

Л.А. Бессонов

Теоретические основы электротехники

Электромагнитное поле

издание десятое

Москва

ГАРДАРИКИ

2003

УДК 621.3.013(078.5)
БК 31.21
Б53

Бессонов Л.А.
Б53 Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник. — 10-е изд., стереотипное. — М.: Гардарики, 2003. — 317 с.: ил.
ISBN 5-8297-0158-8 (в пер.)

Рассмотрены традиционные и появившиеся за последние годы новые вопросы теории и методов расчета физических процессов в электрических, магнитных и электромагнитных полях, предусмотренные программой курса ТОЭ. Все разделы переработаны и дополнены.

К числу традиционных разделов курса относятся: постоянное во времени электрическое поле в диэлектрике и в проводящих средах, постоянное во времени магнитное поле, переменное электромагнитное поле в диэлектрике, проводящей и полупроводящей средах, излучение электромагнитных волн, волны в направляющих системах, объемные резонаторы, моделирование полей, метод конформных преобразований, метод Грина, движение заряженных частиц в электромагнитных полях и др. К числу нетрадиционных разделов — основные положения магнитной гидродинамики, электродинамика движущихся сред, сверхпроводящие среды в электромагнитных полях, волны в гиротропных средах, метод интегральных уравнений, метод конечных элементов, S и T параметры элементов высокочастотного тракта, уравнения Максвелла в симметричной форме, высокотемпературная сверхпроводимость, распространение радиоволн в реальных условиях.

По всем главам даны примеры с подробными решениями. В конце каждой главы — вопросы и задачи для самопроверки.

Для студентов высших учебных заведений технического профиля.

УДК 621.3.013(078.5)
ББК 31.21

В оформлении переплета использован фрагмент аллегорической картины «Дуб, сраженный молнией», представленной Российской академией художеств (1830-е гг.)

ISBN 5-8297-0158-8

© «Гардарики», 2003
© Бессонов Л.А., 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Теоретические основы электротехники» является базовым курсом, на который опираются профилирующие дисциплины многих высших учебных заведений. В полном объеме курс ТОЭ студенты изучают в течение трех семестров. Первые два семестра студенты изучают теорию линейных и нелинейных электрических цепей. В третьем семестре — теорию электромагнитного поля.

Теория электрических цепей и теория электромагнитного поля интенсивно развиваются. Совершенствуются и дополняются обе составные части этого единого курса.

Настоящая книга является десятым изданием учебника «Электромагнитное поле» Л.А. Бессонова. Содержание данного учебника, как и содержание десятого издания учебника «Электрические цепи» 1999 г. того же автора, полностью соответствует программе курса ТОЭ, утвержденной Министерством образования Российской Федерации.

К изучению курса «Электромагнитное поле» студенты приступают после изучения разделов «Электричество и магнетизм» курса физики и раздела «Уравнения математической физики» курса высшей математики. Поэтому элементы теории поля студентам, приступающим к изучению курса «Электромагнитное поле», в определенной степени известны. В третьей части курса ТОЭ эти знания расширяются, дополняются и доводятся до уровня, достаточного для решения задач, с которыми придется столкнуться инженеру в своей практической деятельности.

В учебнике кроме традиционных представлены и нетрадиционные разделы. К числу традиционных относятся: постоянное электрическое поле в диэлектрике и в проводящей среде, постоянное магнитное поле, переменное электромагнитное поле в диэлектрике, проводящей и полупроводящей средах, излучение электромагнитных волн, волны в направляющих системах, метод конформных преобразований, движение заряженных частиц в электромагнитном поле, метод Грина, расчет полей по методу сеток и др.

К числу нетрадиционных разделов могут быть отнесены: электромагнитное поле в гиротропной среде, основные положения магнитной гидродинамики, сверхпроводящие среды в электромагнитных полях, электродинамика движущихся сред, метод интегральных уравнений и др.

Кроме перечисленных в десятое издание учебника включены следующие вопросы, отсутствовавшие в восьмом издании: S и T параметры элементов высокочастотного тракта, уравнения Максвелла в симметричной

форме и их применение, излучение из щели волновода, объемные резонаторы, метод конечных элементов, распространение радиоволн в реальных условиях, основные положения последней по времени гипотезы о процессах, происходящих в физическом вакууме — эфире, работа электретного микрофона на нагрузку, парение кольцевого магнита, высокотемпературная сверхпроводимость и др.

В каждой главе даны примеры расчетов полей с подробными пояснениями, а в конце каждой главы приведены вопросы и задачи для самопроверки. Нормальным шрифтом в книге набран материал, обязательный для изучения студентами всех специальностей, в учебных планах которых есть курс электромагнитного поля или родственные курсы с несколько иным названием. Петитом набран материал, на необходимость изучения которого должна указать кафедра соответствующего вуза. Учебник написан так, что допускает перестановку некоторых близких по тематике глав, если в этом возникает необходимость в каком либо вузе, где сложилась традиция несколько иной последовательности изложения материала.

Нумерация глав и приложений в данном учебнике «Электромагнитное поле» и в учебнике «Электрические цепи» единая.

Автор книги выражает благодарность заслуженным деятелям науки и техники РФ, д. т. н., профессорам В.Г. Герасимову и Т.А. Татур, а также к. т. н., доценту А.В. Штыкову за полезные замечания по рукописи книги, способствовавшие ее улучшению.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Третья часть курса ТОЭ посвящена изучению теории электромагнитного поля, в которой рассмотрены физические явления и процессы, происходящие в электромагнитном поле, и методы их расчета. Эти явления и процессы лежат в основе действия большого числа различных электромагнитных и электронных приборов и устройств, широко применяемых на практике, а методы расчета физических явлений и процессов, рассмотренные в курсе Электромагнитного поля, используют при расчете и конструировании этих приборов и устройств. К числу таких приборов и устройств могут быть отнесены: электрические машины и аппараты, электроэнергетические установки для передачи электрической энергии, электромагнитные и электронные элементы автоматики, радиотехнические средства передачи информации, электромедицинские приборы и устройства, устройства электрометаллургии, электрохимии, геологоразведки, навигации, электротехнологические установки, установки контроля качества изделий электромагнитными методами, левитирующие транспортные средства, а также оборудование, предназначенное для исследований электромагнитных полей биологических объектов, искусственно-го интеллекта, высокотемпературной сверхпроводимости и многие др.

В третьей части курса ТОЭ, как и в двух предыдущих, используют общие физические принципы, формирующие методологию мышления, такие как принцип симметрии, принцип минимума энергии, закон сохранения заряда, принцип непрерывности тока и магнитного потока. Поэтому можно сказать, что изучение теории электромагнитного поля не только расширяет физические представления о поле, дает возможность проектировать различные практические устройства, но и способствует формированию у студентов современного мировоззрения.

Под электромагнитным полем понимают вид материи, характеризующийся совокупностью взаимно связанных и взаимно обуславливающих электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле обладает характерными для него электрическими и магнитными свойствами, доступными наблюдению. Силовое воздействие поля на электрические заряды и токи положено в основу определения основных векторных величин, которыми характеризуют поле: напряженности электрического поля E и индукции магнитного поля B .

Значения E и B как взаимно связанных характеристик единого электромагнитного поля зависят от условий наблюдения этого поля. Они оказываются различными в неподвижной и в подвижной системах координат. Так, электрический заряд, движущийся в некоторой системе координат, создает магнитное поле, а неподвижный заряд в другой системе координат создает только электрическое поле.

только электрическое поле, так как по отношению к нему заряд неподвижен.

Электромагнитное поле может самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн в вакууме. Это свидетельствует о том, что поле, являясь формой материи, может существовать при отсутствии другой формы материи — вещества. Наряду с этим, электромагнитное поле обладает такими характеристиками, которые присущи веществу, а именно: энергией, массой и количеством движения.

Масса электромагнитного поля в единице объема определяется как частное от деления энергии поля в единице объема на квадрат скорости распространения электромагнитной волны в вакууме, равной скорости света. Количество движения электромагнитного поля, отнесенное к единице объема, равно произведению массы поля в единице объема на скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

При распространении электромагнитного поля одновременно с движением потока электромагнитной энергии происходит перемещение массы поля и количества движения.

Масса электромагнитного поля, заключенная в единице объема, несоизмеримо мала по сравнению с массой (плотностью) всех известных веществ. Даже при максимально достижимых в настоящее время значениях напряженностей электрического и магнитного полей масса поля в единице объема оказывается равной $10^{-16} \dots 10^{-18}$ кг/м³. Тем не менее наличие массы поля имеет принципиальное значение, поскольку в этом отражена известная инерционность процессов в электромагнитном поле. В одних случаях электромагнитное поле распределено в пространстве непрерывно, в других обнаруживает дискретную структуру, проявляющуюся в виде квантов излученного поля. Электромагнитное поле может превращаться в вещество, а вещество — в поле. Так, электрон и позитрон превращаются в два кванта электромагнитного излучения, а при исчезновении фотона возникает пара: электрон и позитрон. Превращение поля в вещество, а вещества в поле соответствуют превращению одного вида материи в другой. Пространство и время являются формами существования электромагнитного поля.

В первой главе учебника говорилось, что электромагнитное поле для неподвижных тел и сред описывается четырьмя уравнениями Максвелла, сформулированными им в 1873 г. Они могут быть записаны в интегральной или в дифференциальной формах.

Интегральная форма	Дифференциальная форма	
$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_s \vec{\delta} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{D} d\vec{S},$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$	} (a)
$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$	
$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$	$\text{div } \vec{B} = 0,$	
$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{своб}}}{\epsilon_0 \epsilon_r};$	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$	

К ним должны быть добавлены уравнения, характеризующие связь между векторами поля в материальной среде

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, \quad \vec{\delta} = \gamma \vec{E}. \quad (6)$$

В уравнениях (а) и (б) $\vec{\delta}$ — вектор плотности тока проводимости; \vec{D} — вектор электрического смещения; Φ — магнитный поток; $d\vec{S}$ — элемент площади; $q_{\text{своб}}$ — свободный заряд; $\rho_{\text{своб}}$ — плотность свободного заряда; ϵ_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные; ϵ_r и μ_r — относительные электрическая и магнитная постоянные среды; γ — удельная проводимость среды.

Задачи, решаемые в теории электромагнитного поля, относятся к задачам математической физики, в которых основные векторы поля \vec{E} и \vec{B} рассматривают в общем случае как функции пространственных координат точки наблюдения и функции времени, на которые воздействуют операторы векторного анализа. Наряду с этим используется наглядное графическое описание полей с помощью картин силовых электрических и магнитных линий, густота которых соответствует абсолютному значению вектора поля и касательные к которым в каждой точке показывают направление этого вектора.

На практике встречаются следующие виды полей: электростатическое поле, магнитостатическое поле, стационарное электрическое и стационарное магнитное поле (создаются постоянными токами), квазистационарное поле (в нем явления протекают медленно во времени), быстроизменяющиеся во времени поля в неподвижных телах и средах, движущихся в некоторой системе координат с относительно большой скоростью (в том числе соизмеримой со скоростью света).

В электростатическом поле $\partial/\partial t = 0$ и $\delta = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{l} &= 0 & \text{или} & & \text{rot } \vec{E} &= 0, \\ \oint \vec{E} d\vec{S} &= \frac{q_{\text{своб}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} & \text{или} & & \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \\ & & \text{и} & & \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}. \end{aligned}$$

В магнитостатическом поле $\partial/\partial t = 0$ и $\sigma = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} d\vec{l} &= 0 & \text{или} & & \text{rot } \vec{H} &= 0, \\ \oint \vec{B} d\vec{S} &= 0 & \text{или} & & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ & & \text{и} & & \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H}. \end{aligned}$$

В стационарном, неизменяемом во времени поле, когда $\partial/\partial t = 0$ и $\delta \neq 0$

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{l} &= 0 & \text{или} & & \text{rot } \vec{E} &= 0, \\ \oint \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \vec{\delta} d\vec{S} & \text{или} & & \text{rot } \vec{H} &= \vec{\delta} \\ & & \text{и} & & \vec{\delta} &= \gamma \vec{E}. \end{aligned}$$

В этом случае электрическое и магнитное поля связаны соотношениями $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$ и $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$.

Для областей квазистационарного поля, в которых может протекать ток проводимости, ток смещения не учитывают ($\partial \vec{D} / \partial t \ll \gamma \vec{E}$) и поэтому

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{или} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_s \vec{\delta} d\vec{S} \quad \text{или} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}.$$

Однако для областей квазистационарного поля, в которых ток проводимости отсутствует, ($\gamma = 0$),

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{D} d\vec{S} \quad \text{или} \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Принадлежность системы с токами или окружающей ее области пространства к квазистационарной зависит от соотношения длины l системы с током (или характерного линейного размера окружающей ее области пространства, вдоль которого распространяется электромагнитная волна) с длиной волны λ . Система квазистационарна, если $l \ll \lambda$.

Быстроизменяющиеся поля в неподвижных телах и средах описываются полной системой уравнений (а) и (б). Изменяющиеся во времени поля в движущихся телах и средах описываются видоизмененными уравнениями Максвелла (§ 22.11). При рассмотрении некоторых вопросов теории поля будем использовать также систему уравнений Максвелла в симметричной форме (§ 22.12). При изучении различных видов полей будем переходить от более простых структур к более сложным. В соответствии с этим рассмотрим сначала неизменные во времени поля, когда электрическое и магнитное поля можно изучать отдельно.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 19.1. Определение электростатического поля. *Электростатическое поле* — это частный вид электромагнитного поля. Оно создается совокупностью электрических зарядов, неподвижных в пространстве по отношению к наблюдателю и неизменных во времени.

Из курса физики известно, что любое вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем.

Элементарные заряды (заряды электрона и протона) характеризуются связью с собственным и взаимодействием с внешними электрическими полями.

В любом веществе всегда имеется микроскопическая неоднородность в пространстве. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, находятся в непрерывном хаотическом движении. Следовательно, кроме микроскопической неоднородности, в пространстве всегда имеется неодинаковость расположения элементарных зарядов в смежные моменты времени.

В теории поля усредняют микроскопические неоднородности вещества в пространстве и во времени, т. е. рассматривают процессы в макроскопическом смысле.

В заряженном теле (если общий заряд его неизменен во времени) элементарные заряды движутся хаотически. Поэтому даже в непосредственной близости от поверхности этого тела создаваемое элементарными зарядами магнитное поле практически отсутствует. Это и дает возможность рассматривать в электростатическом поле лишь один электрический компонент электромагнитного поля.

Под *зарядом* (зарядом тела) понимают скалярную величину, равную алгебраической сумме элементарных электрических зарядов в этом теле.

В дальнейшем, как правило, будем иметь дело с полем, создаваемым в однородной и изотропной среде, т. е. в таких, электрические свойства которых одинаковы для всех точек поля и не зависят от направления. В ином случае сделаны соответствующие оговорки.

Электростатическое поле обладает способностью воздействовать на помещенный в него электрический заряд с механической силой, прямо пропорциональной значению этого заряда.

В основу определения электрического поля положено механическое его проявление. Оно описывается законом Кулона.

§ 19.2. Закон Кулона. Два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой \vec{F} , прямо пропорциональной произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними. Эта сила направлена по линии, соединяющей

точечные заряды (рис. 19.1). Заряды, имеющие одинаковые знаки, стремятся оттолкнуться друг от друга, а заряды противоположных знаков — сблизиться:

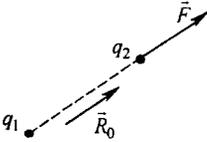


Рис. 19.1

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \vec{R}_0, \quad (19.1)$$

где \vec{R}_0 — единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды (см. рис. 19.1)¹⁾.

При использовании кратных и дольных единиц от единиц СИ расстояние R выражают в метрах (м), заряды — в кулонах (Кл), электрическую постоянную $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ — в фарадах на метр (Ф / м); тогда силу получают в ньютонах.

Под точечными зарядами подразумевают следующее: *линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами.*

§ 19.3. Напряженность и потенциал электростатического поля. Любое поле характеризуется некоторыми основными величинами. Основными величинами для электростатического поля являются напряженность \vec{E} и потенциал ϕ .

Напряженность электростатического поля — величина векторная, определяемая в каждой точке значением и направлением; потенциал является величиной скалярной. Значение потенциала определяется в каждой точке поля некоторым числом.

Электростатическое поле определено, если известен закон изменение \vec{E} или ϕ во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый (неподвижный) положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к значению заряда q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}. \quad (19.1a)$$

Таким образом, \vec{E} — это *силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля заряд не исказил поля, существовавшего до внесения этого заряда.* Отсюда следует, что сила \vec{f} , действующая на точечный заряд q конечного значения, внесенный в поле, будет равна $\vec{f} = q \vec{E}$, а *напряженность численно равна силе, действующей на заряд, равный единице.*

Если поле создается несколькими зарядами (q_1, q_2, q_3, \dots), то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждо-

¹⁾ Стрелка над буквой означает вектор в пространстве.

го из зарядов в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$, т. е. при расчете электрического поля применим метод наложения.

Рассмотрим вопрос о работе, совершаемой силами поля при перемещении заряда, и о связанных с работой понятиях потенциала и разности потенциалов.

Поместим в электрическое поле некоторый заряд q . На заряд будет действовать сила $q\vec{E}$. Пусть заряд q из точки 1 переместится в точку 2 по пути 1 3 2 (рис. 19.2). Так как направление силы $q\vec{E}$, действующей на заряд в каждой точке пути, может не совпадать с элементом пути $d\vec{l}$, то работа по перемещению заряда на пути $d\vec{l}$ определится скалярным произведением силы на элемент пути $q\vec{E} d\vec{l}$. Эту сумму элементарных работ можно записать в виде линейного интеграла $q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$.

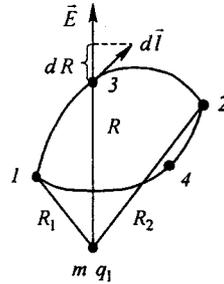


Рис. 19.2

Заряд q может быть любым. Положим его равным единице (единичный заряд). Под *разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ принято понимать работу, затрачиваемую силами поля при переносе единичного заряда из начальной точки 1 в конечную точку 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Если бы потенциал конечной точки пути 2 был равен нулю, то потенциал точки 1 равен (при $\varphi_2 = 0$):

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

т. е. потенциал произвольной точки поля 1 можно определить как работу, совершаемую силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен нулю.

За точку, имеющую нулевой потенциал, можно принять любую точку поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяются единственным образом.

Нередко принимают, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Поэтому, особенно в курсах физики, распространено определение потенциала как работы, совершаемой силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l}.$$

Часто считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли (земля в условиях электростатики есть проводящее тело, поэтому безразлично, где именно — на поверхности земли или в толще ее — находится эта точка).

Таким образом, потенциал любой точки поля зависит от того, какой точке поля придан нулевой потенциал, т. е. потенциал определяется с точностью до постоянного значения. Однако это не столь существенно, так как практически важен не потенциал какой-либо точки поля, а разность потенциалов и производная от потенциала по координатам.

При определении разности потенциалов произвольную постоянную, с точностью до которой вычисляют потенциал, вычитают, и в разность потенциалов она не входит. На значение производной от потенциала по координатам произвольная постоянная также не скажется, поскольку производная от постоянной величины равна нулю.

§ 19.4. Электрическое поле — поле потенциальное. Составим выражение для разности потенциалов в поле точечного заряда. С этой целью положим, что в точке m рис. 19.2 находится положительный точечный заряд q_1 , создающий поле, а из точки 1 в точку 2 через промежуточную точку 3 перемещается единичный положительный заряд $q=1$.

Обозначим: R_1 — расстояние от точки m до исходной точки 1 ; R_2 — расстояние от точки m до конечной точки 2 ; R — расстояние от точки m до произвольной точки 3 пути $1\ 3\ 2$. Направление $d\vec{l}$ в промежуточной точке 3 показано на рис. 19.2. Скалярное произведение $\vec{E} d\vec{l} = E dR$, где dR — проекция элемента пути $d\vec{l}$ на направление радиуса, соединяющего точку m с точкой 3 .

В соответствии с определением напряженности поля $\vec{E} = \vec{F}/q$. По закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 q}{4 \pi \varepsilon_0 R^2} \vec{R}_0.$$

Так как $|\vec{R}_0| = 1$ и $q = 1$, то модуль напряженности поля в поле точечного заряда

$$E = \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0 R^2}.$$

Подставим в формулу (19.2) вместо $\vec{E} d\vec{l}$ значение $q/(4 \pi \varepsilon_0 R^2) dR$, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E dR = \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_1^2 \frac{1}{R^2} dR = \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (19.2)$$

Таким образом, разность потенциалов между исходной и конечной точками пути (точками 1 и 2) зависит только от положения этих точек и не зависит от пути, по которому происходило перемещение из

исходной точки в конечную. Другими словами, если перемещение из точки 1 в точку 2 будет происходить по какому-то другому пути, например по пути 1 4 2, то разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, полученная в этом случае, будет равна разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ при перемещении из точки 1 в точку 2 по пути 1 3 2.

Если поле создано совокупностью точечных зарядов, то этот вывод справедлив для поля, созданного каждым из точечных зарядов в отдельности. А так как для электрического поля в однородном и изотропном диэлектрике справедлив принцип наложения, то вывод о независимости разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от пути, по которому происходило перемещение из точки 1 в точку 2, справедлив и для электрического поля, созданного совокупностью точечных зарядов.

Если пройти по замкнутому пути 1 3 2 4 1 (см. рис. 19.2), то исходная точка пути 1 и конечная точка пути 2 совпадут, и тогда левая и правая части формулы (19.2) будут равны нулю:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 = \oint \vec{E} d\vec{l}. \quad (19.3)$$

Кружок на знаке интеграла означает, что интеграл берется по замкнутому контуру.

Соотношение (19.3) свидетельствует о том, что в электростатическом поле линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый вдоль любого замкнутого пути, равен нулю.

Физически это объясняется тем, что при движении вдоль замкнутого пути совершена определенная работа силами поля и такая же работа совершена внешними силами против сил поля. Если условиться работу, совершенную силами поля, считать положительной, а совершенную против сил поля — отрицательной, то сумма «положительных» и «отрицательных» работ равна нулю.

Равенство (19.3) можно трактовать и так: циркуляция вектора \vec{E} вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Это соотношение выражает собой основное свойство электростатического поля. Поля, для которых выполняются подобного рода соотношения, называют *потенциальными*. Потенциальными являются не только электростатические, но и гравитационные поля (поля сил тяготения между материальными телами), установившиеся температурные поля около нагретых тел и т. д.

§ 19.5. Силовые и эквипотенциальные линии. Электростатическое поле можно охарактеризовать совокупностью силовых и эквипотенциальных линий. *Силовая линия* — это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и заканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Проводится она таким образом, что касательная к ней в любой ее точке дает направление напряженности поля \vec{E} в этой точке. Вдоль силовой линии передвигался бы малый положительный заряд, если бы он имел возможность свободно перемещаться и не обладал инерцией. Таким образом, силовые линии имеют начало (на положительно заряженном теле) и конец (на отрицательно заряженном

теле). Так как положительный и отрицательный заряды, создающие поле, не могут быть в одной и той же точке, то силовые линии электростатического поля не могут быть линиями, замкнутыми сами на себя.

В электростатическом поле можно провести эквипотенциальные (равнопотенциальные) поверхности. Под *эквипотенциальной поверхностью* понимают совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал. Если мысленно расщеп электростатическое поле какой-либо секущей плоскостью, то в полученном сечении будут видны следы пересечения плоскости с эквипотенциальными поверхностями. Их называют *эквипотенциальными линиями* (или эквипотенциалами).

Из самого определения эквипотенциальной поверхности следует, что перемещение по ней не вызовет изменения потенциала. Точно так же и перемещение вдоль эквипотенциальной линии не связано с изменением потенциала.

Эквипотенциальные и силовые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом. На рис. 19.3, *а* изображены два заряженных тела и проведено несколько силовых и эквипотенциальных линий.

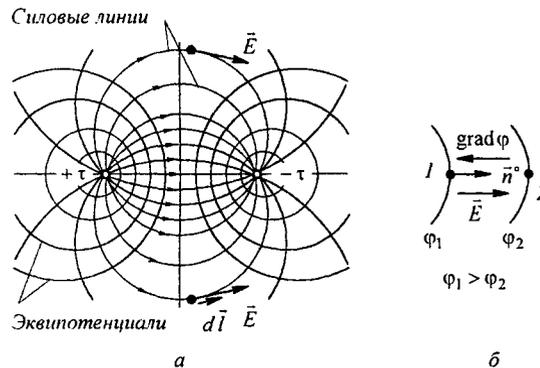


Рис. 19.3

В противоположность силовым эквипотенциальные линии электростатического поля являются замкнутыми сами на себя. Как уже говорилось, между напряженностью электрического поля \vec{E} и потенциалом φ существует связь интегрального вида (19.2). Кроме нее, между \vec{E} и φ существует и связь дифференциального вида.

§ 19.6. Выражение напряженности в виде градиента потенциала. Электростатическое поле, как отмечалось ранее, является полем потенциальным. Между двумя близко расположенными точками поля имеется в общем случае некоторая разность потенциалов.

Если эту разность разделить на кратчайшее расстояние между взятыми точками, то полученное значение будет характеризовать скорость изменения потенциала в направлении кратчайшего расстояния между точками. Эта скорость будет зависеть от направления, вдоль которого взяты точки.

В курсе математики пользуются понятием градиента скалярной функции. *Градиентом скалярной функции* называют скорость изменения скалярной функции, взятую в направлении ее наибольшего возрастания.

В определении градиента существенны два положения:

1) направление, в котором берутся две близлежащие точки, должно быть таким, чтобы скорость изменения была максимальна;

2) направление таково, что скалярная функция в этом направлении возрастает (не убывает).

На рис. 19.3, б изображены отрезки двух весьма близко расположенных эквипотенциалей. Одна из них имеет потенциал φ_1 , другая — φ_2 . Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогда в соответствии с приведенным определением, градиент изобразим на рис. 19.3, б вектором, перпендикулярным эквипотенциальным линиям и направленным от φ_2 к φ_1 (в сторону увеличения потенциала).

Напряженность электрического поля направлена от более высокого потенциала (φ_1) к более низкому (φ_2). Если через dn обозначить расстояние по перпендикуляру (по нормали) между эквипотенциальными поверхностями, а через $d\vec{n}$ — вектор, совпадающий с направлением \vec{E} : $d\vec{n} = \vec{n}^\circ dn$ (здесь \vec{n}° — единичный вектор, направленный по направлению $d\vec{n}$), то на основании соотношения (19.2) можно записать выражение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \approx \vec{E} d\vec{n} = -d\varphi,$$

где $d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — приращение потенциала при переходе от точки 1 к точке 2.

Так как векторы \vec{E} и $d\vec{n}$ совпадают по направлению, то скалярное произведение $\vec{E} d\vec{n}$ равно произведению модуля \vec{E} на модуль $d\vec{n}$.

Таким образом, $E dn = -d\varphi$. Отсюда модуль напряженности поля $E = -d\varphi/dn$. Вектор напряженности поля $\vec{E} = E \vec{n}^\circ$. Поэтому

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \vec{n}^\circ. \quad (19.4)$$

Из определения градиента следует, что

$$\text{grad } \varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dn} (-\vec{n}^\circ) = -\frac{d\varphi}{dn} (-\vec{n}^\circ). \quad (19.5)$$

Сопоставляя (19.4) и (19.5), замечаем, что

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (19.6)$$

Соотношение (19.6) можно истолковать следующим образом: напряженность в какой-либо точке поля равна скорости изменения потенциала в этой точке, взятой с обратным знаком. Знак минус означает, что направление \vec{E} и направление $\text{grad } \varphi$ противоположны (см. рис. 19.3, б).

Нормаль $d\vec{n}$ в общем случае может быть расположена так, что не совпадет с направлением какой-либо координатной оси, и поэтому градиент потенциала в общем случае можно представить в виде суммы трех проекций по координатным осям. Например, в декартовой системе координат

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (19.7)$$

Здесь $\vec{i} \partial\varphi/\partial x$ — скорость изменения φ в направлении оси x ; $\partial\varphi/\partial x$ — числовое значение (модуль) скорости (скорость — величина векторная); $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные орты соответственно по осям x, y, z декартовой системы.

Вектор напряженности $\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z$. Таким образом,

$$\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z = - \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Два вектора равны только тогда, когда равны друг другу их соответствующие проекции. Следовательно,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (19.8)$$

Соотношения (19.8) следует понимать так: проекция напряженности поля на ось x равна проекции скорости изменения потенциала вдоль оси x , взятой с обратным знаком, и т. д.

§ 19.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла). Для сокращения записи различных операций над скалярными и векторными величинами употребляют оператор Гамильтона (оператор набла). Под дифференциальным оператором Гамильтона понимают сумму частных производных по трем координатным осям, умноженных на соответствующие единичные векторы (орты). В декартовой системе координат его записывают так:

$$\nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Он сочетает в себе векторные и дифференцирующие свойства и может быть применен к скалярным и векторным функциям. Ту функцию, действие над которой хотят произвести (дифференцирование ее по координатам, или «пространственное» дифференцирование), пишут справа от оператора набла.

Применим оператор ∇ к потенциалу φ . С этой целью запишем

$$\nabla \varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Если сравнить последнее выражение с (19.7), то можно заметить, что правые части у них одинаковы. Следовательно, равны и левые: $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$, т. е. запись $\nabla \varphi$ эквивалентна записи $\text{grad } \varphi$, а приписывание слева к какой-либо скалярной функции (в рассматриваемом случае к φ) оператора ∇ означает взятие градиента от этой скалярной функции.

§ 19.8. Выражение градиента потенциала в цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе (обозначения см. на рис. 19.4, а)

$$\text{grad } \varphi = \vec{r}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\alpha}^\circ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \vec{z}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (19.9)$$

В сферической системе (обозначения см. на рис. 19.4, б)

$$\text{grad } \varphi = \vec{R}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \vec{\theta}^\circ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{\alpha}^\circ \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (19.10)$$

§ 19.9. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность. Пусть в векторном поле (например, в поле вектора напряженности электрического поля \vec{E}) есть некоторый элемент поверхности, площадь которого с одной стороны численно равна dS . Выберем положительное направление нормали (перпендикуляра) к элементу поверхности. Значение вектора $d\vec{S}$ в некотором масштабе на рис. 19.5

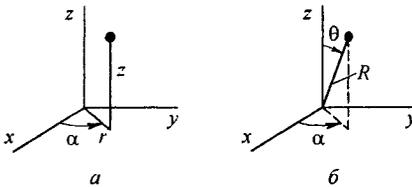


Рис. 19.4

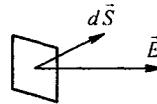


Рис. 19.5

равно площади элемента поверхности, а его направление совпадает с положительным направлением нормали. Будем полагать, что площадь элемента достаточно мала, чтобы в пределах этого элемента вектор \vec{E} можно было считать одним и тем же во всех точках.

Если бы вектор \vec{E} был перпендикулярен $d\vec{S}$, то \vec{E} не пронизывал бы элемент поверхности; если \vec{E} направлен по $d\vec{S}$, то через данный элемент поверхности будет проходить максимальный поток вектора \vec{E} . В общем случае поток вектора \vec{E} через элемент поверхности определится скалярным произведением $\vec{E} d\vec{S}$.

Поток вектора через элемент поверхности $\vec{E} d\vec{S}$ является скаляром алгебраического характера. Поток вектора может оказаться положительным или отрицательным. Положительное значение потока $\vec{E} d\vec{S}$ означает,

что он направлен в сторону $d\vec{S}$, отрицательное его значение — что он направлен в обратную сторону.

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, велика, то тогда нельзя считать, что во всех точках \vec{E} одна и та же. В этом случае поверхность подразделяют на отдельные элементы малых размеров, и полный поток вектора через поверхность равняется алгебраической сумме потоков через все элементы поверхности.

Сумму потоков можно записать в виде интеграла: $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Символ S под знаком интеграла означает, что суммирование производится по элементам поверхности S .

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, замкнутая, то на знаке интеграла ставят кружок: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$.

§ 19.10. Свободные и связанные заряды. Поляризация вещества. Свободными называют заряды, которые под воздействием сил поля могут свободно перемещаться в веществе; их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Под связанными понимают электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. Такие заряды «связаны» с данным веществом, неотделимы от него. Сумма положительных связанных зарядов равна сумме отрицательных связанных зарядов.

Если какое-либо диэлектрическое тело поместить в электрическое поле, то оно поляризуется.

Под поляризацией понимают упорядоченное изменение расположения связанных зарядов в теле, вызванное электрическим полем. Это изменение расположения проявляется в том, что отрицательные связанные заряды в теле переместятся в направлении более высокого потенциала, а положительные — в сторону более низкого потенциала. Заряды сместятся настолько, что силы воздействия электрического поля на связанные заряды уравниваются внутримолекулярными силами. В результате поляризации на поверхности вещества как бы обнажаются связанные заряды.

§ 19.11. Поляризованность. Произведение $q\vec{l}$ называют электрическим моментом двух равных по значению и противоположных по знаку зарядов, находящихся на расстоянии l (диполя). Это векторная величина, направленная от заряда $-q$ к заряду $+q$ (рис. 19.6, а).

В поляризованном веществе молекулы в электрическом отношении представляют собой диполи. Под действием внешнего электрического поля диполи стремятся ориентироваться в пространстве таким образом, чтобы электрический момент их был направлен параллельно вектору напряженности электрического поля.

Практический интерес представляет электрический момент не одной молекулы, не одной пары зарядов, а суммы диполей, находящихся в единице объема вещества.

Электрический момент суммы диполей, находящихся в объеме вещества V , отнесенный к объему V (при стремлении V к нулю), называют поляризованностью (вектором поляризации) и обозначают \vec{P} :

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q \vec{l}}{V}. \quad (19.11)$$

Для большинства диэлектриков \vec{P} пропорционален напряженности электрического поля \vec{E} . Коэффициент пропорциональности между ними $\kappa = \epsilon_0 \chi$ (χ — электрическая восприимчивость). Следовательно,

$$\vec{P} = \kappa \vec{E}. \quad (19.12)$$

Диэлектрики в зависимости от происходящих в них процессов при поляризации можно разделить на две группы.

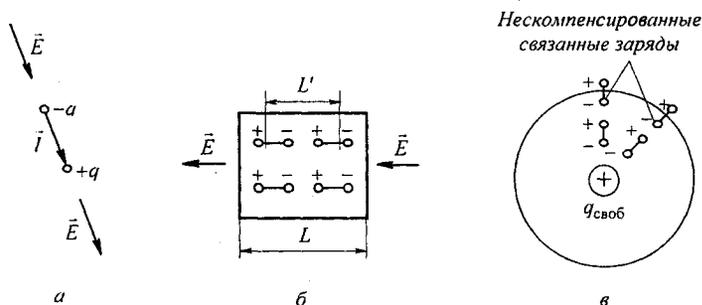


Рис. 19.6

В первую входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля электрически нейтральны, т. е. в них центры действия положительных и отрицательных зарядов совпадают. К числу таких диэлектриков относятся водород, азот, парафин и др.

Поляризация в диэлектриках первой группы заключается в том, что под действием внешнего электрического поля центр действия положительного заряда молекулы смещается по внешнему полю, а центр действия отрицательных зарядов (электронная орбита) — против поля. В результате молекула становится диполем. Это смещение зарядов пропорционально значению напряженности внешнего поля. Смещению противодействуют внутримолекулярные силы.

Во вторую входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля представляют собой диполи, т. е. центры действия положительных и отрицательных зарядов этих молекул при отсутствии внешнего электрического поля не совпадают (полярные молекулы). Диэлектриком с полярными молекулами является, например, хлористый водород.

Благодаря тепловому движению диполи располагаются хаотично, так что при отсутствии внешнего электрического поля их электрические поля взаимно нейтрализуются.

Поляризация в диэлектриках второй группы состоит в том, что полярные молекулы стремятся повернуться таким образом, чтобы их электрический момент был направлен по внешнему электрическому полю.

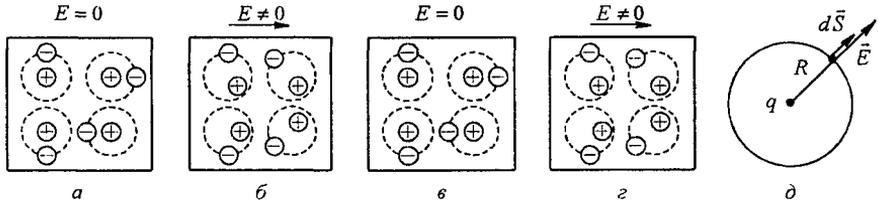


Рис. 19.7

Поляризацию диэлектриков первой группы иллюстрируют рис. 19.7, а и б; второй группы — рис. 19.7, в и г. Рис. 19.7, а и в соответствуют случаю, когда внешнее поле отсутствует; рис. 19.7, б и г — при наличии внешнего поля.

§ 19.12. Вектор электрической индукции \vec{D} . Кроме вектора \vec{E} и \vec{P} в электрических расчетах используют еще вектор электрической индукции, или вектор электрического смещения \vec{D} .

Вектор \vec{D} равен сумме двух векторов: вектора $\epsilon_0 \vec{E}$, характеризующего поле в вакууме, и поляризованности \vec{P} , характеризующей способность диэлектрика в рассматриваемой точке поля поляризоваться:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Так как

$$\vec{P} = \kappa \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} \frac{\kappa}{\epsilon_0}, \quad (19.13)$$

то

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \left(1 + \frac{\kappa}{\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (19.14)$$

где

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r; \quad \epsilon_r = 1 + \chi \quad \text{и} \quad \chi = \kappa / \epsilon_0. \quad (19.15)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r имеет нулевую размерность; она показывает, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества (ϵ_a) больше, чем электрическая постоянная ϵ_0 , характеризующая электрические свойства вакуума^{*)}.

В системе СИ величины D и P имеют одну и ту же единицу: кулон на метр в квадрате ($\text{Кл}/\text{м}^2$).

^{*)} Под вакуумом здесь и далее будем понимать не сверхразреженную среду, не пустоту, где ничего нет, а особую мировую материальную среду, которую в течение многих столетий называли эфиром, а в последние годы стали называть физическим вакуумом. В приложении О в конце книги рассмотрены основные положения последней по времени гипотезы о свойствах вакуума и о происходящих в нем физических процессах.

§ 19.13. Теорема Гаусса в интегральной форме. Теорема Гаусса является одной из важнейших теорем электростатики. Она соответствует закону Кулона и принципу наложения. Теорему можно сформулировать и записать тремя способами.

1. Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, окружающую некоторый объем, равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{своб.}} \quad (19.16)$$

Из формулы (19.16) следует, что вектор \vec{D} является такой характеристикой поля, которая при прочих равных условиях не зависит от диэлектрических свойств среды (от величины ϵ_r).

2. Так как $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$, то теорему Гаусса для однородной и изотропной среды можно записать и в такой форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{своб.}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad (19.17)$$

т. е. поток вектора напряженности электрического поля сквозь любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности, разделенной на произведение $\epsilon_0 \epsilon_r$.

Из формулы (19.17) следует, что вектор \vec{E} представляет собой характеристику поля, которая в отличие от вектора \vec{D} при прочих равных условиях зависит от диэлектрических свойств среды (от величины ϵ_r).

Поток вектора \vec{D} определяется лишь суммой зарядов и не зависит от их расположения внутри замкнутой поверхности^{*)}.

3. Поток вектора \vec{E} через любую замкнутую поверхность создается не только суммой свободных зарядов ($\sum q_{\text{своб.}}$), но и суммой связанных зарядов ($\sum q_{\text{связ.}}$), находящихся внутри поверхности.

Из курса физики известно, что поток вектора поляризации сквозь любую замкнутую поверхность равен взятой с обратным знаком алгебраической сумме связанных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\sum q_{\text{связ.}} = -\oint \vec{P} d\vec{S}.$$

Напомним вывод этой формулы. С этой целью покажем, что плотность поверхностных связанных зарядов на поверхности раздела поляризованного диэлектрика и вакуума равна модулю вектора поляризации.

^{*)} Теорема Гаусса (формула (19.16) или (19.17)) применима не только к электростатическому полю, но и к переменному электромагнитному полю при условии, что расстояние от заряда, создающего поле, до точки, в которой определяют напряженность, должно быть много меньше длины электромагнитной волны (подробнее см. § 26.6). Распространил теорему Гаусса на переменное электромагнитное поле (постулировал возможность ее применения) Дж. К. Максвелл. Поэтому теорему Гаусса в применении к переменному электромагнитному полю в литературе называют постулатом Максвелла.

На рис. 19.6, б показано расположение диполей в поляризованном диэлектрике длиной L , сечением S . На торцах диэлектрика образуются связанные заряды. Поверхностную плотность их обозначим через σ . На длине L' положительные и отрицательные заряды взаимно компенсируют друг друга. Поэтому поляризованный диэлектрик (см. рис. 19.6, б) можно рассматривать как диполь длиной L с сосредоточенными на концах зарядами σS .

Электрический момент всего диэлектрика длиной L равен $\sigma S L$. Электрический момент единицы длины диэлектрика: $P = \sigma S L / V = \sigma S L / (S L) = \sigma$. Таким образом, плотность связанных зарядов на торцах поляризованного диэлектрика равна модулю вектора \vec{P} (вектор перпендикулярен торцам). На рис. 19.6, в изображен свободный положительный заряд, вызвавший поляризацию окружающего его диэлектрика.

