \Gamma_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z - a_i}\right)^2\Gamma_1^{-1}.$$

Из вида матрицы $\Gamma_1(z, a)$ следует, что слагаемое $\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\Gamma_1^{-1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\Gamma_1^{-1}$ равно нулю, поэтому

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i^1(a)}{z-a_i}\right)^2 = 2\operatorname{tr}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i}\right)\Gamma_1^{-1} + \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i}\right)^2 =$$
$$= 2\operatorname{tr}\Gamma_1'^{-1}\frac{\partial\Gamma_1'}{\partial z}\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i} + \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i}\right)^2.$$

Поскольку все элементы матрицы $\Gamma_1'^{-1}\dfrac{\partial\Gamma_1'}{\partial z}$ равны нулю за исключением элемента с индексами β, α, который равен $-1/(cb_1(a))$, то мы получаем, что

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i^1(a)}{z-a_i}\right)^2 = \frac{-2}{cb_1(a)}\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*b_i^{\alpha\beta}(a)}{z-a_i} + \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{{}^*B_i(a)}{z-a_i}\right)^2.$$

Рассматривая вычеты обеих частей последнего соотношения в точке $z=a_i$, получаем

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{\operatorname{tr}(B_i^1(a)B_j^1(a))}{a_i-a_j} = \frac{-1}{cb_1(a)}{}^*b_i^{\alpha\beta}(a) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{\operatorname{tr}({}^*B_i(a){}^*B_j(a))}{a_i-a_j}.$$

Умножая это равенство на da_i и суммируя по всем i, имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{\operatorname{tr}(B_i^1(a)B_j^1(a))}{a_i-a_j}\,d(a_i-a_j) =$$
$$= \frac{-1}{cb_1(a)}\sum_{i=1}^{n}{}^*b_i^{\alpha\beta}(a)\,da_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{\operatorname{tr}({}^*B_i(a){}^*B_j(a))}{a_i-a_j}\,d(a_i-a_j).$$

Из соотношения (16.5) следует, что $du_1(a) = -\sum\limits_{i=1}^{n}{}^*b_i^{\alpha\beta}(a)\,da_i$, а поскольку $u_1(a)=cb_1(a)$, то

$$\frac{-1}{cb_1(a)}\sum_{i=1}^{n}{}^*b_i^{\alpha\beta}(a)\,da_i = d\ln b_1(a).$$

Окончательно,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{\operatorname{tr}(B_i^1(a)B_j^1(a))}{a_i-a_j}\,d(a_i-a_j) =$$
$$= d\ln b_1(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{\operatorname{tr}({}^*B_i(a){}^*B_j(a))}{a_i-a_j}\,d(a_i-a_j).$$

Так как по построению форма

$$\theta^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\operatorname{tr}({}^*B_i(a)\,{}^*B_j(a))}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j)$$

голоморфна и замкнута в некоторой окрестности U^* точки a^* (см. упражнение 17.1), то найдется голоморфная и не обращающаяся в нуль в этой окрестности функция $f^*(a)$ такая, что $d\ln f^* = \theta^*$. Следовательно,

$$\theta^1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\operatorname{tr}(B_i^1(a)B_j^1(a))}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j) = d\ln(f^*(a)b_1(a)).$$

Применив нужное число раз описанную процедуру, мы придем к семейству Шлезингера с матрицами $B_i^s(a) = C^{-1}B_i(a)C$ (см. предыдущую лекцию) и получим в U^*

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\operatorname{tr}(B_i(a)B_j(a))}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j) = d\ln(f^*(a)\tau^*(a))$$

для функции $\tau^*(a)$ из утверждения 16.1.

Рассмотрим покрытие $\{U_j\}$ пространства Z такое, что для каждого U_j найдется голоморфная функция $\tau_j(a)$ с условием

$$\theta = d\ln\tau_j(a),$$

и если $U_j \cap \Theta = \varnothing$, то соответствующая функция не обращается в нуль в U_j.

В непустом пересечении $U_j \cap U_i$ имеем $\tau_j(a) = c_{ji}\tau_i(a)$, где c_{ji} — ненулевые постоянные. Так как пространство Z односвязно, то найдутся ненулевые постоянные c_i такие, что $c_i = c_j c_{ji}$ для $U_j \cap U_i \neq \varnothing$, и мы приходим к глобальной функции $\tau(a)$, равной $c_j\tau_j(a)$ в U_j и такой, что

$$\theta = d\ln\tau(a)$$

в Z.

Функция $\tau(a)$ называется (*глобальной*) *τ-функцией уравнения Шлезингера*. Она отличается от локальной функции $\tau^*(a)$ в окрестности точки $a^* \in \Theta$ голоморфным сомножителем, не обращающимся в нуль. Таким образом, мы передоказали следующую известную теорему Мивы.

Теорема 17.1 (Мива). *Множество Θ подвижных особых точек уравнения Шлезингера является множеством нулей функции τ, голоморфной на универсальном накрытии Z пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i\neq j}\{a_i = a_j\}$ и такой, что*

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\operatorname{tr}(B_i(a)B_j(a))}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j) = d\ln\tau(a).$$

Упражнения

17.1. Покажите, что если матрицы $B_i(a)$ удовлетворяют уравнению Шлезингера, то 1-форма

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\operatorname{tr}(B_i(a)B_j(a))}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j)$$

замкнута.

17.2. Проверьте, что изомонодромное семейство из упражнения 13.2 является шлезингеровским, и покажите, что соответствующая ему τ-функция из теоремы Мивы не обращается в нуль на Z.

Лекция 18

Уравнение Пенлеве VI и его связь с уравнением Шлезингера

Особые точки решений линейного дифференциального уравнения, являясь особенностями его коэффициентов, сразу же определяются по самому уравнению. С нелинейными дифференциальными уравнениями дело обстоит сложнее. Например, правая часть уравнения

$$\frac{du}{dt} = u^2$$

голоморфна во всей комплексной плоскости, но его решения $u(t) = -1/(t-c)$ имеют особые точки $t = c$. Такие особенности называются *подвижными*, поскольку их положение зависит от решения (от начальных условий).

Если некоторое нелинейное дифференциальное уравнение в качестве подвижных особых точек имеет только полюсы, то говорят, что уравнение удовлетворяет *свойству Пенлеве*. Например, приведенное выше уравнение обладает этим свойством.

Среди всех уравнений первого порядка

$$\frac{du}{dt} = P(t, u)$$

с правой частью, мероморфной по t и рациональной по u, только *уравнения Риккати* удовлетворяют свойству Пенлеве. Это уравнения вида

$$\frac{du}{dt} = a_0(t)u^2 + a_1(t)u + a_2(t),$$

где $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ — мероморфные функции.

Имеется полный список всех уравнений со свойством Пенлеве, имеющих вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} = P\Big(t, u, \frac{du}{dt}\Big),$$

с правой частью, мероморфной по t и рациональной по u, $\frac{du}{dt}$. В списке содержится 50 различных классов уравнений. Любое уравнение может быть сведено к одному из этих уравнений с помощью некоторых подстановок. Решения большинства уравнений удалось найти в известных функциях. Нерешаемыми оказались шесть классов уравнений, которые называются *уравнениями Пенлеве* I—VI, а их решения — *трансцендентными Пенлеве* и являются новыми трансцендентными функциями. Уравнение Пенлеве VI является, в некотором смысле, самым общим или основным: остальные уравнения могут быть получены из него предельными переходами.

Цель данной лекции — показать, что уравнение Пенлеве VI

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t}\right)\frac{du}{dt} + \\ + \frac{u(u-1)(u-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\,\frac{t}{u^2} + \gamma\,\frac{t-1}{(u-1)^2} + \delta\,\frac{t(t-1)}{(u-t)^2}\right) \quad (18.1)$$

эквивалентно уравнению изомонодромной деформации Шлезингера для фуксовой системы двух уравнений с четырьмя особыми точками, и тем самым, используя результаты Мальгранжа, проверить, что уравнение Пенлеве VI имеет в качестве подвижных особых точек только полюсы, т. е. удовлетворяет свойству Пенлеве (неподвижными особенностями уравнения (18.1) являются 0, 1 и ∞).

Рассмотрим изомонодромное семейство фуксовых систем двух уравнений с четырьмя особыми точками — 0, 1, t и ∞ (зависящее от параметра $t \in D(t^0)$, где $D(t^0) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ — диск малого радиуса с центром в точке t^0):

$$\frac{dy}{dz} = B(z, t)y, \quad B(z, t) = \frac{B_0(t)}{z} + \frac{B_1(t)}{z-1} + \frac{B_2(t)}{z-t}. \quad (18.2)$$

Мы будем предполагать, что группа монодромии данного семейства лежит в группе Ли $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, а вычеты $B_i(t)$ — в алгебре Ли $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ матриц с нулевым следом. Потребуем также, чтобы вычет $B_3 = -B_0 - B_1 - B_2$ матрицы $B(z, t)$ на бесконечности был диагонализируемой матрицей (матрица B_3 постоянна, если семейство (18.2) является изомонодромной деформацией Шлезингера, см. упражнение 14.1).

Обозначим через $\pm\theta_i$ собственные значения матриц $B_i(t)$ (напомним, что собственные значения матриц-вычетов $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, B_3 изомонодромного семейства (18.2) не зависят от t) и постоянным калибровочным преобразованием приведем матрицу B_3 к виду $B_3 = \mathrm{diag}(\theta_3, -\theta_3)$. Тогда матрица $B(z, t)$ коэффициентов семейства (18.2) примет вид

$$B(z, t) = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} x_0 & -u(x_0-\theta_0) \\ \frac{1}{u}(x_0+\theta_0) & -x_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z-1}\begin{pmatrix} x_1 & -v(x_1-\theta_1) \\ \frac{1}{v}(x_1+\theta_1) & -x_1 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{z-t}\begin{pmatrix} x_2 & -w(x_2-\theta_2) \\ \frac{1}{w}(x_2+\theta_2) & -x_2 \end{pmatrix} \quad (18.3)$$

при соответствующем выборе параметров x_0, x_1, x_2, u, v, w.

Из вида матрицы B_3 следуют уравнения

$$\begin{aligned} x_0+x_1+x_2 &= -\theta_3,\\ u(x_0-\theta_0)+v(x_1-\theta_1)+w(x_2-\theta_2) &= 0,\\ \frac{1}{u}(x_0+\theta_0)+\frac{1}{v}(x_1+\theta_1)+\frac{1}{w}(x_2+\theta_2) &= 0. \end{aligned} \tag{18.4}$$

Из этих трех уравнений можно выразить функции $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ через $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$. Но в действительности важны только отношения параметров u, v, w, поскольку пропорциональные наборы (u, v, w) и $\lambda(u, v, w)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, задают системы, эквивалентные относительно постоянного калибровочного преобразования $y' = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{\lambda})y$. Поэтому тройка координат (u, v, w) является проективной и соответствует двум непрерывным параметрам. Этот факт имеет также следующую геометрическую интерпретацию.

Зафиксируем четверку классов сопряженности $\mathcal{O}_i \subset \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, $B_i \in \mathcal{O}_i$ (в нашем случае это равносильно фиксированному выбору собственных значений матриц B_i). Тогда пространство вычетов

$$\mathcal{O} = \left\{(B_0, \ldots, B_3) \in \mathcal{O}_0 \times \ldots \times \mathcal{O}_3 \,\Big|\, \sum_{i=0}^{3} B_i = 0\right\} / \,\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

в общем случае будет двумерным. Построение фуксовой системы вида (18.2) по четверке вычетов соответствует выбору значения $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, поэтому пространство фуксовых систем, с которыми мы имеем дело, может быть представлено как

$$\mathcal{O} \times (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}).$$

При каждом фиксированном t можно определить систему x, y локальных координат на $\mathcal{O}$. Если семейство (18.2) является изомонодромной деформацией Шлезингера, то уравнение Шлезингера на матрицы $B_i(t)$ приводит к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$. Исключая функцию $x(t)$ из этой системы, мы получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно $y(t)$. Это уравнение и будет уравнением Пенлеве VI.

Поскольку верхний правый элемент матрицы $B_0(t) + B_1(t) + B_2(t) = -B_3$ равен нулю, то такой же элемент матрицы $z(z-1)(z-t)B(z, t)$ при каждом фиксированном t является многочленом первой степени от z. Определим $y(t)$ как единственный корень этого многочлена.

Теорема 18.1. *Если матрицы* $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ *семейства* (18.2) *удовлетворяют уравнению Шлезингера, то функция* $y(t)$ *удовлетворяет уравнению Пенлеве* VI (18.1), *где константы* α, β, γ, δ

связаны с параметрами θ_0, θ_1, θ_2, θ_3 *следующими соотношениями*:

$$\alpha = \frac{(2\theta_3 - 1)^2}{2}, \quad \beta = -2\theta_0^2, \quad \gamma = 2\theta_1^2, \quad \delta = \frac{1}{2} - 2\theta_2^2.$$

Доказательство. Запишем элемент b_{12} матрицы $B(z, t)$ в виде

$$b_{12}(z, t) = -\frac{u(x_0 - \theta_0)}{z} - \frac{v(x_1 - \theta_1)}{z-1} - \frac{w(x_2 - \theta_2)}{z-t} = \frac{\kappa(z - y(t))}{z(z-1)(z-t)},$$

где

$$\begin{gathered} \kappa = (t+1)u(x_0 - \theta_0) + tv(x_1 - \theta_1) + w(x_2 - \theta_2), \\ \kappa y = tu(x_0 - \theta_0). \end{gathered} \tag{18.5}$$

Далее определим функцию $x(t)$ по формуле

$$x = \frac{x_0}{y} + \frac{x_1}{y-1} + \frac{x_2}{y-t}.$$

Это соотношение вместе с (18.4) и (18.5) задает шесть уравнений на девять функций x_0, x_1, x_2, u, v, w, κ, x, y параметра t. Выразим первые шесть из них через три последние.

Из второго из соотношений (18.5) следует, что

$$u = \frac{\kappa y}{t(x_0 - \theta_0)},$$

а первое из этих соотношений можно записать в виде

$$\kappa = \kappa y + (t-1)v(x_1 - \theta_1),$$

откуда

$$v = \frac{-\kappa(y-1)}{(t-1)(x_1 - \theta_1)}.$$

Подставив найденные выражения для u и v во второе из соотношений (18.4), получим следующее выражение для w:

$$w = \frac{\kappa(y-t)}{t(t-1)(x_2 - \theta_2)}.$$

Теперь подставим найденные выражения для u, v и w в третье из соотношений (18.4). Тогда вместе с первым из этих соотношений и выражением для x получим систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{t}{y}(x_0^2 - \theta_0^2) - \frac{t-1}{y-1}(x_1^2 - \theta_1^2) + \frac{t(t-1)}{y-t}(x_2^2 - \theta_2^2) = 0, \\ x_0 + x_1 + x_2 = -\theta_3, \\ \frac{x_0}{y} + \frac{x_1}{y-1} + \frac{x_2}{y-t} = x \end{gathered}$$

относительно x_0, x_1, x_2. Ее решение имеет следующий вид:

$$x_0 = \frac{y}{2\theta_3 t}\Big(y(y-1)(y-t)x^2 + 2\theta_3(y-1)(y-t)x - \theta_0^2\,\frac{t}{y} + \\ + \theta_1^2\,\frac{t-1}{y-1} - \theta_2^2\,\frac{t(t-1)}{y-t} + (y-t-1)\theta_3^2\Big),$$

$$x_1 = -\frac{y-1}{2\theta_3(t-1)}\Big(y(y-1)(y-t)x^2 + 2\theta_3 y(y-t)x - \theta_0^2\,\frac{t}{y} + \\ + \theta_1^2\,\frac{t-1}{y-1} - \theta_2^2\,\frac{t(t-1)}{y-t} + (y-t+1)\theta_3^2\Big),$$

$$x_2 = \frac{y-t}{2\theta_3 t(t-1)}\Big(y(y-1)(y-t)x^2 + 2\theta_3 y(y-1)x - \theta_0^2\,\frac{t}{y} + \\ + \theta_1^2\,\frac{t-1}{y-1} - \theta_2^2\,\frac{t(t-1)}{y-t} + (y+t-1)\theta_3^2\Big).$$

Итак, функции $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ выражены через $\kappa(t)$, $x(t)$, $y(t)$.

Далее воспользуемся тем фактом, что семейство (18.2) является изомонодромной деформацией Шлезингера, т. е. соответствующая этому семейству дифференциальная 1-форма

$$\omega_s = B(z,\,t)\,dz - \frac{B_2(t)}{z-t}\,dt$$

удовлетворяет условию интегрируемости $d\omega_s = \omega_s \wedge \omega_s$. Матричная запись этого условия имеет вид

$$\frac{\partial B(z,\,t)}{\partial t} = \frac{B_2(t)}{(z-t)^2} + \frac{[B(z,\,t),\,B_2(t)]}{z-t}.$$

Таким образом, для элементов b_{11}, b_{12}, b_{21} матрицы $B(z,\,t)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial t} &= \frac{x_2}{(z-t)^2} + \frac{1}{z-t}\Big(b_{21}w(x_2-\theta_2) + \frac{b_{12}}{w}(x_2+\theta_2)\Big), \\ \frac{\partial b_{12}}{\partial t} &= -\frac{w(x_2-\theta_2)}{(z-t)^2} + \frac{1}{z-t}\big(-2b_{12}x_2 - 2b_{11}w(x_2-\theta_2)\big). \end{aligned} \tag{18.6}$$

С другой стороны, продифференцировав по t соотношение $b_{12} = \kappa(z-y)/z(z-1)(z-t)$, получим равенство

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial t} = \frac{\dfrac{d\kappa}{dt}(z-y)(z-t) - \kappa\dfrac{dy}{dt}(z-t) + \kappa(z-y)}{z(z-1)(z-t)^2}.$$

Сравнение двух выражений для $\dfrac{\partial b_{12}}{\partial t}$ приводит нас к следующему дифференциальному соотношению на функции $\kappa(t)$, $y(t)$, $x(t)$:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{dt}-\frac{1}{z-y}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{z-t}=$$
$$=-\frac{z(z-1)(y-t)}{t(t-1)(z-t)(z-y)}-\frac{2x_2}{z-t}-2\left(\frac{x_0}{z}+\frac{x_1}{z-1}+\frac{x_2}{z-t}\right)\frac{z(z-1)(y-t)}{t(t-1)(z-y)}.$$

Запишем это соотношение при $z=0$ и $z=1$ соответственно:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{dt}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{t}=\frac{2x_2}{t}-2x_0\frac{y-t}{t(t-1)y}, \tag{18.7}$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{dt}-\frac{1}{1-y}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{1-t}=\frac{2x_2}{t-1}-2x_1\frac{y-t}{t(t-1)(1-y)}. \tag{18.8}$$

Далее мы получим выражение для производной $\dfrac{dx}{dt}$, представив функцию $x(a)$ в виде $x(t)=b_{11}(y(t),\,t)$. Тогда, учитывая первое из уравнений (18.6) и тождество $b_{12}(y(t),\,t)=0$, будем иметь

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{\partial b_{11}}{\partial z}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial b_{11}}{\partial t}\right)\bigg|_{z=y}=$$
$$=-\left(\frac{x_0}{y^2}+\frac{x_1}{(y-1)^2}+\frac{x_2}{(y-t)^2}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{x_2}{(y-t)^2}+\frac{1}{y-t}b_{21}(y,\,t)w(x_2-\theta_2).$$

