

И. И. ВЛЕХМАН

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ



МОСКВА «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1981

Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.— 352 с.

Синхронизация — замечательное свойство материальных объектов самой различной природы вырабатывать единый ритм совместного движения, несмотря на различие индивидуальных ритмов и на подчас весьма слабые взаимные связи. Синхронизируются маятниковые часы, органные трубы, небесные тела, электрические, электромагнитные и квантовые генераторы, возбудители механических колебаний в вибрационных устройствах, лопатки турбомашин, сообщества клеток и других элементов живых организмов, сами живые организмы в коллективах (жуки-светляки, птицы и рыбы в стаях, аплодирующие или марширующие люди).

Тенденция к синхронизации находит свое отражение в свойстве нелинейных дифференциальных уравнений определенного вида допускать устойчивые периодические решения. Эта тенденция, как одна из форм упорядоченного поведения, противоположна также существующей в динамических системах тенденции к неупорядоченному (стохастическому) поведению.

В книге описаны наиболее яркие проявления синхронизации и ее различные приложения. Дана общая формулировка задач, кратко (в основном без доказательств) изложен рабочий математический аппарат, приведены главные положения и результаты теории синхронизации, указаны некоторые нерешенные проблемы.

Книга предназначена для широкого круга специалистов, сталкивающихся с проблемами нелинейных колебаний, в частности, математиков, механиков, физиков, химиков, медиков, биологов. Она может быть использована аспирантами и студентами соответствующих специальностей.

Табл. 6, илл. 56, библи. 337.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к книге «Синхронизация динамических систем»	7
Предисловие	11
Введение	15
§ 1. Явления синхронизации в природе и в технике. Краткий обзор истории развития и современного состояния проблемы	15
§ 2. Общий взгляд на синхронизацию. Что понимать под тенденцией к синхронизации?	25
§ 3. Основные закономерности синхронизации	25
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ	
ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И ХАРАКТЕРИСТИКА ОСНОВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	
Глава 1. Общая постановка задач о синхронизации и их основные особенности	29
§ 1. Постановка задач о синхронизации; основные термины и определения	29
§ 2. Синхронизация слабо связанных объектов. Задачи о синхронизации, допускающие использование методов малого параметра	37
Глава 2. Общая характеристика математического аппарата теории синхронизации слабо связанных динамических объектов	41
§ 1. Методы малого параметра Пуанкаре и Ляпунова в задачах о синхронизации слабо связанных объектов	41
§ 2. О результативных соотношениях теории синхронизации слабо связанных объектов. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений	43
§ 3. О других математических методах решения задач о синхронизации слабо связанных объектов	48
ЧАСТЬ ВТОРАЯ	
СИНХРОНИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ	
Глава 3. Синхронизация механических вибровозбудителей	49
§ 1. О вибрационных машинах и устройствах	49
§ 2. Проблема синхронизации и фазировки вращения роторов механических вибровозбудителей	50
§ 3. Обнаружение, исследование и практическое использование явления самосинхронизации механических вибровозбудителей	52
§ 4. Самосинхронизация дебалансных вибровозбудителей в простейшей колебательной системе (основные соотношения)	54

§ 5. Общий анализ и различные формы записи основных соотношений задачи о самосинхронизации вибровозбудителей. Вибрационные моменты, парциальные угловые скорости	62
§ 6. Некоторые важные частные случаи	69
1. Случай двух вибровозбудителей. О явлении вибрационного поддержания вращения (69). 2. Случай почти одинаковых вибровозбудителей (73).	
§ 7. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений и тенденции вибровозбудителей к синхронизации. Некоторые существенные следствия	76
§ 8. Обобщения задачи о синхронизации вибровозбудителей	78
1. Описание системы и главные предположения (78). 2. Основные результирующие соотношения (82). 3. Случай квазилинейной колебательной системы. Выражения вибрационных моментов через гармонические коэффициенты влияния (88). 4. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений и тенденции вибровозбудителей к синхронизации (93). 5. Синхронизация вибровозбудителей на упруго опертом плоско колеблющемся твердом теле (95). 6. Режимы установления синхронных движений вибровозбудителей (100). 7. Другие обобщения задачи о синхронизации вибровозбудителей (краткий обзор исследований) (102).	
§ 9. Стабильность фазировки вращения роторов самосинхронизирующихся вибровозбудителей. Об относительной силе вибрационной связи между возбудителями	103
1. О понятии стабильности фазировки при самосинхронизации вибровозбудителей (103). 2. Случай симметричной схемы с двумя возбудителями (104). 3. Нормирование и способы повышения стабильности (108). 4. Об относительной силе вибрационной связи между возбудителями (110). 5. Об исследовании стабильности в более сложных случаях (110).	
§ 10. Практическая методика исследования устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями; примеры, сводка некоторых результатов	111
1. О методике исследования устройств с самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями (111). 2. Примеры исследования самосинхронизации вибровозбудителей (114). 3. Сводка условий устойчивости важнейших синхронных движений вибровозбудителей в некоторых колебательных системах (117).	
§ 11. О синтезе вибрационных машин с несколькими механическими возбудителями колебаний	134
1. Проблема создания заданного вибрационного поля и задачи синтеза системы возбуждения (134). 2. О синтезе системы возбуждения с использованием явления самосинхронизации. Два способа изменения устойчивой фазировки возбудителей (137). 3. О способах принудительной синхронизации и о синтезе соответствующих устройств (140).	
§ 12. Вибрационное поддержание и захватывание вращения неуравновешенного ротора. Выражения для модуля вибрационного момента и эффективной амплитуды колебаний оси ротора	142
§ 13. Экспериментальное подтверждение и исследование эффектов самосинхронизации вибровозбудителей и вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора	150
§ 14. Основные закономерности и парадоксы самосинхронизации вибровозбудителей	156
1. Тенденция дебалансных вибровозбудителей к синхронизации, вибрационное поддержание вращения (156). 2. Эффект усреднения парциальных скоростей (157). 3. Эффект передачи больших мощностей (157). 4. Установление определенных соотношений между фазами движения инерционных элементов возбудителей (158). 5. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений (158). 6. Эффект взаимного уравнивания (принцип минимума средней кинетической энергии) при установке возбудителей на мягко амортизированном твердом теле (обобщенный принцип Лавалья) (158). 7. Парадокс неработающих связей (159). 8. Зависимость характера устойчивой фазировки возбудителей от числа степеней свободы системы связи (160). 9. Парадокс принуждения (160). 10. Зависимость характера устойчивой фазировки от числа возбудителей (160). 11. Ухудшение условий самосинхронизации и вибрационного поддержания вращения для кратно-синхронных режимов (160).	

§ 15. Практическое использование явления самосинхронизации вибровозбудителей и эффекта вибрационного поддержания вращения	161
1. Создание нового класса вибрационных машин и устройств (161).	
2. Приложение к проектированию групповых фундаментов под неуравновешенные машины (169).	

Глава 4. Синхронизация объектов, родственных механическим вибровозбудителям	172
§ 1. Предварительные замечания	172
§ 2. Автобалансир	172
§ 3. Ротор с маятниковыми подвесками	180
§ 4. Вращающийся гибкий вал с неуравновешенными дисками	186
§ 5. Сепараторы подшипников качения	193

Глава 5. Синхронизация объектов типа маятниковых часов	201
§ 1. Взаимная синхронизация маятниковых часов на упруго опертой платформе (задача Гюйгенса)	201
§ 2. Случай почти одинаковых часов	207
§ 3. Некоторые основные закономерности самосинхронизации маятниковых часов, их отличие от закономерностей самосинхронизации неуравновешенных роторов (вибровозбудителей)	210
§ 4. О синхронизации колебаний лопаток турбомашин	211

Глава 6. Синхронизация в электротехнике, радиотехнике и радиофизике	212
§ 1. Синхронизация при параллельной работе электрических машин	212
§ 2. Синхронизация ламповых и полупроводниковых генераторов	216
1. Краткий обзор развития и состояния проблемы (216). 2. Генераторы томсоновского типа (квазилинейные автогенераторы Ван-дер-Поля) (218). 3. Релаксационные генераторы (222). 4. Приложения синхронизации генераторов. О системах фазовой автоподстройки частоты (223).	
§ 3. Синхронизация квантовых генераторов	224
§ 4. Синхронизация в распределенных системах и ее приложения	225

Глава 7. Явления синхронизации при движении небесных тел	228
§ 1. О замечательных целочисленных соотношениях между периодами обращений и вращений небесных тел и их истолковании с позиций теории синхронизации	228
§ 2. Потенциальная функция и интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений для небесномеханических орбитальных систем	230
§ 3. Случай плоской точечной орбитальной системы. Сопоставление результатов с данными некоторых астрономических наблюдений и вычислений	233
§ 4. О тенденции к синхронизации в рассмотренных системах. Роль диссипативных сил	241
§ 5. О гипотезе А. М. Молчанова	242

Глава 8. Явления синхронизации в химии, биологии и медицине	245
§ 1. Ритмы и цикличность в природе	245
§ 2. Явления синхронизации в химических, биохимических и биологических системах	247
§ 3. Некоторые нерешенные проблемы и относящиеся к ним гипотезы (о телепатии и проблеме рака)	254
§ 4. Заключение	259

Глава 9. Синхронизация и некоторые физические проблемы	260
§ 1. Стохастичность и синхронизация — два полярно противоположных вида поведения динамических систем	260
§ 2. О возможной роли явлений синхронизации в микромире	264
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ	
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ	
Глава 10. Теоремы о существовании и устойчивости периодических и синхронных решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр (методы Пуанкаре и Ляпунова)	263
§ 1. Предварительные замечания. О методах Пуанкаре и Ляпунова в теории периодических решений	263
§ 2. Квазилинейные неавтономные системы	268
§ 3. Квазилинейные автономные системы	272
§ 4. Неавтономные системы, близкие к произвольным нелинейным	274
§ 5. Автономные системы, близкие к произвольным нелинейным	276
§ 6. Системы, близкие к произвольным нелинейным в случае квазипериодического семейства порождающих решений	278
§ 7. Дополнительные замечания к теоремам §§ 2—6	283
§ 8. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) периодических и синхронных движений	286
§ 9. О наличии устойчивых периодических или синхронных движений (тенденции к синхронизации) в случае периодической потенциальной функции и в некоторых других случаях	292
Глава 11. О некоторых других методах решения задач о синхронизации слабо связанных динамических объектов	296
§ 1. Предварительные замечания	296
§ 2. Асимптотические методы и принцип усреднения	296
§ 3. Метод прямого разделения движений	299
§ 4. Метод точечных отображений	304
§ 5. Стробоскопический метод Н. Минорского	307
§ 6. Вариационный метод А. Н. Лурье	309
Глава 12. Синхронизация некоторых основных классов динамических объектов	311
§ 1. Предварительные замечания	311
§ 2. Общий случай слабо связанных объектов	311
1. Задача о внешней синхронизации (311). 2. Задача о внутренней синхронизации (314).	
§ 3. Квазилинейные объекты с одной степенью свободы (квазилинейные осцилляторы)	314
§ 4. Системы с почти равномерными вращательными движениями	316
§ 5. Квазиконсервативные объекты	320
§ 6. Орбитальные системы	327
1. Определение орбитальных систем; свободные и несвободные (каркасные) орбитальные системы, их синхронизация (327). 2. Несвободная орбитальная система со слабо взаимодействующими простейшими несомыми телами. Основное вариационное соотношение и пример его использования (329).	
§ 7. О тенденции к синхронизации в рассмотренных динамических системах	335
Литература	336

Доброй памяти моих издателей и наставников Николая Адриановича Талицких и Георгия Абрамовича Вольперта — самоотверженных людей, посвятивших себя становлению отечественной литературы по механике.

Автор

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К КНИГЕ «СИНХРОНИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ» *)

В настоящей книге делается попытка систематического изложения фактов и результатов, относящихся к быстро развивающейся области науки и техники — синхронизации динамических систем.

Грубо говоря, синхронизацию можно определить как свойство материальных объектов самой различной природы вырабатывать единый ритм совместного существования, несмотря на различие индивидуальных ритмов и на подчас крайне слабые взаимные связи. Это удивительное свойство, заслуживающее, как нам представляется, обсуждения с философских позиций, находит свое отражение в свойстве нелинейных дифференциальных уравнений некоторого определенного вида допускать устойчивые периодические решения.

Синхронизация, по-видимому, представляет собой одну из форм самоорганизации материи, и поэтому с определенной точки зрения изучаемую проблему можно рассматривать как относящуюся к кибернетике.

Нет ничего странного в том, что два вала, связанные парой одинаковых зубчатых колес, вращаются с одинаковыми угловыми скоростями — это синхронизация посредством «сильных», жестких связей.

Однако когда, например, двое маятниковых часов, ходивших по-разному, начинают ходить совершенно одинаково (синхронно), если их подвесить к общей подвижной балке, вместо стены,

*) См. [57].

то это воспринимается как парадокс. Здесь синхронизация осуществляется посредством «слабой» связи — едва заметных колебаний балки. (Говорят, что этот эффект, описанный Гюйгенсом еще в начале второй половины семнадцатого столетия, недобросовестные часовщики не раз использовали для обмана доверчивых клиентов.)

Тенденция к синхронизации при наличии слабых связей свойственна очень многим техническим объектам, например близко расположенным органным трубам, неуравновешенным машинам, размещенным на общем фундаменте, электрическим генераторам, работающим на общую нагрузку; она характерна и для жизнедеятельности живых организмов.

С момента опубликования Гюйгенсом его знаменитых мемуаров прошло более трехсот лет. В настоящее время явление синхронизации широко используется в технике, например в электро- и радиотехнических устройствах и в вибрационных машинах; оно объясняет также своеобразие поведения ряда биологических систем.

В различных изданиях, особенно за последние годы, опубликовано много статей, посвященных отдельным частным задачам теории синхронизации. Однако данная книга представляет собой, по-видимому, первую попытку изложения различных аспектов проблемы синхронизации с единой точки зрения.

Автор стремился прежде всего подчеркнуть общность явлений синхронизации объектов самой различной природы. Понимание этой общности, возможно, будет способствовать тому, чтобы достижения в одной из областей стали достоянием других областей.

В книге почти не затронут весьма интересный и важный вопрос о синхронизации объектов при наличии случайных воздействий; этот пробел в определенной мере восполняется монографией А. Н. Малахова [181].

Автору приятно, что излагаемое в книге учение о синхронизации оптимистично: оно подчеркивает наличие в окружающем нас мире ярко выраженных тенденций к градации и порядку, а не только противоположных тенденций, существование которых отражается, например, вторым началом термодинамики. Хотелось бы надеяться, что недостатки изложения не помешают

читателям испытать то же чувство восторженного удивления перед любопытнейшими закономерностями явлений синхронизации, которое было испытано автором в процессе работы над проблемой.

Несколько слов о терминологии. Под *синхронизацией* (а также *взаимной*, или *внутренней*, *синхронизацией*) мы понимаем здесь наиболее общий случай, когда определенные частотные соотношения устанавливаются в результате взаимодействия объектов, рассматриваемых как равноправные. В идеализированном же случае, когда один из объектов считается настолько мощным, что он навязывает свой ритм движения (предполагаемый заранее заданным и неизменным) другим автоколебательным объектам, будем говорить о явлении *захватывания*, или о *внешней синхронизации*, причем первый термин будем употреблять в случае одного синхронизируемого объекта. Отметим, что в литературе, говоря о синхронизации, часто имеют в виду только захватывание. Отличная от используемой здесь терминология сложилась и в небесной механике, а отчасти также в электротехнике.

Интерес автора к работе над проблемами синхронизации вибровозбудителей пробудил изобретатель, исследователь и конструктор вибрационных машин Д. А. Плисс, Г. А. Финкельштейн поддержал эти исследования на том этапе, когда их прикладное значение было далеко не очевидным. Б. Н. Лавров воплотил в реальные конструкции ряд туманных мыслей автора в области синхронизации вибровозбудителей, а затем выдвинул и осуществил много собственных плодотворных идей.

Большое значение для автора имела возможность постоянного общения со своими учителями А. И. Лурье и Г. Ю. Джанелидзе, а также частые беседы с Я. Г. Пановко.

Существенное влияние на характер и содержание ряда разделов книги оказал непрерывный творческий контакт с ведущими конструкторами и исследователями вибрационных машин: Э. А. Аграновской, И. И. Быховским, Г. А. Денисовым, Б. Н. Дубровиным, В. В. Дубровиным, А. И. Макаровым, Р. Ф. Нагаевым, Г. И. Николенко, В. А. Олевским, А. Д. Рудиным, К. А. Рундквистом, А. К. Рундквистом, О. А. Савиновым, К. Ш. Ходжаевым.

Руководители института «Механобр» неизменно интересовались исследованиями по синхронизации вибровозбудителей и по мере возможности поддерживали соответствующие разработки.

Значительную помощь в подготовке публикаций, лежащих в основе книги, оказал Н. А. Талицких.

Много ценных замечаний сделал редактор книги М. З. Колковский.

Всем этим лицам автор выражает свою глубокую благодарность.

Ленинград
4 ноября 1969 г.

И. И. Блехман

ПРЕДИСЛОВИЕ

Идеей написать эту книгу автор обязан Г. А. Вольперту, посоветовавшему изложить основные результаты книги «Синхронизация динамических систем» [57] в форме, более компактной и более доступной для широкого круга специалистов, работающих в областях техники и науки, где может встретиться явление синхронизации. Однако после выхода в свет указанной книги прошло почти десять лет, в течение которых рядом исследователей были получены важные конкретные результаты; углубилось и общее понимание синхронизации как своеобразного явления. Речь идет прежде всего о следующем.

1. Получила значительное развитие общая теория синхронизации динамических объектов. В частности, нашла дальнейшие подтверждения мысль о том, что тенденция к синхронизации является общим свойством объектов самой различной природы. Эта тенденция, как одна из форм упорядоченного поведения, противоположна также существующей в динамических системах тенденции к стохастическому поведению.

С одной стороны, установлен класс слабо связанных динамических объектов, для которых имеет место тенденция к синхронизации; доказана возможность устойчивой синхронизации в системах с очень большим числом однотипных объектов. С другой стороны, показано, что вопреки существовавшим ранее представлениям стохастическое поведение может осуществляться в системах невысокого порядка (начиная с третьего) и в сравнительно широких областях изменения параметров.

2. Дальнейшее развитие получили математические методы теории синхронизации.

3. Установлен ряд новых существенных фактов и получены новые результаты, относящиеся к проявлениям синхронизации в различных областях техники и науки; найдены новые приложе-

ния теории синхронизации. Важность этих результатов несколько не умаляется утверждением об общности явлений синхронизации, ибо эти явления для каждого класса технических или природных объектов имеют свои яркие индивидуальные особенности.

Все эти достижения последних лет нашли определенное отражение в данной книге. В частности, в ней содержатся следующие новые элементы:

1. Сделана попытка определить понятие тенденции к синхронизации в динамических системах.

2. Показано, что тенденция к синхронизации в смысле этого определения свойственна очень широкому классу динамических систем — системам с так называемой периодической (или квазипериодической) квазипотенциальной функцией, обладающей свойством m -грубости. К таким системам при достаточно общих предположениях относятся, например, орбитальные системы, частными случаями которых являются системы с механическими вибровозбудителями, а также более сложные системы, встречающиеся в небесной механике и физике.

3. Сформулирован и проиллюстрирован на ряде примеров принцип динамического самоуравновешивания систем с вращающимися массами, который можно рассматривать как весьма широкое обобщение известного принципа уравнивания диска, вращающегося на гибком валу (принципа Лавалья). Указанный общий принцип вытекает как следствие из так называемого интегрального критерия устойчивости (экстремального свойства) синхронных движений.

4. Показано, что общие результаты теории синхронизации, в частности упомянутое выше экстремальное свойство синхронных движений, приложимы для объяснения и описания замечательных целочисленных («резонансных») соотношений, наблюдаемых между угловыми скоростями вращений и обращений небесных тел, а также для объяснения и предсказания направления эволюции их движений.

5. Значительно переработано и, как представляется, упрощено и улучшено изложение теории синхронизации механических вибровозбудителей, в частности важного вопроса о стабильности рабочего режима устройств, в которых используется явление самосинхронизации.

6. Значительно расширено изложение вопросов синхронизации в биохимических и биологических системах.

Книга состоит из трех частей.

В краткой первой части дается постановка общей задачи о синхронизации динамических систем, вводятся главные понятия и определения, а также поясняется смысл результативных соотношений теории синхронизации слабо связанных объектов, вытекающих из исследования дифференциальных уравнений.

Ознакомившись с первой частью, читатель, интересующийся конкретными приложениями, может обратиться к соответствующему разделу основной второй части, которая посвящена изложению закономерностей синхронизации различных технических и природных объектов. Специалист же в области теории колебаний (математик, физик, механик) может избрать путь «от общего к частному», чему соответствует переход от чтения первой части к третьей, и лишь затем — ко второй.

В третьей части книги излагаются математические методы, применяемые при решении задач теории синхронизации. Здесь же приведены основные результаты общей теории синхронизации слабо связанных динамических объектов: рассмотрена синхронизация некоторых основных классов таких объектов, выделенных по характеру соответствующих дифференциальных уравнений и по свойствам их решений. Как и в книге [57], основное внимание уделяется методам малого параметра Пуанкаре и Ляпунова. Однако в отличие от указанной книги здесь не приводятся доказательства математических теорем, но зато изложены также и многие другие методы, эффективные при решении задач о синхронизации.

Во второй части книги наиболее подробно рассматривается теория синхронизации механических вибровозбудителей и ряда подобных им объектов. Это объясняется не только интересами и знаниями автора, но также и тем, что вибровозбудители являются в настоящее время едва ли не единственными объектами механической природы, синхронизация которых уже получила важное практическое применение, выразившееся в создании нового класса вибрационных машин. Кроме того, разработка теории самосинхронизации вибровозбудителей дала значительный толчок развитию общей теории синхронизации.

В книге принята сквозная нумерация глав и нумерация параграфов по главам. При этом нумерация формул указывает лишь на номер параграфа (первая цифра) и на номер формулы (вторая цифра). Если ссылка делается на формулу внутри главы, то номер главы не указывается; это делается лишь при ссылках на формулы других глав.

Настоящая книга готовилась к печати, когда ушел из жизни член-корреспондент АН СССР Анатолий Исакович Лурье, всегда живо интересовавшийся проблемами синхронизации. Результатом этого интереса явился его замечательный доклад на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям [175], частично изложенный в данной книге, а также обстоятельная рецензия [176] на книгу [57]. Автор навсегда сохранит чувство благодарности и благодарности к Анатолию Исаковичу — выдающемуся механику и человеку, своему учителю и учителю своих учителей.

Неоднократно обращал внимание на интереснейшие проявления синхронизации при движении небесных тел безвременно ушедший от нас блестящий инженер и талантливый ученый Ю. Л. Гранат. В дальнейшем интересе автора к небесномеханическим проблемам неизменно способствовали беседы с В. В. Белецким и его яркие публикации.

Ряд замечаний по книге [57] сделал О. П. Барзуков, а по рукописи данной книги — П. С. Ланда и П. С. Чудинов. Автор глубоко признателен им за доброжелательное внимание

Ленинград
4 ноября 1979 г.

И. И. Блезман

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Явления синхронизации в природе и в технике. Краткий обзор истории развития и современного состояния проблемы

Явление синхронизации состоит в том, что несколько искусственно созданных или природных объектов, совершающих при отсутствии взаимодействия колебательные или вращательные движения с различными частотами (угловыми скоростями), при наличии подчас весьма слабых взаимодействий начинают двигаться с одинаковыми, кратными или соизмеримыми частотами (угловыми скоростями), причем устанавливаются определенные фазовые соотношения между колебаниями и вращениями *).

По-видимому, первое наблюдение и описание частного случая синхронизации — *взаимной синхронизации маятниковых часов* — принадлежит Христиану Гюйгенсу, который еще в начале второй половины семнадцатого столетия обнаружил, что пара часов, ходивших по-разному, самосинхронизировалась, когда их прикрепляли к легкой балке вместо стены. В одном из своих мемуаров [110] Гюйгенс следующим образом описывает сделанное им во время одного из плаваний наблюдение.

«Маятник этих часов имел длину 9 дюймов и груз полфунта. Механизм приводился в движение гириями, заключенными в ящик вместе с механизмом. Длина ящика была 4 фута. Внизу он был отягчен по крайней мере 100 фунтами свинца, чтобы весь механизм возможно лучше сохранял на судне вертикальное положение. С этими часами было сделано следующее чрезвычайное интересное наблюдение.

Двое таких часов висели на одной и той же балке, покоящейся на двух опорах. Оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что

*) В некоторых случаях объекты при отсутствии взаимодействия не могут совершать установившихся колебаний или вращений, а при наличии взаимодействия совершают синхронные колебания или вращения (см., например, § 6 гл. 3, § 2 гл. 6 и § 2 гл. 8).

никогда ни на сколько не расходились. Тикание обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если искусственно нарушалось это совпадение, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы

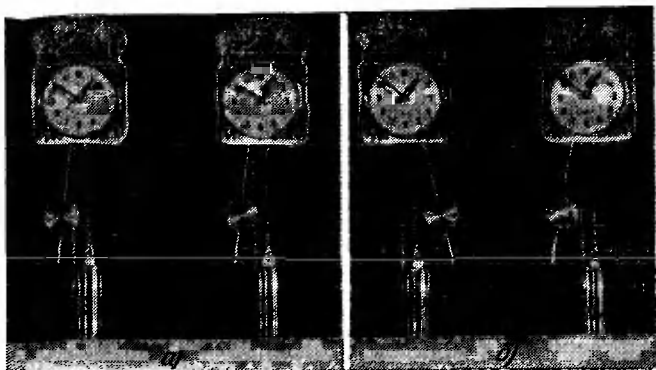


Рис. 1.

тяжелы они не были. А это движение передается балке, и если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был бы с самого начала очень однороден и согласован между собой».

Примечательно, что это удивительное по точности и глубине описание сделано в эпоху, когда еще не были точно сформулированы основные законы механики. Естественно, однако, что количественного исследования открытого явления Гюйгенс выполнить не мог.

На рис. 1 представлен фотоснимок часов, сделанный в ходе воспроизведения опыта Гюйгенса в ленинградском институте «Механобр». Как видно, устойчивым может быть не только наблюдавшееся Гюйгенсом противофазное движение часов (рис. 1, б), но также и синфазное движение (рис. 1, а). Теория взаимной синхронизации маятников разработана сравнительно недавно в работах Н. Минорского [194], автора [42], Ю. И. Марченко и автора [60] (см. гл. 5).

Синхронизацию в акустических и электроакустических системах обнаружил Рэлей в конце XIX века. Наблюдая две орган-

ные трубы с расположенными рядом отверстиями, он установил, что при достаточно малой расстройке они звучат в унисон, т. е. происходит взаимная синхронизация обеих автоколебательных систем. Иногда при этом трубы могут заставить почти полностью «замолчать» одна другую.

Аналогичное явление было обнаружено Рэлеем и для двух камертонов с электромагнитным возбуждением, связанных между собой либо электрически, либо механически — при помощи упругой нити, — либо, наконец, посредством резонаторного ящика [262].

В конце предыдущего — начале текущего столетия были открыты явления синхронизации в электрических цепях и в некоторых электромеханических системах. Прикладное значение самосинхронизации электрических генераторов, работающих на общую нагрузку, трудно переоценить. Действительно, несмотря на наличие достаточно точных регуляторов, частоты, на которых работают отдельные не связанные генераторы, несколько отличаются одна от другой. Если бы общая нагрузка, на которую работают генераторы, не являлась синхронизирующим фактором, то различие частот неизбежно приводило бы к биениям — длиннопериодическим колебаниям напряжения в общей сети (возможно читателю приходилось наблюдать такие колебания света, даваемого лампочками, питаемыми от нескольких маломощных генераторов, при разного рода «сбоях» — выпадениях из синхронизма).

По теории и практике синхронизации электрических генераторов в настоящее время имеется обширная литература (см., например, обзоры в работах [136, 137, 253], а также гл. 5), хотя проблему нельзя считать окончательно решенной ввиду ее крайней сложности: до сих пор известны случаи выпадения генераторов из синхронизма, приводящие иногда к серьезным авариям.

Важное практическое значение имеет также синхронизация генераторов электрических и электромагнитных колебаний в радиотехнике и радиофизике. Теория синхронизации таких генераторов — квазилинейных, генерирующих колебания, близкие к гармоническим, и релаксационных, генерирующих существенно негармонические колебания, начала развиваться в первых десятилетиях текущего века в классических исследованиях Ван-дер-Поля [334—336], Эпплтона [305], А. А. Андропова и А. А. Витта [6—10]; эти исследования сыграли важную роль в развитии теории нелинейных колебаний*). В указанных работах рассматривался простейший вырожденный случай синхронизации — за-

*) Заметим, что задачи теории синхронизации, если не говорить о явно вырожденных случаях, являются существенно нелинейными.

хватывание. Первые работы по взаимной синхронизации квазилинейных генераторов принадлежат А. Г. Майеру [179, 319] и В. И. Гапонову [98], а релаксационных генераторов — А. С. Бремзену и И. С. Файнбергу [73]. В настоящее время теория синхронизации генераторов, особенно квазилинейных, может считаться достаточно хорошо развитой. Обзоры многочисленных исследований в этой области, широко используемых при создании важных устройств и приборов, можно найти, например, в книгах [171, 181, 247].

Особый и важный в практическом отношении случай представляет собой синхронизация «собственных волн» (мод) в распределенных системах, когда волны с частотами, близкими к соизмеримым, синхронизируются и согласуются по фазам вследствие разного рода слабых взаимодействий [27, 92, 169, 170, 274]. Синхронизация мод в лазерах находит важное применение при создании весьма мощных импульсов света [92, 170]. Впрочем иногда с такой синхронизацией приходится бороться как с вредным явлением, создающим помехи при работе приборов [92, 274].

С синхронизацией электрических генераторов и генераторов электромагнитных колебаний до недавнего времени были связаны главные технические приложения синхронизации.

Положение изменилось после того как в 1947—48 гг. в СССР, в ленинградском институте «Механобр», в результате случайного обстоятельства было обнаружено явление *самосинхронизации механических вибровозбудителей*, установленных на одном вибрирующем органе [232]; через несколько лет — в 1950—56 гг. — появились первые публикации (в виде патентных описаний) и за рубежом [327, 328]. Оказалось, что такие возбудители, представляющие собой в простейшем случае неуравновешенные роторы, приводимые от каких-либо двигателей асинхронного типа, при определенных условиях работают синхронно, несмотря на возможное различие параметров и на отсутствие каких-либо кинематических или электрических связей между их роторами. (См. рис. 2; на рис. 2, а показан обычный способ синхронизации с помощью зубчатых колес, а на рис. 2, б — с использованием самосинхронизации.)

Во многих случаях тенденция вибровозбудителей к синхронному вращению столь сильна, что это вращение не нарушается даже после выключения из сети одного или нескольких двигателей. Именно такое обстоятельство, возникшее вследствие случайного обрыва провода, и послужило поводом к обнаружению эффекта самосинхронизации вибровозбудителей (см. § 3 гл. 3). Речь идет о явлении *вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора*, представляющего собой предельный частный случай явления синхронизации вибровозбудителей.

Примечательно, что понадобилось около трехсот лет для того, чтобы эффект самосинхронизации, открытый Гюйгенсом для колебаний маятников, был обнаружен (и притом случайно) для вращений неуравновешенных роторов. Объяснить этот факт можно лишь тем, что еще не существовало представления об универсальности явлений синхронизации — такое представление выработалось в последующие годы в значительной степени как раз под влиянием обнаружения эффекта самосинхронизации вибровозбудителей и некоторых других объектов.

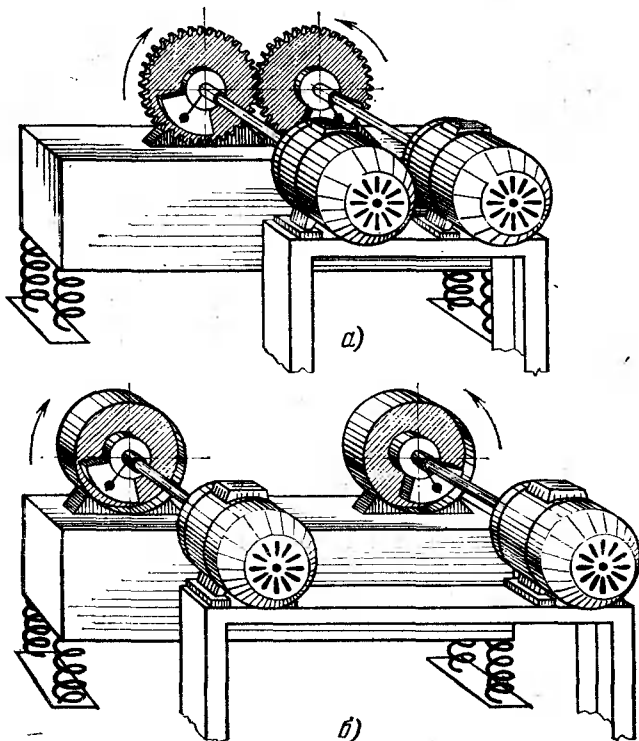


Рис. 2.

Первое теоретическое объяснение и исследование явления самосинхронизации вибровозбудителей [31] относится к 1953 г. В настоящее время теория самосинхронизации и принудительной синхронизации вибровозбудителей детально разработана и является достаточно надежной основой для создания новых вибрационных машин. Значение этой теории определяется тем, что основные закономерности синхронизации вибровозбудителей во многом парадоксальны (см. § 14 гл. 3), и поэтому возмож-

ность использования эффекта самосинхронизации в том или ином устройстве, как правило, не может быть предсказана путем интуитивных соображений — здесь требуются теоретический анализ и расчет.

Такой анализ удастся облегчить благодаря установленному и доказанному в работах [40, 41] так называемому *интегральному критерию устойчивости* (экстремальному свойству) *синхронных движений*. В силу этого критерия фазы вращения роторов возбуждителей в устойчивых синхронных движениях соответствуют точкам минимума некоторой функции этих фаз, названной *потенциальной функцией* и играющей, таким образом, ту же роль, что и потенциальная энергия в задачах о равновесии механических систем. В простейших, но часто встречающихся случаях потенциальная функция оказывается равной среднему значению функции Лагранжа колебательной части системы, вычисленной в надлежащем приближении. Значение интегрального критерия состоит также в том, что с его помощью удастся в общей форме доказать наличие тенденции к синхронизации для широкого класса систем с вибровозбудителями.

Работы по теоретическому и экспериментальному исследованию, а также по практическому использованию эффекта самосинхронизации вибровозбудителей были начаты в институте «Механобр» с момента обнаружения этого явления в 1947—48 гг.; позднее к этим работам подключились и другие исследователи и коллективы. Зарубежные публикации о подобных исследованиях появились значительно позднее, в начале шестидесятых годов [307, 320, 323, 329, 330]. В настоящее время указанные работы привели к созданию нового класса вибрационных машин и устройств — грохотов, конвейеров, питателей, мельниц, дробилок, флотомашин, станков и многих других, широко применяемых в ряде производств. Имеется более ста изобретений в которых используется эффект самосинхронизации вибровозбудителей, причем это число непрерывно возрастает.

Возможность широкого практического использования эффектов самосинхронизации вибровозбудителей и вибрационного поддержания вращения во многом определяется тем, что при реальных значениях параметров от одного возбудителя к другому могут передаваться весьма значительные мощности (порядка тысячи киловатт и более; см. § 14 гл. 3); этот устанавливаемый теоретически факт полностью подтвержден экспериментально.

Существует случай, когда самосинхронизация вибровозбудителей, размещенных на общем основании, может оказаться вредной и даже приводить к аварийным ситуациям. Речь идет об установке нескольких неуравновешенных машин на так называемом групповом фундаменте. Если самосинхронизация будет

характеризоваться синфазным или близким к таковому движением машин, при котором отдельные неуравновешенности складываются, то это как раз и может иметь нежелательные последствия. С другой стороны, и здесь при надлежащем расчете и проектировании группового фундамента можно обеспечить режим самосинхронизации со взаимной компенсацией неуравновешенных сил и моментов, генерируемых отдельными машинами, и тем самым значительно уменьшить уровень колебаний фундамента.

Возможность и устойчивость таких компенсирующих фазировок при самосинхронизации лежат также в основе работы ряда автоматических балансировочных устройств, аналогичных системам с вибровозбудителями (см. гл. 4). Дело в том, что как для возбудителей, так и для неуравновешенных машин на групповом фундаменте и для автобалансиров оказывается справедливым принцип, который можно рассматривать как обобщение известного принципа Лаваля динамической автобалансировки диска на гибком валу в закритической области. Справедливость указанного обобщенного принципа легко вытекает из упомянутого интегрального критерия устойчивости.

Работы по теории и приложениям синхронизации вибровозбудителей, выполненные до 1970 г., суммированы в книге [57]; дополняющий обзор с учетом более поздних исследований приведен в п. 7 § 8 гл. 3.

Ярким примером синхронизации природных объектов являются замечательные *целочисленные соотношения между средними угловыми скоростями вращений и обращений (орбитальных движений) небесных тел**). Простейшая закономерность такого рода известна с незапамятных времен: Луна обращена к Земле всегда одной стороной своей поверхности (см. рис. 3), что свидетельствует о равенстве средних угловых скоростей Луны в осевом и орбитальном движении (резонанс типа 1:1, как говорят в небесной механике). Дж. Д. Кассини в 1693 г. впервые сформулировал законы вращения Луны, отражающие не только указанную закономерность, но и синхронизацию (резонанс) того же типа между движением оси вращения Луны и возмущенной прецессией ее орбиты. В настоящее время известно много таких

*) В работах по небесной механике и в ряде математических исследований сложилась традиция говорить в этих случаях о *резонансных соотношениях*, просто о *резонансах* или об *острой соизмеримости средних движений* (см. § 1 гл. 1. а также гл. 7), тогда как в общей теории колебаний, машиностроении, электро- и радиотехнике пользуются термином *синхронизация*, а под резонансом понимают усиление вынужденных колебаний в определенных диапазонах изменения частоты вынуждающей силы. Принятое в настоящей книге последнее словоупотребление соответствует международным рекомендациям по терминологии (см., например, рекомендации СЭВ 5.301-75).

(и более сложных) соотношений между наблюдаемыми «средними движениями» небесных тел. Так, например, в результате обработки данных радиолокации Меркурия и Венеры найдено, что период обращения Меркурия (≈ 88 суток) относится к периоду его вращения (59 суток) как 3:2, а угловые скорости обращения Земли и Венеры ω_z и ω_v связаны с угловой скоростью вращения

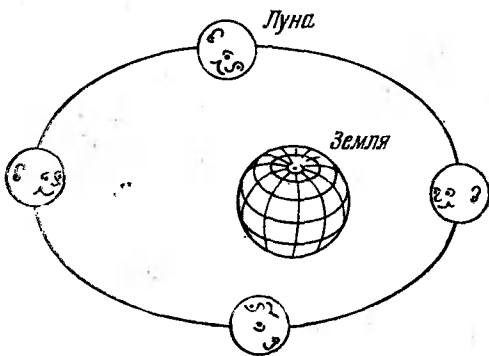


Рис. 3.

Венеры вокруг своей оси Ω соотношением $\Omega = 4\omega_v - 5\omega_z$; последнее соотношение соответствует тому факту, что в моменты, когда центры Солнца, Земли и Венеры лежат на одной прямой линии*), Венера всегда обращена к Земле одним и тем же участком своей поверхности.

Теория синхронизации (резонансов) при движении небесных тел начала разрабатываться еще Лапласом и Лагранжем, изу-

чившими, в частности, линеаризированные уравнения движения Луны, решение которых дает движение, близкое к движению согласно законам Кассини. Дальнейшее существенное развитие теории (уже в нелинейной трактовке) относится к последнему времени. Обзоры соответствующих исследований и изложение ряда интересных оригинальных результатов можно найти в книге В. В. Белецкого [23], а также в работах А. А. Хентова [281] и П. Голдрайха [100] (см. также гл. 7 настоящей книги). В указанных исследованиях, в частности, показано, что эмпирические законы Кассини соответствуют устойчивым решениям нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих (в некотором достаточно хорошем приближении) движение тела типа Луны; на основе полученных результатов предложен ряд систем стабилизации искусственных спутников и т. п. Вместе с тем теория синхронизации движений небесных тел еще далека до своего завершения. Один важный вывод, вытекающий из результатов наблюдений и теоретических исследований различных частных случаев представляется в настоящее время несомненным — это вывод о закономерном, неслучайном характере большой распространенности соизмеримостей средних движений небесных тел, т. е. вывод о тенденции этих тел к синхронизации. В связи со

*) Такие моменты противостояния повторяются через каждые полтора года.

сказанным теоретическое установление такой тенденции в достаточно общем случае представляется весьма существенным. Как будет показано в гл. 7, указанный вывод об избранности или, как иногда говорят, об «элитности», синхронных движений действительно следует (с определенными оговорками) из общей теории синхронизации динамических систем, развитой в последние годы. А именно, тенденция к синхронизации при некоторых условиях вытекает из упоминавшегося интегрального критерия устойчивости (экстремального свойства*) синхронных движений, согласно которому устойчивые синхронные движения могут соответствовать точкам, совпадающим или близким к точкам минимума усредненной функции Лагранжа для системы или ее частей, взятых с надлежащими знаками, по начальным фазам движений тел.

Примечательно, что «правило отбора» устойчивых фаз в синхронных движениях, вытекающее из экстремального свойства, хорошо согласуется с данными астрономических наблюдений и вычислений. Так, например, соединения спутников Сатурна Энцелада и Дионы происходят неизменно вблизи перигенция Энцелада, что и предсказывается экстремальным свойством.

В связи с проблемой синхронизации при движении небесных тел нельзя не сказать о гипотезе А. М. Молчанова о синхронности (полной резонансности) средних угловых скоростей обращений больших планет Солнечной системы [202]. В свете упомянутых результатов эта вызвавшая острую полемику гипотеза получает если не полное обоснование, то, по крайней мере, существенный довод в свою пользу.

Сравнительно недавно — в последние десятилетия — было обращено внимание на то, что явления синхронизации характерны также для биологических объектов — от коллективов клеток до коллективов животных. Примерами, с одной стороны, могут служить, синхронные колебания ядер и клеток злокачественных опухолей, синхронизация при работе мышечных тканей, при передаче нервного возбуждения и т. п. [85, 125, 197, 247], а с другой — согласованное мерцание света, испускаемого несколькими жуками-светляками, синхронные взмахи крыльев при полете стаи птиц и плавников при движении косяка рыб.

Синхронизация встречается и в поведении людей в коллективах — примерами могут служить скандированные аплодисменты большой аудитории, а также хождение группы людей «в ногу».

Теория явлений синхронизации в биологических системах только начинает разрабатываться; для ее построения в качестве моделей объектов, как правило, используются (иногда — несколь-

*) Термин «экстремальное свойство» предложен В. В. Белецким.

ко усовершенствованные) классические модели квазилинейных и релаксационных автогенераторов Ван-дер-Поля и модифицированная модель системы «хищник — жертва» Лотки — Вольтерра (см. гл. 8).

В связи со сказанным заметим, что обнаружение синхронизации нового класса объектов имеет существенное техническое и научное значение, ибо приводит к выходу на новый уровень в соответствующей области. Так, обнаружение эффекта самосинхронизации вибровозбудителей, как отмечалось, привело к созданию нового класса машин; не к меньшим, а, видимо, к еще более важным последствиям приведет открытие и изучение явлений синхронизации в биологии и при движении небесных тел.

Универсальная распространенность синхронизации естественно приводит к мысли о том, что *синхронизация* является фундаментальным свойством систем колеблющихся или вращающихся объектов, а поэтому должна играть существенную роль и в *организации микромира*. Некоторые начальные соображения по этому поводу высказаны в § 2 гл. 9.

Обнаружение явления самосинхронизации вибровозбудителей, биологических объектов, а также возникшее понимание общности явлений синхронизации, способствовало в последние годы разработке *общей теории синхронизации динамических систем* (см. гл. 12). Получили значительное развитие работы по теории синхронизации объектов типа слабо связанных автогенераторов (см., например, [57, 171, 181, 247]), были разработаны теория синхронизации систем с почти равномерными вращательными движениями [41, 42, 57], теория синхронизации квазиконсервативных объектов [15, 208—211, 213, 215], а также объектов, близких к произвольным целинейным [207]; возникло понятие об орбитальных системах, объединяющих системы с механическими вибровозбудителями, небесномеханические системы, а также системы, которыми интересуются в физике [63, 66].

Разработка теории синхронизации, в свою очередь, потребовала дополнения и развития в определенном направлении соответствующего математического аппарата теории периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, и прежде всего — классической теории Пуанкаре — Ляпунова [15, 33, 34, 50, 184, 216] (см. гл. 10 и 11). Был обобщен, распространен на многие классы объектов уже упоминавшийся интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) периодических и синхронных движений [57, 81, 175, 209—211, 285, 286], сводящий задачу об изучении существования и устойчивости указанных движений к вопросу о минимумах некоторой функции, названной потенциальной (или квазипотенциальной) функцией. Посредством этого критерия удалось доказать в общей форме наличие тенденции к синхрониза-

ции (см. § 2) у широкого класса слабо связанных объектов — вибровозбудителей, квазиконсервативных объектов, объектов с почти равномерными вращениями, а также объектов, образующих орбитальные системы [63, 66]. Тем самым было теоретически доказано, что тенденция к синхронизации действительно является общим свойством взаимодействующих динамических объектов самой различной природы.

Таковы в общих чертах основные этапы развития и современное состояние проблемы синхронизации.

§ 2. Общий взгляд на синхронизацию. Что понимать под тенденцией к синхронизации?

Сказанное в § 1 подтверждает, что тенденция к синхронизации является своеобразной закономерностью поведения материальных объектов самой различной природы. Несомненно, что такая закономерность представляет собой одно из проявлений тенденции материальных форм к самоорганизации. Эта последняя более общая закономерность не раз отмечалась представителями различных наук и в особенности — выдающимся ученым и мыслителем В. И. Вернадским, идеи которого получают все большее признание [236]; многие из мыслей В. И. Вернадского органически вошли в главные положения кибернетики.

Можно сказать также, что с синхронизацией мы сталкиваемся всюду, где приходится иметь дело с колебаниями или вращениями, т. е. практически везде.

Вместе с тем взгляд на синхронизацию еще окончательно не сформировался, и порой приходится слышать по этому поводу самые различные суждения. Представляется, что неправомерно распространять на общий случай, как иногда делается, яркое высказывание А. М. Молчанова о том, что синхронность (резонансность) характерна для любой эволюционно зрелой динамической системы; по-видимому, и сам А. И. Молчанов имел в виду лишь определенный класс орбитальных динамических систем. С точки зрения автора, которая была высказана еще в приведенном выше предисловии к книге [57] и которая, как представляется, получила новые подтверждения в данной книге и разделяется рядом исследователей, универсальным является не фактическое установление синхронных движений, а лишь *тенденция к синхронизации**). При наличии достаточно сильных десинхронизирующих факторов тенденция к синхронизации по-

*) Естественно, что при этом важно определить, что именно понимается под тенденцией к синхронизации. В данной книге предлагается говорить о такой тенденции при условии, что система имеет хотя бы одно движение, устойчивое по соответствующим координатам или функциям от координат (подробнее см. § 1 гл. 1).

давляется, и система, какой бы она ни была «эволюционно зрелой», не синхронизируется, т. е. торжествует другая, противоположная синхронизации тенденция.

Иными словами, и в данном случае мы сталкиваемся с одним из проявлений известной общей закономерности — «борьбой» между порядком и беспорядком (см., например, [141]). Подробнее об этом говорится в § 1 гл. 9.

§ 3. Основные закономерности синхронизации

Закономерности синхронизации объектов различной природы характеризуются определенным своеобразием: в частности, существенные отличия имеются между закономерностями синхронизации колеблющихся объектов (например, маятниковых часов) и объектов с вращательными движениями (вибровозбудителей, небесных тел).

Вместе с тем можно указать ряд закономерностей, общих для динамических объектов самой разнообразной природы. Перечислим здесь некоторые основные из таких общих закономерностей; более частные закономерности, характерные для синхронизации отдельных классов динамических объектов, указываются в соответствующих главах книги (см., например, § 14 гл. 3, § 3 гл. 5 и § 2 гл. 8).

1. *Отсутствие порога синхронизации.* Синхронизация может возникнуть при сколь угодно слабых связях между объектами, если только достаточно мало отличие соответствующих одноименных параметров объектов. Аналогичным образом захватывание возможно при сколь угодно слабом внешнем воздействии. В своеобразной форме эта закономерность проявляется и при наличии флуктуаций параметров объектов и системы связи.

2. *Зависимость синхронизации от парциальных частот объектов.* Наиболее существенно возможность или невозможность взаимной синхронизации автоколебательных объектов зависит от значений их парциальных частот (угловых скоростей) ω , т. е. от частот (скоростей) при отсутствии взаимодействия. Если, например, все парциальные частоты достаточно близки или одинаковы, то простая взаимная синхронизация объектов, как правило, возможна независимо от значений прочих параметров объектов и системы связи. Вместе с тем даже при слабых взаимных связях тенденция объектов к синхронизации иногда может быть настолько сильна, что синхронизируются объекты с существенно различными парциальными частотами (угловыми скоростями).

3. *Ухудшение условий синхронизации с увеличением порядка синхронного режима.* Области существования и устойчивости, а также «области притяжения» синхронных режимов в фазовом пространстве системы, как правило, сужаются с ростом «порядка»

синхронного режима, т. е. некоторого числа, характеризующего величины целочисленных коэффициентов в соответствующих соотношениях между частотами колебаний или вращений. Наилучшие условия в указанном смысле обычно соответствуют случаю простой синхронизации, когда частоты (скорости) одинаковы. Из этого правила, однако, возможны исключения.

4. *Установление определенных соотношений между начальными фазами движения объектов.* Синхронный режим характеризуется определенным набором значений начальных фаз движения объектов. Часто при фиксированных параметрах системы возможно не одно, а несколько устойчивых (в малом) синхронных движений, отличающихся конкретными значениями начальных фаз; могут существовать и другие (не синхронные) устойчивые в малом движения. В таких случаях характер реально устанавливающегося движения определяется начальными условиями. В некоторых системах, однако, имеется лишь единственный устойчивый (в большом) синхронный режим, устанавливающийся при любых начальных условиях. В первом наиболее общем случае можно, несколько расширяя толкование известных терминов, говорить о *жестком возбуждении синхронного режима*, или о *несамоустанавливающемся синхронном режиме*, а во втором — о *мягко возбуждаемом*, или *самоустанавливающемся режиме*.

5. *Экстремальное свойство синхронных движений и тенденция к синхронизации.* Во многих случаях устойчивые синхронные движения выделяются из всех прочих возможных движений системы взаимосвязанных объектов тем, что им отвечает минимум некоторой функции D (*потенциальной функции*). Эта функция часто имеет определенный физический смысл и представляет собой сумму усредненных за период лагранжианов элементов системы связи и так называемого *потенциала избыточных сил*, взятых с определенными знаками. В системах, для которых справедлив интегральный критерий устойчивости, а также в определенном смысле близких к ним, тенденция к синхронизации проявляется при достаточно широких предположениях.

6. *Зависимость синхронных движений от характера системы связи.* Характер и число устойчивых синхронных движений системы могут существенно зависеть от числа степеней свободы и свойств системы связи. Последнее характерно для объектов с вращательными движениями. Вместе с тем известны объекты с колебательными движениями (например, маятниковые часы), синхронные движения которых слабо зависят от характера системы связи.

7. *Парадокс неработающих связей.* При взаимной синхронизации одинаковых объектов (например, механических вибровозбудителей, маятниковых часов и др.) существуют устойчивые синхронные движения, при которых движение в системе связи

отсутствует. Система связи «включается» лишь при случайном возмущении синхронного движения объектов или при изменении их параметров.

8. *Эффект усреднения частоты.* Синхронная частота (скорость) ω при простой синхронизации (см. § 1 гл. 1) автоколебательных объектов часто является неубывающей функцией некоторого среднего (или средневзвешенного) от парциальных частот (угловых скоростей) ω_s отдельных объектов. При определенных свойствах системы связи между объектами ω оказывается просто равной указанному среднему или средневзвешенному. Тогда ω не больше, чем наибольшая, и не меньше, чем наименьшая из парциальных частот (угловых скоростей) ω_s отдельных объектов:

$$\inf [\omega_1, \dots, \omega_n] \leq \omega \leq \sup [\omega_1, \dots, \omega_n].$$

Во многих случаях, особенно при близких значениях ω_s , синхронная частота ω близка к средневзвешенному арифметическому значению парциальных частот, т. е. $\omega \approx b_1\omega_1 + \dots + b_n\omega_n$ ($b_1 + \dots + b_n = 1$), где $b_1 > 0, \dots, b_n > 0$ — некоторые функции параметров системы.

Из сказанного следует, что среднее квадратическое отклонение величины ω при случайных отклонениях ω_s может быть значительно меньше среднего квадратического отклонения самих ω_s .

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И ХАРАКТЕРИСТИКА ОСНОВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Глава 1

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ О СИНХРОНИЗАЦИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

§ 1. Постановка задач о синхронизации; основные термины и определения

Попробуем дать достаточно общую математическую формулировку задач о синхронизации, с тем чтобы охватить по возможности большее число встречающихся частных случаев. Попутно разъясним используемые далее термины и приведем основные определения.

Ограничимся прежде всего изучением синхронизации так называемых динамических систем, основное свойство которых заключается в том, что их состояние характеризуется некоторым

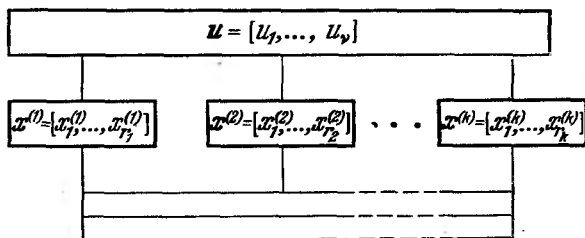


Рис. 4.

набором параметров (фазовых координат), причем задание значений этих координат в некоторый фиксированный момент времени полностью определяет значения координат в любой момент времени. Более точные формулировки понятия динамической системы можно найти, например, в монографиях [218, 220].

Рассмотрим некоторое число k динамических объектов, связанных друг с другом в единую систему (рис. 4). Пусть состоя-

ние s -го объекта определяется r_s -мерным вектором $x^{(s)} = [x_1^{(s)}, \dots, x_{r_s}^{(s)}]$ ($s = 1, \dots, k$), компоненты которого $x_j^{(s)}$ являются координатами объекта в фазовом пространстве системы.

Состояние системы в целом определяется как совокупностью векторов $x^{(s)}$, так и v -мерным вектором $u = [u_1, \dots, u_v]$, характеризующим состояние системы связи между объектами. Таким образом, фазовое пространство всей системы имеет $l = r_1 + \dots + r_k + v$ измерений.

Будем говорить, что система совершает *синхронное движение*, если ее фазовые координаты изменяются по закону

$$x_j^{(s)} = \tilde{n}_j^{(s)} \omega t + y_j^{(s)}(m_j^{(s)} \omega t) \quad (j = 1, \dots, r_s; s = 1, \dots, k),$$

$$u_\rho = \tilde{n}_\rho \omega t + v_\rho(m_\rho \omega t) \quad (\rho = 1, \dots, v), \quad (1.1)$$

где ω — положительная постоянная, $\tilde{n}_j^{(s)}$ и $\tilde{n}_\rho$ — целые числа, $m_j^{(s)}$ и m_ρ — целые положительные числа, а $y_j^{(s)}$ и v_ρ — периодические функции соответственно с периодами $2\pi/m_j^{(s)}$ и $2\pi/m_\rho$ по ωt (т. е. также с общим периодом 2π по ωt); числа $|\tilde{n}_j^{(s)}|$, $|\tilde{n}_\rho|$, $m_j^{(s)}$ и m_ρ можно, не нарушая общности, считать взаимно простыми. В случае, если какое-либо число $\tilde{n}_j^{(s)}$ или $\tilde{n}_\rho$ равно нулю, соответствующую координату $x_j^{(s)}$ или u_ρ будем условно называть *колебательной*, а в случае $\tilde{n}_j^{(s)} \neq 0$ или $\tilde{n}_\rho \neq 0$ — *вращательной*.

Наличие вращательных координат характерно для механических систем; при этом вращательной координате в реальной системе может отвечать не обязательно вращение тела, а любое равномерное в среднем движение (например, прямолинейное движение с постоянной средней скоростью).

Поскольку согласно (1.1) имеем *)

$$\langle \dot{x}_j^{(s)} \rangle = \tilde{n}_j^{(s)} \omega, \quad \langle \dot{u}_\rho \rangle = \tilde{n}_\rho \omega, \quad (1.2)$$

то синхронным движениям системы отвечают колебательные или «равномерные в среднем» движения по каждой из фазовых координат с одинаковыми для всех координат или кратными частотами (средними угловыми или линейными скоростями).

Если все числа $\tilde{n}_j^{(s)}$ равны 0, +1 или -1, а все числа $m_j^{(s)}$ равны 1, то будем говорить о *простых*, а в противном случае — о *кратно-синхронных движениях*. Соответственно будем разли-

*) Под $\langle \dots \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \dots dt$ здесь и ниже понимается оператор усреднения по «безразмерному времени» $\tau = \omega t$.

чать задачи о простой и о кратной синхронизации динамических объектов. Величину $\omega > 0$ назовем синхронной скоростью (частотой).

Если система связанных объектов при определенных условиях допускает хотя бы одно устойчивое синхронное движение*), то будем говорить, что объекты при этих условиях обнаруживают тенденцию к синхронизации; если при некоторых условиях движение системы при $t \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к некоторому синхронному движению, то будем говорить, что объекты при указанных условиях синхронизируются.

Во многих случаях поведение динамических объектов и систем связи между ними удастся адекватно описать посредством дифференциальных уравнений, которые согласно структурной схеме (см. рис. 4) могут быть записаны в следующем характерном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(s)} &= X^{(s)}(x^{(s)}) + F^{(s)}(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, u) \quad (s = 1, \dots, k), \\ \dot{u} &= U(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, u), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$X^{(s)} = [X_1^{(s)}, \dots, X_{r_s}^{(s)}], \quad F^{(s)} = [F_1^{(s)}, \dots, F_{r_s}^{(s)}], \quad U = [U_1, \dots, U_v]$$

— соответственно r_s - и v -мерные вектор-функции, удовлетворяющие весьма общим требованиям, при которых система (1.3) является динамической, и некоторому специальному требованию, которое будет указано ниже. Вектор-функции F и U , характеризующие связи между отдельными объектами, назовем функциями связей.

Из структурной схемы системы, а также из уравнений (1.3) видно, что каждый из объектов может быть связан со всеми прочими как непосредственно, так и через систему связи, состояние которой как раз и характеризуется фазовыми координатами u_p . Вместе с тем из уравнений видно, что координаты $x_j^{(s)}$, определяющие состояние объектов, и координаты u_p системы связи, по существу, входят в уравнения (1.3) вполне «равноправно». Характерная для многих задач о синхронизации специфика каждой группы переменных выяснится ниже.

Под основной задачей теории синхронизации будем понимать установление условий существования и устойчивости решений

*) Здесь и в дальнейшем имеется в виду только либо устойчивость по А. М. Ляпунову, либо орбитальная устойчивость, причем в отдельных случаях со специальными оговорками будет рассматриваться устойчивость по части фазовых координат, по функциям от координат или условная устойчивость [178, 183].

уравнений (1.3), имеющих вид (1.1), т. е. решений, отвечающих синхронным движениям.

Конкретизируем теперь вид правых частей уравнений (1.3). Будем предполагать, что функции $X_j^{(s)}$, $F_j^{(s)}$ и U_p зависят от своих аргументов таким образом, что после подстановки вместо $x_j^{(s)}$ и u_p их выражений согласно формулам (1.1) эти функции становятся периодическими функциями «безразмерного времени» $\tau = \omega t$ с периодом 2π .

Последнее условие не является обязательным для существования у системы (1.3) синхронных движений, однако оно выполняется во всех основных конкретных задачах о синхронизации и существенно упрощает их решение; поэтому далее это условие предполагается справедливым. Заметим, что для его справедливости достаточно, чтобы $X_j^{(s)}$ и U_p были периодическими функциями вращательных координат с периодом 2π , а также, быть может, функциями разностей $x_j^{(s)}/\tilde{n}_j^{(s)} - x_\alpha^{(\beta)}/\tilde{n}_\alpha^{(\beta)}$, $u_j/\tilde{n}_j - u_p/\tilde{n}_p$, $x_j^{(s)}/\tilde{n}_j^{(s)} - u_p/\tilde{n}_p$, где $x_j^{(s)}$, $x_\alpha^{(\beta)}$, u_j и u_p — вращательные координаты.

Переходя в уравнениях (1.3) по формулам (1.1) от переменных x , u и t к переменным y , v и $\tau = \omega t$, получаем систему вида

$$\frac{dy^{(s)}}{d\tau} = Y^{(s)}(y^{(s)}, \tau) + \Phi^{(s)}(y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, v, \tau) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (1.4)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = V(y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, v, \tau),$$

где, в соответствии с предположениями о характере вектор-функций $X^{(s)}$ и U , функции $Y^{(s)}$ и V являются периодическими относительно безразмерного времени τ с периодом 2π .

Таким образом, основная задача о синхронизации сводится к установлению условий существования и устойчивости периодических решений системы уравнений (1.4), имеющих период 2π .

Помимо сформулированной выше основной задачи о синхронизации зачастую представляет также интерес решение следующих задач.

1) *Реальное вычисление синхронной скорости (частоты) ω , а также решений (1.2), отвечающих устойчивым синхронным движениям.* При этом в ряде случаев можно ограничиться определением средних за период 2π значений функций $y^{(s)}(\tau)$ и $v(\tau)$, т. е. величин

$$\alpha^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^{(s)}(\tau) d\tau, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tau) d\tau, \quad (1.5)$$

а также максимальных отклонений $|y_j^{(s)}(\tau) - \alpha_j^{(s)}|_{\max}$ и $|v_p(\tau) - \alpha_p|_{\max}$ от этих средних значений.

2) *Выбор системы связи, при котором обеспечиваются существование и устойчивость синхронного движения (1.1) заданного вида.* Эта задача, которую можно назвать *задачей синтеза*, является в известной мере обратной по отношению к основной.

В ряде случаев представляет интерес также решение весьма трудной задачи об определении в фазовом пространстве системы таких областей начальных значений ее координат («областей захвата»), для которых с течением времени движение неограниченно приближается к определенному синхронному движению.

Естественно, что для возможности использования явлений синхронизации необходимо, чтобы время установления синхронного режима было не слишком велико, а основные характеристики синхронного движения обладали достаточной «стабильностью» по отношению к разного рода погрешностям изготовления системы. Поэтому существенное значение в связи с некоторыми приложениями представляет оценка времени практического установления устойчивого синхронного режима при заданных начальных условиях, а также оценка «чувствительности» этих характеристик синхронного режима в системе по отношению к изменениям параметров объектов и системы связи, а также по отношению к постоянно действующим возмущениям.

Один из наиболее важных классов задач о синхронизации образуют *задачи о синхронизации автоколебательных объектов*, т. е. объектов (как правило, однотипных), каждый из которых, будучи изолирован от остальных (функции связей $F^{(s)}$ и $\Phi^{(s)}$ соответственно в уравнениях (1.3) и (1.4) отсутствуют), при определенных условиях может совершать движения типа (1.1), характеризующиеся некоторой частотой (угловой скоростью) ω . Величину ω естественно назвать *парциальной частотой (скоростью) объекта* *). Задача о синхронизации при этом заключается в установлении условий, при которых после объединения всех объектов в единую систему последние могут совершать движения того же типа, но с одинаковой частотой (скоростью) ω или же с частотами (скоростями) вида $\tilde{n}_s \omega$.

В зависимости от характера постановки задачи о синхронизации автоколебательных объектов или систем, содержащих таковые, следует различать задачу о *внутренней (взаимной, автономной) синхронизации* и задачу о *внешней (неавтономной) синхронизации*.

В первом, наиболее общем случае, к которому и относилась приведенная выше постановка задачи о синхронизации, все синхронизируемые объекты рассматриваются как равноправные

*) Применительно к определенным типам объектов понятия о парциальных частотах (скоростях) будут ниже уточнены и конкретизированы (см. § 5 гл. 3, § 1 гл. 5 и § 2 гл. 6).

элементы единой автономной динамической системы; частота синхронного движения ω при этом устанавливается в результате взаимодействия всех элементов системы. Правые части уравнений (1.3) в таком случае не содержат в явной форме время t , а значение синхронной частоты ω заранее неизвестно и подлежит определению в процессе решения задачи.

Во втором случае предполагается, что один из синхронизируемых автоколебательных объектов является значительно более мощным по сравнению со всеми остальными, и поэтому его движение считается не зависящим от характера движения прочих элементов системы. Воздействие указанного объекта на остальные элементы системы и, тем самым, частота (или угловая скорость) синхронного движения предполагаются наперед заданными и неизменными. Исходная система (1.3) при этом подходе к задаче обращается в неавтономную, и ее порядок понижается.

Частным случаем задачи о внешней синхронизации является задача о *захватывании*, когда речь идет о синхронизации под действием заданного внешнего периодического возмущения одного-единственного автоколебательного объекта. Заметим, что в литературе, говоря о синхронизации, часто имеют в виду именно захватывание.

Понятие о синхронизации предполагает возможность (и целесообразность) выделения в единой системе нескольких объектов, состояние которых характеризуется «собственными» фазовыми координатами. Между тем такое расчленение системы на «объекты» и «связи» в принципиальном отношении достаточно условно; это вытекает, например, из того обстоятельства, что если не сделано никаких оговорок о характере функций связей $F^{(s)}$ и U , то все переменные входят в систему уравнений (1.3) вполне равноправно.

Однако при рассмотрении конкретных задач о синхронизации обычно не возникает вопроса о выделении отдельных объектов. Дело здесь не только (и не столько) в том, что эти объекты представляют собой обособленные физические или биологические системы (маятники, электрические генераторы, насекомые и т. п.), а в том, что связи между отдельными объектами в практически интересных случаях значительно слабее, чем между отдельными элементами самих объектов (см. § 2).

При наличии сильных связей между объектами их выделение (по крайней мере при математическом решении задачи) часто нецелесообразно, и явление взаимной синхронизации ничем не выделяется из класса автоколебательных явлений.

В технике иногда различают *самосинхронизацию* и *принудительную синхронизацию*. В первом случае имеется в виду, что синхронизация и требуемые соотношения между фазами колебаний и вращений осуществляются естественным путем, т. е. под

действием уже имеющихся в системе связей. Так, например, синхронизация генераторов электрических или механических колебаний (вибровозбудителей) часто происходит за счет свойств самой системы генераторы — нагрузка. Во втором случае для получения эффекта синхронизации или требуемой фазировки требуется введение дополнительных связей.

Заметим, что при рассмотрении ряда конкретных задач выражения (1.1), характеризующие синхронные движения, удобнее записывать в следующей форме:

$$x_j^{(s)} = \sigma_j^{(s)} [q_j^{(s)} n_j^{(s)} \omega t + y_j^{(s)} (m_j^{(s)} \omega t)] \quad (j = 1, \dots, r_s; s = 1, \dots, k), \quad (1.6)$$

$$u_\rho = \sigma_\rho [q_\rho n_\rho \omega t + v_\rho (m_\rho \omega t)] \quad (\rho = 1, \dots, v).$$

Здесь в отличие от (1.1) целые числа $n_j^{(s)}$ и n_ρ предполагаются положительными; $\sigma_j^{(s)}$ — числа, любое из которых может быть равно $+1$ или -1 ; $q_j^{(s)}$ и q_ρ — числа, равные либо 1 , либо 0 (в первом случае, согласно приведенному ранее определению, соответствующая координата является вращательной, а во втором — колебательной). Прочие обозначения в формулах (1.6) имеют тот же смысл, что и в (1.1).

В небесной механике наряду с термином «синхронизация» часто используют термины «резонанс» или «соизмеримость средних движений». При этом под таковыми понимают наличие между средними угловыми скоростями вращательных движений объектов ω , линейных однородных соотношений

$$n_{1,p} \omega_1 + n_{2,p} \omega_2 + \dots + n_{k^*,p} \omega_{k^*} = 0 \quad (1.7)$$

$$(p = 1, \dots, q; q \leq k^* - 1)$$

с целочисленными коэффициентами $n_{j,p}$, причем число таких соотношений (предполагаемых линейно независимыми) не превышает $k^* - 1$, где k^* — число рассматриваемых вращательных движений.

Нетрудно убедиться в том, что определение синхронных движений в виде (1.1) охватывает определение, основанное на «резонансных соотношениях» (1.7). Действительно, если справедливы равенства (1.1), то согласно (1.2) $\omega_j = \tilde{n}_j \omega$, где $\tilde{n}_j$ — целые числа, и поэтому между величинами ω_j существует не более $k^* - 1$ независимых равенств типа (1.7). С другой стороны, как легко убедиться, соотношения типа (1.7) всегда можно удовлетворить выражениями типа $\omega_j = \tilde{n}_j \omega$, причем при так называемом «полном резонансе», когда $q = k^* - 1$, это можно сделать единственным (с точностью до несущественного множителя)

образом*), а при «неполном резонансе» ($q < k^* - 1$) — бесчисленным числом способов. Так, известное соотношение (см., например, [100])

$$\omega_1 - 3\omega_2 + 2\omega_3 = 0$$

между «средними движениями» (средними угловыми скоростями) спутников Юпитера Ио, Европа и Ганимед (ω_1, ω_2 и ω_3 соответственно) в принципе могло бы осуществляться при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$, при $\omega_1 = -\omega, \omega_2 = \omega, \omega_3 = 2\omega$, при $\omega_1 = 4\omega, \omega_2 = 2\omega, \omega_3 = \omega$ и т. д.

Итак, с формальной точки зрения, между случаями соизмеримости частот (кратной синхронизацией) и наличия резонансных соотношений (1.7) нет принципиальной разницы. Следует, однако, иметь в виду, что обычно наибольший прикладной интерес представляют случаи, когда целые числа $|\tilde{n}_j^{(s)}|, |\tilde{n}_p|, m_j^{(s)}$ и m_p , а также числа n_{jp} сравнительно невелики: большим значениям указанных величин обычно отвечают малые области существования и устойчивости, а также малые области притяжения соответствующих режимов (см. § 3 Введения). При учете этого обстоятельства различие кратной синхронизации и синхронизации в смысле наличия резонансных соотношений может иметь смысл. Например, случай $\omega_1 = 100\omega, \omega_2 = 102\omega, \omega_3 = \omega$ естественно рассматривать как синхронизацию при наличии резонансного соотношения $\omega_2 - \omega_1 = 2\omega_3$.

В радиофизике иногда говорят о *синхронизации на комбинационных частотах*, имея в виду установление целочисленных соотношений (соизмеримости) не между самими частотами ω_s , а между их линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами, например, между разностями $\omega_s - \omega_j$.

Для некоторых приложений может оказаться целесообразным расширить приведенное выше понятие синхронизации, распространив его на объекты более общей природы и охватив более общие типы движений. Так, например, можно ограничиться тре-

) Например, в случае $q = k^ - 1$, подставляя в (1.7) вместо ω_j выражения $\tilde{n}_j\omega$ и сокращая на ω , найдем из получившихся $k^* - 1$ линейных уравнений $\tilde{n}_1 = -\Delta_1 \tilde{n}_{k^*} / \Delta, \dots, \tilde{n}_{k^*-1} = -\Delta_{k^*-1} \tilde{n}_{k^*} / \Delta$, где Δ — определитель матрицы $\|n_{jp}\|$ ($j, p = 1, \dots, k^* - 1$), который в силу предположения о независимости соотношений (1.7) всегда можно считать отличным от нуля, а Δ_j — определитель той же матрицы, в которой элементы j -го столбца заменены на $n_{k^*1}, \dots, n_{k^*k^*-1}$; при этом как Δ , так и Δ_j — целые числа. Таким образом, величины $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{k^*}$ будут целыми числами, по крайней мере, при любом $n_{k^*} = n\Delta$, где n — произвольное целое число; последнее и требовалось показать.

бованием, чтобы вид (1.1) или (1.6) имели лишь выражения по крайней мере для одной из координат объектов $x_j^{(s)}$. Можно предполагать также, что функции $y_j^{(s)}$ и v_s являются почти периодическими. Наконец, можно исходить из значительно более общего определения синхронизации, понимая под таковой равенство некоторых функционалов от координат объектов, например, совпадение моментов времени, когда эти координаты обращаются в нуль, достигают экстремальных значений и т. п. Как правило, достаточно ограничиться изложенным выше менее общим толкованием синхронизации, когда за указанные функционалы принимаются частоты (или средние скорости изменения координат объектов).

Заметим, что приведенное выше и используемое всюду далее определение синхронизации, которое с самого начала предполагает выделение в системе однотипных объектов, можно условно назвать *физико-техническим*. Имеются более абстрактные определения, не предполагающие такого выделения объектов (см., например, [109]); подобные определения можно назвать *математическими*.

Укажем также, что для ряда приложений представляет интерес задача о синхронизации в системах с распределенными параметрами. В этом случае в числе уравнений типа (1.3) содержатся уравнения в частных производных.

§ 2. Синхронизация слабо связанных объектов. Задачи о синхронизации, допускающие использование методов малого параметра

Дифференциальные уравнения задач о синхронизации, как правило, являются существенно нелинейными, и поэтому их решение, вообще говоря, сопряжено со значительными трудностями. Можно, однако, указать по крайней мере три класса задач, допускающих естественное введение в уравнения малого параметра и последующее использование соответствующих эффективных методов решения. Вместе с тем эти классы задач как раз и представляют основной практический и принципиальный интерес. Остановимся на их краткой характеристике.

1) *Задачи о синхронизации слабо связанных объектов.* Очевидно, что такие задачи действительно наиболее интересны, ибо, с одной стороны, синхронизацию технически наиболее просто и экономично осуществлять именно посредством «слабых» связей и, с другой стороны, при «сильных» связях между объектами последние можно рассматривать как единую систему, для которой задачи о синхронизации практически не возникает. Так, например, два механических дебалансных вибровозбудителя, валы

которых связаны зубчатым зацеплением, практически образуют один двухвальный вибровозбудитель.

К задачам о синхронизации объектов со слабыми взаимными связями может быть отнесено большинство задач о синхронизации вибровозбудителей, задачи о синхронизации движений небесных тел, задача Гюйгенса о синхронизации часов, задачи о синхронизации автогенераторов и многие другие.

Математическим отражением факта слабости взаимных связей между объектами является малость функций связей $F^{(s)}$ по сравнению с $X^{(s)}$ в дифференциальных уравнениях (1.3) и (1.4). Иначе говоря, в данном случае уравнения (1.3) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(s)} &= X^{(s)}(x^{(s)}) + \mu \tilde{F}^{(s)}(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, u, \mu) \quad (s = 1, \dots, k), \\ \dot{u} &= U^*(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, u, \mu),\end{aligned}\quad (2.1)$$

а соответствующие им уравнения (1.4) в переменных $y^{(s)}, v$ и $\tau = \omega t$ — в форме

$$\frac{dy^{(s)}}{d\tau} = Y^{(s)}(y^{(s)}, \tau) + \mu \tilde{\Phi}^{(s)}(y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, v, \tau, \mu) \quad (s = 1, \dots, k),\quad (2.2)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = V^*(y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, v, \tau, \mu).$$

Здесь $\mu \geq 0$ — малый параметр, а $\tilde{F}^{(s)}$ и U^* , $\tilde{\Phi}^{(s)}$ и V^* — вектор-функции того же типа, что и функции $F^{(s)}$ и U , $\Phi^{(s)}$ и V в уравнениях (1.3) и (1.4), причем $\tilde{F}^{(s)}$, U^* , $\tilde{\Phi}^{(s)}$ и V^* являются также функциями параметра μ , которые достаточно считать аналитическими по μ при $\mu < \mu_0$, где $\mu_0 > 0$.

Заметим, что в радиофизике понятию «слабая связь» иногда дается несколько иная трактовка.

Весьма распространенным видом задач являются задачи о синхронизации одинаковых или почти одинаковых объектов, слабо взаимодействующих один с другим. В этом случае функции $X^{(s)}$ в уравнениях (2.1) и функции $Y^{(s)}$ в уравнениях (2.2) не зависят от индекса s , что также приводит к некоторым упрощениям.

2) *Задачи о синхронизации объектов, близких к изученным.* Во многих случаях объекты, синхронизация которых исследуется, близки к некоторым «стандартным» модельным объектам, свойства которых изучены. Такими стандартными объектами могут быть, например, линейные осцилляторы, консервативные объекты с одной или несколькими степенями свободы, простейшие автоколебательные объекты.

Функции $X^{(s)}$ в уравнениях (1.3) и функции $Y^{(s)}$ в уравнениях (1.4) в рассматриваемом случае могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} X^{(s)} &= X_0^{(s)}(x^{(s)}) + \mu X_1^{(s)}(x^{(s)}, \mu), \\ Y^{(s)}(y^{(s)}, \tau) &= Y_0^{(s)}(y^{(s)}, \tau) + \mu Y_1^{(s)}(y^{(s)}, \tau, \mu). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь по-прежнему $\mu \geq 0$ — малый параметр, а функции $X_1^{(s)}$ и $Y_1^{(s)}$ — аналитические по μ при $\mu < \mu_0$, где $\mu_0 > 0$. При этом уравнения

$$\dot{x}_0^{(s)} = X_0^{(s)}(x_0^{(s)}) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (2.4)$$

получающиеся из (1.3) при $\mu = 0$ и $F^{(s)} \equiv 0$, как раз и являются уравнениями упомянутых стандартных модельных объектов; обычно решения данных уравнений или их характер являются известными, что облегчает решение соответствующих задач о синхронизации. Особенно значительное упрощение достигается в случае, когда одновременно рассматривается задача о синхронизации при наличии слабых связей между объектами.

3) *Задачи о синхронизации объектов с приближенно известным характером синхронных движений.* Нередко встречаются случаи, когда заранее можно допустить, что в синхронном режиме, если он существует, объекты совершают движения, близкие к некоторым определенным движениям. Иными словами, можно считать, что в изучаемых движениях

$$x^{(s)}(t) = x_0^{(s)}(t) + \mu x_1^{(s)}(t, \mu) \quad (2.5)$$

или

$$y^{(s)}(\tau) = y_0^{(s)}(\tau) + \mu y_0^{(s)}(\tau, \mu), \quad (2.6)$$

где $x_0^{(s)}$ и $y_0^{(s)}$ — функции известного вида, определенные с точностью до некоторых постоянных параметров. Так, например, решая задачи о синхронизации механических вибровозбудителей и небесных тел, часто можно предположить, что их движения по определенным координатам мало отличаются от равномерных вращений с некоторыми заранее неизвестными начальными фазами.

В подобных случаях в уравнения задачи (1.3) или (1.4) оказывается возможным эффективно ввести малый параметр, несмотря на формальное отсутствие его в указанных уравнениях. С этой целью в правых частях уравнений выделяются такие слагаемые, что если опустить все прочие члены, то уравнения как раз будут иметь решения $x_0^{(s)}$ (или $y_0^{(s)}$). Эти остальные члены полагаются малыми, т. е. содержащими малый параметр μ в виде множителя.

Подробнее данный способ введения малого параметра описан в книгах [54, 57, 61]; он широко использован нами при решении ряда задач о синхронизации (см., например, работы [32, 36, 57], а также § 4 гл. 3 и § 4 гл. 12).

Разумеется, введение малого параметра и применение соответствующих методов являются эффективными лишь в том случае, если так называемая *порождающая система*, т. е. система, получающаяся из исходной при $\mu = 0$, оказывается более простой, чем исходная, так что можно найти нужное семейство ее решений (не обязательно общее решение!). Из изложенного видно, что для всех трех перечисленных классов задач о синхронизации дело обстоит именно так: система, получающаяся при $\mu = 0$, неизменно является более простой, чем исходная и, по крайней мере, для второго и третьего классов задач имеет для координат объектов $x_0^{(s)}$ (или $y_0^{(s)}$) решения заранее известного характера.

Глава 2

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ *)

§ 1. Методы малого параметра Пуанкаре и Ляпунова в задачах о синхронизации слабо связанных объектов

Методы Пуанкаре и Ляпунова являются в настоящее время одними из наиболее эффективных средств исследования и построения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Эти методы получили значительное развитие благодаря трудам преимущественно отечественных ученых — Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андропова, А. А. Витта, Б. В. Булгакова, И. Г. Малкина и ряда других исследователей.

Систематическое изложение методов Пуанкаре и Ляпунова можно найти, например, в книгах [74, 184, 188, 237], а применительно к задачам о синхронизации — в книге [57]. Здесь мы остановимся лишь на некоторых главных идеях этих методов и специфике их использования при решении задач о синхронизации слабо связанных объектов; несколько подробнее об указанных методах говорится в § 1 гл. 10.

Одна из основных идей метода Пуанкаре состоит в рассмотрении вместо исходной системы уравнений той обычно более простой системы, которая получается из исходной при $\mu = 0$, т. е. порождающей системы. После того как периодическое решение порождающей системы найдено, возникает важный вопрос о том, отвечает ли этому решению периодическое решение исходной системы, обращающееся в него при $\mu = 0$. Только при условии, что такое соответствие между решениями исходной и порождающей системы имеется, периодическое решение порождающей

*) Более подробно математический аппарат теории синхронизации рассматривается в третьей части книги.

системы можно рассматривать как приближенное решение исходной системы, а дальнейшие приближения, если это необходимо, вычислять в виде рядов по степеням малого параметра. Затем надлежит исследовать устойчивость найденных решений, для чего обычно используют теорию устойчивости А. М. Ляпунова. Естественно, что характер всего исследования существенно зависит от характера порождающей системы и ее решения.

В задачах о синхронизации слабо связанных объектов порождающая система в исходных переменных $x^{(s)}$ и u имеет вид (см. уравнения (2.1) гл. 1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_0^{(s)} &= X^{(s)}(x_0^{(s)}) \quad (s = 1, \dots, k), \\ \dot{u}_0 &= U^*(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k)}, u_0, 0),\end{aligned}\quad (1.1)$$

а в переменных $y^{(s)}$ и v записывается в форме (см. уравнения (2.2) гл. 1)

$$\begin{aligned}\frac{dy_0^{(s)}}{d\tau} &= Y^{(s)}(y_0^{(s)}, \tau) \quad (s = 1, \dots, k), \\ \frac{dv_0}{d\tau} &= V^*(y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(k)}, v_0, \tau, 0).\end{aligned}\quad (1.2)$$

Пусть система (1.1) допускает синхронное решение, т. е. решение, характеризующееся равенствами (1.1) гл. 1. Тогда вследствие того, что время не входит явным образом в правые части уравнений (1.1), т. е. вследствие автономности этих уравнений, последние должны допускать также синхронное решение вида

$$\begin{aligned}x_{j0}^{(s)}(t + \alpha_s) &= \tilde{n}_j^{(s)} \omega_s t + \tilde{n}_j^{(s)} \omega_s \alpha_s + y_j^{(s)}[m_j^{(s)} \omega(t + \alpha_s)] \\ (j &= 1, \dots, r_s; s = 1, \dots, k), \\ u_{\rho 0} &= u_{\rho 0}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (\rho = 1, \dots, v),\end{aligned}\quad (1.3)$$

где α_s — произвольные постоянные. Решение (1.3) получается из исходного решения путем замены t на $t + \alpha_s$ в решениях $x_{j0}^{(s)}$, отвечающих s -му объекту, и последующего решения уравнения для $u_{\rho 0}$. Но тогда легко заключить, что если система (2.2) допускает некоторое периодическое решение $y_{j0}^{(s)}(\tau)$, $v_{\rho 0}(\tau)$, то она непременно допускает также семейство периодических решений вида

$$\begin{aligned}y_{j0}^{(s)} &= \tilde{n}_j^{(s)} \omega_s \alpha_s + y_j^{(s)}[m_j^{(s)} \omega(t + \alpha_s)], \\ v_{\rho 0} &= v_{\rho 0}(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_k),\end{aligned}\quad (1.4)$$

зависящее от k произвольных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Указанные постоянные играют роль начальных фаз объектов в синхронных движениях.

Таким образом, для задач о синхронизации слабо связанных объектов характерно наличие у порождающей системы семейства периодических решений, зависящего по крайней мере от k произвольных параметров (число таких параметров может быть и большим — см. § 2). Этот случай является в теории периодических решений Пуанкаре, во-первых, особенным, требующим специального исследования, и, во-вторых, наиболее интересным с принципиальной точки зрения.

§ 2. О результативных соотношениях теории синхронизации слабо связанных объектов. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений

Как устанавливается путем соответствующего исследования [184], при наличии у порождающей системы семейства периодических решений, зависящего от некоторого числа произвольных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, вообще говоря, нет полного качественного соответствия между периодическими решениями исходной и порождающей систем уравнений. А именно, оказывается, что синхронные решения исходной системы, т. е. системы (2.1) гл. 1, обращающиеся при $\mu = 0$ в синхронные решения (1.3) порождающей системы (1.1), могут соответствовать не всем значениям постоянных α_s , а лишь значениям, удовлетворяющим некоторой системе конечных уравнений

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (2.1)$$

составляемых по определенному правилу (см. ниже).

Далее, вообще говоря, не всем решениям уравнений (2.1) будут отвечать устойчивые синхронные движения. Исследование устойчивости показывает [33, 34, 57, 184, 216], что для достаточно широкого класса систем основную роль в отборе устойчивых решений играет требование, чтобы для определенного решения уравнений (2.1) все корни λ (за исключением, быть может, одного нулевого корня) алгебраического уравнения k -й степени

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} - \lambda & \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} - \lambda & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P_k}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial P_k}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial P_k}{\partial \alpha_k} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

имели отрицательные вещественные части. Для многих систем сформулированное требование является не только необходимым, но и достаточным условием устойчивости (в малом и при доста-

точно малых значениях параметра μ); кроме того, при выполнении данного требования для соответствующего решения уравнения (2.1) этому решению действительно отвечает единственное решение исходной системы дифференциальных уравнений, образующееся при $\mu = 0$ в порождающее решение (1.3).

Таким образом, если постоянные α_s найдены из уравнений (2.1) и для них к тому же все корни λ уравнения (2.2) кроме, быть может, одного удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad (j = 1, \dots, k), \quad (2.3)$$

то выражения (1.3) могут рассматриваться как полноценные первые приближения к решению задачи.

Условия наличия у уравнений (2.1) вещественных решений относительно постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ могут рассматриваться как необходимые условия возможности синхронизации объектов (мы имеем в виду случай, когда постоянные α_s по своему физическому смыслу должны быть вещественными).

Решение исходной системы, т. е. системы (2.1) гл. 1, при необходимости можно разыскивать в виде рядов по степеням малого параметра (см. § 1 гл. 10). К счастью, однако, в большинстве задач о синхронизации вполне достаточно ограничиться нахождением первых членов рядов, определяемых приближением (1.3), при условии, конечно, что постоянные найдены из уравнений (2.1). Напомним, что эти постоянные определяют фазировку движения объектов в синхронных режимах системы.

Таким образом, уравнения (2.1) играют весьма важную роль при решении задач о синхронизации: они служат для вычисления фаз движения объектов в исходном приближении, для установления условий существования синхронных движений в системе; через левые части этих уравнений $P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ выражаются и условия устойчивости синхронных движений. Назовем функции P_s *порождающими функциями*, а уравнения (2.1) — *основными уравнениями задачи о синхронизации* слабо связанных объектов. Отмстим, что эти уравнения не могут быть составлены только на основе информации, содержащейся в порождающей системе (1.1); для этого необходимо учесть также те члены в исходных уравнениях (2.1) гл. 1, которые содержат малый параметр, в частности члены, отвечающие функциям связей $\mu \tilde{F}^{(s)}(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k)}, u, \mu)$. Впрочем, для составления функций $P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ обычно оказывается достаточно линейных относительно μ членов разложений функций $\mu \tilde{F}^{(s)}$, т. е. выражений $\mu \tilde{F}^{(s)}(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k)}, u_0, 0)$.

Весьма существенно, что трудности получения выражений для порождающих функций P_s в явной форме для задач о синхронизации слабо связанных объектов определяются не степенью

сложности всей системы в целом, а лишь степенью сложности отдельных изолированных объектов и системы связи. Это обстоятельство значительно облегчает решение задач о синхронизации объектов со слабыми связями.

Рассмотренным результативным соотношением задачи о исследовании синхронизации слабо связанных объектов часто можно придать значительно более удобную форму [40, 41, 43, 57, 81, 164, 165, 209—211, 282—286]. Предположим, например, что существует такая функция $D = D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, что выполняются соотношения

$$\partial D / \partial \alpha_s = -P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (s = 1, \dots, k). \quad (2.4)$$

Функцию D (последняя, как и P_s , здесь предполагается вещественной) назовем *потенциальной функцией*.

Рассматривая совместно соотношения (2.1)—(2.4), нетрудно прийти к выводу, что устойчивые синхронные движения системы могут соответствовать тем стационарным точкам $\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*$ потенциальной функции $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, в которых эта функция имеет минимум, обнаруживаемый на основе анализа членов не выше второго порядка в разложении ее вблизи стационарных точек. Доказательство, а также более точная формулировка этого утверждения приводятся в § 8 гл. 10.

Таким образом, функция D в рассматриваемых задачах о синхронизации играет ту же роль, что и потенциальная энергия системы в задаче об отыскании и исследовании устойчивости положений равновесия консервативных систем.

Сформулированный критерий устойчивости синхронных движений был назван *интегральным* [40, 41, 43], поскольку функция D , так же как и порождающие функции P_s , зависит от усредненных за период характеристик движения системы, вычисленных для порождающего решения. Значение этого критерия определяется тем, что потенциальная функция D во многих конкретных задачах о синхронизации имеет отчетливый физический смысл, что позволяет рассмотреть вопрос о наличии или отсутствии тенденции объектов к синхронизации в весьма общей форме, а также облегчить решение задачи синтеза систем с синхронизируемыми объектами. Другое достоинство интегрального критерия состоит в том, что он открывает возможности для использования хорошо разработанных алгоритмов поиска экстремумов функции многих переменных, допускающих применение современных вычислительных машин. При наличии этого критерия условия устойчивости движения могут быть к тому же выражены в явной форме с помощью известной теоремы Сильвестра.

Весьма существенно, в частности, что наличие устойчивых синхронных движений, т. е. тенденции к синхронизации, удается при достаточно общих предположениях доказать в случае

периодичности потенциальной функции D по $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, а также в случаях, когда D близка к периодической или функции P , близки к таким, для которых существует функция $\bar{D}$, близкая к периодической. (В этих случаях будем говорить о существовании квазипериодической квазипотенциальной функции; см. § 9 гл. 10).

Несмотря на то, что требование существования потенциальной (или квазипотенциальной) функции D , казалось бы, накладывает на рассматриваемую систему достаточно жесткие условия, эта функция существует во многих важных задачах о синхронизации, а также и в других задачах теории нелинейных колебаний, для которых порождающая система допускает семейство периодических решений, зависящее от некоторого числа произвольных параметров. Распирению класса систем, для которых действует интегральный критерий, способствует также и то обстоятельство, что, как можно показать, для его справедливости достаточно существования функции D , удовлетворяющей не условиям (2.4), а гораздо менее жестким соотношениям:

$$b_{s1} \frac{\partial D}{\partial \alpha_1} + b_{s2} \frac{\partial D}{\partial \alpha_2} + \dots + b_{sk} \frac{\partial D}{\partial \alpha_k} = -P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (2.5)$$

$$(s = 1, \dots, k),$$

где $b_{sj} = b_{js}$ — любые постоянные, подчиненные требованию, чтобы квадратичная форма $B(z, z) = \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k b_{sj} z_s z_j$ была положительной. На возможность подобного обобщения внимание автора обратили Р. Ф. Нагаев и К. Ш. Ходжаев.

Выше мы умышленно несколько упростили ситуацию, чтобы не загромождать изложение второстепенными деталями и оговорками. Из опущенных подробностей отметим лишь, что в автономном случае, т. е. в задаче о внутренней синхронизации, из уравнений (2.1) определяются не сами начальные фазы α_s , а лишь фазовые сдвиги $\alpha_s - \alpha_k$, но зато обычно находится также первое приближение к синхронной частоте ω ; уравнение (2.2) должно иметь лишь $k-1$ корней с отрицательной вещественной частью, ибо всегда присутствующий в этом случае нулевой корень не играет никакой роли. Далее число произвольных постоянных в порождающем решении (1.3) может быть больше, чем число объектов k , поскольку появление таких постоянных не обязательно связано с произволом в выборе начала отсчета времени в движении каждого из изолированных автономных объектов. В этих, а также и других более сложных случаях условия устойчивости, выражаемые через посредство уравнений типа (2.2) и интегральный критерий устойчивости, являются не достаточными, а лишь необходимыми, но играющими все же основную роль при отборе устойчивых синхронных вложений. Ниже,

в гл. 10, конкретные выражения для порождающих функций P , приведены для некоторых типов систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр и представляющих интерес для теории синхронизации. В гл. 3, 4, 7 и 12 выражения для этих функций, а также для потенциальной или квазипотенциальной функции D , еще более конкретизируются применительно к задачам о синхронизации определенных классов слабо взаимодействующих объектов.

В заключение настоящего параграфа коснемся существенного и, к сожалению, часто неправильно освещаемого вопроса о строгости методов Пуанкаре и Ляпунова при их применении к решению прикладных задач.

Дело в том, что основной «работающий» аппарат этих методов позволяет установить факты существования и устойчивости решения, а также сходимости соответствующих рядов, при достаточно малых значениях параметра μ и при достаточно малых начальных отклонениях. Значительно труднее определить границы областей изменения малого параметра и начальных отклонений, в которых эти факты имеют место: несмотря на наличие ряда интересных результатов (см., например, [254]), эффективных универсальных методов здесь до сих пор не существует. Поэтому в подавляющем большинстве прикладных исследований (и задачи о синхронизации не составляют исключения) авторы ограничиваются установлением результатов «в малом», не определяя радиусов сходимости рядов и областей притяжения найденных режимов в фазовом пространстве системы. Между тем при практическом использовании указанных результатов приходится иметь дело с конечными значениями параметра μ и начальных отклонений. Иными словами, результаты локального исследования используются вовсе не локально.

Естественно, что такое применение рассматриваемых методов не является строгим и в принципе может приводить к ошибкам. Иначе говоря, в приложении к практическим задачам локальные результаты, найденные методами Пуанкаре и Ляпунова, являются не достоверными, а лишь правдоподобными. Такие взгляды на рассматриваемые методы высказывались еще А. А. Андроновым и представителями его научной школы [19, 102]. Однако опыт использования методов Пуанкаре и Ляпунова показывает, что «степень правдоподобности» при указанном нестрогом, но осмотнительном применении локальных результатов на деле оказывается весьма высокой: как правило, эти результаты хорошо согласуются с экспериментом, являющимся здесь отнюдь не излишним. Представляется, что причина такого положения состоит, грубо говоря, в хорошей «корреляции» между математическим и интуитивным понятиями «достаточной малости»; по этой, а также и по некоторым другим причинам реальное попа-

дание в область, где локальные результаты несправедливы, гораздо «менее вероятно», чем в ту область, где они верны. Подробное рассмотрение изложенных соображений приводится в четвертой главе книги [57], а также в книге [61].

§ 3. О других математических методах решения задач о синхронизации слабо связанных объектов

Помимо методов Пуанкаре и Ляпунова для решения задач теории синхронизации слабо связанных динамических объектов используются и другие методы, в том числе основанные на использовании малого параметра. Из таких методов наиболее широкое применение получили асимптотические методы и связанные с ними так называемые принципы усреднения и разделения движений. Используются для решения различных задач о синхронизации также метод точечных отображений, стробоскопический метод, вариационные методы. Изложение этих методов (в ряде случаев весьма краткое) приводится в гл. 11.

Здесь мы отметим лишь, что при исследовании только установившихся синхронных движений и их устойчивости упомянутые методы не имеют каких-либо особых преимуществ перед методами Пуанкаре и Ляпунова. Достоинство этих методов состоит, однако, в том, что они позволяют эффективно изучать также и «медленные» процессы установления синхронных режимов, а также некоторые другие, более сложные движения. Примечательно при этом, что для описания указанных медленных процессов во многих случаях получаются уравнения вида

$$a_s \ddot{\alpha}_s + b_s \dot{\alpha}_s + c_s P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (3.1)$$

где a_s , b_s и c_s — некоторые постоянные (a_s и b_s обычно положительны), а P_s — те же самые порождающие функции, о которых говорилось в § 2. При $\alpha_s = \text{const}$ из (3.1), естественно, получаются основные уравнения (2.1), из которых определяются значения фаз α_s в установившихся синхронных движениях. Исследование же устойчивости этих режимов приводит, как правило, к требованию отрицательности вещественных частей корней уравнения (2.2). Иначе, в случае стационарных режимов результаты использования упомянутых методов вполне согласуются с результатами применения методов Пуанкаре и Ляпунова.

Естественно, однако, что дополнительная информация, получаемая при использовании рассматриваемых методов, требует, как правило, также и некоторых дополнительных затрат труда по сравнению с методами Пуанкаре и Ляпунова, ибо применение последних, как отмечалось, обычно сводится к использованию теорем, приводимых в гл. 10.

СИНХРОНИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ И ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

Глава 3

СИНХРОНИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЕЙ

§ 1. О вибрационных машинах и устройствах

Долгое время вибрация рассматривалась преимущественно как вредное побочное явление, сопутствующее работе машин и аппаратов; в этот период основные усилия инженеров и ученых были направлены на поиски путей борьбы с вибрацией *). Лишь в последние несколько десятилетий вибрацию стали использовать для получения полезных эффектов — появились так называемые вибрационные машины и устройства. В настоящее время такие машины и устройства широко используются в различных областях техники и технологии, причем с их помощью достигается значительный технический и экономический эффект. Так, например, без вибрационных уплотнителей не обходится ни одно современное строительство гидротехнических сооружений, без вибрационных площадок для формования и уплотнения бетонных смесей — ни одно предприятие по изготовлению строительных деталей и конструкций, без вибрационных грохотов — ни одна обогатительная фабрика. Находят применение как миниатюрные микровибродвигатели, обеспечивающие дозированное перемещение или поворот деталей с высокой точностью, так и виброразгрузчики железнодорожных вагонов и вибрационные дробилки с массой вибрирующего органа до нескольких десятков тонн. Вибрационным процессам и машинам в настоящее время посвящен ряд монографий и большое число журнальных статей (см., например, [57, 78, 79, 166]). Непрерывно растет поток изобретений в области вибрационной техники.

подавляющее большинство вибрационных машин и устройств может быть идеализировано в виде системы, состоящей из неко-

*) Под *вибрацией* здесь и ниже понимаются механические колебания, размах которых значительно меньше характерного размера колеблющегося тела, а период — некоторого характерного промежутка времени.

торого числа твердых или деформируемых тел $B_{01}, \dots, B_{0n}$ (рис. 5), связанных одно с другим и с неподвижным основанием 1 некоторыми «сосредоточенными» геометрическими связями 2, а также упругими 3 и демпфирующими 4 элементами. Часть из этих тел может представлять рабочие органы машины, другая часть вместе с упругими и демпфирующими элементами —

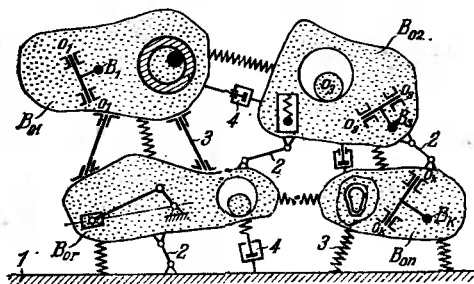


Рис. 5.

моделировать действие на рабочие органы обрабатываемого материала.

В качестве возбудителей колебаний тел $B_{01}, \dots, B_{0n}$ чаще всего используют так называемые *механические вибровозбудители* $B_1, \dots, B_n$, которые в простейшем случае представляют собой неуравновешенные роторы, приводимые от асинхронных электродвигателей и имею-

щие оси вращения $O_1, O_2, \dots, O_n$, фиксированные в телах $B_{01}, \dots, B_{0n}$ (эти последние тела назовем *несущими телами*). Подобные вибровозбудители часто называют *дебалансными* или *инерционными*. Об иных типах механических вибровозбудителей, также изображенных схематично на рис. 5, см. пп. 3 и 5 § 8; обобщение понятия о механическом вибровозбудителе дано в п. 1 § 8 настоящей главы и в § 6 гл. 12.

§ 2. Проблема синхронизации и фазировки вращения роторов механических вибровозбудителей *)

В значительном числе вибрационных машин и установок применяется не один, а несколько механических дебалансных возбудителей. Так, например, использование нескольких относительно маломощных возбудителей вместо одного более мощного может быть обусловлено необходимостью рассредоточить возмущающую силу по вибрирующему органу значительных размеров. Таким путем при соблюдении определенных условий удается обеспечить колебания рабочего органа вибрационной машины, мало отличающиеся от колебаний его как абсолютно твердого тела, несмотря на то что частота вынуждающей силы превышает ряд частот собственных упругих колебаний рабочего органа, т. е. несмотря на его «нежесткость».

*) С иных, более широких, хотя и более формальных позиций эта проблема обсуждается в § 11.

В других случаях использование нескольких вибровозбудителей вместо одного вызвано стремлением уменьшить нагрузку на подшипники возбудителей, распределив ее на большее число подшипников. Это характерно для тяжелых промышленных машин, максимальный размер которых (в случае использования одного возбудителя) предопределяется максимальной работоспособностью освоенных промышленностью подшипников качения.

Применение двух (или любого четного числа) дебалансных возбудителей, роторы которых вращаются с одинаковой угловой скоростью в противоположных направлениях, позволяет получить возмущающую силу постоянного направления, что используется во многих вибрационных машинах и устройствах.

В подавляющем большинстве перечисленных вибрационных машин и установок с несколькими возбудителями необходимым условием нормальной работы является синхронность вращения, а также наличие определенных соотношений между фазами вращения роторов отдельных возбудителей, например, наличие синфазности или противофазности. В ряде случаев возникает задача обеспечения кратно-синхронного движения, т. е. вращения роторов возбудителей с угловыми скоростями, кратными некоторой заданной скорости, и с определенными разностями фаз.

Обычно можно удовлетвориться не точным, а лишь приближенным соблюдением определенных соотношений между фазами вращения роторов: малые колебания, накладывающиеся на вращение, не приводят к нарушению рабочего процесса. Аналогичным образом почти всегда достаточно обеспечить равенство не мгновенных, а средних за один оборот значений угловых скоростей вращения.

До недавнего времени единственным распространенным способом согласования вращения роторов вибровозбудителей было установление между роторами жестких кинематических связей в виде зубчатых зацеплений, цепных передач и т. п. (см., например, рис. 2, а). Такая кинематическая принудительная синхронизация обладает, однако, рядом существенных недостатков. Главным из них является значительный шум и быстрый износ, сопровождающий работу зубчатой или цепной передачи вследствие наличия знакопеременных или пульсирующих вибрационных нагрузок. Кроме того, указанный способ синхронизации сдерживал развитие вибрационной техники, поскольку он не мог быть целесообразно применен во многих практически важных случаях, например при значительных расстояниях между возбудителями.

В последние годы был предложен ряд способов принудительной электрической синхронизации роторов вибровозбудителей (см., например, обзор в книге [57]). Однако широкого практического применения такой способ до настоящего времени не получил, в основном вследствие относительной сложности или отсут-

ствия серийного выпуска соответствующих устройств. Поэтому существенное значение для развития вибрационной техники имело обнаружение явления *самосинхронизации механических вибровозбудителей*, обеспечивающего при выполнении определенных условий автоматическую согласованность вращения роторов вибровозбудителей. Равенство или кратность средних угловых скоростей и наличие определенных фазовых соотношений при вращении роторов осуществляется в этом случае за счет колебаний тел, на которых установлены роторы, т. е. в силу внутренних свойств самой колебательной системы.

