

В. БЛЯШКЕ
—
ВВЕДЕНИЕ
В ГЕОМЕТРИЮ
ТКАНЕЙ



ELEMENTE DER MATHEMATIK
VOM HÖHEREN STANDPUNKT AUS

Band IV

Herausgegeben von L. Locher-Ernst

Einführung in die Geometrie der Waben

von

WILHELM BLASCHKE

in Hamburg und Istanbul



BIRKHAUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

В. БЛЯШКЕ

ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ ТКАНЕЙ

Перевод с немецкого
М. А. АКВИСА

Под редакцией
И. М. ЯГЛОМА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

АННОТАЦИЯ

В этой книге рассматриваются свойства дифференциально-геометрических образов, которые сохраняются при всех взаимно-однозначных и непрерывных отображениях плоскости или некоторой ее части на область плоскости.

Книга рассчитана на студентов-математиков старших курсов или аспирантов, специализирующихся по геометрии или в близких с ней областях.

Бляшке Вильгельм.

Введение в геометрию тканей.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.*

Корректор *Л. О. Сечейко.*

Сдано в набор 7/1 1959 г. Подписано к печати 3/VIII 1959 г.
Бумага 84×108/16. Физ. печ. л. 4,5. Условн. печ. л. 7,38. Уч.-изд. л. 8,0.
Тираж 6000 экз. Т-06344. Цена книги 6 р. Заказ 1119.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

1-я тип. Трансжелдориздата МПС.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора перевода	7
Предисловие	11
§ 0. Введение	13

I. Криволинейные ткани на плоскости

§ 1. Связь с номографией	16
§ 2. Шестиугольные ткани	19
§ 3. Примеры	20
§ 4. Прямолинейные шестиугольные ткани	26
§ 5. Кривые третьего класса и эллиптические функции	28
§ 6. Формы Пфаффа ткани	30
§ 7. Дифференциальные операторы ткани	33
§ 8. Связность и кривизна ткани	36
§ 9. Вычисление кривизны при помощи функции ткани	38
§ 10. Применение к тканям, образованным поверхностями	42
§ 11. Прямолинейные ткани	44
§ 12. Инвариантные производные	50
§ 13. Полная система инвариантов ткани	52
§ 14. Каноническое разложение	52
§ 15. Геометрический смысл кривизны ткани по Томсену	56
§ 16. Нормирование функции ткани	57
§ 17. Основные вопросы номографии	59
§ 18. Комплексные формы Пфаффа	63
§ 19. «Вращение» ткани	65
§ 20. Параллельное перенесение Кельвина — Леви-Чивита	67
§ 21. Аналог одного замечания Э. Ферми	69
§ 22. Ткани и конформные отображения	72
§ 23. О лучшей номограмме	75

II. Ткани, образованные поверхностями

§ 24. Формы Пфаффа тканей, образованных поверхностями	77
§ 25. Первые инварианты	79
§ 26. Кривизны и связность	80
§ 27. Условия интегрируемости	82
§ 28. Инвариантные производные	84
§ 29. Геометрические иллюстрации	86

§ 30. Криволинейные ткани в тканях, образованных поверхностями	88
§ 31. Октаэдрические ткани	90
§ 32. Условие замкнутости октаэдрической ткани	91
§ 33. Октаэдрические ткани, образованные плоскостями	94
§ 34. Шестиугольные пространственные ткани	97
§ 35. Вычисление инвариантов при помощи функции ткани	99
§ 36. Каноническое разложение	102
§ 37. Шестиугольные ткани из плоскостей	103
§ 38. О пространственных кривых четвертого порядка первого рода	106
§ 39. Спряжляемые ткани, образованные поверхностями	109
§ 40. Несколько нерешенных вопросов, относящихся к тканям, образованным поверхностями	111

III. Замечания о криволинейных 4-тканях на плоскости

§ 41. Обзор инвариантов 4-ткани	114
§ 42. Проективная модель	116
§ 43. Нормирование форм Пфаффа	118
§ 44. Ранг 4-ткани	120
§ 45. Максимальный ранг	121
§ 46. Спряжляемость	123
§ 47. Шестиугольные n -ткани	127
§ 48. Несколько нерешенных вопросов, относящихся к тканям \mathcal{W}^n	128

IV. О криволинейных тканях в пространстве

§ 49. 2-ткани	130
§ 50. 3-ткани	132
§ 51. Четырехугольные ткани \mathcal{W}^n	133
§ 52. Пространственные кривые третьего порядка	134
§ 53. Кубическое кремоново преобразование	137
§ 54. Исключительная ткань \mathcal{W}^6	138
§ 55. Ранг криволинейной ткани в пространстве	139
Алфавитный указатель	142

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В конце 20-х годов нашего века в немецких математических журналах стали появляться многочисленные статьи одного из виднейших современных геометров, руководителя Гамбургской математической школы — В. Бляшке, его учеников и сотрудников, носящие общий подзаголовок «Топологические вопросы дифференциальной геометрии». Наиболее интенсивная работа в этом направлении велась на рубеже 20-х и 30-х годов: в одном лишь 1930 г. было напечатано 17 статей на эту тему. В дальнейшем число подобных публикаций стало сокращаться — основы нового направления были уже заложены и, несмотря на большое число оставшихся нерешенными вопросов, появилась необходимость подведения первых итогов. Решению этой задачи была посвящена обстоятельная монография «Геометрия тканей» (*Geometrie der Gewebe*) В. Бляшке и его сотрудника Г. Боля, вышедшая в свет в 1938 г. в известной серии *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* немецкого издательства Шпрингер и освещающая результаты многолетней работы большого коллектива исследователей. Однако и после выпуска в свет этой книги В. Бляшке не перестал интересоваться новым направлением дифференциальной геометрии, у колыбели которого он стоял. Постоянно странствуя по свету, он все время возвращался к любимой теме, читая лекции или лекционные курсы в Москве и в Стамбуле, в Барселоне и в Мессине. Не оставлял Бляшке и задачу изложения основ «Топологической дифференциальной геометрии». В его интереснейшей «Проективной геометрии», вышедшей в свет в Вольфбюттене (ФРГ) в 1947 г. и затем неоднократно переиздававшейся, этим вопросам посвящена заключительная глава; специальные книги по «Геометрии

тканей»*) вышли в свет в Барселоне (Испания) в 1954 г. и в Базеле (Швейцария) в 1955 г. Перевод последней из этих книг и предлагается сейчас вниманию советского читателя.

Появление этого перевода представляется нам тем более уместным, что открытая В. Бляшке новая глава классической дифференциальной геометрии, отметившая уже свою тридцатую годовщину, весьма мало популярна в нашей стране. В. Бляшке неоднократно читал у нас обзорные лекции на эту тему и в Харькове в 1930 г. на I Всесоюзном математическом съезде**), и в Москве в 1934 г. на руководимой покойным В. Ф. Каганом Первой международной конференции по тензорной дифференциальной геометрии***), и снова в Москве в 1956 г. на Третьем всесоюзном математическом съезде. Однако его призывы обратиться к этой тематике почти не находили отклика****). Одной из причин этого являлось, по-видимому, почти полное отсутствие на русском языке каких бы то ни было изложений «геометрии тканей»: в течение многих лет основным источником наших знаний по этому кругу вопросов являлись указанные в сносках **) и ***) статьи Бляшке, напечатанные в сборниках, изданных ничтожными тиражами. Таким образом, появление настоящей книги ликвидирует бесспорный пробел в нашей математической литературе.

*) В последнее время В. Бляшке вместо предложенного им ранее термина «*Geometrie der Gewebe*» («Геометрия тканей») употребляет в том же смысле название «*Geometrie der Waben*» («Геометрия сот»). Мы в переводе вынуждены были сохранить прежний термин из-за чисто грамматических затруднений, связанных с употреблением слова «соты» (это слово не имеет в русском языке единственного числа).

**) См. В. Бляшке, Новые течения в дифференциальной геометрии, Труды I Всесоюзного съезда математиков, М.—Л., 1936, 167—178.

***) См. В. Бляшке, О геометрии тканей, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. IV, М.—Л., 1937, стр. 55—61.

****) Единственное известное мне исключение в этом отношении составляет содержательное исследование А. Е. Либера, нашедшего необходимые и достаточные условия эквивалентности произвольной двумерной p -ткани прямолинейной p -ткани на плоскости и p -ткани, образованной p семействами параллельных прямых на плоскости (см. А. Е. Либера, О двумерных пространствах с алгебраической метрикой, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. IX, М.—Л., 1952, стр. 319—350).

В чем же заключается содержание «Геометрии тканей» или «текстильной геометрии», как любил говорить Бляшке на первом этапе работы над этой темой*)? Основная идея достаточно ясно обрисована автором во Введении к настоящей книге. Согласно идее Ф. Клейна геометрия изучает инварианты тех или иных групп преобразований; эта точка зрения применима и к дифференциальной геометрии и позволяет выделить отдельные ее ветви, как, например, дифференциальную геометрию обычного (евклидова) пространства, аффинную, проективную или конформную дифференциальную геометрию. В. Бляшке предлагает рассматривать «топологическую» дифференциальную геометрию, т. е. изучать дифференциально-геометрические (локальные!) свойства различных объектов, инвариантные относительно произвольных взаимно-однозначных и взаимно-непрерывных (топологических) преобразований. При этом использование классического аппарата дифференциальной геометрии заставляет нас ограничиться преобразованиями, задаваемыми функциями, дифференцируемыми достаточно число раз или даже аналитическими; однако Бляшке многократно выражал надежду, что последующее развитие науки поможет избавиться от этого довольно искусственного ограничения (ср., например, ниже, стр. 15)**).

Изменение целей исследования неизбежно отражается и на объекте его. Изучаемые в классической дифференциальной геометрии кривые и поверхности устроены «в малом» в каждой своей (обыкновенной) точке топологически одинаково — малый отрезок любой линии не отличается, с нашей точки зрения, от отрезка прямой, а небольшой участок поверхности — от плоской площадки. Поэтому кривые и поверхности не имеют топологических свойств, позволяющих отличать одну из них от другой. Также и «сети» на плоскости или на произвольной поверхности, т. е. двупараметрические семейства линий, такие, что через каждую точку определенной области проходят

*) См., например, доклад В. Бляшке, Текстильная геометрия и абелевы интегралы, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, 43, 1933, стр. 87—97.

**) Впрочем, развитие геометрии за последние годы скорее предостерегает от излишнего оптимизма в этом отношении (ср., например, статьи Дж. Нэша и Н. Кейпера, напечатанные в журнале переводов «Математика» 1. № 2 (1957)).

две (не касающиеся в этой точке!) линии, топологически эквивалентны — все они «устроены» как сеть координатных линий на плоскости в декартовой системе координат. Совсем по-другому обстоит дело, когда мы от сети переходим к «3-ткани», т. е. к трехпараметрическому семейству линий на плоскости или на поверхности, такому, что через каждую точку рассматриваемой области проходят три (не касающиеся друг друга!) линии трех различных семейств. 3-ткани уже могут быть устроены топологически различно; далеко не каждую такую ткань можно отобразить, скажем, на ткань, образованную прямыми трех фиксированных направлений. Подобные «ткани» и родственные им образы составляют основной предмет изучения в этой книге.

Скажем еще несколько слов о характере книги. Она представляет собой скорее беглый обзор предмета, чем детальное изложение его. Написанное с характерной для В. Бляшке живостью и педагогическим мастерством «Введение в геометрию тканей», в противоречие с принятой в немецкой научной литературе традицией, является именно введением в предмет — оно хорошо освещает тематику новой области геометрии, основные методы ее и стоящие перед ней задачи, а также место «геометрии тканей» в ряду других математических дисциплин; имеется здесь также и достаточно широкая картина достигнутых до сих пор успехов. При этом доказательства здесь часто не проведены с полной тщательностью, а иногда (особенно во второй половине книги) и вовсе опущены; для восполнения пробелов читателю, пожелавшему избрать «Геометрию тканей» своей научной специальностью, придется обратиться и к упомянутой выше монографии Бляшке — Боля 1938 г. и к журнальной литературе. В переводе мы в некоторых местах восстановили в подстрочных примечаниях ход мысли автора (эти примечания отмечены звездочками в отличие от нумерованных сносок автора); не имея, однако, в виду менять коренным образом характер книги, мы сделали это только в тех случаях, когда можно было обойтись немногими строчками, и главным образом в более подробно написанной первой части книги. Кроме того, в переводе исправлены многочисленные описки и мелкие дефекты немецкого издания.

И. М. Яглом

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение моей жизни я совместно со своими учениками и сотрудниками выращивал различные садики, и один из них назывался «геометрия тканей». Он принес мне удивительные плоды, как, например, приглашение на совещание работников текстильной промышленности. Поэтому я теперь вместо «тканей» предпочитаю говорить о «сотах», так как мне кажется более привлекательным иметь дело с пчелами и пчеловодами, а не с ткачами *).

Мой друг Боль (G. Bol) написал в 1938 г. при моем участии довольно тяжеловесную книгу, посвященную этому предмету **); в этой книге он собрал вместе и упорядочил все сделанное в этой области, начиная с работы 1927 г. моего рано умершего друга Томсена (G. Thomsen 1899—1934).

В последние годы я снова во многих местах — в Барселоне, Гамбурге, Стамбуле и Мессине — читал лекции о тканях ¹⁾).

Поэтому я охотно последовал предложению моего коллеги Лёхера (Locher) внести свой вклад в издаваемую им серию книг, тем более, что и в Швейцарии нашлись люди, интересующиеся этими вопросами.

Если Франческо Севери писал недавно, что «современная математика больна абстракцией», то нашу ветвь гео-

*) См. примечание *) на стр. 8.

**) W. Blaschke und G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Berlin, 1938.

¹⁾ W. Blaschke, *Introducción a la Geometrie de los tejidos*— лекции, читанные в Барселоне и Мессине, изданные Тейксидором (J. Teixidor) и Доу (A. Dou). (Seminario Matematico de la Universidad de Barcelona, 1954.)

метрии следует признать совершенно здоровой (может быть это означает, что она недостаточно современна?), так как основную роль в ней играют вполне «наглядные» понятия.

Я хочу поблагодарить моих коллег Лагради (K. Lagrady) из Гамбурга и Ёцкана (A. Özkan) из Стамбула за улучшения в этой книге, которыми я им обязан.

Стамбул, весна 1955 г.

§ 0. Введение

Прежде всего я хочу попытаться кратко охарактеризовать тему этой книги. Ф. Клейн в своей Эрлангенской программе 1872 г. *) классифицировал «геометрии» по соответствующим группам Ли. Я посвятил свою жизнь тому, чтобы оплодотворить этими идеями дифференциальную геометрию. Если рассмотреть на плоскости \mathfrak{E} , отнесенной к декартовым координатам x, y , «общее» или «топологическое отображение»

$$x^* = f(x, y), \quad y^* = g(x, y), \quad (0.1)$$

то можно поставить вопрос о геометрических свойствах «в малом», которые сохраняются при таких отображениях. При этом удобно предполагать, что функции f, g в области \mathfrak{G} плоскости являются аналитическими функциями вещественных переменных x, y и их функциональный определитель отличен от нуля:

$$\frac{\partial(x^*, y^*)}{\partial(x, y)} \neq 0. \quad (0.2)$$

Тогда уравнения (0.1) зададут обратимое однозначное и непрерывное отображение области \mathfrak{G} или некоторой ее части на область \mathfrak{G}^* плоскости \mathfrak{E} . Такие «топологические отображения», конечно, не образуют группу Ли, и само их групповое свойство имеет ограниченный характер. Мы будем здесь рассматривать такие свойства фигур в малом, которые остаются неизменными при всех подобных отображениях (0.1).

*) Ф. Клейн, Сравнительное обозрение новейших геометрических учений, Сборник «Об основаниях геометрии», М., Гостехиздат, 1956.

Пусть в области \mathfrak{G} задано «семейство кривых» \mathfrak{S}_j ,

$$u_j(x, y) = u_j = \text{const}, \quad (0.3)$$

которое покрывает \mathfrak{G} «простым образом», т. е. такое, что обе производные

$$\frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial y}$$

нигде в \mathfrak{G} не обращаются в нуль одновременно и что через каждую точку x, y области \mathfrak{G} проходит точно одна кривая семейства \mathfrak{S}_j . При этом мы будем предполагать функции $u_j(x, y)$ аналитическими в \mathfrak{G} . Рассмотрим теперь в области \mathfrak{G} три такие семейства: $j = 1, 2, 3$; при этом потребуем, чтобы функциональные определители

$$\frac{\partial(u_j, u_k)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad (j, k = 2, 3; 3, 1; 1, 2) \quad (0.4)$$

нигде в \mathfrak{G} не обращались в нуль и (не независимо от предыдущего) чтобы две кривые различных семейств имели в \mathfrak{G} не более одной общей точки. Описанный геометрический образ мы будем называть «криволинейной 3-тканью» или просто «тканью» \mathfrak{W} . При этом необходимо предполагать область \mathfrak{G} «выпуклой» относительно \mathfrak{W} в том смысле, что каждая пересекающая \mathfrak{G} кривая ткани имеет единственную непрерывную дугу, принадлежащую \mathfrak{G} .

Первая задача, которой мы здесь будем заниматься, — это отыскание тех свойств тканей \mathfrak{W} в малом, которые сохраняются при отображениях (0.1). В то время как в «топологии» рассматриваются инвариантные относительно отображений (0.1) свойства геометрической фигуры «в целом», как, например, «род» римановой поверхности, мы ограничиваемся в нашей «дифференциальной топологии» свойствами «в малом», как это обычно делается в дифференциальной геометрии. При этом нам удобно ограничиться аналитическими функциями f, g, u , так как это дает возможность применять обычные средства дифференциальной геометрии, например, формы Пфаффа. Сохраняется, одна-

ко, надежда, что более углубленное изучение позволит когда-нибудь обойти это неестественное ограничение, например, подобно тому, как это сделано Л. Шварцем (L. Schwartz) в его «Теории распределений» (Paris, 1951)*).

*) «Теория распределений» или «обобщенных функций» позволяет считать «дифференцируемой» каждую непрерывную функцию вещественного переменного. По поводу применения этого нового аппарата дифференциальной геометрии см., например, И. Я. Бакельман, Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей, УМН 11, вып. 2 (1956), 67—124.

1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТКАНИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Связь с номографией

Учение о тканях тесно связано с «номографией», которую применяют в технике, для того чтобы графически представить функциональную зависимость. Если мы из уравнений трех семейств кривых ткани \mathfrak{W} в области \mathfrak{G}

$$u_j(x, y) = u_j = \text{const} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

исключим переменные x, y , то получим зависимость

$$W(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad (1.2)$$

связывающую три кривые ткани, проходящие через одну точку. Если задана подобная функция W переменных u_j , аналитическая в области \mathfrak{G} и удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial W}{\partial u_j} \neq 0 \text{ в } \mathfrak{G}, \quad (1.3)$$

то с ее помощью можно «топологически» изучать ткань в малом. Если дана ткань \mathfrak{W} и указаны значения параметра u_j , отвечающего кривым каждого семейства \mathfrak{S}_j , то \mathfrak{W} представляет собой «номограмму» для соотношения (1.2).

Все ткани с одним и тем же «уравнением ткани» (1.2) эквивалентны в малом относительно нашего «топологического» отображения (1.2)*). Обратно, одной и той же ткани

) Пусть на плоскости заданы две ткани, определяемые семействами линий $u_j(x, y) = \text{const}$ и $u_j^(x, y) = \text{const}$ и имеющие одно «уравнение ткани» $W(u_1, u_2, u_3) = W(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = 0$. Подберем топологическое преобразование $x = f(x^*, y^*)$, $y = g(x^*, y^*)$ так, чтобы было $u_j(x, y) = u_j^*(x^*, y^*)$ ($j = 1, 2$); при этом семей-

соответствует много «функций ткани» $W(u_1, u_2, u_3)$, которые связаны друг с другом при помощи следующих преобразований:

$$I: W^*(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = W[u_1(u_1^*), u_2(u_2^*), u_3(u_3^*)], \quad (1.4)$$

что соответствует «замене параметра» в каждом семействе \mathfrak{S}_j при помощи однозначной функции

$$u_j = u_j(u_j^*); \quad (1.5)$$

$$II: \hat{W}(u_1, u_2, u_3) = H(u_1, u_2, u_3) W(u_1, u_2, u_3), \quad (1.6)$$

где

$$H \neq 0 \text{ в } \mathfrak{U}, \quad (1.7)$$

и, наконец,

$$III: \tilde{W}(u_1, u_2, u_3) = F[W(u_1, u_2, u_3)], \quad (1.8)$$

где

$$F(0) = 0, \quad F'(0) \neq 0. \quad (1.9)$$

Эти преобразования позволяют нормировать определенным образом параметры u_j и функцию ткани W , о чем мы еще будем говорить ниже (§ 16).

Рассмотрим, например, *прямолинейную ткань*, т. е. такую ткань, для которой семейства кривых \mathfrak{S}_j могут быть представлены уравнениями:

$$a_j(u_j)x + b_j(u_j)y + c_j(u_j) = 0. \quad (1.10)$$

В качестве функции ткани мы можем ввести определитель

$$W(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} a_1(u_1) & b_1(u_1) & c_1(u_1) \\ a_2(u_2) & b_2(u_2) & c_2(u_2) \\ a_3(u_3) & b_3(u_3) & c_3(u_3) \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

Прямые семейства \mathfrak{S}_j будут, вообще говоря, огибать кривую \mathfrak{S}_j , которая лежит вне области регулярности \mathfrak{U} нашей ткани. Каждая кривая \mathfrak{S}_j несет на себе шкалу параметра u_j ,

ства \mathfrak{S}_1 и \mathfrak{S}_2 линий первой ткани перейдут в семейства \mathfrak{S}_1^* и \mathfrak{S}_2^* линий второй ткани. Семейство линий \mathfrak{S}_3 можно определить уравнениями $W(u_1, u_2, \text{const}) = 0$; оно перейдет в семейство линий $W(u_1^*, u_2^*, \text{const}) = 0$, т. е. в семейство \mathfrak{S}_3^* .

и условие $W(u_1, u_2, u_3) = 0$ показывает, что три касательные к этим кривым, соответствующие значениям u_1 , u_2 и u_3 параметра, проходят через одну точку (рис. 1).

Двойственная фигура (рис. 2) состоит из трех кривых \mathcal{C}'_i с нанесенными на них шкалами, и уравнение ткани означает, что соответствующие точки этих трех кривых лежат на одной прямой. «Номограмма» последнего типа особенно удобна для вычислений («номограмма из выровненных точек»).

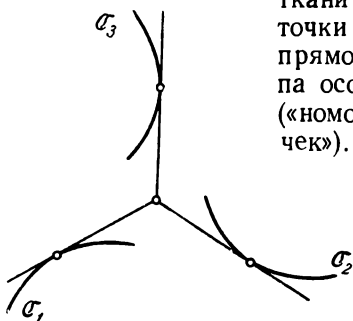


Рис. 1.

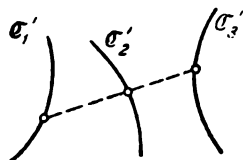


Рис. 2.

Итак, мы видим, что столь необходимая для техники номография может быть включена в наше учение о тканях. Но геометрия тканей тесно связана и с многими другими «классическими» областями математики. В первую очередь я здесь имею в виду:

- 1) вопросы аксиоматического обоснования элементарной и проективной геометрии;
- 2) алгебраическую теорию групп и теорию непрерывных групп Ли;
- 3) проективную и алгебраическую геометрию;
- 4) классическую дифференциальную геометрию Гаусса;
- 5) проективную дифференциальную геометрию¹⁾;
- 6) риманову геометрию и ее обобщения;
- 7) вариационное исчисление;
- 8) теорию функций;
- 9) формы Пфаффа и дифференциальные уравнения;
- 10) теорию расслоенных пространств.

Кое-какие из этих связей будут рассмотрены в дальнейшем. Но в то время, как некоторые из этих благород-

¹⁾ Ср. G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie*, т. I и II (Göttingen 1950 и 1954 гг.).

ных и древних родственников нашей науки в настоящее время уже несколько одряхлели и выродились, геометрия тканей обладает еще юношеской свежестью.

§ 2. Шестиугольные ткани

Рассмотрим на плоскости \mathfrak{E} ткань \mathfrak{W} , состоящую из трех различных семейств параллельных линий. Такую ткань мы будем называть *шестиугольной*. При помощи «аффинного» отображения плоскости \mathfrak{E} можно добиться, чтобы три семейства прямых этой ткани стали параллельны сторонам некоторого равностороннего треугольника («правильная ткань»), а уравнения семейств прямых

$$a_j x + b_j y + c_j = u_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

можно нормировать так, что уравнение ткани примет простую форму

$$W = u_1 + u_2 + u_3 = 0. \quad (2.2)$$

Поставим вопрос о том, в каком случае некоторая заданная ткань \mathfrak{W} эквивалентна относительно преобразований (0.1) такой шестиугольной ткани, т. е. в каком случае уравнение ткани можно привести преобразованиями I, II, III предыдущего параграфа к виду (2.2)? Все ткани подобного рода следует также называть шестиугольными.

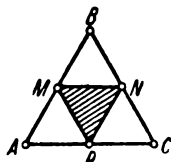


Рис. 3.



Рис. 4.

Из данного в § 0 определения ткани вместе с предположением о «выпуклости» области регулярности \mathfrak{G} следует, что в каждый треугольник, составленный из кривых ткани, можно однозначно вписать другой такой треугольник (рис. 3), вершины которого лежат на сторонах первого *). Назовем два различных треугольника ткани «соседними», если они имеют одну общую сторону (рис. 4).

*) Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть точку M стороны AB треугольника ткани, достаточно близкую к вершине A , и провести из нее линии ткани до пересечения с двумя другими сторонами треугольника в точках N и P и из N и P — линии, принадлежащие тому же семейству, что и AB ; затем непрерывно двигать точку M по стороне AB от A к B .

Если вписать в треугольник правильной ткани другой треугольник, то вершины нового треугольника будут серединами сторон старого; поэтому если вписать треугольники ткани в два соседних треугольника, то вершины новых треугольников, принадлежащие общей стороне старых треугольников, совпадут между собой (рис. 5). Другими словами, у шестиугольной ткани замыкаются

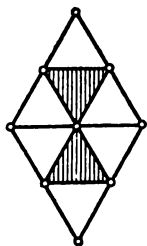


Рис. 5.

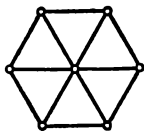


Рис. 6.

все состоящие из линий ткани «шестиугольные фигуры», как это указано на рис. 6. Эта фигура имеет семь вершин и по три линии каждого из трех семейств.

Нетрудно доказать, что *требование замкнутости всех шестиугольных фигур является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы ткань была шестиугольной.*

Действительно, рассмотрим наряду с шестиугольной фигурой более общую фигуру \mathfrak{D}_n при $n = 3$, переходящую в несколько исполненную шестиугольную фигуру. В случае правильной ткани фигура \mathfrak{D}_n состоит из треугольника, каждая сторона которого разделена на $n \geq 3$ равных частей, и из линий ткани, соединяющих точки деления (рис. 7, $n = 4$). Тотчас же видно: из замкнутости фигуры \mathfrak{D}_3 в области \mathfrak{U} следует замкнутость фигуры \mathfrak{D}_n в этой области, отсюда с помощью предельного перехода выводится эквивалентность данной ткани правильной, что и требовалось доказать.

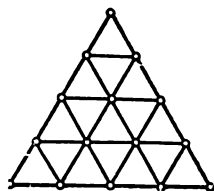


Рис. 7.

§ 3. Примеры

1. Рассмотрим в треугольнике \mathfrak{U} три пучка прямых с центрами в вершинах этого треугольника. Пусть

$$x_j = a_j x + b_j y + c_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

— уравнения сторон треугольника. Нормируем линейные

формы x_j , скажем, так, что $x_j = +1$ в центре тяжести треугольника. Если мы положим теперь

$$\ln \frac{x_2}{x_3} = u_1, \quad \ln \frac{x_3}{x_1} = u_2, \quad \ln \frac{x_1}{x_2} = u_3, \quad (3.2)$$

то величины u_j будут определены в треугольнике \mathfrak{G} , так как в \mathfrak{G} все $x_j > 0$, и для трех прямых, проходящих через одну точку, мы будем иметь

$$W = u_1 + u_2 + u_3 = 0. \quad (3.3)$$

Таким образом, наши пучки прямых образуют шестиугольную ткань, областью регулярности которой служит открытый треугольник \mathfrak{G} (рис. 8).

При помощи предельного перехода можно вернуться от этой ткани к рассмотренной в § 2 ткани, состоящей из трех различных семейств параллельных прямых, областью регулярности \mathfrak{G} -которой будет являться вся евклидова плоскость \mathfrak{E} . (С проективной точки зрения эти две фигуры не будут эквивалентны, так как в первом случае мы имели дело с тремя пучками прямых, центры которых не лежат на одной прямой, в то время как в случае «параллельной ткани» центры пучков принадлежат бесконечно удаленной прямой.)

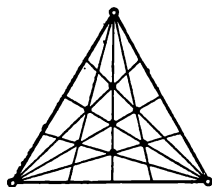


Рис. 8.

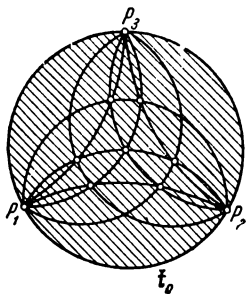


Рис. 9.

II. Для того чтобы прийти ко второму примеру шестиугольной ткани, рассмотрим круг \mathfrak{G} . Выберем на его границе $d\mathfrak{G}$ три различные точки P_1, P_2, P_3 . Пусть семейство \mathfrak{S}_j линий состоит из всех заключающихся в круге \mathfrak{G} дуг окружностей, проходящих через точки P_j, P_k, P_l ; j, k, l различны. Мы утверждаем, что определенные

таким образом три пучка окружностей (рис. 9) образуют в круге \mathfrak{G} шестиугольную ткань. Я дам этому простое доказательство, которое указал в 1932 г. один мой слу-

шатель в Чикаго. Пусть P — некоторая точка \mathcal{G} , и v_j — угол ($0 < v_j < 2\pi$), под которыми виден из точки P отрезок $P_k P_l$ ($v_j > \pi$, если точки P и P_j лежат по разные стороны прямой $P_k P_l$). Уравнение окружности семейства \mathcal{G}_j можно записать в виде $v_j = \text{const}$, причем три угла v_j ($j = 1, 2, 3$), отвечающие точке P , связаны соотношением

$$v_1 + v_2 + v_3 = 2\pi. \quad (3.4)$$

Если теперь положить

$$v_j - \frac{2\pi}{3} = u_j, \quad (3.5)$$

то мы приходим к соотношению (3.3), что и доказывает наше утверждение.

III. Другие примеры шестиугольных тканей из пучков окружностей можно получить при помощи стереографической проекции. Пусть даны плоскость \mathcal{G} , сфера \mathcal{K} и точка A , не принадлежащая \mathcal{G} и, вообще говоря, не принадлежащая \mathcal{K} . На плоскости \mathcal{G} возьмем состоящую из трех прямых пучков ткань \mathcal{W}_0 , рассмотренную в примере I. Спроектируем ткань \mathcal{W}_0 из точки A на сферу \mathcal{K} ; мы получим шестиугольную ткань \mathcal{W}_K , заданную в некоторой области \mathcal{G}_K сферы \mathcal{K} ; эта ткань высекается на сфере \mathcal{K} тремя пучками плоскостей, оси которых пересекаются в A . При помощи стереографической проекции сферы \mathcal{K} на плоскость \mathcal{G} ($P \rightarrow P^*$, рис. 10) из ткани \mathcal{W}_K получается шестиугольная ткань \mathcal{W} плоскости \mathcal{G} . При этом случай, когда точка A лежит на сфере \mathcal{K} , приводит, по существу, обратно к примеру I*). Если точка A лежит вне сферы \mathcal{K} , то на плоскости \mathcal{G} мы получим три семейства \mathcal{G}_j окружностей, которые пересекают ортогонально некоторую фиксированную окружность \mathcal{K}_0 — этой окружности на сфере \mathcal{K} отвечает окружность, по которой пересекает \mathcal{K} поляра точки A . Если точки пересечения пучков окружностей будут вещественными (т. е. если оси

*) Если центр S стереографической проекции совпадает с A , то мы приходим, разумеется, к первоначальной ткани; если S отлично от A , то мы получаем ткань, образованную тремя семействами окружностей, получаемую из изображенной на рис. 8 ткани с помощью инверсии.

наших пучков плоскостей пересекают сферу \mathfrak{R}) и если P_1, P_2, P_3 — три такие точки, лежащие внутри окружности t_0 , то за область регулярности ткани \mathfrak{B} в плоскости \mathfrak{E} можно принять треугольник с вершинами P_j ,

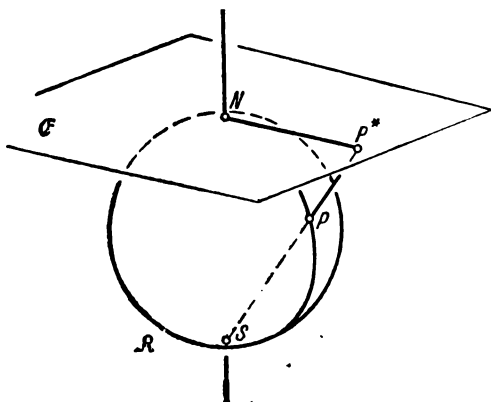


Рис. 10.

образованный окружностями, ортогональными к окружности t_0 (рис. 11).

Если точка A лежит вне сферы \mathfrak{R} , то могут представиться еще три подслучая, так как сферу \mathfrak{R} может не

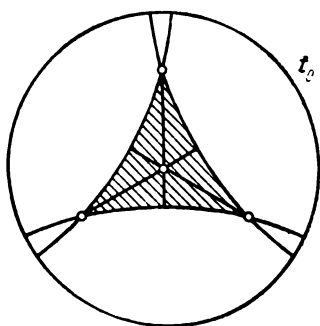


Рис. 11.

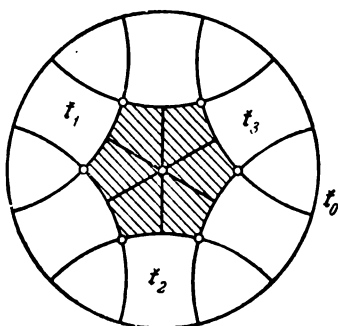


Рис. 12.