Окружим заряд сферой и подсчитаем нескомпенсированные связанные заряды, попавшие внутрь сферы. Нескомпенсированными связанными зарядами оказываются заряды диполей, пересекаемых поверхностью S . Их поверхностная плотность равна σ , поэтому

$$\sum q_{\text{связ}} = -\oint \sigma dS = -\oint \vec{P} d\vec{S}.$$

Знак минус появился вследствие того, что знак нескомпенсированных связанных зарядов противоположен знаку свободного заряда (см. рис. 19.6, в).

Формулу (19.16) можно переписать следующим образом:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \epsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} + \oint \vec{P} d\vec{S} = \sum q_{\text{своб}}.$$

Следовательно,

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = \sum q_{\text{своб}} - \oint \vec{P} d\vec{S} = \sum q_{\text{своб}} + \sum q_{\text{связ}}$$

или

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{своб}} + \sum q_{\text{связ}}}{\epsilon_0}. \quad (19.17a)$$

Формулы (19.17) и (19.17a) различаются своими правыми частями.

§ 19.14. Применение теоремы Гаусса для определения напряженности и потенциала в поле точечного заряда. Теорему Гаусса в интегральной форме можно использовать для нахождения напряженности или электрического смещения в какой-либо точке поля, если через эту точку можно провести замкнутую поверхность таким образом, что все ее точки будут в одинаковых (симметричных) условиях по отношению к заряду, находящемуся внутри замкнутой поверхности.

Такой поверхностью является обычно сфера (если заряд точечный) или боковая поверхность цилиндра (если заряд линейный). При этом в силу симметричного расположения всех точек поверхности относительно заряда числовое значение напряженности поля в различных точках этой поверхности будет одинаковым.

В качестве примера использования теоремы Гаусса найдем напряженность поля, создаваемую точечным зарядом в точке, удаленной на расстоянии R от заряда. С этой целью через заданную точку проведем сферическую поверхность радиусом R , полагая, что заряд находится в центре сферы, и применим к этой сфере теорему Гаусса (см. рис. 19.7, д).

Элемент поверхности сферы $d\vec{S}$ перпендикулярен поверхности сферы^{*)} и направлен в сторону внешней (по отношению к объему внутри поверхности) нормали.

В данном примере в каждой точке сферы \vec{E} и $d\vec{S}$ совпадают по направлению. Угол между ними равен нулю. Если учесть, что числовое значение \vec{E} во всех точках сферы одно и то же, то E можно вынести из под интеграла:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \oint E dS \cos 0^\circ = E \oint dS = E 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$$

Следовательно, напряженность, создаваемая точечным зарядом q на расстоянии R от него,

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^2}. \tag{19.18}$$

В силу сферической симметрии напряженность поля имеет только одну R -ю составляющую в сферической системе координат. Значит,

$$E = E_R = -\frac{\partial \phi}{\partial R}.$$

Отсюда

$$\phi = -\int E dR = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R} + C. \tag{19.19}$$

Таким образом, потенциал в поле точечного заряда обратно пропорционален первой степени расстояния R от точечного заряда до точки, в которой определяется потенциал; C представляет собой постоянную интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал. Напомним, что аналогичные выражения для E и ϕ были получены в § 19.4 при использовании закона Кулона.

§ 19.15. Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Теорема Гаусса в интегральной форме выражает связь между потоком вектора \vec{D} через поверхность S , ограничивающую некоторый объем, и алгебраической суммой зарядов, находящихся внутри этого объема. С помощью теоремы Гаусса в интегральной форме нельзя определить, как связан исток линий \vec{D} в данной точке поля с плотностью свободных зарядов в этой же точке поля. Ответ на этот вопрос дает дифференциальная форма записи теоремы Гаусса. Чтобы прийти к ней, разделим обе части уравнения (19.16) на одну и ту же скалярную величину — на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности S :

$$\frac{\oint \vec{D} d\vec{S}}{V} = \frac{\sum q_{\text{своб}}}{V}. \tag{a)}$$

^{*)} Имеется в виду вектор, изображающий элемент поверхности сферы.

Выражение (а) остается справедливым для объема V любой величины. Устремим объем к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{D} d\vec{S}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_{\text{своб}}}{V}. \quad (6)$$

При стремлении объема к нулю $\oint \vec{D} d\vec{S}$ также стремится к нулю, но отношение двух бесконечно малых величин $\oint \vec{D} d\vec{S}$ и V есть величина конечная^{*)}. Предел отношения потока векторной величины сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем, к объему V называют *дивергенцией вектора \vec{D}* ($\text{div } \vec{D}$). Часто вместо термина «дивергенция» употребляют термин «расхождение» или «исток» вектора \vec{D} .

В правой части выражения (б) находится объемная плотность свободного заряда $\rho_{\text{своб}}$.

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме записывают следующим образом (*первая форма записи*):

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{своб}}, \quad (19.20)$$

т. е. исток линий \vec{D} в данной точке поля определяется значением плотности свободных зарядов в этой точке. Если объемная плотность зарядов в данной точке положительна ($\rho_{\text{своб}} > 0$), то из бесконечно малого объема, окружающего данную точку поля, линии вектора \vec{D} исходят (исток положителен, рис. 19.8, а). Если в данной точке поля $\rho_{\text{своб}} < 0$, то в

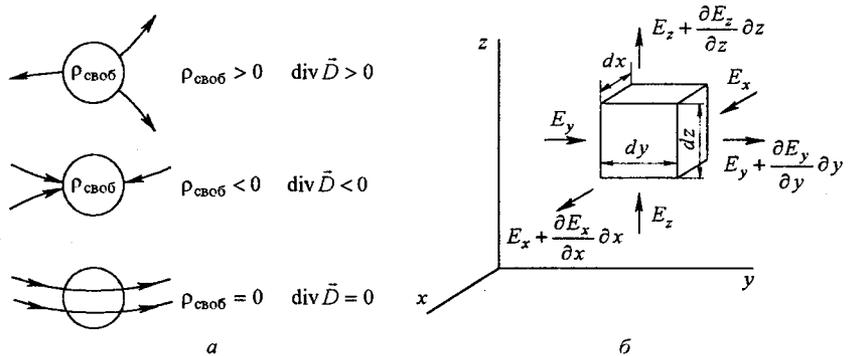


Рис. 19.8

бесконечно малый объем, внутри которого находится данная точка, линии вектора \vec{D} входят. И, наконец, если в какой-либо точке поля $\rho_{\text{своб}} = 0$, то в данной точке объема нет ни истока, ни стока линий \vec{D} , т. е. в данной точке линии вектора \vec{D} не начинаются и не заканчиваются.

^{*)} В III ч. учебника неоднократно использованы величины, которые определяются при стремлении рассматриваемого объема или площади к нулю. Стремление к нулю не следует понимать дословно: речь идет о таком уменьшении линейных размеров объема или площади, при котором еще не сказывается дискретность материи.

Если среда однородна и изотропна, то ее $\varepsilon_a = \text{const}$. Вместо (19.20) запишем выражение $\operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E} = \rho_{\text{своб}}$.

Вынесем ε_a за знак дивергенции:

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}};$$

следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}} / \varepsilon_a. \quad (19.21)$$

Формула (19.21) представляет собой *вторую* форму записи теоремы Гаусса. Она справедлива только для однородной и изотропной сред. Для неоднородной среды ε_a является функцией координат, и потому она не может быть вынесена за знак дивергенции.

Уравнение (19.17а) в дифференциальной форме записывают так (*третья* форма записи):

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}) / \varepsilon_0. \quad (19.21a)$$

Следовательно, истоком вектора \vec{E} , в отличие от истока вектора \vec{D} , являются не только свободные, но и связанные заряды.

В различных системах координат $\operatorname{div} \vec{E}$ раскрывается по-разному.

§ 19.16. Вывод выражения для $\operatorname{div} \vec{E}$ в декартовой системе координат. Выделим в пространстве весьма малый параллелепипед с ребрами dx , dy , dz . Расположим ребра параллелепипеда параллельно осям декартовой системы (рис. 19.8, б). Для нахождения истока вектора \vec{E} из данного объема составим разность потоков, выходящих из данного объема и входящих в него, и разделим разность потоков на объем параллелепипеда, равный $dx dy dz$.

Левую грань площадью $dx dz$ пронизывает только одна составляющая вектора \vec{E} , т. е. составляющая $\vec{j} E_y$, остальные ($\vec{i} E_x$ и $\vec{k} E_z$) скользят по грани. Поток вектора \vec{E} , входящий в эту грань, равен $E_y dx dz$.

Так как \vec{E} есть функция координат, то и ее составляющие также являются функциями координат. Правая грань площадью $dx dz$ отстоит от левой грани на расстоянии dy . Проекция вектора \vec{E} на ось y равна

$E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy$, где $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ — скорость изменения E_y в направлении оси y ;

$\frac{\partial E_y}{\partial y} dy$ — приращение «игрековой» составляющей напряженности поля на пути dy .

Поток, выходящий из правой грани площадью $dx dz$, равен $(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy) dx dz$. Исток через грани площадью $dx dz$ равен $\frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz$.

Таким же путем получим разность потоков через грани площадью $dy dz$: $\frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$.

Разность потоков через грани $dx dy$ (верхнюю и нижнюю стенки объема) равна $\frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz$.

Для нахождения $\operatorname{div} \vec{E}$ сложим разности потоков через все грани и поделим сумму на объем параллелепипеда $dx dy dz$, получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (19.22)$$

§ 19.17. Использование оператора набла для записи операции взятия дивергенции. Ранее было показано, что умножение оператора ∇ на скалярную функцию равносильно взятию градиента от этой скалярной функции. Покажем, что скалярное умножение оператора ∇ на векторную функцию, например, на функцию \vec{E} , означает взятие дивергенции от этой векторной функции.

Произведение $\nabla \vec{E}$ можно записать так:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z \right)^* = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (19.23)$$

Правые части (19.22) и (19.23) равны, следовательно, должны быть равны и левые. Поэтому $\nabla \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E}$, т. е., действительно, умножение оператора ∇ на вектор \vec{E} означает взятие дивергенции от этого вектора.

§ 19.18. Выражение $\operatorname{div} \vec{E}$ в цилиндрической и сферической системах координат. Без вывода запишем выражение $\operatorname{div} \vec{E}$:

в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \quad (19.24)$$

в сферической системе координат:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial(R^2 E_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (19.25)$$

§ 19.19. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа. Эти уравнения являются основными дифференциальными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Действительно, известно, что $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. В то же время согласно теореме Гаусса (19.21) $\operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}} / \epsilon_a$.

* Почленно умножаем слагаемые первой скобки на слагаемые второй скобки. Учитываем, что скалярное произведение одноименных ортов равно единице, а разноименных — нулю: $\vec{i} \vec{i} = \vec{j} \vec{j} = \vec{k} \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$, $\vec{i} \vec{j} = \vec{j} \vec{i} = \vec{j} \vec{k} = \vec{k} \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$.

Подставим в (19.21) \vec{E} из (19.6), получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi) = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Вынесем знак минус за знак дивергенции:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Вместо $\operatorname{grad} \varphi$ запишем его эквивалент $\nabla \varphi$; вместо div напишем ∇ . Тогда

$$\nabla (\nabla \varphi) = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a},$$

или

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \quad (19.26)$$

Уравнение (19.26) называют *уравнением Пуассона*. Частный вид уравнения Пуассона, когда $\rho_{\text{своб}} = 0$, называют *уравнением Лапласа*. Уравнение Лапласа записывают так:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (19.27)$$

Оператор $\nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ называют *оператором Лапласа*, или лапласианом, и иногда обозначают еще символом Δ . Поэтому можно встретить и такую форму записи уравнения Пуассона:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Раскроем $\nabla^2 \varphi$ в декартовой системе координат. С этой целью произведение двух множителей ∇ и $\nabla \varphi$ запишем в развернутом виде:

$$\nabla (\nabla \varphi) = \left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Произведем почленное умножение и получим

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Таким образом, уравнение Пуассона в декартовой системе координат записывают следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \quad (19.28)$$

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (19.29)$$

Приведем без вывода выражения $\nabla^2 \varphi$ в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (19.30)$$

в сферической системе координат:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (19.31)$$

Уравнение Пуассона выражает связь между частными производными второго порядка от φ в любой точке поля и объемной плотностью свободных зарядов в этой же точке поля. В то же время потенциал в какой-либо точке поля зависит от всех зарядов, создающих поле, а не только от значения свободного заряда, находящегося в данной точке. Уравнение Пуассона применяют при исследовании потенциальных полей (электрических и магнитных) с 1812 г.

Уравнение Лапласа (1782 г.) первоначально было применено для описания потенциальных полей небесной механики и впоследствии — для описания электрических полей.

Рассмотрим вопрос о том, как в общем виде можно записать решение уравнения Пуассона.

Положим, что в объеме V есть объемные (ρ), поверхностные (σ) и линейные (τ) заряды. Эти заряды представим в виде совокупностей точечных зарядов: ρdV , σdS , τdl ; dV — элемент объема; dS — элемент заряженной поверхности; dl — элемент длины заряженной оси.

Составляющая потенциала $d\varphi$ в некоторой точке пространства, удаленной от ρdV на расстояние R , в соответствии с формулой (19.19) равна

$$\frac{\rho dV}{4 \pi \epsilon_a R}.$$

Составляющие потенциала от поверхностного и линейного зарядов, если рассматривать их как точечные, определим аналогичным образом:

$$\frac{\sigma dS}{4 \pi \epsilon_a R} \quad \text{и} \quad \frac{\tau dl}{4 \pi \epsilon_a R}.$$

Полное значение φ представим как сумму (интеграл) составляющих потенциала от всех зарядов в поле:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_S \frac{\sigma dS}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\tau dl}{R}. \quad (19.31a)$$

В формуле (19.31a) ρ , σ и τ есть функции радиуса R . Практически формулой (19.31a) пользуются сравнительно редко, так как распределение σ по поверхности, τ по длине и ρ по объему зависит от конфигурации электродов и, как правило, перед проведением расчетов неизвестно. Интегрирование произвести затруднительно, так как обычно неизвестно, какова зависимость ρ , σ и τ от радиуса R (см. приложение Л).

При использовании формулы (19.31a) предполагается, что потенциал на бесконечности равен нулю и что заряды, создающие поле, распределены в ограниченной (не бесконечно протяженной) области (иначе интеграл может оказаться расходящимся).

§ 19.20. Граничные условия. Под *граничными условиями* понимают условия, которым подчиняется поле на границах раздела сред с разными электрическими свойствами.

При изучении раздела «Переходные процессы» большое значение имел вопрос о начальных условиях и законах коммутации, которые позволяли определить постоянные интегрирования при решении задач классическим методом. В классическом методе они использовались в явном виде, в операторном — в скрытом. Без них нельзя решить ни одной задачи на переходные процессы.

Можно провести параллель между ролью граничных условий в электрическом (или любом другом) поле и ролью начальных условий и законов коммутации при переходных процессах.

При интегрировании уравнения Лапласа (или Пуассона) в решение входят постоянные интегрирования. Их определяют, исходя из граничных условий. Прежде чем перейти к подробному обсуждению граничных условий, рассмотрим вопрос о поле внутри проводящего тела в условиях электростатики.

§ 19.21. Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики. В проводящем теле, находящемся в электростатическом поле, вследствие явления электростатической индукции происходит разделение зарядов. Отрицательные заряды смещаются в сторону более высокого потенциала, положительные — в противоположную сторону (рис. 19.9).

Все точки тела будут иметь одинаковый потенциал. Если между какими-либо точками возникла бы разность потенциалов, то под ее действием появилось бы упорядоченное движение зарядов, что противоречит понятию электростатического поля.

Поверхность тела эквипотенциальна. Вектор напряженности внешнего поля в любой точке поверхности подходит к ней под прямым углом.

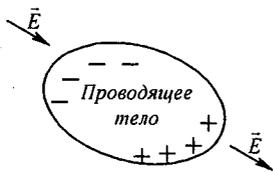


Рис. 19.9

Внутри проводящего тела напряженность поля равна нулю, так как внешнее поле компенсируется полем зарядов, расположенных на поверхности тела.

§ 19.22. Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика. На границе проводящее тело — диэлектрик при отсутствии тока по проводящему телу выполняются два условия:

1) отсутствует тангенциальная (касательная к поверхности) составляющая напряженности поля:

$$E_t = 0;$$

2) вектор электрического смещения \vec{D} в любой точке диэлектрика, непосредственно примыкающей к поверхности проводящего тела, численно равен плотности заряда σ на поверхности проводящего тела в этой точке:

$$D = \sigma.$$

Рассмотрим первое условие. Все точки поверхности проводящего тела имеют один и тот же потенциал. Следовательно, между двумя любыми весьма близко расположенными друг к другу точками поверхности приращение потенциала $d\varphi = 0$, но $d\varphi = E_t dl$, следовательно, $E_t dl = 0$. Так как элемент пути dl между точками на поверхности не равен нулю, то равна нулю E_t .

Для доказательства второго условия мысленно выделим бесконечно малый параллелепипед (рис. 19.10). Верхняя грань его параллельна поверхности проводящего тела и расположена в диэлектрике. Нижняя грань находится в проводящем теле. Высоту параллелепипеда возьмем весьма малой (сплющим его). Применим к нему теорему Гаусса. В силу малости линейных размеров можно принять, что плотность заряда σ во всех точках на поверхности dS проводящего тела, попавшей внутрь параллелепипеда, одна и та же. Полный заряд внутри рассматриваемого объема равен σdS .

Поток вектора \vec{D} через верхнюю грань объема $\vec{D} d\vec{S} = D dS$. Поток вектора \vec{D} через боковые грани объема ввиду малости последнего и того, что вектор \vec{D} скользит по ним, нет. Через «дно» поток также отсутствует, так как внутри проводящего тела $E = 0$ и $D = 0$ (ϵ_a проводящего тела есть величина конечная).

Таким образом, поток вектора \vec{D} из объема равен $D dS = \sigma dS$ или $D = \sigma$.

§ 19.23. Условия на границе раздела двух диэлектриков. На границе раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями выполняются два следующих условия:

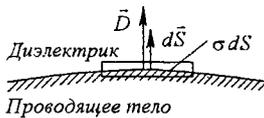


Рис. 19.10

1) равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$E_{1t} = E_{2t}; \tag{19.34}$$

2) равны нормальные составляющие электрической индукции:

$$D_{1n} = D_{2n}. \tag{19.35}$$

Индекс 1 относится к первому диэлектрику, индекс 2 — ко второму.

Первое условие вытекает из того, что в потенциальном поле $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ по любому замкнутому контуру; второе представляет следствие теоремы Гаусса.

Докажем справедливость первого условия. С этой целью выделим плоский замкнутый контур $mnpqt$ (рис. 19.11) и составим вдоль него циркуляцию вектора напряженности электрического поля. Верхняя сторона контура расположена в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , нижняя — в диэлектрике с ϵ_1 . Длину стороны mn , равную длине стороны pq , обозначим dl . Контур возьмем так, что размеры np и qm будут бесконечно малы по сравнению с dl . Поэтому составляющими интеграла $\oint \vec{E}_1 d\vec{l}$ вдоль вертикальных сторон в силу их малости пренебрежем. Составляющая $\oint \vec{E} d\vec{l}$ на пути mn равна $\vec{E}_2 d\vec{l}_2 = E_{2t} dl$, по пути pq равна $\vec{E}_1 d\vec{l}_1 = -E_{1t} dl$. Знак минус появился потому, что элемент длины на пути pq и касательная составляющая вектора \vec{E}_1 направлены в противоположные стороны ($\cos 180^\circ = -1$). Таким образом, $\oint \vec{E} d\vec{l} = E_{2t} dl - E_{1t} dl = 0$ или $E_{1t} = E_{2t}$.

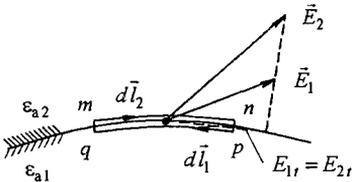


Рис. 19.11

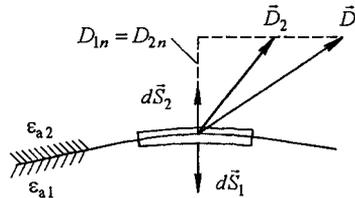


Рис. 19.12

Убедимся в справедливости второго условия. С этой целью на границе раздела двух сред выделим очень малых размеров параллелепипед (рис. 19.12). Внутри выделенного объема есть связанные заряды и нет свободных (случай наличия свободных зарядов на границе раздела рассмотрим отдельно), поэтому $\oint \vec{D} d\vec{S} = 0$.

Поток вектора \vec{D} :

через верхнюю грань площадью dS : $\vec{D}_2 d\vec{S}_2 = D_{2n} dS_2$;

через нижнюю грань: $\vec{D}_1 d\vec{S}_1 = D_1 dS \cos 180^\circ = -D_{1n} dS$; $|d\vec{S}_1| = |d\vec{S}_2| = dS$.

Следовательно, $\oint \vec{D} d\vec{S} = -D_{1n} dS + D_{2n} dS = 0$ или $D_{1n} = D_{2n}$.

Несмотря на то что в рассматриваемом случае свободный заряд на границе раздела двух сред отсутствует, на границе раздела сред *возникает связанный заряд* $\sigma_{\text{связ}}$, плотность которого равна разности нормальных составляющих векторов P_{2n} и P_{1n} в точке на границе:

$$\sigma_{\text{связ}} = P_{2n} - P_{1n} = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} D_{2n} - \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} D_{1n} = \epsilon_0 E_{1n} \left(1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \right).$$

При наличии на границе раздела двух сред свободных зарядов с плотностью σ (это встречается редко) $\oint \vec{D} d\vec{S} = D_{2n} dS - D_{1n} dS = \sigma dS$, при этом

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (19.36)$$

т. е. при наличии на границе раздела двух сред свободных зарядов нормальная составляющая вектора \vec{D} скачком изменяется на значение плотности свободных зарядов на границе раздела.

Из § 19.3 известно, что потенциалу придается смысл работы при переносе единичного заряда. При переходе через границу, отделяющую один диэлектрик от другого, например, при переходе от точки n к точке p на рис. 19.11, нормальная составляющая напряженности является величиной конечной, а длина пути стремится к нулю. Произведение их равно нулю.

Поэтому *при переходе через границу раздела двух диэлектриков потенциал не претерпевает скачков.*

§ 19.24. Теорема единственности решения. Электрическое поле описывается уравнениями Лапласа или Пуассона. Оба они являются уравнениями в частных производных. Уравнения в частных производных в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений имеют в общем случае множество линейно независимых друг от друга решений. В любой же конкретной практической задаче есть единственная картина поля, т. е. единственное решение. Из множества линейно независимых решений, допускаемых уравнением Лапласа—Пуассона, выбор единственного, удовлетворяющего конкретной задаче, производят с помощью граничных условий.

Если есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа—Пуассона и граничным условиям в данном поле, то эта функция и представляет собой то единственное решение конкретной задачи, которое ищут.

Это положение называют теоремой единственности решения. Докажем ее. Допустим, что есть два решения (φ' и φ'' , \vec{E}' и \vec{E}''). На поверхности каждого k -го проводящего тела с зарядом q_k потенциал $\varphi'_k = \varphi''_k$. Во всех точках разностное поле ($\varphi = \varphi' - \varphi''$ и $\vec{E} = \vec{E}' - \vec{E}''$) отсутствует, так как его энергия $\int_V \frac{1}{2} \epsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2} \sum \varphi_k q_k = 0$ (§ 19.43; на поверхности проводника $\varphi_k = \varphi'_k - \varphi''_k = 0$).

§ 19.25. Общая характеристика задач электростатики и методов их решения. В зависимости от того, что задано и что определяют, задачи электростатики можно подразделить на три типа.

Задача первого типа. По заданному закону распределения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$ найти распределение свободных зарядов, вызвавших поле. Такого рода задачи можно решать с помощью уравнения Пуассона. Это наиболее простой тип задач; $-\sigma_{\text{своб}}/\epsilon_a$ в данной точке поля согласно уравнению Пуассона равняется сумме частных производных второго порядка от φ , в которую подставляют координаты данной точки поля. Одна из задач первого типа рассмотрена в примере 193.

Близкой к задачам первого типа является задача, в которой известно выражение для потенциала φ как функции координат и требуется найти распределение поверхностных или линейных зарядов, создающих поле, когда объемные заряды в поле отсутствуют. Если заряды расположены на поверхности проводящих тел, то в соответствии с формулой (19.33) плотность заряда $\sigma = \epsilon E_n$, где $E_n = -\partial\varphi/\partial n$. Индекс n означает направление, нормальное к поверхности тела.

Задача второго типа. Задан закон распределения свободных зарядов в пространстве в функции координат $\rho_{\text{своб}}(x, y, z)$. Найти закон изменения в пространстве $\varphi(x, y, z)$. Эта задача является обратной по отношению к первой и значительно сложнее ее. Принципиально задача состоит в решении уравнения Пуассона относительно φ , т. е. в решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных. Задачи второго типа рассмотрены в примерах 188–189.

Задачи первого и второго типов практически встречаются редко, чаще имеют дело с задачами третьего типа.

Задача третьего типа. Известны потенциалы (или полные заряды) и геометрия тел, создающих поле. Требуется найти закон изменения E или φ во всех точках поля. Несколько задач третьего типа рассмотрены в § 19.37–19.40 и в примерах 181, 187, 194.

Если среда, в которой создано поле, является неоднородной, то ее подразделяют на однородные области и решение уравнения Лапласа производят для каждой области отдельно. Основная трудность состоит в том, что хотя полные заряды тел и известны, но плотность распределения зарядов на отдельных участках заряженного тела неизвестна. Решения уравнения Лапласа для отдельных областей должны быть согласованы друг с другом: на границе раздела двух сред с различными ϵ_a должны выполняться граничные условия. На границе раздела проводящего тела и диэлектрика также должны выполняться свои граничные условия.

Задачи третьего типа можно решать аналитически, графически, либо путем моделирования. В данном параграфе приведена лишь краткая характеристика этих методов. Подробное изложение их дано в дальнейшем на конкретных примерах.

В простых случаях задачи аналитического расчета полей решают с помощью теоремы Гаусса в интегральной форме (см. § 19.13). В более сложных случаях аналитическое решение задач третьей группы выполняют, используя уравнение Лапласа.

Аналитические методы решения задач третьей группы можно подразделить на две подгруппы. В первой производят интегрирование уравнения Лапласа без использования вспомогательных (искусственных) приемов. Во второй применяют искусственный прием — метод зеркальных изображений^{*)}.

По методу зеркальных изображений решение проводят путем введения вспомогательного заряда или зарядов, которые в расчетном отношении заменяют связанные заряды, выявившиеся на границе тел или сред в результате их поляризации или электростатической индукции (см. § 19.30–19.33).

В тех случаях, когда потенциал φ является функцией только одной координаты выбранной системы координат, уравнение Лапласа из уравнения в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое интегрируется без затруднений (см. примеры 186–187).

Если же потенциал φ является функцией двух или трех координат, для того чтобы проинтегрировать уравнение Лапласа применяют метод Фурье, позволяющий перейти от уравнения в частных производных к эквивалентной ему совокупности двух или соответственно трех обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 19.39).

Графический метод анализа и расчета задач третьей группы представляет собой метод, в котором по определенным правилам строят семейство силовых и эквипотенциальных линий, используя некоторые заранее известные свойства исследуемого поля. Эти правила практически одни и те же для всех неизменных во времени полей, т. е. для электростатического поля, электрического поля постоянного тока в проводящей среде (см. гл. 20) и для магнитного поля постоянного тока (см. гл. 21).

В основу анализа и расчета электростатических полей методом моделирования положена аналогия между электростатическим полем и электрическим полем постоянного тока в проводящей среде. Метод моделирования основан на сопоставлении задач электростатики и сходной задачи на электрическое поле постоянного тока в проводящей среде, в которой совокупность силовых и эквипотенциальных линий практически такая же. Это дает возможность воспользоваться результатами экспериментально исследования поля в проводящей среде при решении родственной электростатической задачи. Подробнее об этом говорится в § 24.7–24.9. Следует заметить, что при расчетах полей широко применяют метод наложения.

В заключение отметим, что в задачах электростатики расчет можно производить для определения либо точечной характеристики поля (напряженности или потенциала в заданной точке), либо интегральной характеристики данного поля, например, емкости или разности потенциалов.

В приложениях И, К, Л, М, Н к ч. III рассмотрены основные положения ряда аналитических методов расчета полей, которые рекомендуются

^{*)} См. также метод конформных преобразований в приложении М.

изучить студентам специальностей ТВН, электронной техники, электрических машин и аппаратов и др.

Перейдем к рассмотрению некоторых простейших электростатических задач.

§ 19.26. Поле заряженной оси. Под *заряженной осью* понимают тонкий теоретически бесконечно длинный металлический проводник (тонкая проволока). Заряд на единицу длины ее принято обозначать через τ . Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ось, равна ϵ_a . Для нахождения напряженности поля в некоторой точке, удаленной на расстояние r от оси (рис. 19.13), проведем через эту точку цилиндрическую поверхность так, что ось цилиндрической поверхности совпадет с заряженной осью.

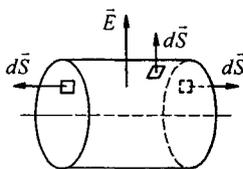


Рис. 19.13

Используем теорему Гаусса, которая применима к замкнутой поверхности. В рассматриваемом случае последняя образована боковой поверхностью цилиндра и двумя его доньшками. Поток вектора \vec{E} имеется только через боковую поверхность цилиндра. Через доньшки поток вектора \vec{E} отсутствует, так как элемент поверхности $d\vec{S}$ каждого доньшка перпендикулярен \vec{E} .

Элементы $d\vec{S}$ боковой поверхности и напряженность электрического поля \vec{E} в любой точке цилиндрической поверхности по направлению совпадают, поэтому

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \tau / \epsilon_a \quad \text{или} \quad E = \tau / (2\pi \epsilon_a r). \quad (19.37)$$

Напряженность в поле заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию r точки от оси. Потенциал

$$\varphi = - \int E dr = - \int \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a r} dr = - \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \ln r + C = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \ln \frac{1}{r} + C \quad (19.38)$$

изменяется по логарифмическому закону^{*)}.

§ 19.27. Поле двух параллельных заряженных осей. Пусть одна ось на единицу длины имеет заряд $+\tau$, другая — заряд $-\tau$. Возьмем в поле произвольную точку M (рис. 19.14). Результирующая напряженность поля в ней \vec{E}_M равна геометрической сумме напряженностей от обоих зарядов. Расстояние от точки M до положительно заряженной оси обозначим через a , до отрицательно заряженной оси — через b . Потенциал есть функция скалярная. Потенциал точки M равен сумме потенциалов от каждой оси:

^{*)} Единица, находящаяся под знаком логарифма в (19.38), имеет смысл единичного радиуса (единицы измерения), поэтому логарифм берется от величины с нулевой размерностью.

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{l}{a} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{l}{b} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + C. \quad (19.39)$$

Уравнением эквипотенциали в поле двух заряженных осей является выражение $b/a = \text{const}$. Эквипотенциаль представляет собой совокупность точек, отношение расстояний в которых до двух заданных точек есть величина постоянная.

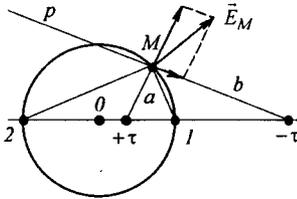


Рис. 19.14

В геометрии известна теорема Апполония. Согласно этой теореме геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная, является окружность. Поэтому эквипотенциаль в поле двух заряженных осей есть окружность. Рассмотрим, как ее можно построить. Соединим точку M с осями. Проведем биссектрисы внутреннего (aMb) и внешнего (pMa) углов.

Точки 1 и 2 пересечения биссектрис с линией, проведенной через заряженные оси, и точка M будут тремя точками искомой окружности.

Для нахождения положения центра окружности (точки O) разделим пополам расстояние между точками 1 и 2 .

§ 19.28. Поле двухпроводной линии. Расстояние между осями двух проводов линии (рис. 19.15, a) обозначим через d , радиус каждого провода — через r . Если левому проводу будет сообщен, например, заряд

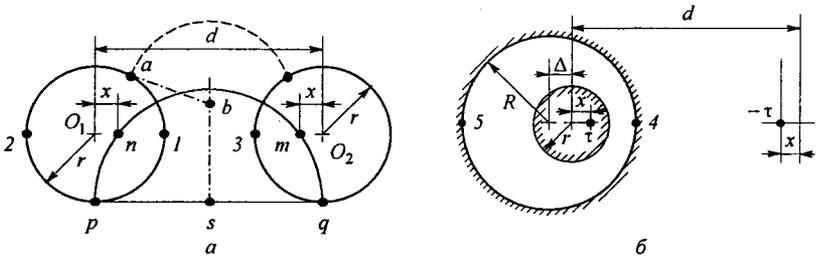


Рис. 19.15

$+\tau$ на единицу длины, а правому — заряд $-\tau$, то в пространстве между проводами возникает электрическое поле. Заряды проводов распределятся по поверхности с неодинаковой плотностью^{*)}.

Поверхность каждого провода в отдельности является эквипотенциальной. Внутри проводов $E = 0$. Задача о поле двухпроводной линии сводится к рассмотренной задаче о поле двух заряженных осей (картину поля двух заряженных осей см. на рис. 19.3, a). Расположим заряженные оси так, чтобы поверхности каждого провода являлись эквипотенциальными.

^{*)} Электростатическое поле, созданное заряженными телами, *отсоединенными от источника пополнения зарядов*, быстро исчезает — заряды стекают через воздух и крепкие детали тел.

Точки O_1 и O_2 означают геометрические оси проводов. Пусть заряженные оси расположены в точках m и n . Из условия симметрии они на одинаковое расстояние x удалены от геометрических осей.

Запишем условие равенства потенциалов точек 1 и 2 левого провода.

Отношение b/a для точки 1 есть $\frac{d-r-x}{r-x}$; отношение b/a для точки 2 равно $\frac{d+r-x}{r+x}$. Из равенства $\frac{d-r-x}{r-x} = \frac{d+r-x}{r+x}$ получим

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2}. \quad (19.40)$$

В последнем выражении знак минус перед радикалом соответствует положению точки n , знак плюс — точке m .

Положение заряженных осей (часто их называют *электрическими осями* проводов) вместо подсчета по формуле (19.40) находят путем следующих графических построений.

Проводят общую касательную к проводам (прямая pq на рис. 19.15, *a*), делят расстояние между точками касания пополам (точка s) и проводят окружность радиусом ps . Точки пересечения (m и n) окружности с линией O_1O_2 дают положения электрических осей, т. е. таких осей, на которых надо было бы мысленно сосредоточить заряды проводов, чтобы поверхности проводов являлись эквипотенциалами. Так как поле от двух заряженных осей вне проводов удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время выполнены граничные условия (поверхность каждого провода является эквипотенциалью, на ней $E_t = 0$), то на основании теоремы единственности полученное решение истинно. Нетрудно убедиться в том, что если $d \gg r$, то x становится много меньше r . При этом электрические и геометрические оси практически совпадают.

Для построения силовой линии (дуги окружности), выходящей из произвольной точки a на поверхности левого провода (см. рис. 19.15, *a*), надо определить положение центра этой окружности (точка b). Точка b находится на пересечении касательной к поверхности левого провода в точке a с перпендикуляром к линии центров O_1O_2 в ее середине (построения показаны пунктиром).

Рассмотренную методику определения положения электрических осей можно применить и в том случае, когда заданы два цилиндрических электрода неравных радиусов, следы поверхности которых совпадают с какими-либо двумя эквипотенциальными линиями на рис. 19.3, *a*. Например, поле в пространстве между двумя цилиндрическими электродами, один из которых находится внутри другого (см. рис. 19.15, *б*), при том, что заданы радиусы r , R и смещение между осями Δ , найдем как поле от двух заряженных осей с зарядами $+q$ и $-q$. Положение осей определено значениями x и d . Для подсчета значений x и d следует воспользоваться уравнением (19.40) и уравнением, выражающим равенство потенциалов точек 4 и 5 окружности радиусом R .

§ 19.29. Емкость. Если каких-либо два проводящих тела разделены диэлектриком и несут на себе равные по значению и противоположные по знаку заряды Q , то в пространстве между ними создается электричес-

кое поле. Пусть разность потенциалов между телами, обусловленная этими зарядами, равна U .

Под емкостью C между двумя телами, на которых имеются равные и противоположные по знаку заряды, понимают абсолютное значение отношения заряда на одном из тел к напряжению между телами:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (19.41)$$

В СИ единицей измерения емкости является фарада (Ф), выраженная через другие единицы СИ как кулон на вольт (Кл / В). Это очень крупная единица и поэтому на практике пользуются более мелкими кратными ей единицами: микрофарадой (мкФ) и пикофарадой (пФ); $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$, $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$.

Устройства для получения определенной емкости называются *конденсаторами*. Однако не следует думать, что емкостью обладают только специально созданные для ее получения устройства. Можно говорить о емкости двух любых проводящих тел, разделенных диэлектриком.

В литературе также можно встретить термин *емкость уединенного тела*. Под ней понимают отношение заряда на этом теле к его потенциалу, полагая, что второе тело удалено в бесконечность и что потенциал его равен нулю. В приведенном определении емкости между двумя проводящими телами и емкости уединенного тела имеется ввиду, что если в электростатическом поле есть и другие проводящие тела, то они не заряжены; в противном случае заряды этих тел влияли бы на значение потенциала тела.

Так как напряжение между двумя телами в электростатическом поле может быть линейно выражено через заряд Q (исключение составляют только устройства, в которых используются сегнетодиэлектрики — вещества, у которых ϵ является функцией E), то отношение Q/U оказывается не зависящим ни от Q , ни от U .

Емкость зависит только от конфигурации тел, их размеров, расстояния между телами, электрических свойств диэлектрика (величины ϵ_r).

Рассмотрим определение *емкости двухпроводной линии*. Выразим напряжение между двумя проводами через заряд τ на единицу длины. Точка 1 (см. рис. 19.15, а) принадлежит поверхности левого провода, точка 3 — поверхности правого провода. Разность потенциалов между ними:

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-r-x}{r-x} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r-x}{d-r-x}.$$

При $d \gg r$, $x \ll r$, поэтому

$$U_{13} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} 2 \ln \frac{d}{r} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{r}. \quad (19.42)$$

Следовательно, емкость единицы длины линии при условии $d \gg r$

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi \epsilon_a}{\ln(d/r)}. \quad (19.43)$$

Она зависит только от геометрических размеров и свойств среды и не зависит от значений заряда τ и напряжения U_{13} . Если расстояние между двумя проводами увеличивать, то емкость будет уменьшаться.

§ 19.30. Метод зеркальных изображений. Для расчета электростатических полей, ограниченных какой-либо проводящей поверхностью правильной формы или в которых есть геометрически правильной формы граница между двумя диэлектриками, широко применяют метод зеркальных изображений.

Это искусственный прием расчета, в котором кроме заданных зарядов вводят еще дополнительные, значения и местоположение которых выбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям в поле. Территориально заряды помещают там, где находятся зеркальные (в геометрическом смысле) отображения заданных зарядов. Метод зеркальных изображений применяют не только для расчета электростатических полей, но и для расчета электрических полей в проводящей среде и магнитных полей. Обоснованием метода и правильности даваемого им решения является теорема единственности.

Рассмотрим два примера на метод зеркальных изображений.

§ 19.31. Поле заряженной оси, расположенной вблизи проводящей плоскости. Заряженная ось (τ — заряд на единицу длины) расположена в диэлектрике параллельно поверхности проводящей среды (рис. 19.16, а). Проводящей средой может быть какая-либо металличе-

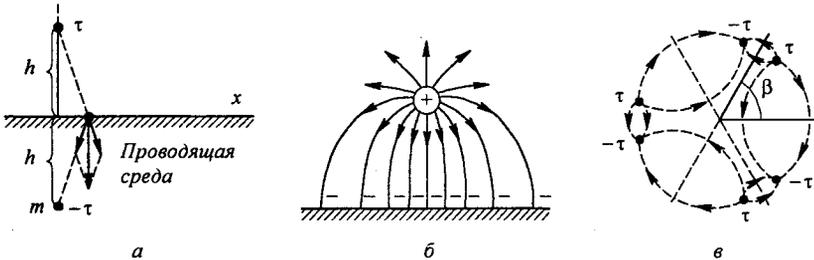


Рис. 19.16

кая стенка или, например, земля. Требуется определить характер поля в верхней полуплоскости (диэлектрике).

В результате электростатической индукции на поверхности проводящего тела выступают заряды. Плотность их меняется с изменением координаты x . Поле в диэлектрике создается не только заряженной осью, но и зарядами, выступившими на поверхности проводящего тела вследствие электростатической индукции. Несмотря на то, что распределение плотности зарядов на поверхности проводящей среды неизвестно, данную задачу сравнительно легко можно решить по методу зеркальных изображений.

Поместим в точке m фиктивный заряд обратного знака ($-\tau$) по отношению к заданному заряду. Расстояние h от точки m до плоскости раздела сред такое же, как и расстояние от действительного заряда до плоскости раздела. В этом смысле осуществлено зеркальное изображение. В данной задаче фиктивный заряд численно равен заданному, но имеет обратный знак. Так будет не всегда, т. е. не во всех задачах искусственно введенный заряд будет численно равен заданному и иметь противоположный знак.

Убедимся, что напряженность поля от двух зарядов (τ и $-\tau$) в любой точке границы раздела имеет только нормальную к границе составляющую и не имеет тангенциальной составляющей (см. построения на рис. 19.16, а). Действительно, тангенциальные составляющие от обоих зарядов имеют противоположные направления и в сумме дают нуль в любой точке поверхности.

