АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

Проф. С. А. БОГОМОЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть II

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА. РЯДЫ ФУРЬЕ

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1933

АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

Проф. С. А. БОГОМОЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть II

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА. РЯДЫ ФУРЬЕ

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской Академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1933

Ответственный редактор *Краз, Г. Я.*
Технический редактор *Налетов М. М.*
Поступило в производство 20/VII 1933 г.
Подписано к печати 28/VIII 1933 г.
Вышло в свет в августе 1933 г.
Количество печ. знаков в листе 32.000.
Бумага печ. 75×105.

Одобрено кафедрой математики Артиллерийской Академии РККА в качестве учебного руководства

Ленгорлит № 19577. Арт. ак. № 64. Заказ № 2830. Тираж 2.500 экз. $7^1/_2$ п. л.

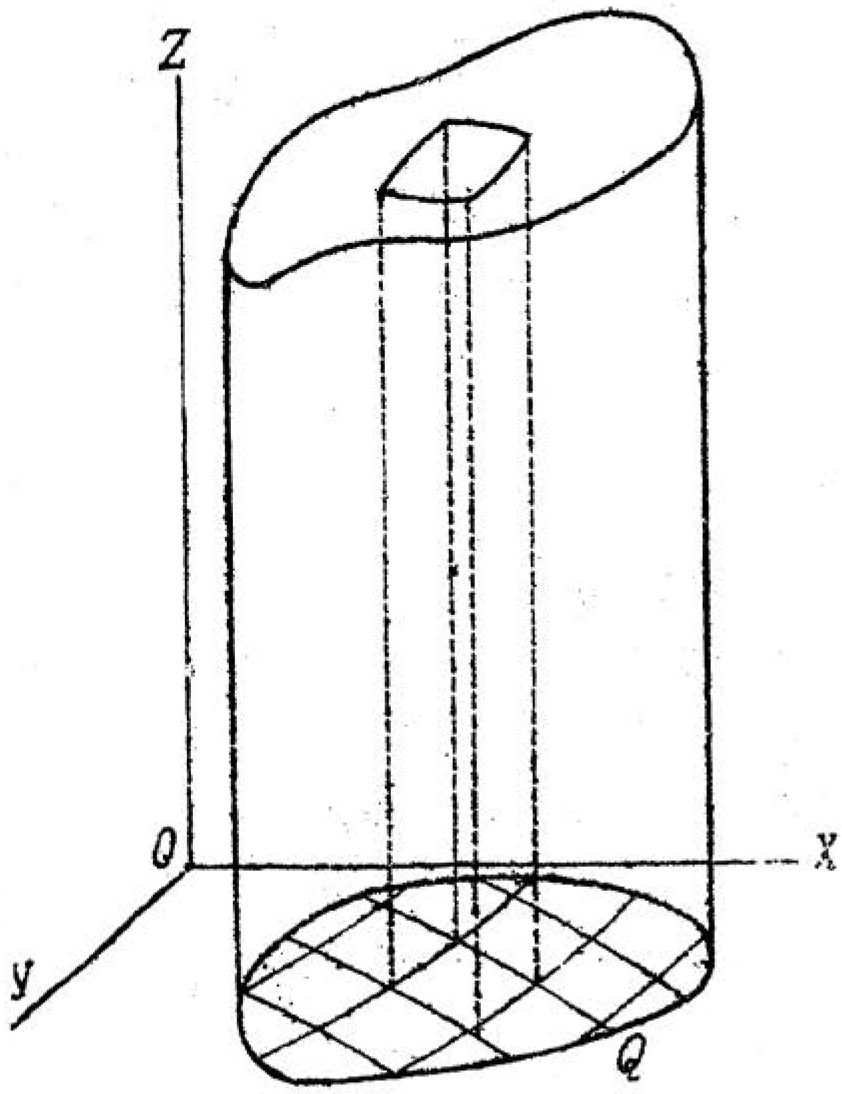
ЛОЦТ Наркомвоенмора им. Клима Ворошилова (Ленинград, пл. Урицкого, 10).

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ (в общем случае).

I. В §32 первой части „Математического анализа" мы вычисляли об'емы таких тел, для которых были известны площади поперечных сечений. Но определение площади само требует выполнения некоторого интегрирования, так что для вычисления об'ема вообще требуется двукратное интегрирование. В этом мы действительно убедимся на последующих страницах.

Предложим себе найти об'ем, ограниченный определенным образом, а именно (см.черт.I): плоскостью YOX ,цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси OZ и поверхностью,заданной уравнением:

$$z = f(x,y);$$



Черт. 1.

функцию $f(x,y)$ будем считать однозначной и непрерывной, и кроме того допустим, что она положительна для рассматриваемых значений x и y , т.е. что соответствующая часть поверхности лежит выше плоскости YOX .Искомый об'ем этого цилиндра,срезанного сверху данной поверхностью, обозначим через V ; часть плоскости YOX, служащую основанием нашему цилиндру, обозначим через Q (этой же буквой будем обозначать и площадь основания).

К определению об'ема V мы подойдем в общем теми же этапами, с помощью которых была в свое время определена площадь.

Условимся в следующем сокращенном способе выражения. Для того, чтобы можно было вычислить z из уравнения поверхности, надо задать x и y; но эту пару чисел всегда можно рассматривать, как координаты некоторой точки, лежащей в плоскости YOX; поэтому будем говорить о „значении функции в точке (x, y)". Далее нас интересует только та часть данной поверхности, которая лежит внутри цилиндра; легко видеть, что для получения соответствующих значений z, надо брать точки, заполняющие область Q.

Обозначим через m - наименьшее, а через M - наибольшее из всех указанных значений z, и построим два прямых цилиндра с общим основанием Q, причем высотами их будут: для одного m, а для другого M. Легко видеть, что искомый об'ем по своей величине заключается между об'емами этих цилиндров, откуда приходим к неравенствам:

$$mQ < V < MQ;$$

но тогда можно положить:

$$V = PQ, \quad \text{где} \quad m < P < M.$$

По известному свойству, непрерывная функция принимает все значения, промежуточные между m и M, так что можно написать:

$$P = f(\alpha, \beta),$$

где (α, β) - некоторая точка области Q.

Таким образом, приходим к формуле:

$$V = f(\alpha, \beta)\, Q, \tag{I}$$

которая, однако, не решает вопроса, так как числа α и β нам до конца неизвестны.

Следующий шаг состоит в том, что область Q произвольным образом делится на n частей:

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i, \ldots, q_n,$$

так что

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} q_i.$$

На каждой из этих частей строим прямые цилиндрические поверхности до пересечения с данной поверхностью (на черт. I построена одна из них, имеющая своим основанием площадку q_i); тогда искомый об'ем в свою очередь разделится на n частей, ограниченных по тому же способу, что и первоначально данный; обозначив через v_i об'ем того цилиндрика который построен на площадке q_i, напишем:

$$V=\sum_{i=1}^{i=n} v_i$$

К каждому из частичных об'емов v_i можно применить формулу (I), в силу которой

$$v_i=f(\alpha_i,\beta_i)\,q_i,$$

где (α_i,β_i) - некоторая точка области q_i; подставляя в предыдущую формулу, имеем:

$$V=\sum_{i=1}^{i=n} f(\alpha_i,\beta_i)\,q_i\,. \qquad (2)$$

Полученная формула не дает окончательного решения, так как числа α_i,β_i опять-таки нам до конца неизвестны; преимущество ее заключается только в том, что для этих чисел указаны более тесные границы.

В виду сказанного, применяем переход к пределу, обычный для интегрального исчисления, а именно: увеличиваем безгранично число частей области Q и притом-так, чтобы каждая из них безгранично убывала по всем своим измерениям (важность последнего условия вскоре выяснится). Так как наша сумма всегда равна V (см.2), то и в пределе имеем:

$$V=\lim\cdot\left[\sum_{i=1}^{i=n} f(\alpha_i,\beta_i)\,q_i\right]_{n\to\infty}. \qquad (3)$$

Однако, и здесь еще нет решения задачи - по той же причине, что и выше. Это обстоятельство заставляет нас сделать последний шаг, состоящий в следующем: в каждой площадке q_i, в которой лежит неизвестная точка (α_i,β_i), возьмем еще другую точку (ξ_i,η_i), нами п р о и з в о л ь н о выбранную; затем вычислим значение функции в этой точке и умножим его на площадь рассматриваемой частичной области

$$f(\xi_i,\eta_i)\,q_i\,;$$

наконец, проделав это для всех площадок, возьмем сумму всех полученных произведений:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i) q_i.$$

Докажем, что при указанном выше переходе к пределу, последняя сумма тоже имеет своим пределом V.

Так как каждая площадка q_i становится бесконечно-малой по всем измерениям, то расстояние между точками (α_i, β_i) и (ξ_i, η_i) будет бесконечно-малым; а в таком случае, в силу непрерывности данной функции, имеем:

$$f(\alpha_i, \beta_i) - f(\xi_i, \eta_i) = \varepsilon_i,$$

где ε_i - число бесконечно-малое. На основании этой формулы, составляем разность наших сумм:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\alpha_i, \beta_i) q_i - \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i) q_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[f(\alpha_i, \beta_i) - f(\xi_i, \eta_i) \right] q_i = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i q_i. \qquad (*)$$

Остается рассмотреть эту сумму. По известному свойству имеем:

$$\left| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i q_i \right| \leq \sum_{i=1}^{i=n} |\varepsilon_i| q_i;$$

обозначим через ε наибольшее из положительных чисел $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|, \ldots, |\varepsilon_n|$; тогда:

$$\sum_{i=1}^{i=n} |\varepsilon_i| q_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{i=n} q_i = \varepsilon Q,$$

так что в конце концов

$$\left| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i q_i \right| \leq \varepsilon Q.$$

Но ε, будучи наибольшим из бесконечно-малых, само все же будет бесконечно-малым, а Q есть величина конечная; отсюда и вытекает, что рассматриваемая сумма стремится к нулю.

Следовательно, разность двух сумм, стоящих в равенстве $(*)$, есть величина бесконечно-малая; но первая стремится к пределу, равному V; тогда и вторая имеет тот же самый предел, так что можем написать:

$$V=\lim\left[\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i,\eta_i)q_i\right]_{n\to\infty}. \qquad (4)$$

Полученная формула, наконец, решает вопрос: в правой части под знаком суммы стоят величины нам известные, и остается только трудность нахождения предела; но мы эту трудность обойдем с помощью интегрирования.

Предел суммы, стоящий в правой части равенства (4), называется двойным интегралом, взятым от функции $f(x,y)$ по области Q; он обозначается следующим символом:

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy.$$

Под'интегральное выражение, как всегда, указывает на закон составления слагаемых той суммы, предел которой есть наш интеграл; написав здесь $dxdy$, мы дали обычное обозначение, но несколько забежали вперед: скоро увидим, что для вычисления интеграла, площадь Q обычно делят на прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям, и эти стороны можно обозначить через dx и dy; а пока пусть читатель смотрит на это выражение, как на известный символ.

Пользуясь введенным обозначением, формулу (4) можно переписать так:

$$V=\iint f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (5)$$

Когда мы научимся вычислять двойные интегралы, то будем в состоянии вычислять об'емы по этой формуле.

Сделаем по отношению к ней некоторые замечания. Мы предполагали, что для области Q функция $f(x,y)$ всегда положительна; если бы она была все время отрицательной, то легко понять, что двойной интеграл дал бы число, измеряющее об'ем и взятое со знаком минус; если же под'интегральная функция меняет знак, то двойной интеграл даст алгебраическую сумму об'емов. В этом убеждаемся, разложив Q на соответствующие части и вспомнив теорему, что предел суммы равен сумме пределов.

Если же искомый об'ем ограничен не так, как то требуется в формуле (5), то его надо разбить на части, ограниченные требуемым образом, и к каждой из них применить формулу (5).

2. Остановимся еще на одном вопросе, приводящем нас к понятию о двойном интеграле.

В I-й части вып.2 (стр.197) шла речь о массе плоской фигуры; там эта фигура считалась однородной , и масса ее выражалась очень просто:

$$m=\rho \cdot Q,$$

где ρ есть так называемая поверхностная плотность, которая для однородной фигуры является величиной постоянной, а Q – ее площадь. Если же данная нам плоская фигура - неоднородна, то плотность ρ от точки к точке меняется, так что она есть „функция точки":

$$\rho=f(x,y);$$

тогда для определения массы данной фигуры избирают следующий обходный путь. Делим нашу фигуру Q (пусть это будет площадка, изображенная в плоскости YOX на черт.I) на n достаточно малых частей q_i, и приближенно примем, что в каждой такой частице плотность - постоянна; именно допустим, что она имеет во всех точках рассматриваемой частицы то же самое значение, как в некоторой ее точке (ξ_i, η_i). Тогда, на основании предыдущей формулы, масса этой частицы будет равна:

$$f(\xi_i, \eta_i)\cdot q_i ,$$

а масса всей фигуры представится суммой:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i)\cdot q_i .$$

Это значение искомой массы имеет, конечно, лишь приближенный характер; но ошибка будет тем меньше, чем меньше части, на которые мы разбили данную фигуру, и чем, следовательно, больше их число. Переходя к пределу, мы получаем точное определение массы:

$$m=\lim\left[\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i)\, q_i\right]_{n\to\infty},$$

или

$$m=\iint_{q} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (6)$$

3. Мы рассмотрели два конкретных вопроса, приведших нас к двойному интегралу; остановимся в заключение на методологической стороне этих рассуждений, которые характерны для интегрального исчисления и его приложений.

Мы ищем вполне определенное количество (об'ем, массу); но в каждом количестве существует взаимопроникновение противоположностей: единство целого и множество частей. Ищем мы это единое, но в процессе рассуждения переходим к множеству его элементарных частей; таким образом происходит диалектическое отрицание того единого, которое является целью наших исканий. Затем суммирование и переход к пределу возвращают нас снова от множества частей к единому, но не к прежнему исходному пункту, а к полному решению задачи. Здесь происходит второе отрицание, а именно - отрицание множества, возвращающее нас к единству. Итак можно сказать, что основой приведенных выше рассуждений является диалектический закон двойного отрицания.

Добавим еще, что в самом понятии двойного интеграла (равно как и обыкновенного определенного интеграла) имеется взаимопроникновение противоположностей бесконечно-малого и бесконечно-большого: тогда как число слагаемых беспредельно растет, каждое из них беспредельно убывает; а в итоге получается вполне определенное конечное число.

§ 2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ.

I. Настоящий параграф мы начнем с того, что оторвем понятие о двойном интеграле от задач о вычислении об'ема и массы. Дело заключается в том, что даже в области самой геометрии двойные интегралы применяются не только для вычисления об'емов (см. ниже), не говоря уже об их приложениях в механике, физике и технике. На этом основании полезно будет дать обшее аналитическое определение этого понятия, особенно после того, как был сделан к нему наглядный подход со стороны об'емов и масс.

Пусть нам задана функция от двух переменных независимых $f(x,y)$, однозначная и непрерывная для значений x и y, удовлетворяющих известным условиям. Вспоминая геометрический способ выражения, введенный в предыдущем параграфе, можно сказать, что наша функция задана в известной части плоскости YOX. Так например, неравенства

$$x_0 \leq x \leq X \quad \text{и} \quad y_0 \leq y \leq Y$$

можно истолковать, как задание функции в прямоугольнике, стороны которого определяются уравнениями

$$x = x_0, \; x = X; \quad y = y_0, \; y = Y;$$

далее, неравенство

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

показывает, что функция задана в круге с радиусом равным a и центром в начале координат, равно как и на его окружности, и т.д.

Итак, пусть задана функция $f(x,y)$ в области Q (черт.2); делим эту область произвольным образом на части произвольного вида:

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i, \ldots, q_n,$$

так что

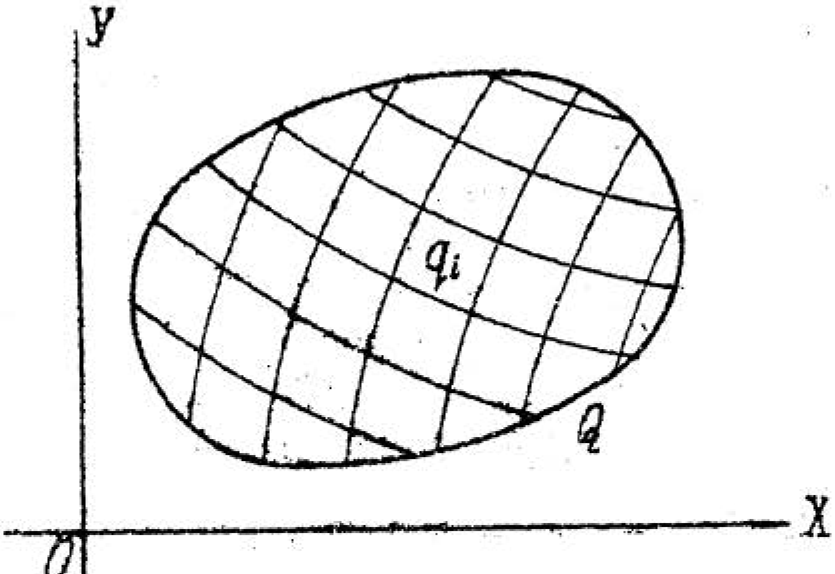
$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} q_i .$$

Далее, в каждой частичной области q_i выбираем произвольную точку (ξ_i, η_i), вычисляем значение данной функции в этой точке и умножаем его на площадь соответствующей части:

$$f(\xi_i, \eta_i)\, q_i ;$$

сделав это для всех частичных областей, берем сумму полученных произведений:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i)\, q_i .$$



Черт. 2.

Наконец, переходим к пределу, увеличивая безгранично число частей, причем каждая из них должна делаться бесконечно малой по всем своим измерениям; существование предела (при произвольном выборе точек и при произвольном дроблении частичных областей) было геометрически доказано в предыдущем параграфе. Этот предел и называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$, взятым по области Q; так что имеем следующее определение двойного интеграла:

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \lim\left[\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i,\eta_i)\,Q_i\right]_{n\to\infty} \qquad (1)$$

2. Исходя из этого определения, мы научимся вычислять двойные интегралы. Предварительно выведем одну вспомогательную формулу для обыкновенного определенного интеграла.

Возьмем интеграл

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

и вставив между x_0 и X промежуточные числа, по известному свойству определенного интеграла, получаем:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx;$$

затем к каждому из интегралов правой части применим теорему о среднем, так что придем к равенству:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(\xi_0)(x_1-x_0) + f(\xi_1)(x_2-x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(X-x_{n-1}), \qquad (2)$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ суть числа, лежащие в соответствующих промежутках. Значение этой формулы заключается для нас в том, что ее можно прочесть справа налево; тогда получается предложение, что числа $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ можно подобрать таким образом, что наша сумма в точности равна интегралу (сама сумма, а не ее предел).

Переходя к вычислению двойного интеграла, начнем с простейшего случая изображенного на черт.3; здесь область интегрирования Q есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Воспользовавшись правом произвольно делить эту область на части, мы разделим прямоугольник $ABCD$ на частичные прямоугольники с помощью прямых, параллельных осям координат. С этой целью делим промежуток (x_0, X) на n частей, вставляя ($n-1$) промежуточное значение:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, X,$$

причем попрежнему полагаем:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i \quad \text{и} \quad x_n = X.$$

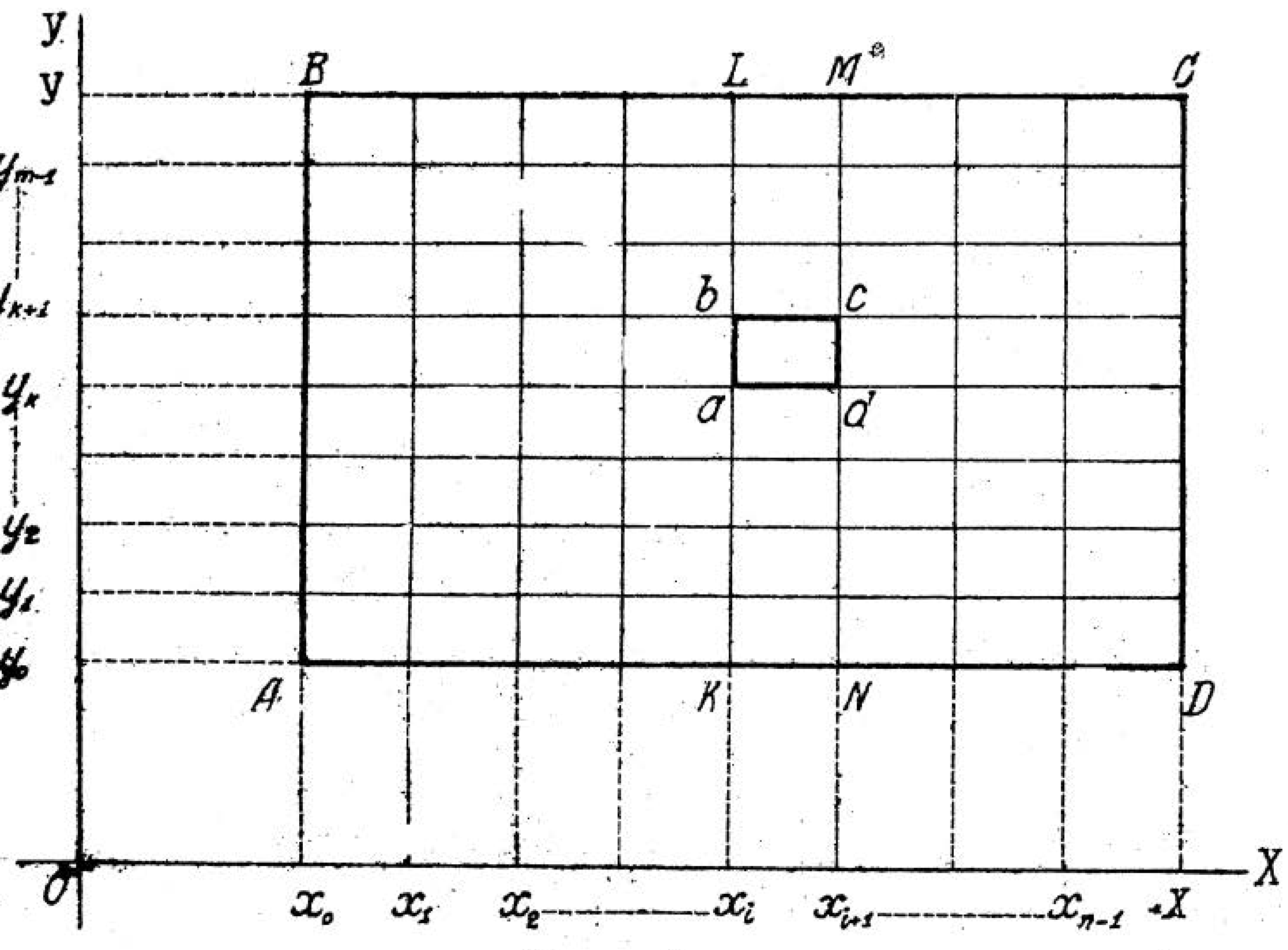
Далее, отмечаем на оси OX точки, абсциссами которых служат эти числа, и проводим через них прямые, параллельные оси OY; тогда прямоугольник $ABCD$ разобьется на n прямоугольных полос (полоса $KLMN$ есть одна из них).

Теперь делим промежуток для переменной y на m частей, вставляя опять таки промежуточные числа:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{m-1}, Y,$$

причем полагаем:

$$y_{k+1} - y_k = \Delta y_k \quad \text{и} \quad y_m = Y.$$



Черт. 3.

Отметив на оси OY точки с такими ординатами, проводим через них прямые, параллельные оси OX; тогда наши полосы разобьются каждая на m частичных прямоугольников (прямоугольник $abcd$ есть один из них). В общем данная область $ABCD$ разобьется на $m \cdot n$ частичных прямоугольников; каждый из них определяется заданием двух номеров: надо указать номер (i) вертикальной полосы и номер (k) горизонтальной полосы, на пересечении которых лежит рассматриваемый прямоугольник. Наконец, легко видеть, что площадь прямоугольника, определяемого номерами i и k, равна:

$$(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k)=\Delta x_i \cdot \Delta y_k .$$

Выберем в каждом таком прямоугольнике по произвольной точке:

$$(\xi_{ik}, \eta_{ik})$$

(координаты приходится снабжать двумя значками, так как каждый частичный прямоугольник определяется двумя номерами); тогда получаем такое выражение для искомого двойного интеграла (на основании определения двойного интеграла):

$$\iint_{ABCD} f(x,y)\,dx\,dy = \lim \left[\sum_{k=0}^{k=m-1} \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} f(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \Delta x_i \cdot \Delta y_k \right]_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \quad (3)$$

Здесь мы имеем дело с двойной суммой, так как значки i и k меняются независимо друг от друга; напомним, что при переходе к пределу, промежутки Δx_i и Δy_k должны стремиться к нулю.

Для вычисления двойного интеграла по формуле (3), намечаем следующий план: сначала вычисляем частичную сумму, составленную из слагаемых, соответствующих прямоугольникам какой-либо вертикальной полосы (обозначим ее через S_i); потом, складывая эти частичные суммы, находим полную двойную сумму и, наконец, переход к пределу приведет нас к искомому интегралу.