Поскольку

$$b_{21}(y,\,t)=\frac{x_0+\theta_0}{yu}+\frac{x_1+\theta_1}{(y-1)v}+\frac{x_2+\theta_2}{(y-t)w}=$$
$$=\frac{t}{\kappa y^2}(x_0^2-\theta_0^2)-\frac{t-1}{\kappa(y-1)^2}(x_1^2-\theta_1^2)+\frac{t(t-1)}{\kappa(y-t)^2}(x_2^2-\theta_2^2),$$

то

$$b_{21}(y,\,t)\frac{w(x_2-\theta_2)}{y-t}=\frac{b_{21}(y,\,t)\kappa}{t(t-1)}=$$
$$=\frac{1}{t(t-1)}\left(\frac{t}{y^2}(x_0^2-\theta_0^2)-\frac{t-1}{(y-1)^2}(x_1^2-\theta_1^2)+\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}(x_2^2-\theta_2^2)\right).$$

Таким образом, выражение для производной $\dfrac{dx}{dt}$ принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=-\left(\frac{x_0}{y^2}+\frac{x_1}{(y-1)^2}+\frac{x_2}{(y-t)^2}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{x_2}{(y-t)^2}+$$
$$+\frac{1}{t(t-1)}\left(\frac{t}{y^2}(x_0^2-\theta_0^2)-\frac{t-1}{(y-1)^2}(x_1^2-\theta_1^2)+\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}(x_2^2-\theta_2^2)\right).$$

Если мы подставим в него найденные выражения для функций x_0, x_1, x_2, а также преобразуем разность соотношений (18.7) и (18.8), то получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t(t-1)}\Big((2ty - 3y^2 + 2y - t)x^2 + (1-2y)x - \theta_0^2\,\frac{t}{y^2} + {}\\ + \theta_1^2\,\frac{t-1}{(y-1)^2} - \theta_2^2\,\frac{t(t-1)}{(y-t)^2} + \theta_3(\theta_3 - 1)\Big), \qquad (18.9)\\ x = \frac{1}{2}\Big(\frac{t(t-1)}{y(y-1)(y-t)}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{y-t}\Big). \end{aligned}$$

Теперь осталось лишь подставить выражение для неизвестной функции x из второго уравнения этой системы в первое и получить искомое уравнение (18.1) относительно функции $y(t)$. □

Можно осуществить и обратный переход от решения уравнения Пенлеве VI с начальными условиями $y_0 = y(t^0)$, $y_1 = \frac{dy}{dt}(t^0)$ $(t^0 \in \mathbb{C} \setminus \{0,\, 1\})$ и параметрами α, β, γ, δ к изомонодромному семейству фуксовых систем (18.2) с матрицей коэффициентов вида (18.3). Действительно, зная решение $y(t)$ уравнения Пенлеве VI, из второго уравнения системы (18.9) функцию $x(t)$ можно выразить через y и $\frac{dy}{dt}$. Затем через x и y могут быть выражены параметры x_0, x_1, x_2, и дифференциальное соотношение (18.7) на функцию $\kappa(t)$ запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\ln\kappa = f\Big(t,\, y,\, \frac{dy}{dt}\Big).$$

Решив это уравнение (с точностью до умножения на постоянную $\lambda \in \mathbb{C}^*$), мы сможем выразить через κ параметры u, v, w и найти матрицу (18.3) коэффициентов изомонодромного семейства (с точностью до сопряжения на постоянную диагональную матрицу). Таким образом, элементы матриц $B_i(t)$ окажутся рациональными функциями от t, y, $\frac{dy}{dt}$, α, β, γ, δ.

В заключение данной лекции мы расскажем об интересной связи между проблемой Римана—Гильберта для скалярных фуксовых уравнений и уравнением Пенлеве VI.

Рассмотрим четыре точки 0, 1, t, ∞ ($t \in D(t^*)$, где $D(t^*) \subset \mathbb{C} \setminus \{0,\, 1\}$ — диск малого радиуса с центром в точке t^*) и неприводимое $\mathrm{SL}(2,\, \mathbb{C})$-представление

$$\chi^*\colon \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0,\, 1,\, t\}) \to \mathrm{SL}(2,\, \mathbb{C}),$$

порожденное матрицами G_0, G_1, G_2, соответствующими точкам 0, 1, t.

Упражнение 18.1. Проверьте, что в случае когда матрицы монодромии отличны от $\pm I$, расслоения семейства $\mathcal{F}$ не зависят от матриц приведения S_i.

Указание. Используйте эквивалентное построение семейства $\mathcal{F}$, с применением слабо левелевского базиса; см. лекции 5 и 8.

В зависимости от расположения точки t возможны два случая.

1) *Любое векторное расслоение F^{Λ} из семейства $\mathcal{F}$, построенного по данным четырем точкам и представлению χ^*, такое, что* $\deg F^{\Lambda}=0$, *голоморфно тривиально* (из упражнений 16.4 и 18.1 следует, что данный случай имеет место для почти всех значений $t\in D(t^*)$).

2) *Среди элементов семейства $\mathcal{F}$ существует голоморфно нетривиальное расслоение F^{Λ} степени нуль.*

В заключении к части I был определен максимальный фуксов вес неприводимого представления. В двумерном случае он равен числу $\max\limits_{F^{\Lambda}\in\mathcal{F}}(k_1-k_2)$, где (k_1, k_2) — тип расщепления расслоения F^{Λ}. Из теоремы 11.1 следует, что максимальный фуксов вес $\gamma_m(\chi^*)$ представления χ^* не превосходит двух, поэтому в первом случае типы расщепления голоморфно нетривиальных расслоений F^{Λ} (ненулевой степени) могут быть только $(k, k-1)$ или (k, k). Вариант $(k+1, k-1)$ невозможен, поскольку тогда расслоение, построенное по набору матриц Λ_0-kI, Λ_1, Λ_2, Λ_3, имеет нулевую степень, т. е. голоморфно тривиально, но в то же время его тип расщепления равен $(1, -1)$. Следовательно, в первом случае $\gamma_m(\chi^*)=1$. Во втором случае тип расщепления голоморфно нетривиального расслоения нулевой степени равен $(1, -1)$, и в этом случае $\gamma_m(\chi^*)=2$.

Поскольку минимально возможное число m^0 дополнительных особых точек, возникающих при построении скалярного фуксова уравнения с неприводимой монодромией χ (8.1), выражается формулой

$$m^0=\frac{(n-2)\,p(p-1)}{2}-\gamma_m(\chi),$$

где $\gamma_m(\chi)$ — максимальный фуксов вес представления χ (см. заключение к части I), то для почти всех значений $t\in D(t^*)$ набор точек 0, 1, t, ∞ и неприводимое двумерное представление χ^* реализуются фуксовым дифференциальным уравнением второго порядка с одной дополнительной особенностью. Обозначим ее через $u(t)$ (рассматривая как функцию параметра t). Оказывается, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (18.1) при некоторых значениях констант[1] α, β, γ, δ. Поясним этот интересный факт при помощи изомонодромных деформаций фуксовых систем.

[1] Уравнение Пенлеве VI получено Р. Фуксом именно как дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет дополнительная (пятая) особенность $\lambda(t)$ некоторого фуксова

Выберем значение $t=t^0$, при котором существует фуксова система

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B_0}{z} + \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{z-t^0}\right)y$$

с особыми точками 0, 1, t^0, ∞, представлением монодромии χ^* и такая, что $B_i \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, а матрица $B_3 = -B_0 - B_1 - B_2$ диагональна. Обозначим через $\pm\theta_i$ собственные значения матриц B_i.

Существование такой системы показать несложно. Достаточно предъявить набор $\Lambda = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$ допустимых матриц такой, что $\mathrm{tr}(\Lambda_i + E_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, и собственные значения матрицы $\Lambda_3 + E_3$ отличны от нуля (матрицы E_i, как обычно, это нормализованные логарифмы соответствующих матриц монодромии G_i). Тогда для почти всех значений t^0 соответствующее расслоение F^Λ будет голоморфно тривиальным и логарифмическая связность ∇^Λ будет определять фуксову систему, обладающую нужными свойствами. Поскольку $\det G_i = 1$, то сумма $\rho_i^1 + \rho_i^2$ собственных значений матрицы E_i является целым числом, причем эта сумма равна 0 или 1 ввиду условия $0 \leqslant \mathrm{Re}\,\rho_i^j < 1$. В первом случае остается положить $\Lambda_i = \mathrm{diag}(1, -1)$, а во втором — $\Lambda_i = \mathrm{diag}(0, -1)$. Тогда $\theta_i = \rho_i^1 + 1$ или ρ_i^1 соответственно.

Вложим построенную систему в изомонодромное семейство Шлезингера

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B_0(t)}{z} + \frac{B_1(t)}{z-1} + \frac{B_2(t)}{z-t}\right)y, \quad B_i(t^0) = B_i, \tag{18.10}$$

фуксовых систем с особенностями 0, 1, t, ∞, голоморфно зависящее от параметра $t \in D(t^0)$, где $D(t^0)$ — диск малого радиуса с центром в точке t^0. При этом $B_0(t) + B_1(t) + B_2(t) = -B_3 = \mathrm{diag}(-\theta_3, \theta_3)$. Согласно теореме Мальгранжа (теорема 16.1) матричные функции $B_i(t)$ продолжаются на универсальное накрытие H пространства $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ как мероморфные функции. Множество $\Theta \subset H$ их полюсов образует Θ-дивизор Мальгранжа.

Теперь перейдем от систем семейства (18.10) к скалярным фуксовым уравнениям второго порядка с той же монодромией и одной дополнительной особенностью.

Обозначим через $B(z, t) = (b_{ij}(z, t))$ матрицу коэффициентов семейства (18.10). Рассмотрим вектор-строки

$$q_0 = (1, 0), \quad q_1(z, t) = \frac{dq_0}{dz} + q_0 B(z, t) = (b_{11}, b_{12})$$

уравнения второго порядка с особыми точками 0, 1, t, ∞ и $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-монодромией, не зависящей от параметра t.

и составленную из них матрицу

$$\Gamma(z,\,t) = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix},$$

мероморфно обратимую на $\bar{\mathbb{C}} \times D(t^*)$, поскольку $\det \Gamma(z,\,t) = b_{12} \not\equiv 0$ в силу неприводимости представления χ^*. Определим мероморфные на $\bar{\mathbb{C}} \times D(t^*)$ функции $b_1(z,\,t)$, $b_2(z,\,t)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$q_2 := \frac{dq_1}{dz} + q_1 B(z,\,t) = (-b_2,\,-b_1)\Gamma(z,\,t).$$

Тогда

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \frac{d}{dz}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} B(z,\,t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}\Gamma - \Gamma B(z,\,t),$$

откуда

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} = \frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1} + \Gamma B \Gamma^{-1}.$$

Последнее означает, что при каждом фиксированном $t \in D(t^0)$ калибровочное преобразование $y' = \Gamma(z,\,t)y$ переводит соответствующую систему семейства (18.10) в систему

$$\frac{dy'}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} y',$$

первая координата решения которой является, как обычно, решением скалярного уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + b_1(z,\,t)\frac{dw}{dz} + b_2(z,\,t)w = 0.$$

Данное (фуксово) уравнение имеет особые точки $0,\,1,\,t,\,\infty$ и монодромию χ^*, но есть у него и дополнительная особенность $u(t)$ — это, как следует из построения функций $b_1(z,\,t)$, $b_2(z,\,t)$, нуль функции $\det \Gamma(z,\,t) = b_{12}(z,\,t)$. В силу теоремы 18.1 функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению Пенлеве VI, где константы α, β, γ, δ связаны с параметрами θ_0, θ_1, θ_2, θ_3 следующими соотношениями:

$$\alpha = \frac{(2\theta_3 - 1)^2}{2}, \quad \beta = -2\theta_0^2, \quad \gamma = 2\theta_1^2, \quad \delta = \frac{1}{2} - 2\theta_2^2.$$

Заметим, что $u(t) \neq t,\,0,\,1,\,\infty$, если $t \in D(t^*) \setminus \widetilde{\Theta}$, где $\widetilde{\Theta} \supset \Theta$ — счетное множество, состоящее из таких значений параметра t, что соответствующее семейство $\mathcal{F}$, построенное по особенностям $0,\,1,\,t,\,\infty$ и представлению χ^*, содержит нетривиальное расслоение степени нуль.

Таким образом, *множество точек* 0, 1, t, ∞ *и неприводимое* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$*-представление* χ^* (*с образующими, отличными от* $\pm I$) *реализуются скалярным фуксовым уравнением с дополнительной особенностью* $u(t)$, *которая как функция параметра* $t \in D(t^*)$ *удовлетворяет уравнению Пенлеве* VI.

Особые точки функции $u(t)$, *продолженной на* H, *являются полюсами, а множество* $\widetilde{\Theta} \supset \{t \in D(t^*) \mid u(t) = t, 0, 1$ *или* $\infty\}$ *является счетным множеством значений параметра, при которых рассматриваемая проблема Римана—Гильберта для скалярных фуксовых уравнений решается без дополнительных особенностей.*

Упражнения

18.2. Запишем уравнение Пенлеве VI (18.1) с параметрами

$$\alpha = \frac{(2\theta_3 - 1)^2}{2}, \quad \beta = -2\theta_0^2, \quad \gamma = 2\theta_1^2, \quad \delta = \frac{1}{2} - 2\theta_2^2$$

из теоремы 18.1 в виде $P(t, y, \theta) = 0$.

Симметриями этого уравнения будем называть отображения

$$(t, y, \theta) \mapsto (t', y', \theta'), \quad P(t', y', \theta') = 0,$$

где $t' = t'(t)$ — дробно-линейное отображение, переводящее множество $\{0, 1, \infty\}$ в себя.

Используйте приведенную связь между уравнением Пенлеве VI и дополнительными особенностями семейства скалярных фуксовых уравнений для того, чтобы показать следующее: дробно-линейные преобразования сферы Римана, переводящие множество $\{0, 1, t, \infty\}$ в множество $\{0, 1, t'(t), \infty\}$, порождают подгруппу симметрий порядка 24.

18.3. Проверьте, что в качестве образующих подгруппы из предыдущего упражнения можно взять следующие три симметрии:

$$x^1\colon P(t, y, \theta) = 0 \ \rightarrow\ P(1-t, 1-y, \theta_1, \theta_0, \theta_2, \theta_3) = 0,$$

$$x^2\colon P(t, y, \theta) = 0 \ \rightarrow\ P(1/t, 1/y, \theta_3 - 1/2, \theta_1, \theta_2, \theta_0 + 1/2) = 0,$$

$$x^3\colon P(t, y, \theta) = 0 \ \rightarrow\ P\Big(\frac{t}{t-1}, \frac{t-y}{t-1}, \theta_2, \theta_1, \theta_0, \theta_3\Big) = 0.$$

18.4. Семейство Шлезингера (18.2), связанное с уравнением Пенлеве VI (см. теорему 18.1), после сопряжения на постоянную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

остается шлезингеровским. Найдите соответствующую этому сопряжению симметрию уравнения Пенлеве VI.

Приложение 1

Построение фуксовой системы по фуксову уравнению

Рассмотрим на сфере Римана фуксово линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^p u}{dz^p} + b_1(z)\frac{d^{p-1}u}{dz^{p-1}} + \ldots + b_p(z)u = 0 \tag{1}$$

порядка p с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$.

Теорема 1. *Пусть* $\chi\colon \pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ — *представление монодромии фуксова дифференциального уравнения* (1). *Тогда на* $\bar{\mathbb{C}}$ *существует фуксова система с теми же особыми точками* $a_1, \ldots, a_n$ *и той же монодромией* χ.

Доказательство. С помощью замены

$$y^1 = u, \quad y^2 = \frac{du}{dz}, \quad \ldots, \quad y^p = \frac{d^{p-1}u}{dz^{p-1}} \tag{2}$$

перейдем от фуксова уравнения (1) к системе

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \tag{3}$$

с теми же (регулярными) особыми точками и монодромией. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 = 0$ и $a_n = \infty$, так как этого всегда можно добиться конформными преобразованиями сферы Римана (следовательно, функции $\zeta^{-k}b_k(1/\zeta)$ голоморфны в 0; см. лекцию 7).

Под действием калибровочного преобразования

$$\tilde{y} = \Gamma_i(z)y, \quad \Gamma_i(z) = \mathrm{diag}\big(1, z - a_i, (z - a_i)^2, \ldots, (z - a_i)^{p-1}\big), \quad i < n,$$

система (3) переходит в систему с фуксовой особой точкой $z = a_i$ (см. доказательство достаточности теоремы 4.2). При этом если $i = 1$, то преобразованная система является фуксовой и в бесконечности. Поэтому положим $\Gamma_n(z) = \Gamma_1(z)$.

Теперь рассмотрим калибровочное преобразование, которое задается матрицей $\Gamma(z) = \mathrm{diag}(1, \Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^{p-1})$, где

$$\Delta = \frac{(z - a_1)\ldots(z - a_{n-1})}{z^{n-2}} = \frac{z(z - a_2)\ldots(z - a_{n-1})}{z^{n-2}} = \\ = z\Big(1 - \frac{a_2}{z}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{a_{n-1}}{z}\Big).$$

Это преобразование голоморфно обратимо в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, следовательно, оно переводит систему (3) в систему с теми же особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ и монодромией χ. Покажем, что любая из особенностей $a_2, \ldots, a_n$ последней системы фуксова.

Для этого представим преобразование $y' = \Gamma(z)y$ в окрестности точки $a_i \neq 0$ в виде

$$y' = \big(\Gamma(z)\Gamma_i^{-1}(z)\big)\Gamma_i(z)y.$$

Тогда фуксовость особой точки a_i будет следовать из того, что матрица $\Gamma(z)\Gamma_i^{-1}(z)$ голоморфно обратима в этой точке.

Теперь рассмотрим точку $a_1 = 0$. Выберем в ее окрестности левелевский базис $u_1(z), \ldots, u_p(z)$ пространства решений уравнения (1) и рассмотрим фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы (3), построенную по $u_1, \ldots, u_p$ с помощью замены (2). Тогда матрица $\widetilde{Y}_1(z) = \Gamma_1(z)Y(z)$ будет левелевской фундаментальной матрицей системы, фуксовой в точке 0. Действительно, соответствующая ей матрица монодромии верхнетреугольна, а нормирования такой системы совпадают с нормированиями уравнения (1), принимая все свои значения на столбцах матрицы $\widetilde{Y}_1(z)$ (см. лемму 6.1).

Фундаментальная матрица $Y'(z) = \Gamma(z)Y(z)$ преобразованной системы может быть представлена в виде

$$Y' = z^{-K}\big(\Gamma_1^{n-3}(z)\Gamma(z)\big)\Gamma_1(z)Y,$$

где

$$K = \mathrm{diag}(0,\ n-2,\ 2(n-2),\ \ldots,\ (p-1)(n-2)).$$

Поскольку $\Gamma_1(z)Y$ — левелевская фундаментальная матрица системы, фуксовой в нуле, а матрица $\Gamma_1^{n-3}(z)\Gamma(z)$ голоморфно обратима в нуле, то и матрица $Y_1 = \big(\Gamma_1^{n-3}(z)\Gamma(z)\big)\Gamma_1(z)Y$ является левелевской фундаментальной матрицей системы, фуксовой в точке $z = 0$. Поэтому для матриц $\widetilde{Y}_1 = \Gamma_1(z)Y$, $Y_1 = \Gamma_1^{n-3}(z)\Gamma(z)\widetilde{Y}_1$ в окрестности нуля справедливы левелевские разложения

$$\widetilde{Y}_1(z) = \widetilde{U}(z)z^A z^E, \quad Y_1(z) = U(z)z^A z^E,$$
$$U(z) = \Gamma_1^{n-3}(z)\Gamma(z)\widetilde{U}(z),$$

где $\widetilde{U}(z)$, $U(z)$ — голоморфно обратимые в точке 0 матрицы, $A = \mathrm{diag}(\varphi^1, \ldots$ $\ldots, \varphi^p)$ — матрица нормирований, $\varphi^1 \geqslant \ldots \geqslant \varphi^p$, E — верхнетреугольная матрица.