пересекать в вещественных точках ни одна из трех проходящих через точку A осей наших пучков плоскостей,

пересекать одна ось или пересекать две оси. Первый подслучай иллюстрируется рис. 12. Все окружности ткани \mathfrak{L} пересекают ортогонально постоянную окружность \mathfrak{f}_0 . Кроме того, имеются еще три непересекающиеся окружности \mathfrak{f}_j ($j = 1, 2, 3$), ортогональные к \mathfrak{f}_0 , такие, что семейство \mathfrak{S}_j состоит из окружностей, пересекающих ортогонально окружности \mathfrak{f}_0 и \mathfrak{f}_j . Областью \mathfrak{G} будет шестиугольник с шестью прямыми углами, ограниченный шестью дугами ортогональных \mathfrak{f}_0 окружностей, тремя из которых являются окружности \mathfrak{f}_j . Во втором и третьем подслучаях мы приходим соответственно к рис. 13 и рис. 14, причем заштрихованные на этих фигурах треугольники \mathfrak{G} представляют области регулярности ткани \mathfrak{L} .

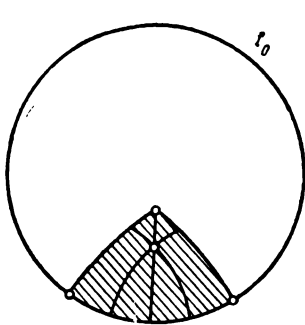


Рис. 13.

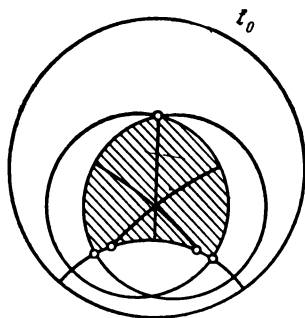


Рис. 14.

Кроме того, существует еще несколько предельных случаев подобной ткани, отвечающих расположениям A , при которых одна, две или три оси пучков плоскостей касаются сферы. Последней из этих возможностей отвечает рис. 15.

Наконец, нужно рассмотреть еще случай, когда точка A лежит внутри сферы \mathfrak{K} . В этом случае три плоскости, определяемые тремя осями, проходящими через точку A , рассекают сферу \mathfrak{K} на восемь треугольников \mathfrak{G} , в каждом из которых ткань $\mathfrak{L}_{\mathfrak{K}}$ будет регулярной. В плоскости \mathfrak{G} имеется такая окружность \mathfrak{f}_0 , что все окружности ткани \mathfrak{L} пересекают эту окружность \mathfrak{f}_0 в диаметрально противоположных точках. Рис. 16 поясняет этот случай, при котором областью \mathfrak{G} является круг \mathfrak{f}_0 .

Все эти довольно многочисленные примеры шестиугольных тканей, состоящих из трех пучков окружностей, наводят на мысль о том, что все подобные ткани являются

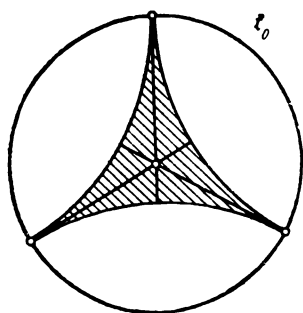


Рис. 15.

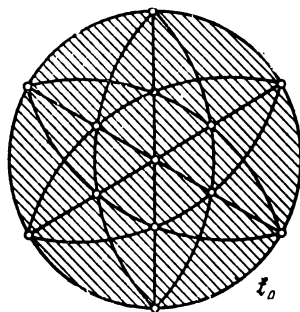


Рис. 16.

шестиугольными. Однако, если мы рассмотрим ткань, состоящую из прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и пучка окружностей, проходящих через точки $(0,0)$ и $(1,1)$, то увидим,

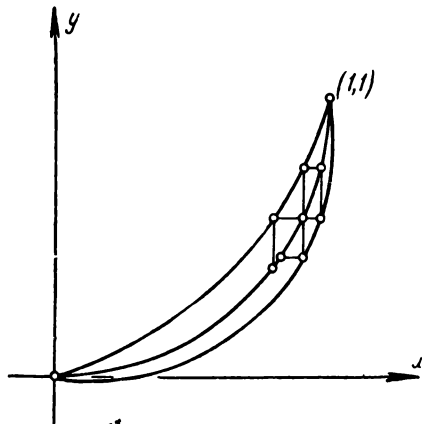


Рис. 17.

что шестиугольные фигуры этой ткани, вообще говоря, не замыкаются (рис. 17). Поэтому здесь мы не получаем шестиугольной ткани. Вопрос о том, какие тройки пучков окружностей образуют шестиугольные ткани, оказывается более сложным. Мы еще вернемся к нему в § 9.

§ 4. Прямолинейные шестиугольные ткани

К рассмотренным примерам мы добавим еще некоторые важные соображения и найдем все шестиугольные ткани, которые состоят только из прямых; при этом мы будем опираться на результаты Графа (H. Graf) и Зауэра (R. Sauer), полученные ими в 1924 г.

Рассмотрим прямолинейную шестиугольную фигуру (рис. 18), пары противоположных вершин которой мы обозначим через R, U ; S, V ; T, W , и докажем следующую теорему Шаля (M. Chasles, 1793—1880): *если кривая третьего класса \mathfrak{K} касается восьми из девяти прямых, образующих шестиугольную фигуру (т. е. всех прямых, кроме, скажем, SW), то она касается также и этой последней, причем существует однопараметрическое линейное семейство таких кривых \mathfrak{K} . Действительно, пусть, например, уравнение*

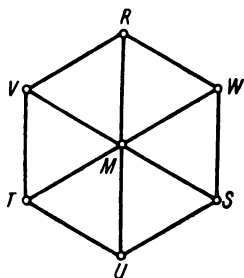


Рис. 18.

$$u = g_0 + g_1 x + g_2 y = 0 \quad (4.1)$$

связывает тангенциальные координаты g_i всех прямых, проходящих через точку U , с координатами x, y ; аналогичный смысл будут иметь линейные формы r, s, t, v, w . В таком случае уравнение

$$rst + cuvw = 0, \quad c = \text{const} \quad (4.2)$$

дает искомое семейство кривых третьего класса. Но общее уравнение кривой третьего класса

$$a_0 u_0^3 + b_0 u_1^2 u_2 + c_0 u_1 u_2^2 + \dots + du_0 u_1 u_2 = 0, \quad (4.3)$$

где точки обозначают круговую перестановку индексов 0, 1, 2, содержит десять однородных коэффициентов a_0, b_0, \dots, d . Поэтому оно должно удовлетворять восьми линейно независимым условиям, чтобы представлять линейное семейство (4.2), а именно — условиям касания нашей кривой с восемью прямыми рис. 18. То, что эти восемь условий являются линейно независимыми, можно показать, например, так: добавим еще одно — девятое — условие, что

кривая \mathfrak{K} касается еще одной прямой, проходящей через диагональную точку M ; тогда эта кривая определяется однозначно. Именно эта кривая будет распадающейся, состоящей из точки M и конического сечения, которое касается пяти сторон TU , TV , RV , RW и SU нашего шестиугольника.

Отсюда следует: в каждой области \mathfrak{G} , в которой касательные к кривой третьего класса \mathfrak{K} образуют ткань, эта ткань будет шестиугольной. Обратно: рассмотрим прямолинейную шестиугольную ткань \mathfrak{W} в области \mathfrak{G} и выделим фигуру \mathfrak{D}_4 , составленную из линий ткани (рис. 19). Если мы отбросим

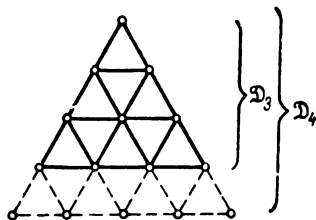


Рис. 19.

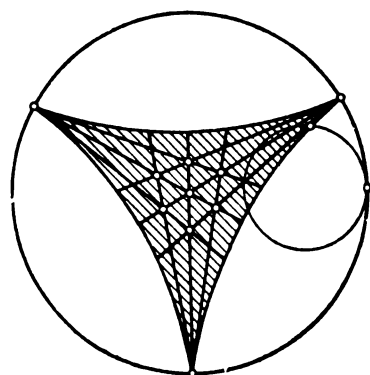


Рис. 20.

«нижний» ряд треугольников, то получим по Шалю линейное семейство (4.2) кривых \mathfrak{K} , которые касаются прямых оставшейся фигуры \mathfrak{D}_3 , и мы можем выбрать кривую \mathfrak{K} так, чтобы она касалась также «нижней» стороны исходной фигуры. Теперь, дважды применяя теорему Шалю, получим, что кривая \mathfrak{K} касается и двух остальных прямых фигуры \mathfrak{D}_4 , не принадлежащих \mathfrak{D}_3 . Таким образом, кривая \mathfrak{K} касается всех трех прямых фигуры \mathfrak{D}_4 , не принадлежащих к \mathfrak{D}_3 . Точно так же можно заключить далее, что любая фигура \mathfrak{D}_n , $n \geq 4$, состоит

из касательных одной кривой третьего класса. Отсюда легко получим при помощи подразделения ($\mathfrak{D}_n \rightarrow \mathfrak{D}_{2n}$) фигуры \mathfrak{D}_n : *прямолинейная шестиугольная ткань всегда состоит из касательных некоторой плоской кривой третьего класса.*

Простейшим примером кривой третьего класса будет кривая (рис. 20), описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой окружности в три раза

большого радиуса, причем меньшая окружность заключена внутри большей. Эта рациональная кривая называется трехконечной гипоциклоидой; подробно эта кривая изучалась Штейнером (J. Steiner, 1769 — 1863) в 1856 г. Если обозначить через v угол, который образуют ее касательные с некоторым постоянным направлением, то можно доказать, что для трех касательных, проходящих через одну точку, имеет место соотношение $v_1 + v_2 + v_3 = \text{const}$, откуда мы

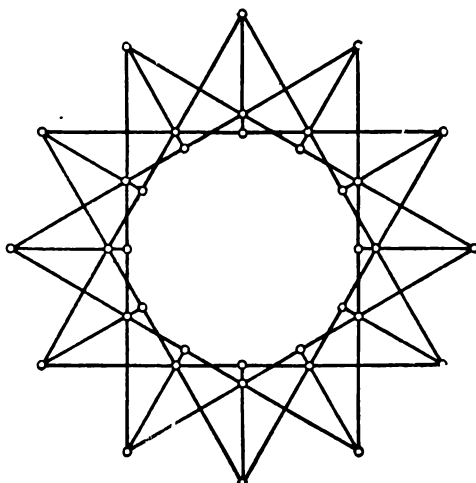


Рис. 21.

снова получаем, что касательные к кривой \mathfrak{K} образуют внутри ограниченного кривой криволинейного треугольника шестиугольную ткань.

Если \mathfrak{K} распадается на три пучка прямых, то мы снова приходим к примеру 1 § 3. Рис. 21 изображает шестиугольную ткань, образованную касательными к некоторой окружности и прямыми, проходящими через ее центр.

§ 5. Кривые третьего класса и эллиптические функции

Коротко укажем на связь содержания предыдущего параграфа с теорией функций.

Если записать уравнение прямой в виде

$$px + qy = 1, \quad (5.1)$$

то можно рассматривать p и q как координаты прямой.

При этом уравнение кривой третьего класса \mathfrak{R} можно привести к виду

$$q^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3; \quad (5.2)$$

эта кривая \mathfrak{R} не имеет двойных касательных, если

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0. \quad (5.3)$$

Эту кривую \mathfrak{R} можно, как указал в 1865 г. Клебш (A. Clebsch, 1833—1872), представить при помощи эллиптической функции \wp Вейерштрасса (K. Weierstrass, 1816—1897) и параметра u *):

$$p = \wp(u), \quad q = \wp'(u). \quad (5.4)$$

Чтобы найти теперь касательные к кривой \mathfrak{R} , проходящие через точку x, y , нужно найти нули u_1, u_2, u_3 эллиптической функции третьей степени

$$f(u) = x\wp(u) + y\wp'(u) - 1. \quad (5.5)$$

Интегрируя

$$\int u \frac{f'(u)}{f(u)} du \quad (5.6)$$

по контуру параллелограмма периодов, мы получим, что сумма нулей $u_1 + u_2 + u_3$ отличается от суммы полюсов k (которая не зависит от выбора x, y) только на период функции $\wp(u)$:

$$u_1 + u_2 + u_3 = k + \text{период}. \quad (5.7)$$

Соотношение (5.7) подтверждает справедливость доказанного нами ранее элементарно утверждения о том, что касательные к кривой третьего класса в некоторой подходящим образом выбранной области образуют шестиугольную ткань. Соотношение (5.7) представляет собой частный случай знаменитой теоремы Абеля (N.H. Abel, 1802—1829), доказанной им в 1829 г., к которой мы еще вернемся позже (§ 45).

До сих пор в § 2, 3, 4 нам нигде не понадобились наложенные на входящие в рассмотрения функции ограничения: мы нигде не предполагали дифференцируемости или тем более аналитичности этих функций. Однако для дальнейшего эти ограничения окажутся существенными.

*) См., например, Е. Т. Уиттеккер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. II, М. — Л., ГТТИ, 1934, стр. 267.

§ 6. Формы Пфаффа ткани

Предположим, что три семейства кривых \mathcal{C}_j ткани \mathfrak{U} записываются уравнениями (0.3):

$$u_j(x, y) = u_j = \text{const} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (6.1)$$

Полные дифференциалы du_j , умноженные каждый на множитель

$$g_j(x, y) \neq 0, \quad (6.2)$$

дадут нам формы Пфаффа

$$\sigma_1 = g_1 du_1, \quad \sigma_2 = g_2 du_2, \quad \sigma_3 = g_3 du_3. \quad (6.3)$$

Дифференциальное уравнение $\sigma_j = 0$ определяет семейство кривых \mathcal{C}_j . Множители g_j мы можем, в частности, выбрать так, что для всех точек x, y области \mathfrak{U} и всех направлений $dx:dy$ будет выполняться уравнение

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (6.4)$$

Для «нормированных» таким образом форм Пфаффа остается возможным еще одна «перенормировка» при помощи общего множителя $g(x, y) \neq 0$;

$$\sigma_j = \frac{\sigma_j}{g}. \quad (6.5)$$

Согласно Грассману (H. Grassman, 1809—1877) можно определить так называемое «альтернированное или внешнее произведение» форм Пфаффа

$$\sigma_j = p_j dx + q_j dy,$$

подчиняющееся следующим правилам:

$$[\sigma_1 \sigma_2] + [\sigma_2 \sigma_1] = 0, \quad (6.6)$$

$$[\sigma_1, \sigma_2 + \sigma_3] = [\sigma_1 \sigma_2] + [\sigma_1 \sigma_3] \quad (6.7)$$

и

$$[f\sigma_1, \sigma_2] = f[\sigma_1 \sigma_2], \quad (6.8)$$

где f есть скаляр. Отсюда следует, что

$$[\sigma_1 \sigma_2] = (p_1 q_2 - p_2 q_1) [dx dy], \quad (6.9)$$

причем

$$[dx dy] + [dy dx] = 0. \quad (6.10)$$

Использование подобного внешнего произведения весьма целесообразно при двойном интегрировании

$$J = \iint F(x, y) [dx dy], \quad (6.11)$$

так как оно приводит к правильной формуле замены переменных (0.1):

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{G}^*} F(x^*, y^*) [dx^* dy^*] = \\ = \iint_{\mathfrak{G}} F(f, g) (f_x g_y - f_y g_x) [dx dy]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Поэтому внешнее произведение можно рассматривать как подынтегральное выражение при двойном интегрировании.

Равенство

$$[\sigma_1 \sigma_2] = 0 \quad (6.13)$$

представляет собой условие линейной зависимости форм Пфаффа σ_1 и σ_2 .

Из условия нормировки (6.4) для форм σ_j следует, что

$$[\sigma_2 \sigma_3] = [\sigma_3 \sigma_1] = [\sigma_1 \sigma_2]; \quad (6.14)$$

выражение

$$[\sigma_1 \sigma_2] = \Omega \quad (6.15)$$

можно назвать «поверхностным элементом» ткани \mathfrak{W} . При этом, однако, Ω зависит от нормировки (6.5), а именно

$$\Omega^* = \frac{1}{g^2} \Omega. \quad (6.16)$$

Вычисления показывают, что вид внешнего произведения остается инвариантным при введении новых переменных (0.1), т. е. операции внешнего умножения и замены переменных являются перестановочными. В том же смысле является инвариантной операция «внешнего дифференцирования» формы Пфаффа

$$\sigma = p dx + q dy; \quad (6.17)$$

«внешний дифференциал» или «дифференциал Фробениуса

(G. Frobenius, 1849—1917) и Картана (E. Cartan, 1869—1951)» этой формы имеет вид

$$d\sigma = [dp dx] + [dq dy] = (q_x - p_y) [dx dy]. \quad (6.18)$$

Тождественное обращение в нуль внешнего дифференциала формы σ

$$d\sigma = 0 \quad (6.19)$$

есть необходимое и достаточное условие того, что σ является полным дифференциалом

$$\sigma = du. \quad (6.20)$$

Кроме инвариантности внешнего дифференциала относительно преобразования (0.1), весьма важны еще следующие вычислительные правила:

$$d(f\sigma) = [df, \sigma] + fd\sigma \quad (6.21)$$

(здесь f — скалярная функция, σ — форма Пфаффа) и «лемма Пуанкаре»:

$$d du = 0. \quad (6.22)$$

Далее для области \mathfrak{G} и ее надлежащим образом ориентированной границы $d\mathfrak{G}$ справедлива интегральная теорема (Стокс, Гаусс), которая поясняет значение внешнего дифференциала:

$$\int_{\mathfrak{G}} d\sigma = \int_{d\mathfrak{G}} \sigma. \quad (6.23)$$

Этими простыми свойствами форм Пфаффа по началу мы будем обходиться.

Можно назвать несколько новых работ, посвященных исчислению форм Пфаффа. Это в первую очередь книжка Келлера «Введение в теорию систем дифференциальных уравнений» (E. Kähler, Einführung in die Theorie des Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin, 1934), Картана «Системы внешних дифференциальных уравнений» (E. Cartan, Les systemes differentiels extérieurs, Paris, 1945), Серге «Дифференциальные формы и их интегралы» (B. Segre, Forme differenziali e loro integrali, I, Rom, 1951), наконец, работа Боля «Альтернированные формы и полуинвариантное дифферен-

цирование» (G. Bol, Alternierende Formen und halb-invariante Differentiation, Math. Zeitschr. 54 (1951))*).

Польза, которую могут принести формы Пфаффа в дифференциальной геометрии, особенно хорошо иллюстрируется теорией тканей**).

§ 7. Дифференциальные операторы ткани

Если мы образуем внешние дифференциалы форм Пфаффа σ_j ткани \mathfrak{W} , нормированные условием (6.4), то каждый из них будет отличаться лишь скалярным множителем h_j от «поверхностного элемента» Ω ткани (6.15):

$$d\sigma_j = h_j \Omega. \quad (7.1)$$

Из условия (6.4) следует, что

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0. \quad (7.2)$$

Величины h_j играют в геометрии тканей роль, подобную роли символов Кристоффеля в теории поверхностей. Поэтому мы их также будем называть *символами Кристоффеля*.

Чтобы иметь возможность проще записать правила изменения величин h_j при перенормировке (6.5), введем «дифференциальные операторы» ткани. А именно, пусть f — некоторый скаляр; разложим для всех $dx:du$ полный дифференциал df по линейно независимым формам Пфаффа σ_1, σ_2 :

$$df = f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 \quad (7.3)$$

и назовем величины f_1, f_2 «производными от функции f относительно пары форм Пфаффа σ_1, σ_2 ». Тогда из (7.3) и (6.15) следует, что

$$[df, \sigma_1] = f_1 \Omega, \quad [df, \sigma_2] = f_2 \Omega. \quad (7.4)$$

*) На русском языке можно указать книги: П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частным производным, М.—Л., Гостехиздат, 1947; С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

**) См., впрочем, также В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, М., 1957.

Эти формулы также могут служить для определения величин f_1, f_2 . Обобщая, получим

$$df = f_3\sigma_2 - f_2\sigma_3 = f_1\sigma_3 - f_3\sigma_1 = f_2\sigma_1 - f_1\sigma_2, \quad (7.5)$$

где

$$[df, \sigma_j] = f_j \Omega \quad (7.6)$$

и

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0. \quad (7.7)$$

Введем «дифференциальный оператор» ∂_j с помощью соотношения

$$f_j = \partial_j f; \quad (7.8)$$

при этом ∂_j определяется на ткани \mathfrak{W} как некоторый линейный оператор (7.15). В силу (7.7) дифференциальные операторы ∂_j удовлетворяют условию

$$\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = 0, \quad (7.9)$$

а (7.5) приводит нас к следующему выражению для полного дифференциала:

$$d = \sigma_2\partial_3 - \sigma_3\partial_2 = \sigma_3\partial_1 - \sigma_1\partial_3 = \sigma_1\partial_2 - \sigma_2\partial_1. \quad (7.10)$$

Вместо (7.6) мы можем теперь писать

$$[\sigma_j d] = -\Omega \partial_j. \quad (7.11)$$

Таким образом, соотношения (7.10) позволяют однозначно определить по нормированным формам Пфаффа σ_j дифференциальные операторы ∂_j и обратно: для дифференциальных операторов, нормированных условием (7.9), из соотношения (7.10) могут быть однозначно определены соответствующие им формы Пфаффа σ_j . Значения дифференциальных операторов ∂_j получаются следующим образом. В силу (6.3)

$$du_1 = \frac{\sigma_1}{g_1} \quad (7.12)$$

и в силу (7.10)

$$du_1 = \sigma_1\partial_2 u_1 - \sigma_2\partial_1 u_1. \quad (7.13)$$

Сравнение двух последних соотношений дает

$$\partial_1 u_1 = \partial_2 u_2 = \partial_3 u_3 = 0. \quad (7.14)$$

Условия (7.14) и условие нормировки (7.9) позволяют

однозначно (с точностью до общего множителя) определить по ткани \mathfrak{W} линейные операторы

$$\partial_j = r_j \frac{\partial}{\partial x} + s_j \frac{\partial}{\partial y}. \quad (7.15)$$

В то время как в книге «Geometrie der Gewebe» (1938) учение о тканях в основном излагалось при помощи дифференциальных операторов, в этой книге мы будем отдавать предпочтение формам Пфаффа.

Дифференцируя внешним образом обе части соотношения (7.3) и используя равенства (6.21) и (6.22), мы получим

$$0 = [df_2, \sigma_1] - [df_1, \sigma_2] + f_2 d\sigma_1 - f_1 d\sigma_2. \quad (7.16)$$

Если ввести вторые производные функции f при помощи соотношений

$$df_1 = f_{12}\sigma_1 - f_{11}\sigma_2, \quad df_2 = f_{22}\sigma_1 - f_{21}\sigma_2, \quad (7.17)$$

то из (7.16) следует в силу (7.1)

$$f_{21} - f_{12} = h_2 f_1 - h_1 f_2. \quad (7.18)$$

Таким образом, положив

$$\partial_j \partial_k f = f_{kj}, \quad (7.19)$$

мы будем иметь

$$f_{kj} - f_{jk} = h_k f_j - h_j f_k \quad (7.20)$$

или

$$\partial_j \partial_k - \partial_k \partial_j = h_k \partial_j - h_j \partial_k. \quad (7.21)$$

Выпишем последние равенства более подробно:

$$\left. \begin{aligned} \partial_3 \partial_2 - \partial_2 \partial_3 &= h_2 \partial_3 - h_3 \partial_2, \\ \partial_1 \partial_3 - \partial_3 \partial_1 &= h_3 \partial_1 - h_1 \partial_3, \\ \partial_2 \partial_1 - \partial_1 \partial_2 &= h_1 \partial_2 - h_2 \partial_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Таким образом, наши «символы Кристоффеля» h_j обязаны своим происхождением несимметрии вторых производных.

Из инвариантности полного дифференциала относительно перенормировки (6.5) следует:

$$\partial_i^* = g \partial_j. \quad (7.23)$$

§ 8. Связность и кривизна ткани

Вычислим, как преобразуются величины h_j при перенормировке (6.5). Положим, как и в (7.1),

$$d\tau_j^* = h_j^* \Omega^* \quad (8.1)$$

и найдем в силу (6.5), (6.21), (6.16) и (7.6), что

$$-\frac{g_j}{g^2} + \frac{h_j}{g} = \frac{h_j^*}{g^2}. \quad (8.2)$$

Таким образом,

$$h_j^* = g \left(h_j - \frac{g_j}{g} \right). \quad (8.3)$$

Эти формулы являются довольно неудобными, так как в них входят производные g_j нормирующего множителя g .

Если же мы сбразуем форму Пфаффа γ

$$\gamma = h_3 \sigma_2 - h_2 \sigma_3 = h_1 \sigma_3 - h_3 \sigma_1 = h_2 \sigma_1 - h_1 \sigma_2, \quad (8.4)$$

которую будем называть «связностью» ткани \mathfrak{M} , то при перенормировке (6.5) форма γ в силу (8.3) и (7.5) преобразуется так:

$$\gamma^* = \gamma - d \ln g. \quad (8.5)$$

Таким образом, связность изменяется только на полный дифференциал; следовательно, в силу (6.22) интеграл

$$\int_{\mathfrak{G}} d\gamma = \int_{d\mathfrak{G}} \gamma \quad (8.6)$$

инвариантен относительно перенормировки. Точно так же инвариантен и «нормированный поверхностный элемент»

$$d\gamma = k\Omega. \quad (8.7)$$

Скаляр k мы будем называть «кривизной ткани» или коротко «кривизной». В силу инвариантности $d\gamma$ и в силу (6.16) при перенормировке (6.5) k изменяется так:

$$k^* = g^2 k. \quad (8.8)$$

Это обстоятельство мы выражаем, утверждая, что k является дифференциальным инвариантом «веса» два. Интегральная формула (8.6) напоминает формулу Гаусса —

Бонне в теории поверхностей¹⁾. Из (6.5) и (8.8) следует, что при $k > 0$ формы Пфаффа

$$\hat{\sigma}_j = \sqrt{k} \sigma_j \quad (8.9)$$

остаются неизменными при перенормировке (6.5).

Внешнее дифференцирование формулы

$$\gamma = h_2 \sigma_1 - h_1 \sigma_2$$

в силу (6.21), (7.1) и (8.7) дает

$$\begin{aligned} d\gamma &= [h_{22}\sigma_1 - h_{21}\sigma_2, \sigma_1] - [h_{12}\sigma_1 - h_{11}\sigma_2, \sigma_2] = \\ &= (h_{21} - h_{12})\Omega = k\Omega; \end{aligned}$$

здесь

$$h_{jk} = \partial_k h_j.$$

Отсюда следует, что

$$k = h_{32} - h_{23} = h_{13} - h_{31} = h_{21} - h_{12} \quad (8.10)$$

и, значит, k меняет, например, знак при нечетной перестановке семейств $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$.

Вообще говоря, не существует такого скаляра h , что

$$h_j = \partial_j h. \quad (8.11)$$

Но если эти уравнения оказываются разрешимыми относительно h , то в силу (8.4)

$$\gamma = dh \quad (8.12)$$

и, следовательно,

$$d\gamma = 0, \quad k = 0. \quad (8.13)$$

Обратно, из (8.13) следует разрешимость уравнений (8.11).

Докажем, что для того чтобы ткань была шестиугольной, необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна k тождественно равнялась нулю.

Для шестиугольной ткани мы можем принять

$$\sigma_1 = dx, \quad \sigma_2 = dy, \quad \sigma_3 = -d(x + y).$$

Из (7.1) тогда следует, что $h_j = 0$ и далее из (8.4) что $\gamma = 0$; поэтому также и $k = 0$. Обратно, $k = 0$ —

¹⁾ Ср., например, В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, М., 1957, § 44.

условие того, что форма γ является полным дифференциалом. Если мы возьмем теперь в качестве g решение уравнения

$$\gamma = d \ln g,$$

то в силу (8.5) будем иметь, что $\gamma^* = 0$ и отсюда $h_j^* = 0$; формы σ_j будут, таким образом, полными дифференциалами: $\sigma_j = du$. В силу условия (6.4) мы можем считать, что $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ и поэтому наша ткань является шестиугольной.

§ 9. Вычисление кривизны при помощи функции ткани¹⁾

Рассмотрим теперь ткань \mathfrak{L}^1 , заданную при помощи уравнения ткани $W(u_1, u_2, u_3) = 0$, и пусть в области \mathfrak{G}

$$\frac{\partial W}{\partial u_j} \neq 0. \quad (9.1)$$

Мы будем обозначать в этом параграфе частные производные функции ткани W по переменным u_j при помощи индексов, так, например,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_k} = W_{jk}, \quad (9.2)$$

ибо здесь мы не будем употреблять введенные в § 7 производные ∂_j функции W . Из $W = 0$ следует, что

$$W_1 du_1 + W_2 du_2 + W_3 du_3 = 0, \quad (9.3)$$

так что в соответствии с условием нормировки (6.4) мы можем положить

$$\sigma_1 = W_1 du_1, \quad \sigma_2 = W_2 du_2, \quad \sigma_3 = W_3 du_3. \quad (9.4)$$

Если $f(u_1, u_2, u_3)$ есть скалярная функция аргументов u_j и

$$f_j = \frac{\partial f}{\partial u_j},$$

¹⁾ Cp. W. Blaschke, Osservazioni sui tessuti, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (2), 2 (1953), 36—39.

то

$$\begin{aligned}
 df &= f_1 du_1 + f_2 du_2 - \frac{f_3}{W_3} (W_1 du_1 + W_2 du_2) = \\
 &= \frac{f_1 W_3 - f_3 W_1}{W_3} du_1 - \frac{f_3 W_2 - f_2 W_3}{W_3} du_2 = \\
 &= \left(\frac{f_1}{W_1} - \frac{f_3}{W_3} \right) \sigma_1 - \left(\frac{f_3}{W_3} - \frac{f_2}{W_2} \right) \sigma_2.
 \end{aligned}$$

Сравнивая с (7.10), мы получим следующие выражения для производных $\partial_1, \partial_2, \partial_3$:

$$\left. \begin{aligned}
 \partial_1 &= \frac{1}{W_3} \frac{\partial}{\partial u_3} - \frac{1}{W_2} \frac{\partial}{\partial u_2}, \\
 \partial_2 &= \frac{1}{W_1} \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{1}{W_3} \frac{\partial}{\partial u_3}, \\
 \partial_3 &= \frac{1}{W_2} \frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{1}{W_1} \frac{\partial}{\partial u_1}.
 \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Из уравнений (9.4)

$$\sigma_1 = W_1 du_1, \dots \quad (9.6)$$

и из того, что

$$\Omega = [\sigma_1 \sigma_2] = \dots = W_1 W_2 [du_1 du_2] = \dots, \quad (9.7)$$

где точки обозначают круговую перестановку индексов 1, 2, 3, мы получаем

$$d\sigma_1 = [W_{12} du_2 + W_{13} du_3, du_1] = \left(\frac{W_{31}}{W_3 W_1} - \frac{W_{12}}{W_1 W_2} \right) \Omega, \dots \quad (9.8)$$

Отсюда в силу (7.1) имеем

$$\left. \begin{aligned}
 h_1 &= \frac{W_{31}}{W_3 W_1} - \frac{W_{12}}{W_1 W_2}, \\
 h_2 &= \frac{W_{12}}{W_1 W_2} - \frac{W_{23}}{W_2 W_3}, \\
 h_3 &= \frac{W_{23}}{W_2 W_3} - \frac{W_{31}}{W_3 W_1}.
 \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Если ввести сокращенные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{W_{23}}{W_2 W_3} = \frac{1}{W_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \ln W_3 = \frac{1}{W_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \ln W_2, \\ V_2 &= \frac{W_{31}}{W_3 W_1} = \frac{1}{W_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \ln W_1 = \frac{1}{W_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \ln W_3, \\ V_3 &= \frac{W_{12}}{W_1 W_2} = \frac{1}{W_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \ln W_2 = \frac{1}{W_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \ln W_1, \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= V_2 - V_3 = \frac{1}{W_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \ln \frac{W_3}{W_2}, \\ h_2 &= V_3 - V_1 = \frac{1}{W_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \ln \frac{W_1}{W_3}, \\ h_3 &= V_1 - V_2 = \frac{1}{W_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \ln \frac{W_2}{W_1} \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

или в силу (9.5)

$$h_1 = \partial_1 \ln W_1, \quad h_2 = \partial_2 \ln W_2, \quad h_3 = \partial_3 \ln W_3. \quad (9.12)$$

Найдем теперь связность γ , пользуясь ее определением (8.4):

$$\gamma = -V_1 W_1 du_1 - V_2 W_2 du_2 - V_3 W_3 du_3. \quad (9.13)$$

С другой стороны, в силу (9.10)

$$d \ln (W_1 W_2 W_3) = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \ln W_1 + V_2 W_1 + V_3 W_1 \right) du_1 + \dots, \quad (9.14)$$

где точки обозначают круговую перестановку индексов 1, 2, 3. Из (9.13) и (9.14) следует (так как $dW = W_1 du_1 + W_2 du_2 + W_3 du_3 = 0$)

$$\gamma - d \ln (W_1 W_2 W_3) = - \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \ln W_1 du_1 + \dots \right). \quad (9.15)$$

Таким образом, мы можем вместо γ в качестве связности использовать также выражение

$$\gamma' = - \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \ln W_j du_j, \quad (9.16)$$

так как γ и γ' разнятся лишь на полный дифференциал.

Внешний дифференциал выражения (9.16) имеет вид

$$d\gamma = d\gamma' = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} \ln W_j [du_j du_k] \quad (9.17)$$

или по определению кривизны сплетения k для «нормированного элемента поверхности» имеем

$$d\gamma = k\Omega = \frac{1}{2} \sum_{r < s} \frac{\partial^2}{\partial u_r \partial u_s} \ln \frac{W_r}{W_s} [du^r du^s]. \quad (9.18)$$

Найденные формулы (9.16) и (9.18) имеют то преимущество, что непосредственно переносятся также и на случай $n > 2$ измерений.