Итак, составим частичную сумму S_i, соответствующую полосе $KLMN$; для прямоугольников этой полосы значек i сохраняет постоянное значение, а значек k пробегает все числа от 0 до $(m-1)$, так что имеем:

$$S_i=\Delta x_i \sum_{k=0}^{k=m-1} f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\Delta y_k.$$

Воспользуемся правом произвольного выбора точек в каждом прямоугольнике и определим их абсциссы, полагая:

$$\xi_{ik}=x_i,$$

т.е. берем все эти точки на прямой KL; тогда:

$$S_i=\Delta x_i \sum_{k=0}^{k=m-1} f(x_i, \eta_{ik})\Delta y_k,$$

или полностью

$$S_i=\Delta x_i\left[f(x_i,\eta_{i0})\Delta y_0+f(x_i,\eta_{i1})\Delta y_1+\ldots+f(x_i,\eta_{i(m-1)})\Delta y_{m-1}\right].$$

В правую часть x_i входит в качестве параметра, а числа η_{ik} находятся еще в нашем распоряжении; согласно формуле (2), их можно подобрать так, чтобы сумма, стоящая в скобках, оказалась равной определенному интегралу, взятому по y в границах от y_0 до Y:

$$S_i=\Delta x_i\int_{y_0}^{Y} f(x_i,y)\,dy. \qquad (4)$$

По выполнении действий, интеграл этот будет функцией параметра x_i; для сокращения письма положим:

$$\int_{y_0}^{Y} f(x_i,y)\,dy=\Phi(x_i); \qquad (*)$$

и тогда:

$$S_i=\Phi(x_i)\Delta x_i.$$

Теперь частичная сумма определена; давая значку i всевозможные значения и складывая частичные суммы, получаем нашу полную сумму в виде:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\Phi(x_i)\Delta x_i.$$

Наконец, для получения двойного интеграла остается перейти к пределу:

$$\iint_{ABCD} f(x,y)\,dx\,dy=\lim\left[\sum_{i=0}^{i=n-1}\Phi(x_i)\Delta x_i\right]_{n\to\infty};$$

но нам известно, что этот предел есть не что иное, как определенный интеграл, взятый от функции $\Phi(x)$ в границах от x_0 до X:

$$\iint_{ABCD} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} \Phi(x)\,dx.$$

Остается подставить $\Phi(x)$ из (*) и окончательно получаем:

$$\iint_{ABCD} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} \left[\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy \right] dx;$$

двойной интеграл, стоящий в правой части, принято обозначать более сокращенно следующим образом:

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy .$$

Здесь первое интегрирование производится по y, причем x считается постоянным; его результат умножаем на dx и интегрируем по x.

Итак, мы пришли к формуле:

$$\iint_{ABCD} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy . \qquad (5)$$

Можно было бы, конечно, начать с вычисления частичных сумм, соответствующих горизонтальным полосам; тогда, как легко усмотреть, получилось бы такое равенство:

$$\iint_{ABCD} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx .$$

Сравнивая оба выражения для двойного интеграла, приходим к формуле

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx , \qquad (6)$$

которая выражает следующую теорему:

<u>В двойном интеграле с постоянными границами можно, не изменяя величины интеграла, менять порядок интегрирования,</u>

причем границы интегрирования по каждой переменной остаются теми же самыми.

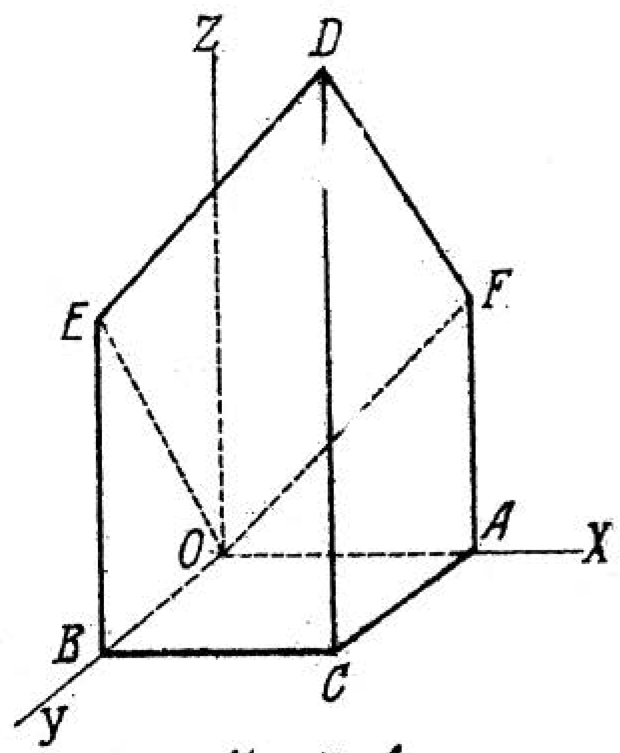
Заметим, что неизменность границ не имеет места в общем случае, о котором речь будет ниже.

Итак, мы умеем теперь вычислять двойной интеграл, распространенный по площади прямоугольника со сторонами параллельными координатным осям; прежде чем итти дальше, поясним изложенное примером.

I) вычислить об'ем части пространства, ограниченной плоскостями:

$$z=x+y; \quad x=a; \quad y=b; \quad x=0; \quad y=0; \quad z=0.$$

Прежде всего надо себе ясно представить, о каком именно об'еме идет речь, а для этого рекомендуется сделать чертеж. Начиная справа видим, что нам даны 3 координатные плоскости, затем плоскость $EBC \parallel ZOX$, плоскость $FAC \parallel ZOY$ и, наконец, плоскость $z=x+y$, проходящая через начало координат и пересекающая плоскости ZOX, ZOY по равноделящим (см. черт. 4). В общем получается усеченная прямая четырехугольная призма - $OACBEDF$.



Черт. 4.

Так как призматическую поверхность можно рассматривать, как особый случай цилиндрической, то для вычисления нашего об'ема можно воспользоваться формулой (5) предыдущего параграфа; последнюю перепишем так:

$$V=\iint_Q z\,dx\,dy,$$

где z надо выразить в функции от x и y из уравнения поверхности, ограничивающей об'ем сверху, а Q есть основание цилиндра, по которому данный об'ем проектируется на плоскость YOX.

Таким образом, в разбираемой задаче имеем:

$$V=\iint_{OACB}(x+y)\,dx\,dy;$$

далее, согласно правилу (5):

$$V=\int_0^a dx\int_0^b (x+y)\,dy.$$

Выполняем первое интегрирование по y, считая x постоянным:

$$\int_0^b (x+y)\,dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=b}=bx+\frac{b^2}{2};$$

теперь умножаем на dx и производим второе интегрирование:

$$V=\int_0^a\left(bx+\frac{b^2}{2}\right)dx=\left[b\frac{x^2}{2}+\frac{b^2}{2}x\right]_0^a=\frac{a^2b}{2}+\frac{b^2a}{2},$$

и окончательно:

$$V=\frac{1}{2}ab(a+b).$$

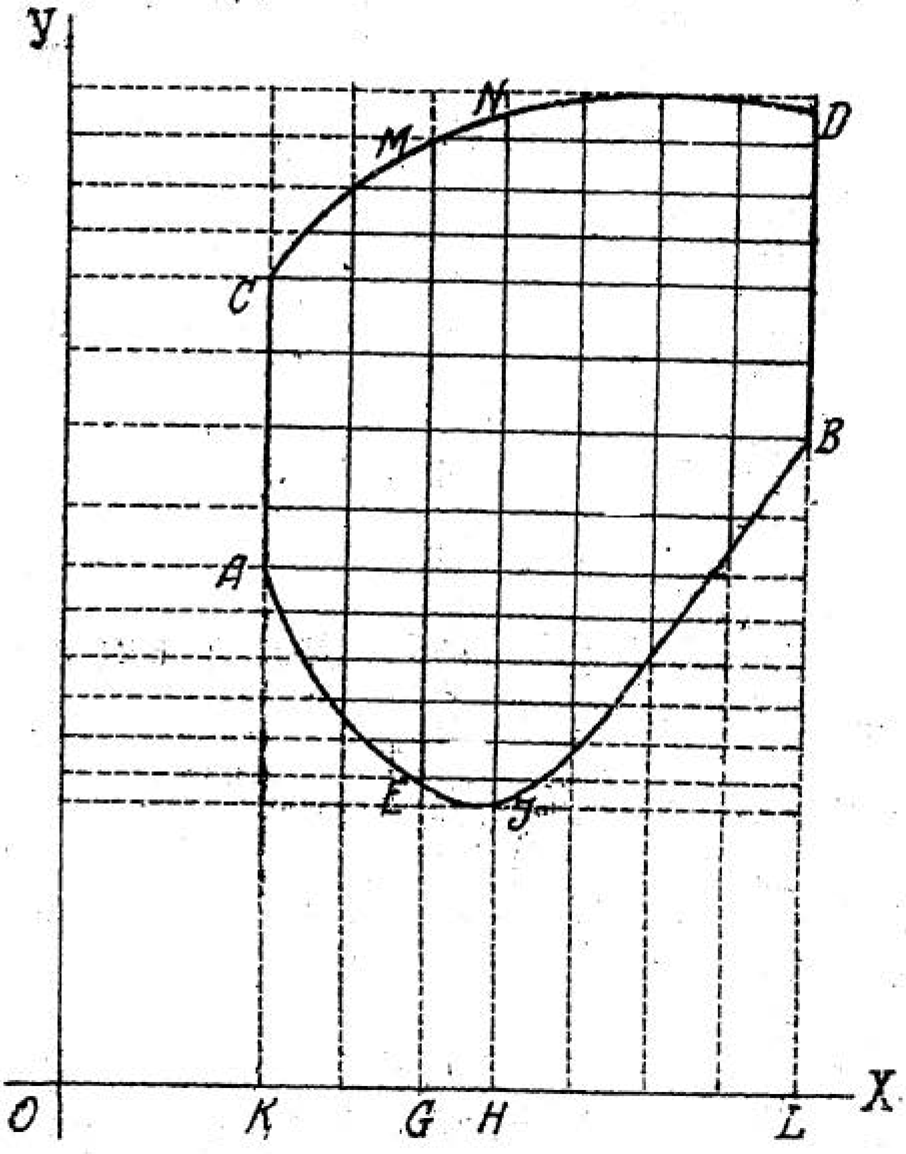
3. Переходим к вычислению двойного интеграла в том случае, когда область интегрирования ограничена иным способом; допустим, однако, что прямые параллельные оси OY пересекают контур области не более, чем в двух точках; иначе приходится разбивать данную область на части, удовлетворяющие этому требованию.

Пусть двойной интеграл распространен по области Q, которая представлена фигурой $ACMNDBJEA$ (см. черт. 5). Таким образом, область Q ограничена: двумя отрезками AC и BD, параллельными оси OY (с абсциссами $OK=x_0$ и $OL=X$) и дугами двух кривых:

$\smile AEJB$ с уравнением $y=\varphi_1(x)$

$\smile CMND$ с уравнением $y=\varphi_2(x)$,

причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и однозначны; тогда будет соблюдено поставленное выше требование о пересечении контура области с прямыми параллельными оси OY в двух точках. В частных случаях отрезки AC и BD могут обратиться в нули; тогда получается область, ограниченная замкнутой кривой, а прямые AC и BD превращаются в касательные; в этих случаях функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ найдутся из уравнения упомянутой выше замкнутой кривой.



черт. 5.

Для вычисления двойного интеграла, делим нашу область Q на части с помощью прямых, параллельных координатным осям - совершенно так же, как это было сделано в предыдущем случае; только получаемые таким образом частичные области будут теперь двух родов: правильные элементы, состоящие из прямоугольников, целиком лежащих в области Q, и неправильные элементы, представляющие собою части прямоугольников, лежащие в области Q (другие их части выходят за ее границы). Легко видеть, что последние элементы образуют пояс, прилежащий к контуру данной области.

Двойная сумма, предел которой равен двойному интегралу, распространяется на все части, как правильные, так и неправильные; выясним, что та часть ее, которая соответствует неправильным элементам, в пределе равна нулю.

Обозначим через σ указанную часть двойной суммы; мы, очевидно, увеличим ее, если во все слагаемые вместо значения $f(\xi_i, \eta_i)$ подставим наибольшее значение M функции $f(x,y)$ в области Q; мы еще больше увеличим ее, если вместо площадей неправильных элементов подставим площади полных прямоугольников, частями которых они являются. Таким образом, получаем неравенство:

$$\sigma < M \cdot \omega,$$

где ω - сумма площадей тех прямоугольников, которые пересекаются криволинейным обводом области Q ; но при переходе к пределу, измерения всех прямоугольников становятся бесконечно-малыми, а потому ω само будет бесконечно-малым. Действительно, все эти прямоугольники лежат внутри пояса, прилежащего к криволинейной части контура; а при переходе к пределу ширина этого пояса безгранично уменьшается. Отсюда и вытекает сделанное выше утверждение.

Итак, неправильными элементами можно пренебречь (или, наоборот, дополнить их до полных прямоугольников). Деля область Q на части прямыми, параллельными осям координат, и проводя в частности прямые, параллельные оси OX ,присоединим к числу последних все такие прямые, которые проходили бы через точки пересечения дуг AB и CD с прямыми,параллельными оси OY (таковы на черт.5 точки E , M и др.) ; это можно сделать, так как способ разбиения области интегрирования на части находится вполне в нашем распоряжении, и сделать это будет полезно в интересах упрощения дальнейших рассуждений.

Теперь поступаем в общем так же, как в предыдущем более простом случае.

Начинаем с вычисления частичной суммы S_i , соответствующей элементам полосы $EMNJ$ (пусть $OG=x_i$, $OH=x_{i+1}$, $GH=$ $=x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$); так как неправильные элементы отбрасываются,то эту сумму можно вычислять по формуле (4); разница будет только в том, что в случае прямоугольной области границы интеграла были одними и теми же для всех полос,а здесь они меняются от полосы к полосе. Действительно,вычисляя S_i для полосы $EMNJ$, мы должны взять интеграл,входящий в формулу (4), в границах от GE до GM ; но, как легко видеть из уравнений кривых AB и CD , получим:

$$GE=\varphi_1(x_i) \text{ и } GM=\varphi_2(x_i);$$

следовательно:

$$S_i=\Delta x_i\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy;$$

здесь x_i считается постоянным, так что имеем дело с обыкновенным определенным интегралом; положив для сокращения письма:

$$\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy = \Phi(x_i), \qquad (*)$$

запишем:

$$S_i = \Phi(x_i)\Delta x_i .$$

Дальнейшее сводится к буквальному повторению рассуждений пункта 2 настоящего параграфа, и мы приходим к выводу:

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} \Phi(x)\,dx;$$

подставляя сюда $\Phi(x)$ из (*), окончательно получаем:

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (7)$$

При первом интегрировании по y, переменная x считается постоянной, так что зависимость границ интегрирования от x никаких осложнений не вносит.

На практике, при определении границ интегрирования по данной области, будем руководиться следующими указаниями: сначала найдем границы для x (это будут крайние значения для абсцисс точек, лежащих в данной области); затем дадим переменной x промежуточное значение, проведем из соответствующей точки оси OX прямую параллельную оси OY и выясним, в каких границах меняется y внутри области в зависимости от заданного промежуточного значения x (для чего найдем пересечение указанной прямой с обводом области). Эти границы и будут границами первого интегрирования по y, а найденные выше границы для x дадут границы для второго интегрирования по x.

Конечно, можно при желании сначала интегрировать по x, а потом по y; правила остаются теми же самыми, но границы интегрирования при этом существенно меняются, как увидим ниже на примере.

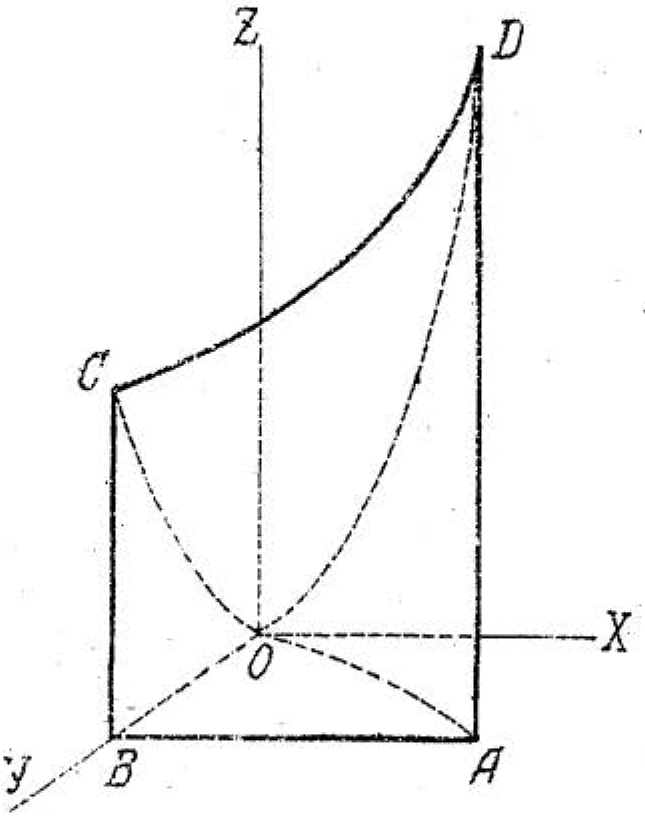
Переходим к примерам.

2) Вычислить об'ем части пространства, ограниченной поверхностями:

$$z=x^2+y^2;\quad y=x^2;\quad y=1;\quad x=0;\quad z=0.$$

(и лежащей в I-ом координатном угле).

Для того, чтобы выяснить, о каком об'еме идет речь и какова область интегрирования, построим данные поверхности. Если начать перебирать их справа, то первые две будут координатные плоскости YOX и ZOY; уравнение $y=1$ определяет плоскость параллельную плоскости ZOX; это - плоскость ABC на черт.6-а. Далее уравнение $y=x^2$ дает параболический цилиндр с образующими параллельными оси OZ, а направляющей служит парабола OA, лежащая в плоскости YOX (на чертеже изображена только часть ее). Наконец, уравнение $z=x^2+y^2$ определяет параболоид вращения вокруг оси OZ; этот параболоид пересекается: с плоскостью ZOY по параболе OC, с плоскостью ABC по параболе CD и, наконец, с параболическим цилиндром по некоторой кривой двоякой кривизны OD.



Черт.6а.

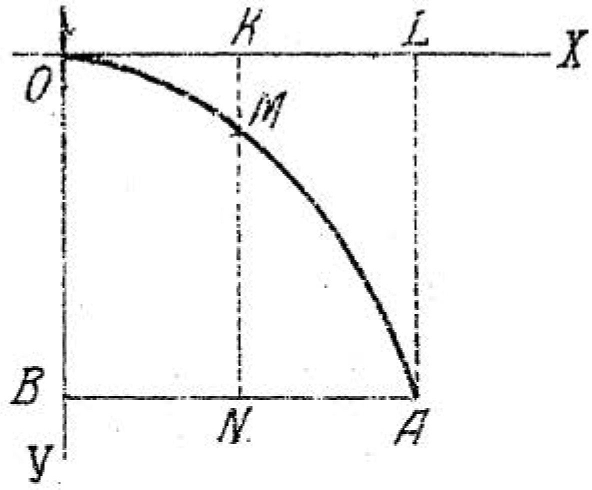
Таким образом, получается часть пространства, ограниченная со всех сторон: сверху ее ограничивает параболоид, а на плоскость YOX она проектируется по криволинейному треугольнику OAB (изображен отдельно на черт.6-б); это и будет область интегрирования.

Таким образом, искомый об'ем равен:

$$V=\iint\limits_{OAB}(x^2+y^2)\,dx\,dy;$$

для вычисления двойного интеграла применяем правило (7). Рассматривая область интегрирования (черт.6-б), мы видим, что x меняется в границах от 0 до OL, т.е. до абсциссы точка A; а эта точка является точкой пересечения линий:

$$y=x^2 \quad \text{и} \quad y=1;$$



Черт. 6-б.

решая совместно, находим $OL=1$. Далее даем x некоторое промежуточное значение OK, и замечаем, что при этом значении x, переменная y меняется внутри данной области от KM до KN; но KM есть ордината точки на параболе $y=x^2$, соответствующая выбранному значению x, так что:

$$KM=x^2,$$

а KN, очевидно, равна I. Таким образом, приходим к следующему выражению для об'ема:

$$V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 (x^2+y^2)\,dy.$$

Остается выполнить указанные интегрирования:

$$\int_{x^2}^1 (x^2+y^2)\,dy=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=1}=x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{1}{3}x^6$$

$$V=\int_0^1\left[\frac{1}{3}+x^2-x^4-\frac{1}{3}x^6\right]dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}=\frac{44}{105} \text{ куб. ед.}$$

3) двойной интеграл $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$ взят по области Q, ограниченной положительными частями осей координат и двумя линиями, заданными уравнениями:

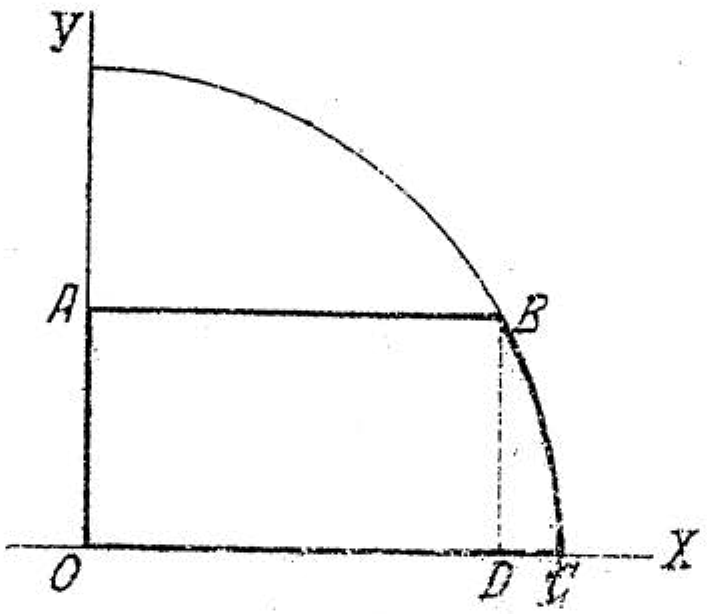
$$y=1 \qquad \text{и} \qquad x^2+y^2=4;$$

найти границы обоих интегрирований при том и другом порядке их.

Читатель без труда убедится, что областью Q служит криволинейный четырехугольник $OABC$ (см.черт.7). Будем интегрировать сначала по x, а потом по y; совершенно ясно, что y для точек данной области меняется от 0 до I; что же касается переменной x, то при данном (промежуточном) y она меняется от 0 до абсциссы соответственной точки на окружности; эту абсциссу находим из данного уравнения:

$$x = +\sqrt{4-y^2}.$$

Таким образом получаем:



Черт. 7.

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Изменим теперь порядок интегрирования и будем сначала интегрировать по y, а потом по x; здесь мы встречаемся с тем затруднением, что при данном x, верхняя граница для y не всегда определяется одним и тем же способом: сначала верхнюю границу для y приходится брать из уравнения прямой AB, а потом из уравнения окружности. Разрешить это затруднение можно только тем путем, что разбить данную область на две части: прямоугольник $OABD$ и криволинейный треугольник DBC, и взять сумму двух интегралов. При определении границ, нам понадобится отрезок OD - абсцисса точки B пересечения прямой с окружностью; решая их уравнения совместно, найдем $OD=\sqrt{3}$.

После сказанного, читатель без труда придет к равенству:

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^1 f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Мы видим, какие существенные изменения произошли в определении границ интегрирования при изменении его порядка.

4) Дан интеграл:

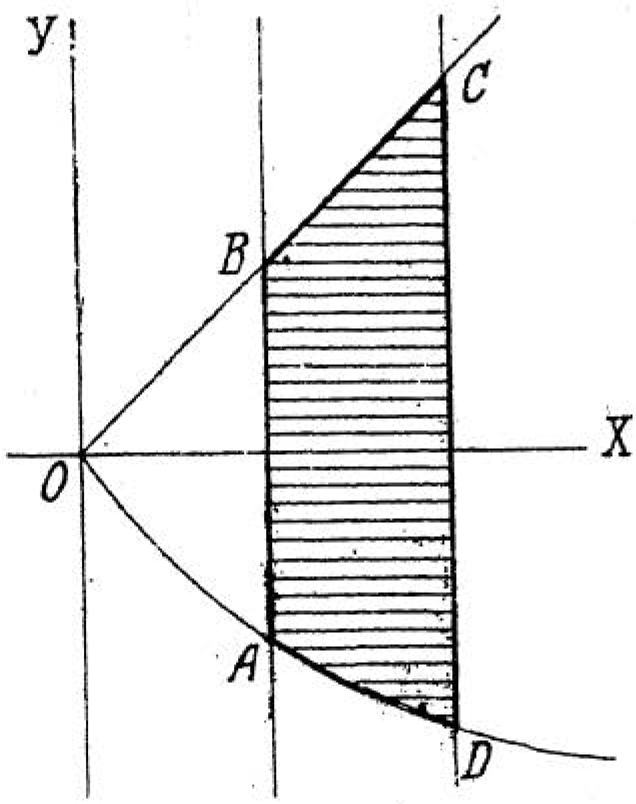
$$\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x} f(x,y)\,dy.$$

Определить область, по которой производится интегрирование.