§ 3. Обнаружение, исследование и практическое использование явления самосинхронизации механических вибровозбудителей

Насколько нам известно, в Советском Союзе явление самосинхронизации механических дебалансных вибровозбудителей было обнаружено в ленинградском институте «Механобр» в 1947—1948 гг. при выполнении исследовательской работы, проводившейся под руководством Д. А. Плисса. Интересу к этому явлению и пониманию связанных с ним возможностей способствовало следующее наблюдение. На стенде института проходила длительные испытания вибрационная машина с двумя номинально одинаковыми независимыми дебалансными возбудителями, приводимыми от отдельных асинхронных электродвигателей (схема машины была подобна изображенной на рис. 2, б). При установке на неподвижном основании роторы таких возбудителей неизбежно вращались бы с несколько различными угловыми скоростями и случайными фазами. Это обусловлено неточностью изготовления двигателей и возбудителей. Однако будучи установленными на общем вибрирующем органе машины, оба возбудителя работали в среднем синхронно и синфазно. При этом тенденция к синхронному вращению роторов оказалась столь сильной, что их вращение не нарушилось даже при случайном обрыве провода, подводящего питание к одному из электродвигателей: обрыв был обнаружен лишь через несколько часов, на протяжении которых машина практически нормально работала (и продолжала работать до выключения второго двигателя). Иными словами, здесь имело место *вибрационное поддержание вращения неуравновешенного ротора* — явление, представляющее частный случай самосинхронизации, о котором подробнее будет сказано в § 12.

Сделанное наблюдение было зафиксировано Д. А. Плиссом и И. М. Абрамовичем в отчете института «Механобр» [232] (1948 г.), причем было обращено внимание на существенное значение этого явления для вибрационной техники.

Первая из известных нам зарубежных публикаций, касающихся самосинхронизации вибровозбудителей, появилась позднее — в 1950 г. в виде патента на конкретные простейшие вибрационные устройства, выданного на имя шведского изобретателя Сигнула [327, 328]; соответствующая заявка, однако, была сделана в Швеции в 1946 г.

В 1953 г. автором было дано физическое объяснение и математическое описание эффекта самосинхронизации механических вибровозбудителей [31], затем результаты этой статьи были развиты и дополнены как в работах автора, так и других отечественных исследователей — П. М. Алабужева, Л. К. Балабатько, О. П. Барзукова, И. И. Быховского, Л. А. Вайсберга, И. И. Виткуса, Ю. Ю. Гецявичуса, Л. А. Гольдина, В. В. Гузева, Г. А. Денисова, П. Б. Зарецкого, А. К. Зуева, Е. П. Иванова, М. Ш. Кирнарского,

И. И. Круша, А. Л. Кумпикаса, Б. П. Лаврова, А. И. Лурье, Ю. И. Марченко, Р. Ф. Нагаева, К. А. Олехновича, Е. И. Плохотнюка, И. А. Поповой, В. Н. Погураева, К. М. Рагульскаса, А. Д. Рудина, Н. Г. Тимофеева, А. Д. Учителя, К. В. Фролова, К. Ш. Ходжаева, А. Г. Червоненко, О. Я. Шехтер, Л. М. Шифрина [5, 14—17, 35—38, 40—43, 45—49, 51, 53, 55—59, 63, 64, 79, 91, 99, 104, 105, 114—118, 130—132, 140, 148, 159, 230, 231, 235, 241, 242, 246, 249, 256, 275, 283, 284, 293, 300, 306]. Из зарубежных публикаций по теории самосинхронизации вибровозбудителей, появившихся после 1965 г., отметим работы Р. Миклашевского [320], В. Богуша, и З. Энгеля [307], Л. Шперлинга [329, 330], Араки Иосиаки, Иноуэ Дзюнкити, Хаяси Сэцую, Мияура Суга и Окада Юкимаза [323].

Основные результаты перечисленных исследований изложены в данной главе с соответствующими ссылками или же упомянуты в кратком обзоре, приведенном в п. 7 § 8. Более полный обзор работ, выполненных до 1970 г. включительно, приведен в книге [57].

Развитие теории и разработка методов расчета устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями привело к созданию и внедрению в промышленности нового класса вибрационных машин — конвейеров, питателей, грохотов, дробилок, мельниц, концентрационных столов, специальных станков и других. К настоящему времени в СССР зарегистрировано более ста изобретений, основанных на использовании эффекта самосинхронизации. Заметим, что многие из этих изобретений, по-видимому, не могли бы быть сделаны при отсутствии соответствующих теоретических исследований и методов расчета. Дело в том, что как будет показано ниже, ряд закономерностей самосинхронизации вибровозбудителей вряд ли может быть предсказан на основе чисто интуитивных соображений или обнаружен на основе нецеленаправленного экспериментирования. Описание ряда устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями приведено в § 15.

Следует отметить, что большинство теоретических исследований и экспериментально-конструкторских разработок устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями выполнено сотрудниками ленинградского института «Механобр».

Обнаружение явления самосинхронизации вибровозбудителей позволяет по-новому подойти к проблеме групповых фундаментов под неуравновешенные машины — речь идет о случае, когда на одном фундаменте размещают несколько машин с вращающимися или колеблющимися неуравновешенными массами. В этом особом случае самосинхронизация может оказаться не только вредной, но и весьма опасной: если в возникающем синхронном движении фазы вращения роторов таковы, что неуравновешенности от отдельных машин складываются, то это может привести (и действительно иногда приводило) к недопустимо большим колебаниям фундамента и даже к разрушениям строительных конструкций. С другой стороны, при расчете и проектировании группового фундамента с учетом результатов теории самосинхронизации часто можно обеспечить взаимную компенсацию неуравновешенных сил, возникающих при работе отдельных машин, и тем самым значительно снизить уровень колебаний фундамента.

Работы по теории синхронизации вибровозбудителей привели еще к одному результату: они стимулировали развитие общей теории синхронизации и способствовали формированию взгляда на тенденцию к синхронизации как на общее свойство материальных объектов самой различной природы. В частности, было обнаружено, что синхронизация естественных и искусственных небесных тел подчиняется тем же основным закономерностям, что и синхронизация неуравновешенных роторов. Так, например, и в том и в другом случае оказывается справедливым так называемый *интегральный критерий* (экстремальное свойство) устойчивости синхронных движений (см. гл. 7).

§ 4. Самосинхронизация дебалансных вибровозбудителей в простейшей колебательной системе (основные соотношения)

Большинство особенностей постановки и решения задачи о синхронизации механических вибровозбудителей, а также многие закономерности явления, могут быть выяснены на простейшем примере, относящемся к самосинхронизации дебалансных вибровозбудителей на абсолютно жесткой платформе с одной степенью свободы [31, 57]. Динамическая схема системы изображена на рис. 6. Жесткая платформа 1 (*несущее тело*) может перемещаться относительно неподвижного основания 2 в строго

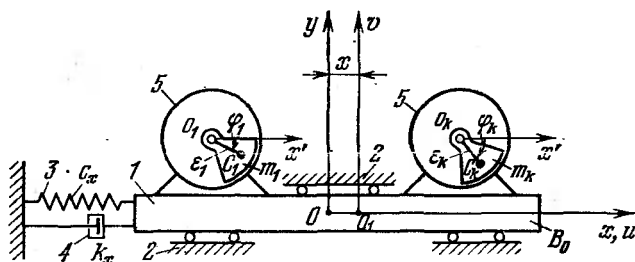


Рис. 6.

фиксированном направлении Ox . Платформа связана с основанием посредством упругих элементов 3 с жесткостью c_x и линейного демпфирующего элемента 4 с коэффициентом сопротивления k_x . На платформе установлено некоторое число k дебалансных вибровозбудителей 5 (неуравновешенных роторов), оси которых перпендикулярны направлению колебаний платформы и которые приводятся во вращение электродвигателями асинхронного типа.

Описанная система представляет собой частный случай широкого класса механических систем, рассмотренных в § 6 гл. 12 — так называемых *орбитальных систем*.

Примем за обобщенные координаты системы смещение платформы x от положения, соответствующего ненапряженным упругим элементам, и углы поворота роторов φ_s ($s = 1, \dots, k$), отсчитываемые от направления оси Ox по ходу часовой стрелки. Тогда выражения для кинетической и потенциальной энергии системы запишутся в форме

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \mathcal{I}_{cs} \dot{\varphi}_s^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k m_s (\dot{x}_{cs}^2 + \dot{y}_{cs}^2), \quad (4.1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_x x^2 + \sum_{s=1}^k m_s g e_s (1 - \sin \varphi_s). \quad (4.2)$$

Здесь $\mathcal{M}$ — масса платформы, m_s и $\mathcal{I}_{cs}$ — соответственно масса и момент инерции ротора s -го вибровозбудителя относительно оси, проходящей через его центр тяжести C_s , g — ускорение силы тяжести, ε_s — эксцентриситет, а

$$x_{cs} = u_s + x + \varepsilon_s \cos \varphi_s, \quad y_{cs} = v_s - \varepsilon_s \sin \varphi_s \quad (4.3)$$

— координаты центра тяжести s -го ротора в системе неподвижных осей xOy (uO_1v — оси, жестко связанные с платформой и совпадающие с осями xOy при $x = 0$; u_s и v_s — постоянные, представляющие собой координаты осей вращения роторов O_s в осях uO_1v).

При учете формул (4.3) выражение для кинетической энергии (4.1) преобразуется к виду

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k I_s \dot{\varphi}_s^2 - \dot{x} \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s \dot{\varphi}_s \sin \varphi_s. \quad (4.4)$$

Здесь обозначено

$$M = \mathcal{M} + \sum_{s=1}^k m_s, \quad I_s = \mathcal{I}_{cs} + m_s \varepsilon_s^2. \quad (4.5)$$

Составляя теперь уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j,$$

где q_j — обобщенные координаты системы, а Q_j — соответствующие им обобщенные неконсервативные силы, приходим к следующим дифференциальным уравнениям движения рассматриваемой системы:

$$I_s \ddot{\varphi}_s = L_s(\dot{\varphi}_s) - R(\dot{\varphi}_s) + m_s \varepsilon_s (\ddot{x} \sin \varphi_s + g \cos \varphi_s) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (4.6)$$

$$M \ddot{x} + k_x \dot{x} + c_x x = \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j + \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j). \quad (4.7)$$

Здесь учтены неконсервативные силы $Q_x = -k_x \dot{x}$ и $Q_s = L_s(\dot{\varphi}_s) - R_s(\dot{\varphi}_s)$, представляющие собой соответственно силу вязкого сопротивления колебаниям платформы и момент, действующий на ротор s -го вибровозбудителя; при этом $L_s(\dot{\varphi}_s)$ есть вращающий момент асинхронного электродвигателя (его так называемая ста-

тическая характеристика *)), а $R_s(\dot{\varphi}_s)$ — момент сил сопротивления вращению, обусловленный, как правило, сопротивлениями в подшипниках; при этом

$$R_s(\dot{\varphi}_s) = R_s^\circ (|\dot{\varphi}_s|) \operatorname{sgn} \dot{\varphi}_s, \quad (4.8)$$

где R_s° — модуль момента сопротивления.

Уравнения (4.6) являются уравнениями движения роторов возбудителей, а уравнение (4.7) — уравнением колебаний платформы. По своей структуре эти уравнения вполне соответствуют

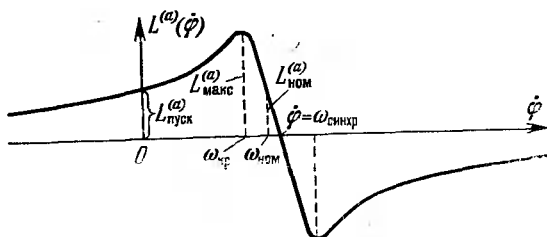


Рис. 7.

общим уравнениям задачи о синхронизации динамических объектов (см. уравнения (1.3) гл. 1); в них нетрудно выделить фазовые координаты объектов (φ_s и $\dot{\varphi}_s$) и системы связи (x и $\dot{x}$), а также и функции связей.

В целом система (4.6), (4.7) существенно нелинейна. Лишь если предположить, что роторы возбудителей вращаются равномерно, т. е. $\varphi_s = \sigma_s(\omega t + \alpha_s)$, где α_s — постоянные, а $|\sigma_s| = 1$, то уравнение (4.7) превратится в обычное линейное уравнение малых колебаний платформы под действием гармонических возмущающих сил. Это уравнение соответствует предположению, что колебания платформы никак не отражаются на движении возбудителей. При изучении ряда вопросов такая упрощенная постановка задачи является вполне приемлемой.

*) Обычно при рассмотрении задач о синхронизации вибровозбудителей достаточно ограничиться именно статическими характеристиками двигателей, ибо постоянные времени механических переходных процессов оказываются значительно большими, чем электрических (подробнее об этом см. в книге [57]). Несколько схематизированная типичная статическая характеристика асинхронного электродвигателя представлена на рис. 7, где через $L_{пуск}^{(a)}$, $L_{макс}^{(a)}$ и $L_{ном}^{(a)}$ обозначены соответственно пусковой, максимальный и номинальный моменты, а через $\omega_{кр}$, $\omega_{ном}$ и $\omega_{синхр}$ — соответственно критическая, номинальная и синхронная частоты вращения ротора.

При рассмотрении же вопросов синхронизации вибровозбудителей нельзя игнорировать наличие связей между колебательными и вращательными координатами системы, ибо как раз наличие этих связей и предопределяет картину движения. Адекватные задаче уравнения движения системы при этом, естественно, оказываются значительно более сложными. В уравнениях (4.6) обратное влияние колебаний платформы на движение роторов возбудителей отражается слагаемыми $m_s \varepsilon_s x \sin \varphi_s$. Как будет ясно из дальнейшего, именно эти слагаемые предопределяют самосинхронизацию вибровозбудителей, а также другие важные эффекты в рассматриваемой системе.

Основная задача о самосинхронизации вибровозбудителей состоит в выяснении условий, при выполнении которых роторы всех возбудителей будут вращаться с одинаковыми по абсолютной величине средними угловыми скоростями несмотря на отсутствие каких-либо непосредственных связей между ними и на различие параметров, характеризующих возбудители и действующие на них моменты. Иными словами, речь идет о выяснении условий существования и устойчивости решений системы (4.6), (4.7), имеющих вид

$$\varphi_s = \sigma_s [\omega t + \alpha_s + \psi_s(\omega t)] \quad (s = 1, \dots, k), \quad x = x(\omega t), \quad (4.9)$$

где ω — абсолютная величина средней скорости вращения роторов, α_s — постоянные (начальные фазы вращения), ψ_s и x_s — периодические функции времени t с периодом $T = 2\pi/\omega$, а каждая из величин σ_s равна либо 1, либо -1 ; первому случаю отвечает вращение ротора s -го возбудителя в положительном, а второму — в отрицательном направлении. Величина синхронной угловой скорости ω заранее неизвестна, она подлежит определению в ходе решения задачи.

Движения типа (4.9) в соответствии с терминологией, принятой в гл. 1, являются *простыми синхронными*; иногда интерес представляют и *кратно-синхронные* движения; этот более сложный случай, как правило, требует специального рассмотрения (см. [57]), а также обзор работ в п. 7 § 8).

Помимо выяснения условий существования и устойчивости синхронных движений, представляет интерес также отыскание, по крайней мере приближенное, закона движения роторов и платформы в устойчивых синхронных движениях, а также решение обратной задачи («задачи синтеза»), состоящей в таком выборе параметров системы, при котором обеспечивается существование и устойчивость синхронного движения определенного характера.

Как показывает опыт и аналитические оценки, в изучаемых синхронных движениях системы вращение роторов мало отлича-

ется от равномерного. Поэтому функции $L_s(\dot{\varphi}_s)$ и $R_s(\dot{\varphi}_s)$ можно линеаризовать вблизи значения $\varphi_s = \sigma_s \omega$, положив при учете равенства (4.8)

$$\begin{aligned} L_s(\dot{\varphi}_s) &= L_s(\sigma_s \omega) - k_s^* (\dot{\varphi}_s - \sigma_s \omega), \\ R_s(\dot{\varphi}_s) &= \sigma_s R_s^\circ(\omega) + k_s^\circ (\dot{\varphi}_s - \sigma_s \omega), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$k_s^* = - \left(\frac{dL_s}{d\dot{\varphi}_s} \right)_{\dot{\varphi}_s = \sigma_s \omega}, \quad k_s^\circ = \left(\frac{dR_s^\circ}{d|\dot{\varphi}_s|} \right)_{\dot{\varphi}_s = \sigma_s \omega} = \frac{dR_s^\circ(\omega)}{d\omega} \quad (4.11)$$

— соответственно коэффициенты электрического и механического демпфирования; оба эти коэффициента обычно положительны, что и будем ниже всегда предполагать.

Заметим, впрочем, что окончательный результат получается тем же, если не использовать соотношения (4.10), однако он достигается более сложным путем.

Имея в виду решение задачи методом Пуанкаре, введем в систему (4.6) и (4.7) малый параметр μ , представив ее в форме

$$\begin{aligned} I_s \ddot{\varphi}_s + k_s (\dot{\varphi}_s - \sigma_s \omega) &= \mu \Phi_s(\varphi_s, \ddot{x}) \quad (s = 1, \dots, k), \\ M \ddot{x} + c_x x &= \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j + \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) - \mu k_x \ddot{x}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где обозначено *)

$$k_s = k_s^* + k_s, \quad k_x = \mu k'_x, \quad (4.13)$$

$$\mu \Phi_s = L_s(\sigma_s \omega) - \sigma_s R_s^\circ(\omega) + m_s \varepsilon_s (\ddot{x} \sin \varphi_s + g \cos \varphi_s).$$

Такой способ введения малого параметра соответствует допущению о почти равномерном вращении роторов в разыскиваемом синхронном движении, а также предположению, что рассматривается движение вдали от резонанса, когда силу трения $k_x x$ в колебательной части системы можно считать малой по сравнению с силой упругости или силой инерции, а также с вынуждающей силой. Впрочем заметим, что в пользу принятого способа введения малого параметра говорят также реальные оценки порядков входящих в уравнения членов. Подробнее об этом сказано в § 3 гл. XIII, а также в гл. IV книги [57]; там же указано на своего рода «устойчивость» получаемых результатов исследования относительно способа введения малого параметра: эти ре-

) Величину $k_s = k_s^ + k_s^\circ > 0$ назовем суммарным коэффициентом демпфирования.

зультаты, например, изменятся не существенно, если принять также $k_s = \mu k'_s$ или отказаться от предположения, что $k_x = \mu k'_x$.

Для решения рассматриваемой задачи можно воспользоваться как непосредственно теоремой § 2 гл. 10, так и результатом решения задачи о синхронизации объектов с почти равномерными вращательными движениями (см. § 4 гл. 12); остановимся на последнем варианте.

Соответствующая уравнениям (4.12) порождающая система

$$\begin{aligned} I_s \ddot{\varphi}_s^0 + k_s (\dot{\varphi}_s^0 - \sigma_s \omega) &= 0 \quad (s = 1, \dots, k), \\ M \ddot{x}^0 + c_x x^0 &= \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j [\ddot{\varphi}_j^0 \sin \varphi_j^0 + (\dot{\varphi}_j^0)^2 \cos \varphi_j^0] \end{aligned} \quad (4.14)$$

допускает семейство синхронных решений

$$\varphi_s^0 = \sigma_s (\omega t + \alpha_s), \quad x^0 = -\frac{\omega^2}{\omega^2 - p_x^2} \sum_{j=1}^k \frac{m_j \varepsilon_j}{M} \cos (\omega t + \alpha_j), \quad (4.15)$$

зависящее от k произвольных параметров α_s . Основные уравнения (см. уравнения (4.6) гл. 12), из которых определяются параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ порождающего решения, в данном случае имеют вид *)

$$\begin{aligned} P_s (\alpha_1, \dots, \alpha_k) &\equiv \frac{\sigma_s}{k_s} \langle (\mu \Phi_s (\varphi_s^0, \ddot{x}^0)) \rangle = 0 \\ (s &= 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Производя усреднение при учете выражений (4.13) и (4.15), а также равенств

$$\begin{aligned} \sigma_s &= 1/\sigma_s, \quad \sin \sigma_s \alpha_s = \sigma_s \sin \alpha_s, \quad \cos \sigma_s \alpha_s = \cos \alpha_s; \\ \langle \sin (\omega t + \alpha_s) \cos (\omega t + \alpha_s) \rangle &= \frac{1}{2} \sin (\alpha_s - \alpha_j), \\ \langle \sin (\omega t + \alpha_s) \sin (\omega t + \alpha_j) \rangle &= \langle \cos (\omega t + \alpha_s) \cos (\omega t + \alpha_j) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cos (\alpha_s - \alpha_j), \end{aligned} \quad (4.17)$$

будем иметь

$$\langle L_s (\sigma_s \omega) - \sigma_s R_s (\omega) \rangle = L_s (\sigma_s \omega) - \sigma_s R_s (\omega),$$

*) Напомним, что здесь и ниже скобки $\langle \rangle$ указывают на усреднение содержащегося в них выражения за период по переменной t или τ . Дополнительные (не выполняющие обычной роли) круглые скобки, в которые заключены обозначения функций, указывают, что эти функции вычисляются для порождающего решения.

$$\langle \ddot{x}^0 \sin \varphi_s^0 \rangle =$$

$$= \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \sum_{j=1}^k \frac{m_j \varepsilon_j}{M} \langle \cos(\omega t + \alpha_j) \sin \sigma_s(\omega t + \alpha_s) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sigma_s \omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \sum_{s=1}^k \frac{m_s \varepsilon_s}{M} \sin(\alpha_s - \alpha_j), \quad (4.18)$$

$$\langle g \cos \varphi_s^0 \rangle = g \langle \cos(\omega t + \alpha_s) \rangle = 0,$$

в результате чего основные уравнения (4.16) запишутся в форме

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{k_s} [Z_s(\sigma_s, \omega) - W_s^{(K)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)] = 0$$

$$(s = 1, \dots, k). \quad (4.19)$$

Здесь обозначено

$$W_s^{(K)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = -m_s \varepsilon_s \langle \ddot{x}^0 \sin \varphi_s^0 \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \frac{m_s \varepsilon_s}{M} \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j \sin(\alpha_s - \alpha_j), \quad (4.20)$$

$$Z_s(\sigma_s \omega) = \sigma_s L_s(\sigma_s \omega) - R_s^\circ(\omega).$$

Величины Z_s и $W_s^{(K)}$, имеющие размерность моментов, играют значительную роль в дальнейшем исследовании; назовем их соответственно *избыточными моментами возбудителей* и *вибрационными моментами*. Физический смысл этих величин подробно обсуждается в § 5; смысл индекса K при W_s будет ясен из сказанного в п. 2 § 8.

Как и должно быть при решении задачи о внутренней синхронизации, уравнения (4.19) содержат лишь разности фаз $\alpha_s - \alpha_j$, вследствие чего одну из фаз можно считать произвольной, например положить $\alpha_k = 0$. Указанные уравнения поэтому содержат лишь $k - 1$ независимых неизвестных разностей фаз $\alpha_1 - \alpha_k, \dots, \alpha_{k-1} - \alpha_k$; вместе с тем эти уравнения, вообще говоря, позволяют определить заранее неизвестное первое приближение к модулю угловой скорости синхронного вращения ω . Для этой величины из системы (4.19) нетрудно получить одно независимое уравнение, если заметить, что

$$\sum_{s=1}^k W_s^{(K)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) =$$

$$= -\frac{1}{2M} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j \sin(\alpha_s - \alpha_j) =$$

$$= -\frac{1}{2M} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \left(\sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k m_s \varepsilon_s m_j \varepsilon_j \sin \alpha_s \cos \alpha_j - \right. \\ \left. - \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k m_s \varepsilon_s m_j \varepsilon_j \cos \alpha_s \sin \alpha_j \right) \equiv 0 \quad (4.21)$$

(тождественность обеих двойных сумм в последнем равенстве становится очевидной, если заменить в одной из них индекс s на j , а j на s). Сложив все уравнения (4.19), предварительно умноженные на k_s , при учете (4.21) получим равенство

$$\sum_{s=1}^k Z_s(\sigma_s, \omega) = 0, \quad (4.22)$$

или согласно (4.20)

$$\sum_{s=1}^k \sigma_s L_s(\sigma_s \omega) = \sum_{s=1}^k R_s^\circ(\omega). \quad (4.23)$$

Эти соотношения выражают условие баланса энергии в системе и служат для определения ω .

В соответствии с изложенным в § 4 гл. 12 для существования синхронных движений изучаемого типа необходимо, чтобы уравнения (4.19) допускали вещественное решение относительно разностей фаз $\alpha_1 - \alpha_k, \dots, \alpha_{k-1} - \alpha_k$, а уравнение (4.22) — положительные решения относительно ω . Каждому такому решению действительно соответствует единственное орбитально асимптотически устойчивое синхронное движение, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение (4.15), если для этого решения все корни χ алгебраического уравнения k -й степени

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial (P_1 - P_k)}{\partial \alpha_1} - \chi & \frac{\partial (P_1 - P_k)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial (P_1 - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} \\ \frac{\partial (P_2 - P_k)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial (P_2 - P_k)}{\partial \alpha_2} - \chi & \dots & \frac{\partial (P_2 - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial (P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial (P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial (P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} - \chi \end{vmatrix} = 0 \quad (4.24)$$

имеют отрицательные вещественные части. При наличии хотя бы одного корня с положительной вещественной частью соответствующее решение неустойчиво; в случае нулевых или чисто мнимых корней требуется, вообще говоря, дополнительное исследование.

Заметим, что помимо указанных выше условий устойчивости в рассматриваемой задаче получается еще одно условие, связан-

ное с наличием у характеристического уравнения системы в вариациях, отвечающей порождающей системе и порождающему решению, корней $\rho^0 = e^{\pm i\lambda x}$, равных по модулю единице [31, 57]. Однако это дополнительное условие обычно всегда выполняется на достаточном удалении от зоны резонанса $\lambda_x \approx \omega$ и к тому же не зависит от фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Поэтому равенства (4.19), (4.22) и (4.24) и являются основными результативными соотношениями теории самосинхронизации вибровозбудителей в рассматриваемом случае.

§ 5. Общий анализ и различные формы записи основных соотношений задачи о самосинхронизации вибровозбудителей. Вибрационные моменты, парциальные угловые скорости

Рассмотрим подробнее смысл основных уравнений (4.19). Прежде всего заметим, что эти уравнения могут быть формально получены, если предположить, что движение системы происходит по закону (4.15), отвечающему порождающему решению, а затем усреднить за период $T = 2\pi/\omega$ уравнения движения роторов (4.6), умноженные на σ_s/k_s . Таким образом, основные уравнения (4.19) являются приближенными уравнениями равновесия средних моментов сил, действующих на роторы вибровозбудителей в установившемся синхронном движении.

Обращаясь к анализу отдельных членов уравнений (4.19), отметим, что величина $\sigma_s L_s(\sigma_s, \omega)$ представляет значение вращающего момента двигателя, вычисленное в порождающем приближении $\dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}_s^0 = \sigma_s \omega$; при этом момент $\sigma_s L_s(\sigma_s, \omega)$, в отличие от момента $L_s(\sigma_s, \omega)$, отсчитывается в направлении вращения s -го ротора *). Величина $R_s^0(\omega)$ есть момент сил сопротивления движению ротора, также вычисленный в порождающем приближении и отсчитываемый в направлении вращения s -го ротора.

Величины $W^{(K)}$ выше были названы вибрационными моментами (см. § 4). Эти моменты можно трактовать как дополнительные средние моменты, действующие на неуравновешенные роторы вследствие колебаний основания, на котором они установлены **). Вибрационные моменты представляют для роторов как бы добавочные средние нагрузки (в случае, если $W_s^{(K)} > 0$) или добавочные вращающие моменты (в случае, если $W_s^{(K)} < 0$).

*) Следует учитывать смысл величины σ_s , разъясненный в § 4; см. также сноску на стр. 65.

**) Понятие вибрационного момента, по-видимому, впервые было введено П. Л. Капицей при решении задачи о колебаниях маятника с вибрирующей осью [135].

Наличием вибрационных моментов объясняется самосинхронизация вибровозбудителей, вибрационное поддержание вращения, а также ряд своеобразных явлений, сопутствующих принудительной электрической или механической синхронизации.

Физическое существо этих явлений, о которых подробно говорится ниже, состоит в наличии существенной «вибрационной связи» между отдельными роторами, обусловленной колебаниями общего основания, на котором они установлены. Возникновение вибрационных моментов и является проявлением этой связи. Иногда указанная связь достаточно сильна и носит такой характер, что движение вибровозбудителей с желательной комбинацией сдвигов фаз существует и устойчиво «само по себе». При этом можно не вводить искусственных связей между роторами, т. е. использовать явление самосинхронизации. В других случаях для обеспечения существования и устойчивости требуемого движения приходится либо изменять характер «естественных» вибрационных связей, либо вводить ту или иную искусственную связь (элементы принудительной синхронизации).

Согласно выражению (4.20) вибрационный момент $W_s^{(K)}$, действующий на ротор s -го возбудителя, можно рассматривать как сумму

$$W_s^{(K)} = \sum_{j=1}^h w_{sj}^{(K)}, \quad (5.1)$$

слагаемые которой

$$w_{sj}^{(K)} = -w_{js}^{(K)} = -\frac{1}{2} \frac{m_s e_s m_j e_j \omega^4}{M(\omega^2 - p_y^2)} \sin(\alpha_s - \alpha_j) \quad (5.2)$$

представляют «частные» вибрационные моменты, характеризующие воздействие s -го возбудителя на j -й. При этом имеет место свойство взаимности $w_{sj}^{(K)} = -w_{js}^{(K)}$, $w_{ss}^{(K)} = 0$, вследствие которого, как уже отмечалось в § 4, сумма всех вибрационных моментов тождественно равна нулю:

$$\sum_{s=1}^h W_s^{(K)} = \sum_{s=1}^h \sum_{j=1}^h w_{sj}^{(K)} = 0. \quad (5.3)$$

Именно поэтому вибрационные моменты $W_s^{(K)}$ не входят в уравнение баланса энергии (4.22): вибрационные моменты не изменяют общего баланса энергии в системе, а лишь перераспределяют подводимую к системе энергию между отдельными возбудителями, подгоняя «медленные» и тормозя «быстрые» возбудители как раз таким образом, что обеспечивается их синхронное вращение (смысл взятых в кавычки терминов «быстрый» и «медленный» возбудитель станет ясным несколько ниже, после

введения понятий о парциальных угловых скоростях вращения роторов возбудителей). Заметим, впрочем, что равенства типа (5.1) и (5.2) справедливы не для всех типов возбудителей и не при любом характере идеализации системы (см. § 8).

Наибольшие значения $\tilde{W}_s^{(K)}$ вибрационных моментов $W_s^{(K)}$ (назовем их *модулями вибрационных моментов*) являются мерой силы вибрационной связи между роторами. На основе представления (5.1) нетрудно заключить, что модуль вибрационного момента $\tilde{W}_s^{(K)}$ равен произведению возмущающей силы $F_{s_i} = m_s \varepsilon_s \omega^2$, развиваемой s -м возбудителем, на своеобразное «плечо» этой силы A_s , которое будем называть *эффективной амплитудой колебаний оси ротора* этого возбудителя, обусловленных действием всех прочих возбудителей:

$$\tilde{W}_s^{(K)} = F_{s_i} A_s. \quad (5.4)$$

Конкретное выражение для эффективной амплитуды колебаний будет получено в § 6 для случая двух вибровозбудителей; более общее выражение приводится в § 12. Здесь же заметим, что если величины статических моментов роторов всех возбудителей увеличить в некоторое число ρ раз, то согласно (4.20) модули вибрационных моментов $W_s^{(K)}$ возрастут в ρ^2 раз. При сохранении отстройки $\omega^2 - p_x^2$ величины $\tilde{W}_s^{(K)}$ возрастают пропорционально ω^4 , а при $p_x \approx 0$ (случай мягкой амортизации тела) — пропорционально ω^2 . Можно сказать также, что модули вибрационных моментов возрастают с увеличением интенсивности колебаний тела, на котором размещены роторы возбудителей. При увеличении массы тела M и при сохранении отстройки величины $\tilde{W}_s^{(K)}$ убывают; в пределе при $M \rightarrow \infty$, как и при полностью уравновешенных роторах ($m_s \varepsilon_s = 0$), что отвечает неподвижному телу, величины $\tilde{W}_s^{(K)} = 0$, т. е. вибрационная связь между роторами отсутствует. Заметим, что действие частных вибрационных моментов $w_{sj}^{(K)}$, т. е. вибрационной связи между роторами, вполне подобно тому, как если бы между s -м и j -м ротором была установлена пружина, создающая момент, пропорциональный синусу модуля угла сдвига фаз $|\alpha_s - \alpha_j|$ вращения роторов. Поворотная жесткость c_w , соответствующая этой фиктивной пружине при $|\alpha_s - \alpha_j| = 0$, в рассматриваемом простейшем случае равна по модулю величине

$$\tilde{w}_{sj}^{(K)} = \left| \frac{\partial w_{sj}^{(K)}}{\partial (\alpha_s - \alpha_j)} \right|_{\alpha_s - \alpha_j = 0} = \frac{1}{2} \frac{m_s \varepsilon_s m_j \varepsilon_j \omega^4}{M |\omega^2 - p_x^2|},$$

т. е. модулю частного вибрационного момента. Устойчивое состояние соответствует в зависимости от знака разности $\omega - p_x$ либо углу сдвига фаз $\alpha_s - \alpha_j = 0$, либо углу $\alpha_s - \alpha_j = \pi$.

Указанная простая интерпретация действия вибрационных моментов, объясняющая одновременно по механизм явления самосинхронизации, часто оказывается весьма удобной при качественном анализе.

Введем далее в рассмотрение величины ω_s , которые равны угловым скоростям установившегося вращения роторов вибровозбудителей при условии, что последние установлены не на вибрирующем теле, а на неподвижном основании, и что за положительное направление угловой скорости принято направление, в котором вращается ротор s -го возбудителя в рассматриваемом синхронном движении. Эти угловые скорости ω_s будем называть *парциальными угловыми скоростями* возбудителей.

Угловые скорости вращения роторов возбудителей, установленных на неподвижном основании $\dot{\varphi}_{s0}$, определяются из уравнений

$$L_s (\dot{\varphi}_{s0}) = R_s (|\dot{\varphi}_{s0}|) \operatorname{sgn} \dot{\varphi}_{s0}, \quad (5.5)$$

а парциальные угловые скорости, согласно приведенному определению, будут *)

$$\omega_s = \dot{\varphi}_{s0} \sigma_s, \quad (5.6)$$

т. е. удовлетворяют уравнению

$$\sigma_s L_s (\sigma_s \omega_s) = R_s (\omega_s) \operatorname{sgn} \omega_s. \quad (5.7)$$

Парциальная угловая скорость ω_s положительна, если s -й ротор, будучи установлен на неподвижном основании, вращается в том же направлении, что и в рассматриваемом синхронном движении.

В случае, когда указанные направления вращения противоположны, то ω_s отрицательно; при этом двигатель асинхронного типа работает в генераторном режиме. Парциальные угловые скорости вибровозбудителей с выключенными двигателями или вообще не имеющих двигателей равны нулю. Как будет ясно из дальнейшего, понятие о парциальных угловых скоростях может рассматриваться как обобщение понятия о частотах автоколебаний.

*) Напомним, что величины $\sigma_s = \pm 1$, входящие в равенства (4.4) и многие последующие соотношения, в случае самосинхронизации отнюдь не являются параметрами рассматриваемой системы, а характеризуют лишь тип исследуемого синхронного движения. Так, например, если $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = -1$ и т. д., то это означает, что изучается синхронное движение, в котором роторы первого и второго возбудителей вращаются в положительном направлении (т. е. по ходу часовой стрелки), ротор третьего возбудителя — в отрицательном направлении и т. д.

Допустим теперь, что все парциальные угловые скорости положительны и одинаковы:

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_k = \omega^* > 0. \quad (5.8)$$

Тогда в силу (5.7) справедливы соотношения

$$L_s(\sigma_s \omega^*) = \sigma_s R_s^\circ(\omega^*) \quad (s = 1, \dots, k). \quad (5.9)$$

Складывая все эти равенства, умноженные предварительно на σ_s , получим

$$\sum_{s=1}^k \sigma_s L_s(\sigma_s \omega^*) = \sum_{s=1}^k R_s^\circ(\omega^*). \quad (5.10)$$

Последнее соотношение в точности совпадает с уравнением (4.23) для определения угловой скорости синхронного вращения ω . Таким образом, в случае одинаковых и положительных парциальных угловых скоростей вращения дебалансных вибровозбудителей одно из возможных значений угловой скорости синхронного вращения ω равно общей парциальной угловой скорости вращения вибровозбудителей ω^* :

$$\omega = \omega^*. \quad (5.11)$$

Если, как это часто бывает, уравнение (4.22) имеет единственное решение, то синхронное вращение дебалансных вибровозбудителей может происходить только с угловой скоростью, равной общей парциальной угловой скорости ω^* .

Полученный результат легко понять, исходя из физических соображений. Действительно, в дебалансных вибровозбудителях наличие колебаний основания, на котором они установлены, практически не вызывает дополнительных потерь энергии на трение. Поэтому естественно ожидать, что если роторы таких возбудителей, будучи установленными на неподвижном основании, вращались с одинаковыми по модулю угловыми скоростями, то при установке на колеблющемся теле эти роторы будут вращаться с теми же средними угловыми скоростями. Положение, естественно, может измениться, например, в случае так называемых *планетарных вибровозбудителей*, в которых затраты энергии на преодоление сопротивления качению роликов существенно зависят от характера колебаний тела, на котором возбудители установлены (см. п. 5, § 8).

Заметим теперь, что при выполнении равенства (5.11), т. е. при одинаковых положительных парциальных скоростях возбудителей, в силу равенств (5.9)

$$Z_s(\sigma_s, \omega) = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (5.12)$$

т. е. все избыточные моменты обращаются в нуль, и поэтому

основные уравнения (4.19) принимают вид

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv -\frac{1}{k_s} W_s^{(K)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \\ \equiv \frac{1}{2k_s} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \frac{m_s \varepsilon_s}{M} \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j \sin(\alpha_s - \alpha_j) = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (5.13)$$

Таким образом, порождающие фазы в данном случае определяются из условия равенства нулю вибрационных моментов $W_s^{(K)}$.

Нетрудно заметить, что уравнения (5.13) допускают решения вида

$$\alpha_s = q_s^* \pi + \alpha_0 \quad (s = 1, \dots, k),$$

где каждое из чисел q_s^* может быть равно нулю или единице, а α_0 — произвольная постоянная. Ниже, в §§ 6 и 7 будет показано, что во многих важных частных случаях, а также при достаточно общих предположениях среди этих решений непременно имеется такое, которое отвечает устойчивому, по крайней мере, в малом, синхронному движению. Тем самым будет установлено, что в указанных случаях при одинаковых и положительных парциальных угловых скоростях вибровозбудителей их самосинхронизация непременно возможна. В соответствии с терминологией, введенной в § 1 гл. 1, можно также сказать, что в этих случаях имеет место тенденция вибровозбудителей к самосинхронизации. Из соображений непрерывности следует, что это заключение останется в силе по крайней мере также и при достаточно малых различиях в парциальных скоростях. Фактически же, как будет показано в § 6, самосинхронизация при определенных условиях будет иметь место и при резко отличных значениях парциальных скоростей вибровозбудителей.

Здесь же заметим, что в случае, когда парциальные скорости ω_s положительны и не слишком сильно отличаются одна от другой, выражения для избыточных моментов $Z_s(\sigma_s, \omega)$ могут быть существенно упрощены. Действительно, в этом случае можно с достаточной точностью использовать линейные соотношения (4.10), положив

$$Z_s(\sigma_s, \omega_s) = Z_s(\sigma_s, \omega) - k_s(\omega_s - \omega), \quad (5.14)$$

где, как и ранее (см. равенства (4.11) и (4.13)),

$$k_s = -\frac{dZ_s(\sigma_s, \omega)}{d\omega} = -\sigma_s \frac{dL_s(\sigma_s \omega)}{d\omega} + \frac{dR_s^\circ(\omega)}{d\omega} = \\ = -\frac{dL_s(\dot{\varphi}^0)}{d\dot{\varphi}_s^0} + \frac{dR_s^\circ}{d\omega} = k_s^* + k_s^\circ.$$

Но при $\omega_s > 0$ ($s = 1, \dots, k$) согласно (4.20) уравнение (5.7) для определения парциальной скорости ω_s может быть записано в виде

$$Z_s(\sigma_s, \omega_s) = 0. \quad (5.15)$$

Поэтому из равенства (5.14) следует

$$Z_s(\sigma_s, \omega) = k_s(\omega_s - \omega). \quad (5.16)$$

Полученное соотношение позволяет записать основные уравнения (4.19) в форме

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv (\omega_s - \omega) - \frac{1}{k_s} W_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0 \quad (s = 1, \dots, k) \quad (5.17)$$

и получить из уравнения баланса энергии (4.22) следующее простое выражение для приближенного значения угловой скорости синхронного вращения ω через парциальные угловые скорости:

$$\omega = \frac{k_1 \omega_1 + \dots + k_k \omega_k}{k_1 + \dots + k_k}. \quad (5.18)$$

Таким образом, угловая скорость ω равна средневзвешенному значению от парциальных скоростей ω_s , причем роль весовых коэффициентов играют положительные суммарные коэффициенты демпфирования k_s . Отсюда, в частности, следует, что угловая скорость синхронного вращения не меньше чем наименьшая и не больше чем наибольшая из парциальных скоростей:

$$\text{Inf} [\omega_1, \dots, \omega_k] \leq \omega \leq \text{Sup} [\omega_1, \dots, \omega_k]. \quad (5.19)$$

В заключение приведем выражение вибрационных моментов $W_s^{(K)}$, вытекающее, например, из формул (8.35) настоящей главы:

$$W_s^{(K)} = \frac{\partial \Lambda^{(I)}}{\partial \alpha_s} \quad (s = 1, \dots, k). \quad (5.20)$$

Здесь

$$\Lambda^{(I)} = \langle (L^{(I)}) \rangle = \langle (T^{(I)} - \Pi^{(I)}) \rangle \quad (5.21)$$

— среднее за период $T = 2\pi/\omega$ значение функции Лагранжа $L^{(I)} = T^{(I)} - \Pi^{(I)}$ несущего тела B_0 (вибрирующей платформы), вычисленное для порождающего приближения (4.15),

$$T^{(I)} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2, \quad \Pi^{(I)} = \frac{1}{2} c_x x^2 \quad (5.22)$$

— соответственно кинетическая и потенциальная энергии платформы. Производя вычисления при использовании выражения

(4.15) для x^0 и равенств (4.17), находим

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= \left\langle \frac{1}{2} M (\dot{x}^0)^2 - \frac{1}{2} c_x (x^0)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} [M \langle (\dot{x}^0)^2 \rangle - c_x \langle (x^0)^2 \rangle] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \left[M \omega^2 \left\langle \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{m_s \varepsilon_s}{M} \sin(\omega t + \alpha_s) \sin(\omega t + \alpha_j) \right\rangle - \right. \\ &\quad \left. - c_x \left\langle \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{m_s \varepsilon_s}{M} \frac{m_j \varepsilon_j}{M} \cos(\omega t + \alpha_s) \cos(\omega t + \alpha_j) \right\rangle \right] = \\ &= \frac{M}{4} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{m_s \varepsilon_s}{M} \frac{m_j \varepsilon_j}{M} \cos(\alpha_s - \alpha_j). \quad (5.23) \end{aligned}$$

Это выражение позволяет непосредственно проверить справедливость равенств (5.20), полученных в § 8 для значительно более общего случая. При учете этих равенств основные уравнения (4.19) записываются в форме

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{k_s} \left[Z_s(\sigma_s, \omega) - \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial \alpha_s} \right] = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (5.24)$$

а несколько менее общие уравнения (5.17) — в виде

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (\omega_s - \omega) - \frac{1}{k_s} \frac{\partial \Lambda^{(1)}}{\partial \alpha_s} = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (5.25)$$

§ 6. Некоторые важные частные случаи

1. Случай двух вибровозбудителей. О явлении вибрационного поддержания вращения. Многие важные закономерности самосинхронизации вибровозбудителей можно проследить на простейшем случае двух возбудителей.

При $k = 2$ основные уравнения (4.19) имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \frac{1}{k_1} \left[Z_1(\sigma_1, \omega) + \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \frac{m_1 \varepsilon_1 m_2 \varepsilon_2}{M} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \right] = 0, \\ P_2 &\equiv \frac{1}{k_2} \left[Z_2(\sigma_2, \omega) - \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p_x^2} \frac{m_1 \varepsilon_1 m_2 \varepsilon_2}{M} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} A_1^{(x)} &= \frac{m_2 \varepsilon_2 \omega^2}{M [\omega^2 - p_x^2]}, \quad A_2^{(x)} = \frac{m_1 \varepsilon_1 \omega^2}{M [\omega^2 - p_x^2]}, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha; \\ A_s &= A_s^{(x)} / 2, \quad F_s = m_s \varepsilon_s \omega^2 \quad (s = 1, 2); \\ \widetilde{W}^{(K)} &= \widetilde{W}_1^{(K)}(\omega) = \widetilde{W}_2^{(K)}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{[\omega^2 - p_x^2]} \frac{m_1 \varepsilon_1 m_2 \varepsilon_2}{M} = F_1 A_1 = F_2 A_2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

представим эти уравнения в следующей более компактной форме:

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \frac{1}{k_1} [Z_1(\sigma_1, \omega) + \widetilde{W}^{(K)}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega^2 - p_x^2) \sin \alpha] = 0, \\ P_2 &\equiv \frac{1}{k_2} [Z_2(\sigma_2, \omega) - \widetilde{W}^{(K)}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega^2 - p_x^2) \sin \alpha] = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Величина $\widetilde{W}^{(K)}(\omega)$ представляет собой в рассматриваемом случае наибольшее возможное значение (модуль) *вибрационных моментов* $W_1^{(K)}$ и $W_2^{(K)}$, а величины A_1 и A_2 — *эффективные амплитуды колебаний осей соответственно первого и второго роторов*. Величина $A_1^{(x)}$ по своему смыслу является амплитудой установившихся колебаний оси первого ротора (вместе с платформой, на которой он установлен) под действием центробежной силы $F_2 = m_2 e_2 \omega^2$, развиваемой вторым ротором, а величина $A_2^{(x)}$ — амплитудой колебаний оси второго ротора под действием центробежной силы $F = m_1 e_1 \omega^2$, возникающей при вращении первого ротора. Таким образом, эффективная амплитуда колебаний оси ротора в рассматриваемом случае прямолинейных колебаний платформы равна половине амплитуды колебаний оси этого ротора, возбуждаемых другим ротором.

Обратимся к изучению возможных синхронных движений; из уравнений (6.3) находим

$$\begin{aligned} Z_1(\sigma_1, \omega) + Z_2(\sigma_2, \omega) &= 0, \\ \sin \alpha &= - \frac{Z_1(\sigma_1, \omega)}{\widetilde{W}^{(K)}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega^2 - p_x^2)} = \frac{Z_2(\sigma_2, \omega)}{W^{(K)}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega^2 - p_x^2)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Первое из этих уравнений представляет собой частный случай уравнения (4.22) и служит для нахождения первого приближения к угловой скорости синхронного вращения ω ; второе уравнение служит для определения сдвига фаз $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ при вращении роторов в возможных синхронных движениях. При выполнении неравенства

$$|Z_1(\sigma_1, \omega)| = |Z_2(\sigma_2, \omega)| < \widetilde{W}^{(K)}(\omega), \quad (6.5)$$

т. е. при условии, что модули избыточных моментов не превышают модуля вибрационного момента, указанное уравнение имеет два существенно различных вещественных решения (очевидно, что решения данного уравнения, отличающиеся на $2\pi n$, где n — целое число, можно считать тождественными)

$$\alpha = \alpha^{(1)} = \chi, \quad \alpha = \alpha^{(2)} = \pi - \chi, \quad (6.6)$$

где

$$-\frac{\pi}{2} < \chi = -\arcsin \frac{Z_1(\sigma_1, \omega)}{\widetilde{W}^{(K)}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega^2 - p_x^2)} = \\ = \arcsin \frac{Z_2(\sigma_2, \omega)}{\widetilde{W}^{(K)}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega^2 - p_x^2)} < \frac{\pi}{2}. \quad (6.7)$$

Неравенство (6.5), таким образом, является условием, при котором возможен эффект самосинхронизации вибровозбудителей.

Синхронное движение, отвечающее первому из решений (6.6), условно назовем *синфазным*, а отвечающее второму — *противофазным*. Рассмотрим вопрос об устойчивости этих движений. Уравнение (4.24) в данном случае является линейным, и из него при учете (6.3) получается следующее условие устойчивости:

$$\kappa = \frac{\partial(P_1 - P_2)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial(P_1 - P_2)}{\partial \alpha} = \\ = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \widetilde{W}^{(K)}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega^2 - p_x^2) \cos \alpha < 0. \quad (6.8)$$

Поскольку $k_s > 0$ и $\widetilde{W}^{(K)}(\omega) > 0$, то отсюда следует, что в *дорезонансной области* ($\omega < p_x$) *синфазное движение устойчиво*, а *противофазное движение неустойчиво*; в *послерезонансной области* ($\omega > p_x$), *напротив*, *синфазное движение неустойчиво*, а *противофазное устойчиво*.

Рассмотрим подробнее условие возможности эффекта самосинхронизации вибровозбудителей. Как и в общем случае, указанное условие непременно выполняется, если парциальные скорости ω_1 и ω_2 положительны и одинаковы, поскольку при этом избыточные моменты $Z_1(\sigma_1, \omega)$ и $Z_2(\sigma_2, \omega)$ обращаются в нуль. В случае положительных и не слишком сильно отличающихся парциальных скоростей синхронная угловая скорость ω согласно (5.18) будет

$$\omega = \frac{k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2}{k_1 + k_2}, \quad (6.9)$$

и поэтому выражение (5.16) для избыточного момента $Z_1(\sigma_1, \omega)$ может быть записано в форме

$$Z_1(\sigma_1, \omega) = k_1(\omega_1 - \omega) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}(\omega_1 - \omega_2). \quad (6.10)$$

В результате условие самосинхронизации (6.5) примет вид

$$|\omega_2 - \omega_1| < \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \widetilde{W}^{(K)}(\omega). \quad (6.11)$$

Полученное соотношение играет существенную роль в теории вибрационных устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями (см. § 9). Из него непосредственно видно, что самосинхронизация наверняка возможна, если парциальные угловые скорости ω_1 и ω_2 вибровозбудителей, будучи положительными, достаточно мало отличаются одна от другой. Вместе с тем эффект самосинхронизации может иметь место и при весьма существенных различиях в парциальных угловых скоростях, в частности, даже в случае, когда двигатель одного из возбудителей выключен из сети, т. е. когда $L_1(\sigma_1, \omega) \equiv 0$, $Z_1(\sigma_1, \omega) \equiv -R_1^\circ(\omega)$, и, таким образом, парциальная скорость $\omega_1 = 0$. Условием возможности такого эффекта, называемого *эффектом вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора**, согласно (6.5) будет неравенство

$$R_1^\circ(\omega) < \tilde{W}^{(K)}(\omega), \quad (6.12)$$

т. е. требование, чтобы момент сопротивления вращению ротора выключенного возбудителя не превышал модуля вибрационного момента $\tilde{W}^{(K)}(\omega)$. Таким образом, этот последний момент является как бы тем предельным моментом, который может быть передан вращающемуся неуравновешенному ротору посредством колебаний его оси. Величина $N(\omega) = \tilde{W}^{(K)}(\omega)\omega$ представляет соответствующую предельную мощность, которая может быть передана колебаниями для обеспечения самосинхронизации. *Примечательно, что значение указанной мощности при практически реализуемых параметрах вибрационных устройств весьма значительно. Так, например, при статическом моменте неуравновешенного ротора $m\epsilon = 10$ кг·м, эффективной амплитуде $A_1 = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м и частоте $\omega = \pi n/30 = \pi \cdot 3000/30 = 314$ с⁻¹ получаем согласно (6.2)*

$$N_{\max} = \tilde{W}^{(K)}(\omega)\omega = FA_1\omega = m\epsilon A_1\omega^3 = \\ = 10 \cdot 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot 314^3 \approx 0,8 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м/с} \approx 800 \text{ кВт (1)}$$

Забегая вперед, заметим, что аналогичная величина в случае самосинхронизации колеблющихся объектов (например, маятников) при прочих равных условиях оказывается значительно меньшей (см. § 3 гл. 5).

Приведенный пример по существу дает объяснение широким возможностям практического использования явления самосинхронизации в вибрационных машинах и устройствах, в которых применяются вращающиеся неуравновешенные роторы.

*) Заметим, что этот эффект используется в известной игре — упражнении «хула-хуп»; об иных, более серьезных приложениях, см. [57], а также § 15.

Условие (6.12) приобретает особенно простой вид в случае, когда сопротивление вращению ротора обусловлено преимущественно сопротивлением в подшипниках. При этом для подшипников качения $R_1^0(\omega) = \frac{1}{2} f F_1 d$, где f — коэффициент трения в подшипнике, d — диаметр внутреннего кольца подшипника, и указанное условие при учете выражения (6.2) для $\widetilde{W}^{(K)}(\omega)$ записывается в форме $2A_1/d > f$.

Если учесть, что обычно $0,001 \leq f \leq 0,01$, то отсюда видно, что вращение ротора может поддерживаться колебаниями, амплитуда которых значительно меньше размера подшипников, в которых ротор вращается.

Изложенные результаты, таким образом, позволяют рассмотреть явление вибрационного поддержания вращения как частный случай эффекта самосинхронизации. Более подробно это явление изучается в § 12, где задача решается как задача о захватывании вращения; там же приведены ссылки на соответствующие исследования.

2. Случай почти одинаковых вибровозбудителей. Рассмотрим подробнее практически важный случай вибровозбудителей, парциальные угловые скорости которых (предполагаемые положительными) столь мало отличаются одна от другой, что основные уравнения могут быть записаны в виде (5.13). Как уже отмечалось в § 5, эти уравнения допускают группу решений

$$\alpha_s = q_s^* \pi + \alpha_0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (6.13)$$

где q_s^* — числа, каждое из которых может быть равно нулю или единице. Назовем такие решения *решениями первой группы*, причем решения, в которых m чисел q_s^* равны единице, будем кратко называть решениями типа (m) . Исследуем устойчивость таких решений, ограничившись рассмотрением случая, когда почти одинаковы также и параметры возбудителей $m_s \varepsilon_s$ и k_s [31]. В этом случае уравнение (4.24) может быть представлено в форме (полагая $m_1 \varepsilon_1 = m_2 \varepsilon_2 = \dots = m_k \varepsilon_k = m \varepsilon$, $k_1 = k_2 = \dots = k_k = k_0$, $q_1^* = q_2^* = \dots = q_m^* = 1$, $q_{m+1}^* = \dots = q_k^* = 0$)

$$\left| \begin{array}{cccc|cccc} \overbrace{A_1 - u}^{m \text{ столбцов}} & 2 & \dots & 2 & \overbrace{-2 \quad -2 \quad \dots \quad -2}^{k-m-1 \text{ столбцов}} & & & \\ 2 & A_1 - u & \dots & 2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & A_1 - u & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_2 - u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_2 - u & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_2 - u \end{array} \right| = 0, \quad (6.14)$$

где

$$u = -\kappa \frac{2k_0 M}{(m\epsilon)^2 \omega^4} (\omega^2 - p_x^2),$$

$$A_1 = -2m + k + 2, \quad A_2 = 2m - k. \quad (6.15)$$

Уравнение (6.14) легко решается. При $m = 1, \dots, k-1$ оно имеет корень $u_1 = A_1 - 2 = -2m + k$ кратности $m-1$, корень $u_2 = A_2 = 2m - k$ кратности $k-m-1$ и простой корень $u_3 = -A_1 + 2(m-1) = k$. При $m=0$ (а также при $m=k$, поскольку решение (0) можно не отличать от (k)) имеем корень $u = -k$ кратности $k-1$. Отсюда следует, что устойчивым в дорезонансной области ($\omega < p_x$) является лишь решение типа (0), т. е. синхронное движение, близкое к синфазному (только для этого решения отсутствуют положительные значения величин κ). В послерезонансной области ($\omega > p_x$) устойчивые движения возможны лишь в случае четного числа возбудителей $k = 2l$. А именно, устойчивыми могут быть решения типа (l) , так как им соответствуют корень $u = u_1 = u_2 = 0$ кратности $2l-2$ и простой корень $u = k$. При этом в случае двух возбудителей ($k=2, l=1$) нулевой корень отсутствует и движение действительно устойчиво при $\omega > p_x$ — это согласуется с результатом, полученным в п. 1 настоящего параграфа. В случае же $k > 2$, ввиду наличия нулевых корней κ , для решения вопроса об устойчивости требуется дополнительное исследование.

Таким образом, при почти одинаковых возбудителях тенденция к синхронизации имеет место по крайней мере в дорезонансном режиме для любого числа возбудителей и в послерезонансном режиме — по крайней мере для двух возбудителей.

Возвращаясь к общему случаю возбудителей с почти одинаковыми положительными парциальными скоростями, заметим, что уравнения (5.13) удовлетворяются, если выполняются равенства

$$\sum_{s=1}^k m_s \epsilon_s \cos \alpha_s = 0, \quad \sum_{s=1}^k m_s \epsilon_s \sin \alpha_s = 0. \quad (6.16)$$

Соответствующие решения уравнений (5.13) назовем *решениями второй группы*. Обращаясь к их рассмотрению, заметим, что соотношения (6.16) эквивалентны требованию, чтобы k векторов e_s в плоскости xOy , имеющих модули $m_s \epsilon_s$ и направленных под углами α_s к оси Ox , образовали замкнутый многоугольник (рис. 8). При этом вследствие произвольности одной из фаз α_s можно считать, что

$$\alpha_k = 0, \quad (6.17)$$

т. е. вектор e_k направлен вдоль оси Ox . Очевидно, что для $k=2$

и $k = 3$ может существовать только по одному (с точностью до перестановки номеров возбудителей) указанному выше многоугольнику, а для $k > 3$ — бесконечное множество многоугольников *). Это говорит о том, что для числа возбудителей, большего трех, разности фаз $\alpha_s - \alpha_k$ для решений второй группы не определяются из уравнений (5.13) однозначно; для их нахождения, согласно замечанию 8 § 7 гл. 10, следует рассмотреть следующие приближения. Дополнительного исследования в данном случае потребует и

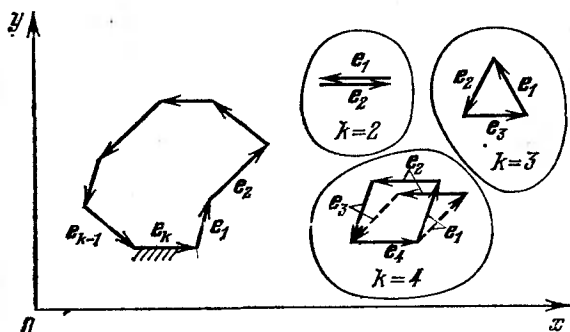


Рис. 8.

вопрос о существовании и устойчивости синхронных движений, ибо уравнение (4.24) будет непременно иметь нулевые корни. Заметим, что такая ситуация является следствием определенной вырожденности рассмотренной системы; эта вырожденность исчезает при учете неодинаковости парциальных скоростей возбудителей и ряда других факторов.

В случаях же двух и трех возбудителей задача решается до конца на основе рассмотрения уравнений (5.13) и (4.24), причем в случае двух возбудителей решение второй группы $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$ совпадает с решением (1) первой группы. Как было показано в п. 1, это решение, отвечающее противофазному синхронному движению возбудителей, устойчиво в послерезонансной ($\omega > p_x$) и неустойчиво в дорезонансной ($\omega < p_x$) области.

*) Для существования таких многоугольников должны выполняться условия, при которых величины $m_1 e_1, \dots, m_k e_k$ могут быть длинами сторон k -угольника. Например, при $k = 2$ должно быть $m_1 e_1 = m_2 e_2$, при $k \geq 3$ должно быть $m_s e_s \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^k m_j e_j$.

§ 7. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений и тенденции вибровозбудителей к синхронизации. Некоторые существенные следствия

Из представления основных уравнений в форме (5.24) непосредственно следует, что эти уравнения могут быть записаны в виде

$$P_s \equiv -\frac{1}{k_s} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left(\Lambda^{(I)} - \sum_{s=1}^k Z_s(\sigma_s, \omega) \alpha_s \right) = 0 \quad (7.1)$$

$$(s = 1, \dots, k),$$

т. е. что в рассматриваемом случае, согласно изложенному в § 2 гл. 2, § 8 гл. 10 и в § 4 гл. 12, существует так называемая *потенциальная функция*

$$D = \Lambda^{(I)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) - B(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (7.2)$$

где

$$B(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{s=1}^k Z_s(\sigma_s, \omega) \alpha_s. \quad (7.3)$$

Функция D характеризуется тем, что устойчивые синхронные движения соответствуют точкам ее грубых минимумов подобно тому, как положения равновесия консервативной механической системы соответствуют точкам минимумов потенциальной энергии (о понятии грубого минимума см. § 8 гл. 10). Через B в выражениях (7.2) и (7.3) обозначен так называемый *потенциал усредненных неконсервативных сил*. В случае одинаковых парциальных скоростей вибровозбудителей, когда избыточные моменты $Z_s = 0$, будем иметь

$$D \doteq \Lambda^{(I)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (7.4)$$

т. е. устойчивые синхронные движения характеризуются минимумом среднего за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ значения функции Лагранжа колебательной части системы, вычисленного в порождающем приближении.

Из сказанного вытекают по меньшей мере три существенных следствия:

1. Поскольку $\Lambda^{(I)}$ — периодическая функция α_s (см. формулу (5.23)), то, согласно изложенному в § 2 гл. 2 и в § 9 гл. 10, при одинаковых или близких парциальных скоростях вибровозбудителей точки минимумов функции D непременно имеются, и поэтому устойчивые в малом синхронные движения возбудителей всег-

да существуют *). Иными словами, при указанных условиях имеет место тенденция вибровозбудителей к самосинхронизации. Для частного случая двух возбудителей это было показано в предыдущем параграфе.

2. Практическое решение задачи о синхронизации вибровозбудителей может быть выполнено путем использования интегрального критерия (экстремального свойства) устойчивых синхронных движений. Делается это следующим образом.

а) Составляется уравнение (или в более сложном случае — уравнения) колебаний несущего тела B_0 (платформы) под действием возмущающих сил, развиваемых вибровозбудителями при равномерном вращении их роторов по закону $\varphi_s = \sigma_s(\omega t + \alpha_s)$, т. е. с общей угловой скоростью ω и с заранее неизвестными начальными фазами α_s . (Речь идет о последнем уравнении (4.14), в котором принято $\varphi_s = \sigma_s(\omega t + \alpha_s)$.)

б) Находится решение этого уравнения x^0 , соответствующее установившимся вынужденным колебаниям платформы (см. выражение (4.15)).

в) Найденное решение x^0 подставляется в выражение для функции Лагранжа $L^{(1)} = T^{(1)} - \Pi^{(1)}$, отвечающей колебаниям несущего тела (см. формулы (5.22)), после чего производится усреднение по периоду $T = 2\pi/\omega$, т. е. вычисляется функция $\Lambda^{(1)}$. В результате получается выражение типа (5.23).

г) Составляется выражение (7.2) для потенциальной функции D . Значения фазовых сдвигов α_s , которые могут отвечать устойчивым синхронным движениям, находятся из условий минимума функции D .

Заметим, что указанный алгоритм решения остается таким же и для гораздо более сложных задач о синхронизации вибровозбудителей, чем рассматриваемая. В ряде случаев он оказывается более предпочтительным, чем другие способы (см. § 10).

3. Предположим, что упругие элементы, связывающие несущее тело с неподвижным основанием, являются столь мягкими, что средней потенциальной энергией колебаний $\langle \Pi^{(1)} \rangle$ можно пренебречь по сравнению со средней кинетической энергией $\langle T^{(1)} \rangle$ (это предположение, как нетрудно видеть, сводится к требованию $\omega \gg R_s$, т. е. к условию, что движение происходит «далеко» в послеперезонансной области). Тогда в случае возбудителей с одинаковыми парциальными скоростями их устойчивые синхронные дви-

*) Заметим, что минимумы функции D , как нетрудно показать, являются в данном случае грубыми. Исключение составляют некоторые вырожденные случаи, основными из которых являются такие, когда минимумы — нестрогие, а значит, и негрубые (см. п. 2 § 6). В этих случаях условия устойчивости, получаемые из требования минимума функции D , будут лишь необходимыми; для получения достаточных условий здесь необходимо дополнительное исследование.

жения будут соответствовать минимуму среднего за период значения кинетической энергии платформы. Иными словами, фазировка возбудителей при их самосинхронизации будет такой, чтобы колебания платформы были минимальными в смысле величины средней кинетической энергии колебаний. В частности, при одинаковых статических моментах возбудителей m, ϵ , и при четном их числе $k = 2k'$ всегда будет существовать устойчивое синхронное движение, при котором половина (т. е. k') возбудителей работает в противофазе с другой половиной возбудителей. Естественно, что при этом возмущающие силы, развиваемые возбудителями, взаимно компенсируются, и поэтому колебания платформы практически отсутствуют. Об этих интересных эффектах, существенных для ряда приложений, подробнее говорится в п. 4 § 8 и в пп. 6 и 7 § 14.

Если же предположить, что упругие элементы столь жестки, что кинетической энергией колебаний можно пренебречь по сравнению с потенциальной ($\omega \ll p_*$, т. е. движение происходит в дорезонансной области вдали от резонанса), то при тех же условиях в устойчивом синхронном движении средняя потенциальная энергия должна быть максимальной. Поэтому устойчивой будет синфазная работа всех возбудителей, при которой возмущающие силы складываются и колебания несущего тела максимальны. Нетрудно видеть, что эти заключения полностью соответствуют полученным в § 6 для случая двух возбудителей.

Изложенные положения ниже существенным образом обобщаются как на более сложные случаи синхронизации вибровозбудителей (см. п. 4 § 8), так и на широкие классы иных динамических объектов (см. §§ 4—7 гл. 12).

§ 8. Обобщения задачи о синхронизации вибровозбудителей

1. Описание системы и главные предположения. Закономерности самосинхронизации вибровозбудителей, рассмотренные выше на примере простейшей системы, допускают обобщение на значительно более сложные случаи.

Будем по-прежнему рассматривать задачу о простой (некратной) синхронизации вибровозбудителей, но будем считать (см. рис. 5), что последние установлены на произвольной системе твердых тел $B_{01}, \dots, B_{0n}$ (несущих тел), связанных между собою и с неподвижным основанием 1 некоторыми «сосредоточенными» геометрическими связями 2, а также упругими 3 и демпфирующими 4 элементами. Колебательная часть системы при этом может иметь любое число степеней свободы и не быть непременно линейной; считаем, однако, что нелинейные характеристики достаточно гладкие, так что, например, случай, когда несущие тела могут соударяться, здесь исключается. Не будем далее предполагать, что вибровозбудители $B_1, \dots, B_k$ являются простыми дебалансны-

ми — это могут быть теперь любые инерционные возбудители, представляющие собой тела, которые могут совершать периодические движения относительно какого-либо из несущих тел (рис. 9). Естественно, что вынуждающая сила, генерируемая такими возбудителями (назовем их обобщенными механическими возбудителями), даже при неподвижном несущем теле не обязательно является чисто гармонической. Впрочем, большинство получивших распространение промышленных механических вибровозбудителей генерируют либо гармоническое возбуждение, либо возмущение, состоящее из двух или трех гармоник. Некоторые характерные типы таких возбудителей схематически представлены на рис. 10: на рис. 10, а изображен уже рассматривавшийся простейший дебалансный возбудитель (неуравновешенный ротор); на рис. 10, б и 10, в — внутренние планетарные возбудители; на рис. 10, г — внешний планетарный возбудитель (их описание см. в п. 5 § 8); на рис. 10, д — так называемый поршневой возбудитель, в котором вынуждающая сила развивается массой m , возвратно-поступательно движущейся в полости корпуса. Наиболее часто, однако, для создания вынуждающей силы постоянного направления используются два дебалансных возбудителя, роторы которых связаны зубчатым зацеплением с передаточным отношением, равным единице (рис. 10, е); такой возбудитель иногда называют самобалансным. Впрочем, как будет ясно из дальнейшего, та же цель часто более эффективно достигается путем использования явления самосинхронизации. На рис. 10, ж изображен бигармонический возбудитель, ненаправленного, а на рис. 10, з — направленного действия.

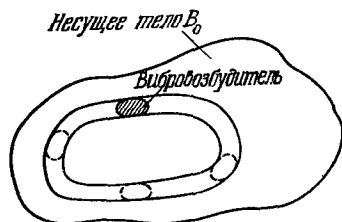


Рис. 9.

Положение инерционного элемента (ротора, поршня и т. п.) каждого из изображенных на рис. 9 и 10 возбудителей относительно несущего тела может быть задано всего одной обобщенной координатой φ . Будем предполагать, что эта координата может быть выбрана так, что ее изменение в процессе изучаемого синхронного движения представляет собой почти равномерное вращение

$$\varphi_s = \sigma_s [\omega t + \alpha_s + \mu \varphi_s^*(\omega t, \mu)]. \quad (8.1)$$

Здесь, как и ранее, ω и α_s — постоянные, $\sigma_s = \pm 1$, а $\mu \varphi_s^*(\omega t, \mu)$ — слагаемое, характеризующее малые колебания относительно равномерного вращения.

Считаем далее, что между валами или инерционными элементами возбудителей могут иметься (не показанные на рис. 9) не-

связи в виде упругих валов, муфт, связей типа электрического вала, а также так называемых центробежно-инерционных

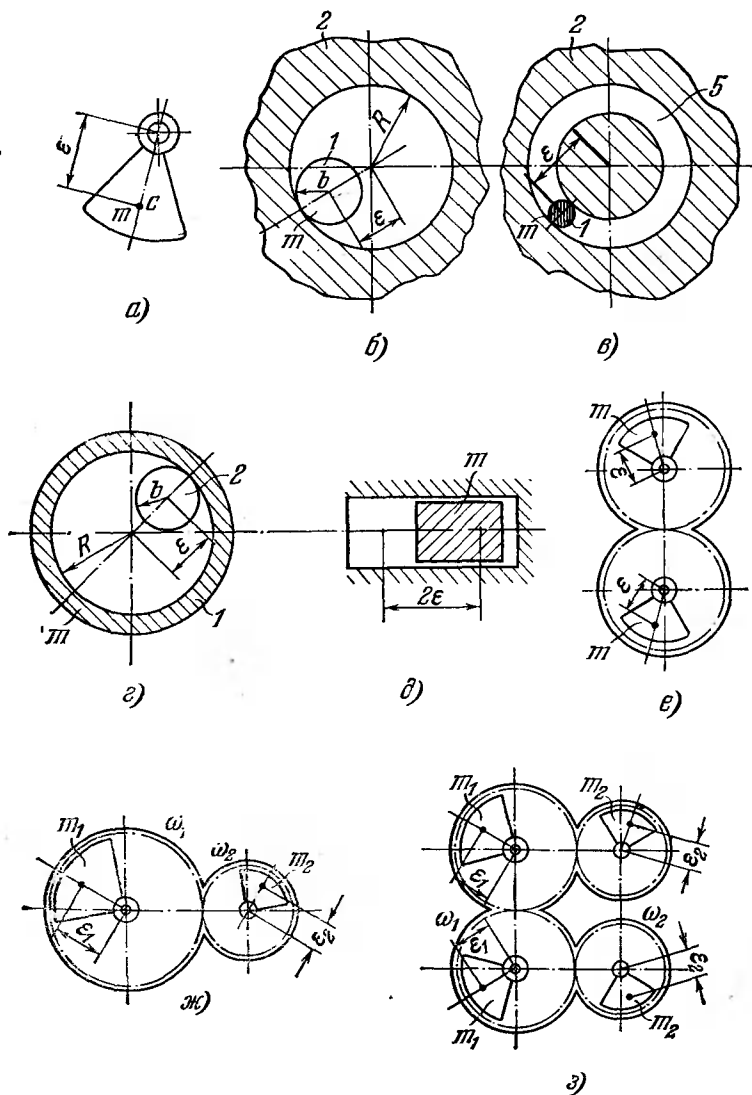


Рис. 10.

связей или муфт [57, 242, 256], представленных на рис. 11 в нескольких вариантах. На этом рисунке звенья 1 связаны с одним из валов (роторов), а звенья 2 — с другим; на рис. 11, а—е изоб-

ражены случаи соосных, а на рис. 11, ж, з — несоосных валов. Варианты, представленные на рис. 11, е—и, отвечают связям с «собственными степенями свободы», а изображенные на рис. 11, а—д — связям без «собственных степеней свободы» (речь идет соответственно о том, может или не может изменяться положение

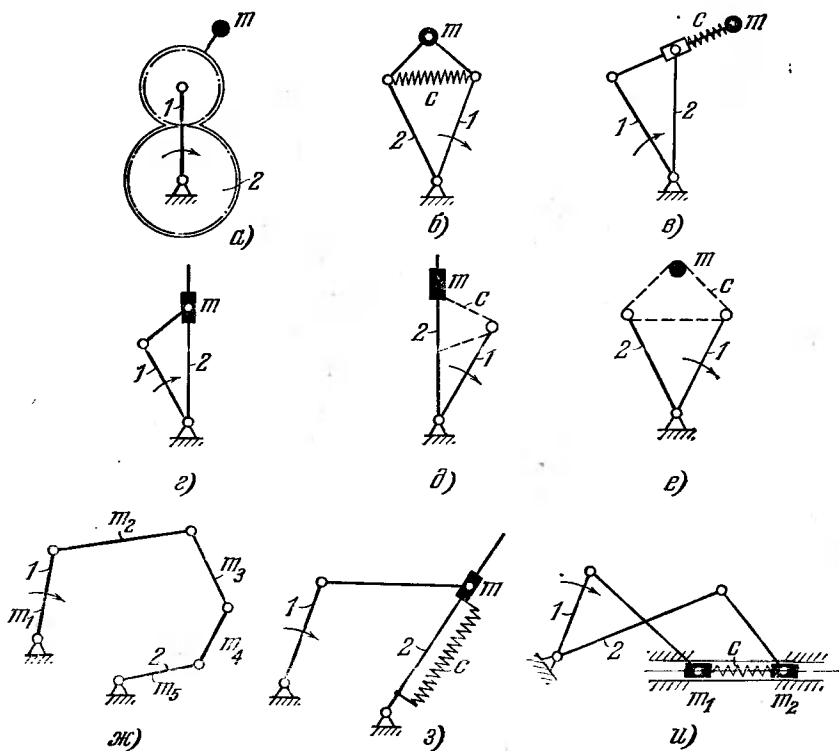


Рис. 11.

инерционных элементов связей при фиксированных положениях звеньев 1 и 2). Упругие элементы с показаны штриховыми линиями или изображены в виде пружин. Отметим, что несомые связи не предполагаются непременно линейными.

Описанная система относится к классу *несвободных орбитальных систем* и притом таких, в которых несомые тела имеют одну степень свободы относительно тел несущей системы (см. § 6 гл. 12); задача о самосинхронизации вибровозбудителей в этой системе может рассматриваться как задача о синхронизации в системе с почти равномерными вращениями (см. § 4 гл. 12).

Уравнения движения рассматриваемой системы при сделанных предположениях могут быть записаны в форме уравнений (4.2),

(4.3) гл. 12, причем уравнения (4.2) для вращательных координат $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ представляют собой в этом случае уравнения движения инерционных элементов вибровозбудителей, а уравнения (4.3) для колебательных координат $u_1, \dots, u_v$ — уравнения движения несущих и несомых связей (сравните эти уравнения с уравнениями (4.12), полученными для частного случая изучаемой системы).

2. Основные результативные соотношения. Характер изучаемых синхронных движений системы определяется выражениями (4.1) гл. 12 при $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$, причем в порождающем приближении

$$\begin{aligned} \varphi_s^0 &= \sigma_s (\omega t + \alpha_s) & (s = 1, \dots, k), \\ u_r^0 &= u_r^0 (\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) & (r = 1, \dots, v), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где u_r^0 — периодические с периодом $T = 2\pi/\omega$ по времени t решения уравнений

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_r} - \frac{\partial L}{\partial u_r} = Q_r^{(0)} \right) \quad (r = 1, \dots, v). \quad (8.3)$$

Здесь и ниже, как и ранее, дополнительные, не выполняющие обычную роль круглые скобки означают, что заключенные в них выражения вычисляются для порождающего решения (8.2).

Будем вначале рассматривать задачу о внешней синхронизации, когда обобщенные силы $Q_s^{(1)}$ и $Q_r^{(0)}$ зависят явным образом от времени t .

Начальные фазы движения инерционных элементов вибровозбудителей $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ определяются из следующих основных уравнений (см. равенства (4.6) и (4.7) гл. 12):

$$\begin{aligned} P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) &\equiv \frac{1}{k_s} (A_s - \mathcal{M}_s) \equiv \frac{1}{k_s} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} + A_s \right) = 0 \\ &(s = 1, \dots, k), \end{aligned} \quad (8.4)$$

где

$$\Lambda = \langle (L) \rangle \quad (8.5)$$

— усредненная за период $T = 2\pi/\omega$ на порождающем решении функции Лагранжа системы, а

$$\begin{aligned} A_s &= Z_s - G_s, \\ Z_s &= \sigma_s \langle (Q_s^{(1)}) \rangle, \quad G_s = - \sum_{r=1}^v \left\langle (Q_r^{(0)}) \frac{\partial u_r^0}{\partial \alpha_s} \right\rangle \end{aligned} \quad (8.6)$$

— избыточный момент, т. е. средний момент неконсервативных сил, приведенный к координате φ_s (далее будем условно говорить

о моменте, приведенном к валу s -го возбудителя или просто о моменте, действующем на s -й возбудитель).

Рассмотрим отдельно структуру и механический смысл каждого из слагаемых основных уравнений (8.4), которые, как и уравнение (4.6) гл. 12, можно толковать как уравнения равновесия средних моментов, действующих на s -й возбудитель. Величины

$$\mathcal{M}_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} \quad (8.7)$$

представляют собой *средние потенциальные моменты, действующие на возбудители*. Поскольку функцию Лагранжа системы в рассматриваемой задаче можно считать не зависящей явным образом от времени t , то имеет место равенство (4.8) гл. 12:

$$\sum_{s=1}^k \mathcal{M}_s = -\sum_{s=1}^k \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} = 0. \quad (8.8)$$

Это означает, что моменты $\mathcal{M}_s$ не связаны непосредственно с притоком или убылью энергии в системе; указанные моменты лишь перераспределяют нагрузку между отдельными возбудителями.

Рассмотрим подробнее структуру функции Лагранжа системы и тем самым моментов $\mathcal{M}_s$. В рассматриваемой задаче функция L может быть представлена в форме

$$L = L^* + L^{(I)} + L^{(II)}. \quad (8.9)$$

Здесь

$$L^* = \sum_{s=1}^k L_s + \Delta L^*, \quad \Delta L^* = \sum_{s=1}^k \Delta L_s^*, \quad (8.10)$$

где $L_s = L_s(\varphi_s, \dot{\varphi}_s)$ — «собственные» функции Лагранжа возбудителей, т. е. функции Лагранжа возбудителей при неподвижных телах несущей системы и отсутствующих несомых связях, а

$$\Delta L_s^* = \Delta L_s^*(\dot{\varphi}_s, \varphi_s; \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m; u_1, \dots, u_m) \quad (8.11)$$

— добавки к этим функциям Лагранжа, обусловленные подвижностью тел несущей системы. Под $u_1, \dots, u_m$ при этом понимаются обобщенные координаты, определяющие положение тел несущей системы ($m \leq v$; см. уравнения (8.3)).

Через

$$L^{(I)} = L^{(I)}(\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m; u_1, \dots, u_m) \quad (8.12)$$

обозначена «собственная» функция Лагранжа несущей системы (связей первого рода), а через

$$L^{(II)} = L^{(II)}(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_k; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_v; x_1, \dots, x_v) \quad (8.13)$$

— функция Лагранжа несомых связей (связей второго рода). Как отмечалось, несомыми связями могут быть упругие валы или муфты, соединяющие роторы возбудителей, устройства типа электрического вала, а также центробежно-инерционные связи. Эти связи, в отличие от несущих, не приводят к появлению дополнительной подвижности роторов возбудителей; как правило, они вводятся в систему в качестве средств принудительной синхронизации, если эффект самосинхронизации не обеспечивает устойчивость и стабильность требуемой фазировки роторов (см. § 11).

Подчеркнем, что зависимость функций ΔL_s^* и $L^{(II)}$ от $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ предполагается такой, что при подстановке вида (8.1) они становятся (или остаются) периодическими функциями ωt с периодом 2π ; поэтому все средние значения функций Лагранжа

$$\Lambda = \sum_{s=1}^k \Lambda_s + \Delta L^* + \Lambda^{(I)} + \Lambda^{(II)} = \Lambda^* + \Lambda^{(I)} + \Lambda^{(II)},$$

$$\Lambda_s = \langle (L_s) \rangle, \quad \Lambda^* = \langle (L^*) \rangle, \quad \dot{\Delta L}^* = \langle (\Delta L^*) \rangle, \quad (8.14)$$

$$\Lambda^{(I)} = \langle (L^{(I)}) \rangle, \quad \Lambda^{(II)} = \langle (L^{(II)}) \rangle$$

являются 2π -периодическими функциями каждой из фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Поскольку собственные функции Лагранжа каждого возбудителя зависят только от обобщенных координат и скоростей этого возбудителя, то

$$\frac{\partial \Lambda_s}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, k). \quad (8.15)$$

Поэтому

$$\mathcal{M}_s = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} = -\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_s}, \quad \frac{\partial \Lambda^*}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial}{\partial \alpha_s} (\Delta L^*), \quad (8.16)$$

где

$$\Lambda_0 = \langle (L_0) \rangle = \langle (\Delta L^* + L^{(I)} + L^{(II)}) \rangle = \Delta L^* + \Lambda^{(I)} + \Lambda^{(II)} \quad (8.17)$$

— среднее за период значение функции Лагранжа всей системы связей, вычисленное в порождающем приближении.

По своему смыслу момент $\mathcal{M}_s$ в рассматриваемой задаче представляет собой сумму консервативных частей $W_s^{(K)}$ и $S_s^{(K)}$ вибрационного момента и момента системы принудительной синхронизации *) (т. е. системы несомых связей):

$$\mathcal{M}_s = W_s^{(K)} + S_s^{(K)}. \quad (8.18)$$

*) Напомним, что согласно принятому в § 5 определению под вибрационными моментами понимаются дополнительные слагаемые в уравнениях равновесия средних моментов (8.4), которые обусловлены колебаниями тел, на которых установлены возбудители.

В случае безынерционных связей, когда подвижность несущих тел не сказывается на кинетической энергии элементов несомых связей, можно положить

$$W_s^{(K)} = - \frac{\partial (\Delta \Lambda^* + \Lambda^{(J)})}{\partial \alpha_s}, \quad S_s^{(K)} = - \frac{\partial \Lambda^{(II)}}{\partial \alpha_s}. \quad (8.19)$$

Для моментов $W_s^{(K)}$ и $S_s^{(K)}$ справедливы равенства

$$\sum_{s=1}^k W_s^{(K)} = 0, \quad \sum_{s=1}^k S_s^{(K)} = 0, \quad (8.20)$$

получающиеся так же, как (8.8), и имеющие тот же смысл.

Обратимся к рассмотрению слагаемых A_s в уравнениях (8.4), т. е. избыточных моментов на валах возбудителей. Величину

$G_s = - \sum_{r=1}^v \left\langle (Q_r^{(0)}) \frac{\partial x_r^0}{\partial \alpha_s} \right\rangle$ в изучаемой задаче можно трактовать как средний момент неконсервативных сил, связанных с колебательными координатами и учитываемых в порождающем приближении. При этом можно положить

$$G_s = W_s^{(G)} + S_s^{(G)},$$

$$W_s^{(G)} = - \sum_{r=1}^m \left\langle (Q_r^{(0)}) \frac{\partial x_r}{\partial \alpha_s} \right\rangle, \quad S_s^{(G)} = - \sum_{r=m+1}^v \left\langle (Q_r^{(0)}) \frac{\partial x_r}{\partial \alpha_s} \right\rangle. \quad (8.21)$$

Если рассматривается движение вдали от резонанса по колебательным координатам, как это предполагалось, например, в § 4, то часто неконсервативные силы (обычно — силы вязкого сопротивления) в порождающем приближении можно не учитывать. Тогда

$$Q_r^{(0)} = 0 \quad (r = 1, \dots, v), \quad W_s^{(G)} = S_s^{(G)} = G_s = 0. \quad (8.22)$$

При этом основные уравнения (8.4) значительно упрощаются не только за счет обращения в нуль указанных моментов, но и за счет упрощения выражений для $u_r^0(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, определяемых теперь из уравнений (8.3) при $Q_r^{(0)} = 0$.

Наконец, величины $Z_s = \sigma_s \langle (Q_s^{(1)}) \rangle$, которые можно назвать *избыточными моментами на валах возбудителей*, в рассматриваемой задаче представляют собой средние значения разности моментов $(\sigma_s \langle L_s \rangle)$, передаваемых от двигателей, и моментов сопротивления $\sigma_s \langle (R_s) \rangle$ движению инерционных элементов возбудителей:

$$Z_s = \sigma_s \langle (Q_s^{(1)}) \rangle = \sigma_s \langle (L_s) \rangle - \sigma_s \langle (R_s) \rangle. \quad (8.23)$$

В простейшей задаче, рассмотренной в §§ 4—7, было (см.

формулы (4.20))

$$Z_s = \sigma_s L_s (\sigma_s \omega) - R_s^\circ (\omega).$$

В более сложных случаях величины $\sigma_s \langle (L_s) \rangle$ и $\sigma_s \langle (R_s) \rangle$ могут зависеть от фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Так, например, в случае привода возбудителей от синхронных нереактивных двигателей

$$\sigma_s \langle (L_s) \rangle = \sigma_s L_s^* [\sigma_s (\alpha_s - \beta_s)]. \quad (8.24)$$

Здесь через L_s^* обозначен синхронный момент, передаваемый от двигателя, а через β_s — так называемый *установочный угол синхронного двигателя*, выбираемый из условия обеспечения требуемой фазировки движения возбудителей (подробнее о формуле (8.24) см. в книге [57]).

Подобным образом в случае планетарных вибровозбудителей $\sigma_s \langle (R_s) \rangle$ зависит от всех фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ в связи с тем, что сопротивление движению инерционного элемента возбудителя существенным образом зависит от характера колебаний тела, на котором этот возбудитель установлен. При этом можно положить

$$\sigma_s \langle (R_s) \rangle = R_s^\circ (\omega) + W_s^{(R)} (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (8.25)$$

отнеся слагаемое $W_s^{(R)}$ к вибрационному моменту W_s , который, таким образом, представится в виде суммы трех составляющих:

$$W_s = W_s^{(K)} + W_s^{(R)} + W_s^{(G)}, \quad (8.26)$$

одной консервативной и двух неконсервативных. В аналогичном виде представляется и момент S_s , обусловленный наличием несущих связей:

$$S_s = S_s^{(K)} + S_s^{(G)}. \quad (8.27)$$

Конкретные выражения величин $W_s^{(R)}$ и $S_s^{(K)}$ можно найти в книге [57]; для некоторых случаев они будут приведены ниже (см. п. 5).

При использовании введенных обозначений и результатов приведенного анализа основные уравнения (8.4) можно представить также и в одной из следующих эквивалентных форм:

$$P_s (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{k_s} [\sigma_s \langle (L_s) \rangle - R_s^\circ (\omega) - W_s - S_s] = 0 \quad (8.28)$$

$$(s = 1, \dots, k),$$

$$P_s (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{k_s} \left(\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_s} + Z_s - G_s \right) = 0 \quad (8.29)$$

$$(s = 1, \dots, k).$$

Заметим, что как и уравнения (4.19), выведенные в § 4 для частного случая, эти уравнения могут быть формально получены путем усреднения правых частей уравнений движения вибровозбудителей (см. уравнения (4.2) гл. 12), в которые вместо φ и u , подставлены их порождающие приближения (8.2).

Сформулируем теперь общий результат исследования.

Для возможности синхронных движений изучаемого типа необходимо, чтобы основные уравнения (8.4) (или (8.28), (8.29)) допускали вещественные решения относительно постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Устойчивые синхронные движения будут отвечать лишь тем решениям указанных уравнений, для которых все корни алгебраического уравнения k -й степени

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k) \quad (8.30)$$

имеют отрицательные вещественные части. При наличии хотя бы одного корня с положительной вещественной частью соответствующее движение неустойчиво, а в случае присутствия нулевых или чисто мнимых корней, вообще говоря, требуется дополнительное исследование.

В случае задачи о *внутренней синхронизации* (например, о самосинхронизации), когда уравнения движения системы автономны, из основных уравнений (8.4) (или (8.28), (8.29)) фазы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ определяются лишь с точностью до постоянной (т. е. определяются лишь разности $\alpha_s - \alpha_k$), но зато из тех же уравнений, вообще говоря, находится также исходное приближение к синхронной угловой скорости ω . Уравнение (8.30) в этом случае непременно имеет нулевой корень, который, однако, не влияет на решение вопроса об устойчивости и легко отделяется, после чего получается уравнение $(k-1)$ -й степени

$$\left| \frac{\partial (P_s - P_k)}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k-1), \quad (8.31)$$

совпадающее по форме с более подробно записанным уравнением (4.24) (о соответствующем сокращенном обозначении см. сноску в § 2 гл. 10).

Приведем еще уравнение баланса энергии в системе:

$$\omega \sum_{s=1}^k \sigma_s \langle (L_s) \rangle = \omega \sum_{s=1}^k (R_s^o + W_s^{(R)} + W_s^{(G)} + S_s^{(G)}),$$

которое получается в результате сложения всех уравнений (8.27) и учета равенств (8.20), (8.25) и (8.26).

В случае приводимых от асинхронных двигателей дебалансных вибровозбудителей с положительными, не слишком сильно отличающимися парциальными угловыми скоростями (см. § 5), и ког-

да силы сопротивления в колебательной части системы не учитываются ($Q_r^{(0)} = 0$) имеем

$$G_s = 0, \quad W_s^{(R)} = W_s^{(G)} = 0, \quad W_s = W_s^{(K)}, \quad Z_s = k_s(\omega_s - \omega), \quad (8.32)$$

и уравнения (8.28) резко упрощаются, принимая в точности тот же вид

$$P_s \equiv (\omega_s - \omega) - \frac{1}{k_s} W_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (8.33)$$

что и уравнения (5.17); различие состоит лишь в выражениях $W_s = W_s^{(K)}$, которые теперь могут оказаться более сложными, чем (4.20). Складывая уравнения (8.33), предварительно умноженные на k_s , придем к тому же соотношению (5.18) для определения синхронной угловой скорости ω ; это соотношение и в данном случае играет роль уравнения баланса энергии.

3. Случай квазилинейной колебательной системы. Выражения вибрационных моментов через гармонические коэффициенты влияния. Ряд упрощений полученных выше общих соотношений достигается в случае, когда несущая система является линейной, по крайней мере в порождающем приближении. Предположим, что это так и что к тому же несомые связи (элементы системы принудительной синхронизации) безынерционны и не вносят дополнительных степеней свободы. Тогда $m = v$ и выражение (8.13) для функции Лагранжа $L^{(II)}$ не будет содержать переменных $u_1, \dots, u_v$. Наконец, допустим, что рассматривается движение вдали от резонанса по колебательным координатам и неконсервативные обобщенные силы, отвечающие этим координатам, в порождающем приближении не учитываются, т. е. выполняются равенства (8.22).

При сделанных предположениях справедливы соотношения (4.14) гл. 12, и поэтому при учете (8.14) и (8.16) имеем

$$\frac{\partial (\Lambda + \Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)})}{\partial \alpha_s} \equiv \frac{\partial (\Lambda^* + 2\Lambda^{(I)})}{\partial \alpha_s} \equiv \frac{\partial (\Delta\Lambda^* + 2\Lambda^{(I)})}{\partial \alpha_s} = 0. \quad (8.34)$$

Если учесть, что в данном случае верны также формулы (8.19), то при учете (8.16) и (8.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s &= W_s^{(K)} + S_s^{(K)} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} = -\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial (\Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)})}{\partial \alpha_s}, \\ W_s^{(K)} &= -\frac{\partial (\Delta\Lambda^* + \Lambda^{(I)})}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial \Lambda^{(I)}}{\partial \alpha_s} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \Delta\Lambda^*, \\ S_s^{(K)} &= -\frac{\partial \Lambda^{(II)}}{\partial \alpha_s}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

В результате основные уравнения (8.4), (8.27) и (8.28) также упрощаются и могут быть записаны в одной из следующих форм:

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{k_s} [\sigma_s \langle (L_s) \rangle - R_s^0 - W_s^{(R)} - W_s^{(K)} - S_s^{(K)}] = 0$$

$$(s = 1, \dots, k), \quad (8.36)$$

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{k} \left[\sigma_s \langle (L_s) \rangle - R_s^0 - W_s^{(R)} - \frac{\partial (\Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)})}{\partial \alpha_s} \right] = 0. \quad (8.37)$$

В случае квазилинейной колебательной системы может быть использован эффективный способ получения выражений для вибрационных моментов W_s , что является наиболее трудным элементом при составлении основных уравнений. Этот способ, предложенный независимо и в несколько отличающейся форме К. Ш. Ходжаевым [283] и Л. Шперлингом [329, 330], заключается в представлении выражения для W_s через посредство так называемых *гармонических коэффициентов влияния*.

Будем сначала предполагать, что *вибровозбудители являются обычными дебалансными* (см. § 1 и рис. 9, а); с другой стороны, откажемся от предположения о равенстве нулю неконсервативных сил $Q_r^{(0)}$, соответствующих колебательным координатам, а также от предположения об отсутствии резонанса по этим координатам; будем считать при этом, что силы $Q_r^{(0)}$ являются силами вязкого трения. В рассматриваемом случае $W_s^{(R)} = 0$, т. е. момент сопротивления $\sigma_s \langle (R_s) \rangle$ не зависит от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, так что согласно (8.25) и (8.26)

$$\sigma_s \langle (R_s) \rangle = R^0, \quad W_s = W_s^{(K)} + W_s^{(G)}. \quad (8.38)$$

Пусть $o_s u_s v_s w_s$ ($s = 1, \dots, k$) — прямоугольная система координат, связанная с соответствующим телом несущей системы (рис. 12, а), причем ось $o_s w_s$ направлена вдоль оси вращения ротора s -го возбудителя, а начало координат o_s выбрано так, чтобы центр тяжести ротора C_s всегда находился в плоскости $o_s u_s v_s$.

Введем в рассмотрение k^2 величин

$$k_{uu}^{(js)}(\omega), \quad k_{uv}^{(js)}(\omega), \quad k_{vu}^{(js)}(\omega), \quad k_{vv}^{(js)}(\omega),$$

$$\psi_{uu}^{(js)}(\omega), \quad \psi_{uv}^{(js)}(\omega), \quad \psi_{vu}^{(js)}(\omega), \quad \psi_{vv}^{(js)}(\omega),$$

определяемых следующим образом.

Пусть к точке несущего тела o_j в направлении оси $o_j u_j$ приложена гармоническая сила единичной амплитуды с периодом $2\pi/\omega$. Пусть кроме этой силы на колебательную систему не действуют никакие другие задаваемые силы. Тогда амплитуда проекции перемещения точки o_s на ось $o_s u_s$ при установившихся вынужден-

ных колебаниях и угол сдвига фаз между указанным перемещением и силой будут соответственно равны величинам $k_{uu}^{(js)}(\omega)$ и $\psi_{uu}^{(js)}(\omega)$.

Таким образом, если на колебательную систему в точке O , действует только одна задаваемая сила $i_j \cos \omega t$, то проекция

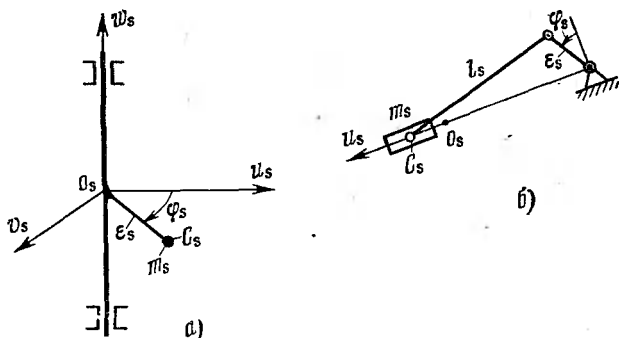


Рис. 12.

перемещения точки O_s на ось $O_s u_s$ в режиме установившихся колебаний будет

$$s_{uu}^{(js)} = k_{uu}^{(js)}(\omega) \cos [\omega t - \psi_{uu}^{(js)}(\omega)]. \quad (8.39)$$

Аналогичным образом величины $k_{uv}^{(js)}(\omega)$ и $\psi_{uv}^{(js)}(\omega)$ определяются соответственно как амплитуда и сдвиг фаз проекции перемещения точки O_s на ось $O_s v_s$ при действии единичной гармонической силы периода $2\pi/\omega$ на точку O_j в направлении оси $O_j u_j$ и т. д.

Введенные коэффициенты могут быть определены в результате решения соответствующих линейных задач или даже экспериментальным путем (см. ниже). В случае, когда трение в колебательной части системы не учитывается, величины $k_{uu}^{(js)}(\omega)$, ..., $k_{vv}^{(js)}(\omega)$ представляют собой обычные гармонические коэффициенты влияния; мы сохраним этот термин также для систем с трением и будем называть указанные коэффициенты *гармоническими коэффициентами влияния первого рода*.

Для гармонических коэффициентов влияния имеют место соотношения взаимности [283]:

$$k_{uu}^{(sj)}(\omega) = k_{uu}^{(js)}(\omega), \quad k_{vu}^{(sj)}(\omega) = k_{uv}^{(js)}(\omega), \quad k_{vv}^{(sj)}(\omega) = k_{vv}^{(js)}(\omega), \quad (8.40)$$

$$\psi_{uu}^{(sj)}(\omega) = \psi_{uu}^{(js)}(\omega), \quad \psi_{vu}^{(sj)}(\omega) = \psi_{uv}^{(js)}(\omega), \quad \psi_{vv}^{(sj)}(\omega) = \psi_{vv}^{(js)}(\omega).$$

Отметим, что для определенности фаз $\psi_{uu}^{(sj)}, \dots, \psi_{vv}^{(sj)}$ можно считать величины $k_{uu}^{(sj)}, \dots, k_{vv}^{(sj)}$ существенно положительными.

Как показал К. Ш. Ходжаев [283] (см. также [57]), вибрационный момент W_s для случая дебалансных вибровозбудителей выражается (с точностью до обычно не существенных малых величин) через введенные выше гармонические коэффициенты влияния первого рода следующим образом *):

$$\begin{aligned} W_s &= W_s^{(K)} + W_s^{(G)} = \\ &= \frac{m_s \varepsilon_s \omega^4}{2} \sum_{j=1}^h m_j \varepsilon_j [k_{uu}^{(js)} \sin(\alpha_s - \alpha_j + \psi_{uu}^{(js)}) + \\ &+ \sigma_j k_{vu}^{(js)} \cos(\alpha_s - \alpha_j + \psi_{vu}^{(js)}) - \sigma_s k_{uv}^{(js)} \cos(\alpha_s - \alpha_j + \psi_{uv}^{(js)}) + \\ &+ \sigma_j \sigma_s k_{vv}^{(js)} \sin(\alpha_s - \alpha_j + \psi_{vv}^{(js)})]. \quad (8.41) \end{aligned}$$

Здесь, как и в § 4, через m_s и ε_s обозначены соответственно масса и эксцентриситет ротора s -го возбудителя, а число $\sigma_s = 1$, если рассматривается синхронное движение, в котором ротор s -го возбудителя вращается в положительном направлении (см. рис. 12, а), и $\sigma_s = -1$ — если в отрицательном.

Часто удобнее пользоваться не введенными выше гармоническими коэффициентами влияния первого рода $k_{uu}^{(js)}, \dots, k_{vv}^{(js)}$, $\psi_{uu}^{(js)}, \dots, \psi_{vv}^{(js)}$, а величинами

$$\begin{aligned} K_{uu}^{(js)} &= K_{uu}^{(sj)} = k_{uu}^{(js)} \cos \psi_{uu}^{(js)}, & K_{vu}^{(js)} &= K_{uv}^{(sj)} = k_{vu}^{(js)} \cos \psi_{vu}^{(js)}, \\ K_{vv}^{(js)} &= K_{vv}^{(sj)} = k_{vv}^{(js)} \cos \psi_{vv}^{(js)}, & & (8.42) \\ G_{uu}^{(js)} &= G_{uu}^{(sj)} = k_{uu}^{(js)} \sin \psi_{uu}^{(js)}, & G_{vu}^{(js)} &= G_{uv}^{(sj)} = k_{vu}^{(js)} \sin \psi_{vu}^{(js)}, \\ G_{vv}^{(js)} &= G_{vv}^{(sj)} = k_{vv}^{(js)} \sin \psi_{vv}^{(js)}, & & \end{aligned}$$

использовавшимися Л. Шперлингем в упомянутых работах [329, 330]; назовем эти величины *гармоническими коэффициентами влияния второго рода*. Очевидно, что по своему физическому смыслу, например, величины $K_{uu}^{(js)}$ и $G_{uu}^{(js)}$ представляют собой коэффициенты соответственно при $\cos \omega t$ и при $\sin \omega t$ в выражении $s_{uu}^{(js)}$ для проекции смещения точки o_s на ось $o_s u_s$ при действии на точку o_s гармонического возмущения единичной амплитуды, направленного вдоль оси $o_s u_s$. Иными словами, при действии указанного возмущения проекция смещения $s_{uu}^{(js)}$ точки o_s на ось

*) Заметим, что формула К. Ш. Ходжаева отличается от приведенной здесь и в книге [57] тем, что в ней все числа σ_s считаются равными единице. Кроме того, имеется отличие в знаке W_s , что объясняется иным определением вибрационного момента.

$o_s u$ представляется не в виде (8.39), а в форме

$$s_{uu}^{(js)} = K_{uu}^{(js)} \cos \omega t + G_{uu}^{(js)} \sin \omega t.$$

Нетрудно видеть, что соотношения (8.42) непосредственно вытекают из сопоставления последнего равенства с (8.39).

При использовании гармонических коэффициентов влияния второго рода выражение (8.41) для вибрационных моментов может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} W_s &= W_s^{(K)} + W_s^{(G)} = \\ &= \frac{m_s \varepsilon_s \omega^4}{2} \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j [(K_{uu}^{(js)} - \sigma_j G_{vu}^{(js)} + \sigma_s G_{uv}^{(js)} + \sigma_j \sigma_s K_{vv}^{(js)}) \sin(\alpha_s - \alpha_j) + \\ &\quad + (G_{uu}^{(js)} + \sigma_j K_{vu}^{(js)} - \sigma_s K_{uv}^{(js)} + \sigma_j \sigma_s G_{vv}^{(js)}) \cos(\alpha_s - \alpha_j)]. \quad (8.43) \end{aligned}$$

Отметим, что в случае, когда рассматривается движение вдали от резонанса по колебательным координатам и силы трения в порождающем приближении не учитываются, все величины $\psi_{uu}^{(js)}, \dots, \psi_{vv}^{(js)}$ равны либо 0, либо π (напомним, что коэффициенты $k_{uu}^{(js)}, \dots, k_{vv}^{(js)}$ считаются существенно положительными). Поэтому в указанном случае

$$W_s^{(G)} = 0, \quad G_{uu}^{(js)} = G_{uv}^{(js)} = G_{vu}^{(js)} = G_{vv}^{(js)} = 0,$$

и выражение (8.43) упрощается:

$$\begin{aligned} W_s &= W_s^{(K)} = \frac{m_s \varepsilon_s \omega^4}{2} \sum_{s=1}^k m_j \varepsilon_j [(K_{uu}^{(js)} + \sigma_j \sigma_s K_{vv}^{(js)}) \sin(\alpha_s - \alpha_j) + \\ &\quad + (\sigma_j K_{vu}^{(js)} - \sigma_s K_{uv}^{(js)}) \cos(\alpha_s - \alpha_j)]. \quad (8.44) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай вибровозбудителей направленного действия — так называемых *поршневых вибровозбудителей*, схематически представленных на рис. 10, д и 12, б. Колебания инерционному элементу m_s («поршню») в этих возбудителях сообщаются, например, от центрального кривошипного механизма. Отношение радиуса кривошина ε_s к длине шатуна l_s при этом будем считать столь малым, чтобы движение массы m_s при равномерном вращении вала кривошипа можно было рассматривать с достаточной точностью как простое гармоническое. Начало подвижной оси $o_s u_s$ выберем в среднем положении массы m_s при ее колебаниях в несущем теле. В данном случае достаточно использовать лишь два гармонических коэффициента влияния первого рода $k_{uu}^{(js)}$ и $\psi_{uu}^{(js)}$. Первый из них равен амплитуде проекции перемещения при колебаниях точки o_j несущего тела на ось $o_j u_j$, вызванных гармонической силой единичной амплитуды с периодом

$T = 2\pi/\omega$, действующей на точку o_s вдоль оси $o_s u_s$; $\psi_{uu}^{(js)}$ есть соответствующий угол сдвига фаз. При этом получается следующее выражение для вибрационного момента:

$$W_s = W_s^{(K)} + W_s^{(G)} = \frac{\sigma_s m_s \varepsilon_s \omega^4}{2} \sum_{j=1}^k k_{uu}^{(js)} \sigma_j m_j \varepsilon_j \sin(\alpha_s - \alpha_j + \psi_{uu}^{(js)}). \quad (8.45)$$

При использовании гармонических коэффициентов влияния второго рода, определенных соотношениями

$$\begin{aligned} K_{uu}^{(js)} &= K_{uu}^{(sj)} = k_{uu}^{(js)} \cos \psi_{uu}^{(js)}, \\ G_{uu}^{(js)} &= G_{uu}^{(sj)} = k_{uu}^{(js)} \sin \psi_{uu}^{(js)}, \end{aligned} \quad (8.46)$$

выражение (8.45) принимает вид

$$W_s = W_s^{(K)} + W_s^{(G)} = \frac{\sigma_s m_s \varepsilon_s \omega^4}{2} \sum_{j=1}^k m_j \varepsilon_j \sigma_j [K_{uu}^{(js)} \sin(\alpha_s - \alpha_j) + G_{uu}^{(sj)} \cos(\alpha_s - \alpha_j)]. \quad (8.47)$$

Как и ранее, при неучете сил вязкого трения в колебательной части системы в нерезонансном случае $W_s^{(G)} = 0$, $G_{uu}^{(sj)} = 0$ и в выражении (8.47) под знаком суммы остается лишь первое слагаемое.