Положим для сокращения

$$\begin{aligned} A_{rs} &= \frac{1}{W_r W_s} \frac{\partial^2}{\partial u_r \partial u_s} \ln \frac{W_r}{W_s} = \\ &= \frac{W_{rrs}}{W_r^2 W_s} - \frac{W_{rss}}{W_r W_s^2} + \frac{W_{rs}}{W_r W_s} \left(\frac{W_{ss}}{W_s^2} - \frac{W_{rr}}{W_r^2} \right). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Эти величины являются кососимметричными:

$$A_{rs} + A_{sr} = 0. \quad (9.20)$$

Из (9.18) теперь следует

$$k = A_{23} + A_{31} + A_{12}. \quad (9.21)$$

Если мы разрешим, наконец, функцию ткани относительно u_3 :

$$W = u_3 - w(u_1, u_2), \quad (9.22)$$

то из (9.16) получим

$$\gamma' = \frac{\partial}{\partial u_1} \ln w_1 du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} \ln w_2 du_2. \quad (9.23)$$

Отсюда следует далее, что

$$d\gamma = 2 \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \ln \frac{w_2}{w_1} [du_1 du_2]. \quad (9.24)$$

Для шестиугольной ткани (для которой $d\gamma = 0$) мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \ln \frac{w_2}{w_1} = 0. \quad (9.25)$$

Но решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$w = w \{U_1(u_1) + U_2(u_2)\}; \quad (9.26)$$

сравнение формул (9.22) и (9.26) с (2.2) снова показывает, что шестиугольная ткань характеризуется условием $k = 0$.

Предположим, что уравнение ткани линейно относительно каждого u_j :

$$W = au_1u_2u_3 + b_1u_2u_3 + b_2u_3u_1 + b_3u_1u_2 + \\ + c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + d = 0. \quad (9.27)$$

Тогда все $W_{jj} = 0$ и в силу (9.19) $\gamma = 0$. Поэтому в каждой области \mathfrak{U} , где все $W_j \neq 0$, уравнение $W = 0$ представляет шестиугольную ткань.

Задача § 3 о нахождении всех шестиугольных тканей, состоящих из пучков окружностей, приводит, как нетрудно проверить, к функции ткани, квадратичной относительно каждого u_j . Выделение отсюда шестиугольных тканей с помощью нашей формулы (9.18) приводит к довольно запутанным выкладкам. Все же эту задачу можно свести к некоторому чисто алгебраическому вопросу.

§ 10. Применение к тканям, образованным поверхностями

Наша формула (9.16) для связности γ позволяет дать простое доказательство одной теоремы о тканях, образованных семействами поверхностей в трехмерном пространстве, найденной в 1929 г. Дюбурдые (J. Dubourdieu). В этом параграфе мы временно обратимся к рассмотрению трехмерного пространства; тканью в области \mathfrak{U} простран-

ства с декартовыми координатами x, y, z мы будем называть совокупность четырех семейств поверхностей

$$u_j(x, y, z) = u_j = \text{const} \quad (j = 0, 1, 2, 3) \quad (10.1)$$

таких, что через каждую точку x, y, z области \mathfrak{U} проходит в точности одна поверхность каждого семейства. При этом функциональные определители аналитических функций u_j , взятые по три, в области \mathfrak{U} должны быть отличны от нуля:

$$\frac{\partial(u_j, u_k, u_l)}{\partial(x, y, z)} \neq 0. \quad (10.2)$$

В таком случае, скажем, семейства (10.1) поверхностей при $j = 1, 2, 3$ высекают на поверхности $u_0 = \text{const}$ в области \mathfrak{U} составленную из кривых ткани, которую мы обозначим через \mathfrak{W}^0 .

Мы докажем, что если образованные на семействах $u_1, u_2, u_3 = \text{const}$ поверхностей криволинейные ткани $\mathfrak{W}^1, \mathfrak{W}^2, \mathfrak{W}^3$ будут шестигольными, то такой же будет и криволинейная ткань \mathfrak{W}^0 .

Для доказательства примем за «связность» ткани, образованной четырьмя семействами поверхностей, форму Пфаффа

$$\Gamma = - \sum_0^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \ln W_j \, du_j, \quad (10.3)$$

где $W(u_0, u_1, u_2, u_3)$ есть «функция ткани», получающаяся из (10.2) путем исключения x, y, z , и W_j — частные производные W по u_j (ср. с формулой (9.16)). Заметим, что на каждой поверхности $u_0 = \text{const}$ форма Γ превращается в связность γ^0 сплетения \mathfrak{W}^0 .

Из формулы (6.23), примененной к криволинейному тетраэдру \mathfrak{B} , образованному четырьмя поверхностями ткани

$$u_j = \text{const} \quad (j = 0, 1, 2, 3),$$

мы получим

$$\int_{\mathfrak{B}} d\Gamma = \sum_0^3 \int_{\mathfrak{G}_j} d\gamma^j = 0 \quad (10.4)$$

(ср. (6.22); здесь \mathfrak{G}_j обозначают четыре «треугольные грани» тетраэдра \mathfrak{B}). По нашему предположению из четырех слагаемых правой части три равны нулю; значит, равно нулю и четвертое. Но так как треугольник \mathfrak{G}_0 на поверхности $u_0 = \text{const}$ может быть выбран произвольно, то отсюда следует, что

$$d\gamma^0 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Несколько иначе можно было бы провести доказательство, используя формулу (9.21). Из нее мы найдем следующие значения для кривизн четырех криволинейных тканей \mathfrak{W}^i :

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= A_{23} + A_{31} + A_{12}, \\ k_1 &= A_{32} + A_{20} + A_{03}, \\ k_2 &= A_{13} + A_{30} + A_{01}, \\ k_3 &= A_{21} + A_{10} + A_{02}. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

При этом величины A_{jk} вычисляются из функции

$$W(u_0, u_1, u_2, u_3)$$

нашей поверхностной ткани при помощи формул (9.19). В силу косо́й симметрии (9.20) величин A_{jk} из (10.5) следует, что

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 0 \quad (10.6)$$

— и в этом соотношении снова содержится теорема Дюбурдые. Сходное доказательство формулы (10.6) мы дадим позже, в § 30.

§ 11. Прямолинейные ткани

После этого небольшого отступления мы снова вернемся к плоской геометрии и рассмотрим ткань \mathfrak{W} , образованную прямыми

$$\begin{aligned} a_j(u_j)x + b_j(u_j)y + c_j(u_j) &= 0 \\ (j &= 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (11.1)$$

В качестве функции ткани возьмем определитель

$$W(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} a_1(u_1) & b_1(u_1) & c_1(u_1) \\ a_2(u_2) & b_2(u_2) & c_2(u_2) \\ a_3(u_3) & b_3(u_3) & c_3(u_3) \end{vmatrix}. \quad (11.2)$$

Обозначим вектор с координатами a_j, b_j, c_j через n_j :

$$n_j(u_j) = (a_j, b_j, c_j); \quad (11.3)$$

в таком случае

$$n'_j = (a'_j, b'_j, c'_j); \quad (11.4)$$

где

$$a'_j = \frac{da_j}{du_j}.$$

При этом определитель W будет равен тройному (смешанному) произведению:

$$W = (n_1, n_2, n_3); \quad (11.5)$$

это позволяет просто вычислять его производные по u_j , так, например,

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= (n'_1, n_2, n_3), \\ W_{12} &= (n'_1, n'_2, n_3), \\ W_{112} &= (n''_1, n'_2, n_3). \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Если мы подставим эти значения в формулы (9.16), (9.18), то получим некоторые проективно инвариантные соотношения. Мы введем в эти соотношения метрические инварианты, положив

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \cos u_j, \\ b_j &= \sin u_j, \\ c_j &= c_j(u_j); \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

при этом u_j будет определять «направление» рассматриваемой прямой, т. е. ее угол с некоторым фиксированным направлением, а c_j будет равно расстоянию прямой от начала координат. Таким образом, $c_j(u_j)$ есть функция, которая согласно Минковскому (H. Minkowski, 1864 — 1909)

называется *опорной функцией* огибающей ξ_j семейства (11.1) прямых. Вычисления показывают, что $c_j'(u_j)$ есть расстояние нормали кривой ξ_j от начала координат и

$$c_j + c_j'' = r_j \quad (11.8)$$

— радиус кривизны кривой ξ_j *).

Вычислим теперь связность γ' нашей прямолинейной ткани по формуле (9.16):

$$-\gamma' = \frac{W_{11}}{W_1} du_1 + \frac{W_{22}}{W_2} du_2 + \frac{W_{33}}{W_3} du_3. \quad (11.9)$$

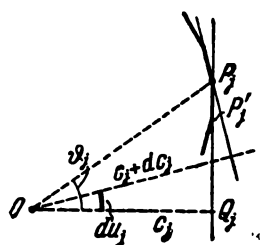
*) Из рис. 22, на котором изображены две близкие прямые

$$x \cos u_j + y \sin u_j + c_j = 0$$

и

$$x \cos (u_j + du_j) + y \sin (u_j + du_j) + c_j + dc_j = 0,$$

пересекающиеся в точке P_j , огибающей ξ_j , видно, что (обозначения ясны из рисунка)



$$OP_j = \frac{c_j}{\cos \vartheta_j} = \frac{c_j + dc_j}{\cos (\vartheta_j - du_j)},$$

откуда немедленно вытекает, что

$$\operatorname{tg} \vartheta_j = \frac{c_j'}{c_j}.$$

Следовательно,

$$c_j' = c_j \operatorname{tg} \vartheta_j = t_j,$$

Рис. 22.

где t_j есть расстояние от O до нормали к ξ_j в P_j .

Далее, если P_j — точка ξ_j , принадлежащая второй из наших прямых, P_j' — точка, принадлежащая первой прямой, то теорема Пифагора дает

$$OP_j^2 = (c_j + dc_j)^2 + (t_j + dt_j)^2$$

и

$$OP_j^2 = OQ_j^2 + (Q_j P_j' + P_j' P_j)^2 = c_j^2 + (t_j + \delta t_j)^2,$$

где $\delta t_j = P_j' P_j$ — элемент длины кривой. Из сравнения последних двух равенств получаем, пренебрегая бесконечно малыми второго

порядка, $\delta t_j = dt_j + \frac{c_j}{t_j} dc_j$, следовательно, $r_j = \frac{\delta t_j}{du_j} = \frac{dt_j}{du_j} + \frac{c_j}{t_j} \frac{dc_j}{du_j}$.

откуда, так как $t_j = c_j'$, $r_j = c_j'' + c_j$.

Найдем

$$W_1 = \begin{vmatrix} -\sin u_1 & \cos u_1 & c'_1 \\ \cos u_2 & \sin u_2 & c_2 \\ \cos u_3 & \sin u_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad W_{11} = \begin{vmatrix} -\cos u_1 & -\sin u_1 & c''_1 \\ \cos u_2 & \sin u_2 & c_2 \\ \cos u_3 & \sin u_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (11.10)$$

Мы имеем (рис. 23) три огибающие \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 , \mathfrak{F}_3 и три касательные к ним PP_j , касающиеся наших кривых в точках P_j .

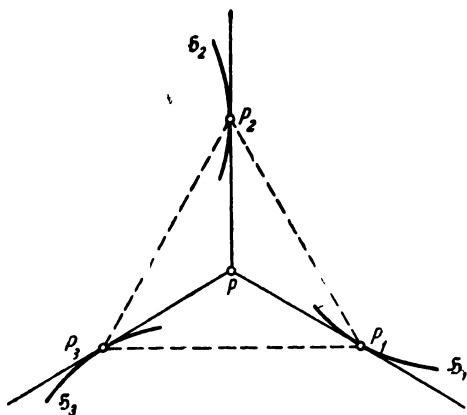


Рис. 23.

Если мы примем за точку P начало координат, то $c'_j = t_j$ будет равно длине отрезка касательной от P до кривой \mathfrak{F}_j , $c''_j = r_j$ и $c_j = 0$. Таким образом, из (11.9) и (11.10) следует, что

$$-\gamma' = \frac{r_1}{t_1} du_1 + \frac{r_2}{t_2} du_2 + \frac{r_3}{t_3} du_3. \quad (11.11)$$

Введя в рассмотрение длину дуги ds_j огибающей \mathfrak{F}_j и заметив, что $r_j = \frac{ds_j}{du_j}$, мы приведем предыдущую формулу к виду

$$-\gamma' = \frac{ds_1}{t_1} + \frac{ds_2}{t_2} + \frac{ds_3}{t_3}. \quad (11.12)$$

В силу этого теорема Графа и Зауэра, рассмотренная в § 4, принимает следующий вид: *если на плоскости заданы три дуги \mathfrak{F}_j так, что через каждую точку некоторой области \mathfrak{G} плоскости проходит по одной касательной к каждой дуге \mathfrak{F}_j , и если выражение (11.12) является полным дифференциалом, то эти дуги будут принадлежать одной кривой третьего класса.* Мы можем, также воспользовавшись формулами (9.19) и (9.21) и произведя соответствующие выкладки, записать условие $d\gamma' = 0$ или $k = 0$ в виде

$$\frac{r_1}{t_1^3} + \frac{r_2}{t_2^3} + \frac{r_3}{t_3^3} = 0. \quad (11.13)$$

Таким образом, кривая третьего класса может быть определена также и этим уравнением. Вообще, для кривой n -го класса имеет место уравнение

$$\sum_1^n \frac{r_j}{t_j^3} = 0. \quad (11.14)$$

Это предложение восходит к Рейсу (M. Reiss, 1805—1869) из Франкфурта (1837 г.), ученику Гаусса. Эти исследования были продолжены другими геометрами, большей частью независимо от Рейса, а именно норвежцами Бэклуном (A. V. Bäcklund, 1845—1922) и Ли (S. Lie, 1842—1899) в 1882 г., далее, в связи с изданием собрания сочинений Ли, его учеником Энгелем (F. Engel, 1861—1941) в 1939 г., наконец, римскими геометрами Бомпиани (E. Bompiani) в 1930 г. и Серре (B. Segre) в 1947 г. и в Испании — Тейксидором (J. Teixidor). Намеченная выше связь теоремы Графа и Зауэра из § 4 с теоремой Рейса была указана в 1927 г. Либманом (H. Liebmann, 1874—1939).

Рассмотрим теперь кратко результаты Рейса в их первоначальном виде. Пусть

$$f(x, y) = y^n + (a + bx)y^{n-1} + \dots = 0 \quad (11.15)$$

— уравнение кривой n -го порядка \mathfrak{C} . Если прямые $x = \text{const}$ при малых $|x - x_0|$ пересекают кривую \mathfrak{C} в n различных вещественных точках $(x, y_j(x))$, то из (11.15) следует, что

$$y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x) = -(a + bx), \quad (11.16)$$

и следовательно, что

$$y_1'' + y_2'' + \dots + y_n'' = 0. \quad (11.17)$$

Мы, по существу, уже получили искомый результат, который надо еще лишь несколько преобразовать. Прежде всего, нетрудно придать соотношению (11.17) проективно инвариантную форму; а именно, это соотношение можно переписать в виде

$$\sum_1^n \frac{(P_i, P_i', P_i'')}{(A, B, P_i')^3} = 0, \quad (11.18)$$

где A и B суть две фиксированные точки прямой $x = \text{const}$; P_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — n точек пересечения этой прямой AB с кривой \mathcal{C} ; скобки обозначают детерминанты из однородных координат трех точек, а штрихи — производные по произвольному криволинейному параметру. В самом деле, формула (11.18) является проективно инвариантной и в частном случае однородных координат x^0, x^1, x^2 таких, что $x = \frac{x^1}{x^0}, y = \frac{x^2}{x^0}$ переходит в (11.17).

Формула (11.18) удобна тем, что для нее можно сразу написать двойственную формулу. Если мы снова возьмем уравнение прямой в нормальной форме Гессе

$$x \cos u + y \sin u + c = 0$$

и характеризуем эту прямую при помощи вектора $\mathbf{n} = \{\cos u, \sin u, c\}$, то для прямых, проходящих через начало координат (прямых $c_j = 0$)

$$\left. \begin{aligned} (n_j, n_j', n_j'') &= \begin{vmatrix} \cos u_j & \sin u_j & c_j \\ -\sin u_j & \cos u_j & t_j \\ -\cos u_j & -\sin u_j & r_j - c_j \end{vmatrix} = r_j, \\ (a, b, n_j) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u_j & \cos u_j & t_j \end{vmatrix} = t_j \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

(здесь векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} характеризуют оси декартовой системы координат). Из (11.18) и (11.19) следует, что,

в самом деле,

$$\sum_1^n \frac{r_j}{t_j^3} = 0. \quad (11.20)$$

Менее простым является обращение этой теоремы, т. е. доказательство того, что алгебраическая кривая может быть определена соотношениями (11.17) или (11.20). Это, по-видимому, впервые отметил С. Ли, а доказано это было Энгелем и в последнее время — Тейксидором ¹⁾.

В соответствии с (11.12) условие Рейса для плоской кривой n -го порядка может быть сформулировано так: *составленное для точек пересечения кривой с подвижной прямой \mathfrak{K} выражение*

$$\gamma' = \sum_1^n \frac{du_j}{\operatorname{tg} \omega_j} \quad (11.21)$$

(где ω_j — углы между прямой \mathfrak{K} и кривой в точках их пересечения, а du_j — элемент угла между касательными к кривой в этой точке) *должно быть полным дифференциалом.*

После этого отступления мы продолжим изучение инвариантов ткани, начатое в § 7 и 8.

§ 12. Инвариантные производные

При помощи связности γ (8.4) можно вместо введенных в § 7 дифференциальных операторов определить на ткани «инвариантные производные», позволяющие построить, исходя из кривизны k , «все» дифференциальные инварианты ткани.

Мы будем говорить, что инвариант q имеет «вес» p , где p — некоторое действительное число, если q при перенормировке (6.5) преобразуется следующим образом:

$$q^* = g^p q. \quad (12.1)$$

Кривизна k ткани имеет в силу (8.8) вес два.

¹⁾ По поводу исследований Тейксидора ср. ниже, § 38.

Если мы введем в рассмотрение дифференциальный оператор D , определяемый формулой

$$D = d + p\gamma, \quad (12.2)$$

где d обозначает взятие полного дифференциала, p — вес инварианта, к которому применяется оператор D , и γ — связность ткани, то будем иметь

$$Dq = dq + pq\gamma \quad (12.3)$$

и

$$D^*q^* = g^p Dq. \quad (12.4)$$

В самом деле, в силу (8.5) мы получим

$$D^*q^* = \{d + p(\gamma - d \ln g)\} g^p q = g^p (dq + pq\gamma). \quad (12.5)$$

Если мы положим теперь

$$D = \sigma_2 D_3 - \sigma_3 D_2 = \sigma_3 D_1 - \sigma_1 D_3 = \sigma_1 D_2 - \sigma_2 D_1, \quad (12.6)$$

где

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0, \quad (12.7)$$

то из (12.2) и (12.6) в силу (7.10) и (8.4) будет следовать, что

$$D_j = \partial_j + ph_j. \quad (12.8)$$

Из (12.4) и (12.6) получаем далее

$$D_j^* q^* = g^{p+1} D_j q. \quad (12.9)$$

Это означает, что инвариантные дифференциальные операторы D_j переводят дифференциальные инварианты веса p в дифференциальные инварианты веса $p+1$.

Воспользуемся теперь соотношениями (7.21) для того, чтобы вычислить кососимметрическую часть вторых производных. Принимая во внимание (12.8) и (12.9), мы найдем в силу (7.22) и (8.10)

$$\begin{aligned} D_1 D_2 - D_2 D_1 &= \{\partial_1 + (p+1)h_1\} \{\partial_2 + ph_2\} - \\ &- \{\partial_2 + (p+1)h_2\} \{\partial_1 + ph_1\} = \partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1 + \\ &+ p(h_{21} - h_{12}) + (p+1)(h_1 \partial_2 - h_2 \partial_1) = \\ &= p\{h_1 \partial_2 - h_2 \partial_1 + k\} = p\{h_1 D_2 - h_2 D_1 + k\} \end{aligned} \quad (12.10)$$

и, следовательно (при $r \neq s$),

$$D_r D_s - D_s D_r = p\{h_r D_s - h_s D_r + k\}. \quad (12.11)$$

§ 13. Полная система инвариантов ткани

Справедлива следующая теорема: *кривизна k ткани \mathfrak{W} в точке $P(x, y)$ и инвариантные производные кривизны:*

Порядок	Инварианты	Вес
3	k	2
4	$D_1 k, \quad D_2 k,$	3
5	$D_1 D_1 k, \quad D_1 D_2 k, \quad D_2 D_2 k,$	4
6	$D_1 D_1 D_1 k, \quad D_1 D_1 D_2 k, \quad D_1 D_2 D_2 k, \quad D_2 D_2 D_2 k$	5
и т. д.		

образуют полную систему независимых дифференциальных инвариантов.

Прилагательное «полная» здесь означает, что две ткани \mathfrak{W} и \mathfrak{W}^* , для которых эти инварианты в соответствующих точках P и P^* совпадают, обязательно будут топологически эквивалентными.

Заметим еще, что оператор D_3 можно не рассматривать, так как он в силу (12.7) выражается через D_1 и D_2 , и что порядок следования операторов является несущественным в силу (12.11). Прилагательное «независимые» имеет в виду то обстоятельство, что эти инварианты не связаны никакими тождественными соотношениями. набросок доказательства теоремы полноты мы дадим ниже; полное доказательство приведено в книге Боля и моей от 1938 г.

§ 14. Каноническое разложение

Предположим, что в точке P ткани \mathfrak{W}

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0,$$

и разложим функцию ткани W в степенной ряд по u_j . При помощи преобразований I, II § 1 это разложение можно привести к следующему «каноническому»

виду *):

$$W = u_1 + u_2 + u_3 + a(u_2^2 u_3 + u_3^2 u_1 + u_1^2 u_2) + \\ + (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) u_1 u_2 u_3 + \dots, \quad (14.1)$$

*) Пусть разложение W в степенной ряд имеет вид

$$W = W_1 u_1 + W_2 u_2 + W_3 u_3 + \frac{1}{2} W_1 u_1^2 + W_{12} u_1 u_2 + \dots$$

(где возможно изменить коэффициенты разложения с помощью преобразований I, можно, например, считать, что ни один из коэффициентов W_1, W_2, W_3 не обращается в нуль). Воспользуемся преобразованием II: $\hat{W} = H(u_1, u_2, u_3)W$, где

$$H(u_1, u_2, u_3) = 1 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_{11} u_1^2 + a_{12} u_1 u_2 + \dots$$

Подобрав подходящим образом 3 коэффициента a_1, a_2, a_3 , мы можем добиться, чтобы в разложении \hat{W} в степенной ряд отсутствовали члены $\hat{W}_{12} u_1 u_2, \hat{W}_{13} u_1 u_3, \hat{W}_{23} u_2 u_3$; подобрав подходящим образом 6 коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$, мы можем добиться, чтобы 7 коэффициентов $\hat{W}_{112}, \hat{W}_{113}, \hat{W}_{122}, \hat{W}_{123}, \hat{W}_{133}, \hat{W}_{223}, \hat{W}_{233}$ нужным образом зависели от одного параметра a ; подобрав подходящим образом 10 коэффициентов $a_{111}, a_{112}, \dots, a_{333}$, мы можем добиться, чтобы 12 коэффициентов $\hat{W}_{1112}, \hat{W}_{1113}, \dots, \hat{W}_{2333}$ нужным образом зависели от двух параметров b_1 и b_2 . Таким образом, мы приходим к разложению

$$\hat{W} = \hat{W}_1 u_1 + \dots + \frac{1}{2} \hat{W}_{11} u_1^2 + \dots + \frac{1}{6} \hat{W}_{111} u_1^3 + \\ + a(\hat{W}_2^2 \hat{W}_3 u_2^2 u_3 + \dots) + \frac{1}{24} \hat{W}_{1111} u_1^4 + a(\hat{W}_2 \hat{W}_{22} \hat{W}_3 u_2^3 u_3 + \dots) + \\ + \frac{a}{2}(\hat{W}_2 \hat{W}_{33} u_2^2 u_3^2 + \dots) + (b_1 \hat{W}_1 u_1 + \dots) \hat{W}_1 \hat{W}_2 \hat{W}_3 u_1 u_2 u_3 + \dots,$$

где $b_1 + b_2 + b_3 = 0$; точки в середине формулы означают циклическую перестановку индексов 1, 2, 3. Теперь достаточно воспользоваться подстановкой

$$u_1^* = \hat{W}_1 u_1 + \frac{1}{2} \hat{W}_{11} u_1^2 + \frac{1}{6} W_{111} u_1^3 + \frac{1}{24} W_{1111} u_1^4, u_2^* = \dots, u_3^* = \dots$$

(преобразование II!), чтобы прийти к «каноническому разложению» (14.1):

$$\hat{W}(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = u_1^* + u_2^* + u_3^* + a(u_2^{*2} u_3^* + u_3^{*2} u_1^* + u_1^{*2} u_2^*) + \\ + (b_1 u_1^* + b_2 u_2^* + b_3 u_3^*) u_1^* u_2^* u_3^* + \dots$$

где постоянные величины b_1, b_2, b_3 удовлетворяют условию

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0. \quad (14.2)$$

При перенормировке

$$u_j^* = \frac{u_j}{r}, \quad W^* = \frac{W}{r} \quad (14.3)$$

мы получим, что

$$a^* = r^2 a, \quad b_j^* = r^3 b_j. \quad (14.4)$$

Поэтому если только $a \neq 0$, то всегда можно считать, что $a = \pm 1$. Из (14.1) следует, например, что если в точке P постоянная $a \neq 0$ (что, как мы сейчас увидим, равнозначно условию $k \neq 0$), то нашу ткань \mathfrak{W} в окрестности точки P можно аппроксимировать шестиугольной тканью, совпадающей с \mathfrak{W} с точностью до членов второго порядка включительно.

Найдем частные производные функции (14.1) по u_j :

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= 1 + a(2u_1 u_2 + u_3^2) + \dots, \\ W_{23} &= 2au_2 + (b_1 u_1 + 2b_2 u_2 + 2b_3 u_3) u_1 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

где не выписанные члены имеют относительно u_j порядок три и выше. Далее, из формул (9.10) для V_j получаем

$$V_1 = \frac{W_{23}}{W_2 W_3} = W_{23} + \dots, \quad (14.6)$$

где опять не выписаны члены, имеющие порядок три и выше. Наконец, из (9.13), (14.5) и (14.6) найдем выражение для связности ткани:

$$\gamma = -\{2au_2 + (b_1 u_1 + 2b_2 u_2 + 2b_3 u_3) u_1 + \dots\} du_1 + \dots; \quad (14.7)$$

здесь точки внутри скобок обозначают члены третьего и высшего порядка относительно u_j , а точки в конце формулы — члены, получающиеся из выписанных круговой подстановкой индексов 1, 2, 3. Из (14.5) и (9.7) следует, что с точностью до членов второго порядка относительно u_j

$$[du_2 du_3] = [du_3 du_1] = [du_1 du_2] = \mathfrak{Q}. \quad (14.8)$$

Дифференцируя теперь внешним образом соотношение

(14.7) и учитывая (14.8) и (8.7), мы получим, что кривизна ткани имеет вид

$$k = -2 \{-a - b_2 u_1 + b_3 u_1 + \dots\} + \dots$$

или, окончательно,

$$k = 6a + 2(b_2 - b_3)u_1 + 2(b_3 - b_1)u_2 + \\ + 2(b_1 - b_2)u_3 + \dots, \quad (14.9)$$

где точками снова обозначены члены более высокого порядка относительно u_j . В исходной точке P (где $u_1 = u_2 = u_3 = 0$) в силу (9.11), (14.6) и (14.5) символы Кристоффеля $h_j = 0$ и, следовательно, в силу (12.8) инвариантные дифференциальные операторы совпадают с обыкновенными:

$$D_j = \partial_j. \quad (14.10)$$

Далее, в силу (9.5) и (14.5) в точке P

$$\left. \begin{aligned} \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial u_3} - \frac{\partial}{\partial u_2}, \\ \partial_2 &= \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_3}, \\ \partial_3 &= \frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_1} \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

и поэтому из (14.9), (14.10) и (14.11) в силу (14.2) вытекает, что в этой точке

$$D_1 k = 6b_1, \quad D_2 k = 6b_2, \quad D_3 k = 6b_3. \quad (14.12)$$

Последние формулы частично подтверждают, частично усиливают утверждения § 13. А именно, мы видим, что кривизна k — единственный дифференциальный инвариант, порядок которого не превышает трех, и мы имеем в точке P

$$k = 6a. \quad (14.13)$$

Далее, величины

$$D_j k = 6b_j \quad (14.14)$$

являются единственными дифференциальными инвариантами четвертого порядка. Смысл равенств (14.13) и (14.14) заключается в том, что они определяют смысл коэффициентов a, b_j канонического разложения (14.1), являющихся важнейшими инвариантами ткани.

Разрешая уравнение $W = 0$ относительно u_1 , мы получим в силу (14.2)

$$u_1 = -u_2 - u_3 + a(u_2^3 + 3u_2^2 u_3 - u_3^3) + \\ + \{ (b_1 - b_2)u_2 + (b_1 - b_3)u_3 \} (u_2 + u_3) + u_2 u_3 + \dots \quad (14.15)$$

Точно так же будут справедливы и формулы, которые получаются из (14.15) круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

§ 15. Геометрический смысл кривизны ткани по Томсену

В силу (14.1) мы можем каноническое разложение уравнения ткани записать в виде

$$u + v + w + a(v^2 w + w^2 u + u^2 v) + \dots = 0, \quad (15.1)$$

где мы временно вместо u_1, u_2, u_3 пишем u, v, w . Отсюда можно получить, следуя работе Томсена (G. Thomsen, 1899—1934) 1927 г., геометрический смысл кривизны ткани k . Опишем около точки $P(0, 0, 0)$ образованный линиями ткани шестиугольник с вершинами

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= (0, v_0, w_0), & P_1 &= (u_1, 0, w_0), & P_2 &= (u_1, v_2, 0), \\ P_3 &= (0, v_2, w_3), & P_4 &= (u_4, 0, w_3), & P_5 &= (u_4, v_5, 0) \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

(рис. 24). При этом в точке P_0 (см. (15.1))

$$v_0 + w_0 + av_0^2 w_0 + \dots = 0 \quad (15.3)$$

и отсюда

$$w_0 = -v_0 + av_0^3 + \dots; \quad (15.4)$$

в точке P_1

$$u_1 + w_0 + au_1 w_0^2 + \dots = 0 \quad (15.5)$$

и, следовательно,

$$u_1 = -w_0 + aw_0^3 + \dots = v_0 - 2av_0^3 + \dots \quad (15.6)$$

Далее, в точке P_2

$$\left. \begin{aligned} u_1 + v_2 + au_1^2 v_2 + \dots &= 0, \\ v_2 = -u_1 + au_1^3 + \dots &= -v_0 + 3av_0^3 + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

в точке P_3

$$\left. \begin{aligned} v_2 + w_3 + av_2^2 w_3 + \dots &= 0, \\ w_3 = -v_2 + av_2^3 + \dots &= v_0 - 4av_0^3 + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

в точке P_4

$$\left. \begin{aligned} u_4 + w_3 + au_4 w_3^2 + \dots &= 0, \\ u_4 = -w_3 + aw_3^3 + \dots &= -v_0 + 5av_0^3 + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

наконец, в точке P_5

$$\left. \begin{aligned} u_4 + v_5 + au_4^2 v_5 + \dots &= 0, \\ v_5 = -u_4 + au_4^3 + \dots &= v_0 - 6av_0^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Разность

$$v_5 - v_0 = -6av_0^3 + \dots \quad (15.11)$$

оценивает «незамкнутость» нашего шестиугольника и тем самым указывает геометрический смысл кривизны $k = 6a$ в точке P . Для $k > 0$ при обходе вокруг точки P происходит приближение к этой точке, как на рис. 24, в то время как при $k < 0$ — удаление от нее. Вследствие (8.8) знак кривизны k не зависит от нормировки.

§ 16. Нормирование функции ткани

Как указано в § 2, функция $W(u_1, u_2, u_3)$ ткани \mathfrak{W} остается в большой степени произвольной. Однако ее можно однозначно нормировать во всяком случае тогда, когда кривизна $k \neq 0$ не меняет знака в рассматриваемой области \mathfrak{U} ткани \mathfrak{W} . В силу (8.10) или (15.11) в этом случае всегда можно добиться (например, переставив семейства \mathfrak{S}_1 и \mathfrak{S}_2), чтобы было $k > 0$.

Пусть u_1, u_2, u_3 — три кривые ткани \mathfrak{W} , которые органичивают треугольник \mathfrak{D} с вершинами P_1, P_2, P_3 в области \mathfrak{U} (рис. 25). Рассмотрим двойной интеграл по

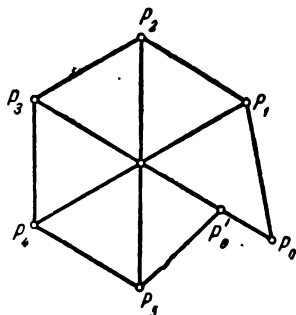


Рис. 24.

\mathfrak{D} , который можно назвать «полной кривизной» этого треугольника:

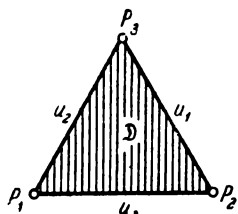
$$N(u_1, u_2, u_3) = \int_{\mathfrak{D}} k \Omega. \quad (16.1)$$

Так как $k > 0$, то эта функция обращается в нуль только тогда, когда треугольник \mathfrak{D} стягивается в точку. В силу соотношений (8.6) и (8.7) функцию N можно представить как интеграл, распространенный по границе $d\mathfrak{D}$ треугольника \mathfrak{D} :

$$N(u_1, u_2, u_3) = \int_{d\mathfrak{D}} \gamma = \int_{P_1}^{P_2} \gamma + \int_{P_2}^{P_3} \gamma + \int_{P_3}^{P_1} \gamma. \quad (16.2)$$

При этом, например, область интегрирования в первом интеграле в правой части (16.2) является сторона треугольника \mathfrak{D} , вдоль которой u_1 постоянно.