Согласно лемме 10.2 найдется такая голоморфно обратимая в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ матрица $T(z)$, что

$$T(z)z^{-K}U(z) = V(z)z^D,$$

где матрица $V(z)$ голоморфно обратима в нуле, а матрица $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots$ $\ldots, d_p)$ может быть получена из матрицы $-K$ некоторой перестановкой ее диагональных элементов. При этом $D = -K$ в случае, когда все главные миноры матрицы $U(0)$ не равны нулю. Если удастся доказать, что все главные миноры матрицы $U(0)$ ненулевые, то мы получим следующее разложение для матрицы $Y''(z) = T(z)Y'(z)$:

$$Y''(z) = T(z)Y'(z) = T(z)z^{-K}U(z)z^{A}z^{E} = V(z)z^{A-K}z^{E},$$

где диагональные элементы матрицы

$$A - K = \mathrm{diag}(\varphi^1, \varphi^2 - (n-2), \varphi^3 - 2(n-2), \ldots, \varphi^p - (p-1)(n-2))$$

образуют убывающую последовательность. Из этого будет следовать, что точка 0 является фуксовой особенностью системы с фундаментальной матрицей $Y''(z)$. Остальные особенности $a_2, \ldots, a_n$ этой системы также будут фуксовыми, поскольку матрица $T(z)$ голоморфно обратима вне нуля.

Таким образом, преобразование $y'' = T(z)\Gamma(z)y$ переводит систему (3) в фуксову систему с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ и монодромией χ. Итак, доказательство теоремы завершает следующая лемма.

Лемма 1. *Все главные миноры матрицы $U(0)$ отличны от нуля.*

Доказательство. Поскольку

$$U(z) = \Gamma_1^{n-3}(z)\Gamma(z)\widetilde{U}(z)$$

и матрица $\Gamma_1^{n-3}(z)\Gamma(z)$ диагональна и голоморфно обратима в нуле, то достаточно показать, что все главные миноры матрицы $\widetilde{U}(0)$ отличны от нуля.

Рассмотрим первые k элементов $u_1(z), \ldots, u_k(z)$ левелевского базиса пространства решений уравнения (1) в точке 0. Матрица монодромии в левелевском базисе верхнетреугольна, следовательно, подпространство решений этого уравнения, порожденное функциями $u_1(z), \ldots, u_k(z)$, инвариантно относительно действия оператора монодромии. Поэтому в окрестности нуля можно построить фуксово дифференциальное уравнение (относительно неизвестной u)

$$\frac{1}{W(z)} \det \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_k & u \\ \dfrac{du_1}{dz} & \ldots & \dfrac{du_k}{dz} & \dfrac{du}{dz} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^k u_1}{dz^k} & \ldots & \dfrac{d^k u_k}{dz^k} & \dfrac{d^k u}{dz^k} \end{pmatrix} = 0$$

порядка k, где $W(z) \not\equiv 0$ — вронскиан функций $u_1(z), \ldots, u_k(z)$. Эти функции составят левелевский базис в пространстве решений данного уравнения.

Утверждение леммы следует теперь из того, что подматрица $\widetilde{Y}_1^k(z)$ матрицы $\widetilde{Y}_1(z)$, образованная ее первыми k столбцами и первыми k строками, является левелевской фундаментальной матрицей фуксовой в точке 0 системы, построенной по $u_1, \ldots, u_k$ с помощью замены

$$y^1 = u, \quad y^2 = z\frac{du}{dz}, \quad \ldots, \quad y^k = z^{k-1}\frac{d^{k-1}u}{dz^{k-1}}.$$

В частности, главный минор порядка k матрицы $\widetilde{U}(z)$ совпадает с определителем соответствующей матрицы $\widetilde{U}^k(z)$ из левелевского разложения для $\widetilde{Y}_1^k(z)$, а этот определитель согласно теореме 5.2 отличен от нуля в точке 0. $\square$

Теорема доказана. $\square$

Приложение 2

Вид решений фуксовой системы с параметрами

Рассмотрим изомонодромное семейство фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\right) y, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i(a) = 0, \tag{1}$$

и в окрестности гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$ его аналитическую изомонодромную фундаментальную матрицу $Y(z, a)$, матрица монодромии G_i которой имеет блочный диагональный вид

$$G_i = \operatorname{diag}(G_i^1, \ldots, G_i^k),$$

где каждый блок G_i^j соответствует одному собственному значению матрицы G_i. Обозначим через $E_i = \operatorname{diag}(E_i^1, \ldots, E_i^k)$ матрицу $\dfrac{1}{2\pi i} \ln G_i$, собственные значения ρ_i^j которой нормализованы следующим образом:

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_i^j < 1.$$

В первой части данного курса лекций (лекция 5) подробно излагались понятия левелевского и слабо левелевского базисов в пространстве решений фуксовой системы, после чего был указан вид фундаментальной матрицы данной системы в окрестности особой точки. Основываясь на этом, при каждом фиксированном $a \in D(a^0)$ для матрицы $Y(z, a)$ имеем представление

$$Y(z, a)S(a) = U(z, a)(z - a_i)^{\Lambda_i(a)}(z - a_i)^{E_i(a)}, \tag{2}$$

где

1) $S(a)$ — невырожденная матрица того же блочно-диагонального вида, что и E_i;

2) матрица $U(z, a)$ голоморфно обратима в окрестности точки $z = a_i$;

3) $\Lambda_i(a) = \operatorname{diag}(\Lambda_i^1(a), \ldots, \Lambda_i^k(a))$, $\Lambda_i^j(a)$ — диагональные целочисленные матрицы, диагональные элементы которых (нормирования системы в точке $z = a_i$) образуют невозрастающую последовательность;

4) $E_i(a) = S^{-1}(a) E_i S(a)$ — верхнетреугольная матрица того же блочно-диагонального вида, что и E_i.

На самом деле матрица $\Lambda_i(a)$ не зависит от a (т. е. нормирования фуксовой системы сохраняются при ее изомонодромной деформации), матрицу $S(a)$ можно выбрать голоморфно обратимой по параметру a, а матрицу $U(z, a)$ — голоморфно обратимой по совокупности переменных в некоторой окрестности гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для каждой точки $a^* \in D(a^0)$ найдется такая ее окрестность $U' \subset D(a^0)$, что для указанной выше аналитической изомонодромной матрицы $Y(z, a)$ семейства* (1) *имеет место следующее разложение в окрестности гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$ при $a \in U'$:*

$$Y(z, a)S(a) = U(z, a)(z - a_i)^{\Lambda_i}(z - a_i)^{E_i(a)},$$

где

1) *матрица $S(a)$ голоморфно обратима в U' и имеет тот же самый блочно-диагональный вид, что и E_i;*

2) *матрица $U(z, a)$ голоморфно обратима в окрестности гиперплоскости $\{z - a_i = 0\}$;*

3) *матрица $\Lambda_i = \mathrm{diag}(\Lambda_i^1, \ldots, \Lambda_i^k)$ имеет тот же самый блочно-диагональный вид, что и E_i, Λ_i^j — целочисленные диагональные матрицы, диагональные элементы которых — нормирования семейства* (1) — *образуют невозрастающую последовательность;*

4) *$E_i(a) = S^{-1}(a)E_iS(a)$ — верхнетреугольная матрица того же блочно-диагонального вида, что и E_i.*

Доказательство. Сначала мы докажем, что в разложении (2) матричная функция $\Lambda_i(a)$ не зависит от a.

Напомним, что при каждом фиксированном a собственные значения $\beta_i^j(a) = \lambda_i^j(a) + \rho_i^j$ матрицы $\Lambda_i(a) + E_i(a)$ — показатели фуксовой системы (1) в точке $z = a_i$ — совпадают с собственными значениями матрицы $B_i(a)$ (см. следствие 6.1). Тогда из непрерывности матриц $B_i(a)$ и их собственных значений по параметру a следует, что целочисленные функции $\lambda_i^j(a) = \beta_i^j(a) - \rho_i^j$ также непрерывны по a и, следовательно, постоянны.

Далее заметим, что матрица $Y(z, a)$ имеет вид

$$Y(z, a) = M(z, a)(z - a_i)^{E_i}$$

в некоторой окрестности гиперплоскости $P = \{z - a_i = 0\}$, где $M(z, a)$ — мероморфная в окрестности гиперплоскости P матричная функция, голоморфная вне P. Это следует из того, что матричная функция $Y(z, a)(z - a_i)^{-E_i}$ однозначна в окрестности гиперплоскости P и имеет там не более чем степенной рост (поскольку решения фуксовой системы имеют не более чем степенной рост в окрестности особой точки). Тогда для любого $a \in D(a^0)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} Y(z, a)S(a) &= M(z, a)S(a)(z-a_i)^{S^{-1}(a)E_iS(a)} = \\ &= M(z, a)S(a)(z-a_i)^{E_i(a)}, \\ M(z, a)S(a) &= U(z, a)(z-a_i)^{\Lambda_i}. \end{aligned} \tag{3}$$

Нам нужно доказать, что локально матрицу $S(a)$ можно выбрать голоморфной по a. Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Рассмотрим мероморфную в* $O \times D(a^0)$ *матрицу* $M(z, a)$ *размера* (p, q), $p \geqslant q$, *голоморфную в* $\dot{O} \times D(a^0)$ *и имеющую там ранг* q, *где* $O \subset \mathbb{C}$ — *некоторая окрестность нуля и* $\dot{O} = O \setminus \{0\}$. *Пусть* A — *постоянная диагональная целочисленная матрица. Если для любого значения* a *из окрестности* $\widetilde{U}$ *точки* $a^* \in D(a^0)$ *существуют невырожденная матрица* $S(a)$ *и голоморфная в* O *матрица* $U(z, a)$ *ранга* q *такие, что*

$$M(z, a)S(a) = U(z, a)z^A, \tag{4}$$

то матрицу $S(a)$ *можно выбрать голоморфной в некоторой окрестности* U' *точки* a^*, *а матрицу* $U(z, a)$ — *голоморфной* (*по совокупности переменных*) *в* $O \times U'$.

Доказательство. Рассмотрим индукцию по числу q столбцов матрицы M.

При $q = 1$ матрица $S(a)$ — это скалярная функция, не обращающаяся в нуль, A — целое число, поэтому $M(z, a) = \dfrac{U(z, a)}{S(a)} z^A$, и тогда в качестве голоморфной функции $S(a)$ можно взять единицу, а матричная функция $\dfrac{U(z, a)}{S(a)} = M(z, a)z^{-A}$ голоморфна в $\dot{O} \times \widetilde{U}$ и множество $\{0\} \times \widetilde{U}$ является для нее устранимой особенностью (поскольку $U(z, a)/S(a)$ определена в точках множества $\{0\} \times \widetilde{U}$).

Предположим, что утверждение верно для всех матриц с числом столбцов $k < q$. Докажем его для $k = q$. Можно считать, что $A = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_q)$, $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_q$, $s_q = 0$ (условия $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_q$ всегда можно добиться умножением обеих частей соотношения (4) справа на невырожденную постоянную матрицу, а условия $s_q = 0$ — умножением на скалярную матрицу $z^{-s_q}I$). Тогда матрица $M(z, a)$ определена при $z = 0$. Пусть в разложении (4) $s_l \neq 0$, $s_{l+1} = \ldots = s_q = 0$. Не ограничивая общность, можно считать также, что $S(a^*) = I$. В этом случае из (4) следует, что первые l столбцов матрицы $M(0, a^*)$ нулевые и ранг матрицы $M(0, a)$ равен $q - l$ для всех $a \in \widetilde{U}$. Рассмотрим базисный минор матрицы $M(0, a^*)$. Этот минор включает лишь элементы столбцов с номерами $l+1, \ldots, q$, и в силу его непрерывности соответствующие элементы матрицы $M(0, a)$ образуют ненулевой минор при всех $a \in U^*$, где $U^* \subset \widetilde{U}$ — некоторая окрестность точки a^*. Так как ранг матрицы $M(0, a)$ равен $q-l$ для всех $a \in U^*$, то соответствующий минор является базисным минором для $M(0, a)$ при всех $a \in U^*$. Поэтому каждый j-й столбец матрицы $M(0, a)$ с номером $1 \leqslant j \leqslant l$ выражается единственным образом в виде линейной комбинации столбцов с номерами $l+1, \ldots, q$, и коэффициенты $c_k^j(a)$ каждой такой линейной комбинации являются голоморфными функциями в U^*.

Рассмотрим голоморфную в U^* нижнетреугольную матрицу $R_1(a)$ с единичными элементами на главной диагонали и такую, что ее j-й столбец совпадает со столбцом $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -c_{l+1}^j, \ldots, -c_q^j)^t$ при $j \leqslant l$ (здесь ^{t} означает транспонирование), а столбцы с номерами $j \geqslant l+1$ совпадают с элементами e_j стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^q$. Согласно построению

$$M(z, a)R_1(a) = M^1(z, a)z^{A^1}, \tag{5}$$

где $A^1 = \operatorname{diag}(s_1^1, \ldots, s_q^1)$, $s_1^1 \geqslant 1, \ldots, s_l^1 \geqslant 1$, $s_{l+1}^1 = \ldots = s_q^1 = 0$.

Из (4), (5) следует, что

$$M^1(z, a)z^{A^1} S^1(a) = U(z, a)z^A,$$

где матрица

$$S^1(a) = R_1^{-1}(a)S(a)$$

имеет блочный верхнетреугольный вид $S^1 = \begin{pmatrix} S_1 & * \\ 0 & S' \end{pmatrix}$, потому что лишь последние $q-l$ столбцов матриц $M^1(z, a)z^{A^1}$ и $U(z, a)z^A$ не обращаются в нуль при $z=0$ (а из (5) следует, что последние $q-l$ столбцов матрицы $M^1(z, a)z^{A^1}$ при $z=0$ совпадают с соответствующими столбцами матрицы $M(0, a)$, которые линейно независимы при всех $a \in U^*$).

Рассмотрим матрицы $M_1(z, a)$ и $U_1(z, a)$, образованные первыми l столбцами матриц $M^1(z, a)\, z^{A^1}$ и $U(z, a)$ соответственно, и соответствующий блок A_1 матрицы A. Тогда для каждого $a \in U^*$

$$M_1(z, a)S_1(a) = U_1(z, a)z^{A_1}.$$

Так как $l < q$ и ранги матриц $M_1(z, a)$ и $U_1(z, a)$ равны l в $\dot{O} \times U^*$ и $O \times U^*$ соответственно, то из предположения индукции для l следует, что матрицу $S_1(a)$ можно выбрать голоморфной в некоторой окрестности $U' \subset U^*$ точки a^*. Рассмотрим матрицу $R_2(a) = \operatorname{diag}(S_1(a), I)$. Матрица

$R(a) = R_1(a)R_2(a)$ голоморфно обратима в U', и по построению

$$M(z, a)R(a) = M^1(z, a)z^{A^1}R_2(a) = V(z, a)z^A$$

для некоторой голоморфной в $O \times U'$ матричной функции $V(z, a)$. $\square$

Поскольку в разложении (3) матрица $S(a)$ имеет ту же блочно-диагональную форму, что и матрицы Λ_i, E_i, то мы можем ограничиться доказательством теоремы для каждого блока матриц Λ_i, $S(a)$ и для матриц $M_j(z, a)$, $U_j(z, a)$ (полного ранга), образованных соответствующими столбцами матриц $M(z, a)$, $U(z, a)$ в отдельности. Теперь теорема следует из леммы 1 (после замены $z \mapsto z - a_i$ независимой переменной). При этом обратимость полученной матрицы $U(z, a)$, голоморфной в окрестности гиперплоскости $P = \{z - a_i = 0\}$, следует из обратимости исходной матрицы $U(z, a)$ в соотношении (3). $\square$

Приложение 3

Теорема Биркгофа—Гротендика с параметрами

Обозначим через D_0, D_∞, K следующие подмножества на сфере Римана $\bar{\mathbb{C}}$:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant R\}, \quad D_\infty = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \colon |z| \geqslant r\}, \quad K = D_0 \cap D_\infty,$$

где $r < R$.

Обозначим через $D_\delta(a^0)$ полидиск в $\mathbb{C}^n$ радиуса δ с центром в точке $a^0 = (a_1^0, \ldots, a_n^0)$. Для произвольного множества M через $H(M)$ будем обозначать банахово пространство матричнозначных функций, голоморфных внутри M и непрерывных вплоть до границы M, а через $H^0(M)$ — подпространство голоморфно обратимых матричнозначных функций пространства $H(M)$.

Здесь мы изложим элементарное доказательство следующего утверждения, принадлежащего Мальгранжу и известного как теорема Биркгофа—Гротендика с параметрами.

Теорема 1. *Пусть матричная функция $M(z, a)$ принадлежит пространству $H^0(K \times D_\delta(a^0))$. Тогда существуют число $\tilde{\delta} > 0$, аналитическое подмножество $\Theta \subset D_{\tilde{\delta}}(a^0)$ коразмерности один и матричные функции $W(z, a)$, $U(z, a)$ такие, что:*

1) *$W(z, a)$ и $W^{-1}(z, a)$ голоморфны в $D_\infty \times (D_{\tilde{\delta}}(a^0) \setminus \Theta)$ и мероморфны вдоль $D_\infty \times \Theta$;*

2) *$U(z, a)$ и $U^{-1}(z, a)$ голоморфны в $D_0 \times (D_{\tilde{\delta}}(a^0) \setminus \Theta)$ и мероморфны вдоль $D_0 \times \Theta$;*

3) *$U(z, a)M(z, a) = z^C W(z, a)$, где $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_p)$ и $c_1 \geqslant \ldots \ldots \geqslant c_p$ — целые числа.*

Тройка $(D_0 \times D_\delta(a^0),\ D_\infty \times D_\delta(a^0),\ g_{0\infty}(z, a) = M(z, a))$ задает голоморфное векторное расслоение над $\bar{\mathbb{C}} \times D_\delta(a^0)$. Таким образом, эта теорема может быть рассмотрена как теорема Биркгофа—Гротендика с параметрами (локальный вариант). Из ее доказательства также будет следовать еще одно принадлежащее Мальгранжу утверждение.

Теорема 2. *Пусть $M(z, t)$ — голоморфно обратимая в $K \times T$ матричная функция, где T — связное аналитическое многообразие. Пусть также для некоторого $t^0 \in T$ имеем разложение $M(z, t^0) = U_0^{-1}(z) W_0(z)$, где $U_0(z) \in H^0(D_0)$, $W_0(z) \in H^0(D_\infty)$, $W_0(\infty) = I$. Тогда существуют аналитическое подмножество $\Theta \subset T$ коразмерности* *один и единственные голоморфные отображения*

$$W\colon D_\infty \times (T\setminus\Theta) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}),$$
$$U\colon D_0 \times (T\setminus\Theta) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

такие, что выполняются следующие условия:

1) W, W^{-1} *мероморфны вдоль* $D_\infty \times \Theta$ *и* $W(\infty, t) \equiv I$;

2) U, U^{-1} *мероморфны вдоль* $D_0 \times \Theta$;

3) $M(z, t) = U^{-1}(z, t)W(z, t)$.

Данная теорема утверждает, что если голоморфное векторное расслоение над $\bar{\mathbb{C}} \times T$, ограниченное на $\bar{\mathbb{C}} \times \{t^0\}$, голоморфно тривиально, то оно тривиально вне некоторого аналитического подмножества $\Theta \subset T$ коразмерности один, вдоль которого расслоение мероморфно тривиально.