Как и в § 5, все полученные выражения для вибрационных моментов могут быть представлены в виде сумм частных вибрационных моментов w_{sj} , имеющих, естественно, тот же физический смысл.

Заметим в заключение, что выражения для вибрационных моментов через гармонические коэффициенты влияния могут быть получены и для других, более сложных типов возбудителей, в частности, для возбудителей, генерирующих возмущающие силы и моменты весьма общего характера [214].

4. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений и тенденция вибровозбудителей к синхронизации. Сказанное в § 7 по поводу самосинхронизации вибровозбудителей в простейшей системе распространяется на значительно более общие системы, рассмотренные в настоящем параграфе.

Для справедливости интегрального критерия устойчивости (экстремального свойства) в общем случае достаточно, чтобы существовала функция B (потенциал усредненных неконсервативных сил) такая, что

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha_s} = A_s = Z_s - G_s \quad (s = 1, \dots, k). \quad (8.48)$$

Тогда согласно изложенному в § 8 гл. 10 и в § 4 гл. 12 за потенциальную функцию можно принять выражение

$$D = -(\Lambda + B); \quad (8.49)$$

точкам грубых минимумов этой функции отвечают устойчивые синхронные движения вибровозбудителей.

Поскольку собственные усредненные функции Лагранжа возбудителей Λ_i не зависят от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (см. п. 2), то за функцию D можно принять также выражение

$$D = -(\Lambda_0 + B) = -(\Delta\Lambda^* + \Lambda^{(I)} + \Lambda^{(II)} + B), \quad (8.50)$$

в котором $\Lambda_0 = \Delta\Lambda^* + \Lambda^{(I)} + \Lambda^{(II)}$ есть усредненное значение функции Лагранжа системы связей.

В случае, когда система квазилинейна по колебательным координатам, а консервативные силы по этим координатам не учитываются (рассматривается движение вдали от резонанса), справедливы соотношения (8.34), и поэтому за потенциальную функцию может быть принято, кроме (8.49) и (8.50), также одно из следующих выражений:

$$D = \Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)} - B, \quad (8.51)$$

$$D = -\left(\frac{1}{2} \Delta\Lambda^* + \Lambda^{(II)} + B\right), \quad (8.52)$$

где $\partial B / \partial \alpha_s = A_s = Z_s$. При этом в случае самосинхронизации дебалансных и подобных им возбудителей, когда несомые связи отсутствуют $\Lambda^{(II)} = 0$, а парциальные угловые скорости одинаковы, как и в § 7, $B = \text{const}$, и поэтому можно положить

$$D = \Lambda^{(I)} \quad \text{или} \quad D = -\Delta\Lambda^*. \quad (8.53)$$

Иными словами, в этом весьма распространенном случае за потенциальную функцию можно принять либо усредненную за период функцию Лагранжа системы несущих тел, либо взятую с противоположным знаком добавку к функции Лагранжа возбудителей, обусловленную подвижностью несущих тел; при этом функции Лагранжа предполагаются вычисленными в порождающем приближении.

В еще более частном, однако нередко встречающемся на практике случае, когда тела несущей системы связаны одно с другим и с неподвижным основанием весьма мягкими упругими элементами (геометрические связи между телами, однако, могут присутствовать), потенциальной энергией $\Pi^{(I)}$ несущей системы можно пренебречь, и тогда согласно первому выражению (8.53)

$$D = \langle (T^{(I)}) \rangle. \quad (8.54)$$

Таким образом, в данном случае устойчивые синхронные движения отвечают минимумам усредненной за период кинетической

энергии тел несущей системы. В частности, если возможна такая фазировка возбудителей, при которой колебания несущей системы будут отсутствовать (в порождающем приближении), то именно она и окажется устойчивой. Это положение, обобщающее изложенное в § 7 и названное парадоксом неработающих связей, находит важные практические приложения (см. § 14).

Второму выражению (8.53) соответствует геометрическая форма интегрального критерия устойчивости, предложенная Б. П. Лавровым ([164, 165]; см. также [57]). Оказывается, что величина $-\Delta\Lambda^*$ в рассматриваемых системах представляет собой «потерю» кинетической энергии вращающихся роторов, обусловленную колебаниями их осей. При этом минимуму выражения $-\Delta\Lambda^* = -\Delta T^*$ соответствует минимум суммы амплитуд проекции перемещений точек o_s (рис. 11, а) на направление вектора-эксцентриситета ротора e_s . Напомним, что в случае задачи о внутренней синхронизации (в частности, о самосинхронизации) из условий стационарности функции D

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_s} = -P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0 \quad (s = 1, \dots, k) \quad (8.55)$$

определяются разности фаз $\alpha_s - \alpha_k$, а также исходное приближение к синхронной угловой скорости ω .

Тенденция к синхронизации вибровозбудителей в рассмотренных системах предопределяется 2π -периодичностью функций Λ , Λ_0 , $\Delta\Lambda^*$, $\Lambda^{(I)}$ и $\Lambda^{(II)}$ по всем фазам $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. А именно (см. § 9 гл. 10), если, например, величины A_s равны нулю или малы соответственно по сравнению с $\partial\Lambda_0/\partial\alpha_s$, $\partial(\Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)})/\partial\alpha_s$ или $\partial\left(\frac{1}{2}\Delta\Lambda^* + \Lambda^{(II)}\right)/\partial\alpha_s$, т. е. если существует периодическая потенциальная или квазипотенциальная функция, то устойчивые в малом синхронные движения непременно существуют. Это, в частности, будет в случае дебалансных или аналогичных им вибровозбудителей с одинаковыми или близкими парциальными угловыми скоростями ω_s .

5. Синхронизация вибровозбудителей на упруго опертом плоско колеблющемся твердом теле. Широкий класс вибрационных устройств может быть идеализирован в виде системы, схематически представленной на рис. 13. Несущее тело B_0 (вибрирующий орган машины) считается твердым телом, которое может совершать малые плоско-параллельные колебания и которое связано с неподвижным основанием системой упругих и демпфирующих элементов. В теле размещено k' дебалансных и k'' планетарных вибровозбудителей, общее число возбудителей, таким образом, есть $k = k' + k''$.

Дебалансные возбудители I , как отмечалось в § 1, представляют собой неуравновешенные роторы, приводимые от каких-

либо двигателей. Под планетарными возбудителями понимаются либо круговые цилиндрические ролики 2, вложенные в стаканы 3, укрепленные в теле B_0 (внутренние планетарные возбудители), либо кольца 2', которые могут обкатываться своей внутренней поверхностью по осям 3', связанным с телом B_0 (внешние

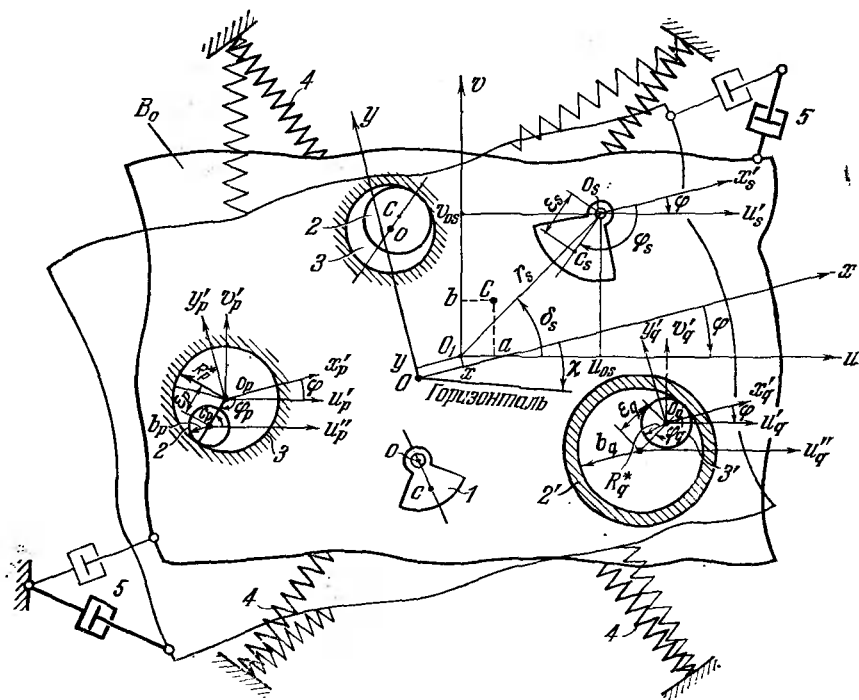


Рис. 13.

планетарные возбудители). Оси возбудителей считаются перпендикулярными плоскости, параллельно которой происходит движение тела B_0 . Предполагается, что в рассматриваемых синхронных движениях ролики планетарных возбудителей не отрываются от стаканов, а кольца — от осей, т. е. что не происходит нарушения неудерживающих связей. Условия, при которых последнее требование выполняется, указаны в книге [57]. Инерционные элементы возбудителей (роторы, ролики, кольца) могут быть связаны друг с другом системой линейно упругих синхронизирующих элементов (несомых связей).

Приведем основные соотношения, относящиеся к задаче о синхронизации в описанной системе; эта задача подробно изучена в работах [36, 57].

Пусть uO_1v — система осей, жестко связанных с несущим телом B_0 , начало которой O_1 выбрано в центре тяжести так называемого *вспомогательного тела*, т. е. тела, получающегося из B_0 , если присоединить к нему массы m_s всех инерционных элементов возбуждателей, сосредоточив их на осях возбуждателей. Пусть далее xOy — неподвижная система осей, с которой совпадают оси uO_1v в положении статического равновесия системы. Наклон осей будем выбирать так, чтобы квазиупругий коэффициент c_{xy} в выражении для потенциальной энергии $\Pi^{(I)}$ несущего тела B_0 был равен нулю (см. ниже). Подобный выбор осей позволяет несколько упростить приводимые далее соотношения. Плоскость xOy не предполагается непременно вертикальной — потенциальную энергию силы тяжести инерционных элементов возбуждателей в изучаемом ниже случае задачи можно не учитывать [57].

За обобщенные координаты несущего тела B_0 примем координаты x и y точки O_1 в системе xOy и угол поворота тела φ , отсчитываемый по ходу часовой стрелки; так же отсчитываются от неподвижной оси Ox и углы поворота φ_s инерционных элементов возбуждателей. Выражения для кинетической и потенциальной энергии системы имеют вид

$$T = \sum_{s=1}^k T_s + T^{(I)} + \Delta T^*, \quad \Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(II)}, \quad (8.56)$$

где

$$T_s = \frac{1}{2} I_s \dot{\varphi}_s^2, \quad T^{(I)} = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$$

$$\Delta T^* = - \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s \dot{\varphi}_s (\dot{x} \sin \varphi_s + \dot{y} \cos \varphi_s) +$$

$$+ \dot{\varphi} \sum_{s=1}^k \dot{\varphi}_s \left[m_s \varepsilon_s \cos(\varphi_s + \delta_s) - h_s \frac{\varepsilon_s \lambda_s^* (b_s + \varepsilon_s \lambda_s^*)}{b_s^2} \right]; \quad (8.57)$$

$$\Pi^{(I)} = \frac{1}{2} (c_{xx} x^2 + c_{yy} y^2 + c_{\varphi} \varphi^2 + 2c_{x\varphi} x\varphi + 2c_{y\varphi} y\varphi),$$

$$\Pi^{(II)} = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k c_{sj} (\sigma_s \varphi_s - \sigma_j \varphi_j - \kappa_s + \kappa_j)^2,$$

причем m_s , I_s и ε_s — соответственно массы, приведенные моменты инерции и эксцентриситеты возбуждателей; r_s и δ_s — полярные координаты осей возбуждателей (см. рис. 12), M и I — масса и момент инерции вспомогательного тела; $b_s = R_s^* - \varepsilon_s$ — радиус ролика в случае внутреннего и $b_s = R_s^* + \varepsilon_s$ — внутренний радиус кольца в случае внешнего возбуждателя (R_s^* — радиус стакана или

оси); $\lambda_s^* = 1$, если ролик или кольцо катятся без скольжения, и $\lambda_s^* = 0$, если они скользят, не поворачиваясь, относительно несущего тела B_0 ; $h_s = 0$ для дебалансных и $h_s = 1$ для планетарных возбудителей; $c_{x\ldots}, c_{y\ldots}$ — квазиупругие коэффициенты; c_{sj} — жесткости, а κ_s — «установочные углы» системы упругих синхронизирующих элементов; указанные углы могут назначаться произвольно — их выбор определяется требуемой фазировкой возбудителей.

Пусть рассматривается движение вдали от резонанса, т. е. частоты свободных колебаний тела B_0 на упругих элементах p_1, p_2 и p_3 в достаточной мере отличаются от целых кратностей синхронной угловой скорости возбудителей ω . Силы сопротивления по колебательным координатам в порождающем приближении при этом не учитываем ($Q_x^{(0)} = Q_y^{(0)} = Q_z^{(0)} = 0$).

Тогда порождающее решение соответствует равномерному вращению инерционных элементов возбудителей по закону $\varphi_s^0 = \sigma_s(\omega t + \alpha_s)$ (как и ранее, рассматривается простая синхронизация) и малым установившимся вынужденным колебаниям тела B_0 при указанном движении возбудителей. Эти колебания находятся как $2\pi/\omega$ -периодическое решение уравнений

$$\begin{aligned} M\ddot{x}^0 + c_x x^0 + c_{x\varphi} \varphi^0 &= \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_s), \\ M\ddot{y}^0 + c_y y^0 + c_{y\varphi} \varphi^0 &= - \sum_{s=1}^k \sigma_s m_s \varepsilon_s \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_s), \\ I\ddot{\varphi}^0 + c_\varphi \varphi^0 + c_{x\varphi} x^0 + c_{y\varphi} y^0 &= \sum_{s=1}^k \sigma_s m_s \varepsilon_s r_s \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_s + \sigma_s \delta_s), \end{aligned} \quad (8.58)$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} x^0 &= \sum_{s=1}^k \frac{m_s \varepsilon_s}{M} [A_s^\circ \cos(\omega t + \alpha_s) + \sigma_s B_s^\circ \sin(\omega t + \alpha_s)], \\ y^0 &= \sum_{s=1}^k \frac{m_s \varepsilon_s}{M} [C_s^\circ \cos(\omega t + \alpha_s) + \sigma_s D_s^\circ \sin(\omega t + \alpha_s)], \\ \varphi^0 &= \sum_{s=1}^k \frac{m_s \varepsilon_s}{M\rho} [M_s^\circ \cos(\omega t + \alpha_s) + \sigma_s N_s^\circ \sin(\omega t + \alpha_s)]. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} A_s^\circ &= A_s^\circ(\omega^2) = b_{xx}(\omega^2) + b_{x\varphi}(\omega^2) \nu_s \sin \delta_s, \\ B_s^\circ &= B_s^\circ(\omega^2) = -b_{xy}(\omega^2) + b_{x\varphi}(\omega^2) \nu_s \cos \delta_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{s1}^0 &= C_s^0(\omega^2) = b_{xy}(\omega^2) + b_{y\varphi}(\omega^2) v_s \sin \delta_s, \\
D_s^0 &= D_s^0(\omega^2) = -b_{yy}(\omega^2) + b_{y\varphi}(\omega^2) v_s \cos \delta_s, \\
M_s^0 &= M_s^0(\omega^2) = b_{x\varphi}(\omega^2) + b_{\varphi\varphi}(\omega^2) v_s \sin \delta_s, \\
N_s^0 &= N_s^0(\omega^2) = -b_{y\varphi}(\omega^2) + b_{\varphi\varphi}(\omega^2) v_s \cos \delta_s; \\
v_s &= r_s/\rho, \quad \rho^2 = I/M;
\end{aligned}
\tag{8.60}$$

$$\begin{aligned}
b_{xx}(\omega^2) &= \frac{(p_y^2 - \omega^2)(p_\varphi^2 - \omega^2) - p_{y\varphi}^4}{D(\omega^2)} \omega^2, \quad b_{x\varphi}(\omega^2) = -\frac{p_{x\varphi}^2(p_y^2 - \omega^2)\omega^2}{D(\omega^2)}, \\
b_{xy}(\omega^2) &= \frac{p_{x\varphi}^2 p_{y\varphi}^2 \omega^2}{D(\omega^2)}, \quad b_{y\varphi}(\omega^2) = -\frac{p_{y\varphi}(p_x^2 - \omega^2)\omega^2}{D(\omega^2)}, \\
b_{yy}(\omega^2) &= \frac{(p_x^2 - \omega^2)(p_\varphi^2 - \omega^2) - p_{x\varphi}^4}{D(\omega^2)} \omega^2, \quad b_{\varphi\varphi} = \frac{(p_x^2 - \omega^2)(p_y^2 - \omega^2)}{D(\omega^2)} \omega^2; \\
D(p^2) &= (p_x^2 - p^2)(p_y^2 - p^2)(p_\varphi^2 - p^2) - p_{y\varphi}^4(p_x^2 - p^2) - p_{x\varphi}^4(p_y^2 - p^2); \\
p_x^2 &= \frac{c_x}{M}, \quad p_y^2 = \frac{c_y}{M}, \quad p_\varphi^2 = \frac{c_\varphi}{I}, \quad p_{x\varphi}^2 = \frac{c_{x\varphi}}{M\rho}, \quad p_{y\varphi}^2 = \frac{c_{y\varphi}}{M\rho},
\end{aligned}$$

причем согласно предположению частотное уравнение $D(p^2) = 0$ не имеет корней p , равных $n\omega$ (n — целое число), так что, во всяком случае, $D(\omega^2) \neq 0$.

Выражения для вибрационных моментов W_s , моментов S_s системы принудительной синхронизации и моментов сопротивления R_s^0 имеют вид

$$\begin{aligned}
W_s &= W_s^{(K)} + W_s^{(R)}, \\
S_s &= S_s^{(K)} = -\frac{\partial \Lambda^{(II)}}{\partial \alpha_s} = \sum_{j=1}^h c_{sj} (\alpha_s - \alpha_j - \kappa_s + \kappa_j); \\
W_s^{(K)} &= \frac{\partial \Lambda^{(I)}}{\partial \alpha_s} = \frac{1}{2} \frac{m_s \varepsilon_s \omega^2}{M} \sum_{j=1}^h m_j \varepsilon_j [P_{sj} \sin(\alpha_s - \alpha_j) + Q_{sj} \cos(\alpha_s - \alpha_j)], \\
W_s^{(R)} &= \frac{1}{2} h_s f'_s \frac{m_s \varepsilon_s \omega^2}{M} \sum_{j=1}^h m_j \varepsilon_j [P_{sj} \cos(\alpha_s - \alpha_j) - Q_{sj} \sin(\alpha_s - \alpha_j)]; \\
R_s^0 &= m_s \varepsilon_s \omega^2 \left[\frac{1}{2} f_s d_s + h_s \left(f'_s \varepsilon_s - \frac{1}{2} f_s d_s \right) \right],
\end{aligned}
\tag{8.64}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{sj} &= P_{js} = b_{xx} + \sigma_s \sigma_j b_{yy} + b_{x\varphi} (v_j \sin \delta_j + v_s \sin \delta_s) - \\
&- b_{y\varphi} \sigma_s \sigma_j (v_j \cos \delta_j + v_s \cos \delta_s) + b_{\varphi\varphi} \sigma_s \sigma_j v_s v_j \cos(\sigma_s \delta_s - \sigma_j \delta_j), \\
Q_{sj} &= -Q_{js} = (\sigma_s - \sigma_j) b_{xy} + b_{x\varphi} (\sigma_j v_j \cos \delta_j - \sigma_s v_s \cos \delta_s) + \\
&+ b_{y\varphi} (\sigma_s v_j \sin \delta_j - \sigma_j v_s \sin \delta_s) + b_{\varphi\varphi} \sigma_j \sigma_s v_j v_s \sin(\sigma_s \delta_s - \sigma_j \delta_j),
\end{aligned}
\tag{8.62}$$

а через f_s и f'_s обозначены соответственно коэффициент трения в подшипниках качения дебалансного возбудителя и коэффициент сопротивления перекачиванию в планетарном возбудителе (принимается, как обычно, что в первом случае момент сопротивления равен $\frac{1}{2} f_s d_s N_s \operatorname{sgn} \dot{\varphi}_s$, а во втором $f'_s \varepsilon_s N_s \operatorname{sgn} \dot{\varphi}_s$, где d_s — диаметр внутреннего кольца подшипника качения, а N_s — модуль нормальной составляющей реакции в подшипнике). Напомним, что для дебалансных возбудителей $h_s = 0$ и $W_s^{(R)} = 0$.

Основные уравнения, из которых определяются начальные фазы α_s , при этом записываются в форме (8.36) или (8.37), а вопрос об устойчивости решается в зависимости от знаков вещественных частей корней уравнения (8.30) или (в случае задачи о внутренней синхронизации) уравнения (8.31).

Заметим, что в случае планетарных вибровозбудителей потенциальная функция не существует [57]; здесь речь может идти лишь о квазипотенциальной функции в смысле, указанном в § 9 гл. 10.

6. Режимы установления синхронных движений вибровозбудителей. В ряде случаев представляет интерес изучение не только устойчивых установившихся режимов синхронного движения вибровозбудителей, но и процессов установления таких режимов. Дифференциальные уравнения указанных переходных процессов могут быть легко получены путем применения метода прямого разделения движений или вариационного метода А. И. Лурье. (см. §§ 3 и 6 гл. 11).

Используя первый метод заметим, что система уравнений (4.2), (4.3) гл. 12 для задачи о простой синхронизации ($n_1 = \dots = n_k = 1$) может быть записана в форме (сравните эти уравнения с уравнениями (4.12) настоящей главы, соответствующими простейшей задаче)

$$I_s \ddot{\varphi}_s + k_s (\dot{\varphi}_s - \sigma_s \omega) = \mu F_s(\varphi_s, u, \omega t) \quad (s = 1, \dots, k),$$

$$Du = \sum_{s=1}^k F_s(\varphi_s) + \mu U(u, \varphi_1, \dots, \varphi_k), \quad (8.63)$$

где D — некоторый дифференциальный оператор, а функции F_s , F_s и U могут зависеть не только от φ_s и u , но и от их производных.

В соответствии с основной предпосылкой метода предположим, что рассматриваемые движения могут быть представлены в виде

$$\varphi_s = \sigma_s [\omega t + \alpha_s(t) + \psi_s(t, \omega t)], \quad u = u(t, \omega t). \quad (8.64)$$

где $\alpha_s(t)$ — медленно, а ψ_s и u — быстро изменяющиеся величины; возможность такого представления решений уравнений (8.63),

близких к синхронным, подтверждается экспериментами (см. § 13).

Считая, согласно замечанию 2) § 3 гл. 11, моменты $\mu\Phi_s$ быстрыми, запишем уравнения (3.8) и (3.7) гл. 11 в форме

$$I_s \ddot{\alpha}_s + k_s \dot{\alpha}_s = \mu \sigma_s \langle \Phi_s \rangle \quad (s = 1, \dots, k), \quad (8.65)$$

$$I_s \ddot{\psi}_s + k_s \dot{\psi}_s = \mu \sigma_s (\Phi_s - \langle \Phi_s \rangle) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (8.66)$$

$$Du = \sum_{s=1}^k F_s [\sigma_s (\omega t + \alpha_s + \psi_s)] +$$

$$+ \mu U [u, \sigma_1 (\omega t + \alpha_1 + \psi_1), \dots, \sigma_k (\omega t + \alpha_k + \psi_k)].$$

Разыскивая вначале $2\pi/\omega$ -периодическое решение уравнений быстрых движений (8.66) при «замороженных» медленных переменных α_s , будем иметь $\psi_s^0 \equiv 0$, а для вектора u^0 получим уравнение

$$Du^0 = \sum_{s=1}^k F_s [\sigma_s (\omega t + \alpha_s)], \quad (8.67)$$

соответствующее $2\pi/\omega$ -периодическим колебаниям несущей системы тел под действием возбудителей, движущихся по закону $\Phi_s^0 = \sigma_s (\omega t + \alpha_s)$. Предполагая, что такое решение u^0 существует и асимптотически устойчиво, подставим его в правые части уравнений медленных движений (8.65) вместе с $\Phi_s = \Phi_s^0$. Тогда получим уравнения (напомним, что дополнительные, не играющие обычной роли круглые скобки, в которые заключено обозначение функции, означают, что она вычисляется для порождающего решения Φ_s^0, u^0)

$$I_s \ddot{\alpha}_s + k_s \dot{\alpha}_s = \mu \sigma_s \langle (\Phi_s) \rangle \quad (s = 1, \dots, k),$$

или согласно равенствам (4.6) гл. 12

$$I_s \ddot{\alpha}_s + k_s \dot{\alpha}_s = k_s P_s (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} + A_s \quad (s = 1, \dots, k). \quad (8.68)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения медленных процессов установления синхронных движений вибровозбудителей легко составляются, если известны выражения для порождающих функций P_s ; напомним, что эти выражения даются помимо (8.68) также формулами (8.28) и (8.29), а в случае квазилинейной колебательной системы — формулами (8.36) и (8.37). В стационарном случае $\alpha_k = \text{const}$ (8.68) приводит к соответствующим основным уравнениям. По крайней мере при пренебрежимо малых $I_s \ddot{\alpha}_s$, а также в случае существования потенциальной функции D из

(8.68) получаются и условия устойчивости, выражающиеся через посредство уравнений (8.30) или (8.31) (см. п. 2 § 6 гл. 12).

Как явствует из изложенного в п. 2 § 6 гл. 12, уравнения медленных движений вида (8.68) получаются и в результате использования вариационного метода А. И. Лурье: изученная не-свободная орбитальная система может рассматриваться как соответствующая система с вибровозбудителями.

На основе уравнений (8.68) можно выполнить апостериорную проверку допущения о медленности переходных процессов, описываемых этими уравнениями. Используя приведенные выше выражения для вибрационных моментов, нетрудно заключить для задачи о самосинхронизации вибровозбудителей вдали от резонанса колебательной части системы, что частоты свободных колебаний роторов вблизи стационарных синхронных режимов p , получающиеся согласно (8.68), имеют порядок $\omega\sqrt{m/M}$ (m — масса ротора возбудителя, а M — масса всей системы). Поскольку $M \gg m$, то $p/\omega \ll 1$, т. е. эти колебания действительно являются медленными.

7. Другие обобщения задачи о синхронизации вибровозбудителей (краткий обзор исследований). Укажем на работы по теории синхронизации вибровозбудителей, в которых также содержатся обобщения задачи, рассмотренной в §§ 4—7, но которые не нашли или почти не нашли отражения в настоящей книге.

Ряд исследований посвящен изучению синхронизации возбудителей в отдельных практически важных колебательных системах и классах систем с конечным числом степеней свободы. В статье Б. П. Лаврова [163] изучена задача о синхронизации вибровозбудителей, установленных на свободном («мягко опертом») твердом теле. При этом рассмотрен случай, когда среди возбудителей имеются так называемые качающиеся возбудители, или возбудители маятникового типа. Самосинхронизация вибровозбудителей в линейной цепной колебательной системе рассмотрена Л. Шперлингом [329].

Задачи о самосинхронизации возбудителей в конкретных одно-, двух- и трехмассных колебательных системах изучались О. Я. Шехтер [300], А. Д. Рудиным [249], Б. П. Лавровым и Л. А. Гольдиным [168], Г. А. Денисовым совместно с Б. П. Лавровым и Р. Ф. Нагаевым [115—118], П. М. Алабузовым, А. К. Зуевым, Е. Н. Ивановым и М. Ш. Кирнарским [5, 132, 224], В. Н. Потураевым, А. Г. Червоненко и Е. И. Плохотнюком [235], Б. В. Годованником [99 а].

Основы теории синхронизации вибровозбудителей, генерирующих практически любые силовые и моментные воздействия, разработаны Р. Ф. Нагаевым [214]. Эта теория послужила основой для исследования синхронизации гироскопических возбудителей, которое выполнено в упоминавшихся работах [5, 132, 224]. Понятие об обобщенных вибровозбудителях сформулировано в работах И. И. Блехмана [57, 63]; в последней из этих работ рассмотрена задача об их синхронизации как задача о синхронизации несвободных орбитальных систем.

Синхронизация планетарных вибровозбудителей, используемых в ряде машин также в качестве рабочих органов, рассмотрена в работе [42] и в книге автора [57], а также в книге [148].

Синхронизация вибровозбудителей в системах с распределенными параметрами изучалась Р. Ф. Нагаевым и И. А. Поповой [212, 215],

И. И. Блехманом и Ю. И. Марченко [56], Р. Ф. Нагаевым и В. В. Гузевым [408, 215].

Задачи о синхронизации механических возбудителей в системах с соударениями тел несущей системы рассматривались К. М. Рагульским [241], Р. Ф. Нагаевым [206, 215] и Л. Б. Зарецким [130, 131].

Краткая синхронизация вибровозбудителей рассматривалась К. М. Рагульским [241], а затем явилась предметом детальных исследований О. П. Барзукова [15, 16].

В работах Р. Ф. Нагаева [214, 215] развита теория синхронизации вибровозбудителей как квазиконсервативных динамических объектов. В основных практически важных случаях, в частности, в условиях существования потенциальной функции, эта более тонкая и более сложная, чем изложенная выше «неквазиконсервативная» теория приводит к тем же результатам [57]. Возможны, однако, случаи, когда результаты получаются различными. Ряд задач о синхронизации на основе применения квазиконсервативной модели возбудителей рассмотрен в работах [15, 283].

Самосинхронизация параметрически связанных вибровозбудителей рассмотрена К. В. Фроловым и автором [58].

Синхронизация вибровозбудителей в системах с сильной диссипацией энергии при движении колебательной части рассматривалась в работах И. И. Блехмана и Ю. И. Марченко [56], А. Г. Червоненко, И. И. Круша и Л. М. Шифрина [293], О. П. Барзукова, Л. К. Балабатько, Л. А. Вайсберга и А. Д. Учителя [91]. Изучение таких систем существенно, в частности, в связи с проектированием вибрационных машин, масса технологической нагрузки в которых составляет ощутимую часть массы рабочего органа.

Систематическое изложение теории синхронизации вибровозбудителей, а также обзор соответствующих исследований, выполненных до 1970 г. включительно, приведены в книге [57].

§ 9. Стабильность фазировки вращения роторов самосинхронизирующихся вибровозбудителей.

Об относительной силе вибрационной связи между возбудителями

1. О понятии стабильности фазировки при самосинхронизации вибровозбудителей. Устойчивости требуемой фазировки вращения роторов вибровозбудителей при их самосинхронизации еще недостаточно для возможности практического использования явления самосинхронизации. Необходимо также, чтобы указанная фазировка не была слишком чувствительной к разного рода несовершенствам — к случайному разбросу параметров вибровозбудителей и двигателей относительно их номинальных значений, вызванному неточностями изготовления и монтажа, а также к влиянию колебаний технологической нагрузки. Если эти несовершенства приводят к значительному изменению требуемой устойчивой фазировки, то заметно изменяется и характер колебаний рабочего органа машины, что, в свою очередь, может вызвать недопустимое нарушение технологического процесса.

Свойство вибрационного устройства с самосинхронизирующимися вибровозбудителями сохранять в заданных допустимых пре-

делах рассогласование сдвига фаз вращения роторов возбудителей при наличии всякого рода реально влияющих на него факторов будем называть *стабильностью фазировки* такого устройства. Стабильность фазировки представляет собой существенную составную часть общей стабильности рабочего режима колебаний рабочего органа вибрационного устройства [49, 57], а последняя — важную составную часть надежности вибрационной машины — ее способности к выполнению задания в определенном объеме. А именно, можно сказать, что стабильность фазировки есть та составная часть общей надежности вибрационной машины с самосинхронизирующими вибровозбудителями, которая учитывает специфику применения в ней таких возбудителей.

Стабильность фазировки может быть изучена на основе рассмотрения основных уравнений, определяющих разность фаз вращения вибровозбудителей. Зная возможные отклонения параметров системы, из этих уравнений можно найти отклонения фазовых сдвигов $\Delta\alpha_s$ от значений этих сдвигов $\alpha_s^0 - \alpha_k^0$ в устойчивых синхронных движениях при отсутствии отклонений. При этом в случае малости отклонений параметров и углов $\Delta\alpha_s$ основные уравнения могут быть линеаризованы относительно этих отклонений, в результате чего нахождение $\Delta\alpha_s$ сведется к решению системы $(k-1)$ линейных алгебраических уравнений (k — число вибровозбудителей).

2. **Случай симметричной схемы с двумя возбудителями.** Рассмотрим сначала вопрос о стабильности фазировки для достаточно широко распространенного класса вибрационных устройств с двумя самосинхронизирующимися дебалансными возбудителями, для которых основные уравнения могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \frac{1}{k_1} [k_1 (\omega_1 - \omega) \pm \widetilde{W}(\omega) \sin \alpha] = 0, \\ P_2 &\equiv \frac{1}{k_2} [k_2 (\omega_2 - \omega) \mp \widetilde{W}(\omega) \sin \alpha] = 0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Именно так записываются основные уравнения в случае вибровозбудителей с положительными и не слишком сильно различающимися парциальными скоростями ω_1 и ω_2 , работающими в простейшей колебательной системе (см. уравнения (6.3) и равенства (5.16)), а также в более сложных системах, обладающих некоторого рода симметрией (см. п. 3 § 10). Через $\widetilde{W}(\omega)$ в уравнениях (9.1), как и ранее, обозначен модуль вибрационного момента. Вычитая уравнения (9.1), получим следующее соотношение для определения сдвига фаз α :

$$\sin \alpha = \pm (\omega_2 - \omega_1) \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{1}{\widetilde{W}(\omega)}. \quad (9.2)$$

Отсюда видно, что при одинаковых парциальных скоростях возбудителей ($\omega_1 = \omega_2$) в рассматриваемых системах возможны только синфазное ($\alpha = \alpha_0 = 0$) и противофазное ($\alpha = \alpha_0 = \pi$) вращение роторов возбудителей. Поскольку согласно уравнению (8.31)

$$\kappa = \frac{\partial (P_1 - P_2)}{\partial \alpha} = \pm \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \widetilde{W}(\omega) \cos \alpha, \quad (9.3)$$

то одно из этих движений непременно будет устойчивым, а другое — неустойчивым.

Обозначим через $\Delta\alpha$ отклонение угла сдвига фаз α от его значений $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = \pi$ в устойчивом синхронном движении, имеющем место при одинаковых парциальных скоростях ω_1 и ω_2 ; назовем $\Delta\alpha$ *углом рассогласования фаз*. Полагая в уравнении (9.2) $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, получим

$$|\sin \Delta\alpha| = |\omega_2 - \omega_1| \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{1}{\widetilde{W}(\omega)}. \quad (9.4)$$

Вытекающее из (9.2) или (9.3) условие возможности самосинхронизации

$$|\omega_1 - \omega_2| < \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \widetilde{W}(\omega) \quad (9.5)$$

сводится, таким образом, к требованию, чтобы различие между парциальными скоростями вибровозбудителей не было слишком большим. Если обозначить

$$q_\omega = \frac{1}{2} \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \right|_{\max} = \frac{1}{2} \left| \frac{(\omega_2 - \omega_0) - (\omega_1 - \omega_0)}{\omega} \right|_{\max},$$

$$p_\omega^\circ = \frac{\widetilde{W}(\omega)}{\omega k_0}, \quad k_0 = 2k_1 k_2 / (k_1 + k_2), \quad (9.6)$$

то из условия (9.5) получим

$$\kappa_\omega = p_\omega^\circ / q_\omega > 1, \quad (9.7)$$

а из формулы (9.4) найдем

$$|\sin \Delta\alpha|_{\max} = 1/\kappa_\omega. \quad (9.8)$$

По своему смыслу величины q_ω и p_ω° представляют собой соответственно максимально возможное и максимально допустимое по условию самосинхронизации отклонения парциальных скоростей возбудителей от их номинального значения ω_0 , а величина $\kappa_\omega = p_\omega^\circ / q_\omega$ может быть названа *коэффициентом запаса по самосинхронизации*. Из формул (9.7) и (9.8) видно, что для обеспечения самосинхронизации необходимо, чтобы коэффициент запаса κ_ω был больше единицы, а для обеспечения условия стабильности

фазировки

$$|\Delta\alpha|_{\max} < |\Delta\alpha|_{\max}^* \quad (9.9)$$

этот коэффициент должен быть не меньше некоторого минимального допустимого значения κ_{ω}^* :

$$\kappa_{\omega} > \kappa_{\omega}^*. \quad (9.10)$$

Если разброс значений суммарных коэффициентов демпфирования k_1 и k_2 не слишком велик (напомним, что возбудители предполагаются номинально одинаковыми), то в формуле (9.6) для k_0 можно принять $k_1 = k_2$, и тогда получается

$$k_0 = k_1 = k_2. \quad (9.11)$$

Как показывают расчеты, основными причинами разброса парциальных скоростей дебалансных вибровозбудителей являются две следующие.

а) Отклонение скоростей вращения электродвигателей при номинальной нагрузке, обусловленное неточностями изготовления самих двигателей. Согласно ГОСТ 183-55, п. 30 соответствующее максимальное относительное отклонение для асинхронных двигателей общего назначения определяется по формуле

$$q_{\omega}^{\circ} = \frac{1}{8} \frac{n_c^{(e)} - n_0^{(e)}}{n_c^{(e)}}, \quad (9.12)$$

где $n_c^{(e)}$ и $n_0^{(e)}$ — соответственно синхронное и номинальное число оборотов ротора электродвигателя в минуту.

б) Отклонение коэффициентов трения в подшипниках возбудителей. Соответствующее относительное отклонение парциальных скоростей вычисляется по формуле [57]

$$q_f^{\circ} = \frac{m \varepsilon d f \left[\frac{1}{2} \omega k^* + L_0(\omega) \right]}{k_0^2} q_f, \quad (9.13)$$

где $m \varepsilon$ — статический момент дебалансных грузов, d — диаметр внутреннего кольца подшипников возбудителя, f — коэффициент трения в подшипниках, $L_0(\omega)$ — номинальный момент на валу возбудителя, $q_f = \frac{1}{2} |f_2 - f_1| / f$ — максимальное относительное отклонение коэффициентов трения в подшипниках; согласно имеющимся данным $q_f \approx 0,3$. Коэффициенты демпфирования k_0 , k^* и k° и момент $L_0(\omega)$ могут быть подсчитаны по формулам

$$k^* = i^2 \eta \frac{30}{\pi} \frac{L_0^{(e)}}{n_c^{(e)} - n_0^{(e)}}, \quad k^{\circ} = f m \varepsilon d \omega, \quad k_0 = k^* + k^{\circ}, \quad L_0 = i \eta L_0^{(e)}, \quad (9.14)$$

где i и η — соответственно передаточное отношение и коэффициент полезного действия передачи от вала двигателя к валу возбуждителя (если, конечно, такая передача имеется; в противном случае $i = \eta = 1$), $L_0^{(e)}$ — номинальный момент на валу двигателя.

Имеются и другие причины разброса парциальных угловых скоростей, например неодинаковость статических моментов возбуждителей m_i величин i и η и т. п., однако их влияние значительно меньше.

В результате суммарное максимально возможное отклонение парциальных угловых скоростей возбуждителей может быть найдено по формуле

$$|q_\omega| = \sqrt{(q_\omega^0)^2 + (q_i^0)^2}. \quad (9.15)$$

Эта формула учитывает случайный характер отклонений, вследствие чего одновременное достижение соответствующими отклонениями их максимальных значений q_ω^0 и q_i^0 является крайне маловероятным.

Приведенная методика оценки стабильности во многих случаях может быть значительно упрощена. Это упрощение, предложенное Б. П. Лавровым [164, 166], основано на том очевидном физическом соображении, что стабильность фазировки определяется противоборством двух факторов. Стабилизирующим фактором является вибрационная связь между роторами, мерой которой, как отмечалось в § 5 и следует также из формул (9.4)–(9.7), может служить модуль вибрационного момента $\tilde{W}(\omega)$. Дестабилизирующим фактором являются упомянутые выше, как правило, нерегулируемые погрешности изготовления и отклонения технологической нагрузки от номинальной*). Указанные дестабилизирующие факторы в первом приближении можно считать пропорциональными номинальному моменту двигателя, приведенного к валу вибровозбудителя (если, конечно, двигатель выбран правильно, т. е. достаточной, но не чрезмерной мощности). Тогда мы приходим к следующей величине, которая, так же как и коэффициент запаса по синхронизации k_ω , может служить мерой стабильности фазировки самосинхронизирующихся вибровозбудителей:

$$k_\omega = \frac{\tilde{W}(\omega)}{L_0(\omega)}. \quad (9.16)$$

*) Заметим, что основные уравнения типа (9.4) не учитывают некоторые виды такой технологической нагрузки. Учет последней является, однако, необходимым лишь в случаях, когда вес находящегося в машине обрабатываемого материала составляет существенную часть от веса рабочего органа машины (см. п. 5).

Для стабильности должно выполняться условие

$$k_{\omega} \geq k_{\omega}^*, \quad (9.17)$$

где k_{ω}^* — минимально допустимое значение коэффициента k_{ω} , который назовем *коэффициентом вибрационной связи*.

Удобство использования величины k_{ω} в качестве меры стабильности состоит в том, что она содержит легко определяемые величины: момент L_0 находится по каталожным данным двигателя; легко подсчитывается или оценивается также модуль вибрационного момента (см. ниже).

Между введенными мерами стабильности κ_{ω} и k_{ω} при определенных условиях существует простая связь. Так, например, если $(q_f^{\circ})^2 \ll (q_{\omega}^{\circ})^2$ и $k^0 \ll k^*$, то из приведенных формул получается

$$\frac{1}{|\sin \Delta \alpha|} = \kappa_{\omega} \approx 8k_{\omega}, \quad (9.18)$$

так что можно положить и $\kappa_{\omega}^* \approx 8k_{\omega}^*$. Вычисления при нескольких иных условиях приводят к зависимостям $\kappa_{\omega} \approx 5k_{\omega}$ и $\kappa_{\omega}^* = 5k_{\omega}^*$.

Заметим, что с коэффициентами κ_{ω} и k_{ω} можно связать вероятность наступления эффекта самосинхронизации. Так, если предположить, что величина относительного разброса парциальных угловых скоростей подчиняется нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и со средним квадратичным отклонением $\sigma_{\omega} = \frac{1}{3} q_{\omega} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \right|_{\max}$ («правило трех сигма»; см., например, [86]), то согласно (9.6) и (9.7) вероятность наступления самосинхронизации

$$\begin{aligned} P_{\omega} &= P_{\omega} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \right| < p_{\omega}^{\circ} \right) = \\ &= P_{\omega} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \right| < 3\sigma_{\omega} \kappa_{\omega} \right) = \Phi(3\kappa_{\omega}), \end{aligned} \quad (9.19)$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt$ — интеграл вероятностей. График зависимости P_{ω} от величины $1/\kappa_{\omega}$ представлен на рис. 14, при выполнении соотношения (9.18) тот же график представляет зависимость P_{ω} от величины $1/(8k_{\omega})$, а при $\kappa_{\omega} = 5k_{\omega}$ — от величины $1/(5k_{\omega})$.

3. Нормирование и способы повышения стабильности. Разумеется, первостепенное практическое значение имеет правильное нормирование минимально допустимых коэффициентов k_{ω}^* и κ_{ω}^*

или углов $|\Delta\alpha|_{\max}^*$ для различных вибрационных устройств; естественно, что указанные величины должны назначаться большими, например, для классифицирующих устройств, чем для машин, выполняющих лишь транспортные функции. К сожалению, этот вопрос, который должен рассматриваться не только на основе расчетов, но с учетом опыта эксплуатации машин, еще не может считаться в достаточной мере решенным. Б. П. Лавров рекомендует (см. [166]) для вибрационных конвейеров принимать κ^* не ниже 3,5—5, для вибропитателей в зависимости от их назначения — от 5 до 12 и выше и для грохотов — от 12 до 20. Соответствующие значения k_ω^* будут для конвейеров 0,5—1,0, для питателей 1—2,4, для грохотов 1,5—4. Согласно формуле (9.8) этим значениям отвечают значения максимально допустимых углов рассогласования $|\Delta\alpha|_{\max}^*$ для конвейеров 12—16°, для питателей 5—12°, для грохотов 3—5°. В настоящее время, однако, имеются основания считать, что эти рекомендации являются чрезвычайно осторожными. Так, например, известны случаи успешной эксплуатации вибрационных грохотов с двумя самосинхронизирующимися вибровозбудителями, для которых $|\Delta\alpha|_{\max} \approx 30^\circ$, т. е. $\kappa_\omega \approx 2$ и $k_\omega \approx 0,3$.

Из формул (9.6)—(9.10) и (9.16) видно, что коэффициент запаса по самосинхронизации κ_ω и коэффициент вибрационной связи k_ω прямо пропорциональны модулю вибрационного момента $\tilde{W}(\omega)$; формулы, по которым эта величина может быть подсчитана для ряда устройств с двумя вибровозбудителями, приводятся в специальной таблице п. 3 § 10; о приближенной оценке $\tilde{W}(\omega)$ см. в § 12.

Из сказанного вытекает способ повышения стабильности посредством увеличения момента $\tilde{W}(\omega)$; последнее может быть осуществлено как путем изменения параметров (увеличения частоты и амплитуды колебаний устройств и т. п.), так и путем изменения структуры системы, например путем увеличения числа степеней свободы несущих тел (см. п. 5).

Другой способ состоит в уменьшении разброса парциальных угловых скоростей вибровозбудителей q_ω . Это согласно (9.15) и (9.16) достигается путем выбора двигателей минимально необходимой мощности, повышения качества изготовления и сборки подшипниковых узлов (снижение величины q_f^0), а также путем под-

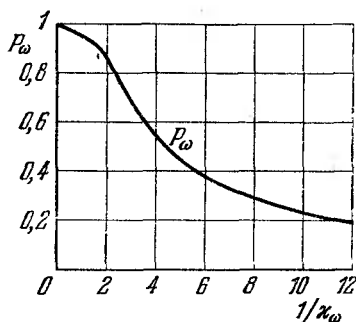


Рис. 14.

бора пар двигателей с близкими парциальными скоростями при номинальной нагрузке (снижение q_{ω}°).

4. Об относительной силе вибрационной связи между возбудителями. Можно предложить условную градацию относительной силы вибрационной связи между возбудителями в зависимости от значений коэффициентов κ_{ω} и k_{ω} , представленную в табл. 1.

Таблица 1

Степени относительной силы вибрационной связи

Степени относительной силы вибрационной связи	Очень слабая связь	Сравнительно слабая связь	Сравнительно сильная связь	Очень сильная связь
Коэффициент κ_{ω}	$0 < \kappa_{\omega} < 0,05$	$0,05 < \kappa_{\omega} < 0,5$	$0,5 < \kappa_{\omega} < 1$	$\kappa_{\omega} > 1$
Коэффициент k_{ω} (при $k_{\omega} = \kappa_{\omega} / 5$)	$0 < k_{\omega} < 0,01$	$0,01 < k_{\omega} < 0,1$	$0,1 < k_{\omega} < 0,2$	$k_{\omega} > 0,2$
Вероятность наступления самосинхронизации P_{ω}	$P_{\omega} < 10\%$	$10\% < P_{\omega} < 50\%$	$50\% < P_{\omega} < 90\%$	$P_{\omega} > 90\%$

(Эта таблица несколько более детализирована, чем предложенная ранее в работе [64].)

В случае очень сильной связи на возможность самосинхронизации и сопутствующих ей явлений можно твердо рассчитывать; в случае сравнительно сильной связи этого сказать нельзя, но возможность таких явлений должна непременно учитываться. При очень слабой связи такие явления, как правило, можно не учитывать, а при сравнительно слабой связи — учитывать или не учитывать в зависимости от конкретных обстоятельств. Разумеется, что эти рекомендации носят несколько условный характер.

5. Об исследовании стабильности в более сложных случаях. В общем случае вибрационных устройств со многими самосинхронизирующимися вибровозбудителями ход исследования стабильности сохраняется. В общих чертах он сводится к следующему.

а) На основе экспериментальных или теоретических данных устанавливаются предельно допустимые по технологическим, прочностным или каким-либо иным соображениям искажения закона колебаний рабочего органа вибрационной машины (несущего тела или несущей системы тел).

б) Расчетным путем на основе формул типа (8.50) определяется максимальное значение углов рассогласования возбу-

дителей $|\Delta\alpha_s|_{\max}^*$ по отношению к номинальной фазировке *), при наличии которых искажения колебаний рабочего органа еще остаются в допустимых пределах.

в) Значения $|\Delta\alpha_s|_{\max}^*$ сопоставляются с теми значениями углов рассогласования $|\Delta\alpha_s|_{\max}$, определяемыми из основных уравнений (т. е. уравнений типа (5.17) и т. п.), которые могут получиться при реально возможных неточностях изготовления возбuditелей, их двигателей и т. п.; при этом, как отмечалось в п. 1, основные уравнения обычно могут быть линеаризованы относительно отклонений параметров и углов $\Delta\alpha_s$. Если окажется, что $|\Delta\alpha_s|_{\max} < |\Delta\alpha_s|_{\max}^*$, по крайней мере, с достаточно высокой вероятностью, то рабочий режим колебаний машины, а также и соответствующая фазировка являются достаточно стабильными; в противном случае стабильность следует считать недостаточной и попытаться повысить ее теми же способами, которые были указаны выше для случая двух возбuditелей.

Более подробно вопрос о стабильности обсуждается в книге [57], в которой, однако, не отражены результаты позднейших исследований. В числе таких исследований упомянем о работе О. П. Барзукова, Л. А. Вайсберга, Л. К. Балабатько и А. Д. Учителя [91], в которой изучено влияние на стабильность механической нагрузки, что существенно в случае, когда вес этой нагрузки сравним с весом самой машины. Укажем также на статью О. Г. Пирцхалаишвили [231], где рассмотрен способ повышения стабильности путем использования маятниковых подвесок, присоединяемых к несущему телу посредством упругих шарниров.

§ 10. Практическая методика исследования устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями; примеры, сводка некоторых результатов

1. О методике исследования устройств с самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями. Из изложенного вытекает следующая методика исследования конкретных вибрационных устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями **).

*) Т. е. по отношению к устойчивой фазировке, соответствующей системе без погрешностей изготовления и без влияния этих искажающих факторов.

**) Рассматривается наиболее распространенный случай простой (некратной) синхронизации дебалансных возбuditелей; в случаях, когда это предположение не обязательно, делаются соответствующие оговорки.

Прежде чем приступить к исследованию, полезно убедиться, что система не была рассмотрена ранее. В частности, можно просмотреть таблицу, приводимую в п. 3 § 10, или более полную табл. 5 в конце книги [57]; необходимо также иметь в виду, что ряд классов систем рассмотрен в общей форме (см. пп. 5 и 7 § 8).

1) Находят установившиеся вынужденные $T = 2\pi/\omega$ -периодические колебания,

$$u = u^0(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (10.1)$$

несущего тела или несущей системы тел под действием вынуждающих сил, развиваемых вибровозбудителями при равномерном вращении роторов с некоторыми произвольными начальными фазами $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, т. е. при вращении роторов по закону

$$\varphi_s = \varphi_s^0 = \sigma_s(\omega t + \alpha_s). \quad (10.2)$$

Особенно просто такие колебания находятся в случае линейной несущей системы.

2) Составляют основные уравнения (уравнения типа (8.4), (8.28), (8.29), (8.36), (8.37) и т. п.) для определения постоянных α_s в возможных синхронных движениях. Это может быть сделано одним из трех способов.

а) *Непосредственное усреднение дифференциальных уравнений движения роторов вибровозбудителей.* Составляют уравнения движения роторов вибровозбудителей с учетом подвижности несущей системы; эти уравнения записывают в форме

$$I_s \ddot{\varphi}_s + k_s (\dot{\varphi}_s - \sigma_s \omega) = \Phi_s^*(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dot{u}, \dot{u}, u, \omega t) \quad (10.3)$$

$$(s = 1, \dots, k),$$

линеаризовав выражения для моментов L_s , передаваемых от двигателей, и моментов сил сопротивления R_s вблизи синхронной угловой скорости согласно равенствам (4.10), (4.11), (4.13). После этого правые части уравнений (10.3) усредняют за период $T = 2\pi/\omega$ в предположении, что величины φ_s и u изменяются по законам (10.1), (10.2), и получают основные уравнения в виде

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{\sigma_s}{k_s} \langle (\Phi_s^*) \rangle \equiv$$

$$\equiv \frac{\sigma_s}{k_s} \langle \Phi_s(\varphi_1^0, \dots, \varphi_k^0, \dot{u}^0, \dot{u}^0, u^0, \omega t) \rangle \quad (s = 1, \dots, k). \quad (10.4)$$

Этот способ является наиболее универсальным; он, в частности, пригоден и в случае, когда среди вибровозбудителей имеются планетарные. Однако в отличие от двух других способов он требует составления не только уравнений вынужденных колебаний тел несущей системы, но и уравнений движения вибровозбудителей с учетом подвижности несущих тел.

б) *Использование выражений (8.7) для потенциальных моментов $\mathcal{M}_s$ через усредненную функцию Лагранжа системы или применение интегрального критерия устойчивости (экстремального свойства) синхронных движений.* При этом способе составляют

выражения для потенциальной и кинетической энергий всей системы Π и T (или же для потенциальной и кинетической энергии системы связи Π_0 и T_0), после чего образуют функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ (или $L_0 = T_0 - \Pi_0$). Затем производят усреднение этой функции за период при значениях $\varphi_s = \varphi_s^0$ и $u = u^0$, определяемых формулами (10.1), (10.2). Получающуюся функцию Λ (или Λ_0) используют для определения моментов $\mathcal{M}_s = -\partial\Lambda/\partial\alpha_s = -\partial\Lambda_0/\partial\alpha_s$, входящих в основные уравнения (8.4), или же, в случае существования потенциала усредненных неконсервативных сил B (см. п. 4 § 8), для составления потенциальной функции $D = -(\Lambda + B)$ (или $D = -(\Lambda_0 + B)$, см. равенство (8.50)) и последующего применения интегрального критерия устойчивости. Основные уравнения получаются в этом случае из условий стационарности $\partial D/\partial\alpha_s = 0$ функции D . Если силы трения в несущей системе в первом приближении не учитываются, то потенциал усредненных неконсервативных сил B непременно существует, причем

$$B = \sum_{s=1}^h [\sigma_s L_s(\sigma_s \omega) - R_s^0(\omega)] \alpha_s. \quad (10.5)$$

Если, кроме того, несущая система является в первом приближении линейной, то вместо функции Лагранжа всей системы можно вычислять лишь функцию Лагранжа несущей системы $L^{(1)} = T^{(1)} - \Pi^{(1)}$ и величину $\Lambda^{(1)} = \langle (L^{(1)}) \rangle$. При этом согласно (8.51) $D = \Lambda^{(1)} - B$, а вибрационные моменты $W_s^{(K)} = \partial\Lambda^{(1)}/\partial\alpha_s$ (см. равенства (8.35)).

в) *Использование выражений для вибрационных моментов через гармонические коэффициенты влияния.* Этот способ, пригодный в случае квазилинейной несущей системы, подробно описан в п. 3 § 8. Его использование требует лишь составления и решения линейных дифференциальных уравнений, описывающих в первом приближении колебания несущей системы тел под действием гармонических сил, приложенных к осям вибровозбудителей. Подчеркнем, что этот способ в принципе пригоден в случае любых вибровозбудителей и в случае, когда учитываются силы сопротивления при колебаниях несущей системы.

3) Из основных уравнений $P_s = 0$ определяются значения разностей фаз $\alpha_s - \alpha_h$ в возможных синхронных движениях возбудителей и исходное приближение к синхронной угловой скорости ω ; moreover, последняя может быть найдена непосредственно по формуле (5.18). Условия существования вещественных решений основных уравнений относительно $\alpha_s - \alpha_h$ и являются условиями возможности самосинхронизации вибровозбудителей.

4) Из числа найденных решений основных уравнений отбирают те фазировки, которым соответствуют устойчивые синхрон-

ные движения. Этот отбор производят либо на основе алгебраического уравнения (8.31), все корни которого для устойчивой фазировки должны иметь отрицательные вещественные части, либо на основе интегрального критерия устойчивости, согласно которому устойчивые фазировки соответствуют грубому минимуму потенциальной функции D .

5) Отобранные значения фаз $\alpha_s - \alpha_h$ подставляют в выражение для u^0 и тем самым находят в первом приближении закон колебаний несущей системы тел в устойчивых синхронных движениях.

6) Если устойчива фазировка возбудителей, при которой реализуется требуемый закон колебаний несущей системы, то производят проверку стабильности согласно изложенному в § 9. В случае, когда требуемая фазировка неустойчива, пытаются обеспечить ее устойчивость либо одним из способов, указанных в § 11, либо путем применения средств принудительной синхронизации (см. там же). В случае, если требуемая фазировка устойчива, но не достаточно стабильна, изменяют параметры колебаний или структуру несущей системы.

2. Примеры исследования самосинхронизации вибровозбудителей. Проиллюстрируем изложенное на нескольких простых примерах; более сложные примеры можно найти в книге [57].

Пример 1. Самосинхронизация дебалансных возбудителей в простейшей колебательной системе. Рассмотрим случай, когда несущее тело имеет всего одну степень свободы (рис. 6). Поскольку способы а) и б) составления основных уравнений по существу иллюстрируются содержанием §§ 4 и 7, то здесь остается составить выражение для вибрационного момента $W_s^{(K)}$ через гармонические коэффициенты влияния. Очевидно, что в рассматриваемом простейшем случае все коэффициенты, кроме $K_{uu}^{(js)}$, равны нулю, а коэффициенты $K_{uu}^{(js)}$ одинаковы для всех s и j , т. е. можно положить $K_{uu}^{(js)} = K_{uu}$. Величина K_{uu} определится в результате решения уравнения

$$M\ddot{x} + c_x x = \sin \omega t, \quad (10.6)$$

описывающего колебания платформы под действием гармонической вынуждающей силы единичной амплитуды, направленной вдоль оси O_1u . Получаем

$$x = \frac{1}{M(p_x^2 - \omega^2)} \sin \omega t, \text{ откуда } K_{uu} = 1/[M(p_x^2 - \omega^2)], \text{ где, как и ранее,}$$

$p_x = \sqrt{c_x/M}$. Подставив выражение K_{uu} в формулу (8.43), приходим, как и должно быть, к формуле (4.20) для вибрационного момента $W_s^{(K)}$.

Пример 2. Самосинхронизация двух дебалансных вибровозбудителей на мягко амортизированном плоско колеблющемся твердом теле. Схема рассматриваемой системы представлена на рис. 15. Несущее твердое тело B_0 может совершать движение параллельно плоскости, которая перпендикулярна осям вращения роторов возбудителей, предполагаемых номинально одинаковыми; центр тяжести тела лежит в плоскости, проходящей через указанные оси, и удален от них на одинаковые расстояния r . Предполагаем,

что упругие опоры являются весьма мягкими, т. е. что частоты свободных колебаний тела B_0 на опорах значительно меньше угловой скорости синхронного вращения роторов ω . При этом потенциальной энергией $\Pi^{(1)}$ и соответствующими членами в уравнениях движения тела B_0 можно пренебречь. Тогда при вращении роторов по закону (10.2) колебания тела B_0 будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} M\ddot{x}^0 &= F[\cos(\omega t + \alpha_1) + \cos(\omega t + \alpha_2)], \\ M\ddot{y}^0 &= -F[\sigma_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \\ &\quad + \sigma_2 \sin(\omega t + \alpha_2)], \quad (10.7) \\ I\ddot{\varphi}^0 &= Fr[\sigma_1 \sin(\omega t + \alpha_1) - \\ &\quad - \sigma_2 \sin(\omega t + \alpha_2)], \end{aligned}$$

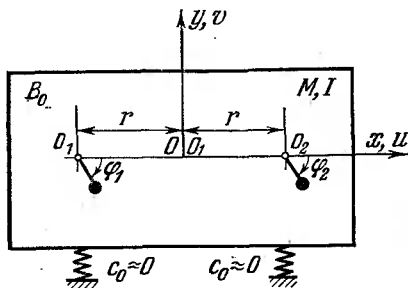


Рис. 15.

где M и I — соответственно масса и момент инерции вспомогательного тела

(см. п. 5 § 8), а $F = m\epsilon\omega^2$ — амплитуда вынуждающей силы, развиваемой каждым возбудителем. Решением уравнений (10.7), соответствующим установившимся вынужденным колебаниям, будет

$$\begin{aligned} x^0 &= -\frac{F}{M\omega^2} [\cos(\omega t + \alpha_1) + (\cos \omega t + \alpha_2)], \\ y^0 &= \frac{F}{M\omega^2} [\sigma_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \sigma_2 \sin(\omega t + \alpha_2)], \quad (10.8) \\ \varphi^0 &= -\frac{Fr}{I\omega^2} [\sigma_1 \sin(\omega t + \alpha_1) - \sigma_2 \sin(\omega t + \alpha_2)]. \end{aligned}$$

Для составления основных уравнений воспользуемся интегральным критерием устойчивости. Поскольку парциальные скорости возбудителей предполагаются одинаковыми и положительными, то роль потенциальной функции в данном случае будет играть среднее значение функции Лагранжа вспомогательного тела, равное ввиду предположения о мягкости упругих опор просто среднему значению кинетической энергии этого тела. Производя усреднение при учете выражений (10.8) и равенств (4.17) легко получим

$$\begin{aligned} D = \Lambda^{(1)} &= \langle (T^{(1)}) \rangle = \frac{1}{2} \langle M[(\dot{x}^0)^2 + (\dot{y}^0)^2] + I(\dot{\varphi}^0)^2 \rangle = \\ &= \frac{F^2}{2M\omega^2} \left(1 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2 \frac{Mr^2}{I} \right) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + C_1. \quad (10.9) \end{aligned}$$

Здесь C_1 — не зависящая от углов α_1 и α_2 величина. Как и следовало ожидать, функция D в данном случае зависит только от разности фаз $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Приравнявая нулю производную $\partial D / \partial \alpha$, приходим к следующему основному уравнению для определения разности фаз α в возможных синхронных движениях:

$$\sin \alpha = 0. \quad (10.10)$$

Это уравнение имеет два существенно различных решения

$$(\alpha)_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)_1 = 0, \quad (\alpha)_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)_2 = \pi, \quad (10.11)$$

первое из которых назовем *синфазным*, а второе — *противофазным*. При выполнении условия

$$1 + \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 \frac{Mr^2}{I} < 0 \quad (10.12)$$

функция D при $\alpha = (\alpha)_1 = 0$ имеет минимум, а при $\alpha = (\alpha)_2 = \pi$ — максимум, и поэтому, в соответствии с интегральным критерием устойчивости, синфазное движение является устойчивым, а противофазное — неустойчивым.

Пусть сначала роторы возбудителей вращаются в одинаковых направлениях, т. е. $\sigma_1 \sigma_2 = 1$. Тогда при выполнении условия

$$Mr^2/I > 2 \quad (10.13)$$

устойчивым будет синфазное вращение роторов, обеспечивающее, как нетрудно видеть из равенств (10.8), круговые поступательные колебания

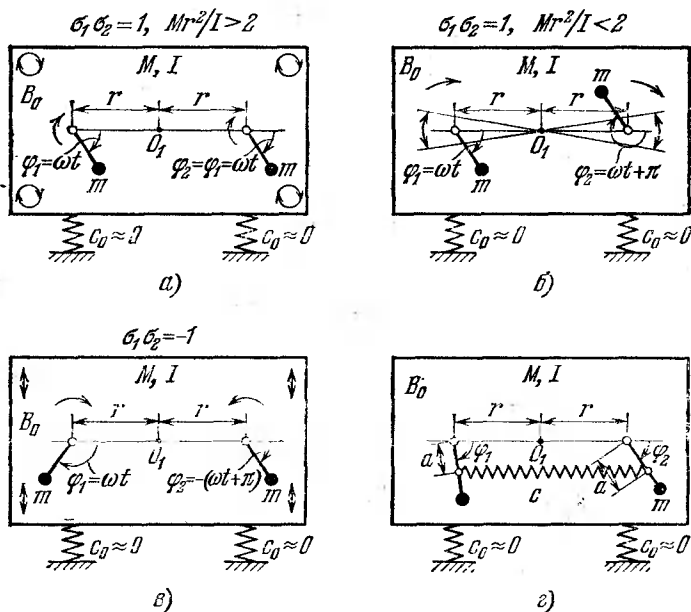


Рис. 16.

тела B_0 с амплитудой $r_0 = 2me/M$ (рис. 16, а). При выполнении противоположного неравенства $Mr^2/I < 2$, напротив, устойчивым будет противофазное вращение роторов, приводящее к поворотным колебаниям тела B_0 с угловой амплитудой $\varphi_0 = 2\pi e r/I$ (рис. 16, б).

При вращении роторов в противоположных направлениях, когда $\sigma_1 \sigma_2 = -1$, условие (10.12) никогда не выполняется, и поэтому всегда устойчиво противофазное вращение, приводящее, как нетрудно убедиться с помощью (10.8), к прямолинейным поступательным гармоническим колебаниям тела B_0 перпендикулярно плоскости, в которой лежат оси вращения роторов (рис. 16, в). Амплитуда указанных колебаний $A_0 = 2me/M$.

Приведем выражение для вибрационных моментов, знание модуля которых, как отмечалось в § 9, необходимо при оценке стабильности:

$$W_1^{(K)} = -W_2^{(K)} = \frac{\partial \Lambda^{(I)}}{\partial \alpha_1} = \frac{F^2}{2M\omega^2} \left(1 + \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 \frac{Mr^2}{I} \right) \sin \alpha. \quad (10.14)$$

Те же результаты, как нетрудно убедиться, получаются при использовании гармонических коэффициентов влияния.

Установленные здесь закономерности самосинхронизации двух вибровозбудителей в описанной простой системе находят широкое применение в вибрационных машинах и устройствах (см. § 15).

3. Сводка условий устойчивости важнейших синхронных движений вибровозбудителей в некоторых колебательных системах. В табл. 2 приведены условия устойчивости важнейших режимов синхронного вращения роторов вибровозбудителей в некоторых практически интересных колебательных системах и выражения для модулей вибрационных моментов; описан характер колебаний несущих тел в соответствующих режимах; даны ссылки на источники, в которых система изучена с помощью различных вариантов изложенной выше методики.

Более полная таблица приводится в книге [57].

Дадим некоторые общие пояснения и примечания к таблице.

1) В случаях, когда это не оговаривается особо, предполагается, что привод возбудителей осуществляется от двигателей асинхронного типа, причем парциальные скорости всех возбудителей одинаковы и положительны.

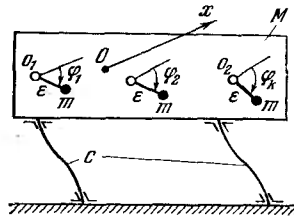
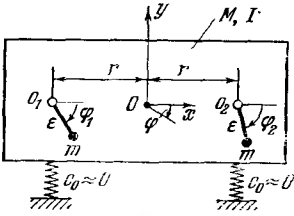
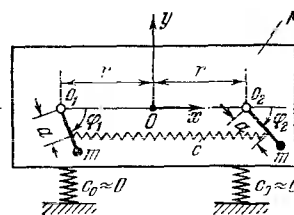
2) Термин «мягко амортизированное твердое тело» означает, что частоты собственных колебаний тела на упругих опорах значительно ниже наименьшей скорости вращения валов возбудителей ω (на схемах соответствующие упругие элементы снабжены надписью $c_0 \approx 0$).

3) В таблице приняты следующие общие обозначения: M , I_x , I_y , I_z — масса и главные центральные моменты инерции относительно соответствующих осей вспомогательных тел (т. е. тел, получающихся из исходных, если сосредоточить массы всех дебалансных и планетарных возбудителей в центрах вращения их векторов — эксцентриситетов, а массы всех возбудителей направленного действия — в их средних положениях); O — центр тяжести вспомогательного тела; m , ε — масса и эксцентриситет возбудителя; oo — ось вращения ротора возбудителя.

4) При наличии двойных знаков в формулах столбца 4 таблицы следует принимать либо только верхние, либо только нижние знаки.

5) При отнесении реальной системы к одной из представленных схем следует обращать особое внимание на правильность учета существенных степеней свободы несущих тел, ибо при

Условия устойчивости важнейших синхронных движений

№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
1	Произвольное число одинаковых дебалансных вибровозбудителей, установленных на абсолютно твердом теле с одной степенью свободы. См. §§ 4—7 гл. 3, а также [34, 57]	 The diagram shows a rectangular rigid body of mass M supported by two springs with stiffness C on a horizontal surface. Inside the body, there are k unbalanced rotors. Each rotor consists of a small mass m at a distance ϵ from the center of rotation O_i. The angular displacement of the i-th rotor is denoted by φ_i. A coordinate system Ox is shown on the body.
2	Два одинаковых дебалансных вибровозбудителя, симметрично установленные на мягко амортизированном твердом теле, которое может совершать плоские колебания; оси возбуждителей параллельны, лежат в одной плоскости с центром тяжести тела O и удалены от него на одинаковые расстояния r. См. п. 2 § 10 гл. 3, а также [36, 57]	 The diagram shows a rigid body of mass M and moment of inertia I that can oscillate in the Oy direction. It is supported by two vertical springs with stiffness $C_0 \approx 0$. Two identical unbalanced rotors are mounted symmetrically at a distance r from the center of mass O. Each rotor has a mass m at a distance ϵ from its axis O_i. The angular displacement is φ_i. The body's displacement is y and its rotation is φ.
3	Та же система, что и в п. 2, но роторы возбуждителей связаны пружиной жесткости c, присоединенной на расстояниях a от осей роторов. См. § 11 гл. 3, а также [57]	 The diagram is similar to the previous one, but the two rotors are connected by a horizontal spring with stiffness c. The spring is attached to the rotors at a distance a from their axes. The body's displacement is y and its rotation is φ.

Примечания: 1. Результат справедлив и для возбуждителей направленного хронные движения.

Т а б л и ц а 2

возбудителей в некоторых колебательных системах

Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\tilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
а) $ \varphi_1 = \varphi_2 =...$ $...= \varphi_k =\omega t$	Гармонические поступательные колебания	$\omega < p = \sqrt{c/M}$ (p — частота свободных колебаний системы)	Для $k=2$
б) $ \varphi_1 = \varphi_2 =...$ $...= \varphi_{k/2} =$ $= \varphi_{k/2+1}+\pi =...$ $...= \varphi_k+\pi =\omega t$ (k — четное)	Отсутствие колебаний	$\omega > p = \sqrt{c/M}$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \times$ $\times \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^4}{M} \left \frac{1}{p^2 - \omega^2} \right $

действия. 2. При числе возбудителей $k > 2$ в системе могут существовать и другие син-

а) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \mp (\omega t + \pi)$ (роторы возбудителей вращаются в противоположных направлениях)	Прямолинейные поступательные гармонические колебания в направлении оси Oy с амплитудой $A_0 = 2m\varepsilon/M$	Режим устойчив при любых сочетаниях параметров, если $r \neq 0$	$\tilde{W}(\omega) =$ $= \frac{1}{2} \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{M} \frac{Mr^2}{I}$
б) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \pm \omega t$ (роторы возбудителей вращаются в одинаковых направлениях)	Круговые поступательные колебания с амплитудой $r_0 = 2m\varepsilon/M$	$\frac{Mr^2}{I} > 2$	$\tilde{W}(\omega) =$ $= \frac{1}{2} \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{M} \times$ $\times \left \frac{Mr^2}{I} - 2 \right $
в) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \pm (\omega t + \pi)$ (роторы возбудителей вращаются в одинаковых направлениях)	Поворотные гармонические колебания с угловой амплитудой $\varphi_0 = 2m\varepsilon r/I$	$\frac{Mr^2}{I} < 2$	
а) То же, что и в п. 2, а		$\frac{Mr^2}{I} > \frac{Mca^2}{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}$	То же, что и в п. 2, а
б) То же, что и в п. 2, б		$\frac{Mr^2}{I} > 2 - \frac{Mca^2}{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}$	То же, что и в пп. 2, б и 2, в
в) То же, что и в п. 2, в		$\frac{Mr^2}{I} < 2 - \frac{Mca^2}{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}$	

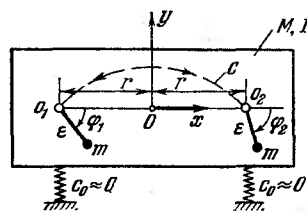
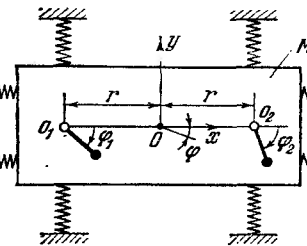
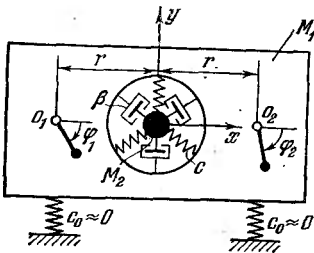
№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
4	Та же система, что и в п. 2, но роторы либо связаны упругим или электрическим валом жесткости c, либо приводятся во вращение от одинаковых и одинаково установленных синхронных двухполюсных электродвигателей с жесткостью характеристики в рабочей точке $dL^*/d\theta = -c$. См. § 11 гл. 3, а также [57]	
5	Та же система, что и в п. 2, но твердое тело связано с неподвижным основанием симметричной системой упругих элементов с жесткостями c_x, c_y, c_φ ($c_x\varphi = c_y\varphi = 0$). См. [57, 79]	 $p_x^2 = \frac{c_x}{M}, \quad p_y^2 = \frac{c_y}{M},$ $p_\varphi^2 = \frac{c_\varphi}{M},$ $\lambda_x = \frac{p_x}{\omega}, \quad \lambda_y = \frac{p_y}{\omega},$ $\lambda_\varphi = \frac{p_\varphi}{\omega}$
6	Та же система, что и в п. 2, но с твердым телом связана посредством упругих элементов жестко-	

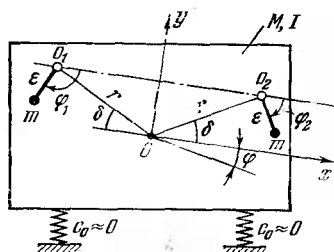
Табл. 2 (продолжение)

Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\tilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
а) То же, что и в п. 2, б		$c > -\frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 \omega^2}{M} \times \left(\frac{Mr^2}{I} - 2 \right)$	То же, что и в пп. 2, б и 2, в
б) То же, что и в п. 2, в		$c < -\frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 \omega^2}{M} \times \left(\frac{Mr^2}{I} - 2 \right)$	
а) То же, что и в п. 2, а, но амплитуда поступательных колебаний вдоль оси Oy $A_0 = \frac{2m\epsilon}{M} \frac{1}{ \lambda_y^2 - 1 }$		$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} - \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} + \frac{Mr^2}{I} \times \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} < 0$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 \omega^2}{M} \times \left \frac{1}{\lambda_x^2 - 1} - \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} + \frac{Mr^2}{I} \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} \right $
б) То же, что и в п. 2, б, но траекторией поступательных колебаний является эллипс с полуосями $A_x = \frac{2m\epsilon}{M} \frac{1}{ \lambda_x^2 - 1 },$ $A_y = \frac{2m\epsilon}{M} \frac{1}{ \lambda_y^2 - 1 }$		$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} - \frac{Mr^2}{I} \times \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} > 0$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 \omega^2}{M} \times \left \frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} - \frac{Mr^2}{I} \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} \right $
в) То же, что и в п. 2, в, но угловая амплитуда поворотных колебаний $\Phi_0 = \frac{2m\epsilon r}{I} \frac{1}{ \lambda_\varphi^2 - 1 }$		$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} - \frac{Mr^2}{I} \times \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} < 0$	
а) То же, что и в п. 2, а (кроме формул для амплитуд)		То же, что и в п. 3, а	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 \omega^2}{M} \frac{Mr^2}{I}$

№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
	сти с и демпфирующих элементов с коэффициентом сопротивления β дополнительная симметрично расположенная масса M_2. См. [56, 57]	 $p^2 = \frac{c}{M^*}, \quad M^* = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$ $2n = \frac{\beta}{M^*}$

Примечание. О системах, в которых к телу M_1 присоединены более сложные

- 7 Та же система, что и в п. 2, но оси роторов возбуждителей не лежат в одной плоскости с центром тяжести тела O .
См. [38, 42, 57]



- 8 Та же система, что и в п. 2, но возбуждители не дебалансные, а моногармонические возбуждители направленного действия; линии действия вынуждающих сил лежат в одной плоскости с центром тяжести тела O и равноудалены от него.
См. [42, 57]

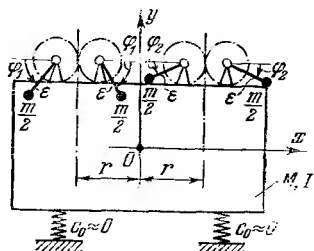
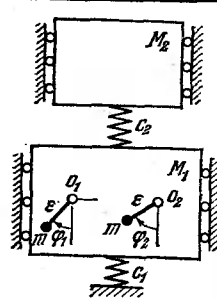


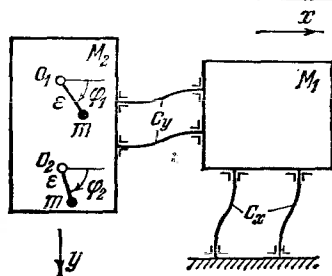
Табл. 2 (продолжение)

Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\tilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
б) То же, что и в п. 2, б (кроме формул для амплитуд)		$\frac{Mr^2}{I} > 2 -$ $\frac{2(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 - 1)^2 + 4n_1^2} \times$ $\times \frac{M_2}{M_1}$ $(\lambda = p/\omega, n_1 = n/\omega)$	$\tilde{W}(\omega) =$ $= \frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 \omega^2}{M} \left \frac{Mr^2}{I} + \right.$ $\left. + 2 \left(\frac{1}{\lambda^2 - 1} \times \right. \right.$ $\left. \times \frac{M_2}{M_1} - 1 \right)$
в) То же, что и в п. 2, в (кроме формул для амплитуд)		$\frac{Mr^2}{I} < 2 -$ $\frac{2(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 - 1)^2 + 4n_1^2} \times$ $\times \frac{M_2}{M_1}$	
элементы, см. [56, 57].			
$\varphi_1 = \pm \omega t,$ $\varphi_2 = \mp (\omega t + \pi)$ (роторы возбуждителей вращаются в противоположных направлениях)	Прямолинейные поступательные гармонические колебания с амплитудой $A_0 = 2me/M$, направленные вдоль оси Oy (перпендикулярно плоскости осей роторов o_1o_2)	Режим устойчив при любых сочетаниях параметров, если $r \neq 0$	$\tilde{W}(\omega) =$ $= \frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 \omega^2}{M} \frac{Mr^2}{I}$
а) $\varphi_1 = \pm \omega t,$ $\varphi_2 = \pm \omega t$	Прямолинейные поступательные гармонические колебания с амплитудой $A_0 = 2me/M$, направленные вдоль оси Oy (перпендикулярно плоскости осей возбуждителей)	$\frac{Mr^2}{I} > 1$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 e^2 \omega^2}{M} \times$ $\times \left 1 - \frac{Mr^2}{I} \right $
б) $\varphi_1 = \pm \omega t,$ $\varphi_2 = \pm (\omega t + \pi)$	Поворотные гармонические колебания с угловой амплитудой $\varphi_0 = 2mer/I$	$\frac{Mr^2}{I} < 1$	

№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
9	Два одинаковых дебалансных вибровозбудителя, установленных на одной из масс цепной двухмассовой колебательной системы. См. [57, 329]	

Примечание. О более общих цепных системах с произвольным числом масс

- 10 Та же система, что и в п. 9, но массы могут перемещаться во взаимно перпендикулярных направлениях и возбудители установлены на «внешней» массе.
- См. [42, 57, 246, 330]



$$p_x^2 = \frac{c_x}{M}, \quad p_y^2 = \frac{c_y}{M_2}$$

$$M = M_1 + M_2,$$

$$\lambda_x = \frac{p_x}{\omega}, \quad \lambda_y = \frac{p_y}{\omega}$$

Табл. 2 (продолжение)

Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\tilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
а) $ \varphi_1 = \varphi_2 = \omega t$	Гармонические колебания обеих масс	$(\tilde{p}^2 - \omega^2) / (p_1^2 - \omega^2) (p_2^2 - \omega^2) > 0,$ где $\tilde{p} = c_2/M_2$, а p_1 и p_2 — корни уравнения $p^4 - p^2 \left(\frac{c_1}{M_1} + \frac{c_2}{M_1} + \frac{c_2}{M_2} \right) + \frac{c_1 c_2}{M_1 M_2} = 0$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^4}{M_1} \times$ $\times \left \frac{\tilde{p}^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)} \times \frac{1}{(p_2^2 - \omega^2)} \right $
б) $ \varphi_1 = \varphi_2 + \pi = \omega t$	Отсутствие колебаний	$(\tilde{p}^2 - \omega^2) / (p_1^2 - \omega^2) (p_2^2 - \omega^2) < 0$	

и произвольным числм любым образом размещенных возбудителей см. [57, 249, 329].

а) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \pm \omega t$ (роторы возбудителей вращаются в одинаковых направлениях)	Гармонические колебания массы M_2 в направлении осей x и y и массы M_1 в направлении оси x	$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{M}{M_2} \times$ $\times \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} > 0$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{M} \times$ $\times \left \frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{M}{M_2} \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} \right $
б) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \pm (\omega t + \pi)$ (роторы возбудителей вращаются в одинаковых направлениях)	Отсутствие колебаний	$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{M}{M_2} \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} < 0$	
в) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \mp \omega t$ (роторы возбудителей вращаются в противоположных направлениях)	Гармонические колебания обеих масс только в направлении оси x	$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} - \frac{M}{M_2} \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} > 0$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{M} \times$ $\times \left \frac{1}{\lambda_x^2 - 1} - \frac{M}{M_2} \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} \right $

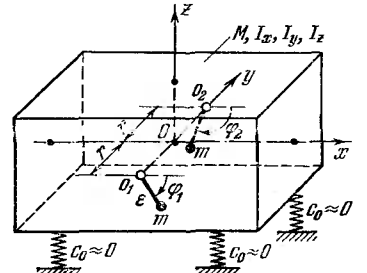
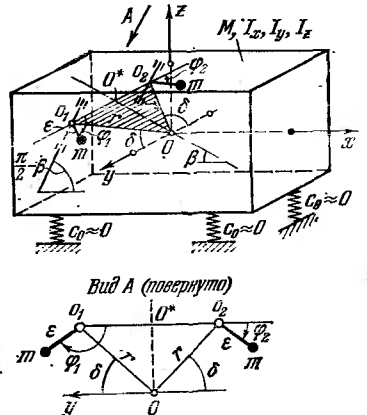
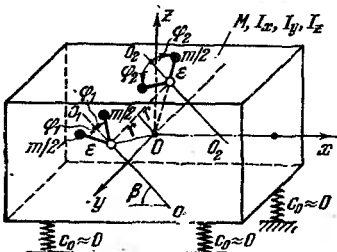
№№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
11	Два одинаковых дебалансных вибровозбудителя, установленные на мягко амортизированном твердом теле с шестью степенями свободы; оси роторов возбудителей совпадают с одной из главных центральных осей инерции тела; плоскости вращения центров тяжести роторов равноудалены от центра тяжести тела. См. [42, 57]	
12	Та же система, что и в п. 11, но оси возбудителей параллельны плоскости xOz, равноудалены от нее и наклонены под углом $\pi/2 - \beta$ к плоскости xOy (O_1O_2 — плоскость вращения центров тяжести роторов; оси $Oxuz$ — главные центральные оси инерции тела). См. [57, 164, 166]	
Примечание. Система представляет собой пространственный вариант систе		
13	Та же система, что и в п. 11, но возбудители не дебалансные, а моногармонические возбуждители направленного действия; ли-	

Таблица 2 (продолжение)

Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\widetilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
г) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \mp (\omega t + \pi)$ (роторы возбудителей вращаются в противоположных направлениях)	Масса M_1 неподвижна, масса M_2 колеблется только в направлении оси y	$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} - \frac{M}{M_2} \frac{1}{\lambda_y^2 - 1} < 0$	
$\varphi_1 = \varphi_2 = \pm \omega t$	Круговые поступательные колебания параллельно плоскости xOz с амплитудой $r_0 = 2m\epsilon/M$	$\frac{Mr^2}{I''} > 2$ $\left(I'' = \frac{I_x I_z}{I_x + I_z} \right)$	$\widetilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 \epsilon^2 \omega^2}{M} \times \left 2 - \frac{Mr^2}{I''} \right $
$\varphi_1 = \pm \omega t$ $\varphi_2 = \mp (\omega t + \pi)$ (роторы возбудителей вращаются в противоположных направлениях)	Прямолинейные поступательные гармонические колебания с амплитудой $A_0 = 2m\epsilon/M$, параллельные линии OO^*	Режим устойчив при любых сочетаниях параметров (если $r \neq 0$)	$\widetilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 \epsilon^2 \omega^2}{M} \frac{Mr^2}{I'}$, $I' = \frac{I_x I_z}{I_{xz}}$, $I_{xz} = I_z \sin^2 \beta + I_x \cos^2 \beta$

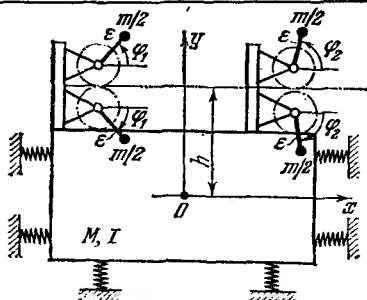
мы п. 7.

а) $ \varphi_1 = - \varphi_2 = \omega t$	Прямолинейные поступательные гармонические колебания с амплитудой $A_0 = 2m\epsilon/M$,	$\frac{Mr^2}{I'} > 1$	$\widetilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 \epsilon^2 \omega^2}{M} \times \left 1 - \frac{Mr^2}{I'} \right $
--	--	-----------------------	---

№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
	нии действия вынуждающих сил возбудителей o_1o_1 и o_2o_2 параллельны плоскости xOz, равноудалены от нее и наклонены под углом β к плоскости xOy. См. [42, 57]	

Примечание. Система представляет собой пространственный вариант сис

- 14 Два одинаковых моногармонических вибровозбудителя направленного действия, установленных на твердом теле, которое связано с неподвижным основанием симметричной системой упругих элементов и может совершать плоские колебания; линии действия вынуждающих сил возбудителей совпадают и удалены от центра тяжести тела на расстояние h .
См. [42, 51, 57]



$$p_x^2 = \frac{c_x}{M}, \quad p_\varphi^2 = \frac{c_\varphi}{M},$$

$$\lambda_x = \frac{p_x}{M}, \quad \lambda_\varphi = \frac{p_\varphi}{\omega}$$

- 15 Два одинаковых дебалансных вибровозбудителя, установленные на мягко амортизированном твердом теле с шестью степенями свободы; оси $Oxuz$ — главные центральные; оси возбудителей наклонены под углом γ к плоскости xOy .
См. [57, 118, 163, 164, 330]

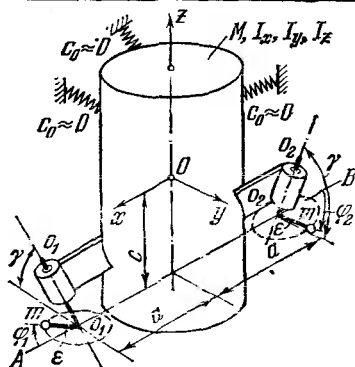
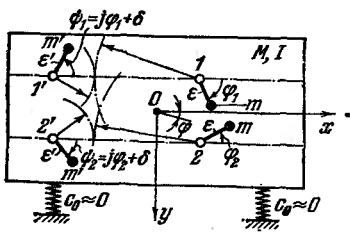
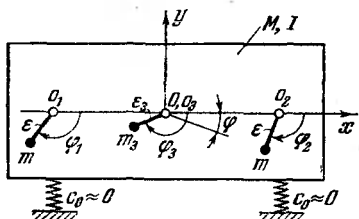
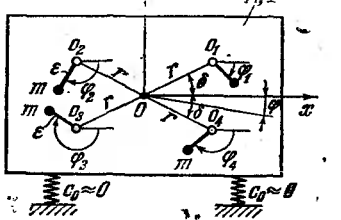


Табл. 2 (продолжение)

Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\tilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
	параллельные линиям действия возмущающих сил возбудителей $o_1 o_1$ и $o_2 o_2$	$I' = \frac{I_x I_y}{I_{xy}},$ $I_{xy} = I_x \cos^2 \beta + I_y \sin^2 \beta$	
б) $ \varphi_1 = \varphi_2 + \pi = \omega t$	Поворотные гармонические колебания относительно некоторой оси, лежащей в плоскости xOz	$\frac{Mr^2}{I'} < 1$	

темы п. 8.

а) $ \varphi_1 = \varphi_2 + \pi = \omega t$	Отсутствие колебаний	$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{Mh^2}{I} \times$ $\times \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} < 0$	$W(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{M} \times$ $\times \left \frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \right.$ $\left. + \frac{Mh^2}{I} \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} \right $
б) $ \varphi_1 = \varphi_2 = \omega t$	Плоские поступательные колебания	$\frac{1}{\lambda_x^2 - 1} + \frac{Mh^2}{I} \times$ $\times \frac{1}{\lambda_\varphi^2 - 1} > 0$	
$\varphi_1 = \pm \omega t,$ $\varphi_2 = \pm \omega t$	Винтовые гармонические колебания относительно оси z ; амплитуда вертикальной составляющей $A_0 = 2m\varepsilon \cos \gamma / M$, угловая амплитуда $\varphi_0 = 2m\varepsilon a \sin \gamma / I_z$	$\frac{Ma^2}{I_z} < 2 + \frac{Mc^2}{I_x} +$ $+ \frac{M(c^2 + a^2 \cos^2 \gamma)}{I_y \sin^2 \gamma}$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^2}{M} \times$ $\times \sin^2 \gamma \left \frac{Ma^2}{I_z} - \right.$ $\left. - 2 - \frac{Mc^2}{I_x} - \right.$ $\left. - \frac{M(c^2 + a^2 \cos^2 \gamma)}{I_y \sin^2 \gamma} \right $

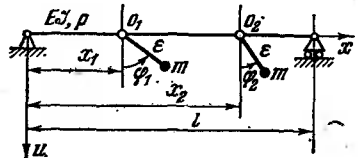
№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
16	Два одинаковых бигармонических дебалансных вибровозбудителя, симметрично расположенных на мягко амортизированном твердом теле, которое может совершать плоские колебания. Плоскости 1—1' и 2—2' осей каждого возбудителя параллельны и равноудалены от центра тяжести тела O. См. [42, 57]	 j — передаточное отношение между валами каждого возбудителя
17	Три дебалансных вибровозбудителя, симметрично расположенных на мягко амортизированном твердом теле, которое может совершать плоские колебания; плоскость осей вращения всех роторов проходит через центр тяжести тела; крайние возбудители одинаковы. См. [42, 57]	
18	Четыре одинаковых дебалансных вибровозбудителя, симметрично расположенные на мягко амортизированном твердом теле, которое может совершать плоские колебания. См. [42, 57]	

Примечание. Об устойчивости режимов, в которых отсутствуют колебания

Табл. 2 (продолжение)

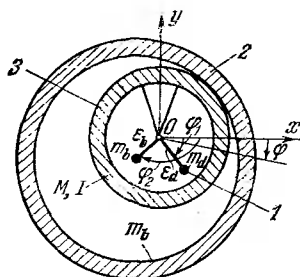
Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\tilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
$\varphi_1 = \pm \omega t$ $\varphi_2 = \pm \omega t$	Прямолинейные поступательные бигармонические колебания параллельно оси Ox по закону $x = \frac{2m\varepsilon}{M} \cos \omega t + \frac{2m'\varepsilon'}{M} \cos j\omega t$	Режим устойчив при любых сочетаниях параметров, однако могут быть устойчивыми также и иные синхронные режимы. При $j=2$ такие побочные режимы отсутствуют, если $4m'\varepsilon' < m\varepsilon$	
$\varphi_1 = \varphi_3 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \pm(\omega t + \pi)$ (роторы всех возбудителей вращаются в одинаковых направлениях)	Круговые поступательные колебания с амплитудой $r_0 = \frac{2m\varepsilon - m_3\varepsilon_3}{M}$	$\frac{Mr^2}{I} > 2 - \frac{m_3\varepsilon_3}{m\varepsilon}$	
а) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \pm(\omega t + \pi)$, $\varphi_3 = \mp(\omega t + \pi)$, $\varphi_4 = \mp \omega t$ (роторы 3-го и 4-го возбудителей вращаются в направлении, противоположном направлению вращения роторов 1-го и 2-го возбудителей) б) $\varphi_1 = \pm \omega t$, $\varphi_2 = \pm(\omega t + \pi)$, $\varphi_3 = \pm \omega t$, $\varphi_4 = \pm(\omega t + \pi)$ (роторы всех возбудителей вращаются в одинаковых направлениях)	Отсутствие колебаний	Режимы устойчивы при любых сочетаниях параметров	

несущего тела, для систем более общего вида см. п. 4 § 8 и пп. 6 и 7 § 14 гл. 3.

№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
19	Два одинаковых дебалансных вибровозбудителя или вибровозбудителя направленного действия, установленные на шарнирно опертой балке однородного сечения с равномерно распределенной массой. См. [57, 330]	 EJ — изгибная жесткость, ρ — погонная плотность балки

Примечание. О случае мягко амортизированной балки с произвольным чис

- 20 Один дебалансный (1) и один «пассивный» (лишенный двигателя) внешний планетарный вибровозбудитель (2), коаксиально установленные на свободном твердом теле (3), которое может совершать плоские колебания.
- См. [251, 252, 42, 57]



Примечание. Результат остается справедливым и в случае, когда планетар

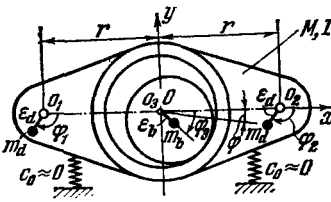
Табл. 2 (продолжение)

Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\tilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
а) $ \varphi_1 = \omega t$, $ \varphi_2 = \omega t$	Упругие колебания под действием синфазных гармонических возмущающих сил $F = m\varepsilon\omega^2$, приложенных в точках o_1 и o_2	$\tilde{k}(\omega^2) > 0$, $\tilde{k}(\omega^2) = \frac{2}{\pi} \frac{l^3}{E\mathcal{J}} \times$ $\times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4 - q^4} \times$ $\times \sin j\pi\xi_1 \sin j\pi\xi_2$, $\xi_1 = x_1/l$, $\xi_2 = x_2/l$, $q^4 = \rho l^4 \omega^2 / \pi E \mathcal{J}$	$\tilde{W}(\omega) = \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega^4}{2} \times$ $\times \tilde{k}(\omega^2) $
б) $ \varphi_1 = \omega t$, $ \varphi_2 = \omega t + \pi$	Упругие колебания под действием противофазных возмущающих сил $F = m\varepsilon\omega^2$, приложенных в точках o_1 и o_2	$\tilde{k}(\omega^2) < 0$	

лом одинаковых возбудителей направленного действия см. работу [212], а также [57].

$\varphi_1 = \pm (\omega t + \pi + \rho' + \arcsin q)$, $q = \frac{\varepsilon_b}{\tilde{\mathcal{A}}_0} \sin \rho'$, $\varphi_2 = \pm \omega t$, $\tilde{\mathcal{A}}_0 = m_d \varepsilon_d / m_a$, $\rho' = \arctg f'$ (f' — коэффициент сопротивления перекатыванию), $m_a = M - m_b$	Круговые по- ступательные ко- лебания	Режим устой- чив во всей обла- сти своего сущест- вования, опреде- ляемой неравен- ством $\frac{\varepsilon_b}{\tilde{\mathcal{A}}_0} \leq \frac{\sqrt{1 + (f')^2}}{f'}$, если $k_2/k_1 \ll 1$ (k_s — суммарные коэффициенты демпфирования)
---	---	---

ный возбудитель является внутренним.

№ п/п	Краткое описание системы. Разделы книги или публикации, в которых рассмотрена система	Динамическая схема, обозначения
21	Два одинаковых дебалансных вибровозбудителя и один пассивный внутренний планетарный вибровозбудитель, симметрично установленные на мягко амортизированном твердом теле, которое может совершать плоские колебания. См. [42, 57]	 The diagram shows a mechanical system. At the center is a fixed frame with origin O. Two rotors, labeled \$a_1\$ and \$a_2\$, are mounted on the frame. Each rotor has an eccentric mass \$m_a\$ at a distance \$r\$ from the center. The eccentricities are \$e_1\$ and \$e_2\$. The rotors are connected to a central planetary gear system. The planetary system consists of a central gear \$b\$ with eccentricity \$e_b\$ and two outer gears \$c_1\$ and \$c_2\$ with eccentricities \$e_1\$ and \$e_2\$. The gears are meshed. The entire system is supported by a base with springs \$c_0 \approx 0\$ and \$c_0 \approx 0\$. The base is labeled \$m_d\$. The system is symmetric about the x-axis. The diagram is labeled with \$M, I\$ and \$x, y\$ coordinates.

Примечания: 1. Режим существует при $\frac{e_b}{\tilde{A}_0} \leq \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{f'}$. 2. Результат

изменении числа этих степеней свободы результат, как правило, существенно изменяется (см. п. 2 § 11 и п. 8 § 14).

6) Системы, представленные в пп. 2—5, 7, 8, 14, 16—18, 20 и 21, являются частными случаями системы, рассмотренной в п. 5 § 8 (рис. 12), а системы, представленные в пп. 11—13 и 15 — частными случаями системы, изученной в работе [163].

7) Для возможности практического применения большинства приводимых схем необходимо наряду с условиями устойчивости также выполнение условий стабильности фазировки (см. § 9).

§ 11. О синтезе вибрационных машин с несколькими механическими возбудителями колебаний

1. Проблема создания заданного вибрационного поля и задачи синтеза системы возбуждения. Обсудим теперь затронутую в § 2 проблему создания вибрационных устройств, приводящую, в частности, к задачам о синхронизации вибровозбудителей с более широких, но нескольких формальных позиций.

Табл. 2 (продолжение)

Характер синхронного движения (в первом приближении)		Условия устойчивости синхронного движения	Выражения для модулей вибрационных моментов $\tilde{W}(\omega)$
возбудителей	несущих тел		
$\varphi_1 = \pm \omega t,$ $\varphi_2 = \pm \omega t,$ $\varphi_3 = \pm (\omega t + \rho' + \pi + \arcsin q),$ $q = \frac{\varepsilon_b}{\tilde{\mathcal{A}}_0} \sin \rho',$ $\tilde{\mathcal{A}}_0 = 2m_a \varepsilon_a / m_a,$ $\rho' = \arctg f'$ $(f' - \text{коэффициент сопротивления перекатыванию}),$ $m_a = M - m_b$	Круговые поступательные колебания	$\frac{Mr^2}{I} > 2 \left\{ 1 - \frac{m_b \varepsilon_b}{m_a \tilde{\mathcal{A}}_0} \frac{1}{1 + (f')^2} \times \right.$ $\times \left[\left((1 + (f')^2 \times \right. \right.$ $\times \left. \left(1 - \frac{\varepsilon_b^2}{\tilde{\mathcal{A}}_0^2} \right) \right)^{1/2} -$ $\left. \left. - (f')^2 \frac{\varepsilon_b}{\tilde{\mathcal{A}}_0} \right] \right\},$ если $k_b/k_a \ll 1$ (k_b и k_a — соответствующие суммарные коэффициенты демпфирования)	

остается справедливым и в случае, когда планетарный возбудитель является внешним.

Полезное применение механических колебаний — создание вибрационных машин и устройств — делает все более актуальной следующую своеобразную задачу теории колебаний: *требуется обеспечить с определенной точностью периодические колебания некоторых точек упругих тел по некоторым заданным законам, допускаемым связями* *). Так, например, при создании вибрационных транспортирующих машин необходимо сообщить колебания упругой балке или оболочке, мало отличающиеся от их прямолинейных поступательных колебаний как твердых тел.

Данную проблему можно назвать *проблемой создания заданного вибрационного поля*. Ее особенности и трудности решения определяются, в основном, следующими обстоятельствами. Во-первых, применяемые в настоящее время возбудители колебаний развивают вынуждающие усилия, распределенные по некоторой небольшой части поверхности упругих тел, входящих в колеба-

*) Выяснение оптимальных или просто рациональных законов и параметров колебаний представляет особую задачу, относящуюся к теории вибрационных процессов.

тельную систему; эти усилия уместно считать сосредоточенными. Во-вторых, число возбудителей практически всегда ограничено; более того, по экономическим и эксплуатационным соображениям желательно, чтобы число возбудителей было минимальным. Наконец, в-третьих, действие реальных возбудителей на колебательную систему далеко не всегда можно сводить к действию заданных вынуждающих сил, как это обычно делается в теории вынужденных колебаний. Дело в том, что указанные силы существенно зависят от колебаний тех участков упругой системы, с которыми связаны возбудители. Иными словами, возбудители образуют с упругой системой единую колебательную систему с большим, нежели у исходной системы, числом степеней свободы за счет добавочных «собственных» степеней свободы возбудителей. Уравнения движения совокупной системы оказываются при этом, как правило, нелинейными.

Изложенное хорошо иллюстрируется системой уравнений (4.12): указанная система была бы линейной, если отбросить уравнения движения роторов возбудителей и считать это движение заданным и равномерным. Несомненно, однако, что подобное упрощение сделало бы невозможным решение задачи о синхронизации и не позволило бы учесть многие важные эффекты.

Решение рассматриваемой задачи все же удастся существенно упростить благодаря тому, что обратное влияние колебаний упругой системы на вибровозбудители, как правило, допустимо считать малым подобно тому, как это было сделано при решении задач о синхронизации в §§ 4 и 8. В указанном предположении задача может быть разбита на две последовательно решаемые задачи — задачу о создании заданного поля вынужденных колебаний упругой системы посредством некоторого (по возможности меньшего) числа заданных сосредоточенных периодических вынуждающих сил и задачу о синтезе системы возбуждения.

В результате решения первой задачи определяются, в частности, значения начальных фаз вращения роторов вибровозбудителей α_1^* , ..., α_n^* , обеспечивающие требуемое поле колебаний упругой системы. Примеры решения этой задачи приводятся в книге [57].

Вторая задача, на которой остановимся подробнее, по существу представляет собой задачу о синтезе систем с синхронно работающими вибровозбудителями, о которой говорилось в § 2. Она состоит в таком выборе свободных параметров системы, при котором определенные решением первой задачи начальные фазы α_1^* , ..., α_n^* удовлетворяют основным уравнениям (4.19), (8.4) и т. п. и соответствующим условиям устойчивости.

Очевидно, и об этом будет еще сказано ниже, указанным уравнениям и условиям всегда можно удовлетворить путем вы-

бора «достаточно жесткой» системы принудительной синхронизации. Однако к такому способу следует прибегать лишь в том случае, если нельзя достигнуть цели за счет эффекта самосинхронизации. Поэтому рассмотрим вначале возможности использования этого эффекта.