В силу (8.4) и (9.12) имеем



$$\int_{P_1}^{P_2} \gamma = - \int_{P_1}^{P_2} h_1 \sigma_2 = - \int_{P_1}^{P_2} \partial_1 \ln W_1 \sigma_2. \quad (16.3)$$

Но так как в силу (7.3)

$$d \ln W_1 = \partial_2 \ln W_1 \sigma_1 - \partial_1 \ln W_1 \sigma_2, \quad (16.4)$$

то из того, что $\sigma_1 = 0$ на стороне $P_2 P_3$, следует, что

$$\int_{P_1}^{P_2} \gamma = \int_{P_1}^{P_2} d \ln W_1 = \ln \frac{W_1(P_3)}{W_1(P_2)}. \quad (16.5)$$

Таким образом, из (16.2) и (16.5) получаем

$$N(u_1, u_2, u_3) = \ln \frac{W_1(P_3) W_2(P_1) W_3(P_2)}{W_1(P_2) W_2(P_3) W_3(P_1)}. \quad (16.6)$$

Если мы теперь внесем в правую часть вместо W ее каноническое разложение (14.1), то получим разложение функ-

ции N по степеням u_1, u_2, u_3 :

$$N = 3a(u_1 + u_2 + u_3)^2 + \dots \quad (16.7)$$

Целесообразно ввести функцию

$$\sqrt{N} = M(u_1, u_2, u_3) = \sqrt{3a}(u_1 + u_2 + u_3) + \dots \quad (16.8)$$

Теперь мы можем, наконец, нормировать параметры u_1, u_2, u_3 в окрестности точки $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ следующим условием:

$$M(u_1, 0, 0) = v_1, \quad M(0, u_2, 0) = v_2, \quad M(0, 0, u_3) = v_3. \quad (16.9)$$

Если мы положим теперь

$$M(u_1, u_2, u_3) = W(v_1, v_2, v_3), \quad (16.10)$$

то функция, стоящая в правой части, будет однозначно определенной *нормированной функцией ткани* при выбранной начальной точке $(0, 0, 0)$.

§ 17. Основные вопросы номографии

Ткань \mathfrak{W} , по существу (т. е. заданная с точностью до топологического отображения), определяется одной функцией двух переменных. Это можно усмотреть, либо записав уравнение ткани в виде (9.22):

$$u_3 = w(u_1, u_2), \quad (17.1)$$

либо, что равносильно, из того, что семейства линий $u_1 = \text{const}, u_2 = \text{const}$ могут быть приняты за координатные линии $x, y = \text{const}$, так что возможный произвол определяется одним уравнением третьего семейства линий $w(x, y) = \text{const}$. С другой стороны, прямолинейная ткань зависит от трех функций одного переменного; в качестве таких функций можно взять фигурирующие в (11.7) опорные функции $s_j(u_j)$ огибающих трех семейств прямых. Уже из этих простых подсчетов следует, что, «вообще говоря», нельзя по заданному уравнению $W(u_1, u_2, u_3) = 0$ найти прямолинейную ткань или построить прямолинейную номограмму для уравнения $W = 0$. Встает, таким образом, вопрос об условиях *«спрямляемости»* ткани. Решение этого вопроса наталкивается на большие вычислительные трудности, и здесь мы остановимся лишь на некоторых относящихся сюда подсчетах.

Исходя из третьих производных функций ткани $W(u_1, u_2, u_3)$, мы нашли первый топологический дифференциальный инвариант ткани — ее кривизну k , — вес которого равен 2. Если рассмотреть также производные четвертого порядка, то сюда присоединяются новые инварианты k_1 и k_2 (где $k_j = D_j k$) веса 3. Величину k_3 мы можем не учитывать в силу того, что $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ и, следовательно, $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Пятый порядок имеют инварианты k_{11}, k_{12}, k_{22} веса 4; здесь мы игнорируем величину k_{21} , которая в силу зависимости (12.11) сводится к k_{12} . Аналогично этому при помощи производных n -го порядка функции ткани W мы можем образовать $n - 2$ новых инварианта веса $n - 1$. При каждом шаге число вновь полученных инвариантов увеличивается на единицу, и после n -го шага мы имеем всего

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} \quad (17.2)$$

инвариантов. Получается следующая таблица:

Порядок	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число инвариан- тов	0	0	1	3	6	10	15	21	28

Произведем теперь соответствующие подсчеты для проективных инвариантов прямолинейной ткани. Мы имеем опорные функции $c_j(u_j)$ огибающих наших трех семейств прямых \mathfrak{S}_j , где u_j — угол прямой с некоторым фиксированным направлением и c_j — ее расстояние от фиксированной точки. Треугольник, образованный точками P_1, P_2, P_3 касания с огибающими трех прямых ткани, проходящих через некоторую исходную точку P (см. рис. 23), можно (если P_j не лежат на одной прямой) при помощи проективного отображения однозначно преобразовать так, что опорные функции разложатся в ряд следующим образом:

$$c_j = w_j + \frac{1}{2} r_j w_j^2 + \frac{1}{6} s_j w_j^3 + \dots, \quad (17.3)$$

где

$$w_1 = u_1, \quad w_2 = u_2 - \frac{2\pi}{3}, \quad w_3 = u_3 - \frac{4\pi}{3}. \quad (17.4)$$

При этом величина

$$r_j = \left(\frac{d^2 c_j}{d\omega_j^2} \right)_{\omega_j=0} \quad (17.5)$$

является радиусом кривизны огибающих в точках P_j (см. § 11). Для каждого порядка производных мы имеем три новых проективных инварианта

$$\left(\frac{d^n c_j}{d\omega_j^n} \right)_{\omega_j=0} \quad (j = 1, 2, 3; n \geq 2). \quad (17.6)$$

Таким образом, мы приходим к следующей таблице, указывающей число проективных инвариантов в точке P ткани \mathfrak{W} , порядок которых не превышает n :

Порядок	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число инвариан- тов	0	3	6	9	12	15	18	21	24

Итак, мы, по-видимому, имеем в своем распоряжении достаточно проективных инвариантов до восьмого порядка включительно для того, чтобы соответствующие топологические инварианты ткани \mathfrak{W} могли принимать любые значения. Однако, начиная с инвариантов девятого порядка, это перестает быть справедливым. Поэтому можно ожидать, что условие спрямляемости ткани выразится лишь через производные девятого порядка от функции ткани.

Функцию W нашей прямолинейной ткани \mathfrak{W} мы можем считать равной *)

$$W(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = c_1(\omega_1) \sin v_1 + c_2(\omega_2) \sin v_2 + c_3(\omega_3) \sin v_3, \quad (17.7)$$

*) То есть

$$W = \begin{vmatrix} \cos u_1 & \sin u_1 & c_1, \\ \cos u_2 & \sin u_2 & c_2, \\ \cos u_3 & \sin u_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(ср. (11.2)).

где

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= u_3 - u_2 = \frac{2\pi}{3} + w_3 - w_2, \\ v_2 &= u_1 - u_3 = \frac{2\pi}{3} + w_1 - w_3, \\ v_3 &= u_2 - u_1 = \frac{2\pi}{3} + w_2 - w_1. \end{aligned} \right\} \quad (17.8)$$

Тогда в силу формул § 9 из разложения (17.4) для точки P ткани \mathfrak{W} следует, например:

$$k = \frac{8}{3\sqrt{3}}(r_1 + r_2 + r_3), \quad (17.9)$$

$$k_1 = \frac{8}{9} \left\{ 2(s_3 - s_2) + 2\sqrt{3}(r_2 - r_3 - 2r_1) + \right. \\ \left. + 6(r_2^2 - r_3^2) \right\} \quad (17.10)$$

и аналогичные выражения для инвариантов k_2 и k_3 . Уже отсюда видно, что система уравнений для выражения проективных инвариантов через инвариантные производные кривизны k является не линейной и очень сложна. Таким образом, непосредственное нахождение условий спрямленности ткани представляется безнадежным. Нескольким более доступным кажется доказательство следующего предположения об однозначности, высказанного Гронвэллом (F. H. Gronwall, 1877—1932) в 1912 г.: *Если шестигугольная ткань \mathfrak{W} спрямляема, то топологическое преобразование, переводящее \mathfrak{W} в прямолинейную ткань, определяется, с точностью до проективного преобразования, однозначно.*

Для шестигугольной ткани эта однозначность имеет место не всегда, так как мы знаем, что подобную ткань образуют касательные к любой кривой третьего класса, а все кривые третьего класса не являются проективно эквивалентными (они имеют нетривиальные проективные инварианты). Боль (G. Bol) и Боровка (O. Borůvka) показали в 1938 г., что число проективно различных реализа-

ций шестигуольной ткани ≤ 16 . Уменьшению этой явно завышенной оценки мешает увеличивающийся объем вычислений. Таким образом, эти проблемы номографии являются примерами вопросов, которые теоретически не сложны, но фактическому решению которых препятствуют вычислительные трудности.

§ 18. Комплексные формы Пфаффа

До сих пор мы задавали ткань \mathfrak{W} в общем случае тремя формами Пфаффа σ_j такими, что уравнения $\sigma_j = 0$ определяли три семейства кривых ткани. Формы σ_j нормировались условием

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0; \quad (18.1)$$

при этом они определялись не однозначно, а лишь с точностью до перенормировки

$$\dot{\sigma}_j = \frac{\sigma_j}{g}. \quad (18.2)$$

Вместо этих трех вещественных форм Пфаффа для многих задач целесообразно ввести две *комплексно-сопряженные формы Пфаффа* $\tau, \bar{\tau}$. Пусть ε — примитивный корень третьей степени из единицы

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \quad (i^2 = -1); \quad (18.3)$$

при этом, очевидно,

$$\varepsilon^3 = 1, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0. \quad (18.4)$$

Спределим теперь комплексные формы Пфаффа $\tau, \bar{\tau}$ равенствами

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \sigma_1 + \varepsilon\sigma_2 + \varepsilon^2\sigma_3, \\ \bar{\tau} &= \sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \varepsilon\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

Обратно, имеем

$$3\sigma_1 = \tau + \bar{\tau}, \quad 3\sigma_2 = \varepsilon^2\tau + \varepsilon\bar{\tau}, \quad 3\sigma_3 = \varepsilon\tau + \varepsilon^2\bar{\tau}. \quad (18.6)$$

Пусть f — вещественная скалярная функция, заданная в области регулярности \mathfrak{W} ткани \mathfrak{W} ; разложим полный дифференциал df по формам $\tau, \bar{\tau}$:

$$df = f'\tau + f^x\bar{\tau}. \quad (18.7)$$

Этим тождеством определяются новые комплексно-сопряженные производные f' , f^\times от функции f . Сравнивая (18.7) с соотношением (7.5), найдем их связь с введенными ранее производными ткани

$$\partial_k f = f_k;$$

учитывая (18.5), получим

$$\left. \begin{aligned} f_1 = \partial_1 f &= (\varepsilon^2 - \varepsilon) f' + (\varepsilon - \varepsilon^2) f^\times, \\ f_2 = \partial_2 f &= (1 - \varepsilon^2) f' + (1 - \varepsilon) f^\times, \\ f_3 = \partial_3 f &= (\varepsilon - 1) f' + (\varepsilon^2 - 1) f^\times, \end{aligned} \right\} \quad (18.8)$$

и, обратно,

$$\left. \begin{aligned} 3f' &= -\varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 = -f_3 + \varepsilon f_1 = -\varepsilon^2 f_1 + f_2, \\ 3f^\times &= -\varepsilon^2 f_2 + \varepsilon f_3 = -f_3 + \varepsilon^2 f_1 = -\varepsilon f_1 + f_2, \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

или

$$\left. \begin{aligned} 3(\varepsilon^2 - \varepsilon) f' &= f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon f_3, \\ 3(\varepsilon - \varepsilon^2) f^\times &= f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3. \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

Для поверхностного элемента

$$\Omega = [\sigma_1 \sigma_2]$$

мы найдем в силу (18.5) новое выражение

$$\Omega = \frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{9} [\tau \bar{\tau}] = \frac{i}{3\sqrt{3}} [\tau \bar{\tau}]. \quad (18.11)$$

Если мы положим

$$d\tau = H\Omega, \quad d\bar{\tau} = \bar{H}\Omega, \quad (18.12)$$

то из (18.5) и (7.1) будем иметь

$$\begin{aligned} H &= h_1 + \varepsilon h_2 + \varepsilon^2 h_3, \\ \bar{H} &= h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon h_3; \end{aligned} \quad (18.13)$$

отсюда

$$3h_1 = H + \bar{H}, \quad 3h_2 = \varepsilon^2 H + \varepsilon \bar{H}, \quad 3h_3 = \varepsilon H + \varepsilon^2 \bar{H}. \quad (18.14)$$

Для связности γ мы получим в силу (8.4)

$$\gamma = \frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{9} (\bar{H}\tau - H\bar{\tau}). \quad (18.15)$$

И, наконец, кривизна k выразится в силу (8.7), (18.11) и (18.12) так:

$$k = -H' - \bar{H}^\times. \quad (18.16)$$

Отметим еще, как преобразуются величины H при перенормировке (18.2). Из (18.13), (8.3) и (18.10) мы найдем

$$\left. \begin{aligned} H^* &= g \left\{ H - 3(\epsilon - \epsilon^2) \frac{g^\times}{g} \right\}, \\ \bar{H}^* &= g \left\{ \bar{H} - 3(\epsilon^2 - \epsilon) \frac{g'}{g} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

§ 19. «Вращение» ткани

Формулы § 18 позволяют просто описать такие преобразования $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^*$ ткани, при которых каждая точка области \mathfrak{U} остается неподвижной, а выходящие из нее направления ткани поворачиваются на постоянный угол ν . При этом угол ν измеряется в «гауссовой метрике», которую можно вести на \mathfrak{U} с помощью положительно определенной квадратичной формы («элемента дуги»):

$$ds^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (19.1)$$

или

$$ds^2 = -2(\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2) = \frac{2}{3} \tau\tau. \quad (19.2)$$

Произведения форм Пфаффа здесь не косые, а обыкновенные. К этой «метрике» мы еще вернемся позже (§ 22).

В метрике (19.1) кривые ткани пересекаются под равными углами, равными $2\pi:3$. В самом деле, мы имеем

$$ds^2 = 2(\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) \quad (19.3)$$

и угол ω между двумя направлениями σ_i и σ_j определится формулой

$$\cos \omega = \frac{2\sigma_1 \sigma_1' + \sigma_1 \sigma_2' + \sigma_2 \sigma_1' + 2\sigma_2 \sigma_2'}{2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_1' \sigma_2' + \sigma_2'^2}}. \quad (19.4)$$

Если мы положим $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0$ и $\sigma'_1 : \sigma'_2 = 0 : 1$, то получим

$$\cos \omega = \frac{1}{2}, \quad (19.5)$$

что и требовалось доказать.

Обратно, этим свойством пересечения линий ткани под равными углами метрика (19.1) определяется однозначно с точностью до перенормировки

$$ds^{*2} = \frac{ds^2}{g^2}. \quad (19.6)$$

Этой перенормировке отвечает конформное отображение соответствующих метрик. То, что ткани могут быть использованы для механической интерпретации конформного отображения, заметил Финстервальдер (S. Finsterwalder, 1862—1951) еще в 1899 г. *).

Используя формы Пфаффа $\tau, \bar{\tau}$, «вращение» $\mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{W}^*$ ткани можно задать формулами **):

$$\left. \begin{aligned} \tau^* &= r\tau, & \bar{\tau}^* &= r\bar{\tau}, \\ \tau &= r\tau^*, & \bar{\tau} &= r\bar{\tau}^*, \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

где r — постоянное комплексное число, по модулю равное единице:

$$r = e^{iv}, \quad v = \bar{v}, \quad r\bar{r} = 1. \quad (19.8)$$

*) Рассмотрим на плоскости ткань, линии которой в каждой точке пересекаются под равными углами в 120° ; в таком случае метрика плоскости будет иметь вид (19.1). Произвольное преобразование плоскости, переводящее нашу ткань в аналогичную «равноугольную» ткань, должно являться конформным; это обстоятельство и было использовано Финстервальдером.

**) Так как $ds^2 = \frac{2}{3} \tau \bar{\tau}$, то угол между двумя направлениями, отвечающими значениям $\tau, \bar{\tau}$ и $\tau', \bar{\tau}'$ комплексных форм Пфаффа, можно определить формулой

$$\cos \omega = \frac{\tau \bar{\tau}' + \bar{\tau} \tau'}{2 \sqrt{\tau \bar{\tau}} \sqrt{\tau' \bar{\tau}'}} ,$$

откуда следует, что если $\tau' = \bar{r}\tau$, $r = e^{iv}$, то

$$\cos \bar{\omega} = \frac{1}{2} (r + \bar{r}) = \cos v, \quad \bar{\omega} = v.$$

Тогда в силу (18.11) будем иметь

$$\Omega^* = \Omega \quad (19.9)$$

и поэтому в силу (18.12)

$$H^* = \bar{r}H, \quad \bar{H}^* = r\bar{H}. \quad (19.10)$$

Отсюда и из (18.15) следует, что связность γ при нашем «вращении» остается неизменной:

$$\gamma^* = \gamma. \quad (19.11)$$

Из равенства

$$d\gamma = k\Omega$$

в силу инвариантности величин γ и Ω следует, наконец, что кривизна k также сохраняется при «вращении» ткани:

$$k^* = k. \quad (19.12)$$

§ 20. Параллельное перенесение Кельвина — Леви-Чивита

Точке P ткани \mathfrak{U} , лежащей внутри его области регулярности \mathfrak{G} , можно сопоставить с помощью введенных в § 7 дифференциальных операторов ∂_j «сопровождающие точки» P_j ($j = 1, 2, 3$) таким образом, что координаты x_j, y_j вектора

$$\mathbf{v}_j = \overline{PP_j} \quad (20.1)$$

получаются из координат исходной точки применением к ним оператора ∂_j :

$$x_j = \partial_j x, \quad y_j = \partial_j y.$$

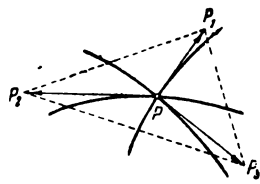


Рис. 26.

Точка P_j лежит на касательной в точке P к проходящей через эту точку кривой семейства \mathfrak{G}_j ткани (рис. 26). В силу условия

$$\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = 0 \quad (20.2)$$

мы имеем для векторов \mathbf{v}_j

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0; \quad (20.3)$$

следовательно, исходная точка P является центром тяжести своего «сопровождающего треугольника» $P_1P_2P_3$. Произвольный вектор \mathbf{w} , выходящий из точки P , может

быть однозначно представлен в виде

$$\boldsymbol{w} = w_1 \boldsymbol{v}_1 + w_2 \boldsymbol{v}_2 + w_3 \boldsymbol{v}_3, \quad (20.4)$$

если потребовать, чтобы коэффициенты w_j удовлетворяли условию

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0. \quad (20.5)$$

При перенормировке (7.23)

$$\partial_j^* = g \partial_j$$

мы получим в силу (20.4):

$$w_j^* = \frac{w_j}{g}. \quad (20.6)$$

Дифференциальный оператор (12.2) для инвариантов веса $\rho = -1$ принимает вид $D = d - \gamma$. Поэтому, если мы потребуем для вектора \boldsymbol{w} , который задан вдоль некоторой кривой \mathfrak{C} , проходящей через точку P , чтобы вдоль этой кривой выполнялись условия

$$Dw_j = dw_j - w_j \gamma = 0 \quad (20.7)$$

или

$$d \ln w_j = \gamma, \quad (20.8)$$

то эти условия не будут зависеть от нормировки. Далее, из (20.7) следует, что

$$d(w_1 + w_2 + w_3) = (w_1 + w_2 + w_3) \gamma, \quad (20.9)$$

так что соотношение (20.5) при этом сохраняет силу. Таким образом, уравнения (20.7) или (20.8) определяют «параллельное перенесение» вектора \boldsymbol{w} вдоль кривой \mathfrak{C} в области \mathfrak{U} .

Так как

$$d \frac{w_j}{w_k} = \frac{w_k dw_j - w_j dw_k}{w_k^2} = \frac{w_k Dw_j - w_j Dw_k}{w_k^2} = 0, \quad (20.10)$$

то отношения $w_1 : w_2 : w_3$ при этом перенесении остаются неизменными. Поэтому совокупность концов всех векторов, выходящих из точки P , при этом перенесении вдоль кривой преобразуется аффинно, причем так, что касательные к кривым семейств \mathfrak{C}_j , проходящим через P , пере-

ходят снова в соответствующие касательные; следовательно, двойное отношение четырех направлений

$$\overline{PP_1}, \overline{PP_2}, \overline{PP_3}, \omega$$

остаётся неизменным; поэтому перенесение направлений векторов не зависит от пути \mathfrak{C} . Иначе обстоит дело с длиной l вектора, которую здесь естественно определить формулой

$$l^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2. \quad (20.11)$$

В силу постоянства отношений $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$ длина переносимого вектора будет равна $a_j \omega_j$, где a_j ($j=1, 2, 3$) постоянно; поэтому для того, чтобы длина l также оставалась инвариантной, надо, чтобы $d\omega_j$, а следовательно, и $d \ln \omega_j$ было полным дифференциалом. В силу (20.8) отсюда следует, что и форма γ тоже будет полным дифференциалом, а это означает, что наша ткань должна быть шестиугольной. Таким образом, перенесение вектора не зависит от пути \mathfrak{C} только в случае шестиугольной ткани.

Подобным же образом было введено в 1867 г. Кельвином (Lord Kelvin) и в 1917 г. Леви-Чивита (T. Levi-Civita, 1873—1941) параллельное перенесение для случая римановой геометрии. Сходные соображения опубликовал в 1917 г. Гессенберг (G. Hessenberg, 1874—1928). Дальнейшими обобщениями мы обязаны в основном Э. Картану, И. А. Схоутену и Г. Вейлю.

§ 21. Аналог одного замечания Э. Ферми

Если ткань \mathfrak{W} является шестиугольной, то (§ 8) ее связность γ будет полным дифференциалом. В этом случае нормирующий множитель g можно определить из уравнения

$$\gamma = d \ln g, \quad (21.1)$$

т. е. положить

$$g = e^{\int \gamma}; \quad (21.2)$$

в этом случае из (8.5) мы получим

$$\gamma^* = 0.$$

Если τ — введенная в § 18 комплексная форма Пфаффа, то согласно (18.5) и (6.5)

$$\tau^* = \tau e^{-\int \gamma}. \quad (21.3)$$

При этом форма τ^* также явится полным дифференциалом *):

$$\tau^* = dz = d(x + iy). \quad (21.4)$$

Следовательно, интеграл

$$z = \int e^{-\int \gamma} \tau \quad (21.5)$$

определит отображение нашей ткани на гауссову плоскость комплексного переменного z ; при этом в силу (18.6) семейства \mathcal{S}_j линий ткани отобразятся на три семейства прямых

$$dz + d\bar{z} = 0, \quad \varepsilon^2 dz + \varepsilon d\bar{z} = 0, \quad \varepsilon dz + \varepsilon^2 d\bar{z} = 0 \quad (21.6)$$

или

$$x = \text{const}, \quad x - \sqrt{3}y = \text{const}, \quad x + \sqrt{3}y = \text{const}. \quad (21.7)$$

Таким образом, наша шестиугольная ткань отобразится на правильную ткань (§ 2).

Пусть теперь \mathcal{W} — произвольная ткань с областью регулярности \mathcal{G} ; \mathcal{C} — незамкнутая гладкая кривая без кратных точек. Тогда мы можем вдоль кривой \mathcal{C} вычислить интеграл

$$\int \gamma = \ln g. \quad (21.8)$$

Проводя нормирование при помощи найденного таким образом множителя g , мы получим форму γ^* , обращающуюся в нуль на кривой \mathcal{C} . Предположим, что \mathcal{C} нигде не касается кривых семейства \mathcal{S}_1 ткани \mathcal{W} . Тогда мы можем точки P некоторой окрестности кривой \mathcal{C} покрыть кривыми \mathcal{S}_1 первого семейства, проходящими через точки Q кривой \mathcal{C} . Поставим теперь в соответствие точке P комплексное число

$$z = \int_{P_0}^Q \frac{\tau}{g} + \int_Q^P \frac{\tau}{g}, \quad (21.9)$$

*) В силу (18.12), ибо из (18.15) вытекает, что равенство $\gamma=0$ влечет за собой $H=0$.

где первый интеграл берется по кривой \mathfrak{C} , а второй — по \mathfrak{C}_1 (рис. 27) и функция g определена в рассматриваемой окрестности формулой

$$\ln g(P) = \ln g(Q) \int_Q^P \gamma.$$

Так как форма γ^* обращается в нуль в каждой точке Q кривой \mathfrak{C} для двух различных направлений и, следовательно, будет равна нулю в Q для всех направлений, то на этой кривой $h_j^* = 0$. Поэтому отображение (21.9) ткани \mathfrak{W} на z -плоскость представляет ткань, которая вдоль образа \mathfrak{C}^* кривой \mathfrak{C} с точностью до производных второго порядка совпадает с правильной тканью. При этом мы видим, что отображение (21.9) позволяет сопоставить любой линии \mathfrak{C} области регулярности \mathfrak{U} ткани \mathfrak{W} линию \mathfrak{C}^*

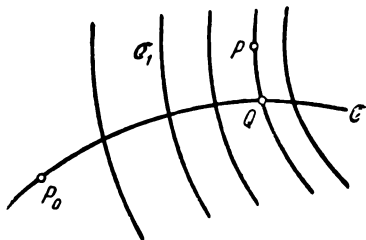


Рис. 27.

z -плоскости таким образом, что образ \mathfrak{W}^* ткани \mathfrak{W} совпадает в окрестности второго порядка линии \mathfrak{C}^* с шестиугольной тканью. Кривая \mathfrak{C}^* определяется однозначно с точностью до преобразования подобия

$$z = \epsilon^k a z + z_0 \quad (\epsilon^3 = 1; \quad k = 1, 2, 3; \quad a = \overline{a}).$$

Этот результат сходен с одним результатом Ферми (E. Fermi), относящимся к 1922 г., который Картан использовал для обоснования римановой геометрии *). В силу (21.9)

*) Теорема Ферми утверждает, что в римановом пространстве можно ввести *евклидову* метрику такую, что вдоль любой наперед заданной кривой коэффициенты g_{ij} евклидовой метрической формы и их первые производные будут такими же, как и в рассматриваемом римановом пространстве, другими словами, что существует евклидово пространство, *соприкасающееся* с римановым пространством вдоль данной кривой. При этом перенесение вектора вдоль кривой риманова пространства можно определить как параллельное перенесение в обычном смысле вектора соприкасающегося евклидова пространства. По этому поводу см. Э. К а р т а н, Геометрия римановых пространств, М. — Л., ОНТИ, 1936, гл. IV, в частности, стр. 100.

параллельному перенесению вдоль кривой \mathfrak{C} соответствует элементарное параллельное перенесение вдоль кривой \mathfrak{C}^* . Таким образом, § 21 указывает геометрический смысл параллельного перенесения, определенного в § 20.

§ 22. Ткани и конформные отображения

Вернемся еще раз к введенной в § 19 гауссовой метрике

$$ds^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \frac{2}{3} \tau \bar{\tau} \quad (22.1)$$

ткани \mathfrak{W} . Формы τ , $\bar{\tau}$ отличаются от полных дифференциалов на некоторые скалярные множители a , b :

$$\tau = a dp, \quad \bar{\tau} = b dq, \quad (22.2)$$

и мы можем считать a и b , так же как p и q , комплексносопряженными величинами.

Так как

$$[\tau \bar{\tau}] = ab [dp dq], \quad (22.3)$$

то мы можем теперь вместо x , y ввести в качестве новых независимых переменных величины p и q и положить

$$a = a(p, q), \quad b = b(p, q). \quad (22.4)$$

Величины p и q определяются или при помощи равенств (22.2) или равенствами

$$[\tau dp] = 0, \quad [\bar{\tau} dq] = 0. \quad (22.5)$$

Мы теперь можем отобразить нашу ткань \mathfrak{W} на гауссову плоскость комплексного переменного p в некоторую ткань \mathfrak{W}^* , которая в силу § 19 явится «равноугольной»^{*)}. Эта равноугольная ткань \mathfrak{W}^* определяется однозначно с точностью до конформного отображения

$$p^* = f(p), \quad (22.6)$$

где f — аналитическая функция комплексного переменного p .

^{*)} В силу (22.2) метрика плоскости комплексного переменного $ds^2 = dp d\bar{p} = dp dq$ конформно связана с метрикой (22.1).

Кривые первого семейства \mathfrak{S}_1 ткани \mathfrak{W}^* задаются уравнением

$$3\sigma_1 = \tau + \bar{\tau} = 0, \quad (22.7)$$

а кривые двух других семейств \mathfrak{S}_2 и \mathfrak{S}_3 получаются из \mathfrak{S}_1 при помощи рассмотренного в § 19 вращения на углы $2\pi:3$ и $4\pi:3$. Отсюда следует:

Изучение криволинейной ткани \mathfrak{W} , заданной с точностью до «топологических» преобразований (0.1), совпадает по существу с конформной геометрией семейства кривых

$$u(x, y) = \text{const}. \quad (22.8)$$

*Шестиугольным тканям при этом отвечают изотермические семейства кривых, для которых функция u может быть выбрана так, что *)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (22.9)$$

*) Если семейство линий \mathfrak{S}_1 задано уравнением (22.8) (x, y — прямоугольные декартовы координаты), то

$$\sigma_1 = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = p dx + q dy;$$

при этом формы Пфаффа семейств кривых \mathfrak{S}_2 и \mathfrak{S}_3 , образующих с кривыми семейства \mathfrak{S}_1 углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$, запишутся в виде

$$\sigma_2 = \left(-\frac{1}{2} p - \frac{\sqrt{3}}{2} q\right) dx + \left(-\frac{1}{2} q + \frac{\sqrt{3}}{2} p\right) dy,$$

$$\sigma_3 = \left(-\frac{1}{2} p + \frac{\sqrt{3}}{2} q\right) dx + \left(-\frac{1}{2} q - \frac{\sqrt{3}}{2} p\right) dy,$$

в соответствии с (6.4). Поверхностный элемент ткани принимает вид

$$\Omega = [\sigma_1 \sigma_2] = \frac{\sqrt{3}}{2} (p^2 + q^2) [dx dy].$$

Дифференцируя внешним образом формы σ_j и используя выписанное выражение для Ω , найдем из (7.1)

$$h_1 = 0, \quad h_2 = -h_3 = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] : \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = h.$$

В силу (8.4) связность γ ткани примет вид $\gamma = h du$. Для того, чтобы рассматриваемая ткань была шестиугольной, необходимо и достаточно, чтобы форма γ была полным дифференциалом, т. е.

Преобразуем несколько нашу метрику (22.1), полагая

$$ds^2 = \bar{\tau}\bar{\tau} = ab \, dp \, dq. \quad (22.10)$$

При помощи формул внутренней геометрии поверхностей, которой мы в основном обязаны Гауссу (1827), вычислим, исходя из (22.10), геодезические кривизны c_j кривых ткани, проходящих через одну точку; при этом найдем

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad (22.11)$$

и

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \frac{2}{9} H \bar{H} \quad (22.12)$$

или так же

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \frac{1}{3} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2). \quad (22.13)$$

Кривые ткани определяются уравнением

$$a^3 dp^3 + b^3 dq^3 = 0. \quad (22.14)$$

Поверхностный элемент Ω совпадает с точностью до числового множителя с элементом поверхности нашей метрики (22.10). Для кривизны ткани \mathfrak{K} мы получим

$$k = \frac{9}{\varepsilon^2 - \varepsilon} \frac{1}{ab} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \ln \frac{a}{b}, \quad (22.15)$$

в то время как гауссова кривизна K метрики (22.10) имеет вид

$$K = -\frac{1}{ab} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \ln ab. \quad (22.16)$$

Инвариантным относительно нормировки элементом дуги будет выражение (при $k > 0$)

$$d\hat{s}^2 = k \tau \bar{\tau}. \quad (22.17)$$

чтобы было $[dh \, du] = 0$. Поэтому h зависит только от u и, значит,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(u) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Теперь достаточно перейти от функции $u(x, y)$ к функции $u^* = \int e^{-\int f(u) \, du} \, du$, задающей то же семейство \mathfrak{S}_1 кривых, чтобы прийти к уравнению Лапласа (22.9).

§ 23. О лучшей номограмме

Если смотреть на ткань с точки зрения номографии, то встает вопрос о «лучшей реализации» ткани, заданной уравнением $W(u_1, u_2, u_3) = 0$ в своей области регулярности \mathfrak{U} . При этом «качество» этой реализации нужно характеризовать геометрически. Можно прежде всего потребовать «равноугольности», так как в силу этого все углы ткани будут равны $2\pi:3$ и таким образом исключаются сечения под малыми углами. После этого остается еще открытым вопрос о нормирующем множителе или о конформном отображении ткани. Его можно использовать для того, чтобы привести к минимуму интеграл

$$J = \int_{\mathfrak{U}} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \Omega, \quad (23.1)$$

где величины c_j означают, как и в (22.11), геодезические кривизны линий ткани в нашей метрике (22.10). Это приведет к тому, что линии ткани будут «максимально распрямлены». Этой вариационной проблемой занимался Кольвиц (E. Kollwitz) в своей гамбургской диссертации в 1930 г. В качестве уравнения Эйлера этой проблемы получается условие

$$K = 0 \quad (23.2)$$

— обращение в нуль гауссовой кривизны (22.16) нашей метрики. Поэтому «лучшая номограмма» может быть реализована на евклидовой плоскости. В качестве краевого условия получается, что вдоль границы $d\mathfrak{U}$ области \mathfrak{U} линейные элементы σ_j семейств \mathfrak{S}_j должны быть в обычном смысле параллельны друг к другу.

Практические примеры этих лучших номограмм Кольвица как будто еще никто не рассматривал.

Прямолинейная реализация («спрямление») ткани \mathfrak{W} , как было показано в § 17, вообще говоря, невозможна, однако, быть может, существует такая метрика

$$ds^2 = A_1 \sigma_1^2 + A_2 \sigma_2^2 + A_3 \sigma_3^2 \quad (23.3)$$

с положительными $A_j(x, y)$, что линии $\sigma_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) будут геодезическими линиями этой метрики. Нам кажется, что эта задача относительно неизвестных $A_j(x, y)$

разрешима. Действительно, ткань \mathfrak{W} зависит от функции $w = w(u, v)$ двух переменных точно так же, как и метрика поверхности, которая может быть приведена, как показал Гаусс, к виду

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2. \quad (23.4)$$

Фольк (O. Volk) в 1925—1927 гг. рассматривал задачу о поверхностях, на которых имеются шестиугольные ткани из геодезических линий. Например, это возможно в силу теоремы Бельтрами (E. Beltrami, 1835—1900), 1866, на всех поверхностях постоянной кривизны, так как каждая такая поверхность может быть «в малом» геодезически отображена на плоскость, что означает, что ее геодезическим соответствуют на плоскости прямые линии *). Каждой прямолинейной шестиугольной ткани на плоскости соответствует геодезическая шестиугольная ткань на поверхности постоянной кривизны. Инвариантное условие для метрики, допускающей геодезическую шестиугольную ткань, как мне кажется, еще неизвестно (ср. J. Drach, C. R. Paris, 1931 г.).

*) См., например, В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. II, М. — Л., Гостехиздат, 1948, § 65.