Так как абсциссы точек искомой области могут меняться от I до 2, то эта область целиком должна заключаться в полосе между прямыми:

$$x=1 \quad \text{и} \quad x=2;$$

это - прямые AB и CD на черт.8. Далее мы видим, что при данном x, переменная y меняется:



Черт. 8.

$$\text{от} \quad y=-\sqrt{x} \quad \text{до} \quad y=x;$$

первое уравнение соответствует нижней части параболы $y^2=x$, а второе биссектрисе координатного угла. Таким образом, определяется область $ABCD$ (черт.8).

4. Уменье вычислять двойные интегралы можно также использовать для вычисления моментов инерции плоских фигур.

Этот момент инерции надо тщательно отличать от того „статического" момента, который был рассмотрен во 2-м выпуске курса математического анализа (§§34,35).

Пусть задана система n материальных точек:

$$M_1(x_1,y_1);\ M_2(x_2,y_2);\ \ldots .M_n(x_n,y_n),$$

обладающих массами:

$$m_1,\ m_2, \ldots \ldots m_n;$$

Тогда моментами инерции системы относительно осей OX и OY (обозначение: J_x и J_y) называются следующие выражения:

$$J_x=\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i^2 \quad \text{и} \quad J_y=\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i^2.$$

Пусть теперь дана плоская фигура Q (например, изображенная на черт.5) с поверхностной плотностью ρ. Для определения ее момента инерции, поступаем так же, как в §I (п.2) мы поступали для определения массы, а именно: делим данную фигуру на достаточно малые части, и массу каждой части принимаем равной $f(\xi_i,\eta_i)\cdot q_i$.

Далее представляем себе, что масса каждой такой части сосредоточена в точке (ξ_i,η_i), другими словами, данную сплошную фигуру заменяем множеством материальных точек. Тогда для момента инерции этой вспомогательной системы относительно оси OX получаем выражение:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \eta_i^2 \cdot f(\xi_i, \eta_i) \cdot q_i .$$

Конечно, это дает только приближенное значение для искомого момента инерции данной фигуры; но приближение будет тем лучше, чем мельче будут части фигуры и чем больше будет их число. Совершая обычный переход к пределу, получим искомую величину:

$$J_x = \iint_Q y^2 f(x,y)\, dx\, dy;$$

здесь функция $f(x,y)$ есть выражение плотности ρ, так что:

$$J_x = \iint_Q \rho y^2 dx\, dy;$$

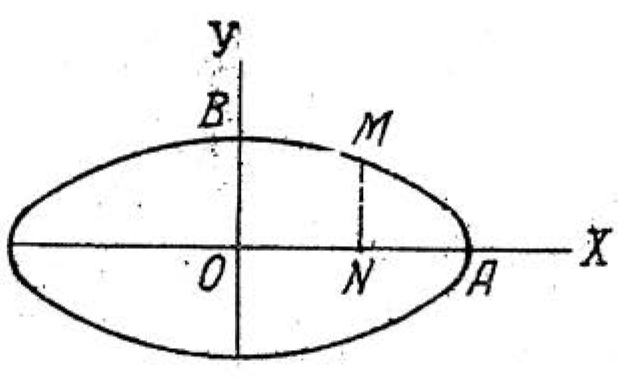
подобное же получается для J_y.

Мы ограничимся дальше случаем однородной фигуры, для которой $\rho = const$; в указанном случае имеем формулы:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \rho \iint_Q y^2 dx\, dy \\ J_y &= \rho \iint_Q x^2 dx\, dy \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Сделаем пример.

5) Найти моменты инерции однородного эллипса относительно его осей.



Черт. 9:

Возьмем эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

вследствие симметричности эллипса, можно найти момент инерции его четверти OAB и умножить полученный результат на 4:

$$J_x = 4\rho \iint_{OAB} y^2 dx\, dy.$$

Определяя границы интегрирования по данным выше правилам, получим:

$$\mathcal{J}_x=4\rho\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy.$$

(Пусть читатель ответит на вопрос: почему нельзя под знаком интеграла заменить y^2 его выражением из уравнения эллипса ?).

Выполняем I-е интегрирование:

$$\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy=\frac{1}{3}\,\frac{b^3}{a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}};$$

тогда

$$\mathcal{J}_x=\frac{4}{3}\,\rho\,\frac{b^3}{a^3}\int_0^a(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx;$$

делаем здесь подстановку:

$$x=a\sin t,$$

и получаем:

$$\mathcal{J}_x=\frac{4}{3}\,\rho b^3 a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t . dt$$

$$\mathcal{J}_x=\frac{1}{4}\,\rho\,\pi a b^3.$$

Если ввести массу m эллипса:

$$m=\pi a b.\rho,$$

то

$$\mathcal{J}_x=\frac{1}{4}\,m b^2.$$

Подобным же образом найдем:

$$\mathcal{J}_y=\frac{1}{4}\,m a^2.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЯ.

I. В следующих задачах требуется найти об'ем части пространства, ограниченной данными поверхностями:

1) $z=x+y,\ x^2+y^2=a^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
(ограничиться I-м координатным углом).

Ответ: $\frac{2}{3}a^3$.

2) $x^2+y^2=a^2,\quad z=0,\quad z=mx$
($m>0$; взять часть, лежащую выше плоскости YOX).

Ответ: $\frac{2}{3}ma^3$.

3) $x^2+y^2=a^2,\quad x^2+z^2=a^2$.

Ответ: $\frac{16}{3}a^3$.

4) $z=2x^2+y^2+1,\ x+y-1=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Ответ: $\frac{3}{4}$ куб.един.

5) $z^2=xy,\ x=a,\ y=b,\ z=0\ \ (a$ и $b>0)$.
(УКАЗАНИЕ: I-ая поверхность есть конус, ось которого направлена по биссектрисе угла YOX).

Ответ: $\frac{4}{9}ab\sqrt{ab}$.

II. Определить границы интегрирования в интеграле:

$$\iint_{Q} f(x,y)\,dx\,dy,$$

распространенном по площади круга:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

III. Определить область интегрирования в интеграле:

$$\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)\,dx$$

и изменить порядок интегрирования.

Ответ: $$\int_0^a dx\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x,y)\,dy.$$

IУ. Задачник кафедры №№182, 183, 184, 186; в этих задачах на вычисление моментов инерции считается $\rho=1$.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

I. До сих пор при вычислении двойных интегралов мы пользовались прямоугольными координатами; это выражалось в том, что с помощью этих координат задавались точки области интегрирования, а сама она разбивалась на части с помощью прямых, параллельных координатным осям. Для последней цели мы использовали так называемые „координатные линии"; под этим именем известны линии, уравнения которых получаются, если приравнять постоянному ту или другую координату. Действительно, для прямоугольной системы координатные линии должны определяться уравнениями:

$$x = const \qquad \text{и} \qquad y = const.,$$

а это и будут прямые, параллельные осям. Добавим еще, что если в формуле (I) §2 положить $f(x,y)=1$, то получим:

$$\iint_Q dxdy = \lim \sum_{i=1}^{i=n} q_i = Q;$$

следовательно площадь нашей области можно выразить двойным интегралом:

$$Q = \iint_Q dx\,dy. \qquad (I)$$

На этом основании произведение:

$$dxdy$$

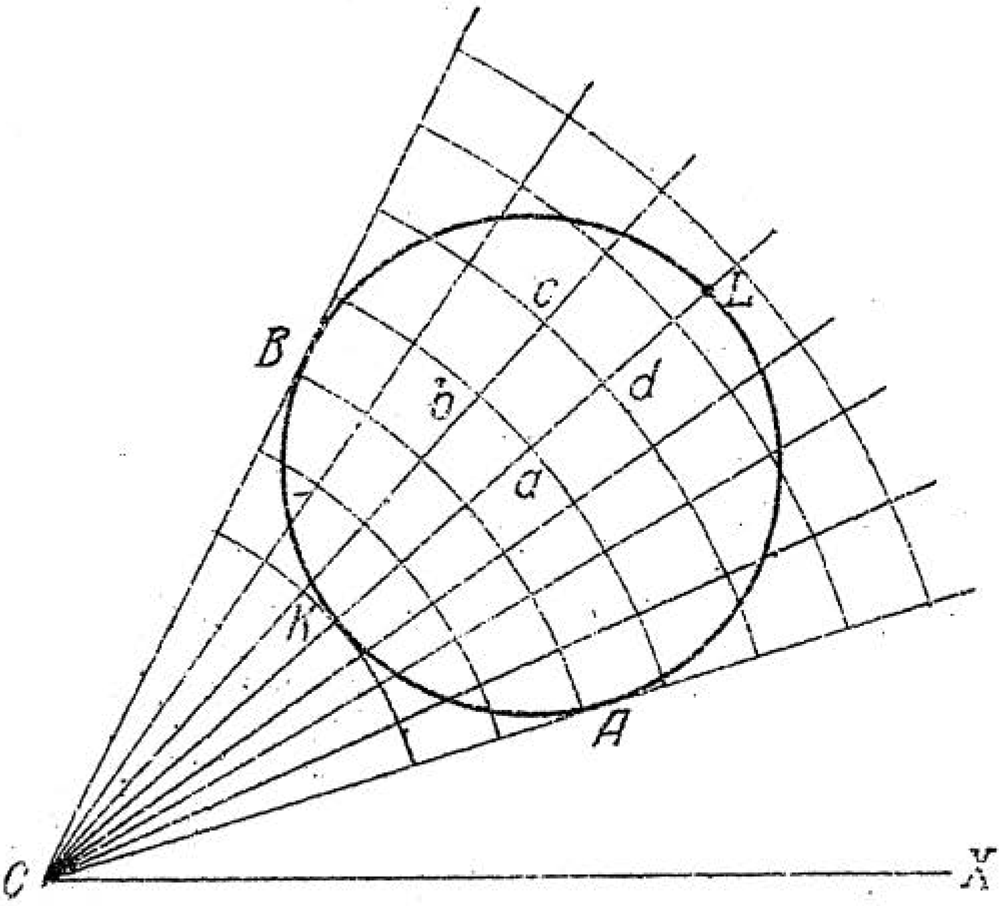
называется „элементом площади в прямоугольных координатах".

Однако, иногда оказывается более удобным ввести полярные координаты в той плоскости, в которой лежит область интегрирования: поэтому надо выяснить, как тогда складывается вычисление двойного интеграла.

Обозначим полярные координаты в указанной плоскости через r и φ, и пусть нам дана непрерывная и однозначная функция этих величин:

$$F(r,\varphi)$$

(если сначала была задана функция $f(x,y)$, причем x и y рассматривались как прямоугольные координаты точки, то мы перейдем к новому заданию с помощью известных формул перехода от прямоугольных координат к полярным); пусть далее требуется найти двойной интеграл от этой функции, взятый по области Q, которая на черт.10 ограничена контуром $AKBLA$. Мы допустим, что лучи, исходящие из полюса, пересекают этот контур не более, чем в двух точках; уравнение же контура задается в полярных координатах (надо заметить, что контур может быть составлен из нескольких линий, как это имело место выше). Если же наше допущение не выполняется, то область интегрирования разбивается на части, удовлетворяющие поставленному требованию.



Черт. 10.

Правило вычисления двойного интеграла прежде всего требует разбиения данной области на части; а так как способ разбиения находится вполне в нашем распоряжении, то мы условимся разбивать ее на части с помощью координатных линий полярной системы. Таковыми будут, во-первых, линии:

$$r = const,$$

что дает совокупность концентрических окружностей с общим центром в полюсе, и во-вторых, линии

$$\varphi = const,$$

что дает пучек лучей, исходящих из полюса.

На черт.10 область Q разбита на части с помощью этих координатных линий; так же, как и выше, имеем правильные и неправильные элементы, и точно также можно пренебречь неправильными элементами. Вычислим площадь правильного элемента, например- криволинейного четырехугольника $abcd$, причем положим:

$$Oa=Ob=r;\quad Oc=Od=r+\Delta r;\quad \angle XOa=\varphi;\quad \angle XOb=\varphi+\Delta\varphi.$$

Легко видеть, что искомая площадь (обозначим ее через ΔQ) найдется как разность площадей двух круговых секторов: cOd и aOb; таким путем получаем:

$$\Delta Q=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi-\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi=r.\Delta r.\Delta\varphi+\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\varphi.$$

Далее, надо вычислить значение функции $F(r,\varphi)$ в какой-либо точке элемента $abcd$, умножить его на ΔQ, сделать это для всех правильных элементов, сложить полученные произведения и, перейдя к пределу, - получить двойной интеграл. При этом второе слагаемое в выражении для ΔQ, которое является бесконечно-малой высшего порядка по сравнению с первым, может быть отброшено. В самом деле, если мы подставим ΔQ и разобьем сумму на две частичные суммы соответственно двум слагаемым этого выражения, то вторая сумма будет иметь своим пределом нуль; это можно доказать рассуждением, подобным тому, которое было применено в §I. Итак, придется иметь дело с вычислением предела суммы:

$$\lim\left[\Sigma F(r,\varphi)r.\Delta r.\Delta\varphi\right];$$

этот предел и будет двойным интегралом в рассматриваемом случае; согласно общему правилу, его обозначают так:

$$\iint_Q F(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi \qquad (*)$$

Такой вид имеет двойной интеграл при пользовании полярными координатами; если в частности положить $F(r,\varphi)=1$, то подобно предыдущему получим:

$$Q=\iint_Q r\,dr\,d\varphi; \qquad (2)$$

на этом основании произведение

$$r\,dr\,d\varphi$$

называется „элементом площади в полярных координатах". После изложенного, читателю должно быть понятно, почему здесь в под'интегральное выражение входит не просто $dr.d\varphi$ (подобно тому, как раньше входило $dx.dy$), а $r.dr.d\varphi$. Что же касается до вычисления двойного интеграла (*), то он вычисляется в общем тем же порядком, что и выше: сначала находим крайние значения φ_0 и φ_1, между которыми лежат полярные углы всех точек данной области (на черт. 10 эти углы даются касательными, проведенными из полюса к контуру области: $\angle XOA=\varphi_0$ и $\angle XOB=\varphi_1$); затем, задав промежуточное значение φ, смотрим как в зависимости от этого значения меняется r внутри области (при $\varphi=\angle XOK$ радиус-вектор меняется от OK до OL); границы для r находятся из уравнения контура и, вообще, будут таковы: $r_1=\psi_1(\varphi)$ и $r_2=\psi_2(\varphi)$. Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к двукратному интегрированию:

$$\iint_Q F(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}d\varphi\int_{\psi_1(\varphi)}^{\psi_2(\varphi)}F(r,\varphi)r\,dr. \qquad (3)$$

Сейчас мы имели в виду черт. 10; если же полюс будет расположен внутри данной области, то, как легко видеть, получим:

$$\iint_Q F(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\psi(\varphi)}F(r,\varphi)r\,dr,$$

где $r=\psi(\varphi)$ есть уравнение контура.

Поясним изложенное примером.

Дан шар радиуса a (на черт. 11-а изображена $\frac{1}{8}$ часть ABC этого шара, лежащая в 1-м координатном угле); на радиусе OA, как на диаметре, построена окружность в плоскости YOX, а на этой окружности построен прямой цилиндр; требуется вычислить об'ем, который вырезает из шара этот цилиндр.

Начнем решать задачу в прямоугольных координатах; уравнение шара будет:

$$x^2+y^2+z^2=a^2;$$

уравнение цилиндра:

$$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4},$$

или

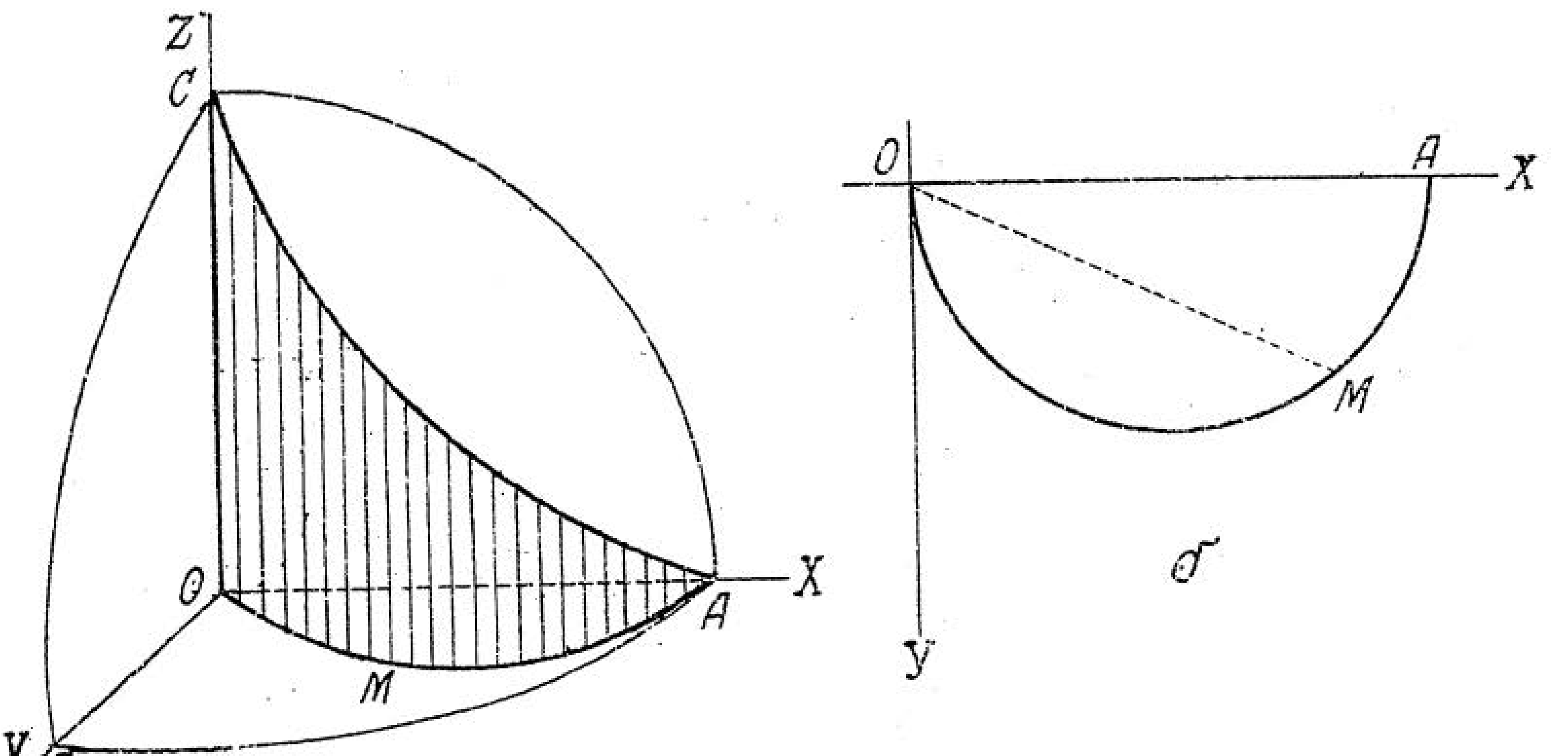
$$x^2+y^2=ax.$$

Четвертая часть искомого об'ема V, лежащая в I-м координатном угле, сверху ограничена шаровой поверхностью и проектируется на плоскость YOX по полукругу OAM, так что

$$V=4\iint_{OAM}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.\,dxdy;$$

определяя по известному правилу границы обоих интегрирований, найдем:

$$V=4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,.\,dy.$$



Черт. 11.

Но вычисление об'ема сложится гораздо проще, если мы перейдем к полярным координатам на плоскости YOX (и, следовательно, к цилиндрическим координатам в пространстве). Тогда уравнение шара будет:

$$r^2+z^2=a^2,$$

и уравнение цилиндра:

$$r=a\cos\varphi.$$

Наш двойной интеграл примет вид:

$$V=4\iint\limits_{OAM}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi;$$

для определения границ интегрирования обратимся к черт. II-6, где отдельно изображена область интегрирования - полукруг OAM. Легко усмотреть, что для точек этого полукруга координата φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а при промежуточном значении $\varphi(\varphi=\angle XOM)$, радиус-вектор меняется от 0 до OM, т.е. до того значения, которое он имеет на полуокружности; а это значение есть:

$$r=a\cos\varphi.$$

Таким образом, имеем.

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr;$$

остается выполнить указанные действия:

$$\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr=-\frac{1}{3}\Big[(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{a\cos\varphi}=-\frac{1}{3}(a^3\sin^3\varphi-a^3);$$

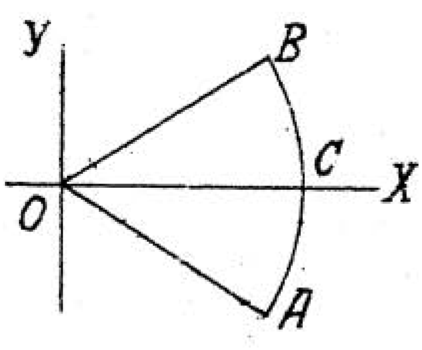
$$V=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЯ.

1) Определить границы интегрирования в интеграле:

$$\iint F(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi,$$

распространенном по площади круга, центр которого находится в полюсе, а радиус равен R.



2) Вычислить интеграл $\iint x\,dx\,dy$, распространенный по площади кругового сектора AOB ($\angle BOC=\angle AOC=\alpha$; $OC=a$), перейдя к полярным координатам.

Ответ: $\frac{2}{3}a^3\sin\alpha$.

3) Задачник кафедры №№187,189 (указание: при решении задачи 189 можно воспользоваться результатом задачи 187).

2. Приобретенные сведения из теории двойных интегралов мы используем для вывода формул, играющих важную роль в теории вероятностей и в теории стрельбы.

Начнем с вычисления интеграла:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Трудность здесь заключается в том, что соответствующий неопределенный интеграл в конечном виде не берется. Предварительного исследования сходимости интеграла проводить не будем; а, допуская эту сходимость, обозначим через J число, выражающее величину нашего интеграла:

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Умножим обе части последнего равенства на:

$$e^{-y^2}dy$$

и проинтегрируем их от 0 до ∞ по y:

$$J\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty e^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Так как величина интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то:

$$\int_0^\infty e^{-y^2}dy=J;$$

в правой же части множителя e^{-y^2} можно ввести под знак интеграла:

$$\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx,$$

а это дает нам двойной интеграл от функции $e^{-(x^2+y^2)}$, распространенный на весь I-й координатный угол YOX. Таким образом, получаем:

$$J^2=\iint_{YOX} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам; тогда последняя формула перепишется так:

$$\mathcal{J}^2=\iint_{YOX} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi.$$

Для того, чтобы описать весь первый квадрант, надо менять:

r от 0 до ∞

φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$,

так что:

$$\mathcal{J}^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr.$$

Выполняем первое интегрирование:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr=-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot d(-r^2)=-\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2};$$

далее:

$$\mathcal{J}^2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\mathcal{J}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Итак, задача решена:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (3)$$

Вспоминая известное правило для интеграла от четной функции („Математический анализ", вып.2, стр.141, формула 9), отсюда выводим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx=\sqrt{\pi}. \qquad (4)$$

Теперь обобщим полученный результат, сделав подстановку:

$x=ht$, где $h>0$;

формула (3) дает:

$$\int_0^\infty e^{-h^2t^2} h\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

откуда, возвращаясь к прежней переменной интегрирования, находим:

$$\int_0^\infty e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}. \qquad (5)$$

Далее найдем интеграл:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-h^2x^2} dx,$$

применяя интегрирование по частям и полагая:

$$u = x; \qquad dv = xe^{-h^2x^2} dx;$$

$$v = \int xe^{-h^2x^2} dx = -\frac{1}{2h^2} e^{-h^2x^2};$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-h^2x^2} dx = -\frac{1}{2h^2}\left[xe^{-h^2x^2}\right]_0^\infty + \frac{1}{2h^2}\int_0^\infty e^{-h^2x^2} dx;$$

выражение в квадратных скобках равно 0; на верхней границе вычисляем его по правилу Лопиталя:

$$\left[\frac{x}{e^{h^2x^2}}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{1}{2h^2 x e^{h^2x^2}}\right]_{x=\infty} = 0.$$

Следовательно:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{2h^2}\int_0^\infty e^{-h^2x^2} dx,$$

и формула (5) окончательно дает:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4h^3} \qquad (6)$$

Наконец, вычислим двойной интеграл:

$$\frac{\rho^2}{\pi ab}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} dx\,dy,$$

дающий величину средней квадратической ошибки, отвечающей эллиптической системе ошибок; его величину обозначают через E_2^2.