2. О синтезе системы возбуждения с использованием явления самосинхронизации. Два способа изменения устойчивой фазировки возбудителей. В отдельных случаях может оказаться, что условия существования и устойчивости требуемого движения самосинхронизирующихся вибровозбудителей либо удовлетворяются автоматически, либо могут быть удовлетворены путем простого варьирования параметров заданной системы. Относительно широкий и далеко не исчерпывающий набор таких «счастливых» вариантов приведен в табл. 2. Часто, однако, оказывается, что требуемый режим в заданной системе при самосинхронизации не обеспечивается. Тогда следует попытаться добиться цели либо путем изменения числа степеней свободы несущей системы, либо путем изменения числа вибровозбудителей: важнейшая закономерность самосинхронизации вибровозбудителей состоит в том, что в результате таких изменений характер устойчивых синхронных движений роторов может существенно измениться. В ряде случаев для определения необходимых изменений системы можно использовать данные той же табл. 2.

Чтобы пояснить указанные способы синтеза систем с самосинхронизирующимися вибровозбудителями приведем два простых примера.

Пусть сначала необходимо обеспечить прямолинейные поступательные колебания мягко амортизированного тела по закону, близкому к гармоническому (рис. 17). Для этой цели могут быть использованы два одинаковых дебалансных вибровозбудителя, приводимых от асинхронных двигателей с роторами, вращающимися в противоположных направлениях. Для гарантии колебаний тела

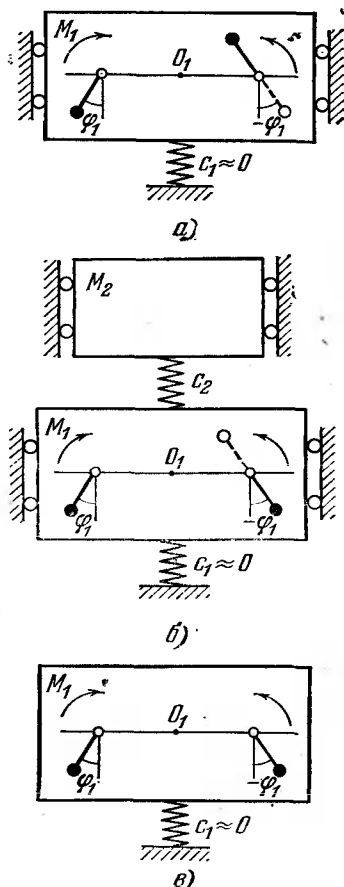


Рис. 17.

в нужном направлении, на первый взгляд, представляется полезным поместить тело в направляющие, которые допускают перемещения тела только в этом направлении (рис. 17, а). Однако изложенное в § 7 и в п. 4 § 8 показывает, что в этом случае возбудители будут устойчиво самосинхронизироваться с таким соотношением фаз, которое показано на рисунке сплошными линиями. Иными словами, в устойчивом синхронном движении вынуждающие силы, развиваемые возбудителями, будут взаимно уравновешиваться, а тело останется практически неподвижным. Требуемая же для обеспечения колебаний тела фазировка вращения роторов в данном случае является неустойчивой (на рис. 17, а эта фазировка показана штрихами).

Исследование, результаты которого приведены в пп. 2 и 9 табл. 2, показывает, что существуют по крайней мере два способа обеспечения устойчивости требуемого синхронного вращения роторов: либо присоединить к основной массе M_1 посредством пружины жесткости c_2 некоторую добавочную массу M_2 , причем величины c_2 , M_1 и M_2 удовлетворяют некоторому простому соотношению, либо, как это ни кажется парадоксальным, просто убрать направляющие (см. соответственно рис. 17, б и 17, в). Отметим, что в обоих случаях желаемый результат достигается по существу одним и тем же способом — изменением числа степеней свободы колебательной части системы*).

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда необходимо обеспечить круговые поступательные колебания мягко амортизированного твердого тела. Этой цели можно достигнуть, применив два одинаковых дебалансных вибровозбудителя, приводимых от асинхронных двигателей, роторы которых вращаются в одинаковых направлениях. Оси вращения роторов лежат в одной плоскости с центром тяжести тела O_1 и удалены от него на одинаковые расстояния r . Как показано в п. 2 § 10 (см. также п. 2 табл. 2), в этом случае при выполнении условия

$$Mr^2/I > 2 \quad (11.1)$$

(M и I — соответственно масса и момент инерции вспомогательного тела) устойчиво синхронное и синфазное вращение роторов, которое как раз и обеспечивает круговые поступательные колебания тела (рис. 18, а). При невыполнении условия (11.1) роторы возбудителей в устойчивом синхронном движении вращаются в противофазе (рис. 18, б), и поэтому тело совершает поворотные колебания относительно центра тяжести O_1 .

*) Разумеется, можно было бы обеспечить колебания тела в условиях рис. 17, а путем установки всего одного дебалансного возбудителя. Однако при этом возникла бы неуровновешенная сила в направлении, перпендикулярном колебаниям, что, как правило, нежелательно.

Часто удовлетворить условию (11.1) оказывается практически затруднительным. Поэтому желательно добиться устойчивости синфазного вращения обоих роторов при $Mr^2/I < 2$. Как показывает исследование, результат которого приведен в п. 17 табл. 2, для этого достаточно снабдить систему дополнительным центральным расположенным дебалансным вибровозбудителем, обладающим той же парциальной скоростью и ротор которого вращается в том же направлении. При выполнении соотношения

$$\frac{Mr^2}{I} > 2 - \frac{m_3 \varepsilon_3}{m \varepsilon} \quad (11.2)$$

($m \varepsilon$ и $m_3 \varepsilon_3$ — статические моменты роторов соответственно каждого из основных и дополнительного возбудителей) роторы основных возбудителей будут в устойчивом синхронном режиме

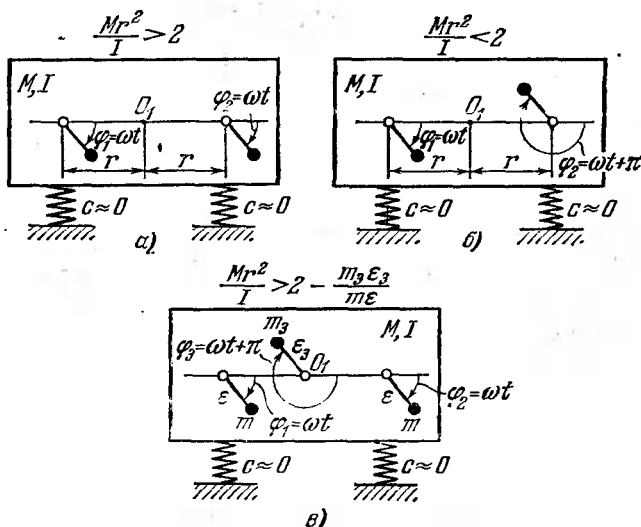


Рис. 18.

вращаться синфазно, а ротор дополнительного возбудителя — в противофазе по отношению к роторам основных (рис. 18, в). Колебания тела при этом окажутся круговыми поступательными, несмотря на несоблюдение условия (11.1), хотя амплитуда колебаний несколько уменьшится.

Заметим, что та же задача может быть решена первым из изложенных способов путем присоединения к основной массе M посредством упругих и демпфирующих элементов некоторой дополнительной массы M_2 (см. п. 6 табл. 2, а также [57]).

На основе изложенных способов синтеза, вытекающих из теоретических исследований, В. Э. Романовским, Б. П. Лавровым,

Р. Ф. Нагаевым, Г. А. Денисовым, В. В. Гузовым и Н. Г. Тимофеевым предложен ряд вибрационных устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями; сведения об этих устройствах и соответствующие ссылки приведены в книге [57]; см. также работы [108, 114—117, 167, 246].

Заметим, что те же способы позволяют повысить стабильность синхронного режима, ибо они при определенных условиях приводят к увеличению модуля вибрационного момента. Эта идея, в частности, используется в работе О. Г. Пирцхалаишвили [231].

3. О способах принудительной синхронизации и о синтезе соответствующих устройств. Рассмотренные способы обеспечения устойчивости требуемого режима синхронного вращения вибровозбудителей значительно расширяют возможности использования явления самосинхронизации. Однако могут представиться случаи, когда соответствующие принципиальные и конструктивные решения оказываются нецелесообразными или даже невозможными. В таких случаях можно прибегнуть к тому или иному способу принудительной синхронизации. Таких способов можно указать несколько.

1) Использование упругих элементов (валов, пружин, муфт и т. п.) для связи между валами вибровозбудителей.

2) Использование для привода вибровозбудителей асинхронных нереактивных электродвигателей.

3) Использование для согласования вращения валов следящих систем типа электрического вала или систем, аналогичных системам фазовой автоподстройки частоты (см. §§ 1 и 2 гл. 6).

Для большинства систем принудительной синхронизации как механических, так и электрических, в основных уравнениях характерно появление слагаемых типа $c_{sj}(\alpha_s - \alpha_j - \kappa_s + \kappa_j)$, где κ_s и κ_j — так называемые установочные углы, а c_{sj} — квазиупругие коэффициенты, характеризующие связи между s -м и j -м роторами (см., например, формулы (8.61)); в случае электрической синхронизации роль c_{sj} играют крутизны («жесткости») соответствующих моментных характеристик.

Естественно, что выбором установочных углов κ_s и достаточно больших c_{sj} всегда можно обеспечить существование, устойчивость и стабильность любой наперед заданной фазировки роторов.

Практически, однако, желательно, чтобы система принудительной синхронизации удовлетворяла некоторым условиям оптимальности. Естественно потребовать, например, чтобы число связей между валами вибровозбудителей было минимально возможным, а «жесткости» связей — минимально допустимыми.

Как показывают исследования [39, 57], в ряде случаев указанный оптимальный выбор системы принудительной синхронизации может быть выполнен без особого труда. Допускает решение в общей форме и задача об обеспечении устойчивости

требуемой фазировки вращения роторов вибровозбудителей путем наложения минимального числа абсолютно жестких (кинематических) связей между роторами. Решение этой последней задачи, данное Р. Ф. Нагаевым, изложено в книге [57].

Здесь мы приведем лишь простой пример исследования принудительной синхронизации вибровозбудителей в системе, представленной на рис. 16.

Допустим сначала, что в условиях примера, рассмотренного в п. 2 § 10, роторы вибровозбудителей связаны пружиной жесткости c , концы которой прикреплены к роторам на расстояниях a от осей вращения (рис. 16, z). Пружина находится в недеформированном состоянии, когда углы поворота роторов φ_1 и φ_2 одинаковы. В этом случае согласно (8.51) выражение для потенциальной функции

$$D = \Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)} = \langle (T^{(I)}) \rangle + \langle (П^{(II)}) \rangle \quad (11.3)$$

отличается от (10.9) слагаемым

$$\langle (П^{(II)}) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2} c \Delta^2 \right) \right\rangle, \quad (11.4)$$

представляющим собой среднюю за период потенциальную энергию пружины, связывающей роторы (потенциальную энергию несомых связей), вычисленную в порождающем приближении (10.2). При этом удлинение пружины

$$\Delta = l - l_0 = l - 2r \approx a (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (11.5)$$

(считаем, что $a/r \ll 1$ и пренебрегаем степенями a/r , более высокими, чем первая). В результате получим

$$D = \frac{F^2}{2M\omega^2} \left(1 + \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 \frac{Mr^2}{I} - \frac{Mca^2}{m^2 \varepsilon^2 \omega^2} \right) \cos \alpha + C_2, \quad (11.6)$$

где $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, а C_2 — не зависящая от α_1 и α_2 постоянная. Как и в п. 2 § 10, т. е. при отсутствии пружины, из условия $\partial D / \partial \alpha = 0$ получается, что возможны синфазное $\alpha = (\alpha)_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)_1 = 0$ и противофазное $\alpha = (\alpha)_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)_2 = \pi$ синхронные движения возбудителей. Если

$$1 + \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 \frac{Mr^2}{I} - \frac{Mca^2}{m^2 \varepsilon^2 \omega^2} < 0, \quad (11.7)$$

то функция D при $\alpha = (\alpha)_1 = 0$ имеет минимум, а при $\alpha = (\alpha)_2 = \pi$ — максимум, и поэтому в соответствии с интегральным критерием синфазное движение роторов устойчиво, а противофазное неустойчиво.

При вращении роторов в одинаковых направлениях, когда $\sigma_1 \sigma_2 = 1$, условие (11.7) принимает вид

$$\frac{Mr^2}{I} > 2 - \frac{Mc^2 a^2}{m^2 \varepsilon^2 \omega^2} = 2 - \frac{4ca^2}{MA_0^2 \omega^2}. \quad (11.8)$$

В случае невыполнения неравенства (11.8) устойчиво противофазное движение. При $c = 0$ это неравенство, как и должно быть, переходит в (10.13). Таким образом, наличие пружины, связывающей роторы, облегчает выполнение условия устойчивости синфазного вращения роторов в одинаковых направлениях; более того, выбором достаточно большой жесткости c можно всегда обеспечить устойчивость этого движения.

Любопытно, однако, что для обеспечения противофазного вращения роторов пружина не нужна и даже вредна, ибо может привести к неустойчивости этого режима. Соответствующее неравенство выписано в п. 3, а табл. 2; оно совпадает с (11.8).

Несколько иное условие получается, если связать роторы вибровозбудителей упругим валом жесткости c , который, например, при синфазном вращении роторов в одинаковых направлениях является не скрученным; соответствующее условие помещено в п. 4, а табл. 2. При выполнении неравенства $Mr^2/I > 2$ указанное условие выполняется автоматически при любой жесткости вала c , т. е. синхронизирующая связь не нужна. Вместе с тем путем надлежащего выбора c можно обеспечить устойчивость синфазного вращения роторов в одинаковых направлениях и при $Mr^2/I < 2$, т. е. в случае, когда такое синхронное движение «само по себе» неустойчиво. Вполне аналогичный результат получается в случае, когда роторы возбудителей либо связаны электрическим валом, характеризующимся той же жесткостью c , либо приводятся от синхронных не реактивных электродвигателей с такой же жесткостью характеристики синхронного момента в рабочей точке [57].

§ 12. Вибрационное поддержание и захватывание вращения неуравновешенного ротора. Выражения для модуля вибрационного момента и эффективной амплитуды колебаний оси ротора

Вибрация оси вращения неуравновешенного ротора с некоторой частотой ω может привести к тому, что ротор будет стационарно вращаться с той же или в целое число раз меньшей частотой, несмотря на то что при отсутствии вибраций ротор, приводимый от некоторого двигателя, вращался с другой частотой ω_0 . Иными словами, происходит *захватывание вращения ротора* вибрацией его оси. Более того, вибрация может вызвать и устойчиво поддерживать вращение ротора с частотой ω или ω/n (n — целое число), если даже при отсутствии вибраций ротор вообще не вращался. Последнее явление называется *вибрационным поддержанием вращения неуравновешенного ротора*; оно используется, например, в известной игре — упражнении «хула-хуп», а также в ряде вибрационных машин и устройств (см. § 15).

В § 6 явление вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора рассматривалось в рамках теории синхронизации двух вибровозбудителей в простейшей колебательной системе. Здесь оба указанных явления будут изучены в более общем случае колебаний оси ротора, но в идеализированном виде, когда эти колебания являются заданными, т. е. в постановке, соответствующей задаче о внешней синхронизации (см. § 1 гл. 1). Уравнения движения неуравновешенного ротора (рис. 19), горизонтально расположенная ось которого совершает гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях по закону

$$x = H \sin \omega t, \quad y = G \cos(\omega t + \vartheta) \quad (12.1)$$

(H и G — амплитуды, ω — частота колебаний, ϑ — угол, характеризующий сдвиг фаз между составляющими колебаний; равенствам (12.1), очевидно, соответствует движение оси ротора по эллиптической траектории), имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = mge \cos \varphi -$$

$$- m\epsilon\omega^2 [H \sin \omega t \sin \varphi + G \cos(\omega t + \vartheta) \cos \varphi] + L(\dot{\varphi}) - R(\dot{\varphi}) \quad (12.2)$$

Здесь φ — угол поворота ротора, отсчитываемый по ходу часовой стрелки; m , I и ϵ — соответственно масса, момент инерции и эксцентриситет ротора, g — ускорение свободного падения. Как и в § 4, $L(\dot{\varphi})$ и $R(\dot{\varphi})$ — соответственно момент, передаваемый от асинхронного электродвигателя, и момент сил сопротивления.

Рассматривая вращение ротора с угловой скоростью, близкой к $\dot{\varphi}^0 = \sigma\omega$, где $\sigma = \pm 1$, заменим моменты $L(\dot{\varphi})$ и $R(\dot{\varphi})$ их линейризованными выражениями типа (4.10) и запишем уравнение (12.2) в виде, аналогичном (4.12):

$$I\ddot{\varphi} + k(\dot{\varphi} - \sigma\omega) = \mu\Phi(\varphi, \omega t). \quad (12.3)$$

Здесь (см. также формулы (4.13))

$$k = k^* + k^\circ,$$

$$\mu\Phi(\varphi, \omega t) = mge \cos \varphi -$$

$$- m\epsilon\omega^2 [H \sin \omega t \cos \varphi + G \cos(\omega t + \vartheta) \cos \varphi] + L(\sigma\omega) - \sigma R^\circ(\omega). \quad (12.4)$$

Данную задачу можно рассматривать, например, как частный случай изученной в § 8 задачи, соответствующий внешней син-

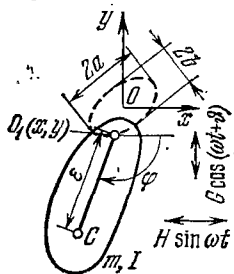


Рис. 19.

хронизации одного-единственного вибровозбудителя. Тогда основное уравнение (8.4), т. е. уравнение для определения параметра α порождающего решения

$$\varphi^0 = \sigma(\omega t + \alpha), \quad (12.5)$$

запишется в форме

$$P(\alpha) \equiv \mu \sigma \langle (\Phi) \rangle \equiv \sigma L(\sigma \omega) - R^0(\omega) - W(\alpha) = 0. \quad (12.6)$$

Условие устойчивости (см. уравнение (8.30)) в рассматриваемом простейшем случае сводится к неравенству

$$\kappa = \frac{dP}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^*} = - \frac{dW}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^*} < 0, \quad (12.7)$$

где α^* — решения уравнения (12.6).

Величина W в уравнении (12.6) представляет собой вибрационный момент, который, как и в изученных ранее задачах, предопределяет своеобразие поведения ротора с вибрирующей осью; этот момент определяется в данном случае выражением

$$W = \tilde{W}(\omega) \cos(\alpha - \chi), \quad (12.8)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\omega) &= FA, \quad F = m\varepsilon\omega^2; \\ A &= \frac{1}{2} \sqrt{G^2 + H^2 + 2\sigma GH \cos \vartheta} = \frac{1}{2} (a + \sigma^* b), \\ a &= \frac{\sqrt{2}GH |\cos \vartheta|}{\sqrt{G^2 + H^2 - \sqrt{(G^2 + H^2)^2 - 4G^2 H^2 \cos^2 \vartheta}}}, \\ b &= \frac{\sqrt{2}GH |\cos \vartheta|}{\sqrt{G^2 + H^2 + \sqrt{(G^2 + H^2)^2 - 4G^2 H^2 \cos^2 \vartheta}}}; \\ \sigma^* &= \sigma \operatorname{sgn}(\cos \vartheta) = \pm 1, \\ A \cos \chi &= \frac{1}{2} (H + \sigma G \cos \vartheta), \\ A \sin \chi &= \frac{1}{2} \sigma G \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Здесь, как и в § 5, величина $\tilde{W}(\omega)$ представляет собой модуль вибрационного момента W , а величина F — вынуждающую силу, развиваемую ротором при неподвижной оси. Величины a и b являются соответственно большой и малой осью эллиптической траектории колебаний, определяемой равенствами (12.1); значениям $\cos \vartheta > 0$ отвечает движение оси ротора по эллипсу в направлении хода часовой стрелки, а значениям $\cos \vartheta < 0$ — против часовой стрелки. Поэтому величина $\sigma^* = \sigma \operatorname{sgn}(\cos \vartheta)$ равна 1, если

рассматривается вращение ротора в направлении, совпадающем с направлением движения оси ротора по эллиптической траектории (12.1), и равна -1 при несовпадении указанных направлений. Величину A , соответствующую введенной в § 5, назовем *эффективной амплитудой колебаний оси ротора*. В соответствии с равенствами (12.9) эффективная амплитуда равна полусумме полуосей эллипса, если рассматривается вращение ротора в направлении движения его оси по эллиптической траектории ($\sigma^* = 1$), и равна полуразности полуосей при несовпадении указанных направлений ($\sigma^* = -1$).

В случае прямолинейных колебаний оси $a = 0$, $b = H$, и, как и в § 5, получаем, что эффективная амплитуда равна половине амплитуды колебаний оси ротора. При колебаниях оси ротора по окружности радиуса $r_0 = a = b$ эффективная амплитуда $A = r_0$, если рассматривается вращение ротора в том же направлении, что и движение оси по окружности. В случае же, когда указанные направления противоположны, эффективная амплитуда, а вместе с нею и модуль вибрационного момента $\tilde{W}(\omega)$, равны нулю.

Заметим, что первые три выражения (12.9) могут быть использованы для оценки величины модуля вибрационного момента $\tilde{W}(\omega)$, если хотя бы приближенно известны амплитуды колебаний оси ротора в двух взаимно перпендикулярных направлениях, перпендикулярных также оси ротора. Такая оценка существенна, например, при рассмотрении вопроса о стабильности колебаний устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями (см. § 9).

Обращаясь к рассмотрению поставленных задач, изучим вначале случай, когда двигатель отсутствует или выключен ($L = 0$), т. е. задачу о вибрационном поддержании вращения. В этом случае уравнение (12.6) при учете равенства (12.8) может быть представлено в форме

$$P(\alpha) = -R^\circ(\omega) - \tilde{W}(\omega) \cos(\alpha - \chi) = 0, \quad (12.10)$$

а условие устойчивости — в виде

$$\sin(\alpha - \chi) < 0. \quad (12.11)$$

При выполнении неравенства

$$R^\circ(\omega) < \tilde{W}(\omega) = FA = m\varepsilon A\omega^2 \quad (12.12)$$

уравнение (12.10) допускает два существенно различных решения

$$\alpha_1 = \chi + \delta, \quad \alpha_2 = \chi - \delta, \\ \left(\frac{1}{2}\pi \leq \delta = \arccos\left[-\frac{R^\circ(\omega)}{m\varepsilon A\omega^2}\right] < \pi\right), \quad (12.13)$$

первому из которых согласно (12.11) отвечает неустойчивое, а второму — устойчивое вращение ротора со средней угловой скоростью ω .

Условие существования (12.12) основного режима вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора совпадает с условием (6.12), полученным иным путем и имеющим тот же физический смысл: момент сил сопротивления вращению ротора не должен превышать некоторого предельного значения $R_{\max}^0(\omega)$, равного модулю $\tilde{W}(\omega)$ вибрационного момента W , или, что то же самое, мощность $N(\omega) = R^0(\omega)\omega$, необходимая для преодоления момента сопротивления $R^0(\omega)$, не должна превышать некоторого предельного значения $N_{\max} = \tilde{W}(\omega)\omega$:

$$N(\omega) = R^0(\omega)\omega < N_{\max}(\omega) = \tilde{W}(\omega)\omega = m_{\varepsilon}A\omega^3. \quad (12.14)$$

Как уже отмечалось в § 6, указанная мощность в реальных условиях может быть весьма велика (см. приведенный там числовой пример), что имеет первостепенное значение для практического использования явлений самосинхронизации и вибрационного поддержания вращения.

Следует иметь в виду, что приведенные выше условия еще не гарантируют возникновения рассмотренного стационарного режима вращения ротора при произвольных начальных условиях: этот режим может возбуждаться жестко; соответствующий вопрос рассмотрен, например, в работах [57, 148, 159, 196]; результаты экспериментального исследования приводятся в § 13.

Из неравенств (12.14) следует, что условие поддержания вращения ротора в направлении движения его оси по эллиптической траектории является более «мягким», чем соответствующее условие для случая, когда указанные направления противоположны (в первом случае эффективная амплитуда A согласно (12.9) больше, чем во втором). В случае колебаний оси по окружности в определенном направлении вращение ротора в противоположном направлении вообще невозможно ($A = 0$). Исключение составляет случай прямолинейных колебаний оси, когда оба направления вращения равноправны.

Рассмотрим теперь случай включенного в сеть двигателя ($L \neq 0$), т. е. задачу о захватывании. Введем совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 5, избыточный момент на валу ротора

$$Z(\sigma, \omega) = \sigma L(\sigma\omega) - R^0(\omega). \quad (12.15)$$

Тогда согласно (12.8) при выполнении соотношения

$$|Z(\sigma, \omega)| < \tilde{W}(\omega) \quad (12.16)$$

основное уравнение (12.6) допускает два существенно различных

решения, одно из которых, как и выше, устойчиво, а другое неустойчиво. Смысл условия (12.16) прост: для существования изучаемого режима избыточный момент не должен превышать по абсолютной величине модуля вибрационного момента.

Введем теперь, как и в § 5, парциальную скорость ротора ω^* , т. е. угловую скорость ротора на неподвижном основании, отсчитываемую в отличие от φ в направлении вращения ротора в рассматриваемом движении; согласно (5.7) скорость ω^* удовлетворяет уравнению

$$\sigma L(\sigma \omega^*) = R^0(\omega^*) \operatorname{sgn} \omega^*. \quad (12.17)$$

Отметим, что колебания оси ротора в принципе могут вызвать вращение в направлении, противоположном тому, в котором его стремится вращать двигатель. В этом случае, отвечающем работе двигателя в генераторном режиме, может оказаться, что $\sigma \varphi^0 = \omega^* < 0$, т. е. что парциальная скорость отрицательна. Как отмечалось в § 6, понятие о парциальной скорости можно рассматривать как обобщение понятия о частоте автоколебаний. Пусть, однако, $\omega^* > 0$, т. е. двигатель работает в нормальном режиме. Тогда из (12.15) и (12.16) следует, что если частота колебаний оси ротора ω совпадает с ω^* , то $Z(\sigma, \omega) = Z(\sigma, \omega^*) = 0$ и условие (12.16) непременно выполняется. Иными словами, если при отсутствии колебаний оси ротора последний вращался в установившемся режиме с угловой скоростью $\varphi^0 = \sigma \omega^*$, то при наличии колебаний частоты $\omega = \omega^*$ этот ротор также сможет вращаться с той же угловой скоростью. Рассматриваемый режим, однако, будет существовать и в случае, когда частота колебаний ω отлична от парциальной скорости ω^* , но не слишком сильно от нее отличается, так что вибрационный момент может скомпенсировать избыточный момент $Z(\sigma, \omega)$, т. е. разность между моментом двигателя и моментом сил сопротивления. Таким образом, будет, вообще говоря, существовать интервал изменения частоты колебаний

$$-\Delta_1 < \omega - \omega^* < \Delta_2, \quad (12.18)$$

внутри которого вращение ротора захватывается частотой внешнего возмущения; ширину этого интервала $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ называют *полосой захватывания*.

Полоса захватывания для рассматриваемой системы может быть достаточно широкой; в частности, как отмечалось, парциальная угловая скорость ω^* может быть равной нулю (двигатель отсутствует или выключен из сети) и, несмотря на это, вращение ротора может захватываться колебаниями.

Помимо интервала (12.18), содержащего частоту ω^* , могут иметься и иные области изменения частоты ω , в которых суще-

ствуется рассматриваемый режим вращения ротора. Эти области можно выявить путем построения графиков функций $\sigma L(\sigma\omega)$, $R^0(\omega)$, $Z(\sigma, \omega)$ и $\tilde{W}(\omega)$ (см. [57]). Полагая аналогично (5.14) вблизи $\omega = \omega^*$

$$Z(\sigma, \omega) = Z(\sigma, \omega^*) - k_Z(\omega - \omega^*), \quad (12.19)$$

$$\tilde{W}(\omega) = \tilde{W}(\omega^*) + k_W(\omega - \omega^*),$$

где

$$k_Z = - \left. \frac{d[\sigma L(\sigma\omega) - R^0(\omega)]}{d\omega} \right|_{\omega=\omega^*} > 0,$$

$$k_W = \left. \frac{d\tilde{W}}{d\omega} \right|_{\omega=\omega^*} = 2m\varepsilon A\omega^* > 0, \quad (12.20)$$

находим

$$\Delta_1 = \omega^* - \omega_1 = \frac{\tilde{W}(\omega^*)}{k_Z + k_W}, \quad \Delta_2 = \omega_2 - \omega^* = \frac{\tilde{W}(\omega^*)}{k_Z - k_W}. \quad (12.21)$$

Заметим, что обычно $k_Z > k_W$, причем величина k_Z вполне соответствует введенным в § 5 суммарным коэффициентам демпфирования k_* .

Из формул (12.21) отчетливо видно отсутствие порога захватывания — такого значения эффективной амплитуды колебаний, при котором полоса захватывания пропадает. Для обычной простейшей автоколебательной системы этот факт был установлен А. А. Андроновым и А. А. Виттом [6].

Заметим в заключение, что колебания оси ротора с частотой ω могут также поддерживать его стационарное вращение по закону

$$\varphi \approx \varphi^0 = \sigma \left(\frac{\omega}{n} t + \alpha \right) \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (12.22)$$

т. е. со средней угловой скоростью, в целое число раз меньшей, чем ω (кратная принудительная синхронизация). Исследование, на котором здесь не будем останавливаться, при $n = 2$ приводит к следующему основному уравнению для определения угла α [57, 148, 241]:

$$P(\alpha) \equiv \sigma L\left(\frac{\sigma\omega}{2}\right) - R^0\left(\frac{\omega}{2}\right) - W_2(\alpha) = 0, \quad (12.23)$$

где вибрационный момент

$$W_2(\alpha) = \sigma \frac{4(m\varepsilon)^2 Ag}{I} \sin(2\alpha - \chi) \quad (12.24)$$

существенно зависит от ускорения свободного падения g и не зависит от частоты колебаний ω . Как и ранее, из условия нали-

чия у уравнения (12.23) вещественных решений $\alpha = \alpha^*$ следуют условия существования рассматриваемых режимов; условие устойчивости по-прежнему имеет вид (12.7). Примечательно, что в данном случае существуют два устойчивых режима вращения ротора, отличающиеся значениями фазы α .

Условие возможности вибрационного поддержания вращения, получающееся из (12.23) и (12.24) и соответствующее неравенству (12.14), теперь имеет вид

$$N\left(\frac{\omega}{2}\right) = R^0\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{\omega}{2} < N_{(2)\max}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{2(mg)^2 A \omega g}{I}. \quad (12.25)$$

Весьма существенно, что мощность $N_{(2)\max}(\omega/2)$ оказывается обычно значительно меньше мощности $N_{\max}(\omega)$, отвечающей основному режиму вращения $\dot{\varphi}^0 = \omega$. Так, в условиях примера, приведенного в § 6, и при $I = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ находим $N_{(2)\max} = 2 \cdot 10^2 \cdot 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot 314 \cdot 9,81 \approx 1600 \text{ Н} \cdot \text{м/с} \approx 1,6 \text{ кВт}$, в то время как в § 6 для основного режима получилось 800 кВт.

Соответственно и полоса захватывания для режима $\dot{\varphi}^0 = \omega/2$ обычно значительно уже, чем для режима $\dot{\varphi}^0 = \omega$. Для увеличения мощности $N_{(2)\max}$ и расширения полосы захватывания (а также области существования кратно-синхронных движений вибровозбудителей при их самосинхронизации) можно снабдить возбудитель пружиной (рис. 20), один конец которой шарнирно прикреплен к ротору на некотором расстоянии от оси вращения, а другой — к основанию [16, 59]. Для такого устройства величина g в выражении (12.24) заменяется на $(mg + T_0)/m$, где T_0 — среднее натяжение пружины (или на T_0/m , если плоскость вращения ротора горизонтальна). В результате модуль вибрационного момента может быть значительно увеличен, что и приводит к желаемому эффекту. Возможны и другие способы усиления тенденции роторов к кратной синхронизации, также основанные, в сущности, на усилении колебаний ротора с частотой 2ω ; роль этих колебаний вытекает из исследований, изложенных в работах [16, 57].

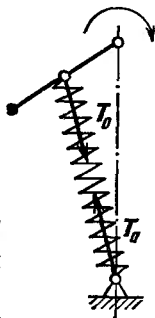


Рис. 20.

Задача о вибрационном поддержании вращения неуравновешенного ротора рассмотрена Н. Н. Боголюбовым [68], а затем в расширенной постановке — автором [31, 32, 42]; здесь были кратко изложены результаты этих последних работ. В книге [57] изучен также случай планетарного вибровозбудителя и сопоставлены результаты решения рассмотренных задач как задач самосинхронизации и как задач о принудительной синхронизации (захватывании). Показано, что результаты совпадают при условии, что в качестве закона колебаний оси ротора при реше-

нии задачи о захватывании принимается закон колебаний, возбуждаемых всеми прочими возбудителями при их синхронном движении. Заметим, что к такому выводу нетрудно прийти, анализируя структуру соответствующего выражения для вибрационного момента (см. формулы (4.20), (8.45), (8.61) и т. п.).

После работ [31, 32, 69] в СССР и за рубежом появился также и ряд других интересных исследований эффекта вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора. Обзор этих частично уже упоминавшихся исследований приводится в книге [57]; из дальнейших публикаций укажем на работу И. И. Быховского [80], в которой изучено вибрационное поддержание вращения неуравновешенного ротора с эксцентрично присоединенным маятником, т. е. двойного физического маятника.

§ 13. Экспериментальное подтверждение и исследование эффектов самосинхронизации вибровозбудителей и вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора

Как отмечалось в § 3, явления самосинхронизации механических вибровозбудителей и вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора были обнаружены именно в ходе эксперимента в результате случайного наблюдения [232]. Это наблюдение послужило толчком для теоретического объяснения и математического описания указанных явлений [31, 32], в результате чего были установлены новые закономерности и выявлены возможности важных практических приложений. В результате возникли необходимость тщательной экспериментальной проверки основных результатов разработанной теории, а также изучения вопросов, существенных при проектировании вибрационных машин, но не получивших полного разрешения в рамках теоретического исследования.

Такие эксперименты и были выполнены в институте «Механобр» и ряде других организаций на специально созданных вибрационных стендах, а также на моделях и промышленных образцах вибрационных машин.

Общий вид одного из стендов, спроектированного и изготовленного в институте «Механобр», представлен на рис. 21. Его основной частью является жесткий вибрирующий орган 1 (несущее тело), выполненный в виде трубы. В трубе размещены три дебалансных вибровозбудителя 2 с горизонтальными осями (рис. 21, а). При этом средний дебалансный возбудитель может быть легко заменен планетарным; рис. 21, б отвечает случаю, когда такой планетарный возбудитель образуют два симметрично расположенных стакана 9, в которые могут свободно вкладываться цилиндрические ролики. Ось среднего возбудителя проходит

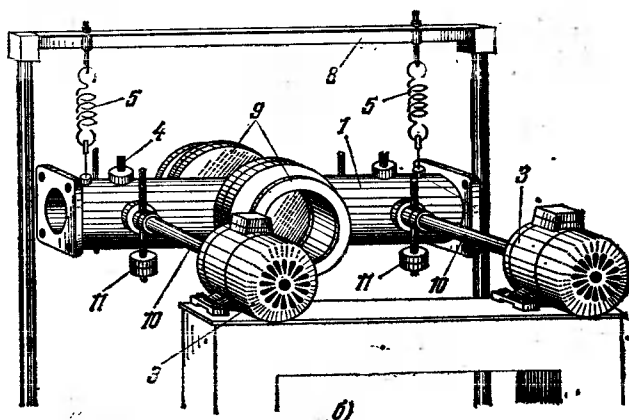
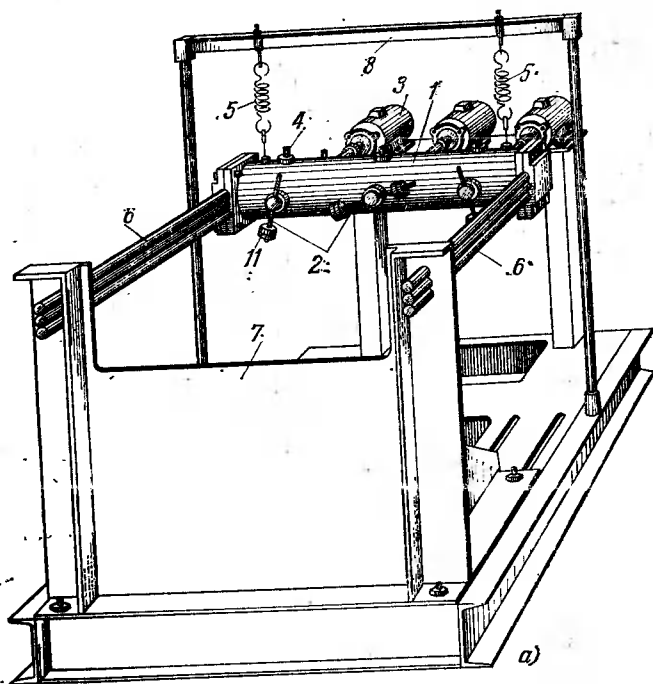


Рис. 21.

через центр тяжести вибрирующего органа, а оси крайних лежат в одной плоскости с осью среднего и равноудалены от нее.

Дебалансные возбудители приводятся во вращение от установленных на раме асинхронных электродвигателей 3 через гибкие резиновые валики 10. Неуровновешенные грузы дебалансных возбудителей выполнены в виде круглых шайб 11, имеющих в центральной части отверстия с резьбой. Меняя расположение шайб на радиальных стержнях — винтах, укрепленных на роторах возбудителей, можно легко изменять в широких пределах их статические моменты. Каждый из дебалансных возбудителей снабжен специальными тормозами 4, посредством которых можно изменять момент сопротивления вращению ротора и тем самым его парциальную угловую скорость.

Вибрирующий орган (несущее тело) подвешен к раме 8 на двух пружинах 5, жесткость которых выбрана настолько малой, чтобы частоты свободных колебаний вибрирующего органа были значительно ниже угловой скорости вращения роторов возбудителей. Кроме того, вибрирующий орган может связываться с рамой системой упругих стержней 6 круглого поперечного сечения. Активную длину стержней можно легко изменять, перемещая кронштейн 6 вдоль рамы. Это позволяет варьировать жесткость упругой системы и тем самым частоты свободных колебаний вибрирующего органа в достаточно широких пределах.

При горизонтальном расположении осей упругих стержней, показанном на рис. 21, а, вибрирующий орган имеет три существенные степени свободы, так как он может произвольным образом перемещаться в вертикальной плоскости. Установка допускает, однако, возможность вертикального расположения осей стержней; при этом вибрирующий орган, ввиду горизонтального расположения осей возбудителей, имеет всего лишь одну существенную степень свободы, отвечающую перемещению вдоль оси трубы, т. е. в направлении, перпендикулярном осям стержней.

В ходе экспериментов вращающиеся роторы возбудителей наблюдались в стробоскопическом освещении с регулируемой частотой вспышек. При совпадении частоты вспышек с частотой вращения вала последний казался неподвижным. Такой метод позволял не только следить за одинаковостью средних скоростей вращения роторов (т. е. констатировать самосинхронизацию или ее отсутствие), но и наблюдать за фазами вращения роторов. Кроме того, для получения более точных и объективных данных работающая установка фотографировалась с весьма малыми экспозициями; при этом на снимках получалось почти не «размытое» изображение дебалансов.

Одна из серий опытов относилась к случаю *самосинхронизации двух одинаковых дебалансных возбудителей*, симметрично расположенных на мягко амортизированном вибрирующем орга-

не. Как было установлено теоретическим путем (см. п. 2 § 10 и п. 2 табл. 2), при вращении роторов в одинаковых направлениях в случае выполнения неравенства

$$Mr^2/I > 2 \quad (13.1)$$

устойчивым является синфазное вращение роторов, приводящее к круговым поступательным колебаниям вибрирующего органа, а при выполнении противоположного неравенства — противофазное вращение, которому отвечают чисто поворотные колебания вибрирующего органа. В случае вращении роторов в противоположных направлениях устойчивым всегда является только противофазное вращение, обуславливающее прямолинейные поступательные колебания вибрирующего органа в

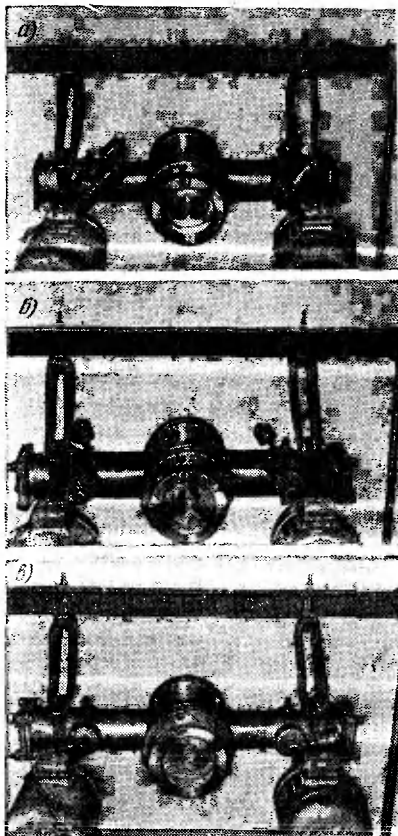


Рис. 22.

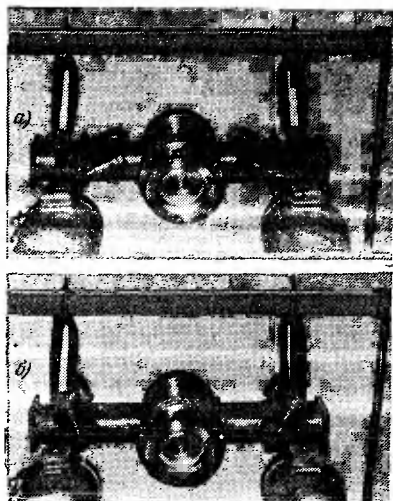


Рис. 23.

направлении, перпендикулярном плоскости осей вращения роторов.

Все упомянутые результаты полностью подтвердились экспериментально.

На рис. 22 и 23 представлены снимки работающей установки *), полученные при экспозиции $1/2500$ секунды (частота вращения роторов составляла около 1500 об/мин). Рис. 22, а—в соответствуют случаю вращения роторов в одинаковых направлениях ($\sigma_1\sigma_2 = 1$). При этом в условиях рис. 22, а и б соотношение (13.1) выполняется, а в условиях рис. 22, в — не выполняется; рис. 22, а отвечает обоим включенным в сеть двигателям возбудителей, а рис. 22, б — только одному включенному двигателю: вращение ротора с включенным двигателем в данном случае устойчиво поддерживается благодаря колебаниям вибрирующего органа установки, т. е. здесь имеет место явление вибрационного поддержания вращения.

В условиях рис. 23 роторы вращаются в различных направлениях ($\sigma_1\sigma_2 = -1$), причем рис. 23, а соответствует обоим включенным в сеть двигателям, а рис. 23, б — одному включенному двигателю.

Как видно из приведенных фотоснимков, фазировка вращения роторов во всех случаях полностью соответствует найденной теоретическим путем. Выключение двигателя одного из двух работающих возбудителей из сети в условиях опытов, как это и должно было получаться согласно теории, приводило лишь к небольшому уменьшению угловой скорости синхронного вращения роторов и к весьма небольшому нарушению синфазности (или противофазности) вращения. Синхронное вращение ротора с выключенным двигателем могло продолжаться неограниченно долго.

При отключенных тормозных устройствах и весьма близких парциальных угловых скоростях возбудителей наблюдался весьма резкий переход от устойчивого синфазного вращения роторов к устойчивому противофазному вращению при нарушении неравенства (13.1). Так, если при $Mr^2/(2I) = 1,03$ наблюдалось синфазное вращение, то уже при $Mr^2/(2I) = 0,97$ имело место противофазное вращение.

Другая серия опытов имела своей целью проверку результатов теоретического исследования *вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора*, приведенных в §§ 6 и 12. Опыты проводились следующим образом. Первоначально включались двигатели обоих возбудителей. Затем после установления стационарного режима синхронного вращения один из двигателей выключался. При некоторых сочетаниях параметров возбудитель с выключенным двигателем продолжал работать синхронно с другим, включенным в сеть, в других случаях — останавливался. Путем непрерывного изменения статических моментов возбудителей фиксировалась граница области существования эффекта

*) В варианте установки, показанном на рис. 22 и 23, пружинные подвески 5 вибрирующего органа, изображенные на рис. 21, заменены мягкими резиновыми жгутами, что существенного значения не имеет.

вибрационного поддержания вращения. Последняя с точностью до погрешностей совпала с определяемой формулами типа (6.12) и (12.12).

На описанной установке изучались и проверялись также закономерности *самосинхронизации трех дебалансных вибровозбудителей*, в частности, условие устойчивости, приведенное в п. 17 табл. 2. Проводилась также скоростная киносъемка вращающихся дебалансных грузов вибровозбудителей, благодаря которой удалось проследить за изменением фаз вращения роторов в стационарном режиме, протекающих с удвоенной и утроенной частотами по отношению к синхронной частоте вращения. Наличие колебаний с такими частотами согласуется с теоретическими результатами [57] и объясняет значительный шум и быстрый износ зубчатых зацеплений, цепных передач и других средств принудительной кинематической синхронизации вибровозбудителей в случае их применения. Машины с самосинхронизирующимися вибровозбудителями лишены этих недостатков.

Посредством скоростной киносъемки были изучены также *режимы установления синхронного вращения вибровозбудителей*, а также *эффект вибрационного возбуждения и поддержания вращения роликов планетарных вибровозбудителей*. Основным результатом экспериментов, проведенных как на экспериментальных установках, так и на вибрационных машинах с дебалансными вибровозбудителями, приводимыми от серийных номинально одинаковых асинхронных короткозамкнутых электродвигателей, состоит в том, что самосинхронизация всегда устанавливалась через весьма непродолжительный промежуток времени после включения двигателей, если только выполнялись условия существования и устойчивости (в малом) установившегося синхронного движения, вытекающие из результатов теоретического исследования.

Таким образом, условия самовозбуждения синхронных движений (захвата в синхронный режим) в данном случае оказались не «жестче», чем соответствующие условия существования и устойчивости установившихся режимов. Этот результат весьма важен с точки зрения возможностей практического использования самосинхронизации вибровозбудителей.

Другой существенный экспериментальный факт состоит в том, что в случае дебалансных вибровозбудителей вибрационное поддержание вращения неуравновешенного ротора, как правило, не является самовозбуждающимся. Иными словами, если включить двигатели некоторых возбудителей машины или установки, то прочие (не включенные) возбудители обычно не затягиваются в режим синхронного вращения, несмотря на то что он существует и устойчив (в малом): после установления синхронного вращения всех роторов, например в результате включения на

некоторое время их двигателей или надлежащего «толчка» ротора, один или несколько двигателей могут быть отключены и несмотря на это не выйдут из синхронизма. Таким образом, в случае дебалансных возбудителей выполнение условий существования и устойчивости (в малом) вибрационного поддержания вращения, как правило, еще не обеспечивает установления вращения при произвольных начальных условиях. Исключение составляют лишь случаи, когда амплитуда стационарных колебаний оси ротора имеет примерно тот же порядок, что и приведенная длина соответствующего неуравновешенному ротору физического маятника. Однако такие случаи на практике могут встретиться крайне редко: обычно амплитуды колебаний вибрирующего органа машины не менее чем в 5—10 раз меньше эксцентриситетов роторов.

Напротив, в случае планетарных вибровозбудителей оказалось, что основной режим стационарного движения ролика практически самовозбуждается во всей области его существования.

Помимо рассмотренных выше опытов, более полно описанных в книге [57], различными авторами выполнено также большое число других экспериментальных исследований как на специально созданных стендах и установках, так и на лабораторных и промышленных образцах машин с самосинхронизирующимися вибровозбудителями (см., например, [116, 164, 172, 223, 299, 307, 320, 323]). В частности, ряд таких исследований проведен на универсальном вибрационном стенде, описанном в п. 1 § 15.

Из рассмотрения всей совокупности выполненных работ вытекает, что изложенная в данной главе теория синхронизации механических вибровозбудителей и вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора хорошо подтверждается экспериментом и является достаточно надежной основой технических расчетов при проектировании вибрационных машин и устройств.

§ 14. Основные закономерности и парадоксы самосинхронизации вибровозбудителей *)

1. Тенденция дебалансных вибровозбудителей к синхронизации, вибрационное поддержание вращения. Дебалансные вибровозбудители с достаточно близкими положительными парциальными скоростями ω_* , установленные в некоторой колебательной системе с достаточно слабой диссипацией, обнаруживают тенденцию к синхронизации: в этом случае непременно существует хотя

*) Здесь приводится краткая сводка важнейших закономерностей и парадоксов самосинхронизации механических вибровозбудителей, которые были описаны в настоящей главе.

бы одно устойчивое в малом синхронное движение. Иными словами, если валы дебалансных возбудителей, приводимых от двигателей асинхронного типа, будучи установленными на неподвижном основании, вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, то такие возбудители непременно будут самосинхронизироваться при установке в соответствующей системе колеблющихся тел.

Вместе с тем при определенных условиях самосинхронизация возможна и при сильной диссипации в колебательной системе, а также при резко различающихся парциальных скоростях ω_s , в частности, в случае, когда некоторые из $\omega_s = 0$, что соответствует выключенным из сети двигателям соответствующих возбудителей. В данном случае имеет место эффект вибрационного поддержания вращения неуравновешенных роторов; этот эффект наблюдается при соответствующих условиях и в случае планетарных возбудителей.

Более того, возможна самосинхронизация вибровозбудителей с отрицательными парциальными скоростями ω_s , когда двигатели некоторых из возбудителей работают в генераторном режиме, оказавшись втянутыми во вращение, направление которого противоположно направлению их вращения на неподвижном основании.

2. Эффект усреднения парциальных скоростей. При самосинхронизации дебалансных вибровозбудителей в условиях, указанных в начале п. 1, угловая скорость синхронного вращения ω не больше, чем наибольшая и не меньше, чем наименьшая парциальные частоты ω_s и может быть с достаточной точностью найдена по формуле

$$\omega = \frac{k_1 \omega_1 + \dots + k_k \omega_k}{k_1 + \dots + k_k}, \quad (14.1)$$

где $k_s > 0$ — суммарные коэффициенты демпфирования возбудителей.

Сказанное распространяется на все виды механических вибровозбудителей, представленных на рис. 10, кроме планетарных.

3. Эффект передачи больших мощностей. Выравнивание парциальных угловых скоростей вибровозбудителей при их самосинхронизации можно трактовать как результат передачи мощности через колебательную систему от «более быстрых» возбудителей к «более медленным». В частности, при выключенном из сети (или отсутствующем) двигателе возбудителя энергия, необходимая для поддержания вращения его ротора, передается от возбудителей со включенными двигателями через колебательную систему. Для практических приложений явления самосинхронизации и эффекта вибрационного поддержания вращения первостепенное значение имеет тот факт, что указанная мощность

может быть реально достаточно велика: она имеет порядок произведения амплитуды вынуждающей силы F , развиваемой возбудителем, на так называемую эффективную амплитуду колебаний оси возбудителя A и на синхронную угловую скорость ω . В случае круговых колебаний оси возбудителя и при совпадении направления движения оси по круговой траектории с направлением вращения ротора эффективная амплитуда равна радиусу траектории колебаний оси, а в случае прямолинейных гармонических колебаний оси — половине амплитуды этих колебаний. В частности, при $F = m\varepsilon\omega^2 = 10^6$ Н, $A = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м и $\omega = 314$ с⁻¹ (вполне реальные для современных вибрационных устройств значения) максимально возможная передаваемая мощность составляет около 800 кВт (см. пример в п. 1 § 6).

4. Установление определенных соотношений между фазами движения инерционных элементов возбудителей. В устойчивых синхронных движениях возбудителей устанавливаются некоторые вполне определенные значения начальных фаз движения инерционных элементов возбудителей α_i (при внутренней синхронизации, в частности, при самосинхронизации, значения разностей начальных фаз $\alpha_i - \alpha_k$). В ряде случаев, особенно при большом числе возбудителей, таких устойчивых (в малом) фазировок может быть несколько.

5. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений. В случае самосинхронизации возбудителей (кроме планетарных) с одинаковыми парциальными скоростями и при слабой диссипации энергии в колебательной системе устойчивые в малом фазировки соответствуют точкам грубого минимума относительно разностей начальных фаз $\alpha_i - \alpha_k$, средней за период функции Лагранжа колебательной части системы, вычисленной в порождающем приближении *). Во многих других случаях устойчивые фазировки соответствуют точкам грубого минимума несколько более сложной по структуре функции фаз α_i — так называемой потенциальной функции D — или некоторым близким точкам.

6. Эффект взаимного уравнивания (принцип минимума средней кинетической энергии) при установке возбудителей на мягко амортизированном твердом теле **) (обобщенный принцип Лавалля). При установке нескольких дебалансных вибровозбудителей с одинаковыми положительными парциальными угловыми скоростями на мягко амортизированном твердом теле и при слабой диссипации непременно существует устойчивое (в малом) синхронное движение, при котором неуравновешенные силы и моменты, генерируемые возбудителями, взаимно компенсируются

*) О понятии грубого минимума см. § 8 гл. 10.

**) См. примечание 2) в п. 3 § 10.

в том смысле, что усредненная за период кинетическая энергия тела принимает минимальное значение. В частности, если в принципе возможна такая фазировка возбудителей, при которой имеет место полная взаимная компенсация неуравновешенных сил и моментов, то именно эта фазировка, которой соответствует нулевое значение кинетической энергии, и является устойчивой; твердое тело при этом практически не совершает колебаний. Указанную фазировку назовем *компенсирующей*.

Описанная закономерность, вытекающая из сформулированной в п. 3, распространяется также и на многие иные типы механических возбудителей и приближенно справедлива в случае возбудителей с мало отличающимися положительными парциальными скоростями, а также в случае планетарных возбудителей. Она существенна при проектировании групповых фундаментов под неуравновешенные машины и устройства (см. п. 2 § 15), а также устройств для автоматической балансировки неуравновешенных роторов (см. гл. 4).

Заметим также, что эту закономерность можно рассматривать как своеобразное обобщение известного принципа Лавалля, состоящего в самоуравновешивании диска, сидящего на гибком валу, в послекритической области (см., например, [30]). Конечно, по отношению к рассматриваемой системе с вибровозбудителями случай вала с диском является весьма частным и вырожденным *).

7. Парадокс неработающих связей. При синхронизации механических вибровозбудителей с одинаковыми положительными парциальными скоростями могут существовать и быть устойчивыми синхронные движения, при которых система связи «не работает». Эффект, описанный в предыдущем пункте, когда несущее твердое тело в синхронном движении неподвижно, является частным случаем данной закономерности.

Может создаться ошибочное впечатление, что связи в подобных случаях не выполняют никаких функций и вовсе не нужны для синхронизации. На самом же деле при случайном возмущении движения, например при изменении какой-либо из фаз α , устойчивой компенсирующей фазировки возбудителей, система связи «включается» и «работает» до тех пор, пока возмущение не затухает. Так в случае, описанном в п. 6, при возмущении движения возникнут колебания твердого тела, которые не прекратятся до тех пор, пока фазировка возбудителей вновь не станет компенсирующей.

*) О другом интересном обобщении принципа Лавалля — на случай вращающегося на струнном подвесе твердого тела — см. работу [192].

Описанная закономерность вполне аналогична наблюдавшейся и объясненной Х. Гюйгенсом в случае синхронизации маятниковых часов (см. Введение и гл. 5).

8. Зависимость характера устойчивой фазировки возбудителей от числа степеней свободы системы связей. Характер устойчивой фазировки вибровозбудителей может существенно измениться при изменении числа существенных степеней свободы системы несущих тел или системы несомых связей. Так, например, присоединение к несущему телу, на котором установлены вибровозбудители, дополнительного груза на пружине, маятника и т. п. может привести к тому, что устойчивое синфазное движение возбудителей станет неустойчивым, а неустойчивое противофазное движение — устойчивым, и наоборот (см. п. 2 § 11). Подобным образом характер устойчивой фазировки возбудителей обычно изменяется, в частности, при переходе угловой скорости ω из одного диапазона между частотами свободных колебаний несущей системы в соседний диапазон; это характерно, например, для системы, представленной в п. 19 табл. 2 (подробнее см. [57, 329]).

9. Парадокс принуждения. Этот парадокс хорошо иллюстрируется примером, приведенным в п. 2 § 11 (см. рис. 17). Когда в условиях указанного примера для обеспечения вертикальных колебаний твердого тела, установленного на мягких пружинах, используются вертикальные направляющие, то устойчивой оказывается компенсирующая фазировка двух возбудителей с противоположно вращающимися роторами. При отсутствии же направляющих, т. е. своего рода принуждения, устойчивой оказывается такая фазировка, которая как раз обеспечивает нужные колебания тела.

Данный парадокс можно рассматривать как частное проявление закономерности, о которой сказано в предыдущем пункте.

10. Зависимость характера устойчивой фазировки от числа возбудителей. Как явствует из примера, приведенного в п. 2 § 11, характер фазировки вибровозбудителей в устойчивом синхронном движении может существенно измениться при добавлении еще одного возбудителя. Эта закономерность, так же как и отмеченная в п. 8, может быть использована при синтезе устройств с самосинхронизирующимися вибровозбудителями (см. п. 2 § 11).

11. Ухудшение условий самосинхронизации и вибрационного поддержания вращения для кратно-синхронных режимов. Области существования и устойчивости, а также области притяжения в случаях кратной самосинхронизации вибровозбудителей и вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора обычно (при отсутствии специальных устройств) значительно уже, чем в случаях простой самосинхронизации и поддержания вращения (см., например, § 12).

§ 15. Практическое использование явления самосинхронизации вибровозбудителей и эффекта вибрационного поддержания вращения

1. Создание нового класса вибрационных машин и устройств.

Обнаружение явления самосинхронизации механических вибровозбудителей и разработка его теории привели к созданию нового класса вибрационных машин и устройств, имеющих существенные технико-экономические и эксплуатационные достоинства. Такие машины серийно выпускаются как в нашей стране, так и за рубежом.

Наиболее широкое распространение в настоящее время получили вибрационные машины с двумя самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями, осуществленные по схемам, представленным в пп. 2—15 табл. 2.

На рис. 24 представлены фотоснимки вибрационных грохотов — машин для разделения сыпучих материалов на две или несколько фракций по крупности. Такие машины широко применяются на обогатительных фабриках, в доменных цехах, на предприятиях промышленности строительных материалов и в ряде других производств. Основным рабочим элементом грохота является закрепленное в специальном коробе сито или колосниковая решетка, на которой под действием вибрации как раз и происходит просеивание и одновременное транспортирование материала. Коробам грохотов, представленных на фотоснимке, сообщаются прямолинейные поступательные гармонические колебания под некоторым углом по отношению к плоскости сита. Такие колебания обеспечиваются двумя самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями [35], причем в грохоте, показанном на рис. 24, а, последние размещены согласно плоской динамической схеме п. 7 табл. 2, а в грохоте, показанном на рис. 24, б, — по так называемой «пространственной» схеме, соответствующей п. 12 табл. 2.

По последней схеме осуществлен также вибрационный конвейер, изображенный на рис. 25. Транспортирование сыпучего материала по трубе этого конвейера также происходит под действием прямолинейных поступательных гармонических колебаний трубы, происходящих под некоторым острым углом по отношению к ее оси.

Вибрационные конвейеры-подъемники с двумя самосинхронизирующимися вибровозбудителями представлены на рис. 26; они осуществлены по схеме п. 15 табл. 2. Винтовые колебания обеспечивают здесь перемещение сыпучего материала вверх по винтовой поверхности.

Применение самосинхронизирующихся вибровозбудителей в описанных машинах вместо ранее использовавшихся кинематиче-

ски синхронизированных позволяет не только устранить весьма нежелательные для применения в вибрационных устройствах зубчатые зацепления или цепные передачи, но и обеспечить ряд других преимуществ, например сделать машины типа изображенных на рис. 24, б и 25 более пригодными для работы на горячих

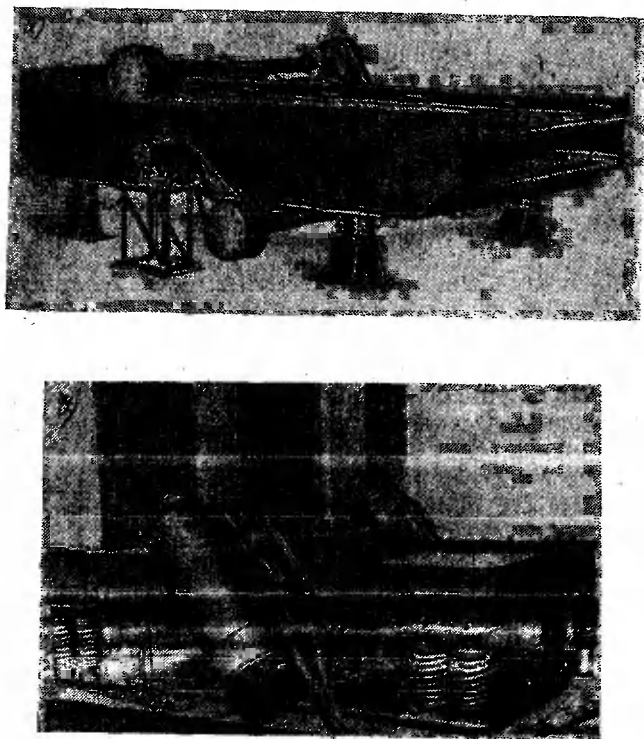


Рис. 24.

материалах; расположить возбудители, если это необходимо, на значительных расстояниях один от другого; создать устройства с легко изменяемым характером колебаний рабочего органа и т. п.

Примерами успешного использования этих возможностей могут служить своеобразные грохоты, представленные на рис. 27 и 28, а также вибрационный стенд и вибрационная шаровая мельница, изображенные на рис. 29 и 30.

Первый грохот [104] представляет собой мягко амортизированную раму 1, на которой симметрично размещены два деба-

лансных вибровозбудителя 2. К раме посредством наклонных рессор 3 крепится некоторое число сит 4 (на рис. 27 изображено четыре сита). Рессоры являются мягкими в поперечном направлении, но весьма жесткими в продольном, так что они задают решетам определенное направление поступательных колебаний, тогда как рама под действием вибровозбудителей совершает вертикальные колебания: как устанавливается в результате исследования, именно такое синхронное движение в данной системе является устойчивым подобно тому, как оно устойчиво в более простой системе, представленной в п. 2, а табл. 2.

Другой грохот — так называемый гранулометр (рис. 28) — предназначен для автоматического контроля

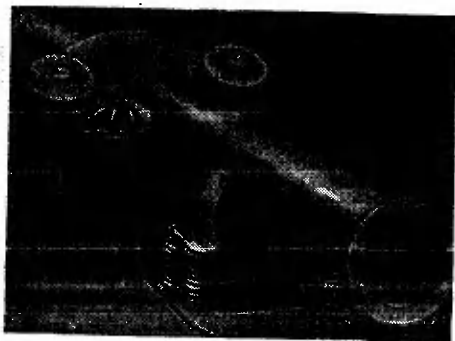


Рис. 25.

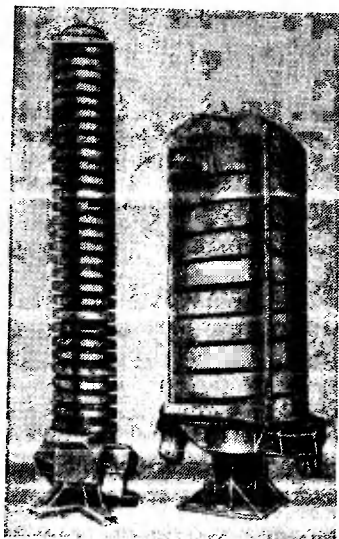


Рис. 26.

крупности дробленой руды [267]. В его корпусе 1 размещены два сита 2 и 3, выполненные в виде полувитков винтовой поверхности с вертикальной осью. По краям сит имеются щели для прохода материала. На корпусе гранулометра, установленного на мягких виброизолирующих пружинах, размещены две пары дебалансных вибровозбудителей 4, которые приводятся от независимых асинхронных электродвигателей 5. Одновременно включаются двигатели только одной пары возбудителей, т. е. двух возбудителей, расположенных на противоположных сторонах корпуса по схеме п. 15 табл. 2. При этом возбудители самосинхронизируются и обеспечивают винтовые колебания корпуса, приводящие к движению материала вверх по ситам при работе одной пары возбудителей и вниз по ситам при работе другой пары (различное направление движения обеспечивается соответствующим наклоном скрещивающихся осей пар возбудителей). Выключение

одной и включение другой пары возбудителей производится специальным автоматическим устройством.

Работа прибора происходит следующим образом. После поступления пробы руды включается пара возбудителей, обеспечивающая движение материала вверх по винтовым поверхностям

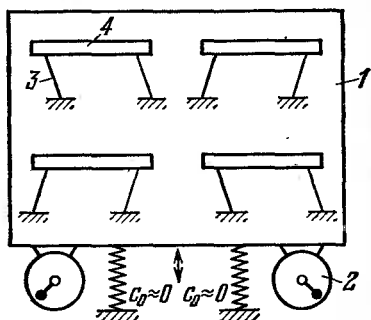


Рис. 27.

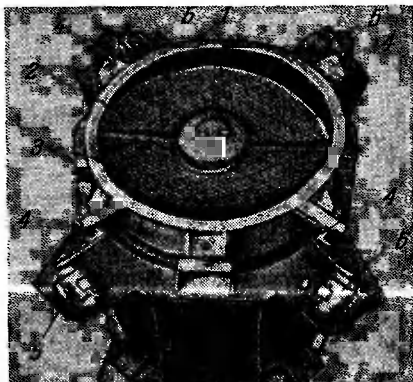


Рис. 28.

сит. При этом, покидая одно сито, материал попадает на другое и т. д. По истечении определенного промежутка времени, необходимого для достаточно полного просеивания мелкой фракции, эта фракция, попавшая в специальный бункер, автоматически взвешивается, а ее вес запоминается логическим устройством. Затем первая пара возбудителей выключается и включается вторая пара, обеспечивающая движение оставшегося на ситах крупного материала в противоположном направлении, т. е. вниз. При этом, достигая краев сит, материал сквозь радиальные щели сыпается в бункер, после чего взвешивается вся проба в целом. Вес пробы также поступает в логическое устройство, которое выдает сигнал, пропорциональный отношению веса мелкой фракции к весу всей пробы. Этот сигнал подается затем на вторичный прибор, шкала которого отградуирована в процентах контролируемого класса крупности материала.

Фотоснимок универсального вибрационного стенда [55] с пультом управления представлен на рис. 29, а. На этом стенде путем простой перенастройки можно получать колебания стола стенда, имеющие самый разнообразный характер, что весьма удобно при изучении различных вибрационных процессов, в частности вибротранспортирования, грохочения, вибросепарации, виброуплотнения, вибробункеризации и многих других. Для пояснения принципа, лежащего в основе этого стенда, рассмотрим

схему, представленную в п. 15 табл. 2. Предположим, что оси вращения роторов вибровозбудителей могут быть произвольным образом повернуты вокруг перпендикулярной им прямой AB и затем зафиксированы. Тогда очевидно, что путем надлежащего поворота осей, выбора соответствующих направлений вращения

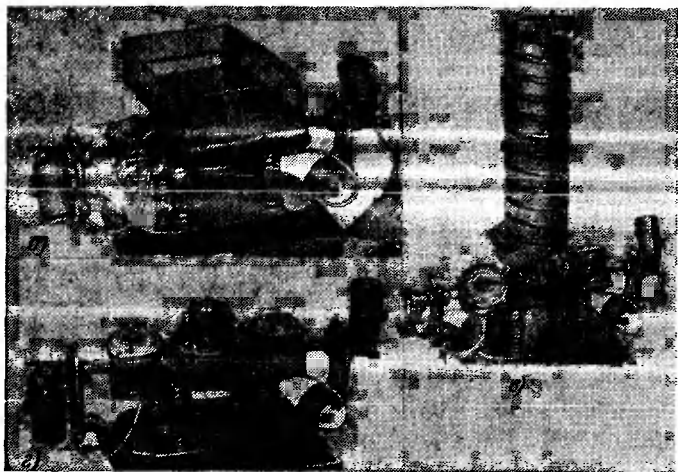


Рис. 29.

роторов и, возможно, некоторого перераспределения масс твердого тела можно будет легко перейти от схемы п. 15 табл. 2, например, к схемам пп. 2 и 12 этой таблицы. В результате окажется возможным получать следующие виды колебаний стола стэнда:

а) прямолинейные поступательные колебания, направленные под любым углом к горизонту;

б) круговые поступательные колебания, параллельные произвольным образом ориентированной плоскости;

в) поворотные колебания относительно оси, наклоненной под любым углом к горизонту;

г) винтовые колебания, ось которых может иметь произвольное направление в пространстве, а шаг изменяется в широких пределах;

д) сложные колебания, при которых траекториями точек являются произвольным образом ориентированные эллипсы.

Возможности получения различных полей колебаний стола стэнда могут быть еще более расширены, если обеспечить поворот и фиксирование осей роторов не только относительно прямой AB , но и относительно осей, перпендикулярных к AB и к осям роторов. Заметим также, что к поворотному столу стэнда можно присоединять планетарные вибровозбудители, а также различные колебательные системы, получая таким образом схемы, подобные изображенным в пп. 9 и 21 табл. 2 (см., например, фотоснимок

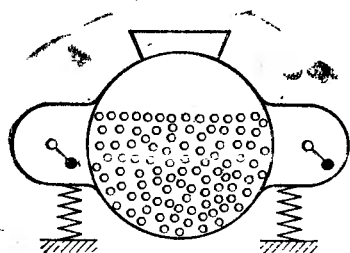


Рис. 30.

на рис. 29, б—г, где изображены установленные на стенде модели вибротранспортирующих устройств, отвечающие схемам пп. 12 и 15 табл. 2, и конусной инерционной дробилки по схеме п. 21 табл. 2; о последней будет сказано ниже).

Изменение частоты и амплитуд колебаний стола стэнда может быть достигнуто обычными средствами.

Представленная на рис. 30 вибрационная шаровая мельница [37, 172] состоит из мягко амортизированного корпуса, в котором размещен цилиндрический барабан, заполненный мелющими телами. Корпусу сообщаются круговые поступательные колебания посредством двух одинаковых дебалансных вибровозбудителей, роторы которых вращаются в одинаковых направлениях (см. схему п. 2, б табл. 2). Вследствие этих колебаний и происходит измельчение материала, находящегося в барабане с шаровой загрузкой. Преимущество этой машины по сравнению с мельницами, приводимыми от одного центрально расположенного вибровозбудителя, состоит в том, что ее камера не загромождена этим возбудителем; кроме того, появляется возможность снижения нагрузки на подшипники возбудителей. При исследовании самосинхронизации вибровозбудителей в вибромельнице, как правило, необходимо учитывать реологические свойства загрузки (см. п. 6 табл. 2).

Особый род устройств образуют вибрационные дробильно-измельчительные машины, в которых внутренний планетарный виб-

ровозбудитель, не имеющий двигателя, используется в качестве дробящего или измельчающего тела; обкатка ролика этого возбудителя по стакану обеспечивается за счет явления вибрационного поддержания вращения, которое, как отмечалось, представляет собой частный случай самосинхронизации. Схема одного из видов подобных устройств представлена в п. 21 табл. 2: два одинаковых дебалансных вибровозбудителя, роторы которых вращаются в одинаковых направлениях, симметрично размещены здесь в мягко амортизированном

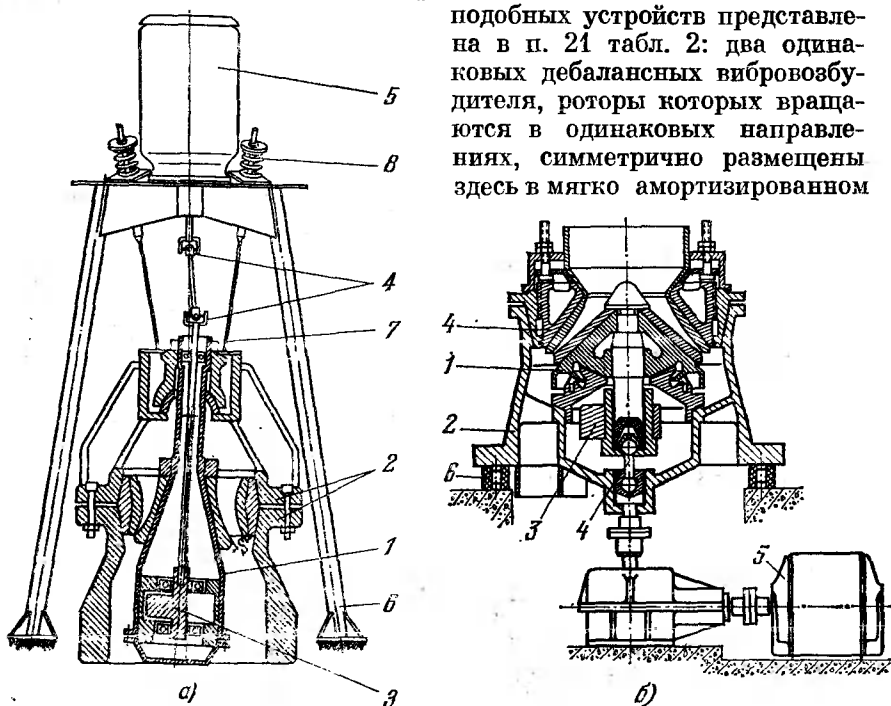


Рис. 31.

корпусе машины: в центральной части машины расположен стакан, в который вложен массивный ролик, обкатывающийся в синхронном движении по стакану и измельчающий подаваемую в стакан руду. По указанной схеме осуществлен ряд машин — мельниц, инерционных дробилок и других (см., например, [57]).

К рассматриваемому типу машин относится и так называемая инерционная конусная дробилка [139, 250—252], схематический разрез одного из вариантов которой представлен на рис. 31, а, а фотоснимок — на рис. 32; упрощенная («плоская») схема дробилки соответствует представленной в п. 20 табл. 2. Дробящий конус машины 1 (рис. 31) включает в себе дебалансный вибровозбудитель 3, приводимый от электродвигателя 5, установленного на опорной раме 6, через карданный вал 4. Корпус дробилки

ки 2 подвешен к раме на мягких пружинно-тросовых подвесках 7, 8, благодаря чему машина является практически полностью уравновешенной; имеются конструкции, в которых та же цель достигается посредством установки корпуса на резинопневматические виброизоляторы 6 (рис. 31, б).

Дробление руды осуществляется в кольцевой полости между наружной поверхностью конуса и внутренней поверхностью корпуса.

В нормальном установившемся режиме работы дробилки ось конуса вращается вокруг оси корпуса с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения вала дебаланса; при этом конус контактирует с корпусом либо непосредственно, либо через слой руды в рабочей полости. Направление отклонения оси конуса в установившемся режиме совпадает (с точностью до некоторого острого угла) с направлением вектора-эксцентриситета дебаланса. Поэтому суммарное дробящее усилие развивается не только за счет центробежной силы инерции вращающегося дебаланса, но также и за счет центробежной силы, возникающей при прецессионном движении конуса.



Рис. 32.

Дробилка работает при числе оборотов в минуту вала дебаланса, значительно превышающем число качаний конуса в обычных конусных дробилках, в которых движение конуса обеспечивается не вибровозбудителем, а эксцентриковым механизмом. Это об-

стоятельство в сочетании со значительными дробящими усилиями и особенностями конструктивной схемы машины, обеспечивает получение в данной дробилке степеней измельчения материала, значительно превышающих достигаемые в обычных дробилках.

Более подробное описание конструкции и технологических особенностей дробилки, разработанной в институте «Механобр», можно найти в работах [251, 252], см. также [57]. Здесь отметим лишь, что конус дробилки можно рассматривать как несущее твердое тело, а корпус — как кольцо внешнего планетарного вибровозбудителя, лишенного приводного электродвигателя. То обстоятельство, что роль корпуса возбудителя играет внутреннее

тело (конус дробилки), а место ролика занимает корпус, не имеет в данном случае решающего значения. В соответствии со сказанным, условиями существования и устойчивости нормального режима работы дробилки являются условия существования и устойчивости синхронного движения обоих вибровозбудителей дробилки — дебалансного и планетарного, или, поскольку последний возбудитель лишен двигателя — условия вибрационного поддержания движения планетарного возбудителя. Соответствующие условия, полученные для «плоской» схемы дробилки, приведены в п. 20 табл. 2.

Приведенными примерами далеко не исчерпываются случаи успешного практического использования эффектов синхронизации и вибрационного поддержания вращения в вибрационной технике. Более подробные сведения можно найти в книге [57], а также в работах [42, 164, 166, 215].

2. Приложение к проектированию групповых фундаментов под неуравновешенные машины. В последние годы все большее распространение получают единые (групповые) фундаменты под несколько однотипных неуравновешенных машин, которые жестко связаны с фундаментом и приводятся от двигателей асинхронного типа. Расчет таких фундаментов основывается, как правило, на допущении, что фазы неуравновешенных сил, развиваемых машинами, носят случайный характер, и поэтому влияния неуравновешенностей отдельных машин в определенной степени взаимно компенсируются [255, 290]. Между тем известны случаи, когда вопреки ожиданиям возникала синхронная и синфазная работа машин, что приводило к аварийным состояниям. С точки зрения изложенных выше закономерностей самосинхронизации вибровозбудителей такие ситуации понятны: при определенных условиях машины обнаруживают тенденцию к синхронному вращению, причем не со случайным, а вполне определенным соотношением фаз. При этом в одних случаях фазы могут оказаться близкими или совпадающими (именно такой случай, по-видимому, имел место при упомянутых аварийных ситуациях), а в других — такими, что влияние неуравновешенностей взаимно компенсируется.

Изложенные выше результаты теории синхронизации позволяют подойти к вопросу о том, в каких случаях вибрационная связь между машинами слаба, так что их самосинхронизация практически маловероятна, и поэтому можно пользоваться обычными рекомендациями по расчету групповых фундаментов, и когда, напротив, вибрационная связь сильна и необходимо считаться с возможностью самосинхронизации. В последнем случае фундамент и установку машин на нем следует проектировать так, чтобы происходила взаимная компенсация, а не усиление влияния неуравновешенностей.

Ориентировочные рекомендации этого рода, основанные на изложенном в п. 4 § 9 и в § 14, приведены в табл. 3, представляющей собой соответствующим образом дополненную табл. 1; приводимая таблица предложена в работе [64].

В этой таблице через k_{ω} и κ_{ω} обозначены введенные в п. 2 § 9 коэффициенты, характеризующие относительную силу вибрационной связи. Более предпочтительной является оценка ситуации по значению коэффициента κ_{ω} и лишь в случае отсутствия

Таблица 3

Ориентировочные рекомендации по учету явления самосинхронизации при проектировании групповых фундаментов под неуравновешенные машины

Соотношение между частотами $p_{\min}$, $p_{\max}$ и ω	Интервалы значений коэффициентов κ_{ω} и k_{ω}		
	$0 < \kappa < 0,05$ $0 < k_{\omega} < 0,01$ (очень слабая вибрационная связь)	$0,05 < \kappa_{\omega} < 1$ $0,01 < k_{\omega} < 0,2$ (сравнительно слабая или сравнительно сильная вибрационная связь)	$\kappa_{\omega} > 1$ $k_{\omega} > 0,2$ (сильная вибрационная связь)
$\omega > p_{\max}$ (послерезонансная область)	—	—+0	+0
$p_{\min} < \omega < p_{\max}$ (межрезонансная область)	—	+0 или У	+0 или У
$\omega < p_{\min}$ (дорезонансная область)	—	+У	+У

необходимых данных можно ограничиться весьма просто вычисляемым коэффициентом k_{ω} . Как отмечалось в § 9, случаю очень слабой вибрационной связи $\kappa_{\omega} < 0,05$; $k_{\omega} < 0,01$ соответствует вероятность самосинхронизации, меньшая 10%, а случаю очень сильной связи $\kappa_{\omega} > 1$; $k_{\omega} > 0,2$ — более 90% (см. табл. 1).

Через ω в таблице, как и ранее, обозначена синхронная угловая скорость (частота), которую можно считать совпадающей с номинальной скоростью вращения валов машин. Через $p_{\min}$ и $p_{\max}$ обозначены соответственно наименьшая и наибольшая частоты свободных колебаний фундамента с машинами. Знак «—» указывает, что расчет рекомендуется производить без учета вибрационной связи, знак «+» указывает, что эту связь необходимо учитывать, а знак «—+» указывает, что расчет можно производить без учета вибрационной связи, однако он может дать сильно завышенные значения амплитуд колебаний. Буквами О и У в таблице отмечены случаи, когда при наступлении самосинхронизации эффекты от действия отдельных неуравновешенностей соответственно ослабляются или усиливаются, причем усиление или ослабление понимается в смысле величины среднего за пе-

риод значения кинетической энергии колебаний фундамента. Благодаря эффекту взаимного уравнивания возбудителей, установленных на мягко амортизированном твердом теле (п. 6 § 14), ослабление колебаний в указанном смысле будет иметь место в случае «мягкой» установки фундамента на основании ($\omega > p_{\max}$). При этом в случае возможности такой фазировки валов в синхронном движении, при которой имеет место полное взаимное уравнивание (так называемой *компенсирующей фазировки*), машины будут обнаруживать тенденцию именно к такому полному взаимному уравниванию. В данном случае понятие «ослабление колебаний» в смысле уменьшения средней кинетической энергии будет примерно совпадать с обычным. В случае же, когда компенсирующая фазировка невозможна (этот случай характерен для двух машин, аналогичных дебалансным возбудителям; см. п. 2, а табл. 2), указанные понятия могут не совпадать.

Из сказанного следует, в частности, вывод о том, что при проектировании групповых фундаментов под неуравновешенные машины следует стремиться к тому, чтобы машины в принципе могли взаимно уравниваться при синхронном движении и чтобы установка фундамента на основание была мягкой.

Использование указанных рекомендаций на примере системы, схема которой соответствует представленной в п. 14 табл. 2, дается в книге [57]. Там же можно найти детальные расчеты и рассмотрение случая машин, приводимых от синхронных электродвигателей. В работе [158] рассмотрена задача о самосинхронизации неуравновешенных машин, развивающих полигармоническую возмущающую силу и установленных на фундаменте с одной степенью свободы, к которому присоединены динамические поглотители колебаний.

Глава 4

СИНХРОНИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ, РОДСТВЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИМ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯМ

§ 1. Предварительные замечания

В настоящей главе рассматриваются задачи динамики ряда технических устройств с вращающимися роторами, в частности, автоматических балансиров и гибких валов с неуравновешенными дисками. Во всех этих устройствах явления синхронизации играют весьма заметную, а иногда и первостепенную роль.

Несмотря на существенные внешние отличия рассматриваемые системы в принципиальном отношении имеют много общего с системами, содержащими механические вибровозбудители; как и последние, их можно отнести к орбитальным системам (см. § 6 гл. 12) и к системам с почти равномерными вращательными движениями (см. § 4 гл. 12). Поэтому здесь оказываются непосредственно применимыми основные результаты, полученные в гл. 3, и справедливы многие установленные в указанной главе закономерности.

§ 2. Автобалансир

Одна из возможных конструктивных форм балансира для автоматической компенсации дебаланса вращающихся дисков схематически представлена на рис. 33. На гибком вращающемся валу 1 закреплен диск 2, центр тяжести которого C не лежит на оси вала AO_1B . Диск имеет залитую маслом цилиндрическую или тороидальную полость, ось которой совпадает с касательной к оси вала в точке крепления диска O_1 . В полость помещены два шарика 3, которые при определенных условиях располагаются во вращающемся диске таким образом, что компенсируют дебаланс диска и тем самым устраняют колебания вала и передачу динамических нагрузок на его опоры.

В иных конструктивных вариантах автобалансира вместо полости в диске и шариков имеются либо кольца, надетые на вал с большим зазором, либо рычажки, один из концов которых связан со свободно поворачивающейся на валу втулкой, а другой несет неуравновешенный груз.

Описанные автобалансиры были изобретены Е. Сирлем [332, 333] и находят применение в машинах типа центрифуг; они особенно эффективны в случаях, когда дебаланс ротора может несколько изменяться в процессе работы машины.

Элементы теории автобалансира приведены в книгах Ден-Гартога [113] и Я. Г. Пановко [225], а подробное исследование его динамики выполнено Ф. М. Детинко [119]; в несколько иной постановке задача рассмотрена А. И. Муйжниеком [205].

Уравнения движения системы с шариковым автобалансиром и одним неуравновешенным диском, сидящим посередине невесомого вала, имеют вид *) [119]

$$\ddot{\varphi}_s + \beta_0 (\dot{\varphi}_s - \omega) = \frac{1}{R} (\ddot{x} \sin \varphi_s + \ddot{y} \cos \varphi_s) \quad (s = 1, \dots, k); \quad (2.1)$$

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = \mathcal{M}r\omega^2 \cos \omega t + mR \sum_{s=1}^k (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s), \quad (2.2)$$

$$M\ddot{y} + \beta\dot{y} + cy = -\mathcal{M}r\omega^2 \sin \omega t + mR \sum_{s=1}^k (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s).$$

Здесь (рис. 34) x и y — координаты центра диска O_1 в неподвижной системе осей xOy , начало которой находится в точке пересечения плоскости диска с осью подшипников; φ_s — отсчитываемый по ходу часовой стрелки угол между прямой, соединяющей центр диска O_1 с центром s -го шарика, и направлением оси Ox ; $\mathcal{M}$ — масса диска, m — масса шарика, $M = \mathcal{M} + km$ — масса всей системы; r — эксцентриситет диска; R — расстояние от центра шариков до оси вала; ω — угловая скорость вращения вала, β_0 и β — коэффициенты вязкого сопротивления, c — жесткость вала на изгиб по отношению к силе, приложенной в точке O_1 .

*) Нами используются обозначения, несколько отличные от обозначений цитируемой работы; кроме того, мы считаем для общности число шариков k произвольным.

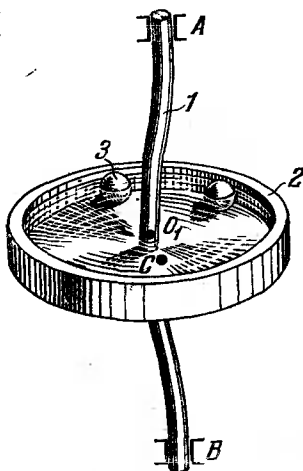


Рис. 33.

Особый интерес при исследовании динамики автобалансира представляет выяснение условий существования и устойчивости таких решений системы дифференциальных уравнений (2.1), (2.2), в которых $x(\omega t) \equiv y(\omega t) \equiv 0$ (или, по крайней мере, остаются достаточно малыми), т. е. решений, отвечающих самоуравновешиванию системы, когда колебания вала отсутствуют.

Сформулированная выше задача динамики автобалансира и была по существу рассмотрена в статье Ф. М. Детинко [119] с помощью методов, отличных от используемых в данной работе. Ф. М. Детинко изучил также и значительно более сложный случай, когда вал имеет распределенный по длине небаланс и несет произвольное число n неуравновешенных дисков с двумя шариками каждый; при этом имеется n групп уравнений типа (2.1), а уравнения (2.2) заменяются уравнениями в частных производных.

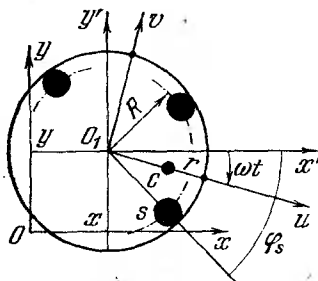


Рис. 34.

Здесь мы приведем решение задачи об автобалансире, как задачи о синхронизации шариков в полости диска [57]. Представим уравнения (2.1) и (2.2) в виде

$$\ddot{\varphi}_s + \beta_0(\dot{\varphi}_s - \omega) = \mu\omega^2\Phi(\varphi_s, \ddot{x}, \ddot{y}) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (2.3)$$

$$M\ddot{x} + cx = mR \sum_{s=1}^k (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s) + \mathcal{M}r\omega^2 \cos \omega t - \mu\beta' \ddot{x}, \quad (2.4)$$

$$M\ddot{y} + cy = mR \sum_{s=1}^k (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s) - \mathcal{M}r\omega^2 \sin \omega t - \mu\beta' \ddot{y},$$

где обозначено

$$\mu\Phi(\varphi_s, \ddot{x}, \ddot{y}) = \frac{1}{R\omega^2} (\ddot{x} \sin \varphi_s + \ddot{y} \cos \varphi_s), \quad \mu\beta' = \beta, \quad (2.5)$$

причем величину $\mu > 0$ будем рассматривать как малый параметр; основания для этого вполне аналогичны указанным в § 4 гл. 3 при рассмотрении задачи о синхронизации вибровозбудителей.

В соответствии со сказанным ранее будем интересоваться решениями уравнений (2.3) и (2.4), имеющими вид

$$\varphi_s = \omega t + \alpha_s + \mu\psi_s^*(\omega t), \quad x = x(\omega t), \quad y = y(\omega t), \quad (2.6)$$

где ψ_s^* , x и y — периодические функции времени t с периодом $2\pi/\omega$, а α_s — постоянные; при этом, как отмечалось, наиболее

интересны решения, в которых «начальные фазы» α_s таковы, что $x \approx 0$ и $y \approx 0$, т. е. имеет место самоуравновешивание.

Поставленная задача представляет собой частный случай задач о синхронизации объектов с почти равномерными вращательными движениями, рассмотренных в § 4 гл. 12 и в § 8 гл. 3: уравнения (2.3), (2.4) и решения (2.6) относятся соответственно к тому же типу, что и уравнения (4.2), (4.3) и решения (4.1) гл. 12.

Соответствующая уравнениям (2.3) и (2.4) порождающая система при $p^2 = c/M \neq \omega^2$ (рассматривается нерезонансный случай) допускает следующее семейство решений вида (4.5), (4.6) гл. 12:

$$\begin{aligned}\varphi_s^0 &= \omega t + \alpha_s, \\ x^0 &= wR \left[\eta \cos \omega t + \sum_{j=1}^k \cos(\omega t + \alpha_j) \right], \\ y^0 &= -wR \left[\eta \sin \omega t + \sum_{j=1}^k \sin(\omega t + \alpha_j) \right],\end{aligned}\quad (2.7)$$

зависящее от k произвольных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Здесь обозначено

$$\eta = \frac{\mathcal{M}r}{mR}, \quad w = \frac{m}{\mathcal{M}} \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2}, \quad p^2 = \frac{c}{M}. \quad (2.8)$$

Составим теперь *основные уравнения* (4.6) гл. 12 для определения значений параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, которым могут отвечать решения вида (2.6). В соответствии с равенствами (2.5) и (2.7) указанные уравнения можно записать в форме

$$\begin{aligned}P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \omega) &\equiv \frac{\mu\omega^2}{\beta_0} \langle \Phi(\varphi_s^0, \ddot{x}^0, \ddot{y}^0) \rangle \equiv \\ &\equiv \frac{i}{\beta_0 R} \int_0^{2\pi/\omega} (\ddot{x}^0 \sin \varphi_s^0 + \ddot{y}^0 \cos \varphi_s^0) dt \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\beta_0} w \left[\eta \sin \alpha_s + \sum_{j=1}^k \sin(\alpha_s - \alpha_j) \right] = 0 \quad (2.9) \\ &\quad (s = 1, \dots, k).\end{aligned}$$

Эти уравнения непременно допускают решения относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, удовлетворяющие условиям

$$\eta + \sum_{j=1}^k \cos \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=1}^k \sin \alpha_j = 0, \quad (2.10)$$

при выполнении которых, как следует из (2.7), колебания вала в первом приближении отсутствуют, т. е.

$$x^0(\omega t) = y^0(\omega t) = 0. \quad (2.11)$$

Поэтому основной интерес представляет, во-первых, установление условий устойчивости движений, отвечающих решениям типа (2.10), и, во-вторых, выяснение вопроса, не будут ли одновременно с указанными движениями устойчивы также и другие движения, которым отвечают решения уравнений (2.9), не удовлетворяющие условиям (2.10). Как нетрудно видеть, эти последние решения всегда имеются.

Решения уравнений (2.9), удовлетворяющие условиям (2.10), а также соответствующие движения для краткости назовем *основными*, а все прочие решения (и движения) — *побочными*.

Ответ на вопрос об устойчивости решений, соответствующих какому-либо решению уравнений (2.9), зависит от знаков вещественных частей корней алгебраического уравнения (2.12) гл. 12.

Рассмотрим сначала случай двух шариков в полости диска. При $k = 2$ уравнения (2.9) принимают вид

$$\begin{aligned} P_1(\alpha_1, \alpha_2, \omega) &\equiv -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\beta_0} w [\eta \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] = 0, \\ P_2(\alpha_1, \alpha_2, \omega) &\equiv -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\beta_0} w [\eta \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Эти уравнения допускают, вообще говоря, четыре следующих существенно различных решения (очевидно, можно не различать решения, в которых соответствующие α_1 и α_2 отличаются на $2\pi n$, где n — целое число, а также, поскольку шарики считаются одинаковыми, решения, в которых значения α_1 и α_2 меняются местами):

$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha_1^{(1)} = \pi - \gamma, \quad \alpha_2^{(1)} = -(\pi - \gamma); \\ 2) \quad & \alpha_1^{(2)} = 0, \quad \alpha_2^{(2)} = 0; \\ 3) \quad & \alpha_1^{(3)} = \pi, \quad \alpha_2^{(3)} = \pi; \\ 4) \quad & \alpha_1^{(4)} = 0, \quad \alpha_2^{(4)} = \pi; \end{aligned} \quad (2.13)$$

здесь $\gamma = \arccos \frac{\eta r}{2} = \arccos \frac{\mathcal{M}r}{2mR}$.

Только первое из указанных решений удовлетворяет условиям отсутствия колебаний вала (2.10). Иначе говоря, лишь первое решение является основным; прочие решения суть побочные. Условием существования основного решения является выполнение неравенства

$$\frac{\eta}{2} = \frac{\mathcal{M}r}{2mR} < 1, \quad (2.14)$$

которое выражает очевидное требование, чтобы максимальный статический момент обоих шариков относительно оси вала был больше статического момента диска относительно той же оси.

Взаимное расположение центров шариков c_1 и c_2 , центра вала в недеформированном состоянии O и при движении O_1 , а также центра тяжести диска C для каждого из четырех решений.

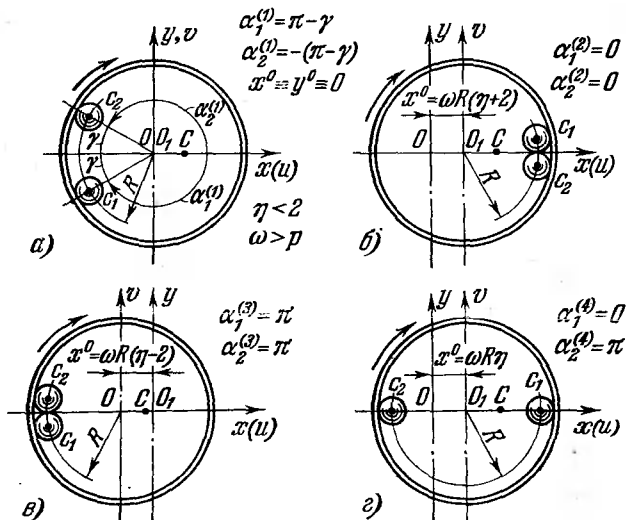


Рис. 35.

(2.13) представлены на рис. 35, а)–г). Построение выполнено в соответствии с формулами (2.13) и (2.7) для момента времени $t = 0$; произвольному моменту времени отвечает поворот диска с шариками и связанной с диском системы координат uO_1v на угол $\varphi_0 = \omega t$.

Обратимся к исследованию устойчивости решений (2.13). Уравнение (2.12) гл. 12 в данном случае может быть представлено в форме

$$\kappa^2 + A\kappa + B = 0, \quad (2.15)$$

где в силу (2.12)

$$A = - \left(\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{\omega^2 w}{2\beta_0} [\eta (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + 2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2)],$$

$$B = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1} \right) =$$

$$= \frac{\omega^4 w^2 \eta}{4\beta_0^2} [\eta \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \cos (\alpha_1 - \alpha_2)]$$

Достаточными условиями существования и асимптотической устойчивости движений рассматриваемого типа, отвечающих решениям (2.13), являются неравенства *)

$$A > 0, \quad B > 0. \quad (2.17)$$

Для первого, основного решения (2.13) по формулам (2.16) находим

$$A = A^{(1)} = \frac{\omega^2 w}{\beta_0} (-\eta \cos \gamma + \cos 2\gamma) = -\frac{\omega^2 w}{\beta_0},$$

$$B = B^{(1)} = \frac{\omega^4 w^2 \eta}{4\beta_0^2} (\eta \cos^2 \gamma - 2 \cos \gamma \cos 2\gamma) = \left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right) \frac{\omega^4 w^2 \eta^2}{4\beta_0^2}. \quad (2.18)$$

Согласно (2.14) величина B всегда положительна внутри области существования рассматриваемого решения; что же касается величины A , то условие ее положительности приводит к требованию $w < 0$ или согласно (2.8) — к неравенству

$$\omega > p = \sqrt{c/M}. \quad (2.19)$$

Таким образом, основное движение, т. е. движение, при котором вал не колеблется вследствие компенсации неуравновешенности диска воздействием шариков, устойчиво в закритической области.

Для трех побочных движений (2.13) по формулам (2.16) находим

$$A^{(2)} = \frac{\omega^2 w}{\beta_0} (1 + \eta), \quad E^{(2)} = \frac{\omega^4 w^2 \eta}{4\beta_0^2} (2 + \eta),$$

$$A^{(3)} = \frac{\omega^2 w}{\beta_0} (1 - \eta), \quad B^{(3)} = \frac{\omega^4 w^2 \eta}{4\beta_0^2} (\eta - 2), \quad (2.20)$$

$$A^{(4)} = -\frac{\omega^2 w}{\beta_0}, \quad B^{(4)} = \frac{\omega^4 w^2 \eta^2}{4\beta_0^2}.$$

Отсюда следует, что второе решение устойчиво лишь в докритической области (т. е. при $\omega < p$); третье решение устойчиво только в закритической области (т. е. при $\omega > p$) и притом лишь в случае, если $\eta > 2$; последнее, четвертое решение вообще неустойчиво. Таким образом, при выполнении условия (2.14), гарантирующего существование основного решения, это решение в закритической зоне является единственным устойчивым решением рассматриваемого типа. При докритических же скоростях

*) Строго говоря, к неравенствам (2.17), как и в задаче о синхронизации вибровозбудителей, следует присоединить также некоторые дополнительные условия устойчивости (см. § 4 гл. 3). Однако и в данном случае эти условия существенного значения при достаточном удалении от резонанса не имеют.

вращения вала это решение неустойчиво. Сказанное предопределяет область эффективного применения изученных автобалансиров.

Таким образом, на рассмотренную систему в сущности распространяется широко известный результат решения классической задачи о самоуравновешивании несбалансированного диска без шариков (см., например, [30]); этот результат выше был назван принципом Лавала (см. п. 6 § 14 гл. 3).

Полученные выше выводы согласуются с результатами, найденными Ф. М. Детинко иными методами [119], и в определенном смысле дополняют эти результаты. (В цитированной работе не рассматривается вопрос об устойчивости побочных решений, а устойчивость основного решения изучается при нескольких конкретных значениях параметра η ; вместе с тем там решена также и более сложная задача о вале с распределенным по длине небалансом.)

Поскольку автобалансир справляется со своей задачей уже при числе шариков, равном двум, то нет надобности прибегать к использованию большего числа шариков. С другой стороны, при $k > 2$ исследование существенно усложняется, ибо в этом случае решения уравнений (2.10) (а значит, и основных уравнений (2.9)) перестают быть изолированными. Это является отражением того обстоятельства, что при числе шариков k , большем двух, и выполнении условия, аналогичного неравенству (2.14), уравнивание диска возможно при любом фиксированном положении $k-2$ шариков за счет выбора положений двух прочих шариков.

Заметим в заключение, что и в рассматриваемой задаче из общих соотношений § 4 гл. 12, а также § 8 гл. 3 может быть легко получен простой интегральный признак устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений, причем роль потенциальной функции играет функция Лагранжа, соответствующая колебаниям на валу полностью уравновешенного диска, к оси которого присоединены массы шариков; при этом функция Лагранжа вычисляется в порождающем приближении:

$$D = \Lambda^{(I)} = \langle (T^{(I)} - \Pi^{(I)}) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} M [(\dot{x}^0)^2 + (\dot{y}^0)^2] - \frac{1}{2} c [(x^0)^2 + (y^0)^2] \right\rangle. \quad (2.21)$$

Производя усреднение при учете выражений (2.7) и формул (4.17) гл. 3, получаем

$$D = \Lambda^{(I)} = -M \frac{m\omega^2 R^2}{\mathcal{A}} w \left[\eta \sum_{s=1}^k \cos \alpha_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \cos (\alpha_s - \alpha_j) \right]. \quad (2.22)$$

Сопоставляя этот результат с полученным для задачи о синхронизации вибровозбудителей (см. формулу (5.23) гл. 3), следует иметь в виду, что в рассматриваемом здесь случае по существу имеется как бы $k+1$ вибровозбудителей — один неуравновешенный диск и k шариков.

Напомним, что согласно интегральному критерию устойчивые движения соответствуют точкам грубых минимумов функции D ; из этого условия, как нетрудно видеть, получаются основные уравнения (2.9), а также и соответствующие условия устойчивости.

Нетрудно заметить, что из сформулированного интегрального критерия устойчивости непосредственно вытекает вывод о самоуравновешивании системы далеко в закритической области, где потенциальной энергией $\Pi^{(1)}$ в выражении (2.21) можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией $T^{(1)}$. Этот вывод вполне согласуется со следствием из интегрального критерия устойчивости в задаче о самосинхронизации вибровозбудителей, изложенным в § 5 и в п. 6 § 14 гл. 3, т. е. с закономерностью, названной нами *обобщенным принципом Лаваля*.

§ 3. Ротор с маятниковыми подвесками

Для теории ряда устройств представляет интерес задача о стационарном движении сидящего на вертикальном валу диска, к которому присоединены два физических маятника с осями

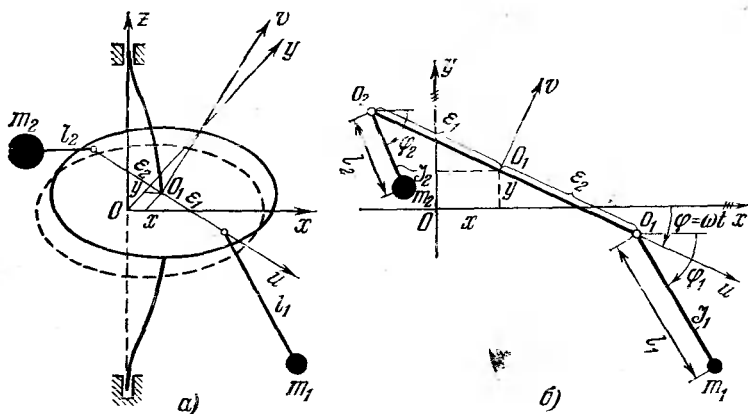


Рис. 36.

вращения, перпендикулярными к плоскости диска (рис. 36, а). Особый интерес при этом представляет отыскание условий существования и устойчивости такого движения системы диск — маятники, при котором маятники взаимно уравнивают друг друга

так что центр диска остается неподвижным в пространстве и, таким образом, на подшипники вала и на неподвижное основание не передается неуравновешенных усилий.

Задача о движении ротора с двумя маятниковыми подвесками была рассмотрена Л. И. Мачабели [190] путем сведения ее к задаче о синхронизации объектов с почти равномерными вращательными движениями. Результаты цитированной работы и воспроизводятся нами ниже с несущественными видоизменениями. Исправлен также ряд опечаток, вкравшихся в указанную публикацию.