Можно убедиться в том, что потенциал от каждой из осей, определяемый формулой (19.38), удовлетворяет уравнению Лапласа [формуле (19.30)]. Для проверки следует подставить правую часть формулы (19.38) в формулу (19.30) и убедиться в том, что $\nabla^2 \varphi$ будет равно нулю:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r} \right) \right] = 0.$$

Так как потенциал от каждой из осей удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время выполнено граничное условие, то на основании теоремы единственности полученное решение является истинным.

Картина поля заряженной оси, расположенной параллельно проводящей плоскости, изображена на рис. 19.16, б. Силовые линии перпендикулярны поверхности провода и поверхности проводящей плоскости. Знаки минус на поверхности проводящей плоскости означают отрицательные заряды, выявившиеся на ее поверхности в результате электростатической индукции.

Множественные зеркальные отражения. Если заряд τ находится в диэлектрике внутри двугранного угла $\beta = \pi/n$ (n — целое число), а границами угла являются проводящие стенки (на рис. 19.16, в $n=3$), то поле внутри двугранного угла определится как поле от знакочередующихся $2n$ зарядов $\pm\tau$, расположенных зеркально по отношению друг к другу. На каждой стороне двугранного угла тангенциальная составляющая напряженности поля равна нулю.

§ 19.32. Поле заряженной оси, расположенной вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями. Как показано на рис. 19.17, а, верхнее полупространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{a1} , нижнее — диэлектриком с ϵ_{a2} ; ab — граница раздела двух сред. В верхнем полупространстве параллельно границе раздела сред находится заряженная ось с зарядом τ_1 . Вследствие поляризации диэлектриков на границе раздела выявятся связанные заряды, влияющие на поле в обеих средах. Учет влияния их на поле проводят путем введения двух дополнительных фиктивных зарядов τ_2 и τ_3 (в отличие от задачи, где вводился

один заряд). В ней надо было удовлетворить только одному условию ($E_t = 0$), и это можно было сделать с помощью одного заряда. В данной же задаче надо удовлетворить двум граничным условиям, что возможно только с помощью двух пока неизвестных зарядов τ_2 и τ_3 .

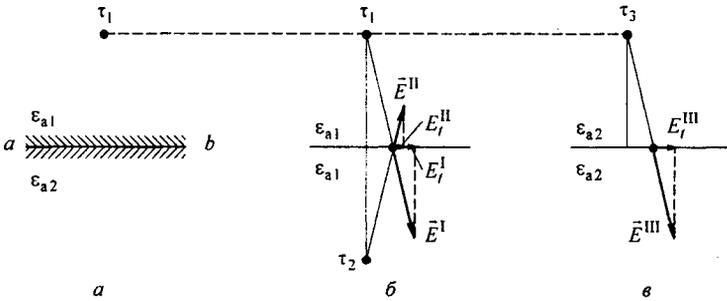


Рис. 19.17

Расчет поля в любой точке *верхнего* полупространства (полуплоскости) производят от двух зарядов: заданного и дополнительного τ_2 . Причем не только верхнее, но и нижнее полупространство заполнено (в расчетном смысле) диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{a1} (рис. 19.17, б).

Поле в любой точке *нижнего* полупространства определяют как поле от некоторого дополнительного заряда τ_3 , расположенного в той же точке, где находился заряд τ_1 . В этом случае не только нижнее, но и верхнее полупространство заполняется диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{a2} (рис. 19.17, в).

Составим два уравнения для определения пока неизвестных τ_2 и τ_3 .

Из условия равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела следует, что

$$E_t^I + E_t^{II} = E_t^{III}$$

или

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_{a1}r}(\tau_1 + \tau_2)\cos\alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_{a2}r}\tau_3\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_3 \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}. \quad (19.44)$$

Из условия равенства нормальных составляющих вектора D на границе раздела, приняв за положительное направление для нормали направление вниз, имеем

$$D_n^I - D_n^{II} = D_n^{III}.$$

Запишем последнюю строку в развернутом виде:

$$\frac{1}{2\pi r}(\tau_1 - \tau_2)\sin\alpha = \frac{1}{2\pi r}\tau_3\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_3. \quad (19.45)$$

Решая совместно (19.44) и (19.45), получаем

$$\tau_2 = \frac{\epsilon_{a1} - \epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1} + \epsilon_{a2}} \tau_1; \quad (19.46)$$

$$\tau_3 = \frac{2\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1} + \epsilon_{a2}} \tau_1; \quad (19.47)$$

Знак заряда τ_2 совпадает со знаком заряда τ_1 , если $\epsilon_{a1} > \epsilon_{a2}$. Знак τ_3 всегда тот же, что и знак τ_1 .

Если поле будет создаваться не заряженной осью, а точечным зарядом, то вся методика сохраняется и формулы (19.46) и (19.47) справедливы и для точечных зарядов. Но под τ теперь следует понимать значение точечного заряда.

§ 19.33. Электростатическое поле системы заряженных тел, расположенных вблизи проводящей плоскости. В качестве системы заряженных тел рассмотрим многопроводную линию из n весьма длинных

проводов с зарядом τ_k на единицу длины (индекс заряда соответствует номеру провода), протянутых параллельно проводящей поверхности (например, поверхности земли). Высота подвеса и радиус каждого провода известны, а также известна электрическая проницаемость ϵ_a среды, окружающей провода.

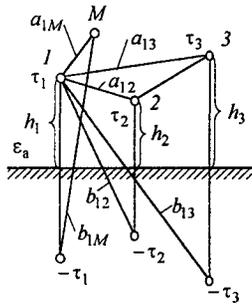


Рис. 19.18

Возьмем в диэлектрике некоторую произвольную точку M (рис. 19.18) и найдем ее потенциал. Потенциал точки M будет равен сумме потенциалов, создаваемых каждым проводом и его зеркальным изображением.

Составляющую потенциала точки M от провода I и его зеркального изображения в соответствии с формулой (19.39) можно записать следующим образом (постоянную, с точностью до которой определяется потенциал, опускаем):

$$\varphi_{M1} = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}},$$

где b_{1M} — расстояние точки M до зеркального изображения первого провода; a_{1M} — расстояние точки M до первого провода.

Будем полагать, что высота подвеса каждого провода над землей много больше радиусов проводов. При этом электрические оси практически совпадут с геометрическими.

Составляющая потенциала точки M от второго провода и его зеркального изображения

$$\varphi_{M2} = \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \varphi_{M1} + \varphi_{M2} + \varphi_{M3} + \dots = \\ &= \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{3M}}{a_{3M}} + \dots \end{aligned}$$

§ 19.34. Потенциальные коэффициенты. Первая группа формул Максвелла. Точку M можно поместить на поверхность первого провода. При этом $\varphi_M = \varphi_1$; $b_{M1} = 2h_1$; $a_{M1} = r_1$; $b_{M2} = b_{12}$ — расстояние первого провода до зеркального изображения второго провода; $a_{M2} = a_{12}$ — расстояние первого провода до второго и т. д.:

$$\varphi_1 = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r_1} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{13}}{a_{13}} + \dots \quad (19.48a)$$

Коэффициенты при зарядах τ_1, τ_2 и других зависят только от геометрических размеров тел, их взаимного расположения и свойств среды. Они не зависят ни от значений, ни от знаков зарядов и потенциалов.

Для сокращения записи выражение (19.48a) и другие, аналогичные ему, запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + \tau_3 \alpha_{13} + \dots \\ \varphi_2 &= \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + \tau_3 \alpha_{23} + \dots \\ \varphi_3 &= \tau_1 \alpha_{31} + \tau_2 \alpha_{32} + \tau_3 \alpha_{33} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.48)$$

Здесь

$$\alpha_{km} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{km}}{a_{km}}; \quad \alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_k}{r_k}. \quad (19.48b)$$

Коэффициенты $\alpha_{mk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{mk}}{a_{mk}}$. Так как $b_{mk} = b_{km}$, $a_{mk} = a_{km}$, то $\alpha_{mk} = \alpha_{km}$. Систему уравнений (19.48) принято называть *первой группой формул Максвелла* (ее не следует смешивать с первым уравнением Максвелла, о котором идет речь в § 22.2).

Коэффициенты α называют *потенциальными коэффициентами*. Их единица равна единице длины, деленной на единицу емкости. Так как у всех коэффициентов α под знаком логарифма находится дробь, числитель которой всегда больше знаменателя, то все коэффициенты α положительны.

Коэффициентам α может быть дано следующее толкование. Пусть заряды всех проводов, кроме первого, равны нулю: $\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = 0$, а $\tau_1 = 1$; тогда $\varphi_1 = \alpha_{11}$; т. е. α_{11} численно равно потенциалу первого провода, если на первом проводе находится единичный заряд, а заряды на остальных проводах отсутствуют. Аналогично, α_{21} численно равно потенциалу второго провода в тех же условиях. Система (19.48) позволяет подсчитать потенциалы заряженных тел по известным общим зарядам тел.

Может встретиться и обратная задача: по известным потенциалам тел найти заряды тел.

§ 19.35. Емкостные коэффициенты. Вторая группа формул Максвелла. Решим систему (19.48) относительно зарядов, полагая потенциалы и коэффициенты известными:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11} \varphi_1 + \beta_{12} \varphi_2 + \beta_{13} \varphi_3 + \dots \\ \tau_2 &= \beta_{21} \varphi_1 + \beta_{22} \varphi_2 + \beta_{23} \varphi_3 + \dots \\ \tau_3 &= \beta_{31} \varphi_1 + \beta_{32} \varphi_2 + \beta_{33} \varphi_3 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.49)$$

Коэффициенты $\beta = \Delta_{kn} / \Delta$. Здесь через Δ обозначен определитель системы (19.48):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение Δ_{kn} получают из определителя системы Δ путем вычеркивания k -строки и n -столбца и умножения полученного минора на $(-1)^{k+n}$.

Система (19.49) является *второй группой формул Максвелла*.

Коэффициенты β называют *емкостными коэффициентами*. Их единица обратная единице коэффициента α . Так как определитель системы симметричен относительно главной диагонали, то $\Delta_{kn} = \Delta_{nk}$ и потому $\beta_{kn} = \beta_{nk}$. Все β с одинаковыми индексами положительны, а с разными индексами отрицательны.

Убедимся, например, в том, что β_{11} положителен, а β_{21} и β_{31} отрицательны. С этой целью все провода, кроме первого, соединим тонкими (чтобы не исказить поля) проводниками с землей. Потенциал земли прием равным нулю. При этом из (19.49) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11} \varphi_1, \\ \tau_2 &= \beta_{21} \varphi_1, \\ \tau_3 &= \beta_{31} \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (19.49a)$$

Придадим первому проводу положительный по отношению к земле потенциал, соединив его с землей, например, через батарею (рис. 19.19, а). Заряд первого провода положителен и потенциал первого

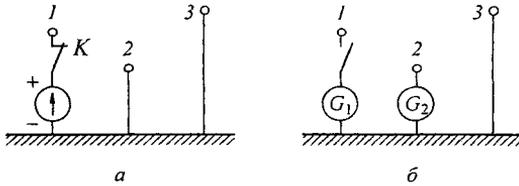


Рис. 19.19

провода положителен ($\varphi_1 > 0$; $\tau_1 > 0$). Отрицательный заряд растечется по земле и всем телам, с ней электрически соединенным. Все провода, кроме первого, поскольку они электрически соединены с землей, приобретут отрицательные заряды:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 0, & \tau_2 &< 0; \\ \varphi_3 &= 0, & \tau_3 &< 0. \end{aligned}$$

Из системы (19.49а) следует, что

$$\beta_{11} = \tau_1 / \varphi_1 > 0, \quad \beta_{21} = \tau_2 / \varphi_1 < 0 \quad \text{и} \quad \beta_{31} = \tau_3 / \varphi_1 < 0.$$

Отсюда вытекает методика определения опытным путем коэффициентов β_{11} и β_{21} . Если после зарядки провода 1 (ключ К на рис. 19.19, а включен) до известного потенциала φ_1 ключ К разомкнуть, убрать батарею, включить гальванометры G_1 и G_2 (рис. 19.19, б), а затем замкнуть ключ К, то система разрядится; G_1 измерит заряд τ_1 , а G_2 — заряд τ_2 провода 2 и т. д. Далее находим $\beta_{11} = \tau_1 / \varphi_1$ и $\beta_{21} = \tau_2 / \varphi_1$.

§ 19.36. Частичные емкости. Третья группа формул Максвелла.

Систему (19.49) принято записывать и в иной форме: так, чтобы в правой части каждой строчки были не потенциалы, а разности потенциалов между данным телом и всеми остальными, в том числе и землей.

В соответствии с (19.49) заряд k -тела

$$\tau_k = \beta_{kk} \varphi_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} \varphi_m.$$

Слагаемое

$$\beta_{km} \varphi_m = \beta_{km} (\varphi_m - \varphi_k + \varphi_k) = -\beta_{km} U_{km} + \beta_{km} \varphi_k.$$

Поэтому

$$\tau_k = \varphi_k \beta_{kk} + \varphi_k \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} U_{km} = \varphi_k \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} (-\beta_{km}) U_{km}.$$

Обозначим:

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn} = \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km}; \quad (19.50)$$

$$C_{km} = -\beta_{km}. \quad (19.51)$$

Тогда

$$\tau_k = \varphi_k C_{kk} + U_{k1} C_{k1} + U_{k2} C_{k2} + \dots = \varphi_k C_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} U_{km} C_{km}. \quad (19.52)$$

Если придать k значения $1, 2, 3, \dots$, то получим

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \varphi_1 C_{11} + U_{12} C_{12} + U_{13} C_{13} + \dots \\ \tau_2 &= \varphi_2 C_{22} + U_{21} C_{21} + U_{23} C_{23} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.53)$$

Система (19.53) является *третьей группой формул Максвелла*. Коэффициенты C_{kk} называют *собственными частичными емкостями*, а коэффициенты C_{km} — *взаимными частичными емкостями*. (Часто слова «собственная» и «взаимная» опускают.) Так как $\beta_{km} = \beta_{mk}$, то и $C_{km} = C_{mk}$.

Единица измерения частичных емкостей та же, что и единица измерения емкостных коэффициентов β . Все частичные емкости положительны. Так как $C_{km} = -\beta_{km}$, а $\beta_{km} < 0$, то очевидно, что $C_{km} > 0$. Чтобы убедиться, что C_{kk} положительна, проведем следующий опыт: соединим тонкими проводниками все провода с k -проводом. При этом все $U_{km} = 0$, и из (19.52) следует, что $\tau_k = \varphi_k C_{kk}$.

Если k -проводу сообщить положительный по отношению к земле потенциал (потенциал земли принят равным нулю), соединив его с плюсом батареи, минус которой соединен с землей, то τ_k и φ_k будут положительными и $C_{kk} = \tau_k / \varphi_k > 0$.

Емкость C_{kk} оказывается положительной несмотря на то, что в состав ее [см. формулу (19.50)] может входить большое число отрицательных коэффициентов β_{km} (коэффициент $\beta_{kk} > \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km}$). Согласно

(19.53) полный заряд k -тела равен сумме зарядов. Заряд $\varphi_k C_{kk}$ обусловлен разностью потенциалов между k -телом и землей; $U_{km} C_{km}$ есть заряд, обусловленный разностью потенциалов между k - и m -телами. Поэтому частичной емкости C_{km} между k - и m -телами можно дать следующее толкование: C_{km} есть отношение составляющей заряда k -тела, обусловленной разностью потенциалов U_{km} между k - и m -телами, к этой разности потенциалов.

Для более наглядной иллюстрации системы (19.53) можно представить, что в системе трех проводов (рис. 19.20) первый провод как бы соединен с обкладками трех конденсаторов C_{11} , C_{12} и C_{13} . Заряды на обкладках этих конденсаторов, обращенных к проводу 1, соответствен-

но равны $\varphi_1 C_{11}$; $U_{12} C_{12}$; $U_{13} C_{13}$. Заряды на других обкладках показаны на рис. 19.20.

Три группы формул Максвелла справедливы для системы заряженных тел любой формы. Однако, если тела имеют произвольную форму, то потенциальные коэффициенты уже нельзя определять по формулам (19.48б), справедливым только для системы линейных параллельных достаточно длинных проводов.

Определение емкостных коэффициентов и частичных емкостей в этом случае производят опытным путем.

Частичные емкости используют при расчетах не только электростатических полей, но и быстро протекающих процессов в электрических цепях, а также процессов, в основу которых положено использование частичных емкостей, например, при емкостном отборе мощности от высоковольтной линии электропередачи. Частичные емкости между электродами электронных ламп, между электродами транзисторов учитывают при расчетах быстро протекающих процессов (см., например, гл. 9).

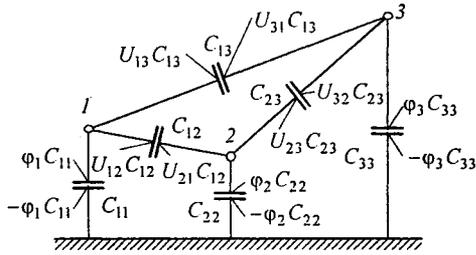


Рис. 19.20

§ 19.37. Поле точечного заряда, расположенного вблизи проводящей сферы. Рассмотрим три родственные задачи на изображение в сфере.

1. В диэлектрике с известной ϵ_a на расстоянии b от центра проводящего предварительно (до заземления) незаряженного шара радиусом a (рис. 19.21, а) поместим точечный заряд q . Внутри шара поле известно ($\varphi=0$ и $E=0$). Определим поле в пространстве вне

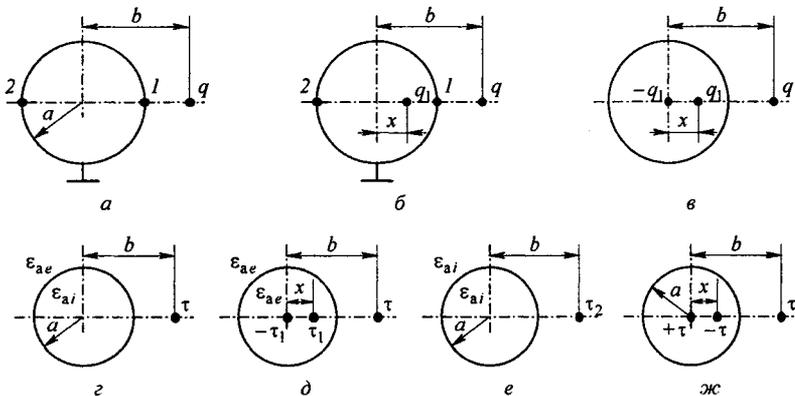


Рис. 19.21

шара. С этой целью на расстоянии x от центра шара поместим заряд q_1 (рис. 19.21, б), составим выражения для потенциалов точек 1 и 2 шара и приравняем их к нулю (шар заземлен):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a(a-x)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_a(b-a)} = 0; \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a(a+x)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_a(b+a)} = 0.$$

Отсюда $x = a^2/b$ и $q_1 = -q a/b$.

2. Если точечный заряд q поместить вблизи незаряженного неземленного шара радиуса a , то поле вне шара определим как поле от трех зарядов (рис. 19.21, в): заданного заряда q , заряда зеркального изображения $q_1 = -q a/b$, расположенного на расстоянии $x = a^2/b$ от центра шара, и заряда $-q_1 = q a/b$, помещенного в центре шара. При этом суммарный заряд шара равен нулю, а

$$\Phi_{\text{ш}} = \frac{q a/b}{4 \pi \epsilon_a a} + C = \frac{q}{4 \pi \epsilon_a b} + C.$$

3. Если точечный заряд q поместить вблизи неземленного шара с зарядом Q , то поле вне шара определится как поле от трех зарядов: q , $q_1 = -q a/b$ и $q_2 = Q + q a/b$. Заряд q_1 помещен на расстоянии x от центра шара, а q_2 — в центре шара.

§ 19.38. Поле заряженной оси, расположенной параллельно цилиндру. Рассмотрим две родственные задачи на изображение в диэлектрическом и проводящем цилиндрах.

1. В диэлектрике с электрической проницаемостью ϵ_{ae} находится цилиндр, проницаемость которого ϵ_{ai} . Параллельно ему на расстоянии b от оси цилиндра расположена ось с зарядом τ на единицу длины (рис. 19.21, з). Поле вне цилиндра определяем по рис. 19.21, д. И цилиндр, и окружающее его пространство заполнены средой с проницаемостью ϵ_{ae} . Поле создается тремя зарядами: заданным τ , зеркальным $\tau_1 = \tau (\epsilon_{ae} - \epsilon_{ai}) / (\epsilon_{ae} + \epsilon_{ai})$, расположенным на расстоянии $x = a^2/b$ от оси цилиндра, и зарядом $-\tau_1$, помещенным на оси цилиндра. Поле внутри цилиндра определим по рис. 19.21, е как поле, создаваемое зарядом $\tau_2 = \tau 2 \epsilon_{ai} / (\epsilon_{ae} + \epsilon_{ai})$, когда и цилиндр, и окружающее его пространство заполнены средой с проницаемостью ϵ_{ai} .

2. Если цилиндр проводящий и не заряжен, то предельным переходом, устремив $\epsilon_{ai} \rightarrow \infty$, найдем $\tau_1 = -\tau$. Поле вне цилиндра создается тремя зарядами, изображенными на рис. 19.21, ж.

§ 19.39. Шар в равномерном поле. Если в равномерное поле (направлено сверху вниз вдоль оси $-z$), напряженность которого равна E_0 (рис. 19.22), внести металлический или диэлектрический шар (ϵ_a шара отлична от ϵ_a окружающей среды), то электрическое поле, особенно вблизи шара, исказится, перестанет быть равномерным. Характер искажения поля зависит от размеров шара, его ϵ_r и значения заряда на шаре.

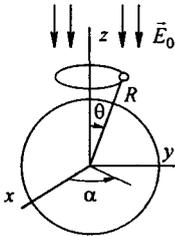


Рис. 19.22

Если шар металлический (проводящий), то силовые линии должны подходить к его поверхности под прямым углом. Если металлический шар не заряжен, то на нем вследствие явления электростатической индукции произойдет разделение зарядов. Силовые линии будут заканчиваться или начинаться на них.

Металлический шар может быть и заряжен, т. е. нести на себе избыточный заряд, который также расположится на поверхности.

Если шар из диэлектрика, то под влиянием внешнего по отношению к нему поля шар поляризуется. Заряды, выявившиеся на шаре вследствие поляризации, исказят прежде (до внесения шара) равномерное поле. Силовые линии подходят к поверхности шара так, что выполняются два граничных условия (см. § 19.23).

Если шар металлический, то внутри шара $E = 0$ и $\varphi = \text{const}$. Независимо от того, металлический шар или диэлектрический, во внешней по

отношению к шару области нет свободных зарядов и потому поле в этой области описывается уравнением Лапласа. Если шар из диэлектрика и свободный заряд на нем равен нулю, то поле внутри шара описывается также уравнением Лапласа.

Таким образом, для решения той и другой задачи необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$. Это одна из наиболее типичных классических задач электростатики. Для любой конкретной задачи в качестве первого этапа необходимо правильно выбрать систему координат. Систему координат выбирают таким образом, чтобы граничные поверхности в поле описывались наиболее удобно. В данной задаче граничная поверхность — сфера, которую проще всего описать в сферической системе координат. Поэтому будем пользоваться этой системой.

Вторым этапом решения является выяснение вопроса о том, не обладает ли изучаемое поле тем или иным видом симметрии. Условия симметрии поля часто в значительной мере облегчают решение задачи. В рассматриваемой задаче поле не зависит от координаты α . Чтобы убедиться в этом, мысленно рассежем поле плоскостью, перпендикулярной оси z декартовой системы, и проведем в этой плоскости окружность так, чтобы центр ее лежал на оси z . Все точки этой окружности имеют одно и то же значение радиуса R , соединяющего точку на этой окружности с началом координат. Кроме того, угол θ в меридианной плоскости между радиусом R и осью z один и тот же.

Все точки окружности находятся в поле в одинаковых условиях. Поэтому потенциал их один и тот же. Но значение угла α , характеризующего положения точек этой окружности, различно. Если для совокупности точек, обладающих $R = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ и разными значениями угла α , φ одно и то же, то это означает, что в данном поле φ не зависит от угла α . Поэтому поле будет описываться уравнением [см. уравнение (19.31)]:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (19.54)$$

(составляющая $\frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}$ отсутствует, так как не зависит от α). Выражение (19.54) представляет собой уравнение в частных производных. Для интегрирования уравнений в частных производных применяют метод Фурье, согласно которому искомую функцию (в данном случае φ) представляют в виде произведения двух пока неизвестных функций M и N , одна из которых (M) зависит только от R , а другая (N) — только от θ :

$$\varphi = M(R) N(\theta) = M N. \quad (19.55)$$

Вид функций M и N подлежит определению. Представление функции φ как произведения двух функций (19.55) позволяет разбить уравнение в частных производных (19.54) на два обыкновенных дифференциальных уравнения, из которых одно будет составлено относительно M , другое — относительно N .

Подставляем (19.55) в (19.54), учитывая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = N \frac{\partial M}{\partial R}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = M \frac{\partial N}{\partial \theta}.$$

Поэтому

$$\frac{N}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) + \frac{M}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (19.56)$$

Умножим (19.56) на $R^2/(MN)$.

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) + \frac{1}{N \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (19.57)$$

Особенностью уравнения (19.57) является то, что первое слагаемое в нем представляет собой функцию только R , а второе — функцию θ . Сумма двух функций, из которых одна зависит только от R , а другая — от θ , равна нулю для бесчисленного множества пар значений R и θ [уравнение (19.57) годится для всех точек поля]. Это возможно либо когда каждая из данных функций равна нулю:

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{N \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (19.57a)$$

либо когда

$$\frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) = p \quad \text{и} \quad \frac{1}{N \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = -p. \quad (19.57b)$$

Здесь p есть некоторое число, пока неизвестное.

Таким образом, задача свелась к интегрированию уравнений (19.57a) и (19.57b). Общее решение для φ согласно (19.55) равно произведению решений уравнений (19.57a) плюс произведение решений для M и N по уравнениям (19.57b). Найдем решение уравнений (19.57a). Так как в (19.57a) M зависит только от R , а N — только от θ , то от частных производных перейдем к простым (обыкновенным):

$$\frac{1}{M} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) = 0; \quad \frac{1}{N \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = 0:$$

Интеграл первого из них:

$$M = A_1 / R + A_2. \quad (19.58)$$

Найдем интеграл второго уравнения:

$$\sin \theta \frac{dN}{d\theta} = A_3; \quad \frac{dN}{d\theta} = \frac{A_3}{\sin \theta} \quad \text{или} \quad N = A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + A_4. \quad (19.59)$$

Покажем, что A_3 непременно должно равняться нулю, так как только в этом случае в решении отсутствует слагаемое $A_3 \ln \operatorname{tg}(\theta/2)$.

Потенциал есть функция непрерывная и на конечном отрезке он не может измениться на бесконечно большую величину. Из физических соображений ясно, что потенциал точек оси z вблизи шара не может быть равен бесконечности. Между тем, если бы $A_3 \neq 0$, то в решении для потенциала присутствовало бы слагаемое $A_3 \ln \operatorname{tg}(\theta/2)$, равное $-\infty$ для всех точек, у которых $\theta = 0$ (при $\theta = 0 \operatorname{tg} \theta = 0$; при $\theta = \pi \operatorname{tg} \theta = -\infty$).

Таким образом, частное решение для φ , вытекающее из (19.57а), следующее:

$$\varphi = C_1 / R + C_2 \quad (C_1 = A_1 A_4; \quad C_2 = A_2 A_4). \quad (19.60)$$

Найдем решение уравнений (19.57б):

$$\frac{1}{M} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) = p \quad \text{или} \quad 2R \frac{dM}{dR} + R^2 \frac{d^2 M}{dR^2} = p M. \quad (19.60a)$$

Применив подстановку Эйлера $M = C R^n$, получим

$$\frac{dM}{dR} = n C R^{n-1}; \quad \frac{d^2 M}{dR^2} = n(n-1) C R^{n-2}.$$

Подставим производные в уравнение (19.60а)

$$R n C R^{n-2} + R^2 (n-1) n C R^{n-2} = p C R^n \quad \text{или} \quad n^2 + n - p = 0.$$

Найдем корни квадратного уравнения:

$$n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p}. \quad (19.61)$$

Значение p определим при интегрировании второго уравнения (19.57б):

$$\frac{1}{N \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = -p.$$

Решение его можно записать в виде $N = B \cos \theta$. Убедимся в этом путем подстановки и одновременно найдем значение p :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\theta} &= -B \sin \theta; & \sin \theta \frac{dN}{d\theta} &= -B \sin^2 \theta; \\ \frac{1}{N \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) &= \frac{-2 B \sin \theta \cos \theta}{B \cos \theta \sin \theta} = -2 = -p. \end{aligned}$$

Следовательно, $p = 2$.

После нахождения числа p подставим его в (19.61) и найдем $n_1 = 1$ и $n_2 = -2$. Таким образом, совместное решение уравнений (19.57б) дает следующее выражение: $\varphi = (C_3 R + C_4 / R^2) \cos \theta$.

Полное решение:

$$\varphi = C_1 / R + C_2 + (C_3 R + C_4 / R^2) \cos \theta. \quad (19.62)$$

В (19.62) присутствуют четыре неизвестные постоянные: C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . Значения постоянных зависят от того, какой шар (проводящий или диэлектрический) внесен в поле*).

§ 19.40. Проводящий шар в равномерном поле. Для определения четырех постоянных необходимо учесть не только условие на поверхности шара, но и условия на большом удалении от него, теоретически на бесконечно большом удалении от шара, или, как принято говорить, условия на бесконечности.

Совокупность весьма удаленных от шара точек в условном смысле рассматривается при этом как бесконечность. Если шар не заряжен, то все точки плоскости xOy , проходящей через центр шара, имеют один и тот же потенциал. Обозначим его φ_0 .

При удалении от шара на большое расстояние $z = R \cos \theta$, по сравнению с которым радиус шара a весьма мал, возмущающее действие шара на поле либо вовсе не проявится (если суммарный заряд шара будет равен нулю), либо проявится как возмущение от точечного заряда (если шар будет иметь на себе суммарный свободный заряд Q). Потенциал φ на бесконечности определим так:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \varphi_0 + E_0 R \cos \theta. \quad (19.63)$$

Первое слагаемое правой части (19.63) дает составляющую потенциала от заряда шара Q , слагаемое $E_0 R \cos \theta$ учитывает прирост потенциала от напряженности равномерного поля E_0 на пути $z = R \cos \theta$. Так как решение (19.62) годится и для точек поля, весьма далеко (бесконечно далеко) удаленных от шара, то можно сопоставить выражения (19.62) и (19.63). Они должны давать один и тот же результат. Это будет только в том случае, когда соответствующие слагаемые в обоих выражениях равны. Из сопоставления следует, что $C_2 = \varphi_0$; $C_1 = Q / (4\pi\epsilon_a)$; $C_3 = E_0$.

Сопоставление на бесконечности не дает возможности найти C_4 , так как в (19.63) нет слагаемого, изменяющегося обратно пропорционально второй степени R . Для нахождения C_4 воспользуемся тем, что в условиях электростатики все точки поверхности шара имеют один и тот же потенциал. Это условие равносильно тому, что тангенциальная составляющая напряженности поля на поверхности шара равна нулю. При $R = a$

$$\varphi = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a} + (E_0 a + C_4 / a^2) \cos \theta + \varphi_0.$$

* Задачи теории поля, в которых приходится решать уравнения в частных производных и из большого числа выбирать решения, удовлетворяющие граничным условиям, в математических работах принято называть краевыми задачами.

Правая часть будет постоянной с изменением θ только при условии, что $(E_0 a + C_4 / a^2) = 0$. Отсюда $C_4 = -E_0 a^3$.

Таким образом, для всех точек диэлектрика

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \varphi_0 + E_0 (R - a^3 / R^2) \cos \theta. \quad (19.64)$$

Так как потенциал зависит только от R и θ , напряженность электрического поля имеет только две составляющие (см. § 19.8):

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} - E_0 (1 + 2a^3 / R^3) \cos \theta; \\ E_\theta &= -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = E_0 (1 - a^3 / R^3) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (19.64a)$$

Если $Q = 0$, то на поверхности шара (при $R = a$) $E_R = -3 E_0 \cos \theta$.

При $\theta = 0^\circ$ напряженность $E_R = -3 E_0$, при $\theta = 180^\circ$ напряженность $E_R = 3 E_0$, т. е. в этих точках напряженность поля стала в три раза больше напряженности равномерного поля E_0 , в которое был внесен шар. На «экваторе» при $\theta = 90^\circ$ напряженность, напротив, стала равной нулю.

Таким образом, капелька воды, попав в бак трансформатора с масляным заполнением, вызовет значительное местное увеличение напряженности поля.

§ 19.41. Диэлектрический шар в равномерном поле. Если в равномерном поле помещен незаряженный *диэлектрический шар*, то как внутри шара, так и вне его нет свободных зарядов, и потому поле описывается уравнением Лапласа. Полное решение (19.62) пригодно и для данной задачи. Величины для описания поля внутри шара запишем с индексом i , а величины, с помощью которых описывается потенциал во внешней по отношению к шару области, — с индексом e . Таким образом, для внутренней области

$$\varphi_i = C_{1i} / R + C_{2i} + (C_{3i} R + C_{4i} / R^2) \cos \theta; \quad (19.65)$$

для внешней области

$$\varphi_e = C_{1e} / R + C_{2e} + (C_{3e} R + C_{4e} / R^2) \cos \theta. \quad (19.66)$$

Надо найти восемь постоянных интегрирования. В этом случае потенциал на бесконечности $\varphi = \varphi_0 + E_0 R \cos \theta$.

Сопоставим последнее выражение с (19.66): $C_{2e} = \varphi_0$ и $C_{3e} = E_0$.

В § 19.14 было рассмотрено поле точечного заряда. Там было показано, что потенциал в поле точечного заряда изменяется обратно пропорционально R . Поэтому C_{1e} / R есть составляющая потенциала от суммарного заряда шара, рассматриваемого как точечный заряд. Так как суммарный заряд шара равен нулю, то в выражении для φ_e эта составляющая должна отсутствовать, т. е. $C_{1e} = 0$.

Следовательно,

$$\varphi_e = \varphi_0 + (E_0 R + C_{4e} / R^2) \cos \theta. \quad (19.66a)$$

В выражении (19.66) осталась неизвестной лишь постоянная C_{4e} .

Рассмотрим выражение потенциала φ_i для внутренней области. Оно должно давать конечное значение для всех точек внутри шара. Это возможно только тогда, когда $C_{1i} = 0$ и $C_{4i} = 0$ (если бы $C_{1i} \neq 0$, то слагаемое C_{1i}/R в центре шара при $R=0$ давало бы бесконечно большое значение). Постоянная, с точностью до которой определяется потенциал в рассматриваемом поле, равна аналогичной постоянной $C_{2e} = \varphi_0$ для внешней области. Таким образом, для внутренней области

$$\varphi_i = \varphi_0 + C_{3i} R \cos \theta. \quad (19.66b)$$

Оставшиеся неизвестными постоянные C_{4e} и C_{3i} найдем из граничных условий.

Из равенства потенциалов φ_i и φ_e при $R=a$ (это условие, как нетрудно убедиться, эквивалентно условию $E_{1r} = E_{2r}$) следует, что $C_{3i} a = E_0 a + C_{4e} / a^2$.

Из равенства нормальных составляющих вектора \vec{D} на границе следует, что

$$\varepsilon_{ai} \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial R} \right|_{R=a} = \varepsilon_{ae} \left. \frac{\partial \varphi_e}{\partial R} \right|_{R=a},$$

т. е.

$$\varepsilon_{ai} C_{3i} = \varepsilon_{ae} (E_0 - 2 C_{4e} / a^3).$$

Совместное решение двух последних уравнений дает:

$$C_{3i} = E_0 \frac{3 \varepsilon_{ae}}{2 \varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}}; \quad C_{4i} = a^3 E_0 \frac{\varepsilon_{ae} - \varepsilon_{ai}}{2 \varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}}.$$

Потенциалы областей:
внутренней

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 R \frac{3 \varepsilon_{ae}}{2 \varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} \cos \theta = \varphi_0 + E_0 \frac{3 \varepsilon_{ae}}{2 \varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} z; \quad z = R \cos \theta; \quad (19.67)$$

внешней

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(R + \frac{a^3}{R^2} \frac{\varepsilon_{ae} - \varepsilon_{ai}}{2 \varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} \right) \cos \theta. \quad (19.68)$$

Напряженность поля внутри шара

$$E_z = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = - E_0 \frac{3 \varepsilon_{ae}}{2 \varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}}. \quad (19.69)$$

Напряженность \vec{E} направлена вдоль оси $-z$ и не зависит от координат точки. Это означает, что поле внутри шара однородное.

На рис. 19.23 изображены линии вектора \vec{D} и эквипотенциальные линии (картина поля) для трех случаев:

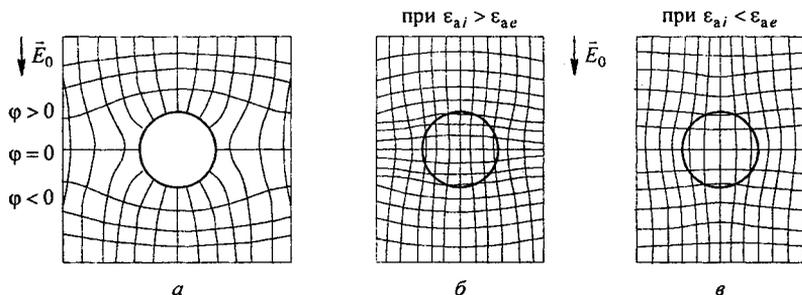


Рис. 19.23

а) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен незаряженный проводящий шар (рис. 19.23, а);

б) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен диэлектрический шар, ϵ_{ai} которого больше ϵ_{ae} окружающей среды (рис. 19.23, б);

в) когда ϵ_{ai} диэлектрического шара меньше ϵ_{ae} окружающей среды (рис. 19.23, в).

Как известно из § 19.15, линии вектора \vec{D} начинаются на свободных зарядах. Эти линии прерываются на поверхности металлического шара (см. рис. 19.23, а) и проходят, не прерываясь, через диэлектрический шар (см. рис. 19.23, б и в).

Если на рис. 19.23, б и в вместо линий вектора \vec{D} изобразить линии вектора напряженности поля \vec{E} , то линии \vec{E} частично претерпели бы разрыв на поверхности шаров, так как истоком для \vec{E} являются не только свободные, но и связанные заряды [см. формулу (19.21а)].

§ 19.42. Диэлектрический цилиндр в равномерном поле. Аналогично формулам § 19.41 выводятся формулы, позволяющие определить потенциал и напряженность равномерного поля, возмущенного внесением в него диэлектрического цилиндра (ось цилиндра перпендикулярна \vec{E}_0).

Пусть напряженность \vec{E}_0 равномерного (до внесения цилиндра) поля направлена параллельно оси x декартовой системы (рис. 19.24, а). Поместим в этом поле *диэлектрический цилиндр* так, чтобы ось цилиндра совпала с осью z .

Решая уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат, получаем следующие формулы для определения потенциала внутри цилиндра (φ_i) и вне цилиндра (φ_e):

$$\varphi_i = -\frac{2 \epsilon_{ae}}{\epsilon_{ae} + \epsilon_{ai}} E_0 r \cos \alpha = -\frac{2 \epsilon_{ae}}{\epsilon_{ae} + \epsilon_{ai}} E_0 x; \quad (19.70)$$

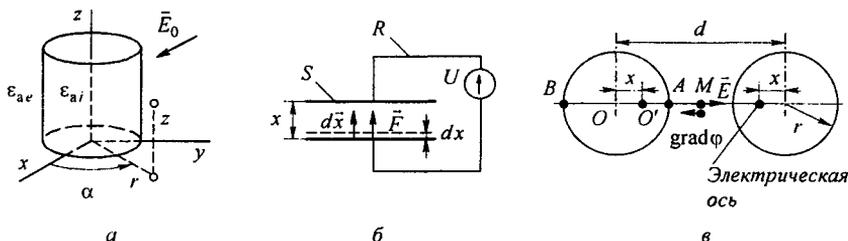


Рис. 19.24

$$\varphi_e = E_0 \left(\frac{\varepsilon_{ai} - \varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} \frac{a^2}{r} - r \right) \cos \alpha. \quad (19.71)$$

Напряженность равномерного поля внутри цилиндра, направленная по оси x ,

$$E_i = -\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{2\varepsilon_{ae}}{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ai}} E_0. \quad (19.72)$$

В заключение отметим, что если в равномерное поле напряженностью E_0 внести *проводящий цилиндр* радиусом a , расположив его так, что продольная ось его будет перпендикулярна E , то потенциал в области вне цилиндра $\varphi_e = E_0 (a^2 / r - r) \cos \alpha$.

§ 19.43. Понятие о плоскопараллельном, плоскомеридианном и равномерном полях. В литературе можно встретить термины «плоскопараллельное», «плоскомеридианное» и «равномерное» поля^{*)}.

Под *плоскопараллельным полем* понимают поле, картина которого (т. е. совокупность силовых и эквипотенциальных линий) повторяется во всех плоскостях, перпендикулярных какой-либо одной оси декартовой системы координат, т. е. в плоскопараллельном поле картина поля не зависит от какой-либо одной координаты декартовой системы.