Мы докажем теорему 1 в серии лемм. Леммы 1 и 2 являются обобщениями (для случая с параметрами) соответствующих лемм из лекции 9. Лемму 3 можно рассматривать как обобщение леммы 9.3 на многомерный случай.

Банаховы пространства

$$H(D_\infty \times D_\delta(a^0)), \quad H(D_0 \times D_\delta(a^0)), \quad H(K \times D_\delta(a^0))$$

будут рассматриваться с нормой $\|N\| = \max\limits_{(z,a)} \|N(z, a)\|$.

Лемма 1. *Если в условиях теоремы* 1 *дополнительно выполнено условие* $\|M - I\| < \varepsilon$ *для достаточно малого* $\varepsilon > 0$, *то найдутся матричные функции*

$$W(z, a) \in H^0(D_\infty \times D_\delta(a^0)) \quad \text{и} \quad U(z, a) \in H^0(D_0 \times D_\delta(a^0))$$

такие, что $M(z, a) = U^{-1}(z, a)W(z, a)$ *в* $K \times D_\delta(a^0)$.

При этом $W(z, a)$ *можно выбрать так, что* $W(\infty, a) \equiv I$. *Тогда функции* $W(z, a)$, $U(z, a)$ *однозначно определяются функцией* $M(z, a)$.

Доказательство. Разложение $M(z, a) = U^{-1}(z, a)W(z, a)$ повторяет доказательство аналогичного разложения (без параметра) в лемме 9.1.

После замены

$$W(z, a) \mapsto W^{-1}(\infty, a)W(z, a), \quad U(z, a) \mapsto W^{-1}(\infty, a)U(z, a)$$

получаем требуемое разложение для $M(z, a)$ с $W(\infty, a) \equiv I$.

Если $W'(z, a)$, $U'(z, a)$ — другая пара функций с теми же свойствами, то $M = U^{-1}W = U'^{-1}W'$ и матричная функция

$$S(z, a) = \begin{cases} U'(z, a)U^{-1}(z, a) & \text{при } z \in D_0,\\ W'(z, a)W^{-1}(z, a) & \text{при } z \in D_\infty \end{cases}$$

голоморфно обратима на $\bar{\mathbb{C}} \times D_\delta(a^0)$. Следовательно, $S(z, a)$ не зависит от z. Но по построению $S(\infty, a) \equiv I$, поэтому $S(z, a) \equiv I$ и $U'(z, a) \equiv \equiv U(z, a)$, $W'(z, a) \equiv W(z, a)$. □

Вторая часть доказательства теоремы 1 состоит в замене функции $M(z, a)$ на некоторую рациональную функцию.

Лемма 2. *Для любой матричной функции* $M(z, a) \in H^0(K \times D_\delta(a^0))$ *найдутся число* $\delta' > 0$, *матричная функция* $F(z, a) \in H^0(K \times D_{\delta'}(a^0))$, *рациональная по* z, *и такие матричные функции* $W(z, a) \in H^0(D_\infty \times \times D_{\delta'}(a^0))$, $U(z, a) \in H^0(D_0 \times D_{\delta'}(a^0))$, *что*

1) *расположение нулей функции* $\det F(z, a)$ *в* $(D_0 \setminus K) \times D_{\delta'}(a^0)$ *не зависит от* a;

2) $U(z, a)M(z, a) = F(z, a)W(z, a)$.

Доказательство. Функция $M(z, a^0)$ может быть равномерно приближена в K матричными рациональными функциями с полюсами лишь в точках 0 и ∞. Для этой цели можно использовать подходящие части ряда Лорана функции $M(z, a^0)$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\tilde{\delta} > 0$, что $\|M(z, a)M^{-1}(z, a^0) - I\| < \varepsilon$ в $K \times D_{\tilde{\delta}}(a^0)$.

Таким образом, всегда можно найти число $\tilde{\delta} > 0$ и матричную рациональную функцию $B(z)$ с полюсами лишь в точках 0 и ∞ такие, что норма $\|M(z, a)B^{-1}(z) - I\|$ достаточно мала в $K \times D_{\tilde{\delta}}(a^0)$ и к функции $M(z, a)B^{-1}(z)$ может быть применена лемма 1:

$$MB^{-1} = U_1 W_1, \quad M = U_1 W_1 B,$$

где $U_1 \in H^0(D_0 \times D_{\tilde{\delta}}(a^0))$, $W_1 \in H^0(D_\infty \times D_{\tilde{\delta}}(a^0))$. Рассмотрим функцию $W_1(z, a)B(z)$ и приблизим ее в $K \times D_{\delta'}(a^0)$ (для некоторого $\delta' \leqslant \tilde{\delta}$) аналогичным образом функцией $H(z)$ с теми же свойствами, что и $B(z)$. Вновь применяя лемму 1, получаем

$$H^{-1} W_1 B = U_2 W_2,$$

где $U_2 \in H^0(D_0 \times D_{\delta'}(a^0))$, $W_2 \in H^0(D_\infty \times D_{\delta'}(a^0))$. Поэтому

$$U_2 = H^{-1} W_1 B W_2^{-1}, \quad M = U_1 H U_2 W_2 = U_1 F W_2, \quad F = H U_2.$$

Из первого из приведенных выше равенств следует, что матричная функция $U_2(z, a)$ мероморфна в $D_\infty \times D_{\delta'}(a^0)$. С другой стороны, по построению функция U_2 голоморфно обратима в $D_0 \times D_{\delta'}(a^0)$. Таким образом, $U_2(z, a)$ — рациональная по z функция с голоморфными по a коэффициентами.

Окончательно получаем, что $F(z, a)$ — рациональная по z функция с голоморфными по a коэффициентами. При этом расположение нулей функции $\det F(z, a)$ в $(D_0 \setminus K) \times D_{\delta'}(a^0)$ не зависит от a, поскольку это справедливо для функции $\det H(z)$, а функция $\det U_2(z, a)$ не имеет нулей в $D_0 \times D_{\delta'}(a^0)$.

Теперь, полагая $U^{-1}=U_1$, $W=W_2$, получаем разложение 2. □

Следующая лемма играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1.

Лемма 3. *Пусть $M(z, a)$ — рациональная по z, голоморфно обратимая в $(D_0 \setminus \{0\}) \times D_\delta(a^0)$ матричная функция. Тогда существуют аналитическое подмножество $\Theta \subset D_\delta(a^0)$ коразмерности один и матричные функции $W(z, a)$, $U(z, a)$ такие, что*:

1) *$W(z, a)$ и $W^{-1}(z, a)$ голоморфны в $D_\infty \times (D_\delta(a^0) \setminus \Theta)$ и мероморфны вдоль $D_\infty \times \Theta$;*

2) *$U(z, a)$ и $U^{-1}(z, a)$ голоморфны в $D_0 \times (D_\delta(a^0) \setminus \Theta)$ и мероморфны вдоль $D_0 \times \Theta$;*

3) *$U(z, a)M(z, a) = z^C W(z, a)$, где $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_p)$ и $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_p$ — целые числа.*

Доказательство. Умножив, если необходимо, матрицу M на z^{cI} с подходящим целым числом c, сведем доказательство леммы к случаю, когда матричная функция M является голоморфной в $D_0 \times D_\delta(a^0)$.

Пусть M уже имеет вид

$$M(z, a) = L(z, a)z^K,$$

где $K = \operatorname{diag}(k_1, \ldots, k_p)$ и $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_p$ — целые числа, $L(z, a)$ — голоморфная в $D_0 \times D_\delta(a^0)$ матричная функция. Тогда

$$L(z, a) = L_0(a) + L_1(a)z + \ldots$$

и $\det L(z, a) \neq 0$, если $z \neq 0$. Если $\det L(0, a^0) \neq 0$, то доказывать нечего. Пусть $\det L(0, a^0) = 0$. Тогда $\det L(0, a) \equiv 0$. Действительно, по теореме Хартогса множество нулей голоморфной функции $\det L(0, a)$ либо совпадает с $D_\delta(a^0)$ (т. е. $\det L(0, a) \equiv 0$), либо образует аналитическое подмножество $N \subset D_\delta(a^0)$ коразмерности один. В последнем случае множество $\{0\} \times N$ нулей голоморфной функции $\det L(z, a)$ по той же причине является аналитическим подмножеством коразмерности один в многообразии $D_0 \times D_\delta(a^0)$ большей размерности, что исключено.

Итак, $\det L_0(a) \equiv 0$. Обозначим через r максимальный ранг матрицы $L_0(a)$ для всех $a \in D_\delta(a^0)$. Тогда $r < p$. Следовательно, найдутся число $i \leqslant r$ и открытое подмножество $V \subset D_\delta(a^0)$ такие, что первые i столбцов $m_1, \ldots, m_i$ матрицы L_0 линейно независимы во всех точках V и

$$m_{i+1}(a) = s_1(a)m_1(a) + \ldots + s_i(a)m_i(a),$$

где $s_1(a), \ldots, s_i(a)$ — функции, рациональные по элементам матрицы $L_0(a)$ (мы предполагаем здесь, что $i > 0$, т. е. что $m_1(a) \not\equiv 0$, поскольку в противном случае можно сразу увеличить число k_1, не прибегая к изложенной ниже процедуре). Последнее разложение следует из теоремы о базисном миноре.

Рассмотрим функцию

$$W_3(z, a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & -s_1(a)z^{k_{i+1}-k_1} & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -s_i(a)z^{k_{i+1}-k_i} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

(Лишь $(i+1)$-й столбец матрицы W_3 отличен от столбцов единичной матрицы.) Ясно, что $W_3(z, a)$ голоморфно обратима в $(\bar{\mathbb{C}} \setminus 0) \times (D_\delta(a^0) \setminus \Theta)$ и мероморфно обратима вдоль $(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \times \Theta$, где $\Theta \subset D_\delta(a^0)$ — аналитическое подмножество коразмерности один (множество полюсов коэффициентов $s_j(a)$).

Из приведенной конструкции немедленно следует, что

$$L(z, a)z^K W_3(z, a) = L'(z, a)z^{K'},$$

где $K' = \operatorname{diag}(k'_1, \ldots, k'_p)$, $k'_j = k_j$ для $j \neq i+1$ и $k'_{i+1} = k_{i+1} + 1$, а $L'(z, a)$ — голоморфная в $D_0 \times (D_\delta(a^0) \setminus \Theta)$ матричная функция, голоморфно обратимая в $(D_0 \setminus \{0\}) \times (D_\delta(a^0) \setminus \Theta)$.

После умножения справа на подходящую постоянную матрицу можно добиться выполнения условия $k'_1 \geqslant \ldots \geqslant k'_p$. Так как $k'_1 + \ldots + k'_p > k_1 + \ldots + k_p$, то, повторив, если необходимо, описанную процедуру, получим через конечное число шагов разложение 3 леммы. Окончательно множество Θ получается как конечное объединение соответствующих множеств, возникающих на каждом шаге изложенной выше процедуры. $\square$

Теперь мы имеем все для того, чтобы доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Вследствие леммы 2 можно считать, что матрица $M(z, a)$ рациональна по z, с голоморфными в $D_\delta(a^0)$ коэффициентами, и расположение нулей функции $\det M(z, a)$ в $(D_0 \setminus K) \times D_\delta(a^0)$ не зависит от a. Если $M(z, a)$ голоморфно обратима в $(D_0 \setminus \{0\}) \times D_\delta(a^0)$, то утверждение теоремы немедленно следует из леммы 3.

Пусть $\det M(b, a^0) = 0$ для некоторого $b \in D_0 \setminus (K \cup \{0\})$. Рассмотрим новые локальные координаты $(w, a) = (z - b, a)$ и обозначим теперь через D_0 маленький диск с центром в точке $w = 0$. Применим лемму 3 к матрице $M(w + b, a)$. Получим, что исходное расслоение эквивалентно расслоению (определенному над $\bar{\mathbb{C}} \times D_{\delta'}(a^0)$) с функцией склейки $L(z, a)(z - b)^C$, где $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_p)$, $\det L(b, a) \neq 0$, которое, в свою очередь, эквивалентно расслоению с функцией склейки $L(z, a)z^C$, так как функция $(z/(z - b))^C$ голоморфно обратима в $D_\infty \times D_{\delta'}(a^0)$. Применяя, если необходимо, данную процедуру к остальным нулям функции

$\det M(z, a^0)$ в $D_0 \setminus (K \cup \{0\})$, через конечное число шагов мы окажемся в условиях леммы 3 (точнее, в условиях одного из промежуточных шагов леммы, поскольку полученная функция склейки может иметь полюсы вдоль некоторого аналитического подмножества $\Theta' \subset D_{\delta'}(a^0)$ коразмерности один). Теорема снова следует из леммы 3. $\square$

Заметим, что числа $c_1, \ldots, c_p$ из разложения 3 теоремы 1 одинаковы для всех $a \notin \Theta$. Набор этих чисел называется типом расщепления голоморфного векторного расслоения над $\bar{\mathbb{C}} \times D_\delta(a^0)$, заданного тройкой $(D_0 \times D_\delta(a^0), D_\infty \times D_\delta(a^0), g_{0\infty}(z, a) = M(z, a))$. Тип расщепления такого расслоения определяется однозначно этим расслоением (см. доказательство леммы 10.1).

Теперь мы можем доказать теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 1 голоморфное векторное расслоение E над $\bar{\mathbb{C}} \times T$, заданное тройкой $(D_0 \times T, D_\infty \times T, g_{0\infty}(z, t) = M(z, t))$, тривиально над $\bar{\mathbb{C}} \times V$, где V — некоторая окрестность точки $t^0 \in T$ (поскольку склеивающий коцикл $g_{0\infty}(z, t^0)$ эквивалентен единичному, то для t, близких к t^0, коцикл $g_{0\infty}(z, t)$ эквивалентен коциклу, близкому к единичному). Если E тривиально над $\bar{\mathbb{C}} \times V$ и $\bar{\mathbb{C}} \times V'$, причем $V \cap V' \neq \varnothing$, то E тривиально над $\bar{\mathbb{C}} \times (V \cup V')$. Действительно, функции U, U', W, W' по лемме 1 однозначно определяются условием $W(\infty, t) \equiv W'(\infty, t) \equiv I$, $t \in V \cap V'$, поэтому мы получаем, что $W(z, t) = W'(z, t)$, $U(z, t) = U'(z, t)$ в $\bar{\mathbb{C}} \times (V \cap V')$.

Таким образом, векторное расслоение E голоморфно тривиально над $\bar{\mathbb{C}} \times N$, где $N \subset T$ — открытое подмножество. Теперь нам остается только доказать, что $\Theta = T \setminus N \subset T$ является аналитическим подмножеством коразмерности один и затем применить теорему 1. Для этого достаточно доказать данное утверждение для окрестности каждой точки t^*, принадлежащей границе множества N. Но это как раз частный случай теоремы 1, когда все числа c_i равны нулю (это следует из замечания после доказательства теоремы 1 и того факта, что наше векторное расслоение тривиально над прямым произведением $\bar{\mathbb{C}}$ и открытого подмножества окрестности точки t^*). $\square$

Приложение 4

Высшие гомотопические группы и точные гомотопические последовательности

Высшие гомотопические группы $\pi_n(X, x^0)$ определяются так же, как и фундаментальная группа. Отличие состоит в том, что вместо петель рассматриваются сфероиды.

Определение 1. *Сфероидом размерности n* в пространстве X с базисной точкой x^0 называется такое непрерывное отображение $f\colon I^n \to X$ единичного куба, что $f(\partial I^n) = x^0$. (Здесь I — сокращенное обозначение единичного отрезка $[0, 1]$, а ∂I^n — граница n-мерного куба I^n как подмножества $\mathbb{R}^n$.)

Название «сфероид» связано с тем, что при стягивании в одну точку p границы ∂I^n n-мерного куба I^n получается пространство[1] Σ, гомеоморфное n-мерной сфере S^n. При этом возникает взаимно однозначное соответствие между непрерывными отображениями $(I^n, \partial I^n) \to (X, x^0)$ (такая запись означает, что при рассматриваемом отображении $I^n \to X$ подмножество ∂I^n переходит в x^0) и $(S^n, p) \to (X, x^0)$ (точку p мы теперь считаем точкой S^n). Приводимое ниже определение гомотопической группы, будучи перефразированным в терминах отображений $(S^n, p) \to (X, x^0)$, вначале стало бы более наглядным, однако в дальнейшем оказывается удобнее работать с отображениями $(I^n, \partial I^n) \to (X, x^0)$.

n-мерная гомотопическая группа $\pi_n(X, x^0)$ пространства X с *базисной* (или, как еще говорят, *отмеченной*) точкой x^0 — это множество классов гомотопных сфероидов в пространстве X с операцией умножения. Сфероид $f\colon I^n \to X$, являющийся произведением $f_1 f_2$ сфероидов $f_1,\ f_2\colon I^n \to X$, определяется следующим образом. Выберем внутри куба I^n два маленьких непересекающихся куба I_1^n, I_2^n, полученных с помощью гомотетий

$$h_1\colon I^n \to I_1^n, \quad h_2\colon I^n \to I_2^n.$$

[1] Формальное описание: $\Sigma = (I^n \setminus \partial I^n) \cup \{p\}$; имеется естественное отображение $I^n \to \Sigma$, переводящее каждую точку из $I^n \setminus \partial I^n$ в себя и все точки из ∂I^n — в p; топология в Σ — сильнейшая, при которой это отображение непрерывно, т.е. открытые подмножества в Σ суть те, полные прообразы которых являются открытыми подмножествами в I^n (открытыми — в индуцированной топологии в I^n как в подмножестве $\mathbb{R}^n$).

Тогда

$$f(x) = \begin{cases} f_1 \circ h_1^{-1}(x), & \text{если } x \in I_1^n; \\ f_2 \circ h_2^{-1}(x), & \text{если } x \in I_2^n; \\ x^0, & \text{если } x \notin I_1^n \cup I_2^n. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что если сфероиды g_1, g_2 гомотопны сфероидам f_1, f_2, то произведение $g_1 g_2$ гомотопно $f_1 f_2$; это позволяет говорить о произведении классов гомотопных сфероидов, т.е. элементов множества $\pi_n(X, x^0)$. Снабженное этой операцией, $\pi_n(X, x^0)$ становится группой. Представителем единичного элемента группы служит отображение всего куба в базисную точку x^0, а сфероид, «обратный» к данному — обратный в том смысле, что их произведение принадлежит единичному элементу, — можно получить с помощью симметрии куба относительно гиперплоскости $\{x_1 = 1/2\}$. Оказывается, что при $n \geqslant 2$ группа $\pi_n(X, x^0)$ коммутативна (в связи с чем вместо умножения часто говорят о сложении и пользуются знаком $+$).

Если пространство X линейно связно, то при всех $x^0 \in X$ группы $\pi_n(X, x^0)$ изоморфны друг другу. Это дает некоторое основание говорить о группе $\pi_n(X)$, опуская упоминание об x^0. Однако здесь есть одна тонкость. Допустим, мы задали некоторый элемент данной группы, указав представляющий его сфероид $(I^n, \partial I^n) \to (X, x^0)$. Какие сфероиды $(I^n, \partial I^n) \to (X, x^1)$ будут представлять тот же элемент, если перейти к другой отмеченной точке x^1? При построении изоморфизма $\pi_n(X, x^0) \to \pi_n(X, x^1)$ приходится привлекать какой-нибудь путь, соединяющий x^0 с x^1, и интересующий нас сфероид $(I^n, \partial I^n) \to (X, x^1)$, вообще говоря, зависит от выбора этого пути. Правда, если пространство X односвязно, то гомотопический класс нужного нам сфероида $(I^n, \partial I^n) \to (X, x^1)$ и возникающий отсюда изоморфизм $\pi_n(X, x^0) \to \to \pi_n(X, x^1)$ от указанного выбора не зависят. В этом случае можно вполне корректным образом опустить упоминание об отмеченной точке x^0 и писать $\pi_n(X)$. Часто и для неодносвязного X опускают упоминание об x^0, но это уже некоторая вольность речи, которую позволяют себе, рассчитывая, что читатель самостоятельно домыслит опущенное.