Динамическая схема системы показана на рис. 36, б. Предполагается, что диск сам по себе статически и динамически уравновешен и закреплен посредине вала, так что центр диска O_1 может совершать колебания только в плоскости диска. Тогда в предположении, что вращение диска является равномерным, рассматриваемая система имеет четыре степени свободы и ее движение может быть описано в неподвижной системе координат xOy двумя уравнениями колебаний маятников с учетом подвижности их осей и двумя уравнениями малых колебаний диска с учетом реакций, возникающих от наличия маятников:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 \dot{\varphi}_1 - m_1 l_1 (\ddot{x} \sin \varphi_1 + \ddot{y} \cos \varphi_1) + \\ + m_1 \varepsilon_1 l_1 \omega^2 \sin (\varphi_1 - \omega t) = 0, \quad (3.1)$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_2 \dot{\varphi}_2 - m_2 l_2 (\ddot{x} \sin \varphi_2 + \ddot{y} \cos \varphi_2) - \\ - m_2 \varepsilon_2 l_2 \omega^2 \sin (\varphi_2 - \omega t) = 0,$$

$$M \ddot{x} + cx - s \omega^2 \cos \omega t - m_1 l_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) - \\ - m_2 l_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) = 0, \quad (3.2)$$

$$M \ddot{y} + cy + s \omega^2 \sin \omega t - m_1 l_1 (\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1) - \\ - m_2 l_2 (\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2) = 0.$$

Здесь x и y — координаты центра тяжести диска; φ_1 и φ_2 — углы поворота маятников, отсчитываемые от положительного направления оси Ox по ходу часовой стрелки; m — масса диска; m_1 и m_2 — массы маятников; $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ — моменты инерции маятников относительно их осей; l_1 и l_2 — расстояния от осей маятников до их центров тяжести; ε_1 и ε_2 — расстояния от центра диска до осей маятников (эксцентриситеты подвески маятников); k_1 и k_2 — коэффициенты вязкого сопротивления вращению маятников; c — изгибная жесткость вала; ω — угловая скорость вращения диска; $M = m + m_1 + m_2$ — масса всей системы,

$$I_1 = \mathcal{I}_1 + m_1 \varepsilon_1^2, \quad I_2 = \mathcal{I}_2 + m_2 \varepsilon_2^2, \quad s = m_1 \varepsilon_1 - m_2 \varepsilon_2. \quad (3.3)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} \mu\omega^2\Phi_1(\varphi_1, \ddot{x}, \ddot{y}, \omega t) = \\ = m_1 l_1 (\ddot{x} \sin \varphi_1 + \ddot{y} \cos \varphi_1) - m_1 \varepsilon_1 l_1 \omega^2 \sin(\varphi_1 - \omega t) - k_1 \omega, \\ \mu\omega^2\Phi_2(\varphi_2, \ddot{x}, \ddot{y}, \omega t) = \\ = m_2 l_2 (\ddot{x} \sin \varphi_2 + \ddot{y} \cos \varphi_2) - m_2 \varepsilon_2 l_2 \omega^2 \sin(\varphi_2 - \omega t) - k_2 \omega, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где μ — положительный малый параметр*), можно представить уравнения движения маятников (3.1) в форме

$$I_s \ddot{\varphi}_s + k_s (\dot{\varphi}_s - \omega) = \mu\omega^2 \Phi_s(\varphi_s, \ddot{x}, \ddot{y}, \omega t) \quad (s=1, 2). \quad (3.5)$$

Интерес при этом представляют решения вида

$$\begin{aligned} \varphi_s = \omega t + \alpha_s + \mu \psi_s^*(\omega t) \quad (s=1, 2), \\ x = x(\omega t), \quad y = y(\omega t), \end{aligned} \quad (3.6),$$

где $\psi_s^*(\omega t)$, $x(\omega t)$, $y(\omega t)$ — периодические функции времени t с периодом $2\pi/\omega$. Поскольку уравнения (3.2), (3.5) и решения (3.6) соответствуют по своему виду уравнениям (4.2), (4.3) и решениям (4.1) гл. 12, то, как и в предыдущем параграфе, здесь можно воспользоваться результатами исследования синхронизации в системах с почти равномерными вращательными движениями.

Отвечающая уравнениям (3.2) и (3.5) порождающая система допускает семейство синхронных решений

$$\begin{aligned} \varphi_1^0 = \omega t + \alpha_1, \quad \varphi_2^0 = \omega t + \alpha_2; \\ x^0 = w[a \cos \omega t + b_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + b_2 \cos(\omega t + \alpha_2)], \\ y^0 = \dot{x}^0/\omega = -w[a \sin \omega t + b_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + b_2 \sin(\omega t + \alpha_2)], \end{aligned} \quad (3.7)$$

зависящее от двух произвольных постоянных α_1 и α_2 ; по своему смыслу эти постоянные, очевидно, представляют собой углы отклонения маятников от прямой $o_1 o_2$, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω .

В равенствах (3.7) обозначено

$$\begin{aligned} w = \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2}, \quad p^2 = \frac{c}{M}, \quad a = \frac{s}{M}, \\ b_1 = \frac{m_1 b_1}{M}, \quad b_2 = \frac{m_2 l_2}{M}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

*) Мы не останавливаемся здесь на обосновании способа введения малого параметра, ибо он вполне аналогичен многократно использовавшемуся выше.

Составим теперь основные уравнения (4.6) гл. 12 для определения значений параметров α_1 и α_2 , которым могут отвечать решения уравнений (3.5) и (3.2) вида (3.6). В соответствии с равенствами (3.4) и (3.7) эти уравнения могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned}
 P_1(\alpha_1, \alpha_2) &\equiv \frac{\mu\omega^2}{k_1} \langle \Phi_1(\varphi_1^0, \ddot{x}^0, \ddot{y}^0, \omega t) \rangle \equiv \\
 &\equiv \frac{1}{k_1} \langle m_1 l_1 [\ddot{x}_1^0 \sin(\omega t + \alpha_1) + \ddot{y}_1^0 \cos(\omega t + \alpha_1)] - \\
 &- m_1 l_1 \varepsilon_1 \omega^2 \sin \alpha_1 - k_1 \omega \rangle \equiv -\frac{1}{k_1} \{m_1 l_1 \omega^2 [(w a + \varepsilon_1) \sin \alpha_1 + \\
 &+ b_2 w \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] - k_1 \omega\} = 0, \\
 P_2(\alpha_1, \alpha_2) &\equiv \frac{\mu\omega^2}{k_2} \langle \Phi_2(\varphi_1^0, \ddot{x}^0, \ddot{y}^0, \omega t) \rangle \equiv \\
 &\equiv \frac{1}{k_2} \langle m_2 l_2 [\ddot{x}^0 \sin(\omega t + \alpha_2) + \ddot{y}^0 \cos(\omega t + \alpha_2)] + \\
 &+ m_2 l_2 \varepsilon_2 \omega^2 \sin \alpha_2 - k_2 \omega \rangle \equiv -\frac{1}{k_2} \{m_2 l_2 \omega^2 [(w a - \varepsilon_2) \sin \alpha_2 - \\
 &- b_1 w \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] - k_2 \omega\} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Исследование устойчивости движения, соответствующего какому-либо решению $\alpha_1 = \alpha_1^*$, $\alpha_2 = \alpha_2^*$ последних уравнений, сводится к изучению знаков вещественных частей корней квадратного уравнения (см. уравнение (2.12) гл. 12)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} - \kappa & \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} - \kappa \end{vmatrix}_{\alpha_j = \alpha_j^*} = 0. \tag{3.10}$$

В реальных системах моменты сопротивления $k_1 \omega$ и $k_2 \omega$ малы по сравнению с прочими осредненными моментами, фигурирующими в уравнениях (3.9). Поэтому можно ограничиться решением этих уравнений с точностью до членов, содержащих $k_1 \omega$ и $k_2 \omega$ в степенях не выше первой.

Нетрудно установить, что существует (с точностью до несущественной постоянной $2\pi n$, где n — любое целое число) шесть следующих решений системы (3.9):

$$\begin{aligned}
 1) \quad \alpha_1^{(1)} &\approx 0 + k_1 \omega A_1^{(1)} + k_2 \omega B_1^{(1)}, & \alpha_2^{(1)} &\approx 0 + k_1 \omega A_2^{(1)} + k_2 \omega B_2^{(1)}; \\
 2) \quad \alpha_1^{(2)} &\approx 0 + k_1 \omega A_1^{(2)} + k_2 \omega B_1^{(2)}, & \alpha_2^{(2)} &\approx \pi + k_1 \omega A_2^{(2)} + k_2 \omega B_2^{(2)}; \\
 3) \quad \alpha_1^{(3)} &\approx \pi + k_1 \omega A_1^{(3)} + k_2 \omega B_1^{(3)}, & \alpha_2^{(3)} &\approx \pi + k_1 \omega A_2^{(3)} + k_2 \omega B_2^{(3)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \alpha_1^{(4)} &\approx \pi + k_1 \omega A_1^{(4)} + k_2 \omega B_1^{(4)}, & \alpha_2^{(4)} &\approx 0 + k_1 \omega A_2^{(4)} + k_2 \omega B_2^{(4)}; \\
5) \alpha_1^{(5)} &\approx \beta + k_1 \omega A_1^{(5)} + k_2 \omega B_1^{(5)}, & \alpha_2^{(5)} &\approx \gamma + k_1 \omega A_2^{(5)} + k_2 \omega B_2^{(5)}; \\
6) \alpha_1^{(6)} &\approx -\beta + k_1 \omega A_1^{(6)} + k_2 \omega B_1^{(6)}, & \alpha_2^{(6)} &\approx -\gamma + k_1 \omega A_2^{(6)} + k_2 \omega B_2^{(6)}.
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Здесь

$$\gamma = \arccos \frac{1}{2\eta_1} \left(\frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} - 1 - \eta_1^2 \right), \quad \eta_1 = \frac{wa - \varepsilon_1}{b_2 w}, \tag{3.12}$$

$$\eta_2 = \frac{wa - \varepsilon_2}{b_1 w}, \quad \beta = \arccos \left\{ -\frac{\eta_2}{\eta_1} \left[\eta_1 + \frac{1}{2\eta_1} \left(\frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} - 1 - \eta_1^2 \right) \right] \right\}.$$

Постоянные $A_j^{(k)}$ и $B_j^{(k)}$ ($j = 1, 2; k = 1, \dots, 6$) легко находятся из уравнений (3.9) путем подстановки в них соответствующих выражений (3.11) и пренебрежения членами $k_j \omega$ в степенях выше первой.

Нетрудно видеть, что из всех решений (3.11) наибольший интерес в изучаемой задаче представляет второе решение. Действительно, если параметры системы выбраны таким образом, что выполняется соотношение

$$m_1(\varepsilon_1 + l_1) = m_2(\varepsilon_2 + l_2), \tag{3.13}$$

или, в обозначениях (3.8),

$$a + b_1 - b_2 = 0, \tag{3.14}$$

то для указанного решения отклонения центра диска x и y в соответствующем движении с точностью до малых членов порядка $k_j \omega$ равны нулю, т. е. имеет место практическое самоуравновешивание системы.

В самом деле, согласно (3.7), (3.11) и (3.14) при $\alpha_1 = \alpha_1^{(2)}$ и $\alpha_2 = \alpha_2^{(2)}$ имеем

$$\begin{aligned}
x^0/w &\approx a \cos \omega t + b_1 \cos (\omega t + k_1 \omega A_1^{(2)} + k_2 \omega B_1^{(2)}) + \\
&+ b_2 \cos (\omega t + \pi + k_1 \omega A_2^{(2)} + k_2 \omega B_2^{(2)}) \approx (a + b_1 - b_2) \cos \omega t - \\
&- b_1 (k_1 \omega A_1^{(2)} + k_2 \omega B_1^{(2)}) \sin \omega t + b_2 (k_1 \omega A_2^{(2)} + k_2 \omega B_2^{(2)}) \sin \omega t = \\
&= [b_2 (k_1 \omega A_2^{(2)} + k_2 \omega B_2^{(2)}) - b_1 (k_1 \omega A_1^{(2)} + k_2 \omega B_1^{(2)})] \sin \omega t \approx 0, \\
y^0/w &\approx -[b_2 (k_1 \omega A_2^{(2)} + k_2 \omega B_2^{(2)}) - \\
&- b_1 (k_1 \omega A_1^{(2)} + k_2 \omega B_1^{(2)})] \cos \omega t \approx 0.
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

Для всех прочих решений (3.11) величины x и y будут содержать в своих разложениях по $k_1\omega$ и $k_2\omega$ свободные члены, т. е. самоуравновешивание (в изучаемом приближении) не будет иметь места. Поэтому рассмотрим вопрос об устойчивости именно решения, отвечающего $\alpha_1 = \alpha_1^{(2)}$ и $\alpha_2 = \alpha_2^{(2)}$.

С точностью до членов, содержащих неотрицательные степени $k_1\omega$ и $k_2\omega$, для указанного решения при учете равенств (3.9) и (3.14) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{k_1} m_1 l_1 \omega^2 (w b_1 - \varepsilon_1), & \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{k_2} m_2 l_2 \omega^2 b_1 w, \\ \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{1}{k_1} m_1 l_1 \omega^2 b_2 w, & \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{k_2} m_2 l_2 \omega^2 (w b_2 - \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, условия отрицательности вещественных частей корней квадратного уравнения (3.10), совпадающие с условием положительности коэффициентов этого уравнения, могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2}\right) &= -\frac{m_1 l_1 \omega^2}{k_1} (w b_1 - \varepsilon_1) - \frac{m_2 l_2 \omega^2}{k_2} (w b_2 - \varepsilon_2) > 0, \\ \left(\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1}\right) &= \frac{m_1 l_1 m_2 l_2 \omega^4}{k_1 k_2} [(w b_1 - \varepsilon_1)(w b_2 - \varepsilon_2) - b_1 b_2 w^2] = \\ &= \frac{m_1 l_1 m_2 l_2 \omega^4}{k_1 k_2} [\varepsilon_1 \varepsilon_2 - w(b_1 \varepsilon_2 + b_2 \varepsilon_1)] > 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

После преобразований с учетом (3.8) последние неравенства принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2} &< \frac{(m_1 l_1 \varepsilon_1 k_2 + m_2 l_2 \varepsilon_2 k_1) M}{m_1^2 l_1^2 k_2 + m_2^2 l_2^2 k_1} = R_1, \\ \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2} &< \frac{M \varepsilon_1 \varepsilon_2}{m_1 l_1 \varepsilon_2 + m_2 l_2 \varepsilon_1} = R_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Условия (3.18) выполняются при

$$\omega < p \sqrt{R/(R+1)} < p,$$

где $R = \inf(R_1, R_2)$ — наименьшее из двух положительных чисел R_1 и R_2 , определяемых по формулам (3.18). Кроме того, вне зависимости от значений прочих параметров системы условия устойчивости (3.18) выполняются, если

$$\omega > p = \sqrt{c/M}, \quad (3.19)$$

т. е. если угловая скорость вращения вала ω превышает частоту собственных колебаний диска с жестко закрепленными на нем

маятниками, т. е. так называемую первую критическую скорость. Поэтому можно считать, что основное условие самобалансировки системы, так же как и для системы, рассмотренной в § 2, совпадает с соответствующим условием для классического случая — неуравновешенного диска без маятников. Иными словами, и в данном случае имеет место *обобщенный принцип Лаваля*.

§ 4. Вращающийся гибкий вал с неуравновешенными дисками

Задачу об изгибно-крутильных колебаниях вращающегося упругого вала с несколькими неуравновешенными дисками традиционно рассматривают вне связи с явлениями синхронизации (см., например, [30, 120]). Между тем, как будет показано ниже, в соответствующей системе возникают вибрационные моменты, характерные для систем с самосинхронизирующимися вибровозбудителями (см. §§ 5 и 8 гл. 3). При определенных условиях

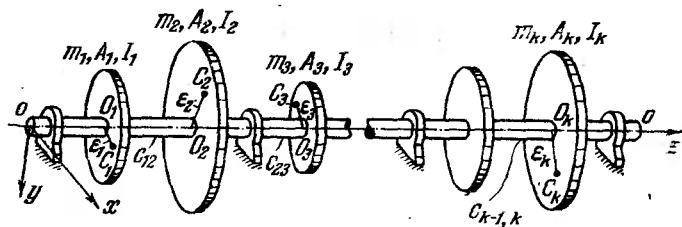


Рис. 37.

эти моменты могут оказать существенное влияние на движение вала с дисками [57].

В наиболее общем случае рассматриваемая система (рис. 37) представляет собой многоспорный вал с некоторым числом k статически и динамически неуравновешенных дисков, приводимых от каких-либо двигателей; при этом считается, что вал в процессе движения может совершать не только изгибные, но и крутильные колебания, т. е. жесткости на кручение отдельных участков вала предполагаются конечными. Опоры вала могут быть как жесткими, так и упругими, с неодинаковыми жесткостями в различных направлениях.

Будем считать, что некоторые из дисков представляют собой роторы двигателей, приводящих вал во вращение.

Пусть $Oxyz$ — неподвижная система прямоугольных координат, ось Oz которой направлена вдоль осей подшипников вала, а $O_s x_s y_s z_s$ — системы осей, параллельных соответствующим осям $Oxyz$ и имеющих начала в точках пересечения O_s плоскостей дисков с изогнутой осью вала oo (рис. 38). Пусть далее

$O_s u_s v_s w_s$ — системы осей координат, жестко связанных с дисками и совпадающих с их главными осями инерции.

Положение каждого диска определяется пятью обобщенными координатами — декартовыми координатами x_s и y_s точки O_s в неподвижной системе $Oxyz$ и тремя эйлеровыми углами α_s , β_s и φ_s , выбранными в соответствии с рис. 38: α_s — угол между осью $O_s w_s$ и плоскостью $x'_s O'_s z'_s$, β_s — угол между осью $O_s z'_s$ и проекцией оси $O_s w_s$ на плоскость $x'_s O'_s z'_s$ и, наконец, φ_s есть угол между линией n пересечения плоскости $x'_s O'_s z'_s$ с плоскостью $u_s O_s v_s$ и осью $O_s u_s$ (указанную линию обычно называют линией узлов, а угол φ_s — углом собственного вращения).

Ограничиваясь изучением случая статической неуравновешенности дисков, будем предполагать, что их центры тяжести C_s лежат на осях $O u_s$.

Если пренебречь гироскопическими членами, а также членами, имеющими относительно координат x_s , y_s , α_s , β_s и соответствующих скоростей порядок выше второго, и не учитывать влияния силы тяжести, то выражения для потенциальной и кинетической энергии системы будут

$$\Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(II)},$$

$$\Pi^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(x)} x_s x_j + c_{sj}^{(\alpha)} \alpha_s \alpha_j + 2c_{sj}^{(x\alpha)} x_s \alpha_j + c_{sj}^{(y)} y_s y_j + c_{sj}^{(\beta)} \beta_s \beta_j + 2c_{sj}^{(y\beta)} y_s \beta_j),$$

$$\Pi^{(II)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k-1} c_{s,s+1} (\varphi_{s+1} - \varphi_s - \kappa_{s+1} + \kappa_s)^2, \quad (4.1)$$

$$T = T^{(I)} + \Delta T^* + \sum_{s=1}^k T_s,$$

$$T^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k [m_s (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + A_s (\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2)], \quad (4.2)$$

$$\Delta T^* = - \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s (\dot{x}_s \cos \varphi_s + \dot{y}_s \sin \varphi_s) \dot{\varphi}_s, \quad T_s = \frac{1}{2} I_s \dot{\varphi}_s^2.$$

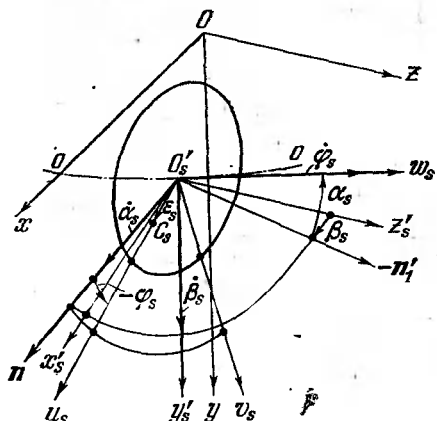


Рис. 38.

Выражение (4.2) наиболее просто может быть получено из формулы для кинетической энергии твердого тела, отвечающей общему случаю, когда за полюс принимается произвольная точка этого тела, а не обязательно его центр тяжести [174].

В равенствах (4.1) и (4.2) обозначено: m_s , ε_s , A_s и I_s — соответственно масса, эксцентриситет, экваториальный и полярный моменты инерции s -го диска; $c_{s,s+1}$ — жесткость на кручение участка вала между s -м и $(s+1)$ -м диском, причем $c_{01} = c_{k,k+1} = 0$; $c_{sj}^{(x)}$, $c_{sj}^{(y)}$, $c_{sj}^{(\alpha)}$, $c_{sj}^{(\beta)}$, $c_{sj}^{(x\alpha)}$, $c_{sj}^{(y\beta)}$ — соответствующие жесткости вала на изгиб, вычисленные с учетом податливости опор; κ_s — значения углов φ_s , при которых упругие крутящие моменты в пролетах вала равны нулю; эти углы, определенные с точностью до постоянного поворота κ_0 , характеризуют направления векторов эксцентриситетов ε_s дисков при нескрученном вале.

Дифференциальные уравнения движения системы, составленные в соответствии с равенствами (4.1) и (4.2) в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид

$$I_s \ddot{\varphi}_s = m_s \varepsilon_s (\ddot{x}_s \cos \varphi_s + \ddot{y}_s \sin \varphi_s) - c_{s-1,s} (\varphi_s - \varphi_{s-1} - \kappa_s + \kappa_{s-1}) + c_{s,s+1} (\varphi_{s+1} - \varphi_s - \kappa_{s+1} + \kappa_s) + L_s - R_s;$$

$$m_s \ddot{x}_s + \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(x)} x_j + c_{sj}^{(x\alpha)} \alpha_j) = m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s) + Q_s^{(x)},$$

$$(4.3)$$

$$m_s \ddot{y}_s + \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(y)} y_j + c_{sj}^{(y\beta)} \beta_j) = m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s) + Q_s^{(y)};$$

$$A_s \ddot{\alpha}_s + \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(\alpha)} \alpha_j + c_{sj}^{(x\alpha)} x_j) = Q_s^{(\alpha)},$$

$$A_s \ddot{\beta}_s + \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(\beta)} \beta_j + c_{sj}^{(y\beta)} y_j) = Q_s^{(\beta)} \quad (s = 1, \dots, k).$$

Здесь $Q_s^{(x)}$, $Q_s^{(y)}$, $Q_s^{(\alpha)}$ и $Q_s^{(\beta)}$ — силы и моменты внутреннего и внешнего сопротивления колебаниям вала, которые могут зависеть от всех обобщенных координат и скоростей системы, причем координаты φ_s и скорости $\dot{\varphi}_s$ входят в выражения для Q только в виде разностей $\varphi_s - \varphi_j$ и $\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_j$; L_s и R_s — соответственно вращающие моменты двигателей и моменты сил сопротивления вращению. Будем считать далее, что вал приводится во вращение от двигателей асинхронного типа, и примем, что моменты L_s и R_s определяются выражениями (4.10) и (4.11) гл. 3. Допустим также, что все частоты свободных крутильных колебаний вала с полностью уравновешенными дисками существенно

ниже угловой скорости установившегося вращения ω , а частоты изгибных колебаний в достаточной мере отличаются от $n\omega$, где n — целое положительное число *). Тогда, положив

$$\mu\Phi_s =$$

$$= m_s \varepsilon_s (\ddot{x}_s \cos \varphi_s + \ddot{y}_s \sin \varphi_s) - c_{s-1,s} (\varphi_s - \varphi_{s-1} - \kappa_s + \kappa_{s-1}) + \\ + c_{s+1,s} (\varphi_{s+1} - \varphi_s - \kappa_{s+1} + \kappa_s) + L_s(\omega) - R_s(\omega), \quad (4.4) \\ Q_s^{(x)} = \mu \tilde{Q}_s^{(x)}, \quad Q_s^{(y)} = \mu \tilde{Q}_s^{(y)}, \quad Q_s^{(\alpha)} = \mu \tilde{Q}_s^{(\alpha)}, \quad Q_s^{(\beta)} = \mu \tilde{Q}_s^{(\beta)},$$

запишем уравнения (4.3) в виде

$$I_s \ddot{\varphi}_s + k_3 (\dot{\varphi}_s - \omega) = \mu \Phi_s (\varphi_{s-1}, \varphi_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{x}_s, \ddot{y}_s); \\ m_s \ddot{x}_s + \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(x)} x_j + c_{sj}^{(x\alpha)} \alpha_j) = m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s) + \mu \tilde{Q}_s^{(x)}, \\ m_s \ddot{y}_s + \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(y)} y_j + c_{sj}^{(y\beta)} \beta_j) = m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s) + \mu \tilde{Q}_s^{(y)}; \quad (4.5)$$

$$A_s \ddot{\alpha}_s + \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(\alpha)} \alpha_j + c_{sj}^{(x\alpha)} x_j) = \mu \tilde{Q}_s^{(\alpha)},$$

$$A_s \ddot{\beta}_s + \sum_{j=1}^k (c_{sj}^{(\beta)} \beta_j + c_{sj}^{(y\beta)} y_j) = \mu \tilde{Q}_s^{(\beta)}$$

$$(s = 1, \dots, k).$$

Величину $\mu > 0$ по-прежнему рассматриваем как малый параметр, что при сделанных допущениях аргументируется подобно изложенному в § 4 гл. 3.

Уравнения (4.5) имеет вид уравнений (4.2), (4.3) гл. 12, описывающих синхронизацию в системе с почти равномерными вращениями: они соответствуют также аналогичным уравнениям обобщенной задачи о синхронизации вибровозбудителей (см. § 8 гл. 3); более того, можно сказать, что рассматриваемая здесь задача представляет собой частный случай обобщенной задачи о синхронизации вибровозбудителей. Как и в последней задаче, основной целью исследования является установление условий существования и устойчивости, а также вычисление с той или иной степенью точности синхронных движений системы, т. е.

*) Некоторые из сделанных предположений не обязательны для справедливости основных выводов и приняты лишь для упрощения рассуждений.

движений вида

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \omega t + \alpha_s^* + \mu \psi_s(\omega t); \\ x_s &= x_s(\omega t), \quad y_s = y_s(\omega t); \\ \alpha_s &= \alpha_s(\omega t), \quad \beta_s = \beta_s(\omega t),\end{aligned}\quad (4.6)$$

где ψ_s , x_s , y_s , α_s и β_s — периодические функции времени с периодом $2\pi/\omega$, а α_s^* — постоянные. При этом значение синхронной частоты ω , вообще говоря, заранее неизвестно и должно быть определено в ходе решения задачи (случай внутренней синхронизации).

Обратимся к рассмотрению задачи в духе исследования, выполненного в § 8 гл. 3. Отвечающая уравнениям (4.5) порождающая система при указанных выше условиях допускает семейство решений

$$\begin{aligned}\varphi_s^0 &= \omega t + \alpha_s^*; \quad x_s^0 = - \sum_{j=1}^k \mathcal{M}_{sj} \sin(\omega t + \alpha_j^*), \\ \alpha_s^0 &= - \sum_{j=1}^k U_{sj} \sin(\omega t + \alpha_j^*); \quad y_s^0 = \sum_{j=1}^k \mathcal{N}_{sj} \cos(\omega t + \alpha_j^*), \\ \beta_s^0 &= - \sum_{j=1}^k V_{sj} \cos(\omega t + \alpha_j^*) \quad (s = 1, \dots, k),\end{aligned}\quad (4.7)$$

зависящее от k произвольных постоянных α_s^* . В равенствах (4.7) через $\mathcal{M}_{sj}$, U_{sj} , $\mathcal{N}_{sj}$ и V_{sj} обозначены постоянные, определяемые путем решения линейных алгебраических уравнений, получающихся при $\mu = 0$ из последних $4k$ уравнений (4.5) в результате подстановки выражений (4.6) и приравнивания коэффициентов при $\sin(\omega t + \alpha_j^*)$ и $\cos(\omega t + \alpha_j^*)$ в обеих частях получившихся равенств.

Составим основные уравнения (4.6) гл. 12 или, что то же, уравнения (8.4) гл. 3 для определения значений параметров $\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*$, которым могут отвечать решения уравнений (4.5) вида (4.6). Согласно (4.4) и (4.7) этими уравнениями будут (значок «*» при α_s далее опускаем).

$$\begin{aligned}P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) &\equiv \frac{\mu}{k_s} \langle \Phi_s(\varphi_{s-1}^0, \varphi_s^0, \varphi_{s+1}^0, \dot{\varphi}_s^0, \ddot{x}_s^0, \ddot{y}_s^0) \rangle \equiv \\ &\equiv \frac{1}{k_s} \left[- \frac{m_s \varepsilon_s \omega^2}{2} \sum_{j=1}^k (\mathcal{M}_{sj} + \mathcal{N}_{sj}) \sin(\alpha_s - \alpha_j) - \right. \\ &\quad - c_{s-1,s}(\alpha_s - \alpha_{s-1} - \alpha_s + \alpha_{s+1}) + c_{s,s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha_s - \alpha_{s+1} + \alpha_s) + \\ &\quad \left. + L_s(\omega) - R_s(\omega) \right] = 0 \quad (4.8) \\ &\quad (s = 1, \dots, k).\end{aligned}$$

Об интерпретации последних уравнений можно почти дословно повторить сказанное в п. 2 § 8 гл. 3. Так, величины

$$W_s^{(K)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \frac{m_s g_s \omega^2}{2} \sum_{j=1}^k (\mathcal{M}_{sj} + \mathcal{N}_{sj}) \sin(\alpha_s - \alpha_j) \quad (4.9)$$

по аналогии с задачей о синхронизации вибровозбудителей могут быть названы *вибрационными моментами*; величины

$$S_s^{(K)}(\alpha_{s-1}, \alpha_s, \alpha_{s+1}) = c_{s-1,s}(\alpha_s - \alpha_{s-1} - \kappa_s + \kappa_{s-1}) - c_{s,s+1}(\alpha_{s+1} - \alpha_s - \kappa_{s+1} + \kappa_s) \quad (4.10)$$

являются средними за период $2\pi/\omega$ значениями упругих крутящих моментов, а $L_s(\omega)$ и $R_s(\omega)$ — средние значения вращающего момента двигателя и момента сил сопротивления, действующих на s -й диск. Часто вращающий момент приложен только к крайнему диску; тогда

$$L_1(\omega) \neq 0, \quad L_2(\omega) = \dots = L_k(\omega) = 0.$$

Согласно равенствам (8.34) и (8.35) гл. 3 справедливы соотношения

$$W_s^{(K)} = \frac{\partial \Lambda^{(I)}}{\partial \alpha_s}, \quad S^{(K)} = -\frac{\partial \Lambda^{(II)}}{\partial \alpha_s}, \quad (4.11)$$

$$\Lambda^{(I)} = \langle (T^{(I)} - \Pi^{(I)}) \rangle, \quad \Lambda^{(II)} = -\langle (\Pi^{(II)}) \rangle = -(\Pi^{(II)}).$$

При учете соотношений (4.9)–(4.11) уравнения (4.8) могут быть представлены в форме

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{k_s} [L_s(\omega) - R_s(\omega) - S_s^{(K)}(\alpha_{s-1}, \alpha_s, \alpha_{s+1}) - W_s^{(K)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)] = 0 \quad (4.12)$$

($s = 1, \dots, k$)

или в виде

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{k_s} \left[-\frac{\partial (\Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)})}{\partial \alpha_s} + L_s(\omega) - R_s(\omega) \right] \equiv \frac{1}{k_s} \left[-\frac{\partial \langle (T^{(I)} - \Pi^{(I)} + \Pi^{(II)}) \rangle}{\partial \alpha_s} + L_s(\omega) - R_s(\omega) \right] = 0 \quad (4.13)$$

($s = 1, \dots, k$).

Последние уравнения вполне аналогичны соответствующим уравнениям § 8 гл. 3, относящимся к задаче о синхронизации вибровозбудителей.

Сложив все уравнения (4.8), предварительно умноженные на ωk_s , как и в § 4 гл. 3, получим равенство

$$\omega \sum_{s=1}^k L_s(\omega) = \sum_{s=1}^k R_s(\omega) \omega, \quad (4.14)$$

которое представляет уравнение баланса энергии в системе (в исходном приближении) и служит для определения угловой скорости синхронного вращения ω . Порождающие фазы α_s находятся из уравнений (4.8) (или, что то же самое, из уравнений (4.12) или (4.13)) лишь с точностью до аддитивной произвольной постоянной. Все это, как уже неоднократно отмечалось, является следствием автономности исходной системы уравнений.

Заключение об устойчивости движения, соответствующего некоторому решению $\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_k = \alpha_k^*$ трансцендентных уравнений (4.8), зависит от знаков корней алгебраического уравнения (8.31) гл. 3, имеющего степень $k-1$.

Для рассматриваемой системы справедлив интегральный критерий устойчивости, причем за потенциальную функцию можно принять выражение

$$D = \Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)} - B = \langle (T^{(I)} - \Pi^{(I)} + \Pi^{(II)}) \rangle - B, \quad (4.15)$$

где

$$B = B(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \omega) = \sum_{j=1}^k [L_j(\omega) - R_j(\omega)] \alpha_j. \quad (4.16)$$

Нашей целью не является подробное изучение задачи об изгибно-крутильных колебаниях вращающегося вала с неуравновешенными дисками; поэтому ограничимся приведенными выше основными соотношениями и коротко остановимся на главных качественных выводах.

Один из выводов состоит в том, что вследствие неуравновешенности дисков, изгибные и крутильные колебания вала оказываются взаимно связанными, причем может оказаться, что эту связь игнорировать нельзя, и тогда следует рассматривать задачу в описанной выше нелинейной постановке. Конкретным проявлением указанной выше взаимосвязи между изгибными и крутильными колебаниями является появление в уравнениях (4.12) вибрационных моментов $W_s^{(K)}$. В результате при определенных условиях в процессе движения участки вала могут оказаться закрученными на значительные дополнительные углы, относительно которых будут происходить крутильные колебания, как относительно средних положений. При этом в сечениях вала могут возникнуть дополнительные напряжения, а характер воздействия вала на опоры может существенно измениться.

Указанные эффекты проявляются тем сильнее, чем больше максимальные значения вибрационных моментов $W_s^{(K)}$ по сравнению с наибольшими упругими крутящимися моментами $S_s^{(K)}$, т. е. чем меньше жесткости $c_{s, s+1}$ участков вала на кручение, чем больше неуравновешенности $m_s \varepsilon_s$ и чем выше угловая скорость ω . Разумеется, что эти эффекты можно как угодно ослабить путем выбора достаточно больших жесткостей $c_{s, s+1}$.

Отметим, что к рассмотренной системе при $L_s(\omega) \approx R_s(\omega)$ полностью относится обобщенный принцип Лавалья (см. п. 6 § 14 гл. 3): если угловая скорость вращения вала ω значительно выше частот свободных колебаний системы, то последняя будет стремиться к самоуравновешиванию.

§ 5. Сепараторы подшипников качения

В статье К. Авотиня и И. Томашунса [1] высказано предположение о возможности явлений самосинхронизации в подшипниках качения. Позднее была опубликована работа В. Ф. Журавлева и А. А. Лапина [127], в которой исследование самосинхронизации сепараторов двух подшипников, служащих опорами

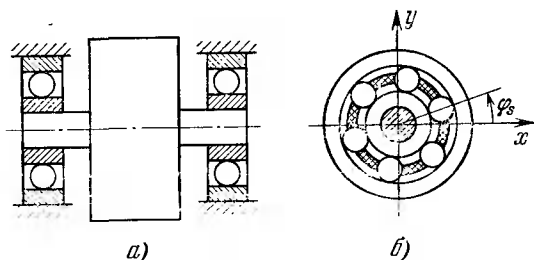


Рис. 39.

вращающегося жесткого ротора (рис. 39), выполнено посредством асимптотического метода вне связи с задачами теории синхронизации вибровозбудителей и других объектов с почти равномерными вращательными движениями; при этом рассмотрен случай движения вблизи резонанса, когда синхронная угловая скорость сепараторов ω близка к частоте свободных колебаний вала в опорах p . Здесь мы покажем, что условия существования и устойчивости синхронных движений сепараторов, справедливые как вблизи, так и вдали от резонанса, легко получаются из общих соотношений указанных теорий, причем при $\omega \approx p$ они совпадают с найденными в работе [127]; остановимся также на анализе этих условий.

Задачу рассмотрим в той же постановке, что и в [127]. Основным предположением этой работы является допущение о возможности проскальзывания шариков в режиме гидродинамического контакта и, вследствие этого, — о наличии у сепараторов «собственной» степени свободы: их угловые скорости φ_s ($s = 1, 2$) могут отличаться от кинематических значений Ω_s , соответствующих качению шариков без проскальзывания. При этом уравнения поступательных колебаний ротора и уравнения движения сепараторов записываются в форме (мы используем обозначения, несколько отличные от принятых в [127]):

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + \beta\dot{x} &= -\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad M\ddot{y} + \beta\dot{y} = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}; \\ I_s\ddot{\varphi}_s &= k_s(\Omega_s - \dot{\varphi}_s) + B_s(\Omega_s - \dot{\varphi}_s)' - \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_s} \quad (s = 1, 2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь Π — потенциальная энергия упругих сил, действующих в подшипниковых опорах, приближенно задаваемая в виде

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2}c(x^2 + y^2) - y(q_1 \cos \varphi_1 + q_2 \cos \varphi_2) - \\ - x(q_1 \sin \varphi_1 + q_2 \sin \varphi_2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В равенствах (5.1) и (5.2) x и y — смещения ротора, φ_s — углы поворота сепараторов, M — масса ротора, β — коэффициент вязкого сопротивления его колебаниям, I_s — моменты инерции сепараторов с шариками относительно оси вращения ротора, $k_s(\Omega_s - \dot{\varphi}_s)$ и $B_s(\Omega_s - \dot{\varphi}_s)$ — соответственно моменты сил вязкого и сухого трения, причем

$$B_s(\Omega_s - \dot{\varphi}_s) = \begin{cases} b_s \operatorname{sgn}(\Omega_s - \dot{\varphi}_s) & \text{при } \Omega_s \neq \dot{\varphi}_s, \\ \eta b_s & \text{при } \Omega_s = \dot{\varphi}_s, \end{cases} \quad (5.3)$$

где k_s и b_s — положительные постоянные, а $|\eta| < 1$ (максимальный момент сил сухого трения при отсутствии проскальзывания шариков считаем равным моменту трения при проскальзывании). Через c обозначена радиальная жесткость подшипниковых опор, а через q_s — коэффициенты, характеризующие дефекты (неточности изготовления) подшипников; не нарушая общности, можно считать $q_s \geq 0$, причем $q_s = 0$ при отсутствии дефектов; запись (5.2) предполагает, что углы φ_s отсчитываются от оси Ox до направлений на сепараторах, относительно которых эти дефекты «одинаково расположены» для обоих подшипников.

Если проскальзывание шариков отсутствует, то сепараторы вращаются с кинематическими значениями угловых скоростей Ω_1 и Ω_2 (считаем, что $\Omega_1 \neq \Omega_2$, например, вследствие неточностей изготовления подшипников; при $\Omega_1 = \Omega_2$ задачи о синхронизации не возникает).

Как будет ясно из дальнейшего, скорости Ω_1 и Ω_2 во многом аналогичны парциальным угловым скоростям, введенным при изучении самосинхронизации вибровозбудителей (см. § 5 гл. 3).

При наличии проскальзывания шариков и выполнении определенных условий возможны, по крайней мере, два режима синхронного вращения сепараторов: режим с проскальзыванием шариков обоих подшипников, когда угловая скорость синхронного вращения сепараторов ω отлична как от Ω_1 , так и от Ω_2 , и режим с проскальзыванием шариков только одного сепаратора, когда, например, $\omega = \Omega_1$ и $\Omega_2 \neq \omega$.

Рассмотрим сначала первый режим, соответствующий задаче о *внутренней (взаимной) синхронизации сепараторов*. В этом случае при учете (5.2), (5.3) и после введения обозначений

$$z = y + ix,$$

$$\mu\Phi_s = k_s(\Omega_s - \omega) + b_s \operatorname{sgn}(\Omega_s - \dot{\varphi}_s) + q_s \operatorname{Im}(ze^{-i\varphi_s}) \quad (5.4)$$

уравнения (5.1) могут быть представлены в форме

$$I_s \ddot{\varphi}_s + k_s(\varphi_s - \omega) = \mu\Phi_s(\varphi_1, \varphi_2, z) \quad (s = 1, 2), \quad (5.5)$$

$$M\ddot{z} + \beta\dot{z} + cz = \sum_{s=1}^2 q_s e^{i\varphi_s}, \quad (5.6)$$

соответствующей форме записи уравнений задачи о простой (некратной) синхронизации объектов с почти равномерными вращениями (см. уравнения (4.2), (4.3) главы 12), в частности, уравнениям задачи о самосинхронизации вибровозбудителей (см. уравнения (4.14) главы 3). Чтобы получить результат, пригодный, как в резонансном, так и в нерезонансном случае, силы вязкого трения в уравнениях (5.6) не считаем пропорциональными малому параметру μ , как это было сделано в § 4 главы 3 для некоторого упрощения выкладок.

Отвечающая уравнениям (5.5), (5.6) порождающая система допускает семейство синхронных решений

$$\varphi_s^0 = \omega t + \alpha_s \quad (s = 1, 2), \quad (5.7)$$

$$z^0 = \frac{1}{M\Delta} \sum_{j=1}^2 q_j e^{i(\omega t + \alpha_j - \varepsilon)}$$

($\Delta = \sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}$, $p^2 = c/m$, $2n = \beta/m$, $\cos \varepsilon = (p^2 - \omega^2)/\Delta$, $\sin \varepsilon = 2n\omega/\Delta$), зависящее от двух произвольных параметров α_1 и α_2 , которые играют роль начальных фаз вращения сепараторов.

Основные уравнения задачи (см. уравнения (4.6) главы 12) имеют вид

$$P_s \equiv \frac{\mu}{k_s} \langle \Phi_s(\varphi_1^0, \varphi_2^0, z^0) \rangle = 0 \quad (s = 1, 2)$$

и после выполнения операции усреднения при учете формул (5.4) и (5.7) записываются в форме

$$\begin{aligned} P_1(\alpha, \omega) &\equiv \frac{1}{k_1} [k_1(\Omega_1 - \omega) + b_1 \operatorname{sgn}(\Omega_1 - \omega) - W_1(\alpha, \omega)] = 0, \\ P_2(\alpha, \omega) &\equiv \frac{1}{k_2} [k_2(\Omega_2 - \omega) + b_2 \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \omega) - W_2(\alpha, \omega)] = 0 \\ &(\alpha = \alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь выражения

$$\begin{aligned} W_1(\alpha, \omega) &= -q_1 \operatorname{Im} \langle z^0 e^{-i\varphi_1^0} \rangle = -\frac{q_1}{M\Delta} \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 q_j e^{i(\alpha_j - \alpha_1 - \varepsilon)} = \\ &= \frac{q_1^2}{M\Delta} \sin \varepsilon - \frac{q_1 q_2}{M\Delta} \sin(\alpha - \varepsilon) = A_1 [q_1 \sin \varepsilon - q_2 \sin(\alpha - \varepsilon)], \\ W_2(\alpha, \omega) &= A_2 [q_2 \sin \varepsilon + q_1 \sin(\alpha + \varepsilon)] \\ &(A_s = q_s / M\Delta) \end{aligned} \quad (5.9)$$

отвечают выражениям для вибрационных моментов в соответствующих задачах о самосинхронизации вибровозбудителей: и в данном случае самосинхронизация может возникнуть именно благодаря указанным моментам, характеризующим вибрационную связь между сепараторами.

Через A_s в формулах (5.9), согласно (5.7), обозначены приближенные значения амплитуды вынужденных установившихся колебаний вала, обусловленных дефектами в s -м подшипнике.

Уравнения (5.8), подобно задаче о вибровозбудителях, могут быть истолкованы как уравнения равновесия средних моментов, действующих на сепараторы. Из этих уравнений должны быть определены разность фаз $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ и приближенное значение угловой скорости синхронного вращения сепараторов ω , которая в данном случае является заранее неизвестной.

Условия, при которых уравнения (5.8) имеют вещественные решения относительно α и ω , будут условиями возможности самосинхронизации сепараторов.

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости синхронного движения, соответствующие определенным значениям α и ω , найденным из уравнений (5.8), является

неравенство:

$$\kappa = \frac{\partial (P_1 - P_2)}{\partial \alpha_1} = - \frac{d(P_1 - P_2)}{d\alpha} =$$

$$= - \frac{q_1 q_2}{M\Delta} \left[\frac{\cos(\alpha - \varepsilon)}{k_1} + \frac{\cos(\alpha + \varepsilon)}{k_2} \right] < 0, \quad (5.10)$$

вытекающее из уравнения типа (4.24) главы 3 (достаточность этого условия в данном случае обусловлена учетом сил сопротивления по колебательным координатам в порождающем приближении — см. уравнение (5.6)).

В случае второго режима, когда шарики одного из подшипников не проскальзывают (пусть это будет первый подшипник), $\omega = \Omega_1$, т. е. скорость синхронного вращения ω заранее известна и равна кинематической скорости сепаратора первого подшипника. Здесь мы имеем задачу о внешней синхронизации (захватывании) вращения сепаратора второго подшипника вращением сепаратора второго подшипника. Необходимое при этом специальное рассмотрение легко проводится путем использования результатов п. 2 § 8 главы 3 или §§ 2 и 7 главы 10. Разность фаз вращения сепараторов $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ в данном случае определяется из уравнения

$$P_2(\alpha, \Omega_1) \equiv \frac{1}{k_2} [k_2(\Omega_2 - \Omega_1) + b_2 \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) - W_2(\alpha, \Omega_1)] = 0, \quad (5.11)$$

которое совпадает со вторым уравнением (5.8) при $\omega = \Omega_1$.

Условие, при котором из (5.11) определяется вещественное значение α , будет условием возможности синхронизации. Этому значению действительно должно соответствовать асимптотически устойчивое синхронное движение, если

$$\kappa = \frac{dP_2(\alpha, \Omega_1)}{d\alpha_2} = \frac{dP_2(\alpha, \Omega_1)}{d\alpha} = - \frac{q_1 q_2}{k_2 M \Delta} \cos(\alpha + \varepsilon) < 0. \quad (5.12)$$

Заметим, что, как и следовало ожидать соотношения (5.11) и (5.12) формально получаются из (5.8) и (5.10) при $k_1 \rightarrow \infty$.

Для действительного осуществления рассматриваемого режима необходимо, чтобы для значений α , удовлетворяющих соотношениям (5.11) и (5.12), выполнялось условие непроскальзывания шариков второго подшипника

$$|W_1(\alpha, \Omega_1)| < b_1. \quad (5.13)$$

Проанализируем вначале результаты, относящиеся к более простому второму режиму, когда шарики первого подшипника не проскальзывают.

При учете (5.9) уравнение (5.12) дает

$$\sin(\alpha + \varepsilon) = Q_2$$

$$\left(Q_2 = \frac{k_2(\Omega_2 - \Omega_1) + b_2 \operatorname{sgn}(\Omega_2 - \Omega_1) - q_1 A_1 \sin \varepsilon}{q_2 A_1} \right). \quad (5.14)$$

Условием возможности синхронизации является неравенство

$$|Q_2| < 1, \quad (5.15)$$

при выполнении которого уравнение (5.14) имеет два существенно различающихся вещественных решения

$$\alpha^{(1)} = -\varepsilon + \arcsin Q_2, \quad \alpha^{(2)} = -\varepsilon + \pi - \arcsin Q_2,$$

первому из которых, согласно (5.12), соответствует устойчивое, а второму — неустойчивое движение.

Нетрудно убедиться, что при $\Omega_2 > \Omega_1$ и вблизи резонанса, когда отстройка $\delta = \omega - p = \Omega_1 - p$ мала и можно принять $\Delta = \sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \approx 2p\sqrt{\delta^2 + n^2}$, условие (5.15) с точностью до обозначений совпадает с условием (2.2) работы [127], где оно получено иным путем и детально проанализировано.

Вместе с тем условие (5.15) сохраняет силу также и при любых ω/p . Если ω/p существенно отлично от единицы, т. е. движение происходит вдали от резонанса, то трением в колебательной части системы можно пренебречь, положив $\beta \approx 0$, $n \approx 0$, $\sin \varepsilon \approx 0$. Если к тому же считать момент сил сухого трения b_2 пренебрежимо малым, то условие (5.15) примет следующий простой вид:

$$k_2|\Omega_2 - \Omega_1| < q_2 A_1 = q_1 A_2 = q_1 q_2 / M \Delta. \quad (5.16)$$

Рассмотрим теперь режим с проскальзыванием шариков обоих подшипников, ограничившись изучением движения вдали от резонанса, когда можно принять $\beta \approx 0$, $n \approx 0$. При этом выражения (5.9) для вибрационных моментов принимают вид

$$W_1 = -W_2 = -\frac{q_1 q_2}{M(p^2 - \omega^2)} \sin \alpha. \quad (5.17)$$

Допустим, что

$$\Omega_1 < \omega < \Omega_2. \quad (5.18)$$

Тогда при учете (5.17) из уравнений (5.8) находим

$$\omega = (k_1 \Omega_1 + k_2 \Omega_2 + b_2 - b_1) / (k_1 + k_2), \quad \sin \alpha = Q \quad (5.19)$$

$$\left(Q = -\frac{M(p^2 - \omega^2) [k_1 k_2 (\Omega_2 - \Omega_1) + k_1 b_2 + k_2 b_1]}{(k_1 + k_2) q_1 q_2} \right)$$

и устанавливаем, что соотношение (5.18) действительно выполняется, если

$$-k_2(\Omega_2 - \Omega_1) < b_2 - b_1 < k_1(\Omega_2 - \Omega_1). \quad (5.20)$$

Из (5.19) следует, что условием возможности рассматриваемого синхронного режима вращения сепараторов является неравенство

$$\left| \frac{k_1 k_2 (\Omega_2 - \Omega_1) + k_1 b_2 + k_2 b_1}{k_1 + k_2} \right| < q_1 A_2 = q_2 A_1 = \frac{q_1 q_2}{M |p^2 - \omega^2|}, \quad (5.21)$$

при выполнении которого уравнение (5.19) допускает два существенно различающихся решения:

$$\alpha^{(1)} = \arcsin Q, \quad \alpha^{(2)} = \pi - \arcsin Q. \quad (5.22)$$

Первое из этих решений, как и в задаче о вибровозбудителях, условно назовем синфазным, а второе — противофазным.

Условие устойчивости (5.10) в рассматриваемом случае принимает вид

$$(\omega^2 - p^2) \cos \alpha < 0. \quad (5.23)$$

Отсюда следует, что в дорезонансной (докритической) области, где $\omega < p$, устойчивым будет синфазное, а в послерезонансной (послекритической) области, где $\omega > p$, — противофазное синхронное движение. Согласно (5.7) противофазному движению соответствует взаимная компенсация колебаний ротора, вызванных дефектами в подшипниках: в частности, при $q_1 = q_2$ и $Q \approx 0$ в этом случае будем иметь $z^0 \approx 0$, т. е. также $x = 0$ и $y = 0$. Синфазному движению, напротив, соответствует взаимное усиление колебаний (в том же смысле). Нетрудно заметить, что та же закономерность справедлива и для рассмотренного выше режима с проскальзыванием шариков только одного подшипника.

Таким образом, и для данной системы при указанных выше условиях справедлив обобщенный принцип Ливалля, о котором уже многократно упоминалось выше: в закритической области происходит своеобразная автоматическая балансировка ротора *).

В случае, когда сухим трением можно пренебречь ($b_1 \approx 0$, $b_2 \approx 0$), условие возможности самосинхронизации сепараторов (5.21) принимает вид

$$\frac{k_1 k_2 |\Omega_2 - \Omega_1|}{k_1 + k_2} < q_1 A_2 = q_2 A_1 = \frac{q_1 q_2}{M |p^2 - \omega^2|}, \quad (5.24)$$

т. е. отличается от условия (5.16) лишь тем, что место коэффициента вязкого трения k_2 занимает приведенный коэффициент трения $k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$.

Из рассмотрения неравенств (5.15), (5.16), (5.21) и (5.24) вытекают следующие практические заключения:

*) Идея о возможности использования эффекта самосинхронизации для взаимной компенсации колебаний роторов, вызываемых несовершенствами подшипниковых опор, была ранее сообщена автору Ю. Ю. Гепявичусом.

1. Возможность самосинхронизации сепараторов номинально одинаковых подшипников при отсутствии сил сухого трения определяется соотношением параметров, характеризующих дефекты (неточности изготовления) подшипников: синхронизирующими факторами являются дефекты, характеризуемые параметрами q_1 и q_2 , а десинхронизирующими факторами — дефекты, обуславливающие разброс кинематических значений скоростей $\Omega_2 - \Omega_1$.

Этим самосинхронизация сепараторов существенно отличается от самосинхронизации вибровозбудителей, для которых от неточностей изготовления зависят лишь десинхронизирующие факторы, а возможность синхронизации обусловлена действием систематического фактора — наличием неуравновешенности роторов.

2. Самосинхронизация невозможна в случае достаточно больших моментов сил сухого трения, препятствующих проскальзыванию сепараторов.

3. Важным синхронизирующим фактором являются колебания ротора, вызываемые дефектами в подшипниках; их амплитуды A , пропорциональны величинам q . Поэтому приближение к резонансу благоприятно для возникновения самосинхронизации сепараторов, а увеличение сил вязкого сопротивления колебаниям вала — неблагоприятно.

Изложенное свидетельствует о том, что самосинхронизация сепараторов номинально одинаковых подшипников возможна лишь при некотором стечении благоприятных для нее обстоятельств, формируемых соотношением величин q_1 , q_2 , $\Omega_2 - \Omega_1$, b_1 , b_2 , k_1 и k_2 , а также p и ω . Для суждения о реальной возможности самосинхронизации необходима тщательная оценка этих величин; необходимы также специальные наблюдения и эксперименты.

Подчеркнем, далее, что самосинхронизация сепараторов не обязательно приводит только к неблагоприятным последствиям — повышенному износу тел качения и колец, появлению некоторых видов колебаний и т. п. Как отмечалось, при определенных условиях в синхронном режиме возникает снижение уровня колебаний, и тогда, если это технически целесообразно, можно усилить тенденцию к синхронизации, например, путем искусственного формирования дефектов, характеризуемых величинами q_1 и q_2 .

Заметим также, что рассмотренная модель системы является достаточно грубой, ибо не учитывает ряда факторов, которые реально могут существенно влиять на самосинхронизацию сепараторов; из числа таких факторов укажем на нелинейность упругих характеристик опор, поворотные колебания оси ротора, гироскопический эффект, дефекты «высших порядков», не учтенные в выражении для потенциальной энергии (5.2).

Глава 5

СИНХРОНИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ ТИПА МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ

§ 1. Взаимная синхронизация маятниковых часов на упруго опертой платформе (задача Гюйгенса)

Как отмечалось во Введении, явление синхронизации технических объектов, по-видимому, впервые было экспериментально обнаружено Гюйгенсом именно на примере самосинхронизации и фазировки хода двух маятниковых часов, висевших на общей легкой балке. Там же приведено яркое описание этого явления, данное Гюйгенсом.

Рассмотрение соответствующей задачи, которую с полным основанием можно назвать *задачей Гюйгенса*, представляется небезынтересным не только в связи с попыткой теоретического объяснения описанных Гюйгенсом явлений, но также и с целью сопоставления с закономерностями синхронизации иных объектов, в частности, механических вибровозбудителей. Как будет показано, наряду с общими закономерностями, здесь имеются также и существенные отличия.

Приведем решение задачи Гюйгенса для одной из наиболее простых, однако зачастую вполне приемлемых моделей часовых ходов с одной степенью свободы*). При этом будем предполагать, что часы висят на упруго опертой жесткой платформе, также имеющей одну степень свободы (рис. 40). В такой постановке задача была рассмотрена в работах [42, 57], которым и следует дальнейшее изложение; иным методом — путем использования вариационного соотношения (см. § 6 гл. 11) — соответствующая задача решена А. И. Лурье [475]. В иной, более упрощенной постановке (см. ниже) эта задача ранее рассматривалась Н. Ми-

*) Описание и исследование динамических моделей механизмов часов (часовых ходов) можно найти в работах З. М. Аксельрода [3, 4] и Н. Н. Баутина [20]. Ударные и безударные модели ходов с одной степенью свободы рассмотрены также в монографии [40].

норским [194]. Синхронизация часов на платформе с тремя степенями свободы рассмотрена Ю. И. Марченко и автором [60].

Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы могут быть получены из уравнений (4.6) и (4.7) гл. 3, описывающих движение аналогичной системы с вибровозбудителями (ср. рис. 6 и 40). Изменяется в задаче о часах лишь

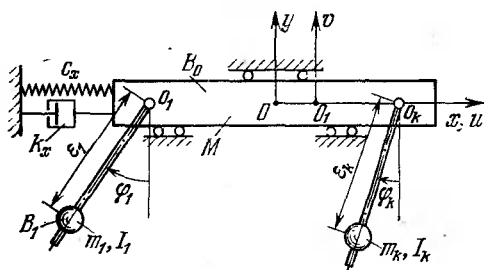


Рис. 40.

смысл и выражения движущих моментов L_s , которые при оговоренных выше предположениях следует считать зависящими от углов поворота маятников φ_s и угловых скоростей $\dot{\varphi}_s$. При этом воздействие момента $L_s(\varphi_s, \dot{\varphi}_s)$ на маятник с целью упрощения теоретического анализа задачи иногда счита-

ют имеющим характер мгновенного импульса; в последнем случае $L_s(\varphi_s, \dot{\varphi}_s)$ представляет неаналитическую функцию своих аргументов. Несколько иной характер в рассматриваемой здесь задаче могут носить и выражения для моментов сил сопротивления R_s ; будем считать их, так же как и L_s , зависящими не только от угловой скорости $\dot{\varphi}_s$, но и от угла φ_s , т. е. положим $R_s = R_s(\varphi_s, \dot{\varphi}_s)$. Тогда уравнения движения системы часы — платформа запишутся в виде (в отличие от задачи о вибровозбудителях углы поворота маятников φ_s считаются малыми и отсчитываются не от направления колебаний платформы, т. е. от горизонтали, а от вертикали)

$$I_s \ddot{\varphi}_s + m_s g \epsilon_s \varphi_s = m_s \epsilon_s \ddot{x} + L_s(\dot{\varphi}_s, \varphi_s) - R_s(\dot{\varphi}_s, \varphi_s) \quad (s = 1, \dots, k); \quad (1.1)$$

$$M \ddot{x} + k_x \dot{x} + c_x x = \sum_{s=1}^k m_s \epsilon_s \ddot{\varphi}_s.$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в § 4 гл. 3.

Исходя из наблюдений Гюйгенса (см. цитату в § 1 Введения), можно ожидать, что синхронизация часов возможна, например, при условии, что их «парциальные частоты»

$$\tilde{\omega}_s = \sqrt{m_s g \epsilon_s / I_s}, \quad (1.2)$$

т. е. частоты малых свободных колебаний маятников при непод-

вижных точках подвеса *), мало отличаются одна от другой. Поэтому положим

$$\tilde{\omega}_s^2 = \tilde{\omega}^2 (1 - \chi_s), \quad (1.3)$$

где χ_s — некоторые малые величины, а за $\tilde{\omega}$ можно принять либо одно из $\tilde{\omega}_s$, либо какое-нибудь среднее от $\tilde{\omega}_s$; можно также определить $\tilde{\omega}$ в процессе решения задачи из условия близости первого приближения к исходному подобно тому, как об этом сказано в замечании 5) § 7 гл. 10. Тогда, переходя к безразмерным переменным и вводя обозначения согласно формулам

$$\tau = \tilde{\omega} t, \quad x_0 = x/A, \quad 2n_x = k_x/M\tilde{\omega}, \quad n_x = \mu n'_x, \\ \lambda_x^2 = p_x^2/\tilde{\omega}^2, \quad p_s = \frac{m_s g_s A}{I_s}, \quad q_s = \frac{m_s g_s}{MA}, \quad p_x^2 = c_x/M, \quad (1.4)$$

$$\mu \Phi_s \left(\frac{d\varphi_s}{d\tau}, \varphi_s, \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} \right) = \\ = p_s \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \chi_s \varphi_s + \frac{1}{I_s \tilde{\omega}^2} \left[L_s \left(\tilde{\omega} \frac{d\varphi_s}{d\tau}, \varphi_s \right) - R_s \left(\tilde{\omega} \frac{d\varphi_s}{d\tau}, \varphi_s \right) \right],$$

представим уравнения (1.1) в виде

$$\frac{d^2 \varphi_s}{d\tau^2} + \varphi_s = \mu \Phi_s \left(\frac{d\varphi_s}{d\tau}, \varphi_s, \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} \right) \quad (s = 1, \dots, k), \\ \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \lambda_x^2 x_0 = \sum_{j=1}^k q_j \frac{d^2 \varphi_j}{d\tau^2} - 2\mu n'_x \frac{dx_0}{d\tau}. \quad (1.5)$$

Здесь через A обозначена произвольная величина с размерностью длины (удобно считать, что A имеет порядок $x_{\max}$), а $\mu \geq 0$, как и ранее, — малый параметр. Способ введения этого параметра соответствует предположению, что часы представляют собой почти одинаковые слабо связанные квазиконсервативные квазилинейные автогенераторы и что сила вязкого сопротивления колебаниям платформы мала.

Задача заключается в изучении условий существования и устойчивости периодических (синхронных) решений уравнений (1.5), имеющих при $\mu = 0$ период 2π .

*) Подчеркнем наряду со сходством некоторые существенные различия между введенными здесь парциальными частотами маятников (и вообще объектов типа квазигармонических автогенераторов) и парциальными угловыми скоростями вибровозбудителей ω_s (и вообще объектов с вращающимися роторами), введенными в § 5 гл. 3. Так, парциальные частоты ω_s — неотрицательные величины, тогда как парциальные угловые скорости могут быть и отрицательными.

Будем рассматривать нерезонансный случай, т. е. предположим, что частоты свободных колебаний маятников на неподвижном основании $\tilde{\omega}_s \approx \tilde{\omega}$ в достаточной мере отличаются от p_x/n , где p_x — частота свободных колебаний платформы, а n — целое число; в указанном предположении величина $\lambda_x = p_x/\tilde{\omega}$ отлична от целого числа.

Далее примем также, что безразмерный избыточный момент $(L_s - R_s)/I_s \tilde{\omega}^2$ задан выражением

$$\frac{1}{I_s \tilde{\omega}^2} (L_s - R_s) = a_s (1 - v_s \varphi_s^2) \frac{d\varphi_s}{d\tau}, \quad (1.6)$$

где a_s и v_s — положительные постоянные.

Иными словами, вместо модели с импульсным притоком энергии к маятнику часов будем рассматривать модель с непрерывным притоком энергии, подобную осциллятору Ван-дер-Поля (подробнее о таком осцилляторе см. в п. 2 § 2 гл. 6). Соображения в пользу возможности подобной идеализации были высказаны в докладе Н. Минорского [194], который, однако, по существу не рассматривал задачу Гюйгенса как таковую, а ограничился изучением разбираемой в § 2 гл. 6 задачи о двух индуктивно связанных электронных генераторах Ван-дер-Поля. Вместе с тем, несмотря на существенное различие исходных систем уравнений, как мы убедимся ниже, соображения Н. Минорского об аналогии между указанными задачами являются справедливыми, правда, при выполнении некоторого соотношения между параметрами более сложной системы, отвечающей задаче Гюйгенса.

Как нетрудно убедиться, в результате неособенного линейного преобразования переменных

$$\begin{aligned} \varphi_s &= y_s + y_{k+s}, \quad \dot{\varphi}_s = i(y_s - y_{k+s}) \quad (s = 1, \dots, k); \\ x_0 &= y_{2k+1} + y_{2k+2} - \frac{1}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{s=1}^k q_s (y_s + y_{k+s}), \\ \frac{dx_0}{d\tau} &= i\lambda_x (y_{2k+1} - y_{2k+2}) - \frac{i}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{s=1}^k q_s (y_s - y_{k+s}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

система уравнений (1.5) приводится к канонической форме

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{d\tau} &= \lambda_s y_s + \mu F_s \quad (s = 1, \dots, 2k), \\ \frac{dy_{2k+1}}{d\tau} &= i\lambda_x y_{2k+1} + \mu F_{2k+1}, \\ \frac{dy_{2k+2}}{d\tau} &= -i\lambda_x y_{2k+2} + \mu F_{2k+2}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

соответствующей форме уравнений (3.4) гл. 10. В уравнениях (1.8) при этом приняты следующие обозначения:

$$\lambda_s = i, \quad \lambda_{k+s} = -i; \quad F_s = -\frac{i}{2} \Phi_s, \quad F_{k+s} = \frac{i}{2} \Phi_s \\ (s = 1, \dots, k), \quad (1.9)$$

$$F_{2k+1} = -F_{2k+2} = i \left[\frac{n'_x dx_0}{\lambda_x d\tau} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_x}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{s=1}^k q_s \Phi_s \right].$$

Применим к системе (1.8) теорему § 3 гл. 10 о существовании и устойчивости периодических решений квазилинейных автономных систем.

Отвечающая уравнениям (1.8) порождающая система

$$\frac{dy_s^0}{d\tau} = \lambda_s y_s^0 \quad (s = 1, \dots, 2k), \\ \frac{dy_{2k+1}^0}{d\tau} = -i \lambda_x y_{2k+1}^0, \quad \frac{dy_{2k+2}^0}{d\tau} = i \lambda_x y_{2k+2}^0 \quad (1.10)$$

допускает семейство периодических (с периодом 2π) решений

$$y_s^0 = \alpha_s e^{\lambda_s \tau} = \begin{cases} \alpha_s e^{i\tau} & (s = 1, \dots, k), \\ \alpha_s e^{-i\tau} & (s = k+1, \dots, 2k), \end{cases} \quad (1.11) \\ y_{2k+1}^0 = y_{2k+2}^0 = 0,$$

зависящее от $2k$ произвольных постоянных α_s . Эти постоянные, как и соответствующие λ_s , можно, не нарушая общности, считать попарно комплексно сопряженными, т. е. положить

$$\alpha_s = r_s e^{i\psi_s}, \quad \alpha_{k+s} = \alpha_s = r_s e^{-i\psi_s}, \\ r_s = |\alpha_s| = |\alpha_{k+s}| \quad (s = 1, \dots, k). \quad (1.12)$$

Кроме того, вследствие автономности системы (1.8), опять-таки не нарушая общности, допустимо считать, что

$$\alpha_k = \alpha_{2k} = r_k = \alpha, \quad \psi_k = 0. \quad (1.13)$$

Характеристические показатели $\lambda_s = \pm i$ системы (1.10) в соответствии с терминологией, принятой в § 3 гл. 10, являются критическими и образуют особую ведущую группу. Критическими являются также и остальные два показателя $\lambda_{2k+1} = i\lambda_x$ и $\lambda_{2k+2} = -i\lambda_x$, однако при $\lambda_x \neq n/2$, где n — целое число, они не входят в число особых, в том числе и ведущих особых показателей.

В результате несложных вычислений в соответствии с формулами (3.5) и (3.6) гл. 10, а также равенствами (1.4), (1.6), (1.7),

(1.9) и (1.11), получаем следующие выражения для функций P_s^* :

$$\begin{aligned} \mu P_s^* &= -i \left[\chi_s \alpha_s + \frac{P_s}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{j=1}^k q_j \alpha_j + i a_s (1 - v_s \alpha_s \alpha_{k+s}) \alpha_s \right], \\ \mu P_{k+s}^* &= i \left[\chi_s \alpha_{k+s} + \frac{P_s}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{j=1}^k q_j \alpha_{k+j} - i a_s (1 - v_s \alpha_s \alpha_{k+s}) \alpha_{k+s} \right] \\ &\quad (s = 1, \dots, k) \end{aligned} \quad (1.14)$$

и следующие *основные уравнения* для определения параметров α_s порождающего решения *):

$$\begin{aligned} \mu P_s &\equiv -\alpha_{2k} \mu P_s^* - \alpha_s \mu P_{2k}^* \equiv \\ &\equiv -\alpha_{2k} \left[-i \left(\chi_s \alpha_s + \frac{P_s}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{j=1}^k q_j \alpha_j \right) + a_s (1 - v_s \alpha_s \alpha_{k+s}) \alpha_s \right] - \\ &\quad - \alpha_s \left[i \left(\chi_k \alpha_{2k} + \frac{P_k}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{j=1}^k q_j \alpha_{k+j} \right) + a_k (1 - v_k \alpha_k \alpha_{2k}) \alpha_{2k} \right] = 0, \\ \mu P_{k+s} &\equiv -\alpha_{2k} \mu P_{k+s}^* + \alpha_{k+s} \mu P_{2k}^* \equiv \\ &\equiv \alpha_{2k} \left[i \left(\chi_{k+s} \alpha_{k+s} + \frac{P_s}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{j=1}^k q_j \alpha_j + a_s (1 - v_s \alpha_s \alpha_{k+s}) \alpha_{k+s} \right) \right] + \\ &\quad + \alpha_{k+s} \left[i \left(\chi_k \alpha_{2k} - \frac{P_k}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{j=1}^k q_j \alpha_{k+j} \right) + a_k (1 - v_k \alpha_k \alpha_{2k}) \alpha_{2k} \right] = 0 \\ &\quad (s = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь обозначено

$$b_{sj} = -\frac{P_s q_j}{\lambda_x^2 - 1}. \quad (1.16)$$

В силу соотношений (1.12) и (1.13) из равенств (1.14) для $s = k$ получаем $P_k^* = -P_{2k}^* = \bar{P}_{2k}^*$. Поэтому, как следует из (1.15), $P_{k+s} = \bar{P}_s$, и для определения $2k-1$ комплексных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1} = \alpha_1, \dots, \alpha_{2k-1} = \alpha_{k-1}, \alpha = \alpha_{2k} = \alpha_k$, которые согласно (1.12) можно заменить $2k-1$ вещественными постоянными $r_1, \dots, r_k, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}$, достаточно рассмотреть $2k-1$

*) Заметим, что число критических корней ведущей особой группы здесь обозначено через $2k$, в то время как в § 3 гл. 10 это число обозначалось через k .

уравнений, полученных приравниванием нулю вещественных и мнимых частей в левых частях первых k уравнений (1.15). При этом последнее уравнение $\text{Im } P_k = -\alpha \text{Im}(P_k^* + P_{2k}^*) = 0$ как выполняющееся тождественно в силу установленного выше равенства $P_k^* = -P_{2k}^*$ исключается.

Для существования синхронных колебаний рассматриваемого типа необходимо, чтобы указанные $2k-1$ уравнений допускали решения, в которых ψ_s вещественны, а r_s — положительны.

Согласно теореме § 3 гл. 10 достаточными условиями устойчивости синхронных движений, отвечающих каждому такому решению, являются, во-первых, отрицательность вещественных частей корней χ алгебраического уравнения $(2k-1)$ -й степени

$$\left| \frac{\partial(\mu P_s)}{\partial \alpha_j} + \delta_{sj} \alpha \chi \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, 2k-1) \quad (1.17)$$

и, во-вторых, выполнение неравенства

$$\text{Re} \left[\left\langle \left(\frac{\partial F_{2k+1}}{\partial y_{2k+1}} \right) \right\rangle - i \lambda_x \frac{P_{2k}^*}{2\alpha_{2k} \lambda_{2k}} \right] < 0, \quad (1.18)$$

которое в результате вычислений при учете (1.4), (1.7), (1.9) и (1.12)—(1.14) приводит к соотношению

$$2n_x - \frac{1}{r_k} \frac{P_k \lambda_x}{\lambda_x^2 - 1} \sum_{j=1}^k q_j r_j \sin \psi_j - \lambda_x a_k (1 - v_k r_k^2) > 0. \quad (1.19)$$

Дальнейшее аналитическое рассмотрение задачи в общем случае сопряжено с трудностями, связанными с необходимостью решения системы трансцендентных уравнений (1.15). Поэтому ниже ограничимся изучением случая почти одинаковых часов.

§ 2. Случай почти одинаковых часов

Пусть параметры всех часов с точностью до величин более высокого порядка, чем μ одинаковы. Тогда согласно (1.3), (1.14), (1.6) будем иметь

$$a_s = a, \quad \chi_s = \chi, \quad v_s = v, \quad p_s = p, \quad q_s = q, \quad (2.1)$$

и после перехода от неизвестных α_s к r_s и ψ_s уравнения (1.15) при учете (1.12) и (1.13) запишутся в форме

$$\begin{aligned} \mu P_s = & -\pi r_k \left[i b \sum_{j=1}^k r_j e^{i(\psi_j - \psi_k)} + a(1 - v r_s^2) r_s e^{i(\psi_s - \psi_k)} - \right. \\ & \left. - i b \sum_{j=1}^k r_j e^{i(\psi_s - \psi_j)} - a(1 - v r_k^2) r_k e^{i(\psi_s - \psi_k)} \right] = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где обозначено

$$b = -pq/(\lambda_x^2 - 1). \quad (2.3)$$

Рассмотрим те решения уравнений (2.2), которые соответствуют колебаниям всех маятников с одинаковыми амплитудами

$$r_1 = \dots = r_k = 1/\sqrt{v}, \quad (2.4)$$

совпадающими, как нетрудно видеть, со значениями амплитуд при отсутствии связи между часами, т. е. при неподвижной платформе ($b = 0$). Для указанного случая, отделяя в уравнениях (2.2) вещественные и мнимые части, получаем следующие $2k$ равенств, которым должны одновременно удовлетворять k постоянных $\psi_1, \dots, \psi_k$:

$$\sum_{j=1}^k \cos \psi_j = \sum_{j=1}^k \cos (\psi_s - \psi_j), \quad \sum_{j=1}^k \sin \psi_j = \sum_{j=1}^k \sin (\psi_s - \psi_j), \quad (2.5)$$

$$\psi_k = 0 \quad (s = 1, \dots, k).$$

Равенство $\psi_k = 0$ присоединено к этим уравнениям в соответствии с (1.13).

Уравнения (2.5) удовлетворяются, в частности, если

$$\psi_1 = \dots = \psi_k = 0, \quad (2.6)$$

что соответствует колебаниям всех маятников с одинаковыми фазами. Однако уравнения (2.5) допускают, как легко видеть, также и множество решений, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^k \cos \psi_j = 0, \quad \sum_{j=1}^k \sin \psi_j = 0, \quad \psi_k = 0. \quad (2.7)$$

Эти условия эквивалентны требованию, чтобы k векторов e_s единичной длины, один из которых (e_k) направлен вдоль оси Ox плоскости xOy , образовали в этой плоскости замкнутый многоугольник (см. рис. 8, где, однако, теперь следует считать $|e_s| = 1$). Для случаев $k = 2$ и $k = 3$ существует только по одному такому многоугольнику, а для $k > 3$ — бесконечное множество многоугольников. Это свидетельствует о том, что для числа часов, большего трех, фазы ψ_s не определяются однозначно из уравнений (2.2); для их нахождения согласно замечанию 8) § 7 гл. 10 следует рассмотреть следующие приближения.

В числе решений, удовлетворяющих условиям (2.7), отметим (при произвольном k) решения вида

$$\psi_s = \frac{2\pi}{k} j \quad (j = 1, \dots, k-1), \quad \psi_k = 0, \quad (2.8)$$

которым в плоскости xOy соответствует правильный k -угольник,

т. е. фазы являются равномерно распределенными, а также (при четном k) решения вида

$$\psi_1 = \dots = \psi_{k/2} = \pi, \quad \psi_{k/2+1} = \dots = \psi_k = 0, \quad (2.9)$$

которым соответствуют колебания одной половины всего числа маятников в противофазе по отношению к другой половине маятников.

Таким образом, синхронизация часов в принципе всегда возможна, если их одноименные параметры достаточно мало отличаются один от другого. Разумеется, необходимо убедиться еще в устойчивости соответствующих решений; как будет показано ниже, этот вопрос решается положительно, по крайней мере, в случае двух часов. Здесь же отметим, что для решений типа (2.4), (2.6) и (2.7) дополнительное условие устойчивости (1.19) выполняется при любом числе почти одинаковых часов, ибо оно обеспечивается положительностью коэффициента сопротивления n_x .

Рассмотрим подробнее случай двух часов. В этом случае уравнения (2.2) допускают два решения

$$r_1 = r_2 = \sqrt{v}, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad (2.10)$$

$$r_1 = r_2 = \sqrt{v}, \quad \psi_1 = \pi, \quad \psi_2 = 0,$$

отвечающие соответственно синфазным и противофазным движениям маятников. Обращаясь к исследованию устойчивости этих решений при учете (1.15), (2.1) и (2.10), для $k = 2$ находим

$$\begin{aligned} \partial(\mu P_1)/\partial\alpha_1 &= (a + ibe^{-i\psi_1})/\sqrt{v}, & \partial(\mu P_1)/\partial\alpha_2 &= (ae^{i\psi_1} - ib)/\sqrt{v}, \\ \partial(\mu P_1)/\partial\alpha_3 &= (ae^{2i\psi_1} + ibe^{i\psi_1})/\sqrt{v}, & \partial(\mu P_2)/\partial\alpha_1 &= -ib/\sqrt{v}, \\ \partial(\mu P_2)/\partial\alpha_2 &= (2a + ibe^{-i\psi_1})/\sqrt{v}, & \partial(\mu P_2)/\partial\alpha_3 &= ib/\sqrt{v}, \\ \partial(\mu P_3)/\partial\alpha_1 &= ae^{-2i\psi_1}/\sqrt{v}, & \partial(\mu P_3)/\partial\alpha_2 &= -ae^{-i\psi_1}/\sqrt{v}, \\ \partial(\mu P_3)/\partial\alpha_3 &= (a - 2ib e^{-i\psi_1})/\sqrt{v}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Составив теперь уравнение (1.17), легко найдем, что его корни оказываются одинаковыми для обоих решений (2.10):

$$\kappa_1 = -2\mu a, \quad \kappa_{2,3} = \mu[-a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}] \quad (2.12)$$

и имеют отрицательные вещественные части, если только $a > 0$, что обычно и предполагается.

Таким образом, в рассматриваемом случае, вне зависимости от соотношения между частотой колебаний маятников ω и частотой свободных колебаний платформы $p_x = \sqrt{c_x/M}$, устойчиво как синфазное, так и противофазное синхронное движение маятников; при этом, как нетрудно видеть, в случае противофазных колеба-

ний платформа остается практически неподвижной, т. е. имеет место парадокс неработающих связей (см. § 3 Введения и п. 7 § 14 гл. 3).

В работе [60] показано, что этот результат распространяется на случай, когда платформа имеет не одну, как здесь предположено, а три существенные степени свободы. Как отмечалось во Введении, противофазные синхронные колебания двух номинально одинаковых часов и наблюдались Гюйгенсом в его известных опытах, а синфазные и противофазные — в опытах, поставленных в институте «Механобр».

§ 3. Некоторые основные закономерности самосинхронизации маятниковых часов, их отличие от закономерностей самосинхронизации неуравновешенных роторов (вибровозбудителей)

Некоторые закономерности синхронизации устройств типа маятниковых часов являются общими с закономерностями синхронизации механических вибровозбудителей (см. § 14 гл. 3) и других динамических систем (см. § 2 гл. 6). В частности, маятниковые часы с одинаковыми или достаточно близкими основными параметрами обычно самосинхронизируются; при соответствующих условиях имеет место эффект усреднения парциальных частот. Уже отмечалось, что для маятников, как и для вибровозбудителей, имеет место парадокс неработающих связей — возможны синхронные режимы, при которых платформа остается практически неподвижной.

Вместе с тем многие важные закономерности самосинхронизации часов существенно отличаются от закономерностей синхронизации вибровозбудителей. В частности, как указано в § 2, характер устойчивых фазировок маятников может слабо зависеть или вообще не зависеть от числа степеней свободы системы связи (т. е. платформы, на которой закреплены часы). Наиболее же существенное отличие состоит в том, что, как отмечено еще Гюйгенсом (см. Введение), обычно *самосинхронизироваться могут лишь часы с достаточно близкими парциальными частотами, тогда как в случае вращающихся роторов самосинхронизация может иметь место и при весьма сильно различающихся парциальных угловых скоростях* *). Частично это обстоятельство связано с другим практически важным отличием: в случае самосинхронизации колеблющихся объектов, к которым относятся и маятниковые часы, при прочих равных условиях от одних объектов к другим может передаваться значительно меньшая мощность, чем в случае вращающихся роторов (вибровозбудителей). А именно, как можно пока-

*) См. сноску на стр. 203.

заять, эта мощность имеет теперь порядок $N'_{\max} = m\varepsilon A_1 \omega^3 \varphi_0$ (m — масса, ε — длина маятника, A_1 — амплитуда колебаний платформы, φ_0 — угловая амплитуда колебаний маятника, ω — синхронная частота колебаний), тогда как в случае вращающихся роторов было $N_{\max} = m\varepsilon A_1 \omega^3$ (см. § 6 гл. 3). Поэтому, если принять величины m , ε , A_1 и ω в обоих случаях одинаковыми, то получим $N'_{\max}/N_{\max} = \varphi_0$. Таким образом, если, например, $\varphi_0 = 1/10 \approx 5,7^\circ$, то $N'_{\max}/N_{\max} = 1/10$ и в условиях примера п. 1 § 6 гл. 3 вместо $N_{\max} = 800$ кВт получим всего $N'_{\max} = 80$ кВт. Это обстоятельство не позволяет в настоящее время непосредственно использовать явление самосинхронизации маятников в грубых энергонапряженных технических системах столь же эффективно, как самосинхронизацию вращающихся роторов (см. § 15 гл. 3). Разумеется, однако, что сказанное не следует понимать абсолютно: видимо, найдутся случаи, когда ограниченная энергопередача между колеблющимися объектами окажется вполне достаточной; не исключено также, что энергопередачу удастся усилить за счет тех или иных усовершенствований.

§ 4. О синхронизации колебаний лопаток турбомашин

Экспериментально обнаружено, что при определенных условиях возникают устойчивые синхронные колебания лопаток турбомашин, приводящие к ряду весьма нежелательных эффектов. Этот факт представляет собой, таким образом, еще один случай, когда явление синхронизации оказывается вредным.

Ф. Ф. Фазуллин исследовал самосинхронизацию лопаток, рассматривая их как квазилинейные осцилляторы (генераторы), образующие механическую систему с циклической симметрией [96, 272]. Генерирование колебаний происходит при этом за счет энергии набегающего потока, т. е. речь идет об аэроупругих эффектах; связь между колебаниями лопаток, особенно существенная для рядом расположенных лопаток, также обусловлена в основном их взаимодействием через поток (связь через диск, на котором закреплены лопатки, оказывается менее существенной). Исследование подтвердило, что самосинхронизация непременно имеет место, если парциальные частоты лопаток мало отличаются друг от друга. Поэтому эффективным средством борьбы с синхронными автоколебаниями является преднамеренное введение взаимной отстройки основных частот собственных колебаний соседних лопаток в решетке. В рассматриваемых системах возможна также и внешняя синхронизация лопаток, обусловленная окружающей неравномерностью потока.

Глава 6

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ, РАДИОТЕХНИКЕ И РАДИОФИЗИКЕ

§ 1. Синхронизация при параллельной работе электрических машин

Задача об устойчивости стационарных режимов параллельной работы нескольких синхронных электрических машин является одной из наиболее важных конкретных проблем теории синхронизации динамических систем *); этой проблеме посвящено значительное число интересных исследований, наиболее ранними из которых являются работы Ф. О. Оллендорфа и В. Петерса [322], Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [157], П. С. Жданова [126], А. А. Горева [101]. В общей постановке задача столь сложна, что многие ее существенные стороны до сих пор остаются не изученными. В частности, почти не рассмотрены случаи, когда вопрос об устойчивости приводится к исследованию системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Обзор современного состояния проблемы можно найти в работах [136—138, 253].

Рассмотрим вначале постановку задачи о параллельной работе некоторого числа k генераторов $G_1, \dots, G_k$ на общую нагрузку. Состояние s -го генератора характеризуется одной вращательной координатой — углом поворота ротора по отношению к статору φ_s , а также совокупностью колебательных фазовых координат $x_1^{(s)}, \dots, x_{r_s}^{(s)}$, которыми могут являться как электрические, так и механические величины.

Пусть сначала каждый генератор работает на независимые нагрузки $R_1, \dots, R_k$, состояние которых характеризуется фазовыми

*) Заметим, что под синхронизацией в электротехнике обычно понимают систему операций по введению в синхронный режим (устойчивый в ограниченной части фазового пространства — см. ниже) подключаемой синхронной машины. Говоря же об устойчивости параллельной работы нескольких электрических машин, обычно имеют в виду синхронизацию в том смысле, в каком этот термин употребляется в настоящей книге.

координатами $u_1^{(s)}, \dots, u_{v_s}^{(s)}$ (рис. 41, а). Тогда мы имеем k независимых автономных систем, в которых при определенных условиях устанавливаются движения вида

$$\varphi_s = \omega_s t + \psi_s(\omega_s t), \quad x_j^{(s)} = x_j^{(s)}(\omega_s t), \quad u_\rho^{(s)} = u_\rho^{(s)}(\omega_s t), \quad (1.1) \\ (j = 1, \dots, r_s; \quad \rho = 1, \dots, v_s; \quad s = 1, \dots, k),$$

где ψ_s , $x_j^{(s)}$ и $u_\rho^{(s)}$ — периодические функции времени t с периодом $2\pi/\omega_s$, а каждое из ω_s — постоянная, которую можно назвать *парциальной частотой генератора*, отвечающей данной нагрузке

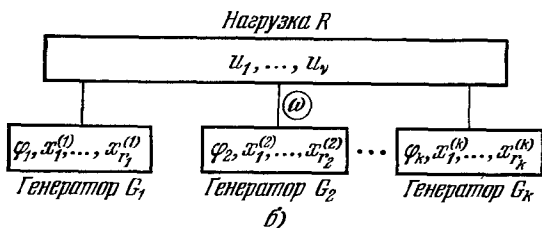
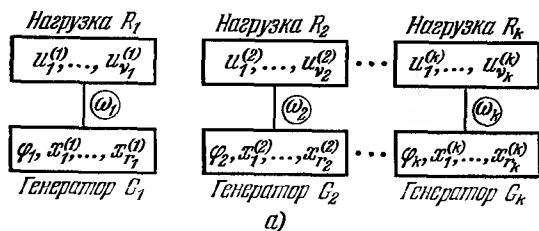


Рис. 41.

R_s . Вследствие неодинаковости нагрузок R_s , неточностей изготовления, а также неидеальности регуляторов частоты ω_s для различных генераторов, вообще говоря, будут различными.

Предположим теперь, что все генераторы включены параллельно для работы на общую нагрузку R , состояние которой характеризуется фазовыми координатами $u_1, \dots, u_v$ (рис. 41, б). Необходимым условием нормальной работы системы является установление в ней режима работы с некоторой общей частотой ω — синхронной частотой. Несомненным «подарком природы», зачастую не осознаваемым, является тот факт, что подобный синхронный режим оказывается устойчивым (по крайней мере в малом «сам по себе», в силу внутренних свойств системы «генераторы — нагрузка»). Иными словами, и здесь имеет место тенденция к синхронизации. Она обусловлена теми же общими причинами, кото-

рые указаны в § 9 гл. 10 и в §§ 4 и 7 гл. 12 — периодическим характером зависимости моментов взаимодействия между вращающимися роторами от взаимных углов поворота $\varphi_s - \varphi_j$. Условиями действительного установления синхронного режима работы генераторов на общую нагрузку обычно являются малость различий в парциальных частотах ω_s и «правильность введения генераторов в синхронизм». Первое требование обеспечивается достаточной точностью регуляторов. Второе же связано с тем, что «область притяжения» синхронного режима в фазовом пространстве системы обычно ограничена, т. е. режим устойчив, например, в малом, но не устойчив в целом. Отметим, что в практике известны случаи выпадения генераторов из синхронизма вследствие тех или иных возмущений в системе. В этих случаях возникали нежелательные биения напряжения, а иногда и серьезные аварии агрегатов.

Итак, основная задача о параллельной работе генераторов заключается в установлении условий, при которых, несмотря на возможное различие парциальных частот ω_s , в объединенной системе устанавливается режим с общей синхронной частотой ω . Иными словами, и в данном случае речь идет об основной задаче теории синхронизации — выяснении условий существования и устойчивости движений совокупной системы вида

$$\varphi_s = \omega t + \psi_s(\omega t), \quad x_j^{(s)} = x_j^{(s)}(\omega t), \quad u_\rho = u_\rho(\omega t) \\ (j = 1, \dots, r_s; \quad \rho = 1, \dots, v; \quad s = 1, \dots, k), \quad (1.2)$$

где ψ_s , $x_j^{(s)}$ и u_ρ — периодические функции времени t с общим периодом $2\pi/\omega$, а ω — постоянная, которая точно заранее неизвестна.

Вполне аналогичным образом ставится задача о нормальной работе энергетических систем, каждая из которых содержит несколько синхронных машин: по-прежнему речь идет об исследовании условий существования и устойчивости движений вида (1.2) в случае, когда парциальные частоты ω_s отдельных систем, вообще говоря, различны.

Особый класс задач о синхронизации связан с электротехническими способами обеспечения одинаковости углов поворота нескольких валов, каждый или несколько из которых приводятся во вращение от тех или иных двигателей (не обязательно электрических). Речь идет о системах типа электрического вала, достаточно подробно описанных в литературе (см., например [316]).

Для правильного и экономичного выбора параметров системы электрического вала, вообще говоря, необходимо решить задачу о синхронизации нескольких связанных объектов, подобной тем задачам, о которых говорилось выше: динамические (а не только статические) особенности объектов, связанных с каждым из валов, естественно, могут существенно влиять на значения парамет-

ров системы, обеспечивающих наличие синхронного и синфазного вращения валов. Механические вибровозбудители являются одними из объектов, для которых представляет интерес решение задачи о синхронизации и фазировке посредством электрического вала (см. п. 3 § 11 гл. 3).

Как правило, хотя и не всегда, уравнения движения систем с электрическими машинами могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа — Максвелла, представляющих обобщение уравнений Лагранжа второго рода на электромеханические системы. Мы не приводим здесь этих дифференциальных уравнений; в общем случае они столь сложны, что само составление их представляет нетривиальную задачу, которая до сих пор не получила окончательного решения.

В переменных ψ_s , $x_j^{(s)}$, u_p и $\tau = \omega t$ задача о параллельной работе электрических синхронных машин, как и все рассмотренные выше задачи о синхронизации, приводится к исследованию условий существования и устойчивости периодических (с периодом 2π) решений некоторой системы дифференциальных уравнений, правые части которых — также периодические функции $\tau = \omega t$ с периодом 2π . Впрочем подавляющее большинство изученных до сих пор систем таково, что указанные уравнения могут быть в результате ряда допущений преобразованы к переменным, для которых правые части уравнений не содержат время в явном виде, а установившимся режимам отвечают постоянные значения новых переменных*). Естественно, что при этом, как отмечалось выше, анализ устойчивости сводится к рассмотрению системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Значительные упрощения могут быть достигнуты благодаря тому, что дифференциальные уравнения параллельно работающим электрическим машинам и энергетическим системам допускают эффективное введение малых параметров, причем это обусловлено не только характером связей между синхронизируемыми объектами, но и существенным различием в порядках постоянных времени, характеризующих процессы в системе [137, 286].

Помимо сформулированной выше основной задачи, в теории параллельной работы синхронных электрических машин существенный интерес представляет также вопрос об изучении условий захвата в синхронный режим подключаемой к работающей сети синхронной машины, а также исследование возникающего при этом переходного процесса. Эти достаточно трудные в общей постановке задачи, которые еще мало изучены, по существу, связаны с рассмотрением поведения системы «в целом».

*) Это объясняется тем, что рассматриваются такие режимы работы машин, которые с достаточной степенью точности могут быть сведены к так называемым симметричным.

Заметим далее, что задача о синхронизации электрических генераторов часто ставится и решается как задача о внешней синхронизации, т. е. предполагается, что один или несколько генераторов системы значительно более мощные, чем все прочие, и поэтому их движение заранее задано и не зависит от поведения остальных объектов. При этом, естественно, синхронная частота ω совпадает с частотой колебаний, генерируемых «мощными» генераторами.

§ 2. Синхронизация ламповых и полупроводниковых генераторов

1. Краткий обзор развития и состояния проблемы. Ламповый генератор представляет собой автоколебательную систему, содержащую электрический колебательный контур и электронную лампу, в которой энергия источника постоянного тока преобразуется в энергию незатухающих электрических колебаний. В последние годы вместо электронных ламп в основном используются полупроводниковые приборы, например транзисторы. Однако принципиального отличия между ламповыми и полупроводниковыми генераторами нет, и поэтому в данном параграфе, если это не оговаривается особо, мы будем под термином «генераторы» понимать как те, так и другие. Различают два основных типа генераторов: генераторы почти гармонических колебаний, процессы в которых описываются квазилинейными дифференциальными уравнениями (генераторы томсоновского типа, или квазигармонические генераторы) и *релаксационные генераторы*, колебания в которых существенно отличаются от гармонических и даже могут иметь разрывный характер.

Проблема синхронизации взаимно связанных генераторов имеет большое прикладное значение, в частности для радиотехники и биофизики (см. п. 4).

Имеется значительное число работ, начало которых было положено известными исследованиями Е. Эпплтона [305], Ван-дер-Поля [334, 335], А. А. Андропова и А. А. Витта [6], где задача о синхронизации ламповых генераторов решалась в наиболее простой постановке — как задача о внешней синхронизации (захватывании) одного генератора заданным периодическим воздействием. Обширную библиографию, а также изложение оригинальных результатов можно найти в книге [10], в трудах Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, 1963), в монографиях А. Н. Малахова [181], А. Г. Демьянченко [112] и П. С. Ланды [171].

Естественно, что сведения задачи о взаимной синхронизации генераторов к вырожденной задаче о захватывании возможно далеко не всегда, особенно в случае, когда взаимодействующие генераторы обладают сравнимой мощностью. Поэтому все большее внимание уделяется исследованию взаимной синхронизации нескольких генераторов. Одна из первых работ данного направления принадлежит А. Г. Майеру [319]. В ней, как и в появившейся несколько позднее работе В. И. Гапонова [98], рассмотрены два связанных томсоновских генератора с мягким возбуждением колебаний.

Взаимная синхронизация двух генераторов томсоновского типа рассмотрена К. Ф. Теодорчиком [264]. Особое внимание в этой работе уделено взаимной синхронизации почти одинаковых генераторов. Было показано, что в этом случае при изменении расстройки возможны скачки амплитуды и частоты, которые впоследствии наблюдались Н. И. Есафовым [124]. В работе И. В. Акаловского [2] взаимная синхронизация двух генераторов изучена путем рассмотрения частотнофазовых диаграмм.

Задачи о взаимной синхронизации двух квазилинейных и существенно нелинейных осцилляторов изучались Г. Коломбо и Г. Дживанини. Краткий обзор этих исследований и библиографические ссылки приводятся в докладе [154]. Взаимная синхронизация двух генераторов рассматривалась также Суэзакэ Тэруо и Мори Шизуакэ [331].

Взаимная синхронизация двух индуктивно связанных отражательных клистронов рассмотрена Р. В. Хохловым в работе [289]. Краткая синхронизация в двухконтурном генераторе изучена Г. М. Уткиным [268]. Н. Мипорский изучил задачу о взаимной синхронизации двух генераторов квазигармонических колебаний с помощью метода, названного им стробоскопическим [194] (см. § 5 гл. 11). Ранее близкая задача изучалась С. В. Беллюстиным [26], использовавшим метод Пуанкаре.

Взаимная синхронизация трех слабо связанных ламповых генераторов, по-видимому, впервые была подробно рассмотрена В. Н. Парыгиным [226, 227], использовавшим метод Ван-дер-Поля и прием приближенного решения, предложенный Р. В. Хохловым [288]. В. Н. Парыгиным изучен как случай далеких по мощности генераторов, так и случай генераторов близкой мощности. Применение ряда приближенных приемов позволило автору построить области существования и устойчивости синхронных режимов генераторов в зависимости от их взаимных расстроек и других параметров системы; результаты были подтверждены экспериментальным исследованием.

Систематическое рассмотрение ряда задач о захватывании и взаимной синхронизации нескольких генераторов приводится в монографии П. С. Ланды [171].

Взаимная синхронизация двух связанных релаксационных генераторов (мультивибраторов) рассматривалась А. С. Бремзенем и И. С. Файнбергом [73], причем были обнаружены режимы кратной синхронизации и показана возможность генерирования колебаний связанной системой в случае, когда каждый из генераторов в отдельности не возбуждается. Пренебрежение так называемыми паразитными степенями свободы привело авторов к необходимости рассматривать колебания системы как разрывные, причем наряду с известной гипотезой скачка пришлось сделать дополнительные предположения о характере поведения системы. Эти предположения (вне связи с задачей о синхронизации) обоснованы Л. В. Родыгиным в работе [244] путем рассмотрения системы с «паразитными емкостями».

Ряд задач о синхронизации томсоновских и релаксационных генераторов рассмотрен П. Н. Занадворовым [128, 129] и Г. А. Сидоровой [257, 258] посредством метода точечных отображений.

Задачи о взаимной синхронизации генераторов рассмотрены В. П. Рубаником и Ю. И. Марченко [186, 187, 248]. Особенно подробно в указанных исследованиях, выполненных с помощью асимптотического метода, изучено влияние на процесс синхронизации наличия запаздывания в элементах связи между контурами генераторов. Это направление, начало которому было положено, по-видимому, в работах Б. Н. Горожанкина [103] и Г. Н. Рапопорта [243], возникло, в частности, потому что в виде запаздывания часто идеализируется (с целью упрощения исследования) действие волновых связей между генераторами. Работы данного направления суммированы в книге [248].

В ряде работ рассмотрена интересная проблема о взаимодействии и синхронизации большого числа взаимно связанных генераторов в связи с альтернативой «упорядоченность (в частности, синхронизация) — стохастичность». Результаты некоторых из этих работ рассмотрены в обзоре [240] (см. также п. 2 и гл. 9).

Захватывание и взаимная синхронизация генераторов при наличии флуктуаций рассмотрены в монографии Р. Л. Стратоновича [261] и в уже упоминавшихся монографиях А. Н. Малахова [181] и П. С. Ланды [171].

Интерес к проблеме взаимной синхронизации многих генераторов в последнее время стимулируется исследованиями по биофизике и биологии; о некоторых из этих работ говорится в гл. 8.

Приведенный краткий обзор работ в области синхронизации генераторов не претендует на полноту и систематичность; более подробно о некоторых из работ будет сказано ниже в данном параграфе, а также в гл. 8 и 9.

Наличие упомянутых монографий с систематическим изложением результатов позволяет ограничиться ниже лишь краткой характеристикой задач, указанием некоторых основных закономерностей и главных областей приложения синхронизации генераторов.

2. Генераторы томсоновского типа *) (квазилинейные автогенераторы Ван-дер-Поля). Наиболее распространенной моделью генераторов колебаний, близких к гармоническим, т. е. генераторов томсоновского типа, являются так называемые автогенераторы Ван-дер-Поля, описываемые дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \tilde{\omega}^2 x = \mu a' (1 - \nu x^2) \dot{x}, \quad (2.1)$$

также получившим название *уравнения Ван-дер-Поля* (ω , a' , ν и μ — положительные постоянные, причем μ в данном случае считается малым параметром; при больших μ автоколебания, описываемые уравнением (2.1), носят характер релаксационных). Уравнение (2.1) соответствует простейшей автоколебательной системе: положение равновесия $x=0$ для этого уравнения неустойчиво, как и положение равновесия для близкого к (2.1) при малых x линейного уравнения $\ddot{x} - \mu a' \dot{x} + \omega^2 x = 0$; напротив, при больших x уравнению (2.1) соответствуют затухающие колебания (слагаемое $\mu a' \langle (1 - x^2) \rangle$ отрицательно); автоколебаниям (предельному циклу) соответствует единственное периодическое решение уравнения (2.1), характеризующееся некоторыми «промежуточными» значениями x :

$$x = (2/\sqrt{\nu}) \cos \tau + O(\mu). \quad (2.2)$$

Если имеется некоторое число k генераторов с различными значениями параметров $\tilde{\omega}$, a' , μ и ν , то они будут генерировать колебания, вообще говоря, различных частот. Если же генераторы связаны в единую систему, описываемую, например, уравнениями вида

$$\ddot{x}_s + \tilde{\omega}_s^2 x_s = \left[a_s \tilde{\omega} (1 - \nu_s x_s^2) \dot{x}_s + \sum_{j=1}^k (b_{sj}^{(2)} \ddot{x}_j + b_{sj}^{(1)} \tilde{\omega} \dot{x}_j + b_{sj}^{(0)} \tilde{\omega}^2 x_j) \right] \quad (s = 1, \dots, k), \quad (2.3)$$

где $b_{sj}^{(q)}$ и $\tilde{\omega}$ — некоторые постоянные, о смысле которых сказано ниже, то в такой системе может возникнуть синхронизация,

*) См. [57].

т. е. колебания с одинаковой частотой ω или с соизмеримыми частотами $n_j\omega$ (n_j — целые положительные числа); возможна и самосинхронизация на комбинационных частотах (см. § 1 гл. 1). Уравнения (2.3), очевидно, соответствуют предположению о линейности связей между генераторами. При этом слагаемые с $b_{sj}^{(2)}$ отвечают индуктивной связи, с $b_{sj}^{(1)}$ — связи через омическое сопротивление, а с $b_{sj}^{(0)}$ — емкостной связи; соответствующие названия носят и коэффициенты $b_{sj}^{(2)}$, $b_{sj}^{(1)}$ и $b_{sj}^{(0)}$.

Рассмотрим синхронизацию автогенераторов Ван-дер-Поля в случае чисто индуктивной связи, когда $b_{sj}^{(1)} = 0$, $b_{sj}^{(0)} = 0$, $b_{sj}^{(2)} = b_{sj}$. Этот случай, конечно, является в известном смысле вырожденным; изучение общего случая не представит особых затруднений. Рассматривая здесь простую (некратную) синхронизацию, будем предполагать, что частоты малых свободных колебаний ω_s (назовем их *парциальными частотами*) почти одинаковы, т. е. примем

$$\tilde{\omega}_s^2 = \tilde{\omega}^2 (1 - \chi_s) \quad (2.4)$$

подобно тому, как это было сделано при рассмотрении задачи Гюйгенса (см. формулу (4.3) гл. 5 и пояснение к ней).

Наконец, будем считать генераторы близкими к линейным и слабо связанными. Тогда после перехода к безразмерному времени $\tau = \tilde{\omega}t$ система (2.3) может быть записана в виде

$$\frac{d^2 x_s}{d\tau^2} + x_s = \mu \Phi_s \left(\frac{dx_s}{d\tau}, x_s; \frac{d^2 x_1}{d\tau^2}, \dots, \frac{d^2 x_k}{d\tau^2} \right) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (2.5)$$

где

$$\mu \Phi_s = a_s (1 - x_s^2) \frac{dx_s}{d\tau} + \chi_s x_s + \sum_{j=1}^k b_{sj} \frac{d^2 x_j}{d\tau^2}. \quad (2.6)$$

В результате замены переменных

$$x_s = y_s + y_{k+s}, \quad \dot{x}_s = i(y_s - y_{k+s}) \quad (2.7)$$

система уравнений (2.5) преобразуется к канонической форме

$$\dot{y}_s = \lambda_s y_s + \mu F_s \quad (s = 1, \dots, 2k), \quad (2.8)$$

соответствующей форме уравнений (3.1) гл. 10. При этом положено

$$\lambda_s = i, \quad \lambda_{k+s} = -i, \quad F_s = -\frac{i}{2} \Phi_s, \quad F_{k+s} = \frac{i}{2} \Phi_s \quad (s = 1, \dots, k). \quad (2.9)$$

Применим к системе (2.8) теорему § 3 гл. 10. Для этого заметим, что характеристические показатели порождающей системы

$$\dot{y}_s^0 = \lambda_s y_s^0 \quad (s = 1, \dots, 2k), \quad (2.10)$$

отвечающей уравнениям (2.8), являются критическими и образуют ведущую особую группу, причем указанная система допускает семейство периодических решений (с периодом 2π):

$$y_s^0 = \alpha_s e^{\lambda_s t} = \begin{cases} \alpha_s e^{it}, & s = 1, \dots, k, \\ \alpha_s e^{-it}, & s = k + 1, \dots, 2k, \end{cases} \quad (2.11)$$

зависящее от $2k$ произвольных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}$.