II. ТКАНИ, ОБРАЗОВАННЫЕ ПОВЕРХНОСТЯМИ

§ 24. Формы Пфаффа тканей, образованных поверхностями

В параграфе 10 мы уже кратко рассматривали некоторые свойства тканей, образованных поверхностями. Сейчас приступим к их систематическому изучению. В области \mathfrak{U} пространства с декартовыми координатами x, y, z рассмотрим четыре семейства поверхностей, заданных при помощи уравнений

$$u_j(x, y, z) = u_j = \text{const} \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (24.1)$$

такие, что через каждую точку P области \mathfrak{U} проходит точно одна поверхность каждого семейства и функциональный определитель аналитических в \mathfrak{U} функций u_j

$$\frac{\partial(u_j, u_k, u_l)}{\partial(x, y, z)} \neq 0 \quad \text{в } \mathfrak{U} \quad (24.2)$$

для любых трех различных значений индексов j, k, l , принимающих значения 0, 1, 2, 3. Мы предполагаем, кроме того, область \mathfrak{U} «выпуклой», т. е. такой, что каждая линия пересечения поверхностей $u_j, u_k = \text{const}$ ($j \neq k$) пересекает эту область по связной дуге.

Введем теперь формы Пфаффа σ_j , которые отличаются от полных дифференциалов функций $u_j(x, y, z)$ только некоторыми скалярными множителями $s_j(x, y, z) \neq 0$:

$$\sigma_j = s_j du_j; \quad (24.3)$$

эти множители s_j мы выберем так, что

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (24.4)$$

для всех точек x, y, z области \mathfrak{U} и всех направлений $dx:dy:dz$. Тогда формы σ_j будут определены однозначно с точностью до *перенормировки*

$$\sigma_j^* = \frac{\sigma_j}{g} \quad (24.5)$$

с помощью множителя $g(x, y, z) \neq 0$.

Аппарат, построенный в § 6 для форм Пфаффа от двух переменных x, y , распространим на формы от трех переменных x, y, z . Мы придем к альтернированному или внешнему произведению двух или трех форм Пфаффа, подчиняющемуся следующим правилам:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma\tau] + [\tau\sigma] &= 0, \quad [\sigma_1 + \sigma_2, \tau] = [\sigma_1 \tau] + [\sigma_2 \tau], \\ [a\sigma, \tau] &= a [\sigma\tau] \end{aligned} \right\} \quad (24.6)$$

и для трех множителей

$$\left. \begin{aligned} [a\beta\gamma] &= [\beta\gamma\alpha] = [\gamma\alpha\beta] = -[\gamma\beta\alpha] = -[\beta\alpha\gamma] = -[\alpha\gamma\beta], \\ [\alpha\beta, \gamma_1 + \gamma_2] &= [\alpha\beta\gamma_1] + [\alpha\beta\gamma_2], \\ [a\alpha\beta\gamma] &= a [\alpha\beta\gamma]. \end{aligned} \right\} \quad (24.7)$$

Кроме того,

$$[[\alpha\beta] \gamma] = [\alpha\beta\gamma]. \quad (24.8)$$

Для внешнего дифференциала мы получим

$$\begin{aligned} d(p\,dx + q\,dy + r\,dz) &= [dp\,dx] + [dq\,dy] + [dr\,dz] = \\ &= (r_y - q_z) [dy\,dz] + (p_z - r_x) [dz\,dx] + \\ &\quad + (q_x - p_y) [dx\,dy] \end{aligned} \quad (24.9)$$

и

$$\begin{aligned} d\{a [dy\,dz] + b [dz\,dx] + c [dx\,dy]\} &= \\ &= (a_x + b_y + c_z) [dx\,dy\,dz]. \end{aligned} \quad (24.10)$$

Остается справедливой и интегральная теорема (6.23)

$$\int_{\mathfrak{F}} d\sigma = \int_{d\mathfrak{F}} \sigma \quad (24.11)$$

как для того случая, когда \mathfrak{F} является односвязным куском поверхности в области \mathfrak{U} с границей $d\mathfrak{F}$ и σ — форма Пфаффа, так и для случая, когда \mathfrak{F} — подобласть области \mathfrak{U} с границей $d\mathfrak{F}$ и σ — внешняя форма второй степени

$$\sigma = a [dy\,dz] + b [dz\,dx] + c [dx\,dy]. \quad (24.12)$$

При этом границы $d\mathfrak{U}$ считаются в обычном смысле «ориентированными».

Вместо форм σ_j , связанных соотношением (24.4), целесообразно ввести три линейно независимые формы Пфаффа τ_j , определяемые следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= +\tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \\ \sigma_1 &= +\tau_1 - \tau_2 - \tau_3, \\ \sigma_2 &= -\tau_1 + \tau_2 - \tau_3, \\ \sigma_3 &= -\tau_1 - \tau_2 + \tau_3. \end{aligned} \right\} \quad (24.13)$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} 2\tau_1 &= \sigma_0 + \sigma_1 = -\sigma_2 - \sigma_3, \\ 2\tau_2 &= \sigma_0 + \sigma_2 = -\sigma_3 - \sigma_1, \\ 2\tau_3 &= \sigma_0 + \sigma_3 = -\sigma_1 - \sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (24.14)$$

Мы предполагаем, что в области \mathfrak{U} формы τ_j линейно независимы:

$$[\tau_1 \tau_2 \tau_3] = \tau \neq 0. \quad (24.15)$$

§ 25. Первые инварианты

Введем сокращенные обозначения для внешнего произведения

$$[\tau_j \tau_k] = \tau_{jk}, \quad (25.1)$$

где

$$\tau_{jk} + \tau_{kj} = 0. \quad (25.2)$$

Тогда из предположения $\tau \neq 0$ в области \mathfrak{U} следует линейная независимость форм τ_{23} , τ_{31} , τ_{12} . Поэтому мы можем разложить внешние дифференциалы $d\tau_j$ по формам τ_{jk} :

$$\left. \begin{aligned} d\tau_1 &= p_{11} \tau_{23} + p_{12} \tau_{31} + p_{13} \tau_{12}, \\ d\tau_2 &= p_{21} \tau_{23} + p_{22} \tau_{31} + p_{23} \tau_{12}, \\ d\tau_3 &= p_{31} \tau_{23} + p_{32} \tau_{31} + p_{33} \tau_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

Заметим, что формы σ_j в силу их определения (24.3) удовлетворяют условиям интегрируемости

$$[\sigma_j d\sigma_j] = 0. \quad (25.4)$$

Если подставить в (25.4) выражения (24.13) для форм σ , то, учитывая (25.3), получим в результате несложной выкладки

$$\left. \begin{aligned} p_{11} + p_{22} + p_{33} &= 0, \\ p_{jk} + p_{kj} &= 0; \quad j \neq k. \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

Краткости ради введем следующие обозначения для p_{jk} :

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= a_1, & p_{22} &= a_2, & p_{33} &= a_3, \\ p_{23} &= b_1, & p_{31} &= b_2, & p_{12} &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

или

$$[\tau_1 d\tau_1] = a_1 \tau, \dots; \quad [\tau_3 d\tau_2] = b_1 \tau, \dots, \quad (25.7)$$

где точки, как и ранее, означают круговую перестановку индексов. Тогда равенства (25.3) примут вид

$$\left. \begin{aligned} d\tau_1 &= a_1 \tau_{23} + b_3 \tau_{31} - b_2 \tau_{12}, \\ d\tau_2 &= -b_3 \tau_{23} + a_2 \tau_{31} + b_1 \tau_{12}, \\ d\tau_3 &= b_2 \tau_{23} - b_1 \tau_{31} + a_3 \tau_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (25.8)$$

причем в силу (25.5)

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0. \quad (25.9)$$

Далее из (25.1) имеем, например,

$$\tau_{23} = [\tau_2 \tau_3]$$

и, следовательно, внешний дифференциал

$$d\tau_{23} = [d\tau_2 \tau_3] - [\tau_2 d\tau_3]. \quad (25.10)$$

Применяя (25.7) и произведя круговую перестановку индексов, получим

$$d\tau_{23} = 2b_1 \tau, \quad d\tau_{31} = 2b_2 \tau, \quad d\tau_{12} = 2b_3 \tau, \quad (25.11)$$

где τ определяется формулой (24.15).

§ 26. Кривизны и связность

Рассмотрим, как преобразуются введенные выше величины a_j , b_j при перенормировке

$$\sigma_j = \frac{\sigma_j}{g}, \quad \tau_j = \frac{\tau_j}{g}, \quad \tau_{jk} = \frac{\tau_{jk}}{g^2}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{g^3}. \quad (26.1)$$

Полный дифференциал df скаляра f мы можем разложить по трем линейно независимым формам Пфаффа τ_j :

$$df = f_1 \tau_1 + f_2 \tau_2 + f_3 \tau_3 \quad (26.2)$$

и определить таким образом «инвариантные производные» ткани:

$$\partial_j f = f_j. \quad (26.3)$$

Так как дифференциал df не зависит от нормировки, то

$$\partial_j^* = g \partial_j. \quad (26.4)$$

Далее из (25.8) мы получим

$$\begin{aligned} d \frac{\tau_1}{g} &= \frac{a_1^* \tau_{23} + b_3^* \tau_{31} - b_2^* \tau_{12}}{g^2} = \\ &= \frac{a_1 \tau_{23} + b_3 \tau_{31} - b_2 \tau_{12}}{g} - \frac{g_2 \tau_{12} + g_3 \tau_{31}}{g^2}, \end{aligned} \quad (26.5)$$

где

$$g_j = \partial_j g. \quad (26.6)$$

Из (26.5) и формул, получающихся отсюда круговой подстановкой, следует искомый результат:

$$a_j^* = g a_j, \quad b_j^* = g b_j - g_j. \quad (26.7)$$

Величины a_j являются таким образом инвариантами веса единица, связанными между собой соотношением (25.9), в то время как b_j преобразуются так же, как символы Кристоффеля (7.1). Величины a_j назовем «кривизнами» нашей ткани¹⁾, а из величин b_j , которые мы по-прежнему будем называть «символами Кристоффеля», образуем форму Пфаффа

$$\gamma = b_1 \tau_1 + b_2 \tau_2 + b_3 \tau_3, \quad (26.8)$$

которую назовем *связностью* ткани. С помощью формул (26.7) найдем закон преобразования формы γ при перенормировании:

$$\gamma^* = \gamma - d \ln g. \quad (26.9)$$

¹⁾ Можно ввести в рассмотрение инвариантную форму Пфаффа

$$\alpha = a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + a_3 \tau_3 \quad (\alpha = \alpha^*),$$

назвав ее «*формой кривизны*».

Если v_j — координаты вектора или векторного поля, то внешний дифференциал формы Пфаффа

$$\sigma = v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2 + v_3 \tau_3 \quad (26.10)$$

в силу (25.8) имеет вид

$$d\tau = (v_{32} - v_{23} + a_1 v_1 - b_3 v_2 + b_2 v_3) \tau_{23} + \dots, \quad (26.11)$$

где точками обозначены члены, получаемые круговой перестановкой индексов. Если вектор v_j является «градиентом» некоторого скалярного поля,

$$\sigma = dv, \quad (26.12)$$

то $d\tau = 0$, и из (26.11) вычисляется несимметричная часть вторых производных скалярного поля v :

$$\left. \begin{aligned} v_{23} - v_{32} &= a_1 v_1 - b_3 v_2 + b_2 v_3, \\ v_{31} - v_{13} &= b_3 v_1 + a_2 v_2 - b_1 v_3, \\ v_{12} - v_{21} &= -b_2 v_1 + b_1 v_2 + a_3 v_3, \end{aligned} \right\} \quad (26.13)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \partial_3 \partial_2 - \partial_2 \partial_3 &= a_1 \partial_1 - b_3 \partial_2 + b_2 \partial_3, \\ \partial_1 \partial_3 - \partial_3 \partial_1 &= b_3 \partial_1 + a_2 \partial_2 - b_1 \partial_3, \\ \partial_2 \partial_1 - \partial_1 \partial_2 &= -b_2 \partial_1 + b_1 \partial_2 + a_3 \partial_3. \end{aligned} \right\} \quad (26.14)$$

В общем случае векторное поле с координатами

$$r_1 = v_{32} - v_{23} + a_1 v_1 - b_3 v_2 + b_2 v_3, \dots \quad (26.15)$$

играет роль «ротора» векторного поля (v_1, v_2, v_3) . В частности, для ротора векторного поля (a_1, a_2, a_3) имеем

$$r_1 = a_{32} - a_{23} + a_1^2 - a_2 b_3 + a_3 b_2, \dots \quad (26.16)$$

Если вместо форм Пфаффа τ_j отправляться от дифференциальных операторов ∂_j , то можно определить величины a_j, b_j , исходя из соотношений (26.14).

§ 27. Условия интегрируемости

Разложим внешний дифференциал $d\gamma$ связности γ (26.8) по формам τ_{jk} :

$$d\gamma = c_1 \tau_{23} + c_2 \tau_{31} + c_3 \tau_{12} \quad (27.1)$$

и найдем с помощью (26.15) ротор (c_1, c_2, c_3) нашего векторного поля (b_1, b_2, b_3) :

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= b_{32} - b_{23} + a_1 b_1, \\ c_2 &= b_{13} - b_{31} + a_2 b_2, \\ c_3 &= b_{21} - b_{12} + a_3 b_3. \end{aligned} \right\} \quad (27.2)$$

Если вообще задано векторное поле $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, то дифференцирование внешней дифференциальной формы второго порядка

$$\omega = \omega_1 \tau_{23} + \omega_2 \tau_{31} + \omega_3 \tau_{12} \quad (27.3)$$

в силу (25.11) дает

$$d\omega = \{\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + 2(b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2 + b_3 \omega_3)\} \tau. \quad (27.4)$$

Поэтому мы можем рассматривать выражение

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + 2(b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2 + b_3 \omega_3) \quad (27.5)$$

как «*дивергенцию*» векторного поля $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Образовав подобные дивергенции $d \tau_j$ форм $d\tau_j$ (25.8), мы получим следующие *условия интегрируемости*:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} + 2a_1 b_1 + b_{32} - b_{23} &= 0, \\ a_{22} + 2a_2 b_2 + b_{13} - b_{31} &= 0, \\ a_{33} + 2a_3 b_3 + b_{21} - b_{12} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27.6)$$

где

$$a_{jj} = \partial_j a_j, \quad b_{jk} = \partial_k b_j. \quad (27.7)$$

В силу (27.2) эти условия интегрируемости можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} + a_1 b_1 + c_1 &= 0, \\ a_{22} + a_2 b_2 + c_2 &= 0, \\ a_{33} + a_3 b_3 + c_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27.8)$$

Из (26.9) следует, что при перенормировке (26.1)

$$d\gamma^* = d\gamma; \quad (27.9)$$

отсюда и из (27.1) и (26.1) вытекает, что

$$c_j^* = g^2 c_j. \quad (27.10)$$

§ 28. Инвариантные производные

С помощью связности γ можно построить инвариантные дифференциальные операторы, аналогично тому, как мы это сделали в § 12 для плоского случая. Пусть опять q — скаляр веса p , который при перенормировке (26.1) преобразуется по закону

$$q^* = g^p q. \quad (28.1)$$

Образуем дифференциальный оператор

$$D = d + p\gamma, \quad (28.2)$$

где d обозначает полный дифференциал, p — вес и γ — связность (26.8). В таком случае мы будем иметь

$$D^* q^* = g^p Dq; \quad (28.3)$$

это равенство и означает инвариантность оператора D .

Если мы положим теперь

$$Dq = q_I \tau_1 + q_{II} \tau_2 + q_{III} \tau_3 \quad (28.4)$$

и, например,

$$q_I = \partial_I q, \quad (28.5)$$

то получим

$$q_I^* = g^{p+1} q_I. \quad (28.6)$$

Дифференциальные операторы $\partial_I, \partial_{II}, \partial_{III}$ переводят инварианты веса p в инварианты веса $p+1$. При этом

$$\partial_I = \partial_1 + pb_1, \quad \partial_{II} = \partial_2 + pb_2, \quad \partial_{III} = \partial_3 + pb_3. \quad (28.7)$$

Далее, из (28.7) следует

$$\begin{aligned} \partial_{II} \partial_I - \partial_I \partial_{II} &= \{\partial_2 + (p+1)b_2\} \{\partial_1 + pb_1\} - \\ &- \{\partial_1 + (p+1)b_1\} \{\partial_2 + pb_2\}. \end{aligned} \quad (28.8)$$

Применяя (26.14) и (27.2) и произведя круговую перестановку индексов, найдем отсюда

$$\left. \begin{aligned} \partial_{III} \partial_{II} - \partial_{II} \partial_{III} &= a_1 \partial_I + p \{b_3 \partial_{II} - b_2 \partial_{III} - c_1\}, \\ \partial_I \partial_{III} - \partial_{III} \partial_I &= a_2 \partial_{II} + p \{b_1 \partial_{III} - b_3 \partial_I - c_2\}, \\ \partial_{II} \partial_I - \partial_I \partial_{II} &= a_3 \partial_{III} + p \{b_2 \partial_I - b_1 \partial_{II} - c_3\}. \end{aligned} \right\} \quad (28.9)$$

Инвариантные дифференциальные операторы $\partial_I, \partial_{II}, \partial_{III}$ позволяют сократить некоторые из ранее полученных формул. Векторное поле (v_1, v_2, v_3) веса 1 можно опре-

делить как в § 26. Тогда для *ротора* (26.15) этого поля мы получим

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= v_{3\text{ II}} - v_{2\text{ III}} + a_1 v_1, \\ r_2 &= v_{1\text{ III}} - v_{3\text{ I}} + a_2 v_2, \\ r_3 &= v_{2\text{ I}} - v_{1\text{ II}} + a_3 v_3, \end{aligned} \right\} \quad (28.10)$$

где, например,

$$v_{3\text{ II}} = \partial_{\text{II}} v_3.$$

Если $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ — векторное поле веса 2, то его *дивергенция* (27.5) равна

$$\text{Div } \boldsymbol{w} = w_{1\text{ I}} + w_{2\text{ II}} + w_{3\text{ III}}. \quad (28.11)$$

Формулы (27.8) принимают вид

$$c_1 = -a_{1\text{ I}}, \quad c_2 = -a_{2\text{ II}}, \quad c_3 = -a_{3\text{ III}}. \quad (28.12)$$

Следовательно, величина $-(c_1 + c_2 + c_3)$ будет *дивергенцией* векторного поля (a_1, a_2, a_3) веса 1.

Если $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — векторное поле веса 1, \mathfrak{F} — поверхность, $d\mathfrak{F}$ — ее граница и $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$ — *ротор* поля \boldsymbol{v} , то имеет место интегральная формула (формула Стокса):

$$\begin{aligned} \int_{d\mathfrak{F}} (v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2 + v_3 \tau_3) &= \int_{\mathfrak{F}} d(v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2 + v_3 \tau_3) = \\ &= \int_{\mathfrak{F}} (r_1 \tau_{23} + r_2 \tau_{31} + r_3 \tau_{12}). \end{aligned} \quad (28.13)$$

Если $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ — векторное поле веса 2, \mathfrak{G} — некоторая трехмерная область и $d\mathfrak{G}$ — ее граница, то имеет место аналогичная формула (формула Гаусса):

$$\begin{aligned} \int_{d\mathfrak{G}} (w_1 \tau_{23} + w_2 \tau_{31} + w_3 \tau_{12}) &= \int_{\mathfrak{G}} d(w_1 \tau_{23} + w_2 \tau_{31} + w_3 \tau_{12}) = \\ &= \int_{\mathfrak{G}} (w_{1\text{ I}} + w_{2\text{ II}} + w_{3\text{ III}}) \tau. \end{aligned} \quad (28.14)$$

Если мы применим формулу (28.14), в частности, к (27.1)

$$d\gamma = c_1 \tau_{23} + c_2 \tau_{31} + c_3 \tau_{12}, \quad (28.15)$$

то из $d d\gamma = 0$ следует

$$c_{1\text{ I}} + c_{2\text{ II}} + c_{3\text{ III}} = 0 \quad (28.16)$$

или в силу (28.12)

$$a_{111} + a_{211} + a_{311} = 0 \quad (28.17)$$

—аналог формул Фосса, Риччи и Бианки римановой геометрии.

Отметим еще одну формулу, которая в некоторых случаях оказывается полезной. Пусть (v_1, v_2, v_3) , (v'_1, v'_2, v'_3) — два векторных поля и (r_1, r_2, r_3) , (r'_1, r'_2, r'_3) — их роторы. Тогда

$$\begin{aligned} d \{ (v_2 v'_3 - v_3 v'_2) \tau_{23} + (v_3 v'_1 - v_1 v'_3) \tau_{31} + (v_1 v'_2 - v_2 v'_1) \tau_{12} \} = \\ = \{ (r_1 v'_1 + r_2 v'_2 + r_3 v'_3) - (r'_1 v_1 + r'_2 v_2 + r'_3 v_3) \} \tau \end{aligned} \quad (28.18)$$

или

$$d \sum_{j,k} v_j v'_k \tau_{jk} = \sum_j (r_j v'_j - r'_j v_j) \tau. \quad (28.19)$$

§ 29. Геометрические иллюстрации

Настало время осветить наш дремучий лес формул фонарем геометрической наглядности. Пусть P — точка области регулярности \mathfrak{U} , образованной поверхностями ткани \mathfrak{W} . Исходящие из точки P направления мы отобразим на точки некоторой, не проходящей через P , плоскости \mathfrak{E} , поставив в соответствие каждому направлению точку пересечения касательной в P к кривым этого направления с плоскостью \mathfrak{E} . Тогда касательным плоскостям к поверхностям $\sigma_j = 0$, удовлетворяющим условию (24.2), на плоскости \mathfrak{E} будут соответствовать четыре прямые, никакие три из которых не проходят через одну точку. Эти прямые, образующие на плоскости \mathfrak{E} «полный четырехсторонник», мы будем обозначать также через σ_j (рис. 28).

Точно так же направления, для которых $\tau_j = 0$, на плоскости \mathfrak{E} соответствуют три прямые, в силу (24.15) не проходящие через одну точку, и эти прямые образуют «диагональный трехсторонник» полного четырехсторонника со стороны σ_j . А именно, в силу (24.14) прямая τ_1 , например, проходит через точки пересечения прямых σ_0 и σ_1 и прямых σ_2 и σ_3 . Дифференциальным операторам $\partial_j \pm \partial_k$ соответствуют шесть вершин полного четырехсторонника.

$\tau_1 = 0$. Назовем семейство $v_1 = \text{const}$ «*семейством диагональных поверхностей*» нашей ткани \mathfrak{W} . В силу (25.9) мы будем иметь следующий результат: *если ткань \mathfrak{W} имеет два семейства диагональных поверхностей τ_1, τ_2 , то она имеет также и третье подобное семейство τ_3 .*

А именно, из того, что $a_1 = a_2 = 0$, следует, что также и $a_3 = 0$.

Те же результаты можно получить и из (26.14). А именно, если $a_3 = 0$, то

$$\partial_2 \partial_1 - \partial_1 \partial_2 = b_1 \partial_2 - b_2 \partial_1, \quad (29.4)$$

а эта зависимость означает (рис. 29), что из линий двупараметрических семейств кривых ∂_1 и ∂_2 можно составить замкнутые четырехугольники, т. е. что наши двупараметрические семейства кривых ∂_1 и ∂_2 лежат на однопараметрическом семействе поверхностей, каждая из которых несет сеть из (∂_1, ∂_2) -кривых. Таким образом, *условие $a_3 = 0$ означает, что «диагональные кривые» ∂_1 и ∂_2 принадлежат семейству диагональных поверхностей.*

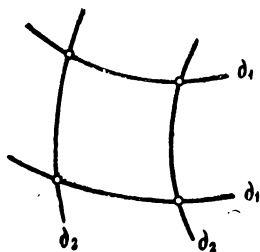


Рис. 29.

метрические семейства кривых ∂_1 и ∂_2 лежат на однопараметрическом семействе поверхностей, каждая из которых несет сеть из (∂_1, ∂_2) -кривых. Таким образом, *условие $a_3 = 0$ означает, что «диагональные кривые» ∂_1 и ∂_2 принадлежат семейству диагональных поверхностей.*

§ 30. Криволинейные ткани в тканях, образованных поверхностями

На каждой поверхности \mathfrak{F}_0 семейства \mathfrak{S}_0 нашей ткани \mathfrak{W} — интегральной поверхности уравнения $s_0 = 0$, остальные семейства поверхностей $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ пересекают криволинейную ткань \mathfrak{W}^0 , кривые которой, как это видно из рис. 28, определяются операторами

$$\partial_1^0 = \partial_2 - \partial_3, \quad \partial_2^0 = \partial_3 - \partial_1, \quad \partial_3^0 = \partial_1 - \partial_2. \quad (30.1)$$

Из (30.1) следует

$$\partial_1^0 + \partial_2^0 + \partial_3^0 = 0. \quad (30.2)$$

Поэтому мы можем применить к ткани \mathfrak{W}^0 формулы § 7, в которых мы должны теперь писать ∂_j^0 вместо ∂_j . Из (30.1) следует также

$$\begin{aligned} \partial_2^0 \partial_1^0 - \partial_1^0 \partial_2^0 = & (\partial_3 \partial_2 - \partial_2 \partial_3) + (\partial_1 \partial_3 - \partial_3 \partial_1) + \\ & + (\partial_2 \partial_1 - \partial_1 \partial_2). \end{aligned} \quad (30.3)$$

Чтобы сократить наши вычисления, предположим, что в рассматриваемой точке P формы σ_j нормированы так, что $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, что можно сделать в силу (26.7). Тогда из (30.3) и (26.14) мы получаем

$$\partial_2^0 \partial_1^0 - \partial_1^0 \partial_2^0 = a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2 + a_3 \partial_3 \quad (30.4)$$

или в силу (25.9) и (30.1)

$$\partial_2^0 \partial_1^0 - \partial_1^0 \partial_2^0 = a_2 \partial_1^0 - a_1 \partial_2^0. \quad (30.5)$$

Сравнивая с (7.21), получаем

$$a_j = -h_j. \quad (30.6)$$

Из (8.10) мы получаем следующее выражение для кривизны ткани \mathfrak{W}^0 :

$$\begin{aligned} k_0 &= -(\partial_2 - \partial_3) a_2 + (\partial_3 - \partial_1) a_1 = \\ &= -a_{11} - a_{22} + a_{13} + a_{23} \end{aligned} \quad (30.7)$$

и в силу (25.9)

$$k_0 = -a_{11} - a_{22} - a_{33}. \quad (30.8)$$

В точке P в силу $b_j = 0$ обычные производные $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ совпадают с инвариантными производными $\partial_I, \partial_{II}, \partial_{III}$. Поэтому из (30.8) и (28.12) следует, что

$$k_0 = c_1 + c_2 + c_3. \quad (30.9)$$

Изменение индексов позволяет получить выражения для кривизн всех криволинейных тканей \mathfrak{W} :

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= c_1 + c_2 + c_3, \\ k_1 &= c_1 - c_2 - c_3, \\ k_2 &= -c_1 + c_2 - c_3, \\ k_3 &= -c_1 - c_2 + c_3. \end{aligned} \right\} \quad (30.10)$$

Отсюда опять следует результат Дюбурдые (10.6), а именно ¹⁾

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 0. \quad (30.11)$$

¹⁾ Доказательство § 10 имеет то преимущество, что оно накладывается на ткань меньшие требования. Недавно мой друг из Турции Арф еще более ограничил эти требования (см. C. Arf, Hamburger Abhandlungen, 1955).

§ 31. Октаэдрические ткани

Если исходить из уравнения семейств поверхностей в виде (24.1)

$$u_j(x, y, z) = u_j = \text{const} \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (31.1)$$

то, исключив из этих четырех уравнений x, y, z , получим условие

$$W(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0, \quad (31.2)$$

которому удовлетворяют четыре поверхности ткани, проходящие через одну точку. Полученное таким образом уравнение (31.2) мы можем, так же как в §§ 1 и 9, назвать *«уравнением ткани»*. Мы будем, в частности, называть образованную поверхностями (31.1) ткань \mathfrak{W} *«октаэдрической»*, если ее уравнение может быть приведено к простому виду

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0. \quad (31.3)$$

Подобные ткани являются пространственными аналогами шестиугольных тканей на плоскости (§ 2). Простейшим примером октаэдрической ткани будет ткань, образованная четырьмя различными семействами параллельных плоскостей, которые, в частности, можно считать параллельными четырем различным граням правильного тетраэдра. В этом последнем случае мы будем говорить о *«правильной ткани»*. Октаэдрические ткани, таким образом, топологически эквивалентны правильным. Смысл предложенного здесь названия будет выяснен позже (§ 32). Здесь же мы докажем следующее предложение.

Для того чтобы ткань была октаэдрической, необходимо и достаточно, чтобы кривизны ткани обращались в нуль:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0. \quad (31.4)$$

Необходимость этого условия очевидна. В самом деле, для правильной ткани мы можем положить

$$\sigma_j = d(A_{j1}x + A_{j2}y + A_{j3}z), \quad (31.5)$$

где $A_{jk} = \text{const}$; так как формы σ_j являются полными дифференциалами, то полными дифференциалами будут в силу (24.14) и формы τ_j ; при этом из (25.8) вытекает,

что все $a_j = 0$. С обратно, в силу (28.12) из обращения в нуль величин a_j то же самое следует и для величин c_j . Поэтому в силу (27.1) форма γ будет полным дифференциалом. В силу (26.9) формы τ_j можно нормировать так, что тождественно $\gamma = 0$, откуда следует, что и $b_j = 0$. В силу (25.8) формы τ_j , а в силу (24.13) и формы σ_j будут полными дифференциалами: $\sigma_j = du_j$. Интегрируя уравнение (24.4) $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, мы получим, выбрав подходящим образом переменные u_j , условие (31.3).

В параграфе 29 мы уже нашли геометрический смысл обращения в нуль кривизн ткани. Но для октаэдрической ткани можно получить еще и иные, характеризующие ее наглядные геометрические свойства, перенеся на случай пространства геометрическое описание шестиугольных тканей на плоскости, данное в § 2.

§ 32. Условие замкнутости октаэдрической ткани

Рассмотрим тетраэдр \mathfrak{B} ткани \mathfrak{W} , четыре грани которого образуют поверхности четырех различных семейств \mathfrak{S}_j ткани \mathfrak{W} ; предположим, что этот тетраэдр лежит целиком в области регулярности \mathfrak{U} ткани \mathfrak{W} . На каждой грани \mathfrak{F}_j тетраэдра \mathfrak{B} семейства поверхностей \mathfrak{S}_k ($k \neq j$) высекают криволинейные ткани \mathfrak{W}^I . Согласно § 2 имеется точно один треугольник \mathfrak{F}_j^I , образованный линиями ткани \mathfrak{W}^I и вписанный в треугольник \mathfrak{F}_j (см. рис. 3). Два треугольника \mathfrak{F}_j , \mathfrak{F}_k одного и того же тетраэдра \mathfrak{B} ткани \mathfrak{W} мы назовем «соседними». Они имеют общую сторону — ребро тетраэдра \mathfrak{B} — и лежат на поверхностях различных семейств \mathfrak{S}_j , \mathfrak{S}_k ($k \neq j$) ткани \mathfrak{W} . Мы покажем, что:

Для того чтобы ткань была октаэдрической, необходимо и достаточно, чтобы треугольники \mathfrak{F}_j^I , \mathfrak{F}_k^I , вписанные в любые два соседние треугольника \mathfrak{F}_j , \mathfrak{F}_k , имели общую вершину. Необходимость этого условия вытекает из того, что в случае правильной ткани тетраэдр \mathfrak{B} будет правильным и вершины треугольников \mathfrak{F}_j^I , вписанных в его грани \mathfrak{F}_j , будут совпадать с серединами ребер тетраэдра. Стороны треугольников \mathfrak{F}_j^I будут ребрами правильного октаэдра \mathfrak{A} , который вписан в тетраэдр \mathfrak{B} так, что четыре его грани, не имеющие общих ребер, лежат

на гранях \mathfrak{F}_j тетраэдра \mathfrak{B} (рис. 30 *); здесь появляется «октаэдр», который дал имя всему рассматриваемому здесь типу тканей. Фигуру, состоящую из тетраэдра \mathfrak{B} и вписанного в него октаэдра \mathfrak{U} , как и любую ей эквивалентную,

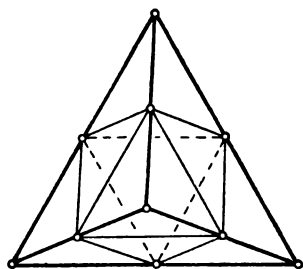


Рис. 30.

мы будем теперь обозначать через \mathfrak{D}_2 . Мы покажем, что замкнутость фигур \mathfrak{D}_2 характеризует октаэдрические ткани; или иначе: характеристическим свойством октаэдрической ткани является замкнутость образованных поверхностями ткани октаэдров.

Сначала покажем, что из замкнутости всех октаэдров ткани вытекает, что криволинейные ткани, высекаемые на поверхности \mathfrak{F}_j семейства \mathfrak{S}_j ($j = 0, 1, 2, 3$) поверхностями остальных семейств \mathfrak{S}_k ($k \neq j$), являются шестиугольными. Рассмотрим, например, ткань \mathfrak{W}^0 , которая

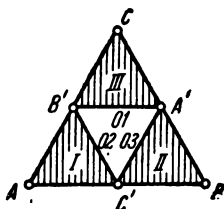


Рис. 31.

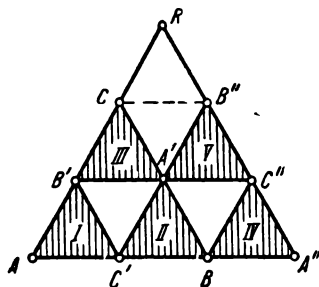


Рис. 32.

высекается на поверхности \mathfrak{F}_0 семейства \mathfrak{S}_0 поверхностями семейств \mathfrak{S}_j ($j = 1, 2, 3$), и фигуру \mathfrak{D}_2^0 этой ткани,

*) Аналогично этому в каждый треугольник шестиугольной ткани на плоскости можно вписать образованный линиями ткани шестиугольник, три несмежные стороны которого принадлежат сторонам треугольника; ср. рис. 5—7 на стр. 20 (не принадлежащие граням тетраэдра \mathfrak{B} грани октаэдра \mathfrak{U} также образованы поверхностями ткани: это следует из того, что три ребра такой грани принадлежат одной поверхности определенного семейства \mathfrak{S}_j).