Разбиваем его на сумму двух слагаемых

$$E_2^2=\frac{\rho^2}{\pi a b}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy\right];$$

и вычисляем I-й интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx=e^{-\rho^2\frac{y^2}{b^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\rho^2\frac{x^2}{a^2}}dx.$$

Последний интеграл получим из формулы (6), положив в ней

$$h=\frac{\rho}{a}$$

и удвоив результат, так что:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx=e^{-\rho^2\frac{y^2}{b^2}}\,\frac{\sqrt{\pi}\cdot a^3}{2\rho^3};$$

выполняем второе интегрирование:

$$\text{двойной интеграл}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot a^3}{2\rho^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2\frac{y^2}{b^2}}dy.$$

или на основании (5):

$$\text{двойной интеграл}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot a^3}{2\rho^3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot b}{\rho}=\frac{\pi a^3 b}{2\rho^4}.$$

Величину второго двойного интеграла получим, переставив здесь a и b:

$$\frac{\pi a b^3}{2\rho^4}.$$

Таким образом:

$$E_2^2=\frac{\rho^2}{\pi a b}\cdot\frac{\pi(a^3 b+a b^3)}{2\rho^4},$$

или

$$E_2^2=\frac{a^2+b^2}{2\rho^2}. \qquad (7)$$

В качестве примеров для упражнения, могут послужить следующие задачи:

Задачник кафедры №№147, 148, 150, 151, 152, 153, 155.

3. Перейдя в двойном интеграле от прямоугольных координат к полярным, мы в сущности решили частный случай задачи о замене переменных в двойном интеграле. Поставим ее в общем виде. Пусть дан интеграл:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

и требуется от переменных независимых x и y перейти к новым переменным независимым u и v, связанным с прежними уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u,v) \\ y &= \psi(u,v) \end{aligned}\right\}$$

Подʼинтегральная функция, очевидно, преобразуется тем путем, что x и y заменяются их выражениями через u и v; весь вопрос - в том, как преобразуется элемент площади $dx\,dy$ при переходе к новым переменным. В более подробных курсах (как например: в курсах проф. Поссе, Куранта, Коялович, Смирнова и др.) доказывается, что при этом преобразовании элемент площади получает вид:

$$|\Delta|\,du\,dv, \tag{8}$$

где Δ - так называемый „Якобиан"- равен:

$$\Delta = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

Таким образом получается равенство:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f\left\{\varphi(u,v);\ \psi(u,v)\right\}|\Delta|\,du\,dv. \tag{9}$$

Если применить эту общую формулу к переходу от прямоугольных координат к полярным, то окажется:

$$\Delta = r.$$

Сделаем один пример, заимствованный из теории ошибок. Вероятность того, что ошибка не выйдет из пределов некоторого эллипса, дается интегралом:

$$J=\iint \frac{\rho^2}{S} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} dx\,dy,$$

где ρ - постоянная; интеграл берется по площади эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2,$$

а S есть площадь единичного эллипса, получаемого при $z=1$ (т.е. $S=\pi ab$); z есть некоторый параметр.

Для вычисления J, делаем замену переменных:

$$\begin{cases} x=at\cos\varphi \\ y=bt\sin\varphi \end{cases} \qquad (t>0). \qquad (*)$$

Вычисляем якобиан:

$$\Delta = a\cos\varphi \cdot bt\cos\varphi + at\sin\varphi \cdot b\sin\varphi$$

$$\Delta = abt;$$

следовательно:

$$J=\rho^2\frac{ab}{S}\iint e^{-\rho^2t^2}t\,dt\,d\varphi.$$

Подставляя формулы (*) в уравнение эллипса, найдем:

$$t^2=z^2,$$

так что для обвода эллипса имеем:

$$t=z,$$

а для всех точек эллипса

$$t\leq z.$$

С другой стороны ясно, что для точек эллипса угол φ делает полный оборот. Таким образом получаем:

$$J=\rho^2\frac{ab}{S}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^z e^{-\rho^2t^2}t\,dt.$$

Выполняем интегрирование:

$$\int_0^z e^{-\rho^2t^2}t\,dt=-\frac{1}{2\rho^2}\left[e^{-\rho^2t^2}\right]_0^z=\frac{1}{2\rho^2}\cdot\left(1-e^{-\rho^2z^2}\right);$$

$$J=\rho^2\frac{ab}{\pi ab}\cdot\frac{1}{2\rho^2}\left(1-e^{-\rho^2z^2}\right)\cdot 2\pi$$

$$J=1-e^{-\rho^2z^2} \qquad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотренные здесь интегралы взяты из курсов теории вероятностей и теории ошибок т.т. Гельвиха и Сакриера.

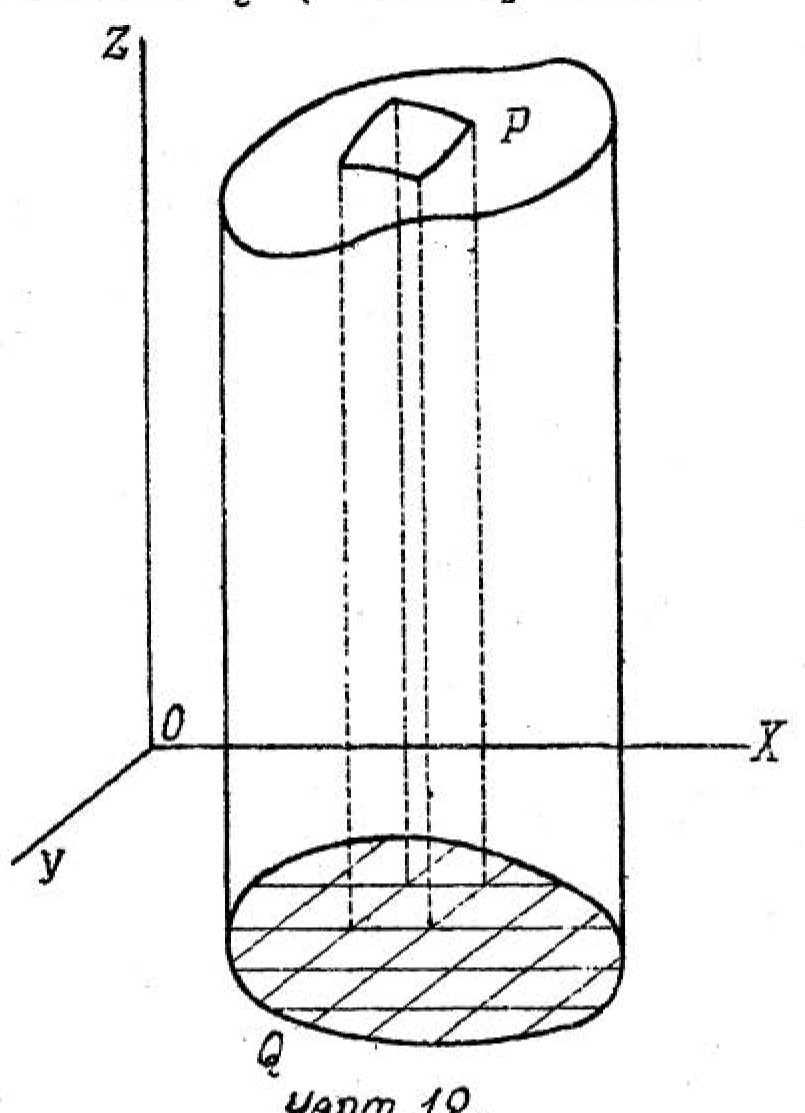
§ 4. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ.

В I-й части „Математического анализа" (вып.2, §33) вычислялись площади поверхностей вращения; в настоящем же параграфе разберем вопрос о площади кривой поверхности вообще. При этом мы поставим перед собой вполне определенную задачу; другие же случаи надо сводить к этому.

Пусть поверхность задана уравнением:

$$z = f(x, y),$$

где $f(x,y)$ - непрерывна и однозначна для рассматриваемых значений x и y; дело идет о вычисления площади P той части поверхности, проекция которой на плоскость YOX есть область Q (см.черт.I2).



Черт. 12.

Прежде всего определим, что мы понимаем под площадью P. С этой целью, разделим область Q на части с помощью прямых, параллельных осям; пусть площадь одной из правильных частей будет:

$$\Delta x . \Delta y .$$

Построим на этом прямоугольнике прямую призматическую поверхность и продолжим ее до пересечения с данной поверхностью, так что она вырежет из последней некоторый криволинейный четырехугольник. Выберем в этом четырехугольнике какую-нибудь точку и проведем в ней касательную плоскость к данной поверхности; затем продолжим нашу призматическую поверхность до пересечения с касательной плоскостью, из которой она вырежет некоторый параллелограмм; площадь последнего обозначим через ω.

Проделаем все изложенное для каждого правильного элемента области Q, и сложим полученные площади ω; наконец, совершим обычный переход к пределу. Так вот площадь P мы определяем, как этот предел:

$$P=\lim(\Sigma\omega).$$

Теперь наша задача - вычислить этот предел, причем попутно будет доказано его существование (смысл указанного определения можно истолковать так, что элементы поверхности заменяются элементами соответствующих касательных плоскостей). Прежде всего надо вычислить ω ; если обратить внимание на то, что прямоугольник с площадью $\Delta x\Delta y$ является проекцией ω на плоскость YOX , и если обозначить через φ (острый) угол между плоскостью YOX и касательной плоскостью, в которой лежит ω , то можно написать:

$$\Delta x.\Delta y=\omega.\cos\varphi.$$

Но угол между плоскостями равен соответственному углу между перпендикулярами к ним, так что φ можно рассматривать, как угол между осью OZ и нормалью к поверхности; а из курса „Математического анализа" (вып.4, §48) известно, что этот угол определяется формулой:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

где

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

и эти частные производные надо взять из уравнения поверхности. Подставляя, имеем:

$$\Delta x.\Delta y=\frac{\omega}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

откуда:

$$\omega=\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\Delta x\Delta y,$$

$$P=\lim(\Sigma\Sigma\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\Delta x\Delta y)$$

введен знак двойной суммы, так как Δx и Δy меняются независимо друг от друга).

Под знаком суммы стоит $\sqrt{1+p^2+q^2}$, который будет известной нам функцией от x и y; нетрудно заключить, что отыскание предела такой двойной суммы приведет нас к двойному интегралу, и окончательно получим:

$$P=\iint_{Q}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\,dy. \qquad (I)$$

Таким образом, вычисление площади кривой поверхности снова приводит к двойному интегралу; если мы предпочтем иметь дело с полярными координатами в плоскости YOX, то в под'интегральной функции придется сделать подстановку:

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\varphi \\ y&=r\sin\varphi \end{aligned}\right\},$$

а элемент площади $dx\,dy$ заменить на $r\,dr\,d\varphi$.

Под'интегральное выражение в формуле (I):

$$d\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\,dy$$

называется „элементом поверхности в прямоугольных координатах".

Переходим к примерам:

I) Вычислить поверхность шара радиуса a с помощью формулы (I).

Будем иметь в виду черт.II-а, где имеется одна восьмая шара ABC (цилиндр оставим без внимания); эта часть шара проектируется по $1/4$ круга AOB. Уравнение шара будет:

$$x^2+y^2+z^2=a^2;$$

находим p и q:

$$2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=p=-\frac{x}{z};$$

точно также найдем, что

$$q=-\frac{y}{z};$$

следовательно:

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

(квадратные корни везде надо брать со знаком плюс). Таким образом, получаем:

$$P=8a\iint_{AOB}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Уравнение окружности AB будет:

$$x^2+y^2=a^2,$$

так что границы интегрирования определяются следующим образом:

$$P=8a\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

При первом интегрировании x считается постоянным; обозначая:

$$a^2-x^2=k^2,$$

при первом интегрировании получим:

$$\int_0^k\frac{dy}{\sqrt{k^2-y^2}}=\left[\arcsin\frac{y}{k}\right]_0^k=\frac{\pi}{2};$$

тогда:

$$P=4\pi a\int_0^a dx=4\pi a^2.$$

2) Возьмем шар и цилиндр из задачи п.I предыдущего параграфа и вычислим площадь поверхности, которую цилиндр вырезает из шара (черт.II-а). Легко видеть, что

$$P=4a\iint_{OAM}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

переходим, как и в предыдущем параграфе, к полярным координатам:

$$P=4a\iint_{OAM}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}};$$

границы интегрирования будут теми же самыми:

$$P=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Остается выполнить эти интегрирования:

$$\int_0^{a\cos\varphi}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=-\left[\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\varphi}=a(1-si)\quad,$$

$$P=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЯ.

1) Вычислить площадь поверхности, которую цилиндр $x^2+y^2=a^2$ вырезает из цилиндра $x^2+z^2=a^2$.

Ответ: $8a^2$.

2) Вычислить площадь той части поверхности $z^2=2xy$, которая вырезается из нее плоскостями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{ab}.(a+b)$.

3) Вычислить поверхность шара с помощью полярных координат.

§ 5. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

1. Пусть нам дана функция $f(x,y,z)$ от трех переменных независимых, непрерывная и однозначная для значений этих переменных, удовлетворяющих известным условиям. Здесь также удобно будет пользоваться геометрическим языком; если под x, y, z понимать прямоугольные координаты точки, то задание значений этих трех переменных вполне определяет некоторую точку в пространстве, и обратно; поэтому будем говорить о „значении функции в такой то точке" и вместо того, чтобы выписывать неравенства, которым подчинены независимые переменные, будем говорить о том, что „функция задана в такой то части пространства". Так например, если x, y, z подчинены условию:

$$x^2+y^2+z^2\leq a^2,$$

то можно сказать, что функция $f(x,y,z)$ дана внутри и на поверхности шара, имеющего центр в начале координат и радиус равный a, и т.д. Итак, пусть нам задана функция $f(x,y,z)$ в некоторой ограниченой части пространства V (или „внутри об'ема V"). Разделим эту часть пространства произвольным образом на n частей, которые обозначим через:

$$v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n;$$

возьмем одну из этих частей v_i, выберем в ней произвольную точку (ξ_i, η_i, ζ_i), вычислим значение данной функции в этой точке и умножим его на об'ем взятой части:

$$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i;$$

проделаем это для всех частей и составим сумму полученных произведений:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i;$$

наконец, перейдем к пределу, увеличивая безгранично число частей и притом так, чтобы каждая из них становилась бесконечно малой по всем своим измерениям. Предел указанной суммы и называется „тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$, взятым по об'ему V" и обозначается следующим символом:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$

в этом обозначении уже имеется в виду обычное деление об'ема V на прямоугольные параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям.

Таким образом, получаем определение:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim\left[\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i\right]_{n\to\infty} \quad (\mathrm{I})$$

Сейчас мы дадим одно из конкретных истолкований этого понятия и попутно докажем существование предела.

Представим себе, что об'ем V заполнен какой-нибудь материей; если материя однородна, то ее плотность μ есть величина постоянная, и масса m нашего тела вычисляется весьма просто:

$$m = V\mu.$$

Если же тело неоднородно, то плотность μ от точки к точке меняется, она есть „функция точки":

$$\mu = f(x, y, z),$$

и для определения массы тела избирают следующий обходный путь. Делим об'ем V на n достаточно малых частей v_i и приближенно принимаем, что в каждой такой частице плотность постоянна, а именно - она имеет во всей частице то же самое значение, как в некоторой ее точке (ξ_i, η_i, ζ_i); следовательно, по предыдущему, масса этой частицы будет равна:

$$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i,$$

а масса всего тела представится суммой:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i.$$

Это выражение для искомой массы имеет, конечно, приближенный характер; но ошибка будет тем меньше, чем меньше частицы, на которые разбивается данное тело, и чем, следовательно, больше их число; переходя же к пределу, мы получаем то, что и принимается за точное определение массы:

$$m = \lim \left[\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v_i\right]_{n\to\infty}$$

или, основываясь на (I):

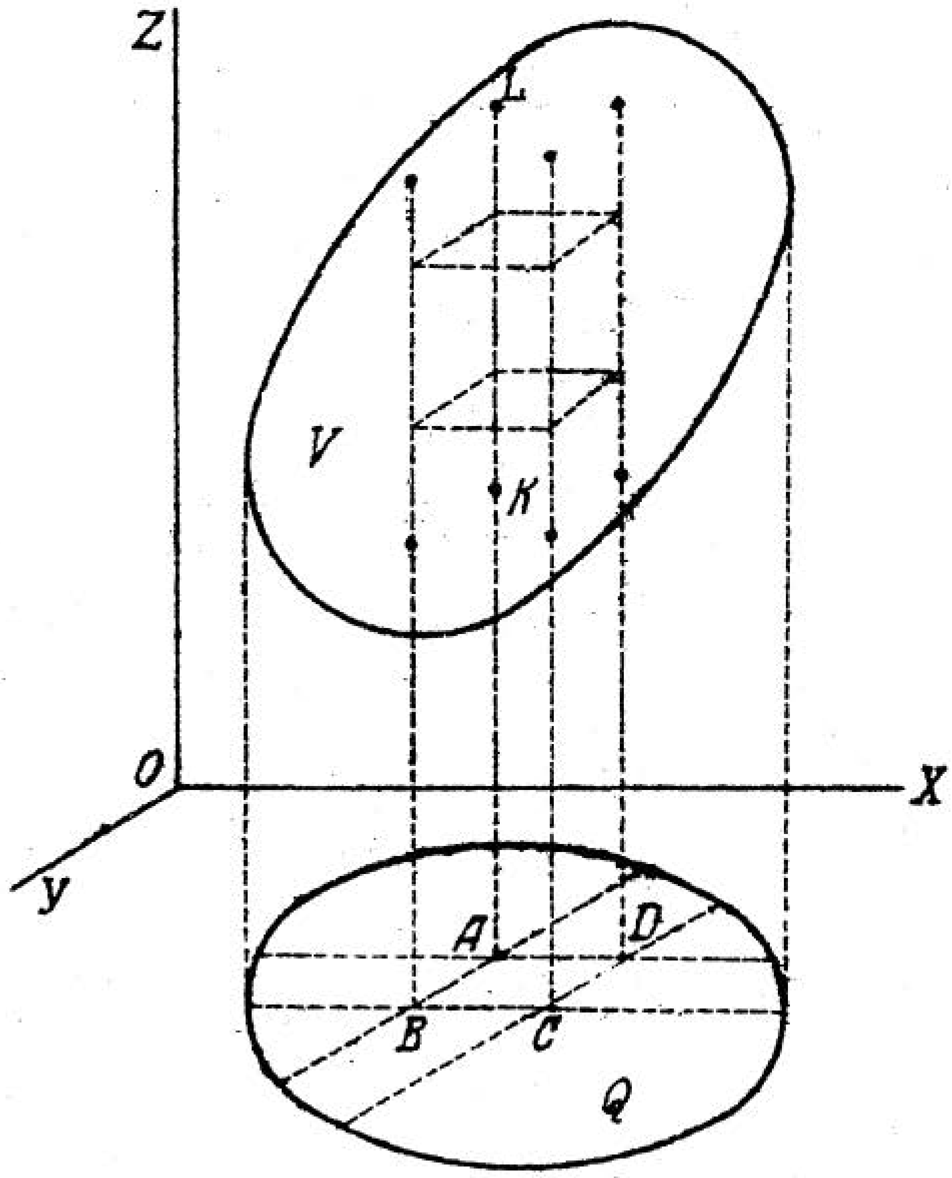
$$m = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V \mu \cdot dx\, dy\, dz. \qquad (2)$$

Переходим к вопросу о вычислении тройного интеграла.

Пусть требуется найти интеграл от $f(x, y, z)$, распространенный по об'ему V; допустим для простоты, что ограничивающая об'ем поверхность такова, что прямые, параллельные координатным осям, пересекают ее не более, чем в двух точках; в противном случае пришлось бы данный об'ем разложить на части, удовлетворяющие этому требованию. Пусть далее, этот об'ем проектируется на плоскость YOX по области Q (черт. 13), причем проектирующий цилиндр, касаясь пограничной поверхности, делит ее на две части:

нижнюю с уравнением $z_1 = \varphi_1(x, y)$

верхнюю с уравнением $z_2 = \varphi_2(x, y)$.



Черт. 13.

Когда имеют дело с прямоугольными координатами, то обычно делят об'ем V на прямоугольные параллелепипеды с помощью проведения плоскостей, параллельных координатным плоскостям; один из таких параллелепипедов изображен на черт. 13. Его измерениями служат расстояния между двумя соседними плоскостями, параллельными одной и той же координатной плоскости; эти измерения будут:

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z;$$

так что его об'ем равен:

$$v = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z.$$

Наряду с такими правильными элементами, целиком помещающимися в данном об'еме, будут и неправильные, представляющие собою срезанные параллелепипеды; неправильными элементами можно пренебречь на том же основании, что и в двойном интеграле. Заметим еще, что плоскости, перпендикулярные к плоскости YOX, дадут нам попутно разложение области Q на прямоугольники, как это делалось при рассмотрении двойных интегралов. При указанном делении об'ема V, формула (I) принимает такой вид:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx dy dz = \lim \left[\sum\sum\sum f(\xi, \eta, \zeta) \Delta x \Delta y \Delta z \right] \quad (3);$$

здесь поставлен знак тройной суммы, так как Δx, Δy и Δz меняются независимо друг от друга.

Вычисление этого предела происходит в общем тем же путем, что и вычисление соответствующего предела для двойного интеграла; а так как там этот вопрос был изложен достаточно подробно, то здесь мы ограничимся краткими указаниями.

Вычислим сначала частичную сумму, соответствующую параллелепипедам какой-нибудь одной колонки, например той, которая изображена на черт. 13 и имеет своим основанием прямоугольник $ABCD$. Пользуясь нашим правом произвольно выбирать точки в частичных параллелепипедах, возьмем эти точки для всех параллелепипедов рассматриваемой колонки на прямой AK, так что для нашей частичной суммы ξ и η будут иметь постоянные значения, а именно - они будут равны координатам точки A:

$$\xi = x \quad \text{и} \quad \eta = y.$$

Постоянными будут также Δx и Δy, ибо:

$$\Delta x = AD = BC$$

$$\Delta y = AB = DC.$$

Таким образом, рассматриваемая частичная сумма будет иметь такой вид:

$$\Delta x . \Delta y . \Sigma f(x, y, \zeta) \Delta z \quad ;$$

здесь координата ζ принимает значения, лежащие в границах:

от $\quad AK = z_1 = \varphi_1(x, y) \quad$ до $\quad AL = z_2 = \varphi_2(x, y)$

(точки K и L суть точки пересечения прямой AK с поверхностью, ограничивающей данный об'ем).

Распоряжаясь выбором координаты ζ, здесь можно будет применить формулу 2 (§2) и получить частичную сумму в виде интеграла:

$$\Delta x \Delta y \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

После выполнения действий, указанный интеграл будет некоторой функцией $\Phi(x,y)$ от x и y, а потому дальнейшее сведется к вычислению:

$$\lim\left[\Sigma\Sigma\Phi(x,y)\Delta x.\Delta y\right],$$

причем x и y принимают значения, соответствующие точкам области Q. Но этот предел есть не что иное, как двойной интеграл:

$$\iint_Q \Phi(x,y)dx\,dy;$$

вычисление которого нам уже известно. Область Q нам дана, как проекция об'ема V на плоскость YOX; по правилам, указанным в §3, зная обвод этой области, определяем границы:

для x: x_0 и X

для y: $y_1=\psi_1(x)$ и $y_2=\psi_2(x)$;

так что:

$$\iint_Q \Phi(x,y)\,dx\,dy=\int_{x_0}^{X}dx\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\Phi(x,y)dy.$$

Наконец, подставляя выражение для $\Phi(x,y)$, окончательно имеем:

$$\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_{x_0}^{X}dx\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}dy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)dz; \qquad (4)$$

при первом интегрировании x и y считаются постоянными, так что имеем дело с обыкновенным интегралом.

В частности, если область интегрирования есть параллелепипед, ограниченный плоскостями:

$x=x_0$ и $x=X$; $y=y_0$ и $y=Y$; $z=z_0$ и $z=Z$,

то тройной интеграл принимает вид:

$$\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_{x_0}^{X}dx\int_{y_0}^{Y}dy\int_{z_0}^{Z}f(x,y,z)dz. \qquad (5)$$

Здесь можно менять порядок интегрирований, сохраняя границы их неизменными; в общем же случае изменение порядка интегрирований влечет за собой существенные изменения в их границах.