В качестве примера плоскопараллельного поля можно назвать поле двухпроводной линии (двух параллельных проводов). Если ось z декартовой системы направить вдоль одного из проводов, то потенциал φ не будет зависеть от координаты z .

Под *плоскомеридианным полем* понимают поле, картина которого повторяется во всех меридианных плоскостях, т. е. картина поля не зависит от координаты α цилиндрической или сферической системы координат. В литературе встречается еще определение плоскомеридианного поля как поля, образованного телами вращения с общей осью.

В качестве примера плоскомеридианного поля можно назвать поле, образованное внесением металлического шара в равномерное до внесе-

^{*)} Физики и математики в термин «поле» вкладывают свое («профессиональное») содержание. Когда говорят о поле в физическом смысле (электромагнитном, гравитационном, тепловом, поле ядерных сил), то под ним понимают вид материи. Когда о поле говорят в математическом смысле, то имеется в виду поле величины, которой оно описывается. С чисто математической точки зрения поля могут быть векторные и скалярные, вихревые и безвихревые, плоскопараллельные, плоскомеридианные, осесимметричные и др.

ния шара поле (см. рис. 19.23), или поле диполя, о котором идет речь в примере 197. В обоих случаях потенциал зависит только от радиуса R и угла θ сферической системы координат, но не зависит от угла α .

Частным случаем плоскомеридианного поля является поле, в котором потенциал зависит только от какой-либо одной координаты сферической или цилиндрической системы координат.

В *равномерном поле* напряженность одинакова во всех точках поля, т. е. ее значение не зависит от координат точки.

Равномерное поле образуется, например, между обкладками плоского конденсатора, если в пространстве между ними отсутствуют свободные заряды и если пренебречь искажающим влиянием краев конденсатора.

Следует иметь в виду, что большинство встречающихся на практике полей не обладает ни одним из перечисленных видов симметрии и потому не может быть отнесено ни к плоскопараллельному, ни к плоскомеридианному, ни к равномерному полям.

§ 19.44. Графическое построение картины плоскопараллельного поля. Аналитический расчет полей часто вызывает затруднения, например, когда поверхности электродов имеют сложную форму.

В этом случае картину поля строят графически. С этой целью сначала выясняют, не обладает ли изучаемое поле симметрией. Если она имеется, то картину поля строят только для одной из областей симметрии. Так, картина поля, образованного двумя проводящими взаимно перпендикулярными относительно тонкими пластинками (электродами), построена на рис. 19.25, *а* только для верхней полуплоскости (в нижней полуплоскости картина повторяется).

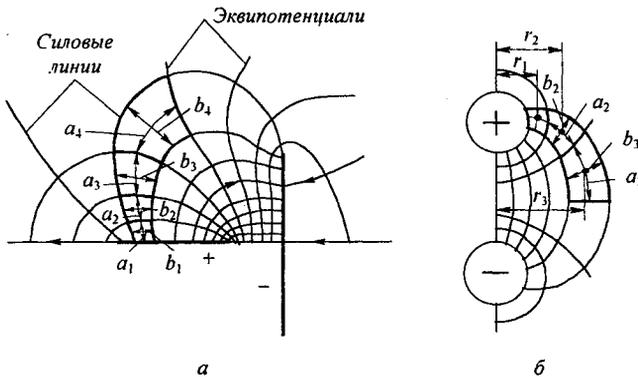


Рис. 19.25

При построении руководствуются следующими правилами: 1) силовые линии должны подходить к поверхностям электродов перпендикулярно; 2) силовые и эквипотенциальные линии должны быть взаимно перпендикулярны и образовывать подобные ячейки поля (криволинейные прямоугольники), для которых отношение средней длины ячейки (a) к

средней ширине этой ячейки (b) для всех ячеек должно быть приблизительно одинаковым, т. е. $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots$.

Если число ячеек в силовой трубке обозначить n , а число трубок m (в примере $n=8$, $m=2 \times 10$), то при соблюдении перечисленных правил разность потенциалов между соседними эквипотенциалами будет одинакова и равна $\Delta U = U/n$, где U — напряжение между электродами, а поток ΔN вектора \vec{D} в каждой силовой трубке будет такой же, что и в соседней. Обозначим длину электродов в направлении, перпендикулярном рисунку, через l . Тогда

$$\Delta N = b_1 l E_1 \epsilon_a = b_2 l E_2 \epsilon_a = \dots = b_n l E_n \epsilon_a.$$

Отсюда

$$E_1 = \frac{\Delta N}{b_1 l \epsilon_a}; \quad E_2 = \frac{\Delta N}{b_2 l \epsilon_a}; \dots$$

Напряжение между электродами $U = E_1 a_1 + E_2 a_2 + \dots + E_n a_n$. Подставим в последнее выражение значения напряженностей поля E_1, \dots, E_n и учтем, что по построению $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n$. Получим $U = \frac{\Delta N a n}{\epsilon_a l b}$. Поток в одной силовой трубке $\Delta N = \frac{U \epsilon_a l b}{a n}$.

Правая часть формулы для ΔN одинакова для всех силовых трубок, поэтому одинаковы и потоки вектора \vec{D} во всех силовых трубках. Через все m силовых трубок поток вектора \vec{D} будет в m раз больше и по теореме Гаусса он должен быть равен заряду Q на электроде: $Q = m \Delta N = U \epsilon_a l b m / (a n)$. Емкость между электродами $C = Q/U = \epsilon_a l b m / (a n)$.

§ 19.45. Графическое построение картины плоскомеридианного поля. В плоскомеридианном поле силовые линии также должны подходить к поверхностям электродов под прямым углом, а силовые и эквипотенциальные линии должны быть взаимно перпендикулярны. Однако в отличие от плоскопараллельного поля в образующихся при построении ячейках поля в меридианной плоскости отношение a_k к b_k неодинаково для всех ячеек, а зависит от расстояния r_k от центра этой ячейки до оси вращения.

На рис. 19.25, б изображена часть картины поля между двумя шарами. Каждая силовая линия при вращении вокруг общей оси образует поверхность вращения, а каждая силовая трубка занимает пространство между смежными поверхностями вращения.

Обозначим: a_k — длина ячейки вдоль силовой трубки; b_k — ширина ячейки; n — число ячеек вдоль силовой трубки; m — число силовых трубок. Запишем условие равенства потока вектора \vec{D} через ячейки силовой трубки: $\Delta N = 2 \pi r_1 b_1 \epsilon_a E_1 = 2 \pi r_2 b_2 \epsilon_a E_2 = \dots$. Напряжение между электродами

$$U = E_1 a_1 + E_2 a_2 + \dots + E_n a_n = \frac{\Delta N}{2 \pi \epsilon_a} \left(\frac{a_1}{b_1 r_1} + \frac{a_2}{b_2 r_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n r_n} \right).$$

Для того чтобы значения слагаемых в скобке были одинаковы, при построении должно быть выдержано соотношение $a_{k-1}/(b_{k-1} r_{k-1}) = a_k/(b_k r_k)$, т. е. с увеличением расстояния центра ячейки от оси вращения отношение a_k/b_k должно возрастать. Если это соотношение выдержано, то

$$U = \frac{\Delta N}{2 \pi \epsilon_a} \frac{a_k n}{b_k r_k}; \quad \Delta N = \frac{2 \pi \epsilon_a U b_k r_k}{n a_k}.$$

Полный поток $N = m \Delta N = Q$, где Q — заряд на одном теле. Емкость между телами

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{N}{U} = \frac{m b_k}{n a_k} r_k 2 \pi \epsilon_a.$$

§ 19.46. Объемная плотность энергии электрического поля и выражение механической силы в виде производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате. Положим, что в некоторый момент времени напряжение на конденсаторе равно u . При увеличении напряжения на конденсаторе на du заряд на одной из пластин конденсатора увеличится на dQ , а на другой — на $-dQ$; $dQ = C du$, где C — емкость конденсатора.

Для переноса заряда dQ источник энергии должен совершить работу $u dQ = C u du$, которая затрачивается на создание электрического поля в конденсаторе.

Энергия, доставленная источником при заряде конденсатора от напряжения $u = 0$ до напряжения $u = U$ и перешедшая в энергию электрического поля конденсатора, равна

$$W_3 = C \int_0^U u du = \frac{C U^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Рассмотрим вопрос об объемной плотности энергии электрического поля. Для этого возьмем плоский конденсатор и положим, что расстояние между пластинами его равно x , а площадь каждой пластины с одной стороны равна S . Диэлектрическая проницаемость среды между пластинами ϵ_a . Напряжение между пластинами U . Пренебрежем искажающим влиянием краев конденсатора на поле между пластинами. При этом условии поле можно считать равномерным. Напряженность электрического поля по модулю: $E = U/x$. Вектор электрической индукции по модулю: $D = \epsilon_a E = Q/S$. Емкость плоского конденсатора: $C = \epsilon_a S/x$. Для нахождения объемной плотности энергии электрического поля разделим энергию $W_3 = C U^2/2 = \epsilon_a S U^2/(2x)$ на объем $V = Sx$, «занятый» полем. Получим $W_3/V = \epsilon_a E^2/2 = E D/2$.

Таким образом, объемная плотность энергии электрического поля равна $\epsilon_a E^2/2$. Если поле неравномерно, то напряженность будет изменяться при переходе от одной точки поля к соседней, но объемная плотность энергии поля будет по-прежнему равна $\epsilon_a E^2/2$, так как в пределах бесконечно малого объема поле можно считать равномерным.

Выделим в поле элементарный объем dV . Энергия в этом объеме равна $(\epsilon_a E^2/2) dV$. Энергия, заключенная в объеме V любых размеров, равна $\int \epsilon_a E^2/2 dV$. В электрическом

поле между заряженными телами действуют механические силы и их можно выразить в виде производной от энергии поля по изменяющейся координате. На рис. 19.24, б изображен плоский конденсатор, который присоединен к источнику напряжения U . В соответствии с предыдущим расстояние между пластинами назовем x , а площадь пластины — S . Под действием этих сил пластины конденсатора стремятся сблизиться. Сила, действующая на нижнюю пластину, направлена вверх, на верхнюю пластину — вниз.

Положим, что под действием силы F нижняя пластина медленно (теоретически бесконечно медленно) переместилась вверх на расстояние dx и приняла положение, показанное пунктиром на рис. 19.24, б. Составим уравнение для баланса энергии при таком перемещении пластин. На основании закона сохранения энергии доставленная источником питания энергия dW_n должна равняться сумме трех слагаемых: 1) работе силы \vec{F} на расстоянии dx ; 2) изменению энергии электрического поля конденсатора dW_3 ; 3) тепловым потерям от тока i , который протекает по проводам сопротивлением R в течение времени от 0 до ∞ :

$$dW_n = F dx + dW_3 + \int_0^{\infty} R i^2 dt.$$

В общем случае при перемещении пластины могут измениться и напряжение между пластинами U , и заряд Q .

Рассмотрим теперь два характерных частных случая перемещения пластины конденсатора. В первом конденсатор отсоединен от источника напряжения и перемещение пластины происходит при неизменных зарядах на пластинах. Во втором перемещение пластины

ны происходит при неизменном напряжении U между пластинами (конденсатор присоединен к источнику неизменного напряжения U).

Первый случай. Так как конденсатор отсоединен от источника энергии, то последний энергии не доставляет и потому $dW_{\text{и}} = 0$. При этом $F = -dW_{\text{и}}/dx$.

Таким образом, сила, действующая на пластину, равна взятой с обратным знаком производной от энергии электрического поля конденсатора по изменяющейся координате. Знак минус свидетельствует о том, что в рассматриваемом случае работа силы производится за счет убыли энергии в электрическом поле конденсатора.

Если учесть, что энергия электрического поля конденсатора $W_3 = Q^2/(2C) = Q^2 x/(2\epsilon_a S)$, то модуль силы F равен $dW_3/dx = Q^2/(2\epsilon_a S) = \epsilon_a E^2 S/2$.

Второй случай. Энергия, доставляемая источником питания при $U = \text{const}$ на приращение заряда равна $dW_{\text{и}} = U dQ = U^2 dC$, где dC — приращение емкости, вызванное уменьшением расстояния между пластинами на dx .

Изменение энергии электрического поля конденсатора $dW_3 = d(CU^2/2) = U^2 dC/2$. Разность $dW_{\text{и}} - dW_3 = U^2 dC - U^2 dC/2 = dW_3$. Поэтому во втором случае

$$F = \frac{dW_3}{dx} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}.$$

Таким образом, и во втором случае сила равна производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате.

Емкость $C = \epsilon_a S/x$, поэтому

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_a S}{x^2}; \quad F = \frac{1}{2} \epsilon_a S \left(\frac{U}{x}\right)^2 = \frac{\epsilon_a E^2 S}{2}.$$

Сила, действующая на пластину конденсатора во втором случае, равна силе, действующей на пластину конденсатора в первом случае. На единицу поверхности конденсатора действует сила $F/S = \epsilon_a E^2/2$. Обратим внимание на то, что величина $\epsilon_a E^2/2$ не только выражает собой плотность энергии электрического поля, но и численно равна силе, действующей на единицу поверхности пластины конденсатора. Действующие на пластины конденсатора силы можно рассматривать как результат проявления сил продольного сжатия (вдоль силовых трубок) и сил бокового распора (поперек силовых трубок). Силы продольного сжатия стремятся укоротить силовую трубку, а силы бокового распора — расширить ее. На единицу боковой поверхности силовой трубки действует сила, численно равная $\epsilon_a E^2/2$. Эти силы проявляются не только в виде сил, действующих на пластины конденсатора, но также в виде сил на границе раздела двух диэлектриков. В этом случае на границе раздела действует сила, направленная в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

§ 19.47. Энергия поля системы заряженных тел. Энергия поля, образованного системой n заряженных тел, имеющих потенциалы Φ_1, \dots, Φ_n и заряды q_1, \dots, q_n определяется выражением

$$W_3 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \Phi_k. \quad (\text{a})$$

Вывод формулы основан на том, что энергия поля равна работе внешних сил, затраченной на перенос зарядов из бесконечности (где $\Phi = 0$) в точки поля, в которых они будут находиться, и на принципе наложения.

Используя формулу (19.48), сначала находим работу при переносе заряда q_1 , полагая, что заряды всех остальных тел равны нулю. Затем находим работу при переносе заряда q_2 , полагая $q_1 = \text{const}$ и $q_3 = q_4 = \dots = q_n = 0$ и т. д. Суммируя все работы, получаем формулу (а).

Заметим, что заряды на проводящих телах, находящихся в диэлектрике, всегда распределяются по поверхности этих тел так, что энергия образовавшегося между этими телами электрического поля минимальна (теорема Томсона).

Пример 181. Два провода диаметром 10 мм расположены в воздухе параллельно друг другу (см. рис. 19.24, в). Расстояние между осями проводов $d = 20$ мм. Заряд каждого провода на метр длины 10^{-8} Кл. Левый провод несет положительный заряд, правый — отрицательный. Найти наибольшую и наименьшую плотности заряда на поверхности провода.

Решение. Находим положение электрических осей: $x = 1,35$ мм. Плотность заряда на поверхности металла $\sigma = D = \epsilon_a^*) E$. Следовательно, σ будет больше там, где E больше.

Если учесть, что напряженность поля, создаваемая положительным зарядом, направлена от этого заряда, а напряженность поля, создаваемая отрицательным зарядом, направлена к заряду, то ясно, что наибольшая напряженность поля будет в точке A , наименьшая — в точке B . Напряженность поля в точке A равна сумме напряженностей от обоих зарядов, а в точке B — разности напряженностей:

$$E_A = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l(r-x)} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l(d-r-x)};$$

$$E_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \left(\frac{1}{r+x} - \frac{1}{d+r-x} \right).$$

$$\text{Отсюда } D_A = \sigma_A = \epsilon_a E_A = 0,544 \text{ мкКл/м}^2, \quad D_B = \sigma_B = \epsilon_a E_B = 0,186 \text{ мкКл/м}^2.$$

Таким образом, плотность заряда в точке A в 2,92 раза больше, чем плотность заряда в точке B .

Найдем градиент потенциала в точке M (расположенной посередине между проводами на линии, соединяющей их центры).

Решение. Так как $\vec{E} = -\text{grad}\phi$, то модуль $\text{grad}\phi$ равен модулю \vec{E} , а направление $\text{grad}\phi$ противоположно направлению \vec{E} . В точке M

$$E_M = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \left(\frac{1}{d/2-x} + \frac{1}{d/2-x} \right) = \frac{10^{-8} \cdot 2}{2 \cdot \pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0,00865} = 41600 \text{ В/м.}$$

Направления \vec{E} и $\text{grad}\phi$ даны на рис. 19.24, в.

Пример 182. Определить частичные емкости на один метр длины двухпроводной линии и вывести формулу для определения емкости между проводами 1 и 2. Геометрические размеры (в метрах) см. на рис. 19.26, а. Радиусы проводов 6 мм.

^{*)} Для воздуха $\epsilon_a = \epsilon_0$ ($\epsilon_r = 1$).

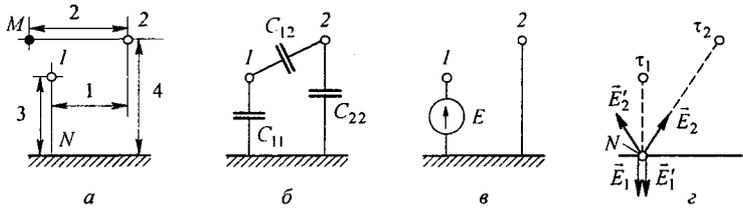


Рис. 19.26

Решение. В соответствии с формулой (19.48)

$$\varphi_1 = \alpha_{11} \tau_1 + \alpha_{12} \tau_2; \quad \varphi_1 = \alpha_{21} \tau_1 + \alpha_{22} \tau_2.$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \alpha_{12} \\ \varphi_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \varphi_1 \beta_{11} + \varphi_2 \beta_{12}.$$

Здесь

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}; \quad \beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11} \varphi_1 + \beta_{12} (\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = U_1 (\beta_{11} + \beta_{12}) - \beta_{12} U_{12} = \\ &= U_1 C_{11} + U_{12} C_{12} \quad (\varphi_1 = U_1). \end{aligned}$$

Следовательно, для двухпроводной линии

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = (\alpha_{22} - \alpha_{12}) / \Delta; \quad C_{12} = -\beta_{12} = \alpha_{12} / \Delta.$$

Аналогичным путем определяем

$$C_{22} = \beta_{22} + \beta_{12} = (\alpha_{11} - \alpha_{12}) / \Delta.$$

По формуле (19.48а) найдем:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r} = 12,4 \cdot 10^{-10} \text{ м/Ф}; \\ \alpha_{22} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_2}{r} = 12,9 \cdot 10^{-10} \text{ м/Ф}; \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}; \\ \Delta &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 151,6 \cdot 10^{20} \text{ м}^2 / \text{Ф}^2; \end{aligned}$$

$$C_{11} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}}{\Delta} = 0,659 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м};$$

$$C_{22} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{\Delta} = 0,626 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м};$$

$$C_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\Delta} = 0,191 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}.$$

Рабочая емкость между проводами 1 и 2 $C_p = C_{12} + \frac{C_{11} C_{22}}{C_{11} + C_{22}}$.

Пример 183. Провод 1 примера 182 соединен с землей через источник ЭДС $E = 127$ В. Провод 2 соединен с землей проводником, так что его потенциал равен нулю (рис. 19.26, в). Определить заряды на проводах 1 и 2 на один погонный метр.

Решение. Из формулы (19.49) при $\varphi_2 = 0$ следует, что

$$\tau_1 = \varphi_1 \beta_{11} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \varphi_1 \beta_{12};$$

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta} = \frac{12,9 \cdot 10^{10}}{151,6 \cdot 10^{20}} = 0,852 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м};$$

$$\beta_{12} = -C_{12} = -0,191 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}.$$

Заряд первого провода $\tau_1 = 127 \cdot 0,852 \cdot 10^{-11} = 1,08 \cdot 10^{-9}$ Кл/м.

Заряд второго провода $\tau_2 = -0,191 \cdot 10^{-11} \cdot 127 = -0,242 \cdot 10^{-9}$ Кл/м.

Пример 184. Заряд τ_1 на единицу длины провода 1 (см. рис. 19.26, а) равен $2 \cdot 10^{-9}$ Кл/м. Заряд τ_2 на единицу длины провода 2 равен 10^{-9} Кл/м. Определить потенциал точки M , полагая потенциал земли равным нулю.

Решение.

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{\sqrt{7^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} - \frac{10^{-9}}{2 \cdot \pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{\sqrt{8^2 + 2^2}}{2} = 30,6 \text{ В}. \end{aligned}$$

Пример 185. Определить плотность наведенного заряда на поверхности земли в точке N (рис. 19.26, а), полагая, что заряды на проводах такие же, как и в примере 184.

Решение. В соответствии с формулой (19.33) плотность заряда на поверхности проводника равна напряженности в этой точке, умноженной на $\epsilon_a = \epsilon_0$.

Напряженность поля в точке N (рис. 19.26, z) равна геометрической сумме напряженностей от четырех зарядов — от заряда τ_1 (обозначим ее E_1), от заряда τ_2 (E_2) и зеркальных изображений этих зарядов (E'_1 и E'_2): $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2$.

Напряженности \vec{E}'_1 и \vec{E}'_2 направлены по одной прямой (по вертикали). Для нахождения проекций \vec{E}_2 и \vec{E}'_2 на вертикаль умножаем E_2 и E'_2 на $\cos\alpha$. Плотность заряда

$$\sigma = 2 \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a h_1} - 2 \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a \sqrt{h_2^2 + a^2}} \epsilon_a \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + a^2}} = 0,1375 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2;$$

$$a = 1; \quad h_2 = 4 \text{ м.}$$

Пример 186. Две металлические пластинки (теоретически бесконечной протяженности), находясь в воздухе (рис. 19.27, a), образуют, не соприкасаясь, двугранный угол α_2 . Потенциал первой пластинки ϕ_1 , второй ϕ_2 .

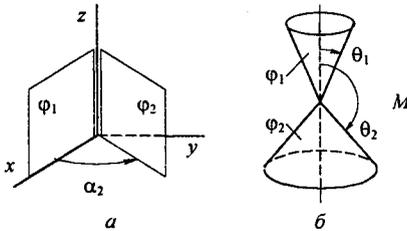


Рис. 19.27

Вывести формулы для определения ϕ и E в любой точке поля внутри двугранного угла, а также формулу для определения плотности заряда на пластинках. Дать числовой ответ при $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 100 \text{ В}$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

Решение. Поскольку граничные поверхности проще всего можно описать в цилиндрической системе координат, то решение

будем проводить именно в этой системе. В пространстве между пластинками отсутствуют свободные заряды, поэтому поле подчиняется уравнению Лапласа [см. уравнение (19.30)].

Потенциал ϕ зависит только от угла α и из условий симметрии не зависит от координаты z и радиуса r цилиндрической системы координат. Поэтому $d^2\phi/d\alpha^2 = 0$.

Согласно этому уравнению $\phi = C_1\alpha + C_2$. По условию при $\alpha = 0$ $\phi = \phi_1 = 0$, а при $\alpha = \alpha_2$ $\phi = \phi_2 = 100 \text{ В}$. Следовательно, $C_2 = 0$, $C_1 = 100/(\pi/6) = 600/\pi$ и $\phi = 600\alpha/\pi$.

Напряженность поля имеет только одну составляющую E_α :

$$E_\alpha = -d\phi/(r d\alpha) = -C_1/r = -600/(\pi r) \text{ В/м.}$$

Плотность заряда $\sigma = D = \epsilon_0 E_\alpha = -600\epsilon_0/(\pi r)$. Например, при $r = 2 \text{ см}$ имеем $\sigma = D = -8,48 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2$.

Пример 187. Две металлические конусообразные воронки находятся в воздухе, обращены остриями друг к другу и не соприкасаются (рис. 19.27, b). Угол $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 135^\circ$, потенциал первой воронки $\phi_1 = 0$, потенциал второй воронки $\phi_2 = 1000 \text{ В}$. Вывести формулу для

определения φ и E в пространстве между воронками и найти по ним E и φ в точке M с координатами $R=2$ см и $\theta=120^\circ$.

Решение. Воспользуемся сферической системой координат, поскольку поверхности воронок проще всего описываются именно в этой системе. В пространстве между воронками отсутствует объемный заряд, поэтому поле описывается уравнением Лапласа [см. формулу (19.31)].

В силу симметрии φ зависит только от угла θ и не зависит от радиуса R и угла α — двух остальных координат сферической системы. Таким образом, $\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0$, откуда $\sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} = C_1$, $\varphi = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2$.

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 . При $\theta=30^\circ$ $\varphi=0$, при $\theta=135^\circ$ $\varphi=1000$ В. Следовательно, $0=C_1 \ln \operatorname{tg} 15^\circ + C_2$; $1000=C_1 \ln \operatorname{tg} 67^\circ 30' + C_2$. Отсюда $C_1=461$ В, $C_2=608$ В. Потенциал точки M $\varphi_M=461 \ln \operatorname{tg} 60^\circ + 608=856,5$ В. Напряженность поля имеет только составляющую E_θ :

$$E_\theta = -\frac{d\varphi}{R d\theta} = -\frac{C_1}{R \sin \theta}.$$

Напряженность в точке M

$$E_{\theta M} = -\frac{461}{0,02 \sin 120^\circ} = -26,6 \text{ кВ/м.}$$

Пример 188. В вакууме на расстоянии 2 см друг от друга расположены два плоских электрода (рис. 19.28). Правый электрод заземлен, а левый соединен с плюсом батареи, ЭДС которой 220 В; отрицательный зажим батареи заземлен. В пространстве между электродами распределен объемный заряд с плотностью $\rho = -a \epsilon_0 x$, где $a=30$ кВ/см³; x — расстояние от левой пластины (см. рис. 19.28). Требуется найти закон изменения потенциала в пространстве между электродами.

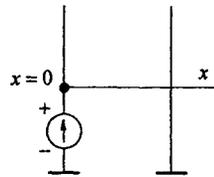


Рис. 19.28

Решение. Полагаем, что размеры электродов много больше расстояния между ними. Направляем ось x , как показано на рис. 19.28.

Потенциал зависит только от x ; от y и z он в данной задаче не зависит. Следовательно,

$$d^2\varphi/dx^2 = -\rho/\epsilon_0 = ax.$$

Производим двукратное интегрирование по x : $d\varphi/dx = ax^2/2 + C_1$ и $\varphi = ax^3/6 + C_1x + C_2$. Определим постоянные интегрирования из граничных условий: при $x=0$ $\varphi=200=C_2$; при $x=2$ $\varphi=0=200+2C_1 + (30 \cdot 8 \cdot 10^3)/6$; $C_1 = -20100$ В/см.

Следовательно,

$$\varphi = \frac{30 \cdot 10^3}{6} x^3 - 20100 x + 200 = 5000 x^3 - 20100 x + 200 \text{ В.}$$

Пример 189. В цилиндрическом конденсаторе с воздушной изоляцией вокруг внутреннего электрода радиусом r_0 располагается заряд короны с объемной плотностью ρ , К/см³. Наружный радиус короны r_1 (рис. 19.29). Радиус внешнего электрода r_2 . Потенциал внутреннего электрода φ_0 , потенциал наружного электрода φ_2 .

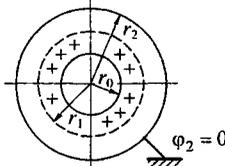


Рис. 19.29

Вывести формулу для определения φ в пространстве, занятом объемными зарядами (назовем его областью I), и в пространстве, не занятом свободными зарядами (область II).

Решение.

В области I:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_I}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Двукратное интегрирование по r дает

$$\varphi_I = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r + C_2.$$

В области II:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_{II}}{dr} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{II} = C_3 \ln r + C_4.$$

Составим четыре уравнения для определения четырех постоянных интегрирования (C_1, C_2, C_3, C_4).

При $r = r_0$ $\varphi_I = \varphi_0$; поэтому

$$\varphi_0 = -\frac{\rho r_0^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r_0 + C_2. \quad (\text{а})$$

При $r = r_1$ $\varphi_I = \varphi_{II}$; следовательно,

$$-\frac{\rho r_1^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r_1 + C_2 = C_3 \ln r_1 + C_4. \quad (\text{б})$$

При $r = r_2$ $\varphi_{II} = 0$; поэтому

$$0 = C_3 \ln r_2 + C_4. \quad (\text{в})$$

При $r = r_1$ равны нормальные составляющие вектора электрического смещения D :

$$\epsilon_0 \left. \frac{d\varphi_I}{dr} \right|_{r=r_1} = \epsilon_0 \left. \frac{d\varphi_{II}}{dr} \right|_{r=r_1} \quad \text{или} \quad C_3 = C_1 - \frac{\rho r_1^2}{2\epsilon_0}. \quad (\text{г})$$

Совместное решение уравнений (а), (б), (в), (г), которое опущено, дает

$$C_1 = \left[\frac{\rho}{4\epsilon_0} (r_1^2 - r_0^2) + \frac{\rho r_1^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} - \varphi_0 \right] / \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Далее определяем C_3 из уравнения (г), C_4 из (в) и C_2 из (а).

Пример 190. Над поверхностью земли расположились положительно заряженное грозное облако. Пространство между облаком и землей можно рассматривать как огромных размеров плоский конденсатор. Напряженность поля \vec{E} в нем направлена от облака к земле. Найти потенциал точки A , расположенной на расстоянии 8 м от поверхности земли, в двух случаях: 1) когда над поверхностью земли не протянут заземленный трос (рис. 19.30) и 2) когда над поверхностью земли над точкой A на высоте 10 м от земли протянут заземленный стальной трос диаметром 10 мм (рис. 19.31).

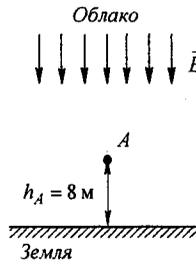


Рис. 19.30

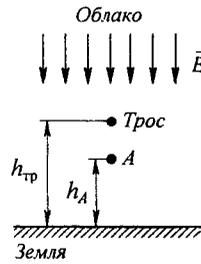


Рис. 19.31

Решение. В случае отсутствия троса (режим I): $\varphi_A^I = E h_A$, где $h_A = 8$ м. При наличии троса (режим II) потенциал в точке A создается не только равномерным полем «плоского конденсатора», но и зарядом на тросе $q_{тp}$: $\varphi_A^{II} = E h_A + q_{тp} \alpha_{12}$. Здесь через α_{12} обозначен потенциальный коэффициент:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{1}{2 \pi \epsilon_0} \ln \frac{10+8}{2}.$$

Составим уравнение для определения заряда троса: $\varphi_{тp} = E h_{тp} + q_{тp} \alpha_{11} = 0$. Следовательно, $q_{тp} = -E h_{тp} / \alpha_{11}$ и $\varphi_A^{II} = (h_A - h_{тp} \alpha_{12} / \alpha_{11}) E$.

Изменение потенциала в точке A , отнесенное к значению потенциала в точке A до появления троса:

$$\frac{\Delta \varphi_A}{\varphi_A^I} = \frac{\varphi_A^I - \varphi_A^{II}}{\varphi_A^I} = \frac{E \left[h_A - \left(h_A - h_{тp} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) \right]}{E h_A} = \frac{10 \cdot 0,251}{8} = 0,313;$$

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\ln(18/2)}{\ln 4000} = \frac{2,08}{8,3} = 0,251.$$

Пример 191. В равномерное поле с напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м внесен незаряженный металлический шар радиусом $a = 1$ см. Найти E_R и E_θ в точке A . Координаты точки A : $R = 2$ см и $\theta = 30^\circ$.

Решение. В соответствии с формулами § 19.40 имеем:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -E_0 \cos \theta (1 + 2 a^3 / R^3) = -10^6 \cdot 0,866 (1 + 2/8) = -1,082 \cdot 10^6 \text{ В/м};$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = E_0 \sin \theta (1 - a^3 / R^3) = 10^6 \cdot \frac{1}{2} (1 - 1/8) = 0,4375 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Результирующая напряженность поля по модулю:

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = 1,168 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

Пример 192. В воздухе создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м. В это поле поместили диэлектрический цилиндр ($\epsilon_{ai} = 4 \epsilon_0$) так, что его ось перпендикулярна полю. Найти напряженность поля E_i внутри цилиндра.

Решение. Воспользуемся формулой (19.72):

$$E_i = E_0 \frac{2 \epsilon_0}{\epsilon_{ai} + \epsilon_0} = 10^3 \frac{2 \cdot 1}{4 + 1} = 4 \cdot 10^2 \text{ кВ/м.}$$

Пример 193. В некоторой области пространства имеется поле, потенциал которого зависит только от координаты x декартовой системы: $\varphi = 5x^3 - 60x^2$.

Найти закон изменения плотности свободных зарядов в этом поле.

Решение. Уравнение Пуассона, описывающее поле, можно записать так: $d^2\varphi/dx^2 = -\rho_{\text{своб}}/\epsilon_a$. Дважды дифференцируем φ по x :

$$\frac{d\varphi}{dx} = 15x^2 - 120x; \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 30x - 120.$$

Следовательно, $\rho_{\text{своб}} = (-30x + 120)\epsilon_a$.

Пример 194. Вывести формулу для определения напряженности и потенциала поля, создаваемого заряженной осью длиной l (рис. 19.32).

Заряд на единицу длины оси равен τ .

Решение. Определим E и φ в произвольной точке k . Расположим оси декартовой системы координат в соответствии с рис. 19.32. Выделим отрезок оси длиной dx , на нем будет заряд τdx . В силу малости dx будем считать этот заряд точечным и по теореме Гаусса найдем создаваемую им напряженность поля в точке k :

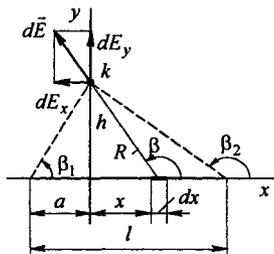


Рис. 19.32

$$dE = \tau dx / (4\pi\epsilon_a R^2).$$

Проекция $d\vec{E}$ на ось x

$$dE_x = dE \cos(180 - \beta) = \frac{-\tau \cos\beta dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Угол β отсчитываем от положительного направления dx к положительному направлению радиуса R (последний направлен от dx к точке k).

Проекция $d\vec{E}$ на ось y

$$dE_y = dE \sin(180 - \beta) = \frac{\tau \sin\beta dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Выполним замену в предыдущих равенствах:

$$R = \frac{h}{\sin \beta}; \quad x = -h \operatorname{ctg} \beta; \quad dx = \frac{h d\beta}{\sin^2 \beta}.$$

Получим

$$E_x = \frac{-\tau}{4 \pi \epsilon_a h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon_a h} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2);$$

$$E_y = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon_a h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon_a h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2);$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Составляющая потенциала в точке k от точечного заряда τdx

$$d\varphi = \frac{\tau dx}{4 \pi \epsilon_a R} = \frac{\tau d\beta}{4 \pi \epsilon_a \sin \beta};$$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\sin \beta} = -\operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4 \pi \epsilon_a} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l-a}{h} + \operatorname{Arsh} \frac{a}{h} \right).$$

§ 19.48. Метод средних потенциалов. Как уже говорилось, в электростатическом поле, образованном системой заряженных проводящих тел, все точки поверхности каждого тела имеют одинаковый потенциал, а поверхностная плотность зарядов τ в общем случае изменяется от точки к точке.

В тех случаях, когда неравномерность распределения зарядов по поверхности тела невелика, для подсчета емкостей иногда пользуются методом средних потенциалов (приближенный метод). В его основу положено заведомо неправильное предположение, что на поверхности каждого тела заряды распределены с одинаковой плотностью, а различные точки одного и того же проводящего тела имеют неодинаковые потенциалы. Это предположение дает возможность относительно легко найти среднее значение потенциала $\varphi_{\text{ср}}$ тела и по известному заряду тела найти его емкость. Результат оказывается близким к истинному.

Пример 195. Определить емкость уединенного прямого проводника длиной l и радиусом r .

Решение. Воспользуемся формулой для потенциалов произвольной точки k , полученной в примере 194. Сосредоточим заряд на оси провода с плотностью τ на единицу длины и поместим точку k (см. рис. 19.32) на поверхность провода (т. е. примем $h=r$). Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ср}} &= \frac{\tau}{4 \pi \epsilon_a l} \int_0^l \left(\operatorname{Arsh} \frac{l-a}{r} + \operatorname{Arsh} \frac{a}{r} \right) da = \frac{\tau}{2 \pi \epsilon_a l} \int_0^l \operatorname{Arsh} \frac{a}{r} da; \\ &\int \operatorname{Arch} x dx = x \operatorname{Arch} x - \sqrt{1+x^2}; \\ \varphi_{\text{ср}} &= \frac{\tau}{2 \pi \epsilon_a} \left[\operatorname{Arch} \frac{l}{r} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} + \frac{r}{l} \right]. \end{aligned}$$

По определению (см. § 12.29) заряд уединенного тела $\tau l = \varphi_{\text{ср}} C$. Поэтому емкость уединенного цилиндрического провода

$$C = 2 \pi \epsilon_a l \left[\operatorname{Arch} \frac{l}{r} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} + \frac{r}{l} \right]^{-1}.$$

Выражение в квадратных скобках можно упростить. Так как $\text{Arch } x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, а при $x \gg 1$ $\text{Arch } x \approx \ln(2x)$, то при $l/r \gg 1$ скобка равна $\ln(l/r) + \ln 2 - 1$. Отсюда

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln(l/r) - 0,307}.$$

Пример 196. Вследствие неравномерного нагрева диэлектрическая проницаемость изоляции коаксиального кабеля (рис. 19.33) изменяется в функции радиуса r следующим образом: $\epsilon_a = m/r$. Вывести формулы для определения напряженности электрического поля E и смещения D . Радиус жилы кабеля r_1 , внутренний радиус оболочки r_2 , напряжение между жилой и оболочкой U . Объемный заряд отсутствует.

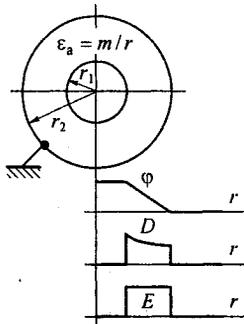


Рис. 19.33

Решение. Воспользуемся теоремой Гаусса [формула (19.20)] в дифференциальной форме [применять уравнение Лапласа в данном случае нельзя, так как оно выведено при условии, что $\epsilon_a = \text{const}$ (см. § 19.19)]. В формуле (19.24) заменим \vec{E} на \vec{D} и учтем, что \vec{D} имеет только одну составляющую D_r и в силу симметрии не зависит от координат r и α . Будем иметь

$$\text{div } \vec{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) = 0.$$

Отсюда следует, что $r D_r = r D = C$; $D = C/r$, где C — некоторая постоянная. Таким образом, D изменяется обратно пропорционально радиусу. Напряженность поля $E = D/\epsilon_a = C/m$, т. е. напряженность поля — величина постоянная. Определим постоянную C . Для этого воспользуемся тем, что

$$\int_{r_1}^{r_2} E dr = U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C}{m} dr = \frac{C}{m} (r_2 - r_1);$$

отсюда $C = mU/(r_2 - r_1)$. Графики изменения E , D и ϕ см. на рис. 19.33.

Обратим внимание на то, что если бы диэлектрическая проницаемость ϵ_a изоляции коаксиального кабеля примера 196 была постоянной величиной (не являлась бы функцией r), то имели бы место следующие зависимости:

$$E = \frac{U}{r \ln(r_2/r_1)}; \quad D = \epsilon_a E; \quad \phi = \frac{U \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)},$$

т. е. в этом случае напряженность поля была бы не постоянная, а изменялась обратно пропорционально радиусу, потенциал ϕ изменялся бы не линейно в функции r , а по логарифмическому закону.

Пример 197. Вывести формулы для расчета поля диполя.

Решение. Диполь изображен на рис. 19.34. Расстояние между зарядами обозначим через l . При решении воспользуемся сферической системой координат.

Обозначим расстояние от произвольной точки a до заряда $+q$ через R_1 , до заряда $-q$ — через R_2 и до середины диполя — через R . Угол между вертикалью и радиусом R равен θ .

Потенциал точки a определим как потенциал в поле двух точечных зарядов:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Если $R \gg l$, то $R_1 R_2 \approx R^2$, а $R_2 - R_1 \approx l \cos \theta$; поэтому

$$\varphi \approx \frac{q l \cos \theta}{4 \pi \epsilon_a R^2}. \quad (19.73)$$

По формулам § 19.10 найдем:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{q l \cos \theta}{2 \pi \epsilon_a R^3}; \quad (19.74)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = \frac{q l \sin \theta}{4 \pi \epsilon_a R^3}; \quad (19.75)$$

$$E_\alpha = 0;$$

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = \frac{q l}{4 \pi \epsilon_a R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (19.76)$$

Таким образом, в поле диполя при $R \gg l$ потенциал φ изменяется обратно пропорционально второй, а напряженность — обратно пропорционально третьей степени расстояния R рассматриваемой точки до диполя; φ и E являются функциями угла α .

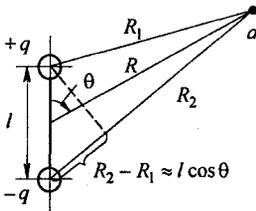


Рис. 19.34

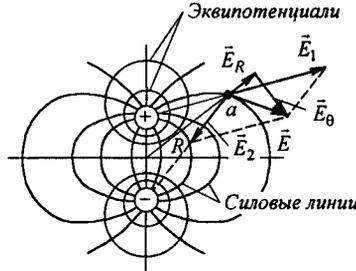


Рис. 19.35

Картина поля диполя изображена на рис. 19.35. Напряженность поля в некоторой произвольной точке a равна геометрической сумме напряженностей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 от зарядов $+q$ и $-q$. Если воспользуемся сферической системой координат, то напряженность поля в той же точке a можно представить в виде суммы напряженностей \vec{E}_R и \vec{E}_θ ; \vec{E}_R направлена вдоль радиуса R , а \vec{E}_θ имеет направление θ .