состоящую из образованного линиями \mathfrak{W}^0 треугольника ABC и вписанного в него треугольника $A'B'C'$ (рис. 31). Продолжая линии этой фигуры, дополним ее до фигуры, изображенной на рис. 32. Нам достаточно доказать, что точки C , B'' принадлежат одной линии семейства 01 ткани \mathfrak{W}^0 , так как это будет означать, что шестиугольник ткани \mathfrak{W}^0 , описанный около точки A' , замыкается и, следовательно, что ткань является шестиугольной. Рассмотрим тетраэдры ткани \mathfrak{W} , надстроенные над треугольниками

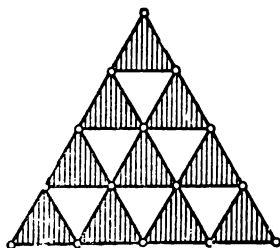


Рис. 33.

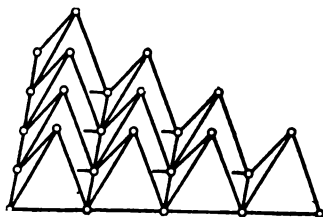


Рис. 34.

I, II, III. Их четвертые вершины S_I , S_{II} , S_{III} , по предположению (рис. 30), лежат на одной и той же поверхности семейства \mathfrak{S}_0 . Такое же заключение применимо и к треугольнику $A''B''C'$, так что «вершины» S_{II} , S_{IV} , S_V лежат на той же поверхности семейства \mathfrak{S}_0 . Следовательно, вершины S_{III} , S_V принадлежат одной и той же поверхности семейства \mathfrak{S}_0 и поэтому треугольник $A'S_{III}S_V$ будет вписан в (принадлежащую семейству \mathfrak{S}_1) грань тетраэдра, построенного над треугольником $B'C''R$. Дополнив полученную в этом тетраэдре фигуру до \mathfrak{D}_2 (рис. 30), мы увидим, что CB'' действительно принадлежит линии 01.

Если мы теперь возьмем в качестве исходного пункта фигуру \mathfrak{D}_n^0 (на рис. 33 $n = 4$), принадлежащую поверхности \mathfrak{S}_0 семейства \mathfrak{S}_0 , то получим, что вершины тетраэдров ткани, построенных над заштрихованными треугольниками фигуры \mathfrak{D}_n^0 , лежат на одной поверхности семейства \mathfrak{S}_0 и образуют вершины фигуры \mathfrak{D}_{n-1}^0 , принадлежащей этой поверхности (рис. 34, $n_0 = 4$). Повторяя это

построение, мы найдем, что над \mathfrak{D}_n^0 можно построить образованную из поверхностей ткани \mathfrak{W} фигуру \mathfrak{D}_n , образованную n поверхностями каждого семейства и имеющую

$$\frac{1}{6} (n+1)(n+2)(n+3)$$

вершин, которые в каждой поверхности j -го семейства образуют фигуру \mathfrak{D}_k^j , где $k \leq n$ (рис. 35, $n=3$). Вершины

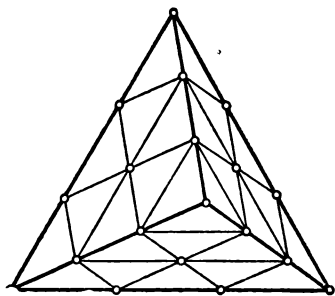


Рис. 35.

ны фигуры \mathfrak{D}_n можно отобразить на вершины правильной фигуры \mathfrak{D}_n^* . Это отображение будет уточнено, если мы уменьшим вдвое стороны малых треугольников и тетраэдров, дополнив фигуру \mathfrak{D}_n до \mathfrak{D}_{2n} и соответственно этому фигуру \mathfrak{D}_n^* до \mathfrak{D}_{2n}^* . Повторение этого процесса и последующий предельный переход дает нам искомое отображение ткани \mathfrak{W} на правильную

ткань \mathfrak{W}^* . Этим и завершается доказательство нашего утверждения.

§ 33. Октаэдрические ткани, образованные плоскостями

Мы докажем сейчас следующую теорему, полученную Зауэром (R. Sauer) в 1925 г. и аналогичную теореме § 4: *Всякая образованная плоскостями октаэдрическая ткань порождается общими касательными плоскостями двух различных квадрик (поверхностей второго класса). Обратно: во всякой области, где через каждую точку проходят четыре различные действительные касательные плоскости к двум данным квадрикам, эти плоскости образуют октаэдрическую ткань.*

Доказательство проходит точно так же, как в плоском случае. Роль, аналогичную использованной ранее теореме Шаля, здесь будет играть сходная с ней теорема Рейе

(Th. Reye, 1837—1919), приведенная в его известной книге «Die Geometrie der Lage» (Leipzig, 1923).

А именно, рассмотрим фигуру, состоящую из восьми плоскостей, топологически эквивалентную правильному октаэдру (рис. 36), и покажем, что *каждая квадрика, которая касается семи из этих плоскостей, касается*

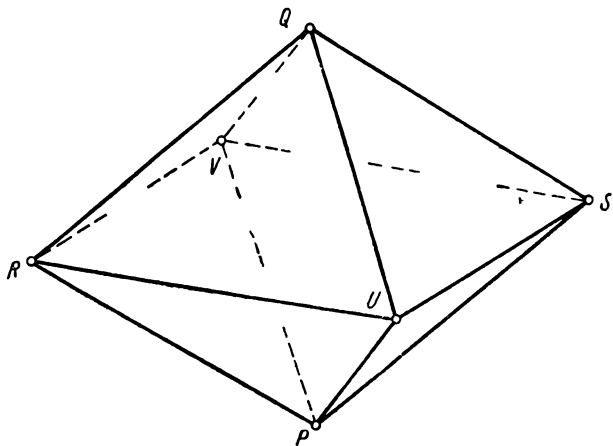


Рис. 36.

также и восьмой. Пусть $P, Q; R, S; U, V$ — пары противоположных вершин нашего октаэдра и пусть, например,

$$p = t_0 + t_1 x + t_2 y + t_3 z = 0 \quad (33.1)$$

— уравнение точки $P(x, y, z)$ в тангенциальных координатах t_j . Тогда все квадрики, уравнение которых в тангенциальных координатах имеют вид

$$apq + brs + cuv = 0, \quad (33.2)$$

где a, b, c — постоянные, будут удовлетворять нашему условию. Обратно, эти квадрики, зависящие от двух параметров $a : b : c$, будут единственными, удовлетворяющими семи независимым условиям — условиям касания с семью из наших восьми плоскостей. В самом деле, уравнение

поверхности второго класса

$$a_{00}t_0^2 + a_{11}t_1^2 + a_{22}t_2^2 + a_{33}t_3^2 + \\ + 2a_{01}t_0t_1 + 2a_{02}t_0t_2 + 2a_{03}t_0t_3 + \\ + 2a_{23}t_2t_3 + 2a_{31}t_3t_1 + 2a_{12}t_1t_2 = 0 \quad (33.3)$$

содержит десять однородных параметров. Следовательно, для того чтобы определить квадрику в общем случае, нужно задать девять ее касательных плоскостей.

Пусть теперь все плоскости изображенного на рис. 36 октаэдра, за исключением плоскости QSV , будут касаться некоторой квадрики. Независимость этих семи условий будет доказана, если мы покажем, что квадрика однозначно определяется двумя дополнительными касательными плоскостями. Для этого достаточно так выбрать две плоскости, проходящие через точку P , чтобы полученные шесть плоскостей, проходящих через эту точку, не касались конуса второго порядка с вершиной в P . В этом случае квадрика распадается на пару точек P, Q .

При помощи теоремы Рейе теореме Зауэра можно доказать точно так же, как доказывается теорема Графа и Зауэра из § 4 с помощью теоремы Шаля. Достаточно показать, что для каждой образованной плоскостями фигуры \mathfrak{D}_n^* , $n \geq 3$ (вроде изображенной на рис. 35 фигуры \mathfrak{D}_3^*), существует в точности одно линейное семейство квадрик, касающихся всех плоскостей этой фигуры.

Можно также перенести на пространственный случай рассуждения § 5. Плоскости, касающиеся всех квадрик некоторого линейного семейства, могут быть при подходящем выборе тангенциальных координат t_j следующим образом представлены при помощи \wp -функции Вейерштрасса *):

$$\frac{t_1}{t_0} = \wp(u), \quad \frac{t_2}{t_0} = \wp'(u), \quad \frac{t_3}{t_0} = \wp''(u). \quad (33.4)$$

Тогда условие прохождения четырех плоскостей через

*) Ср., например, L. Heffter, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. II, Leipzig — Berlin, 1923, 409 — 411.

одну точку принимает вид

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \text{период функции } \wp,$$

что дает вычислительное доказательство того, что эти плоскости образуют октаэдрическую ткань.

§ 34. Шестиугольные пространственные ткани

Образованная поверхностями ткань такая, что на каждой поверхности ткани поверхности трех других семейств высекают шестиугольную криволинейную ткань, называется *шестиугольной пространственной тканью*. В силу § 31 к числу подобных тканей относятся все октаэдрические ткани. Мы покажем, что кроме октаэдрических существуют и другие шестиугольные пространственные ткани. Из (30.10) следует, что искомые ткани характеризуются условиями

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad (34.1)$$

или в силу (28.15) — условием

$$d\gamma = 0. \quad (34.2)$$

Отсюда и из (26.9) вытекает, что для таких тканей при помощи подходящим образом подобранной нормировки можно добиться выполнения равенства $\gamma = 0$. В этом случае равенства (25.8) примут вид

$$d\tau_1 = a_1 \tau_{23}, \quad d\tau_2 = a_2 \tau_{31}, \quad d\tau_3 = a_3 \tau_{12} \quad (34.3)$$

и условия интегрируемости (27.8) дадут

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0. \quad (34.4)$$

Это означает, что вдоль диагонали ∂_j величина a_j остается постоянной. Найдем теперь *шестиугольные ткани из плоскостей*. На плоскостях этих тканей пересекающие их плоскости высекают прямолинейные шестиугольные ткани, образованные, согласно теореме Графа и Зауэра (§ 4), касательными к плоским кривым третьего класса. Плоскости искомой ткани образуют, таким образом, «алгебраический торс», который высекает на каждой из принадлежащих ему плоскостей алгебраическую кривую третьего класса. Двойственный к нему образ доставляет алгебраическая

кривая, которая проектируется из каждой своей точки конусом третьего порядка; это — пространственная кривая четвертого порядка. Ей двойственно соответствует торс четвертого класса. Отсюда получаются два (родственные друг другу) семейства таких торсов, а именно: торсы первого рода, состоящие из общих касательных плоскостей некоторого однопараметрического линейного семейства квадрик, и рациональные торсы второго рода, координаты плоскостей которых могут быть выражены многочленами четвертой степени от некоторого параметра t . В то время как торсы первого рода приводят к октаэдрическим тканям, торсы второго рода дают нечто новое. Например, рассмотрим четыре пучка плоскостей, оси которых попарно скрещиваются и не принадлежат одной квадрике (точнее, одной полуквадрике *)). Тогда плоскости этих четырех пучков не касаются одной квадрики, однако эти пучки образуют шестиугольную ткань. Таким образом, действительно существуют такие шестиугольные пространственные ткани, которые не являются октаэдрическими.

Если для ткани, образованной поверхностями, определить аналогично тому, как мы это делали в § 20 для криволинейных тканей, перенесение вектора (v_1, v_2, v_3) веса 1 (т. е. такого, что $v_j^* = gv_j$) вдоль кривой \mathfrak{L} при помощи равенств

$$Dv_j = dv_j + v_j \gamma = 0 \quad (34.5)$$

или

$$d \ln v_j = -\gamma, \quad (34.6)$$

которые должны выполняться вдоль \mathfrak{L} , то из (34.2) будет следовать, что *шестиугольные пространственные ткани являются единственными тканями в пространстве, для которых перенесение не зависит от пути \mathfrak{L}* . Можно показать, что если P_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — четыре точки, не лежащие на одной окружности, и \mathfrak{S}_k — пучки сфер, проходящих через три точки P_j , $j \neq k$, то эти пучки \mathfrak{S}_k образуют шестиугольную пространственную ткань (А. Ёцкан, 1954).

*) Полуквадрикой (Demiquadrik, иногда также Regulus) называют одно семейство прямолинейных образующих линейчатой квадрики.

§ 35. Вычисление инвариантов при помощи функции ткани

Пусть, как в (31.2),

$$W(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0 \quad (35.1)$$

— уравнение ткани \mathfrak{W} и W — функция этой ткани. Из (35.1) следует, что

$$\sum_0^3 W_j du_j = 0, \quad (35.2)$$

где

$$W_j = \frac{\partial W}{\partial u_j}.$$

Мы можем, таким образом, положить, как и в (9.4),

$$\sigma_j = W_j du_j. \quad (35.3)$$

В силу (24.14) получим

$$\left. \begin{aligned} 2\tau_1 &= W_0 du_0 + W_1 du_1 = -W_2 du_2 - W_3 du_3, \\ 2\tau_2 &= W_0 du_0 + W_2 du_2 = -W_3 du_3 - W_1 du_1, \\ 2\tau_3 &= W_0 du_0 + W_3 du_3 = -W_1 du_1 - W_2 du_2. \end{aligned} \right\} \quad (35.4)$$

Если обозначим

$$[\tau_j \tau_k] = \tau_{jk}, \quad W_j W_k [du_j du_k] = [\tau_j \sigma_k] = \sigma_{jk}, \quad (35.5)$$

то получим из (35.4),

$$\left. \begin{aligned} 4\tau_{23} &= -\sigma_{23} + \sigma_{31} + \sigma_{12}, \\ 4\tau_{31} &= \sigma_{23} - \sigma_{31} + \sigma_{12}, \\ 4\tau_{12} &= \sigma_{23} + \sigma_{31} - \sigma_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (35.6)$$

и, обратно,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{23} &= 2(\tau_{31} + \tau_{12}), \quad \sigma_{31} = 2(\tau_{12} + \tau_{23}), \\ \sigma_{12} &= 2(\tau_{23} + \tau_{31}). \end{aligned} \right\} \quad (35.7)$$

С другой стороны, из (35.4)

$$\sigma_{01} = \sigma_{12} - \sigma_{31}, \quad \sigma_{02} = \sigma_{23} - \sigma_{12}, \quad \sigma_{03} = \sigma_{31} - \sigma_{23}, \quad (35.8)$$

и поэтому в силу (35.7)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{01} &= 2(\tau_{31} - \tau_{12}), \quad \sigma_{02} = 2(\tau_{12} - \tau_{23}), \\ \sigma_{03} &= 2(\tau_{23} - \tau_{31}). \end{aligned} \right\} \quad (35.9)$$

Если мы положим для краткости

$$\frac{W_{jk}}{W_j W_k} = \frac{1}{W_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \ln W_k = V_{jk} = V_{kj} \quad (35.10)$$

и

$$\frac{1}{W_j} \frac{\partial}{\partial u_j} = \Delta_j, \quad (35.11)$$

то получим

$$V_{jk} = \Delta_j \ln W_k. \quad (35.12)$$

Для внешнего дифференциала выражений (35.4) найдем, применяя (35.5) и (35.10),

$$2d\tau_1 = -V_{02} \sigma_{02} - V_{03} \sigma_{03} - V_{12} \sigma_{12} + V_{31} \sigma_{31} \quad (35.13)$$

или в силу (35.7) и (35.9)

$$d\tau_1 = \{(V_{02} + V_{31}) - (V_{03} + V_{12})\} \tau_{23} + \\ + (V_{03} - V_{12}) \tau_{31} - (V_{02} - V_{31}) \tau_{12}. \quad (35.14)$$

Сравнение с (25.8) и круговая перестановка индексов дают следующие выражения: для кривизн

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (V_{02} + V_{31}) - (V_{03} + V_{12}), \\ a_2 &= (V_{03} + V_{12}) - (V_{01} + V_{23}), \\ a_3 &= (V_{01} + V_{23}) - (V_{02} + V_{31}) \end{aligned} \right\} \quad (35.15)$$

и для символов Кристоффеля:

$$b_1 = V_{01} - V_{23}, \quad b_2 = V_{02} - V_{31}, \quad b_3 = V_{03} - V_{12}. \quad (35.16)$$

Вместо (35.15) в силу (35.10) и (35.12) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (\Delta_0 - \Delta_1) \ln \frac{W_2}{W_3} = (\Delta_2 - \Delta_3) \ln \frac{W_0}{W_1}, \\ a_2 &= (\Delta_0 - \Delta_2) \ln \frac{W_3}{W_1} = (\Delta_3 - \Delta_1) \ln \frac{W_0}{W_2}, \\ a_3 &= (\Delta_0 - \Delta_3) \ln \frac{W_1}{W_2} = (\Delta_1 - \Delta_2) \ln \frac{W_0}{W_3}. \end{aligned} \right\} \quad (35.17)$$

При этом дифференциальные операторы Δ следующим образом связаны с операторами ∂ из (26.3):

$$\left. \begin{aligned} \partial_1 &= \Delta_0 + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3, \\ \partial_2 &= \Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \\ \partial_3 &= \Delta_0 - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3. \end{aligned} \right\} \quad (36.18)$$

Выражение для связности γ найдется из (26.8), если воспользоваться выражениями (24.14) для τ и выражениями (35.16) для b :

$$\begin{aligned} 2\gamma &= (V_{23} - V_{01})(\sigma_2 + \sigma_3) + \dots = \\ &= \{(V_{31} - V_{02}) + (V_{12} - V_{03})\} \sigma_1 + \dots \end{aligned} \quad (35.19)$$

Здесь точки обозначают круговую перестановку индексов 1, 2, 3. С другой стороны,

$$d \ln(W_0 W_1 W_2 W_3) = \sum_{j,k} V_{jk} \sigma_k, \quad (35.20)$$

или, если исключить отсюда $-\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$,

$$\begin{aligned} d \ln(W_0 W_1 W_2 W_3) &= \\ &= (V_{11} - V_{00} + V_{31} - V_{02} + V_{12} - V_{03}) \sigma_1 + \dots \end{aligned} \quad (35.21)$$

Следовательно,

$$2\gamma - d \ln(W_0 W_1 W_2 W_3) = (V_{00} - V_{11}) \sigma_1 + \dots \quad (35.22)$$

или в силу (35.3)

$$2\gamma = - \sum_0^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \ln W_j \cdot du_j + d \ln(W_0 W_1 W_2 W_3). \quad (35.23)$$

Таким образом, связность γ лишь несущественно отличается от введенной в § 10 связности

$$\Gamma = - \sum_0^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \ln W_j \cdot du_j. \quad (35.24)$$

Если взять вместо функции ткани W функцию

$$\hat{W} = HW, \quad H = W_0 W_1 W_2 W_3, \quad (35.25)$$

то для соответствующей связности мы найдем

$$2\hat{\gamma} = 2\gamma - d \ln H = \Gamma = - \sum_0^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \ln W_j \cdot du_j. \quad (35.26)$$

С другой стороны, если уравнение ткани $W = 0$ решено относительно u_0 :

$$W = w(u_1, u_2, u_3) - u_0 = 0, \quad (35.27)$$

то в силу (35.24)

$$\Gamma = - \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \ln w_j \cdot du_j, \quad (35.28)$$

где

$$w_j = \frac{\partial}{\partial u_j} w. \quad (35.29)$$

Формула (35.28) может быть, например, применена к тому, чтобы найти уравнение вида (35.27) для рассмотренных в § 34 шестиугольных пространственных тканей.

§ 36. Каноническое разложение

Как и в § 14, мы здесь используем преобразования I и II § 1 для того, чтобы составить *каноническое разложение* функции $W(u_0, u_1, u_2, u_3)$ в точке O области регулярности \mathfrak{U} ткани \mathfrak{W} ; при этом мы принимаем, что в точке O все $u_j = 0$. Прежде всего, применяя преобразование I, введем новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} W(u_0, 0, 0, 0) &= u_0^*, \\ W(0, u_1, 0, 0) &= u_1^*, \\ W(0, 0, u_2, 0) &= u_2^*, \\ W(0, 0, 0, u_3) &= u_3^* \end{aligned} \right\} \quad (36.1)$$

вместо прежних параметров u_0, u_1, u_2, u_3 . После этого разложение в ряд функции W будет начинаться следующим образом (мы отбрасываем звездочки в обозначениях новых переменных):

$$W = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \sum p_{jk} u_j u_k + \dots, \quad (36.2)$$

где

$$p_{jk} = p_{kj}, \quad p_{jj} = 0. \quad (36.3)$$

Далее мы можем с помощью преобразования II добиться того, чтобы в точке O связность $\gamma = 0$ и, следовательно, $b_j = 0$. Тогда в силу (36.2) и (35.16)

$$p_{01} = p_{23}, \quad p_{02} = p_{31}, \quad p_{03} = p_{12}. \quad (36.4)$$

Так, при помощи преобразований I и II мы приходим к разложению

$$W = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + r_1(u_0 u_1 + u_2 u_3) + \\ + r_2(u_0 u_2 + u_3 u_1) + r_3(u_0 u_3 + u_1 u_2) + \dots \quad (36.5)$$

Наконец, используя еще одно преобразование II

$$\hat{W} = \{1 + r(u_0 + u_1 + u_2 + u_3)\} W \quad (36.6)$$

и последующую замену переменных (36.1), мы добьемся того, что

$$\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \hat{r}_3 = 0. \quad (36.7)$$

Окончательно каноническое разложение функции ткани W , задающее ее с точностью до членов второго порядка включительно, имеет вид

$$W = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \frac{a_3 - a_2}{6} (u_0 u_1 + u_2 u_3) + \\ + \frac{a_1 - a_3}{6} (u_0 u_2 + u_3 u_1) + \frac{a_2 - a_1}{6} (u_0 u_3 + u_1 u_2) + \dots \quad (36.8)$$

Так как здесь встречаются только разности величин a_j , то мы можем нормировать сами эти величины, потребовав, чтобы было

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0. \quad (36.9)$$

Тогда из (36.8) и (35.15) мы найдем, что величины a_j совпадают с кривизнами нашей ткани в точке O .

§ 37. Шестиугольные ткани из плоскостей

Пусть \mathfrak{X} — ткань, образованная четырьмя семействами плоскостей,

$$v_1^j x + v_2^j y + v_3^j z = h^j \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (37.1)$$

где

$$v_k^j = v_k^j(u_j), \quad h^j = h^j(u_j), \quad (37.2)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{v}^j = \mathbf{v}^j(u_j), \quad \mathbf{v}^j = (v_1^j, v_2^j, v_3^j), \quad (37.3)$$

причем можно считать, что эти векторы удовлетворяют условиям

$$(\mathbf{v}^j, \mathbf{v}^j) = 1, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{v}^j}{\partial u_i} \right) = 1, \quad (37.4)$$

где скобки обозначают скалярное произведение. Тогда параметр u_j будет длиной дуги «сферической индикатрисы» j -го семейства плоскостей, т. е. кривой $\mathbf{v} = \mathbf{v}^j(u_j)$ единичной сферы. За функцию ткани можно принять определитель

$$W = \begin{vmatrix} v_1^0 & v_2^0 & v_3^0 & h^0 \\ v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 & h^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & h^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 & h^3 \end{vmatrix}. \quad (37.5)$$

Условие того, что ткань \mathfrak{W} является шестиугольной, в силу (35.24) можно записать в виде

$$-\Gamma = \sum \frac{\partial}{\partial u_j} \ln W_j \cdot du_j = df. \quad (37.6)$$

Если мы временно отбросим усложняющий запись индекс j , то получим для вектора \mathbf{p} ребра возврата семейства плоскостей уравнения *)

$$(\mathbf{p}\mathbf{v}) = h, \quad (\mathbf{p}\mathbf{v}') = h', \quad (\mathbf{p}\mathbf{v}'') = h''. \quad (37.7)$$

Введем сопровождающий трехгранник, состоящий из единичных взаимно-ортогональных векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, где

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'. \quad (37.8)$$

*) См. любой курс дифференциальной геометрии (ср., например, П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, М., Гостехиздат, 1956, § 70).

Уравнения инфинитезимального перемещения трехгранника примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1' &= * & \mathbf{v}_2 &= * \\ \mathbf{v}_2' &= -\mathbf{v}_1 & * & + \frac{\mathbf{v}_3}{R} \\ \mathbf{v}_3' &= * & -\frac{\mathbf{v}_2}{R} &= * \end{aligned} \right\} \quad (37.9)$$

Здесь

$$R = \frac{du}{dw}, \quad (37.10)$$

где u и w — длины дуг кривых, описываемых точками $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ и \mathbf{v}_3 единичной сферы. Если принять за начало координат точку O пересечения плоскостей ткани ($h^i = 0$), то уравнение (37.6) примет вид

$$\sum \frac{h''}{h'} du = df. \quad (37.11)$$

Отсюда, учитывая (37.7), (37.9) и то, что $\mathbf{v}'' = \mathbf{v}_2'$, получим

$$\sum \frac{(\rho \mathbf{v}'')}{(\rho \mathbf{v}')} du = \sum \frac{1}{R} \frac{(\rho \mathbf{v}_3)}{(\rho \mathbf{v}_2)} du = df \quad (37.12)$$

или, в силу (37.10),

$$\sum \frac{(\rho \mathbf{v}_3)}{(\rho \mathbf{v}_2)} dw = df. \quad (37.13)$$

Положим

$$(\rho \mathbf{v}_2) = q; \quad (37.14)$$

тогда q будет расстоянием от точки O пересечения плоскостей до касательной к ребру возврата \mathfrak{F} нашего семейства плоскостей *). Точно так же

$$(\rho \mathbf{v}_3) = t \quad (37.15)$$

*) Так как плоскости (37.1) для ребра возврата $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ являются соприкасающимися, то вектор $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ направлен по бинормали кривой \mathfrak{F} , вектор $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'$ — по главной нормали и вектор $\mathbf{v}_3 = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]$ — по касательной; следовательно, $q = (\rho \mathbf{v}_2)$ равно проекции вектора $\mathbf{p} = \overline{OP}$ на главную нормаль \mathfrak{F} и $t = (\rho \mathbf{v}_3)$ — проекции \mathbf{p} на касательную \mathfrak{F} .

равно расстоянию от основания F перпендикуляра, опущенного из точки O на эту касательную, до точки P ее касания с кривой ξ (рис. 37). Таким образом, соприкасающиеся плоскости кривой четвертого класса, проходящие через одну точку O , удовлетворяют условию

$$-\Gamma = \sum_{\mathfrak{S}_j} \frac{t_j}{q_j} dw_j = df, \quad (37.16)$$

где сумма распространяется на все соприкасающиеся плоскости \mathfrak{S}_j к кривой ξ , проходящие через точку O , а

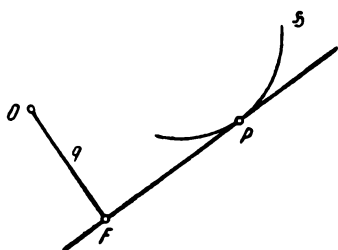


Рис. 37.

dw_j обозначает угол между соседними касательными к этой кривой в точке P_j ; ее соприкосновения с плоскостью \mathfrak{S}_j .

Перефразируя это предложение двойственным образом, получим следующее: пусть \mathfrak{C} — алгебраическая пространственная кривая четвертого порядка и P_j — точки ее пересечения с подвижной

плоскостью \mathfrak{C} , единичный нормальный вектор которой обозначен через n , далее t_j и h_j — соответственно единичные векторы касательной и главной нормали к кривой \mathfrak{C} в точках P_j и, наконец, dw_j — угол между соседними касательными этой кривой в точке P_j . Тогда выражение

$$-\Gamma = \sum_{P_j} \frac{(nh_j)}{(nt_j)} dw_j \quad (37.17)$$

будет полным дифференциалом.

§ 38. О пространственных кривых четвертого порядка первого рода

Используем расчеты, которым был посвящен § 35, для доказательства одной теоремы проэктивной геометрии, относящейся к «пространственным кривым четвертого порядка первого рода»; при этом «кривой» четвертого порядка первого рода мы назовем пространственную линию,

по которой пересекаются все квадрики некоторого линейного пучка (ср. с § 33). Если четыре точки P_j такой кривой \mathfrak{C} лежат в одной плоскости, то определитель, составленный из однородных координат этих точек, должен обратиться в нуль:

$$W = (P_0(u_0), P_1(u_1), P_2(u_2), P_3(u_3)) = 0. \quad (38.1)$$

По теореме Зауэра (§ 33), преобразованной с помощью принципа двойственности, это соотношение (38.1) эквивалентно соотношению

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0. \quad (38.2)$$

Следовательно, определитель W должен удовлетворять уравнениям $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, где a_j определяются формулами (35.17) или (35.15), в которых следует положить, например (ср. (35.10)):

$$V_{12} = \frac{(P_0 P'_1 P'_2 P_3)}{(P_0 P'_1 P_2 P_3) (P_0 P_1 P'_2 P_3)}. \quad (38.3)$$

При этом условия $a_j = 0$ будут иметь проективный смысл, т. е. будут инвариантны относительно проективных преобразований (коллинеаций).

Отсюда следует, что если взять в плоскости \mathfrak{C} четыре точки P_0, P_1, P_2, P_3 (из которых никакие три не лежат на одной прямой) и через каждую точку P_j провести прямую $g_j = [P_j P'_j]$ (эти прямые попарно скрещиваются и не лежат в плоскости \mathfrak{C}), то, вообще говоря, не существует неприводимой пространственной кривой четвертого порядка первого рода, проходящей через эти точки P_j и имеющей в них данные направления g_j . Для того чтобы такая кривая существовала, необходимо и достаточно выполнение двух из трех условий $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ *).

Чтобы придать этим условиям возможно более простую форму, мы поступим следующим образом. Примем плоскость \mathfrak{C} за плоскость $z = 0$; точки P_j переведем подходяще выбранным проективным преобразованием в вершины квадрата $x, y = \pm 1$ этой плоскости. Далее за P'_j примем точки пересечения четырех прямых g_j с плоско-

*) В силу (25.9) третье условие будет уже отсюда следовать.

стью $z = 1$. Тогда точки P_j, P'_j будут иметь следующие координаты:

	P_0	P_1	P_2	P_3	P'_0	P'_1	P'_2	P'_3
x	+1	-1	-1	+1	x_0	x_1	x_2	x_3
y	+1	+1	-1	-1	y_0	y_1	y_2	y_3
z	0	0	0	0	1	1	1	1

(38.4)

Несложный подсчет показывает, что при таком выборе системы координат условия $a_j = 0$ приобретают простой вид:

$$\left. \begin{aligned} x_0 + x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\ y_0 - y_1 - y_2 + y_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38.5)$$

Обратно, из теоремы Зауэра можно получить, что если четыре пространственные дуги \mathbb{G}_j в точках пересечения P_j с (произвольной!) плоскостью \mathbb{E} имеют направления $[P_j, P'_j]$, удовлетворяющие условиям $a_j = 0$ или (38.5), то эти дуги \mathbb{G}_j принадлежат одной пространственной кривой четвертого порядка первого рода.

Эти опирающиеся на § 37 результаты представляют собой перенесение исследований, связанных с работой Рейса (1837 г.) (§ 11), на пространственные алгебраические кривые, перенесение, которое в 1952 г. было детально изучено Тейксидором (J. Teixidor). Тейксидору удалось далее вывести подобные соотношения для алгебраических кривых, которые могут быть представлены как пересечение двух алгебраических поверхностей; однако этого не удалось сделать, например, для рациональных пространственных кривых третьего порядка.

Подсчитаем, учитывая результаты § 39, от какого числа проективных инвариантов зависит фигура, образованная «линейными элементами» P_j, g_j , где точки P_j принадлежат одной плоскости. Пусть h, h' — две (как мы будем предполагать, различные) прямые, пересекающие четыре оси g_j . Тогда существует однопараметрическая группа проективных преобразований, оставляющих неподвижными все точки прямых h, h' и переводящих прямые g_j в себя.

Четыре прямые g_j обладают двумя проективными инвариантами (веса нуль); это—двойные отношения четырех точек пересечения их с прямыми h и h' . Если присоединить к прямым g_j еще и плоскость \mathfrak{E} , то она, в силу существования упомянутой выше однопараметрической группы, прибавит сюда еще только два дополнительных проективных инварианта. Поэтому общее число проективных инвариантов фигуры (P_j, g_j) равно четырем.

Присоединим сюда еще некоторые подсчеты. Квадрика зависит от десяти однородных постоянных, т. е. от девяти существенных параметров; пространственная кривая \mathfrak{C} четвертого порядка первого рода как общая линия пересечения всех квадрик пучка зависит поэтому от $2 \times 9 - 2 = 16$ постоянных. Если кривая \mathfrak{C} проходит через четыре точки P_j плоскости \mathfrak{E} и касается в этих точках прямых g_j , то каждая квадрика Q пучка проходит через точки P_j и прямые g_j касаются квадрики Q в этих точках. Это дает восемь условий для определения квадрики Q , и, таким образом, существует однопараметрическое семейство квадрик, удовлетворяющих этим условиям. Но этому пучку принадлежит дважды считаемая плоскость \mathfrak{E} , и общая линия квадрик пучка состоит поэтому из дважды взятого пересечения квадрики Q плоскостью \mathfrak{E} . Если же существует нераспадающаяся кривая \mathfrak{C} , которая проходит через точки P_j , касаясь прямых g_j , то должны существовать три линейно независимые квадрики, удовлетворяющие нашим требованиям. Выполнение условий (38.5) является для этого необходимым и достаточным. Если эти условия выполнены, то существует двухпараметрическое линейное семейство кривых \mathfrak{C} , проходящих через точки P_j и касающихся прямых g_j , а именно, ими будут линии пересечения квадрик нашего двухпараметрического семейства.

§ 39. Спрямяемые ткани, образованные поверхностями

Мы хотим (так же как в § 17) попытаться решить вопрос о том, в каком случае образованная поверхностями ткань \mathfrak{W} будет «спрямляемой», т. е. будет допускать реализацию, состоящую из плоскостей. Прежде всего, можно показать, что дифференциальные операторы

$\partial_I, \partial_{II}, \partial_{III}$ (§ 28), примененные к кривизнам a_1, a_2 (§ 26) ткани в ее точке O , дают полную систему инвариантов ткани \mathfrak{W} в этой точке. Однако эти инварианты не независимы, так как в силу (28.17) они связаны соотношением

$$a_{1\,II\,I} + a_{2\,II\,II} + a_{3\,III\,III} = \\ = a_{1\,II\,I} + a_{2\,II\,II} - a_{1\,III\,III} - a_{2\,III\,III} = 0 \quad (39.1)$$

и другими соотношениями, получающимися из (39.1) после применения к нему дифференциальных операторов $\partial_I, \partial_{II}, \partial_{III}$. Таким образом, мы имеем два инварианта второго порядка веса единица, а именно a_1, a_2 , шесть инвариантов третьего порядка веса два, а именно $a_{1\,I}, a_{2\,II}, a_{1\,III}, a_{2\,I}, a_{2\,II}, a_{2\,III}$, из двенадцати же инвариантов четвертого порядка веса три, а именно a_{1jk} и a_{2jk} , в силу (39.1) будут независимыми только одиннадцать; среди инвариантов пятого порядка мы имеем соответственно $2 \cdot 10 - 3 = 17$ независимых инвариантов веса четыре; число независимых инвариантов шестого порядка веса пять будет равно $2 \cdot 15 - 6 = 24$ и т. д.