Составив выражения для порождающих функций $P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_{2k})$ и основные уравнения для определения параметров порождающего решения $\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}$ в соответствии с формулами (3.5) и (3.6) гл. 10 и равенствами (2.6)–(2.11), легко убедимся, что они в точности совпадут с уравнениями (4.15) гл. 5, относящимися к задаче Гюйгенса; совпадает с уравнением (4.17) указанной главы также соответствующее уравнение, от характера корней которого зависит решение вопроса об устойчивости движения. Различие состоит лишь в том, что теперь отпадает дополнительное условие устойчивости (4.19) гл. 5, поскольку система связей не вносит в систему дополнительной степени свободы; более сложную структуру имеет в задаче Гюйгенса и величина b_{sj} , соответствующая коэффициенту индуктивной связи.

Таким образом, здесь можно почти дословно (лишь заменяя слово «часы» или «маятники» на слово «генераторы») повторить все сказанное в конце § 1 и в § 2 гл. 5. В частности, на генераторы распространяется все сказанное о синхронизации почти одинаковых и одинаково связанных часов.

Одну из главных трудностей при конкретном анализе синхронизации томсоновских генераторов, как и в задаче о часах, представляет решение системы уравнений типа (1.15) для стационарных значений амплитуд и фаз колебаний в синхронных режимах, установление условий существования соответствующих решений (т. е. нахождение областей синхронизации в пространстве параметров), а также отбор решений, отвечающих устойчивым движениям. Для преодоления этой технической трудности предложен ряд приближенных приемов решения задачи, одним из которых является уже упоминавшийся метод Р. В. Хохлова [288]. Следует, однако, иметь в виду, что такие приемы пригодны лишь при выполнении некоторых ограничительных условий, в противном случае они могут привести к существенным ошибкам. Широкое применение в последние годы находят также методы непосредственного решения исходных дифференциальных уравнений на ЭВМ (см. ниже в данном пункте, а также § 2 гл. 8).

Синхронизация томсоновских генераторов характеризуется рядом примечательных закономерностей, описание которых можно найти в уже цитированных в п. 1 монографиях [171, 181, 247, 248]; см. также § 2 гл. 8.

Из числа таких закономерностей здесь отметим часто имеющее место сужение (при прочих равных условиях) областей существования и устойчивости синхронных режимов по мере увеличения числа генераторов k . Вместе с тем явления синхронизации при определенных условиях отчетливо наблюдаются даже в случае очень большого числа слабо взаимодействующих генераторов или вообще объектов типа нелинейных осцилляторов. На это обстоятельство обратили внимание еще Э. Ферми, Д. Паста и С. Улам, которые моделировали поведение осцилляторов под действием начального возмущения на цифровой вычислительной машине (см. § 3 главы VII книги [266]). Поведение системы оказалось резко не соответствующим равномерному распределению энергии по степеням свободы: как говорится в цитированной книге, в подобных системах «не очень-то много перемешивания». При этом, как явствует из описания хода экспериментов, движение осцилляторов сопровождалось явлениями синхронизации.

В качестве другого яркого примера можно сослаться на результаты работы Аизавы [304], изложенные в обзоре [240]. В этой работе также путем численного эксперимента изучалось поведение большого числа слабо связанных генераторов со случайным образом распределенными парциальными частотами ω_s ; в качестве плотности распределения было принято распределение Лоренца:

$$f(\omega) = \frac{g}{\pi [g^2 + (\omega - \omega_0)^2]}.$$

Система взаимодействующих генераторов описывалась уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{A}_s &= \gamma_s A_s (A_{s0}^2 - A_s^2) + \alpha_s (A_1, \dots, A_k; \varphi_1, \dots, \varphi_k), \\ \dot{\varphi}_s &= \omega_s + \beta_s (A_1, \dots, A_k; \varphi_1, \dots, \varphi_k) \quad (s = 1, \dots, k), \end{aligned}$$

представляющими собой обычные приближенные уравнения для амплитуд A_s и фаз φ_s , получаемые из исходных уравнений типа (2.3) в результате применения, например, метода медленно меняющихся амплитуд Ван-дер-Поля. При этом было принято

$$\begin{aligned} \gamma_s &= A_{s0} = 1, \quad \alpha_s = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [A_j \cos(\varphi_j - \varphi_s) - A_s], \\ \beta_s &= \frac{0,2}{k} \sum_{j=1}^k A_j \sin(\varphi_j - \varphi_s), \end{aligned}$$

что соответствует линейной связи между генераторами.

Результаты эксперимента представлены на рис. 42, где через $\psi = \varphi - \omega_0 t$ обозначены фазы, через e — квадраты амплитуд генераторов, а через T — период $2\pi/\omega_0$. Как видно, при значительном начальном разбросе амплитуд и фаз уже по прошествии 80 периодов устанавливается синхронный режим колебаний генераторов.

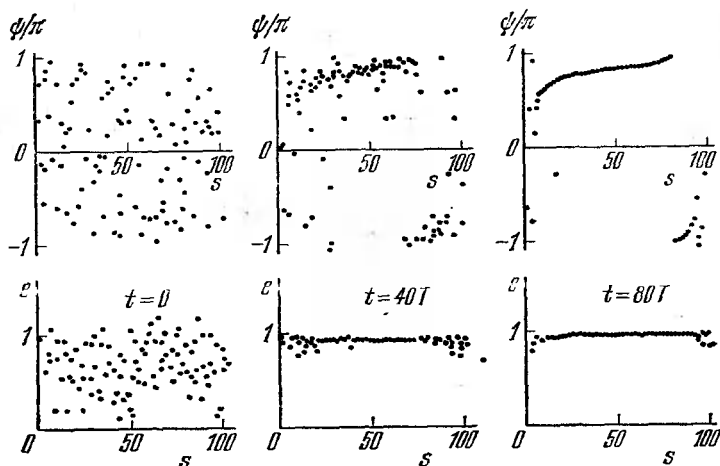


Рис. 42.

Заметим в заключение, что модели генераторов томсоновского типа широко используются при изучении явлений синхронизации не только в радиотехнике и радиофизике, но также и в механике и биологии (см. гл. 8). Напомним, в частности, что такая модель была, по существу, использована при рассмотрении синхронизации маятниковых часов и лопаток турбомашин.

3. Релаксационные генераторы. Исследование синхронизации релаксационных генераторов представляет интерес для ряда приложений как из области радиофизики и радиотехники, так и из области биофизики и биологии. Это исследование связано со значительно большими трудностями, чем рассмотрение синхронизации генераторов томсоновского типа, ибо должно быть основано на рассмотрении дифференциальных уравнений, нелинейных в порождающем приближении. В качестве математических моделей релаксационных генераторов используются уравнения Ван-дер-Поля (2.1) при «немалом» значении коэффициента $a = \mu a'$, уравнения Хиггинса (см. § 2 гл. 8), а также некоторые другие уравнения и системы уравнений.

При изучении релаксационных колебаний часто оказывается целесообразным рассматривать уравнения с малым параметром

при старших производных — так называемые сингулярно возмущенные уравнения. Это соответствует пренебрежению в исходном приближении некоторыми степенями свободы и обычно приводит к рассмотрению разрывных колебаний. В связи с изложенным исследование синхронизации релаксационных генераторов требует привлечения специальных методов и приемов.

Краткий обзор работ по синхронизации релаксационных генераторов, выполненных применительно к задачам радиофизики и радиотехники, приведен в п. 1; о работах, связанных с приложениями к химии и биологии, говорится в § 2 гл. 8; там же отмечены основные закономерности синхронизации релаксационных генераторов. К числу главных из этих закономерностей относится расширение областей синхронизации при переходе от квазилинейных колебаний к релаксационным вследствие изменения параметров генераторов, например, при увеличении параметра $a = \mu a'$ в уравнениях типа (2.1). Последнее связано со «сцеплением» колебаний генераторов по высшим гармоникам.

4. Приложения синхронизации генераторов. О системах фазовой автоподстройки частоты. Эффекты самосинхронизации и захватывания генераторов находят ряд важных практических применений (см., например, [112]).

Одно из таких применений — стабилизация частоты колебаний мощного генератора, характеризующегося нестабильной частотой, маломощным генератором с весьма высокой стабильностью частоты. В этом случае при простой (некратной) синхронизации синхронизированный генератор можно рассматривать как усилитель мощности, причем оказываются реально достижимыми очень большие коэффициенты усиления. В случае кратной синхронизации синхронизируемый генератор может играть роль делителя или умножителя частоты.

О возможностях использования эффекта самосинхронизации многих генераторов для получения колебаний высокостабильной частоты уже говорилось в п. 2. В ряде систем несколько самосинхронизирующихся генераторов используются просто для получения большой мощности генерируемых колебаний путем «сложения мощностей» отдельных генераторов.

Если во многих случаях удастся воспользоваться эффектом самосинхронизации генераторов, работающих на общую нагрузку, то встречаются также ситуации, когда необходимо прибегнуть к принудительной синхронизации. Одним из наиболее широко используемых средств такой синхронизации являются системы фазовой автоподстройки частоты, исследованию которых посвящена обширная литература; укажем, в частности, на монографию В. В. Шахильдяна и А. А. Ляховкина [298], а также на сборник [271]. В таких системах сигналы от синхронизируемых генераторов сравниваются по фазе в фазовом детекторе, после чего сигнал

ошибки используется для регулирования частоты колебаний. Системы фазовой автоподстройки частоты обладают рядом существенных достоинств, но они, естественно, более сложны, чем системы, основанные на использовании самосинхронизации.

§ 3. Синхронизация квантовых генераторов

Создание квантовых генераторов радиодиапазона (мазеров) и оптического диапазона (лазеров) является одним из наиболее существенных достижений современной технической физики [144]. За короткий промежуток времени приборы и устройства, основанные на использовании квантовых генераторов, нашли многие важные применения как в научных исследованиях, так и при решении технических задач, в том числе при создании приборов для весьма точного измерения отрезков времени и частот колебаний; в сверхчувствительных приемниках, примененных, в частности, для локации Венеры и Марса, а также для улавливания слабых сигналов, приходящих из дальних областей Вселенной; для создания тонких пучков мощного излучения в узком частотном диапазоне; для получения сверхкоротких импульсов света. Имеются основания ожидать завоевания квантовой электроникой и других важных областей: с ее помощью представляется возможным внести ряд коренных усовершенствований в технику передачи энергии и информации, в химическую технологию, в изучение и использование биологических явлений, в технику изучения и освоения управляемых термоядерных реакций.

В основе квантовой электроники лежит явление практически одновременного индуцированного выделения энергии возбужденными атомами вещества, в результате чего возникает интенсивное высококогерентное излучение. Это явление было предсказано А. Эйнштейном еще в 1917 г.; в тридцатых годах существенные мысли о его реализации были высказаны В. А. Фабрикантом. Однако начало интенсивного развития квантовой электроники относится к 1954—55 гг., когда американский физик Ч. Таунс и советские ученые Н. Г. Басов и А. М. Прохоров независимо и почти одновременно опубликовали статьи, в которых излагались основы теории мазеров и сообщалось о создании радиоспектроскопов высокой разрешающей силы с использованием молекулярных пучков. Позднее, в 1960 г., был создан первый лазер — квантовый генератор оптического диапазона.

В связи с разработкой ряда устройств, в которых используют квантовые генераторы, представляет интерес задача о взаимной синхронизации нескольких связанных тем или иным образом генераторов. Приведем постановку этой задачи для частного случая двух взаимодействующих молекулярных генераторов [185]. Если обозначить через x_1 и x_2 напряженности электрического поля со-

ответственно в резонаторах первого и второго генераторов, то при ряде упрощающих предположений процессы в генераторах могут быть описаны системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \frac{\omega_1}{Q_1} \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + 4\pi \ddot{P}_1(x_1) + \alpha_{12} x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{\omega_2}{Q_2} \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + 4\pi \ddot{P}_2(x_2) + \alpha_{21} x_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь ω_1 и ω_2 , Q_1 и Q_2 — соответственно частоты и добротности первого и второго резонаторов, α_{12} и α_{21} — коэффициенты связи между генераторами (предполагаемые малыми), $P_1(x_1)$ и $P_2(x_2)$ — усредненные по длине резонаторов поляризации активной среды, являющиеся достаточно сложными функциями своих аргументов.

Основная задача по-прежнему состоит в выяснении условий, при которых несмотря на различие параметров генераторов в последних будут возбуждаться колебания с общим периодом $2\pi/\omega$, т. е. в нахождении условий существования и устойчивости периодических решений уравнений (3.1) с периодом $T = 2\pi/\omega$. Как и в рассмотренных выше задачах о взаимной (внутренней) синхронизации, этот период заранее неизвестен и подлежит определению в процессе решения. Таким образом, в данной упрощенной постановке задача о взаимной синхронизации молекулярных генераторов во многом аналогична соответствующей задаче о ламповых генераторах, рассмотренной в § 2. Различие состоит лишь в особенностях структуры нелинейных функций, входящих в уравнения движения. Из указанной специфики вытекают своеобразные особенности поведения связанных молекулярных генераторов, изучение которых в различных случаях приводится в цитированной выше статье [185], а также в работах [21, 144, 186]. Уравнения колебаний в генераторах обсуждаются в статьях [177, 273].

Существенный прикладной интерес представляют также возможности принудительной синхронизации квантовых генераторов под действием внешних источников (см., например, работы [72, 193]).

§ 4. Синхронизация в распределенных системах и ее приложения

Во всех предыдущих разделах книги рассматривались преимущественно явления синхронизации в системах, которые могут быть идеализированы в виде систем с конечным числом степеней свободы. Между тем представляют существенный прикладной интерес также и случаи синхронизации в системах, характерные размеры которых велики или имеют тот же порядок, что и длины

распространяющихся или стоячих волн; естественно, что такие системы должны рассматриваться как системы с распределенными параметрами, процессы в которых обычно описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

В реальных средах между отдельными волнами различных длин, формами колебаний или, как иногда говорят, между собственными волнами, или модами колебаний, существуют разного рода взаимодействия, которые, как правило, можно рассматривать как слабые в смысле, указанном в § 2 гл. 1. При этом если частоты волн близки или близки к соизмеримым, то вследствие взаимодействий может возникнуть синхронизация мод и могут установиться определенные соотношения между их фазами. Подобные, а также и более сложной природы явления синхронизации действительно наблюдаются как для механических, так и для электромагнитных колебаний; с одной стороны, они могут найти (и уже находят) полезные применения, а с другой — могут вызывать помехи при работе некоторых приборов и устройств.

Наиболее полно в настоящее время изучена взаимная синхронизация мод в лазерах [92, 145, 170].

Важным приложением своеобразного эффекта синхронизации мод является генерация сверхкоротких импульсов света, что представляет собой единственный способ получения очень мощного лазерного излучения, правда, в течение коротких промежутков времени. Такое излучение может быть использовано, например, для сверхсжатия вещества и достижения высоких температур с целью получения управляемой термоядерной реакции [238].

На спектральном языке импульсная генерация означает одновременную генерацию большого числа мод с эквидистантным пространственно-временным спектром. Эквидистантность пространственно-временного спектра может возникнуть тогда, когда все моды распространяются с одинаковой скоростью, т. е. являются в этом смысле синхронизованными. Синхронизация по скорости большого числа мод может быть достигнута либо за счет нелинейного взаимодействия между ними, возникающего в активной среде лазера (внутренняя синхронизация) [92, 170], либо за счет внешнего параметрического воздействия на частоте, близкой к межмодовой, т. е. к разности частот двух соседних мод (внешняя синхронизация). Обычно такое воздействие осуществляется либо путем модуляции потерь резонатора лазера [314], либо путем модуляции усиления активной среды [279]. В математической постановке задачу о принудительной синхронизации мод можно свести к задаче о синхронизации большого числа генераторов на комбинационных частотах [171].

Примером вредного влияния эффекта синхронизации в распределенных системах может служить синхронизация встречных волн в лазерном гироскопе.

Лазерный гироскоп — это прибор, предназначенный для измерения угловой скорости вращения основания, на котором он установлен [92, 274]. В частности, лазерный гироскоп может применяться для измерения составляющей угловой скорости вращения Земли с целью ориентирования. Основой рассматриваемого гироскопа служит кольцевой газовый лазер, состоящий из газоразрядной трубки, помещенной в одно из плеч кольцевого трех- или четырехзеркального оптического резонатора (на рис. 43 изображена схема трехзеркального резонатора с зеркалами Z_1 , Z_2 и Z_3). В таком лазере при работе прибора распространяются навстречу друг другу две волны, частоты которых в общем случае могут быть различны. Например, при вращении кольцевого лазера вокруг оси, перпендикулярной плоскости его контура, вследствие изменения «эквивалентного параметра» контура в том и другом направлениях происходит «расщепление» собственных частот резонатора на величину, пропорциональную угловой скорости вращения:

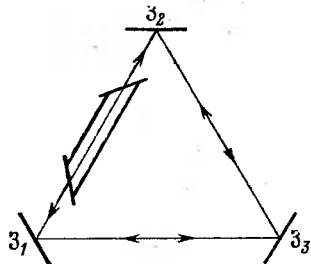


Рис. 43.

$$\Delta\omega_{1,2} = 8\pi nS/(\lambda L). \quad (4.1)$$

Здесь S — площадь контура лазера, L — периметр контура, n — число оборотов в единицу времени, λ — средняя длина волны генерируемого излучения.

Соотношение (4.1) и лежит в основе работы прибора. Однако вследствие взаимной синхронизации встречных волн равенство (4.1) может нарушаться при малых угловых скоростях вращения [27, 169, 274]. Это явление существенно ограничивает предельную чувствительность лазерного гироскопа и заставляет применять специальные меры для устранения вредного влияния указанного явления.

В одномодовом приближении задача о синхронизации встречных волн в кольцевом лазере сводится к задаче о взаимной синхронизации двух генераторов, описываемых уравнениями типа (3.1).

Глава 7

ЯВЛЕНИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. О замечательных целочисленных соотношениях между периодами обращений и вращений небесных тел и их истолковании с позиций теории синхронизации

Во Введении уже говорилось про обнаруженные астрономическими наблюдениями замечательные целочисленные соотношения (соизмеримости, «резонансы») между средними угловыми скоростями вращений и обращений (орбитальных движений) небесных тел; были приведены и примеры таких соизмеримостей в движениях Луны (законы Кассини), а также в совместном движении Земли, Венеры и Меркурия. В настоящее время известно очень большое число подобных соизмеримостей в Солнечной системе; подсчеты показывают, что их значительно больше, чем это можно объяснить, исходя из чисто вероятностных соображений (см., например, [202, 326]). Поэтому многие исследователи приходят к выводу, что такие соизмеримости носят неслучайный характер, а объясняются устойчивостью (по крайней мере в малом) соответствующих движений [22—24, 88, 100, 202], т. е. тенденцией к самосинхронизации. В ряде случаев путем более или менее приближенного анализа действительно удастся доказать эту устойчивость. Примером является установление существования и устойчивости тех решений дифференциальных уравнений, которые соответствуют знаменитым законам Кассини движения Луны. Важные результаты здесь принадлежат В. В. Белецкому (см. обзор в книге [23]); обзоры ряда интересных исследований и оригинальные результаты приводятся также в работах [100, 281] и в книгах [106, 111]).

Характерно, что при указанных соизмеримостях наблюдаются вполне определенные фазовые соотношения между движениями тел. Так, например, соединения спутников Сатурна Энцелада и Дионы неизменно происходят вблизи перицентра Энцелада (см. § 3). Как уже неоднократно отмечалось, наличие подобных фазо-

вых соотношений является типичным для явлений синхронизации.

В 1968 г. А. М. Молчанов выдвинул гипотезу о полной резонансности (синхронизированности) обращений больших планет Солнечной системы, показав, что периоды этих обращений (периоды средних движений) со сравнительно высокой точностью удовлетворяют некоторым линейным однородным соотношениям с небольшими целочисленными коэффициентами [202].

Для общего теоретического объяснения тенденции к соизмеримостям (синхронизации) орбитальных движений небесных тел М. Овенденом, Т. Фиджином и О. Графом в 1973 г. был предложен чисто эвристически так называемый «принцип наименьшего взаимодействия» (324). Согласно этому принципу, движения n тел происходят так, что среднее по времени значение возмущающей функции вдоль орбитальных траекторий имеет минимальное значение. Справедливость аналогичного эвристического принципа для n -ной системы — твердого тела, движущегося по эллиптической орбите вокруг притягивающего центра, — путем численного интегрирования была проверена В. В. Белецким и А. Н. Шляхтиным в 1976 г. [22], после чего В. В. Белецким и Г. В. Касаткиным было дано теоретическое обоснование поиску подобных принципов (см. [25], а также § 8 гл. 10).

Ниже мы покажем [63], что для решения рассматриваемых задач можно не придумывать специальные эвристические принципы: соответствующий принцип, в тех случаях, когда он действительно имеет место, непосредственно вытекает из интегрального критерия устойчивости (экстремального свойства) синхронных движений, полученного для систем с почти равномерными вращениями еще в 1960 г. достаточно строгим путем из общих дифференциальных уравнений движения подобных систем [40—42]. Позднее этот критерий, как отмечается в § 8 гл. 10, был обобщен и на многие другие системы (см. также § 6 гл. 12). Из интегрального критерия, во-первых, естественным путем вытекает выражение для функции, которая (в случае своего существования) минимизируется на устойчивых синхронных движениях (т. е. для потенциальной функции D), а во-вторых, следует вывод о тенденции рассматриваемых орбитальных систем к синхронизации в смысле, указанном в § 1 гл. 1. Заметим впрочем, что функция D может оказаться близкой к тем, к которым эвристическим путем пришли авторы работ [22, 324] (см. ниже).

В заключительной части главы будет показано, что результаты, вытекающие из интегрального критерия устойчивости, хорошо согласуются с рядом астрономических наблюдений и вычислений, а также что они свидетельствуют в пользу упомянутой гипотезы А. М. Молчанова и открывают некоторые новые возможности ее анализа.

§ 2. Потенциальная функция и интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений для небесномеханических орбитальных систем

Как нетрудно видеть, свободные орбитальные системы, описанные в п. 1 § 6 гл. 12, соответствуют рассматриваемым в небесной механике системам, состоящим из некоторого числа k свободных твердых тел $B_1, \dots, B_k$ (в простейшем случае — материальных точек), движущихся по замкнутым траекториям относительно некоторого центрального тела B_0 (в простейшем случае — также материальной точки), обладающего обычно значительно большей массой (рис. 44). Вращательные координаты тел $\varphi_s^0(t + \alpha_s)$ при отсутствии взаимодействия между телами (в более общем случае — между соответствующими степенями свободы) определены вследствие автономности с точностью до произвольных начальных фаз α_s (см. равенства (6.1) гл. 12).

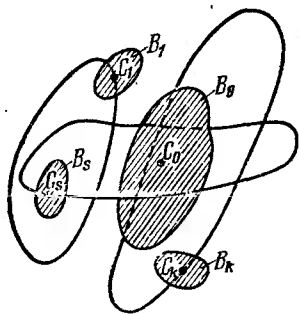


Рис. 44.

Основные уравнения (4.6) или (5.8) гл. 12, из которых определяются значения этих фаз в возможных синхронных движениях, имеют вид

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \frac{1}{e_s} \left(\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_s} + A_s \right) = 0 \quad (s = 1, \dots, k) \quad (2.1)$$

(как и в § 6 гл. 12, далее рассматриваем случай, когда $\varphi_s^0 = \varphi_s^{0*}$ — орбитальные координаты, число которых равно числу тел k). Здесь Λ_0 — усредненная за период $T = 2\pi/\omega$ синхронного движения функция Лагранжа системы связей, вычисленная на порождающих траекториях, а A_s — усредненные неконсервативные обобщенные силы, являющиеся в данном случае диссипативными силами, e_s — так называемая крутизна частотной характеристики.

Предположим сначала, что существует потенциал усредненных неконсервативных сил B , т. е. функция $B = B(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha_s} = A_s. \quad (2.2)$$

Тогда, как указывается в § 5 гл. 12, за потенциальную функцию D может быть принято выражение

$$D = -\sigma(\Lambda_0 + B), \quad (2.3)$$

где $\sigma = \operatorname{sgn} e_s$ — величина, определяемая характером анизотропии объектов, который предполагается одинаковым для всех s . Согласно интегральному критерию, устойчивые синхронные движения могут соответствовать точкам грубых минимумов функции D по разностям фаз $\alpha_s - \alpha_h$.

Для рассматриваемой орбитальной системы кинетическая энергия несомых связей $T^{(II)}$ и потенциальная энергия несущих связей $\Pi^{(I)}$ равны нулю, а потенциальная энергия несомых связей $\Pi^{(II)} = -U^{(II)}$, где $U^{(II)}$ — потенциал сил тяготения. Поэтому, согласно сказанному в § 5 гл. 12, в случае малости колебаний несущего тела выражение (2.3) для потенциальной функции представится в форме

$$D = [\langle (T^{(I)}) \rangle - \langle (U^{(II)}) \rangle - B] \sigma, \quad (2.4)$$

где $T^{(I)}$ — кинетическая энергия центрального (несущего) тела B_0 .

В случае, когда все тела представляют собой свободные тяготеющие точечные массы, имеем (см., например, [121])

$$U^{(II)} = \frac{1}{2} f \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^{k'} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \quad (2.5)$$

$$\Delta_{sj} = \sqrt{(x_s - x_j)^2 + (y_s - y_j)^2 + (z_s - z_j)^2};$$

$$h_s = -\frac{1}{2} m_s (f m_0 \omega_s)^{2/3}, \quad e_s = \frac{1}{\omega_s} \frac{dh_s}{d\omega_s} = -\frac{m_s}{3} (f m_0)^{2/3} \omega_s^{-4/3}, \quad (2.6)$$

$$\sigma_s = \operatorname{sgn} e_s = -1.$$

Здесь f — постоянная тяготения, Δ_{sj} — расстояние между массами m_s и m_j , h_s — полная энергия массы m_s в ее эллиптическом кеплеровском движении вокруг неподвижного притягивающего центрального тела, принимаемого также за точечную массу m_0 , ω_s — частота обращения массы m_s в указанном движении (эту частоту в небесной механике называют *средним движением* и обозначают через n_s), штрих при знаке суммы указывает на пропуск слагаемого, соответствующего $j=s$. Поскольку в данном случае $\sigma_s = -1$, т. е. объекты являются мягко анизохронными, то из формулы (2.4) получаем

$$D = \langle (U^{(II)}) \rangle - \langle (T^{(I)}) \rangle + B. \quad (2.7)$$

Именно такая функция должна минимизироваться (по фазам $\alpha_s - \alpha_j$) на устойчивых синхронных движениях тел m_s .

Если пренебречь величинами $\langle (T^{(I)}) \rangle$ и B , что соответствует предположению о значительно большей величине массы центрального тела m_0 по сравнению с массами $m_1, \dots, m_k$, а также

о малости диссипативных сил, то получится

$$D \cong \langle \langle U^{(II)} \rangle \rangle, \quad (2.8)$$

т. е. мы приходим к заключению о «приближенной минимальности» среднего потенциала взаимного тяготения масс в устойчивых синхронных движениях. Таким образом, эвристический принцип, предлагаемый в работе [324] (см. также [106]), действительно вытекает при соответствующих предположениях из ранее установленного в работах [40—42] интегрального критерия устойчивости синхронных движений.

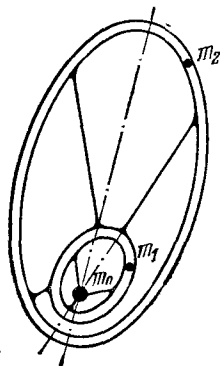


Рис. 45.

Напомним, что для рассмотренной свободной орбитальной системы условия устойчивости, выраженные интегральным критерием, являются лишь необходимыми. Эти условия будут и достаточными, если вместо свободной рассмотреть соответствующую несвободную систему, т. е. систему, в которой массы m_s движутся, например, по жестким эллиптическим каркасам (рис. 45). Конечно, такая несвободная система является достаточно грубой моделью планетных систем хотя бы потому, что уменьшение числа степеней свободы каждой массы m_s до одной приводит к смене характера анизохронизма объекта.

Действительно, в случае точечной массы m_s , движущейся в поле тяготения неподвижной центральной массы m_0 по заданной кривой, полная энергия

$$h_s = \frac{m_s V_{s0}^2}{2} - \frac{f m_0 m_s}{r_{s0}},$$

где V_{s0} и r_{s0} — соответственно модуль скорости и расстояние между массами m_s и m_0 в некоторый начальный момент времени. Поскольку теперь среднее движение ω_s не зависит от r_{s0} , а определяется только начальной скоростью V_{s0} , то

$$e_s = \frac{1}{\omega_s} \frac{dh_s}{d\omega_s} = \frac{1}{\omega_s} m_s V_{s0} \frac{dV_{s0}}{d\omega_s}.$$

Нетрудно показать, что $d\omega_s/dV_{s0} > 0$, т. е. что ω_s увеличивается при увеличении V_{s0} . Поэтому теперь, в отличие от (2.6), $e_s > 0$ и $\sigma_s = \text{sgn } e_s = 1$, т. е. объекты являются жестко анизохронными. Также жестко анизохронными являются твердые тела, вращающиеся вокруг некоторых фиксированных осей ($h_s = \frac{1}{2} I_s \omega_s^2$, $e_s = I_s > 0$, $\sigma_s = 1$).

В результате для несвободной (каркасной) системы на устойчивых синхронных движениях будет приближенно минимизироваться уже не средний потенциал сил тяготения $\langle(U^{(II)})\rangle$, а средняя потенциальная энергия

$$\langle(\Pi^{(II)})\rangle = -\langle(U^{(II)})\rangle,$$

т. е. средний потенциал $\langle(U^{(II)})\rangle$ на таких движениях будет иметь (также приближенно) не минимум, а максимум.

Заметим далее, что устойчивости описанной несвободной орбитальной системы соответствует, по терминологии А. М. Ляпунова, так называемая **условная устойчивость** соответствующей свободной орбитальной системы [178].

§ 3. Случай плоской точечной орбитальной системы.

Сопоставление результатов с данными некоторых астрономических наблюдений и вычислений

Получим детализированные выражения потенциальной функции $D \approx \langle(U^{(II)})\rangle$ для ряда случаев, когда орбиты всех тел $m_1, \dots, m_k$, рассматриваемых как точечные массы, лежат в одной плоскости; это условие достаточно хорошо выполняется для больших планет Солнечной системы и многих их спутников. Затем мы найдем путем использования интегрального критерия (экстремального свойства) возможные значения относительных фаз движения двух тел по орбитам в устойчивых синхронных (резонансных) движениях и сопоставим эти значения с данными некоторых астрономических наблюдений и вычислений.

При задании эллиптических орбит и движений тел по этим орбитам, соответствующих порождающему решению (так называемому *невозмущенному кеплеровскому движению*), будем использовать принятые в небесной механике величины и соответствующие обозначения (см., например, [121]); в случае, если эти обозначения совпадают с принятыми в остальной части книги обозначениями иных величин, снабдим их знаком «*».

Пусть неподвижный притягивающий центр (центральное тело m_0) расположен в некоторой точке O (рис. 46) и пусть ON — некоторое фиксированное направление («*линия узлов*»). Направления $O\xi_s$ к перигцентрам орбит («*линии апсид*») будем задавать углами ω_s^* («*угловыми расстояниями перигентов от узла*»). Эллиптическая орбита тела m_s задается тремя параметрами (элементами): углом ω_s^* , большой осью a_s и эксцентриситетом e_s . Положение тела на орбите определяется полярными координатами r_s и ν_s , причем полярный угол ν_s («*истинная аномалия*») отсчитывается от линии апсид $O\xi_s$.

Справедливы следующие разложения по степеням эксцентриситета e_s [121]:

$$\begin{aligned} r_s &= a_s [1 - e_s \cos n_s^* (t - \tau_s) + \dots], \\ v_s &= n_s^* (t - \tau_s) + 2e_s \sin n_s^* (t - \tau_s) + \dots, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где n_s^* — средние угловые скорости обращения тел по орбитам,

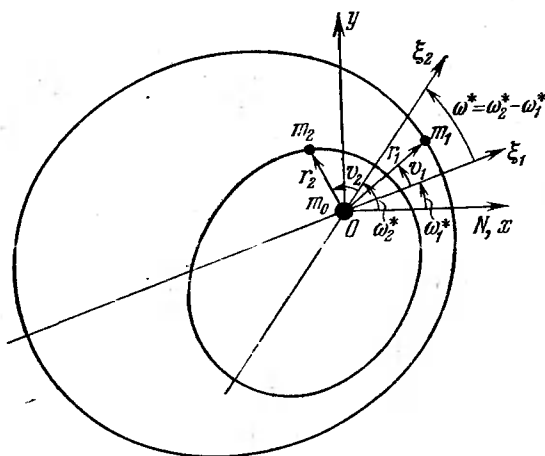


Рис. 46.

называемые в небесной механике *средними движениями* (в остальной части книги эти величины, представляющие собой частоты движений изолированных объектов, обозначались через ω_s или σ_s). Между n_s^* и a_s справедливы соотношения

$$2\pi/T_s = n_s^* = (fm_0)^{1/2} a_s^{-3/2}, \quad (3.2)$$

выражающие третий закон Кеплера (T_s — периоды обращений тел). Величина τ_s в выражении (3.1) представляет собой *момент прохождения тела m_s через перигентр*: при $t = \tau_s$ имеем $v_s = 0$.

Угловое положение тел m_s относительно неподвижного направления ON определяется углом

$$u_s = \omega_s^* + v_s = \omega_s^* + n_s^* (t - \tau_s) + 2e_s \sin n_s^* (t - \tau_s) + \dots, \quad (3.3)$$

называемым *аргументом широты*. Порождающее решение, таким образом, в рассматриваемой задаче может быть задано

выражениями

$$\begin{aligned} r_s &= a_s [1 - e_s \cos n_s^* (t - \tau_s) + \dots], \\ u_s &= \omega_s^* + n_s^* (t - \tau_s) + 2e_s \sin n_s^* (t - \tau_s) + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

($s = 1, \dots, k$).

Это решение содержит $4k$ произвольных постоянных: $3k$ постоянных a_s, e_s, ω_s^* , определяющих эллиптические орбиты тел, и k постоянных $\omega_s^* - n_s^* \tau_s$, играющих роль начальных фаз α_s в соотношениях общей теории; именно эти последние постоянные (или связанные с ними постоянные τ_s) и подлежат определению на основе интегрального критерия устойчивости. Напомним, что также фигурирующие в (3.4) постоянные n_s^* (средние движения) не являются независимыми, а выражаются через a , соотношениями (3.2).

Замечая, что декартовы координаты тел m_s определяются равенствами $x_s = r_s \cos u_s$ и $y_s = r_s \sin u_s$ (см. рис. 46), представим, согласно (2.5), выражение для функции $\langle (U^{(II)}) \rangle$ в форме

$$\langle (U^{(II)}) \rangle = \frac{1}{2} f \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^{k'} \left\langle \frac{m_s m_j}{\sqrt{r_s^2 + r_j^2 - 2r_s r_j \cos(u_s - u_j)}} \right\rangle \quad (3.5)$$

или при учете разложений (3.4) — в виде

$$\begin{aligned} \langle (U^{(II)}) \rangle &= \frac{1}{2} f \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^{k'} m_s m_j \left(\left\langle \frac{1}{\{a_s^2 + a_j^2 - 2a_s a_j \cos[(n_s^* - n_j^*)t + \alpha_{sj}]\}^{1/2}} \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + 2e_s \left\langle \frac{A_{sj}(t)}{\{a_s^2 + a_j^2 - 2a_s a_j \cos[(n_s^* - n_j^*)t + \alpha_{sj}]\}^{3/2}} \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где обозначено

$$\alpha_{sj} = -\alpha_{js} = \omega_s^* - \omega_j^* - n_s^* \tau_s + n_j^* \tau_j, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} A_{sj}(t) &= a_s^2 \cos n_s^* (t - \tau_s) - a_s a_j \{ \cos [n_j^* (t - \tau_j) + \omega_j^* - \omega_s^*] + \\ &\quad + \sin n_s^* (t - \tau_s) \sin [(n_s^* - n_j^*)t + \alpha_{sj}] \}, \end{aligned}$$

а невыписанные члены имеют относительно эксцентриситетов e_s порядок не ниже второго.

Выполнив операцию усреднения, получим

$$\begin{aligned} D &\approx \langle (U^{(II)}) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{f}{a} \sum_{s=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ n_s^* = n_j^*}}^{k'} \frac{m_s m_j}{\sqrt{1 - \cos \alpha_{sj}}} + \frac{f}{4} \sum_{s=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ n_s^*/n_j^* = l/(l \pm 1)}}^{k'} \frac{e_s}{a_s} \{ 2b_s^{(p_{sj})}(z_{js}) - \\ &\quad - z_{js} [3b_s^{(p_{js})}(z_{js}) - b_s^{(q_{sj})}(z_{js})] \} \cos(n_s^* \tau_s + p_{sj} \alpha_{sj}) + \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$z_{js} = a_j/a_s = (n_s^*/n_j^*)^{2/3}, \quad p_{sj} = n_s/(n_s - n_j), \quad q_{sj} = \\ = (2n_s^* - n_j^*)/(n_s^* - n_j^*), \quad (3.9)$$

а через $b_3^{(r)}(z) = b_3^{(-r)}(z)$ обозначены коэффициенты в разложении

$$(1 + z^2 - 2z \cos \lambda)^{-3/2} = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_3^{(r)}(z) \cos r\lambda, \quad (3.10)$$

называемые *коэффициентами Лапласа* и выражающиеся через полные эллиптические интегралы [259]; в (3.8) опущено не существенное для дальнейшего слагаемое, не зависящее от $\omega_s^* - n_s^* \tau$.

Соотношение $n_s^* = n_j^*$, записанное под первой двойной суммой, указывает на то, что в ней учитываются лишь слагаемые, соответствующие всем имеющимся телам с одинаковыми средними движениями n_s^* (а значит, согласно (3.2), также и с одинаковыми полуосями a_s). Соотношение $n_s^*/n_j^* = l/(l \pm 1)$, записанное под второй двойной суммой, указывает, что учитываются лишь слагаемые, соответствующие всем имеющимся парам тел, средние движения n_s^* и n_j^* которых относятся как последовательные целые числа (l — целое число, $l \neq 0$, $l \pm 1 \neq 0$).

Из выражения (3.8) следует, что в рамках проводимого рассмотрения в случае чисто кругового плоского движения тел возможна лишь простая (некратная) синхронизация; при эллиптических орбитах с малыми эксцентриситетами e , рассмотрение членов первого порядка относительно e в разложении усредненного потенциала $\langle\langle U^{(II)} \rangle\rangle$ позволяет учесть взаимодействия, которые могут привести к синхронизации тел со средними движениями, относящимися как последовательные целые числа («резонансы типа $n_s^*/n_j^* = l/(l \pm 1)$ »). Нетрудно убедиться, что если учесть члены более высокого порядка по e в разложении $\langle\langle U^{(II)} \rangle\rangle$, то будут учтены взаимодействия, могущие привести к синхронизации тел с $n_s^*/n_j^* = n/(n + q)$, где $q = 2, 3, \dots$. Разумеется, однако, что при малых эксцентриситетах указанные взаимодействия будут более слабыми, чем при $n_s^* = n_j^*$ и при $n_s^*/n_j^* = l/(l \pm 1)$, ибо соответствующие члены в разложении $\langle\langle U^{(II)} \rangle\rangle$ имеют относительно эксцентриситетов e более высокий порядок малости.

Рассмотрим подробнее простейшую орбитальную систему, состоящую всего из двух обращающихся тел ($k = 2$).

Пусть сначала орбиты круговые и $n_1^* = n_2^* = n^*$; тогда также и $a_1 = a_2 = a$. При этом согласно (3.8)

$$D \approx \langle (U^{(II)}) \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{f}{a} \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1 - \cos \alpha_{12}}} \quad (3.11)$$

и минимуму потенциальной функции соответствует значение

$$\alpha_{12} = \omega_1^* - \omega_2^* + n^* (\tau_2 - \tau_1) = \pi.$$

В данном случае можно положить $\omega_1^* = 0$ и $\omega_2^* = 0$, поскольку любую точку круговой орбиты можно принять за ее перицентр. Таким образом, условие устойчивости, вытекающее из интегрального критерия, выполняется для «противофазного» движения тел, т. е. для движения, в котором тела расположены по концам одного и того же диаметра окружности (рис. 47).

Рассмотрим теперь случай двух тел, движущихся в одном направлении по эллиптическим орбитам с малыми эксцентриситетами, причем предположим, что среднее движение второго тела происходит в два раза быстрее, чем среднее движение первого. Тогда согласно (3.2), (3.7) и (3.9) имеем

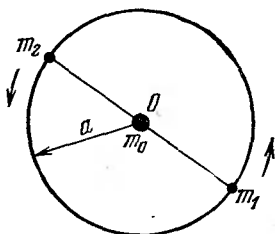


Рис. 47.

$$n_1^* = n^*, \quad n_2^* = 2n^*,$$

$$z_{12} = a_1/a_2 = (n_2^*/n_1^*)^{2/3} = 2^{2/3} = 1,59, \quad z_{21} = 1/z_{12} = 0,629;$$

$$\alpha_{12} = \omega_1^* - \omega_2^* - n^* \tau_1 + 2n^* \tau_2, \quad \alpha_{21} = \omega_2^* - \omega_1^* - 2n^* \tau_2 + n^* \tau_1;$$

$$p_{12} = \frac{n_1^*}{n_1^* - n_2^*} = -1, \quad p_{21} = \frac{n_2^*}{n_2^* - n_1^*} = 2, \quad q_{12} = \frac{2n_1^* - n_2^*}{n_1^* - n_2^*} = 0,$$

$$q_{21} = \frac{2n_2^* - n_1^*}{n_2^* - n_1^*} = 3, \quad (3.12)$$

и выражение (3.8) приводится в виду

$$\begin{aligned} \langle (U^{(II)}) \rangle = & \frac{f}{4} \frac{e_1}{a_2} z_{21} \{ 2b_3^{(1)}(z_{21}) - z_{21} [3b_3^{(2)}(z_{21}) - b_3^{(0)}(z_{21})] \} \cos(2n^* \tau - \omega^*) + \\ & + \frac{f}{4} \frac{e_2}{a_2} \{ 2b_3^{(2)}(z_{12}) - z_{12} [3b_3^{(1)}(z_{12}) - b_3^{(3)}(z_{12})] \} \cos 2(n^* \tau - \omega^*). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь обозначено

$$\tau^* = \tau_2^* - \tau_1^*, \quad \omega^* = \omega_2^* - \omega_1^*. \quad (3.14)$$

При $z_{12} = 1,59$ и $z_{21} = 0,629$ имеем следующие значения для коэффициентов Лапласа: $b_3^{(1)}(z_{12}) = 1,23$; $b_3^{(2)}(z_{12}) = 0,913$; $b_3^{(3)} = 0,649$; $b_3^{(0)}(z_{21}) = 6,03$; $b_3^{(1)}(z_{21}) = 4,82$; $b_3^{(2)}(z_{21}) = 3,66$. Подставив эти значения в выражение (3.13), находим окончательно

$$\begin{aligned} D &\approx \langle (U^{(\text{II})}) \rangle = \\ &= \frac{f}{4a_2} [4,11e_1 \cos(2n^*\tau - \omega^*) - 3,00e_2 \cos 2(n^*\tau - \omega^*)] \equiv \\ &\equiv \frac{f}{4a_2} \mathcal{M} \cos(2n^*\tau - \delta), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sqrt{16,9e_1^2 + 9,00e_2^2 - 24,7e_1e_2 \cos \omega^*}, \\ \mathcal{M} \cos \delta &= 4,11e_1 \cos \omega^* - 3,00e_2 \cos 2\omega^*, \\ \mathcal{M} \sin \delta &= 4,11e_1 \sin \omega^* - 3,00e_2 \sin 2\omega^*. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда в соответствии с интегральным критерием устойчивости (экстремальным свойством) следует, что устойчивому синхронному движению может соответствовать значение разности моментов прохождения телами через перицентры, определяемое выражением

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 = (\delta + \pi)/2n^*, \quad (3.17)$$

значению же $\tau = \delta/2n^*$ соответствует неустойчивое синхронное движение.

Рассмотрим два еще более частных случая. В первом случае предположим, что $e_1 = 0$, т. е. «внешнее» (наиболее удаленное от притягивающего центра) тело m_1 имеет в невозмущенном движении круговую орбиту (рис. 48, а). При этом можно, не нарушая общности, положить $\omega^* = \omega_2^* - \omega_1^* = 0$, ибо, как уже отмечалось, любую точку окружности можно принять за перицентр. Согласно (3.15) в данном случае

$$D \approx \langle (U^{(\text{II})}) \rangle = -f \frac{3,00}{4} \frac{e_2}{a_2} \cos 2n^*\tau$$

и устойчивому движению соответствует значение

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 = 0, \quad (3.18)$$

т. е. в устойчивом синхронном движении взаимное расположение тел таково, как показано на рис. 48, а. В астрономии и небесной механике в этом случае говорят, что *соединения и противостояния тел (при их наблюдении с центрального тела) происходят при прохождении внутренним телом своего перигея*.

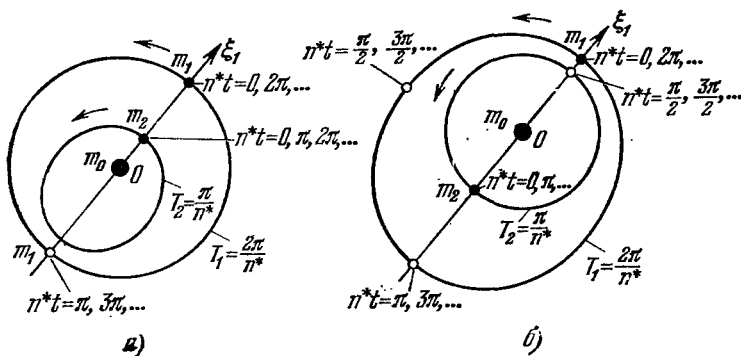


Рис. 48.

Во втором случае допустим, что $e_2 = 0$, т. е. окружностью является невозмущенная орбита внутреннего тела m_2 . Полагая, как и выше, $\omega^* = 0$, из (3.15) для этого случая получим

$$D \approx \langle (U^{(II)}) \rangle = f \frac{4,11}{4} \frac{e_1}{a_2} \cos 2n^* \tau$$

и найдем, что для устойчивого синхронного движения

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 = \pi / (2n^*). \quad (3.19)$$

Соответствующее такому движению взаимное расположение тел показано на рис. 48, б; говорят, что в этом движении *соединение тел происходит при прохождении внешним телом своего апогея, а противостояние — при прохождении им своего перигея*.

Сопоставим теперь полученные результаты с данными некоторых астрономических наблюдений и вычислений.

Как указывается, например, в работе [100], спутники Сатурпа Диона и Энцелад имеют периоды обращения соответственно $T_1 = 2,73691$ суток и $T_2 = 1,37028$ суток, т. е. отношение их средних движений $n_2^*/n_1^* = T_1/T_2 = 1,99734$ как раз весьма близко к двум. Орбиты обоих спутников лежат в одной плоскости, а их эксцентриситеты составляют соответственно $e_1 = 0,0021$ и $e_2 = 0,0045$. Если принять приближенно, что эксцентриситет Дионы $e_1 \approx 0$ (о возможной при этом погреш-

ности см. ниже), то будем иметь как раз первый из рассмотренных выше частных случаев, когда соединение тел в устойчивом движении должно происходить при прохождении внутренним телом своего перигентра. Этот результат вполне соответствует наблюдениям: последние свидетельствуют о том, что соединения Энцелада и Дионы всегда происходят вблизи перигентра Энцелада (см., например, [100]; отметим, что в цитированной работе приводятся качественные соображения в пользу устойчивости соответствующего движения спутников типа Энцелад — Диона).

Таблица 4

Элементы орбит Нептуна и Урана (на 7 января 1979 г.)

Планета	Элемент					
	Среднее движение n_s^*	Эксцентриситет e_s	Средняя аномалия эпохи M_{0s}	Долгота восходящего узла Ω_s	Долгота перигентра π_s	Наклонение i_s
Нептун ($s=1$)	0,0060	0,00984	196,89°	131,53°	61,63°	1,772°
Уран ($s=2$)	0,0117	0,0491	52,70°	74,01°	170,12°	0,771°

Рассмотрим теперь данные, относящиеся к двум планетам Солнечной системы — Урану и Нептуну, средние движения которых также относятся примерно как 2 : 1 ($n_2^*/n_1^* = 0,0117/0,0060$). В таблице 4 приводятся значения элементов, характеризующих положение и движение указанных планет на 7 января 1979 г.; эти значения взяты из издания [12].

Поскольку взаимное наклонение орбит $i = i_2 - i_1$ мало, то движение планет можно считать происходящим в одной плоскости. Кроме того, ввиду отсутствия среди больших планет Солнечной системы других планет с отношением средних движений к средним движениям Нептуна и Урана вида $l/(l \pm 1)$ (см. § 5; исключением является Плутон, однако, его масса более чем в 7000 раз меньше масс Урана и Нептуна) влиянием остальных больших планет на синхронизацию в системе Солнце — Нептун — Уран допустимо, согласно сказанному ранее, пренебрегать. Тогда можно ожидать, что к этой системе будут приложимы результаты, изложенные выше для случая двух тел с отношением средних движений $n_2^*/n_1^* = 2 : 1$. Проверим это предположение.

Между M_{0s} , Ω_s , π_s и использованными ранее элементами ω_s^* , τ_s справедливы соотношения (см., например, [121])

$$\omega_s^* = \pi_s - \Omega_s, \quad M_{0s} = n_s^* (t_0 - \tau_s), \quad (3.20)$$

где t_0 — начальный момент времени t . Отсюда при учете данных табл. 4 находим

$$\begin{aligned}\omega^* &= \omega_2^* - \omega_1^* = \pi_2 - \Omega_2 - (\pi_1 - \Omega_1) = \\ &= 170,12^\circ - 74,01^\circ - (61,63^\circ - 131,53^\circ) \approx 166^\circ, \quad (3.21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^*(\tau_2 - \tau_1) &= n^*\tau = \\ &= -\left(\frac{\mathcal{M}_{02}n^*}{n_2^*} - \frac{\mathcal{M}_{01}n^*}{n_1^*}\right) = -\left(\frac{\mathcal{M}_{02}}{2} - \mathcal{M}_{01}\right) = -\left(\frac{52,70^\circ}{2} - 196,89^\circ\right) \approx \\ &\approx 171^\circ. \quad (3.22)\end{aligned}$$

Если, как и в предыдущем примере, положить приближенно $e_1 = 0$, т. е. считать орбиту Нептуна круговой, то из условия минимума выражения (3.15) при учете (3.21) получается $n^*\tau = \omega^* = 166^\circ$, т. е. всего на 5° меньше значения (3.22), определенного на 7 января 1979 г. Однако в рассматриваемом случае ввиду наличия более подробных данных можно найти величину $n^*\tau$ и по более точной формуле (3.17). Согласно табл. 4 имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \cos \delta &= 4,11 \cdot 0,00984 \cos 166^\circ - 3,00 \cdot 0,0491 \cos 332^\circ = -0,169; \\ \mathcal{M} \sin \delta &= 4,11 \cdot 0,00984 \sin 166^\circ - 3,00 \cdot 0,0491 \sin 332^\circ = 0,0789;\end{aligned}$$

откуда $\delta = 155^\circ$ и в соответствии с (3.17) $n^*\tau = 0,5(155^\circ + 180^\circ) = 167,5^\circ$, что еще ближе к значению $n^*\tau = 171^\circ$ согласно (3.22).

Таким образом, теоретические результаты, вытекающие из интегрального критерия устойчивости (экстремального свойства) синхронных движений, находятся в хорошем согласии с данными астрономических наблюдений и вычислений.

§ 4. О тенденции к синхронизации в рассмотренных системах. Роль диссипативных сил

Из сказанного вследствие периодичности функции Λ_0 по α_s (или в частном случае — функции $\langle(U^{(1)})\rangle$ по $\omega_s^* - n_s^*\tau_s$) следует наличие тенденции к синхронизации в рассматриваемых системах, по крайней мере, если достаточно малы усредненные диссипативные обобщенные силы $|A_s|$ по сравнению с обобщенными потенциальными силами $|\partial\Lambda_0/\partial\alpha_s|$, или, в частном случае — по сравнению с силами $|\partial\langle(U^{(1)})\rangle/\partial(\omega_s^* - n_s^*\tau_s)|$ (см. также § 9 гл. 10 и § 7 гл. 12). Напомним, что под такой тенденцией мы понимаем наличие хотя бы одного устойчивого в малом синхронного движения (см. гл. 1).

Вместе с тем тенденция к синхронизации может быть подавлена действием диссипативных факторов. Диссипативные силы, таким образом, оказывают двойное влияние на синхронизацию

в рассматриваемой системе. С одной стороны, они обеспечивают асимптотическую устойчивость по соответствующим координатам, а с другой — могут привести к нарушению условий существования синхронных движений, т. е. к подавлению тенденции к синхронизации. Отметим также, что при известных условиях диссипативные силы могут привести к потере устойчивости движения.

Заметим далее, что учет диссипации в небесномеханических орбитальных системах, как следует из простого анализа уравнений (2.1), формально приводит, вообще говоря, к исчезновению установившихся, в частности, периодических или синхронных движений с неизменной синхронной частотой. Необходимо, однако, иметь в виду, что вследствие малости диссипативных сил отклонения от периодичности и изменение синхронной частоты становятся ощутимыми лишь на весьма больших интервалах времени по сравнению с характерными временами, на которых изучаются интересующие нас здесь свойства движения.

Роль диссипативных сил в возникновении синхронизмов (резонансов) в процессе эволюции орбитальных и вращательных движений небесных тел обстоятельно проанализирована в работах [23, 100, 202, 281]. В общих чертах эта роль состоит в следующем. Действие диссипации приводит к тому, что соотношения между средними движениями и вращениями тел в процессе эволюции, вообще говоря, изменяются. Захват в устойчивое синхронное движение и длительное «застревание» в нем происходят (точнее — могут произойти) в случаях, когда эти соотношения становятся близкими к соответствующим соизмеримостям.

§ 5. О гипотезе А. М. Молчанова

Понимание общности эффектов синхронизации вызвало к жизни ряд интересных идей о синхронизационном характере некоторых явлений в живой и неживой природе. Видное место среди таких идей занимает уже упоминавшаяся гипотеза А. М. Молчанова о полной резонансности (синхронизированности) орбитальных движений больших планет Солнечной системы [202]. А. М. Молчанов заметил, что средние движения девяти указанных планет $n_1^*, \dots, n_9^*$ приближенно связаны девятью линейными однородными соотношениями

$$k_1^{(j)} n_1^* + \dots + k_9^{(j)} n_9^* = 0 \quad (j = 1, \dots, 9) \quad (5.1)$$

с целочисленными коэффициентами $k_1^{(j)}, \dots, k_9^{(j)}$. При этом, что важно при учете одной из основных закономерностей синхронизации см. п. 3 § 3 Введения) числа $k_s^{(j)}$, — небольшие (очевидно, что если не ограничивать величины $k_s^{(j)}$, то в виде (5.1) можно

будет как угодно точно записать соотношение между любыми числами n_s^*).

Таблица 5 воспроизводит составленную А. М. Молчановым таблицу чисел $k_s^{(j)}$, приводящих к весьма точному выполнению соотношений (5.1) при условии некоторой небольшой «корректировки» наблюдаемых величин средних движений n_s^* . Эти вели-

Таблица 5

Резонансные соотношения в Солнечной системе

j	Планета	n_s^*	$\tilde{n}_s^*$	$\Delta n_s^* / n_s^*$	$\zeta_1^{(j)}$	$\zeta_2^{(j)}$	$\zeta_3^{(j)}$	$\zeta_4^{(j)}$	$\zeta_5^{(j)}$	$\zeta_6^{(j)}$	$\zeta_7^{(j)}$	$\zeta_8^{(j)}$	$\zeta_9^{(j)}$
1	Меркурий	49,22	49,20	0,0004	1	-1	-2	-1	0	0	0	0	0
2	Венера	19,29	19,26	0,0015	0	1	0	-3	0	-1	0	0	0
3	Земля	11,862	11,828	0,0031	0	0	1	-2	1	-1	1	0	0
4	Марс	6,306	6,287	0,0031	0	0	0	1	-6	0	-2	0	0
5	Юпитер	1,000	1,000	0,0000	0	0	0	0	2	-5	0	0	0
6	Сатурн	0,4027	0,400	0,0068	0	0	0	0	1	0	-7	0	0
7	Уран	0,14119	0,14286	-0,0118	0	0	0	0	0	0	1	-2	0
8	Нептун	0,07197	0,07143	0,0075	0	0	0	0	0	0	1	0	-3
9	Плутон	0,04750	0,04762	-0,0025	0	0	0	0	0	1	0	-5	1

чины, отнесенные к среднему движению Юпитера, их откорректированные значения $\tilde{n}_s^*$ и «относительные поправки» $\Delta n_s^* / n_s^* = (n_s^* - \tilde{n}_s^*) / n_s^*$ также даны в таблице. Как видно, поправки даже в худших случаях не превышают 1,2%. Аналогичные таблицы составлены А. М. Молчановым и для спутников Юпитера, Сатурна и Урана.

Таблицы А. М. Молчанова создают сильное впечатление в пользу того, что основные тела Солнечной системы находятся либо в синхронном режиме, либо в режиме, весьма близком к синхронному. Тем не менее пока не выполнено убедительного динамического исследования, приведенные данные оставляют место для сомнений. Интересное обсуждение современного состояния вопросов, связанных с гипотезой А. М. Молчанова, содержится в монографии В. В. Белецкого [23]. Поэтому здесь остановимся лишь на соображениях, вытекающих из результатов, которые изложены в настоящей книге.

Прежде всего представляется, что установленная здесь тенденция к синхронизации в орбитальных системах является весьма убедительным доводом в пользу гипотезы А. М. Молчанова. Изложенные результаты указывают также на возможный эффективный путь более детального изучения резонансных движений в Солнечной системе — использование интегрального критерия

устойчивости (экстремального свойства) синхронных движений в сочетании с данными астрономических наблюдений. Простейшие примеры такого использования интегрального критерия были приведены в § 3. Представляет интерес проведение аналогичного исследования с использованием ЭЦВМ для всей системы больших планет Солнечной системы, а также для систем спутников. Подобное исследование позволит установить, с одной стороны, согласуются ли фазовые соотношения при реальных движениях соответствующих тел с вытекающими из условий минимума функции $D \approx \langle (U^{(II)}) \rangle$, а с другой — насколько значительно отличается от минимума и как эволюционирует значение $\langle (U^{(II)}) \rangle$, получающееся из астрономических наблюдений. Заметим, что указанное исследование следует проводить с учетом соображений об относительной силе взаимодействий тел с различными отношениями средних движений n_s^* , изложенных в § 3.

Несомненный интерес представляет также изучение эволюции орбитальных систем путем численного эксперимента — интегрирования на ЭЦВМ соответствующей системы дифференциальных уравнений. Результаты такого исследования приводятся в статье Дж. Хилза [315]. Оказалось, что планеты при случайном начальном распределении относительно быстро (за время порядка 10^4 лет) эволюционируют к почти стационарным орбитам, для которых явно наблюдается соизмеримость средних движений, т. е. синхронизация (см. также [106]).

Глава 8

ЯВЛЕНИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ В ХИМИИ, БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

§ 1. Ритмы и цикличность в природе

Колебательные явления чрезвычайно распространены как в неживой, так и в живой природе. «Говорят, что природа не терпит пустоты, но очень любит ритм и цикличность», — пишет Р. Гольдэкр в интересной статье [313], посвященной этим вопросам.

Колебания в ходе химических реакций были обнаружены еще в прошлом веке; сейчас известно значительное число таких реакций, в частности, происходящих на границе металл — раствор и давших повод для столь характерных названий, как «железный нерв» и «ртутное сердце» [125]. Однако особенно важную роль играют колебательные процессы и различного рода ритмы в биохимических и биологических системах, где они четко прослеживаются, начиная от уровня отдельных макромолекул и клеток до макроскопических систем живых организмов и сообществ организмов; огромное значение, в частности, имеют различные колебания и ритмы в организме человека.

Указанные колебательные процессы привлекают все возрастающее внимание исследователей — химиков, физиков, биологов, врачей, специалистов по теории управления и математиков. Представление о современном состоянии этой интенсивно развивающейся области можно получить по сборникам [28, 29, 149, 150] и книгам [84, 125, 229, 236, 247].

Особенно важную роль в химических, биохимических и биологических колебательных системах играют автоколебательные явления — таким явлениям и уделяется основное внимание, начиная с классической статьи Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка [336] (1928—30 гг.), в которой работа сердца моделируется связанными последовательно срабатывающими релаксационными генераторами. Заметим, что до сих пор генераторы Ван-дер-Поля — квазигармонические и релаксационные, а также модели типа

«хищник — жертва», предложенные А. Лоткой [317] (1920 г.) и В. Вольтерра [337] (1931 г.) являются основой математического моделирования колебательных процессов в рассматриваемых системах.

Несмотря на существенные успехи, наука о колебаниях в биохимических и в биологических системах лишь начинает развиваться. В частности, до сих пор удовлетворительным образом не раскрыт механизм так называемых *биологических часов*, создающих как бы «чувство времени» во многих биологических объектах, начиная от простейших и кончая весьма высокоорганизованными. Поразительна точность хода этих часов, иногда используемых животными в целях ориентации: в некоторых случаях она достигает нескольких минут или даже секунд в сутки [28]. Высказываются предположения, что решение проблемы злокачественных опухолей, возможно, связано с изучением механизма биологических часов, режим работы которых различен в нормальных и опухолевых клетках (см. § 3, а также монографии [125, 247]).

Нет до сих пор убедительного ответа и на кардинальный, почти философский вопрос, о внутренних причинах широчайшей распространенности колебательных явлений в природе — несомненного факта, отраженного в приведенном выше высказывании Р. Гольдэкра. По этому поводу имеется лишь ряд размышлений и гипотез.

Так, например, А. М. Молчанов высказывает мысль, что колебания являются характерной чертой всякого биологического «индивида»; «равновесные» индивиды в процессе эволюции сливаются со средой, а «неустойчивые» разрушаются. Как говорит А. М. Молчанов [200], «Лучше всего представлению об индивиде, как о системе, которая, с одной стороны, сохраняет свое строение, а с другой, — способна к внутреннему движению, отвечают поэтому колебательные системы».

Другая точка зрения, высказываемая, например, в книге [125], состоит в том, что колебательный (в частности, автоколебательный) характер многих процессов в биохимических системах обусловлен просто наличием в них соответствующих (как правило, нелинейных) взаимных зависимостей между переменными.

Наконец, третья точка зрения, не исключаяющая вторую и представляющаяся автору наиболее привлекательной, базируется на впечатлении, что колебательные системы и процессы характеризуются определенной оптимальностью; поэтому, по-видимому, существует некоторый общий принцип, действующий при достаточно широких условиях, в силу которого природа «предпочитает» именно колебания. Несомненно, установление такого принципа представляет интересную и важную задачу.

§ 2. Явления синхронизации в химических, биохимических и биологических системах

Поскольку явления синхронизации встречаются практически везде, где имеют место колебания, то они играют важную роль и в рассматриваемых в настоящей главе системах.

Во многих случаях синхронизацию биологических объектов можно рассматривать как захватывание заданным ритмом, генерируемым одним мощным объектом, обратное влияние на который со стороны синхронизируемых объектов не имеет существенного значения.

Большое значение в жизни человека и животных имеетточный ритм, навязанный вращением Земли вокруг своей оси, а также годовой период, обусловленный движением Земли по орбите вокруг Солнца. Эти ритмы характерны для многих физиологических процессов и, кроме того, для механических явлений и химических реакций, происходящих на Земле.

Четко прослеживаются ритмы, связанные с циклическим изменением солнечной активности и имеющие своими периодами одиннадцать и двадцать два года. Оказалось, что с солнечными пятнами связаны такие процессы, как колебания температуры воды мирового океана и интенсивности морских течений, размножение и передвижение рыбы, саранчи и некоторых других видов живых организмов, эпидемии и пандемии гриппа, чумы, вспышки туляремии, ящура и некоторых других заболеваний. Описание этих и ряда подобных явлений дается в работах А. Л. Чижевского и его последователей [296, 297].

Впрочем, помимо «гелиобиологии», изучающей влияние на живые организмы процессов на Солнце, сейчас начинает (и не без оснований) развиваться «селенобиология» — направление, в котором рассматривается соответствующее влияние Луны [84].

В качестве важного приложения явления захватывания в медицине напомним о стимуляторах сердечной деятельности — приборах, которые посылают в определенные области сердца электрические импульсы заданной частоты, навязывая мышцам необходимую частоту сокращений (обычно порядка 60—70 в минуту). Такие приборы являются незаменимыми при ряде операций, а также при спасении больных с поперечной блокадой сердца, возникающей в результате инфаркта миокарда, кардиосклероза или других заболеваний [13].

В последнее время во все возрастающей степени признается значительная роль в химических, биохимических и биологических системах явлений взаимной синхронизации [125, 149, 150, 236, 247]. Как подчеркивается в монографиях [125, 247], вообще всякое проявление автоколебаний в таких распределенных системах, наблюдаемое в макрообъемах, возможно лишь при на-

личии синхронизации колебаний, происходящих в различных частях этих макрообъемов.

В книге [247] рассмотрен ряд математических моделей синхронизации колебаний в распределенных системах, каждый «элементарный объем» которых представляет собой автоколебательную систему (генератор) того или иного типа. Такие модели предназначены для описания «волновых» химических реакций, сокращения мышечных волокон, передачи нервного возбуждения и многих других процессов. В качестве моделей элементарных автоколебательных систем используются классические модели генераторов Ван-дер-Поля (квазигармонических и релаксационных), модель, получающаяся путем модификации модели хищник — жертва Лотки — Вольтерра, а также предложенная сравнительно недавно модель Хиггинса.

Простейшая из моделей синхронизации в одномерных распределенных системах («трубках»), изученная Ю. М. Романовским совместно с В. М. Малафеевым и М. С. Поляковой (см. [247]), описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= y + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= a [1 - v(r) x^2] y - \omega^2(r) x + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь неизвестные функции $x(r, t)$ и $y(r, t)$ представляют собой отклонения концентраций веществ X и Y от некоторых средних значений; r — пространственная координата; t — время, D_x , D_y и a — постоянные, причем D_x и D_y имеют смысл коэффициентов диффузии; $v(r)$ и $\omega(r)$ — некоторые функции r . При $D_x = D_y = 0$ система (2.1) приводится к одному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2(r) x = a [1 - v(r) x^2] \frac{\partial x}{\partial t},\tag{2.2}$$

которое в каждой точке $r = \text{const}$ соответствует уравнению Ван-дер-Поля (см. уравнение (2.1) гл. 6). Иными словами, постулируется, что клетки или определенные элементарные объемы химических систем («реакторы») подобны генераторам Ван-дер-Поля. При $D_x \neq 0$ и $D_y \neq 0$ система (2.1) описывает реакторы, связанные диффузионными процессами. При этом коэффициенты $\omega(r)$ и $v(r)$, определяющие соответственно парциальные частоты и амплитуды установившихся колебаний несвязанных реакторов, считаются, вообще говоря, различными в разных точках среды.

При решении задачи система (2.1) заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих дискретные генераторы, что соответствует представлению «трубки» в виде конечного числа k отдельных объемов (реакторов) с полным внутренним перемешиванием, причем каждый из реакторов связан с двумя соседними посредством диффузии:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + \beta(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= a(1 - v_1 x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \alpha(y_2 - y_1); \\ \dot{x}_s &= y_s + \beta(x_{s+1} - x_{s-1} - 2x_s), \\ \dot{y}_s &= a(1 - v_s x_s^2) y_s - \omega_s^2 x_s + \alpha(y_{s+1} + y_{s-1} - 2y_s) \\ &\quad (s = 1, \dots, k-1); \\ \dot{x}_k &= y_k + \beta(x_{k-1} - x_k), \\ \dot{y}_k &= a(1 - v_k x_k^2) y_k - \omega_k^2 x_k + \alpha(y_{k-1} - y_k). \end{aligned} \quad (2.3)$$

При составлении этих уравнений учтены условия непроницаемости торцов «трубки»; коэффициенты связи α и β между реакторами (генераторами) выражаются через D_x и D_y формулами

$$\alpha = D_y(k/l_0)^2, \quad \beta = D_x(k/l_0)^2,$$

где l_0 — длина «трубки»; $\omega_s = \omega(r_s)$, $v_s = v(r_s)$ (r_s — координата центра элементарного объема с номером s).

Для случая малых a , α и β система (2.3) исследовалась аналитически, путем использования асимптотических методов и метода Р. В. Хохлова [288], а при немалых a , α и β , т. е. в случае сильной нелинейности и сильных связей, — путем электронного моделирования.

Не останавливаясь на самом исследовании, приведем его некоторые основные результаты.

1) Как и в других случаях, синхронный режим характеризуется определенными соотношениями между фазами колебаний генераторов (реакторов), существенно зависящими от ихстроек. При неограниченном увеличении числа генераторов k распределение сдвигов фаз образует непрерывную «стоячую фазовую волну», в которой наибольшее значение разности фаз генераторов не превышает π . При конечном k имеет место некоторый дискретный аналог такой волны. Подчеркнем, что здесь речь идет именно о фазовых сдвигах или начальных фазах колебаний: сами же колебания одномерного континуума или цепочки генераторов выглядят как бегущая волна (см. ниже).

2) Синхронная частота ω при малых a , α и β в первом приближении определяется по формуле

$$\omega^2 = \sum_{s=1}^k A_{0s}^2 \omega_s^2 / \sum_{s=1}^k A_{0s}^2, \quad (2.4)$$

где $A_{0s} = 2/\sqrt{v_s}$ — амплитуды автоколебаний несвязанных генераторов. Таким образом, ω не больше наибольшей и не меньше наименьшей из парциальных частот ω_s .

3) При прочих равных условиях «ведущими» генераторами, которые захватывают в синхронный режим все остальные, являются генераторы с наиболее высокими парциальными частотами.

4) Генератор, который расстроен по отношению ко всем остальным, обладающим одинаковыми парциальными частотами, синхронизируется тем легче, чем ближе он расположен к центру цепочки. Наибольший скачок разности фаз колебаний в синхронном режиме наблюдается между расстроенным генератором и соседним с ним.

5) Наиболее просто осуществляется простая (некратная) синхронизация.

6) Полоса синхронизации генераторов расширяется с увеличением параметра a/ω , характеризующего степень нелинейности генераторов, т. е. при переходе от

режима квазигармонических к режиму релаксационных колебаний. Это в особенности касается полос синхронизации с кратными частотами. Расширяются полосы синхронизации и при увеличении параметров связи $2\alpha/a$ и $2\beta/a$.

Сказанное в пп. 5) и 6) иллюстрируется графиками на рис. 49 и 50. На рис. 49 представлена зависимость ширины полосы простой синхронизации Δ для цепочки из шести генераторов от параметров $2\alpha/a$ и $2\beta/a$, причем предполагается, что расстройка вводится на первом генераторе цепочки, а все прочие генераторы обладают одинаковыми парциальными частотами. На рис. 50 для той же цепочки изображены области простой и кратной синхронизации в плоскости параметров $2\alpha/a$, ω_1/ω при $\beta = 0$.

7) В случае слабой нелинейности и слабых связей ширина полосы синхронизации при увеличении числа генераторов в цепочке от $k=2$ до $k=\infty$ уменьшается в два раза.

Рассмотренная система представляет собой одну из моделей так называемых *активных сред* — таких сред, в которых возмож-

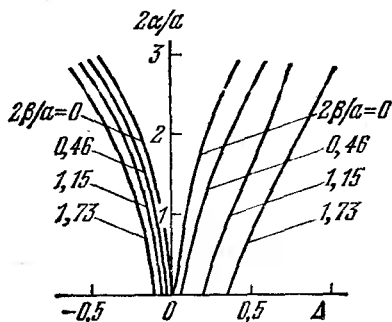


Рис. 49.

но усиление либо самовозбуждение колебаний. Изучению колебаний в таких средах, к которым относятся некоторые распределенные химические системы, рабочие тела лазеров, нервные волокна, сообщества клеток, распределенные популяции и т. п., в последнее время уделяется повышенное внимание. Одной из

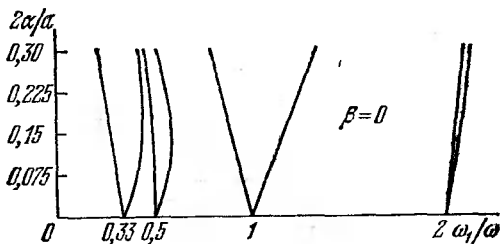


Рис. 50.

главных особенностей активных сред является возможность возникновения в них волновых процессов, параметры которых не зависят от начальных, а иногда и от краевых условий и геометрических размеров системы. По аналогии с автоколебаниями в сосредоточенных системах Р. В. Хохлов предложил называть такие процессы *автоволновыми*.

Нетрудно видеть, что изложенные результаты позволяют объяснить возникновение и распространение бегущей волны, наблюдавшееся, например, в длинных трубках, в которых протекает автоколебательная реакция окисления. Действительно, как указывалось в п. 1), в установившемся синхронном режиме распределение фаз колебаний генераторов образует некоторую «стоячую волну». В результате определенные уровни концентраций, например $x_s = x^*$, будут достигаться в соседних реакторах в последовательные моменты времени, т. е. вдоль трубки как раз и будет распространяться волна изменения концентрации; эта волна в ряде случаев может визуально наблюдаться в виде волны окраски (если, например, при $x_s < x^*$ раствор виден как прозрачный, а при $x_s > x^*$ — как окрашенный).

В книге [247] рассмотрены также закономерности синхронизации цепочки диффузионно связанных релаксационных генераторов, возбуждающих пилообразные колебания, а также колебания с большой скважностью, в частности, так называемые пиковые колебания. Автоколебания такого типа играют особенно важную роль в биологических системах, поскольку они хорошо моделируют, например, процессы нервного возбуждения.

В качестве математической модели генератора релаксационных колебаний с большой скважностью импульсов используются

уравнения

$$\dot{x} = \alpha [1 - (1 - m)xy - mx], \quad \dot{y} = xy - \frac{q+1}{q+y}y \quad (2.5)$$

(α , m и q — постоянные), предложенные Хиггинсом для описания гликолитических автоколебаний (при $m = 0$).

Помимо самосинхронизации цепочки диффузионно связанных автоколебательных объектов для биологии значительный интерес представляет изучение самосинхронизации таких объектов, диффузионно связанных через общую среду, с которой объекты связаны обменом некоторых веществ. В качестве объектов при этом могут выступать отдельные клетки, сообщества клеток и даже отдельные организмы. Известен ряд примеров самосинхронизации такого рода. Одним из них являются синхронные колебания размеров ядер злокачественных опухолевых клеток, помещенных в один раствор [197]; обнаружение этого эффекта послужило поводом для выдвижения интересных гипотез об особенностях механизма злокачественного роста и возможных путях борьбы с ним (см. § 3). Имеется также ряд интересных свидетельств о синхронизации циклов в организмах животных, связанных общей средой обитания (см., например, [247]).

Одна из простейших моделей автоколебательных «реакторов», связанных через общую среду [247], основана, как и выше, на допущении о возможности описать реакторы уравнением Ван-дер-Поля. Предполагается, что имеется некоторое число k таких реакторов, в которых может протекать автоколебательная реакция с участием веществ X и Y . Реакторы погружены в нейтральную среду (раствор), с которой они могут обмениваться молекулами веществ X и Y . Эти молекулы могут диффундировать в среде; в рассматриваемом простейшем случае считается, что в среде происходит полное внутреннее перемешивание, так что концентрации веществ мгновенно выравниваются по всему объему среды. Пусть x_s и y_s , как и выше, — отклонения концентраций веществ X и Y в реакторах от некоторых фиксированных значений, а x и y — соответствующие отклонения концентраций в среде. Тогда при сделанных предположениях дифференциальные уравнения, описывающие систему, имеют вид

$$\dot{x}_s = y_s + \beta_+(x - x_s), \quad (2.6)$$

$$\dot{y}_s = a(1 - \nu x_s^2)y_s - \omega_s^2 x_s + \alpha_+(y - y_s)$$

$$(s = 1, \dots, k);$$

$$\dot{x} = \beta_- \sum_{j=1}^k (x_j - x), \quad \dot{y} = \alpha_- \sum_{j=1}^k (y_j - y). \quad (2.7)$$

Здесь β_+ и α_+ — коэффициенты диффузии веществ X и Y из реакторов в среду, предполагаемые одинаковыми для всех реакторов, а β_- и α_- — коэффициенты диффузии из среды в реакторы; при этом если проницаемость стенок реакторов для молекул X и Y одинакова в обе стороны, то $\beta_- = \beta_+ v/v_0$, $\alpha_- = \alpha_+ v/v_0$, где v — объем реактора, а v_0 — объем среды. Постоянные ω_s , a и v имеют тот же смысл, что в уравнениях (2.3). Соотношения (2.6) являются уравнениями объектов, а (2.7) — уравнениями системы связи.

В книге [247] приведены результаты исследования самосинхронизации реакторов в случае $\beta_+ \ll a \ll \omega_s$, $\beta_- \ll av \ll \omega_s$; в частности, найдены выражения для ширины полосы синхронизации реакторов, отличающихся только парциальными частотами ω_s . Показано, что в случае равномерного распределения частот полоса синхронизации несколько меньше, чем в случае, если все реакторы, кроме двух, имеют одинаковые частоты $\omega_s = \omega_0$, а два реактора — частоты $\omega_0 + \Delta\omega$ и $\omega_0 - \Delta\omega$, и несколько больше, чем в случае, когда половина реакторов имеет одну, а другая половина — другую парциальную частоту. Установлено также, что релаксационный характер автоколебаний приводит к примерно такому же увеличению ширины полосы синхронизации по сравнению с квазигармоническим режимом, как и в случае цепочки реакторов.

Качественно новые результаты получаются при рассмотрении синхронизации реакторов в среде с конечной диффузией. Соответствующая задача рассмотрена в монографии [247] в предположении, что среда безгранична и одномерна, причем с каждой точкой $r=r_0$ этой среды связана «обойма» из k реакторов, которые, таким образом, как бы находятся в среде с полным перемешиванием; для реакторов же, входящих в различные обоймы, т. е. группирующихся в различных точках r среды, концентрации веществ X и Y в среде, вообще говоря, различны и определяются диффузионными процессами в ней.

Главная особенность синхронизации в такой системе состоит в том, что существенно связанными через среду (в отношении синхронизации) являются реакторы, отстоящие один от другого на расстояние порядка $s = \sqrt{2D_y/\omega}$, где D_y — коэффициент диффузии для молекул вещества Y (соответствующий коэффициент D_x считается равным нулю), а ω — синхронная частота. В результате вся среда распадается на отдельные «кластеры» — области с размерами порядка s , внутри которых имеет место синхронизация реакторов с определенными частотами $\omega^{(i)}$, вообще говоря, различными для разных кластеров. Как и в случае синхронизации цепочки реакторов, наибольший сдвиг фаз колебаний внутри каждого кластера не превышает π .

Образование синхронных кластеров характерно и для цепочек, а также для плоских и пространственных «сетей» диффу-

зионно связанных реакторов (генераторов) при наличии шумов. Такие сети моделируют соответственно одно-, дву- и трехмерное пространство, в каждой точке которого протекает автоколебательная реакция. При отсутствии шумов и расстройек в этих сетях устанавливаются синхронные режимы во всем пространстве в целом, т. е. размеры синхронного кластера не ограничены. При наличии шумов размеры кластеров в одно- и двумерном случае оказываются ограниченными и убывающими с ростом интенсивности шумов. В трехмерном же случае при интенсивности шумов, меньшей некоторого значения, кластер может быть безграничным; отмечается, что эти результаты находят экспериментальные подтверждения.

Подчеркнем в заключение, что взаимная синхронизация наблюдается и в поведении коллективов людей и групп животных. В частности, хорошо известно, что большая аудитория (иногда в несколько тысяч человек), стремящаяся аплодировать по возможности более громко, довольно быстро переходит от беспорядочных хлопков к скандированным (синхронным и синфазным) аплодисментам. Другим примером является хождение большой группы людей «в ногу» под звуки оркестра или по счету командира. Здесь ситуация близка к тому, что во Введении было названо принудительной синхронизацией.

Вполне аналогичные явления иногда наблюдаются при полете стаи птиц и движении косяка рыб: взмахи крыльев (плавников, хвоста) носят синхронный характер.

Н. Винером высказано предположение, что ритмическое мерцание света, излучаемого несколькими жуками-светляками, находящимися в пределах «взаимной видимости», не является простой оптической иллюзией, а представляет один из примеров взаимной синхронизации и фазировки.

§ 3. Некоторые нерешенные проблемы и относящиеся к ним гипотезы (о телепатии и проблеме рака)

Ведущая роль явлений синхронизации в рассмотренных выше случаях представляется несомненной. Вместе с тем в последние годы был высказан ряд гипотез о синхронизационной природе механизма некоторых неразгаданных до сих пор биологических явлений; остановимся на некоторых из таких гипотез.

Известно, что если поместить пару электродов на кожу головы, то можно обнаружить меняющееся во времени электрическое напряжение. Усилив и записав соответствующие биотоки, получают так называемую электроэнцефалограмму — характеристику состояния головного мозга, используемую как в медицинской практике, так и в научных исследованиях.

Если подвергнуть запись мощности колебаний биотоков мозга спектральному анализу, то получается картина, схематически представленная на рис. 51, а, где по оси абсцисс отложена частота f в герцах, а по оси ординат — спектральная плотность мощности S . Оказывается, что наиболее заметная активность биотоков имеет место вблизи частоты 10 Гц; эта особенность электроэнцефалограммы получила название *альфа-ритма*. Более тщательное изучение спектра мощности биотоков вблизи 10 Гц, выполненное посредством анализа автокорреляционной функции, записанной по специально разработанной методике [88], привело к кривой, изображенной на рис. 51, б. Из рисунка видно, что имеет место как бы «притяжение частот», близких к десяти герцам: по обе стороны от пика, отвечающего 10 Гц, в спектральной кривой имеются впадины.

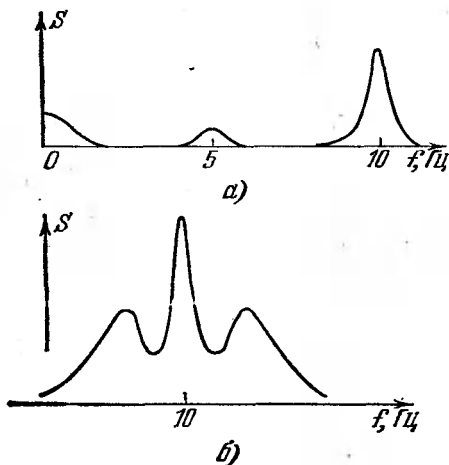


Рис. 51.

Для объяснения подобного явления Н. Винер [88, 89] предположил, что в мозге имеются своего рода автогенераторы*), парциальные частоты которых близки к 10 Гц. В результате взаимодействия этих генераторов и происходит взаимное «притяжение частот» — самосинхронизация с частотой около 10 Гц.

Как указывает Н. Винер, такая гипотеза, по крайней мере косвенно, подтверждается рядом опытов. В одном из таких опытов человек помещался в комнату, к потолку которой был подвешен лист жести. К листу подводилось переменное напряжение с амплитудой порядка 400 В. Вследствие этого в любом предмете, расположенном в комнате, возникала электростатическая индукция. Оказалось, что при частоте колебаний напряжения около 10 Гц у человека, находящегося в комнате, появлялись «определенно неприятные ощущения».

Подтверждением наличия в мозге объектов типа автогенераторов с частотой около 10 Гц является также то обстоятельство, что в результате посылки в мозг внезапного электрического им-

*) До Н. Винера, в 1923 г., гипотеза об осцилляционной природе структурных элементов нервной ткани была выдвинута Б. Б. Какинским (см. [134]).

пульса следует четко фиксируемая разрядка с частотой, равной примерно десяти колебаниям в секунду. Кроме того, наблюдалось захватывание частоты альфа-ритма внешним источником возмущения (вспышками света) с частотой около 10 Гц.

Отметим, что описанный Н. Винером опыт с листом жести весьма интересен еще и тем, что он является одним из свидетельств возможности посылки сигналов в мозг человека не через известные нам органы чувств.

Быть может, именно этот опыт навел Н. Винера на мысль о возможности найти научное объяснение эффектам обмена сигналами между людьми, находящимися на таком расстоянии или в таких условиях, когда исключено обычное непосредственное чувственное восприятие. Подобные эффекты, сама реальность которых в настоящее время многими не без оснований подвергается сомнению вследствие отсутствия достаточно убедительных экспериментальных данных, называют телепатическими [83, 90]. Изучением этих предполагаемых эффектов занимались многие видные биологи, психологи и физики как в СССР, так и за рубежом.

В конце прошлого — начале текущего столетия довольно широкое распространение получила гипотеза об электромагнитной природе связи между нервными системами людей. Однако эта мысль, казалось бы, была опровергнута расчетами, свидетельствующими о том, что мощность электромагнитных полей, создаваемых биотоками мозга, значительно меньше той пороговой величины, которая, по мнению физиологов, еще может быть воспринята нервной системой. Такая точка зрения высказана, например, в статье В. Аркадьева [11], где говорится, в частности, что мощность электромагнитных полей, возникающих при работе окружающих нас электрических устройств, значительно больше мощности электромагнитных полей биологического происхождения. Отсюда автор пришел к заключению о несостоятельности гипотезы об электромагнитной природе взаимосвязи между нервными системами людей.

Из работ недавнего времени отметим статью А. Н. Малахова, А. С. Максимова и Ю. Я. Нефедова [180]. На основе измерений спектра биопотенциалов некоторых биологических объектов в диапазоне частот от 1 до 500 Гц и непосредственного обнаружения электромагнитного излучения на частотах 3 и 150 кГц авторы также приходят к выводу, что электромагнитное излучение, в силу своей слабости, не может служить носителем информации в биологической связи, по крайней мере, в диапазоне частот до 150 кГц. Однако авторы не исключают, что электромагнитное излучение может служить основой биологической связи на более высоких частотах. Таким высокочастотным излучением по их мнению, может быть резонансное излучение какого-либо белкового комплекса; оно должно играть роль несущей, а информа-

ция может передаваться от биотоков в виде модуляции несущей.

Из теории синхронизации вытекает, что как при электромагнитном, так и при ином «колебательном» механизме взаимодействия, вопрос о пороге чувствительности может быть рассмотрен с разных позиций. Действительно, одной из главных закономерностей синхронизации многих типов автогенераторов (см. § 3 Введения к книге) является отсутствие порога синхронизации: как бы слаба ни была связь между такими объектами, их самосинхронизация непременно наступит, если только достаточно мало различие между парциальными частотами объектов*). При этом вхождение в синхронизм сопровождается установлением вполне определенных фазовых соотношений между колебаниями, тогда как при отсутствии самосинхронизации фазы были случайны.

Таким образом, при достаточной близости парциальных частот даже сколь угодно слабая связь между генерирующими объектами может привести к заметному качественному изменению характера движения, а значит, соответствующий слабый сигнал может быть воспринят. Если это так, то универсального физиологического порога чувствительности не существует: указанный порог различен для различных пар людей. Мощность посылаемого сигнала, конечно, играет при этом определенную роль, однако даже при весьма малой мощности сигнал может быть воспринят, если он обладает определенным частным спектром, который играет, таким образом, роль своеобразного ключа.

Как известно, необходимым условием успеха телепатических опытов считают соответствие участников: они должны образовать так называемую телепатическую пару. Если признавать реальность телепатических явлений, то можно предполагать, что люди, образующие такую пару, как раз и отличаются близкими парциальными частотами генерируемых электромагнитных волн.

Конечно, вывод об отсутствии «порога синхронизации» относится к детерминированным системам. При наличии шумовых эффектов такой порог существует (см., например, [181, 247]). Однако он определяется иным образом и, быть может, при определенных условиях окажется значительно более низким, чем упомянутый выше «физиологический порог».

Смелая и далеко идущая гипотеза, касающаяся синхронизации в биологии, выдвинута Н. Винером при рассмотрении возможных механизмов самоорганизации и самовоспроизведения биологических объектов [89]. Н. Винер отмечает, что одной из

*) Мы не касаемся здесь также весьма существенного вопроса о времени, необходимом для установления синхронного режима (см., например, [171, 247]); это время, естественно, возрастает и стремится к бесконечности по мере ослабления связей между генераторами.

основных проблем биологии является изучение способа, посредством которого главные вещества, составляющие гены или вирусы или возможные специфические вещества, вызывающие рак, самовоспроизводятся из материалов, лишенных этой специфики, например из смеси аминокислот и нуклеиновых кислот. Часто говорят, что одна макромолекула рассматриваемых веществ действует как шаблон, по которому меньшие молекулы составляющего вещества формируются в аналогичную макромолекулу. Вместе с тем о механизме такого воспроизведения почти ничего не известно.

Сущность гипотезы Н. Винера состоит в том, что активный носитель специфики макромолекулы лежит в частотном строении ее молекулярного излучения, значительная часть которого предположительно находится в области инфракрасных электромагнитных частот или даже ниже. «Может оказаться,— пишет Н. Винер,— что специфические вещества вируса при некоторых обстоятельствах излучают инфракрасные колебания, которые обладают способностью содействовать формированию других молекул вируса из неопределенной магмы аминокислот и нуклеиновых кислот. Вполне возможно, что такое явление позволительно рассматривать как своего рода взаимное притягательное взаимодействие частот».

Разумеется, описанный механизм воспроизведения макромолекул далеко не единственно возможный, и поэтому изложенная гипотеза нуждается в тщательной проверке. Один из путей такой проверки, по мнению Н. Винера, состоит в том, чтобы изучить спектры поглощения и излучения вирусного вещества, а затем проследить действие света этих частот на образование дальнейших вирусов от существующего вируса в надлежащей питательной среде.

Иная гипотеза о механизме размножения раковых клеток, однако также опирающаяся на явления синхронизации, высказана в книге [247] (с. 278—279). Эта гипотеза опирается на результаты работы [197], в которой сообщается об обнаружении синхронных пульсаций размеров ядер в клетках асцитной карциномы Эрлиха. Период указанных пульсаций, в ходе которых размеры ядер изменяются в среднем в полтора раза, составляет около одного часа. В последующем были экспериментально обнаружены колебания размеров и самих клеток карциномы, а также проницаемости плазматических мембран [85]. После ряда рассуждений и предположений авторы книги приходят к мысли, что интенсивный рост раковой опухоли происходит именно вследствие синхронных колебательных процессов. Если такая гипотеза подтвердится, то, как отмечают авторы, открываются новые возможности борьбы с раком, например путем подавления или изменения характеристик синхронных колебаний. Приводится опи-

санный в литературе случай успешного лечения безнадежно больного лейкемией ребенка, который можно толковать как результат указанного рода воздействия на синхронизацию жизненных циклов клеток.

Интересные мысли о возможной связи проблемы рака с феноменом биологических часов и явлениями синхронизации, как уже отмечалось, высказаны в монографии А. М. Жаботинского [125].

Будущее (можно надеяться, не слишком далекое) покажет, в какой мере изложенные гипотезы, касающиеся важных и интересных, но очень трудных современных проблем, являются плодотворными.

§ 4. Заключение

Число примеров, свидетельствующих о широком распространении явлений синхронизации в химических, биохимических и биологических системах, могло бы быть значительно увеличено. Приведенный краткий обзор этих явлений и посвященных им исследований не претендует на полноту. Систематическое изложение известных в настоящее время фактов и результатов заслуживает, по-видимому, отдельной, не меньшей по объему книги. Мы преследовали здесь лишь цель показать значение явлений синхронизации в указанных областях, отметить главные направления поисков и исследований, а также сослаться на некоторые известные нам уловые и суммирующие публикации.

Глава 9

СИНХРОНИЗАЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

§ 1. Стохастичность и синхронизация — два полярно противоположных вида поведения динамических систем

Экспериментальные данные и теоретические результаты, изложенные в предыдущих главах, убедительно свидетельствуют, что тенденция к синхронизации характерна для поведения широкого класса природных и технических объектов самого различного характера.

Как отмечалось во Введении, подобную тенденцию естественно рассматривать как одну из форм самоорганизации материи, как один из видов тенденции динамических систем к упорядоченному поведению. Противоположным по отношению к упорядоченному видом поведения динамической системы является ее стохастическое, неупорядоченное поведение, когда обычное динамическое описание становится нецелесообразным. При этом, как показывает опыт, в одних случаях преобладает одна, а в других случаях — другая тенденция. Подобная диалектическая ситуация — борьба между «порядком» и «беспорядком» — типична не только для временной, но и для пространственной и пространственно-временной организации материальных форм*).

Еще совсем недавно считалось, что тенденция к беспорядочному, стохастическому поведению характерна только для систем очень большого числа однотипных элементов — таких, например, как объем газа, содержащий большое число молекул. И лишь сравнительно недавно было показано (см., например, [77, 203, 219, 240]), что при определенных условиях и притом в достаточно широких областях пространства параметров уже системы с

*) Сопшемся на интересную популярную книгу А. И. Китайгородского [144], посвященную «порядку и беспорядку в мире атомов», заключительные параграфы которой носят такие названия: «Стремление к беспорядку», «Стремление к порядку», «Борьба порядка и беспорядка», «В любой области знаний мы сталкиваемся с проблемами порядка и беспорядка».

трехмерным фазовым пространством (маятник с вибрирующей точкой подвеса, шарик, прыгающий над колеблющейся плоскостью, определенные типы автогенераторов и т. п.) могут вести себя по существу стохастическим образом.

С другой стороны, результаты, изложенные в предыдущих главах книги, свидетельствуют и о возможности противоположной ситуации: системы, содержащие достаточно большое число однотипных объектов — томсоновских и релаксационных генераторов, вибровозбудителей, большого числа электрических генераторов и электродвигателей — могут при достаточно широких условиях совершать устойчивые синхронные движения, т. е. вести себя высокоупорядоченным образом.

Взгляд на синхронизацию, как на одно из проявлений тенденции к самоорганизации, к порядку, противоположной тенденции к стохастичности, беспорядку, был высказан автором еще в книге [57] и в настоящее время разделяется многими учеными. В указанной, как и в этой, книге приведены результаты, позволяющие судить о том, когда преобладает тенденция к синхронизации, т. е. к упорядоченности. С другой стороны, сейчас имеется ряд интересных результатов, позволяющих предсказать условия стохастического поведения динамической системы (см., например, обзоры [203, 240]). Вместе с тем проблема выяснения общих условий, при которых та или иная из двух противоположных тенденций является преобладающей, еще остается нерешенной и ждет своих исследователей.

§ 2. О возможной роли явлений синхронизации в микромире

Универсальность явлений синхронизации вообще, а также закономерности синхронизации орбитальных систем и систем различного рода генераторов колебаний в частности, наводят на мысль о том, что синхронизация может играть существенную роль в микромире, где колебательные и вращательные движения объектов являются весьма распространенными [63]. Представляется, что эта мысль заслуживает внимания физиков-теоретиков. Пока же можно сослаться лишь на некоторые идущие в том же направлении высказывания механиков и специалистов по теории нелинейных колебаний.

Еще Н. Г. Четаев говорил, что «...Устойчивость, явление принципиально общее, как-то должна, по-видимому, проявляться в основных законах природы» [295]. Развивая эту мысль, Н. Г. Четаев пришел к гипотезе о том, что устойчивыми могут быть лишь избранные (как иногда говорят — элитные) траектории динамических систем. Позднее А. М. Молчанов в работе [202] дополнил мысли Н. Г. Четаева на основе иных соображе-

ний, высказав предположение, что дискретность орбит «эволюционно зрелых» динамических систем связана именно с «резонансами», т. е. с синхронизацией.

Преставляется, что результаты исследования синхронизации орбитальных систем, изложенные в §§ 6 и 7 гл. 12, в частности, установленная там тенденция таких систем к синхронизации, свидетельствуют в пользу упомянутых гипотез. А именно, исходя из указанных результатов, можно предположить, что квантованность в микромире, как и своеобразная квантованность орбит в небесномеханических системах (см. гл. 7) представляет собой проявление общей закономерности — тенденции к синхронизации, т. е. устойчивости соответствующих «элитных» движений. Возможно, что при учете этой закономерности удастся неформальным образом объяснить и описать квантово-механические явления.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Глава 10

ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И СИНХРОННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР (МЕТОДЫ ПУАНКАРЕ И ЛЯПУНОВА)

§ 1. Предварительные замечания. О методах Пуанкаре и Ляпунова в теории периодических решений

В настоящей главе сначала кратко излагаются основные идеи методов Пуанкаре и Ляпунова, а затем приводится (без доказательств) ряд теорем о существовании и устойчивости периодических и синхронных решений некоторых систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Эти теоремы по существу развивают и дополняют в определенных направлениях классический аппарат теории Пуанкаре и Ляпунова периодических решений систем с малым параметром.

Главной особенностью изучаемых уравнений, характерной для задач о синхронизации, является наличие у порождающей системы семейства периодических (или синхронных) решений, зависящего от некоторого числа произвольных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, а главной особенностью приводимых теорем — возможность выразить основной результат через посредство так называемых *порождающих функций* $P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и интегрального критерия устойчивости. Об этих особенностях математического аппарата теории синхронизации подробно говорилось в гл. 2.

Большинство приводимых результатов было получено в последние годы именно под влиянием потребностей развития теории синхронизации и ее непосредственных приложений; они представляют собой основу математического аппарата, используемого в настоящей книге при решении конкретных задач.

Остановимся вначале на кратком изложении основных идей методов малого параметра Пуанкаре и Ляпунова.

Математические основы метода малого параметра применительно к теории периодических решений дифференциальных

уравнений были заложены в классических сочинениях А. Пуанкаре в конце XIX века [325]. Первостепенную роль при использовании метода Пуанкаре играет теория устойчивости движения и теория периодических решений дифференциальных уравнений, развитая примерно в тот же период А. М. Ляпуновым [178].

Методы Пуанкаре и Ляпунова за последние три десятилетия получили дальнейшее развитие в работах многих исследователей; эти методы были с успехом использованы при решении ряда важных прикладных задач, они являются в настоящее время одними из наиболее эффективных и универсальных в теории колебаний нелинейных систем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_n, t) + \mu F_s(x_1, \dots, x_n, t, \mu) \quad (1.1) \\ (s = 1, \dots, n),$$

где X_s и F_s — аналитические функции переменных $x_1, \dots, x_n$ в замкнутой области G , которой принадлежат все рассматриваемые ниже решения уравнений, и непрерывные T -периодические функции переменной t (времени) в любой точке области G . Положим, что F_s являются также аналитическими функциями малого параметра $\mu \geq 0$ при $\mu \leq \mu_0$, где $\mu_0 > 0$. В большинстве прикладных задач перечисленные жесткие требования относительно гладкости правых частей уравнений, существенно облегчающие исследование, являются достаточными*); эти требования могут быть существенно ослаблены (см. § 7). Система (1.1) неавтономна; предполагается, что правые части уравнений содержат время в явной форме; изучение автономной системы имеет ряд особенностей (см., например, §§ 3 и 5).

Отыскание периодических решений системы

$$\dot{x}_s^0 = X_s(x_1^0, \dots, x_n^0, t) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (1.2)$$

получающейся из (1.1) при $\mu = 0$ и называемой *порождающей системой*, может оказаться более простым, чем нахождение периодических решений системы (1.1). Предположим, что T -периодические решения порождающей системы (*порождающие решения*) существуют и известны. Возникает вопрос, можно ли «доверять» этим решениям в том смысле, что им однозначно соответствуют близкие периодические решения исходной системы, т. е. решения исходной системы, обращающиеся при $\mu = 0$ в решения порождающей системы. Иногда возникает также не-

*) Здесь не рассматривается случай так называемых сингулярных возмущений, когда дифференциальные уравнения содержат малый параметр при производных $\dot{x}_s$.

обходимость найти решения исходной системы более точно, т. е. с учетом членов, содержащих μ .

Принципиальное решение указанных задач и дает теория А. Пуанкаре. Им было, в частности, показано, что соответствие между решениями систем (1.1) и (1.2) имеет место не всегда. В зависимости от характера правых частей уравнений (1.1) может оказаться, что периодическому решению порождающей системы (1.2) не соответствует периодическое решение исходной системы (1.1). С другой стороны, возможны случаи, когда решению порождающей системы отвечает несколько и даже бесчисленное множество периодических решений исходной системы.

Все эти особые случаи представляют наибольший интерес для теории нелинейных колебаний вообще и для теории синхронизации в частности.

При практическом использовании метода Пуанкаре периодическое решение системы (1.1) разыскивают в виде рядов

$$x_s(t) = x_s^0(t) + \mu x_s^{(1)}(t) + \mu^2 x_s^{(2)}(t) + \dots \quad (1.3)$$

с T -периодическими коэффициентами по целым положительным степеням параметра μ , хотя в некоторых случаях разложения могут быть по дробным степеням μ . Подставляя выражения (1.3) в уравнения (1.1) и разлагая их правые части по степеням μ , приравнивают выражения при одинаковых степенях μ из обеих частей равенства. Тогда получаются следующие системы уравнений для определения приближений $x_s^{(1)}, x_s^{(2)}, \dots$:

$$\dot{x}_s^{(1)} = \sum_{j=1}^n p_{sj}(t) x_j^{(1)} + F_s(x_1^0, \dots, x_n^0, t, 0) \quad (1.4)$$

$$(s = 1, \dots, n),$$

$$\dot{x}_s^{(q)} = \sum_{j=1}^n p_{sj}(t) x_j^{(q)} + \Phi_s^{(q)}(x_1^0, \dots, x_n^0; \dots; x_1^{(q-1)}, \dots, x_n^{(q-1)}, t), \quad (1.5)$$

$$(q = 2, 3, \dots; s = 1, \dots, n).$$

В уравнениях (1.4) и (1.5) введено обозначение

$$p_{sj}(t) = \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j} \right), \quad (1.6)$$

где круглые скобки означают, что заключенные в них производные вычисляются для порождающего решения $x_s = x_s^0$, т. е. для T -периодического решения системы (1.2). Если порождающее решение известно, то для нахождения функций $x_s^{(1)}, x_s^{(2)}, \dots$ могут быть последовательно использованы рекуррентные системы урав-

нений (1.4), (1.5). Каждая из этих систем представляет собой систему линейных неоднородных уравнений с одинаковой однородной частью

$$\dot{z}_s = p_{s1}(t)z_1 + \dots + p_{sn}(t)z_n, \quad (1.7)$$

коэффициенты которой являются T -периодическими функциями времени вследствие T -периодичности решения $x_s^0(t)$.

Ответ на поставленные выше основные вопросы, таким образом, зависит от того, можно ли найти единственные T -периодические решения $x_s^{(q)}(t)$ уравнений (1.4), (1.5), а также будут ли ряды (1.3) сходящимися по крайней мере при достаточно малых μ . Решение этих вопросов существенно зависит от характера системы уравнений (1.7), которая играет первостепенную роль в дальнейшем и которую, следуя А. Пуанкаре, называют *уравнениями в вариациях для порождающей системы, составленными для порождающего решения*.

В теории линейных дифференциальных уравнений установлено, что если система (1.7) не имеет T -периодических решений, то T -периодические решения уравнений (1.4) и (1.5) непременно существуют и являются единственными. Исследование показывает, что в этом простейшем случае периодическому решению $x_s^0(t)$ порождающей системы (1.2) отвечает (по крайней мере при достаточно малых μ) единственное аналитическое решение (1.3) исходной системы (1.1), обращающееся при $\mu = 0$ в решение $x_s^0(t)$.

Значительно сложнее случай, когда система в вариациях (1.7) имеет T -периодические решения; такой случай встречается, в частности, тогда, когда порождающая система (1.2) допускает семейство T -периодических решений

$$x_s^0 = x_s^0(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (1.8)$$

зависящее от некоторого числа $k \leq n$ произвольных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$; именно такой случай, согласно сказанному выше, наиболее интересен для теории синхронизации. Предполагается, что параметры α_j входят в выражения (1.8) независимо, т. е. ранг матрицы $\|\partial x_s^0 / \partial \alpha_j\|$ равен k . Тогда согласно теореме Пуанкаре [184, 325] система в вариациях непременно имеет k периодических (с периодом T) решений

$$z_{sj}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_j} \quad (s = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k). \quad (1.9)$$

Здесь и ниже первый индекс при z указывает номер функции, а второй — номер решения.

По крайней мере k периодических решений $z_{sj}^*(t)$ имеет в рассматриваемом случае также система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_s^* + p_{1s}(t)z_1^* + \dots + p_{ns}(t)z_n^* = 0, \quad (1.10)$$

называемая сопряженной с системой (1.7).