Прежде чем перейти к примерам, рассмотрим один частный случай формулы (3), а именно тот, когда $f(x,y,z)=1$; легко видеть, что тогда получим:

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \lim \Sigma\Sigma\Sigma \Delta x \Delta y \Delta z = V,$$

так что:

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz. \qquad (6)$$

Это самое общее выражение для об'ема; но первое интегрирование $\int dz$ всегда выполняется непосредственно, и мы снова приходим к двойному интегралу. На основании формулы (6), под'интегральное выражение называется „элементом об'ема в прямоугольных координатах" и обозначается символом dV:

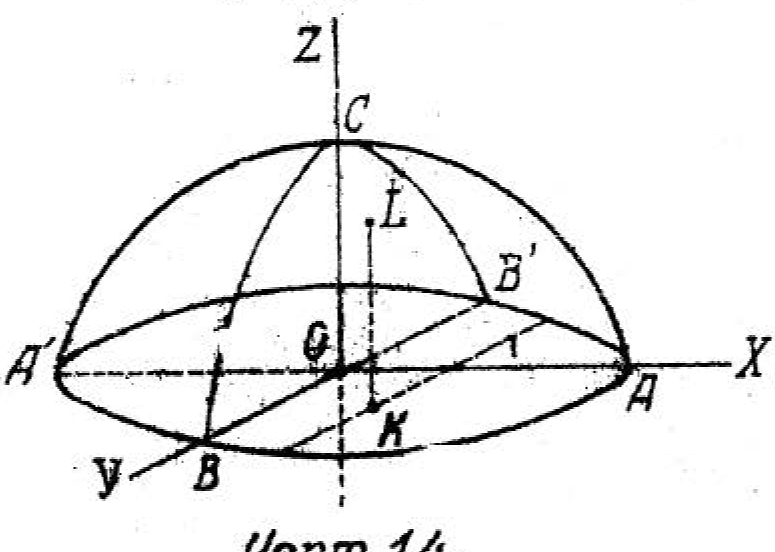
$$dV = dx\,dy\,dz. \qquad (7)$$

Приступая к примерам на вычисление тройных интегралов, заметим, что на практике границы интегрирования в формуле (4) определяются следующим образом: найдя проекцию Q данного об'ема V на плоскость YOX, задаем внутри ее какую-нибудь точку K („общего положения"), что соответствует заданию x и y; затем, проведя через K прямую, параллельную оси OZ, смотрим как, при данных x и y, меняется z внутри данной части пространства; это даст нам границы для интегрирования по z. Что же касается двух других интегрирований, то их границы определяются из рассмотрения области Q, как это делалось при вычислении двойных интегралов (§2).

Переходим к примерам:

I) Пусть требуется найти $J=\iiint z\,dx\,dy\,dz$, распространенный по верхней половине эллипсоида.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \text{ (см. черт. 14)}$$



Черт. 14.

Легко видеть, что данный об'ем, по которому надо интегрировать, проектируется на плоскость YOX по эллипсу $ABA'B'$, уравнение которого будет:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Берем внутри этого эллипса точку K („общего положения") и проводим отрезок KL, параллельный оси OZ и лежащий внутри данного об'ема. Тогда мы видим, что при данных x и y, координата z меняется от 0 до KL; а это KL есть продолжение той точки эллипсоида, которая соответствует данным значениям x и y; эту границу найдем из уравнения эллипсоида:

$$KL = +c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Что касается границ для x и y, то их найдем из уравнения эллипса $ABA'B'$; при данном x, ордината меняется:

$$\text{от } -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \qquad \text{до} \quad +b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

а x для данной области меняется от $-a$ до $+a$. Таким образом, получаем:

$$J=\int_{-a}^{+a}dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,dz;$$

первое интегрирование дает:

$$\frac{1}{2}c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right);$$

переходим ко второму:

$$\frac{1}{2}c^2\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=c^2\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=c^2\left[b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}-\frac{b}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}\right]=\frac{2bc^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2};$$

наконец, выполняем последнее интегрирование:

$$J=\frac{2bc^2}{3}\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}dx=\frac{4bc^2}{3}\int_0^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}dx=\frac{1}{4}\pi abc^2$$

(для вычисления последнего интеграла полагаем $x=a\cos\varphi$).

2. Хорошим примером на вычисление тройных интегралов является определение моментов инерции и координат центра инер

Богомолов С.А.

ции какого-нибудь тела.

Если нам дана система n материальных точек с массами:

$$m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots m_n,$$

а если координаты точки, имеющей массу m_i, обозначим через (x_i, y_i, z_i), то координаты центра инерции (центра тяжести) системы определяются следующим образом:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{m}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i}{m}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i}{m},$$

где m есть полная масса системы; точно также моменты инерции системы относительно осей OX, OY, OZ будут соответственно:

$$J_x = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i^2 + z_i^2) m_i; \quad J_y = \sum_{i=1}^{i=n} (z_i^2 + x_i^2) m_i; \quad J_z = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i^2 + y_i^2) m_i.$$

Если же мы имеем дело не с системой точек, а со сплошным телом, то предыдущие суммы заменяются тройными интегралами, распространенными по об'ему этого тела; тогда массу m придется вычислять по формуле (2), а массы m_i надо заменить на массу элемента об'ема, т.е. на выражение:

$$\mu . dxdydz.$$

Таким образом, приходим к формулам:

$$m.x_c = \iiint_V x\mu\, dxdydz; \quad m.y_c = \iiint_V y\mu\, dxdydz; \quad m.z_c = \iiint_V z\mu\, dxdydz. \tag{8}$$

$$J_x = \iiint_V (y^2+z^2)\mu\, dxdydz; \quad J_y = \iiint_V (z^2+x^2)\mu\, dxdydz; \quad J_z = \iiint_V (x^2+y^2)\mu\, dxdydz. \tag{9}$$

В случае однородного тела, можно μ вынести за знаки интегралов, и кроме того подставить $m = \mu . V$.

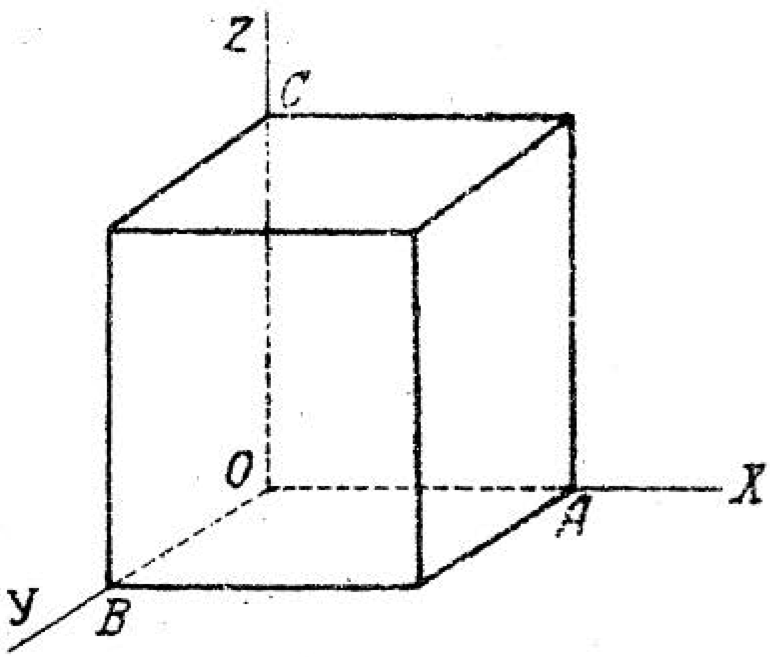
Сделаем пример:

2) Найти момент инерции относительно оси OZ однородного прямоугольного параллелепипеда, расположенного как указано на черт.15 ($OA = a$, $OB = b$, $OC = c$).

Так как данное тело однородно, то μ есть величина постоянная, а потому:

$$J_z=\mu\iiint_V (x^2+y^2)dx\,dy\,dz=\mu\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c (x^2+y^2)dz=$$

$$=\mu c\int_0^a dx\int_0^b (x^2+y^2)dy=\mu bc\int_0^a (x^2+\frac{1}{3}b^2)dx=\frac{1}{3}\mu abc(a^2+b^2);$$



Черт. 15.

введем массу тела:

$$m=\mu V=\mu.abc;$$

тогда:

$$J_z=\frac{1}{3}m(a^2+b^2).$$

3. До сих пор при вычислении тройных интегралов, мы пользовались прямоугольными координатами; но иногда бывает удобнее применить цилиндрические или полярные координаты, для этих систем элемент об'ема будет иметь уже иной вид.

Для цилиндрической системы вопрос решается довольно просто, так как координата z остается неизменной, а в плоскости YOX вместо x и y вводятся полярные координаты r и φ. В §3 мы видели, что элементом площади в полярных координатах является выражение $r.dr.d\varphi$; таково будет основание колонки, которая с помощью плоскостей, перпендикулярных к оси OZ, разложится на элементарные об'емы (сопоставь это с черт.13); отсюда легко понять, что элемент об'ема в цилиндрических координатах выражается следующим образом:

$$dV=r.dr.d\varphi.dz.$$

Отсюда дальше вытекает, что при переходе от прямоугольных координат к цилиндрическим, тройной интеграл преобразуется по формуле:

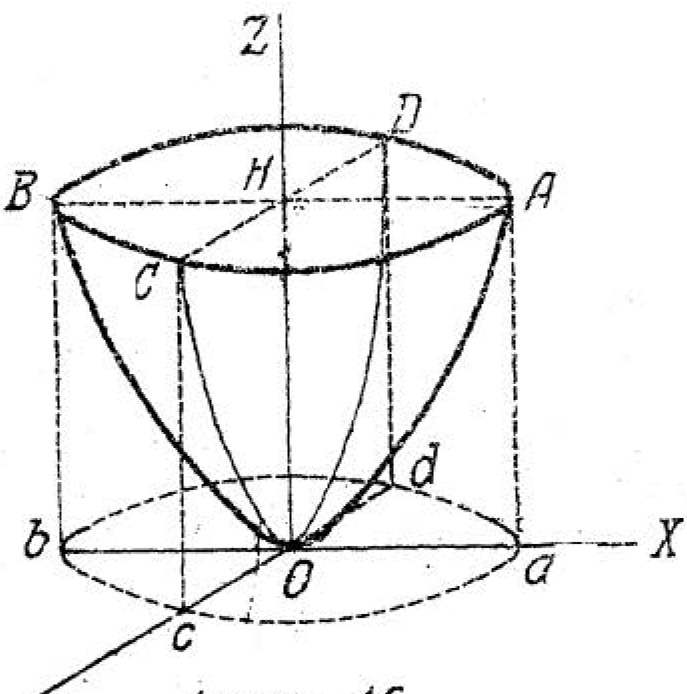
$$\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\iiint_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r.dr.d\varphi.dz. \quad (10)$$

Сделаем пример.

3) Найти координаты центра инерции однородного тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2+y^2=az \quad \text{и} \quad z=a \quad (a>0).$$

Данное тело есть часть параболоида вращения (с осью OZ), отсекаемая плоскостью $z=a$ (см.черт.16); из симметрии фигуры явствует, что центр инерции находится на оси OZ , так что:



черт. 16.

$$x_c=y_c=0;$$

остается найти z_c по формуле:

$$mz_c=\iiint_V z\mu\, dx\,dy\,dz;$$

так как μ - постоянное, то его можно вынести за знак интеграла и, по сокращении на μ , имеем:

$$Vz_c=\iiint_V z\, dx\,dy\,dz.$$

Заметим, что об'ем, по которому надо интегрировать, проектируется на плоскость YOX по кругу $acbd$, равному кругу $ACBD$, который получается в пересечении данных поверхностей; уравнение этого круга, очевидно, будет:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Рекомендуем читателю наметить границы интегрирования в прямоугольных координатах, а мы перейдем к цилиндрическим координатам, в которых вычисление здесь складывается проще. Согласно сказанному выше, имеем:

$$Vz_c=\iiint_V z\, r\,dr\,d\varphi\,dz;$$

а уравнение параболоида будет:

$$az=r^2.$$

При данных r и φ, z меняется (внутри данного тела) от того значения, которое он имеет на поверхности параболоида, до значения на секущей плоскости, т.е. границы для z будут:

$$\frac{1}{a}r^2 \quad \text{и} \quad a;$$

что касается границ для r и φ, то они находятся без труда, так как область Q здесь сводится к кругу $acbd$.

Таким образом, получаем:

$$Vz_c=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{\frac{1}{a}r^2}^a z\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{a^4-r^4}{2a^2}r\,dr=\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}a^4d\varphi=\frac{1}{3}\pi a^4;$$

остается еще найти V, который получим, проинтегрировав в тех же границах элемент об'ема:

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{\frac{1}{a}r^2}^a dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{a^2-r^2}{a}r\,dr=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{4}d\varphi=\frac{1}{2}\pi a^3;$$

так что:

$$z_c=\frac{1}{3}\pi a^4:\frac{1}{2}\pi a^3=\frac{2}{3}a.$$

4. Перейдем к выяснению вопроса об элементе об'ема в полярных координатах (полярные координаты в пространстве называются также „сферическими"). С этой целью заметим, что при пользовании прямоугольными координатами мы делили данный об'ем V на части с помощью так называемых „координатных поверхностей"; это имя носят поверхности, уравнения которых получаются, если ту или другую координату приравнять постоянному; следовательно, для прямоугольной системы координат координатные поверхности задаются уравнениями:

$$x=const; \quad y=const, \quad z=const,$$

а это и будут плоскости, параллельные плоскостям координат. Таким же путем в сущности мы шли и в вопросе о цилиндрических координатах.

Возьмем теперь полярную систему координат с координатами r, θ, φ и будем делить данный об'ем V на части опять таки с помощью координатных поверхностей; здесь имеем 3 рода поверхностей:

а) уравнение $r=const$ определяет совокупность концентрических шаровых поверхностей с общим центром в полюсе;

б) уравнение $\theta = const$ определяет совокупность обыкновенных конических поверхностей с общей вершиной в полюсе и с общей осью OZ.

в) уравнение $\varphi = const$ определяет совокупность полуплоскостей, исходящих из общего ребра OZ.

При вычислении тройного интеграла, мы имеем право разбивать об'ем V на части по какому угодно способу; мы выбираем здесь способ разбиения при помощи координатных поверхностей. Остановимся на какой-нибудь правильной части и заметим, что она ограничена следующими поверхностями:

а) двумя концентрическими шаровыми поверхностями с радиусами r и $r + dr$;

б) двумя коническими поверхностями с углами наклона образующих к оси: θ и $\theta + d\theta$;

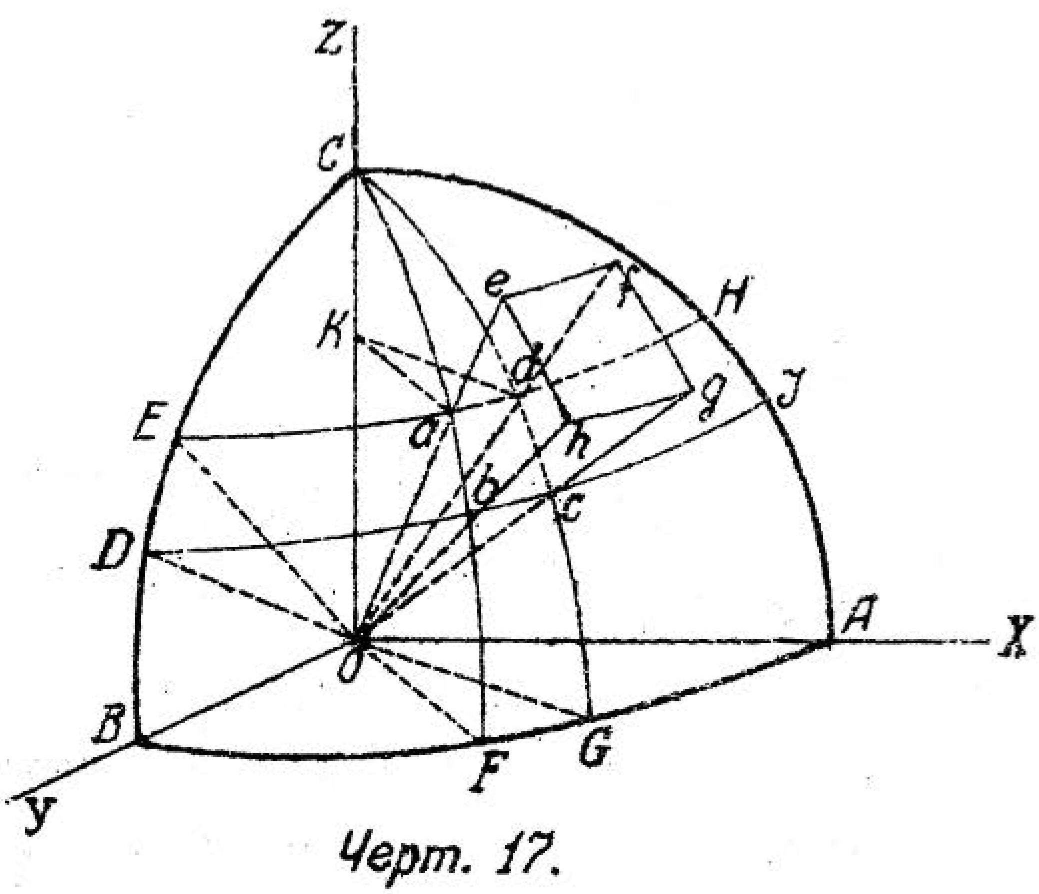
в) двумя полуплоскостями, составляющими с плоскостью ZOX углы: φ и $\varphi + d\varphi$.

Таким образом, эта правильная часть явится шестигранником, ограниченным отчасти плоскостями, отчасти - кривыми поверхностями; для большей ясности построим этот шестигранник. На черт. 17 имеем: ABC есть часть шаровой поверхности с радиусом равным r; EH и DJ суть линии пересечения ее с обеими коническими поверхностями (причем

$$\angle EOC = \angle aOC = \theta,$$

$$\angle DOE = \angle bOa = d\theta);$$

CF и CG суть линии пересечения шаровой поверхности с обеими полуплоскостями (причем $\angle AOG = \varphi$; $\angle FOG = \angle aKd = d\varphi$). Если теперь мы опишем ша-



Черт. 17.

ровую поверхность с радиусом равным $r+dr$, и продолжим другие 4 поверхности до пересечения с ней, то и получим криволинейный шестигранник $abcdefgh$, который служит элементом об'ема в полярных координатах.

Для того, чтобы найти этот об'ем, заметим, что линии ab, ad и ae взаимно ортогональны, т.е. касательные к ним в точке a оказываются попарно перпендикулярными друг к другу.

Действительно, радиус Oa перпендикулярен касательной плоскости к шаровой поверхности в точке a, а в этой плоскости лежат касательные к окружностям ab и ad; эти же две касательные взаимно перпендикулярны, ибо плоскости COF и EKH обладают этим свойством и кроме того касательная к ad в точке a перпендикулярна к линии Ka пересечения этих плоскостей.

Изложенное позволяет нам, пренебрегая бесконечно-малыми высших порядков, рассматривать шестигранник $abcdefgh$, как прямоугольный параллелепипед с измерениями:

$$ae, ab \text{ и } ad;$$

остается вычислить эти длины. Легко видеть, что

$$ae=dr;$$

что касается ab, то это есть дуга окружности радиуса $Oa=$ $=Ob=r$, соответствующая центральному $\angle aOb=d\theta$, так что:

$$ab=r.d\theta;$$

точно также ad есть дуга окружности радиуса Ka с центральным углом $\angle aKd=d\varphi$; но из треугольника KOa имеем $Ka=r\sin\theta$ так что:

$$ad=r\sin\theta.d\varphi.$$

Перемножая, получаем элемент об'ема в полярных координатах:

$$dV=r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi;$$

поэтому при переходе от прямоугольных координат к полярным, тройной интеграл преобразуется следующим образом:

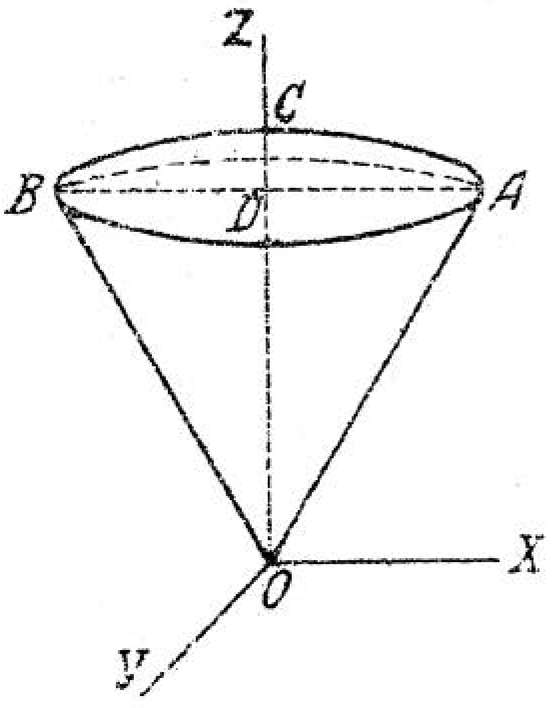
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi. \quad (II)$$

Что касается определения границ, то правило остается по существу тем же самым: если сначала интегрируем по r, то задав φ и θ (т.е. задав некоторое направление) смотрим, как меняется по этому направлению r внутри данного об'ема; далее, разбираем изменение угла θ при данном φ и, наконец, устанавливаем границы, в которых меняется φ для точек данного об'ема.

Сделаем пример:

4) Найти центр тяжести однородного шарового сектора.

Расположим сектор AOB (мы берем здесь частный случай шарового сектора), как указано на черт.18; данными будем считать: радиус шара R и высоту сегмента $CD=h$.



Черт. 18

В силу симметрии фигуры, заключаем, что:

$$x_c=y_c=0;$$

остается найти z_c, для чего, принимая во внимание постоянство плотности μ, имеем:

$$Vz_c=\iiint_V z\,dx\,dy\,dz,$$

или, переходя для вычисления интеграла к полярным координатам:

$$Vz_c=\iiint_V r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Что касается границ интегрирования, то r при любых φ и θ меняется, как легко видеть, от 0 до R; угол θ, опять таки при любом φ, меняется от 0 до $\angle AOC=\alpha$; наконец, углу φ надо дать все значения от 0 до 2π; таким образом, получаем:

$$Vz_c=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{R^4}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}\sin 2\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{R^4}{8}\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{R^4\pi}{8}(1-\cos 2\alpha)=\frac{R^4}{4}\pi\sin^2\alpha.$$

Из треугольника AOD имеем:

$$R-h=R\cos\alpha \qquad \text{откуда} \qquad \cos\alpha=1-\frac{h}{R}$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{h}{R^2}(2R-h),$$

так что:

$$Vz_c=\frac{\pi}{4}R^2h(2R-h).$$

Из геометрии известно, что:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2h,$$

а потому

$$z_c=\frac{\pi}{4}R^2h(2R-h):\frac{2\pi}{3}R^2h=\frac{3}{8}(2R-h).$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЯ.

1) Вычислить координаты центра инерции однородного тела, ограниченного поверхностями:

$$z^2=xy; \quad x=a; \quad y=b; \quad z=0 \qquad (a \text{ и } b>0).$$

Ответ: $x_c=\frac{3}{5}a$; $y_c=\frac{3}{5}b$; $z_c=\frac{9}{32}\sqrt{ab}$.

2) Вычислить $\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, если область интегрирования ограничена координатными плоскостями и плоскостью: $x+y+z=1$.

Ответ: $\frac{\log 2}{2}-\frac{5}{16}$.

3) Вычислить момент инерции однородного прямого кругового цилиндра относительно его оси; даны: радиус основания R и масса цилиндра m (ввести цилиндрические координаты)

Ответ: $\frac{1}{2}mR^2$.

4) Вычислить об'ем шара, пользуясь полярными координатами.

5) Вычислить координаты центра тяжести той части шара:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

которая лежит в I-м координатном угле (ввести полярные координаты).

Ответ: $x_c = y_c = z_c = \frac{3}{8}R$.

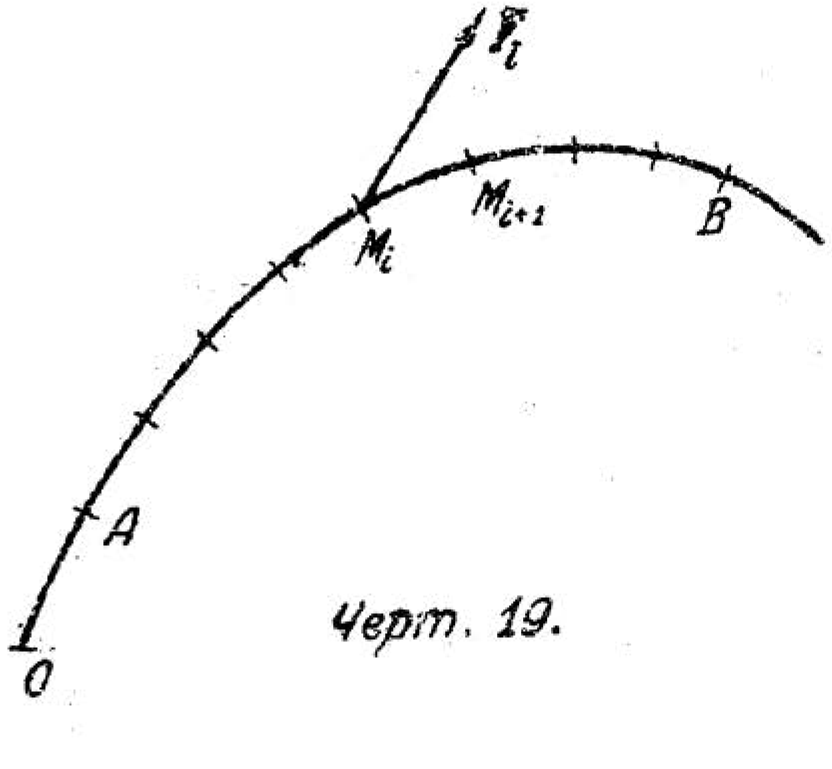
6) Задачник кафедры №№199,200,201.