Подсчитаем теперь число проективных инвариантов ткани из плоскостей. Фигура первого порядка состоит из четырех плоскостей, проходящих через точку O , в каждой из которых задана прямая—прямая пересечения этой плоскости с соседней плоскостью того же семейства. Эта фигура, двойственная к рассмотренной в § 38, имеет четыре проективных инварианта. Каждое последующее увеличение порядка на единицу увеличивает число инвариантов на восемь (по два для каждой из четырех огибающих кривых). Общее число абсолютных инвариантов до n -го порядка равно

Порядок	1	2	3	4	5	6
Топологические инварианты .	0	2	8	19	36	60
Проективные инварианты . .	4	12	20	28	36	44

(39.2)

Таким образом, мы можем рассчитывать отыскать условия спрямляемости ткани, только учитывая инвариан-

ты не ниже шестого порядка. Далее, здесь также можно высказать гипотезу, аналогичную гипотезе Гронвэлла (§ 17): *образованная поверхностями ткань, не являющаяся шестиугольной, допускает (с точностью до коллинеаций) не больше одной реализации в виде ткани из плоскостей.*

§ 40. Несколько нерешенных вопросов, относящихся к тканям, образованным поверхностями

Мы поставим здесь некоторые вопросы, над которыми, как нам кажется, стоит подумать!

К простейшим шестиугольным пространственным тканям относятся ткани, образованные четырьмя пучками плоскостей с попарно скрещивающимися, не принадлежащими одной [квадрике (точнее, полуквадрике, см. § 34) осями. Если две прямые h , h' , пересекающие эти четыре оси, будут действительными и различными, то уравнение ткани может быть приведено к виду

$$W = h_1(u_0 u_1 + u_2 u_3) + h_2(u_0 u_2 + u_3 u_1) + \\ + h_3(u_0 u_3 + u_1 u_2) = 0 \quad (40.1)$$

с постоянными коэффициентами h_j .

А₁. Можно поставить вопрос о «диагоналях» подобной ткани, образованной пучками плоскостей, т. е. о «силовых линиях» соответствующих дифференциальных операторов ∂_1 , ∂_2 , ∂_3 . Образованная четырьмя пучками плоскостей фигура имеет только два проективных инварианта, а именно, двойные отношения четверок точек, в которых четыре оси пересекаются с их общими секущими h и h' . Поэтому должна быть простой и фигура, образованная «диагоналями» ткани.

А₂. Было бы интересно разыскать необходимые и достаточные условия для того, чтобы образованная поверхностями ткань была топологически эквивалентна ткани, образованной пучками плоскостей. Таблица (39.2) подсказывает, что это будут три условия, связывающие инварианты третьего порядка.

А₃. Заслуживает внимания вопрос о нахождении «условий спрямляемости» для шестиугольных пространственных тканей.

А₄. Какой вид примет уравнение

$$u_0 = w(u_1, u_2, u_3) \quad (40.2)$$

для шестиугольной пространственной ткани.

А₅. Какой вид имеет функция, которая получается после интегрирования выражений (37.16) и (37.17):

$$\int_{P_0}^{P(x, y, z)} \gamma = F(x, y, z), \quad (40.3)$$

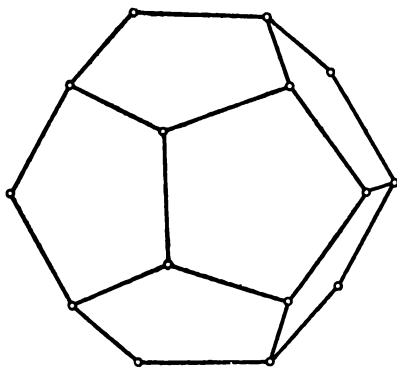


Рис. 38.

для шестиугольной пространственной ткани, образованной плоскостями ¹⁾?

А₆. Найти примеры шестиугольных пространственных тканей, образованных четырьмя пучками сфер.

А₇. Продолжить каноническое разложение в ряд (§36) до членов третьего порядка.

А₈. Нормировать функцию ткани $W(u_0, u_1, u_2, u_3)$ в соответствии с § 16.

А₉. Можно ли с целью упрощения относящихся к пространственным тканям формул использовать кватернионы, подобно тому как комплексные числа используются в теории криволинейных тканей (см. § 18).

А₁₀. Изучить риманову метрику

$$ds^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (40.4)$$

с условиями перенормировки

$$ds^{*2} = \frac{1}{g^2} ds^2, \quad (40.5)$$

естественно вводимую на образованной поверхностями ткани. По этому поводу см. M. Jaeger, *Projektive Methoden in der Gewebengeometrie*, Comment. Math. Helve-

¹⁾ Ответ на более общий вопрос дал Арф (см. C. Arf, *Sur la théorème de Reiss*, Rend. Math., Roma, V, 14 (1954), 181—191).

tici 24 (1950), 260 — 290 и диссертацию этого же автора, защищенную в 1949 г. в Высшей технической школе в Цюрихе.

A₁₁. В соответствии с § 23 отыскать наилучшую реализацию образованной поверхностями ткани (ср. E. H ö s e l, Minimaldarstellung von Flächengewebe, Hamburg. Abhandlungen 9 (1933), 273 — 290).

A₁₂. Изучить образованную поверхностями ткань \mathfrak{W}_6 , образованную шестью семействами поверхностей, из которых можно образовать замкнутые двенадцатигранники, топологически эквивалентные правильным додекаэдрам (рис. 38).

То, что здесь было сказано о тканях \mathfrak{W}_4 , образованных четырьмя семействами поверхностей в трехмерном пространстве R_3 , частично обобщается на ткани \mathfrak{W}_{n+1} , образованные $n+1$ семейством «гиперповерхностей» в R_n . Подобным тканям посвящены работы моего сотрудника Ауэ (H. A u e, Mittl. Math. Ges. Hamburg 7 (1938), 367 — 399) и недавние работы Барча (H. B a r t s c h, Abh. math. Sem. Hamburg 17 (1951) и Annali di Mat. 4, Fasc. 32, (1951), 249 — 269).

III. ЗАМЕЧАНИЯ О КРИВОЛИНЕЙНЫХ 4-ТКАНЯХ НА ПЛОСКОСТИ

§ 41. Обзор инвариантов 4-ткани

Теперь мы снова вернемся к рассмотрению планиметрических вопросов и займемся криволинейными тканями, образованными четырьмя семействами кривых. Подсбные ткани можно рассматривать как сечение образованной поверхностями ткани какой-либо поверхностью, не принадлежащей ткани.

Пусть в области \mathfrak{U} плоскости \mathfrak{E} задано n семейств кривых \mathfrak{S}_j :

$$u_j(x, y) = u_j = \text{const} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1), \quad (41.1)$$

таких, что через каждую точку x, y области \mathfrak{U} проходит точно по одной кривой каждого семейства и две кривые различных семейств пересекаются в этой области не больше чем в одной точке. Далее, пусть в области \mathfrak{U}

$$[du_j, du_k] \neq 0 \quad (j \neq k) \quad (41.2)$$

функции $u_j(x, y)$ являются аналитическими в \mathfrak{U} и область \mathfrak{U} будет «выпуклой» относительно семейств \mathfrak{S}_j . Тогда говорят, что в области \mathfrak{U} задана «криволинейная n -ткань» \mathfrak{W}^n , где $n \geq 3$. Если j, k, l — какие-то три из чисел $0, 1, \dots, n-1$, то семейства $\mathfrak{S}_j, \mathfrak{S}_k, \mathfrak{S}_l$ образуют «подткань» \mathfrak{W}_{jkl}^3 ткани \mathfrak{W}^n в области \mathfrak{U} .

Наиболее важным после изученного в первой части этой книги случая $n=3$ является (следующий по порядку) случай, когда $n=4$; поэтому мы хотим остановиться здесь именно на этом случае, тем более, что ткани \mathfrak{W}^n , где $n > 3$, изучены пока еще совершенно недостаточно. Случай $n=4$ привлекателен также и потому, что он тесно

связан с вопросом о поверхностях переноса в той постановке, к которой пришел С. Ли (S. Lie, 1842—1899) при изучении работ своего великого соотечественника Н. Г. Абеля (N. H. Abel, 1802—1829). Эти исследования С. Ли были продолжены позже его учеником Шефферсом (G. Scheffers, 1866—1945), а затем Дарбу (G. Darboux, 1842—1917), Пуанкаре (H. Poincaré, 1854—1912) и Виртингером (W. Wirtinger, 1865—1945). Недавно ткани \mathfrak{W}^4 успешно изучались моим испанским сотрудником Доу (A. Dou).

Если мы введем формы Пфаффа

$$\sigma_j = \frac{du_j}{g_j} \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (41.3)$$

то семейства \mathfrak{S}_j нашей ткани \mathfrak{W}^4 можно будет задать равенствами $\sigma_j = 0$. Если отбросить (временно) семейство \mathfrak{S}_0 , то придем к 3-ткани \mathfrak{W}_0 . Если считать ткань \mathfrak{W}_0 известной, то для того, чтобы задать \mathfrak{W}^4 , достаточно знать двойное отношение $t(x, y)$ четырех касательных, проведенных в точке (x, y) к четырем проходящим через эту точку кривым ткани \mathfrak{W}^4 . Если \mathfrak{W}^4 задано при помощи уравнений (41.1), то для четырех кривых этой ткани, проходящих через одну точку, можно получить два условия

$$\left. \begin{aligned} F(u_0, u_1, u_2, u_3) &= 0, \\ G(u_0, u_1, u_2, u_3) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (41.4)$$

причем функциональные определители

$$H_{jk} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u_j, u_k)} \neq 0 \quad (j \neq k) \quad (41.5)$$

в области \mathfrak{U} . Тогда мы можем определить двойное отношение касательных (или форм σ_j) при помощи выражения

$$t = \frac{H_{02} H_{31}}{H_{03} H_{12}} = \frac{[\sigma_3 \sigma_1][\sigma_0 \sigma_2]}{[\sigma_1 \sigma_2][\sigma_0 \sigma_3]}. \quad (41.6)$$

Это двойное отношение t будет инвариантом первого порядка относительно наших «топологических отображений» (0.1). Если мы применим к нему инвариантные операторы D_1, D_2 ткани \mathfrak{W}_0 (§ 12), то получим из этого инварианта

вес которого равен нулю, два инварианта второго порядка t_1, t_2 веса $p=1$. Далее получим, четыре инварианта третьего порядка веса $p=2$, а именно

$$t_{11}, t_{12}, t_{22}, k,$$

где $t_{jk} = D_k D_j t$, а k — кривизна ткани \mathfrak{W}_0 . Инвариантами четвертого порядка ($p=3$) будут

$$t_{111}, t_{112}, t_{122}, t_{222}, k_1, k_2,$$

и т. д. Так составляется полная система независимых инвариантов ткани \mathfrak{W}^4 в рассматриваемой точке.

Отметим для дальнейшего еще число абсолютных инвариантов (инвариантов веса $p=0$) различных порядков. Мы имеем один такой инвариант первого порядка, а именно — двойное отношение t . Далее идет один инвариант второго порядка, а именно — отношение $t_2:t_1$; четыре инварианта третьего порядка: $t_{11}:t_1^2$, $t_{12}:t_1^2$, $t_{22}:t_1^2$, $k:t_1^2$; шесть инвариантов четвертого порядка: $t_{111}:t_1^3$, $t_{112}:t_1^3$, $t_{122}:t_1^3$, $t_{222}:t_1^3$, $k_1:t_1^3$, $k_2:t_1^3$ и т. д. Сбщее число инвариантов порядка 1, 2, 3, 4 будет соответственно равно 1, 2, 6, 12.

§ 42. Проективная модель

Рассмотрим теперь ткань \mathfrak{W}^4 специального рода, состоящую из одних прямых линий. В качестве фигурирующих в (41.4) функций F, G здесь можно ввести определители

$$F = (g_0 g_1 g_2) = 0, \quad G = (g_1 g_2 g_3) = 0, \quad (42.1)$$

где

$$g_{j0} + g_{j1}x + g_{j2}y = 0, \quad g_j(u_j) = (g_{j0}, g_{j1}, g_{j2}) \quad (42.2)$$

— уравнение прямой линии семейства \mathfrak{S}_j .

Рассмотрим далее пять точек, а именно: точку P в области регулярности нашей ткани \mathfrak{W}^4 и четыре «характеристические точки» P_j , т. е. точки пересечения прямых g_j , проходящих через P , с «соседними» прямыми g_j . Если мы возьмем «общий случай», когда никакие три из этих пяти точек не принадлежат одной прямой, то эта фигура будет иметь два абсолютных проективных инвариан-

та. Но в силу § 41 и ткань имеет в точке P ровно два абсолютных инварианта—двойное отношение t и отношение $t_1:t_2$. Отсюда вытекает следующее.

Точке P области регулярности \mathfrak{G} произвольной ткани \mathfrak{W}^4 можно, вообще говоря, однозначно поставить в соответствие точку P^ ткани \mathfrak{W}^* , образованной четырьмя пучками прямых с центрами P_j общего положения (никакие три из точек P_j не лежат на одной прямой), так, что окрестности второго порядка точки P ткани \mathfrak{W}^4 и точки P^* ткани \mathfrak{W}^* будут топологически эквивалентны.*

Если мы зафиксируем точки P_j ткани \mathfrak{W}^* , то в общем случае, когда

$$\frac{\partial \left(t, \frac{t_1}{t_2} \right)}{\partial (x, y)} \neq 0,$$

мы получим отображение (топологическое в малом) плоскости \mathfrak{G} ткани \mathfrak{W}^4 на плоскость \mathfrak{G}^* ткани \mathfrak{W}^* ; при этом ткани \mathfrak{W}^4 будет соответствовать некоторая ткань \mathfrak{W}_0^4 , которая, вообще говоря, не совпадает с \mathfrak{W}^* . Всем топологически эквивалентным тканям \mathfrak{W}^4 соответствуют проективно эквивалентные ткани \mathfrak{W}_0^4 . Ткань \mathfrak{W}_0^4 называют «проективной моделью» ткани \mathfrak{W}^4 . Проблема топологического исследования ткани \mathfrak{W}^4 сведена, таким образом, к проблеме проективного исследования ткани \mathfrak{W}_0^4 . Это отображение, принадлежащее Хове (G. Howe), не получило пока как будто должного применения.

Сравним число абсолютных топологических инвариантов произвольной ткани \mathfrak{W}^4 с числом абсолютных проективных инвариантов прямолинейной ткани \mathfrak{W}^4 . Мы найдем

Порядок	1	2	3	4
Общее число абсолютных топологических инвариантов	1	2	6	12
Общее число абсолютных проективных инвариантов	1	2	6	10

Отсюда, по-видимому, следует, что произвольная ткань \mathfrak{W}^4 в окрестности третьего порядка любой своей точки может быть рассмотрена как прямолинейная ткань, в то время как «прямолинейное приближение» четвертого порядка произвольной ткани, вообще говоря, невозможно. Для того чтобы ткань \mathfrak{W}^4 была «спрямляема», должны, по-видимому, выполняться два условия, наложенные на инварианты четвертого порядка.

Приведем здесь еще один результат, который был получен в 1928 г. Майергофером (K. Mayrhofer) и обобщен Рейдемейстером (K. Reidemeister)*).

Обозначим через \mathfrak{W}_j^3 3-ткань, получающуюся из 4-ткани \mathfrak{W}^4 исключением семейства линий \mathfrak{S}_j . Если все подткани \mathfrak{W}_j^3 ($j = 0, 1, 2, 3$) 4-ткани \mathfrak{W}^4 являются шестиугольными, то эта ткань топологически эквивалентна ткани, состоящей из четырех пучков прямых.

С этим предложением связана следующая теорема: Если топологическое отображение ткани \mathfrak{W}^4 , образованной четырьмя пучками прямых, переводит ее снова в ткань такого типа, то это топологическое отображение является коллинеацией.

Подобные предложения, взятые в достаточно общей форме, могут быть использованы для целей аксиоматического обоснования проективной геометрии.

§ 43. Нормирование форм Пфаффа

Условие (6.4)

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

определяло формы Пфаффа 3-ткани \mathfrak{W}^3 с точностью до постоянного множителя. Подобное нормирование для 4-ткани \mathfrak{W}^4 можно провести многими способами. Например, мы можем следующим образом выразить формы σ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) этой ткани через две линейно независимые формы Пфаффа α и β

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= +\alpha \cos s - \beta \sin s, \\ \sigma_1 &= +\alpha \sin s + \beta \cos s, \\ \sigma_2 &= +\alpha \cos s + \beta \sin s, \\ \sigma_3 &= -\alpha \sin s + \beta \cos s. \end{aligned} \right\} \quad (43.1)$$

*) См. W. Blaschke — G. Bol, Geometrie der Gewebe, § 10

Здесь

$$2 \operatorname{ctg} 2s = l \quad (43.2)$$

— двойное отношение четырех направлений $\sigma_j = 0$ в точке P области регулярности \mathfrak{U} ткани \mathfrak{W}^4 . Заданные в точке P направления $\alpha = 0$, $\beta = 0$ будут характеризоваться тем, что они делят гармонически одновременно пары направлений $\sigma_0 = 0$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = 0$. Формы α , β , σ_j определяются равенствами (43.1) с точностью до общего множителя. Если поставить в соответствие направлениям

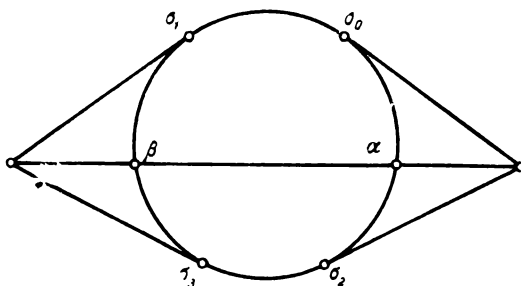


Рис. 39.

касательных t_j в точке P к линиям $\sigma_j = 0$ точки пересечения прямых t_j с проходящей через точку P окружностью \mathfrak{R} (эти точки мы также обозначим через σ_j), то конфигурация из шести точек σ_j , α , β окружности \mathfrak{R} будет иметь вид, изображенный на рис. 39. Мы имеем, далее,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sigma_0 \cos s + \sigma_1 \sin s = \sigma_2 \cos s - \sigma_3 \sin s, \\ \beta &= -\sigma_0 \sin s + \sigma_1 \cos s = \sigma_2 \sin s + \sigma_3 \cos s \end{aligned} \right\} \quad (43.3)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_0 \cos 2s + \sigma_1 \sin 2s, & \sigma_0 &= \sigma_2 \cos 2s - \sigma_3 \sin 2s, \\ \sigma_3 &= -\sigma_0 \sin 2s + \sigma_1 \cos 2s, & \sigma_1 &= \sigma_2 \sin 2s + \sigma_3 \cos 2s. \end{aligned} \right\} \quad (43.4)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (43.5)$$

и

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_2}{\cos s} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sin s}, \quad (43.6)$$

$$\frac{-\sigma_0 + \sigma_2}{\sin s} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\cos s}. \quad (43.7)$$

Предположим, что в области \mathfrak{G}

$$\Omega = [\alpha\beta] \neq 0. \quad (43.8)$$

Тогда из (43.1) можно вывести формулы, при помощи которых можно доказать, например, теорему Майергофера и Рейдемейстера из § 42. Эквивалентные формулы можно получить из соотношений (41.4). Сходную систему формул недавно применил Доу (A. Dou)¹⁾.

§ 44. Ранг 4-ткани

Рассмотрим ткань \mathfrak{W}^4 , для которой одно из соотношений (41.4) может быть приведено к простому виду

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0, \quad (44.1)$$

т. е. ткань, занимающую, в известном смысле, среди тканей \mathfrak{W}^4 такое же место, какое занимают шестиугольные ткани среди тканей \mathfrak{W}^3 . Если мы возьмем в пространстве октаэдрическую ткань и пересечем ее поверхностью \mathfrak{F} , не касающейся линий пересечения поверхностей этой ткани, то на поверхности \mathfrak{F} мы получим ткань \mathfrak{W}^4 рассматриваемого специального типа. Рассмотрим теперь случай, когда для ткани \mathfrak{W}^4 одно из соотношений (41.4) может быть p способами представлено в эквивалентном (44.1) виде

$$v_{0k}(u_0) + v_{1k}(u_1) + v_{2k}(u_2) + v_{3k}(u_3) = \text{const} \quad (k = 1, 2, \dots, p). \quad (44.2)$$

При этом мы считаем, что между левыми частями этих соотношений не существует линейных зависимостей с постоянными коэффициентами. Максимальное число соотношений (44.2) для данной ткани \mathfrak{W}^4 мы назовем «*рангом*» этой ткани. Наибольший ранг, который может иметь

¹⁾ A. Dou, Cuatritejidos Planos, Met. Real. Acad. Cien y Artes, Barcelona 31, 5 (1953); см. далее A. Dou, Rang der ebenen 4-Gewebe, Hamburg Abhandlungen 19 (1954).

какая-либо ткань \mathfrak{W}^4 , мы назовем «*максимальным рангом*» и обозначим через ρ_0 .

Одна теорема Абеля (N. H. Abel, 1802—1829) 1829 г. позволяет сразу указать пример ткани \mathfrak{W}^4 ранга $\rho = 3$. А именно, рассмотрим кривую \mathfrak{C} четвертого класса максимального рода*) $\rho = 3$. Предположим, что в плоскости \mathfrak{C} этой кривой существует область \mathfrak{G} , в которой действительные касательные к кривой \mathfrak{C} образуют ткань \mathfrak{W}^4 . Если u — параметр на кривой \mathfrak{C} , который вычисляется при помощи «абелева интеграла первого рода», и u_0, u_1, u_2, u_3 — значения параметров касательных, проходящих через точку P области \mathfrak{G} , то сумма

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \text{const} \quad (44.3)$$

остаётся постоянной при изменении точки P в \mathfrak{G} . Так как каждому такому интегралу u соответствует на кривой \mathfrak{C} соотношение (44.3) и так как число линейно независимых интегралов первого рода равно роду ρ кривой \mathfrak{C} , то ранг нашей кривой действительно равен трем.

Мы покажем также, как, следуя методу Пуанкаре (1901), можно доказать, что, обратно:

I. *Максимальный ранг ρ_0 всех 4-тканей равен трем.*

II. *Все 4-ткани ранга $\rho = 3$ топологически эквивалентны тканям, образованным касательными к плоской кривой четвертого класса.*

В частности, все 4-ткани \mathfrak{W}^4 ранга 3 будут спрямляемыми.

§ 45. Максимальный ранг

Если мы положим

$$v'_{jk} = \frac{dv_{jk}}{du_j}, \quad (45.1)$$

то из (44.2) получим ($k = 1, 2, \dots, \rho$):

$$v'_{0k} du_0 + v'_{1k} du_1 + v'_{2k} du_2 + v'_{3k} du_3 = 0 \quad (45.2)$$

*) См., например, Н. Г. Чеботарёв, Теория алгебраических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1948, стр. 108.

для всех x, y в области регулярности \mathcal{U} ткани \mathfrak{W}^4 и для всех $dx:dy$. Считая совокупность p величин

$$(v'_{j1}, v'_{j2}, \dots, v'_{jp}) = v_j \quad (45.3)$$

вектором в p -мерном пространстве, мы можем объединить наши p формул (45.2) в одной векторной формуле:

$$v_0 du_0 + v_1 du_1 + v_2 du_2 + v_3 du_3 = 0. \quad (45.4)$$

Рассмотрим дифференциальные операторы ∂_j , определяющиеся равенствами

$$\partial_j u_j = 0, \quad \partial_j u_k = u_{kj} \neq 0 \quad (j \neq k). \quad (45.5)$$

Применяя операторы ∂_1 и ∂_0 к соотношению (44.2), мы получим векторные формулы:

$$\left. \begin{aligned} v_0 u_{01} + v_2 u_{21} + v_3 u_{31} &= 0, \\ v_1 u_{10} + v_2 u_{20} + v_3 u_{30} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45.6)$$

Будем считать теперь величины v'_{jk} однородными координатами точки v_j в $(p-1)$ -мерном проективном пространстве \mathfrak{P} . Тогда соотношения (45.6) означают, что точки v_0, v_1, v_2, v_3 , соответствующие одним и тем же значениям x, y области \mathcal{U} , лежат на одной прямой $g(x, y)$ пространства \mathfrak{P} . Мы обозначим это так:

$$g = v_0 \dot{+} v_1 \dot{+} v_2 \dot{+} v_3, \quad (45.7)$$

где правая часть означает линейное подпространство пространства \mathfrak{P} , «натянутое» на точки v_0, v_1, v_2, v_3 . Применяя к первой формуле (45.6) оператор ∂_2 , получим

$$v'_0 u_{01} u_{02} + v_0 u_{012} + v_2 u_{212} + v_3 u_{312} + v'_3 u_{32} u_{31} = 0, \quad (45.8)$$

где $v'_0 = dv_0 : du_0$. Это означает, что касательная

$$T_0 = v_0 \dot{+} v'_0 \quad (45.9)$$

в точке v_0 к кривой \mathcal{C}_0 пространства P , описываемой этой точкой, лежит в плоскости

$$\mathcal{E} = g \dot{+} v'_3, \quad (45.10)$$

которая также содержит касательную

$$T_3 = v_3 \dot{+} v'_3 \quad (45.11)$$

в точке v_3 кривой \mathfrak{C}_3 . Значит, эти касательные $T_0(x, y)$ и $T_3(x, y)$ пересекаются. Поэтому, в силу симметрии, все касательные $T_j(x, y)$ лежат в одной плоскости \mathfrak{E} (рис. 40):

$$\mathfrak{E}(x, y) = T_0(x, y) \dot{+} T_1(x, y) \dot{+} T_2(x, y) \dot{+} T_3(x, y) = \\ = v_0 \dot{+} v'_0 \dot{+} v_1 \dot{+} v'_1 \dot{+} v_2 \dot{+} v'_2 \dot{+} v_3 \dot{+} v'_3. \quad (45.12)$$

Если мы применим к равенству (45.8) оператор ∂_3 , то в полученное выражение войдет только одна производная второго порядка, а именно v'_0 с множителем $u_{01}u_{02}u_{03} \neq 0$. Поэтому соприкасающаяся плоскость к кривой \mathfrak{C}_0 в точке v_0 совпадает с плоскостью \mathfrak{E} :

$$\mathfrak{E} = v_0 \dot{+} v'_0 \dot{+} v'_0. \quad (45.13)$$

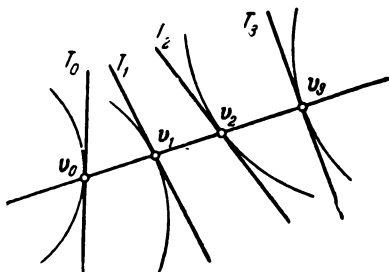


Рис. 40.

В силу симметрии плоскость \mathfrak{E} будет также соприкасающейся плоскостью кривой \mathfrak{C}_1 в точке v_1 . Если мы теперь будем закреплять попеременно параметры u_0 и u_1 , то можем прийти от произвольной точки x_0, y_0 области \mathfrak{G} к каждой другой ее точке при помощи зигзагообразного пути; так как при этом плоскость \mathfrak{E} остается неподвижной, то она не зависит от x, y . Таким образом, фигура, изображенная на рис. 40, лежит в одной плоскости $\mathfrak{E} = \mathfrak{P}$ и поэтому $p = 3$. Но для ткани \mathfrak{W}^4 , образованной касательными плоской кривой четвертого класса рода 3, как мы знаем, $p = 3$ (§ 44); поэтому максимальный ранг p_0 всех тканей \mathfrak{W}^4 действительно равен трем: $p_0 = 3$.

Этот метод, принадлежащий Пуанкаре, может быть применен для того, чтобы показать, что для ткани \mathfrak{W}^n

$$p \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (45.14)$$

§ 46. Спрямяемость

Мы рассмотрим на плоскости \mathfrak{E} фигуру, состоящую из четырех кривых $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$, соответствующие точки которых лежат на одной прямой g . При переходе к

двойственной фигуре мы непосредственно получим следующий результат:

Каждая ткань \mathfrak{W}^4 максимального ранга $\rho_0 = 3$ спрямляема.

Наконец, чтобы доказать, что прямые, образующие прямолинейную ткань \mathfrak{W}^4 , всегда будут касательными к некоторой плоской кривой четвертого класса, можно воспользоваться, например, следующей теоремой, доказанной в 1938 г. Болем (G. Bol): *Прямолинейная ткань \mathfrak{W}^n , удовлетворяющая условию*

$$\sum_1^n u_j = 0, \quad (46.1)$$

всегда состоит из касательных к некоторой алгебраической кривой n -го класса.

Может быть, также возможно из рассмотрений § 45 вывести для кривых \mathfrak{C}_j соотношение Рейса (§ 11), и тогда при помощи уже знакомого обращения теоремы Рейса получить, что эти кривые являются частями алгебраической кривой четвертого класса; однако это, как будто, никем проведено не было. Для получения желательного результата оказываются достаточными также соображения Ли, Шефферса, Дарбу, Пуанкаре и Виртингера о поверхностях переноса.

Докажем далее, следуя Болю (1936), что *ткань \mathfrak{W}^5 максимального ранга 6, вообще говоря, не является спрямляемой.*

Достаточно построить пример такой «ткани \mathfrak{W}^5 Боля» или «исключительной ткани \mathfrak{W}^5 ». Для этого возьмем в плоскости \mathfrak{E} пять точек P_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$), из которых никакие три не лежат на одной прямой. Пусть \mathfrak{C}_j — пучок конических сечений, проходящих через точки P_k , где $k \neq j$. Тогда эти \mathfrak{C}_j образуют в некоторой области \mathfrak{U} плоскости \mathfrak{E} ткань \mathfrak{W}^5 .

Применим к нашей ткани \mathfrak{W}^5 квадратичное преобразование T_{123} ; для этого мы выберем точки P_1, P_2, P_3 в качестве базисных точек проективной системы координат x_j ($j = 1, 2, 3$) и положим

$$x_j^* = \frac{1}{x_j}. \quad (46.2)$$

При этом пучки конических сечений $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ перейдут опять в пучки конических сечений $\mathcal{E}_1^*, \mathcal{E}_2^*, \mathcal{E}_3^*$ с соответствующими базисными точками:

для $\mathcal{E}_1^* — P_2, P_3, P_4^*, P_5^*$,

для $\mathcal{E}_2^* — P_3, P_1, P_4^*, P_5^*$,

для $\mathcal{E}_3^* — P_1, P_2, P_4^*, P_5^*$.

Напротив, пучкам конических сечений $\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$ будут соответствовать пучки прямых с вершинами в точках P_4^*, P_5^* . К полученной ткани \mathfrak{W}^{5*} применим второе квадратичное преобразование $T_{34 \cdot 5 \cdot}$ с базисными точками $P_3, P_4^*, P_5^* : \mathfrak{W}^{5*} \rightarrow \mathfrak{W}^{5**}$. При этом пучок конических сечений \mathcal{E}_1^* переходит в пучок прямых \mathcal{E}_1^{**} с вершиной $P_2^{**} = (P_2)T_{34 \cdot 5 \cdot}$; пучок конических сечений \mathcal{E}_2^* — в пучок прямых с вершиной $P_1^{**} = (P_1)T_{34 \cdot 5 \cdot}$; пучок конических сечений \mathcal{E}_3^* — снова в пучок конических сечений \mathcal{E}_3^{**} с базисными точками $P_1^{**}, P_2^{**}, P_4^*, P_5^*$, а каждый из пучков прямых $\mathcal{E}_4^*, \mathcal{E}_5^*$ переходит в себя.

Мы утверждаем прежде всего, что каждая ткань \mathfrak{W}^3 , содержащаяся в исходной ткани \mathfrak{W}^5 , является шестиугольной. Последовательность квадратических преобразований $T_{123}, T_{34 \cdot 5 \cdot}$ дает в малом топологическое отображение, которое переводит пучки конических сечений $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ в три пучка прямых, а они, в силу § 3, образуют шестиугольную ткань. Таким образом, ткань \mathfrak{W}_{125} , образованная пучками конических сечений $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_5$, является шестиугольной. В силу симметрии то же самое будет справедливо для любой 3-ткани \mathfrak{W}_{jkl} , принадлежащей ткани \mathfrak{W}^5 .

Если мы переменим местами семейства \mathcal{E}_3 и \mathcal{E}_5 , то увидим, что нашу ткань \mathfrak{W}^5 можно будет привести к следующей несимметричной нормальной форме: она будет состоять из четырех пучков прямых \mathcal{E}_j с центрами в точках P_j ($j = 1, 2, 3, 4$), из которых никакие три не лежат на одной прямой, и пучка конических сечений \mathcal{E}_5 с базисными точками P_j . При помощи проективного преобразования (коллинеации) мы можем, наконец, перевести точки P_j в вершины квадрата $P_1 = (0, 0), P_2 = (0, 1), P_3 = (1, 1),$

$P_4 = (1, 0)$ и соответственно положить параметры u_j равными

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{x}{y}, & u_2 &= \frac{x+y-1}{x}, & u_3 &= \frac{y-x}{1-x}, \\ u_4 &= \frac{1-x}{y}, & u_5 &= \frac{y(1-y)}{x(1-x)}. \end{aligned} \right\} \quad (46.3)$$

То обстоятельство, что десять подтканей \mathfrak{W}_{jk1} ткани \mathfrak{W}^5 являются шестиугольными, дает для дифференциалов du_j только пять линейно независимых соотношений, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_4}{1-u_4} &= 0, \\ \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \frac{du_5}{1-u_5} &= 0, \\ \frac{du_3}{u_3} + \frac{du_4}{u_4} + \frac{du_1}{1-u_1} &= 0, \\ \frac{du_4}{u_4} + \frac{du_5}{u_5} + \frac{du_2}{1-u_2} &= 0, \\ \frac{du_5}{u_5} + \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_3}{1-u_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46.4)$$

Но между этими du_j существует еще одно шестое линейное соотношение, независимое от (46.4), а именно,

$$\sum_1^5 \left\{ \frac{\ln(1-u_j)}{u_j} + \frac{\ln u_j}{1-u_j} \right\} du_j = 0. \quad (46.5)$$

Поэтому действительно максимальный ранг ткани \mathfrak{W}^5 равен шести.