В лекциях 1, 2 были введены главные и векторные расслоения. Нам понадобятся еще так называемые локально тривиальные расслоения. В топологии же имеется еще несколько родственных, но все же различных вариантов понятия расслоения. Затруднительно «привести их всех к общему знаменателю». Поэтому часто начинают со следующего определения, которое — сразу предупредим — является чрезмерно и излишне общим, а в то же время еще не отражает существенных черт всех этих вариантов, но которое позволяет дать затем несколько «примыкающих» определений и тем самым указать используемый вариант (или варианты) понятия расслоения.

Определение 2. *Расслоением* называется непрерывное отображение $p\colon E \to B$ одного топологического пространства *на* другое. При этом E, B и p называются соответственно *пространством*, *базой* и *проекцией* расслоения. Говорят (особенно устно), что точка $\tilde{x} \in E$ лежит *над* своей проекцией $p(\tilde{x})$ на базу B.

Определение 3. Расслоение $p\colon E \to B$ называется *локально тривиальным*, если для любой точки $x \in B$ найдется такая ее открытая окрестность U, что прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфен прямому произведению $U \times p^{-1}(x)$ посредством гомеоморфизма φ_U такого, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times p^{-1}(x) \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Обычно дополнительно требуют, чтобы все *слои* $p^{-1}(x)$ были гомеоморфны друг другу (если база B — связная, то это выполняется автоматически). Если F — какое-нибудь топологическое пространство, гомеоморфное слоям $p^{-1}(x)$, то говорят, что F является (*стандартным*) *слоем* данного расслоения.

Окрестности U, о которых говорится в определении, часто называют *координатными окрестностями*. Здесь «координаты» точки $\tilde{x} \in E$ — не какой-то набор чисел, а пара

$$(x,\ f) = \varphi_U(\tilde{x}), \quad x \in U, \quad f \in F$$

(подразумевается, что в определении 3 слой $p^{-1}(x)$ заменен на стандартный слой F, соответственно понимается и φ_U).

Под *накрытием* мы будем понимать локально тривиальное расслоение с дискретным слоем, а под *универсальным накрытием* — накрытие со связным, односвязным пространством. При некотором дополнительном условии, которое касается локального строения B (и которое выполняется для многообразий), у линейно связного B всегда имеется единственное универсальное накрытие, причем оно накрывает (с сохранением проекции на базу) любое другое связное накрытие пространства B (почему и называется универсальным).

Определение 4. *Поднятием* непрерывного отображения $f\colon X \to B$ топологического пространства X в базу расслоения B называется непрерывное отображение $\tilde{f}\colon X \to E$ такое, что $p \circ \tilde{f} = f$.

Локально тривиальное расслоение обладает свойством *поднятия гомотопии*. Нам нужен только частный случай этого свойства: для любой гомотопии $f_t\colon I^n \to B$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и любого поднятия $\tilde{f}_0$ начального отображения f_0 найдется согласованное с ним поднятие $\tilde{f}_t\colon I^n \to E$ всей гомотопии.

Пусть $p\colon E \to B$ — локально тривиальное расслоение со связным пространством расслоения E. Выберем базисные точки $\tilde{x}^0 \in E$, $x^0 \in B$ так, что $p(\tilde{x}^0) = x^0$. Обозначим через F слой $p^{-1}(x^0)$. Тогда вложение $i\colon F \to E$ и проекция $p\colon E \to B$ индуцируют гомоморфизмы

$$i_*\colon \pi_n(F,\, \tilde{x}^0) \to \pi_n(E,\, \tilde{x}^0), \qquad p_*\colon \pi_n(E,\, \tilde{x}^0) \to \pi_n(B,\, x^0)$$

(проверьте это).

Теорема 1. *Для каждого $n > 1$ можно определить такие гомоморфизмы $\delta\colon \pi_n(B,\, x^0) \to \pi_{n-1}(F,\, \tilde{x}^0)$, что последовательность*

$$\ldots \to \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\delta} \to \pi_{n-1}(F) \to \ldots \to \pi_1(B) \qquad (1)$$

является точной, т. е. ядро каждого гомоморфизма совпадает с образом предыдущего (*для краткости базисные точки опущены*).

Доказательство. Мы ограничимся определением гомоморфизмов δ. Пусть α — произвольный элемент группы $\pi_n(B)$. Тогда представляющий его сфероид $s\colon I^n \to B$ можно рассматривать как гомотопию $f_t\colon I^{n-1} \to B$, где через t обозначена последняя координата пространства $\mathbb{R}^n$, в котором лежит куб I^n. Поскольку $f_0(x) \equiv x^0$, то гомотопия допускает поднятие $\tilde{f}_0(x) \equiv \tilde{x}^0$ в начальный момент, следовательно, существует поднятие $\tilde{f}_t\colon I^{n-1} \to E$ данной гомотопии. Рассмотрим его как поднятие $\tilde{s}\colon I^n \to E$ сфероида s. Ограничение $\tilde{s}$ на границу ∂I^n куба I^n является $(n-1)$-мерным сфероидом в F, так как $p \circ (\tilde{s}|_{\partial I^n}) = (p \circ \tilde{s})|_{\partial I^n} = s|_{\partial I^n} = x^0$. Этот сфероид и задает искомый элемент $\delta(\alpha)$. □

Последовательность (1) называют *точной гомотопической последовательностью расслоения*.

Пример 1. Покажем, что все высшие гомотопические группы окружности S^1 тривиальны.

Для этого рассмотрим локально тривиальное расслоение

$$p\colon \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}, \qquad p(x) = e^{ix},$$

с дискретным слоем, который можно отождествить с группой целых чисел $\mathbb{Z}$.

Поскольку $\pi_n(\mathbb{R}) = \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) = 0$ при всех $n > 1$, то отрезок

$$\pi_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{p_*} \pi_n(S^1) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(\mathbb{Z})$$

точной гомотопической последовательности расслоения обеспечивает тривиальность групп $\pi_n(S^1)$ при всех $n > 1$.

Пример 2. Локально тривиальное расслоение, рассмотренное в предыдущем примере, является универсальным накрытием окружности. В общем случае, для накрытия $p\colon E \to B$ высшие гомотопические группы пространства E и базы B совпадают. Действительно, поскольку для дискретного слоя F все $\pi_n(F) = 0$, то отрезок

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(F)$$

точной гомотопической последовательности накрытия показывает изоморфность групп $\pi_n(E)$ и $\pi_n(B)$ при $n > 1$.

Пример 3. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ без диагоналей $\{a_i = a_j\}$, т. е. многообразие $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. Покажем, что все его высшие гомотопические группы тривиальны, а фундаментальная группа нетривиальна.

Воспользуемся индукцией по размерности n. При $n = 1$ рассматриваемое многообразие — это пространство $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, все высшие гомотопические группы которого тривиальны, а фундаментальная группа нетривиальна, так как $\mathbb{C}^*$ гомотопически эквивалентно окружности S^1 (проверьте, что гомотопические группы гомотопически эквивалентных топологических пространств изоморфны).

Теперь, предположив, что утверждение верно для размерностей, меньших n, докажем его для размерности n. Для этого рассмотрим локально тривиальное расслоение

$$p\colon \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\} \to \mathbb{C}^{n-1} \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\},$$

$$p(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

со слоем $p^{-1}(a_1^0, \ldots, a_{n-1}^0) \cong \mathbb{C} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_{n-1}^0\}$, все высшие гомотопические группы которого тривиальны, а фундаментальная группа нетривиальна. (Пространство $\mathbb{C} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_{n-1}^0\}$ гомотопически эквивалентно букету $n - 1$ окружностей, т. е. объединению окружностей, имеющих одну общую точку и никаких попарных пересечений вне нее. Универсальное накрытие букета стягиваемо (гомотопически эквивалентно точке) в силу своей одномерности и односвязности, поэтому его высшие гомотопические группы тривиальны, а следовательно, тривиальны и высшие гомотопические группы самого букета, см. пример 2.)

Поскольку по предположению индукции $\pi_k\Big(\mathbb{C}^{n-1} \setminus \bigcup\limits_{i \neq j} \{a_i = a_j\}\Big) = 0$ при $k > 1$, то отрезок

$$\pi_k(\mathbb{C} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_{n-1}^0\}) \xrightarrow{i_*} \pi_k\Big(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}\Big) \xrightarrow{p_*} \pi_k\Big(\mathbb{C}^{n-1} \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}\Big)$$

точной гомотопической последовательности расслоения обеспечивает тривиальность групп $\pi_k\Big(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i\neq j}\{a_i = a_j\}\Big)$ при $k > 1$, а отрезок

$$\pi_2\Big(\mathbb{C}^{n-1} \setminus \bigcup_{i\neq j}\{a_i = a_j\}\Big) \xrightarrow{\delta} \pi_1\big(\mathbb{C} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_{n-1}^0\}\big) \xrightarrow{i_*}$$
$$\xrightarrow{i_*} \pi_1\Big(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i\neq j}\{a_i = a_j\}\Big)$$

показывает нетривиальность группы $\pi_1\Big(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i\neq j}\{a_i = a_j\}\Big)$.

Из примеров 2 и 3 следует, что все гомотопические группы универсального накрытия Z пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i\neq j}\{a_i = a_j\}$ тривиальны.

Теперь рассмотрим проекции

$$p_i\colon Z \to \mathbb{C}, \quad p_i(\tilde{a}) = a_i$$

(здесь подразумевается, что при накрытии $Z \to \mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i\neq j}\{a_i = a_j\}$ точка $\tilde{a}$ переходит в $(a_1, \ldots, a_n)$), и множества

$$D_i = \{(z, \tilde{a}) \mid z = p_i(\tilde{a})\} \subset \bar{\mathbb{C}} \times Z, \quad D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Теорема 2. *Фундаментальные группы* $\pi_1\big((\bar{\mathbb{C}} \times Z) \setminus D, (z_0, \tilde{a}^0)\big)$ *и* $\pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}, z_0)$ *изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим локально тривиальное расслоение

$$p\colon (\bar{\mathbb{C}} \times Z) \setminus D \to Z, \quad p(z, \tilde{a}) = \tilde{a},$$

со слоем $p^{-1}(\tilde{a}^0) \cong \bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}$. Поскольку $\pi_1(Z, \tilde{a}^0) = \pi_2(Z, \tilde{a}^0) = 0$, то отрезок

$$\pi_2(Z, \tilde{a}^0) \xrightarrow{\delta} \pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}, z_0) \xrightarrow{i_*}$$
$$\xrightarrow{i_*} \pi_1\big((\bar{\mathbb{C}} \times Z) \setminus D, (z_0, \tilde{a}^0)\big) \xrightarrow{p_*} \pi_1(Z, \tilde{a}^0)$$

точной гомотопической последовательности расслоения показывает изоморфность групп $\pi_1\big((\bar{\mathbb{C}} \times Z) \setminus D, (z_0, \tilde{a}^0)\big)$ и $\pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}, z_0)$. $\square$

Литература

[1] *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939. 719 с.

[2] *Аносов Д. В.*, *Лексин В. П.* Андрей Андреевич Болибрух в жизни и науке // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59, № 6. С. 3—22.

[3] *Арнольд В. И.*, *Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 1. Динамические системы — 1. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 7—149.

[4] *Болибрух А. А.* 21-я проблема Гильберта для фуксовых линейных систем. Труды математического института им. В. А. Стеклова. М.: Наука, 1994. Т. 206.

[5] *Болибрух А. А.* Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1998. Т. 221. С. 127—142.

[6] *Болибрух А. А.* Мероморфное преобразование к биркгофовой стандартной форме в малых размерностях // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 225. С. 87—95.

[7] *Болибрух А. А.* О tau-функции уравнения изомонодромных деформаций Шлезингера // Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 2. С. 184—191.

[8] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.

[9] *Вьюгин И. В.* Неразложимая фуксова система с разложимым представлением монодромии // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 4. С. 501—508.

[10] *Вьюгин И. В.* Построение фуксовой системы по фуксову уравнению // Вестник Коломенского гос. пед. института. Естеств. и матем. науки. 2007. Т. 1. С. 43—47.

[11] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.

[12] *Гильберт Д.* Избранные труды. М.: Факториал, 1998. Т. 2. 607 с.

[13] *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 436 с.

[14] *Дзимбо М.*, *Мива Т.*, *Сато М.* Голономные квантовые поля. Неожиданная связь между теорией деформации дифференциальных уравнений и квантовыми полями // Голономные квантовые поля (сб. статей). М.: Мир, 1983. С. 276—303.

[15] *Дубровин Б. А.*, *Новиков С. П.*, *Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. В 2-х частях. М.: Наука, 1979.

[16] *Зейферт Г.*, *Трельфалль В.* Топология. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 448 с.

[17] *Итс А. Р.*, *Капаев А. А.*, *Новокшенов В. Ю.*, *Фокас А. С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 728 с.

[18] *Коддингтон Э.А.*, *Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.

[19] *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983. 302 с.

[20] *Лайтерер Ю.* Голоморфные векторные расслоения и принцип Ока—Грауэрта // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 10. Комплексный анализ — многие переменные — 4. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 75—121.

[21] *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеоретиздат, 1957. 456 с.

[22] *Матвеев С.В.* Лекции по алгебраической топологии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 96 с.

[23] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

[24] *Стинрод Н.* Топология косых произведений. М.: ИЛ, 1953.

[25] *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987. 304 с.

[26] *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980. 248 с.

[27] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

[28] *Хилтон П.Дж.*, *Уайли С.* Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию. М.: Мир, 1966. 452 с.

[29] *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М.: Мир, 1980. 442 с.

[30] *Anosov D.V.*, *Bolibruch A.A.* The Riemann—Hilbert Problem. Braunschweig: Vieweg, 1994. (Aspects of Mathematics; E22).

[31] *Bolibruch A.A.* On the Birkhoff Standard Form of Linear Systems of ODE // Mathematics in St. Petersburg. Providence, RI: AMS, 1996. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; V. 174). P. 169—179.

[32] *Bolibruch A.A.* Holomorphic Bundles, Associated with Linear Differential Equations and the Riemann—Hilbert Problem // The Stokes Phenomenon and Hilbert's 16th Problem. (Groningen, 1995). World Sci. Publishing, 1996. P. 51—70.

[33] *Bolibruch A.A.* On isomonodromic deformations of fuchsian systems // Journal Dynam. and Control Syst. 1997. V. 3, № 4. P. 589—604.

[34] *Bolibruch A.A.* Inverse problems for linear differential equations with meromorphic coefficients // CRM Proc. and Lecture Notes. 2002. V. 31. P. 3—25.

[35] *Corel E.* Inégalités de Fuchs pour les systèmes différentiels réguliers // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I: Math. 1999. V. 328. P. 983—986.

[36] *Deligne P.* Equations différentielles à points singuliers réguliers. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1970. (Lecture Notes in Math. V. 163).

[37] *Iwasaki K.*, *Kimura H.*, *Shimomura S.*, *Yoshida M.* From Gauss to Painlevé: A modern Theory of special Functions. Braunschweig: Vieweg, 1991. (Aspects of Mathematics; E16).

[38] *Jimbo M.*, *Miwa T.*, *Ueno K.* Monodromy preserving deformations of linear differential equations with rational coefficients. I // Physica 2D. 1981. P. 306—352.

[39] *Jimbo M.*, *Miwa T.* Monodromy preserving deformations of linear differential equations with rational coefficients. II // Physica 2D. 1981. P. 407—448.

[40] *Kostov V.P.* Fuchsian systems on $\mathbb{C}P^1$ and the Riemann—Hilbert Problem // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I: Math. 1992. V. 315. P. 143—148.

[41] *Malgrange B.* Sur les déformations isomonodromiques. I: Singularités régulières. Birkhäuser, 1983. (Progress in Math.; V. 37). P. 401—426.

[42] *Treibich K.A.* Un résultat de Plemelj. Birkhäuser, 1983. (Progress in Math.; V. 37). P. 307—312.

[43] *Vandamme J.* Problème de Riemann—Hilbert pour une représentation de monodromie triangulaire supèrieure de dimension 5 // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I: Math. 1998. V. 326. P. 1069—1072.

Андрей Андреевич Болибрух в жизни и науке (30.01.1950— 11.11.2003)

Д. В. Аносов, В. П. Лексин

Андрей Андреевич Болибрух родился в Москве 30 января 1950 г. в семье военнослужащего. Его отец, Андрей Власьевич Болибрух, был участником Великой Отечественной войны и продолжал службу в армии после нее, дойдя до звания генерал-лейтенанта и должности зам. командующего военным округом. Андрей Андреевич гордился своим отцом, особенно его героизмом в годы войны. Мама, Татьяна Ивановна, всецело посвятила себя воспитанию детей — Андрея и его сестры, тоже Татьяны.

Военнослужащим нередко приходится часто менять место службы. Поэтому Андрей учился в различных школах. Последняя из них уже не была непосредственно связана с местом службы отца — это была физико-математическая школа-интернат № 45 при ЛГУ. Но косвенная связь могла быть — отец тогда служил в Прибалтике, к которой Ленинград ближе Москвы. В эту школу Андрей поступил как призер Всесоюзной математической олимпиады школьников 1965 г. Большинство призеров этого года впоследствии стали известными математиками. Через тридцать лет, уже в 90-е годы, А. А. написал теплые воспоминания [102] об учителях, однокашниках и самой постановке обучения в ФМШ-45. Читая их, можно подумать, что они написаны если не профессиональным писателем, то представителем гуманитарной профессии — в личности А. А. была сильная гуманитарная компонента.

После окончания в 1967 г. этой школы с золотой медалью Андрей поступил на механико-математический факультет МГУ. Он сдал на «отлично» два необходимых для медалиста экзамена по математике, что в том году было делом довольно нетривиальным. Старший экзаменатор, который готовил задачи письменного вступительного экзамена, предложил лишь четыре, но достаточно трудоемкие задачи. Относительно четвертой задачи разгорелся спор с привлечением министра высшего и среднего специального образования СССР В. П. Елютина. Родители и школьники утверждали, что эта задача, в которой, в итоге, требовалось вычислить объем сферического многогранника, не соответствует ни школьной про-

---

Впервые опубликовано: УМН. 2004. Т. 59, № 6. С. 3—22. Публикуется с разрешения редколлегии журнала. © УМН, 2004.

Библиографические ссылки к этой статье приводятся по списку работ А. А. Болибруха, см. с. 212—218.

грамме, ни программе вступительных экзаменов. В конце концов ее не стали учитывать при оценке работ, к радости тех, кто не добрался до четвертой задачи на экзамене. Так что «пять» можно было получить и за три точно решенных задачи. Андрей был одним из немногих, кто решил все задачи.

Все пять лет А. А. был круглым отличником и закончил университет с красным дипломом. После второго курса он выбрал, при специализации, кафедру высшей геометрии и топологии, а в качестве научного руководителя — М. М. Постникова, который блестяще читал лекции по линейной алгебре на его курсе. К тому же тогда алгебраическая топология и топология многообразий, после достижений французских математиков, а затем Милнора, Адамса, Смейла и Новикова, были в моде. Хорошие студенты как-то ухитрялись об этом знать, хотя никакой топологии в обязательной программе тогда не было (да и сейчас имеется весьма немногое).