§ 6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

I. В настоящем параграфе мы познакомимся с одним обобщением понятия об определенном интеграле, имеющим важные приложения в механике и физике. Подобно тому, как вопрос о вычислении известной площади привел нас к определенному интегралу, точно также вопрос о механической работе приведет нас к криволинейному интегралу.

В одном случае эта работа вычисляется весьма просто: пусть материальная точка перемещается прямолинейно, и на нее действует сила F, постоянная по величине и по направлению, и образующая угол θ с направлением движения точки; если последняя прошла путь, по длине равный S, то работа силы вычисляется по формуле:

$$W = F.s.\cos\theta. \quad (1)$$



Черт. 19.

Возьмем теперь общий случай: пусть материальная точка описывает некоторую траекторию OAB (черт.19), и на нее действует сила, переменная по величине и по направлению. Для вычисления работы силы на участке AB, поступаем следующим образом.

Делим рассматриваемую часть пути на n частей, и пусть

$$\smile M_i M_{i+1} = \Delta S_i$$

будет одной из них; при достаточной малости этой части, можно приближенно принять, что на всем ее протяжении сила сохраняет одну и ту же величину, например ту величину F_i, которую она имела в точке M_i траектории. Примем также, что ее направление на протяжении участка $M_i M_{i+1}$ тоже не менялось, и обозначим через

$$(F_i, \Delta s_i)$$

ее угол с направлением элемента Δs_i (за последнее можно принять направление его хорды). Тогда, на основании формулы (I), для величины работы W_i на участке Δs_i получим приближенное выражение:

$$W_i \approx F_i \cdot \cos(F_i, \Delta s_i) \cdot \Delta s_i .$$

Проделав это для всех частей пути и сложив полученные произведения, найдем приближенное значение для всей работы:

$$W \approx \sum_{i=1}^{i=n} F_i \cos(F_i, \Delta s_i) \cdot \Delta s_i .$$

Это приближение будет тем лучше, чем меньше будут части и чем больше будет их число; переходя к пределу, когда число частей безгранично растет, а каждая часть безгранично убывает, мы получаем в пределе точное значение для работы силы:

$$W = \lim \left[\sum_{i=1}^{i=n} F_i \cos(F_i, \Delta s_i) \Delta s_i \right]_{\substack{n \to \infty \\ \Delta s_i \to 0}} .$$

Для вычисления этого предела, допустим сначала, что переменные величины F_i и $\cos(F_i, \Delta s_i)$ выражены в функции длины дуги S , отсчитываемой от точки O; тогда наш предел получает вид:

$$\lim \Sigma \Phi(s_i) \Delta s_i ,$$

а это есть определенный интеграл, взятый в границах от $OA = S_0$ до $OB = S$.

Итак, имеем:

$$W = \int_{S_0}^{S} F \cos(F, ds) ds ,$$

где (F, ds) обозначает угол между направлением силы и направлением касательной к траектории в рассматриваемой точке.

Если бы наши величины являлись функциями от некоторого параметра t , то мы интегрировали бы по t в соответствующих границах.

Мы пришли к определенному интегралу, но отличие его от встречавшихся раньше определенных интегралов заключается в следующем: там под'интегральная функция принимала значения в различных точках оси OX ,ибо переменная независимая x пробегала отрезок этой оси; здесь же под'интегральная функция принимает значения в различных точках некоторой кривой (возможно - двоякой кривизны).

Поэтому полученный нами интеграл называется „криволинейным" и обозначается следующим образом:

$$W=\int_{AB} F\cos(F, ds)\, ds; \tag{2}$$

его вычисление сводится к определенному интегралу.

Формуле (2) можно придать иную форму. Обозначим углы касательной с осями координат через

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma,$$

а углы, которые составляет с осями направление силы, через

$$\lambda, \ \mu, \ \nu.$$

Тогда имеем:

$$\cos(F, ds)=\cos\lambda\cos\alpha+\cos\mu\cos\beta+\cos\nu\cos\gamma.$$

Подставляя, преобразуем под'интегральное выражение:

$$F\cos(F,ds)ds=(F\cos\lambda).(\cos\alpha\, ds)+$$
$$+(F\cos\mu)(\cos\beta\, ds)+(F\cos\nu).(\cos\gamma.\, ds);$$

но

$$F\cos\lambda=X; \qquad F\cos\mu=Y; \qquad F\cos\nu=Z,$$

где X , Y , Z обозначают проекции силы на оси координат; далее:

$$\cos\alpha.ds=dx; \quad \cos\beta.ds=dy; \quad \cos\gamma.ds=dz.$$

Таким образом находим новое выражение для работы силы:

$$W=\int_{AB}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz); \tag{3}$$

Здесь X , Y , Z обычно являются функциями от x, y, z.

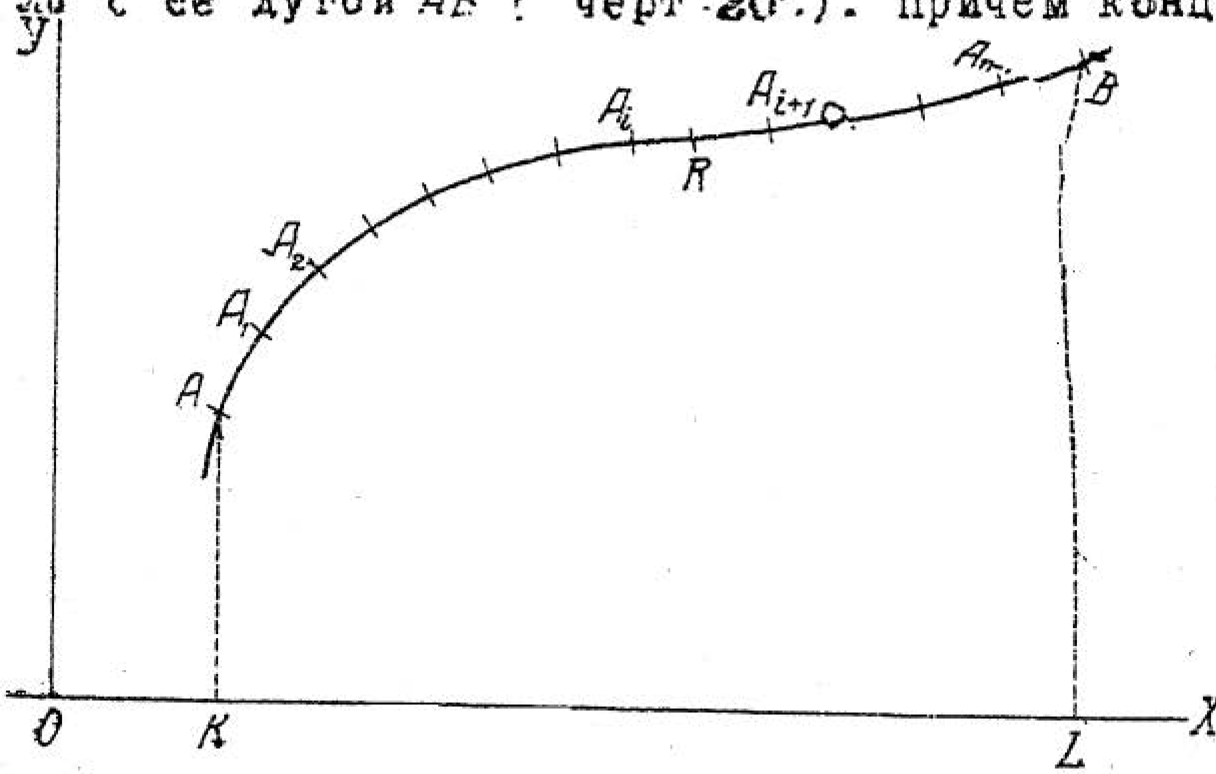
Перед нами возникает задача изучить выражения вида (3) и научиться их вычислять; в последующих пунктах мы уточним определение криволинейного интеграла и изучим его основные свойства.

2. Изучение криволинейного интеграла мы начнем с простейшего случая.

Пусть задана некоторая плоская линия уравнением:

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ - непрерывна и однозначна; мы будем иметь дело с ее дугой AB (черт. 20.). причем концы последней определяются абсциссами $OK = x_0$ и $OL = X$; пусть кроме того задана некоторая функция $M(x, y)$ от двух переменных независимых (иногда будем обозначать ее просто одной буквой M); эта функция тоже обладает непрерывностью и однозначностью.



Черт. 20.

Разобьем промежуток (x_0, X) на n частей, вставив промежуточные числа:

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, X,$$

и положив при этом:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i \quad \text{и} \quad x_n = X;$$

далее отметим на дуге AB те точки:

$$A,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{n-1}, B,$$

абсциссами которых служат эти числа; что касается ординат, то они находятся из уравнения данной линии; полагая:

$$f(x_i) = y_i,$$

найдем, что координаты точки A_i будут:

$$(x_i, y_i) \left[\text{коорд.} A \ldots (x_0, y_0);\ \text{коорд.} B \ldots (X, Y) \right].$$

Возьмем теперь частичную дугу $A_i A_{i+1}$, отметим на ней какую-нибудь точку R с координатами (ξ_i, η_i), вычислим значение функции M в этой точке и умножим его на величину проекции дуги A_iA_{i+1} на ось OX (т.е. на Δx_i), так что получим произведение:

$$M(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i;$$

далее проделаем это для всех частей дуги AB и сложим полученные произведения:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} M(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i;$$

наконец, перейдем к пределу, увеличивая безгранично число промежутков и притом так, чтобы каждый из них становился бесконечно-малым.

Так вот этот предел называется криволинейным интегралом, взятым от функции $M(x,y)$ по дуге AB (или по пути AB) и обозначается символом:

$$\int_{AB} M\,dx.$$

Итак, в данном случае получается следующее определение криволинейного интеграла:

$$\int_{AB} M\,dx = \lim\left[\sum_{i=0}^{i=n-1} M(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i\right]_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}} \qquad (4)$$

Исходя из этого определения, сейчас докажем, что вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению обыкновенного определенного интеграла.

В самом деле, так как точка (ξ_i, η_i) лежит на данной линии, то:

$$\eta_i = f(\xi_i) \quad;$$

тогда:

$$M(\xi_i, \eta_i) = M\left[\xi_i, f(\xi_i)\right] = F(\xi_i);$$

подставляем и вычисляем предел суммы:

$$\lim\left[\Sigma M(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i\right] = \lim\left[\Sigma F(\xi_i)\Delta x_i\right];$$

а последний предел равен:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Возвращаясь к значению функции $F(x)$, приходим к такому правилу для вычисления криволинейного интеграла:

$$\int_{AB} M\,dx = \int_{x_0}^{x} M\left[x, f(x)\right] dx; \qquad (5)$$

т.е. переменная y в функции $M(x,y)$ заменяется функцией от x, взятой из уравнения пути интегрирования, и полученная функция от x интегрируется в границах, соответствующих начальной и конечной точке пути.

Если наша линия такова, что данному x соответствуют два или более значений y, или если путь составлен из различных линий, то вычисление ведем тем способом, что разбиваем путь на части, удовлетворяющие поставленным выше условиям и к каждой из них применяем формулу (5).

Встречаются также криволинейные интегралы вида:

$$\int_{AB} N\,dy,$$

где N есть функция от x и y; для его вычисления надо в предыдущем рассуждении поменять местами x и y: y сделать переменной независимой, а x выразить через y из уравнения пути:

$$x = F(y),$$

так что получим:

$$\int_{AB} N\,dy = \int_{y_0}^{y} N\left[F(y), y\right] dy. \qquad (6)$$

Но можно поступать иначе, а именно: считать по прежнему x переменной независимой, а y и dy выразить из уравнения данной линии $y=f(x)$ (дело в сущности сводится к замене переменной в определенном интеграле предыдущей формулы); тогда придем к такому равенству:

$$\int_{AB} N\,dy = \int_{x_0}^{x} N\left[x, f(x)\right] f'(x)\,dx. \qquad (7)$$

Но чаще всего в приложениях, поскольку речь идет о плоских путях интегрирования, встречаются криволинейные интегралы вида:

$$\int_{AB} M\,dx + N\,dy$$

(скобки обыкновенно не ставят); такой интеграл надо рассматривать, как сумму двух интегралов, введенных выше.

Для того, чтобы покончить с различными приемами вычисления, упомянем о том случае, когда путь интегрирования задается уравнениями в параметрическом виде:

$$\left.\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{matrix}\right\};$$

в этом случае дело опять таки сводится к замене переменной в тех определенных интегралах, с которыми мы имели дело выше; если t_0 и T суть значения параметра, определяющие начало и конец пути, то легко убедиться в справедливости следующей формулы:

$$\int_{AB} M dx+N dy=\int_{t_0}^{T}\left[M(\varphi,\psi)\varphi'+N(\varphi,\psi)\psi'\right]dt. \qquad (8)$$

В тех случаях, когда твердо установлено, какой функции надо брать интеграл, для обозначения криволинейного интеграла пользуются символом, указывающим путь интегрирования (две или больше букв, заключенные в скобки); так, при указанных условиях криволинейный интеграл в последнем равенстве можно обозначить символом (AB).

Выражение криволинейного интеграла через определенный непосредственно дает нам одно его свойство, а именно: если оставляя путь интегрирования неизменным, изменим его направление на обратное, то криволинейный интеграл меняет знак; наше утверждение вытекает из того, что при этом в определенном интеграле верхняя и нижняя граница меняются местами. Таким образом, приходим к формуле:

$$(AB)=-(BA) \qquad (9)$$

Поясним сказанное примерами:

I) Вычислить $\int_{ACB} xydy-y^2dx$, где ACB есть прямолинейный путь, соединяющий точку A (I,0) с точкой B(0,I) (см.черт.2I).

Уравнение пути будет:

$$x+y=1,$$

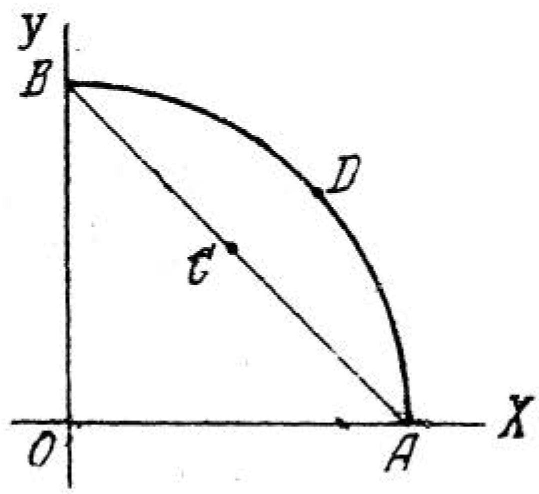
откуда:

$$y=1-x \quad \text{и} \quad dy=-dx;$$

для точек пути, x меняется от I до O, так что:

$$(ACB)=\int_1^0\left[-x(1-x)-(1-x)^2\right]dx=\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}.$$

2) Вычислить криволинейный интеграл от того же выражения, но взятый по дуге ADB (черт.21) окружности с центром в начале координат.



Черт. 21.

Уравнение пути в параметрическом виде будет:

$$\left.\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t \end{array}\right\}.$$

По правилу (8) имеем:

$$(ADB)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t\sin t+\sin^2 t\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1.$$

На этих примерах мы убеждаемся, что при тех же самых конечных точках, величина криволинейного интеграла может зависить от того или другого пути между ними; в следующем параграфе мы узнаем один важный случай, когда величина криволинейного интеграла не зависит от пути между данными точками.

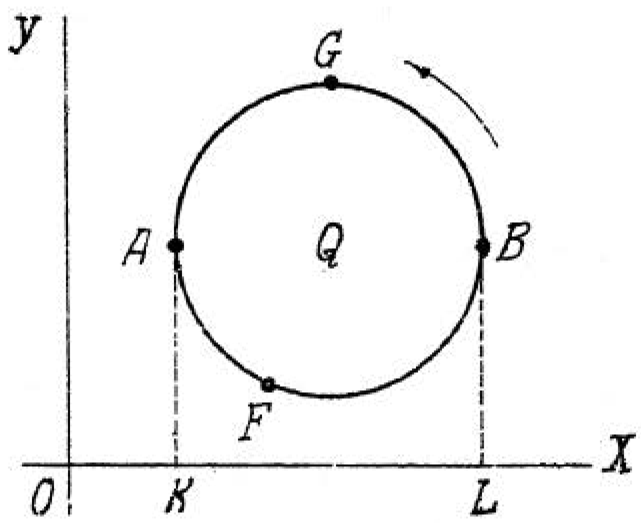
3. В заключение вычислим криволинейный интеграл, взятый по замкнутой кривой; это послужит прежде всего хорошим примером, а затем полученные здесь результаты пригодятся нам в следующем параграфе.

Так как знак криволинейного интеграла зависит от направления, в котором мы проходим путь интегрирования, то условимся замкнутую кривую пробегать в таком направлении, чтобы ограниченная ею часть плоскости оставалась слева; такое направление пробега называется положительным, а противоположное - отрицательным.

Пусть требуется найти

$$\int_C M\,dx,$$

взятый по замкнутому контуру C, который на черт. 22 представлен кривой $AFBGA$: мы допустим, что прямые, параллельные координатным осям, пересекают эту кривую не более, чем в двух точках.



Черт. 22.

Так как здесь по данному x мы вообще находим два различных значения y, то согласно сказанному выше, путь интегрирования надо разбить на две части:

AFB и BGA

(A и B суть точки касания тех касательных к данному контуру, которые параллельны оси OY, причем $OK=x_0$ и $OL=X$); таким образом, получим:

$$\int_C M\,dx=\int_{AFB} M\,dx+\int_{BGA} M\,dx$$

Точками касания A и B кривая разбита на 2 части; из уравнения данной кривой найдем, что: для $\smile AFB \ldots y_1=\varphi_1(x)$ и для $\smile BGA \ldots y_2=\varphi_2(x)$; тогда по правилу (5) имеем:

$$\int_{AFB} M\,dx=\int_{x_0}^{X} M(x,y_1)\,dx,$$

$$\int_{BGA} M\,dx=\int_{X}^{x_0} M(x,y_2)\,dx=-\int_{x_0}^{X} M(x,y_2)\,dx;$$

соединяя, получаем:

$$\int_C M\,dx=\int_{x_0}^{X}\left[M(x,y_1)-M(x,y_2)\right]dx. \qquad (10)$$

Теперь найдем криволинейный интеграл:

$$\int_C N\,dy,$$

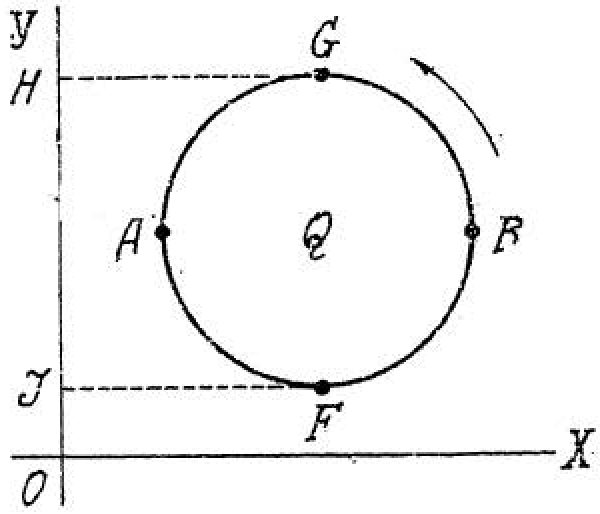
взятый по тому же самому пути; вычислять его будем по правилу (6). Для этого, проводя касательные к кривой, параллельные оси OX, найдем границы для y:

$OJ=y_0$ и $OH=Y$ (черт. 23);

далее, пусть из уравнения кривой найдем, что:

для $\smile FAG \ldots\ldots x_1 = \psi_1(y)$ и для $\smile FBG \ldots\ldots x_2 = \psi_2(y)$.

Тогда, подобно предыдущему, имеем:



Черт. 23

$$\int_C N dy = \int_{FBG} N dy + \int_{GAF} N dy,$$

$$\int_{FBG} N dy = \int_{y_0}^{Y} N(x_2, y)\, dy,$$

$$\int_{GAF} N dy = \int_{Y}^{y_0} N(x_1, y)\, dy = -\int_{y_0}^{Y} N(x_1, y)\, dy;$$

так что окончательно приходим к формуле:

$$\int_C N dy = \int_{y_0}^{Y} \left[N(x_2, y) - N(x_1, y) \right] dy. \qquad \text{(II)}$$

4. В конце п.I вычисление работы силы привело нас к криволинейному интегралу более общего вида:

$$\int_{AB} X dx + Y dy + Z dz,$$

взятому вообще говоря по неплоской кривой; здесь X, Y, Z суть известные нам функции от x, y, z. Подобные же интегралы встречаются и в других вопросах; они вычисляются способом, аналогичным указанному выше.

Для пояснения укажем правило, по которому вычисляется интеграл от первого слагаемого.

Итак, требуется найти интеграл:

$$\int_{AB} X(x, y, z)\, dx$$

взятый по дуге AB кривой, заданной уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{array}\right\},$$

причем для дуги AB параметр t меняется в промежутке

$$t_0 \leq t \leq T.$$

Тогда имеем следующее правило:

$$\int_{AB} X(x,y,z)\,dx=\int_{t_0}^{T} X(\varphi,\psi,\chi)\varphi'\,dt. \qquad (12)$$

Таким же способом вычисляются и другие криволинейные интегралы.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

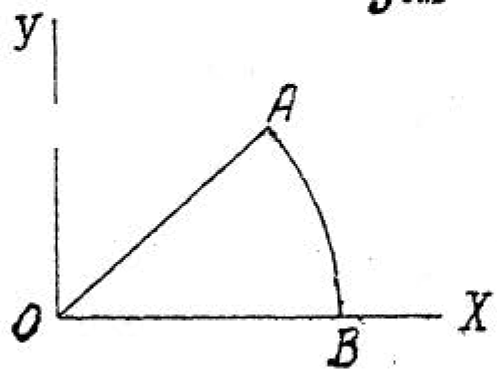
I) Вычислить криволинейный интеграл $\int_{OA} y^2dx+2xydy$, взятый по пути, ведущему от начала координат до точки $A(1,1)$, причем этим путем служит:

а) прямая $y=x$,

б) парабола $y=x^2$,

в) парабола $y^2=x$, Ответ: во всех 3 случаях $(OA)=1$.

2) Вычислить $\int_{OAB} xydx$, причем OA лежит на биссектрисе координатного угла и длина $OA=1$,а AB есть дуга окружности, описанной из начала координат радиусом равным OA. (См.прилагаемый чертеж).



Ответ: $(OAB)=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

3) Вычислить $\int xdy$, взятый по контуру эллипса.

Ответ: πab.

4) Задачник кафедры №205.

§ 7. ФОРМУЛА ГРИНА.

Пусть M и N суть функции от переменных независимых x и y , причем как сами эти функции, так и их частные производные I-го порядка - непрерывны в области Q (черт.22 или 23); контур этой области обозначим одной буквой C.

Начнем наше рассуждение с вычисления двойного интеграла:

$$\iint_Q \frac{\partial M}{\partial y}\,dxdy;$$

придерживаясь тех обозначений, которые были сделаны при выводе формулы (10) (при чем имеется в виду черт.22), можем написать:

$$\iint_Q \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy;$$

но

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy = \left[M(x,y)\right]_{y=y_1}^{y=y_2} = M(x,y_2) - M(x,y_1),$$

$$\iint_Q \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} \left[M(x,y_2) - M(x,y_1)\right] dx;$$

принимая во внимание формулу (10), окончательно получаем:

$$\iint_Q \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_C M\,dx. \qquad (*)$$

Подобным же образом вычислим теперь интеграл:

$$\iint_Q \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy;$$

имея в виду обозначения, сделанные при выводе формулы (11), и черт.23, можем написать:

$$\iint_Q \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx;$$

но

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx = \left[N(x,y)\right]_{x=x_1}^{x=x_2} = N(x_2,y) - N(x_1,y)$$

$$\iint_Q \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y} \left[N(x_2,y) - N(x_1,y)\right] dy;$$

сравнивая с формулой (11), находим:

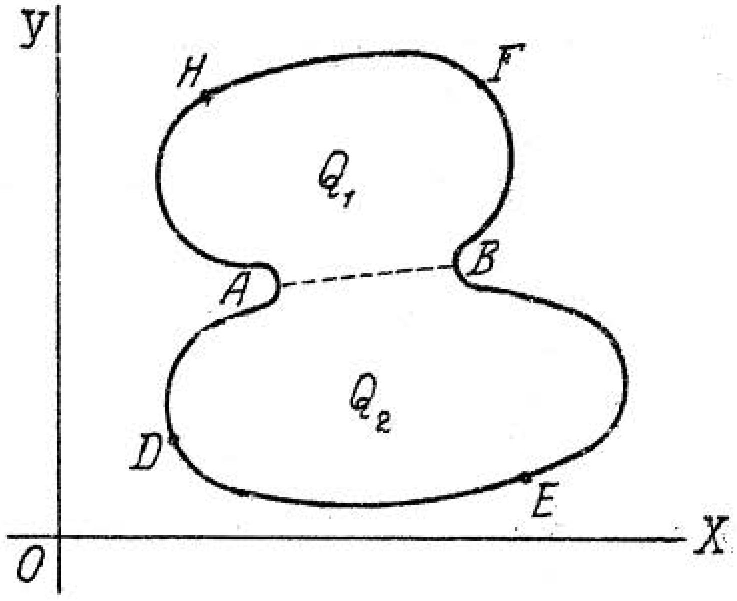
$$\iint_Q \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C N\,dy\ . \qquad (**)$$

Вычитая из (**) равенство (*), приходим к ф о р м у л е Г р и н а (которую также связывают с именами Гаусса и Римана):

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \iint_Q \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy; \qquad (13)$$

эта формула прюобразует криволинейны интеграл по замкнутому контуру в двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром, или обратно.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выводе предполагалось, что контур C таков, что прямые параллельные осям пересекают его не более, чем в двух точках. Не представляет большого труда избавиться от этого ограничения. В самом деле, пусть область Q ограничена контуром $ADEBFHA$ (черт.24), не удовлетворяющим этому требованию; и пусть, проведя отрезок AB, мы делим область Q на две части Q_1 и Q_2, обводы которых удовлетворяют всем условиям.