Исследование устойчивости периодических решений, найденных методом малого параметра Пуанкаре, имеет ряд особенностей. Согласно теории А. М. Ляпунова [178], решение вопроса об устойчивости зависит от характера решений так называемой системы уравнений в вариациях для уравнений (1.1) и решения (1.3)

$$\dot{y}_s = \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j} \right)_* + \mu \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_j} \right)_* \right] y_j \quad (s = 1, \dots, n), \quad (1.11)$$

которая представляет собой линейную однородную систему с T -периодическими коэффициентами (круглые скобки с индексом «*», в которые заключены производные, указывают на то, что они вычислены для рассматриваемого решения). Уравнения (1.11) описывают поведение малых отклонений движения от рассматриваемого периодического движения с течением времени. Если все решения системы (1.11) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, то рассматриваемое движение асимптотически устойчиво; наличие хотя бы одного неограниченно нарастающего решения соответствует неустойчивости, а случай, когда имеются нетривиальные периодические решения, требует, как правило, дополнительного исследования.

Одна из важных особенностей исследования характера решений системы в вариациях (1.11) связана с наличием в ней малого параметра. Если система, получающаяся из (1.11) при $\mu = 0$, т. е. система (1.7), имеет только затухающие при $t \rightarrow \infty$ решения, то изучаемое движение асимптотически устойчиво и при достаточно малых μ . Если система (1.7) имеет хотя бы одно неограниченно возрастающее при $t \rightarrow \infty$ решение, то рассматриваемое движение при достаточно малых μ неустойчиво. Когда система (1.7) имеет периодические решения, для ответа на вопрос об устойчивости движения (даже при достаточно малых μ) необходимо рассмотреть члены уравнений (1.11), содержащие μ .

Последний «критический» случай представляет наибольший интерес для теории синхронизации, ибо он соответствует случаю, когда порождающая система имеет семейство T -периодических

решений. Приводимые ниже теоремы о существовании и устойчивости периодических решений как раз и относятся к указанным случаям.

Заметим, что важный для теории синхронизации случай зависимости порождающего решения от произвольного числа параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ впервые систематически рассмотрен И. Г. Малкиным [184] (А. Пуанкаре изучал случай зависимости только от одного параметра). И. Г. Малкин как раз и получил для различных случаев уравнения типа $P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$ ($s = 1, \dots, k$) для определения этих параметров («основные уравнения»). Алгебраические уравнения типа $|\partial P_s / \partial \alpha_j - \delta_{sj} \kappa| = 0$ ($s, j = 1, \dots, k$), от корней κ которых зависит решение вопроса об устойчивости (см. § 2 гл. 2 и ниже), получены И. И. Блехманом для квазилинейных [33, 34], а затем И. Г. Малкиным и другими исследователями для более сложных систем. Существенное обобщение сделано Р. Ф. Нагаевым, рассмотревшим весьма общий случай квазипериодического семейства порождающих решений [216]. Результаты упомянутых, а также других работ по развитию метода Пуанкаре, интересные для теории синхронизации, излагаются ниже.

Систематическое изложение методов Пуанкаре и Ляпунова в теории нелинейных колебаний можно найти, например, в книгах [57, 74, 184, 188, 237, 260, 280, 312], а обзоры работ по развитию метода — в [54, 57, 291].

§ 2. Квазилинейные неавтономные системы

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\dot{y}_s = \lambda_s y_s + f_s(\omega t) + \mu F_s(y_1, \dots, y_l, \mu, \omega t) \quad (s = 1, \dots, l), \quad (2.1)$$

где λ_s — постоянные, F_s — аналитические функции переменных $y_1, \dots, y_l$ в некоторой замкнутой области G , которой будем предполагать принадлежащими все рассматриваемые ниже решения уравнений, и параметра $\mu \geq 0$ при достаточно малых его значениях. По вещественной переменной t (т. е. по времени) функции F_s и f_s являются периодическими с периодом $T = 2\pi/\omega$ и непрерывными, причем функции F_s удовлетворяют этим условиям в любой точке области *).

Числа λ_s являются так называемыми *характеристическими показателями* порождающей системы

$$\dot{y}_s^0 = \lambda_s y_s^0 + f_s(\omega t) \quad (s = 1, \dots, l), \quad (2.2)$$

отвечающей системе (2.1). Среди них могут иметься как действительные, так и комплексные, причем в последнем случае будем предполагать, что λ_s встречаются в виде комплексно сопряженных пар и что комплексно сопряженным λ_s соответствуют также комплексно сопряженные функции f_s и F_s . Заметим, что именно такая ситуация характерна для систем типа (2.1), полученных

*) Перечисленные ограничения могут быть значительно ослаблены (см. § 7); это относится и к теоремам, приводимым в §§ 3—6.

путем надлежащего преобразования исходных дифференциальных уравнений, содержащих лишь вещественные величины.

Имея в виду приложения к теории синхронизации, будем считать, что среди величин λ_s встречается любое число нулей и чисто мнимых, в числе которых могут быть и одинаковые; такие характеристические показатели назовем *критическими*. Вещественные части всех прочих показателей, являющихся, вообще говоря, комплексными числами, будем предполагать положительными.

Разобьем все критические показатели на группы, каждая из которых объединяет кратные показатели и показатели, отличающиеся один от другого на $in\omega$, где n — любое целое положительное или отрицательное число или нуль. Из этих групп выделим две *особые группы*, объединяющие показатели вида $\lambda = in\omega/2$, где n — целые положительные или отрицательные числа или нули. К *первой особой группе* (назовем ее *ведущей особой группой*) отнесем показатели вида $\lambda = in\omega$, а ко *второй особой группе* — показатели вида $\lambda = i(2n+1)\omega/2$. Мнимые части v_s всех прочих критических показателей отличны от чисел вида $n\omega/2$. Группы, к которым они относятся, назовем *неособыми*.

Обозначим через $\lambda_s^{(r)} = iv_s^{(r)}$ характеристический показатель из неособой группы r_s ; в соответствии с вышесказанным будем иметь

$$\lambda_s = \begin{cases} in_s\omega, & s = 1, \dots, k, \\ \frac{1}{2}i(2n_s+1)\omega, & s = k+1, \dots, k+m, \\ iv_s^{(r)}, & s = k+m+m_1+\dots+m_{r-1}+1, \dots, \\ & \dots, k+m+m_1+\dots+m_r \\ & (r = 1, \dots, p), \\ -u_s + iv_s, & s = k+m+m_1+\dots+m_p+1, \dots, l \\ & (u_s > 0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь k — число показателей в ведущей особой группе, m — число показателей во второй особой группе, m_r — число показателей в неособых группах, p — общее число неособых групп, и наконец, согласно принципу разбиения показателей на группы

$$|v_s^{(r)} - v_j^{(r)}| = n\omega; \quad |v_s^{(r)} - v_j^{(q)}| \neq n\omega, \quad r \neq q. \quad (2.4)$$

Поясним теперь смысл выделения в особые группы характеристических показателей вида $\lambda = in\omega/2$. Поскольку предполагается, что все комплексные (в частности, чисто мнимые) характеристические показатели встречаются только в виде комплексно сопряженных пар, то характеристические показатели особых

групп $\lambda = i n \omega / 2$ попадают, в соответствии с (2.4), в ту же особую группу, что и комплексно сопряженные им показатели $\bar{\lambda} = -i n \omega / 2$. В то же время комплексно сопряженные показатели вида $\lambda = i v \omega$ попадают в разные неособые группы. Иными словами, особые группы содержат пары комплексно сопряженных показателей, а неособые таковых не содержат.

При этом для каждой неособой группы можно найти другую неособую группу, которая содержит характеристические показатели, комплексно сопряженные показателям первой группы. Отсюда следует, что общее число неособых групп p всегда четное, т. е. можно положить $p = 2p'$, где p' — целое число. Будем в дальнейшем для конкретности считать, что неособая группа с номером $p' + r$ содержит показатели, комплексно сопряженные по отношению к показателям группы с номером r . Иначе говоря, положим в дополнение к формулам (2.3)

$$\begin{aligned} v_s^{(r)} &= -v_{s+m_1+\dots+m_{p'}}^{(p'+r)}, \quad m_r = m_{p'+r} \\ (r &= 1, \dots, p'; \quad s = k + m + m_1 + \dots + m_{r-1} + 1, \dots \\ &\dots, k + m + m_1 + \dots + m_r). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Наряду с характеристическими показателями λ используются так называемые *корни характеристического уравнения* ρ , связанные с λ соотношением $\rho = e^{\lambda T} = e^{2\pi i \lambda / \omega}$. Структуре характеристических показателей, определяемой равенствами (2.3), и структуре дифференциальных уравнений (2.1) отвечают k -кратный корень характеристического уравнения $\rho = 1$, m -кратный корень $\rho = -1$, m_r -кратные ($r = 1, \dots, p$) корни, отличные от ± 1 , но с модулями, равными единице, и наконец, $l - (k + m + m_1 + m_p)$ корней, модули которых меньше единицы; при этом всем кратным корням соответствуют линейные элементарные делители *).

Сделаем, наконец, естественное предположение, что порождающая система (2.2) допускает периодические решения того же периода $T = 2\pi / \omega$, что и период правых частей уравнений (2.1). Это требование приводит, как нетрудно видеть, к следующим условиям, накладываемым на функции $f_s(\omega t)$, соответствующие переменным ведущей группы:

$$\int_0^T f_s(\omega t) e^{-i n_s \omega t} dt = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (2.6)$$

При выполнении условий (2.6) порождающая система (2.2) допускает не одно решение, а семейство T -периодических решений,

*) Мы не останавливаемся здесь на разъяснении некоторых понятий теории систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими (в частности — с постоянными) коэффициентами. В случае необходимости их можно найти, например, в книгах [294, 295, 57].

зависящее от k произвольных постоянных α_s :

$$y^0(\omega t) = \begin{cases} \alpha_s e^{in_s \omega t} + u_s(\omega t), & s = 1, \dots, k, \\ u_s(\omega t), & s = k+1, \dots, l. \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь через $u_s(\omega t)$ обозначены $2\pi/\omega$ -периодические функции t , определяемые формулами

$$u_s(\omega t) = \begin{cases} \int_0^t f_s(\omega t_1) e^{in_s \omega(t-t_1)} dt_1, & s = 1, \dots, k, \\ \frac{1}{1 - e^{2\pi i \lambda_s / \omega}} \left[\int_t^{2\pi/\omega} f_s(\omega t_1) e^{(2\pi - \omega t - \omega t_1)} dt_1 + \right. \\ \left. + \int_0^t f_s(t_1) e^{\lambda_s(t-t_1)} dt_1 \right], & s = k+1, \dots, l. \end{cases} \quad (2.8)$$

При сформулированных предположениях справедлива следующая теорема [33, 57].

Теорема. *Периодические решения неавтономной системы уравнений (2.1), обращающиеся при $\mu=0$ в периодические решения (2.7) порождающей системы (2.2), могут соответствовать лишь тем значениям постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, которые удовлетворяют уравнениям*

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \langle F_s(y_1^0, \dots, y_l^0, 0, \omega t) e^{-in_s \omega t} \rangle = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (2.9)$$

Если для определенной системы постоянных $\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_k = \alpha_k^*$, удовлетворяющих уравнениям (2.9), вещественные части всех корней алгебраических уравнений *)

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k), \quad (2.10)$$

$$\left| \left\langle \frac{\partial F_s(y_1^0, \dots, y_l^0, 0, \omega t)}{\partial y_j^0} e^{i(n_j - n_s) \omega t} \right\rangle - \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (s, j = k+1, \dots, k+m), \quad (2.11)$$

*) Здесь используется сокращенная запись определителя порядка q с элементами a_{sj} в виде $[a_{sj}]$ ($s, j = 1, \dots, q$), а также символ Кронекера δ_{sj} , обозначающий число, равное единице при $s = j$ и равное нулю при $s \neq j$. Таким образом, в виде (2.10) кратко записано уравнение (2.2) главы 2. Напомним также, что скобки $\langle \rangle$ означают усреднение заключенного в них выражения по переменной t в пределах от 0 до $2\pi/\omega$ или по переменной $\tau = \omega t$ в пределах от 0 до 2π .

$$\left| \left\langle \frac{\partial F_s(y_1^0, \dots, y_l^0, 0, \omega t)}{\partial y_j^0} e^{i(v_j^{(r)} - v_s^{(r)})t} \right\rangle - \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (2.12)$$

$(s, j = k + m + m_1 + \dots + m_{r-1} + 1, \dots$

$\dots, k + m + m_1 + \dots + m_r; \quad r = 1, \dots, p' = p/2)$

отрицательны, то при достаточно малых μ этой системе постоянных действительно соответствует единственное аналитическое относительно μ асимптотически устойчивое периодическое решение уравнений (2.1), обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее решение (2.7).

Если вещественная часть хотя бы одного из корней уравнений (2.10)—(2.12) положительна, то соответствующее решение неустойчиво; при наличии чисто мнимых или нулевых корней, вообще говоря, необходимо дополнительное исследование.

Таким образом, исследование устойчивости периодических решений системы уравнений (2.1) сводится к обычной задаче Гурвица для алгебраических уравнений, коэффициенты которых выражаются непосредственно через правые части первых $k + m + m_1 + \dots + m_{p'}$ уравнений (2.1).

§ 3. Квазилинейные автономные системы

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{y}_s = \lambda_s y_s - \mu F_s(y_1, \dots, y_l, \mu) \quad (s = 1, \dots, l), \quad (3.1)$$

отличающуюся от (2.1) лишь тем, что правые части уравнений не зависят явным образом от времени t .

Известно [75, 147], что периодические решения системы (3.1) с периодом $T_{q,\sigma}$, близким к $T_{q,\sigma}^0 = 2\pi q/v_\sigma$ (q — целое положительное число), могут соответствовать любой паре чисто мнимых чисел $\lambda_s = \pm i v_\sigma$. Поэтому, рассматривая вопрос о существовании и устойчивости решений с периодом T , близким к какому-либо из таких периодов, будем считать, что по крайней мере одно из чисел $\lambda_s = 2\pi i n_s/T = i \omega n_s$ из ведущей группы ($1 \leq s \leq k$) отлично от нуля, ибо в противном случае будет неопределенным период рассматриваемого решения.

Соответствующая уравнениям (3.1) порождающая система

$$\dot{y}_s^0 = \lambda_s y_s^0 \quad (s = 1, \dots, l) \quad (3.2)$$

допускает периодическое решение с периодом $T = 2\pi/\omega$

$$y_s^0 = \begin{cases} \alpha_s e^{i n_s \omega t}, & s = 1, \dots, k, \\ 0, & s = k + 1, \dots, l, \end{cases} \quad (3.3)$$

зависящее от k произвольных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

В рассматриваемом случае автономной системы периодические решения уравнений (3.1), обращающиеся при $\mu = 0$ в порождающие решения (3.2), будут иметь период, вообще говоря, отличный от $T = 2\pi/\omega$ и зависящий от μ . Обозначим этот период через

$$T^* = T^*(\mu) = T[1 - \delta(\mu)], \quad (3.4)$$

где $\delta(\mu)$ — неизвестная функция («поправка к периоду»), подлежащая определению в процессе решения задачи; очевидно, что $\delta(0) = 0$.

При сформулированных условиях справедлива следующая теорема [34, 57].

Теорема. Периодические (с периодом $T^*(\mu) = T(1 - \delta(\mu))$) решения автономной системы уравнений (3.1), обращающиеся при $\mu = 0$ в периодические (с периодом T) решения (3.3) порождающей системы (3.2), могут соответствовать лишь тем значениям постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1} = \alpha_k = \alpha$, которые удовлетворяют уравнениям

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \alpha_k n_k P_s^* - \alpha_s n_s P_k^* = 0 \quad (s = 1, \dots, k-1), \quad (3.5)$$

где

$$P_s^* = P_s^*(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \langle F_s(y_0^0, \dots, y_l^0, 0) e^{-in_s \omega t} \rangle = \\ = \langle F_s(\alpha_1 e^{in_1 \omega t}, \dots, \alpha_k e^{in_k \omega t}, 0, \dots, 0) e^{-in_s \omega t} \rangle \quad (s = 1, \dots, k). \quad (3.6)$$

Если для определенной системы постоянных $\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_{k-2} = \alpha_{k-2}^*, \alpha_{k-1} = \alpha_k = \alpha^*$, удовлетворяющих уравнениям (3.5), вещественные части всех корней κ алгебраических уравнений *)

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \alpha_k n_k \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k-1), \quad (3.7)$$

$$\left| \left\langle \left(\frac{\partial F_s}{\partial y_j} \right) e^{i(n_j - n_s) \omega t} \right\rangle - \delta_{sj} \left(\frac{1}{2} \frac{(2n_s + 1) P_k^*}{n_s \alpha_k} + \kappa \right) \right| = 0 \quad (3.8)$$

(s, j = k+1, \dots, k+m),

$$\left| \left\langle \left(\frac{\partial F_s}{\partial y_j} \right) e^{i(v_j^{(r)} - v_s^{(r)}) t} \right\rangle - \delta_{sj} \left(\frac{v_s^{(r)} P_k^*}{n_k \omega \alpha_k} + \kappa \right) \right| = 0 \quad (3.9)$$

отрицательны, то при достаточно малых μ этой системе постоянных действительно соответствует единственное аналитическое относительно μ , устойчивое (асимптотически орбитально устойчивое), периодическое решение системы (3.1) с периодом $T^*(\mu) = T[1 - \delta(\mu)]$, обращающееся при $\mu = 0$ в периодическое (с периодом T) решение (3.3) порождающей системы (3.2).

*) Объяснение обозначений см. в сноске на с. 271.

Если вещественная часть хотя бы одного из корней уравнений (3.7)–(3.9) положительна, то соответствующее решение неустойчиво; при наличии чисто мнимых или нулевых корней, вообще говоря, необходимо дополнительное исследование.

С точностью до членов порядка μ поправка к периоду при этом определяется формулой

$$\delta(\mu) \approx \mu \frac{P_k^*(\alpha_1^*, \dots, \alpha_{k-2}^*, \alpha^*, \alpha^*)}{i\alpha^* n_k}. \quad (3.10)$$

Таким образом, и в случае автономной квазилинейной системы уравнений (3.1) исследование устойчивости периодических решений сводится к задаче Гурвица для алгебраических уравнений, коэффициенты которых выражаются непосредственно через правые части первых $k + m + m_1 + \dots + m_p$ уравнений (3.1).

§ 4. Неавтономные системы, близкие к произвольным нелинейным

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_l, \omega t) + \mu F_s(x_1, \dots, x_l, \mu, \omega t) \quad (s = 1, \dots, l), \quad (4.1)$$

где X_s и F_s — аналитические функции $x_1, \dots, x_l$ в замкнутой области G , которой предполагаются принадлежащими все изучаемые ниже периодические решения. По времени t функции X_s и F_s предполагаются непрерывными периодическими функциями периода $T = 2\pi/\omega$; F_s к тому же являются аналитическими функциями параметра $\mu \geq 0$ при достаточно малых его значениях.

Пусть соответствующая уравнениям (4.1) порождающая система

$$\dot{x}_s^0 = X_s(x_1^0, \dots, x_l^0, \omega t) \quad (s = 1, \dots, l) \quad (4.2)$$

допускает семейство T -периодических решений

$$x_s^0 = x_s^0(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (s = 1, \dots, l), \quad (4.3)$$

зависящее от $k \leq l$ произвольных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и аналитическое относительно этих параметров вблизи изучаемых ниже «порождающих» значений $\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_k = \alpha_k^*$. Предполагается, что параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ входят в выражения (4.3) независимо, т. е. что по крайней мере один из определителей k -го порядка, содержащихся в матрице

$$\left\| \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_j} \right\| \quad (s = 1, \dots, l; j = 1, \dots, k), \quad (4.4)$$

не обращается в нуль при упомянутых порождающих значениях параметров *).

Рассмотрим соответствующую уравнениям (4.2) и решению (4.3) систему уравнений в вариациях (см. § 1), т. е. систему

$$z_s = p_{s1}z_1 + \dots + p_{sl}z_l \quad (s = 1, \dots, l), \quad (4.5)$$

где

$$p_{sj} = p_{sj}(\omega t) = \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial X_s(x_1^0, \dots, x_l^0, \omega t)}{\partial x_j^0} \quad (4.6)$$

— периодические функции периода T , причем круглые скобки, в которые заключены производные от функции X_s , как и всюду ранее, указывают, что эти производные вычислены для какого-либо из порождающих решений (4.3).

В силу известного свойства уравнений в вариациях (см. § 1) система (4.5) допускает по крайней мере k периодических решений вида

$$z_{sj}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_j} \quad (s = 1, \dots, l; j = 1, \dots, k), \quad (4.7)$$

получающихся путем дифференцирования решений (4.3) по параметрам. Известно также, что по меньшей мере k периодических решений имеет система линейных уравнений

$$\dot{z}_s^* + p_{1s}z_1^* + \dots + p_{ls}z_l^* = 0 \quad (s = 1, \dots, l), \quad (4.8)$$

называемая сопряженной с (4.5) системой. Будем предполагать, что число независимых T -периодических решений систем (4.5) и (4.8) в точности равно k , т. е. что система (4.5) не имеет периодических решений, независимых от (4.7). Тогда характеристическое уравнение системы в вариациях непременно имеет k -кратный корень $\rho = 1$; модули всех прочих корней будем предполагать меньшими единицы. При этом кратному «критическому» корню $\rho = 1$ соответствуют линейные элементарные делители и оказывается всегда возможным выбрать периодические решения сопряженной системы так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\sum_{s=1}^l z_{si} z_{sj}^* = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (4.9)$$

При сформулированных предположениях справедлива следующая теорема, принадлежащая И. Г. Малкину [184] и несколько обобщенная в книге [57].

*) Здесь, как и ранее, используется сокращенная запись определителя порядка q с элементами a_{sj} в виде $|a_{sj}|$ ($s, j = 1, \dots, q$); подобным образом запись $\|a_{sj}\|$ ($s = 1, \dots, l; j = 1, \dots, k$) означает матрицу с числом строк l и числом столбцов k .

Теорема. *Периодические решения неавтономной системы (4.1), обращающиеся при $\mu=0$ в периодические решения (4.3) порождающей системы (4.2), могут соответствовать лишь тем значениям постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, которые удовлетворяют уравнениям*

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \left\langle \sum_{j=1}^l F_j(x_1^0, \dots, x_l^0, 0, \omega t) z_{js}^*(t) \right\rangle = 0. \quad (4.10)$$

Если для определенной системы постоянных $\alpha_1 = \alpha_1^, \dots, \alpha_k = \alpha_k^*$, удовлетворяющих уравнениям (4.10), вещественные части всех корней κ алгебраического уравнения k -й степени *)*

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k) \quad (4.11)$$

отрицательны, то при достаточно малом μ этой системе постоянных действительно соответствует единственное аналитическое относительно μ асимптотически устойчивое периодическое решение уравнений (4.1), обращающееся при $\mu=0$ в порождающее решение (4.3).

Если вещественная часть хотя бы одного из корней уравнения (4.11) положительна, то соответствующее решение неустойчиво; при наличии чисто мнимых или нулевых корней, вообще говоря, необходимо дополнительное исследование.

§ 5. Автономные системы, близкие к произвольным нелинейным

Рассмотрим теперь автономную систему

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_l) + \mu F_s(x_1, \dots, x_l, \mu) \quad (s = 1, \dots, l), \quad (5.1)$$

где X_s и F_s — аналитические функции переменных $x_1, \dots, x_l$ в замкнутой области G , которой принадлежат все изучаемые ниже периодические решения; F_s к тому же являются аналитическими функциями параметра $\mu \geq 0$ при достаточно малых его значениях.

Пусть отвечающая уравнениям (5.1) порождающая система

$$\dot{x}_s^0 = X_s(x_1^0, \dots, x_l^0) \quad (s = 1, \dots, l) \quad (5.2)$$

допускает семейство $T' = 2\pi/\omega$ -периодических решений

$$x_s^0 = x_s^0(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}), \quad (5.3)$$

зависящее, кроме постоянной α , которая вследствие автономно-

*) Объяснение обозначений см. в сноске на с. 271.

сти системы всегда может быть добавлена к t , также от некоторого числа $k-1 \leq l-1$ произвольных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$. Допустим, что решение (5.3) является аналитическим относительно этих параметров вблизи рассматриваемых ниже «порождающих» значений $\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_{k-1} = \alpha_{k-1}^*$. Как и в § 4, предполагаем, что параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ входят в выражения (5.3) независимо, т. е. что при упомянутых порождающих значениях параметров $\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_{k-1} = \alpha_{k-1}^*$ отличен от нуля по крайней мере один из определителей $(k-1)$ -го порядка, содержащийся в матрице (4.4).

Как и в § 4, система уравнений в вариациях (4.5) в силу уже упоминавшегося свойства допускает k решений вида

$$z_{sj}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, \dots, k-1), \quad (5.4)$$

$$z_{sh}(t) = \dot{x}_s^0, \quad (5.5)$$

получающихся теперь путем дифференцирования решений (5.3) соответственно по $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ и по t (напомним, что к t всегда можно добавить еще одну постоянную α).

В отличие от квазилинейной автономной системы (3.1), период T порождающего решения системы (5.2) может зависеть от параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$. Здесь мы, однако, рассмотрим более простой случай, когда T не зависит ни от одного из этих параметров. В этом случае можно утверждать, что производные (5.4) являются T -периодическими функциями t и уравнения в вариациях допускают, таким образом, k периодических решений того же периода. Столько же T -периодических решений будет допустить и система (4.8), сопряженная по отношению к системе в вариациях. Обозначим эти решения через $z_{sj}^*(t)$ ($j = 1, \dots, k$) и будем предполагать, что иных периодических решений сопряженная система не имеет; не имеет тогда периодических решений, независимых от (5.4), (5.5), и система в вариациях. Это означает, что указанной системе соответствует k -кратный корень $\rho = 1$ характеристического уравнения; как и в § 4, будем предполагать, что все прочие корни характеристического уравнения имеют модули, меньшие единицы. Тогда кратному корню $\rho = 1$ будут соответствовать линейные элементарные делители и можно считать, что выполняются соотношения (4.9).

При сформулированных предположениях справедлива следующая теорема [57, 184, 207].

Теорема. *Периодические решения с периодом $T^*(\mu) = T[1 - \delta(\mu)]$ исходной системы уравнений (5.1), обращающиеся при $\mu = 0$ в периодические (с периодом T , не зависящим от параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$) решения семейства (5.3) порождающей*

системы (5.2), могут соответствовать лишь тем значениям параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ указанного семейства, которые удовлетворяют уравнениям

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \equiv \left\langle \sum_{j=1}^l F_j(x_1^0, \dots, x_l^0, 0) z_{js}^*(t) \right\rangle = 0 \quad (5.6)$$

$$(s = 1, \dots, k-1).$$

Определенному решению этих уравнений действительно соответствует при достаточно малых значениях μ единственное аналитическое относительно μ и устойчивое (асимптотически орбитально устойчивое) периодическое решение системы (5.1) с периодом $T^*(\mu)$, обращающееся при $\mu=0$ в порождающее, если все корни алгебраического уравнения $(k-1)$ -й степени *)

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k-1) \quad (5.7)$$

имеют отрицательные вещественные части. При наличии у уравнения (5.7) хотя бы одного корня с положительной вещественной частью рассматриваемое решение неустойчиво; случай нулевых или чисто мнимых корней требует, вообще говоря, дополнительного исследования.

С точностью до членов порядка μ поправка $\delta(\mu)$ к периоду решения при этом определяется формулой

$$\delta(\mu) \approx \mu P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \mu \left\langle \sum_{s=1}^l F_s(x_1^0, \dots, x_l^0, 0) z_{sk}^*(t) \right\rangle. \quad (5.8)$$

§ 6. Системы, близкие к произвольным нелинейным в случае квазипериодического семейства порождающих решений **)

Рассмотрим ту же нелинейную систему общего вида

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_l, \omega t) + \mu F_s(x_1, \dots, x_l, \mu, \omega t) \quad (s = 1, \dots, l), \quad (6.1)$$

что и в § 4, но будем предполагать, что соответствующая порождающая система

$$\dot{x}_s^0 = X_s(x_1^0, \dots, x_l^0, \omega t) \quad (s = 1, \dots, l) \quad (6.2)$$

допускает семейство квазипериодических решений вида

$$x_s^0 = x_s^0(\omega t; \psi_1, \dots, \psi_k; h_1, \dots, h_n). \quad (6.3)$$

*) Объяснение обозначений см. в списке на с. 271.

**) См. [216].

Здесь $k + n \leq l$,

$$\psi_s = \omega_s t + \alpha_s \quad (s = 1, \dots, k), \quad (6.4)$$

причем функции x_s^0 являются 2π -периодическими по каждому из аргументов ψ_s ; α_s и h_ν — произвольные постоянные. Пусть далее первые m частот ω_s существенно зависят от постоянных h_ν , а $k - m$ последующих частот ω_s равны частоте внешнего возмущения ω , т. е.

$$\begin{aligned} \omega_s &= \omega_s(h_1, \dots, h_n) & (s = 1, \dots, m), \\ \omega_s &= \omega & (s = m + 1, \dots, k), \end{aligned} \quad (6.5)$$

причем $m \leq k$. Иными словами, будем считать, что порождающая система допускает семейство квазипериодических решений, зависящее от $k + n$ произвольных постоянных α_s ($s = 1, \dots, k$) и h_ν ($\nu = 1, \dots, n$). С подобным случаем приходится сталкиваться при исследовании синхронизации квазиконсервативных систем.

Семейство (6.3) содержит подсемейство $T = 2\pi/\omega$ -периодических решений, выделяемое соотношением

$$\omega_s(h_1, \dots, h_n) = \omega \quad (s = 1, \dots, m). \quad (6.6)$$

Это подсемейство, которое и будем рассматривать в дальнейшем, содержит, таким образом, лишь $k + n - m$ независимых постоянных. Поэтому система уравнений в вариациях (4.5), соответствующая уравнениям (6.2) и решению (6.3), допускает в данном случае k независимых T -периодических решений

$$z_{sj}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_j} \quad (s = 1, \dots, l; j = 1, \dots, k) \quad (6.7)$$

и n линейно возрастающих решений

$$\tilde{z}_{sv}(t) = -\frac{\partial' x_s^0}{\partial h_\nu} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_s^0}{\partial \psi_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial h_\nu} + \frac{\partial x_s^0}{\partial h_\nu} \quad (s = 1, \dots, l; \nu = 1, \dots, n), \quad (6.8)$$

где штрих означает полное частное дифференцирование. Нетрудно составить такие линейные комбинации решений $\tilde{z}_{sv}(t)$, что первые m из них будут по-прежнему линейно возрастающими, а остальные $n - m$ — периодическими с периодом T . Такими комбинациями (также являющимися решениями уравнений в вариациях (4.5)) будут

$$z_{sv}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_\nu} t + \sigma_{sv}(t) \quad (\nu = 1, \dots, m), \quad (6.9)$$

$$z_{sv}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial h_v} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial h_v} \sigma_{si}(t) \quad (v = m+1, \dots, n), \quad (6.10)$$

$$(s = 1, \dots, l).$$

Здесь через $\sigma_{sv}(t)$ обозначены T -периодические функции, определяемые равенствами

$$\sigma_{sv}(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{iv} \frac{\partial x_s^0}{\partial h_i}, \quad (6.11)$$

где χ_{iv} — числа, которые находятся из систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^m \chi_{iv} \frac{\partial \omega_s}{\partial h_i} = \delta_{sv} = \begin{cases} 1, & s = v, \\ 0, & s \neq v \end{cases} \quad (s, v = 1, \dots, m). \quad (6.12)$$

Можно считать, что эти уравнения имеют единственное решение в силу предположения о существенной зависимости частот $\omega_1, \dots, \dots, \omega_m$ от постоянных $h_1, \dots, h_m$.

Заметим, что функции x_s^0 в выражениях (6.9) и (6.10) предполагаются T -периодическими, т. е. считается, что равенства (6.5) и (6.6) выполнены.

Таким образом, система в вариациях (4.5) допускает $k+n-m$ взаимно независимых T -периодических решений (6.7) и (6.10). Будем предполагать, что иных независимых T -периодических решений эта система не имеет. Тогда сопряженная система (4.8) также допускает столько же независимых T -периодических решений, которые обозначим через $z_{s1}^*(t), \dots, z_{s,k+n-m}^*(t)$, и будем считать, что они выбраны удовлетворяющими следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\sum_{s=1}^l z_{sr}^*(t) \sigma_{si}(t) = \delta_{ir} \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$\sum_{s=1}^l z_{sr}^*(t) z_{si}(t) = \delta_{ir} \quad (i = m+1, \dots, k), \quad (6.13)$$

$$\sum_{s=1}^l z_{sr}^*(t) z_{sv}(t) = \delta_{k-m+v,r} \quad (v = m+1, \dots, n).$$

В указанных предположениях справедливо следующее утверждение [246]:

Теорема. Периодические с периодом $T = 2\pi/\omega$ решения неавтономной системы (6.1), обращающиеся при $\mu = 0$ в решения порождающей системы (6.2), могут соответствовать лишь тем значениям постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_k; h_1, \dots, h_n$, которые являются

решениями системы, состоящей из $k+n-m$ уравнений

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k; h_1, \dots, h_n) =$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^l F_j(x_1^0, \dots, x_l^0, 0, \omega t) z_{js}^*(t) \right\rangle = 0 \quad (6.14)$$

$$(s = 1, \dots, k+n-m),$$

а также m уравнений (6.6). Каждому решению $\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*; h_1^*, \dots, h_n^*$ при достаточно малом μ действительно отвечает единственное аналитическое относительно μ и асимптотически устойчивое решение такого рода, если:

1) Все корни алгебраического уравнения m -й степени

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \lambda_1^2 \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, m) \quad (6.15)$$

вещественны и отрицательны, причем для каждого такого корня выполняется неравенство

$$\lambda_2 = \frac{1}{2 \sum_{r=1}^m a_r a_r^*} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^m \left[\sum_{s=1}^m \chi_{si} \frac{\partial P_r}{\partial h_s} + \left(\sum_{s=m+1}^k \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_s} \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial P_r}{\partial h_s} \frac{\partial P_{s+k-m}}{\partial \alpha_i} \right) - p_{ri} \right] a_i a_r^* < 0. \quad (6.16)$$

2) Все корни λ_3 алгебраического уравнения $(k+n-2m)$ -й степени, получающегося путем приравнивания нулю определителя системы линейных однородных уравнений

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} a_i + \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial P_r}{\partial h_s} b_s = \begin{cases} 0 & (r = 1, \dots, m), \\ \lambda_3 a_r & (r = m+1, \dots, k), \\ \lambda_3 b_{r-k+m} & (r = k+1, \dots, k+n-m), \end{cases} \quad (6.17)$$

имеют отрицательные вещественные части.

Если среди чисел λ_1 или λ_2 имеется хотя бы одно положительное или среди λ_1 имеется хотя бы одно комплексное или чисто мнимое, а также если хотя бы одно λ_3 имеет положительную вещественную часть, то соответствующее решение неустойчиво; случай нулевых λ_1, λ_2 или чисто мнимых λ_3 требует дополнительного исследования.

В соотношениях (6.15)–(6.17) обозначено

$$\frac{\partial^*}{\partial h_s} = \frac{\partial}{\partial h_s} - \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^m \chi_{ir} \frac{\partial \omega_r}{\partial h_s} \frac{\partial}{\partial h_i},$$

$$P_{ri} = \left\langle \sum_{s=1}^l z_{sr}^*(t) \frac{\partial x_s^{(1)}}{\partial \alpha_i} \right\rangle - \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i},$$
(6.18)

где $x_s^{(1)} = x_s^{(1)}(t)$ — первое приближение к искомому периодическому решению, т. е. коэффициенты при μ в разложениях $x_s(t) = x_s^0(t) + \mu x_s^{(1)}(t) + \dots$, определяемые из системы

$$\dot{x}_s^{(1)} = \sum_{j=1}^l \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j} \right) x_j^{(1)} + F_s(x_1^0, \dots, x_l^0, 0, \omega t) \quad (s = 1, \dots, l);$$
(6.19)

причем, как и выше, круглые скобки, в которые заключены производные $\partial X_s / \partial x_j$, указывают, что эти производные вычислены для порождающего решения x_s^0 и при $\mu = 0$.

Через a_i и a_i^* обозначены решения взаимно сопряженных систем линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} a_i = \lambda_1^2 a_r \quad (r = 1, \dots, m),$$

$$\sum_{r=1}^m \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} a_r^* = \lambda_1^2 a_i^* \quad (i = 1, \dots, m).$$
(6.20)

Эти уравнения имеют решения, определенные с точностью до постоянного множителя, если корни λ_1 уравнения (6.15) простые или кратные, но с простыми элементарными делителями, что и предполагается.

Заметим, что условия устойчивости, связанные с соотношениями (6.15) и (6.16), обусловлены наличием у уравнений в вариациях m групп решений

$$z_{sj}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_j}, \quad z_{sj}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_j} t + \sigma_{sj}(t) \quad (j = 1, \dots, m),$$

которым соответствуют нулевые (т. е. критические) характеристические показатели с квадратными элементарными делителями [57, 184]; обращающиеся в них при $\mu \rightarrow 0$ показатели системы в вариациях для уравнений (6.1) аналитичны относительно $\mu^{1/2}$. Чисто периодическим же решениям уравнений в вариациях

$$z_{sj}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_j} \quad (j = m+1, \dots, k),$$

$$z_{sj}(t) = \frac{\partial x_s^0}{\partial h_j} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial h_j} \sigma_{si}(t) \quad (j = m+1, \dots, n)$$

отвечают нулевые критические характеристические показатели с простыми элементарными делителями; обращающиеся в них при $\mu \rightarrow 0$ показатели системы в вариациях для уравнений (6.1) аналитичны по μ . Наличием таких показателей обусловлены условия устойчивости, связанные с уравнениями (6.17).

Заметим, что в данном случае, в отличие от ранее рассмотренных, условия устойчивости зависят не только от порождающего, но также и от первого приближения к изучаемому периодическому решению.

Изложенный результат легко распространяется на случай колебаний с соизмеримыми частотами, когда вместо соотношений (6.5) и (6.6) имеют место равенства

$$\omega_s = n_s \omega \quad (s = 1, \dots, k), \quad (6.24)$$

где n_s — целые числа.

§ 7. Дополнительные замечания к теоремам §§ 2—6

1) Левые части уравнений (2.9), (3.5), (4.10), (5.6), (6.14) как раз и представляют собой порождающие функции, а сами эти уравнения — основные уравнения, о которых говорилось в § 2 гл. 2.

2) Уравнения вида (2.1) и (3.1), о которых идет речь в теоремах §§ 2 и 3, иногда называют *каноническими*. К такому виду приводятся общие квазилинейные системы вида

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^l a_{sj}(t) x_j + \varphi_s(t) + \mu \Phi_s(x_1, \dots, x_l, \mu, t) \quad (7.1)$$

$$(s = 1, \dots, l),$$

где a_{sj} , φ_s и Φ_s есть $T = 2\pi/\omega$ -периодические функции t (в автономном случае a_{sj} и φ_s — постоянные, а Φ_s не зависят явно от t), если всем кратным корням ρ характеристического уравнения линейной части системы соответствуют линейные элементарные делители. Переход от уравнений типа (7.1) к уравнениям вида (2.1) или (3.1) осуществляется путем неособенного линейного преобразования переменных. Практическое нахождение этого преобразования хотя и требует в общем случае знания фундаментальной системы решений соответствующей линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, но при решении многих прикладных задач оказывается осуществимым благодаря соответствующей структуре матрицы $\|a_{sj}(t)\|$.

3) Теоремы §§ 2 и 3 остаются справедливыми и для системы уравнений, приведенной к канонической форме лишь частично, т. е. только относительно переменных, отвечающих критическим характеристическим показателям. При этом для получения уравнений (2.9), (2.10) и (3.5), (3.7), играющих, как правило, основную роль, достаточно привести систему к канонической форме лишь для переменных $x_1, \dots, x_k$, соответствующих ведущей критической группе показателей. Более того, уравнения, отвечающие некритическим переменным, могут даже не быть квазилинейными; существенно лишь, чтобы все некритические характеристические показатели системы уравнений в вариациях имели отрицательные вещественные части.

4) Все теоремы, как нетрудно видеть, непосредственно применимы не только к чисто периодическим, но и к синхронным решениям соответствующих систем (см. равенства (1.1) гл. 1).

5) Во многих практически важных задачах, приводящих к исследованию периодических или синхронных движений (в частности, в задачах о внутренней синхронизации динамических систем), период порождающего решения T заранее неизвестен*). В таких случаях естественно попытаться определить этот период, исходя из условия, чтобы он был по возможности ближе к периоду $T^*(\mu)$ исходной системы (3.1) или (5.1), а именно из условия, чтобы поправка к периоду $\delta(\mu)$ с точностью до членов порядка μ обращалась в нуль**). Тогда, согласно (3.10) и (5.8), вместо $k-1$ уравнений (3.5) получается k равенств

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (7.2)$$

Из этих уравнений могут быть определены $k-1$ постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ и период T .

Благодаря отмеченному обстоятельству оказывается возможным формулировать результаты решения ряда задач о синхронизации в виде, одновременно пригодном как для случая внешней синхронизации, так и для случая внутренней синхронизации. Более того, при определенных условиях можно не останавливаться специально на рассмотрении наиболее сложной задачи о внутренней синхронизации, получая результаты чисто формальным путем из решения более простой задачи о внешней синхронизации [57].

6) Условия теорем §§ 2—5 содержали ограничения, касающиеся линейности элементарных делителей, соответствующих

*) Следует отличать случай неизвестности периода порождающего приближения от факта неизвестности периода синхронного движения в задачах о внутренней синхронизации (см. § 1 гл. 1).

**) Такой прием применялся при решении ряда задач теории нелинейных колебаний (см., например, работы [34, 57, 74]).

кратным корням характеристического уравнения системы в вариациях; в § 6, однако, допускалось наличие также показателей с квадратными элементарными делителями. С последним случаем приходится сталкиваться при решении ряда задач о синхронизации (например, задач о синхронизации квазиконсервативных объектов и вообще задач, сводящихся к изучению автономных в порождающем приближении систем, для которых период порождающего решения T зависит, по крайней мере, от одной из постоянных α_s). Рассмотрение случая квадратных элементарных делителей кратных корней для ряда конкретизированных систем содержится в работах [208—210, 213, 215, 283], частично изложенных в книге [57].

7) Непосредственное использование теорем позволяет изучить вопрос о наличии или отсутствии факта синхронизации, а также полностью определить порождающие периодические (или синхронные) решения и рассмотреть вопрос об устойчивости решений. В техническом плане дело сводится к составлению и решению основных уравнений $P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$, а также к изучению знаков вещественных частей корней алгебраических уравнений, т. е. к решению хорошо известной задачи Гурвица. В случаях квазилинейных систем при этом особых трудностей, как правило, не возникает. В случае же систем, близких к нелинейным, трудности связаны с необходимостью нахождения системы периодических решений z_{sj}^* системы уравнений, сопряженной с уравнениями в вариациях, т. е. с решением линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Впрочем, в ряде практически важных задач такую систему решений все же удастся найти без особых затруднений, ибо, как отмечалось в § 2 гл. 1, трудности определяются здесь не степенью сложности системы в целом, а лишь степенью сложности отдельных изолированных объектов.

Обычно при решении прикладных задач о синхронизации установления факта существования устойчивого синхронного движения и его вычисления в порождающем приближении оказывается вполне достаточным. В случае же, когда необходимо более точное нахождение решений, их, вследствие аналитичности по μ , устанавливаемое теоремами, можно разыскивать в виде рядов по целым положительным степеням этого параметра. Вопросы, связанные с практическим определением коэффициентов указанных рядов, рассмотрены в книгах [57, 66, 184].

8) В формулировках теорем указывается, что при наличии у уравнений (2.10), (3.7), (4.11), (5.7) и (6.15) нулевого корня требуется дополнительное исследование. При этом для теории синхронизации наиболее интересны случаи, когда наличие одного или нескольких нулевых корней указанных уравнений связано с тем обстоятельством, что основные уравнения (соответственно

уравнения (2.9), (3.5), (4.10), (5.6) и (6.14) позволяют найти только часть неизвестных α , а по отношению к другим неизвестным или к их комбинациям удовлетворяются тождественно. Уравнения (2.10), (3.7), (4.11), (5.7) и (6.15) позволяют при этом получить лишь необходимые условия устойчивости. Такие случаи, о которых говорилось в § 5 гл. 3 и в § 2 гл. 5 и с которыми приходится сталкиваться при решении некоторых задач о кратной синхронизации, рассмотрены в работах Г. А. Мермана [191] и О. П. Барзукова [15, 16], где показано, что оставшиеся неопределенными параметры порождающего решения α , вообще говоря, можно найти из условий существования и периодичности следующих приближений; на основе изучения этих приближений получаются также недостающие условия устойчивости.

9) Требования, предъявляемые к правым частям дифференциальных уравнений, о которых идет речь в §§ 2—6, могут быть значительно ослаблены при сохранении большинства изложенных результатов [147, 184]. Так, например, во многих случаях от функций X , в уравнениях (2.1), (3.1), (4.1), (5.1) и (6.1) достаточно потребовать не аналитичности по переменным $x_1, \dots, x_i$, а лишь наличия непрерывных частных производных второго порядка, а от функций F , — непрерывности частных производных первого порядка. Однако с прикладной точки зрения подобные обобщения вряд ли имеют большое значение, ибо в обычно встречающихся задачах правые части дифференциальных уравнений движения либо аналитичны, либо разрывны («кусочно аналитичны»). Рассмотрению этих последних случаев, с которыми приходится сталкиваться, например, при решении задач о синхронизации механических объектов в системах с сухим трением и с ударами, посвящены работы Ю. И. Неймарка и Л. П. Шильникова [217, 218], М. З. Колосовского [152] и Р. Ф. Нагаева [215]; результаты этих работ частично изложены в книге [57].

Обобщение теорем типа приведенных в §§ 2—4 на нелинейные почти периодические системы было дано И. Г. Малкиным [184], а на квазилинейные почти периодические системы с запаздыванием С. Н. Шимановым [301, 302].

§ 8. Интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) периодических и синхронных движений

Основному содержанию теорем настоящей главы можно при определенных условиях придать своеобразную форму, удобную как при решении конкретных прикладных задач, так и при изучении общих закономерностей синхронизации динамических объектов.

Рассмотрим сначала случай неавтономных систем и напомним, что согласно указанным теоремам периодические (или синхрон-

ные) движения отвечают простым решениям

$$\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_k = \alpha_k^*$$

некоторой системы уравнений

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (8.1)$$

названных *основными уравнениями*.

Вопрос об устойчивости каждого конкретного движения зависит от знаков вещественных частей корней κ алгебраического уравнения k -й степени *)

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right|_{\alpha_q = \alpha_q^*} = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k). \quad (8.2)$$

Функции $P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ при этом выражаются через некоторые интегралы, вычисленные за период движения T и зависящие от правых частей рассматриваемых дифференциальных уравнений; эти функции выше были названы *порождающими*.

Пусть существует функция $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ параметров порождающего решения, непрерывная и обладающая непрерывными частными производными до второго порядка включительно, такая, что

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_s} = -P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (s = 1, \dots, k). \quad (8.3)$$

При этом предположим также, что функции P_s вещественны вблизи порождающих значений параметров $\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*$, которые тоже будем считать вещественными **). Условия стационарности функции D

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_s} = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (8.4)$$

таким образом, совпадают с уравнениями (8.1).

Назовем функцию D *потенциальной функцией*. Очевидно, что для ее существования необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial P_j}{\partial \alpha_s} \quad (s, j = 1, \dots, k).$$

Разлагая эту функцию по формуле Тейлора вблизи порождающих значений параметров $\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_k = \alpha_k^*$, в соответствии

*) Объяснение обозначений см. в сноске на с. 271.

**) Напомним, что под порождающими значениями параметров понимаются значения, удовлетворяющие уравнениям (8.1).

с (8.1) и (8.3) получим

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \dots, \alpha_k) - D(\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*) &= \\ &= \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_s \partial \alpha_j} \right)_{\alpha_q = \alpha_q^*} (\alpha_s - \alpha_s^*) (\alpha_j - \alpha_j^*) + \dots = \\ &= - \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} \right)_{\alpha_q = \alpha_q^*} (\alpha_s - \alpha_s^*) (\alpha_j - \alpha_j^*) + \dots, \quad (8.5) \end{aligned}$$

где не выписаны слагаемые выше второго порядка относительно $\alpha_q - \alpha_q^*$.

Для того чтобы функция D в точке $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*)$ имела минимум, достаточно, чтобы квадратичная форма в равенстве (8.5) была знакоопределенной положительной. А для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы все корни алгебраического уравнения k -й степени

$$\left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_s \partial \alpha_j} + \delta_{sj} \kappa \right|_{\alpha_q = \alpha_q^*} = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k) \quad (8.6)$$

были отрицательны. Заметим, что все корни этого уравнения вещественны в силу известной теоремы о характеристических числах вещественной симметрической матрицы [97].

Если хотя бы один корень уравнения (8.6) положителен, то квадратичная форма не является знакоопределенной и минимум отсутствует. Случай, когда имеются корни, равные нулю, является сомнительным и, вообще говоря, требует изучения членов разложения (8.5), имеющих более высокий порядок.

Но уравнение (8.6) при наличии соотношений (8.3) эквивалентно уравнению (8.2). Поэтому условия строгого минимума функции D в точке $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*)$, основанные на анализе членов второго порядка в разложении (8.5), в рассматриваемом случае совпадают с условиями устойчивости периодических (или синхронных) решений соответствующих систем уравнений *).

Наличию у уравнения (8.6) нулевых корней при прочих отрицательных корнях соответствуют необходимые условия минимума (который в этом случае будет негрубым, может быть не строгим или вовсе отсутствовать). Соответствующие условия дадут лишь часть условий существования и устойчивости периодических

*) Напомним, что минимум функции F в точке $\mathcal{M}_0$ называют *строгим*, если для всех точек $\mathcal{M}$ из некоторой ε -окрестности точки $\mathcal{M}_0$ справедливо неравенство $F(\mathcal{M}) > F(\mathcal{M}_0)$. При наличии соотношения $F(\mathcal{M}) \geq F(\mathcal{M}_0)$ минимум называют *нестрогим*. Строгий минимум функции, обнаруживаемый путем анализа членов второго порядка в ее разложениях вида (8.4), будем называть *грубым минимумом*.

или синхронных движений, т. е. соответствующие условия будут лишь необходимыми, но не достаточными (см. также замечание 8) § 7 гл. 10, а также § 9).

Итак, в задачах о существовании и устойчивости периодических или синхронных движений функция D играет такую же роль, как и потенциальная энергия системы Π в задаче об отыскании и исследовании устойчивости положений равновесия консервативной системы с голономными стационарными связями. Иначе говоря, для периодических (или синхронных) решений уравнений изучаемого типа справедливы теоремы, аналогичные известным теоремам Лагранжа (Дирихле) и А. М. Ляпунова [178, 183].

Сформулированный выше критерий устойчивости может быть назван интегральным, поскольку функция D , согласно сказанному выше о порождающих функциях P_s , зависит от усредненных за период характеристик движения системы, вычисленных для порождающего решения.

Если условия устойчивости движения сводятся только к требованию отрицательности вещественных частей уравнения (8.2), то интегральный критерий дает необходимые и достаточные условия устойчивости. При наличии также иных условий, выраженные интегральным критерием, являются лишь необходимыми. Однако, как отмечалось в § 2 гл. 2, и в этих случаях во многих прикладных задачах условия, формулируемые посредством уравнения типа (8.2) или интегрального критерия, играют главную роль, в связи с чем они и были названы основными, а прочие условия, если они имеются, — дополнительными.

С небольшими видоизменениями, характер которых ясен из замечания 5) § 7, интегральный критерий устойчивости может быть сформулирован и для автономных систем.

Класс систем, для которых справедлив интегральный критерий устойчивости, может быть значительно расширен, если заметить, что для его наличия достаточно существования функции D , удовлетворяющей не условиям (8.3), а значительно менее жестким соотношениям

$$b_{s1} \frac{\partial D}{\partial \alpha_1} + b_{s2} \frac{\partial D}{\partial \alpha_2} + \dots + b_{sk} \frac{\partial D}{\partial \alpha_k} = P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (8.7)$$

$$(s = 1, \dots, k),$$

где $b_{sj} = b_{js}$ — любые вещественные постоянные, подчиненные лишь требованию

$$B(z, z) \equiv \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k b_{sj} z_s z_j > 0, \quad (8.8)$$

т. е. условию, чтобы соответствующая им квадратичная форма была положительной. На возможность подобного обобщения внима-

ние автора было обращено Р. Ф. Нагаевым и К. Ш. Ходжаевым; соответствующее доказательство приведено в книге [57].

Из сказанного вытекает также справедливость интегрального критерия устойчивости в случае существования функции D , удовлетворяющей равенствам

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_s} = -(P_1 c_{s1} + P_2 c_{s2} + \dots + P_k c_{sk}) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (8.9)$$

где $c_{sj} = c_{js}$ — любые вещественные числа, такие, что

$$C(z, z) = \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k c_{sj} z_s z_j > 0. \quad (8.10)$$

В случае справедливости интегрального критерия исследование устойчивости существенно упрощается, ибо условия устойчивости могут быть легко выписаны в явной форме. Действительно, согласно известной теореме Сильвестра (см., например, [97]) необходимым и достаточным условием положительности квадратичной формы является положительность всех главных миноров ее матрицы. Поэтому, согласно (8.6), необходимыми и достаточными условиями минимума функции D в точке $\alpha_1 = \alpha_1^*, \dots, \alpha_k = \alpha_k^*$ будут неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_q = \alpha_q^*} &> 0 & (i, j = 1), \\ \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_q = \alpha_q^*} &> 0 & (i, j = 1, 2), \\ &\dots & \\ \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_q = \alpha_q^*} &> 0 & (i, j = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Последние соотношения особенно удобны при решении задачи о синтезе системы объектов, имеющих синхронное движение с заданным сочетанием порождающих параметров $\alpha_1^*, \dots, \alpha_k^*$.

В случае, когда аналитическое исследование представляется затруднительным или нецелесообразным, при наличии интегрального критерия можно использовать известные хорошо разработанные алгоритмы численного (в том числе машинного) поиска экстремумов функции многих переменных.

Значение интегрального критерия устойчивости определяется также тем обстоятельством, что в ряде случаев функция D имеет отчетливый физический смысл. Это также облегчает синтез систем синхронно работающих объектов. Так, например, в случае задачи о самосинхронизации дебалансных вибровозбудителей потенциальная функция оказывается равной среднему за период

значению функции Лагранжа системы, взятой с противоположным знаком и вычисленной для порождающего решения (см. § 7 и п. 4 § 8 гл. 3). Для этого частного случая интегральный критерий и был первоначально сформулирован на основе интуитивных соображений, проверенных на ряде примеров, Б. П. Лавровым и автором [40], а затем обоснован и обобщен в работах автора [41, 43]. Дальнейшее развитие указанные исследования получили в работах Р. Ф. Нагаева [52, 209, 211, 213, 215], Б. П. Лаврова [164, 165], К. Ш. Ходжаева [213, 282, 283, 285, 286], автора [42, 57], К. Г. Валеева и Р. Ф. Ганиева [81], В. В. Белецкого и Г. В. Касаткина [25]. Изложение основных результатов цитированных работ приводится в соответствующих разделах книги. Здесь остановимся лишь на общих результатах, полученных в работах [25, 81] для канонических и подобных им систем.

В статье [81] рассматривается каноническая система с функцией Гамильтона $H(t; q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; \mu)$, являющейся почти-периодической функцией времени t и дважды дифференцируемой по всем аргументам. Предполагается, что порождающая система

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H_0}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H_0}{\partial q_s} \quad (s = 1, \dots, n), \quad (8.11)$$

$$H_0 = H(t; q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; 0)$$

имеет почти-периодическое порождающее решение

$$\begin{aligned} q_s &= q_{s0}(t; a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n), \\ p_s &= p_{s0}(t; a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n), \end{aligned} \quad (8.12)$$

где a_j и b_j — начальные значения переменных q_s и p_s при $t=0$. Тогда при некоторых достаточно общих предположениях доказывается, что устойчивым решениям соответствуют точки строгих минимумов или максимумов усредненной функции Лагранжа системы

$$\begin{aligned} \Lambda_0(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{s=1}^n p_{s0} \dot{q}_{s0} - H(t; q_{10}, \dots, q_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}; 0) \right] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (L) dt, \end{aligned} \quad (8.13)$$

вычисленной на порождающих решениях. Решения (8.12) при этом могут быть также и просто периодическими и синхронными; в таком случае усреднение в выражении (8.13) производится за 19*

некоторый конечный период $T = 2\pi/\omega$. В качестве параметров a_j , b_j можно брать постоянные, не совпадающие с начальными значениями переменных q_j и p_j . Очевидно также, что результат сохраняется и при отсутствии в системе малого параметра, т. е. в случае, когда порождающая система совпадает с исходной ($H = H_0$).

В работе В. В. Белецкого и Г. В. Касаткина [25] для периодической системы, несколько более общей, чем каноническая (для системы с сохранением фазового объема), показано, что для наличия устойчивых периодических или синхронных движений необходимо и достаточно существование функции начальных значений фазовых переменных $K(x_0)$, имеющей строгий максимум или минимум по этим начальным значениям, причем указанная функция связана с некоторой функцией фазовых координат и времени $\kappa(x, t)$ интегральным соотношением типа (8.13); вопрос о способе нахождения функций κ и K при этом, однако, остается открытым. Согласно упомянутой работе К. Г. Валеева и Р. Ф. Ганиева [81], в случае канонических систем такими функциями являются соответственно L и Λ .

Наконец, интегральный критерий позволяет установить тенденцию к синхронизации для динамических объектов при весьма общих предположениях об их свойствах и о свойствах системы связи (см. § 9 настоящей главы, а также § 7 и п. 4 § 8 гл. 3, § 2 гл. 7 и § 7 гл. 12).

Заметим в заключение, что если рассматривать положения равновесия системы как вырожденные периодические движения произвольного периода, то функция D для ряда механических систем переходит при определенных условиях в потенциальную энергию системы. Таким образом, существует не только аналогия, но и прямая связь полученных результатов с теоремой Лагранжа (Дирихле).

§ 9. О наличии устойчивых периодических или синхронных движений (тенденции к синхронизации) в случае периодической потенциальной функции и в некоторых других случаях

Во многих случаях (см. гл. 3 и 12) потенциальная функция D оказывается периодической относительно каждого из аргументов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с некоторым периодом T , причем периодичность может быть установлена на основе общих соображений без фактического нахождения конкретного выражения для $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. В этих случаях при достаточно общих предположениях функция D имеет минимумы в некоторых точках, и если эти минимумы окажутся грубыми (что также имеет место при сравнительно общих допущениях), то устойчивые периодические или синхронные

движения непременно существуют, т. е. в системе имеет место тенденция к синхронизации в смысле, указанном в § 1 гл. 1.

Рассмотрим, например, простейший случай, когда функция D зависит всего от одной переменной α ; этот случай соответствует, в частности, внутренней синхронизации двух объектов. Предположим, что функция D , являясь T -периодической по α , не имеет промежутков постоянства. В силу непрерывности функция D достигает на отрезке $0 \leq \alpha \leq T$ своего наименьшего значения. Если такое значение достигается в некоторой внутренней точке отрезка α^* , то при сделанных предположениях D будет иметь в указанной точке строгий минимум. При этом если $(\partial^2 D / \partial \alpha^2)_{\alpha=\alpha^*} \neq 0$ (что, «как правило», выполняется), то этот минимум будет грубым и устойчивые периодические или синхронные решения непременно существуют. То же заключение останется справедливым, вследствие периодичности функции D , если наименьшие значения достигаются на концах отрезка $\alpha=0$ и $\alpha=T$. Действительно, значения, которые принимает функция D на отрезке $0 \leq \alpha \leq T$, исчерпывают все множество значений этой функции, а поэтому если взять другой отрезок $\varepsilon \leq \alpha \leq T + \varepsilon$, где ε — некоторое достаточно малое число, то упомянутое наименьшее значение останется прежним, но окажется лежащим внутри этого нового отрезка и будет строгим минимумом функции D .

С небольшими видоизменениями сказанное распространяется на случай многих переменных α_s ; и здесь при T -периодичности функции D по α_s , «как правило», будут существовать грубые минимумы функции D , т. е. будет иметь место тенденция к синхронизации.

Назовем потенциальную функцию m -грубой, если она имеет только грубые минимумы. Тогда можно сказать, что в системах с m -грубой периодической потенциальной функцией имеет место тенденция к синхронизации.

Ввиду периодичности функции D при наличии одного минимума эта функция будет иметь также бесконечное число минимумов при значениях аргументов α_s , отличающихся одно от другого на $n_s T$ (n_s — целое число). Однако таким минимумам будет соответствовать одно и то же периодическое (синхронное) движение системы, и поэтому различать их не имеет смысла.

Заметим, что заключение о наличии грубого минимума у потенциальной функции останется в силе, если последняя представляет собой не строго периодическую функцию, а сумму m -грубой периодической функции и функций, не слишком сильно изменяющейся в пределах куба

$$0 \leq \alpha_s \leq T \quad (s = 1, \dots, k) \quad (9.1)$$

по сравнению с величиной изменения строго периодической части. Так, например, если

$$D = D(\alpha) = D_1(\alpha) + B(\alpha), \quad (9.2)$$

где $D_1(\alpha) = W_0 \sin \alpha$, $B = A\alpha$, то заключение о наличии грубых минимумов, справедливое для функции $D_1(\alpha)$, останется верным и для функции $D(\alpha)$, если

$$|W_0| = \left(\frac{dD_1}{d\alpha} \right)_{\max} > |A| = \left| \frac{dB}{d\alpha} \right| \quad (9.3)$$

(см. рис. 52). В таких случаях будем говорить о существовании квазипериодической m -грубой потенциальной функции.

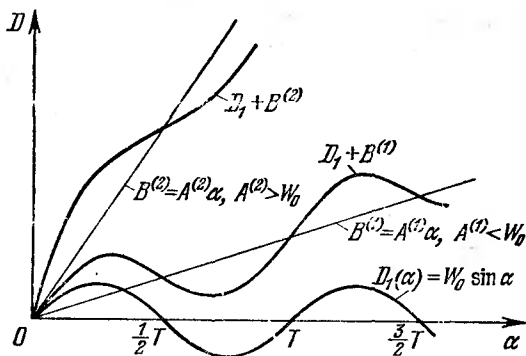


Рис. 52.

Более того, допустим, что функции D в строгом смысле не существует, но вместо равенств (8.3) выполняются соотношения

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = - \left[\frac{\partial D_0}{\partial \alpha_s} + A_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \right] \quad (s = 1, \dots, k), \quad (9.4)$$

где функции $|A_s|$ достаточно малы. Тогда при периодичности и m -грубости функции D_0 , которую можно назвать квазипотенциальной функцией, заключение о наличии устойчивых синхронных решений, т. е. решений уравнений $P_s = 0$, для которых все корни уравнения (8.2) имеют отрицательные вещественные части, останется справедливым. Иными словами, наличие устойчивых периодических или синхронных решений (тенденции к синхронизации) в рассматриваемых системах есть, вообще говоря, «грубое» свойство, имеющее место как в случае существования m -грубой периодической потенциальной функции, так и в случаях квазипериодической потенциальной и квазипотенциальной периодической функций.

Из числа случаев, когда свойство m -грубости у периодической потенциальной функции D отсутствует, практически наиболее важными являются такие, когда из уравнений (8.1) или (8.4), т. е. из условий стационарности функции D , не определяются значения всех α_s (или, в автономном случае, всех разностей $\alpha_s - \alpha_k$). Уравнения (8.2) и (8.6) при этом непременно имеют некоторое число (в автономном случае — более одного) нулевых корней, и минимум функции D , если он существует, является принципиально нестрогим. В этих случаях, однако, условия стационарности функции D и условия отрицательности всех прочих корней уравнения (8.6) дают необходимые условия существования и устойчивости периодических или синхронных движений. Для получения достаточных условий в таких случаях необходимо изучение следующих приближений (см. замечание 8) § 7 гл. 10).

Глава 11

О НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СИНХРОНИЗАЦИИ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Предварительные замечания

В настоящей главе изложены некоторые методы, применяемые при решении задач о синхронизации, отличные от изложенных в гл. 10 методов Пуанкаре и Ляпунова. При этом наиболее подробно рассматриваются методы, используемые в настоящей книге, а также методы, еще не описанные систематически в существующей литературе; другие методы изложены только в виде их основных идей. Также весьма конспективно изложен вариационный метод А. И. Лурье, поскольку он проиллюстрирован на примере решения одной из задач о синхронизации.

§ 2. Асимптотические методы и принцип усреднения

Асимптотические методы в виде различных вариантов так называемого принципа усреднения являются эффективным средством решения задач современной теории нелинейных колебаний. Эти методы, одним из истоков которых явились известные работы Ван-дер-Поля, получили существенное развитие преимущественно в трудах отечественных ученых и в особенности в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [68—71, 157, 188, 195].

При изучении вопросов о существовании и о нахождении установившихся синхронных или периодических движений асимптотические методы не обладают какими-либо преимуществами по сравнению с методом Пуанкаре. Однако эти методы позволяют рассматривать также процессы установления движений, близких к синхронным, а также некоторые иные стационарные движения, что в ряде случаев является важным.

Эффективность применения асимптотических методов, как и методов Пуанкаре — Ляпунова, существенно связана с характе-

ром зависимости правых частей дифференциальных уравнений задачи от малого параметра. Наиболее простым является случай, когда дифференциальные уравнения в результате надлежащих преобразований могут быть представлены в так называемой *стандартной форме*:

$$\dot{x} = \mu X(x, t). \quad (2.1)$$

Здесь x и X — l -мерные векторы и $\mu \geq 0$. Обычно предполагается, что функции X представлены в виде

$$X(x, t) = \sum_v e^{ivt} X_v(x),$$

где v — некоторые вещественные числа. Именно для уравнений вида (2.1) Н. Н. Боголюбовым была разработана и обоснована схема усреднения [68—71], состоящая в замене

$$x = \xi + \mu F_1(\xi, t) + \mu^2 F_2(\xi, t) + \dots + \mu^m F_m(\xi, t), \quad (2.2)$$

посредством которой уравнение (2.1) приводится к виду

$$\dot{\xi} = \mu X_0(\xi) + \mu^2 P_2(\xi) + \dots + \mu^m P_m(\xi) + \mu^{m+1} R(\xi, t). \quad (2.3)$$

Пренебрегая в этом уравнении слагаемым $\mu^{m+1} R(\xi, t)$, получают уравнение, называемое усредненным уравнением m -го приближения, а соответствующее ему выражение (2.2) — m -м приближением. Функции $F_1(\xi, t)$, $F_2(\xi, t)$, ... находятся при этом в результате подстановки выражения (2.2) в уравнение (2.1), разложения в ряд по μ и приравнивания слагаемых при одинаковых степенях μ в обеих частях получившегося равенства; функции $X_0(\xi)$, $P_2(\xi)$, ... определяются также путем подстановки выражения (2.2) в уравнение (2.1) и разложения в ряд по μ , но после усреднения правой части этого уравнения. Обычно ограничиваются определением одного — двух приближений, что объясняется не только резким усложнением соотношений с ростом номера приближения m , но также и тем, что, как правило, уже первое или второе приближения дают решение поставленных прикладных задач. Здесь следует иметь в виду, что эффективность асимптотических методов определяется вовсе не свойствами сходимости выражения (2.2) при $m \rightarrow \infty$, а их асимптотическими свойствами при $\mu \rightarrow 0$ для данного небольшого фиксированного m (отметим, что m -е приближение, согласно сказанному ранее, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) с точностью до членов порядка μ^{m+1}).

Первое приближение $x = \xi$ определяется из уравнения

$$\dot{\xi} = \mu X_0(\xi) \equiv \mu M_t \{X(\xi, t)\}, \quad (2.4)$$

где через M_t обозначен оператор усреднения по явно входя-

щему времени t (предполагается, что соответствующее среднее существует). Во втором приближении

$$x = \xi + \mu \sum_{\nu} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_{\nu}(\xi) \equiv \xi + \mu \tilde{X}(\xi, t), \quad (2.5)$$

где знак $\sim$ означает операцию интегрирования по явно входящему времени, причем ξ определяется из усредненного уравнения второго приближения:

$$\dot{\xi} = \mu M_{\dot{}}\{X(\xi, t)\} + \mu^2 M_{\dot{}}\left\{\left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(\xi, t)\right\}. \quad (2.6)$$

Часто ограничиваются нахождением так называемого улучшенного первого приближения, в котором x , как и для второго приближения, определяется равенством (2.5), но ξ находится из уравнения первого приближения (2.4).

Таким образом, можно сказать, что уравнение первого приближения (2.4) получается просто путем усреднения правой части исходного уравнения (2.1) по явно входящему времени, а уравнение второго приближения (2.6) — путем подстановки в эту правую часть выражения (2.5) и такого же усреднения. Заметим, что уравнения (2.4) и (2.6), как правило, проще для решения, чем исходное уравнение (2.1).

Приведение дифференциальных уравнений задач о синхронизации к виду (2.1) не всегда осуществимо. В частности, задачи о синхронизации механических объектов с вращательными движениями таковы, что соответствующая система уравнений может быть записана в более общей форме:

$$\dot{x} = \mu X(x, y, t, \mu), \quad \dot{y} = Y(x, y, t, \mu), \quad (2.7)$$

где x и X — n -мерные, а y и Y — m -мерные векторы ($n + m = l$, $m \neq 0$). Уравнения типа (2.2) известны под названием *систем с многомерными быстрыми и медленными движениями* (переменные x , очевидно, описывают «медленные», а переменные y — «быстрые» движения). Для таких систем В. М. Волосовым была разработана специальная схема усреднения [93, 94], обобщающая описанную выше схему Н. Н. Боголюбова.

Подробное изложение асимптотических методов можно пайти, например, в монографиях [71, 94, 188]. С помощью различных модификаций этих методов решен ряд интересных с принципиальной и прикладной точек зрения задач о синхронизации ламповых, полупроводниковых и квантовых генераторов [171, 181, 248], небесных тел [23], возбудителей механических колебаний [148, 241, 242, 299, 300]. Сошлемся также на исследование синхронизации весьма общего математического характера, содержащееся в статье [109].

§ 3. Метод прямого разделения движений

Часто синхронные движения (см. формулы (1.6) гл. 1) и близкие к ним неустановившиеся движения таковы, что их можно представить в виде

$$x_j^{(s)} = \alpha_j^{(s)} [q_j^{(s)} n_j^{(s)} \omega(t)t + \alpha_j^{(s)}(t) + \tilde{y}_j^{(s)}(t, m_j^{(s)} \omega t)] \\ (j = 1, \dots, r_s; s = 1, \dots, k), \quad (3.1)$$

$$u_\rho = \sigma_\rho [q_\rho n_\rho \omega(t)t + \beta_\rho(t) + \tilde{v}_\rho(t, m_\rho \omega t)] \\ (\rho = 1, \dots, v),$$

где ω , $\alpha_j^{(s)}$, β_ρ — «медленные» (в частности, постоянные), а $\tilde{y}_j^{(s)}$, $\tilde{v}_\rho$ — «быстро» колеблющиеся составляющие. Такое представление естественно во многих задачах о синхронизации, когда синхронная скорость или частота ω сравнительно велика, так что независимую переменную t можно рассматривать как «медленное», а переменную $\tau = \omega(t)t$ — как «быстрое» время. Иными словами, в изучаемых случаях можно предполагать, что синхронное (или близкое к нему) движение представимо в виде наложения быстрых колебаний или вращений на медленное движение.

В указанном предположении для решения задач о синхронизации применим эффективный метод, который можно назвать *методом прямого разделения движений* [62, 65, 67]; идейно этот метод примыкает к принципу усреднения и асимптотическим методам. Поскольку при решении задач механики этот метод допускает весьма удобную интерпретацию, то здесь мы изложим его именно применительно к механическим задачам. Проведем к тому же рассуждения и выкладки для системы с одной степенью свободы, ибо обобщение на случаи систем со многими степенями свободы не представляет каких-либо затруднений.

А именно, будем предполагать, что уравнение движения системы имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) + \Phi(x, \dot{x}, t, \omega t), \quad (3.2)$$

где x — обобщенная координата, m — «масса», t — «медленное», а $\omega t = \tau$ — «быстрое» время ($\omega > 0$ — «большой» параметр), F — «медленная», а Φ — «быстрая» сила, имеющая по $\tau = \omega t$ период 2π . Необходимые допущения относительно гладкости функций F и Φ будут ясны из дальнейшего.

Как уже отмечалось, основная предпосылка для применения излагаемого метода состоит в том, что изучаемое «установившееся по быстрому времени $\tau = \omega t$ » движение системы имеет вид

$$x = X(t) + \psi(t, \omega t), \quad (3.3)$$

где X — медленная, а ψ — быстрая составляющая. Функция ψ предполагается при этом 2π -периодической по $\tau = \omega t$, причем для определенности представления (3.3) примем

$$\langle \psi(t, \tau) \rangle = 0 \quad (3.4)$$

(через $\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\tau$ здесь и в дальнейшем обозначается

оператор усреднения по быстрому времени $\tau = \omega t$). Иными словами, будем считать равным нулю среднее значение быстрой составляющей по быстрому времени при «замороженном» медленном.

Излагаемый метод включает два этапа. Вначале производится преобразование исходного уравнения (2.2) (или соответствующей системы уравнений) к системе интегро-дифференциальных уравнений «вдвое более высокого порядка» относительно медленной и быстрой составляющих X и ψ . Затем указанная система решается приближенно.

Обратимся к упомянутому преобразованию уравнения (3.2). Подставив в это уравнение выражение (3.3), прибавим и вычтем в его правой части выражение

$$F_1 - \langle \Phi(\dot{X} + \dot{\psi}, X + \psi, t, \tau) \rangle, \quad (3.5)$$

где через

$$F_1 = F_1(\dot{X}, X, \dot{\psi}, \psi, t) = F(\dot{X} + \dot{\psi}, X + \psi, t) - F(\dot{X}, X, t) \quad (3.6)$$

обозначена быстро изменяющаяся функция, обращающаяся в нуль при $\dot{\psi} = 0$, $\psi = 0$, а усреднение $\Phi(\dot{X} + \dot{\psi}, X + \psi, t, \tau)$ производится по быстрому времени τ , входящему как явно, так и через посредство функции ψ .

Потребуем теперь выполнения следующего равенства между слагаемыми получившегося соотношения:

$$m\ddot{\psi} = F_1(\dot{X}, X, \dot{\psi}, \psi, t) - \langle F_1(\dot{X}, X, \dot{\psi}, \psi, t) \rangle + \\ + \Phi(\dot{X} + \dot{\psi}, X + \psi, t, \tau) - \langle \Phi(\dot{X} + \dot{\psi}, X + \psi, t, \tau) \rangle. \quad (3.7)$$

Тогда должно выполняться также уравнение

$$m\ddot{X} = F(\dot{X}, X, t) + \langle F_1(\dot{X}, X, \dot{\psi}, \psi, t) \rangle + \langle \Phi(\dot{X} + \dot{\psi}, X + \psi, t, \tau) \rangle. \quad (3.8)$$

Довод в пользу именно такого «расщепления» исходного уравнения будет указан ниже. Пока же отметим, что получившаяся система интегро-дифференциальных уравнений (3.7), (3.8) эквивалентна исходному уравнению (3.2) независимо от предположения о темпе изменения функций X и ψ , по крайней мере в том смысле, что если найдено какое-нибудь решение этой системы

X и ψ , то выражение $x = X + \psi$ будет решением уравнения (3.2). Заметим также, что если известно решение $\psi = \psi(\dot{X}, X, t, \tau)$ уравнения (3.7), то, подставив его в (3.8), получим уравнение

$$m\ddot{X} = F(\dot{X}, X, t) - W(\dot{X}, X, t), \quad (3.9)$$

где обозначено

$$W(\dot{X}, X, t) = -\langle \Phi(\dot{X} + \dot{\psi}, X + \psi, t, \tau) \rangle - \langle F_1(\dot{X}, X, \dot{\psi}, \psi, t) \rangle. \quad (3.10)$$

Выражение $W(\dot{X}, X, t)$, следуя П. Л. Капице [135], назовем *вибрационной силой*. Тогда уравнение (3.9) можно толковать как уравнение для медленной составляющей X , в котором наряду с обычной медленной силой F фигурирует некоторая дополнительная медленная сила W (вибрационная сила). Иными словами, мы показали, что при весьма общих предположениях справедливо положение, в известном смысле аналогичное известной теореме динамики относительного движения: при составлении уравнений относительного движения добавление сил инерции является как бы «штрафом» за использование неинерциальной системы координат, тогда как в нашем случае добавление вибрационной силы представляет собой «штраф» за игнорирование быстрой силы Φ и быстрой составляющей движения ψ .

Как показано в п. 6 § 8 гл. 3 и в п. 2 § 6 гл. 12, использование сформулированного положения весьма удобно как при решении задач о синхронизации объектов с вращательными движениями, так и при физической интерпретации результатов этого решения.

Заметим, что вибрационная сила W представляет собой результат усреднения по быстрому времени «собственно быстрой силы» — Φ и того быстрого вклада — F_1 , который выделяется из медленной силы — F на траектории движения системы $x = X + \psi$. В соответствии с этим можно различать *собственно вибрационную силу* $W^{(a)} = -\langle \Phi \rangle$ и *индуцированную вибрационную силу* $W^{(i)} = -\langle F_1 \rangle$.

Обращаясь теперь к вопросу о решении системы уравнений (3.7), (3.8), заметим, что в общем случае оно не проще, чем решение исходного уравнения (3.2). Однако, если учесть основное предположение о темпах изменения функций X и ψ , то представляется естественным следующий прием приближенного решения этой системы. Вначале решается уравнение (3.7), причем величины $\dot{X}$, X и t , изменение которых за период быстрого движения $2\pi/\omega$ относительно мало, в процессе решения рассматриваются как постоянные («замороженные»). Предположим, что это уравнение действительно допускает при «замороженных» $\dot{X}$, X и t

«быстро устанавливающееся» асимптотически устойчивое 2π -периодическое по ωt решение, удовлетворяющее условию (3.4). Нетрудно заметить, что рассматриваемое уравнение взято нами при «расщеплении» исходного уравнения (3.2) именно таким, чтобы выполнялось необходимое условие существования указанного решения — для этого достаточно почленно проинтегрировать уравнение (3.7) по ωt .

Подставив найденное решение $\psi = \psi(\dot{X}, X, t, \omega t)$ в правую часть уравнения (3.8), как раз и приходим к уравнению типа (3.9) для определения медленной составляющей X ; теперь, однако, это уравнение будет лишь приближенным.

Заметим, что описанный приближенный прием решения системы (3.7), (3.8) допускает обоснование в духе асимптотических методов. А именно, посредством введения малого параметра $\mu = 1/\omega$ и простого преобразования уравнений их можно привести к системе уравнений типа (2.7) с многомерными быстрыми и медленными движениями. При этом уравнение (3.9), полученное описанным выше образом, отвечает первому приближению схемы усреднения В. М. Волосова, о которой говорилось в § 2. Тем самым решается и вопрос о вычислении последующих приближений для функций ψ и X ; впрочем, надобности в таком уточнении, как правило, не возникает.

Существенно, что функция ψ входит в выражение для W под знаком интегрирования. Это позволяет ограничиться приближенным определением функции ψ из уравнения (3.7), например, в виде суммы небольшого числа гармоник или небольшого числа членов ряда по степеням малого параметра. Часто можно считать, что ψ мало по сравнению с X ($\dot{X}$ мало по сравнению с ψ в силу исходного предположения). Наконец, во многих случаях допустимо учитывать лишь линейные члены в разложении функции F_1 по степеням $\dot{\psi}$ и ψ , положив согласно (3.6)

$$F_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \dot{\psi} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \psi, \quad (3.11)$$

где производные вычисляются при $\dot{\psi} = 0$ и $\psi = 0$. Тогда в силу (3.4) имеется лишь собственно вибрационная сила $W = W^{(s)} = -\langle \Phi \rangle$, а индуцированная вибрационная сила отсутствует. Иными словами, индуцированная составляющая имеется лишь в случае, когда медленная сила F нелинейна по x и $\dot{x}$. С другой стороны, при отсутствии в исходном уравнении (2.2) быстрой силы Φ вибрационная сила может быть отличной от нуля за счет своей индуцированной составляющей; такая ситуация характерна для случая автоколебаний в системах с медленными силами (см. ниже).

Изложенный метод разделения движений можно рассматривать как обобщение и развитие эвристического приема, использованного П. Л. Капицей при решении задачи о движении маятника с вибрирующей точкой подвеса [135] (1951 г.). Отдельные элементы этого приема присутствуют в книге Н. Н. Боголюбова [69] (1950 г.), давшего решение той же задачи о маятнике, а также в работе В. Н. Челомея [292] (1956 г.), в которой выдвинута и обоснована идея повышения устойчивости упругих систем путем вибрационного воздействия. В указанных работах использованы асимптотические методы, однако в итоговых уравнениях медленных движений фигурируют слагаемые, соответствующие вибрационным силам. В дальнейшем прием П. Л. Капицы был применен С. С. Духиным при исследовании дрейфа частицы в стоячей звуковой волне [123] (1960 г.) и весьма успешно использован К. М. Рагульским для изучения динамики механизмов на вибрирующем основании [241, 242] (1963 г. и позднее). Понятие о вибрационных силах (моментах) использовалось в [36, 42, 57, 95, 133, 146] (1958 г. и позднее) для интерпретации поведения различных систем под действием вибрации (см. также гл. 3 и 4). Элементы развитого подхода можно проследить и в работах, значительно предшествовавших появлению статьи П. Л. Капицы — в исследованиях по теории турбулентности, нелинейной акустике, радиоэлектронике, а также в более поздних работах по колебаниям в нелинейных управляемых системах.

Более подробное изложение метода и ряд примеров его использования даны в работах [62, 65, 67]. Здесь же ограничимся в заключение следующими замечаниями:

1) Выше было принято предположение об асимптотической устойчивости и быстром темпе установления периодических решений уравнения (2.7)

при замороженных X , X и t . Данное, казалось бы, весьма сильное допущение, однако, во-первых, выполняется в большинстве известных нам случаев, во-вторых, может быть ослаблено. При справедливости этого допущения оказываются автоматически выполненными ограничения, касающиеся применимости схемы усреднения В. М. Волосова (см. § 2).

2) Разделение сил на быстрые и медленные несколько условно в том смысле, что ошибки не произойдет, если некоторые или все медленные силы отнесены к быстрому. Именно так следует поэтому поступать в сомнительных случаях.

3) Быстрые движения в нелинейной системе могут возникнуть и при отсутствии быстрых сил $\Phi(x, x, t, \omega t)$. Специфика этого «автономного по быстрому времени» (или автономного в обычном смысле) случая состоит в том, что период быстрого движения $T = 2\pi/\omega$ заранее неизвестен и должен быть найден в процессе решения задачи. К тому же, как отмечалось, в данном случае имеется лишь индуцированная составляющая вибрационной силы $W = W^{(i)}$, причем, как нетрудно видеть, уравнение (3.7) непременно допускает тривиальное решение $\psi \equiv 0$ для быстрой составляющей, которому отвечает нулевое значение вибрационной силы $W = W^{(i)}$. Таким образом, для автономной (по крайней мере, по быстрому времени ωt) системы интерес представляют именно случаи, когда уравнение (3.7) допускает нетривиальные асимптотически устойчивые автоколебательного характера решения.

4) Составив уравнение (3.9), можно осуществить апостериорную проверку исходного допущения о разделимости движений. Такая проверка всегда необходима, поскольку движения, описываемые этим уравнением, могут оказаться быстрыми, несмотря на то что движения, описываемые тем же уравнением при $W = 0$, были медленными.

Как следует из изложенного, метод прямого разделения движений в той его части, которая касается решения системы ин-

тегро-дифференциальных уравнений (3.7), (3.8), естественно сочетается с использованием асимптотических методов. При этом для нахождения периодических решений уравнения (3.7) при «замороженных» $\dot{X}$, X и t может быть использован и метод малого параметра Пуанкаре — Ляпунова.

Применение метода прямого разделения движений к изучению решений типа (3.1) позволяет перейти от исходных уравнений движения для переменных $x_j^{(s)}$ и u_p к более простым уравнениям для медленных составляющих процесса ω , $\alpha_j^{(s)}(t)$, $\beta_p(t)$. Именно эти медленные составляющие представляют, как правило, основной интерес. При этом, если, как это часто бывает, фазовые координаты системы связи u_p являются быстрыми, т. е. $\beta_p(t) = 0$, то порядок системы уравнений (3.9) для определения $\alpha_j^{(s)}$ оказывается на ν единиц меньше, нежели порядок исходной системы уравнений (см., например, п. 6 § 8 гл. 3).

Примечательно, что для стационарных движений, когда $\dot{\alpha}_j^{(s)} = 0$, упомянутые уравнения медленных движений совпадают с полученными методом Пуанкаре основными уравнениями задачи о синхронизации [см. уравнения (8.4) и (8.68) гл. 3], из которых определяются величины α_s в синхронных движениях; при достаточно общих предположениях получаются из уравнений медленного движения также и соответствующие условия устойчивости синхронных движений. Вместе с тем уравнения медленных движений (как и соответствующие уравнения асимптотических методов) позволяют изучать не только стационарные синхронные режимы (как при использовании метода Пуанкаре), но также и медленные процессы установления этих режимов.

§ 4. Метод точечных отображений

Идея метода точечных отображений в виде так называемого *метода секущей поверхности (отрезка)* принадлежит А. Пуанкаре [239, 325]; позднее она была широко использована Д. Биркгофом в теории динамических систем. Использование метода точечных отображений при решении задач нелинейной механики связано с именем А. А. Андропова, а дальнейшее развитие и широкое применение — преимущественно с именем Ю. И. Неймарка, в монографии которого [218] содержится систематическое изложение метода, обзор исследований и анализ возможностей. Поэтому здесь мы изложим лишь основные идеи метода на уровне метода секущей поверхности.

Будем рассматривать движение системы как движение изображающей точки в фазовом пространстве этой системы. Гладкую поверхность в этом пространстве, которая во всех своих

точках пересекается фазовыми траекториями без касания, называют *поверхностью без контакта*. *Секущей поверхностью* называют поверхность без контакта, которая как при возрастании, так и при убывании времени, вновь и вновь пересекается фазовыми траекториями, причем так, что промежутки времени между последовательными пересечениями ограничены.

Пусть размерность фазового пространства системы есть n . Выберем в этом пространстве некоторую поверхность без контакта S с размерностью $p \leq n - 1$ и введем на этой поверхности некоторую систему координат $y_1, \dots, y_p$. Возьмем на поверхности S некоторую точку M с координатами $y_1, \dots, y_p$ и рассмотрим фазовую траекторию, проходящую через эту точку (рис. 53).

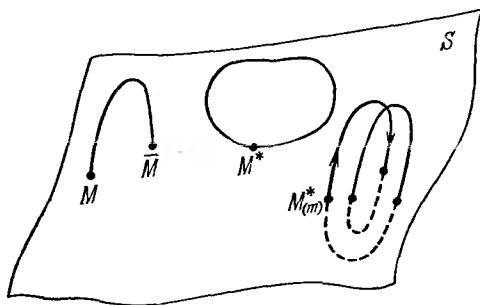


Рис. 53.

Если через некоторое конечное время эта траектория снова пересечет поверхность S в некоторой точке $\bar{M}$ с координатами $y_1, \dots, y_p$, то такая точка называется *последующей* *) для точки M . Преобразование, устанавливающее однозначное соответствие между всеми точками поверхности S с их последующими, называется *точечным отображением* поверхности S в самое себя и записывается в виде $\bar{M} = TM$, где T — оператор точечного отображения. *Неподвижной точкой* точечного отображения T называется такая точка M^* , которая отображается сама в себя, т. е. удовлетворяет условию $M^* = TM^*$. Естественно, что могут существовать и так называемые *m -кратные неподвижные точки*, т. е. точки $M_{(m)}^*$, для которых $M_{(m)}^* = T^m M_{(m)}^*$, но $T^k M_{(m)}^* \neq M_{(m)}^*$, если $k < m$. Существенно, что неподвижным точкам соответствуют замкнутые фазовые траектории, т. е. периодические движения системы. Таким образом, отыскание периодических

*) Может, конечно, оказаться, что вышедшая из точки M фазовая траектория больше никогда (за конечное время) не пересечет поверхность S ; тогда говорят, что точка M не имеет последующей.

режимов движения системы сводится к нахождению неподвижных точек отображения, если, конечно, такое отображение построено. Более того, знание точного отображения позволяет судить об устойчивости периодических режимов.

Действительно, пусть периодическому движению соответствует m -кратная неподвижная точка $M_{(m)}^*$. Рассмотрим возмущенное движение, начинающееся в некоторой другой точке M_0 , лежащей в окрестности точки $M_{(m)}^*$. Последующей для M_0 будет точка $M_1 = T^m M_0$, для точки M_1 — точка $M_2 = T^m M_1 = T^{2m} M_0$ и т. д. Для асимптотической устойчивости рассматриваемого периодического движения необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{mn} M_0 = M_{(m)}^*.$$

Наиболее просто применение метода для системы с двумерным фазовым пространством, когда поверхность S представляет собой плоскую кривую, а положение изображающей точки на этой кривой задается одной координатой s (например, длиной дуги, отсчитываемой от некоторой начальной точки). В этом случае дело сводится к изучению точечного отображения отрезка в самое себя, так что оператором отображения является скалярная функция одного аргумента $\bar{s} = f(s)$, определяющая связь между координатой s некоторой точки на отрезке и координатой $\bar{s}$ ее последующей. Эту функцию называют *функцией последования*. Если представить функцию $\bar{s} = f(s)$ посредством графика

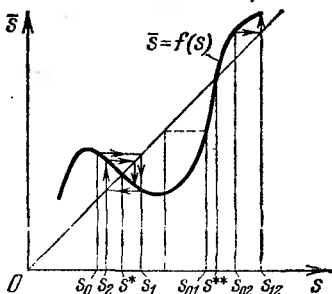


Рис. 54.

(рис. 54), то точки его пересечения s^* , s^{**} , ... с прямой $\bar{s} = s$ есть неподвижные точки точечного отображения. Очевидно, что если $|\bar{s}/s|_{s=s^*} = |df(s)/ds|_{s=s^*} < 1$, то неподвижная точка s^* , а также и соответствующее периодическое движение, устойчивы. На рис. 54 неподвижная точка s^* является устойчивой, а точка s^{**} — неустойчивой. Приведенное на этом рисунке графическое представление называют *диаграммой Кенигса — Лемерея*. Посредством метода точечных отображений П. Н. Занадворовым рассмотрен ряд прикладных задач о синхронизации генераторов электромагнитных колебаний [128, 129]; указанные задачи изучались как задачи о захватывании. Метод точечных отображений может быть использован и для решения более сложных многомерных

задач о синхронизации, а также как средство исследования общих закономерностей синхронизации в динамических системах (см., например, [77, 217, 218]).

§ 5. Стробоскопический метод Н. Минорского

Стробоскопический метод, предложенный Н. Минорским [321], основан на идеях, близких как к идеям асимптотических методов и методов разделения движений, так и метода точечных отображений. Эти идеи состоят в следующем. Пусть изучается колебательный процесс, близкий к периодическому с некоторым (быть может заранее неизвестным) периодом T . Будем наблюдать этот процесс в фазовом пространстве системы как бы в стробоскопическом освещении, т. е. в дискретные моменты времени, отстоящие на промежутки времени T . Если бы процесс был строго T -периодичен, то изображающая (фазовая) точка M (назовем ее *стробоскопической точкой*) казалась бы неподвижной. Если же процесс, например, близок к асимптотически устойчивому T -периодическому, то мы увидим эту точку «медленно» перемещающейся по направлению к точке M^* , отвечающей строго периодическому процессу (рис. 55). Естественно ожидать, что если бы удалось получить уравнения, описывающие траекторию не самого изучаемого движения, а движения стробоскопической точки (*стробоскопические уравнения*), то эти уравнения, во-первых, оказались бы проще исходных и, во-вторых, позволили бы изучать характеристики движения, представляющие, как правило, основной интерес. Указанные стробоскопические уравнения действительно удается построить, по крайней мере в случаях, когда исходные дифференциальные уравнения близки к точно интегрируемым, в частности — к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Существенно, что при этом вместо неавтономной системы с T -периодическими правыми частями получается автономная система.

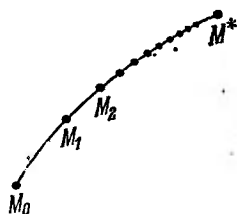


Рис. 55.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(x, y, t, \mu), \quad \dot{y} = Y(x, y, t, \mu), \quad (5.1)$$

относительно которой будем предполагать, что она близка к линейной автономной, причем малый параметр $\mu \geq 0$ характеризует степень этой близости, а X и Y есть T -периодические функции t . Тогда посредством введения новых переменных

$$\rho = x^2 + y^2, \quad \psi = \arctg(y/x) \quad (5.2)$$

эту систему часто удается преобразовать к виду

$$\dot{\rho} = \mu f(\rho, \psi, t), \quad \dot{\psi} = -1 + \mu g(\rho, \psi, t), \quad (5.3)$$

где f и g — периодические функции t с периодом T . При $\mu = 0$ получаем движение изображающей точки $\rho = \rho_0$, $\psi = -t + \psi_0$ (ρ_0 и ψ_0 — постоянные, определяемые начальными условиями), отвечающее ее равномерному движению по ходу часовой стрелки по окружности радиуса ρ_0 .

При $\mu \neq 0$, разыскивая решение в виде рядов по целым положительным степеням μ , находим

$$\rho(t) = \rho_0 + \mu \rho_1(t) + \dots, \quad \psi(t) = \psi_0 - t + \mu \psi_1(t) + \dots, \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \int_0^t f(\rho_0, \psi_0 - t_1, t_1) dt_1, \\ \psi_1(t) &= \int_0^t g(\rho_0, \psi_0 - t_1, t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отсюда

$$\rho(T) = \rho_0 + \mu T K(\rho_0, \psi_0), \quad \psi(T) = \psi_0 - T + \mu T L(\rho_0, \psi_0), \quad (5.6)$$

причем

$$\begin{aligned} K(\rho_0, \psi_0) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\rho_0, \psi_0 - t, t) dt, \\ L(\rho_0, \psi_0) &= \frac{1}{T} \int_0^T g(\rho_0, \psi_0 - t, t) dt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Таким образом, смещения стробоскопической точки за период T будут

$$\Delta \rho = \rho(T) - \rho_0 = \mu K(\rho_0, \psi_0) T, \quad (5.8)$$

$$\Delta \psi = \psi(T) - (\psi_0 - T) = \mu L(\rho_0, \psi_0) T.$$

Если ввести элемент «стробоскопического времени» $\Delta \tau = T$, то последним, в сущности, конечноразностным уравнениям будут отвечать следующие стробоскопические дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu K(\rho, \psi), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \mu L(\rho, \psi), \quad (5.9)$$

которые уже являются автономными. Эти стробоскопические уравнения совпадают с уравнениями, получаемыми в соответст-

вующем приближении методом усреднения; заметим также, что рассмотрение точек, отстоящих на время T , по существу означает изучение соответствующего точечного отображения.

Посредством стробоскопического метода Н. Минорский рассмотрел задачу о взаимной синхронизации двух маятниковых часов, которые идеализировал в виде индуктивно связанных генераторов (автогенераторов Ван-дер-Поля) [194]. Можно ожидать, что геометрические образы, связанные с идеей этого метода, найдут применение и при решении иных, в том числе более сложных задач о синхронизации.

§ 6. Вариационный метод А. И. Лурье

Основная идея рассматриваемого метода состоит в использовании для решения задач о синхронизации слабо связанных механических объектов вариационного принципа Гамильтона в сочетании с методом малого параметра и методом Галеркина. Этот метод был использован А. И. Лурье при решении задач о синхронизации квазилинейных осцилляторов и неуравновешенных роторов (механических вибровозбудителей), установленных на некоторой системе упруго связанных одно с другим и с неподвижным основанием твердых тел [175]. Общая часть этого исследования изложена в п. 2 § 6 гл. 12, а результаты, относящиеся к вибровозбудителям, в п. 6 § 8 гл. 3. Поэтому здесь мы ограничимся лишь изложением основных принципиальных моментов.

Вариационный принцип Гамильтона записывается в форме

$$\delta\Lambda + \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \delta'A dt = 0, \quad (6.1)$$

где

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} L dt = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} (T - \Pi) dt \quad (6.2)$$

— среднее за период $T_0 = 2\pi/\omega$ значение функции Лагранжа (T — кинетическая, Π — потенциальная энергия), $\delta'A$ — элементарная работа неконсервативных сил.

Далее при получении из (6.1) основного вариационного соотношения учитывается, что в задаче о синхронизации слабо связанных объектов функция Лагранжа системы представима в виде

$$L = \sum_{s=1}^h L_s + \mu (\tilde{L}^{(1)} + \tilde{L}^*), \quad (6.3)$$

где L_s — функции Лагранжа объектов при неподвижной несущей

щей системе тел, $L^{(1)} = \mu \tilde{L}^{(1)}$ — функция Лагранжа несущей системы тел при остановленных (закрепленных) на них объектах, $L^* = \mu \tilde{L}^*$ — функция Лагранжа, учитывающая взаимодействие объектов с несущей системой, μ — как и ранее, малый положительный параметр. В выражении для $\delta'A$ также выделяются малые слагаемые.

При использовании процедуры Галеркина в качестве формы решения принимается форма порождающего решения задачи о синхронизации слабо связанных объектов (см. формулы (1.3) гл. 2), а за неизвестные (варьируемые) параметры, определяемые с помощью вариационного принципа, параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Как показал А. И. Лурье, если считать величины $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ постоянными, то из основного вариационного соотношения получаются уравнения для определения этих величин, в точности совпадающие с основными уравнениями той же задачи о синхронизации (см. уравнения (2.1) гл. 2), полученными применением метода малого параметра. Если же считать величины $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ медленно изменяющимися функциями времени, то из того же соотношения получаются приближенные дифференциальные уравнения, описывающие медленный процесс установления синхронного режима. Из этих уравнений, в частности, следуют те же условия устойчивости синхронных режимов, что и получаемые для того же класса задач методами Пуанкаре — Ляпунова.

Отдельные элементы рассматриваемого метода встречались в работах предшественников А. И. Лурье, посвященных решению иных задач (см., например, [153, 239]); здесь важно, однако, именно удачное сочетание этих элементов. Заметим также, что близкий метод был использован Уиземом [265] при решении задачи о распространении волн в нелинейных средах без диссипации энергии. А. И. Лурье характеризует изложенный метод как эвристический прием, не претендующий на строгость. Однако совпадение результатов решения задачи этим методом и иными «строгими» методами (см. п. 2 § 6 гл. 12) несомненно свидетельствует в его пользу. Можно ожидать, что данный метод найдет широкое применение при исследовании периодических и синхронных движений сложных динамических систем.

Глава 12

СИНХРОНИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ КЛАССОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Предварительные замечания

В настоящей главе рассматривается синхронизация некоторых основных слабо связанных динамических объектов.

Для каждого из классов рассматриваемых объектов приводятся выражения для порождающих функций $P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и выписываются (как правило, без вывода) основные уравнения задачи $P_s = 0$, соответствующие условия устойчивости, а также выражения для потенциальной функции D , через посредство которой формулируется интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений. Заметим, что некоторые из рассматриваемых классов объектов «взаимно пересекаются», т. е. ряд объектов может принадлежать одновременно двум или более выделенным классам.

§ 2. Общий случай слабо связанных объектов *)

1. Задача о внешней синхронизации. Пусть система, структурная схема которой изображена на рис. 4, описывается общими дифференциальными уравнениями задачи о синхронизации слабо связанных объектов (см. уравнения (2.1) гл. 1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_j^{(s)} &= X_j^{(s)}(x_1^{(s)}, \dots, x_{r_s}^{(s)}) + \\ &+ \mu F_j^{(s)}(x_1^{(1)}, \dots, x_{r_1}^{(1)}; \dots; x_1^{(k)}, \dots, x_{r_k}^{(k)}; u_1, \dots, u_v; \omega t, \mu) \\ &\quad (j = 1, \dots, r_s; s = 1, \dots, k), \\ \dot{u}_\rho &= U_\rho(x_1^{(1)}, \dots, x_{r_1}^{(1)}; \dots; x_1^{(k)}, \dots, x_{r_k}^{(k)}; u_1, \dots, u_v; t, \mu) \\ &\quad (\rho = 1, \dots, v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

*) См. [57, 207].

Эти уравнения записаны здесь в скалярной форме, причем опущены несущественные теперь индексы $\sim$ и $*$ при функциях связей $F_j^{(s)}$, U_ρ ; предполагается, что указанные функции явно зависят от времени t и имеют период $T = 2\pi/\omega$ по этому аргументу. Пусть, далее, порождающая система

$$\begin{aligned} \dot{x}_{j0} &= X_j^{(s)}(x_{10}^{(s)}, \dots, x_{r_s 0}^{(s)}) \quad (j = 1, \dots, r_s; s = 1, \dots, k), \\ \dot{u}_{\rho 0} &= U_\rho(x_{10}^{(1)}, \dots, x_{r_{10}}^{(1)}; \dots; x_{10}^{(k)}, \dots, x_{r_{k0}}^{(k)}; u_{10}, \dots, u_{v0}; \omega t, 0) \quad (2.2) \\ &(\rho = 1, \dots, v) \end{aligned}$$

имеет синхронное решение

$$x_{j0}^{(s)} = \varphi_{j0}^{(s)}(t + \alpha_s), \quad u_{\rho 0} = u_{\rho 0}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (2.3)$$

т. е. решение вида, характеризуемого равенствами (1.3) гл. 2.

Уравнения в вариациях, соответствующие системе (2.2) и решению (2.3), имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_j^{(s)} &= p_{j1}^{(s)}(t + \alpha_s) z_1^{(s)} + \dots + p_{jr_s}^{(s)}(t + \alpha_s) z_{r_s}^{(s)} \\ &(j = 1, \dots, r_s; s = 1, \dots, k), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\dot{z}_\rho = q_{\rho 1} z_1 + \dots + q_{\rho v} z_v + \sum_{m=1}^k [q_{\rho 1}^{(m)} z_1^{(m)} + \dots + q_{\rho r_m}^{(m)} z_{r_m}^{(m)}],$$

где

$$p_{j\beta}^{(s)}(t) = \frac{\partial X_j^{(s)}}{\partial \varphi_\beta^{(s)}(t)}, \quad (2.5)$$

$$q_{\rho h} = \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial u_h} \right), \quad q_{\rho \delta}^{(m)} = \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial x_\delta^{(m)}} \right)$$

$$(j, \beta, \delta = 1, \dots, r_s; \rho, h = 1, \dots, v; s = 1, \dots, k),$$

причем, как и ранее, круглые скобки, в которые заключены производные от $X_j^{(s)}$ и U_ρ , означают, что эти производные вычисляются для порождающего решения.

Предположим, что уравнения в вариациях (2.4) допускают в точности k периодических решений (δ_{js} — символ Кронекера)

$$\begin{aligned} z_{j\gamma}^{(s)} &= \varphi_{j0}^{(s)}(t + \alpha_s) \delta_{js}, \quad z_{\rho\gamma} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \alpha_\gamma} \\ &(j = 1, \dots, r_s; s, \gamma = 1, \dots, k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

получающихся, согласно теореме А. Пуанкаре (см. § 1 гл. 10), путем последовательного дифференцирования функций (2.3) по $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Пусть все прочие независимые от (2.6) решения системы в вариациях неограниченно убывают при $t \rightarrow \infty$. Тогда к

рассматриваемой системе можно применить теорему § 4 гл. 10 с учетом замечания 4) § 7 той же главы. С этой целью рассмотрим систему, сопряженную по отношению к системе в вариациях (2.4). Заметим, что последние ν уравнений указанной сопряженной системы имеют вид

$$\dot{z}_\rho^* + q_{1\rho} z_1^* + \dots + q_{\nu\rho} z_\nu^* = 0 \quad (\rho = 1, \dots, \nu) \quad (2.7)$$

и, таким образом, содержат только переменные, соответствующие координатам системы связи между объектами. Это обстоятельство не случайно, оно характерно для всех задач о синхронизации слабо связанных объектов. В силу сделанных предположений о характере решений системы (2.4) система (2.7) допускает только тривиальное T -периодическое решение $z_\rho^* \equiv 0$. Поэтому T -периодическое решение системы, сопряженной по отношению к системе в вариациях, следует искать из систем уравнений

$$z_j^{*(s)} + p_{1j}^{(s)}(t + \alpha_s) z_1^{*(s)} + \dots + p_{r_s j}^{(s)}(t + \alpha_s) z_{r_s}^{*(s)} = 0 \quad (j = 1, \dots, r_s; s = 1, \dots, k), \quad (2.8)$$

отвечающих координатам объектов и независимых для каждого объекта. В силу тех же предположений о характере решений системы в вариациях (2.4) каждая из подсистем (2.8) допускает единственное T -периодическое решение; обозначим это решение через $\eta_j^{(s)}(t + \alpha_s)$. Тогда система (2.8) в целом допускает k линейно независимых T -периодических решений

$$z_{j\beta}^{*(s)} = \eta_j^{(s)}(t + \alpha_s) \delta_{s\beta} \quad (\beta = 1, \dots, k). \quad (2.9)$$

Поэтому, а также при учете того, что $z_{\rho\beta}^* \equiv 0$ ($\rho = 1, \dots, \nu$), соотношения (4.9) гл. 10 сводятся к условиям

$$\sum_{j=1}^{r_s} \dot{\varphi}_{j0}^{(s)}(t) \eta_j^{(s)}(t) = 1 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (2.10)$$

которым и должен быть подчинен выбор периодических решений $\eta_j^{(s)}(t)$.