Соотношение, получающееся после интегрирования (46.5), рассматривал еще Абель (N. H. Abel, Werke, Bd. 2, 189). Получающаяся при этом функция

$$\int \frac{\ln z}{1-z} dz \quad (46.6)$$

встречается уже у Гаусса при вычислении объема тетраэдра в неевклидовой геометрии.

То, что наша ткань \mathfrak{W}^5 не спрямляема, можно увидеть, например, так. Если бы ткань \mathfrak{W}^5 можно было перевести в прямолинейную ткань, то 4-ткань \mathfrak{W}^4 , состоящая из семейств прямых $u_1, u_2, u_3, u_4 = \text{const}$ (46.3), перешла бы при этом снова в ткань, состоящую из четырех пучков прямых. Но по теореме Майергофера и Рейдемейстера (§ 42) преобразование, осуществляющее этот переход, может быть только коллинеацией. Поэтому пучок конических сечений \mathfrak{S}_5 переходит при этом снова в пучок конических сечений, т. е. остается криволинейным.

§ 47. Шестиугольные n -ткани

Ткань \mathfrak{W}^n при $n \geq 3$ называется *шестиугольной*, если все ее подткани \mathfrak{W}^3 будут шестиугольными. По теореме Майергофера и Рейдемейстера каждая подобная 4-ткань эквивалентна ткани, образованной четырьмя пучками прямых. При $n = 5$, в силу теоремы Боля (§ 46), это уже не будет верно. Однако имеет место следующая теорема: *Шестиугольную ткань \mathfrak{W}^5 можно отобразить либо на ткань, образованную пятью пучками прямых, либо на ткань \mathfrak{W}^5 Боля (§ 46).*

Относительно ткани \mathfrak{W}^5 можно еще показать, что *если из десяти ее подтканей \mathfrak{W}^3 девять являются шестиугольными, то шестиугольной будет и десятая*. Напротив, четыре условия шестиугольности подтканей \mathfrak{W}^3 ткани \mathfrak{W}^4 являются независимыми.

Наконец, *шестиугольная ткань \mathfrak{W}^n при $n \geq 6$ всегда можно отобразить на ткань, состоящую из n пучков прямых*. Это предложение без труда можно свести к теореме о шестиугольных 5-тканях.

Вспрос о независимости условий шестиугольности для подтканей \mathfrak{W}^3 как будто еще остается открытым.

Красивый пример ткани \mathfrak{W}^{27} , содержащей, однако, не только шестиугольные подткани \mathfrak{W}^3 , рассмотрен в 1936 г. Бурау (W. Baur). Пусть \mathfrak{F} — поверхность третьего порядка с 27 действительными прямыми; очевидно, что каждая плоскость, проходящая через какую-либо из этих прямых, пересечет поверхность \mathfrak{F} , кроме того, еще по коническому сечению. Эти конические сечения образуют в малом на поверхности \mathfrak{F} ткань \mathfrak{W}^{27} Бурау. Три попарно

скрещивающиеся прямые поверхности \mathfrak{F} будут осями трех пучков плоскостей, высекающих на поверхности \mathfrak{F} конические сечения, образующие в малом шестиугольную ткань; подобным образом можно получить все шестиугольные 3-ткани в ткани \mathfrak{W}^{27} Бурау. Эта ткань \mathfrak{W}^{27} может быть топологически определена при помощи соответствующих условий шестиугольности.

Плоская реализация ткани Бурау получается таким образом: возьмем в плоскости шесть точек P_j , из которых никакие три не лежат на одной прямой, шесть пучков прямых с центрами в P_j , 15 пучков конических сечений, определяемых каждой четверкой точек из P_j , и, наконец, шесть пучков рациональных кривых третьего порядка, которые проходят через точки P_j и имеют одну из этих точек двойной ($6 + 15 + 6 = 27$). О тканях, образованных коническими сечениями на поверхностях третьего порядка, несущих меньше 27 действительных прямых, как будто ничего неизвестно.

§ 48. Несколько нерешенных вопросов, относящихся к тканям \mathfrak{W}^n

В заключение этого неполного обзора мы приведем еще некоторые вопросы, относящиеся к криволинейным n -тканям на плоскости.

A_1 . Вывести в симметричной форме полную систему инвариантов ткани \mathfrak{W}^4 , заданной четырьмя уравнениями $\sigma_j = 0$ ($j = 0, 1, 2, 3$).

A_2 . В частности, найти инвариантные условия для того, чтобы ткань \mathfrak{W}^4 имела ранг $p = 1$, $p = 2$ или $p = 3$ ¹⁾.

A_3 . Вывести инварианты ткани \mathfrak{W}^4 , заданной уравнениями (41.4):

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0, \quad G(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0.$$

A_4 . Найти каноническое разложение для уравнений (41.4) ткани \mathfrak{W}^4 .

A_5 . Найти проективные инварианты прямолинейной ткани \mathfrak{W}^4 .

¹⁾ Ср. работы Доу, указанные в § 43.

A_6 . Исследовать связь между модулями плоской алгебраической кривой *) и топологическими инвариантами ткани, образованной ее касательными.

A_7 . Исследовать методом Пуанкаре (§ 45) кривые \mathcal{C} , в пространстве \mathbb{P}_5 , отвечающие ткани \mathfrak{W}^5 максимального ранга 6. Провести соответствующие исследования для ткани \mathfrak{W}^n ($n \geq 5$) максимального ранга.

Подобные же вопросы можно поставить и о еще менее изученных тканях \mathfrak{W}^n , образованных n семействами поверхностей в трехмерном пространстве. Тем не менее Болю удалось обобщить на ткань \mathfrak{W}^n , образованную n семействами поверхностей пространства R_3 , теоремы о «ранге». Так, например:

Если образованная плоскостями ткань \mathfrak{W}^n удовлетворяет условию

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0,$$

то ее плоскости образуют алгебраический торс класса n .

Далее,

Максимальный ранг образованной поверхностями пространства R_3 ткани \mathfrak{W}^n равен

$$p_0 = (m-1)^2 \text{ при } n = 2m,$$

$$p_0 = m(m-1) \text{ при } n = 2m+1.$$

Наконец, имеет место «основная теорема»:

Каждая образованная поверхностями ткань \mathfrak{W}^n максимального ранга при $n \neq 5$ является спрямляемой, т. е. она допускает реализацию при помощи плоскостей.

Однако доказательства Боля, которые приведены в нашей совместной книге от 1938 г., достаточно сложны и запутаны.

*) Ср. Н. Г. Чеботарёв, Теория алгебраических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1948, стр. 8.

IV. О КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТКАНЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 49. 2-ткани

Двухпараметрическое семейство кривых \mathfrak{C} (которое называют также «конгруэнцией» кривых) в пространстве с декартовыми координатами x, y, z можно задать при помощи дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r}, \quad (49.1)$$

или с помощью соответствующего дифференциального оператора

$$\partial = p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y} + r \frac{\partial}{\partial z}; \quad (49.2)$$

при этом функции $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$, $r(x, y, z)$ не должны обращаться одновременно в нуль в некоторой области \mathfrak{G} . Семейство поверхностей

$$u(x, y, z) = \text{const}, \quad (49.3)$$

которое удовлетворяет условию

$$\partial u = 0, \quad (49.4)$$

обладает тем свойством, что в области \mathfrak{G} каждая из его поверхностей несет однопараметрическое подсемейство кривых конгруэнций \mathfrak{C} . Можно сказать, что это семейство поверхностей «натянuto» на семейство кривых (49.1).

Два семейства кривых \mathfrak{C}_j , которые задаются независимыми (в рассматриваемой области \mathfrak{G}) операторами

$$\partial_j = p_j \frac{\partial}{\partial x} + q_j \frac{\partial}{\partial y} + r_j \frac{\partial}{\partial z} \quad (j = 1, 2), \quad (49.5)$$

определяют 2-ткань \mathfrak{W}^2 кривых. Эта ткань называется *четырёхугольной*, если четырёхугольники, пары противоположных сторон которых принадлежат кривым разных семейств, в малом замкнуты. Тогда уравнения

$$\left. \begin{aligned} \partial_1 u &= 0, \\ \partial_2 u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49.6)$$

имеют общее решение u , т. е. существует семейство поверхностей, «натянутое» одновременно на оба семейства кривых. С помощью дифференциальных операторов четырёхугольные ткани можно определить линейной зависимостью

$$\partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1 = a_2 \partial_1 - a_1 \partial_2. \quad (49.7)$$

Рассмотрим кратко общий случай ткани \mathfrak{W}^2 , когда три оператора $\partial_1, \partial_2, \partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1$ линейно независимы в области \mathfrak{G} . Топологическое исследование таких тканей \mathfrak{W}^2 может быть сведено к изучению двухпараметрического семейства кривых на плоскости, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right). \quad (49.8)$$

Чтобы убедиться в этом, нужно только спроектировать семейство \mathfrak{S}_1 при помощи семейства \mathfrak{S}_2 на подходящим образом выбранную плоскость. Топология дифференциального уравнения (49.8) изучалась многократно, например, Трессе (A. Tresse) в 1896 г. по инициативе С. Ли. Эта топология достаточно сложна. Позже обстоятельная работа по этому вопросу была опубликована Картаном (E. Cartan, Bull. de la Société Math. de France 52 (1924)).

Замечательным является тот простой факт, что в то время как при изучении криволинейных тканей \mathfrak{W}^n на плоскости первое простое топологически инвариантное соотношение получается при $n = 3$ (шестиугольные ткани), в пространстве уже случай $n = 2$ приводит к инвариантным четырёхугольным тканям.

§ 50. 3-ткани

Рассмотрим 3-ткань с линейно независимыми дифференциальными операторами

$$\partial_j = p_j \frac{\partial}{\partial x} + q_j \frac{\partial}{\partial y} + r_j \frac{\partial}{\partial z} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (50.1)$$

Тогда мы можем образовать «скобки»

$$\left. \begin{aligned} \partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2 &= c_{11} \partial_1 + c_{12} \partial_2 + c_{13} \partial_3, \\ \partial_3 \partial_1 - \partial_1 \partial_3 &= c_{21} \partial_1 + c_{22} \partial_2 + c_{23} \partial_3, \\ \partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1 &= c_{31} \partial_1 + c_{32} \partial_2 + c_{33} \partial_3. \end{aligned} \right\} \quad (50.2)$$

Если мы перенормируем операторы

$$\partial_j^* = f_j \partial_j, \quad (50.3)$$

то получим

$$c_{11}^* = \frac{f_2 f_3}{f_1} c_{11}, \quad c_{22}^* = \frac{f_3 f_1}{f_2} c_{22}, \quad c_{33}^* = \frac{f_1 f_2}{f_3} c_{33}. \quad (50.4)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} c_{22}^* c_{33}^* &= f_1^2 c_{22} c_{33}, \quad c_{33}^* c_{11}^* = f_2^2 c_{33} c_{11}, \\ c_{11}^* c_{22}^* &= f_3^2 c_{11} c_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (50.5)$$

В общем случае, а именно, когда

$$c_{11} c_{22} c_{33} \neq 0, \quad (50.6)$$

мы можем так однозначно нормировать операторы ∂_j , что

$$c_{jj} = 1. \quad (50.7)$$

Применение нормированных таким образом операторов ∂_j к коэффициентам c_{ij} дает полную систему инвариантов ткани \mathfrak{W}^3 , как это показано в книге Боля и Бляшке.

Еще более просто обстоит дело в случае ткани \mathfrak{W}^4 , определяемой операторами (50.1) при $j = 0, 1, 2, 3$. В этом случае операторы можно с точностью до произвольного множителя нормировать так, чтобы было

$$\partial_0 + \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = 0;$$

при этом мы приходим к теории инвариантов, которая будет

несколько более общей по сравнению с теорией, развитой во второй главе для 4-тканей, образованных поверхностями.

Подобным образом можно исследовать также «смешанные ткани», состоящие из семейств кривых и поверхностей. Однако мы здесь остановимся лишь на простейших криволинейных тканях \mathfrak{W}^n в пространстве.

§ 51. Четырехугольные ткани \mathfrak{W}^n

Рассмотрим сначала исключенный в предыдущем параграфе случай криволинейной 3-ткани \mathfrak{W}^3 , для которого в уравнениях (50.2) все $c_{ij} = 0$. Тогда для любых двух семейств кривых этой ткани существует натянутое на них семейство поверхностей. Подобные ткани определяются тем, что будет замыкаться «кубическая фигура» (рис. 41), составленная из кривых ткани. Такая ткань \mathfrak{W}^3 в малом топологически эквивалентна ткани, образованной тремя связками прямых, центры которых не лежат на одной прямой.

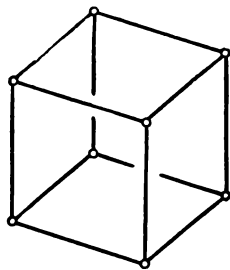


Рис. 41.

Предположим далее, что ткань \mathfrak{W}^3 — прямолинейная, но натянутые на семейства прямых поверхности являются не плоскостями, а $\tilde{\mathfrak{W}}^2$ квадриками. Тогда эти три семейства поверхностей $u_j = \text{const}$ в однородных координатах

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & a_{000} + a_{100} u_1 + a_{010} u_2 + a_{001} u_3 + a_{011} u_2 u_3 + \\ & + a_{101} u_3 u_1 + a_{110} u_1 u_2 + a_{111} u_1 u_2 u_3, \end{aligned} \quad (51.1)$$

где a_{ijk} — точки \mathfrak{F}_3 .

Ткань \mathfrak{W}^4 мы назовем *четыреугольной*, если она в малом эквивалентна ткани \mathfrak{W}^4 , образованной четырьмя связками прямых, никакие три из центров которых не лежат на одной прямой. Далее, мы назовем *четыреугольной* ткань \mathfrak{W}^n ($n \geq 4$), все содержащиеся в которой подткани \mathfrak{W}^4 будут четырехугольными. Тогда оказывается спра-

ведливой теорема, аналогичная теореме Боля из § 46, и сводимая к этой последней, а именно:

Четырехугольная ткань \mathfrak{W}^n при $n \neq 6$ всегда эквивалентна ткани, образованной n связками прямых. Напротив, при $n = 6$ она эквивалентна либо ткани, образованной шестью связками прямых, либо некоторой исключительной ткани \mathfrak{W}^6 . Эта исключительная ткань \mathfrak{W}^6 состоит из пяти связок прямых, центры которых находятся в общем положении (никакие три из них не лежат на одной прямой), и из двупараметрического семейства пространственных кривых третьего порядка, проходящих через эти пять центров.

Если спроектировать эту исключительную ткань \mathfrak{W}^6 при помощи одного из ее шести семейств на плоскость, то мы получим на ней исключительную ткань \mathfrak{W}^5 , рассмотренную в § 46.

Чтобы подробнее исследовать этот исключительный случай, приведем некоторые сведения о пространственных кривых третьего порядка.

§ 52. Пространственные кривые третьего порядка

Нераспадающаяся пространственная кривая третьего порядка \mathfrak{C} в однородных координатах x_i может быть представлена следующими параметрическими уравнениями (рис. 42):

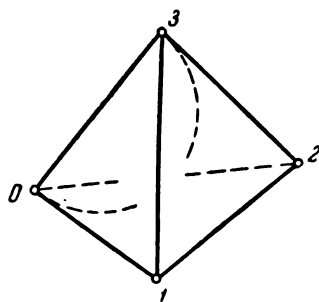


Рис. 42.

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 1, & x_1 &= t, \\ x_2 &= t^2, & x_3 &= t^3. \end{aligned} \right\} \quad (52.1)$$

При $t = 0$ кривая \mathfrak{C} проходит через точку $P_0 = (1, 0, 0, 0)$, имеет касательную $P_0 P_1$ и соприкасающуюся плоскость $P_0 P_1 P_2$.

При $t = \infty$ она проходит через точку $P_3 = (0, 0, 0, 1)$, имеет касательную $P_3 P_2$ и соприкасающуюся плоскость $P_3 P_2 P_1$.

Соприкасающиеся плоскости в точках P_0 и P_3 пересекаются по прямой $P_1 P_2$. Этим определяется наш координатный

натный тетраэдр. Если мы положим

$$t^* = \frac{a + bt}{c + dt}, \quad ad - bc \neq 0,$$

$$x_0^* = 1, \quad x_1^* = t^*, \quad x_2^* = t^{*2}, \quad x_3^* = t^{*3},$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} x_0^* &= (c + dt)^3 = c^3 x_0 + 3c^2 dx_1 + 3cd^2 x_2 + d^3 x_3, \\ x_1^* &= (c + dt)^2 (a + bt) = c^2 a x_0 + \dots, \\ x_2^* &= (c + dt) (a + bt)^2 = ca^2 x_0 + \dots, \\ x_3^* &= (a + bt)^3 = a^3 x_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (52.2)$$

Таким образом, если поставить в соответствие трем различным точкам t_1, t_2, t_3 кривой \mathcal{C} три другие ее различные точки t_1^*, t_2^*, t_3^* , то существует единственное проективное преобразование пространства, которое переводит кривую \mathcal{C} в себя и ее точкам t_j ставит в соответствие точки t_j^* . Кривая \mathcal{C} проектируется из каждой своей точки при помощи конуса второго порядка; например, из точки P_0 — при помощи конуса $x_1 x_2 - x_3^2 = 0$. Обратно: Два подобных конуса $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ с различными вершинами S_1, S_2 и общей образующей $S_1 S_2$, вдоль которой они не касаются, пересекаются по кривой третьего порядка \mathcal{C} .

Три проективных пучка плоскостей с попарно скрещивающимися осями порождают кривую \mathcal{C} . Две квадрики, имеющие общую образующую, пересекаются, вообще говоря, по кривой \mathcal{C} .

Уравнение соприкасающейся плоскости кривой (52.1) имеет вид

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & t & 1 & 0 \\ x_2 & t^2 & 2t & 2 \\ x_3 & t^3 & 3t^2 & 6t \end{vmatrix} = x_0 t^3 - 3x_1 t^2 + 3x_2 t - x_3 = 0; \quad (52.3)$$

тангенциальные координаты этой плоскости

$$u_0 = t^3, \quad u_1 = -3t^2, \quad u_2 = 3t, \quad u_3 = -1. \quad (52.4)$$

Двойственным образом к кривой \mathfrak{C} будет снова эта кривая, рассматриваемая как совокупность своих соприкасающихся плоскостей. Уравнение

$$(x_0 y_3 - x_3 y_0) - 3(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \quad (52.5)$$

— это уравнение «нуль-системы», которая переводит кривую \mathfrak{C} в себя. Если P_j — точки пересечения некоторой плоскости \mathfrak{C} с кривой \mathfrak{C} , то соприкасающиеся плоскости в точках P_j пересекаются в точке, сопряженной плоскости \mathfrak{C} относительно этой нуль-системы. Для касательных к кривой \mathfrak{C} мы имеем

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} g_{01} = 1, & g_{02} = 2t, & g_{03} = 3t^2, \\ g_{23} = t^4, & g_{31} = -2t^3, & g_{12} = t^2, \end{matrix} \right) \quad (52.6)$$

где g_{ij} — плюккеровы координаты прямой, и

$$g_{03} - 3g_{12} = 0 \quad (52.7)$$

— уравнение линейного комплекса, которому принадлежат касательные к кривой \mathfrak{C} .

Теорема. *Через шесть точек P_j , из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости, проходит точно одна кривая \mathfrak{C} .*

Рассмотрим конус второго порядка \mathfrak{K}_0 с вершиной в точке P_0 , проходящей через остальные пять точек P_j , и второй такой же конус \mathfrak{K}_1 с вершиной в точке P_1 . Тогда эти конусы $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1$ пересекаются, кроме прямой $P_0 P_1$, еще по кривой третьего порядка \mathfrak{C} . Справедливо и соответствующее двойственное предположение.

Для двух касательных к кривой \mathfrak{C} мы имеем

$$(g_1 g_2) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 0 & 1 & 2t_2 & 3t_2^2 \end{vmatrix} = (t_1 - t_2)^4.$$

Отсюда следует для четырех касательных

$$\sqrt[4]{(g_0 g_1)(g_2 g_3)} + \sqrt[4]{(g_0 g_2)(g_3 g_1)} + \sqrt[4]{(g_0 g_3)(g_1 g_2)} = 0$$

или

$$(t_0 - t_1)(t_2 - t_3) + (t_0 - t_2)(t_3 - t_1) + (t_0 - t_3)(t_1 - t_2) = 0.$$

Для четырех прямых $g_j (j = 0, 1, 2, 3)$ можно определить, следуя Грассману (H. Grassman), двойное отношение по формуле

$$G = \frac{(g_0 g_1)(g_2 g_3)}{(g_0 g_2)(g_3 g_1)}.$$

§ 53. Кубическое кремоново преобразование

Рассмотрим отображение

$$x_j^* = \frac{1}{x_j} \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (53.1)$$

которое определено всюду, за исключением базисных точек и базисных плоскостей координатного репера. Каждая прямая g , которая не пройдет через базисные точки и не лежит в базисных плоскостях, переводится преобразованием (53.1) в кривую третьего порядка. В самом деле, возьмем, например, плоскость

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad \text{где } a_j \neq 0,$$

проходящую через прямую g и точку $F_0 = (1, 0, 0, 0)$. При преобразовании (53.1) она переходит в конус

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$$

с вершиной в P_0 . Два таких конуса пересекаются по кривой третьего порядка \mathcal{C} . Эта кривая проходит через все четыре базисные точки. Обратно, каждой кривой третьего порядка, проходящей через четыре базисные точки, соответствует прямая. Если кривая \mathcal{C} проходит только через три из этих четырех точек, то ей соответствует другая кривая третьего порядка \mathcal{C}^* , проходящая через те же базисные точки. Если, например, кривая \mathcal{C} проходит через точки P_1, P_2, P_3 , то она проектируется из точки P_1 при помощи конуса

$$a_{00} x_0^2 + 2a_{02} x_0 x_2 + 2a_{03} x_0 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0.$$

а этому конусу соответствует снова конус

$$a_{00} x_2^* x_3^* + 2a_{02} x_0^* x_3^* + 2a_{03} x_0^* x_2^* + 2a_{23} x_0^{*2} = 0$$

с вершиной в точке P_2 . То же самое будет верно и для конуса с вершиной P_3 , и оба новых конуса дадут в пересечении кривую \mathfrak{C}^* .

§ 54. Исключительная ткань \mathfrak{W}^6

Теперь мы можем установить, что отсутствие симметрии между семействами \mathfrak{S}_j при построении ткани \mathfrak{W}^6 в § 51 оказывается только кажущейся. А именно, если из пяти точек P_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) четыре первых мы возьмем в качестве базисных точек отображения (53.1), то связки $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ перейдут в себя, связка \mathfrak{S}_5 кривых третьего порядка \mathfrak{C} , проходящих через точки P_j , перейдет в связку прямых \mathfrak{S}_5^* , проходящих через точку P_4^* , а связка прямых \mathfrak{S}_4 с центром P_4 — в связку кривых третьего порядка с базисными точками $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4^*$. Таким образом, семейства \mathfrak{S}_4 и \mathfrak{S}_5 меняются ролями.

Отсюда видно, далее, что на семейства $\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}_k$ натягиваются попарно семейства поверхностей. Поэтому ткань \mathfrak{W}^6 действительно будет четырехугольной.

Спрашивается, можно ли ткань \mathfrak{W}^6 преобразовать (как в § 46) так, что симметрия или равноправие его шести семейств станет очевидной. Казалось бы, что самой простой такой тканью будет ткань \mathfrak{W}^6 , образованная шестью связками \mathfrak{S}_j кривых третьего порядка, каждая из которых состоит из кривых, проходящих через пять из шести заданных точек P_k ($k \neq j$). Однако можно увидеть, что эта \mathfrak{W}^6 эквивалентна ткани, образованной шестью пучками прямых. Предположим, что никакие четыре из точек P_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) не лежат в одной плоскости. Произведем сначала кремоново преобразование (53.1) с базисными точками P_0, P_1, P_2, P_3 . При этом связки \mathfrak{S}_j при $j = 0, 1, 2, 3$ перейдут опять в связки кривых третьего порядка \mathfrak{S}_j^* . Далее базисными точками связки \mathfrak{S}_j^* будут точки P_0, P_1, P_2, P_3 , за исключением P_j , и, кроме того, образы P_4^*, P_5^* точек P_4, P_5 . Напротив, семейства $\mathfrak{S}_4^*, \mathfrak{S}_5^*$ будут связка-

ми прямых с центрами P_5^* , P_4^* . Проведем второе преобразование (53.1) с базисными точками P_2 , P_3 , P_4^* , P_5^* . Тогда мы получим четыре связки прямых \mathfrak{S}_0^{**} , \mathfrak{S}_1^{**} , \mathfrak{S}_4^{**} , \mathfrak{S}_5^{**} с центрами P_1^* , P_0^* , P_5^* , P_4^* и две связки кривых третьего порядка \mathfrak{S}_2 и \mathfrak{S}_3 с базисными точками P_0^* , P_1^* , P_3 , P_4^* , P_5^* ; P_0^* , P_1^* , P_2 , P_4^* , P_5^* . Тогда достаточно провести третье преобразование (53.1) с базисными точками P_0^* , P_1^* , P_4^* , P_5^* , чтобы перевести все шесть семейств кривых в связки прямых.

§ 55. Ранг криволинейной ткани в пространстве

В заключение я хочу рассказать об исследовании, которое было проведено мною совместно с Вальберером (P. Walberer) в 1934 г. Результаты этих исследований кажутся мне примечательными вследствие их скрытой связи с алгебраической геометрией. Но методы наших исследований явно неудовлетворительны и могут быть улучшены.

Понятие «ранга», которое было введено в § 44 для криволинейных тканей на плоскости, может быть распространено также на криволинейные ткани в пространстве. Рассмотрим ткань \mathfrak{W}^3 , состоящую из семейств кривых \mathfrak{S}_j , которые мы будем считать заданными так:

$$u_j(x, y, z) = \text{const}, \quad v_j(x, y, z) = \text{const} \quad (55.1) \\ (j = 1, 2, 3).$$

При этом предположим, что в области регулярности \mathfrak{U} ткани \mathfrak{W}^3 определители второго порядка матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_j}{\partial x} & \frac{\partial u_j}{\partial y} & \frac{\partial u_j}{\partial z} \\ \frac{\partial v_j}{\partial x} & \frac{\partial v_j}{\partial y} & \frac{\partial v_j}{\partial z} \end{array} \right\| \quad (55.2)$$

нигде не обращаются одновременно в нуль и соответствующие направления dx_j , dy_j , dz_j попарно различны в каждой точке этой области.

Максимальное число линейно независимых соотношений (не связанных линейной зависимостью с постоянными

коэффициентами)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1k}(u_1, v_1) + \omega_{2k}(u_2, v_2) + \omega_{3k}(u_3, v_3) = \text{const} \\ (k = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \right\} \quad (55.3)$$

мы будем называть рангом ткани \mathfrak{W}^3 .

Следуя Пуанкаре, так же как в § 45, можно показать, что максимальный ранг всех \mathfrak{W}^3 равен 5: $p_0 = 5$.

Далее: все \mathfrak{W}^3 ранга $p = 5$ спрямляемы, т. е. существуют их прямолинейные модели. Эти модели будут алгебраическими и могут быть получены так: в проективном пространстве \mathbb{P}_4 четырех измерений возьмем «гиперповерхность» \mathcal{M}_3 третьего порядка, которая задается при помощи кубического уравнения, связывающего точечные координаты. Тогда в \mathbb{P}_4 имеется, вообще говоря, трехпараметрическое семейство \mathfrak{B}_3 плоскостей, каждая из которых пересекает \mathcal{M}_3 по трем прямым. Спроектируем полученную совокупность треугольников на некоторое пространство \mathbb{P}_3 и перейдем в нем к двойственной фигуре. Тогда мы получим искомую ткань \mathfrak{W}^3 .

Гиперповерхностью \mathcal{M}_3 третьего порядка в пространстве \mathbb{P}_4 , которая здесь встречается, обстоятельно занимался недавно скончавшийся Фано (G. Fano, 1871—1952). Я думаю, что было бы благодарной задачей выяснить глубокий смысл этой интересной связи между нашим учением о тканях и алгебраической геометрией.

Вместо соотношений вида (55.3) мы могли бы потребовать на нашей ткани \mathfrak{W}^3 обращения в нуль максимального числа форм Пфаффа

$$\sum_{j=1}^3 f_{jk}(u_j, v_j) du_j + g_{jk}(u_j, v_j) dv_j = 0 \quad (55.4)$$

или внешних форм второго порядка

$$\sum_1^3 h_{jk} [du_j dv_j] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p). \quad (55.5)$$

Возможно, что эти условия приведут к инвариантам, введенным Келлером (E. Kähler) в алгебраическую геометрию.

Таким образом, дальнейшая разработка учения о тканях и ее связях с алгебраической геометрией потребует больших усилий.

Об исследованных Рейдемейстером и Томсеном связях криволинейных тканей \mathfrak{W}^3 на плоскости с аксиоматикой проективной геометрии и теорией групп можно прочесть в книге автора «Проективная геометрия» (W. Blaschke, Projektive Geometrie, 3 Auflage, Basel, 1954). Наконец, о связях криволинейных тканей \mathfrak{W}^4 с алгебраической теорией тел вскоре появится работа Клингенберга (W. Klingenberg) в Трудах математического семинара Стамбула (Abhandlungen des mathematischen Seminars Stambul).

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель Н. Г. 29, 115, 121, 126
 Арф 89, 112
 Ауэ 113

Бакельман И. Я. 15
 Бельтрами Э. 76
 Бианки Л. 86
 Бляшке В. 7, 8, 9, 10, 33, 37,
 38, 118, 132, 140
 Боль Г. 7, 10, 11, 18, 32, 62,
 118, 124, 127, 129, 132, 133
 Бомпиани Э. 48
 Боровка О. 62
 Бурау В. 127, 128
 Бэкунд А. 48

Вальберер П. 139
 Варч Г. 113
 Ватсон 29
 Вейерштрасс К. 29
 Вейль Г. 69
 Вес инварианта 36, 50
 Виртингер В. 115, 124
 Вращение ткани 65
 Выпуклость области 14

Гаусс К. Ф. 32, 74, 76, 126
 Гессенберг Г. 69
 Гипоциклоида 28
 Градиент 82
 Грассман Г. 30, 137
 Граф Г. 26
 Гронвэлл Ф. 62, 110

Дарбу Г. 115, 124
 Дивергенция 83

Дифференциал внешний 31
 — Фробениуса и Картана 31
 Дифференцирование формы
 Пфаффа внешнее 31
 Доу А. 11, 115, 120, 128
 Драж И. 76
 Дюбурдые И. 42, 44
 2-ткань 131

Ецкан А. 12, 98

Зауэр Р. 26, 94

Инварианты 4-ткани 114

Каган В. Ф. 8, 76
 Картан Э. 32, 69, 71, 131
 Келлер Э. 32, 140
 Кельвин 69
 Клебш А. 29
 Клейн Ф. 9, 13
 Клингенберг В. 140
 Кольвиц Э. 75
 Кривая третьего порядка про-
 странственная 134
 — четвертого порядка первого
 рода 106
 Кривизна 36
 — полная 57
 — ткани 36, 81
 Кривые третьего класса 28

Лагранжи К. 12
 Леви-Чивита Т. 69
 Лемма Пуанкаре 32

- Лёхер 11
 Ли С. 48, 50, 115, 124, 131
 Либер А. Е. 8
 Либман Г. 48

 Майергофер К. 118
 Минковский Г. 45
 Модель проективная 117

 Номограмма 16
 — наилучшая 75
 Нормирование форм Пфаффа 118
 n -ткань криволинейная 114

 Операторы ткани дифференци-
 альные 33
 Отображение конформное 72
 — топологическое 13

 Перенесение параллельное 67
 Полуквадрика 98
 Преобразование кубическое кре-
 моново 137
 Произведение форм Пфаффа аль-
 тернированное 30
 — — внешнее 30
 Производная инвариантная 50
 Производные ткани инвариант-
 ные 81
 Пуанкаре А. 32, 115, 121, 124,
 129, 140
 Пфафф 30

 Разложение каноническое 52,
 102
 Ранг криволинейной ткани 139
 — максимальный 121
 — 4-ткани 120
 Рашевский П. К. 32, 104
 Рейдемейстер К. 118, 140
 Рейе Т. 94
 Рейс М. 48, 108, 124
 Риччи Г. 86
 Ротор 82

 Связность ткани 36, 43, 81
 Севери Ф. 11
 Серге Б. 32, 48

 Семейство диагональных по-
 верхностей 88
 — кривых 14
 Символы Кристоффеля 33, 81
 Соотношение Рейса 48
 Стокс 32
 Схоутен И. А. 69

 Тейксидор И. 11, 48, 50, 108
 Теорема Боля 124
 — Графа и Зауэра 27
 — Гронвэлла 62
 — Дюбурдые 43, 89
 — Зауэра 94
 — Майергофера и Рейдемейсте-
 ра 118
 — основная 129
 — Рейе 95
 — Рейса 48
 — Ферми 71
 — Шаля 26
 Ткань 14
 — Бурау 128
 — исключительная 138
 — октаэдрическая 90
 — правильная 19, 90
 — прямолинейная 44
 — спрямляемая 109
 — четырехугольная 131, 133
 — шестиугольная 19, 127
 — — пространственная 97
 — — прямолинейная 25
 Томсен Г. 11, 56, 140
 Трессе А. 131
 Треугольник соседний 19
 3-ткань 132
 — криволинейная 14

 Уитеккер 29
 Уравнение ткани 16, 90
 Условие замкнутости октаэдри-
 ческой ткани 91
 — интегрируемости 83
 — линейной зависимости форм
 Пфаффа 31

 Фано Г. 140
 Ферми Э. 71

- Финников С. П. 33
Финстервальдер С. 66
Фольк О. 76
Форма кривизны 81
Формула Гаусса 85
— Стокса 85
Формы Пфаффа комплексно-со-
пряженные 63
— — ткани 30
Фосс 86
Фробениус Г. 31
Функция Вейерштрасса 29
— опорная 46
— ткани 17
— — нормированная 59
- Хесель Э. 113
Хове Г. 117
- Шаль М. 26
Шварц Л. 15
Шефферс Г. 115, 124
Штейнер Я. 28
- Элемент нормированный поверх-
ности 36
Энгель Ф. 48, 50
- Ягер М. 112