Пример 198. Вывести формулы для определения значения напряженности поля и емкости двухслойного плоского конденсатора (рис. 19.36), а также построить графики изменения модуля вектора напряженности электрического поля E , модуля вектора электрической индукции D и потенциала φ в функции расстояния x .

Толщина первого слоя диэлектрика d_1 , второго — d_2 . Абсолютная диэлектрическая проницаемость первого слоя ϵ_{a1} , второго слоя ϵ_{a2} . Принять $\epsilon_{a1} = 2 \epsilon_{a2}$ и $d_2 = 1,5 d_1$.

Решение. Все величины, относящиеся к первому слою, обозначим индексом 1, а ко второму слою — индексом 2. Положим, что разность потенциалов между обкладками конденсатора равна U . Искажающее влияние краев конденсатора на поле учитывать не будем. При этом условии в каждом слое поле будет равномерным. В силу того, что нормальная составляющая вектора \vec{D} непрерывна, имеем $D_{1n} = D_{2n}$. Но $D_{1n} = \epsilon_{a1} E_1$; $D_{2n} = \epsilon_{a2} E_2$. Следовательно,

$$\epsilon_{a1} E_1 = \epsilon_{a2} E_2. \quad (a)$$

Таким образом, отношение напряженностей обратно пропорционально отношению электрических проницаемостей. Уравнение (а) связывает две пока неизвестные величины E_1 и E_2 . Второе уравнение относительно E_1 и E_2 составим исходя из того, что

$$\int_0^{d_1} \vec{E}_1 d\vec{x} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 d\vec{x} = U$$

или

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U. \quad (б)$$

Совместное решение (а) и (б) дает $E_1 = U / (d_1 + d_2 \epsilon_{a1} / \epsilon_{a2})$.

Графики зависимостей D , E и ϕ от расстояния x изображены на рис. 19.36.

Для нормальной работы конденсатора необходимо, чтобы напряженность электрического поля ни в первом, ни во втором слоях конденсатора не достигла значения напряженности, при котором происходит пробой данного диэлектрика.

Напряженность равномерного поля, при которой происходит пробой данного диэлектрика, называют *электрической прочностью*. Электрическая прочность диэлектриков, особенно газообразных, сильно зависит от температуры и давления. Для воздуха она равна 30 кВ/см при нормальном атмосферном давлении и температуре 18 °С.

При выводе формулы для емкости двухслойного плоского конденсатора на границу раздела двух диэлектриков мысленно поместим бесконечно тонкий металлический листок. Эта операция вполне допустима, так как поверхность раздела диэлектриков как была эквипотенциальной поверхностью до помещения листка, так и остается ею после помещения на нее листка; значение ее потенциала при этом не изменится.

После проведения такой операции (ее иногда называют *способом отвердения*) емкость двухслойного конденсатора можно подсчитать как емкость двух последовательно включенных конденсаторов C_1 и C_2 ; C_1 — емкость первого слоя конденсатора, C_2 — емкость второго слоя конденсатора: $C_1 = \epsilon_{a1} S / d_1$; $C_2 = \epsilon_{a2} S / d_2$, где S — площадь одной пластины конденсатора с одной стороны.

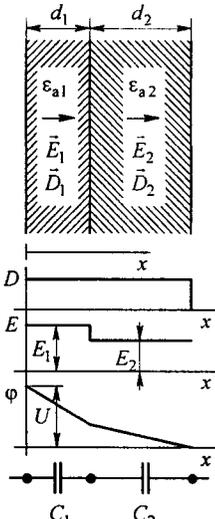


Рис. 19.36

Емкость двух последовательно включенных конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S}{d_1/\varepsilon_{a1} + d_2/\varepsilon_{a2}}.$$

§ 19.49. Электреты. *Электреты* — это поляризованные или электризованные внешним полем твердые диэлектрики, сохраняющие поляризованность или электризацию после снятия этого поля. Во внешней по отношению к ним среде они могут создавать электрическое поле, подобно тому как постоянные магниты создают магнитное поле.

Чтобы электреты по возможности дольше сохраняли свои свойства (для затруднения саморазряда), их удельное сопротивление должно быть очень велико, порядка $10^{12} \dots 10^{16}$ Ом·м.

Электреты изготовляют либо из неполярных диэлектриков, либо из полярных. неполярный диэлектрик (например, пленку из политетрафторэтилена толщиной 5...20 мкм) подвергают в вакууме электронной бомбардировке (электризация внешним полем), при которой электроны внедряются в диэлектрик и захватываются там на ловушках.

Электреты из полярных диэлектриков (например, из полиметилметакрилата) получают часто термоэлектрическим способом, помещая нагретый до температуры размягчения диэлектрик во внешнее электрическое поле, а затем охлаждая его. Размягченное состояние диэлектрика способствует расположению диполей по внешнему полю.

Электреты подразделяют на электреты с гомозарядом и на электреты с гетерозарядом.

Если знак заряда на поверхности электрета, обращенной к формирующему электроду, такой же, что и у формирующего электрода, то такой заряд называют *гомозарядом*, если противоположный — *гетерозарядом*. Так как с течением времени заряды освобождаются из неглубоких ловушек, а поляризационные заряды частично компенсируются зарядами, натекающими извне, то поверхностная плотность зарядов σ со временем все же уменьшается, т. е. происходит процесс старения электретов, подобный старению постоянных магнитов. Несмотря на это поверхностная плотность σ у упомянутых типов электретов достигает достаточно больших значений порядка 80 мкКл/м².

При практическом использовании электретов в ксерографии, в микрофоновых и телефонных цепях и при других применениях стремятся создать такие условия для их работы, чтобы линейный размер области, внешней по отношению к электрету (в которой создается им электрическое поле), был соизмерим с толщиной электретной пленки или пластинки керамического электрета. Если этого не сделать, то внешнее поле оказывается недостаточно сильным. Например, поле отдельно взятого, находящегося в воздухе электрета площадью S , толщиной a с поверхностной плотностью заряда σ определится как поле электрического диполя с электрическим моментом $\sigma S a$ и при расстояниях R от оси диполя ($R \gg \sqrt{S}$ и $R \gg a$) может быть подсчитано по формулам (19.73)–(19.76).

В качестве иллюстрации применения электрета рассмотрим принцип работы электретного микрофона (рис. 19.37), в цепи которого нет внешнего источника ЭДС.

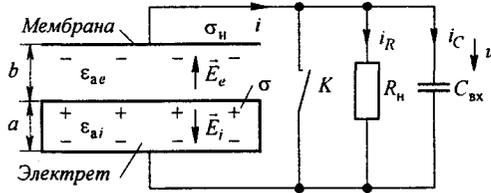


Рис. 19.37

На расстоянии b от тонкой пластинки керамического электрета (ее толщина a , площадь S и электрическая проницаемость ϵ_{ai} , нижняя поверхность пластины металлизирована) находится тонкая проводящая мембрана площадью S . Под действием звуковой волны мембрана может колебаться в поле электрета. Заряд q_n , возникающий на мембране вследствие электрической индукции, изменяется при колебании мембраны и потому по контуру «электрет — воздушный зазор — мембрана — соединительные провода» протекает ток dq_n/dt . Далее рассмотрим два случая работы электретного микрофона: ключ K замкнут и ключ K разомкнут. Плотность заряда, индуцированного на мембране, обозначим σ_n , поверхностную плотность заряда на верхней стороне электрета обозначим σ . Напряженность электрического поля в электрете E_i , в воздушном промежутке E_e . Электрическая проницаемость воздушного промежутка ϵ_{ae} .

Первый случай. Так как для потенциального поля $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, то, полагая сопротивления соединительных проводов малым и учитывая направления векторов \vec{E}_i и \vec{E}_e , указанные на рисунке, имеем

$$E_i a - E_e b = 0. \quad (1)$$

Заряд на верхней грани электрета численно равен заряду на нижней грани электрета плюс заряд, индуцированный на мембране. Если учесть, что плотность заряда на проводящей поверхности равна произведению напряженности поля в точке диэлектрика, граничащей с проводящей поверхностью, на электрическую проницаемость диэлектрика, то получим

$$\epsilon_{ai} E_i + \epsilon_{ae} E_e = \sigma. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что плотность заряда, индуцированного на мембране,

$$\sigma_n = \epsilon_{ae} E_e = \sigma \frac{\epsilon_{ae}}{\epsilon_{ae} + \epsilon_{ai} (b/a)}. \quad (3)$$

Полный заряд на мембране $q_n = \sigma_n S$. При изменении расстояния b во времени ток через микрофон

$$i = \frac{dq_n}{dt} = \frac{\sigma S \epsilon_{ai}}{a \epsilon_{ai} [1 + b \epsilon_{ai} / (a \epsilon_{ae})]^2} \frac{db}{dt}.$$

Второй случай. Вместо уравнения (1) теперь запишем уравнение

$$a E_i - b E_e = u, \quad (1')$$

где u — напряжение на нагрузке.

Уравнение (2) по-прежнему справедливо. Ток

$$i = i_R + i_C = \frac{u}{R_n} + C_{вх} \frac{du}{dt}. \quad (4)$$

Обозначим заряд на поверхности электрета

$$q_s = \sigma S. \quad (5)$$

Из уравнений (1'), (2), (4), (5) получим дифференциальное уравнение с переменными во времени коэффициентами относительно индуцированного заряда q_n на мембране:

$$A \frac{dq_n}{dt} + B q_n = M q_3. \quad (6)$$

Здесь

$$A = 1 + \frac{C_{\text{вк}}}{S \epsilon_{ae}} \left(b(t) + a \frac{\epsilon_{ae}}{\epsilon_{ai}} \right); \quad B = \left(b(t) + a \frac{\epsilon_{ae}}{\epsilon_{ai}} \right) / S R_n \epsilon_{ae};$$

$$M = \frac{a}{S R_n \epsilon_{ae}}.$$

Коэффициент A — безразмерная величина, коэффициенты B и M выражены в секундах в минус первой степени (c^{-1}). Ток i по-прежнему равен dq_n/dt .

§ 19.50. Изменение заряда (напряжения) на конденсаторе, вызванное помещением в него диэлектрическим телом, имеющим остаточную поляризацию. Между электродами 1 и 4 конденсатора емкостью C приложено напряжение U (рис. 19.38, а). Электрод 4 заземлен. Заряд на

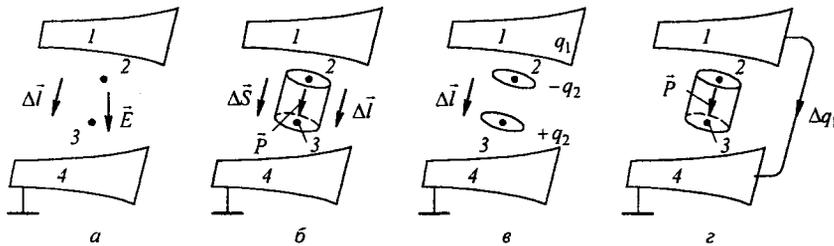


Рис. 19.38

электроде 1 обозначим q_1 . Разность потенциалов между двумя близко расположенными точками 2 и 3 $\varphi_2 - \varphi_3 = \vec{E} \Delta \vec{l}$. Внесем в конденсатор между точками 2 и 3 кусочек диэлектрической пленки высотой Δl , площадью ΔS , имеющей остаточную поляризацию \vec{P} (рис. 19.38, б). Заменим эту пленку диполем с зарядами $\pm q_2$ на поверхностях ΔS , проходящих через точки 2 и 3 и расположенных на расстоянии Δl (рис. 19.38, в).

Электрический момент кусочка пленки и диполя одинаков:

$$\vec{P} \Delta V = \vec{P} \Delta \vec{l} \Delta \vec{S} = q_2 \Delta \vec{l}.$$

Отсюда

$$q_2 = \vec{P} \Delta \vec{S}. \quad (a)$$

Используя потенциальные коэффициенты по формулам Максвелла, определяем потенциалы электрода 1 (φ_1) и элементарных поверхностей ΔS , проходящих через точки 2 и 3 (φ_2 и φ_3) в поле зарядов q_1 , q_2 , $-q_2$, и их зеркальных изображений при заземленном электроде 4:

$$\varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 - \alpha_{13} q_2; \quad (б)$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 - \alpha_{23} q_2; \quad (в)$$

$$\varphi_3 = \alpha_{31} q_1 + \alpha_{32} q_2 - \alpha_{33} q_2. \quad (\text{г})$$

Применим формулы (а)–(г) для решения двух задач.

1. Выясним, на сколько (ΔU) изменится напряжение между разомкнутыми электродами 1 и 4 конденсатора, если внутрь его поместить кусочек поляризованной пленки.

До помещения пленки при $\varphi_1 = U$ напряженность поля между точками 2 и 3 равна \vec{E} . По формулам (б)–(г)

$$\begin{aligned} \varphi_1 = U &= q_1 \alpha_{11} = q_1 / C; \\ \varphi_2 - \varphi_3 &= q_1 (\alpha_{21} - \alpha_{31}) = \vec{E} \Delta \vec{l}. \end{aligned} \quad (\text{д})$$

Отсюда

$$\alpha_{21} - \alpha_{31} = \vec{E} \Delta \vec{l} / q_1. \quad (\text{е})$$

После внесения пленки заряд q_1 на электроде 1 не изменится (так как электроды разомкнуты), а потенциал электрода 1 станет равным $U + \Delta U$.

По формуле (б)

$$U + \Delta U = \alpha_{11} q_1 + q_2 (\alpha_{12} - \alpha_{13}). \quad (\text{ж})$$

Учтем, что $\alpha_{km} = \alpha_{mk}$, и из (е), (д), (ж) определим

$$\Delta U = q_2 (\alpha_{12} - \alpha_{13}) = \frac{\vec{P} \Delta \vec{S} \vec{E} \Delta \vec{l}}{q_1} = \frac{\vec{P} \vec{E} \Delta V}{C U}. \quad (\text{з})$$

2. Подсчитаем величину заряда Δq_1 , который пройдет с электрода 1 на электрод 4 по проводу, накоротко замыкающему их (рис. 19.38, з), если внутрь конденсатора внести кусочек поляризованной пленки. При решении полагаем известной напряженность поля \vec{E} в интервале между точками 2 и 3 до внесения пленки при напряжении U между разомкнутыми электродами 1 и 4.

До внесения пленки при короткозамкнутых электродах $q_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$. После внесения пленки

$$\varphi_1 = 0 = \alpha_{11} \Delta q_1 + q_2 (\alpha_{12} - \alpha_{13}).$$

Имея в виду, что

$$\alpha_{11} = 1/C, \quad q_2 = \vec{P} \Delta \vec{S}$$

и

$$\alpha_{12} - \alpha_{13} = \vec{E} \Delta \vec{l} / q_{1\text{разомк}},$$

где $q_{1\text{разомк}}$ — заряд на электроде 1 при разомкнутых электродах и напряжении между ними U , находим

$$\Delta q_1 = -q_2 \frac{\alpha_{12} - \alpha_{13}}{\alpha_{11}} = -\frac{\vec{P} \Delta \vec{S} \vec{E} \Delta \vec{l} C}{C U} = -\frac{\vec{P} \vec{E} \Delta V}{U}. \quad (\text{и})$$

Если на расстояниях Δl и $\sqrt{\Delta S}$ напряженность поля нельзя принять даже приблизительно неизменной, то в формуле (з) и (и) $\vec{P} \vec{E} \Delta V$ следует заменить на $\int \vec{P} \vec{E} dV$. Интеграл берется по объему, занятому пленкой.

§ 19.51. Электрическое поле двойного заряженного слоя. Двойным заряженным слоем называют слой положительных и слой отрицательных зарядов, расположенных на весьма малом (теоретически на бесконечно малом) расстоянии друг от друга.

На рис. 19.39, а изображено поле плоского конденсатора внутри и вне пластин. Напряженность электрического поля E внутри и вне пластин направлена в противоположные стороны. В соответствии с этим на рис. 19.39, б вне конденсатора E положительна,

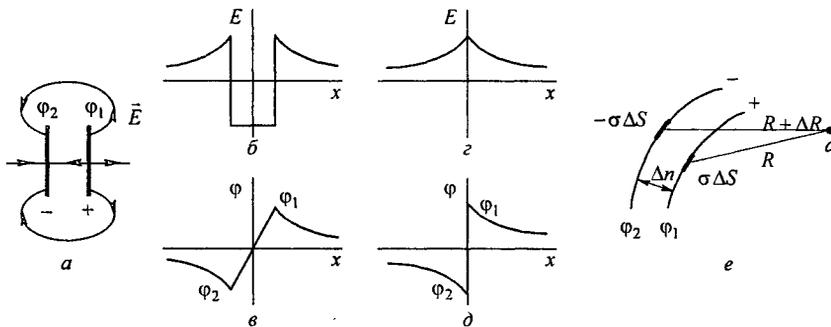


Рис. 19.39

внутри конденсатора отрицательна (за положительное направление для E принято направление слева направо).

График зависимости потенциала ϕ в функции расстояния изображен на рис. 19.39, в.

Если расстояние между пластинами конденсатора по нормали $\Delta n \rightarrow 0$, то графики E и ϕ примут вид кривых, изображенных на рис. 19.39, з и д. Существенно, что потенциал ϕ при переходе через двойной заряженный слой изменяется скачком.

Две пластины конденсатора единичной площади, расположенные на расстоянии Δn друг от друга, несут заряды $\pm \sigma$ и обладают электрическим моментом $P_3 = \sigma \Delta n$. Отсюда

$$\sigma = P_3 / \Delta n.$$

Если пластины имеют площадь ΔS , то на них будут заряды $\pm \sigma \Delta S$, где $\sigma \Delta S = P_3 \Delta S / \Delta n$.

Запишем составляющую потенциала произвольной точки a , находящейся вне конденсатора, от зарядов $\pm \sigma \Delta S$. Полагаем, что эта точка удалена от заряда $\sigma \Delta S$ на расстояние R и от заряда $-\sigma \Delta S$ на $R + \Delta R$ (рис. 19.39, е):

$$\frac{\sigma \Delta S}{4 \pi \epsilon_0 R} - \frac{\sigma \Delta S}{4 \pi \epsilon_0 (R + \Delta R)} = \frac{P_3 \Delta S}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\Delta(1/R)}{\Delta n}.$$

Здесь

$$\Delta(1/R) = 1/R - 1/(R + \Delta R).$$

Устремим $\Delta n \rightarrow 0$, заменим $\Delta(1/R)/\Delta n$ на $\partial(1/R)/\partial n$ и ΔS на dS . Просуммировав потенциалы от всех площадок, получим

$$\phi = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_S P_3 \frac{\partial(1/R)}{\partial n} dS.$$

§ 19.52. Силовое воздействие неравномерного электрического поля на незаряженные диэлектрические и проводящие тела, находящиеся в этом поле. Если незаряженное диэлектрическое тело малых размеров поместить в электрическое поле, то оно поляризуется и будет представлять собой диполь с диэлектрическим моментом $\vec{P}_3 = q \Delta \vec{l}$, где q — заряд, $\Delta \vec{l}$ — расстояние между зарядами диполя. $\Delta \vec{l}$ направлено от $-q$ к $+q$.

В проводящем теле, помещенном в электрическое поле, вследствие электростатической индукции произойдет разделение зарядов, и оно также будет представлять собой диполь с некоторым электрическим моментом \vec{P}_3 .

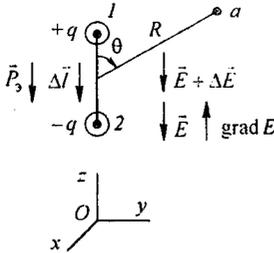


Рис. 19.40

Положим, что электрическое поле в окрестности диполя неравномерно, так что в точке 2 (рис. 19.40) напряженность поля равна \vec{E} , а в точке 1 равна $\vec{E} + \Delta \vec{E}$.

На диполь будет действовать сила \vec{F} (за положительное направление отсчета для нее примем направление вдоль оси $-z$):

$$\vec{F} = q \vec{E} - q (\vec{E} + \Delta \vec{E}) = -q \Delta \vec{E} = -q \Delta l \frac{\Delta \vec{E}}{\Delta l}.$$

В общем случае силу можно записать так:

$$\vec{F} = P_3 \text{grad } E. \quad (\text{a})$$

Знак минус вошел в $\text{grad } E$.

В рассматриваемом примере сила будет направлена вдоль оси z . Тело будет вытягиваться в область более сильного поля. Если направление электрического момента диполя $q \Delta \vec{l}$ не совпадает с направлением \vec{E} в точках расположения диполя, то сила

$$\vec{F} = q (\Delta \vec{l} \Delta) \vec{E}.$$

При раскрытии последнего выражения сначала элемент длины $\Delta \vec{l}$ скалярно умножают на оператор ∇ , а затем дифференцируют \vec{E} .

Для того чтобы по формуле (а) подсчитать силу, действующую на тело, надо сначала определить электрический момент P_3 этого тела. Его определяют, полагая, что при расстояниях, равных геометрическим размерам тела, неравномерное поле приближенно можно считать равномерным, и потому электрический момент тела может быть взят таким же, что и в равномерном (однородном) поле.

В примере 197 выведена формула (19.73) для потенциала поля диполя в сферической системе координат. Запишем эту формулу со знаком минус в правой части, так как расположение зарядов на рис. 19.40 противоположно расположению их на рис. 19.34:

$$\varphi = -\frac{q l \cos \theta}{4 \pi \epsilon_a R^2} = -\frac{P_3 \cos \theta}{4 \pi \epsilon_a R^2}. \quad (\text{б})$$

Для диэлектрического шара радиуса a , помещенного в равномерное поле напряженности E_0 , составляющая потенциала во внешней по отношению к шару области, обусловленная его электрическим моментом, в соответствии с формулой (19.68) равна

$$E_0 \frac{a^3}{R^2} \frac{\epsilon_{ae} - \epsilon_{ai}}{2 \epsilon_{ae} + \epsilon_{ai}} \cos \theta. \quad (\text{в})$$

Здесь ϵ_{ai} и ϵ_{ae} — абсолютные диэлектрические проницаемости шара и окружающей среды соответственно; R — расстояние от центра диполя до произвольной точки поля; θ — угол в меридианной плоскости (см. рис. 19.22). Сопоставляя (б) и (в), находим

$$P_3 = 4 \pi \epsilon_{ae} \frac{\epsilon_{ai} - \epsilon_{ae}}{2 \epsilon_{ae} + \epsilon_{ai}} a^3 E_0. \quad (\text{г})$$

Формулу для электрического момента P_3 проводящего шара получим из формулы (г), положив в ней $\epsilon_{ai} \rightarrow \infty$:

$$P_3 = 4 \pi \epsilon_{ae} a^3 E_0. \quad (д)$$

При подсчетах силы по формуле (а) в формулах (г) и (д) следует принять $E_0 = E$.

С помощью формулы (а) можно подсчитывать, например, силы, действующие на частички золи в устройствах электрической очистки газов.

Вопросы для самопроверки

1. Охарактеризуйте понятие «электрическое поле». 2. Какой физический смысл придается \vec{E} и φ ? Какая интегральная и дифференциальная связь существует между ними? 3. В чем смысл знака минус в формуле $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$? 4. Какие поля называют потенциальными? 5. Что понимают под силовой линией и что под эквипотенциальной поверхностью? 6. Могут ли быть замкнутыми силовые линии в электростатическом поле? 7. Каким свойством обладает силовая трубка? 8. Какие характеристики поля называют точечными, какие интегральными? 9. Что понимают под картиной поля? 10. Изложите основные принципы графического построения картины поля. 11. В чем отличие свободных зарядов от связанных? 12. В чем заключается явление электростатической индукции? 13. Каков смысл вектора \vec{P} ? 14. Что послужило основанием для введения вектора \vec{D} ? 15. Прокомментируйте три формы записи теоремы Гаусса в интегральном и дифференциальном виде. 16. Линейный заряд (заряженная нить) окружен коаксиальным с ним металлическим цилиндром внешним радиусом r_0 . Будет ли существовать электрическое поле в области $r > r_0$, когда цилиндр: а) не заземлен; б) заземлен? 17. Дайте физическое толкование понятиям градиента и дивергенции. 18. Могут ли при переходе через границу раздела двух сред с различными ϵ , полные значения \vec{E} и D изменяться скачками? 19. Охарактеризуйте поле точечного и линейного зарядов и поле диполя. 20. Как определить плотность связанных зарядов на границе раздела двух диэлектриков, полагая известными вектор \vec{D} на границе и значения ϵ_{r1} и ϵ_{r2} диэлектриков? 21. Дайте определение емкости между двумя телами и емкости уединенного тела. 22. Как можно определить энергию поля системы заряженных тел через их заряды и потенциалы? 23. Докажите теорему единственности решения задач электростатики. 24. Дайте обоснование методу зеркальных изображений. 25. Что определяют потенциальные и емкостные коэффициенты и частичные емкости? 26. Как опытным путем определить частичные емкости? 27. Дайте примеры плоскопараллельного, плоскомеридианного и равномерного полей. 28. Охарактеризуйте идею и этапы решения уравнений в частных производных методом разделения переменных. 29. Какое допущение принято в методе средних потенциалов? 30. Тонкое кольцо радиуса a заряжено с плотностью τ и находится в воздухе; определите создаваемую им напряженность E в точке на оси на расстоянии h от кольца. (Ответ: $a \tau h / [2 \epsilon_a (h^2 + a^2)^{3/2}]$.) 31. Диэлектрический шар радиусом a и электрической проницаемостью ϵ_a заряжен с объемной плотностью ρ . В этом шаре имеется незаряженная сферическая область радиусом b . Центр шара и центр незаряженной сферической области смещены на расстояние c (рис. 19.41)

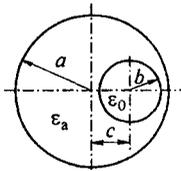


Рис. 19.41

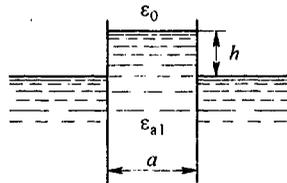


Рис. 19.42

($c < b < a$). Покажите, что поле внутри незаряженной сферической области однородно и напряженность его равна $\rho c / (3 \epsilon_0 \epsilon_r)$. 32. Пластины плоского конденсатора частично погружены в жидкий диэлектрик плотностью d и относительной электрической проницаемостью ϵ_{r1} . Над жидким диэлектриком находится воздух (рис. 19.42). Расстояние между пластинками a . К конденсатору подведено постоянное напряжение U . Выведите формулу для определения ϵ_{r1} , если уровень жидкого диэлектрика между пластинами на величину

h превышает уровень диэлектрика вне пластин. (Ответ: $\epsilon_{r1} = 1 + 2a^3 h d / (\epsilon_0 U^2)$.) 33. Охарактеризуйте свойства электретов. Поясните, как рассчитывают электрические поля, создаваемые ими. 34. Что понимают под двойным заряженным слоем? Покажите, что при

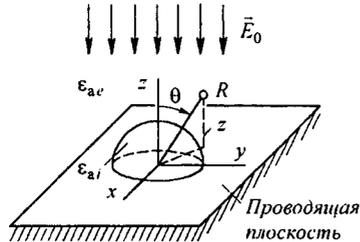


Рис. 19.43

прохождении через двойной заряженный слой потенциал изменяется скачком. 35. Как подсчитать силу, действующую на незаряженную пылинку в неравномерном электрическом поле? 36. В равномерное поле напряженностью \vec{E}_0 , созданное в диэлектрике с электрической проницаемостью ϵ_{ae} , поместили на поверхность проводящей плоскости, совпадающей с плоскостью xOy , половинку диэлектрического шара радиусом a с диэлектрической проницаемостью ϵ_{ai} (рис. 19.43). Определите потенциал в произвольной точке диэлектрика вне шара при $R > a$, полагая, что центр шара совпадает с началом сферической (и прямоугольной) систем координат и что проводящая плоскость имеет нулевой потенциал. (Ответ: $\varphi = E_0 z + \frac{\epsilon_{ae} - \epsilon_{ai}}{2\epsilon_{ae} + \epsilon_{ai}} a^3 \frac{E_0 \cos \theta}{R^2}$.) 37. Решите задачи из сборника задач [24]: 19.3; 19.5; 19.12; 19.17; 19.24; 19.26; 19.28; 19.32; 19.39; 19.45; 19.51.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 20.1. Плотность тока и ток. Если под воздействием внешних источников в проводящей среде (металлических проводниках, земле, жидкостях) создано электрическое поле, то в ней будет протекать электрический ток.

Упорядоченное движение свободных электронов в металле и ионов в жидкости под действием электрического поля принято называть *током проводимости*.

При своем упорядоченном движении носители зарядов испытывают многочисленные столкновения с другими частицами вещества, которые находятся в тепловом движении. Эти столкновения затрудняют упорядоченное движение носителей зарядов и являются причиной сопротивления, оказываемого проводящей средой прохождению тока.

Свойство среды, характеризующее ее способность проводить ток, называют *удельной проводимостью* γ . Удельная проводимость γ зависит от физических свойств проводящего материала и температуры и измеряется в сименсах на метр (См/м); $\text{См/м} = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$.

Основной величиной в электрическом поле проводящей среды является плотность тока \vec{j} . Это векторная величина, направленная по напряженности электрического поля. Она численно равна отношению тока Δi , протекающего через элемент поверхности ΔS (перпендикулярный направлению напряженности поля в данной точке), к размеру ΔS этой поверхности.

Если поверхность имеет конечные размеры, то направление вектора плотности тока во всех элементах, на которые может быть разбита эта поверхность, и направление элементов поверхности могут быть различными, и ток определяют так: $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

Таким образом, *ток есть поток вектора плотности тока*. Ток в отличие от плотности тока является скаляром алгебраического характера.

При протекании постоянных токов как внутри проводящих тел, так и вне их существуют постоянные магнитные поля. Так как эти поля неизменны во времени, то в поле не возникает явление электромагнитной индукции, т. е. магнитное поле, созданное постоянным током, не оказывает влияние на электрическое поле постоянного тока. Поэтому электрическое и магнитное поля постоянного тока можно рассматривать отдельно. Магнитное поле постоянного тока рассмотрено в гл. 21.

§ 20.2. Закон Ома и второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме. Выделим в проводящей среде небольшой параллелепипед объемом ΔV . Длина ребра параллелепипеда Δl , площадь поперечного сече-

ния ΔS . Расположим этот параллелепипед так, чтобы напряженность поля в нем была направлена параллельно ребру (рис. 20.1, а). В силу малости объема можно считать, что напряженность электрического поля \vec{E} одна

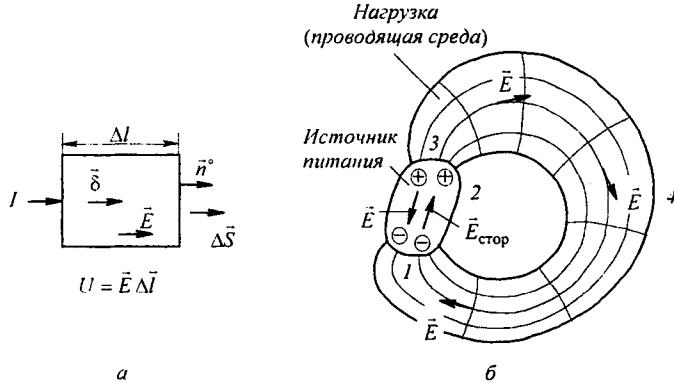


Рис. 20.1

и та же во всем элементарном объеме; $\vec{\Delta l} = \Delta l \vec{n}^\circ$; $\vec{\Delta S} = \Delta S \vec{n}^\circ$, где \vec{n}° — единичный вектор по направлению $\vec{\Delta l}$, $\vec{\Delta S}$ и \vec{E} . Ток $I = \int \vec{\delta} d\vec{S} = \vec{\delta} \vec{\Delta S}$. Напряжение на элементе объема $U = \vec{E} \vec{\Delta l} = RI$. Сопротивление элемента объема $R = \Delta l / (\gamma \Delta S)$.

Подставив в выражение $RI = \vec{E} \vec{\Delta l}$ эквиваленты R и I , получим

$$\frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \vec{\delta} \Delta S \vec{n}^\circ = \vec{E} \Delta l \vec{n}^\circ,$$

откуда

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}. \quad (20.1)$$

Соотношение (20.1) называют *законом Ома в дифференциальной форме*. Оно устанавливает связь между плотностью тока в данной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой же точке.

Уравнение (20.1) справедливо для областей вне источников ЭДС. В областях, занятых источниками ЭДС, кроме кулонова (электростатического) поля существует еще так называемое стороннее электрическое поле, обеспечивающее непрерывное движение зарядов в электрической цепи.

Под *сторонним электрическим полем* понимают электрическое поле, обусловленное химическими, электрохимическими, тепловыми, термоэлектрическими процессами.

Напряженность стороннего поля обозначают $\vec{E}_{\text{стор}}$. В областях, занятых источниками ЭДС, полное значение напряженности поля равно геометрической сумме напряженностей кулонова и стороннего полей $\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$.

На рис. 20.1, б схематически изображена электрическая цепь постоянного тока, состоящая из источника питания и нагрузки.

Источник сторонней ЭДС создает внутри источника питания стороннюю напряженность поля $\vec{E}_{\text{стор}}$.

Линейный интеграл от сторонней напряженности поля внутри источника называется ЭДС источника (E_1):

$$\int_1^3 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = E_1. \quad (20.2)$$

Под действием стороннего поля в источнике непрерывно происходит разделение электрических зарядов. Положительные заряды перемещаются к плюсу источника, а отрицательные — к минусу.

Эти заряды в областях внутри и вне источника создают электрическое поле, напряженность которого E , как и напряженность электростатического (кулонова) поля, направлена от положительных зарядов к отрицательным.

При протекании постоянного тока по цепи одни электрические заряды непрерывно сменяются другими, такими же, как и в предыдущие моменты времени. Таким образом, картина поля в макроскопическом смысле повторяется в смежные моменты времени. Поле носит как бы статический характер. Это и послужило основанием для того, чтобы поле, созданное в проводящей среде разделившимися зарядами, называть кулоновым полем, а его напряженность \vec{E} — напряженностью кулонова поля.

Внутри источника кулоново поле направлено навстречу стороннему. Полное значение напряженности поля внутри источника равно $\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$. Вне источника кулоново поле направлено от положительного электрода к отрицательному. Под действием этого поля и происходит упорядоченное движение зарядов в области вне источника. При протекании тока по цепи $|\vec{E}_{\text{стор}}| > |\vec{E}|$. При разомкнутой цепи $|\vec{E}_{\text{стор}}| = |\vec{E}|$.

Закон Ома в дифференциальной форме для областей, занятых источниками ЭДС, записывают следующим образом:

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (20.3)$$

Уравнение (20.3) называют *обобщенным законом Ома в дифференциальной форме*.

Если от обеих частей уравнения (20.3) взять интеграл по замкнутому контуру, включающему в себя источник ЭДС, то из уравнения (20.3) будет получен второй закон Кирхгофа (см. § 1.1). Поэтому уравнение (20.3) называют также *вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме*.

§ 20.3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме. Если в проводящей среде выделить некоторый объем, по которому протекает постоянный, не изменяющийся во времени ток, то можно сказать, что ток, который войдет в объем, должен равняться току, вышедшему из него, иначе в этом объеме происходило бы накопление электрических зарядов, что опыт не подтверждает. Сумму входящего в объем и выходящего из объема токов записывают так:

$$\oint \vec{\delta} d\vec{S} = 0. \quad (20.4)$$

Если разделить и левую и правую части (20.4) на одно и то же число (на объем, о котором шла речь), то равенство останется справедливым:

$$\frac{\oint \vec{\delta} d\vec{S}}{V} = 0.$$

Очевидно, что последнее соотношение будет справедливо и в том случае, если объем, находящийся внутри замкнутой поверхности, устремим к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{\delta} d\vec{S}}{V} = \operatorname{div} \vec{\delta} = 0.$$

Таким образом, для постоянного, неизменного во времени поля в проводящей среде

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0. \quad (20.5)$$

Это соотношение называют *первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме*. Оно означает, что в установившемся режиме (при постоянном токе) в любой точке поля нет ни истока, ни стока линий тока проводимости $\vec{\delta}$.

§ 20.4. Дифференциальная форма закона Джоуля—Ленца. В гл. 1 отмечалось, что если по какому-либо проводнику сопротивлением R протекает постоянный ток I , то в единицу времени (в секунду) в нем выделяется энергия, равная $I^2 R$. Определим энергию, выделяющуюся в единицу времени в единице объема проводящей среды (с этой целью воспользуемся рис. 20.1, а):

$$\frac{I^2 R}{V} = \frac{(\delta \Delta S)^2}{\Delta l \Delta S} \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (20.6)$$

Следовательно, в единице объема проводящей среды в единицу времени выделяется энергия, численно равная γE^2 .

§ 20.5. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде. Напряженность электрического поля в проводящей среде, как и в электростатическом поле, $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

В неизменном во времени поле

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = \operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0. \quad (20.7)$$

Если γ среды не изменяется от точки к точке, т. е. если среда однородна и изотропна, то γ как постоянную величину можно вынести за знак дивергенции и, следовательно, вместо $\operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0$ можно написать $\gamma \operatorname{div} \vec{E} = 0$ или

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (20.8)$$

т. е.

$$\operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

или

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (20.9)$$

Таким образом, поле в однородной проводящей среде подчиняется уравнению Лапласа. Поле постоянного тока в проводящей среде является полем потенциальным. В нем в областях, не занятых источниками, $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$.

§ 20.6. Переход тока из среды с проводимостью γ_1 в среду с проводимостью γ_2 . **Граничные условия.** Выясним, какие граничные условия выполняются при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью.

На рис. 20.2 линия 00 есть граница раздела сред. Возьмем на границе плоский замкнутый контур 1234 . Составим циркуляцию вдоль этого контура. Стороны 12 и 34 его весьма малы по сравнению со сторонами 23 и 41 (длину последних обозначим dl).

Так как $\oint \vec{E} d\vec{l}$ вдоль любого замкнутого контура равен нулю, то он равен нулю и для контура 12341 .

В силу малости отрезков 12 и 34 пренебрежем составляющими интеграла вдоль этих путей и тогда

$$E_{1t} dl - E_{2t} dl = 0 \quad \text{или} \quad E_{1t} = E_{2t}. \quad (20.10)$$

Это соотношение совпадает с соотношением (19.34).

На границе раздела равны нормальные составляющие плотностей токов. Докажем это.

На границе раздела выделим сплюсненный параллелепипед (рис. 20.3, а). Поток вектора $\vec{\delta}$, втекающий в объем через нижнюю грань,

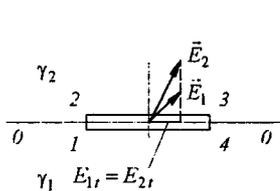


Рис. 20.2

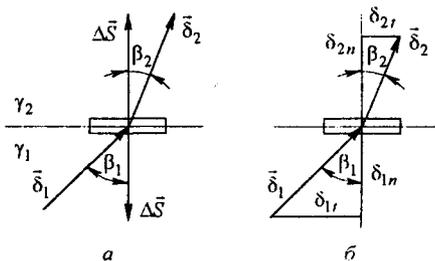


Рис. 20.3

равен $-\delta_{1n} \Delta S$; поток вектора $\vec{\delta}$, вытекающий из объема через верхнюю грань, $\delta_{2n} \Delta S$. Так как $\oint \vec{\delta} d\vec{S} = 0$, то

$$-\delta_{1n} \Delta S + \delta_{2n} \Delta S = 0; \quad \delta_{1n} = \delta_{2n}. \quad (20.11)$$

Следовательно, при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью непрерывна тангенциальная составляющая вектора \vec{E} , т. е. $E_{1t} = E_{2t}$ (но $E_{1n} \neq E_{2n}$), и непрерывна нормальная составляющая плотности тока $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ (но $\delta_{1t} \neq \delta_{2t}$).

Отсюда следует, что полные значения вектора \vec{E} и вектора $\vec{\delta}$ в общем случае меняются скачком на границе раздела.

Найдем связь между углом падения β_1 и углом преломления β_2 . В соответствии с рис. 20.3, б:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\delta_{1t}}{\delta_{1n}} = \frac{E_{1t} \gamma_1}{\delta_{1n}}; \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\delta_{2t}}{\delta_{2n}} = \frac{E_{2t} \gamma_2}{\delta_{2n}}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (20.12)$$

Если ток переходит из среды с большой проводимостью (например, из металла) в среду с малой (например, в землю), то тангенс угла преломления $\operatorname{tg} \beta_2 = (\gamma_2 / \gamma_1) \operatorname{tg} \beta_1$ меньше тангенса угла падения и, следовательно, угол β_2 меньше угла β_1 . Если γ_2 весьма мало, то угол $\beta_2 \rightarrow 0$.

§ 20.7. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем. По своей природе поле электростатическое и поле постоянного тока в проводящей среде различны. Электростатическое поле создается электрическими зарядами, неизменными во времени и неподвижными в пространстве, тогда как электрическое поле в проводящей среде — это поле, в котором электрические заряды имеют упорядоченное движение под действием внешнего источника. Тем не менее между двумя полями можно провести формальную аналогию.