Если учесть теперь, что суммированию по индексу s от 1 до l в обозначениях § 4 гл. 10 здесь отвечает суммирование по индексу j от 1 до r_s , а затем по индексу s от 1 до k и, наконец, суммирование по индексу ρ от 1 до ν , то применение теоремы указанного параграфа приводит к следующим основным уравнениям для определения параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$:

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \sum_{j=1}^{r_s} \langle (F_j^{(s)}) \eta_j^{(s)}(t + \alpha_s) \rangle = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (2.11)$$

Условия устойчивости соответствующего синхронного движения при этом сводятся к требованию отрицательности вещественных частей всех корней κ алгебраического уравнения *)

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right| = 0 \quad (s, j = 1, \dots, k). \quad (2.12)$$

2. Задача о внутренней синхронизации. Пусть при тех же условиях, что и выше, система является автономной, т. е. описывается уравнениями (2.1), правые части которых, однако, не зависят от времени t явным образом. Тогда, если период порождающего решения $T = T_0$ заранее неизвестен и определяется, как это часто делается, из условия обращения в нуль первой поправки $\delta(\mu)$ к периоду искомого решения (см. замечание 5 § 7 гл. 10), то одна из фаз α_s , например α_k , может быть положена равной нулю, а фазы $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ и период T_0 определяются из той же системы основных уравнений. Условие устойчивости рассматриваемого решения, однако, теперь состоит в требовании отрицательности лишь $(k-1)$ -го корня κ уравнения (2.12). Один из корней указанного уравнения в данном случае непременно равен нулю; его наличие не влияет на суждение об устойчивости. Случай известного периода порождающего решения в задаче о внутренней синхронизации рассмотрен в работах [157, 207].

§ 3. Квазилинейные объекты с одной степенью свободы (квазилинейные осцилляторы)

Уравнения движения рассматриваемой системы (в неавтономном случае) имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(s)} + a_s \dot{x}^{(s)} + \omega_s^2 x^{(s)} &= f_s(\omega t) + \mu F_s(x, x, u, \omega t, \mu) \\ (s &= 1, \dots, k), \\ \dot{u}_\rho &= U_\rho(x, x, u, \omega t, \mu) \quad (\rho = 1, \dots, v), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x^{(s)}$ — скалярные обобщенные координаты объектов, u_ρ — фазовые координаты системы связи, a_s и ω_s^2 — неотрицательные постоянные, f_s , F_s и U_ρ предполагаются $2\pi/\omega$ -периодическими функциями t , под x и u понимается совокупность всех переменных $x^{(s)}$ и u_ρ соответственно. К рассмотрению подобных систем, наиболее простых для исследования, приводятся многие задачи о синхронизации слабо связанных объектов в механике, радиотехнике, радиофизике, биологии (см. гл. 5, 6 и 8).

*) Объяснение обозначений см. в списке на с. 271.

Результат решения задачи существенно зависит от характера порождающей системы, а также от свойств системы уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \ddot{z}^{(s)} + a_s \dot{z}^{(s)} + \omega_s^2 z^{(s)} &= 0 \quad (s = 1, \dots, k), \\ \dot{z}_\rho &= \sum_{j=1}^k [p_{\rho j}(t) z^{(j)} + q_{\rho j}(t) \dot{z}^{(j)}] + \sum_{f=1}^v r_{\rho f}(t) z_f, \\ \left[p_{\rho j} &= \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial x^{(j)}} \right), \quad q_{\rho j} = \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial \dot{x}^{(j)}} \right), \quad r_{\rho f} = \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial u_f} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

составленной для порождающей системы и порождающего синхронного решения. Эта система состоит из k независимых линейных уравнений с постоянными коэффициентами и из системы v уравнений, поведение решений которой при $t \rightarrow \infty$ совпадает с поведением решений более простой системы

$$\dot{z}'_\rho = \sum_{f=1}^v r_{\rho f}(t) z'_f \quad (\rho = 1, \dots, v). \quad (3.3)$$

Если предполагать, что все решения этой системы неограниченно убывают при $t \rightarrow \infty$, то характер решения задачи о синхронизации будет определяться в основном коэффициентами a_s и ω_s^2 в уравнениях объектов.

Наибольший прикладной интерес представляют случаи, когда либо коэффициент a_s мал или равен нулю, а коэффициент ω_s^2 не мал (квазиконсервативный квазилинейный осциллятор), либо когда коэффициент ω_s^2 равен нулю (объект с почти равномерным вращением), причем соответствующий коэффициент a_s может быть как малым (квазиконсервативная идеализация), так и не малым (неквазиконсервативная идеализация). Соответствующие случаи в несколько конкретизированном виде охватываются рассматриваемыми в §§ 4 и 5, а также в гл. 3—6.

Общее рассмотрение дано в книге [57]. Заметим также, что решение многих задач о синхронизации квазилинейных объектов сводится к применению теорем §§ 2 и 3 гл. 10.

Имеется очень большое число публикаций, посвященных изучению захватывания и синхронизации квазилинейных квазиконсервативных осцилляторов применительно к задачам радиоэлектроники. Первые из этих исследований принадлежат Е. Эплтону [305], Ван-дер-Полю [334, 335], Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси [222], А. А. Андронову и А. А. Витту [6], А. Майеру [179, 319]; они сыграли существенную роль в развитии теории нелинейных колебаний (см. краткий обзор в п. 1 § 2 гл. 6). Некоторые общие результаты исследования синхронизации квазилинейных квазиконсервативных осцилляторов приведены в конце § 5.

§ 4. Системы с почти равномерными вращательными движениями *)

Во многих задачах о синхронизации механических систем обобщенные координаты могут быть выбраны таким образом, что часть из них $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ является вращательными и в синхронных движениях изменяется по закону, близкому к равномерному вращению, причем связи между соответствующими степенями свободы могут считаться слабыми; прочие обобщенные координаты $u_1, \dots, u_v$ являются колебательными. Иными словами, синхронные движения указанных систем имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \sigma_s [n_s \omega t + \alpha_s + \mu \psi_s(\omega t)] \quad (s = 1, \dots, k), \\ u_r &= u_r(\omega t) \quad (r = 1, \dots, v),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $\sigma_s = \pm 1$, n_s — взаимно простые целые положительные числа, α_s — постоянные, а ψ_s и u_r — периодические функции t с периодом $2\pi/\omega$, причем можно считать, что $\langle \psi_s(\omega t) \rangle = 0$. К рассматриваемым системам относятся, в частности, многие вибрационные машины и установки, гибкие валы с неуравновешенными дисками, устройства для динамической балансировки неуравновешенных роторов, а также электромеханические системы с параллельно работающими синхронными машинами, некоторые системы, изучаемые в небесной механике (см. вторую часть книги).

В соответствии с предположениями о характере изучаемого синхронного движения считаем, что, по крайней мере в его окрестности, уравнения Лагранжа для рассматриваемых систем могут быть представлены в форме

$$I_s \ddot{\varphi}_s + k_s (\dot{\varphi}_s - \sigma_s n_s \omega) = \mu \Phi_s \quad (s = 1, \dots, k),\tag{4.2}$$

$$\mathcal{E}_{u_r}(L) = Q_r^{(0)} + \mu Q_r^{(1)} \quad (r = 1, \dots, v),\tag{4.3}$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа системы (T — кинетическая, Π — потенциальная энергии)

$$\begin{aligned}\mu \Phi_s &= I_s \ddot{\varphi}_s + k_s (\dot{\varphi}_s - \sigma_s n_s \omega) - \mathcal{E}_{\varphi_s}(L) + Q_{\varphi_s}^{(1)}, \\ \mu Q_r^{(1)} &= Q_r - Q_r^{(0)},\end{aligned}\tag{4.4}$$

$\mathcal{E}_q = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}$ — эйлеров оператор, соответствующий обобщенной координате q , I_s и k_s — положительные постоянные, а $Q_{\varphi_s}^{(1)}$ и $Q_r^{(0)} + \mu Q_r^{(1)}$ — неконсервативные обобщенные силы. Считается, что функции L , $Q_{\varphi_s}^{(1)}$ и Q_r могут быть $2\pi/\omega$ -периодически-

*) См. [41—43, 57].

ми функциями времени t и что характер зависимости этих функций от φ_s и от t таков, что после подстановки выражений (4.1) они становятся (или остаются) $2\pi/\omega$ -периодическими функциями t .

Отвечающая уравнениям (4.2), (4.3) порождающая система допускает для вращательных координат систему решений

$$\varphi_s^0 = \sigma_s (n_s \omega t + \alpha_s) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (4.5)$$

зависящую от k произвольных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Пусть

$$u_r^0 = u_r^0(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (r = 1, \dots, v) \quad (4.5')$$

— соответствующее $2\pi/\omega$ -периодическое решение порождающих уравнений для (4.3), предполагаемое существующим и асимптотически устойчивым при всех рассматриваемых значениях $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

В указанных предположениях использование теоремы § 2 гл. 10 легко приводит к следующим основным уравнениям задачи (см. также [57]):

$$\begin{aligned} P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) &\equiv \frac{\sigma_s \mu}{k_s} \langle (\Phi_s) \rangle \equiv \frac{1}{k_s} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} + A_s \right) = \\ &\equiv \frac{1}{k_s} \left(\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_s} + A_s \right) = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \langle (L) \rangle, \quad \Lambda_0 = \langle (L_0) \rangle, \\ L_0 &= L - \sum_{s=1}^k L_s, \quad A_s = \sigma_s \langle (Q_s^{(1)}) \rangle + \sum_{r=1}^v \left\langle (Q_r^{(0)}) \frac{\partial u_r^0}{\partial \alpha_s} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь величины $L_s = L_s(\varphi_s, \dot{\varphi}_s)$ — «собственные» функции Лагранжа, причем в силу (4.5) $\langle (L_s) \rangle = 0$. Уравнения (4.6) могут быть истолкованы как уравнения равновесия средних моментов или как уравнения баланса энергии, подводимой к s -му объекту и расходуемой им. При этом производные $\partial \Lambda / \partial \alpha_s = \partial \Lambda_0 / \partial \alpha_s$ по физическому смыслу представляют собой средние моменты, которые зачастую не связаны с притоком или потерями энергии в системе, а характеризуют лишь перераспределение энергии между объектами, необходимое для синхронизации. Это имеет место, например, если функция Лагранжа системы L не зависит явно от времени t и поэтому замена ωt на $\omega t + \alpha_0$ в решениях (4.5) не должна изменять значения Λ , т. е.

$$\Lambda(\alpha_1 + n_1 \alpha_0, \dots, \alpha_k + n_k \alpha_0) \equiv \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Дифференцируя это тождество по α_0 , получаем равенство

$$\sum_{s=1}^k n_s \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} = 0; \quad (4.8)$$

и тогда, складывая уравнения (4.6), умноженные на $n_s k_s$, приходим к соотношению

$$\sum_{s=1}^k n_s A_s = 0, \quad (4.9)$$

которое является уравнением баланса энергии в системе (в порождающем приближении) и в случае задачи о внешней синхронизации служит для определения исходного приближения к синхронной частоте ω . Подчеркнем, что функция $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, в силу сделанных естественных предположений о характере зависимости функции Лагранжа системы L от переменных φ_s , является 2π -периодической по каждой из фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Именно это обстоятельство при условии достаточной малости функций A_s и выполнения некоторых требований весьма общего характера обеспечивает тенденцию к синхронизации в рассматриваемых системах (см. § 7).

Величина A_s , которую можно назвать *избыточным моментом s-го объекта* представляет собой средний момент неконсервативных сил, приведенных к координате φ_s ; она является разностью между притоком и расходом энергии при синхронном движении s-го объекта. Эта разность как раз и компенсируется моментом $\partial \Lambda_0 / \partial \alpha_s$.

В задаче о внутренней синхронизации автоколебательных объектов при $\sum_{r=1}^v \langle (Q_r^{(0)}) \frac{\partial u_r^0}{\partial \alpha_s} \rangle = 0$, когда наличие неконсервативных сил по колебательным координатам не вызывает диссипации энергии, уравнения

$$A_s|_{u_1^0 = \dots = u_v^0 = 0} \equiv \sigma_s \langle (Q_{\varphi_s}^{(1)}) \rangle = 0 \quad (s = 1, \dots, k) \quad (4.10)$$

представляют собой уравнения равновесия усредненных неконсервативных сил или уравнений баланса энергии внутри несвязанных объектов. Обычно эти уравнения служат для определения так называемых *парциальных частот объектов* ω_s , т. е. частот (средних угловых скоростей), которые имели бы объекты в изолированном состоянии (но, естественно, при учете «собственных» неконсервативных сил $\mu Q_{\varphi_s}^{(1)}$).

Одна из важнейших закономерностей явления взаимной синхронизации состоит в том, что она может наступить и при суще-

ственном отличии частот $n_s \omega$ от парциальных частот ω_s (см. § 3 Введения и §§ 5, 6 и 14 гл. 3).

Если существует функция $B = B(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ такая, что

$$\partial B / \partial \alpha_s = A_s \quad (4.11)$$

(назовем эту функцию *потенциалом избыточных усредненных неконсервативных сил* *)), то за потенциальную функцию может быть принято выражение

$$D = -(\Lambda + B). \quad (4.12)$$

При условии, что функция Лагранжа системы может быть представлена в форме

$$L = L^* + L^{(I)} + L^{(II)},$$

$$L^* = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k d_{sj} \dot{\varphi}_s \dot{\varphi}_j + \sum_{r=1}^v f_r(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_k; \varphi_1, \dots, \varphi_k) \dot{u}_r + \\ + \sum_{s=1}^k F_s(\varphi_s),$$

$$L^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^v \sum_{j=1}^v a_{rj} \dot{u}_r \dot{u}_j - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^v \sum_{j=1}^v b_{rj} u_r u_j, \quad (4.13)$$

$$L^{(II)} = \Psi(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_k; \varphi_1, \dots, \varphi_k),$$

где a_{rj} , b_{rj} и d_{sj} — постоянные, а f_r , F_r и Ψ — функции перечисленных аргументов, причем f_r и F_r периодичны по φ_s с периодом 2π и к тому же $Q_r^{(0)} = 0$ ($r = 1, \dots, v$), справедливо соотношение

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial (\Lambda^{(II)} - \Lambda^{(I)})}{\partial \alpha_s} \quad (\Lambda^{(I)} = \langle (L^{(I)}) \rangle, \quad \Lambda^{(II)} = \langle (L^{(II)}) \rangle) \quad (4.14)$$

и потенциальная функция может быть представлена в одной из двух форм

$$D = \Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)} - B, \quad D = -\left(\Lambda^{(II)} + \frac{1}{2} \Lambda^* + B\right) \quad (4.15)$$

$$(\Lambda^* = \langle (L^*) \rangle).$$

Заметим, что слагаемые $L^{(I)}$ и $L^{(II)}$ в выражениях (4.13) представляют собой соответственно функции Лагранжа связей первого и второго рода (см. § 5).

*) Естественно, что функция B может существовать несмотря на отсутствие потенциала у сил Q_r и Q_s .

В случае задачи о внешней синхронизации условия устойчивости синхронного движения, как и выше, сводятся к требованию отрицательности вещественных частей всех корней уравнения вида (2.12); для задачи о внутренней синхронизации справедливо сказанное в п. 2 предыдущего параграфа.

§ 5. Квазиконсервативные объекты

Изложенное в § 4 допускает обобщение на случай слабо связанных консервативных объектов *). Рассмотрим систему, структурная схема которой представлена на рис. 56. Пусть состояние

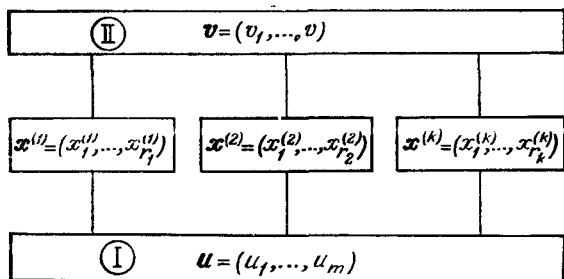


Рис. 56.

s -го объекта определяется вектором-столбцом обобщенных координат $x^{(s)} = [x_1^{(s)}, \dots, x_{r_s}^{(s)}]$, где r_s — число степеней свободы s -го объекта. Применительно ко многим приложениям, преимущественно из области механики, целесообразно различать два рода связей (взаимодействий) между объектами. *Связи первого рода*, состояние которых определяется вектором-столбцом обобщенных координат $u = [u_1, \dots, u_m]$, можно трактовать как обусловленные наличием некоторого «несущего тела» или «системы несущих тел» с m существенными степенями свободы. Будучи связаны с указанными телами, объекты приобретают некоторую дополнительную подвижность, так что их суммарные кинетическая и потенциальная энергии представляются в виде

$$T^* = \sum_{s=1}^h T_s + \Delta T^*, \quad \Pi^* = \sum_{s=1}^h \Pi_s + \Delta \Pi^*, \quad (5.1)$$

где $T_s = T_s(\dot{x}^{(s)}, x^{(s)})$, $\Pi_s = \Pi_s(x^{(s)})$ — собственные кинетические и потенциальные энергии объектов, которые можно трак-

*) Здесь кратко, но в видоизмененной и несколько расширенной форме приводятся результаты работы Р. Ф. Нагаева [240]; см. также [57].

товать соответственно как кинетические и потенциальные энергии объектов при остановленной несущей системе [175]. Через

$$\Delta T^* = \Delta T^*(\dot{x}, x; \dot{u}, u) \quad \text{и} \quad \Delta \Pi^* = \Delta \Pi^*(x, u)$$

обозначены добавочные кинетическая и потенциальная энергии объектов, связанные с подвижностью несущей системы, причем под x понимается совокупность всех векторов $x^{(s)}$. Собственные кинетическую и потенциальную энергии связей первого рода обозначим соответственно через $T^{(I)} = T^{(I)}(\dot{u}, u)$ и $\Pi^{(I)} = \Pi^{(I)}(u)$.

Связи второго рода условно можно назвать *несомыми*. Они не приводят к увеличению подвижности объектов, но их наличие также может быть (хотя и не обязательно) связано с увеличением числа степеней свободы системы в целом, так что для определения состояния системы необходимо кроме x и u задать также вектор обобщенных координат $v = [v_1, \dots, v_n]$. Кинетическую и потенциальную энергии связей второго рода обозначим соответственно через $T^{(II)} = T^{(II)}(\dot{x}, x, \dot{u}, u, \dot{v}, v)$ и $\Pi^{(II)} = \Pi^{(II)}(x, u, v)$.

Физический смысл различения связей первого и второго рода может быть пояснен на примерах задач о синхронизации орбитальных систем (см. § 6).

В соответствии с предположением о слабости связей между объектами следует считать, что после наложения связей общие кинетическая и потенциальная энергии системы в целом изменяются незначительно, т. е. можно положить

$$\begin{aligned} T &= T^* + T^{(I)} + T^{(II)} = \sum_{s=1}^k T_s + O(\mu), \\ \Pi &= \Pi^* + \Pi^{(I)} + \Pi^{(II)} = \sum_{s=1}^k \Pi_s + O(\mu), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где через $O(\mu)$ обозначены члены, имеющие порядок малого параметра μ . Обобщенные неконсервативные силы, отвечающие координатам объектов, предполагаются имеющими порядок не ниже μ , причем составляющие $Q^{(s)}$ этих сил, имеющие порядок μ , считаются зависящими только от координат и скоростей s -го объекта, а также, быть может (в случае задачи о внешней синхронизации), от времени t с периодом $2\pi/\omega$ внешнего возмущения, т. е. $Q^{(s)} = Q^{(s)}(\dot{x}^{(s)}, x^{(s)}, \omega t)$. Обобщенные неконсервативные силы Q_u и Q_v , отвечающие координатам системы связей, вообще говоря, могут быть немалыми и зависеть от всех координат системы.

Порождающая система в рассматриваемом случае состоит из k отдельных консервативных автономных систем, описывающих

движения изолированных объектов, и из порождающих уравнений системы связей. Предполагаем, что каждая из указанных k систем допускает в некоторой области G_s пространства $(\dot{x}^{(s)}, x^{(s)})$ решение вида

$$x_{j0}^{(s)} = p_{j0}^{(s)}(\psi_s, c_s) = \sigma_j^{(s)} [q_j^{(s)} \psi_s + y_{j0}^{(s)}(\psi_s, c_s)], \quad (5.3)$$

$p_{j0}^{(s)} = p_{j0}^{(s)}(\psi_s, c_s)$, $\psi_s = \tilde{\omega}_s(c_s)t + \alpha_s$ ($j = 1, \dots, r_s$, $s = 1, \dots, k$), где α_s и c_s — произвольные постоянные, $y_{j0}^{(s)}$ и $p_{j0}^{(s)}$ — периодические функции ψ_s с периодом 2π , $\sigma_j^{(s)} = \pm 1$, а $q_j^{(s)}$ равно нулю для колебательных и единице для вращательных координат. Постоянные α_s , как и ранее, представляют собой начальные фазы движения объектов, а постоянные c_s на траекториях, отвечающих решению (5.3), взаимно однозначно связаны с постоянной энергии

$$h_s(c_s) = T_s(\dot{x}_0^{(s)}, x_0^{(s)}) + \Pi_s(x_0^{(s)}). \quad (5.4)$$

От постоянной c_s , а значит и от h_s , зависит и частота $\tilde{\omega}_s$ решения (5.3); эта частота изменяется для решений (5.3), лежащих в области G_s в некотором диапазоне *)

$$\tilde{\omega}_s^{(1)} < \omega_s < \tilde{\omega}_s^{(2)}. \quad (5.5)$$

Синхронные движения объектов с частотами $\tilde{\omega}_s = n_s \omega$, кратными частоте возмущения ω , возможны при условии, что частоты $\tilde{\omega}_s = n_s \omega$ лежат внутри этих диапазонов.

Предположим вначале, что каждому решению (5.3) при всех рассматриваемых α_s и c_s отвечает по крайней мере одно $2\pi/\omega$ -периодическое решение порождающих уравнений системы связей

$$u_0 = u_0(\omega t; c_1, \dots, c_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (5.6)$$

$$v_0 = v_0(\omega t; c_1, \dots, c_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

зависящее от тех же $2k$ постоянных α_s и c_s , что и решение (5.3), и являющееся асимптотически устойчивым. Будем считать, наконец, что объекты существенно неизохронны внутри областей G_s , т. е. что протяженности частотных диапазонов $\tilde{\omega}_s^{(2)} - \tilde{\omega}_s^{(1)}$, а также производные $d\tilde{\omega}_s/dc_s$ не малы. Случай объектов, изохронных в порождающем приближении, требует особого рассмотрения; о нем говорится ниже.

*) Величины $\tilde{\omega}_s$ не следует смешивать с введенными ранее парциальными частотами объектов ω_s .

При сформулированных предположениях применение, например, теоремы § 6 гл. 10 приводит к следующим результатам.

Параметры $c_1, \dots, c_k$ в синхронном движении определяются из равенств

$$\tilde{\omega}_s(c_s) = n_s \omega \quad (s = 1, \dots, k), \quad (5.7)$$

а уравнения для определения начальных фаз α_s (основные уравнения) могут быть записаны в форме

$$P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \equiv \frac{1}{e_s(n_s \omega)} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} + A_s \right) \equiv \frac{1}{e_s(n_s \omega)} \left(\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_s} + A_s \right) = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (5.8)$$

где

$$\Lambda_0 = \langle (L_0) \rangle, \quad L_0 = \Delta L^* + L^{(I)} + L^{(II)},$$

причем $\Delta L^* = \Delta T^* - \Delta \Pi^*$, $L^{(I)} = T^{(I)} - \Pi^{(I)}$ и $L^{(II)} = T^{(II)} - \Pi^{(II)}$ — функции Лагранжа соответствующих связей,

$$e_s(\tilde{\omega}_s) = \frac{1}{\tilde{\omega}_s} \frac{dh_s[c_s(\tilde{\omega}_s)]}{d\tilde{\omega}_s} \quad (5.9)$$

— так называемая *крутизна частотной характеристики объекта* (в случае $e_s > 0$ говорят о *жестко анизохронных* объектах, в случае $e_s < 0$ — о *мягко анизохронных* и при $e_s = 0$ — об *изохронных* объектах).

Заметим, что функции Λ , Λ_0 , $\Delta L^* = \langle (\Delta L^*) \rangle$, $\Lambda^{(I)} = \langle (L^{(I)}) \rangle$ и $\Lambda^{(II)} = \langle (L^{(II)}) \rangle$, как и в § 4, являются 2π -периодическими по каждой из фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$; это обстоятельство весьма существенно, ибо именно оно при условии достаточной малости функций A_s и выполнении некоторых дополнительных требований общего характера предопределяет тенденцию к синхронизации в рассматриваемых системах (см. § 7).

Величины

$$A_s = \sum_{j=1}^{r_s} \left\langle (Q_j^{(s)}) \frac{\partial x_{j0}^{(s)}}{\partial \psi_s} \right\rangle + \sum_{p=1}^m \left\langle (Q_{u,p}^{(0)}) \frac{\partial u_{p0}}{\partial \psi_s} \right\rangle + \sum_{r=1}^n \left\langle (Q_{v,r}^{(0)}) \frac{\partial v_{r0}}{\partial \psi_s} \right\rangle, \quad (5.10)$$

как и в § 4 — средние за период неконсервативные обобщенные силы, приведенные к s -му объекту, причем $Q_u^{(0)}$ и $Q_v^{(0)}$ — не содержащие и составляющие обобщенных сил, отвечающие координатам u и v .

В отношении физического смысла уравнений (5.8) и отдельных слагаемых в них справедливо все сказанное в § 4 по поводу уравнений (4.6). В частности, при $\partial L / \partial t = 0$ справедливо уравнение баланса энергии (4.9), а при равенстве нулю двух последних слагаемых в формуле (5.10) — соотношения (4.10) для определения парциальных частот объектов ω_a . Если существует потенциал усредненных неконсервативных сил $B = B(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, т. е. функция, удовлетворяющая равенствам (4.11), а также если характер анизохронизма всех объектов одинаков, т. е.

$$\operatorname{sgn} e_1 = \dots = \operatorname{sgn} e_k = \sigma, \quad (5.11)$$

то за потенциальную функцию может быть принято выражение

$$D = -(\Lambda_0 + B)\sigma, \quad (5.12)$$

которое представляет собой обобщение выражения (4.12), поскольку объекты с почти равномерными вращениями являются жестко анизохронными ($\sigma = 1$).

Если уравнения несущих связей в порождающем приближении представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а неконсервативные обобщенные силы, отвечающие координатам системы связи малы ($Q_u^{(0)} = 0$ и $Q_v^{(0)} = 0$), то справедливо соотношение

$$\Lambda_0 = \Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)}, \quad (5.13)$$

соответствующее равенству (4.14), и тогда выражение (5.12) принимает вид

$$D = (\Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)} - B)\sigma. \quad (5.14)$$

Согласно (5.12) и (5.14) характер экстремума функции $\Lambda_0 + B$ или $\Lambda^{(I)} - \Lambda^{(II)}$, отвечающего устойчивым движениям, изменяется в зависимости от характера анизохронизма объектов, а действие связей первого и второго рода в известном смысле противоположно. При $B = \text{const}$ и при наличии только несущих связей $D = \sigma\Lambda^{(I)}$, а при наличии только несомых связей $D = -\sigma\Lambda^{(II)}$. В результате приходим к таблице 6, показывающей влияние рода связей и типа анизохронизма объектов на характер экстремумов функций $\Lambda^{(I)}$ или $\Lambda^{(II)}$, отвечающих устойчивым синхронным движениям [211].

Подчеркнем, что в отличие от функций $\Lambda^{(I)}$, $\Lambda^{(II)}$ и Λ_0 , потенциальная функция D введена нами так (см. § 2 гл. 2 и § 8 гл. 10), что устойчивым движениям всегда соответствует минимум этой функции.

Необходимо подчеркнуть, что в отличие от систем с почти равномерными вращениями, условия устойчивости, выражаемые через посредство уравнения (2.12) или условия минимума потенциальной функции D , в данном случае являются лишь необ-

Т а б л и ц а 6

Характер экстремумов функции $\Lambda^{(I)}$ или $\Lambda^{(II)}$, отвечающих устойчивым синхронным движениям (при $B = \text{const}$)

Род связей	Тип анизохронизма объектов	
	Жесткий анизохронизм $\epsilon(\omega) > 0, \sigma = 1$	Мягкий анизохронизм $\epsilon(\omega) < 0, \sigma = -1$
Несущие связи ($\Lambda^{(II)} = 0, D = \sigma \Lambda^{(I)}$)	Минимум $\Lambda^{(I)}$ ($D = \Lambda^{(I)}$)	Максимум $\Lambda^{(I)}$ ($D = -\Lambda^{(I)}$)
Несомые связи ($\Lambda^{(I)} = 0, D = -\sigma \Lambda^{(II)}$)	Максимум $\Lambda^{(II)}$ ($D = -\Lambda^{(II)}$)	Минимум $\Lambda^{(II)}$ ($D = \Lambda^{(II)}$)

ходимыми; кроме того для устойчивости корни уравнения (2.12) теперь должны быть вещественными и отрицательными. Дополнительные соотношения, дающие систему необходимых и достаточных условий, вытекают из неравенств (6.16) гл. 10. В частном случае квазиконсервативных объектов с одной степенью свободы при наличии связей, не вносящих в систему новых степеней свободы, указанные дополнительные условия устойчивости сводятся к неравенствам

$$\sum_{s=1}^k e_s(n_s \omega) \left\langle \left(\frac{\partial Q^{(s)}}{\partial p_s} \right) \right\rangle M_s^2 \left| \sum_{s=1}^k M_s^2 e_s(n_s \omega) < 0, \quad (5.15)$$

которые должны выполняться для каждой системы постоянных M_s , определяемых из линейной однородной системы уравнений

$$\sum_{j=1}^k M_j \left[\frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right] = 0 \quad (s = 1, \dots, k) \quad (5.16)$$

при каждом из k значений корней κ уравнения (2.12); через p обозначен обобщенный импульс объекта. Поскольку в рассматриваемом случае величины $A_s = \left\langle (Q^{(s)}) \frac{\partial x_0^{(s)}}{\partial \psi_s} \right\rangle$ не зависят от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, то уравнения (5.16) могут быть записаны также в форме

$$\sum_{j=1}^k M_j \left[\frac{1}{e_s(n_s \omega)} \frac{\partial^2 \Lambda_0}{\partial \alpha_s \partial \alpha_j} - \delta_{sj} \kappa \right] = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (5.17)$$

В важном случае, когда $\partial Q_s / \partial p_s < 0$ и характер анизохронизма всех объектов одинаков (см. равенство (5.11)), дополнительные условия (5.15) непременно выполняются, и указанные

выше необходимые условия являются также и достаточными. Для квазиконсервативных объектов с линейными несущими связями дополнительные устойчивости получены в работе [213].

Относительно задачи о внутренней синхронизации справедливо сказанное в конце § 2.

В более общем случае неизохронных консервативных объектов, когда порождающее решение зависит не только от фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, но также и от других произвольных параметров, можно воспользоваться теоремой Р. Ф. Нагаева (§ 6 гл. 10). Из этой теоремы, в частности, вытекает, что приведенные выше условия устойчивости сохраняют роль необходимых в сравнительно широком классе случаев. Решение же ряда конкретных задач о синхронизации показывает, что данные условия играют основную роль в отборе устойчивых фазировок объектов (см. вторую часть книги, а также [57]).

Приведем теперь некоторые результаты, относящиеся к особому случаю объектов, *изохронных в порождающем приближении*, когда порождающая система может быть выбрана так, что частоты не зависят от энергии, частотные диапазоны объектов (5.5) вырождаются в точку, соответствующую (в случае задачи о внешней синхронизации) частоте возмущения ω . Одним из важнейших классов таких объектов являются квазилинейные осцилляторы (см. § 3) в случае, когда последние квазиконсервативны; подобные осцилляторы служат моделями многих реальных объектов в механике, радиотехнике, радиофизике и биологии (см. гл. 5, 6 и 8).

Порождающее синхронное решение в этом случае зависит не только от фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, но и от постоянных $c_1, \dots, c_k$, т. е. содержит $2k$ произвольных постоянных. Значения этих постоянных, которым могут при достаточно малых μ отвечать синхронные движения системы, определяются из уравнений

$$A_s + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_s} = 0, \quad B_s + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial c_s} = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (5.18)$$

Здесь величины A_s и Λ_0 по смыслу совпадают с введенными выше и вычисляются по тем же формулам, а

$$B_s = \sum_{j=1}^{r_s} \left\langle (Q_j^{(s)}) \frac{\partial x_{j0}^{(s)}}{\partial c_s} \right\rangle + \sum_{p=1}^m \left\langle (Q_{u,p}^{(0)}) \frac{\partial u_{p0}}{\partial c_s} \right\rangle + \sum_{r=1}^n \left\langle (Q_{v,r}^{(0)}) \frac{\partial v_{r0}}{\partial c_s} \right\rangle. \quad (5.19)$$

В случае чисто консервативной системы (а также в предположении, что неконсервативные силы имеют более высокий поря-

док малости) по-прежнему справедлив интегральный критерий устойчивости (экстремальное свойство) синхронных движений: устойчивые движения могут отвечать грубым максимумам функции $\Lambda_0 = -D$. Иным путем аналогичный результат для несколько отличных систем был получен позднее К. Г. Валуевым и Р. Ф. Ганиевым. Примечательно, что для рассмотренных в их работе [81] квазилинейных, а также близких к каноническим чисто консервативных систем устойчивые синхронные движения соответствуют не только максимумам, но также и минимумам функции Λ_0 по $2k$ начальным значениям или по другим связанным с ними параметрам порождающего решения (см. также § 8 гл. 40).

Отметим в заключение, что наиболее общий случай, когда имеются как изохронные, так и неизохронные в порождающем приближении объекты, охватывается теоремой Р. Ф. Нагаева, приведенной в § 6 гл. 10.

§ 6. Орбитальные системы

1. Определение орбитальных систем; свободные и несвободные (каркасные) орбитальные системы, их синхронизация*). Все рассматриваемые в настоящей книге, а также и многие другие механические и электромеханические системы с синхронизируемыми объектами могут быть отнесены к одному широкому классу систем, которые назовем *орбитальными системами*.

Под орбитальной в общем случае будем понимать систему, состоящую из $(k+1)$ -го взаимодействующих твердых или деформируемых тел, в которой центры масс или другие характерные точки $C_1, \dots, C_k$ тел $B_1, \dots, B_k$, называемых *несомыми телами*, могут совершать движения по замкнутым траекториям относительно некоторого тела B_0 , называемого *несущим или центральным* (рис. 44). За центральное тело, как правило, может быть принято любое из тел системы, однако обычно за таковое будем принимать вполне определенное тело, отличающееся от остальных каким-нибудь характерным признаком, например, имеющее значительно большую массу. Несущее тело B_0 может состоять из некоторого числа взаимодействующих тел; в этом случае будем говорить о несущей системе тел. На каждое из тел орбитальной системы, помимо сил взаимодействия, могут действовать заданные силы как консервативного, так и неконсервативного характера.

Можно выделить два типа орбитальных систем: *свободные и несвободные (каркасные)*. В свободных орбитальных системах движение характерных точек $C_1, \dots, C_k$ несомых тел не подчи-

*) См. [63, 66].

нено каким-либо кинематическим связям; именно с такими системами приходится иметь дело, например, в небесной механике (см. гл. 7). В несвободных орбитальных системах несущее тело обычно идеализируется в виде одного или нескольких твердых тел, упруго связанных одно с другим и с неподвижным основанием. Характерные точки несомых тел при этом могут перемещаться по фиксированным замкнутым траекториям внутри твердых тел, образующих несущее тело. Подобные системы играют существенную роль в вибрационной технике — они отвечают, в частности, динамической схеме вибрационной машины с несколькими механическими вибровозбудителями (см. рис. 5 и 6); другими примерами могут служить сепараторы подшипников качения (рис. 39), маятниковые часы, установленные на подвижном основании (рис. 40).

Среди обобщенных координат, определяющих положение несомых тел B_s относительно несущего (центрального) тела B_0 , могут быть как колебательные (либрационные), так и вращательные (ротационные) $\varphi_s(t)$ ($s = 1, \dots, p$). В числе последних особую роль играют координаты $\varphi_s^*(t)$ ($s = 1, \dots, k$) (не обязательно угловые), характеризующие положение точек C_s на их траекториях (орбитах), назовем эти координаты *орбитальными*). Для несвободной системы, несомые тела которой имеют лишь одну степень свободы относительно тела B_0 , например, являются материальными точками, маятниками и т. п., орбитальные координаты $\varphi_s^*(t)$ полностью определяют положение несомых тел $B_1, \dots, B_k$ относительно несущего тела B_0 .

*Основная задача о синхронизации орбитальных систем состоит в исследовании движений, при которых характерные точки несомых тел $B_1, \dots, B_k$ движутся по замкнутым траекториям относительно несущего тела B_0 с одинаковыми или кратными периодами *), совершая синхронные движения также и по всем или некоторым другим обобщенным координатам.*

Подавляющее большинство задач о синхронизации орбитальных систем может рассматриваться как задачи о синхронизации слабо связанных квазиконсервативных объектов или объектов с почти равномерными вращениями **). Синхронизирующимися объектами при этом являются тела $B_1, \dots, B_k$, несущей связью —

) Иными словами, орбитальные координаты $\varphi_s^(t)$ являются периодическими функциями с одинаковыми или кратными периодами.

**) В последнем случае координаты $\varphi_s(t)$ выбираются так (если это оказывается практически возможным), чтобы в изучаемых движениях они изменялись по закону, близкому к равномерному вращению (см. формулы (4.1)). Примером такого выбора координаты является переход от истинной аномалии к средней аномалии в теории кеплеровских орбит в небесной механике.

тело B_0 , с которым взаимодействуют несомые тела, а несомые связи определяются взаимодействиями несомых тел между собой. Так, например, в небесномеханических задачах взаимодействие тел $B_0, \dots, B_k$ характеризуется законом всемирного тяготения. Подчеркнем, что квазиконсервативная идеализация для орбитальных систем не является единственно возможной.

Для «не взаимодействующих» вращательных координат, в частности независимо движущихся (не взаимодействующих одно с другим и с несущим телом B_0) несомых тел B_s , т. е. в порождающем приближении, величины φ_s определены с точностью до произвольных начальных фаз α_s :

$$\varphi_s(t) = \varphi_s^0(t + \alpha_s) \quad (s = 1, \dots, p), \quad (6.1)$$

(p — число вращательных координат).

Относительно синхронизации орбитальных систем, идеализируемых в виде объектов с почти равномерными вращениями или в виде квазиконсервативных объектов можно повторить все сказанное в §§ 4 и 5. В частности, «отбор» фаз α_s в устойчивых синхронных движениях осуществляется посредством решения соответствующих основных уравнений (4.6), (5.8); исследование устойчивости — с помощью уравнения (2.12); этот отбор может быть сделан также путем использования интегрального критерия устойчивости синхронных движений (их экстремального свойства). Весьма существенно, что при этом, вследствие 2π -периодичности функций Лагранжа системы в целом и отдельных ее частей по φ_s , указанные функции после усреднения за период (на порождающих решениях) становятся 2π -периодическими по всем фазам α_s . Именно это обстоятельство при наличии некоторых дополнительных условий обеспечивает в рассматриваемых системах тенденцию к синхронизации (см. § 7).

Отметим также, что в случае свободной орбитальной системы, а также когда несомые тела $B_1, \dots, B_k$ имеют несколько степеней свободы относительно несущего тела B_0 , условия устойчивости синхронных движений, выражающиеся через посредство уравнений (2.12) или интегральный критерий устойчивости, являются лишь необходимыми, хотя и играют, как правило, основную роль. В случае же несвободной системы и когда несомые тела имеют одну степень свободы относительно несущего тела (см. рис. 5 п 45), эти условия практически являются также и достаточными.

2. Несвободная орбитальная система со слабо взаимодействующими простейшими телами. Основное вариационное соотношение и пример его использования. Рассмотрим несвободную орбитальную систему (рис. 5), в которой «несущее тело» B_0 представляет собой систему твердых тел $B_{01}, \dots, B_{0n}$, связанных одно

с другим и с неподвижным основанием системой линейных упругих и демпфирующих элементов, а несомые тела $B_1, \dots, B_k$ имеют относительно тел несущей системы всего одну степень свободы. Такими несомыми телами, в частности, могут быть неуравновешенные роторы, приводимые от каких-либо двигателей (вибровозбудители), маятники, грузы на пружинках и т. п. Несомые связи будем предполагать отсутствующими, а систему в целом — не обязательно квазиконсервативной.

Задача о синхронизации вибровозбудителей в такой системе рассмотрена в гл. 3, а задача о синхронизации маятниковых часов (в несколько менее общей постановке) — в гл. 5. Здесь мы, следуя работе А. И. Лурье [175], получим так называемое *основное вариационное соотношение*, относящееся к общему случаю, и дадим пример его использования для решения задачи о синхронизации системы с почти равномерными вращениями. В упомянутой же гл. 3 (п. 6 § 8) это соотношение использовано для решения соответствующей конкретной задачи в качестве иллюстрации метода А. И. Лурье, основные идеи которого были изложены в § 5 гл. 11.

Пусть u — вектор обобщенных координат несущей системы тел, а φ_s — обобщенная координата, характеризующая положение тела B_s относительно тела несущей системы.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы записывается в виде суммы трех слагаемых

$$T = \sum_{s=1}^k T_s + \mu \tilde{T}^{(1)} + \mu \Delta \tilde{T}^*; \quad T_s = \frac{1}{2} a_s \dot{\varphi}_s^2, \quad (6.2)$$

$$T^{(1)} = \mu \tilde{T}^{(1)} = \frac{1}{2} \dot{u}' \cdot M \cdot \dot{u}, \quad \Delta T^* = \mu \Delta \tilde{T}^* = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \dot{\varphi}_s b'_s(\varphi_s) \cdot \dot{u},$$

Первое из которых — кинетическая энергия несомых тел $B_1, \dots, B_k$ при неподвижных несущих телах, второе — кинетическая энергия несущих тел при остановленных на них несомых телах $B_1, \dots, B_k$, а третье — добавочная кинетическая энергия, связанная с подвижностью несущего тела. Через M обозначена постоянная симметричная матрица инерционных коэффициентов несущего тела, через a_s — инерционные коэффициенты тел B_s , через $b_s(\varphi_s)$ — вектор, представляющий собой периодическую функцию от φ_s . Штрих, как обычно, указывает на транспонирование; наличие малого параметра μ перед слагаемыми $\tilde{T}^{(1)}$ и ΔT^* в равенстве (6.2), как и в § 5, соответствует предположению о слабой связанности несомых тел $B_1, \dots, B_k$ через посредство тел несущей системы; малыми считаются и колебания несущих тел.

Потенциальная энергия системы и элементарная работа неконсервативных сил записываются соответственно в виде

$$\Pi = \sum_{s=1}^h \Pi_s(\varphi_s) + \mu \tilde{\Pi}^{(1)}(u) \quad \left(\Pi^{(1)}(u) = \mu \tilde{\Pi}^{(1)}(u) = \frac{1}{2} u' \cdot C \cdot u \right); \quad (6.3)$$

$$\delta' A = -\delta u' \cdot R \dot{u} + \sum_{s=1}^h (Q_s^{(0)} + \mu \tilde{Q}_s^{(1)}) \delta \varphi_s,$$

где C и R — постоянные симметричные матрицы коэффициентов жесткости и сопротивления, так что $\dot{u}' \cdot R \cdot \dot{u}$ — удвоенная диссипативная функция несущего тела; $Q_s^{(0)}$ и $\mu \tilde{Q}_s^{(1)} = Q_s^{(1)}$ — соответственно конечная и малая части неконсервативных обобщенных сил, соответствующих координатам объектов φ_s .

Функция Лагранжа системы, таким образом, записывается в виде

$$L = \sum_{s=1}^h L_s + \mu (\tilde{L}^{(1)} + \Delta \tilde{L}^*), \quad L_s = \frac{1}{2} a_s \dot{\varphi}_s^2 - \Pi_s(\varphi_s), \quad (6.4)$$

$$L^{(1)} = \mu \tilde{L}^{(1)} = \frac{1}{2} (\dot{u}' \cdot M \cdot \dot{u} + u' C u), \quad \Delta \tilde{L}^* = \mu \Delta \tilde{L}^* = \sum_{s=1}^h \dot{\varphi}_s b'_s(\varphi_s) \cdot \dot{u},$$

где L_s — «собственные» функции Лагранжа тел B_s . Соответствующие обобщенные импульсы $p_s = \partial L / \partial \dot{\varphi}_s$ и $z = \partial L / \partial \dot{u}$ будут

$$p_s = a_s \dot{\varphi}_s + b'_s \cdot \dot{u}, \quad z = M \cdot \dot{u} + \sum_{s=1}^h b_s \dot{\varphi}_s. \quad (6.5)$$

С точностью до величин более высокого порядка малости чем μ выражение (6.4) для функции Лагранжа системы может быть представлено в форме

$$L = \sum_{s=1}^h p_s \dot{\varphi}_s - H_0 + \mu (\tilde{L}^{(1)} + \Delta \tilde{L}^*), \quad (6.6)$$

где

$$H_0 = \sum_{s=1}^h \left[\frac{1}{2} \frac{p_s^2}{a_s} + \Pi_s(\varphi_s) \right] \quad (6.7)$$

— функция Гамильтона несомых тел (немалое слагаемое в выражении для функции Гамильтона системы). Среднее значение функции Лагранжа за период $T = 2\pi/\omega$, т. е. среднее за период

значение действия по Гамильтону, таким образом, будет

$$\Lambda = \langle L \rangle = \left\langle \sum_{s=1}^k (p_s \dot{\varphi}_s - H_0) + \mu (\tilde{\Lambda}^{(1)} + \Delta \tilde{\Lambda}^*) \right\rangle, \quad (6.8)$$

где

$$\mu \tilde{\Lambda}^{(1)} = \Lambda^{(1)} = \langle L^{(1)} \rangle \quad \text{и} \quad \mu \Delta \tilde{\Lambda}^* = \Delta \Lambda^* = \langle \Delta L^* \rangle. \quad (6.9)$$

В соответствии с принципом Гамильтона должно быть

$$\delta \Lambda + \langle \delta' A \rangle = 0. \quad (6.10)$$

Отсюда, используя формулы (6.3), (6.8) и (6.9), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^k [\delta (p_s \dot{\varphi}_s - H_0) + Q_s^{(0)} \delta \varphi_s] + \delta (\Lambda^{(1)} + \Delta \Lambda^*) + \\ & + \left\langle \sum_{s=1}^k Q_s^{(1)} \delta \varphi_s - \delta \dot{u}' \cdot R \cdot \dot{u} \right\rangle - \frac{1}{T} \left(\sum_{s=1}^k p_s \delta \varphi_s + z' \cdot \delta u \right) \Big|_0^T = 0 \\ & (Q_s^{(1)} = \mu \tilde{Q}_s^{(1)}) \end{aligned} \quad (6.11)$$

и, после известного преобразования с использованием интегрирования по частям, приходим к основному вариационному соотношению

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{s=1}^k \left(\dot{\varphi}_s - \frac{p_s}{a_s} \right) \delta p_s - \left(\dot{p}_s + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_s} - Q_s^{(0)} \right) \delta \varphi_s \right\rangle + \\ & + \delta (\Lambda^{(1)} + \Delta \Lambda^*) + \left\langle \sum_{s=1}^k Q_s^{(1)} \delta \varphi_s - \delta u' \cdot R \cdot \dot{u} \right\rangle = \frac{1}{T} z' \cdot \delta u \Big|_0^T. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Приведем также уравнения движения несомых тел и несущей системы, соответствующие выражению (6.4) и сделанным выше предположениям

$$a_s \ddot{\varphi}_s + \frac{\partial \Pi_s}{\partial \varphi_s} + \mu \mathcal{E}_{\varphi_s} (\Delta \tilde{L}^*) = Q_s^{(0)} + \mu \tilde{Q}_s^{(1)} \quad (s = 1, \dots, k), \quad (6.13)$$

$$\mathcal{E}_u (L^{(1)} + \Delta L^*) + R \cdot \dot{u} = 0. \quad (6.14)$$

Здесь $\mathcal{E}_q = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial q}$ — эйлеров оператор, соответствующий обобщенной координате q , так что

$$\mathcal{E}_{\varphi_s} (L^*) = b_s' \ddot{u}, \quad \mathcal{E}_u (L^{(1)} + \Delta L^*) = M \ddot{u} + Cu + \sum_{s=1}^k b_s \dot{\varphi}_s. \quad (6.15)$$

Применим в качестве примера основное вариационное соотношение к решению задачи о синхронизации несвободной орби-

тальной системы с почти равномерными вращательными движениями, т. е., как и в § 4, предположим, что изменение обобщенных координат φ_s в первом приближении определяется равенствами (4.5), а соответствующий закон $2\pi/\omega$ -периодических установившихся колебаний — равенствами (4.5')

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \varphi_s^0 = \sigma_s(n_s\omega t + \alpha_s) \quad (s = 1, \dots, k), \\ u &= u^0(\omega t, \alpha_1, \dots, \alpha_k).\end{aligned}\quad (6.16)$$

Сопоставляя уравнения (6.13) и (6.14) с (4.2), (4.3) и учитывая, что согласно (6.4) $\mathcal{E}_u(L) = \mathcal{E}_u(L^{(1)} + \Delta L^*)$, будем иметь в рассматриваемом случае

$$a_s = I_s, \quad \Pi_s(\varphi_s) = 0, \quad Q_{\varphi_s}^{(0)} = -k_s(\dot{\varphi}_s - \sigma_s n_s \omega), \quad Q_u^{(0)} = -R \cdot \dot{u}.\quad (6.17)$$

Будем рассматривать (6.16) как форму приближенного решения задачи о синхронизации, воспользовавшись вариационным соотношением (6.12) для определения постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Принимая во внимание, что согласно (6.5) $p_s^0 = I_s \sigma_s n_s \omega$, т. е. $\delta p_s^0 = 0$, а также учитывая $T = 2\pi/\omega$ -периодичность функций $u^0(t)$, $z(t)$ и произвольность вариаций $\delta\alpha_s$, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Lambda^{(1)} + \Delta\Lambda^*)}{\partial\alpha_s} + \sigma_s \langle (Q_{\varphi_s}^{(1)}) \rangle - \left\langle \frac{\partial u_0'}{\partial\alpha_s} \cdot R \cdot \dot{u}_0 \right\rangle &= 0 \\ (s = 1, \dots, k).\end{aligned}\quad (6.18)$$

Поскольку согласно (4.7) и (6.4)

$$\frac{\partial\Lambda_0}{\partial\alpha_s} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_s} - \sum_{s=0}^k \frac{\partial\Lambda_s}{\partial\alpha_s} = \frac{\partial(\Lambda^{(1)} + \Delta\Lambda^*)}{\partial\alpha_s}\quad (6.19)$$

и в нашем случае $Q^{(0)} = -R \cdot \dot{u}$, то уравнения (6.18) в точности совпадают с уравнениями (4.6), полученными в § 4 методом малого параметра.

Из вариационного соотношения легко получаются также уравнения, описывающие медленный процесс установления синхронного режима и условия его устойчивости. Для этого положим в равенствах (6.16) величины α_s не постоянными, а медленно меняющимися функциями времени $\alpha_s = \alpha_s(t)$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_s^0 &= \sigma_s(n_s\omega + \dot{\alpha}_s), \quad Q_{\varphi_s}^{(0)} = -k_s(\dot{\varphi}_s^0 - \sigma_s n_s \omega) = -\sigma_s k_s \dot{\alpha}_s, \\ p_s^0 &= I_s \sigma_s(n_s\omega + \dot{\alpha}_s), \quad \dot{p}_s^0 = \sigma_s I_s \ddot{\alpha}_s.\end{aligned}\quad (6.20)$$

Подставим эти выражения в (6.12) и пренебрежем, как это принято в принципе усреднения, изменением величин α_s , $\dot{\alpha}_s$ и $\ddot{\alpha}_s$ в течение периода. Кроме того считаем, что вектор u определяется по текущим значениям α_s прежними выражениями (6.16); такое предположение соответствует допущению о медленности изменения α_s и быстрой скорости процесса установления колебаний по переменным u (см. также п. 6 § 8 гл. 3). Тогда придем к следующим уравнениям:

$$I_s \ddot{\alpha}_s + k_s \dot{\alpha}_s = \frac{\partial (\Lambda^{(1)} + \Delta \Lambda^*)}{\partial \alpha_s} + \sigma_s \langle (Q_{\Phi_s}^{(1)}) \rangle - \left\langle \frac{\partial u_0'}{\partial \alpha_s} \cdot R \cdot \dot{u}_0 \right\rangle$$

$$(s = 1, \dots, k). \quad (6.21)$$

В случае, когда существует потенциал избыточных усредненных неконсервативных сил, т. е. такая функция $B(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, что (см. § 4)

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha_s} = \sigma_s \langle (Q_{\Phi_s}^{(1)}) \rangle - \left\langle \frac{\partial u_0'}{\partial \alpha_s} \cdot R \cdot \dot{u}_0 \right\rangle, \quad (6.22)$$

можно ввести функцию

$$D = -(\Lambda^{(1)} + \Delta \Lambda^* + B) \quad (6.23)$$

и представить уравнение (6.21) в форме

$$I_s \ddot{\alpha}_s + k_s \dot{\alpha}_s = -\frac{\partial D}{\partial \alpha_s} \quad (s = 1, \dots, k). \quad (6.24)$$

Из хорошо известных теорем об устойчивости [183, 294] следует, что положения устойчивого равновесия этой системы, соответствующие синхронным устойчивым движениям (6.16), отвечают точкам минимума функции D , которая играет здесь роль потенциальной энергии. Но эта функция в рассматриваемом случае совпадает со введенной в § 4 потенциальной функцией. Полностью совпадают поэтому и результаты исследования, полученные обоими методами.

Если функции B , удовлетворяющей равенствам (6.22), не существует, но члены $I_s \ddot{\alpha}_s$ в уравнениях (6.21) могут быть отброшены вследствие их малости*), то получающиеся из этих уравнений стационарные значения постоянных α_s и соответствующие условия устойчивости также в точности совпадут с определяемыми согласно уравнениям (4.6) и (2.12). Иными словами, и в этом случае имеет место совпадение соответствующих результатов.

*) Заметим, что именно в таком предположении уравнения типа (6.21) получены в работе [175], соответствующий раздел которой изложен нами также и с некоторыми другими видоизменениями.

§ 7. О тенденции к синхронизации в рассмотренных динамических системах

Полученные в настоящей главе результаты приводят к весьма существенному выводу о том, что тенденция к синхронизации (см. § 1 гл. 1) свойственна весьма широкому классу динамических систем вне зависимости от их конкретной природы. Действительно, как в случае объектов с почти равномерными вращательными движениями, так и для существенно неизохронных квазиконсервативных объектов и для несомых тел в орбитальных системах, уравнения для определения фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ в синхронных движениях (*основные уравнения*) записываются в форме

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_s} + A_s = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (7.1)$$

где $\Lambda = \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — усредненная функция Лагранжа системы или простая линейная комбинация (со знаками плюс или минус) усредненных функций Лагранжа отдельных частей системы, а функции $A_s = A_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — усредненные величины неконсервативных обобщенных сил. При этом Λ непременно является 2π -периодической функцией каждой из фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Но тогда, согласно изложенному в § 9 гл. 10, устойчивые (в малом) синхронные движения существуют при весьма общих предположениях, если только достаточно малы усредненные неконсервативные обобщенные силы A_s . Последнее условие выполняется, например, для объектов типа рассмотренных в §§ 4 и 5 при условии достаточной близости их парциальных частот (угловых скоростей) ω_s .

ЛИТЕРАТУРА

1. Авотиня К., Томашунс И. О синхронизации в подшипниках качения.— Труды Латв. с.-х. акад. Елгава, 1977, вып. 109.
2. Акаловский И. В. Исследование взаимной синхронизации двух автогенераторов методом обобщенных частотно-фазовых диаграмм.— Радиотехника, 1950, т. 17, № 3.
3. Аксельрод З. М. Часовые механизмы: Теория, расчет и проектирование.— М.;—Л.: Машгиз, 1947.
4. Аксельрод З. М. Электромеханические часы.— М.;—Л.: Машгиз, 1952.
5. Алабужев П. М., Зуев А. К., Кирнарский М. Ш. Самосинхронизация вращательной пары.— В кн.: Труды по теории и применению явления самосинхронизации в машинах и устройствах.— Вильнюс: Минтис, 1966.
6. Андронов А. А., Витт А. А. К математической теории захватывания.— Журнал прикладной физики, 1930, т. 7, вып. 4.
7. Андронов А. А., Витт А. А. Об устойчивости по Ляпунову.— Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1933, т. 3, вып. 5.
8. Андронов А. А., Витт А. А. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы.— Журнал технической физики, 1934, т. 4, вып. 1.
9. Андронов А. А. Собрание трудов.— М.: Изд-во АН СССР, 1956.
10. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
11. Аркадьев В. Об электромагнитной гипотезе передачи мысленного внушения.— Журнал прикладной физики, 1924, т. 1, вып. 1—4.
12. Астрономический ежегодник СССР на 1979 год. Пятьдесят восьмой том.— М.: Наука, 1976.
13. Бабский Е. В., Ульяновский Л. С. Электрическая стимуляция сердца.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.
14. Барзуков О. П., Денисов Г. А., Тимофеев Н. Г. Динамика вибрационного подъемника с эллиптическими траекториями колебаний.— В кн.: Труды ин-та «Механобр», Исследование и расчеты обогатительного оборудования, 1974.
15. Барзуков О. П. Кратная синхронизация в системе слабосвязанных объектов с одной степенью свободы.— ПММ, 1972, т. 36, № 2.
16. Барзуков О. П. Двукратная синхронизация механических вибраторов, связанных с линейной колебательной системой.— Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 6.
17. Барзуков О. П., Вайсберг Л. А. О стабильности самосинхронного вращения двух вибровозбудителей в устройствах с пространственной динамической схемой.— В кн.: Вибрационная техника.— М.: МДНТП им. Ф. Э. Дзержинского, 1977.
18. Баутин Н. Н. К теории синхронизации.— Журнал технической физики, 1939, т. 9, вып. 6.

19. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости.— Л.: Гостехиздат, 1949.
 20. Баутин Н. Н. Динамические модели свободных часовых ходов.— В кн.: Памяти А. А. Андропова.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.
 21. Беленов Э. М., Ораевский А. Н. Молекулярный генератор с двумя последовательными резонаторами.— Радиотехника и электроника, 1963, т. 8, № 1.
 22. Белецкий В. В., Шляхтин А. Н. Экстремальные свойства резонансных движений.— ДАН СССР, 1976, т. 231, № 4.
 23. Белецкий В. В. Очерки о движении небесных тел.— 2-е изд.— М.: Наука, 1977.
 24. Белецкий В. В. Экстремальные свойства резонансных движений.— В кн.: Тезисы докладов 3-й Всесоюзной Четаевской конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением.— Иркутск: АН СССР, Сиб. отд., 1977.
 25. Белецкий В. В., Касаткин Г. В. Об экстремальных свойствах резонансных движений.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 1.
 26. Беллюстин С. В. К теории двух слабо связанных контуров.— Уч. зап. Горьковского Гос. ун-та, 1939, вып. 12.
 27. Бернштейн И. Л. Полоса захвата частоты лазерного резонатора.— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 1.
 28. Биологические часы.— М.: Мир, 1964.
 29. Бионика.— М.: Наука, 1965.
 30. Биденко К. Б., Граммель Р. Техническая динамика. Т. II: Перев. с нем.— М.;— Л.: Гостехиздат, 1952.
 31. Блехман И. И. Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин.— Инженерный сборник, 1953, т. 16.
 32. Блехман И. И. Вращение неуравновешенного ротора, обусловленное гармоническими колебаниями его оси.— Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 8.
 33. Блехман И. И. К вопросу об устойчивости периодических решений квазилинейных неавтономных систем со многими степенями свободы.— ДАН СССР, 1955, т. 104, № 6.
 34. Блехман И. И. Об устойчивости периодических решений квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы.— ДАН СССР, 1957, т. 112, № 2.
 35. Блехман И. И. Авт. свид. 112448. Иперциопный грохот./Механобр; заявл. 13.05.57; опубл. в Б. И., 1958, № 4.
 36. Блехман И. И. О самосинхронизации механических вибраторов.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 6.
 37. Блехман И. И. Авт. свид. 125117. Шаровая вибромельница./Механобр; заявл. 11.07.58; опубл. в Б. И., 1959, № 24.
 38. Блехман И. И. Вибрационные машины с механическими возбудителями колебаний.— В кн.: Применение вибротехники в горном деле. М.: Госгортехиздат, 1960.
 39. Блехман И. И. Динамика привода вибрационных машин со многими синхронными механическими вибраторами.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
 40. Блехман И. Н., Лавров Б. П. Об одном интегральном признаке устойчивости движения.— ПММ, 1960, т. 24, № 5.
 41. Блехман И. И. Обоснование интегрального признака устойчивости движения в задачах о самосинхронизации вибраторов.— ПММ, 1960, т. 24, № 6.
 42. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук.— Л.: Ленинградский политехн. ин-т им. М. И. Калинина, 1962.
 43. Блехман И. И. Интегральный критерий устойчивости периодических движений некоторых нелинейных систем и его приложения. Труды
- 22 И. И. Блехман

- Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. 2.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
44. Блехман И. И., Джапелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение.— М.: Наука, 1964.
 45. Блехман И. И., Лавров Б. П. Авт. свид. 163524. Вибрационный конвейер./Механобр: заявл. 24.07.63; опубли. в Б. И., 1964, № 12.
 46. Блехман И. И. Проблема синхронизации динамических систем.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
 47. Блехман И. И. Проблема синхронизации колебательных и вращательных движений.— В кн.: Труды по теории и применению явления синхронизации в машинах и устройствах.— Вильнюс: Минтис, 1966.
 48. Блехман И. И., Денисов Г. А., Лавров Б. П. Вибрационный конвейер конструкции «Механобра» с самосинхронизирующимися механическими вибраторами.— Обогащение руд, 1966, № 5.
 49. Блехман И. И., Рудин А. Д. Стабильность рабочего режима вибрационных машин.— В кн.: Вибрационная техника. Материалы научно-технической конференции.— М.: НИИИНФСТРОЙДОРКОМУНАШ, 1966.
 50. Блехман И. И. Математические вопросы теории синхронизации динамических систем.— В кн.: Международный конгресс математиков. Тезисы кратких научных сообщений, секция 12, М., 1966.
 51. Блехман И. И. К динамике групповых фундаментов под псуравпо-вещенные машины.— Инженерный журнал. Механика твердого тела, 1967, № 1.
 52. Блехман И. И., Нагаев Р. Ф. Оптимальная стабилизация синхронных движений механических вибраторов.— В кн.: Тезисы докладов и сообщений на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике.— Горький, 1967.
 53. Блехман И. И. Синтез машин и устройств с самосинхронизирующимися вибраторами.— Обогащение руд, 1968, № 4.
 54. Блехман И. И. Метод малого параметра.— В кн.: Механика в СССР, за 50 лет, т. I.— М.: Наука, 1968.
 55. Блехман И. И., Лавров Б. П. Авт. свид. 243923. Механический вибрационный стенд/Механобр; заявл. 19.09.61; опубли. в Б. И., 1969, № 17.
 56. Блехман И. И., Марченко Ю. И. Влияние реологических свойств рабочей среды на самосинхронизацию механических вибраторов.— Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 5.
 57. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем.— М.: Наука, 1971.
 58. Блехман И. И., Фролов К. В. Синхронизация параметрически связанных вибраторов.— В кн.: Тезисы докладов конференции по колебаниям механич. систем.— Киев: Наукова думка, 1971.
 59. Блехман И. И. Авт. свид. 388974. Инерционный вибратор./Механобр; заявл. 22.02.71; опубли. в Б. И., 1973, № 29.
 60. Блехман И. И., Марченко Ю. И. Синхронизация квазилинейных осцилляторов, связанных посредством сложной колебательной системы.— Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 6.
 61. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов.— Киев: Наукова думка, 1976.
 62. Блехман И. И. Метод прямого разделения движений в задачах о действии вибрации на нелинейные механические системы.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 6.
 63. Блехман И. И. Устойчивость орбитальных систем.— В кн.: Тезисы докладов 3-й Всесоюзной Четаевской конф. по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением.— Иркутск: Изд-во АН СССР, Сиб. отд., 1977.

64. Блехман И. И., Луговая И. Н. Явление самосинхронизации и вопросы проектирования групповых фундаментов под неуравновешенные машины.— В кн.: Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений (Материалы IV Всесоюзной конференции).— Ташкент: ФАН Узбекской ССР, 1977.
65. Блехман И. И. Развитие концепции прямого разделения движений в нелинейной механике.— В кн.: Современные проблемы теоретической и прикладной механики.— Киев: Наукова думка, 1978.
66. Блехман И. И. Синхронизация и захватывание.— В кн.: Вибрации в технике (справочник). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем.— М.: Машиностроение, 1979.
67. Блехман И. И. Действие вибрации на нелинейные механические системы (механика медленных движений, виброперемещение, виброреология).— В кн.: Вибрации в технике (справочник). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем.— М.: Машиностроение, 1979.
68. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
69. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике.— Сборник трудов ин-та строительной механики АН СССР, 1950, № 14.
70. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1958.
71. Боголюбов Н. Н. Избранные труды в 3-х томах. Т. I.— Киев: Наукова думка, 1969.
72. Бочаров В. В., Зубарев И. Г. Захват частот твердотельного лазера с неоднородно уширенной спектральной линией усиления в режиме свободной генерации внешней силой.— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, № 7.
73. Бремзен А. С., Файнберг И. С. Анализ работы двух связанных релаксационных генераторов.— ЖТФ, 1941, т. 11, вып. 10.
74. Булгаков Б. В. Колебания.— М.: Гостехиздат, 1954.
75. Булгаков Н. Г. Колебания квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы и неаналитической характеристикой нелинейности.— ПММ, 1965, т. 19, вып. 3.
76. Бутенин Н. В. К теории принудительной синхронизации.— В кн.: Памяти А. А. Андропова.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.
77. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.
78. Быховский И. И. Прогресс вибрационной техники и задачи научных исследований.— В кн.: Вибрационная техника. Материалы научно-технической конференции.— М.: НИИИНФСТРОЙДОРКОММУНАШ, 1966.
79. Быховский И. И. Основы теории вибрационной техники.— М.: Машиностроение, 1969.
80. Быховский И. И. Вибрационное поддержание вращений двойного маятника.— В кн.: Вибрационные машины производственного назначения. Ч. I.— М.: МДНТП им. Ф. Э. Дзержинского, 1971.
81. Валеев К. Г., Ганиев Р. Ф. Исследование колебаний нелинейных систем.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
82. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний.— М.: Связьиздат, 1935.
83. Васильев Л. Л. Таинственные явления человеческой психики.— М.: Госполитиздат, 1963.
84. Ваша работоспособность сегодня/Агаджанян Н. А., Горшkov М. М., Котельник Л. А., Шевченко Ю. В.— М.: Советская Россия, 1978.
85. Векслер А. М., Костенко Г. А., Литинская Л. Л., Эйдус Л. Х.— В кн.: Тезисы докладов IV Междунаро. биофизич. конгресса. М., 1972.

86. Вентцель Е. С. Теория вероятности.— М.: Физматгиз, 1958.
87. Ветюков М. М., Ходжаев К. Ш. Уравнения медленных нестационарных режимов синхронного генератора.— Электричество, 1978, № 11.
88. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. Пер. с англ.— М.: ИИ, 1961.
89. Винер Н. Новые главы кибернетики.— М.: Советское радио, 1963.
90. Винер Н. Динамические системы в физике и биологии.— Вестник АН СССР, 1964, № 7.
91. Влияние технологической нагрузки на самосинхронизацию вибровозбудителей/Барзуков О. П., Вайсберг Л. А., Балабатько Л. К., Учитель А. Д.— Обогащение руд, 1978, № 2.
92. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. Ч. 2/Зейгер С. Г., Климонтович Ю. Л., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г., Фрадкин Э. Е.— М.: Наука, 1974.
93. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Методы расчета стационарных резонансных колебательных и вращательных движений некоторых нелинейных систем.— ЖВМ и МФ, 1968, т. 8, № 2.
94. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М.: МГУ, 1971.
95. Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е. Динамика частиц при воздействии вибраций.— Киев: Наукова думка, 1975.
96. Ганиев Р. Ф., Фазуллин Ф. Ф. О нелинейных синхронных колебаниях и устойчивости решетки лопаток турбомашин.— Труды Уфимск. авиац. ин-та, 1975, вып. 98.
97. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.— М.: Гостехиздат, 1950.
98. Гапонов В. И. Два связанных генератора с мягкими самовозбуждениями.— Журн. техн. физики. 1936, т. 6, вып. 5.
99. Гецявичус Ю. Ю., Рагульскис К. М. Самосинхронизация пневмовибраторов вибростенда трех направлений.— В кн.: Труды по теории и применению явления синхронизации в машинах и устройствах.— Вильнюс: Миптис, 1966.
- 99а. Годованник Б. В. Синхронизация вибраторов при продольно-вращательных колебаниях погружаемой в грунт оболочки.— Машиноведение, 1973, № 5.
100. Голдрайх П. Объяснение частой встречаемости соизмеримых средних движений в солнечной системе.— В кн.: Приливы и резонансы в солнечной системе.— М.: Мир, 1975.
101. Горев А. А. Избранные труды по вопросам устойчивости электрических систем.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1960.
102. Горелик Г. С. Жизнь и труды А. А. Андропова.— В кн.: Памяти А. А. Андропова.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.
103. Горожанкин Б. Н. О взаимном захватывании на расстоянии.— Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, т. 11, № 2.
104. Горшков С. Н., Лавров Б. П. Авт. свид. 155391. Вибрационный грохот./Механобр; Заявл. 21.05.62; Оpubл. в Б. И., 1963, № 12.
105. Горшков С. Н., Лавров Б. П., Тимофеев Н. Г. Авт. свид. 212046. Вибрационный грохот./Механобр; заявл. 19.08.64. Б. И., 1968, № 8.
106. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике.— М.: Наука, 1978.
107. Гудвин Б. Временная организация клетки.— М.: Мир, 1966.
108. Гузев В. В. Синхронизация генераторов гармонических сил, взаимодействующих посредством протяженного несущего тела балочного типа. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.— Л.: Ленингр. политехн. ин-т им. М. И. Калинина, 1977.
109. Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И. О синхронизации динамических систем.— ПММ, 1974, т. 38, № 5.

110. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. Перевод, редакция и примеч. проф. К. К. Баумгарта.— М.: Изд-во АН СССР, 1951.
111. Демин В. Г. Судьба Солнечной системы.— М.: Наука, 1969.
112. Демьянченко А. Г. Синхронизация генераторов гармонических колебаний.— М.: Энергия, 1976.
113. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания: Перев. с англ.— М.: Физматгиз, 1960.
114. Денисов Г. А., Лавров Б. П. Авт. свид. 152408. Вертикально-винтовой вибрационный конвейер./Механобр; заявл. 11.10.61; опубл. в Б. И., 1962, № 24.
115. Денисов Г. А., Лавров Б. П., Нагаев Р. Ф. Динамика многовibrаторного виброподъемника с синхронизатором.— В кн.: Тезисы докл. Всесоюзн. конф. по колебаниям механических систем.— Киев: 1968.
116. Денисов Г. А., Лавров Б. П. Применение многовibrаторного привода для винтового виброподъемника.— Обогащение руд, 1968, № 2.
117. Денисов Г. А., Лавров Б. П., Нагаев Р. Ф. Авт. свид. 233523. Привод для горизонтального виброконвейера./Механобр; заявл. 2.09.67; опубл. в Б. И., 1969, № 2.
118. Денисов Г. А. О стабильности рабочего режима вертикально-винтового вибрационного конвейера с самосинхронизирующимися вибраторами.— Машиноведение, 1969, № 1.
119. Детинко Ф. М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
120. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.
121. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.— М.: Наука, 1968.
122. Дубровин Б. Н., Блехман И. И. О критической щели инерционных дробилок.— Обогащение руд, 1960, № 6.
123. Духин С. С. Теория дрейфа аэрозольной частицы в стоячей звуковой волне.— Коллоидный журнал, 1960, т. 22, № 1.
124. Есафов Н. И. Экспериментальное исследование взаимной синхронизации 2-х связанных томсоповских генераторов.— ЖТФ, 1947, т. 17, вып. 7.
125. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания.— М.: Наука, 1974.
126. Жданов П. С. Устойчивость электрических систем.— М.: Гостехэнергоиздат, 1948.
127. Журавлев В. Ф., Лапин А. А. Явление самосинхронизации в скоростных гироскопических опорах.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 4.
128. Занадворов П. Н. Анализ процесса синхронизации генераторов разрывных колебаний.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1967, № 22, вып. 4.
129. Занадворов П. Н. Метод точечных отображений в задачах синхронизации.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1972, № 10, вып. 2.
130. Зарецкий Л. Б. О самосинхронизации центробежных вибровозбудителей виброударного механизма.— Машиноведение, 1967, № 1.
131. Зарецкий Л. Б. Синхронизация центробежных вибровозбудителей в системах с разрывными характеристиками. Инж. журн. МТТ, 1968, № 1.
132. Зуев А. К., Иванов Е. Н., Кирнарский М. Ш. Гироскопический генератор полигармонических колебаний.— В кн.: Машины и механизмы виброударного действия. Труды Новосибирского электротехнич. ин-та, Новосибирск, 1959.
133. Иорис Ю. И. Односторонний увод и вращение стрелок измерительных приборов, возникающий при вибрации.— Приборостроение, 1956, № 4.

134. Кажинский Б. Б. Биологическая радиосвязь.— Киев: 1962.
135. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— ЖЭТФ, 1951, т. 25.
136. Картвелишвили Н. А. Влияние взаимодействия гидравлических механических и электрических процессов на устойчивость работы электростанций.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 2.
137. Картвелишвили Н. А., Галактионов Ю. И. Идеализация сложных динамических систем.— М.: Наука, 1976.
138. Кимбарк Э. Синхронные машины и устойчивость электрических систем.— М.; Л.: Госэнергиздат, 1960.
139. Кириченко А. П., Рундквист К. А. Авт. свид. 88805. Инерционная конусная дробилка./Механобр; заявл. 5.09.49; опубл. в Б. И., 1951, № 1.
140. Кирнарский М. Ш. Синхронизация гироскопических генераторов «динами».— В кн.: Машины и механизмы виброударного действия. Труды Новосибирского электротехнич. ин-та, Новосибирск, 1969.
141. Китайгородский А. И. Порядок и беспорядок в мире атомов.— М.: Наука, 1977.
142. Клибанова И. М. Взаимная синхронизация генераторов с целочисленным отношением частот.— Изв. вузов, Радиофизика, 1968, т. 11, № 11.
143. Клибанова И. М., Малахов А. Н., Мальцев А. А. Флуктуации в многочастотных генераторах (обзор). Изв. вузов, Радиофизика, 1971, т. 14, № 2.
144. Климонтович Ю. Л. Квантовые генераторы света и нелинейная оптика.— М.: Просвещение, 1966.
145. Климонтович Ю. Л., Курятов В. Н., Ланда П. С. О синхронизации волн в газовом лазере с кольцевым резонатором.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 1 (7).
146. Кобринский А. Е. Механизмы с упругими связями.— М.: Наука, 1964.
147. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Перев. с англ.— М.: ИЛ, 1958.
148. Колебания сложных механических систем/Рагульскис К. М., Кубайтис З. И., Кумпикас А. Л., Гецявичус Ю. Ю., Бакшис А. К.— Вильнюс: Минтис, 1969.
149. Колебательные процессы в биологических и химических системах.— М.: Наука, 1967.
150. Колебательные процессы в биологических и химических системах. Т. 2.— Пущино-на-Оке; ин-т биофизики АН СССР, 1971.
151. Колковский М. З., Первозванский А. А. О линеаризации по функции распределения в задачах теории нелинейных колебаний.— Машиностроение, 1962, № 2.
152. Колковский М. З. О применении метода малого параметра для определения разрывных периодических решений.— В кн.: Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. 2, Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
153. Колковский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем.— М.: Наука, 1966.
154. Конти Р., Граффи Д., Сансоне Дж. Вклад итальянских математиков в теорию нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и в нелинейную механику в течение 1951—61 годов.— В кн.: Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. I, Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
155. Копнин Ю. М. Периодические колебания нелинейных неавтономных систем со многими степенями свободы.— Инженерный журнал, МЭТ, 1965, т. 5, № 2.

156. Костин И. К., Романовский Ю. М. Флуктуации в системах многих связанных автогенераторов.— Вестник МГУ, 1972, № 6.
157. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. I. О колебаниях синхронных машин. II. Об устойчивости параллельной работы n синхронных машин.— Харьков; Киев: ОНТУ-ЕНЕРГОВИДАВ, 1932.
158. Кумпикас А. Л., Рагульскис К. М. Самосинхронизация и динамическое гашение колебаний фундаментов машин.— В кн.: Труды по теории и применению явления синхронизации в машинах и устройствах.— Вильнюс: Минтис, 1966.
159. Кумпикас А. Л., Рагульскис К. М. Об областях захвата синхронных вращений маятника с вибрирующей точкой подвеса. Вибротехника 2 (2).— Вильнюс: Минтис, 1968.
160. Куприянович Л. И. Биологические ритмы и сон.— М.: Наука, 1976.
161. Курятов В. Н., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г. Частотные характеристики кольцевого лазера на колеблющейся подставке.— Изв. вузов, Радиофизика, 1968, т. II.
162. Лавров Б. П. Авторское свидетельство № 135401. Вибрационный конвейер./Механобр; заявл. 20.06.60; опубл. в Б. И., 1961, № 2.
163. Лавров Б. П. Пространственная задача о синхронизации механических вибраторов.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 5.
164. Лавров Б. П. Использование явления самосинхронизации при создании некоторых новых типов вибрационных транспортных машин.— Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технич. наук. Ленинградский горный институт им. Г. В. Плеханова.— Л., 1966.
165. Лавров Б. П. Новая формулировка интегрального критерия устойчивости синхронных движений механических вибраторов и ее приложения.— В кн.: Вибрационная техника (материалы научно-технической конференции).— М.: НИИИНФСТРОЙДОРОЖКОММУНАШ, 1966.
166. Лавров Б. П. Вибрационные машины с самосинхронизирующимися вибраторами (конструктивные схемы и специфические особенности расчета).— В кн.: Труды по теории и приложению явления синхронизации в машинах и устройствах.— Вильнюс: Минтис, 1966.
167. Лавров Б. П., Нагаев Р. Ф., Тимофеев Н. Г. Динамика разрезного виброконвейера с самосинхронизирующимися вибраторами.— Инженерный журнал. МТТ, 1970, № 6.
168. Лавров Б. П., Гольдин Л. А. Исследование синхронизации механических вибраторов в основных схемах двухмассных грохотов.— Обогащение руд, 1977, № 3.
169. Ланда П. С., Ларионцев Е. Г. Режимы биений и синхронизации встречных волн во вращающемся кольцевом газовом лазере.— Радиотехника и электроника, 1970, т. 15, № 6.
170. Ланда П. С., Выгодин В. А. О самосинхронизации мод в лазерах.— Квантовая электроника, 1977, т. 4, № 4.
171. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы.— М.: Наука, 1980.
172. Лесин А. Д. Экспериментальное исследование самосинхронизации механических вибраторов в вибрационных мельницах.— Труды по теории и применению явления синхронизации в машинах и устройствах.— Вильнюс: Минтис, 1966.
173. Луговая И. Н. К вопросу о гашении колебаний групповых фундаментов под неуравновешенные машины.— В кн.: Сборник трудов Ленингр. инженерно-строит. ин-та.— Л.: 1974, № 89.
174. Лурье А. И. Аналитическая механика.— М.: Физматгиз, 1961.
175. Лурье А. И. Некоторые задачи самосинхронизации.— В кн.: Труды V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 3. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.

176. Лурье А. И. Синхронизация динамических систем (рецензия на книгу И. И. Блехмана.— М.: Наука, 1971). Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 4.
177. Любимов Г. П., Хохлов Р. В. О поляризации молекулярного пучка переменным полем с изменяющейся амплитудой и фазой.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 6/12.
178. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
179. Майер А. Г. К теории вынужденных колебаний в сложном генераторе.— Ученые записки Горьковского гос. ун-та, 1937, вып. 6.
180. Малахов А. Н., Максимов А. С., Нефедов Ю. Я. Об электромагнитной гипотезе биологической связи.— В кн.: Бионика. М.: Наука, 1965.
181. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах.— М.: Наука, 1968.
182. Малахов А. Н., Мальцев А. А. О ширине спектральной линии системы N взаимно синхронизованных генераторов.— ДАН СССР, 1971, т. 196, № 5.
183. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
184. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.
185. Манешин П. К., Хохлов Р. В. Взаимная синхронизация двух молекулярных генераторов при малой связи.— Научные доклады высшей школы, Радиотехника и электроника, 1958, № 3.
186. Марченко Ю. Н., Рубаник В. П. О взаимной синхронизации молекулярных генераторов.— Изв. вузов, Радиофизика, 1965, т. 8, № 4.
187. Марченко Ю. И., Рубаник В. П. О взаимодействии колебательных систем при наличии между ними волновой связи.— Инженерный журнал, Механика твердого тела, 1966, № 2.
188. Математические методы анализа нелинейных колебательных систем/ Митропольский Ю. А., Мосеев Б. И., Самойленко А. М., Блехман И. И., Неймарк Ю. И.— В кн.: Вибрации в технике (справочник). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. М.: Машиностроение, 1979.
189. Матюхин В. М. Об устойчивости сложных энергосистем.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 11.
190. Мачабели Л. И. О движении диска с двумя маятниками.— Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
191. Мерман Г. А. Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел и в задаче Хилла.— Труды ин-та теоретич. астрономии, 1952, вып. 1.
192. Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе/Иппли-ский А. Ю., Малащенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шиш-кин П. Г.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 5.
193. Миловский Н. Д., Ястребова Г. В. О работе кольцевого ОКГ, синхронизированного внешней силой.— Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 11.
194. Мянорский Н. О синхронизации.— В кн.: Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. 1. Киев: Изд-во АН СССР, 1961.
195. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.
196. Митулис А. А. Характер стационарного движения математического маятника с вибрирующей точкой подвеса в зависимости от выбора начальных условий.— В кн.: Труды по теории и применению явления синхронизации в машинах и устройствах.— Вильнюс: Минтис, 1966.

197. Митюшин В. М., Литинская Л. Л., Каминир Л. Б. О синхронном изменении клеточных ядер.— В кн.: Колебательные процессы в биологических и химических системах. М.: Наука, 1967.
198. Михневич Г. В., Козловский Г. Ф. Устойчивость и качество переходных процессов системы регулирования возбуждения многоагрегатной электростанции.— М.: Изв. АН СССР, 1960.
199. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.— М.: Наука, 1969.
200. Молчанов А. М. Возможная роль колебательных процессов в эволюции.— В кн.: Колебательные процессы в биологических и химических системах. М.: Наука, 1967.
201. Молчанов А. М. Термодинамика и эволюция.— В кн.: Колебательные процессы в биологических и химических системах. М.: Наука, 1967.
202. Молчанов А. М. О резонансной структуре Солнечной системы.— В кн.: Современные проблемы небесной механики и астродинамики. М.: Наука, 1973.
203. Монин А. С. О природе турбулентности.— Успехи физических наук, 1978, т. 125, вып. 1.
204. Морозовский В. Т. Об устойчивости работы однотипных синхронных генераторов.— Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 1959, № 2.
205. Муйжнжек А. И. Исследование устойчивости автоматического динамического балансировщика.— Ученые записки Рижского политехнического института, т. 1, 1959.
206. Нагаев Р. Ф. Динамика виброударной дробилки с парой самосинхронизирующихся вибраторов.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
207. Нагаев Р. Ф. О внутренней синхронизации почти одинаковых динамических объектов под действием слабых линейных связей.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
208. Нагаев Р. Ф. О синхронизации почти одинаковых динамических систем, близких к системам Ляпунова.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
209. Нагаев Р. Ф. Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
210. Нагаев Р. Ф. Общая задача о синхронизации в почти консервативной системе.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
211. Нагаев Р. Ф. Типы связей между объектами и критерии устойчивости синхронных режимов.— В кн.: Труды по теории и применению явления синхронизации в машинах и устройствах. Вильнюс: Минтис, 1966.
212. Нагаев Р. Ф., Попова И. А. Самосинхронизация нескольких механических вибраторов, установленных на едином рабочем органе балочного типа.— Инженерный журнал, МТТ, 1967, № 1.
213. Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш. Синхронные движения в системе объектов с несущими связями.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
214. Нагаев Р. Ф. Синхронизация генераторов конечномерных «сил».— ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
215. Нагаев Р. Ф. Квазиконсервативные синхронизирующиеся системы. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук.— Киев: ин-т механики АН УССР, 1973.
216. Нагаев Р. Ф. Случай порождающего семейства квазипериодических решений в теории малого параметра.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
217. Неймарк Ю. И., Шильников Л. П. О применении метода малого параметра к системам дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
218. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1972.

219. Неймарк Ю. И. О возникновении стохастичности в динамических системах.— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
220. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
221. Новосельский П. И., Борщевский А. А., Сильванович В. Н. Синхронно-синфазный привод дебалансных виброплощадок.— Строительное и дорожное машиностроение, 1956, № 5.
222. Новые исследования нелинейных колебаний. Полное собрание трудов акад. Л. И. Мандельштама, Т. III./Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Битт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э.— М.: Изд-во АН СССР, 1950.
223. Олехнович К. А. Использование эффекта самосинхронизации в крупных вибрационных установках с виброударными колебаниями на упругих прокладках.— В кн.: Труды по теории и применению явления синхронизации в машинах и устройствах. Вильнюс: Минтис, 1966.
224. О самосинхронизации гироскопических вибраторов/Алабужев П. М., Зуев А. К., Иванов Е. Н., Кириарский М. Ш.— В кн.: Машины и механизмы виброударного действия. Труды Новосибирского электротехнического ин-та, вып. 1. Новосибирск, 1969.
225. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний.— М.: Машиностроение, 1967.
226. Парыгин В. Н. Взаимная синхронизация трех связанных автоколебательных генераторов в случае слабой связи.— Радиотехника и электроника, 1956, т. 1, вып. 2.
227. Парыгин В. Н. Уточнение теории взаимной синхронизации двух автогенераторов.— Вестник МГУ, сер. мат., мех., астр., физ., хим., 1957, № 2.
228. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах.— М.: Физматгиз, 1962.
229. Петрова И. М. Гидробионика в судостроении.— Л.: Изд. Центральн. НИИ информации и технико-экономич. исследований (ЦНИИТЭИС), 1970.
230. Пирцхалаишвили О. Г. Самосинхронизация механических вибраторов в системе двух упруго связанных твердых тел.— Труды Грузинского сельскохозяйственного ин-та, 1976, т. XCVI.
231. Пирцхалаишвили О. Г. Самосинхронизация механических вибровозбудителей на твердом теле с маятниковыми подвесками.— Изв. АН СССР, Машиноведение, 1978, № 3.
232. Плисс Д. А., Абрамович И. М. Разработка вибрационного способа сухой классификации полезных ископаемых. Отчет ВНИИ Механобр.— Л., 1948.
233. Полякова М. С. О взаимной синхронизации генераторов, связанных через проводимость.— Вестник МГУ, физика и астрономия, 1971, № 3.
234. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.— М.: Физматгиз, 1960.
235. Потураев В. Н., Червоненко А. Г., Плохотнюк Е. И. О реализуемости синхронных и синфазных режимов движения инерционных возбудителей, расположенных на торцах грузонесущего органа вертикального виброконвейера, и синтез основных динамических параметров системы.— В кн.: Проблемы вибрационной техники. Киев: Наукова думка, 1970.
236. Пресман А. С. Идеи В. И. Вернадского в современной биологии (Планетно-космические основы организации жизни).— М.: Знание, 1976.
237. Проскуряков А. П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1977.
238. Прохоров А. М., Анисимов С. И., Панишин П. П. Лазерный термоядерный синтез.— Успехи физич. наук, 1976, т. 119, вып. 401.

239. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах.— М.: Наука, т. I—1971, т. II—1972, т. III—1974.
240. Рабинович М. И. Стохастические колебания и турбулентность.— Успехи физич. наук, 1978, т. 125, вып. 1.
241. Рагульскис К. М. Механизмы на вибрирующем основании (вопросы динамики и устойчивости).— Каунас: Ин-т энергетики и электротехники АН Литовской ССР, 1963.
242. Рагульскис К. М., Виткус И. И., Рагульскене В. Л. Самосинхронизация механических систем (I. Самосинхронные и виброударные системы).— Вильнюс: Минтис, 1965.
243. Рапопорт Г. Н. К вопросу о взаимной синхронизации автогенераторов сравнимой мощности.— Радиотехника, 1951, т. 6, № 4.
244. Родыгин Л. В. К теории связанных релаксационных генераторов.— В кн.: Памяти А. А. Андропова.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.
245. Розанов М. Н. Расчет режимов ресинхронизации и самосинхронизации гидрогенераторов.— Изв. вузов. Энергетика, 1956, № 4.
246. Романовский В. Э. К расчету номинальной мощности и механических характеристик привода вибропогружателя.— Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. технич. наук.— Сталинград: Сталинградский сельскохозяйств. ин-т, 1958.
247. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике.— М.: Наука, 1975.
248. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М.: Наука, 1969.
249. Рудин А. Д. Динамические свойства и перспективы развития машин трехмассной системы.— В кн.: Вибрационная техника (материалы научно-технической конференции).— М.: НИИИНФСТРОЙДОРКОММУНМАШ, 1966.
250. Рундквист К. А., Кириченко А. И. Авторское свидетельство № 76141. Гирационная дробилка./Ин-т Механобр, заявл. 8.03.48; опубли. в Б. И., 1949, № 8.
251. Рундквист А. К. Механика инерционной дробилки «Механобра».— В кн.: Механика и расчет машин вибрационного типа/Под ред. И. И. Артоболевского.— М.: Изд-во АН СССР, 1957.
252. Рундквист А. К., Блехман И. И., Рудин А. Д. К теории критической щели инерционных дробильно-измельчительных машин.— Обогащение руд, 1961, № 2.
253. Рюденберг Р. Переходные процессы в электроэнергетических системах: Перев. первого американского издания под редакцией В. Ю. Ломоносова.— М.: ИЛ, 1955.
254. Рябов Ю. А. Об оценке области применимости метода малого параметра в задачах теории нелинейных колебаний.— В кн.: Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. II.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
255. Савинов О. А. Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет.— 2-е изд. перераб. и дополн.— Л.: Стройиздат, 1979.
256. Самосинхронизация механических систем (2. Самосинхронизация, моделирование)/Рагульскис К. М., Каволелис А. П. К., Балтрушайтис И. Д., Саткявичус Э. Б.— Вильнюс: Минтис, 1967.
257. Сидорова Г. А. Взаимная синхронизация двух релаксационных генераторов.— Вестн. МГУ, 1971, т. 12, сер. III, № 6.
258. Сидорова Г. А. Синхронизация релаксационного генератора внешним треугольным напряжением.— Вестн. МГУ, 1972, т. 13, сер. III, № 4.
259. Справочное руководство по небесной механике и астеродинاميке/Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.— М.: Наука, 1971.

260. Старжинский В. М. Прикладные методы нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1977.
261. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— Сов. радио, 1964.
262. Стретт Дж. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. II.— М.; Л.: Гостехиздат, 1944.
263. Сыромятников И. А. Режимы работы синхронных генераторов.— М.: Госэнергоиздат, 1952.
264. Теодорчик К. Ф. Томпсоновские колебательные системы с двумя степенями свободы.— Радиотехника, 1946, т. 1, № 3—4.
265. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
266. Улам С. Нерешенные математические задачи. Из серии «Современные проблемы математики».— М.: Наука, 1964.
267. Устройство для контроля гранулометрического состава дробленой руды. А. С. 189248./Механобр; Букаты Г. Б., Закрытой О. С., Иткин Г. Е., Пупляев И. М., Рюльман А. Ф., Сыщенко Б. А., Шей Г. П.— Заявл. 28.10.65; опубл. в Б. И., 1967, № 23.
268. Уткин Г. М. Взаимная синхронизация автогенераторов на кратных частотах.— Радиотехника и электроника, 1957, том II, вып. 1.
269. Уткин Г. М. Исследование двухконтурного генератора при кратности частот 1:2.— Научные доклады высш. школы, Радиотехника и электроника, 1958, № 1.
270. Уткин Г. М. Синхронизация автогенераторов на комбинационных частотах для целей диапазонной стабилизации частоты.— Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, вып. 2.
271. Фазовая синхронизация. Сборник статей./Под ред. А. А. Шахгильдяна и Л. Н. Белюстиной.— М.: Связь, 1975.
272. Фазулли Ф. Ф. К синхронизации механических систем, обладающих круговой симметрией.— Прикладная механика, 1976, т. 12, № 1.
273. Файн В. М. Об уравнениях колебаний молекулярного генератора.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 4 (10).
274. Федоров Б. Ф., Шереметьев А. Г., Умников В. Н. Оптический квантовый гироскоп.— М.: Машиностроение, 1973.
275. Флотационная машина. А. С. 360104./Механобр; Денисов Г. А., Рундквист К. А., Скрупе А. В., Федотов А. М.— Заявл. 21.8.67; опубл. в Б. И., 1972, № 36.
276. Франк-Каменецкий Д. А. Механизм двухстадийного воспламенения.— Журн. физич. химии, 1940, т. 14, вып. 1.
277. Фролов К. В., Ходжаев К. Ш. Взаимодействие источника возбуждения с колебательной системой.— В кн.: Вибрации в технике (справочник). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. М.: Машиностроение, 1979.
278. Хагихара Ю. Устойчивость солнечной системы.— В кн.: Планеты и спутники/Под ред. В. И. Мороза.— М.: ИЛ, 1963.
279. Характеристики излучения непрерывного лазера на красителе с синхронной накачкой/Виноградова А. А., Кринач Д. П., Ланда П. С., Цапенко А. М.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 5, № 23.
280. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах.— М.: Мир, 1966.
281. Хептов А. А. Синхронизация спутников.— В кн.: Динамика систем. Межвузовский сб.— Горький, 1974, вып. 4.
282. Ходжаев К. Ш. Колебания в системе со многими электромагнитными возбудителями.— Инженерный журнал. Механика твердого тела, 1966, № 2.
283. Ходжаев К. Ш. Синхронизация механических вибраторов, связанных с линейной колебательной системой.— Инженерный журнал. Механика твердого тела, 1967, № 4.

284. Ходжаев К. Ш. О возбуждении вибраций.— Инженерный журнал. Механика твердого тела, 1968, № 2.
285. Ходжаев К. Ш. Интегральный критерий устойчивости для систем с квазипериодическими координатами и энергетические соотношения при колебаниях проводников с токами.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
286. Ходжаев К. Ш. Колебания нелинейных электромеханических систем.— В кн.: Вибрации в технике (справочник). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. М.: Машиностроение, 1979.
287. Холоденко Л. П. К теории синхронизации разрывных автоколебаний.— Журнал технической физики, 1940, т. 10, вып. 2.
288. Хохлов Р. В. К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы.— ДАН СССР, 1954, т. 97, № 3.
289. Хохлов Р. В. Об одном случае взаимной синхронизации отражательных к्लитронов.— Радиотехника и электроника, 1956, т. I, № 1.
290. Цейтлин А. И., Гусева Н. И. Об определении нагрузок на фундаменты при групповой установке неуравновешенных машин с синхронными двигателями.— Основания, фундаменты и механика грунтов, 1972, № 3.
291. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1964.
292. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций.— ДАН СССР, 1956, т. 110, № 3.
293. Червоненко А. Г., Круш И. И., Шифрин Л. М. Об устойчивости синхронных режимов неконсервативных осцилляторов.— В кн.: Проблемы вибрационной техники (Материалы постоянно действующего семинара). Киев: Наукова думка, 1970.
294. Четаев Н. Г. Устойчивость движения.— М.: Гостехиздат, 1955.
295. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.
296. Чижевский А. Л., Шашина Ю. Г. В ритме Солнца.— М.: Наука, 1969.
297. Чижевский А. Л. Земное эхо солнечных бурь.— М.: Мысль, 1973.
298. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Фазовая автоподстройка частоты.— М.: Связь, 1966.
299. Шехтер О. Я. Об одном примере субгармонических колебаний. Труды совещания по применению вибраций при устройстве оснований сооружений и бурении скважин в строительных целях.— Л.: НТО Строительной индустрии СССР, 1959.
300. Шехтер О. Я. О погружении тяжелых железобетонных оболочек.— В кн.: Динамика грунтов, № 44, М.: Госстройиздат, 1961.
301. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием.— ПММ, 1959, т. 23, № 5.
302. Шиманов С. Н. О почти-периодических колебаниях квазилинейных систем с запаздыванием времени в случае вырождения.— ДАН СССР, 1960, т. 133, № 1.
303. Шноль С. Э. Конформационные колебания молекул.— В кн.: Колебательные процессы в биологических и химических системах. М.: Наука, 1967.
304. Aizawa Y. Synergetic Approach to the Phenomena of Mode-Locking on Nonlinear Systems.— Progr. Theor. Phys., 1976, v. 56, N 3.
305. Appleton E. V. The automatic synchronization of triode oscillator.— Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Math. and Phys. Sciences), 1922, v. 21.
306. Blechman I. Die selbstsynchronisation mechanischen Vibratoren und das Problem der Gruppenfundamente für unbalancierte Maschinen (Maschinen mit Unwuchten). Internat. Tagung «Verfahren und Geräte der

- mechanischen Schwingungstechnik».— Teil II.— Technische Hochschule Otto von Guericke Magdeburg, Sept. 1965.
307. Bogusz W., Engel Z. Badania doswiadczone urzadzen samesynchronizujacych.— *Przeglad mechaniczny*, 1965, N 8.
 308. Coughey T. K. Hula-hoop: one example of heteroparametric excitation.— *Amer. J. Phys.*, 1960, v. 28, N 2.
 309. Diliberto S. P., Hufford G. Perturbation theorems for non-linear ordinary differential equations.— *Contributions to the theory of non-linear oscillations v. III*, Princeton, 1956.
 310. Faure R. Sur les systemes d'equations differentielles non lineaires a coefficients periodiques. Etude d'un cas particulier.— *C. r. Acad. Sci.*, 1957, v. 245, N 19.
 311. Faure R. Sur la synchronisation des systemes oscillants.— *Solutions voisines de points singuliers*.— *C. r. Acad. Sci.*, 1958, v. 247, N 15.
 312. Friedrichs K. G. Fundamentals of Poincare's theory.— *Proc. Sympos. Non-linear Circuit Analysis*, 1953, v. 2.
 313. Goldacre R. The Control of Rhythm and Homeostasis in Biology and Medicine.— *Cibernetica*, 1960, N 2.
 314. Haus H. Theory of forced-mod locking.— *Proc. IEEE. Q-e*, 1975, v. 11.
 315. Hills J. G. Dynamic relaxation of planetary systems and Bod's law.— *Nature*, 1970, v. 225.
 316. Jordan H. Über den stationären Betrieb und die Auslegung von elektrischen Ausgleichswellen.— *Elektrotechnische Z.*, 1952, Bd. 73, N 2.
 317. Lotka A. J. Elements of physycal biology.— *Baltimora*, 1925.
 318. MacMillan W. D. An existence Theorem for Periodic Solutions.— *Transaction of the American Mathematical Society*, 1912, v. 13.
 319. Mayer A. On the theory of coupled vibrations on two self-excited generators.— *Technical physics of the USSR*, 1935, v. 11, N 5.
 320. Miklaszewski R. On possibility of self-synchronization of rotating eccentric vibrators.— *Nonlin. Vibr. Probl.*, 1962, N 4.
 321. Minorsky N. Non-linear Oscillations.— *New York. D. Van Nostrand Company, Ing.*, 1962.
 322. Ollendorf F., Peters W. Schwingungstabilität parallelarbeitender synchronmaschinen.— *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern. Bd. VI, S. 7—26. Springer*, 1925—1926.
 323. On the Self-Synchronization of Mechanical Vibrators/Araki Yoshiaki, Inoue Junkichi, Okada Ynkimasa et.— *Trans. Hapan. Soc. Mech. Eng.*, Part 1, 1966, v. 32, N 234; Part 2, 1967, v. 33, N 246; Part 3, 1969, v. 35; Part 4, 1975, v. 41, N 350.
 324. Ovenden M. W., Feagin T., Graff O. On the principal of least interaction action and the Laplacian satellites of Jupiter and Uranus.— *Celestial Mechanics*, 1973, v. 8, N 3.
 325. Poincare H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste.— *Paris*: 1892, v. I; 1893, v. II; 1899, v. III.
 326. Roy A. E., Ovenden M. W. On the occurence of commensurable mean motions in the Solar system.— *The mirror theorem, Mon. Noth.* 1955, v. 115.
 327. Signeul R. A. O. Apparat för behandling av ett objekt medelst riktade vibrationer.— *Sverige, patent N 163270, Kl. 80a: 49. Patenttid fran den 6 Augusti 1946, publicerat den 13 maj 1958.*
 328. Signeul R. A. O. Vibrating device for a directed vibratory effect by means of rotatable vibratory members.— *United States Patent Office, No. 2, 531, 706. Application May 25, 1948, in Sweden August 6, 1946, Patented Nov. 28, 1950.*
 329. Sperling L. Selbstsynchronisation unwuchtbehafteter Rotoren an elastischen Ketten. Internationale Tagung «Verfahren und Geräte der mechanischen Schwingungstechnik».— *Magdeburg: Techn. Hochschule Otto von Guericke*, 1965, Teil II.

330. Sperling L. Beitrag zur allgemeinen Theorie der Selbstsynchronisation umlaufender Unwuchtmassen im Nichtresonanzfall.— Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg, 1967, Heft 1, N 11.
331. Suezaci Teruo, Mori Shiusaku. Mutual synchronization of two oscillators.— Summaries papers Internat. conf. Microwaves. Circuit Theory and Inform. Theory, Tokyo, 1964, Part 2. Tokyo, Inst. Electr., Common Engrs. Japan, s. a. 111—112.
332. Thearle E. L. A new typ of dinamic balancing machine.— Trans. ASME, 1932, v. 54, N 12.
333. Thearle E. L. Automatic dinamic balancers.— Machine Design, 1950, v. 22, Nos 9—11.
334. Van der Pol B. On relaxation oscillation.— Phil. Mag., 1926, v. 2, N 7.
335. Von der Pol B. Über Relaxationschwingungen. Zeitschr. für Hochfrequenztechnik, 1926, v. 28; 1927, v. 29.
336. Van der Pol B., Van der Mark M. Le battement du coeur considere comme oscillation de relaxation et un modele electrique de coeur.— L'Onde electrique, 1928, N 7.
337. Volterra V. Leçons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie.— Paris: Gauthier — Villars, 1931.

Илья Израилевич Блехман

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ

М., 1981 г., 352 стр. с илл.

Редакторы *П. С. Чудинов, И. П. Рябенская*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

ИБ № 11364

Сдано в набор 30.06.80. Подписано к печати 26.12.80.
Т-22731. Бумага 60×90¹/₁₆. Тип № 2. Обыкновенная
гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 22.
Уч.-изд. л. 23,54. Тираж 3750 экз. Заказ № 225. Це-
на книги 3 р. 80 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической
литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»

630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25