В то время А. А. больше тяготел к алгебраическим методам в теории кобордизмов и в классической алгебраической топологии. Его дипломная работа была посвящена вычислениям кобордизмов многообразий с некоторыми соотношениями на характеристические классы их касательных расслоений. М. М. Постников предлагал А. А. выступить с докладом о полученных результатах на Всесоюзной топологической конференции в Тбилиси, но она совпадала по времени со вступительными экзаменами в аспирантуру, и потому А. А. отказался участвовать в конференции, а в дальнейшем он не стал публиковать результаты своих вычислений. В аспирантуре у М. М. Постникова А. А. получил задание самым детальным образом разобраться с классической спектральной последовательностью Адамса и ее обобщенными аналогами в теории кобордизмов, составить список актуальных задач в этой области и решить одну из них. Однако это направление работы уже не очень вдохновляло А. А.; возможно, что уже тогда, подспудно, у него формировалась и другая область интересов более аналитического характера[1]. Он начал интересоваться вопросами комплексной топологии и живо откликнулся на предложение заняться многомерной проблемой Римана—Гильберта в составе небольшого неформального коллектива (его организатором был А. В. Чернавский, участниками — В. А. Голубева, В. П. Лексин и А. А.). В этой группе интерес к данному вопросу привлекла В. А. Голубева, прежние работы которой были от этого вопроса не очень далеки.

[1] Известно, что некоторые аналитические вопросы (но не те, которые оказались в центре внимания Андрея) были не чужды и М. М. Постникову (они проявились в совместных работах М. М. Постникова и М. А. Евграфова) и некоторые «аналитические» темы он предлагал в качестве курсовых и дипломных работ, хотя его известность связана не с ними, а с топологией.

Осенью 1974 г. начал работать неформальный семинар с названными участниками, основная цель которого была вникнуть в постановки многомерной проблемы Римана—Гильберта и разобраться с подходами к ее решению.

В 1975 г. по окончании аспирантуры местом работы А. А. стал Московский физико-технический институт, где А. А. с 1972 по 1997 г. состоял на кафедре высшей математики. А. А. попал туда при содействии тогдашнего зав. кафедрой Л. Д. Кудрявцева. О той роли, которую Кудрявцев, Чернавский и Голубева сыграли в его жизни, А. А. всегда говорил с благодарностью. Мы специально упоминаем об этом, потому что позднее, когда А. А. оказался как бы на ярко освещенной сцене в МИАН, всем было ясно, какова была при этом роль нескольких руководящих деятелей МИАН; понятно также значение его прежнего научного руководителя; а вот о его первых шагах после аспирантуры знают только непосредственные свидетели.

В 1977 г. Андрей защитил в МГУ кандидатскую диссертацию «О фундаментальной матрице пфаффовой системы фуксова типа». Как видно, это была уже аналитическая теория дифференциальных уравнений в комплексной области. Соответственно, у него были два научных руководителя — М. М. Постников, отвечавший, видимо, больше за общую научную культуру Андрея, и А. В. Чернавский. Оппонентами были А. С. Мищенко и А. А. Дезин.

Думается, сменой ориентации отчасти объясняется тот факт, что Андрей защитил кандидатскую диссертацию только спустя некоторое время после окончания аспирантуры. Обычно способные аспиранты защищаются быстрее. А Болибрух был, несомненно, очень способным студентом и аспирантом. Но отличная учеба (отличная не в смысле формальных показателей, с которыми у него, конечно, тоже все было благополучно, а в смысле быстрого и полного освоения довольно большого материала, включая и понимание таких связей, на которых у руководителя и преподавателей не было случая остановиться) — это еще не совсем то же, что самостоятельная научная работа[1].

[1] Надо сказать, что творческий рост Андрея вообще был более медленным, чем у многих молодых московских математиков. Для сравнения: в моем поколении докторскую диссертацию многие защитили до 30 лет: я сам, Арнольд, Кириллов, Манин, Митягин, Новиков, Синай, Скляренко; возможно, я еще кого-нибудь упустил из виду; еще несколько человек защитили докторскую вскоре после своего 30-летия. А Андрей защитил ее только после 40 лет. Не уверен, что даже ближайшие друзья Андрея достаточно хорошо знали о его внутреннем росте в течение примерно 10 лет после защиты кандидатской диссертации, тем паче что в то время он много внимания уделял совсем другим вещам — например, трибонике, т. е. исследованию влияния различных типов трения на работы механических систем. Это была полезная деятельность, связанная с прикладной ориентацией физтеха и требовавшая

До 1988 г. основная научная работа А. А. была связана с многомерной проблемой Римана—Гильберта, однако затем громкий успех был им достигнут в одномерной проблеме, в которой уже долгое время не ожидалось никаких сюрпризов. Все же и в многомерной проблеме Р.—Г. им были достигнуты значительные результаты. Им посвящена отдельная статья В. П. Лексина, тогда как некоторые результаты А. А. по классической одномерной проблеме Р.—Г. излагаются в статье Ю. С. Ильяшенко; обе статьи опубликованы в настоящем журнале[1]. Поэтому здесь мы ограничимся только формулировкой одномерной задачи Р.—Г. и укажем на своеобразные свойства первого его контрпримера к одномерной проблеме Р.—Г. Мы также упомянем о работах А. А., вышедших в 2003—2004 гг. Что же до многомерной задачи, то, обращаясь к ней в данной статье, мы позволили себе не давать формальных определений и точных формулировок, надеясь на их естественное сходство с одномерным случаем.

В одномерной проблеме Римана—Гильберта (она же — 21-я проблема Гильберта) речь идет о построении системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области, грубо говоря, с предписанным характером ветвления решений в особых точках и со сравнительно умеренным характером имеющихся в этих точках особенностей. Говоря точнее, мы интересуемся системами вида

$$\frac{dy}{dz} = A(z)y, \quad \text{где } y \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

причем коэффициенты матрицы p-го порядка $A(z)$ аналитичны и однозначны всюду на пополненной плоскости комплексного переменного $\bar{\mathbb{C}}$ вне нескольких особых точек $a_1, \ldots, a_n$. (Бесконечно удаленная точка ∞ может быть, а может и не быть особой.) Ниже используется обозначение $S = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Решения $y(z)$ такой системы, вообще говоря, являются многозначными (вектор-)функциями; по существу, они рассматриваются как обычные голоморфные функции на универсальной накрывающей поверхности $\widetilde{S}$ области S, и следовало бы писать $y(\widetilde{z})$, где $\widetilde{z} \in \widetilde{S}$, но мы обычно будем следовать традиционному обозначению $y(z)$. Пусть $Y(z)$ — какая-нибудь фундаментальная матрица решений системы (1), т. е. решение матричного уравнения

$$\frac{dY}{dz} = A(z)Y, \quad \text{где } Y(z) \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \text{ при } z \in S. \tag{2}$$

При продолжении $Y(z)$ вдоль какого-нибудь замкнутого пути α, начинающегося и кончающегося в фиксированной «базисной точке» $b \in S$,

известной квалификации, но не имевшая отношения к линейным дифференциальным уравнениям в комплексной области. Я несколько раз встречался с ним в то время и должен сознаться, что сильного впечатления он тогда на меня не произвел. (*Д.В.А.*)

[1] УМН. 2004. Т. 59, № 6. С. 151—160; С. 73—84.

$Y(z)$ переходит в некоторое другое решение $Y_1(z)$ системы (2); любые два ее решения получаются друг из друга умножением справа на некоторую постоянную матрицу; поэтому $Y(z) = Y_1(z)\chi(\alpha)$, где, как легко доказать, матрица $\chi(\alpha)$ получается одинаковой для всех начинающихся в b замкнутых путей в S, гомотопных друг другу. Описание «характера ветвлений» решений дается возникающим таким образом «представлением монодромии» $\chi\,\pi_1(S,\,b) \to \mathrm{GL}(p,\,\mathbb{C})$ (это действительно представление в том смысле, как понимается в алгебре)[1]. Что же до «сравнительно умеренного» характера особенности в точке a_i, то здесь имеются два различных варианта. Если коэффициенты $A(z)$ имеют в a_i полюс первого порядка, то особая точка называется фуксовой; система, все особые точки которой — фуксовы, сама называется фуксовой. (Забегая вперед, отметим, что (1) можно интерпретировать как связность в тривиальном расслоении $\bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^p$ над $\bar{\mathbb{C}}$ с особенностями в (точнее, над) точками a_i. В случае фуксовой системы (1) эти особенности связности по понятным причинам называют логарифмическими.) Если при $z \to a_i$ решение растет или убывает с не более чем степенной скоростью, то особая точка называется регулярной; система, все особые точки которой — регулярные, сама называется регулярной. (Здесь надо уточнить: подразумевается, что z приближается к a_i, оставаясь в пределах некоторого угла с вершиной в a_i. Необходимость в такой оговорке объясняется тем, что если позволить z приближаться к a_i по спирали, то при любом логарифмическом ветвлении за счет большого числа оборотов можно набрать сколь угодно большой рост $y(z)$ сравнительно с ростом $1/|z - a_i|$.) Фуксовы особенности всегда регулярны, но не обратно. Соответственно, надо различать два варианта 21-й проблемы Гильберта: существует ли фуксова (соответственно регулярная) система (1) с заданными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, для которой представление монодромии совпадает с заданным гомоморфизмом $\chi\,\pi_1(S,\,b) \to \mathrm{GL}(p,\,\mathbb{C})$?[2]

[1] χ зависит от выбора фундаментальной матрицы Y, но эта зависимость не является существенной: при другой фундаментальной матрице получится представление χ_1, эквивалентное χ. Зависимость от выбора базисной точки столь же несущественна, как и вообще в определении фундаментальной группы.

[2] У самого Гильберта речь шла только о первом («фуксовом») варианте (хотя из текста формулировки проблемы не ясно, говорит ли он о скалярном линейном дифференциальном уравнении высокого порядка или о системе уравнений первого порядка), и он был уверен, что проблема решается положительно. Но в начале века терминология еще не установилась, и не исключено, что он имел в виду второй вариант (отметим попутно, что свойства «регулярности» и «фуксовости» для скалярных уравнений совпадают). Однако нам кажется, что, скорее всего, Гильберта просто вообще не очень-то заботило различие между этими двумя вариантами (и уравнениями и системами также) — сознательно или, скорее, более или менее бессознательно оно казалось ему несущественным. И можно привести некоторые эвристические доводы в пользу такого отношения, только оно в конечном счете все-таки

В начале XX в. И. Племель получил положительное решение «регулярного» варианта 21-й проблемы Гильберта и пытался вывести отсюда положительное решение «фуксова» варианта. Совсем другим путем теорему Племеля передоказал в 1957 г. Х. Рёрль. Он использовал алгебро-геометрические соображения, связанные с привлечением некоторых вспомогательных голоморфных векторных расслоений над S и $\bar{\mathbb{C}}$. Именно такой подход получил в дальнейшем развитие применительно как к одномерному, так и к многомерному случаю.

Теперь легко если не точно сформулировать, то по крайней мере описать в общих чертах и многомерную проблему Римана—Гильберта. Она состоит в реализации представлений фундаментальной группы дополнения к дивизору в комплексном многообразии как представлений монодромии аналитических систем дифференциальных уравнений по возможности с максимально простыми особенностями на дивизоре. Например, если дивизор D в комплексном многообразии M является объединением неособых комплексных подмногоообразий коразмерности 1 и допускает нетривиальные мероморфные дифференциальные формы с полюсами на нем, то под простейшими аналитическими дифференциальными уравнениями можно понимать линейные интегрируемые пфаффовы системы $dy = \omega y$ с логарифмическими полюсами первого порядка на D. Описанные системы называют системами Пфаффа типа Фукса или просто фуксовыми системами. В связи с многомерной проблемой Римана—Гильберта А. А. получил ряд результатов по вопросам смежного характера в теории таких систем (см. статью Лексина). Такие системы также можно понимать как плоские связности с логарифмическими особенностями в тривиальном голоморфном расслоении. Такое понимание проблемы Р.—Г. включает и классическую проблему Р.—Г. на сфере Римана в том виде, как она сформулирована выше.

Первые результаты А. А. по многомерным фуксовым системам оказались связанными с «достижением» отрицательного характера. Действуя по схеме Рёрля и Делиня, Жерар в 1968 г. получил первый содержательный результат в многомерном случае, близкий к классическому пониманию проблемы: на стягиваемом многообразии Штейна и для любого дивизора в нем с нормальными пересечениями проблема Р.—Г. всегда разрешима в классе фуксовых систем. Он также предпринял попытку описать все возможные локальные решения проблемы Р.—Г., для чего ему потребовалось описать структуру фундаментальной матрицы решений фуксовой системы в окрестности нормальной особенности дивизора.

ошибочно, см. далее. Таким образом, здесь мы имеем довольно редкий случай, когда Гильберт оказался не совсем прав в своем предсказании — если он и не сделал формальной ошибки, то во всяком случае упустил из виду нечто весьма существенное.

Однако А. А. обнаружил, что это описание неверно. С обнаружения одной неточности в определениях Жерара, а также ошибочности его основного результата началась в начале 1975 г. «видимая» часть математической карьеры А. А.[1]

В дальнейшем А. А. в 1978—1988 гг. несколько отдалился от тематики многомерных мероморфных пфаффовых систем и проблемы Римана—Гильберта, но полностью не бросал ее, продолжая обдумывать и уточнять некоторые моменты своих работ.

Занимаясь пфаффовыми системами, А. А. доказал для них неразрешимость в общем случае многомерной фуксовой проблемы Римана—Гильберта [11]. Но для нескольких независимых переменных, кажется, никто и не высказывал гипотезы о положительной разрешимости этой задачи, и ничего особенного в соответствующем отрицательном результате не было. Он воспринимался примерно так: «раз в случае одной независимой переменной получен (как тогда думали, см. ниже) положительный результат, естественно поинтересоваться аналогичным вопросом для пфаффовых систем, поскольку для них вообще наблюдается известная аналогия с предыдущим случаем, но оказывается, что в отношении данного вопроса такой аналогии нет». (Теперь, пожалуй, скорее можно сказать, что аналогия все-таки есть! Впрочем, «механизмы неразрешимости» в обоих случаях разные, так что глубокой аналогии нет.) Как нам кажется, этот контрпример помог А. А. преодолеть психологический барьер при работе над классической проблемой Римана—Гильберта. При попытке доказать разрешимость проблемы Римана—Гильберта на сфере Римана для трехмерных представлений появилось целое положительное число, которое имеет связь с нормированиями и которое не удавалось уменьшить «калибровочными преобразованиями». «Многомерный опыт» побудил А. А. искать контрпример, что привело к успеху. Но об этом будет рассказано подробнее ниже.

В указанный период А. А. активно включился в прикладную тематику в коллективе своих коллег по МФТИ (см. [8]—[10], [12]—[18], [86]). А. А. вел большую работу со школьниками ЗФТШ при МФТИ и студентами МФТИ, несколько раз был старшим экзаменатором на вступительных

[1] Я тогда был членом панели, готовившей программу соответствующей секции Международного математического конгресса 1978 г. в Хельсинки, так что вопрос об оценке работы Жерара меня весьма интересовал (мое знакомство с Андреем было связано также с [4], но в соответствии со своими непосредственными интересами в тот момент основное внимание я обратил на критику Жерара). К счастью, перед этим я продумал «аксиоматику теории характеристических показателей Ляпунова», предложенную Р. Э. Виноградом, и понял, что в ней речь идет о неархимедовом нормировании $\mathbb{R}^p$ или $\mathbb{C}^p$ над тривиальным нормированием числового поля; поэтому я легко понял соображения А. А., связанные с нормированиями, которые имеют другое происхождение, но сходный характер. (*Д.В.А.*)

экзаменах в МФТИ [88]—[99]. В этот же период А. А. создал семью и у него родился сын Андрей, а потом и дочь Екатерина. Так что снижение активности в области «теоретической математики» в некоторой степени было закономерным.

Однако в конце 1987 г. А. А. твердо решил покинуть область прикладных исследований и вернуться к активной работе в области «теоретической математики», причем разбирать изучаемые работы других авторов «самым въедливым» образом. Это решение А. А. привело к нескольким ярким результатам, которые принесли ему международную известность.

Сперва мы расскажем о некоторых событиях, предшествовавших открытию сенсационного контрпримера к «фуксовой» проблеме Римана—Гильберта. В начале 1988 г. был возобновлен неформальный семинар по многомерной проблеме Римана—Гильберта и примыкающим вопросам, ранее работавший в 1974—77 гг. Осенью 1988 г. этот семинар работал уже как семинар на мехмате, под руководством Б. А. Дубровина (разбирались работы Т. Коно и Р. Хейна по многомерной проблеме Римана—Гильберта). А. А. начал изучать вторичные характеристические классы Чигера—Саймонса, с перспективой приложения к пространствам модулей плоских мероморфных связностей и описания подпространств логарифмических связностей, и сделал несколько докладов по этой тематике. Однако примерно в середине февраля 1988 г. один из авторов статьи (*В.П.Л.*) напомнил А. А. о совместном обсуждении в конце 70-х — начале 80-х темных мест в книге Племеля «Problems in the sense of Riemann and Klein» (особенно рассуждения в п. 85 и 86, где «канонический» базис решений граничной задачи с кусочно-постоянной функцией скачка преобразуется мероморфными преобразованиями в «примитивный» базис решений) и указал на работу Деккерса («The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $P^1(\mathbb{C})$» Lecture Notes in Math. 1979. V. 712) как на альтернативный путь завершения рассуждений Племеля. Деккерс для регулярных систем второго порядка на сфере Римана доказал, что они без изменения монодромии могут быть преобразованы в фуксовы системы. Этот результат, через посредство результатов Рёрля (или даже Племеля), приводит к решению проблемы Римана—Гильберта в классе фуксовых систем для двумерных представлений. Было высказано предположение, что, работая с фундаментальной матрицей решений, можно доказать аналог результата Деккерса для регулярных систем третьего порядка.

Отметим, что ранее, изучая многомерные мероморфные пфаффовы системы, А. А. всегда работал с фундаментальной матрицей решений системы и накопил богатый опыт отыскания преобразований, сохраняющих монодромию, но меняющих нормирования пространства решений системы. А. А. с интересом отнесся к работе Деккерса и уже через две недели (в первый вторник марта 1988 г.) доложил на семинаре свой вариант доказательства теоремы Деккерса, еще через пару недель рассказал о целом числе, которое препятствует провести рассуждения в трехмерном случае, чуть позже, к концу 1988 — началу 1989 г. он нашел «явный» контрпример к проблеме Римана—Гильберта на сфере Римана. Этот контрпример был тщательно проверен и опубликован в сентябрьском номере «Математических заметок» [16][1].