Действительно, электростатическое поле в областях, не занятых зарядами, удовлетворяет уравнению Лапласа. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде вне сторонних источников также ему удовлетворяет. В обоих полях имеют дело с вектором напряженности поля \vec{E} . С вектором электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ можно сопоставить вектор плотности тока $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. С потоком вектора \vec{D} (обозначим его буквой Ψ) $\Psi = \int_S \vec{D} d\vec{S}$ можно сопоставить поток вектора плотности электрического тока $I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}$.

Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков: $E_{1t} = E_{2t}$ и $D_{1n} = D_{2n}$.

Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различной проводимостью: $E_{1t} = E_{2t}$ и $\delta_{1n} = \delta_{2n}$.

Но если два поля удовлетворяют одному и тому же уравнению $\nabla^2 \varphi = 0$ и в них выполняются тождественные граничные условия для сходных величин, то при одинаковой форме граничных поверхностей на основании теоремы единственности можно сказать, что совокупность силовых и эквипотенциальных линий в этих двух полях (т. е. картина поля) будет одинаковой.

Эта формальная аналогия широко используется на практике. Так, например, если какое-либо электростатическое поле уже изучено, то все сведения о нем могут быть перенесены и на геометрически подобное поле в проводящей среде. Справедливо и обратное заключение.

§ 20.8. Экспериментальное исследование полей. Если форма граничных поверхностей (электродов) сложна, то аналитический расчет поля осуществить довольно трудно. Непосредственно же определить потенциалы точек электростатического поля, помещая в них зонды, обычно также не удастся, потому что зонды даже при малой мощности, потребляемой индикаторами, своим присутствием искажают поле.

В этом случае поле исследуют экспериментально на модели, т. е. прибегают к моделированию либо в электролитической ванне, либо на твердой модели. Рассмотрим, как производится моделирование двухмерного поля в электролитической ванне^{*)}.

В ванну с электролитом (например, с подкисленной водой) помещают электроды (рис. 20.4, а). Форма и их взаимное расположение должны быть точно такими же, как и в изучаемом электростатическом поле. Для

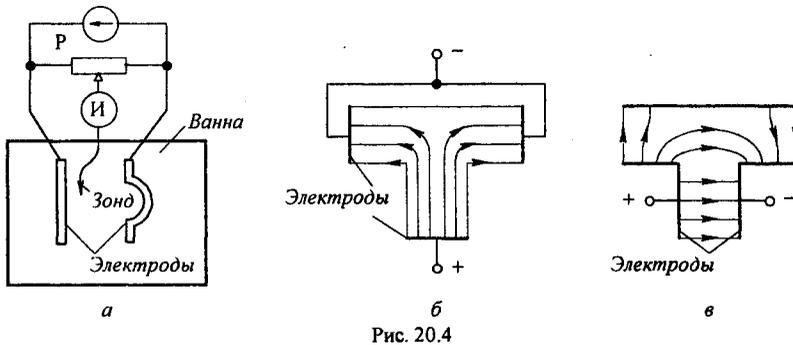


Рис. 20.4

того чтобы стенки ванны меньше искажали исследуемое поле, линейные размеры ванны должны в несколько раз превышать соответствующие линейные размеры исследуемого участка поля.

Электроды соединяют с источником ЭДС низкой частоты (обычно 50 Гц). Использовать в качестве источника питания ЭДС постоянного тока нельзя, так как при постоянном токе будет происходить электролиз подкисленной воды и пузырьки газа, осаждаясь на электродах, будут искажать исследуемое поле. По электролиту проходит переменный ток.

С помощью вспомогательного реостата Р, зонда и индикатора нуля И можно снять семейство эквипотенциальных линий в поле. Для этого движок реостата устанавливают в каком-либо фиксированном положении и, перемещая зонд так, чтобы индикатор показывал нуль, находят совокупность точек, потенциал которых равен потенциалу движка реостата. Далее перемещают движок реостата в новое положение и определяют координаты точек второй эквипотенциали и т. д. Затем по семейству эквипотенциалей строят сетку силовых линий. При построении последней руководствуются тем, что силовые линии в любой точке поля должны быть перпендикулярны эквипотенциалам, в том числе и поверхностям электродов.

В электростатическом поле силовые линии перпендикулярны поверхностям электродов. В поле проводящей среды силовые линии, строго говоря, не совсем перпендикулярны поверхностям электродов. Но если проводимость электродов будет во много раз больше проводимости электролита, то [см. формулу (20.12)] с большой степенью точности можно

^{*)} В приложении И рассматриваются основы другого метода моделирования полей — с помощью электрических сеток.

считать, что силовые линии будут подходить к поверхностям электродов практически под прямым углом.

С помощью электролитической ванны можно моделировать и трехмерные поля. В этом случае ванну выполняют в виде куба или параллелепипеда, заполняют ее слабо проводящей жидкостью, а перемещение зонда в трех взаимно перпендикулярных направлениях обеспечивают специальным механическим приспособлением, находящимся вне ванны.

Моделирование с помощью электролитической ванны имеет известные недостатки — электролит загрязняется пылью из воздуха, испаряется, ванна может дать течь и т. п. Поэтому для моделирования более предпочтительны твердые модели, которые лишены этих недостатков. Твердая модель для моделирования двумерных полей представляет собой лист электропроводной бумаги (в обычную бумагу при ее изготовлении добавлена сажа или графит), на которую ставят металлические электроды и к ним подводят постоянное или синусоидальное напряжение. Ток проходит по бумаге от одного электрода к другому.

Семейство эквипотенциалей получают так же, как и в ванне. Бумага характеризуется своей удельной поверхностной проводимостью на единицу длины и ширины, которая много меньше удельной проводимости металлических электродов.

На практике используют твердые модели двух типов, один из них назовем *исходным* (в нем расположение электродов соответствует расположению электродов в исследуемом электростатическом поле) и другой — *дуальным* или *обращенным* (в нем электроды располагают по граничным силовым линиям исходной модели).

Силовые и эквипотенциальные линии в исходной и дуальной моделях меняются местами.

В качестве примера на рис. 20.4, б показана картина поля в исходной твердой модели. Электроды показаны утолщенными линиями. На рис. 20.4, в — картина поля для дуальной модели. В верхней части дуальной модели на рис. 20.4, в помещена узкая металлическая полоска, выполняющая роль эквипотенциальной линии. Если в поле имеется симметрия, то она должна быть обеспечена и в дуальной модели.

§ 20.9. Соотношение между проводимостью и емкостью. Если какие-либо электроды поместить в проводящую среду и присоединить к источнику ЭДС, то в проводящей среде пойдет ток. Если напряжение между электродами 1 и 2 равно U_{12} и по среде проходит ток I , то между электродами 1 и 2 проводимость $G = I/U_{12}$.

Так как

$$I = \int \bar{\delta} d\bar{S} = \gamma \int \bar{E} d\bar{S} \quad \text{и} \quad U_{12} = \int_1^2 \bar{E} d\bar{l},$$

то

$$G = \gamma \int \bar{E} d\bar{S} / \int_1^2 \bar{E} d\bar{l}. \quad (20.13)$$

В свою очередь, в электрическом поле с электродами такой же конфигурации емкость между двумя частями электродов, на которых расположены одинаковые по значению и противоположные по знаку заряды Q , создающие поток ψ вектора электрической индукции \vec{D} , $\psi = Q = \int \vec{D} d\vec{S}$, будет

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_a \int \vec{E} d\vec{S} / \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (20.14)$$

Если разделить (20.14) на (20.13), то после сокращения получим

$$C/G = \epsilon_a / \gamma, \quad (20.15)$$

т. е. емкость C между двумя телами, разделенными диэлектриком с абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ_a , так относится к проводимости G между теми же телами, если поместить их в среду с электрической проводимостью γ , как ϵ_a относится к γ .

Соотношение (20.15) позволяет по известному выражению емкости между какими-либо телами получить выражение для проводимости или совершить обратную операцию. Так, например, емкость двухпроводной линии

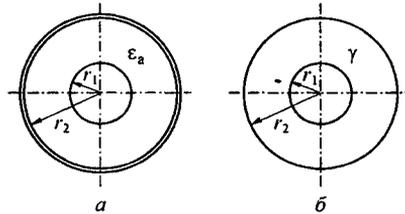


Рис. 20.5

$$C = \frac{\pi \epsilon_a l}{\ln(d/r)}, \quad (20.16)$$

где l — длина проводов; d — расстояние между осями проводов; r — радиус провода.

Чтобы получить выражение для проводимости между двумя параллельными проводами (цилиндрами), погруженными в среду с проводимостью γ , надо в соответствии с (20.15) заменить в (20.16) ϵ_a на γ . Тогда получим

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln(d/r)}. \quad (20.17)$$

Или другой пример. Емкость коаксиального кабеля (рис. 20.5, а)

$$C = \frac{2 \pi \epsilon_a l}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Проводимость между двумя соосными цилиндрами длиной l , которые разделены средой с проводимостью γ (рис. 20.5, б),

$$G = \frac{2 \pi \gamma l}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Аналогию можно распространить и на более сложные поля. Например, если в равномерное поле, созданное в среде с проводимостью γ_e , поместить шар с проводимостью γ_i , то в соответствии с (19.67) потенциал внутри шара определим следующим образом:

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 \frac{3\gamma_e}{2\gamma_e + \gamma_i} z.$$

§ 20.10. Общая характеристика задач расчета электрического поля в проводящей среде и методов их решения. Так же как и задачи электростатики, задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно классифицировать по характеру величины (определенной в результате расчета) на задачи, в которых определяют точечные характеристики (плотность тока, потенциал), и задачи, в которых находят интегральные характеристики поля, например сопротивление между электродами или напряжение между некоторыми точками.

В зависимости от того, что задано и что определяется, все задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно разделить на два основных типа.

В первом — заданы форма и расположение электродов (геометрия поля), свойства среды и интенсивность источников, создающих поле. Требуется найти либо точечные, либо интегральные характеристики поля.

Второй тип задачи является обратным по отношению к первому. Одной из задач второго типа может быть, например, следующая: при заданной точечной характеристике поля, заданных форме, расположении электродов и свойствах среды найти интенсивность источников, создающих это поле.

Задачи расчета электрического поля в проводящей среде могут быть решены:

1) непосредственным интегрированием уравнений, описывающих поле (см. примеры 200 и 202);

2) использованием аналитических решений для других статических невихревых полей (см. примеры 204 и 203);

3) экспериментальным (см. § 20.8) или графическим путем; графический метод построения картины поля применительно к плоскопараллельному электростатическому полю рассмотрен в § 19.44, а к плоскомеридианному полю — в § 19.45; изложенная в этих параграфах методика пригодна и для построения картины плоскопараллельного и плоскомеридианного электрического полей в проводящей среде;

4) методом зеркальных изображений в соответствии с аналогией, рассмотренной в § 20.7. Формулы для расчетных токов I_2 и I_3 в задаче, дуальной задаче § 19.32, следуют из формул для τ_2 и τ_3 , если в них ϵ_{a1} заменить на γ_1 , а ϵ_{a2} — на γ_2 . Метод применим и в том случае, когда проводимость $\gamma_2 = 0$. Для электрического поля проводящей среды вводят понятия собственных и взаимных проводимостей тел, определяемых по аналогии с собственными и взаимными емкостями тел (частичными емкостями — см. § 19.34);

5) методом конформных преобразований (см. приложение М).

§ 20.11. Расчет электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами. Принято считать, что картина электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами, тождественна картине электрического поля в условиях электростатики.

Это верно лишь приближенно, так как в условиях электростатики тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводящего тела равна нулю, тогда как при протекании постоянного тока по проводнику тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводника, хотя и очень мала по сравнению с нормальной составляющей напряженности в той же точке, но не равна нулю. На числовом примере убедимся в том, что тангенциальная составляющая напряженности поля E_t во много раз меньше нормальной составляющей напряженности поля E_n .

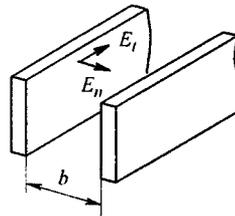


Рис. 20.6

Положим, что разность потенциалов U между двумя параллельными токонесущими медными шинами (рис. 20.6) равна 100 В, расстояние b между шинами 2 см, плотность тока $\delta = 2,5 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2$, $\gamma = 5,6 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Тогда $E_t = \delta / \gamma = 4,46 \cdot 10^{-2} \text{ В/м}$; $E_n = U / b = 5 \cdot 10^3 \text{ В/м}$; $E_n / E_t \approx 1,12 \cdot 10^5$.

Пример 199. Определить ток утечки коаксиального кабеля на 1 км длины. Пространство между жилой и оболочкой заполнено неидеальным диэлектриком, который обладает удельной проводимостью $\gamma = 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Радиус жилы r_1 , радиус оболочки $r_2 = \epsilon r_1$, где ϵ — основание натуральных логарифмов. Напряжение между жилой и оболочкой 10 кВ.

Решение. Ток утечки $I = U G$. Проводимость

$$G = \frac{2 \pi \gamma l}{\ln(r_2 / r_1)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}{1} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ См.}$$

Ток утечки через несовершенную изоляцию $I = 10^4 \cdot 0,628 \cdot 10^{-4} = 0,628 \text{ А/км}$.

Пример 200. Рассмотрим простейшую задачу расчета поля заземления. Подвод тока к земле производится с помощью погруженных в землю заземлений. Ток стекает через заземлитель в землю и растекается по ее толще, с тем чтобы собраться у другого электрода заземлителя. Земля выполняет роль обратного провода.

Если погрузить в землю металлическую полусферу, через которую в землю стекает ток I (рис. 20.7), и принять, что второй электрод, к которому будет подтекать ток, находится очень далеко, то плотность тока в земле на поверхности полусферы радиусом R будет $\delta = I / (2 \pi R^2)$ (поверхность сферы $4 \pi R^2$, поверхность полусферы $2 \pi R^2$). Напряженность поля: $E = \delta / \gamma = I / (2 \pi \gamma R^2)$.

Напряжение между двумя точками на поверхности земли (точки 1 и 2):

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -\frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

На рис. 20.7 изображена кривая изменения потенциала на поверхности земли. Найдем напряжение между точками 1 и 2, расположенными на расстоянии, примерно равном шагу человека ($R_1 = 22$ м, $R_2 = 23$ м).

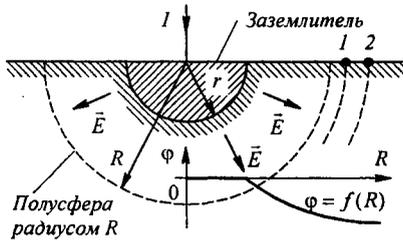


Рис. 20.7

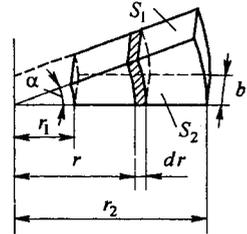


Рис. 20.8

Через заземлитель стекает ток $I = 1000$ А (ток короткого замыкания), удельная проводимость земли $\gamma = 10^{-2}$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$:

$$U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{10^3}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{23} \right) \approx 31,9 \text{ В.}$$

Пример 201. В морскую воду при $\gamma = 0,1$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$ вертикально опущены две металлические трубы наружным диаметром 5 см и длиной 3 м. Найти проводимость G между трубами. Оси труб удалены на расстояние $d = 25$ м.

Решение.

$$G = \frac{\pi\gamma l}{\ln(d/r)} = \frac{\pi \cdot 10^{-1} \cdot 3}{\ln(25/0,025)} = 0,13 \text{ См.}$$

Пример 202. Вывести формулу для определения проводимости G между плоскостями S_1 и S_2 проводящего тела с удельной проводимостью γ , имеющего форму клина (рис. 20.8).

Решение. Проводимость заштрихованного пояска высотой $r\alpha$, толщиной dr и шириной b :

$$dG = \frac{\gamma b dr}{r\alpha}.$$

Проводимость

$$G = \frac{\gamma b}{\alpha} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\gamma b}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Пример 203. В пластинке из алюминия ($\gamma_e = 3,57 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$) создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 0,1 \text{ В/м}$. Определить плотность тока в медном теле ($\gamma_i = 5,6 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$), имеющем цилиндрическую форму и расположенном перпендикулярно напряженности поля E_0 .

Решение. Воспользуемся формулой (19.72) и аналогией, рассмотренной в § 20.7:

$$E_i = E_0 \frac{2\gamma_e}{\gamma_e + \gamma_i} = 10^{-1} \frac{2 \cdot 3,57}{3,57 + 5,6} = 0,78 \cdot 10^{-1} \text{ В/м};$$

$$\delta_i = \gamma_i E_i = 5,6 \cdot 10^7 \cdot 0,78 \cdot 10^{-1} = 436 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2.$$

Пример 204. Используя решение примера 195, вывести формулу для определения проводимости заземления, выполненного в виде стальной трубы длиной L , радиусом r , забитой в землю перпендикулярно ее поверхности. Полагать, как и в примере 200, что второй электрод находится в бесконечности, удельная проводимость земли γ , $L/r \gg 1$.

Решение. Картина поля заземлителя показана на рис. 20.9. Труба длиной L , находящаяся в земле, на рисунке дополнена такой же трубой, находящейся в воздухе. Проводимость заземления равна половине проводимости трубы длиной $2L$. В соответствии с примером 195

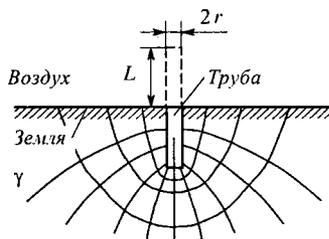


Рис. 20.9

$$G \approx \frac{2\pi\gamma l}{\ln(2L/r) - 0,307}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под сторонней напряженностью поля? 2. Почему уравнение $\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$ называют обобщенным законом Ома, а также вторым законом Кирхгофа? 3. Правильно ли утверждение, что на границе раздела сред с удельными проводимостями γ_1 и γ_2 условие непрерывности потенциала эквивалентно условию $E_{1t} = E_{2t}$? 4. Обоснуйте возможность моделирования электростатического поля полем постоянного тока в проводящей среде. 5. Каким образом можно приспособить аналитические решения задач электростатики для решения родственных задач в поле проводящей среды? Приведите примеры. 6. Составьте аналоги трем группам формул Максвелла для поля постоянного тока в проводящей среде. 7. Две металлические пластинки помещены в среду с удельной проводимостью γ и расположены по отношению друг к другу аналогично тому, как показано на рис. 19.25, а. По картине поля определите проводимость G между пластинками на единицу длины. (Ответ: $G = 2,5\gamma$.) 8. Металлический шарик радиусом R окружен бесконечно протяженной проводящей средой с удельной проводимостью γ ; с шарика в среду стекает ток (второй электрод в бесконечности); определите энергию в единицу времени, доставляемую источником. (Ответ: $I^2/(4\pi\gamma R)$.) 9. Проводящая среда с удельной проводимостью γ занимает $1/4$ полупространства, остальные $3/4$ — воздух (рис. 20.10). В точке

m двугранного угла находится металлический шарик, с которого в проводящую среду стекает ток I . Определите разность потенциалов между точками 1 и 2, расположенными на поверхности проводящей среды. Точки 1, 2 и центр шарика находятся в плоскости рисунка. Расстояния указаны на рисунке. При решении рекомендуется воспользоваться аналогией между электростатическим полем и полем в проводящей среде, методом зеркальных изображений и принципом наложения. (Ответ:

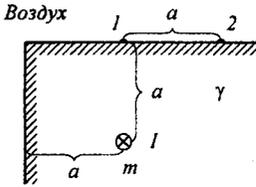


Рис. 20.10

$$U_{12} = \frac{I}{2\pi\sqrt{10}\gamma a} (\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}+1).$$

10. В каких случаях в электрическом поле постоянного тока в изотропной проводящей среде возможно накопление объемных зарядов?

(Ответ: когда ϵ_r (или) γ являются функцией координат и $\epsilon_r/\gamma \neq \text{const.}$) 11. В неоднородной проводящей среде с удельной проводимостью $\gamma(x, y, z)$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon_a(x, y, z)$ обеспечивается неизменное распределение плотности тока $\delta(x, y, z)$. Определите объемное распределение зарядов $\rho_{\text{своб}}$.

(Ответ: $\rho_{\text{своб}} = \frac{\delta}{\gamma} (\text{grad } \epsilon_a - \frac{\epsilon_a}{\gamma} \text{grad } \gamma)$, см. § 24.10.) 12. Решите задачи 20.2; 20.6; 20.8; 20.11; 20.14; 20.17; 20.24.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 21.1. Связь основных величин, характеризующих магнитное поле. Механические силы в магнитном поле. Магнитное поле постоянного тока — это один из компонентов электромагнитного поля, не изменяющегося во времени. Оно создается неизменными во времени токами, протекающими по проводящим телам, неподвижным в пространстве по отношению к наблюдателю. Хотя при протекании постоянных токов имеется и второй компонент электромагнитного поля, а именно электрическое поле, но оно во времени не изменяется и потому не влияет на магнитное поле. Поэтому магнитное поле постоянного тока можно рассматривать независимо от электрического.

Магнитное поле характеризуется индукцией \vec{B} , намагниченностью \vec{J} и напряженностью магнитного поля \vec{H} . Эти три величины связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_a \vec{H}^*), \quad (21.1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная, в СИ равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; μ_a — абсолютная и μ_r — относительная магнитная проницаемости.

Одним из основных проявлений магнитного поля является воздействие его на проводник с током, помещенный в это поле^{*)}. Опыт показывает, что сила \vec{F} , с которой магнитное поле действует на элемент проводника длиной $d\vec{l}$ с током I , определяется следующим образом:

$$\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}]. \quad (21.2)$$

Эта сила направлена перпендикулярно индукции в данной точке поля и перпендикулярна элементу тока $I d\vec{l}$ (рис. 21.1, а).

Если индукция \vec{B} и элемент длиной $d\vec{l}$ параллельны, то элемент тока не испытывает механического воздействия со стороны магнитного поля. Воздействие на элемент тока максимально, когда \vec{B} и $d\vec{l}$ взаимно перпендикулярны.

Из (21.2) следует, что индукция — это силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля элемент тока $I d\vec{l}$, расположенный перпендикулярно \vec{B} , не искажил магнитного поля, существовавшего до внесения в эту точку элемента тока. Другими словами, при оговоренном расположении элемента тока, индукция численно определяется так: $B = \lim[F/(I dl)]$ при $I dl \rightarrow 0$. Имея в виду это условие неискажения поля внесением элемента тока, в соответствии с (21.2), говорят также, что индукцию можно определить как силу, дейст-

^{*)} Пояснения к формуле (21.1) см. § 14.24.

^{**)} А в более общем случае воздействие его на движущийся заряд (§ 2.30).

вующую на проводник длиной dl , равной единице, если по нему протекает ток I , равный единице.

В СИ единицей индукции является тесла ($Tл = Вб/м^2 = В \cdot с/м^2$) (в системе СГСМ — гаусс — Гс).

Механическое воздействие магнитного поля на ток можно пояснить, исходя из представления о деформации силовых линий магнитного поля или из понятия о силах Лоренца. Деформация силовых линий иллюстрируется рис. 21.1, б–г. На рис. 21.1 изображены: б — силовые линии



Рис. 21.1

равномерного магнитного поля до внесения в него провода с током; в — силовые линии уединенного провода с током; г — силовые линии результирующего поля. Слева от провода силовые линии собственного поля провода направлены встречно силовым линиям внешнего равномерного поля, а справа — согласно с ним. Поэтому результирующее поле слева от провода разрежено, а справа — сгущено. Силовые линии, стремясь выпрямиться, производят давление на провод справа налево.

Обратим внимание на то, что силовая линия, показанная пунктиром на рис. 21.1, г, является как бы границей между силовыми линиями, расположенными справа и слева от провода. В точке С этой линии магнитная индукция равна нулю.

При взаимно перпендикулярном расположении магнитного поля и провода с током направление действия силы часто определяют по мнемоническому правилу, получившему название *правила левой руки*; если расположить левую руку таким образом, что силовые линии будут входить в ладонь, вытянутые пальцы направить по току, то отогнутый большой палец покажет направление действующей силы.

Взаимодействие поля с током имеет место независимо от причин возникновения магнитного поля — в результате протекания макротоков в электрических контурах, или микротоков в ферромагнитных материалах, или потока электронов в вакуумном приборе и т. п. Оно наблюдается как в постоянном, так и в изменяющемся во времени поле^{*)}.

Пример 205. На рис. 21.1, д изображены два параллельных провода, расстояние между которыми $a = 10$ см. По первому проводу течет ток $I_1 = 1000$ А, по второму $I_2 = 500$ А (направления токов показаны

^{*)} В § 21.29 показано, что силу можно определить как производную от энергии магнитного поля по изменяющейся координате контура с током.

стрелками). Определить силу взаимодействия между проводами на длине 1 м.

Решение. Воспользуемся формулой (21.2). Учтем, что угол между элементом длины второго провода $d\vec{l}$ и индукцией \vec{B} от левого провода равен 90° . Поэтому модуль векторного произведения $[d\vec{l} \vec{B}]$ равен $dl B \sin 90^\circ = dl B$.

Магнитная индукция, создаваемая первым проводом в точках, где расположен второй провод, по закону полного тока равна $B = \mu_0 I_1 / (2 \pi a)$. Сила

$$F = I_2 \int dl B = \frac{I_1 I_2 \mu_0 \int dl}{2 \pi a}$$

или

$$F = \frac{1000 \cdot 500 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{2 \cdot \pi \cdot 0,1} \approx 1 \text{ Н.}$$

Под действием силы провода стремятся сблизиться.

§ 21.2. Интегральная форма закона полного тока. Количественная связь между циркуляцией вектора \vec{H} по замкнутому контуру и током внутри контура определяется законом полного тока в интегральной форме — линейный интеграл от напряженности магнитного поля вдоль любого замкнутого контура равен полному току, пронизывающему замкнутый контур:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I. \tag{21.3}$$

Под *полным током* понимают весь ток (ток проводимости и ток смещения), пронизывающий контур интегрирования.

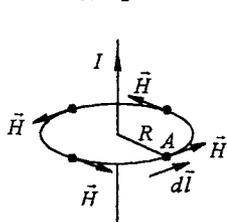


Рис. 21.2

Интегральную форму закона полного тока применяют, когда может быть использована симметрия в поле. Так, например, напряженность поля в некоторой точке A в поле уединенного прямого провода с током I (рис. 21.2) по закону полного тока определяют следующим образом. Проведем через точку A окружность радиусом R в плоскости, перпендикулярной оси провода, так что центр ее находится на этой оси. В силу симметрии напряженность поля во всех точках окружности численно одна и та же. Направление напряженности совпадает с касательной к окружности. Поэтому

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = H 2 \pi R = I; \quad H = \frac{I}{2 \pi R}.$$

С увеличением радиуса R напряженность магнитного поля убывает по гиперболическому закону.

Если какое-либо поле имеет сложный характер и не удается составить замкнутый контур, все точки которого находились бы в симметричных условиях, то хотя интегральная форма записи закона полного тока справедлива и для такого контура, использовать ее для нахождения напряженности в любой точке поля так просто не удастся (H нельзя вынести из-под знака интеграла).

§ 21.3. Дифференциальная форма закона полного тока. Соотношение (21.3) справедливо для контура любых размеров, в том числе и для весьма малого.

Выделим в какой-либо среде небольшой контур («жирно» обведен на рис. 21.3) и составим вдоль него циркуляцию вектора \vec{H} . Циркуляция напряженности поля вдоль этого контура равна току, пронизывающему обведенную площадь. Если площадь мала, то можно полагать, что плотность тока $\vec{\delta}$ в пределах этой площади одинакова и тогда ток, пронизывающий площадь,

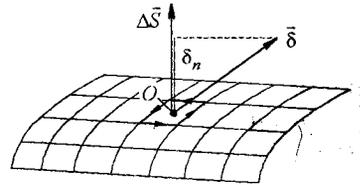


Рис. 21.3

$$\Delta i = \vec{\delta} \Delta \vec{S} = \delta_n \Delta S.$$

Здесь δ_n — проекция вектора плотности тока $\vec{\delta}$ на нормаль к площади, т. е. на направление $\Delta \vec{S}$;

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \delta_n \Delta S. \quad (a)$$

За положительное направление нормали к площади принимают направление движения острия правого винта, головка которого вращается в направлении, принятом за положительное при обходе контура и составлении циркуляции. Разделим обе части равенства (a) на ΔS и устремим ΔS к нулю. Это будет соответствовать стягиванию рассматриваемой площади к нулю. Предел полученного отношения

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S} = \delta_n.$$

В левой части равенства находится величина, являющаяся проекцией ротора \vec{H} на направление нормали к площади ΔS . Следовательно, $\text{rot}_n \vec{H} = \delta_n$.

Если площадь ΔS ориентировать в пространстве так, что направление нормали к ней совпадает с направлением вектора плотности тока $\vec{\delta}$ в данной точке поля, то вместо равенства проекций двух векторов ($\text{rot}_n \vec{H}$ и δ_n) можно записать равенство самих векторов:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}. \quad (21.4)$$

Формула (21.4) и представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

Ротор — это функция, характеризующая поле в рассматриваемой точке в отношении способности к образованию вихрей.

Уравнение (21.4) записано в общей форме безотносительно к системе координат, и в каждой конкретной системе координат оно раскрывается по-своему.

§ 21.4. Раскрытие выражения $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$ в декартовой системе координат. Равенство двух векторов $\text{rot } \vec{H}$ и $\vec{\delta}$ означает, что равны проекции их на ось x , проекции на ось y и проекции на ось z . Проекция $\text{rot } \vec{H}$ на ось z равна

$$\text{rot}_z \vec{H} = \oint_{\Delta S_z \rightarrow 0} \vec{H} d\vec{l} / \Delta S_z,$$

проекция вектора $\vec{\delta}$ на ось z есть δ_z и т. д.

На рис. 21.4 в декартовой системе координат изображен малый прямоугольный контур $mnpqt$. Обойдем этот контур против часовой стрелки и составим циркуляцию вектора \vec{H} ; при этом необходимо учесть изменение вектора \vec{H} от точки к точке. Обозначим проекции \vec{H} на оси x и y в точке m соответственно через H_x и H_y .

В точке n проекция на ось x изменится по сравнению с проекцией в точке m и будет равна

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx,$$

проекцией на ось y будет

$$H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx.$$

В точке q

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \quad \text{и} \quad H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy.$$

В точке p

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \quad \text{и} \quad H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx.$$

При составлении циркуляции на участках mn и pq необходимо принимать во внимание лишь «иксовые» составляющие \vec{H} («игрековые» составляющие перпендикулярны элементу пути).

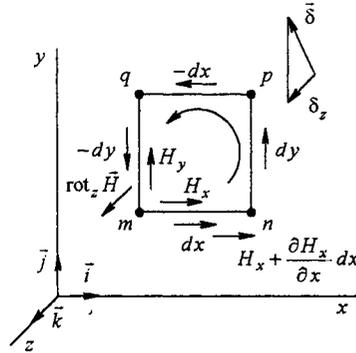


Рис. 21.4

Составляющую $\oint \vec{H} d\vec{l}$ на участке mn находят как произведение среднего значения «иксовой» составляющей напряженности на этом участке на длину пути dx :

$$\frac{H_x + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right)}{2} dx = \left(H_x + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) dx;$$

на участке np

$$\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) dy;$$

на участке pq

$$\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) (-dx);$$

на участке qm

$$\left(H_y + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) (-dy).$$

Если просуммировать все составляющие циркуляции вдоль контура $mnpqm$, то получим

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

В соответствии с определением проекции ротора на ось z разделим циркуляцию на площадь $dS_z = dx dy$, после чего проекция ротора на направление оси z будет

$$\text{rot}_z \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z.$$

Аналогично

$$\text{rot}_x \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x \quad \text{и} \quad \text{rot}_y \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y.$$

Таким образом,

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (21.5)$$

§ 21.5. Запись ротора в виде векторного произведения. Формально $\text{rot} \vec{H}$ можно представить в виде векторного произведения оператора пространственного дифференцирования ∇ на вектор \vec{H} , т. е. $\text{rot} \vec{H} = [\nabla \vec{H}]$. В этом нетрудно убедиться путем непосредственного умножения ∇ на \vec{H} :

$$\left[\left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\bar{i} H_x + \bar{j} H_y + \bar{k} H_z) \right] = \\ = \bar{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

§ 21.6. Раскрытие $\text{rot } \vec{H}$ в виде определителя в декартовой системе. Ротор любого вектора, используемого в теории электромагнитного поля, можно представить в виде определителя третьего порядка. Так, $\text{rot } \vec{H}$ в декартовой системе записывают в виде следующего определителя:

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (21.6)$$

Непосредственное раскрытие определителя показывает, что получается выражение (21.5).

§ 21.7. Выражение проекций ротора в цилиндрической и сферической системах координат. Без вывода приведем выражение проекций ротора \vec{H} :

в цилиндрической системе координат

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \vec{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z}; \\ \text{rot}_\alpha \vec{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}; \\ \text{rot}_z \vec{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\alpha) - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

в сферической системе координат

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_R \vec{H} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\alpha) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \alpha} \right]; \\ \text{rot}_\theta \vec{H} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial H_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R H_\alpha); \\ \text{rot}_\alpha \vec{H} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial r} (R H_\theta) - \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

§ 21.8. Принцип непрерывности магнитного потока и запись его в дифференциальной форме. Магнитный поток есть поток вектора магнитной индукции через некоторую поверхность: $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$.

Индекс S под знаком интеграла свидетельствует о том, что интеграл взят по поверхности S .

Если поверхность замкнута сама на себя (например, поверхность шара), то поток, пронизывающий замкнутую поверхность,

$$\Phi = \oint \vec{B} d\vec{S}.$$

Опыт показывает, что вошедший внутрь любого объема магнитный поток равен магнитному потоку, вышедшему из того же объема. Следовательно, алгебраическая сумма вошедшего в объем и вышедшего из объема потока равна нулю:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (21.9)$$

Выражение (21.9) представляет собой математическую запись принципа непрерывности магнитного потока.

Разделим обе части (21.9) на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности S , и найдем предел отношения, когда объем V стремится к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{S}}{V} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (21.10)$$

Соотношение (21.10) можно трактовать как дифференциальную форму принципа непрерывности магнитного потока. Оно пригодно для любой точки магнитного поля. Следовательно, в любой точке этого поля нет ни истока, ни стока линий вектора магнитной индукции. Линии вектора \vec{B} нигде не прерываются, они представляют собой замкнутые сами на себя линии (окружность — пример замкнутой на себя линии).

Но линии \vec{H} в точках, где изменяется \vec{J} (например, на границах сред с разными μ_r), прерывны. Это следует из (21.10): $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = 0$. Отсюда $\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{J}$. Сопоставьте с прерывностью линий \vec{E} и непрерывностью линий \vec{D} в электрическом поле (см. § 19.39).

§ 21.9. Магнитное поле в областях, «занятых» и «не занятым» постоянным током. Вихревыми принято называть поля, в которых ротор векторной величины, описывающей поле, отличен от нуля. Так как для магнитного поля постоянного тока $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$, то во всех точках пространства, где $\vec{\delta} \neq 0$, поле вектора \vec{H} является вихревым.

В областях пространства, где $\vec{\delta} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как *потенциальное*.

§ 21.10. Скалярный потенциал магнитного поля. Для совокупности точек, где $\vec{\delta} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как потенциальное, т. е. как поле, каждая точка которого имеет скалярный магнитный потенциал φ_M . Следовательно, для таких областей можно принять

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_M. \quad (21.11)$$

Так как $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0$, то при $\mu_a = \operatorname{const}$ имеем $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Подставив в последнее выражение $-\operatorname{grad} \varphi_M$ вместо \vec{H} , получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_M = 0.$$

Таким образом, скалярный потенциал магнитного поля φ_M , о котором может идти речь только для областей, не занятых током, подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (21.12)$$

Разность скалярных магнитных потенциалов между точками 1 и 2 называют падением магнитного напряжения между точками 1 и 2 (см. § 14.11).

Падение магнитного напряжения между точками 1 и 2 по какому-то одному пути (например, по пути 1 3 2, рис. 21.5, а) равно падению магнитного напряжения между теми же точками по какому-то другому пути (например, по пути 1 4 2) в том случае, когда эти пути образуют замкнутый контур, ток внутри которого равен нулю.

Если же замкнутый контур, образованный двумя путями, охватывает некоторый не равный нулю ток, то падение магнитного напряжения по первому

пути не равно падению магнитного напряжения по второму пути — они будут различаться на значение тока, охваченного контуром.

Последнее вытекает из закона полного тока. Так, применительно к рис. 21.5, а $\int_{152} \vec{H} d\vec{l} \neq \int_{132} \vec{H} d\vec{l}$ (ибо из закона полного тока следует, что

$$\int_{132} \vec{H} d\vec{l} + \int_{251} \vec{H} d\vec{l} = -I, \text{ или } \int_{132} \vec{H} d\vec{l} = -I + \int_{152} \vec{H} d\vec{l}.$$

Следовательно, для того чтобы разность магнитных потенциалов между двумя точками магнитного поля не зависела от пути, надо наложить запрет на прохождение через контур (виток) с током, мысленно натянув на этот контур некоторую пленку. При прохождении через эту пленку φ_M изменяется скачком на значение тока в контуре.

Следует различать понятия «падение магнитного напряжения» и «магнитное напряжение». Первое определяется только линейным интегралом от произведения \vec{H} на $d\vec{l}$ по выбранному пути. Второе — не только этим интегралом, но и магнитодвижущей силой (МДС), имеющейся на пути.

Здесь наблюдается полная аналогия с понятиями «падение напряжения» и «напряжение» в электрической цепи.

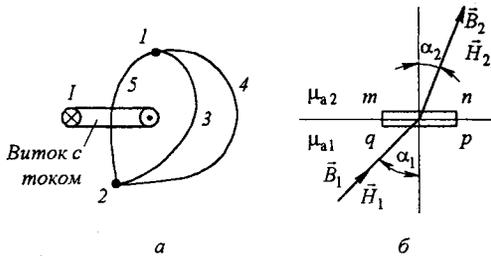


Рис. 21.5

§ 21.11. Граничные условия. Подобно тому как в электростатическом поле и в поле проводящей среды выполнялись определенные граничные условия, в магнитном поле также имеют место аналогичные условия:

$$H_{1t} = H_{2t}; \quad (21.13)$$

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (21.14)$$

Условие (21.13) означает, что на границе раздела двух однородных и изотропных сред, различных в магнитном отношении (различные μ_r), равны тангенциальные составляющие векторов напряженности магнитного поля.

Условие (21.14) свидетельствует о равенстве нормальных составляющих векторов магнитных индукций на границе раздела.

Условие (21.13) выводят путем составления линейного интеграла $\oint \vec{H} d\vec{l}$ по плоскому контуру $mnpqm$ (рис. 21.5, б) и приравнивания его нулю (так как он не охватывает ток). Стороны np и qm ничтожно малы по сравнению со сторонами mn и pq . Длину стороны mn и равную ей длину стороны pq обозначим через dl . Тогда

$$H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = 0,$$

но $H_1 \sin \alpha_1 = H_{1t}$, $H_2 \sin \alpha_2 = H_{2t}$, следовательно

$$H_{1t} = H_{2t}.$$

Условие (21.13) не выполняется, если на поверхности раздела двух сред протекает так называемый *поверхностный ток*. Под ним понимают ток, протекающий по бесконечно тонкому плоскому проводнику, помещенному на границе раздела. В этом случае $\oint \vec{H} d\vec{l}$ будет равняться не нулю, а поверхностному току σdl (σ — линейная плотность тока), который оказался внутри замкнутого контура:

$$H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = \sigma dl$$

и в силу этого

$$H_{1t} - H_{2t} = \sigma.$$

Этот ток направлен перпендикулярно плоскости, в которой находится контур интегрирования, и знак его должен быть взят в соответствии с правилом правого винта.

Другими словами, при наличии поверхностного тока с плотностью σ тангенциальная составляющая напряженности поля терпит разрыв. Как правило, поверхностный ток отсутствует, и условие (21.13) выполняется.

Равенство нормальных составляющих векторов магнитной индукции следует из принципа непрерывности магнитного потока: $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$.

Для того чтобы убедиться в справедливости (21.14), на границе раздела выделим небольшой плоский параллелепипед и подсчитаем потоки вектора \vec{B} через нижнюю и верхнюю грани (рис. 21.6) соответственно $-B_{1n} \Delta S$ и $B_{2n} \Delta S$. Сумма потоков равна нулю:

$$-B_{1n} \Delta S + B_{2n} \Delta S = 0.$$

Следовательно,

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

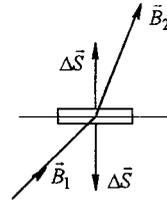


Рис. 21.6

Из (21.13) и (21.14) вытекает соотношение

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \quad (21.15)$$

Оно дает связь между углом падения α_1 и углом преломления α_2 (см. рис. 21.5, б). Если магнитные силовые линии выходят из среды с большой магнитной проницаемостью, например $\mu_{a1} = 10^4 \mu_0$, в среду с малой магнитной проницаемостью, например в воздух $\mu_{a2} = \mu_0$, то $\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = 10^4$ и $\operatorname{tg} \alpha_2 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1$. Следовательно, угол α_2 много меньше угла α_1 .

Пример 206. Найти угол α_2 , под которым силовые линии выходят в среду с магнитной проницаемостью μ_{a2} , если угол $\alpha_1 = 89^\circ$; $\mu_{a1} = 10^4 \mu_0$, $\mu_{a2} = \mu_0$.

Решение. $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} 89^\circ = 57,29$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \mu_2 / \mu_1 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1 = 0,005729$; $\alpha_2 = 20'$.