Черт. 24.

Тогда имеем:

$$\mathcal{J}=\iint_Q\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{Q_1}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy+\iint_{Q_2}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\iint_{Q_1}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy=(ABFHA)=(AB)+(BFHA);$$

$$\iint_{Q_2}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy=(ADEBA)=(ADEB)+(BA);$$

складывая и принимая во внимание формулу (9), получим:

$$\mathcal{J}=(ADEB)+(BFHA)=(ADEBFHA),$$

что и требовалось доказать:

Выведем некоторые следствия из формулы Грина. Во-первых, если выражение

$$Mdx+Ndy$$

есть полный дифференциал некоторой функции от x и y, то, как известно из курса „Интегрирование дифференциальных уравнений", должно быть:

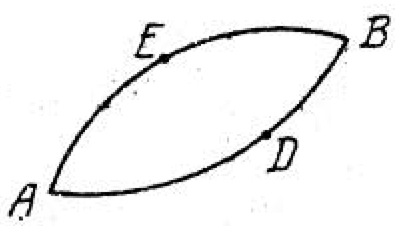
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

и тогда двойной интеграл в формуле (13) обращается в нуль. Получаем теорему:

Если $Mdx+Ndy$ есть полный дифференциал, то $\int_c Mdx+Ndy$, взятый по замкнутому контуру, внутри которого и на котором функции M и N, равно как и их частные производные 1-го порядка - непрерывны, всегда равен нулю.

Отсюда, в свою очередь, вытекает дальнейшее следствие: при указанных выше условиях, криволинейный интеграл от полного дифференциала, взятый между двумя данными точками, не зависит от пути интегрирования.

В самом деле, соединим точки A и B (черт.25) двумя различными путями AEB и ADB; при соблюдении условий непрерывности, на основании предыдущей теоремы, имеем:



Черт. 25.

$$(ADBEA)=0;$$

но

$$(ADBEA)=(ADB)+(BEA),$$

$$(BEA)=-(AEB) \quad \text{(на основании 9)},$$

так что подставляя получим:

$$(ADB)-(AEB)=0,$$

или

$$(ADB)=(AEB),$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теперь читателю будет понятна особенность 1-й задачи, предложенной для упражнения в предыдущем параграфе: ответы одинаковы, ибо выражение $y^2dx+2xydy$ есть полный дифференциал.

Другое следствие из формулы Грина получим, приписав функциям M и N частные значения; так, полагая:

$$M=0 \quad \text{и} \quad N=x,$$

найдем:

$$\int_c xdy=\iint_q dxdy;$$

вспомнив формулу I § 3, получим новое правило для вычисления площади, ограниченной замкнутой кривой:

$$Q=\int_c x\,dy\,. \qquad (14)$$

Точно также, положив $M=y$ и $N=0$, придем к формуле:

$$Q=-\int_c y\,dx; \qquad (15)$$

наконец, складывая (14) и (15), получим наиболее удобную формулу:

$$Q=\frac{1}{2}\int_c x\,dy-y\,dx. \qquad (16)$$

Вычислим, для примера, с помощью (16) площадь эллипса:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t\\ y&=b\sin t\end{aligned}\right\};$$

в этом случае имеем:

$$Q=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t.b\cos t+b\sin t.a\sin t)dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab;$$

действительно, вычисления складываются весьма просто. Читатель может для упражнения таким же способом найти площадь астроиды.

§ 8. ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ И ФОРМУЛА СТОКСА.

1. Обыкновенный двойной интеграл берется по известной части плоскости; сейчас мы познакомимся с интегралами, распространенными по некоторой части кривой поверхности; с такими интегралами приходится встречаться в механике и в математической физике.

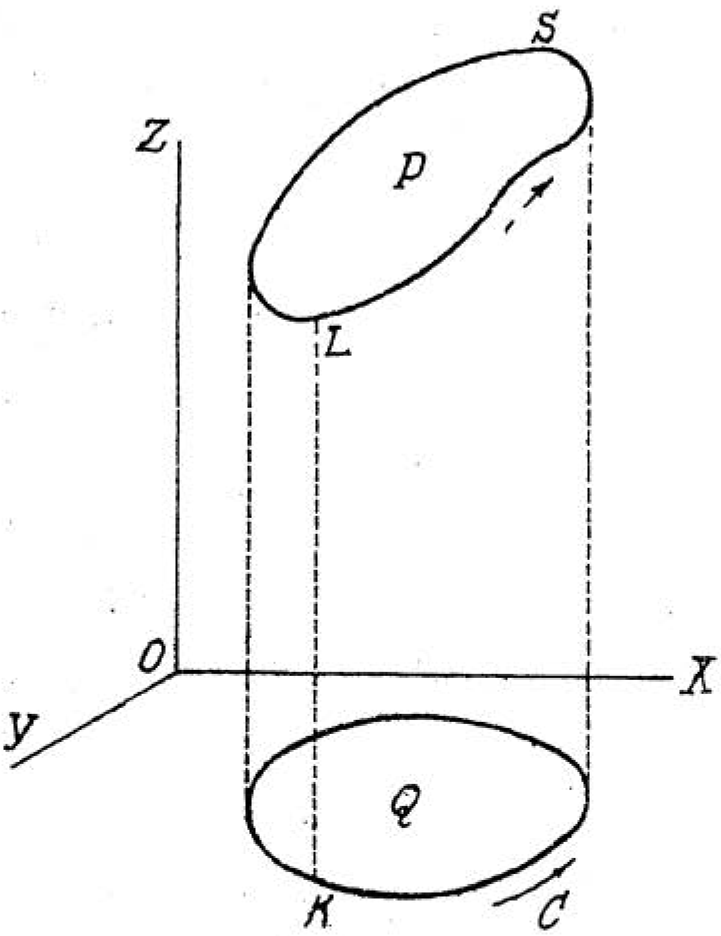
Пусть дана поверхность, определяемая уравнением:

$$z=\varphi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ - непрерывная и однозначная функция; на этой поверхности выделена некоторая часть P, ограниченная замкнутой кривой S (черт.26; кривая S будет, вообще говоря, неплоской); эта часть поверхности проектируется на плоскость YOX по области Q, ограниченной контуром C (кривая C непременно - плоская). Пусть дана еще некоторая функция

$f(x,y,z)$ от 3 переменных, непрерывная и однозначная для всех точек рассматриваемой части поверхности P.

Разделим это P на бесконечно малые элементы $d\sigma$; вычислим значение данной функции в какой-нибудь точке элемента $d\sigma$ и составим произведение:



Черт. 26.

$$f(x,y,z)\cdot d\sigma;$$

проделаем это для всех элементов поверхности, составим сумму полученных произведений и по обычному способу перейдем к пределу. Вот предел этой суммы и называется „интегралом от функции $f(x,y,z)$, распространенным по части поверхности P" и обозначается следующим символом:

$$\iint_P f\cdot d\sigma.$$

Вычисление такого поверхностного интеграла сводится к вычислению обыкновенного двойного интеграла. В самом деле, так как точка, в которой мы вычисляем значение функции, лежит на данной поверхности, то в под'интегральную функцию вместо z можно подставить $\varphi(x,y)$; далее, как мы видели выше:

$$d\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\,dy,$$

так что слагаемые нашей суммы имеют вид:

$$f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\,dy,$$

Сюда переменная z уже не входит, а переменные x и y принимают значения, соответствующие точкам области Q; легко видеть, что предел суммы таких произведений будет двойной интеграл, взятый по области Q.

Таким образом, приходим к формуле:

$$\iint_P f\cdot d\sigma=\iint_Q f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\,dy; \quad (\mathrm{I})$$

по этой формуле можно вычислять поверхностные интегралы.

Для того, чтобы дать конкретный пример применения понятия об интеграле по поверхности, рассмотрим такой вопрос: пусть через поверхность P (черт.26) течет какая-нибудь жидкость, причем ее скорость v в каждой точке поверхности направлена по нормали и зависит от координат этой точки (другими словами, она есть „функция точки"):

$$v=f(x,y,z).$$

Тогда об'ем жидкости, протекающей в единицу времени через элемент $d\sigma$, заключающий в себе рассматриваемую точку, выразится произведением:

$$v\cdot d\sigma=f(x,y,z)\,d\sigma.$$

Составим подобные произведения для всех элементов поверхности, сложим их и по обычному способу перейдем к пределу; пределом, очевидно, и будет поверхностный интеграл:

$$\iint_P f\cdot d\sigma.$$

Итак, в разбираемом примере интеграл по поверхности дает об'ем жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность P.

2. Переходим к выводу формулы С т о к с а, которая является обобщением формулы Г р и н а: тогда как последняя преобразует криволинейный интеграл по плоскому контуру в двойной интеграл по части плоскости, ограниченной этим контуром, - ф о р м у л а С т о к с а, преобразует криволинейный интеграл по вообще неплоскому контуру в интеграл по части кривой поверхности, ограниченной этим контуром.

Пусть нам даны 3 функции X, Y, Z от переменных x, y, z, удовлетворяющие обычным требованиям (для самих функций и их частных производных I-го порядка); поставим вопрос о вычислении криволинейного интеграла:

$$J=\int_S X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\,,$$

где S есть контур, ограничивающий часть поверхности P(черт. 26). Так как кривая S целиком лежит на данной поверхности, то для ее точек имеем:

$$z=\varphi(x,y) \quad \text{и} \quad dz=p\,dx+q\,dy,$$

где

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad q=\frac{\partial z}{\partial y};$$

подставив z и dz в предыдущее равенство, мы исключим переменную z и, следовательно, перейдем к проекции линии S на плоскость YOX; но этой проекцией будет плоский контур C; когда точка L описывает контур S в положительном направлении, то ее проекция K в таком же направлении описывает контур C; следовательно, получаем равенство:

$$J=\int_C X\,dx+Y\,dy+Z(p\,dx+q\,dy)=\int_C\left[(X+pZ)dx+(Y+qZ)dy\right],$$

причем в функции X, Y, Z вместо z подставлено $\varphi(x,y)$

Положив для сокращения письма:

$$M=X+pZ \quad \text{и} \quad N=Y+qZ,$$

перепишем последнее равенство таким образом:

$$J=\int_C M\,dx+N\,dy;$$

но к этому криволинейному интегралу, взятому по плоскому контуру, можно применить формулу Грина, так что приходим к формуле:

$$J=\iint_q\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Теперь мы должны вычислить эти частные производные, помня, что M и N суть сложные функции от x и y; кроме этих переменных в них входил z, замененный на $\varphi(x,y)$; произведя вычисления имеем:

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial z}p+q\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial z}p\right)+Z\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial z}q+p\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}q\right)+Z\frac{\partial p}{\partial y};$$

при вычитании, последние члены взаимно уничтожаются, так как

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

и кроме того исчезнет член

$$pq\frac{\partial Z}{\partial z},$$

входящий в обе формулы; таким образом, после упрощений найдем:

$$\mathcal{J}=\iint_Q\left[\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}-p\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)-q\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]dxdy.$$

Введем теперь косинусы углов нормали к поверхности с осями координат; если этой нормали приписать направление, идущее в сторону возрастающих z, то как известно:

$$\cos(nx)=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad \cos(ny)=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad \cos(nz)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

(знаки у корня квадратного надо выбрать именно таким образом для того, чтобы $\cos(nz)$ был >0); тогда:

$$-p=\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\cos(nx);\quad -q=\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\cos(ny);\quad 1=\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\cos(nz);$$

подставляя получаем:

$$\mathcal{J}=\iint_Q\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(nx)+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(ny)+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(nz)\right]\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dxdy.$$

Если теперь мы вспомним формулу (I), читая ее справа налево, то увидим, что в правой части последнего равенства стоит поверхностный интеграл от функции, заключенной в квадратные скобки; обозначая его соответственным образом и подставляя первоначальное значение для $\mathcal{J}$, приходим к равенству:

$$\int_S Xdx+Ydy+Zdz=\iint_P\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(nx)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(ny)+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(nz)\right]d\sigma, \qquad (2)$$

это и есть ф о р м у л а С т о к с а, имеющая важные приложения в механике и в физике.

Отметим один частный случай формулы (2), а именно — тот, когда выражение

$$Xdx+Ydy+Zdz$$

является полным дифференциалом.

Как известно из курса интегрирования дифференциальных уравнений, тогда имеют место равенства:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x};\qquad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y};\qquad \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z};$$

и формула (2) показывает, что:

$$\int_S Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Таким образом, криволинейный интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю. Выше это было доказано только для путей интегрирования, лежащих в плоскости, а теперь произведено обобщение на полное пространство.

Отсюда далее следует, что и в общем случае криволинейный интеграл от полного дифференциала, взятый между двумя данными точками, не зависит от пути интегрирования (только должны быть соблюдены условия непрерывности, указанные выше).

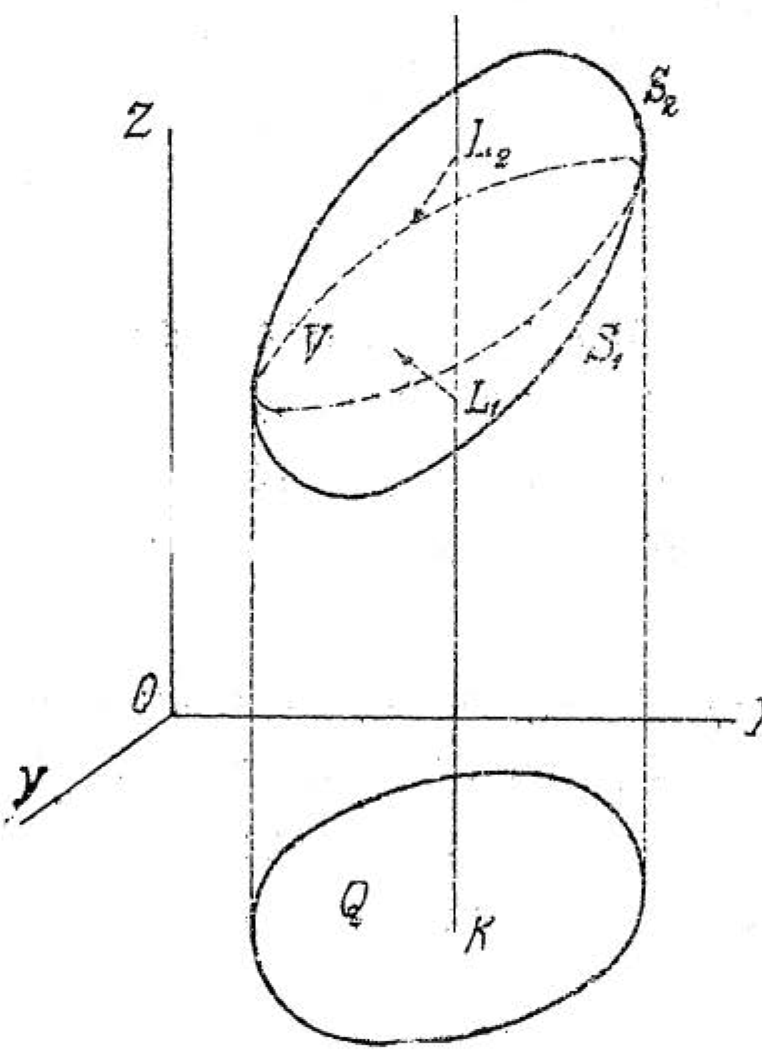
§ 9. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО.

Названная формула преобразует интеграл по об'ему в интеграл по поверхности, ограничивающей этот об'ем; она применяется в механике и в математической физике.

Пусть нам даны 3 функции X, Y, Z от переменных независимых x, y, z и пусть эти функции, вместе со своими производными I-го порядка, однозначны и непрерывны внутри некоторого об'ема V, равно как и на его поверхности S. Допустим, ради простоты, что данный об'ем ограничен такой поверхностью, которая пересекается с прямыми, параллельными координатным осям не более, чем в двух точках. Спроектировав этот об'ем на плоскость YOX, получим на ней некоторую область Q (см.черт.27); при этом линия касания проектирующего цилиндра с поверхностью S разобьет последнюю на две части: нижнюю S_1, для которой имеем $z_1=\varphi_1(x,y)$, и верхнюю S_2, для которой имеем $z_2=\varphi_2(x,y)$.

После этих предварительных замечаний, начнем вывод формулы Остроградского с вычисления интеграла

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz;$$



Черт. 27.

легко видеть, что первое интегрирование по z будет происходить в границах от $KL_1=z_1$ до $KL_2=z_2$, так что имеем:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial Z}{\partial z}\,dz=[Z]_{z_1}^{z_2}=Z(x,y,z_2)-Z(x,y,z_1);$$

дальше дело, очевидно, сведется к вычислению двойных интегралов по области Q; и таким образом, получаем:

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint_Q Z(x,y,z_2)\,dx\,dy-\iint_Q Z(x,y,z_1)\,dx\,dy.$$

Возьмем первый интеграл и преобразуем его, введя в подинтегральное выражение косинус угла, образуемого с осью OZ нормалью к поверхности, направленной внутрь ограниченного ею об'ема; для верхней части поверхности имеем:

$$\cos(nz)=-\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

(необходимо взять знак минус, так как угол тупой - см. черт. 27); далее наш интеграл переписывается следующим образом:

$$\iint_Q Z(x,y,z_2)\,dx\,dy=\iint_Q Z(x,y,z_2)\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=$$

$$=-\iint_Q Z(x,y,z_2)\cos(nz)\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy;$$

если теперь мы вспомним формулу (I) предыдущего параграфа, дающую определение поверхностного интеграла, то сможем написать:

$$-\iint_Q Z(x,y,z_2)\cos(nz)\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = -\iint_{S_2} Z\cos(nz)\,d\sigma.$$

Подобным же образом преобразуем и второй интеграл с той только разницей, что для нижней части поверхности будет:

$$\cos(nz) = +\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ибо $\angle(nz)$ - здесь острый; следовательно, в этом случае получим:

$$\iint_Q Z(x,y,z_1)\,dx\,dy = \iint_{S_1} Z\cos(nz)\,d\sigma.$$

Наконец, вычитаем из I-го выражения 2-е и приходим к такой формуле:

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = -\iint_{S_2} Z\cos(nz)\,d\sigma - \iint_{S_1} Z\cos(nz)\,d\sigma;$$

но два интеграла правой части можно заменить одним интегралом, взятым уже по всей поверхности S, так что:

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = -\iint_S Z\cos(nz)\,d\sigma.$$

По аналогии можно написать две другие формулы, связанные с осями OX и OY точно так же, как только что полученная формула связана с осью OZ

$$\iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = -\iint_S Y\cos(ny)\,d\sigma;$$

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = -\iint_S X\cos(nx)\,d\sigma.$$

Наконец, складывая все три равенства, получаем формулу Остроградского:

$$\iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = -\iint_S\left[X\cos(nx)+Y\cos(ny)+Z\cos(nz)\right]d\sigma.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если направить нормаль к поверхности во внешнюю часть пространства, то знак минус в правой части заменится на плюс. Выведенную формулу связывают также с именами Гаусса и Грина.

§ 10. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА.

С именем Эйлера связаны интегралы двух родов. Интегралом I-го рода называется интеграл:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx;$$

здесь p и q являются параметрами, и наш определенный интеграл будет функцией от p и q ; эта функция обозначается символом:

$$B(p,q)$$

и называется также „функцией бэта". Интеграл 2-го рода имеет вид:

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx;$$

это будет функция от одного только p , которая обозначается символом

$$\Gamma(p)$$

и называется также „функцией гамма ".

Рассматривая интегралы Эйлера, мы встречаемся со следующим затруднением.

Если числа $p-1$ или $q-1$ будут отрицательными, то в интеграле I-го рода под'интегральная функция претерпевает разрыв непрерывности на границах, и в интеграле 2-го рода видим то же самое на нижней границе (при $p-1<0$). Кроме того у последнего интеграла верхняя граница $=\infty$. О таких „несобственных" интегралах у нас шла речь во 2-м выпуске I-й части „Математического Анализа" (стр. I49-I60); мы видели что подобные интегралы могут быть и сходящимися и расходящимися. В частности, подробное исследование этого вопроса (которое читатель может найти в курсе проф. Поссе гл. IX §4) показывает, что интегралы Эйлера имеют смысл при p и $q>0$.

Итак имеем:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p \text{ и } q>0), \quad (1)$$

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx \qquad (p>0). \quad (2)$$

Интегралы Эйлера являются новыми, вообще говоря, трансцендентными функциями; теория их подробно разработана, и они встречаются в различных приложениях. Мы ограничимся лишь основными свойствами этих функций.

Прежде всего мы докажем, что функция $B(p,q)$ сводится к функции гамма, а для этого преобразуем ее с помощью подстановки:

$$x=\frac{z}{1+z};$$

отсюда выводим:

$$1-x=\frac{1}{1+z} \quad \text{и} \quad dx=\frac{dz}{(1+z)^2};$$

так как в свою очередь

$$z=\frac{x}{1-x},$$

то новыми границами для z будут 0 и ∞. Таким образом, получаем:

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(1+z)^{q-1}}\cdot\frac{dz}{(1+z)^2},$$

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\cdot dz}{(1+z)^{p+q}}. \quad (3)$$

Далее преобразуем выражение для функции $\Gamma(p)$, полагая:

$$x=mz, \text{ где } m>0;$$

легко видеть, что границы остаются теми же самыми, и можем написать:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty m^{p-1} z^{p-1} e^{-mz}\, m.dz$$

$$\Gamma(p)=m^p\int_0^\infty z^{p-1} e^{-mz} dz. \tag{4}$$

Эту формулу мы перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{m^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\cdot\int_0^\infty z^{p-1} e^{-mz} dz.$$

Желая воспользоваться последней формулой для изучения функции $B(p,q)$, заменим здесь:

$$m \text{ на } 1+x$$
$$p \text{ на } p+q \quad ;$$

тогда получим:

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}}=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\cdot\int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-(1+x)z} dz.$$

Умножим теперь обе части этого равенства на x^{p-1} и проинтегрируем их в границах от 0 до ∞ ; в силу формулы (3), в левой части получим функцию $B(p,q)$:

$$B(p,q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\cdot\int_0^\infty x^{p-1} dx\int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-(1+x)z} dz.$$

Меняем теперь порядок интегрирования и выносим за знак первого интегрирования, происходящего теперь по x ,всех множителей, не зависящих от x:

$$B(p,q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\cdot\int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-z} dz\int_0^\infty x^{p-1} e^{-zx} dx.$$

Но в силу формулы (4):

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-zx} dx=\frac{\Gamma(p)}{z^p},$$

так что:

$$B(p,q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-z}\cdot\frac{\Gamma(p)}{z^p}\cdot dz$$

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty z^{q-1} e^{-z} dz.$$

Наконец:

$$\int_0^\infty z^{q-1} e^{-z} dz = \Gamma(q),$$

и мы окончательно приходим к важному соотношению:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (5)$$

Это соотношение показывает, что изучение интегралов Эйлера целиком сводится к изучению свойств функции гамма.

ЗАМЕЧАНИЕ. В изложенном доказательстве мы изменили порядок интегрирования, опираясь на теорему, доказанную в §2 (п.2). В этой последней границы предполагались конечными, но теорема остается верной и для бесконечных границ при известных условиях сходимости.

Основываясь на формуле (5), мы в дальнейшем займемся исключительно функцией $\Gamma(p)$. Эта функция определена для положительных значений аргумента, а при отрицательных она обращается в бесконечность:

$$\Gamma(p) = \infty \quad \text{при} \quad p < 0.$$

Основное свойство функции гамма дается формулой приведения, которую сейчас выведем.

Возьмем:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx \qquad (p>0)$$

и проинтегрируем по частям, полагая

$$u = x^p \quad \text{и} \quad dv = e^{-x} dx;$$

таким путем найдем:

$$\Gamma(p+1) = -\left[x^p e^{-x}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

При $p>0$ выражение в квадратных скобках равно 0 на нижней границе; по правилу Лопиталя убедимся, что оно равно 0 и на верхней границе:

$$\left[x^p e^{-x}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{x^p}{e^x}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{px^{p-1}}{e^x}\right]_{x=\infty} = \left[\frac{p(p-1)x^{p-2}}{e^x}\right]_{x=\infty} = \ldots\ldots$$

Если p - число целое, то в конце концов в числителе получим постоянное число, и истинное значение неопределенности будет равно 0 ; если же p - не целое, то в числителе в конце концов дойдем до отрицательной степени,а в результате и подавно получится 0.