Здесь уместно более подробно, чем написано выше, рассказать об истории проблемы Римана—Гильберта. Проблема Римана—Гильберта берет начало от посмертно опубликованной заметки Римана, написанной в 1857 г. (см.: *Риман Б.* Сочинения. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. С. 176—186). Риман обсуждает, что можно сказать о конечной системе (вообще говоря, многозначных) аналитических функций $y_1(z), \ldots, y_p(z)$ со следующими свойствами: эти функции голоморфны всюду на $\overline{\mathbb{C}}$ вне заданного конечного набора точек $\{a_1, \ldots, a_n\}$; имеется такой набор обратимых линейных преобразований (подстановок, как говорили в то время) $G_1, \ldots, G_n$, что набор $(y_1(z), \ldots, y_p(z))$ преобразуется с помощью матрицы G_i при аналитическом продолжении вокруг точки a_i. Риман рассматривал такой класс функций как следующий, по сложности, объект после алгебраических функций (которые полностью характеризуются своими особыми точками и монодромиями). В своей статье о гипергеометрическом уравнении он придерживался именно такой точки зрения на решения этого уравнения. Риман также дал решение задачи Римана—Гильберта, когда $p=2$ и $n=3$; в этом случае им было получено дифференциальное уравнение второго порядка класса Фукса, а не система. (Позже Л. Фукс доказал, что класс фуксовых дифференциальных уравнений — не систем! — совпадает с классом регулярных уравнений.) Для бо́льшего числа особых точек $n>3$ или бо́льшего числа $p>2$ А. Пуанкаре показал, что задача Римана в классе фуксовых дифференци-

---

[1] Когда в конце 80-х гг. О. В. Висков сказал мне, что Болибрух решил 21-ю проблему Гильберта, я не поверил. Я даже сказал Вискову, что Болибрух — это не тот уровень (прежние работы А. А. были хороши, но особого блеска в них не было). Но О. В. настаивал на своем, что в общем-то было даже странно — он же не был специалистом по дифференциальным уравнениям. Я решил проверить и попросил его передать А. А. приглашение связаться со мной. Можете представить мое удивление — передо мной предстал прекрасный сказочный андерсеновский лебедь, хотя, как мне казалось, лебедю вроде бы было неоткуда взяться.

Как я понимаю, другие люди (А. В. Чернавский и, видимо, М. М. Постников) тоже проверяли его работу. Но они не были специалистами по дифференциальным уравнениям, и вначале им не поверили. А я был таким специалистом и к тому же имел репутацию человека, умеющего вылавливать ошибки, так что мое суждение в данном случае воспринималось как более основательное. (*Д.В.А.*)

альных уравнений не всегда разрешима. Его рассуждение основано на простом подсчете (восходящем к Риману) числа параметров, определяющих начальные данные задачи (т.е. монодромию и особые точки), и числа параметров, определяющих фуксовы дифференциальные уравнения. Пуанкаре предложил подход к решению проблемы Римана, основанный на изучении автоморфных рядов и их модификаций, которые строятся по группе, порожденной матрицами $G_1, \ldots, G_n$, т.е. по группе монодромии, но существенных результатов на этом пути не достиг. Гильберт включил проблему Римана в список своих 23 знаменитых проблем под номером 21 и формулировал ее так: *доказать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии.* Скорее всего, имелись в виду фуксовы системы дифференциальных уравнений (в силу отрицательных результатов Пуанкаре)[1]

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - a_i}\right) y, \quad y \in \mathbb{C}^p$$

(где A_i, $i = 1, \ldots, n$, — постоянные $(p \times p)$-матрицы, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} A_i = 0$, означающему, что в ∞ нет особой точки), что их монодромия, при некотором выборе базиса в пространстве решений совпадает с группой матриц, порожденной матрицами G_i. Постепенно стала общепринятой его точка зрения, что класс фуксовых систем надо считать более простым, чем класс уравнений, и что он больше соответствует исходному замыслу Римана, а потому решать проблему Римана—Гильберта надо в этом классе. Такой же точки зрения придерживался и Дж. Биркгоф в своих исследованиях.

После того как Фредгольм и Гильберт разработали теорию интегральных уравнений, Гильберт применил ее к решению различных граничных задач в классе аналитических функций. На основе таких соображений он опубликовал (весьма громоздкое) решение «регулярной» задачи Р.—Г. в случае $p = 2$. В 1908 г. И. Племель решил «регулярную» задачу Р.—Г. в случае любого p. В конечном счете он использовал подход, предложенный Гильбертом, но сделал это намного изящнее. Кстати, при этом Племель фактически заложил основы теории сингулярных интегральных уравнений (формально он использовал только уже существовавшую тогда теорию Фредгольма—Гильберта, относящуюся к регулярным интегральным уравнениям, но его редукция исследуемой задачи к этим уравнениям

[1] Во всяком случае, Л. Шлезингер с 1901 г. (соответствующая публикация появилась в 1905 г.) связывал решение 21-й проблемы Гильберта с отысканием такой фуксовой системы на $\bar{\mathbb{C}}$.

включала в себя прообраз аналогичной редукции для сингулярных интегральных уравнений). Как уже говорилось, он пытался вывести отсюда решение и для «фуксова» случая. После этого широко распространилось мнение, что 21-я проблема Гильберта полностью решена Племелем.

Однако чуть позже работы Шлезингера и переписка с ним[1], по-видимому, повлияли на подходы к решению и понимание проблемы Римана—Гильберта В. И. Смирновым и его учеником И. А. Лаппо-Данилевским. Решение с помощью интегральных уравнений считалось тогда неконструктивным, и они стремились к более конструктивному решению, приписывая чистую теорему существования Гильберту, Племелю и Биркгофу. Уже в 1918 г. Смирнов пытался решить проблему Римана—Гильберта в классе фуксовых систем порядка два с четырьмя особыми точками. К 1927 г. Лаппо-Данилевский разработал теорию аналитических функций от нескольких матричных переменных и дал конструктивное решение проблемы Римана—Гильберта для матриц монодромии $G_1, \ldots, G_n$, близких к единичной матрице. Он также решил проблему Римана—Гильберта с произвольными матрицами монодромии для систем Гаусса, т. е. систем второго порядка с тремя особыми точками. В 1939 г. Н. П. Еругин уточнил его результаты, дав более явное выражение коэффициентов системы через матрицы монодромии и особые точки. В 1956 г. Б. Л. Крылов в своей работе на 250 страницах (в «Трудах Казанского авиационного института») получил такие выражения через гипергеометрические функции. В 1937 г. Н. Е. Кочин решил проблему Римана—Гильберта для нильпотентных представлений порядка нильпотентности два. В 1941 г. Еругин решил проблему Римана—Гильберта для систем второго порядка с четырьмя особыми точками. Это решение опубликовано в 1975 г. (Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 5; 1976. Т. 12, № 5). В историческом обзоре он прямо указал, что Племель не решил проблему Римана в первоначальной постановке, т. е. в простейшем классе дифференциальных уравнений, но, по-видимому, подразумевал при этом отсутствие конструктивности у Племеля. В общем, определенное недовольство работой Племеля было у специалистов довольно давно. В 1979 г., как уже говорилось выше, Деккерс решил проблему Римана—Гильберта для произвольного числа особых точек и произвольных матриц монодромии второго порядка, причем его рассуждения, по сути, реабилитировали темные места в рассуждении Племеля в двумерном случае (возможно, доказательство и проверялось только в этом случае). В 1983 г. Т. Кон, а в 1985 г. В. И. Арнольд и Ю. С. Ильяшенко акцентировали внимание

[1] Известно, что в двадцатые годы Шлезингер приглашал Лаппо-Данилевского (см. статью о нем в книге серии «Выдающиеся ученые России») к себе на стажировку, но болезни и ранняя смерть Л.-Д. помешали осуществиться этим планам.

на том, что прямолинейное использование рассуждений Племеля не приводит к цели[1]. Оказалось, что у Племеля получается достаточное условие разрешимости: если хоть одна из матриц G_i диагонализируема, то «фуксова» проблема Римана—Гильберта имеет решение[2]. Но ожидать, что иногда ответ бывает отрицательным, в силу перечисленных выше результатов не было оснований, ибо, повторим, положительный ответ получался и в некоторых случаях, когда рассуждения Племеля не проходят. Еще раз отметим работу Рёрля 1957 г., в которой для решения проблемы Римана—Гильберта привлекались новые алгебро-геометрические и топологические методы. На неформальном семинаре, который упоминался выше, еще в 1974 году было установлено, что его результат дает решение проблемы Римана—Гильберта лишь в классе регулярных систем.

Итак, попытка положительного решения проблемы Р.—Г. для трехмерных представлений привела А. А. к построению контрпримера. Что такой пример был найден для трехмерных представлений — это в некотором роде чудо, ибо для представлений размерности три все примеры отрицательного решения проблемы Р.—Г. являются в высшей мере неустойчивыми: при малейшем изменении положения любой особой точки (напомним, что они входят в исходные данные проблемы Р.—Г.) проблема, вообще говоря, становится разрешимой. Далее представление фундаментальной группы проколотой сферы Римана, которое не реализуется как представление монодромии фуксовой системы, определяется А. А. как представление монодромии некоторой явно выписанной регулярной системы, а затем, используя упомянутое выше целое число (фуксов вес двумерного подпредставления[3]), доказывается, что это представление нельзя реализовать как монодромию фуксовой системы. Для представлений размерности

[1] Кстати, это примерно тогда же обнаружила та самая группа, в которую входил Болибрух, однако их обзор, где об этом упоминалось, не был принят к печати. Не может быть никаких приоритетных претензий на «непечатных» основаниях; мы хотим только отметить, что Болибрух должен был начать задумываться над 21-й проблемой еще до публикаций Кона—Арнольда—Ильяшенко.

[2] Удивительно, что Дж. Биркгоф тоже рассуждал в этой и других задачах так, как если бы жордановых блоков не существовало.

[3] Он тесно связан с некоторыми нормированиями в пространстве решений, явно введенными в локальной теории Левеля. Нормирования систематически используются и в других работах А. А. Надо сказать, что отдельные его результаты (в том числе и из лучших) можно изложить без нормирований (особенно если вместо них обращаться к нормальным формам). Это уже делалось (см. статью Ю. С. Ильяшенко в этом выпуске журнала), и это вполне подходит, когда речь идет только о том, чтобы дать некоторое представление об отдельных достижениях А. А. Но изложение в таком стиле всего комплекса его исследований, если и было бы возможным, то оказалось бы громоздким и привело бы к маскировке части его идей.

бóльшей, чем три, имеются «грубые» примеры представлений, когда проблема Р.—Г. имеет отрицательное решение при всех положениях особых точек.

В более широком плане отрицательный результат А. А. изменил саму постановку проблемы Р.—Г. Вскоре А. А. нашел несколько новых достаточных условий, когда проблема Р.—Г. разрешима. В частности, сначала он доказал, что для любого неприводимого трехмерного представления проблема Р.—Г. разрешима, а чуть позже теми же методами доказал этот результат (одновременно с В. П. Костовым) для представлений любой размерности. Как обнаружил А. А., неприводимость в разных своих ипостасях имеет важное значение для положительной разрешимости многих задач теории аналитических дифференциальных уравнений.

Сказанное — это несколько примеров неожиданного разнообразия мира фуксовых и регулярных систем, открытого А. А. Почти вся его дальнейшая работа была так или иначе связана с этим миром. Результат о неприводимых представлениях монодромии — пример вопроса, для которого формулировка и ответ не требуют вникать во внутренние понятия теории. Но в ней возникают и вопросы внутреннего характера, например, связанные с нормированиями и блочной структурой матриц монодромии. Кстати, результат о неприводимых представлениях монодромии был доказан А. А. с существенным использованием нормирований (хотя задним числом его можно получить и без них), а после него вопрос о роли того или иного типа блочных структур естественно выходит на первый план. Это иллюстрирует тесную связь внутреннего развития теории с ее «внешним выходом». В последние годы жизни А. А. не только сам уделял большое (может быть, бóльшее, чем раньше) внимание внутренним вопросам теории, но и привлекал к ним внимание своих учеников. Однако в том, что касается этих внутренних вопросов, сейчас было бы преждевременно подводить какие-либо (хотя бы промежуточные) итоги. (Почти все результаты, упоминаемые в [81], [82], — «внешние».)

А. А. понял также, что к этой тематике непосредственно примыкают еще два круга вопросов: о голоморфном и мероморфном приведении системы возле регулярной или иррегулярной особой точки к специальной (так называемой биркгофовой) стандартной форме и об изомонодромных деформациях, которые в это же время совсем по другим поводам приобрели большое значение. Тот факт, что задача Римана—Гильберта имеет какое-то отношение к изомонодромным деформациям, кажется интуитивно вполне естественным (хотя само по себе это еще не подсказывает удачного образа действий), и это понимал еще Риман, соединив их исследование в одной своей работе, но вот что первая задача (явно имеющая глобальный характер) может быть связана с задачей о биркгофовой стандартной форме (которая явно является локальной) — это было неожиданностью. Голоморфные расслоения и мероморфные связности в них, которые использовал А. А., являлись тем естественным математическим языком, который позволил «глобализовать» локальную задачу о биркгофовой стандартной форме. Надо сказать, что приведением линейной системы к биркгофовой стандартной форме А. А. заинтересовался в 1993 г., в период пребывания в Институте Макса Планка, где он познакомился с немецким математиком В. Бальзером, затем посетил его семинар в Ульме и обсудил эту задачу с ним и его коллегами. Но точка зрения А. А. на эту задачу оказалась новой. Прежние работы по этой задаче застопорились на системах очень малой размерности: два и три; А. А. удалось достичь заметного продвижения.

Методы исследования всех трех направлений обогатились благодаря осознанию еще одной связи — с так называемыми стабильными и полустабильными векторными расслоениями (здесь А. А. помогло его топологическое образование)[1]. По-видимому, систематическое использование расслоений и связностей мотивировалось следующими соображениями. Первоначально почти все положительные результаты о проблеме Римана—Гильберта получались так: бралась регулярная система с заданным представлением монодромии χ и ее пытались преобразовать в фуксову систему с тем же χ. Регулярная же система, согласно Рёрлю и его последователям, получается из некоторой плоской связности в некотором главном $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$-расслоении P (она доставляет координатную запись этой связности в координатах, отвечающих некоторому мероморфному сечению расслоения P). Возник вопрос: а не попытаться ли все время работать со связностями в векторных и главных расслоениях, не обращаясь «по дороге» к регулярным системам? Попытка подтвердила удобство такой точки зрения (или, если угодно, такого языка), причем для получения не только положительных, но и отрицательных результатов. Отрицательные формулировки («чего-то не существует») оказались связанными с более положительными утверждениями об используемых расслоениях со связностями (типа «они не бывают прямыми произведениями» (пока это тоже довольно-таки отрицательная формулировка), «потому что все они такие-то»). Наконец, новая точка зрения оказалась подходящей для исследования изомонодромных деформаций, — здесь, похоже, она еще нужнее.

[1] Сама по себе трактовка «риман-гильбертовской» проблематики в терминах плоских связностей в голоморфных векторных расслоениях была (как видно и из сказанного выше) известна и отчасти использовалась до работ А. А., но только в них (и то не сразу) связности стали гибким и удобным инструментом исследования.

В частности, язык стабильных расслоений оказался естественным для формулировки наиболее общего достаточного условия разрешимости проблемы Римана—Гильберта (правда, с некоторым условием неприводимости на систему), а полустабильность оказалась и вовсе необходимым условием ее разрешимости. Обо всем этом говорится в обзоре [82]. О направлениях, связанных с проблемой Римана—Гильберта и биркгофовой стандартной формой, говорится также в книге [101], написанной на основе лекций А. А. в МФТИ и МГУ, а также в университетах Ниццы и Страсбурга. Для обоих направлений в [82] намечается, а в [101] довольно подробно излагается путь, на котором получаются наиболее известные достижения, а затем очень кратко формулируются другие результаты. А. А. предполагал написать еще книгу об изомонодромных деформациях, но не успел даже приступить к этой работе.

Добавим еще несколько слов о последних работах А. А. (но, как говорилось, все же оставляя в стороне многие вопросы «внутреннего» характера). Уже находясь в больнице, он начал разрабатывать новую тему: отыскание *минимальной* стандартной биркгофовой формы мероморфных систем в окрестности бесконечности при мероморфных «калибровочных» преобразованиях, не повышающих ранга Пуанкаре [79]. При таких преобразованиях, в отличие от случая аналитических преобразований, биркгофова стандартная форма существенно неединственна, и потому естественно поставить вопрос о минимальной биркгофовой форме. В указанной работе он привел пример, когда минимальная стандартная форма существует (достигается), а также пример несохранения структуры приводимости системы при ее приведении к минимальной стандартной форме. Здесь возникает большое число вопросов, которые остались без ответа.

В работе [83] параметрическая теорема Биркгофа—Гротендика, доказанная А. А. в [65], является центральным средством исследования изомонодромных деформаций иррегулярных систем и их редукции к уравнениям Пенлеве.

Еще в 1983 г. Б. Мальгранжем был использован язык голоморфных расслоений и логарифмических связностей для доказательства наличия свойства Пенлеве у решений уравнений Шлезингера изомонодромных деформаций фуксовых систем. А. А. использовал эти методы для описания всех изомонодромных деформаций фуксовых систем [56]. В последней своей работе [80], представленной им самим в печать, он по начальным данным уравнения Шлезингера тем же методом дает конструктивное локальное описание tau-функции уравнения Шлезингера и дивизора Мальгранжа, совпадающего с множеством нулей этой tau-функции.

После 1989 г. цепь новых успехов А. А. сопровождалась знаками признания его достижений. В 1991 г. А. А. защитил докторскую диссертацию «Проблема Римана—Гильберта». Оппонентами были В. И. Арнольд, Б. А. Дубровин и М. А. Евграфов. С 1990 г. его основным местом работы стал МИАН, чему активно способствовали Е. Ф. Мищенко и А. А. Гончар[1]. Несколько лет он продолжал еще преподавать на физтехе, но в 1996 г. стал профессором мехмата МГУ и вскоре оставил физтех. В 1994 г. он был избран членом-корреспондентом РАН, в 1997 г. — действительным членом. В 1995 г. он был удостоен премии им. А. М. Ляпунова РАН, в 2002 г. — Государственной премии Российской Федерации, в 1999 г. стал почетным профессором МГУ, в 2003 г. — лауреатом гранта Благотворительного фонда содействия отечественной науке в области естественных и гуманитарных наук по номинации «Выдающиеся ученые» за 2003 г.

Помимо научной работы, в последние годы А. А. Болибрух проявил себя выдающимся организатором научной жизни. С 1996 г. он был зам. директора МИАН, затем, сохраняя этот пост, стал председателем математической секции Отделения математических наук РАН, вице-президентом ММО, членом Научного совета ИНТАС в 1996—99 гг., членом Научного совета Международного центра им. С. Банаха и членом попечительского совета МЦНМО. Это только часть его постов, ни один из которых не был символическим. В 2002 г. он стал членом исполкома Международного Союза математиков. Надо сказать о свойственном ему стиле работы. В личном общении неизменно проявлялась доброжелательность, сочетавшаяся с требовательностью и точной оценкой ситуации. В то же время он старался как бы опережать возникающие задачи, решая их до того, как они становились проблемами.

Трудно переоценить его роль в организации международного научного сотрудничества. В 1995—97 гг. он был приглашенным профессором в Университете Ниццы, в 1998—2002 гг. — приглашенным профессором Страсбургского университета. Он участвовал в работе многих международных конференций, часто будучи приглашенным пленарным докладчиком. Просто удивительно, как много он успел сделать! За 5 лет перед последними месяцами жизни, когда А. А. был неотлучно привязан к больнице, он выступил на 31 (!) научной конференции и в каждом из докладов рассказывал что-нибудь новое. На последней своей конференции, посвященной 100-летию А. Н. Колмогорова, когда некоторое улучшение состояния здоровья позволило ему покинуть больницу, он был оптимистичен, в хорошем настроении общался с участниками конференции, строил планы дальнейшей научной работы (переговоры о лечении во Франции шли к своему успешному завершению), как всегда блестяще

[1] И Д. В. Аносов. — *Прим. ред.*

сделал доклад и сразу после него направился на открытие памятного бюста Л. С. Понтрягину на Ленинском проспекте.

Участвуя в международных научных конференциях, А. А. всегда использовал встречи с иностранными коллегами для расширения международного сотрудничества не только в той области, в которой работал, но и в других областях. В России удачное проведение нескольких международных конференций в немалой степени было обязано его участию в их организации и его поддержке. Руководя в конце 2002 г. проведением конференции по теории динамических систем и небесной механике, посвященной памяти В. М. Алексеева, один из нас специально подчеркнул в одном из выступлений, что без Болибруха не удалось бы провести эту конференцию так, как она прошла, даром что он тогда уже был серьезно болен. О его роли то же могли бы сказать и организаторы ряда других конференций, но пока он был здоров, об этом как-то и не упоминали, поскольку это и так было ясно.