§ 21.12. Векторный потенциал магнитного поля. Для расчета магнитных полей широко используют величину, которую называют векторным потенциалом (вектор-потенциалом) магнитного поля. Его обозначают \vec{A} . Это плавно изменяющаяся от точки к точке векторная величина, ротор которой равен магнитной индукции.

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (21.16)$$

Основанием для представления индукции в виде ротора от вектора-потенциала служит то, что дивергенция любого ротора тождественно равна нулю.

Известно, что в магнитном поле $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Подстановка в это равенство $\operatorname{rot} \vec{A}$ вместо \vec{B} дает выражение, тождественно равное нулю: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$.

Равенство нулю $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$ можно пояснить с помощью оператора ∇ . С этой целью вместо $\operatorname{rot} \vec{A}$ запишем $[\nabla \vec{A}]$. Тогда $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla [\nabla \vec{A}]$. Векторное произведение $[\nabla \vec{A}]$ перпендикулярно и к ∇ и к \vec{A} . Скалярное произведение ∇ на $[\nabla \vec{A}]$, т. е. $\nabla [\nabla \vec{A}]$, равно нулю, потому что равен нулю косинус угла между ∇ и $[\nabla \vec{A}]$.

Если вектор-потенциал как функция координат известен, то индукцию в любой точке поля определяют путем нахождения ротора от вектор-по-

тенциала в соответствии с (21.16). В отличие от скалярного магнитного потенциала φ_m , пользоваться которым можно только для областей, не занятых током (см. § 21.10), векторным потенциалом можно пользоваться как для областей, не занятых током, так и для областей, занятых током.

В электротехнических расчетах векторный потенциал применяют для двух целей:

- 1) определения магнитной индукции с помощью формулы (21.16);
- 2) определения магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур (см. § 21.14).

Векторный потенциал в произвольной точке поля связан с плотностью тока в этой же точке уравнением Пуассона.

§ 21.13. Уравнение Пуассона для вектора-потенциала. Умножим обе части (21.4) на магнитную проницаемость среды μ_a :

$$\mu_a \operatorname{rot} \vec{H} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Условимся, что будем иметь дело с полями, которые можно подразделить на отдельные области, так что магнитные проницаемости μ_a в каждой отдельной области постоянны. Если μ_a постоянна, то ее можно подвести под знак ротора:

$$\operatorname{rot} \mu_a \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (21.17)$$

В (21.17) вместо \vec{B} подставим $\operatorname{rot} \vec{A}$, тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (21.18)$$

Операция взятия ротора от ротора есть операция раскрытия двойного векторного произведения и выполняется так:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = [\nabla [\nabla \vec{A}]] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (21.19)$$

Из курса математики известно, что двойное векторное произведение раскрывается следующим образом: $[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b})$. В данном случае роль векторов \vec{a} и \vec{b} играет оператор ∇ , а роль вектора \vec{c} — вектор-потенциал \vec{A} . Таким образом, $[\nabla [\nabla \vec{A}]] = \nabla (\nabla \vec{A}) - \vec{A} (\nabla \nabla) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$.

До сих пор к вектор-потенциалу никаких дополнительных требований не предъявлялось, если не считать того, что он должен быть функцией, имеющей пространственные производные. Так как \vec{A} есть расчетная функция, то в магнитном поле постоянного тока ее можно подчинить требованию

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (21.20)$$

Это требование означает, что линии вектора \vec{A} есть замкнутые сами на себя линии. С учетом (21.20) уравнение (21.19) приобретает вид

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (21.21)$$

Уравнение (21.21) представляет собой уравнение Пуассона. В отличие от (19.26), составленного относительно скалярной величины ϕ , уравнение (21.21) составлено относительно векторной величины. Вместо \bar{A} в (21.21) подставим $\bar{i} A_x + \bar{j} A_y + \bar{k} A_z$ и плотность тока заменим на $\bar{i} \delta_x + \bar{j} \delta_y + \bar{k} \delta_z$:

$$\nabla^2 \bar{i} A_x + \nabla^2 \bar{j} A_y + \nabla^2 \bar{k} A_z = -\mu_a \bar{i} \delta_x - \mu_a \bar{j} \delta_y - \mu_a \bar{k} \delta_z.$$

Последнее уравнение разбивается на три уравнения, составленные относительно скалярных величин A_x, A_y, A_z :

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a \delta_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_a \delta_y; \quad \nabla^2 A_z = -\mu_a \delta_z.$$

Общее решение их по аналогии с решением уравнения (19.26) записывают так:

$$A_x = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x dV}{R}; \quad (21.22)$$

$$A_y = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y dV}{R}; \quad (21.22a)$$

$$A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z dV}{R}. \quad (21.22b)$$

Если (21.22) умножить на \bar{i} , (21.22a) — на \bar{j} и (21.22b) — на \bar{k} и сложить, то получим

$$\bar{i} A_x + \bar{j} A_y + \bar{k} A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{(\bar{i} \delta_x + \bar{j} \delta_y + \bar{k} \delta_z) dV}{R}$$

или

$$\bar{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\delta} dV}{R}. \quad (21.23)$$

Единицей вектор-потенциала A является вольт-секунда на метр (В·с/м).

Формула (21.23) дает общее решение уравнения (21.21). Вектор-потенциал в любой точке поля можно определить вычислением объемного интеграла (21.23). Последний должен быть взят по всем областям, занятым током.

Несмотря на то, что формула (21.23) дает общее решение, пользоваться ею в дальнейшем будем редко ввиду того, что взятие интеграла правой части формулы сопряжено обычно со значительными математическими выкладками.

§ 21.14. Выражение магнитного потока через циркуляцию вектор-потенциала. Магнитный поток, пронизывающий какую-либо поверхность S ,

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (21.24)$$

Так как $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, то

$$\Phi = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}. \quad (21.24)$$

На основании теоремы Стокса поверхностный интеграл может быть преобразован в линейный:

$$\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint \vec{A} d\vec{l}. \quad (21.25)$$

Таким образом,

$$\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}. \quad (21.26)$$

Другими словами, для определения магнитного потока, пронизывающего некоторую площадь (поверхность) S , необходимо подсчитать циркуляцию вектор-потенциала по замкнутому контуру, на который опирается поверхность S .

Определение потока по (21.26) часто имеет преимущества по сравнению с определением потока через магнитную индукцию по (21.24). Соотношением (21.24) можно пользоваться в том случае, когда известно значение \vec{B} в любой точке поверхности S , тогда как для вычисления потока с помощью соотношения (21.26) достаточно знать значение \vec{A} на

контуре и не требуется знание \vec{A} в точках внутри контура.

Переход от $\int \text{rot } \vec{A} d\vec{S}$ к интегралу $\oint \vec{A} d\vec{l}$ можно пояснить следующим образом.

Разобьем площадь S на элементарные площадки (рис. 21.7, а). Заменим интеграл суммой и под

интегралом вместо $\text{rot } \vec{A}$ подставим в соответствии с определением ротора $\frac{\vec{A} d\vec{l}}{\Delta S}$ (предел опущен), тогда

$$\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} \approx \sum \frac{\oint \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S} \Delta S = \sum \oint \vec{A} d\vec{l}.$$

Таким образом, для вычисления $\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}$ необходимо найти составляющие циркуляции вектора \vec{A} по контурам всех элементарных площадок и затем сложить их. Так как при составлении циркуляции обход участков, являющихся смежными между какими-либо двумя соседними площадками, совершается дважды и притом в противоположных направ-

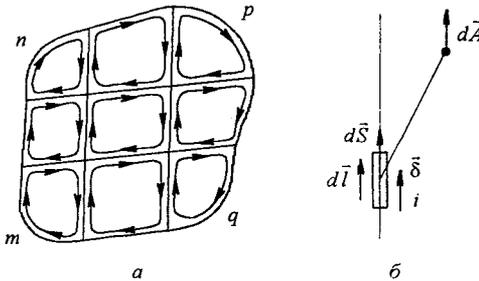


Рис. 21.7

лениях, то составляющие циркуляции на всех смежных участках взаимно уничтожаются и остается циркуляция только по периферийному контуру *тпргт*:

$$\sum \oint \vec{A} d\vec{l} = \oint_{\text{по контуру тпргт}} \vec{A} d\vec{l}.$$

Рассмотрим граничные условия для векторного потенциала.

Если к плоскому контуру на границе раздела двух сред (подобно изображенному на рис. 21.5, б и у которого размер $nr \rightarrow 0$) применить (21.26) и учесть, что поток через этот контур равен нулю, то получим *граничное условие для тангенциальной составляющей вектора \vec{A}* : $A_{1t} = A_{2t}$ ^{*}.

Нормальная составляющая вектора \vec{A} в постоянном магнитном поле тоже непрерывна, т. е. $A_{1n} = A_{2n}$. Это следует из того, что для этого поля $\text{div } \vec{A} = 0$.

Но для *переменного* электромагнитного поля $\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ [см. формулу (25.12)], поэтому для синусоидально изменяющегося во времени поля при использовании нормировки Лоренца $\dot{A}_{1n} - \dot{A}_{2n} = -\frac{j\omega}{v^2} \dot{\Phi}$.

§ 21.15. Векторный потенциал элемента тока. Определим значение и направление составляющей векторного потенциала \vec{A} , создаваемой током i , протекающим по элементу линейного проводника длиной $d\vec{l}$. Пусть расстояние от элемента тока до произвольной точки пространства обозначено через R (рис. 21.7, б) ($R \gg d\vec{l}$). В соответствии с общим выражением (21.23)

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta} dV}{4\pi R}, \quad \text{но} \quad \vec{\delta} dV = \vec{\delta} dS d\vec{l} = i d\vec{l},$$

где dS — площадь поперечного сечения проводника.

Следовательно,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a i d\vec{l}}{4\pi R}. \tag{21.27}$$

Составляющая векторного потенциала от элемента тока имеет *такое же направление в пространстве, как и ток в элементе проводника*.

Пример 207. Вывести формулы для определения \vec{A} и \vec{B} в поле кругового витка (рис. 21.8) радиусом r_0 с током i , находящегося в плоскости xOy .

Решение. От элемента тока $i d\vec{l}$ (он составляет угол α с осью y) в произвольной точке M , удаленной от оси z на расстояние ρ и на расстояние Z от плоскости xOy , если полагать, что расстояние R велико по сравнению с линейными размерами поперечного сечения проводника, составляющая векторного потенциала определится формулой (21.27).

Полное значение

$$\vec{A} = \frac{\mu_a i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{R}.$$

^{*} Однако, если на границе раздела двух сред имеется двойной токовый слой (см. § 21.30), то тангенциальная составляющая вектора \vec{A} при переходе через него претерпевает разрыв.

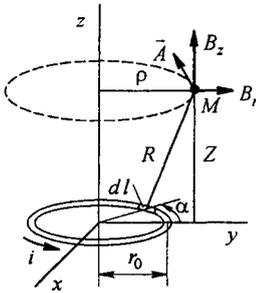


Рис. 21.8

Разложив $d\vec{l}$ на две проекции: $dl_1 = dl \sin \alpha$ и $dl_2 = dl \cos \alpha$ и учитывая, что $dl = r_0 d\alpha$ и что синус — функция нечетная, а косинус — четная, убеждаемся в наличии у \vec{A} только α -компонента:

$$\vec{A} = \vec{\alpha}_0 A_\alpha = \vec{\alpha}_0 \frac{\mu_a i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos \alpha dl}{R};$$

$$R = \sqrt{Z^2 + r_0^2 + \rho^2 - 2\rho r_0 \cos \alpha};$$

$$A_\alpha = \frac{\mu_a i}{\pi K} \sqrt{\frac{r_0}{\rho}} [(1 - 0,5 k^2) K - N].$$

Здесь K и N — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, функции табулированные:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{\pi}{2} (1 + 2a + 9a^2 + 50a^3 + 0,25 \cdot 1225a^4 + \dots) = f_1(k);$$

$$N = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} (1 - 2a - 3a^2 - 10a^3 - 0,25 \cdot 175a^4 - \dots) = f_2(k);$$

$$k^2 = \frac{4\rho r_0}{(r_0 + \rho)^2 + Z^2}; \quad \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}; \quad a = \frac{k^2}{8}.$$

На основании формул (21.16) и (21.17), заменив в них H на A и опустив выкладки, получим проекции индукции \vec{B} в точке M цилиндрической системы координат:

$$\left. \begin{aligned} B_\alpha &= 0; & B_r &= \frac{i \mu_a}{2\pi \rho} \frac{Z}{\sqrt{(r_0 + \rho)^2 + Z^2}} \left(-K + \frac{r_0^2 + \rho^2 + Z^2}{(r_0 - \rho)^2 + Z^2} N \right); \\ B_z &= \frac{i \mu_a}{2\pi \sqrt{(r_0 + \rho)^2 + Z^2}} \left(K + \frac{r_0^2 - \rho^2 - Z^2}{(r_0 - \rho)^2 + Z^2} N \right). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Пример 208. На рис. 21.9, а изображены два параллельных однородно намагниченных постоянных магнита, удаленных друг от друга на расстояние z . Верхний имеет форму тонкого диска высотой h_1 , радиусом ρ , намагниченностью \vec{J}_1 (направлена по оси $-\vec{z}$); ниж-

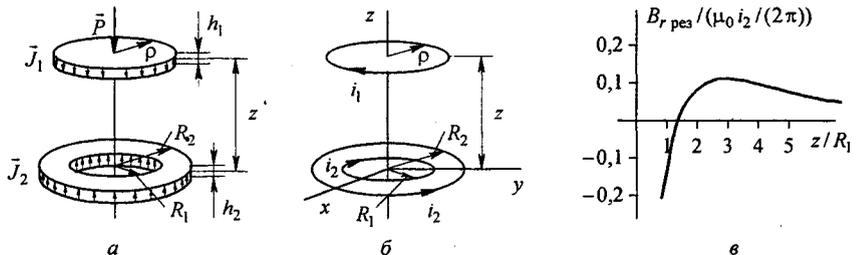


Рис. 21.9

ний имеет форму тонкой шайбы высотой h_2 , радиусами R_1 и R_2 , намагниченностью \vec{J}_2 (по оси z).

Вывести условия, при которых диск с грузом P будет парить над шайбой. Пояснить, почему при превышении грузом P определенного значения диск вместо отталкивания с силой притянется к шайбе.

Решение. Исходя из условия одинаковости магнитного момента, заменим диск круговым витком радиусом ρ с током $i_1 = h_1 J_1$, а шайбу двумя витками радиусами R_1 и R_2 с противоположно направленными токами $i_2 = h_2 J_2$ (см. рис. 21.9, б). Радиальная составляющая результирующей индукции $B_{r, \text{рез}}$ в точках, где находится верхний виток, создается двумя нижними витками с токами i_2 . Компоненты \vec{B}_r от каждого из них определяются по формуле (а) § 21.15. С учетом того, что токи i_2 направлены по нижним виткам в противоположных направлениях, $B_{r, \text{рез}}$ равна разности \vec{B}_r от этих двух витков.

Эффект парения (отталкивания) сменяется притяжением, когда в точках расположения верхнего витка величина $B_{r, \text{рез}}$ изменит знак.

На рис. 21.9, в изображена зависимость $B_r / \frac{\mu_0 i_2}{2\pi}$ при $\frac{R_2}{R_1} = 3$ и $\frac{\rho}{R_1} = 1,5$.

Условие парения диска с дополнительным грузом P запишется как

$$B_{r, \text{рез}} J_1 h_1 2\pi \rho = \pi \rho^2 h_1 d_1 + P,$$

где d_1 — плотность верхнего магнита.

Режим парения устойчив по оси z при медленном увеличении груза P в области $B_{r, \text{рез}} > 0$ при $\frac{dB_{r, \text{рез}}}{d(z/R_1)} < 0$. При малом смещении диска с грузом в горизонтальной плоскости режим парения (левитации) окажется неустойчив, диск стремится перевернуться и упасть вниз, если в горизонтальной плоскости не будет дополнительной охватывающей диск стабилизирующей катушки (на рисунке не показана), ток в которой автоматически изменяется при возникновении смещения диска.

§ 21.16. Взаимное соответствие электростатического (электрического) и магнитного полей. Между картинами электростатического и магнитного полей постоянного тока в областях, не занятых током, может быть соответствие двух типов.

Первый тип — одинаково распределение линейных зарядов в электростатическом поле и линейных токов в магнитном поле. В этом случае картина магнитного поля (сетка поля) подобна картине соответствующего электростатического поля. Отличие состоит лишь в том, что силовыми линиями электростатического поля соответствуют эквипотенциальные линии магнитного поля, а эквипотенциалам электростатического поля — силовые линии магнитного.

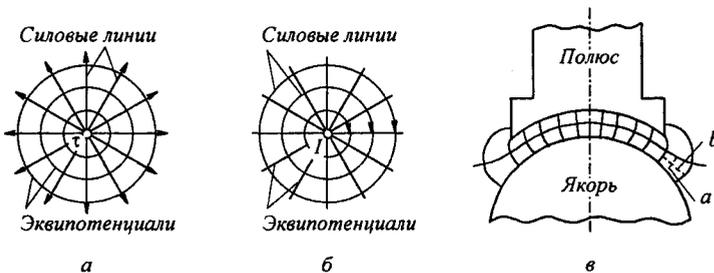


Рис. 21.10

В качестве примера на рис. 21.10, а изображена картина электрического поля, образованного уединенным линейным зарядом $+\tau$, а на рис. 21.10, б — картина магнитного поля уединенного проводника с током (для области вне проводника).

Второй тип — одинакова форма граничных эквипотенциальных поверхностей в электростатическом и магнитном полях постоянного тока. В этом случае картина поля оказывается совершенно *одинаковой*.

Соответствие второго типа показано на рис. 21.10, в. На нем изображена картина магнитного поля в воздушном промежутке между полюсом и якорем машины постоянного тока (обмотки не показаны). Если допустить, что полюс и якорь этой машины используются в качестве электродов некоторого конденсатора, то картина электрического поля в воздушном промежутке между электродами соответствовала бы картине магнитного поля — в обоих случаях силовые линии выходили бы из полюса и входили бы в якорь нормально к поверхности полюса и якоря.

§ 21.17. Задачи расчета магнитных полей. Рассмотрим пять основных типов задач расчета магнитных полей.

Первый тип — определение индуктивности какого-либо контура или взаимной индуктивности двух контуров.

Второй тип — определение сил, действующих в магнитном поле на движущийся электрон, неподвижный проводник с током, ферромагнитные массы в магнитном поле.

Третий тип — расчет поля, создаваемого заданным распределением токов в пространстве.

Четвертый тип — расчет магнитных экранов. *Магнитными экранами* называют устройства, предназначенные для ослабления магнитного поля в заданной области пространства по сравнению с магнитным полем вне экрана. К магнитной экранировке прибегают, например, для защиты чувствительных приборов от влияния посторонних магнитных полей, в частности от влияния магнитного поля Земли.

Пятый тип — нахождение распределения токов в некотором объеме для получения заданной картины магнитного поля. Так, например, в морском деле большое значение имеет дегауссировка кораблей: корабль, обладая большой ферромагнитной массой, возмущает магнитное поле Земли не только в непосредственной близости от себя, но и на достаточно большом расстоянии. Соответствующие индикаторы возмущения магнитного поля Земли могут привести в действие находящиеся поблизости самодвижущиеся мины (имеются в виду условия военного времени), и в результате корабль может быть подорван. Чтобы этого не случилось, на кораблях устанавливают специальные намагничивающие обмотки, предназначенные для компенсации возмущения магнитного поля Земли вблизи корабля.

Много различных задач расчета магнитных полей возникает при магнитной записи звука, а также при магнитной дефектоскопии. Магнитная дефектоскопия позволяет по картине магнитного поля судить о наличии раковин, трещин и других дефектов в изделиях из ферромагнитных материалов. Широко распространена она на железнодорожном транспорте при контроле целостности рельсов железнодорожного пути. Это объясняется ее экономичностью и быстротой осуществления контроля.

§ 21.18. Общая характеристика методов расчета и исследования магнитных полей. Методы расчета и исследования магнитных полей можно подразделить на три группы: аналитическую, графическую и экспериментальную.

Группу аналитических методов составляют аналитические способы интегрирования уравнения Пуассона (для областей, занятых током), уравнения Лапласа (для областей, не занятых током), методы зеркальных и конформных отображений и др.

В силу трудностей математического характера классические аналитические методы позволяют решать относительно небольшой круг задач.

В тех случаях, когда расчет поля аналитическими методами вызывает затруднения, прибегают к графическому методу построения картины поля или к исследованию магнитного поля на модели. Графические методы построения картины поля применимы к двумерным безвихревым полям.

В последние годы применяют также метод интегральных уравнений (см. приложение Л), предполагающий использование ЭВМ и значительно расширяющий круг решаемых задач.

§ 21.19. Графическое построение картины поля и определение по ней магнитного сопротивления. Рассмотрим методику графического построения картины плоскопараллельного магнитного поля на конкретном примере.

На рис. 21.10, *в* изображены части полюса и якоря машины постоянного тока (на которых не размещены обмотки с током). Размер якоря и полюса в направлении, перпендикулярном рисунку, принят достаточно большим — только при этом условии поле можно считать плоскопараллельным. Так как магнитная проницаемость стали много больше магнитной проницаемости воздуха, то магнитные силовые линии практически перпендикулярны поверхностям полюса и якоря. Следовательно, их поверхности являются эквипотенциальными. Построение семейства силовых и эквипотенциальных линий производят «на глаз», руководствуясь следующим: силовые линии должны быть перпендикулярны поверхностям полюса и якоря и так расположены по отношению друг к другу, чтобы после проведения эквипотенциалей образовались криволинейные прямоугольники, для которых *отношение* средней ширины *b* к средней длине *a* было приблизительно одинаково для всех прямоугольников. При первом построении это, возможно, не удастся сделать достаточно хорошо, но после нескольких попыток, особенно при наличии некоторого навыка и с учетом симметрии в поле (если она имеется), удастся построить сетку поля так, что $b_1/a_1 = b_2/a_2 = b_3/a_3 = \dots$. При этом потоки во всех силовых трубках одинаковы. Это облегчает подсчет магнитного сопротивления.

Пусть число криволинейных прямоугольников в силовой трубке равно *n*, а число трубок — *m* (для рис. 21.10, *в* $n = 2$ и $m = 11$).

Магнитное напряжение между полюсом и якорем

$$U_m = \int \vec{H} d\vec{l} \approx H_1 a_1 + H_2 a_2 + H_3 a_3 + \dots = \sum_{k=1}^n H_k a_k.$$

Поток в одной силовой трубке

$$\Delta\Phi = l b_1 \mu_a H_1 = l b_2 \mu_a H_2 = \dots$$

где l — размер трубки в направлении, перпендикулярном чертежу; μ_a — магнитная проницаемость воздуха (равна μ_0).

Следовательно

$$H_1 = \frac{\Delta\Phi}{l b_1 \mu_a}, \quad H_2 = \frac{\Delta\Phi}{l b_2 \mu_a} \quad \text{и т. д.}$$

Магнитное напряжение

$$U_m = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a l} \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots \right).$$

По построению все слагаемые (a_1/b_1 , a_2/b_2 и т. д.) одинаковы. Число слагаемых равно n . Поэтому

$$U_m = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a l} \frac{a}{b} n.$$

Отсюда

$$\Delta\Phi = \frac{U_m \mu_a l b}{a n}.$$

Поскольку для всех прямоугольников $b/a \approx \text{const}$, то построения осуществлены так, что потоки $\Delta\Phi$ во всех силовых трубках одинаковы. Полный поток с якоря на полюс равен

$$\Phi = m \Delta\Phi = \frac{U_m \mu_a l b m}{a n}.$$

где m — число силовых трубок.

Магнитное сопротивление

$$R_m = \frac{U_m}{\Phi} = \frac{a n}{\mu_a l b m}. \quad (21.28)$$

Магнитная проводимость

$$G_m = \frac{\mu_a l b m}{a n}. \quad (21.29)$$

Графический метод построения картины поля применяют для расчета не только магнитных полей, но и других безвихревых полей: электростатического поля и поля постоянного тока в проводящей среде. Так, электрическую проводимость G между двумя телами определяют по формуле (21.30), которую получают из формулы (21.29), заменив μ_a на γ :

$$G = \frac{\gamma l b m}{a n}. \quad (21.30)$$

Емкость между двумя телами в плоскопараллельном поле (см. § 19.44)

$$C = \frac{\epsilon_a l b m}{a n}. \quad (21.31)$$

Если на некотором участке магнитной цепи, на котором $\mu_r \gg 1$ (рис. 21.11, а), расположена обмотка с током i , числом витков w , шириной l и высотой h ($h/l < 0,5$), то для приближенного графического построения поля в воздухе

вблизи ферромагнитной поверхности обмотку с током заменяют бесконечно тонким токовым слоем шириной l с линейной плотностью $\sigma = i w/l$ (рис. 21.11, б).

Линии \vec{H} должны отходить от участков поверхности ab и cd так, чтобы их тангенциальная составляющая H_t была численно равна σ (в соответствии с § 21.11).

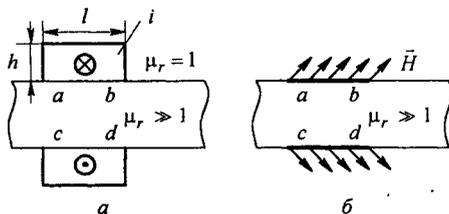


Рис. 21.11

§ 21.20. Опытное исследование картины магнитного поля. Опытное исследование картины магнитного поля производят различными методами.

Первый метод основан на явлении электромагнитной индукции и состоит в следующем. Плоскую очень малых размеров рамку с намотанной на нее обмоткой помещают в исследуемую область поля и соединяют с баллистическим гальванометром. При коммутации тока в обмотках аппарата (или машины), в воздушном зазоре которого исследуется поле, или при быстром удалении рамки в область, где магнитное поле заведомо слабое (в последнем случае ток в обмотках не переключают), измеряют количество электричества, протекшее через баллистический гальванометр, и по нему судят о среднем значении индукции в рамке. Затем рамку помещают в другую точку поля и снова определяют индукцию и т. д.

Этот метод дает возможность исследовать магнитные поля практически любой конфигурации в пространстве вне ферромагнетиков.

Второй метод исследования безвихревого поля — метод моделирования полями тока в проводящей среде — основан на использовании аналогии между полем в проводящей среде и магнитным безвихревым полем. Он состоит в следующем. Для снятия картины плоскопараллельного поля в воздушном зазоре какого-либо аппарата или машины из листа металла (например, из стального листа) изготовляют увеличенную модель исследуемого участка поля.

Так, на рис. 21.12 изображена модель $mpqrstn$ для исследования поля рассеяния между полюсами машины постоянного тока.

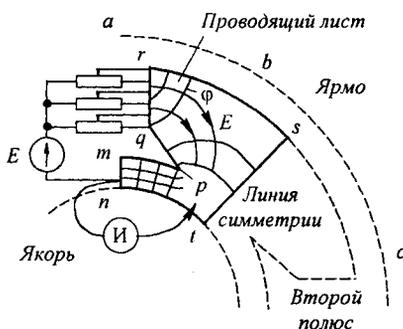


Рис. 21.12

Линия $mpqr$ модели — это очертание края полюса, rs — очертание нижней части ярма, пунктирная линия abc — очертание верхней части ярма, st — линия симметрии в поле. Так как МДС распределена по высоте полюса, то подвод тока к краю полюса (к линии qr) производится от нескольких припаянных к листу проводов. Токи в них могут регулироваться, и этим может задаваться закон распределения МДС по высоте полюса. Отвод тока от линии tn , являющейся

эквипотенциальной, производится с помощью массивной проводящей колодки.

Щуп и индикатор И (гальванометр) служат для построения эквипотенциалей в поле проводящей среды.

Линии mpq и $rstin$ эквипотенциальные. К ним линии \vec{E} подходят под прямым углом. Линия rp в общем случае не является эквипотенциальной, поэтому к ней линии \vec{E} подходят не под прямым углом. Тангенциальная составляющая \vec{E} в точке на линии rq равна тангенциальной составляющей плотности тока в этой точке, поделенной на проводимость γ модели. Линиям E и ϕ модели соответствуют линии ϕ_m и H исследуемого участка магнитного поля (подробнее см. в [12]).

Третий метод — применение преобразователя Холла (кристаллических или пленочных). Они дают возможность измерять индукцию в диапазоне примерно от 1 мТл до нескольких тесл. Например, преобразователь типа П×Э-606 имеет размеры $0,7 \times 0,7 \times 0,15$ мм и чувствительность $\gamma = 1 \text{ В}/(\text{Тл} \cdot \text{А})$.

Четвертый метод — применение магниторезисторов (см. § 13.19).

Качественное исследование магнитного поля часто производят с помощью стальных опилок, которые насыпают на плоский лист из неферромагнитного материала, помещают в магнитное поле и слегка по листу постукивают. Опилки расположатся вдоль силовых линий. По густоте силовых линий можно качественно судить об интенсивности магнитного поля. Вместо опилок нередко используют мельчайшие порошки окислов железа, находящихся во взвешенном состоянии в какой-либо жидкости, например керосине. Этот способ широко применяют при магнитной дефектоскопии изделий из ферромагнитных материалов.

§ 21.21. Построение эквипотенциалей магнитного поля путем использования принципа наложения. Магнитный потенциал ϕ_m является функцией скалярной (не векторной). На основании принципа наложения значение его в какой-либо точке поля равно сумме значений потенциалов в этой точке от каждого из источников, создающих поле.

На рис. 21.13, *а* изображены два линейных тока: левый $I_1 = 20$ А направлен от читателя, правый $I_2 = 40$ А — к читателю. Еще один ток $I_3 = 20$ А, направленный от читателя, находится в бесконечности на линии центров проводов слева от первого провода. Требуется построить семейство эквипотенциалей.

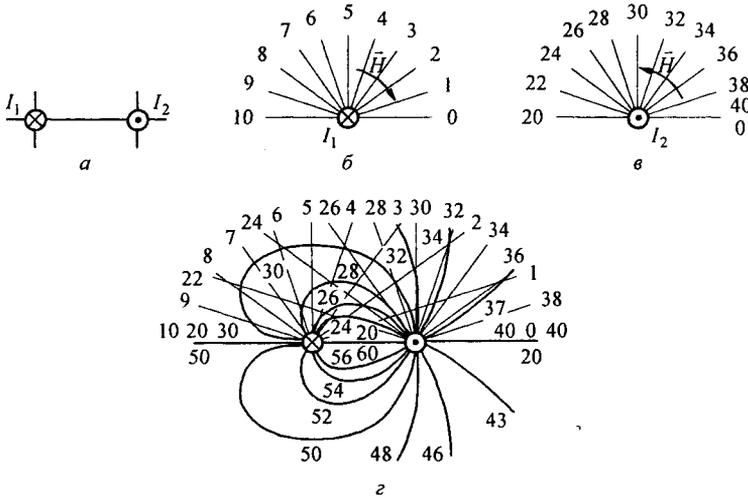


Рис. 21.13

На рис. 21.13, *б* построено семейство эквипотенциалей ϕ_{m1} от первого провода в верхней полуплоскости (10 радиальных прямых). Значения ϕ_{m1} в амперах записаны рядом с соответствующей эквипотенциалью. При построении принято, что нулевой потенциал имеет правая полупрямая и что ϕ_m возрастает при перемещении против напряженности поля \vec{H} . На рис. 21.13, *в* изображены эквипотенциали в верхней полуплоскости от второго (правого) провода. При построении учтено, что ток I_2 направлен в противоположную сторону по сравнению с током I_1 . Нулевой потенциал по-прежнему имеет правая полупрямая. На рис. 21.13, *г* построено семейство эквипотенциалей от трех проводов. В верхней полуплоскости по точкам пересечения эквипотенциалей ϕ_{m1} и ϕ_{m2} построены кривые $\phi_m = \phi_{m1} + \phi_{m2} = \text{const}$. При построении учтено, что ток I_3 , направленный от читателя и находящийся в бесконечности слева от тока I_1 , не изменяет потенциалов точек верхней полуплоскости, увеличивает потенциал точек нижней полуплоскости на 20 А. На линии, соединяющей оси 1 и 2 проводов (в пространстве между ними) ϕ_m изменяются скачком от 20 до 60 А, а на линии, соединяющей оси 3 и 1 проводов, — скачком от 30 до 50 А. Располагая семейством эквипотенциалей, можно построить семейство силовых линий.

§ 21.22. Магнитное экранирование. Положим, что в равномерном магнитном поле напряженностью H_0 надо заэкранировать некоторую область пространства, например цилиндрическую, так, чтобы напряженность поля в ней была во много раз меньше, чем напряженность внешнего поля.

Цилиндрический экран внутренним радиусом a и наружным b имеет относительную магнитную проницаемость μ_{r2} (рис. 21.14, *а*). Внутреннюю область обозначим I, область тела экрана — II, область снаружи экрана — III.

В областях I и III относительная магнитная проницаемость равна единице. Так как во всех трех областях нет тока, то магнитное поле в них

описывается уравнением Лапласа $\nabla^2 \varphi_M = 0$. Экран будем полагать достаточно протяженным вдоль оси z (ось z перпендикулярна чертежу);

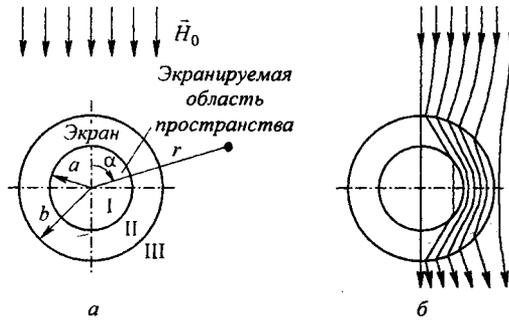


Рис. 21.14

φ_M зависит только от координат r и α цилиндрической системы. Раскроем уравнение $\nabla^2 \varphi_M = 0$ в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 \varphi_M = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_M}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_M}{r^2 \partial \alpha^2} = 0.$$

Решение его методом Фурье (см. § 19.39) дает: для первой области

$$\varphi_M^I = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \alpha;$$

для второй области

$$\varphi_M^{II} = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos \alpha;$$

для третьей области

$$\varphi_M^{III} = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r} \right) \cos \alpha.$$

Постоянная интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал, принята здесь равной нулю.

Для определения шести постоянных ($C_1 - C_6$) составим шесть уравнений.

1. Сопоставим φ_M^{III} с выражением «на бесконечности» $\varphi_M = H_0 r \times \cos \alpha$. Из сопоставления находим, что

$$C_5 = H_0.$$

2. В первой области при $r = 0$ значение φ_M должно оставаться конечным. Это может быть только в том случае, если в выражении будет отсутствовать слагаемое C_2/r . Это будет при

$$C_2 = 0.$$

3. Равенство $\varphi_{\text{м}}^{\text{I}}$ и $\varphi_{\text{м}}^{\text{II}}$ при $r = a$ дает уравнение

$$C_1 a = C_3 a + C_4 / a.$$

Нетрудно убедиться в том, что условие непрерывности потенциала эквивалентно условию равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела при $r = a$. Действительно^{*)},

$$H_{\alpha} = -\frac{\partial \varphi_{\text{м}}}{r \partial \alpha}.$$

Следовательно,

$$H_{\alpha}^{\text{I}} = -C_1 \sin \alpha \quad \text{и} \quad H_{\alpha}^{\text{II}} = -\sin \alpha (C_3 + C_4 / a^2).$$

Таким образом, $C_1 = C_3 + C_4 / a^2$. Последнее уравнение совпадает с полученным ранее.

4. Равенство $\varphi_{\text{м}}$ на границе между второй и третьей (при $r = b$) областями приводит к уравнению

$$C_5 b + C_6 / b = C_3 b + C_4 / b.$$

5. Равенство нормальных составляющих индукции $B_r = -\mu_a \frac{\partial \varphi_{\text{м}}}{\partial r}$ на границе между первой и второй областями ($r = a$) дает уравнение

$$C_1 = (C_3 - C_4 / a^2) \mu_{r2}.$$

6. Равенство нормальных составляющих индукции при $r = b$ дает уравнение

$$C_5 - C_6 / b^2 = (C_3 - C_4 / b^2) \mu_{r2}.$$

Совместное решение всех уравнений приводит к выражению потенциала в первой области:

$$\varphi_{\text{м}}^{\text{I}} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} r \cos \alpha,$$

или при переходе к декартовой системе координат (ось x направлена вверх, $x = r \cos \alpha$):

$$\varphi_{\text{м}}^{\text{I}} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} x. \quad (21.32)$$

Здесь

$$q = \frac{2\mu_{r2}}{(1+\mu_{r2})^2} \approx \frac{2}{\mu_{r2}}, \quad \Delta = b^2 - \beta^2 a^2, \quad \beta = \frac{\mu_{r2} - 1}{\mu_{r2} + 1} \approx 1.$$

^{*)} Напомним, что $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_{\text{м}}$. Формулы, позволяющие определить H_{α} и H_r через $\varphi_{\text{м}}$, следуют из соотношения (19.9).

Напряженность поля в первой области (по модулю)

$$H^1 = \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta}. \quad (21.33)$$

Если экран разъемный (выполнен из двух половинок, разрезы по образующим цилиндра), то для лучшего экранирования в постоянном магнитном поле щель между половинками экрана следует расположить параллельно линиям внешнего магнитного поля. Если щель расположить перпендикулярно линиям внешнего магнитного поля, то экранирование ухудшится, так как щель создает значительное магнитное сопротивление для прохождения магнитного потока.

Отношение напряженности поля внутри экрана к напряженности внешнего поля H_0 :

$$\frac{H^1}{H_0} = \frac{2qb^2}{\Delta} \approx \frac{4}{\mu_{r2}} \frac{b^2}{b^2 - a^2}. \quad (21.34)$$

Формула (21.34) является приближенной (принято $\beta = 1$ и $q = 2/\mu_{r2}$). Из нее можно заключить, что чем больше μ_{r2} и чем толще стенка экрана, тем сильнее его экранирующее действие.

На рис. 21.14, б качественно показана картина линий магнитной индукции при наличии экрана. Из рисунка видно, что большинство силовых линий магнитного поля стремится пройти по стенкам экрана и лишь небольшая часть их заходит в экранируемую область.

Коэффициентом экранирования магнитного экрана называют отношение $k = H_0 / H^1$, для цилиндрического экрана $k = \mu_{r2} (b^2 - a^2) / (4b^2)$.

Пример 208а. $\mu_{r2} = 10^4$; $a = 5$ см; $b = 5,5$ см. Найти отношение H^1 / H_0 .

Решение.

$$\frac{H^1}{H_0} = \frac{4}{10^4} \frac{5,5^2}{5,5^2 - 5^2} = 0,0023,$$

т. е. напряженность поля внутри экрана составляет всего 0,23 % от напряженности H_0 и $k = 434$.

При μ_{r2} , соизмеримой с единицей, вместо формулы (21.34) следует пользоваться более общей формулой

$$\frac{H^1}{H_0} = \left[1 + \frac{1}{4} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \left(\mu_{r2} + \frac{1}{\mu_{r2}} - 2 \right) \right]^{-1}. \quad (21.34a)$$

Без вывода запишем формулу для определения отношения напряженности поля внутри сферического экрана к напряженности равномерного поля H_0 , в которое помещен экран, полагая, что внутренний радиус экрана R_1 , наружный R_2 и экран имеет относительную проницаемость μ_{r2} , а снаружи экрана $\mu_a = \mu_0$:

$$\frac{H_i}{H_0} = \left\{ 1 + \frac{2}{9} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \right] \left(\frac{1}{\mu_{r2}} + \mu_{r2} - 2 \right) \right\}^{-1}.$$

§ 21.23. Эллипсоид во внешнем однородном поле. Коэффициент размагничивания. Поместим в однородное магнитное поле напряженностью H_e ферромагнитный эллипсоид относительной магнитной проницаемостью μ_r . Поле в нем будет однородным. Напряженность поля в эллипсоиде H_i можно определить на основании принципа наложения как разность напряженности внешнего поля H_e и напряженности поля расчетных магнитных зарядов на поверхности эллипсоида, равной NJ (подобно тому, как в поляризованном диэлектрике поверхностная плотность заряда равна поляризованности P (см. § 19.13)):

$$H_i = H_e - NJ, \quad (21.35)$$

где N — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом размагничивания*.

Оси эллипсоида обозначим a, b, c . Вдоль направления каждой оси свой коэффициент: N_a — вдоль оси a ; N_b — вдоль оси b ; N_c — вдоль оси c . Между ними имеет место зависимость $N_a + N_b + N_c = 1$. Для шара $N_a = N_b = N_c = 1/3$.

Положим, что H_e направлена вдоль оси a (эллипсоид вращения, ось вращения a), а размеры осей b и c одинаковы; тогда

$$\vec{H}_i = \vec{H}_e - N_a \vec{J}. \quad (21.35a)$$

Но из соотношения $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}_i + \vec{J}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}_i$ следует, что

$$\vec{J} = (\mu_r - 1) \vec{H}_i. \quad (21.36)$$

Подставим (21.36) в (21.35):

$$H_i = \frac{H_e}{1 + (\mu_r - 1) N_a}. \quad (21.37)$$

Когда ось a эллипсоида ($b = c$) расположена вдоль внешнего поля,

$$N_a = \frac{1 - m^2}{m^2} \left(\frac{1}{2m} \ln \frac{1+m}{1-m} - 1 \right),$$

где

$$m = \sqrt{1 - b^2/a^2}.$$

Если эллипсоид ($b = c$) сплюснут вдоль оси вращения a ($b/a > 1$), то

$$N_a = \frac{1 + n^2}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n} \operatorname{arctg} n \right),$$

где

$$n = \sqrt{b^2/a^2 - 1}.$$

Вывод формул для определения коэффициента размагничивания N_a дан в [19].