Следовательно, мы приходим к весьма важной формуле:

$$\Gamma(p+1)=p.\Gamma(p). \tag{6}$$

Если p - число целое, то $\Gamma(p+1)$ вычисляется до конца. Действительно, если $p>1$ и следовательно $p-1>0$, то по тому же правилу (6) имеем:

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1);$$

подставляя ,найдем:

$$\Gamma(p+1)=p(p-1)\Gamma(p-1);$$

если $p-1>1$, то

$$\Gamma(p-1)=(p-2)\Gamma(p-2);$$

$$\Gamma(p+1)=p(p-1)(p-2)\Gamma(p-2)$$

и т.д.

Подобные выкладки продолжаем до тех пор пока не дойдем до $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(p+1)=p(p-1)(p-2)\ldots.3.2.\Gamma(2)$$

$$\Gamma(p+1)=p(p-1)(p-2)\ldots.3.2.\Gamma(1);$$

но

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1,$$

так что

$$\Gamma(p+1)=p(p-1)(p-2)\ldots3.2.1,$$

или

$$\Gamma(p+1)=p! \qquad (p-\text{целое}>0) \tag{7}$$

Таким образом, для целых значений p , функция гамма сводится к факториалу; при других же значениях p, функция $\Gamma(p)$ вообще будет новой трансцендентной функцией.

Выведем еще одну формулу в интересах дальнейших приложений (к так называемым функциям Бесселя). Пусть k есть целое положительное число, а p - любое положительное число; тогда повторное применение правила (6) дает:

$$\Gamma(p+k+1)=(p+k).\Gamma(p+k)=(p+k)(p+k-1).\Gamma(p+k-1)=$$
$$=\ldots\ldots=(p+k)(p+k-1)\ldots.(p+2).\Gamma(p+2)=$$
$$=(p+k)(p+k-1)\ \ldots.(p+2)(p+1)\Gamma(p+1).$$

Итак, приходим к равенству:

$$\Gamma(p+k+1)=(p+1)(p+2)\ldots,(p+k).\Gamma(p+1). \qquad (8)$$

Другие свойства функции $\Gamma(p)$ мы приведем без доказательства. Так, эту функцию можно представить в виде бесконечного произведения:

$$\Gamma(p)=\lim\left[m^p\frac{1.2.3.\ldots.m}{(p+m)(p+m-1)\ldots.(p+1)p}\right]_{m\to\infty}; \qquad (9);$$

далее существует зависимость:

$$\Gamma(p).\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{при} \quad 0<p<1 \ ; \qquad (10);$$

отметим еще одно частное значение функции гамма:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

которое получается из (10) при $p=\frac{1}{2}$.

Доказательство формул 9 и 10 читатель может найти в курсе проф.Поссе (гл.IX,§5).

Остановимся на вопросе о вычислении значений функции гамма. Прежде всего формула (8) позволяет эти вычисления всегда свести к случаю, когда

$$0<p<1.$$

Для большего удобства, преобразуем сначала эту формулу, заменяя в ней k на $(k-1)$:

$$\Gamma(p+k)=(p+1).(p+2)\ldots(p+k-1).\Gamma(p+1),$$

или при помощи формулы (6):

$$\Gamma(p+k)=p(p+1)(p+2)\ldots(p+k-1).\Gamma(p). \qquad (11)$$

Пусть теперь нам надо вычислить значение функции гамма при некотором p; выделяя из этого числа целую часть, найдем:

$$p=k+p_1, \qquad \text{где} \quad k \text{ - целое и } \quad 0<p_1<1;$$

затем применим формулу (II):

$$\Gamma(p)=\Gamma(p_1+k)=p_1(p_1+1)(p_1+2)\ldots(p_1+k-1)\Gamma(p_1),$$

и дело сведется к вычислению функции гамма в том случае, когда аргумент равен правильной положительной дроби. Так, например:

$$\Gamma\left(\frac{19}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{4}+4\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{15}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3465}{256}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Наконец, формула (10) позволяет свести вычисления к случаю, когда:

$$0<p<\frac{1}{2}.$$

Действительно, из этой формулы выводим:

$$\Gamma(p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-p)},$$

и если

$$\frac{1}{2}<p<1,$$

то

$$0<1-p<\frac{1}{2}.$$

Так, например, при $p=\frac{3}{4}$ получим:

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)},$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Для функции $\Gamma(p)$ (или для ее логарифма) имеются таблицы; их можно найти, например, в сборнике таблиц Jahnke und Emde. Небольшие таблицы имеются также в сборнике проф. Глазенапа и в брошюре проф. Иванова „Функции Бесселя" (изд. Военно-Морской Академии).

§ 11. РЯДЫ ФУРЬЕ.

I. Начнем с вычисления некоторых определенных интегралов, которые понадобятся ниже; соответственные неопределенные интегралы были найдены в I-й части Математического Анализа (вып.4, §53, п.2). Полезно будет также вспомнить правила о нахождении интегралов от четных и нечетных функций в границах, отличающихся только знаком (вып. 2, стр.140-141).

Будем под m и n понимать целые числа.

На основании только что упомянутого правила, всегда имеем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\, dx = 0 \qquad (1)$$

Что же касается подобного интеграла от косинуса, то придется различать два случая:

Если m не $= 0$, то :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos mx\, dx = 2\left[\frac{\sin mx}{m}\right]_{0}^{\pi} = 0;$$

если же $m=0$, то имеем интеграл:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi.$$

Итак, можно записать

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx.dx = \begin{cases} = 2\pi, & \text{если } m=0 , \\ = 0, & \text{если } m\neq 0 . \end{cases} \qquad (2)$$

Переходим к интегралу:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx.\cos nx.dx,$$

где m и n будем считать не только целыми, но и положительными; по известному приему он разлагается на 2 интеграла:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx.\cos nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m-n)x dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\, dx;$$

если m не $= n$, то по формуле (2) оба интеграла равны 0; если же $m=n$, то 2-й интеграл попрежнему равен 0, а первый $=2\pi$. Итак, приходим к выводу:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx.\cos nx dx=\begin{cases}=\pi, & \text{если } m=n\\ =0, & \text{если } m\neq n\end{cases} \tag{3}$$

Совершенно также находится другая формула:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx.\sin nx.dx=\begin{cases}=\pi, & \text{если } m=n,\\ =0, & \text{если } m\neq n.\end{cases} \tag{4}$$

Наконец, всегда будет справедливым равенство:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx.\sin n x.dx=0, \tag{5}$$

так как под интегралом стоит нечетная функция.

2. На втором месте скажем несколько слов о периодических функциях и о разложении их в тригонометрические ряды:

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом равным a, если имеет место равенство:

$$f(x+a)=f(x)$$

при всяком x (конечно, речь идет о тех значениях аргумента, которые вообще возможны для данной функции). Из этого свойства вытекает, что если мы знаем значения функции в промежутке, по величине равном периоду, то мы знаем уже все ее значения.

Простейший пример периодических функций доставляют тригонометрические функции:

$$\sin x \text{ и } \cos x,$$

которые как известно имеют период, равный

$$2\pi.$$

В дальнейшем нам придется иметь дело с функциями

$$\sin kx \text{ и } \cos kx,$$

где k - целое и положительное число; эти функции тоже имеют период $= 2\pi$.

Далее тот же период 2π имеет более общая функция:

$$A\sin(kx+\varphi),$$

где A и φ - постоянные; как известно, уравнение

$$y=A\sin(kx+\varphi)$$

выражает гармоническое колебательное движение, имеющее такое важное значение в физике.

ЗАМЕЧАНИЕ. В обоих последних случаях, когда под знаком синуса стоит $k.x$, периодом будет собственно число:

$$\frac{2\pi}{k}.$$

так как

$$k\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)=kx+2\pi.$$

Но легко видеть, что если период равен a, то и кратное этого числа $k.a$ также будет периодом. Следовательно, в рассматриваемом случае число:

$$k\cdot\frac{2\pi}{k}=2\pi$$

будет периодом.

Если $f(x)$ есть вообще какая-либо периодическая функция, то уравнение:

$$y=f(x)$$

дает нам тоже известный колебательный процесс, ибо значения функции периодически повторяются; только этот колебательный процесс будет вообще сложнее того, о котором шла речь выше. Для физики бывает важно сложное колебательное движение представить как сочетание или наложение ряда гармонических колебаний; это действие называется „гармоническим анализом".

С математической точки зрения, эта задача представляется как разложение данной периодической функции $f(x)$ с периодом равным 2π в бесконечный тригонометрический ряд вида:

$$f(x)=A_0+A_1\sin(x+\varphi_1)+A_2\sin(2x+\varphi_2)+A_3\sin(3x+\varphi_3)+\ldots\ldots,$$

или

$$f(x)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx+\varphi_k).$$

Конечно, периодом данной функции может быть и не 2π, а какое-нибудь другое число; но начнем со случая когда период $= 2\pi$.

Указанный выше ряд можно представить в ином виде, для чего преобразуем его общий член:

$$A_k \sin(kx+\varphi_k)=A_k \sin\varphi_k \cos kx+A_k \cos\varphi_k \sin kx;$$

теперь обозначим:

$$A_k \sin\varphi_k = a_k \quad \text{и} \quad A_k \cos\varphi_k = b_k,$$

и еще для удобства положим:

$$A_0=\frac{a_0}{2};$$

тогда наш ряд получит вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx+b_k \sin kx),$$

или в развернутом виде:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1 \cos x+b_1 \sin x)+(a_2 \cos 2x+b_2 \sin 2x)+(a_3 \cos 3x+b_3 \sin 3x)+\ldots$$

Ряды такого вида называются „тригонометрическими рядами" или „рядами Фурье".

Возникают вопросы о возможности разложения данной функции в такой ряд, о сходимости этого ряда и т.п. Ответ на указанные вопросы дает теорема Дирихле; однако ее доказательство требует весьма значительного времени, и потому мы не можем привести его здесь.

Желающие могут найти это доказательство в подробных курсах проф. Поссе, Кояловича, Смирнова, Куранта. В основном условия для возможности разложения сводятся к непрерывности и дифференцируемости данной функции.

Здесь мы поставим себе задачу: считая разложение в ряд Фурье возможным, определить его коэффициенты.

3. Итак, пусть нам задана в промежутке

$$-\pi \leq x \leq +\pi$$

функция $f(x)$, имеющая период равный 2π; ставится задача о разложении в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx); \qquad (6)$$

и задача эта сводится к нахождению коэффициентов разложения, так как вид ряда нам уже известен.

Для нахождения a_0, проинтегрируем равенство (6) в границах от $-\pi$ до $+\pi$; так как при известных условиях сходимости, бесконечный ряд можно почленно интегрировать, то:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\,dx\right);$$

но все интегралы правой части, на основании формул (I) и (2), обращается в нули, так что

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)dx=a_0\cdot\pi,$$

откуда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)dx. \qquad (7)$$

Так как функция $f(x)$ нам дана, то a_0 мы найдем либо точно, либо приближенно.

Будем теперь искать коэффициент a_k при некотором значении $k=n$; а для этого умножим равенство (6) на $\cos nx$ и проинтегрируем его в границах от $-\pi$ до $+\pi$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos nx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right]$$

Первый интеграл правой части равен 0 на основании формулы (2); точно также, на основании (5), равны нулю все интегралы, стоящие на последнем месте; что же касается интегралов, занимающих среднее место, то формула (3) показывает, что все они равны 0, за исключением того, для которого $k=n$. Таким образом, получаем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \cdot \pi,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx. \qquad (8)$$

По этой формуле мы сумеем найти a_n. Для определения b_n, умножим обе части равенства (6) на $\sin nx$ и проинтегрируем в тех же границах. Подобно предыдущему найдем:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx. \qquad (9)$$

Заметим, что формула (7) заключается в формуле (8), так как получается из последней при $n=0$.

Остановимся на том случае, когда данная функция $f(x)$ будет четной или нечетной.

Если $f(x)$ - функция четная, то произведение $f(x).\sin nx$ будет функцией нечетной, а $f(x).\cos nx$ - четной; тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} b_n &= 0 \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Если же $f(x)$ — нечетная, то подобным же образом получим:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Сделаем еще одно замечание. Функция $f(x)$ была задана в в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$; но она может быть задана в каком-нибудь другом промежутке, по величине равном 2π, например, в промежутке

$$\alpha \leq x \leq \alpha + 2\pi.$$

Тогда в формулах (8) и (9) придется только интегралы брать в границах от α до $\alpha + 2\pi$. Это основано на том, что в каждом промежутке, равном 2π, периодическая функция принимает те же самые значения, но только в ином порядке; а последнее обстоятельство не повлияет на величину определенного интеграла.

Сделаем для пояснения пример на определение коэффициентов ряда Фурье. Пусть задана функция следующим образом:

$$f(x)=x \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq +\pi$$

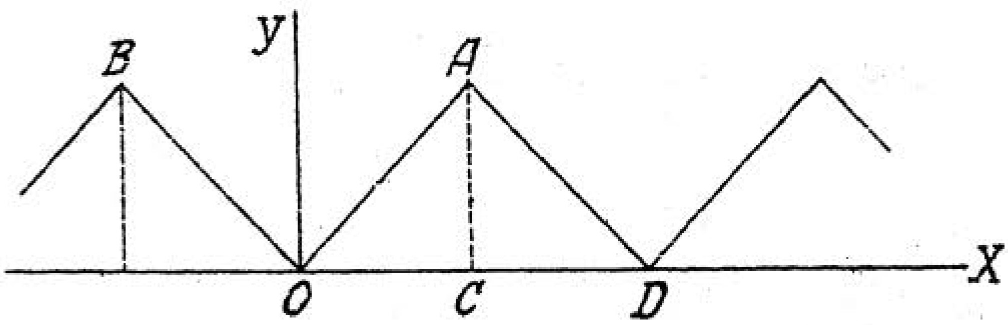
$$f(x)=-x \quad \text{при} \quad -\pi \leq x \leq 0,$$

так что в конце концов она задана в промежутке:

$$-\pi \leq x \leq +\pi.$$

Кроме того дано, что $f(x)$ имеет период равный 2π; требуется разложить ее в ряд Фурье.

Прежде всего построим ее график.



Черт. 28.

Для положительной части промежутка, график задается уравнением:

$$y=x,$$

т.е., это будет отрезок биссектриссы I-го координатного угла OA ($OC=CD=\ldots=\pi$). Для отрицательной части имеем

$$y=-x,$$

и получаем отрезок биссектриссы 2-го координатного угла OB. Таким образом, в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$, графиком функции служит ломаная BOA; дальше она будет повторяться в силу периодичности функции (черт.28).

Перед нами находится известный колебательный процесс, который надо разложить на ряд гармонических колебаний.

Из наших данных, или из рассмотрения графика, нетрудно заключить, что

$$f(-x)=f(x),$$

т.е. данная функция является четной, и можно воспользоваться формулами (10).

Таким образом, имеем

$$b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;$$

но в промежутке от 0 до π наша функция равна x; следовательно:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx;$$

при $n=0$ отсюда выводим:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi;$$

при $n\neq 0$ интегрируем по частям, полагая:

$$u=x \text{ и } \cos nx\,dx=dv;$$

$$\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx,$$

$$\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{1}{n^2}\Big[\cos nx\Big]_0^{\pi}=\frac{\cos n\pi-1}{n^2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi\cdot n^2}\cdot(\cos n\pi-1).$$

Дальше надо различить 2 случая:

1) n - четное ($n=2k$); тогда

$$\cos 2k\pi=1,$$

$$a_{2k}=0;$$

2) n - нечетное ($n=2k+1$); тогда:

$$\cos(2k+1)\pi=-1,$$

$$a_{2k+1}=-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (6), после очевидных упрощений получим:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\ldots\right).$$

4. В некоторых вопросах математической физики рассматриваемая функция бывает задана в промежутке:

$$0\leq x\leq\pi,$$

т.е. - в половине того промежутка, который служит периодом наших тригонометрических функций.

Тогда эту функцию можно разложить в данном промежутке в ряд Фурье, содержащий или только одни косинусы, или только одни синусы. В промежутке от 0 до π оба эти ряда дают значения данной функции; а вне этого промежутка они представляют различные функции.

Для того, чтобы можно было воспользоваться предыдущими формулами, надо иметь функцию во всем промежутке от $-\pi$ до $+\pi$; а для этого надо задать „продолжение" нашей функции на отрицательную часть промежутка.

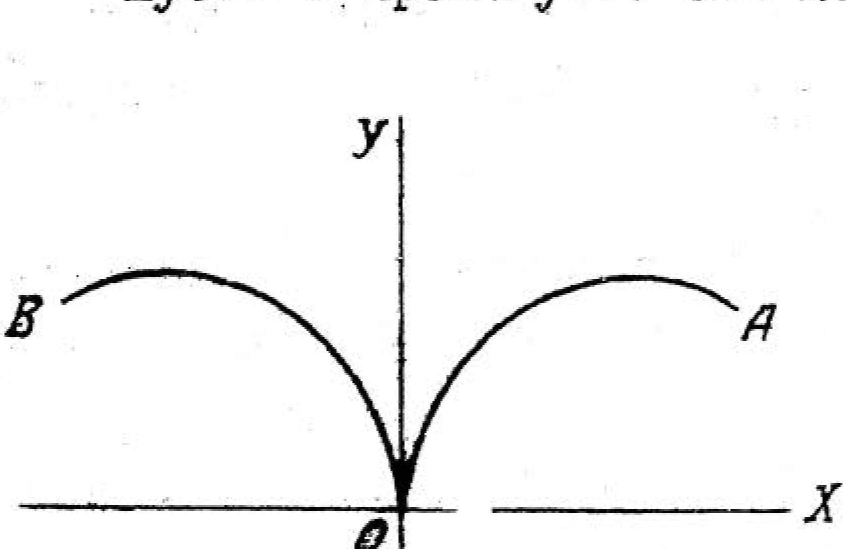
Продолжение данной функции можно задать произвольно, так как оно играет лишь вспомогательную роль, а для нас важны только значения функции в положительной части промежутка. Но для достижения той цели, которая была поставлена выше, это продолжение надо делать двояким путем: или „по закону четности" или „по закону нечетности".

Сделать продолжение по закону четности - это значит потребовать, чтобы для отрицательной части промежутка выполнялось условие:

$$f(-x)=f(x);$$

переменная x пробегает промежуток от 0 до π, тогда $-x$ будет меняться от 0 до $-\pi$. Указанное условие можно пояснить графически.

Пусть в промежутке от 0 до π данная функция представлена кривой OA; будучи продолжена по закону четности, она изобразится в промежутке от $-\pi$ до 0 кривой OB (черт.29).



Черт. 29.

Теперь мы имеем задание функции в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$, причем функция является четной; поэтому, применяя формулы (10), получаем ее разложение в виде:

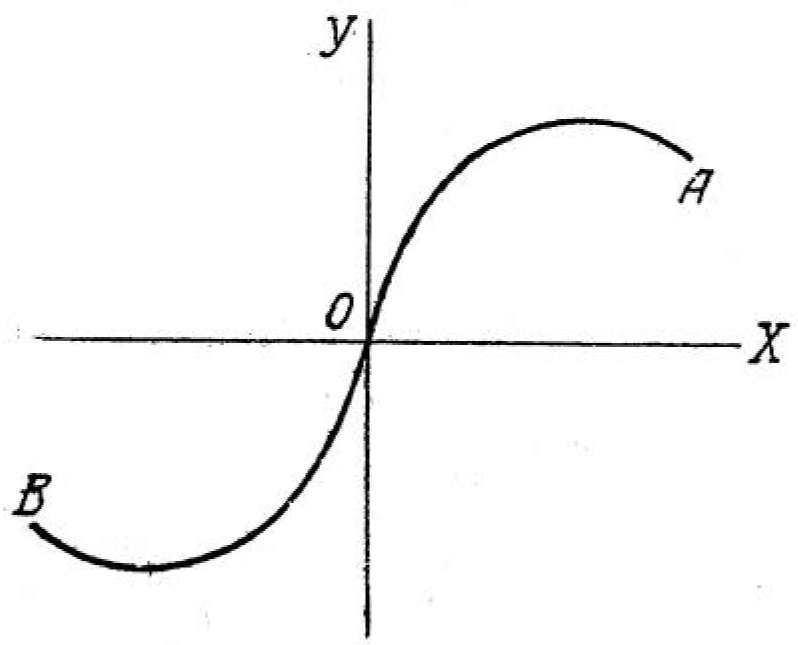
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \qquad (12)$$

где a_k определяются по формуле (10).

Продолжая функцию по закону нечетности, мы потребуем, чтобы:

$$f(-x)=-f(x);$$

графическое пояснение этого требования дано на черт.30.



Черт. 30.

Так как в полном промежутке наша функция является теперь нечетной, то, применяя формулы (11), находим для нее такое разложение:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \qquad (13)$$

где b_k определяются формулой (11).

Оба разложения (12) и (13) для значений аргумента

$$0 \leq x \leq \pi$$

дают значения данной функции $f(x)$; а вне этого промежутка они представляют различные функции. Поскольку нас интересует промежуток от 0 до π, можно пользоваться любым из полученных разложений, определяя их коэффициенты соответствующим образом.

5. В заключение остается обобщить полученные результаты. До сих пор мы имели дело с периодическими функциями, у которых период был равен 2π; но конечно в приложениях мы очень редко встретим случай, когда период будет равен именно числу 2π. Поэтому надо рассмотреть вопрос, как складывается разложение в ряд Фурье в том случае, когда период равен какому-либо другому числу $2l$.

Для того, чтобы получить искомое разложение, возьмем формулу (6):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

и сделаем в ней подстановку:

$$x=\frac{\pi z}{l} \quad \text{или} \quad z=\frac{lx}{\pi},$$

где z - новая переменная независимая. Так как x и z связаны линейной зависимостью, то для их приращений получаются соотношения:

$$\Delta x=\frac{\pi}{l}\cdot\Delta z \quad \text{и} \quad \Delta z=\frac{l}{\pi}\cdot\Delta x;$$

отсюда вытекает, что:

при $\Delta z=2l$ будет $\Delta x=2\pi$, и обратно.

Точно также легко усмотреть, что при

$$-\pi\leq x\leq+\pi$$

имеем:

$$-l\leq z+l,$$

и обратно.

При указанной подстановке, данная функция преобразуется следующим образом:

$$f(x)=f\left(\frac{\pi z}{l}\right);$$

обозначая:

$$f\left(\frac{\pi z}{l}\right)=\varphi(z),$$

мы приходим к функции от z, которая имеет период $=2l$, так как $f(x)$ имела период $=2\pi$.

Выполняя подстановку, от формулы (6) переходим к такой:

$$\varphi(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi z}{l}+b_k\sin\frac{k\pi z}{l}\right), \qquad (14)$$

которая и дает искомое разложение.

Остается выразить коэффициенты a_k и b_k через функцию $\varphi(z)$; а для этого надо произвести замену переменной:

$$x=\frac{\pi z}{l}$$

в определенных интегралах, входящих в формулы (8) и (9). Таким образом получаем:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} f\left(\frac{\pi z}{l}\right)\cdot\cos\frac{n\pi z}{l}\cdot\frac{\pi}{l}\,dz,$$

или

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\varphi(z)\cos\frac{n\pi z}{l}\,dz. \tag{15}$$

Подобным же образом найдем:

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\varphi(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz. \tag{16}$$

Отметим также те изменения, которые произойдут в других формулах выведенных выше, когда будем иметь дело с периодом, равным $2l$.

Если функция $\varphi(z)$ задана в промежутке:

$$\alpha\le z\le\alpha+2l,$$

то соответственным образом меняются границы у определенных интегралов в формулах (15) и (16).

Если $\varphi(z)$ - функция четная, то

$$\left.\begin{aligned} &b_n=0,\\ &a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(z)\cos\frac{n\pi z}{l}\,dz; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

если же $\varphi(z)$ - нечетная, то

$$\left.\begin{aligned} &a_n=0,\\ &b_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Наконец, если $\varphi(z)$ задана в промежутке

$$0\le z\le l,$$

составляющем половину периода тригонометрических функций, входящих в последние формулы, то в этом промежутке функция $\varphi(z)$ разлагается в ряд Фурье, содержащий только косинусы, или только синусы:

$$\varphi(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi z}{l}, \tag{19}$$

где a_k определяются по формулам (17); или:

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi z}{l}, \tag{20}$$

где b_k определяются по формулам (I8).

ПРИМЕР ДЛЯ УПРАЖНЕНИЯ.

Функция $f(t)$ с периодом $= T$ задана следующим образом:

$$f(t) = v_0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}T$$

$$f(t) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{2}T \leq t < T;$$

построить ее график и найти разложение в ряд Фурье.

Ответ:

$$f(t) = \frac{v_0}{2} + \frac{2v_0}{\pi} \cdot \left(\sin\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \ldots \right),$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

О г л а в л е н и е.