Одно из последних его организаторских достижений — организация нового издания МИАН «Современные проблемы математики». В первом выпуске этой серии, вышедшем уже после его смерти, помещена его обзорная статья [82], которую он дорабатывал в больнице. Эта статья — своего рода завещание А. А.

У А. А. Болибруха, как и у всех, были интересы вне науки. У него это были литература, живопись, театр. Некоторая (очень точно дозированная) артистичность наряду с искренним дружелюбием помогали ему в личных контактах. Это трудно передать словами, но не случайно он приобрел много друзей во всем свете. В период своего быстрого научного и административного взлета он сумел сохранить естественные рабочие и дружеские отношения со своими коллегами и друзьями. «Остаться самим собой» — эту нравственную задачу он сознательно формулировал для себя.

Уже несколько лет у него были некоторые проблемы со здоровьем, которое раньше было отличным. Вначале возникли неприятности с щитовидной железой, с чем вроде бы удалось справиться, но что-то нехорошее в его организме по-прежнему по временам проявлялось. Летом 2002 г. положение ухудшилось, и прозвучало зловещее слово «лимфома». С этого времени он проводил все больше и больше времени в больнице. Зная, что при таком диагнозе выздоровление нельзя гарантировать, А. А. все же надеялся на лучшее. Но он не откладывал дела до своего гипотетического выздоровления, а, когда позволяли силы, продолжал работать и в больнице (интенсивная работа приводила в изумление персонал больницы) — этого требовала его деятельная натура. Там он закончил последнюю научную работу, написал воспоминания, оттуда продолжал отчасти руководить как МИАН'ом, так и своими аспирантами. Эта деятельность прекратилась только в самые последние недели, когда он в очередной раз попал в реанимацию...

Его смерть является не только трагедией для его родных и близких, но и ударом для многих людей во всем мире, даже и не очень-то с ним близких. Она является невосполнимой потерей для математики и для нашей страны.

Список работ А. А. Болибруха

I. Список научных публикаций и монографий

[1] К локальной теории фуксовых систем // Труды XXI научной конференции МФТИ (1975). Сер. Аэрофизика и прикл. матем. 1976. С. 193—195.

[2] Условия фуксовости системы Пфаффа на комплексном аналитическом многообразии // Труды XXI научной конференции МФТИ (1975). Сер. Аэрофизика и прикл. матем. 1976. С. 196—197.

[3] О системах Пфаффа типа Фукса // УМН. 1977. Т. 32, № 2. С. 203—204.

[4] О фундаментальной матрице системы Пфаффа типа Фукса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 5. С. 1084—1109.

[5] Системы Пфаффа типа Фукса на комплексном аналитическом многообразии // Матем. сб. 1977. Т. 103, № 1. С. 112—123.

[6] Фуксовы системы на компактном кэлеровом многообразии // Тезисы докладов VII Всесоюзной топологической конференции (Минск, 1977). С. 23.

[7] О фундаментальной матрице систем Пфаффа типа Фукса // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, механико-математический ф-т, 1977.

[8] Об интегральном уравнении стационарного износа цилиндров / Ред. М. А. Галахов // Деп. в ВИНИТИ № 479-79. 1979.

[9] Влияние качества поверхности, свойств материала и смазки на эксплуатационные характеристики опор качения / Ред. М. А. Галахов, С. В. Резниченко // Тезисы докладов Всесоюзного научно-технического семинара «Влияние качества поверхности на эксплуатационные свойства подвижных сопряжений машин» (Москва, 1979). Ч. I. С. 30—31.

[10] Ограниченная смазка деталей машин / Ред. М. А. Галахов // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции «Трибоника и антифрикционное материаловедение» (Новочеркасск, 1980). С. 33—34.

[11] Пример неразрешимой проблемы Римана—Гильберта на $\mathbb{C}P^2$ // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1980. № 2. С. 60—64.

[12] Управление вибрацией подшипниковых узлов / Ред. М. А. Галахов, А. Н. Бурмистров // Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Управление качеством в механосборочном производстве» (Пермь, 1981). С. 91—92.

[13] Толщина пленки в нестационарном эллиптическом контакте / Ред. М. А. Галахов // Деп. в ВИНИТИ № 4360-79. 1981.

[14] Математическое моделирование процесса смазки деформируемых тел / Ред. М. А. Галахов, С. В. Резниченко // Сборник докладов Всесоюзной школы молодых ученых «Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики» (Москва, 1981). С. 34—36.

[15] Толщина смазочной пленки в контакте упругих тел при переменной нагрузке / Ред. М. А. Галахов // Трение и износ. 1981. Т. 2, № 5. С. 51—60.

[16] О некоторых топологических задачах в теории фуксовых систем /Ред. В. П. Лексин // Тезисы Ленинградской международной топологической конференции (Ленинград, 1982). С. 20.

[17] Развитие теории смазки и ее применение к расчету подшипников / Ред. М. А. Галахов, В. В. Мартынов // Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Трение и смазка в машинах» (Челябинск, 1983). С. 56—58.

[18] Расчет режима смазки при ее ограниченной подаче / Ред. Л. В. Курочкина // Тезисы Всесоюзной научно-технической конференции (Москва, 1983). Ч. II: Проектирование, изготовление, эксплуатация и диагностика узлов трения в машиностроении. С. 18—19.

[19] On some problems in the theory of Fuchsian systems of several complex variables // Short Communications of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, 1983). P. 42.

[20] О некоторых задачах в теории многомерных фуксовых систем / Ред. В. П. Лексин // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам математической физики. М.: МФТИ, 1985. С. 19—26.

[21] О поведении решений пфаффовой системы в окрестности особой точки // Современная математика в физико-технических задачах. М.: МФТИ, 1986. С. 8—11.

[22] О монодромии фуксовой системы // Проблемы математики в физико-технических задачах. М.: МФТИ, 1987. С. 8—11.

[23] О монодромии фуксовой системы // Тезисы Бакинской международной топологической конференции (Баку, 1987). С. 47.

[24] О проблеме Римана—Гильберта для системы трех уравнений // Проблемы современной математики в задачах физики и механики. М.: МФТИ, 1989. С. 10—25.

[25] Проблема Римана—Гильберта на комплексной проективной прямой // Матем. заметки. 1989. Т. 46, № 3. С. 118—120.

[26] Проблема Римана—Гильберта // УМН. 1990. Т. 45, № 2. С. 3—47.

[27] О построении фуксова уравнения по представлению монодромии // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 22—34.

[28] Проблема Римана—Гильберта для системы четырех уравнений с тремя особыми точками // Некоторые проблемы математики в задачах физики, механики, экономики. М.: МФТИ, 1990. С. 7—10.

[29] Фуксовы системы в $\mathbb{C}^2$ с постоянными коэффициентами и дивизором $(z-a_1u)\dots(z-a_nu)=0$ / Ред. А. В. Чернавский // Некоторые проблемы математики в задачах физики, механики, экономики. М.: МФТИ, 1990. С. 11—14.

[30] Фуксовы системы с приводимой монодромией и проблема Римана—Гильберта // Нелинейные операторы в глобальном анализе. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. С. 5—20.

[31] Проблема Римана—Гильберта // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1991.

[32] О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана—Гильберта // Матем. заметки. 1992. Т. 51, № 2. С. 9—19.

[33] Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann—Hilbert problem // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1520. C. 139—155.

[34] О выводе уравнений изомонодромной деформации фуксовой системы // Проблемы математики в задачах физики и техники. М.: МФТИ, 1992. С. 16—21.

[35] О приводимых фуксовых системах // Прикладная механика и математика. М.: МФТИ, 1992. С. 18—22.

[36] Hilbert's twenty-first problem for Fuchsian linear systems // Developments in Mathematics: The Moscow School / Ed. V. I. Arnold and M. I. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993. P. 54—99.

[37] On analytic transformation to Birkhoff standard form // Preprint MPI/93-44. Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1993.

[38] Fuchsian systems and holomorphic vector bundles on the Riemann sphere // Preprint № 347. Nice: Université de Nice, 1993.

[39] Fuchsian systems and holomorphic vector bundles on the Riemann sphere // ESP (Projet Européen sur les Singularités). 1993. № 42.

[40] Об аналитическом преобразовании к стандартной биркгофовой форме // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 5. С. 553—555.

[41] The Riemann—Hilbert Problem. Braunschweig: Vieweg. D. V. Anosov, 1994. (Aspects Math. V. E 22).

[42] Об аналитическом преобразовании к биркгофовой стандартной форме // Труды МИАН. 1994. Т. 203. С. 29—35.

[43] Sufficient conditions for a system of ODE to be analytically transformed to Birkhoff standard form // Preprint № 394. Nice: Université de Nice, 1994.

[44] 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // Труды МИАН. 1994. Т. 206.

[45] Vector bundles associated with monodromies and asymptotics of Fuchsian systems // J. Dynam. Control Systems. 1995. V. 1, № 2. P. 229—252.

[46] The Riemann—Hilbert problem and Fuchsian differential equations on the Riemann sphere // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994). Basel: Birkhäuser, 1995. P. 1159—1168.

[47] On movable singular points of Schlesinger equation of isomonodromic deformations // Preprint № 429. Nice: Université de Nice, 1995.

[48] Regular systems whose monodromies differ from the monodromies of Fuchsian systems // J. Math. Sci. 1996. V. 78, № 5. P. 530—541.

[49] On the Birkhoff standard form of linear system of ODE // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 174. P. 169—189.

[50] Holomorphic bundles, associated with linear differential equations and the Riemann—Hilbert problem // The Stokes Phenomenon and Hilbert's 16th Problem (Gröningen, 1995). River Edge, NJ: World Scientific, 1996. P. 51—70.

[51] On the existence of Fuchsian systems with given asymptotics // Preprint № 461. Nice: Université de Nice, 1996.

[52] Holomorphic vector bundles on the Riemann sphere and the 21st Hilbert problem // J. Math. Sci. 1996. V. 82, № 6. P. 3759—3764.

[53] К вопросу о существовании фуксовых систем с данными асимптотиками // Труды МИАН. 1998. Т. 221; 1997. Т. 216. С. 32—44.

[54] Transformation of reducible equations to Birkhoff standard form / Ed. W. Balser // Ulmer Seminare über Funktionalanalysis und Differentialgleichungen. Ulm: University of Ulm. 1997. V. 2. P. 73—81.

[55] Isomonodromic confluence of Fuchsian singularities // Abstracts of International Conference on Dynamical Systems. Rio de Janeiro, 1997.

[56] On isomonodromic deformations of Fuchsian systems // J. Dynam. Control Systems. 1997. V. 3, № 4. P. 589—604.

[57] Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей // Труды МИАН. 1998. Т. 221. С. 127—142.

[58] Isomonodromic confluences of regular singularities // Abstracts of International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L. S. Pontryagin (Moscow, 1998). P. 19—20.

[59] On isomonodromic confluences of Fuchsian singularities // Preprint № 16. Strasbourg: IRMA, Université Louis Pasteur, 1998.

[60] Levelt's valuation method and the Riemann—Hilbert problem // Differential and Difference Equations and Computer Algebra. In honor of A. H. M. Levelt's 65th birthday. Nijmegen: Department of Mathematics, University of Nijmegen, 1998. P. 1—9.

[61] О фуксовых системах с данными асимптотиками и монодромией // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 112—121.

[62] Meromorphic reduction to Birkhoff standard form // Abstracts of the International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Moscow, 1999). P. 20—21.

[63] Мероморфное преобразование к биркгофовой стандартной форме в малых размерностях // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 87—95.

[64] On sufficient conditions for the existence of a Fuchsian equation with prescribed monodromy // J. Dynam. Control Systems. 1999. V. 5, № 4. P. 453—472.

[65] Elementary proof of the Birkhoff—Grothendieck theorem with parameters // Ulmer Seminare über Funktionalanalysis und Differentialgleichungen. Ulm: University of Ulm, 1999. V. 4. P. 157—164.

[66] Fuchsian inequality on a compact Kähler manifold // Preprint № 2. Strasbourg: IRMA, Université Louis Pasteur, 2000.

[67] On orders of movable poles of the Schlesinger equation // J. Dynam. Control Systems. 2000. V. 6, № 1. P. 57—73.

[68] Generalized Fuchsian inequality // Abstracts of the International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems (Suzdal, 2000). P. 16—19.

[69] Inverse problems for linear differential equations with meromorphic coefficients // Isomonodromic Deformations and Applications in Physics (Montréal, 2000). Providence, RI: AMS, 2002. P. 3—25. (CRM Proc. Lecture Notes; V. 31).

[70] Фуксовы неравенства на компактных кэлеровых многообразиях // Докл. РАН. 2002. Т. 380, № 4. С. 448—451.

[71] Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых // УМН. 2001. Т. 56, № 4. С. 135—136.

[72] Стабильные векторные расслоения с логарифмическими связностями и проблема Римана—Гильберта // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 1. С. 10—13.

[73] The Riemann—Hilbert problem and isomonodromic deformations // International Conference «Differential Equations and Related Topics» dedicated to the Centenary Anniversary of I. G. Petrovskii (2001). Book of Abstracts. P. 5—6.

[74] Movable singularities of the Schlesinger equation of isomonodromic deformations // Progress in Nonlinear Science. Abstracts of the International Conference dedicated to the 100th Anniversary of A. A. Andronov (Nizhny Novgorod, 2001). P. 9—10.

[75] Кратности нулей компонент решений систем с регулярными особыми точками // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 61—65.

[76] Проблема Римана—Гильберта на компактной римановой поверхности // Труды МИАН. 2002. Т. 238. С. 55—69.

[77] The problem on the Birkhoff standard form in dimension four // Abstracts of International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems (Suzdal, 2002). P. 154—155.

[78] On tau-function for the Schlesinger equation of isomonodromic deformations // Preprint № 7. Strasbourg: IRMA, Université Louis Pasteur, 2002.

[79] Минимальная бирнгофова стандартная форма // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 723—730.

[80] О tau-функции уравнения изомонодромных деформаций Шлезингера // Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 2. С. 184—191.

[81] Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений // Математические события XX века. М.: Фазис. 2003. С. 53—79.

[82] Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами // Современные проблемы математики. М.: МИАН, 2003. № 1. С. 29—82.

[83] On the Riemann—Hilbert—Birkhoff inverse monodromy problem and the Painlevé equations / Ed. A. R. Its, A. A. Kapaev // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, № 1. С. 121—162.

[84] On the generalized Riemann—Hilbert problem with irregular singularities // arXiv:math.CA/0410483 / Ed. C. Mitschi, S. Malek.

[85] Linear differential equations, Fuchsian inequalities and multiplicities of zeros // Manuscript. 40 p.

II. Научно-методические публикации

[86] Математические основы трибоники / Ред. М. А. Галахов, В. П. Ковалев. М.: МФТИ, 1983.

[87] Анализ на многобразиях (методы дифференциальной геометрии в математической физике) / Ред. А. Н. Черноплеков. М.: МФТИ, 1983.

[88] Задачи устного экзамена МФТИ / Ред. В. Уроев, М. Шабунин // Квант. 1983. № 2. С. 28.

[89] Квадратичный трехчлен / Ред. В. Уроев, М. Шабунин // Квант. 1983. № 9. С. 26—28.

[90] Метрические соотношения в треугольнике / Ред. В. Уроев, М. Шабунин // Квант. 1985. № 4. С. 48—52.

[91] Сборник задач по спецкурсу «Анализ на многообразиях» / А. Н. Черноплеков. М.: МФТИ, 1985.

[92] Задачи на координатной плоскости / Ред. В. Уроев, М. Шабунин // Квант. 1986. № 11. С. 48—52.

[93] Решение систем тригонометрических уравнений / Ред. В. Уроев, М. Шабунин // Квант. 1987. № 11. С. 46—49.

[94] Квадратичные уравнения и неравенства (задание № 2 для 8-х кл., ЗФТШ МФТИ). Долгопрудный: МФТИ, 1987.

[95] Решение задания № 2 для 8-х кл., ЗФТШ МФТИ. Долгопрудный: МФТИ, 1987.

[96] Квадратичные уравнения и неравенства (задание № 2 для 9-х кл., ЗФТШ МФТИ). Долгопрудный: МФТИ, 1989.

[97] Системы нелинейных уравнений и неравенств // Факультативные курсы по математике для 10—11 классов. М.: Министерство народного образования РСФСР, 1989. С. 58—106.

[98] Простейшие уравнения и системы (задание № 4 для 9-х кл., ЗФТШ МФТИ). Долгопрудный: МФТИ, 1990.

[99] Решение задания № 4 для 9-х кл., ЗФТШ МФТИ. Долгопрудный: МФТИ, 1991.

[100] Проблемы Гильберта (100 лет спустя). М.: МЦНМО, 1999.

[101] Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2000.

[102] Some memories of Boarding № 45 // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 174. P. 1—5.

[103] Уравнения Максвелла и дифференциальные формы. М.: МЦНМО, 2002.
[104] Воспоминания и размышления о давно прошедшем. М., 2003.

III. Юбилейные статьи

[105] Дмитрий Викторович Аносов (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1997. Т. 52, № 2. С. 193—200.
[106] Владимир Игоревич Арнольд (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1997. Т. 52, № 5. С. 235—255.
[107] Анатолий Дмитриевич Мышкис (к восьмидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2000. Т. 55, № 3. С. 195—196.
[108] Анатолий Михайлович Степин (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2001. Т. 56, № 1. С. 201—204.
[109] Александр Сергеевич Мищенко (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2001. Т. 56, № 6. С. 167—170.
[110] Андрей Александрович Гончар (к семидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2002. Т. 57, № 1. С. 185—190.
[111] Евгений Фролович Мищенко (к восьмидесятилетию со дня рождения) // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 9—10.
[112] Василий Сергеевич Владимиров (к восьмидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2003. Т. 58, № 1. С. 199—207.
[113] Виктор Матвеевич Бухштабер (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 2003. Т. 58, № 3. С. 199—206.

IV. Редактирование и комментарии

[114] Дифференциальные уравнения и динамические системы. К 80-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко. М.: «Наука/Интерпериодика», 2002. (Труды МИАН. Т. 236).
[115] Монодромия в задачах алгебраической геометрии и дифференциальных уравнений. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2002. (Труды МИАН. Т. 238).
[116] Monodromy and Differential Equations / Ed. M. Hazewinkel, V. Kulikov, M. Teicher. Dordrecht: Kluwer, 2003. (Acta Appl. Math.; V. 75, № 1—3).
[117] *Гильберт Д.* Избранные труды. Т. 2. М.: Факториал, 1998 (комментарии к проблемам Гильберта: с. 591—593, и к теории интегральных уравнений: с. 540).

Оглавление

Часть I
Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения

Часть II
Изомонодромные деформации фуксовых систем

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; `biblio.mccme.ru`

Книга — почтой: `http://biblio.mccme.ru/shop/order`

Книги в электронном виде: `http://www.litres.ru/mcnmo/`

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; `www.umlit.ru`, `www.textbook.ru`, `абрис.рф`
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; `www.kniga.ru`

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; `www.mdk-arbat.ru`
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; `www.bookmg.ru`
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; `www.biblio-globus.ru`
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; `www.arg.ru`
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; `www.uchebnik.com`
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; `www.shkolkniga.ru`
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, `www.urss.ru`
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; `k_i_@bk.ru`, `k_i_@petroglyph.ru`
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, `www.biblio-globus.ru`

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; `df-al-el@bk.ru`