§ 21.24. Применение метода зеркальных изображений. Для расчета магнитных полей, создаваемых линейными токами, протекающими вблизи стальных масс, широко применяют метод зеркальных изображений. Допустим, что в воздухе или в какой-либо другой среде (назовем ее первой средой) с магнитной проницаемостью μ_{a1} параллельно плоскости раздела сред проходит провод с током I_1 (рис. 21.15, a).

Пусть вторая среда имеет магнитную проницаемость μ_{a2} . Требуется найти напряженность поля в любой точке первой и второй сред.

С этой целью в расчет водят фиктивные, или расчетные, токи I_2 и I_3 . Провод с током I_2 помещают зеркально по отношению к проводу с заданным током I_1 , а провод с током I_3 — там, где расположен провод с током I_1 . Двумя пока неизвестными токами I_2 и I_3 распорядимся таким образом, чтобы удовлетворить двум граничным условиям на гра-

нице раздела сред.

Поле в верхнем полупространстве (там, где расположен ток I_1 — рис. 21.15, б) создается двумя токами: заданным I_1 и фиктивным I_2 , причем и верхнее и нижнее полупространства при этом заполняет среда с

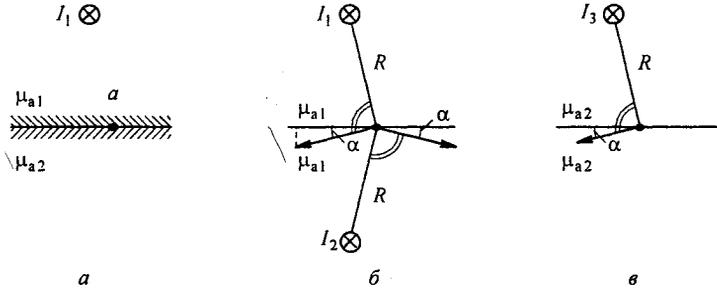


Рис. 21.15

магнитной проницаемостью μ_{a1} . Поле в любой точке нижнего полупространства создается током I_3 , а верхнее и нижнее пространство имеют $\mu_a = \mu_{a2}$ (рис. 21.15, в).

Составим уравнения для определения токов I_2 и I_3 .

Если взять произвольную точку a на границе раздела сред, то ее можно считать принадлежащей как первой, так и второй средам. Если считать ее принадлежащей первой среде, то тангенциальная составляющая напряженности поля в ней будет соответствовать левой части уравнения

$$\left(\frac{I_1}{2\pi R} - \frac{I_2}{2\pi R} \right) \cos \alpha = \frac{I_3}{2\pi R} \cos \alpha, \quad (21.38a)$$

а если второй среде, то правой части. Отсюда получим первую связь между токами:

$$I_1 - I_2 = I_3.$$

Для получения второй связи составим уравнение, выражающее равенство нормальных составляющих магнитной индукции в произвольной точке a на границе раздела:

$$\left(\frac{I_1}{2\pi R} + \frac{I_2}{2\pi R} \right) \mu_{a1} \sin \alpha = \frac{I_3}{2\pi R} \mu_{a2} \sin \alpha,$$

т. е.

$$I_1 + I_2 = I_3 \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \quad (21.38б)$$

Совместное решение дает:

$$I_2 = \frac{\mu_{a2} - \mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} I_1; \quad I_3 = \frac{2\mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} I_1.$$

Пример 209. Найти напряженности поля в точках m и n (рис. 21.16, а). Геометрические размеры в сантиметрах даны на рисунке. Магнитные проницаемости: $\mu_{r1} = 1$, $\mu_{r2} = 999$; ток $I_1 = 10$ А.

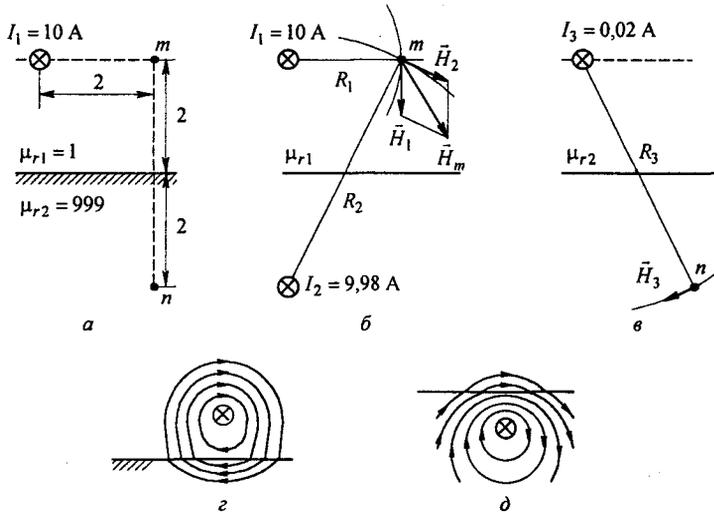


Рис. 21.16

Решение. По формулам § 21.24, с учетом сокращения μ_0 , находим:

$$I_2 = \frac{\mu_{a2} - \mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} I_1 = 9,98 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{2 \mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} I_1 = 0,02 \text{ А}.$$

Для определения напряженности поля в точке m , расположенной в том же полупространстве (среде), что и ток I_1 , служит рис. 21.16, б: $\vec{H}_m = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. По закону полного тока

$$H_1 = \frac{I_1}{2 \pi R_1} = \frac{10}{2 \cdot \pi \cdot 0,02} = 79,5 \text{ А/м};$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2 \pi R_2} = \frac{9,98}{2 \cdot \pi \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 35,4 \text{ А/м}.$$

Графическим путем находим $H_m = 101$ А/м. Напряженность поля в точке n (рис. 21.16, в):

$$H_3 = \frac{I_3}{2 \pi R_3} = \frac{0,02}{2 \cdot \pi \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 0,0715 \text{ А/м}.$$

На рис. 21.16, г качественно изображена картина линий магнитной индукции B для случая, когда провод с током проходит в воздухе параллельно поверхности стальной плиты; на рис. 21.16, д — когда провод с током проходит через узкий канал в стальной плите параллельно поверхности плиты.

Пример 210. По длинному биметаллическому проводу протекает постоянный ток I (рис. 21.17). Радиус внутреннего провода r_1 , наружного — r_2 . Удельная проводимость проводов соответственно γ_1 и γ_2 . Определить закон изменения векторного потенциала A и магнитной индукции B внутри провода (во внутренней I и наружной II областях и вне провода — область III).

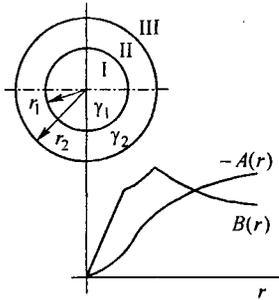


Рис. 21.17

Решение. Определим плотности тока δ_1 и δ_2 в первой и во второй областях. Так как $E_{1r} = E_{2r}$, то $\delta_1 / \gamma_1 = \delta_2 / \gamma_2$. Кроме того,

$$\delta_1 \pi r_1^2 + \delta_2 (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = I.$$

Следовательно,

$$\delta_1 = \frac{I}{\pi r_1^2 + (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) \gamma_2 / \gamma_1} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \delta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

При раскрытии выражения $\nabla^2 \vec{A}$ в цилиндрической системе координат учтем, что в данной задаче \vec{A} имеет только одну составляющую $\vec{A} = \vec{z}_0 A_z = \vec{z}_0 A$, направленную по оси провода (по оси z), и эта составляющая зависит только от r :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = \begin{cases} -\mu_{a1} \delta_1 & \text{для области I;} \\ -\mu_{a2} \delta_2 & \text{для области II;} \\ 0 & \text{для области III.} \end{cases}$$

Двукратное интегрирование по r дает:

$$A_I = -\frac{\mu_{a1} \delta_1 r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2; \quad A_{II} = -\frac{\mu_{a2} \delta_2 r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4; \quad A_{III} = C_5 \ln r + C_6.$$

Слагаемое $C_1 \ln r$ должно отсутствовать, так как A не может принимать бесконечно большие значения при $r = 0$; отсюда следует, что $C_1 = 0$.

Вектор-потенциал определяется с точностью до постоянной. Из граничных условий составим уравнения для нахождения оставшихся четырех постоянных.

1. При $r = r_1$ $A_I = A_{II}$, следовательно,

$$-\frac{\mu_{a1} \delta_1 r_1^2}{4} = -\frac{\mu_{a2} \delta_2 r_1^2}{4} + C_3 \ln r_1 + C_4.$$

2. При $r = r_2$ $A_{II} = A_{III}$, т. е.

$$-\frac{\mu_{a2} \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 = C_5 \ln r_2 + C_6.$$

3. При $r = r_1$ $H_{I\tau} = H_{2\tau}$, или $\frac{1}{\mu_{a1}} \frac{dA_I}{dr} = -\frac{I}{\mu_{a2}} \frac{dA_{II}}{dr}$, т. е.

$$\frac{\delta_1 r_1}{2} = \frac{\delta_2 r_1}{2} - \frac{C_3}{\mu_{a2} r_1}.$$

4. При $r = r_2$ должны быть равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$\frac{\delta_2 r_2}{2} - \frac{C_3}{\mu_{a2} r_2} = -\frac{C_5}{\mu_{a3} r_2}.$$

Имеем

$$C_3 = \frac{\mu_{a2} r_1^2}{2} (\delta_2 - \delta_1); \quad -C_5 = \frac{\delta_2 (r_2^2 - r_1^2) + \delta_1 r_1^2}{2} \mu_{a3};$$

$$C_4 = -\frac{\mu_{a1} \delta_1 r_1^2}{4} + \frac{\mu_{a2} \delta_2 r_1^2}{4} - C_3 \ln r_1; \quad C_6 = \frac{-\mu_{a2} \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 - C_5 \ln r_2.$$

На рис. 21.17 одна кривая характеризует изменение $-A = f(r)$, другая — изменение $B = f(r)$ при $\gamma_1/\gamma_2 = 5,7/3,5$ и $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_{a3}$.

Пример 211. Воспользоваться выражением $\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}$ и данными примера 210 и найти магнитный поток, пронизывающий биметаллический провод из примера 210 на длине $l = 1$ м.

Решение. Разобьем путь интегрирования $\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}$ на четыре участка: первый участок от точки 1 до точки 2 (рис. 21.18); второй — от точки 2 до точки 3; третий — от точки 3 до точки 4; четвертый — от точки 4 до точки 1. В соответствии с этим

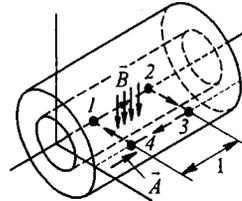


Рис. 21.18

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{A} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{A} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{A} d\vec{l} + \int_4^1 \vec{A} d\vec{l}.$$

Но $\int_1^2 \vec{A} d\vec{l} = 0$, так как значение \vec{A} при $r = 0$ равно нулю. На втором и четвертом участках $\int \vec{A} d\vec{l} = 0$, так как угол между \vec{A} и $d\vec{l}$ равен $\pm 90^\circ$, а $\cos 90^\circ = 0$; $\int \vec{A} d\vec{l} \neq 0$ только на третьем участке, где

$$A = -\frac{\mu_a \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4,$$

а угол между \vec{A} и $d\vec{l}$ равен 180° ($\cos 180^\circ = -1$). Поэтому

$$\Phi = \int_3^4 \vec{A} d\vec{l} = -A \cdot l.$$

Пример 212. Воспользоваться построениями рис. 21.11 и определить магнитную проводимость воздушного зазора между полюсом и якорем машины постоянного тока на единицу длины якоря (1 м).

Решение. В соответствии с рис. 21.11, $n = 2$, $m = 11$, $b/a = 0,9$. По формуле (21.29) подсчитаем

$$G_m = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 0,9 \cdot 11}{2} = 6,63 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

Пример 213. Определить емкость и индуктивность на 1 м длины кабельной двухпроводной линии с цилиндрической проводящей броней. Картина поля в сечении кабельной линии дана на рис. 21.19 ($\epsilon_r = 2,5$).

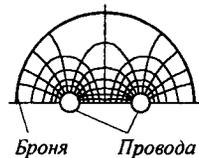


Рис. 21.19

Решение. Изображенная на рис. 21.19 картина поля справедлива для электрического и магнитного полей. Причем, согласно § 21.20, силовым линиям электрического поля соответствуют эквипотенциали магнитного поля.

Число силовых трубок электрического поля $m = 10,5 \cdot 2 = 21$. Число ячеек в трубке $n = 10$ (пять от провода до брони, пять от брони до провода). Отношение $b/a \approx 1$. Число силовых трубок магнитного поля $m = 10$, число ячеек в трубке $n = 21$. По формуле (21.31) найдем емкость на 1 м длины кабеля ($l = 1$ м):

$$C = \frac{2,5 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21}{10} = 46 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

По определению индуктивность L равна отношению потокосцепления к создающему его току: $L = \psi / I$. В данной задаче имеется всего один виток (прямой и обратный провода). Поэтому потокосцепление ψ равно потоку Φ между проводами (индуктивностью, обусловленной потокосцеплением в теле проводов, в силу его малости пренебрегаем).

По закону полного тока ток I может быть заменен на $\oint \vec{H} d\vec{l}$ по замкнутому контуру, окружающему провод. В свою очередь $\oint \vec{H} d\vec{l}$ представляет собой падение магнитного напряжения U_M по этому контуру. Следовательно,

$$L = \frac{\psi}{I} \approx \frac{\Phi}{\oint \vec{H} d\vec{l}} = \frac{\Phi}{U_M} = G_M.$$

Таким образом, индуктивность L в данном примере равна магнитной проводимости G_M . Для определения последней воспользуемся формулой (21.29)*.

$$G_M = L = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10}{21} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Пример 214. Найти разность скалярных магнитных потенциалов (магнитное напряжение) между точками A и B , расположенными в магнитном поле линейного тока $I = 10$ А (рис. 21.20).

Решение.

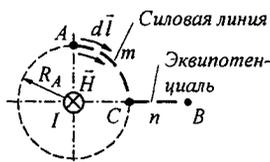


Рис. 21.20

$$U_{MAB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{l} = \int_A^C \vec{H} d\vec{l} + \int_C^B \vec{H} d\vec{l};$$

по пути AmC по пути CnB

$$\int_{\text{по пути AmC}} \vec{H} d\vec{l} = H \int dl = \frac{I}{2\pi R_A} \frac{2\pi R_A}{4} = \frac{I}{4};$$

$$\int_{\text{по пути CnB}} \vec{H} d\vec{l} = 0,$$

так как на этом участке угол между \vec{H} и $d\vec{l}$ равен 90° . Следовательно, $U_{MAB} = I/4 = 2,5$ А.

* При вычислении L по формуле для G_M число ячеек в силовой трубке должно быть взято по замкнутому контуру.

Пример 215. В воздухе создано равномерное магнитное поле напряженностью $H_0 = 240$ А/м. В это поле поместили ферромагнитный шарик, относительная магнитная проницаемость которого $\mu_{ri} = 20$. Найти индукцию в шарике.

Решение. Воспользуемся аналогией между электростатическим и безвихревым магнитным полями. В формуле (19.69) заменим E_0 на H_0 и ϵ_a на μ_a . Получим

$$H_i = H_0 \frac{3 \mu_{re}}{2 \mu_{re} + \mu_{ri}} = 240 \cdot \frac{3 \cdot 1}{2 + 20} = 32,7 \text{ А/м.}$$

Индукция в шарике

$$B_i = 20 \cdot 32,7 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} = 8,21 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

Пример 216. Вдоль трубы с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 (рис. 21.21) протекает постоянный ток I . Вывести формулы для определения напряженности поля H внутри трубы, в ее теле и снаружи трубы.

Решение. Напряженность поля в любой из указанных областей найдем по закону полного тока ($R = r$).

Если провести окружность радиусом $r < r_1$ с центром на оси трубы, то эта окружность не охватит тока. Поэтому при $r \leq r_1$ $H = 0$, т. е. во внутренней полости трубы магнитное поле отсутствует. Плотность тока в трубе:

$$\delta = I / [\pi (r_2^2 - r_1^2)].$$

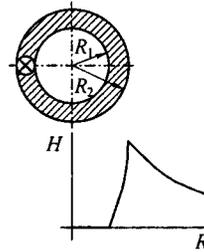


Рис. 21.21

Окружность радиусом $r_1 \leq r \leq r_2$ охватывает ток $\delta \pi (r^2 - r_1^2)$. Поэтому в этом интервале изменений r

$$H = \frac{I (r^2 - r_1^2)}{2 \pi r (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Снаружи трубы при $r \geq r_2$ напряженность поля убывает по гиперболическому закону $H = I / (2 \pi r)$. График $H = f(R)$ изображен на рис. 21.21.

§ 21.25. Закон Био—Савара—Лапласа. Согласно известному из курса физики закону Био—Савара—Лапласа при отсутствии ферромагнитных сред отрезок линейного провода $d\vec{l}$, по которому течет ток I в направлении $d\vec{l}$, в точке, удаленной на расстояние R от элемента тока, создает магнитную индукцию, определяемую следующим образом:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \frac{[d\vec{l} \vec{R}_0]}{R^2}, \quad (21.39)$$

где \vec{R}_0 — единичный вектор, проведенный от $d\vec{l}$ к точке, в которой под-

считываем магнитную индукцию (рис. 21.22). Результирующая индукция в этой точке

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{[d\vec{l} \vec{R}_0]}{R^2}. \quad (21.40)$$

В этой формуле интегрирование производят по всей длине замкнутого контура с током.

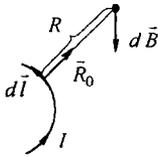


Рис. 21.22

Формула (21.39) следует из (21.27), если учесть, что

$d\vec{B} = \text{rot } d\vec{A}$. Действительно, из (21.27) находим

$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{d\vec{l}}{R} \right)$. Но $\frac{1}{R} d\vec{l}$ есть произведение скаляра $1/R$ на вектор $d\vec{l}$, поэтому

$$\text{rot} \left(\frac{1}{R} d\vec{l} \right) = \frac{1}{R} \text{rot } d\vec{l} + \left[\text{grad} \frac{1}{R} d\vec{l} \right].$$

Поскольку $d\vec{l}$ не зависит от положения точки, в которой определяется \vec{B} , то $\text{rot } d\vec{l} = 0$, и первое слагаемое правой части последнего выражения выпадает. В соответствии с формулой (19.10)

$$\text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{R}_0 \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{R}_0 \left(-\frac{1}{R^2} \right).$$

Следовательно,

$$\text{rot} \left(\frac{1}{R} d\vec{l} \right) = \frac{[d\vec{l} \vec{R}_0]}{R^2} \quad \text{и} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \vec{R}_0]}{4\pi R^2}.$$

Если в формуле (21.39) ток I как постоянную величину ввести в векторное произведение и заменить $I d\vec{l}$ на $\vec{\delta} dV$, где dV — элемент объема проводника с плотностью тока $\vec{\delta}$, то

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{\delta} \vec{R}_0] dV}{R^2}; \quad (21.41)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{\delta} \vec{R}_0]}{R^2} dV. \quad (21.42)$$

Формула (21.41) — вторая форма записи закона. В формуле (21.42) интегрирование производят по объему, занятому током.

Обратим внимание на два положения.

1. Структура формул (21.39) и (21.41) в известной мере сходна со структурой формулы для напряженности электрического поля точечного заряда, полученной в § 19.4 из закона Кулона.

2. Полезно сопоставить закон полного тока с законом Био—Савара—Лапласа. Оба эти закона позволяют определять магнитную индукцию, создаваемую током. Однако закон полного тока применим только к замкнутым контурам с токами, тогда как закон Био—Савара—Лапласа

применим не только к замкнутым контурам с токами, но и к отрезкам проводников с токами (к элементам тока). Поэтому закон Био—Савара—Лапласа более универсален.

Пример 217. С помощью формулы (21.40) определить магнитную индукцию в точке m , создаваемую отрезком линейного провода с током I (рис. 21.23, а). Точка m удалена от провода на расстояние b .

Решение. Угол между $d\vec{l}$ и \vec{R}_0 обозначим α . Из геометрических соображений имеем

$$R = b / \sin \alpha, \quad l = -b \operatorname{ctg} \alpha.$$

Следовательно,

$$d\vec{l} = b d\alpha / \sin^2 \alpha; \quad |[d\vec{l} \vec{R}_0]| = dl \cdot l \cdot \sin \alpha;$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4 \pi b} \sin \alpha d\alpha; \quad B = \frac{\mu_0 I}{4 \pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4 \pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

При выбранном направлении тока вектор \vec{B} направлен к читателю.

Если провод будет бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^\circ$, $\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = 2$ и $B = \mu_0 I / (2 \pi b)$, что совпадает с результатом, получаемым по закону полного тока.

Индукция в центре квадратного витка с током I и стороной a (рис. 21.23, б) в четыре раза больше, чем от одной стороны, и равна $B =$

$$= \frac{\mu_a I 2 \sqrt{2}}{\pi a}. \quad \text{В центре треугольного витка (рис. 21.23, в)} \quad B = \frac{9}{2} \frac{\mu_a I}{\pi a}.$$

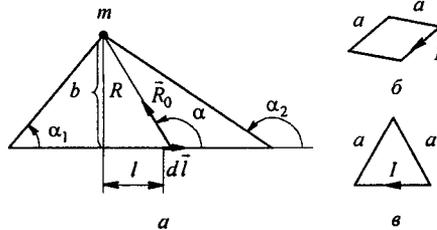


Рис. 21.23

Пример 218. Вывести формулу для определения напряженности магнитного поля на оси кругового витка с током I (рис. 21.24). Радиус витка принять равным a .

Решение. Выделим элемент тока $I d\vec{l}$. Напряженность поля $d\vec{H}'$, создаваемая этим элементом в точке b на оси витка, находящейся на расстоянии z от плоскости витка, равна $I [d\vec{l} \vec{R}_0] / [4 \pi (a^2 + z^2)]$; напряженность $d\vec{H}'$ перпендикулярна $d\vec{l}$ и \vec{R}_0 . От диаметрально противоположного элемента тока $I d\vec{l}$ в той же точке b будет напряженность $d\vec{H}''$. По модулю $d\vec{H}'$ и $d\vec{H}''$ одинаковы.

При геометрическом суммировании $d\vec{H}'$ и $d\vec{H}''$ будет получен вектор, направленный по оси витка: $dl = a d\alpha$;

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{I a \sin \beta d\alpha}{4 \pi (a^2 + z^2)} = \frac{I a}{4 \pi (a^2 + z^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Пример 219. Используя решение примера 218, вывести формулу для определения индукции на оси цилиндрической катушки с током I (рис. 21.25). Высота катушки h , средний радиус a , число витков w .

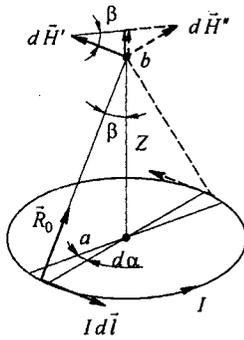


Рис. 21.24

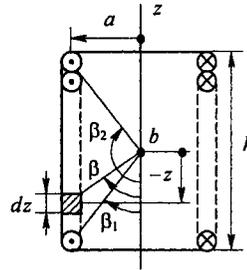


Рис. 21.25

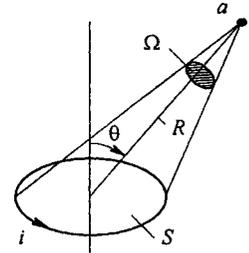


Рис. 21.26

Решение. В произвольной точке b на оси z от элемента тока dz возникает составляющая индукции

$$dB = \mu_0 \frac{I w}{h} dz \frac{a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}; \quad \cos \beta = \frac{-z}{\sqrt{a^2 + z^2}};$$

$$-d(\cos \beta) = \frac{a^2 dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}; \quad dB = \frac{-\mu_0 I w}{2h} d\cos \beta;$$

$$B = -\frac{\mu_0 I w}{2h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\cos \beta = \frac{\mu_0 I w}{2h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

§ 21.26. Определение скалярного магнитного потенциала контура с током через телесный угол. На рис. 21.26 изображен контур с током, который охватывает площадь S . Вертикальная ось расположена перпендикулярно площади. Запишем формулы для магнитного скалярного потенциала (полагая, что на бесконечности $\varphi_m = 0$) и составляющих H_R и H_θ напряженности поля в произвольной точке a , находящейся на расстоянии R от центра площади. Полагаем, что расстояние R значительно больше линейных размеров контура; θ — угол между вертикальной осью и радиусом R .

Вспользуемся аналогией между электрическим и магнитным безвихревым полями. В примере 196 были выведены формулы для потенциала φ и составляющих E_R , E_θ напряженности электрического поля диполя:

$$\varphi = \frac{q l \cos \theta}{4 \pi \epsilon_a R^2}; \quad E_R = \frac{q l \cos \theta}{2 \pi \epsilon_a R^3}; \quad E_\theta = \frac{q l \sin \theta}{4 \pi \epsilon_a R^3}.$$

Заменим в этих формулах электрический момент $q l$ на магнитный момент $i S \mu_a$, ϵ_a на μ_a , φ на φ_m , E_R на H_R , E_θ на H_θ . Учтем, что $S \cos \theta / R^2$ представляет собой телесный угол Ω , под которым площадь S видна из точки наблюдения a . Получим:

$$\varphi_m = \frac{i \Omega}{4 \pi} = \frac{i S \cos \theta}{4 \pi R^2}; \quad H_R = \frac{i S \cos \theta}{2 \pi R^3}; \quad H_\theta = \frac{i S \sin \theta}{4 \pi R^3}.$$

Угол θ положителен, если из точки a ток в контуре виден направленным против часовой стрелки.

§ 21.27. Магнитное поле намагниченной пленки (ленты). Магнитная пленка толщиной несколько микрон ($2a$ на рис. 21.27) применяется для записи информации (магнитофоны, вычислительные машины). При записи пленку намагничивают с помощью записываю-

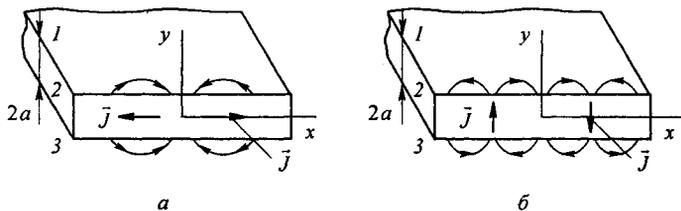


Рис. 21.27

щей головки либо продольно, когда вектор намагниченности направлен вдоль пленки (рис. 21.27, а), либо поперечно (рис. 21.27, б). После снятия внешнего поля пленка остается намагниченной. Поэтому, если ее пропустить мимо считывающей головки, пересечение силовых линий обмотки этой головки приведет к наведению в ней э. д. с. На рис. 21.27, а и б показаны силовые линии отдельно взятой намагниченной пленки. Намагниченность изменяется вдоль оси x . На рисунке области обозначены: выше пленки цифрой 1, пленки — 2, ниже пленки — 3. Области 1 и 3 неферромагнитные, область 2 — ферромагнитная среда.

Во всех областях на рис. 21.27, б поле подчиняется уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi_M = 0$ ($\text{div } \vec{J} = \partial J_x / \partial x + \partial J_y / \partial y$, так как $J_x = 0$, а J_y зависит только от x); $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_M$; $\text{div } \vec{H} = 0$.

Для рис. 21.27, а $\nabla^2 \varphi_M = -\text{div } \vec{H} = \text{div } \vec{J} = dJ_x / dx$; $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_M$. В соответствии с методом Фурье в каждой из областей $\varphi_M = X(x)Y(y)$ (от координаты z поле не зависит).

Задавая закон изменения намагниченности, например, для рис. 21.27, а в виде $J = J_x = J_0 \sin(mx)$, а для рис. 21.27, б в виде $J = J_y = J_0 \cos(mx)$, можно получить решение для φ_M . Так, для рис. 21.27, б:

$$\begin{aligned} \varphi_M^I &= C_1 e^{-my} \cos(mx) & (y \geq a); \\ \varphi_M^{II} &= (C_2 e^{-my} + C_3 e^{my}) \cos(mx) & (-a \geq y \geq a); \\ \varphi_M^{III} &= C_4 e^{my} \cos(mx) & (y \leq -a). \end{aligned}$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяют из условия непрерывности φ_M и непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции на границе между областями 2 и 1, а также между областями 2 и 3.

§ 21.28. Определение магнитного потока, созданного в некотором контуре намагниченным ферромагнитным телом. Положим, что ферромагнитное тело (например, кусочек ферромагнитной пленки) высотой Δl , площадью поперечного сечения ΔS , намагниченностью \vec{J} ($\Delta S \parallel \vec{J}$) расположено вблизи контура a (рис. 21.28, а). Требуется определить поток, создаваемый ферромагнитным телом и пронизывающий контур a .

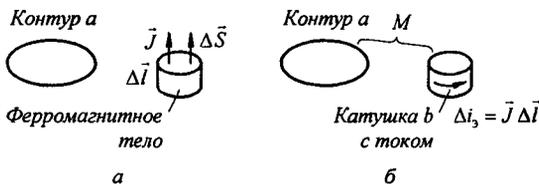


Рис. 21.28

В соответствии с § 14.24 заменим ферромагнитное тело одновитковой эквивалентной катушкой высотой Δl , площадью ΔS , по которой протекает ток $\Delta i_\delta = \delta \Delta l = \vec{J} \Delta l$ (магнитный момент катушки равен магнитному моменту ферромагнитного тела, рис. 21.28, б).

Эта катушка с током создает в контуре a потокосцепление, равное произведению тока катушки $J \Delta l$ на взаимную индуктивность M между контуром a и эквивалентной катушкой b при условии отсутствия ферромагнетиков: $\psi = J \Delta l M$. Значение M может быть найдено расчетным или экспериментальным путем.

Если намагниченность тела \vec{J} плавно изменяется по высоте, то тело следует разбить на участки Δl_k со ступенчато изменяющейся \vec{J}_k , каждый k -участок тела заменить одновитковой катушкой k со средним по высоте этой катушки током $J_k \Delta l_k$ и найти

$$\psi = \sum M_k \vec{J}_k \Delta \vec{l}_k,$$

где M — взаимная индуктивность катушки k с контуром a .

Обратим внимание на то, что картина магнитного поля, созданного однородно намагниченным телом (не говоря уже о неоднородно намагниченном) носит довольно сложный характер, а внутри этого тела картины поля для вектора \vec{B} и для вектора \vec{H} резко различны.

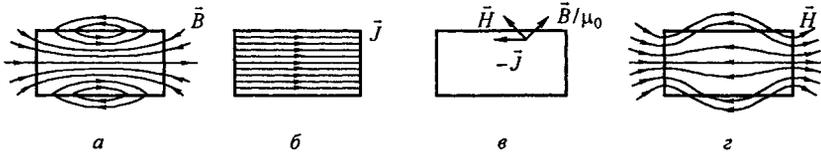


Рис. 21.29

На рис. 21.29, a показана примерная картина линий \vec{B} , а на рис. 21.29, b — линий \vec{J} при однородно намагниченном теле. Рис. 21.29, v поясняет, почему вектор $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}$ в некоторой точке ферромагнитного тела направлен совсем иначе, чем вектор \vec{B} . Примерная картина линий \vec{H} изображена на рис. 21.29, z .

§ 21.29. Выражение механической силы в виде производной от энергии магнитного поля по координате. Положим, что в системе из n контуров с токами один из контуров под действием механической силы \vec{F} на него со стороны остальных контуров перемещается так, что координата x его изменяется на величину $d\vec{x}$.

Требуется выяснить, какая связь существует между силой \vec{F} и изменением энергии магнитного поля системы dW_m .

Для какого-то k -контюра системы запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$i_k R_k + \frac{d\psi_k}{dt} = e_k. \quad (21.43)$$

Умножим (21.43) на $i_k dt$:

$$i_k^2 R_k dt + i_k d\psi_k = e_k i_k dt.$$

Запишем аналогичные уравнения для остальных контуров и просуммируем их:

$$\sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = \sum_{k=1}^n e_k i_k dt. \quad (21.44)$$

Слагаемое $\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k$ представляет собой ту часть энергии, которую получают все цепи от источников ЭДС за вычетом тепловых потерь.

При перемещении какого-то контюра на расстояние dx изменяется магнитная энергия системы W_m на величину dW_m и совершается механическая работа $F dx$, где F — составляющая силы, действующая по направлению dx .

Из закона сохранения энергии следует, что энергия, доставляемая источниками ЭДС за время dt , должна равняться энергии, выделяющейся за то же время в виде теплоты в сопротивлениях контуров, плюс энергия, затраченная на покрытие механической работы $F dx$, плюс приращение энергии магнитного поля dW_m :

$$\sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + F dx + dW_m = \sum_{k=1}^n e_k i_k dt. \quad (21.45)$$

При сопоставлении (21.44) и (21.45) получим

$$\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = F dx + dW_m. \quad (21.46)$$

Уравнение (21.46) означает, что механическая работа и приращение энергии совершаются за счет той части энергии $\sum_{k=1}^n e_k i_k dt$ источников, которую последние отдают в цепи, за вычетом тепловых потерь. Из (21.46) получим

$$F = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k - dW_m}{dx}. \quad (21.47)$$

Из уравнения (21.47) вытекает два частных случая.

1. Если перемещение будет происходить таким образом, что потокоцепления контуров остаются неизменными, то $d\psi_k = 0$, $F dx = -dW_m$ и

$$F = -dW_m / dx. \quad (21.48)$$

Для того чтобы ψ_k были постоянны, токи контуров i_k должны соответствующим образом изменяться. При этом энергия, доставляемая источниками, расходуется только на тепловые потери.

2. Если перемещение будет происходить так, что токи в контурах остаются неизменными ($i_k = \text{const}$), что возможно, например, когда перемещение происходит настолько быстро, что токи не успевают измениться, то в соответствии с § 1.6

$$W_m = 0,5 \sum i_k \psi_k.$$

Следовательно,

$$dW_m = \frac{1}{2} d \sum i_k \psi_k = \frac{1}{2} \sum i_k d\psi_k. \quad (21.49)$$

Подставив (21.49) в (21.47), получим

$$F = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k}{dx} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k}{dx} = \frac{dW_m}{dx}. \quad (21.50)$$

Во втором частном случае выражение для механической силы отличается от (21.48) только знаком.

При $i_k = \text{const}$ доставляемая в цепи от источников ЭДС энергия за вычетом тепловых потерь делится на две равные части. Одна идет на приращение энергии магнитного поля dW_m , другая — на механическую работу $F dx$.

Уравнения (21.48) и (21.50) часто используют для нахождения механической силы. Чтобы найти силу F , надо либо составить аналитическое выражение для магнитной энергии системы и продифференцировать его по изменяющейся координате, либо опытным путем снять зависимость магнитной энергии от изменяющейся координаты и затем графически продифференцировать ее. Если в поле двух катушек при изменении координаты x индуктивности L_1 и L_2 остаются постоянными и меняется только взаимная индуктивность M , то

$$F = I_1 I_2 dM / dx.$$

Если в рассматриваемой системе имеются ферромагнитные тела, то часть энергии dW_m расходуется на необратимые тепловые процессы в них вследствие гистерезиса и вихревых токов.

§ 21.30. Магнитное поле двойного токового слоя. Под *двойным токовым слоем* понимают два весьма близко (теоретически бесконечно близко) параллельно расположенных слоя (находящихся в плоскости xOy), по которым текут поверхностные токи в противоположных направлениях (рис. 21.30, а). Расстояние между слоями по нормали Δl . По

верхнему слою ток течет вдоль оси y , по нижнему — по оси $-y$. Поверхностную плотность тока каждого слоя обозначим $\delta_{\text{пов}}$.

В каждом слое выделим единичную площадь ($\Delta x = \Delta y = 1$) и запишем магнитный момент контура длиной $\Delta y = 1$ и высотой Δl : $\vec{M} = -\vec{i} \Delta l \cdot \delta_{\text{пов}}$. Отсюда $\delta_{\text{пов}} = M / \Delta l$.

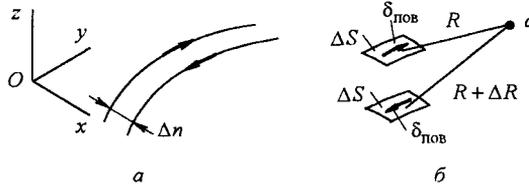


Рис. 21.30

Составляющая векторного потенциала в произвольной точке a (рис. 21.30, б) от двух противоположных элементов поверхности площадью ΔS :

$$d\vec{A} = \vec{j} \mu_0 \delta_{\text{пов}} = \frac{\Delta S}{4\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \Delta R} \right).$$

Заменяем $\delta_{\text{пов}}$ на $M / \Delta l$, просуммируем составляющие от всех элементов поверхности, устремим $\Delta l \rightarrow 0$, заменим ΔS на dS и получим формулу для векторного потенциала в произвольной точке от двойного токового слоя:

$$\vec{A} = \vec{j} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S M \frac{\partial(1/R)}{\partial n} dS.$$

Обратим внимание на два положения.

1. При переходе с одного токового слоя на другой векторный потенциал изменяет направление на противоположное (на верхнем слое \vec{A} направлен вдоль оси y , на нижнем — вдоль оси $-y$), т. е. при переходе через слои тангенциальная составляющая \vec{A} терпит разрыв.

2. Несмотря на то, что расстояние между слоями $\Delta l \rightarrow 0$, в пространстве между ними проходит конечного значения магнитный поток, направленный вдоль оси $-x$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение магнитного поля постоянного тока. Какими точечными и интегральными величинами оно характеризуется? 2. Каков физический смысл векторов \vec{B} , \vec{J} , \vec{H} и каковы единицы этих величин? 3. Какие поля называют вихревыми? 4. В каких случаях величина \vec{H} может быть определена без затруднений при помощи закона полного тока? 5. Дайте физическое толкование понятию ротора. 6. Запишите принцип непрерывности магнитного потока в интегральной и дифференциальной формах. 7. Могут ли линии \vec{H} быть прерывными? 8. Почему понятие ϕ_m неприменимо к областям, занятым током? 9. Могут ли ϕ_m бесконечно близко расположенных точек в поле линейного тока I различаться на конечную величину? 10. Почему вектор-потенциал \vec{A} является более общей характеристикой поля, чем ϕ_m ? 11. На каком основании можно принять $B = \text{rot} \vec{A}$? 12. Определите характер распределения плотности тока $\vec{\delta}$ в некоторой области, если в ней $\vec{A} = \vec{j} \cdot 5x^3$. (Ответ: $\vec{\delta} = -\vec{i} \cdot 30x / \mu_0$.) 13. Пользуясь законом полного тока в дифференциальной форме, покажите, что в электрическом поле постоянного тока нет истоков вектора $\vec{\delta}$. 14. Одинаковы ли будут картины поля вектора \vec{B} для поля, у которого векторный магнитный потенциал равен \vec{A} и для поля, у которого он равен $\vec{A} + \text{grad} \psi$, где ψ — некоторая скалярная функция? 15. Чем следует руководствоваться при графическом построении картины магнитного поля? Каким свойством обладает магнитная силовая трубка? 16. Какого типа соответствия могут быть в картинах магнитного и электростатического поля? 17. Поясните ход решения задачи о цилиндрическом магнитном экране и расскажите, из каких соображений находят постоянные интегрирования. 18. Чем можно объяснить, что в соответствующих формулах метода зеркальных изображений для сходных задач в магнитном (§ 21.23) и электростатическом (19.32)

полей индексы 1 и 2 поменялись местами? 19. Почему можно сказать, что закон Био—Савара—Лапласа в некотором смысле является более общим, чем закон полного тока? 20. Ток I проходит по отрезку дуги окружности радиусом a с центральным углом α . Определите H в центре окружности. (Ответ: $I \alpha / (4 \pi a)$.) 21. Выведите формулу для определения B в центре квадратного витка со стороной a , по которому течет ток I . Виток находится в воздухе. 22. Создает ли магнитное поле ток утечки, радиально стекающий через несовершенную изоляцию с жилы на оболочку коаксиального кабеля (рис. 21.31, а)? 23. Провод с током I рас-

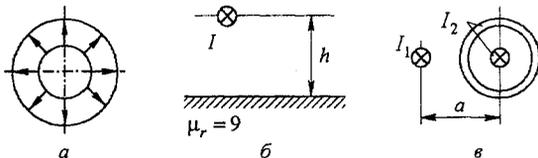


Рис. 21.31

положен в воздухе на расстоянии h от плоской поверхности ферромагнитного тела с $\mu_r = 9$ (рис. 21.31, б). Определите силу, действующую на единицу длины провода. (Ответ: $0,2 I^2 \mu_0 / (\pi h)$.) 24. В поле линейного тока I_1 на расстоянии a от него расположен параллельно ему коаксиальный кабель длиной $l = 1$ м с током I_2 (по жиле ток направлен «от нас», по оболочке — «к нам», см. рис. 21.31, в). Какова сила, действующая на жилу кабеля? На кабель как систему? (Ответ: $I_1 I_2 \mu_0 / (2 \pi a)$; ≈ 0 .) 25. Докажите, что для двух параллельных двухпроводниковых линий, находящихся в воздухе, отношение взаимной индуктивности между линиями к потенциальному коэффициенту α_{12} (§ 19.34) равно $\mu_0 \epsilon_0$. 26. В цилиндрическом неферромагнитном проводнике радиусом a параллельного его оси просверлено цилиндрическое отверстие радиусом $a/2$ (рис. 21.32, а). По проводнику проходит ток I .

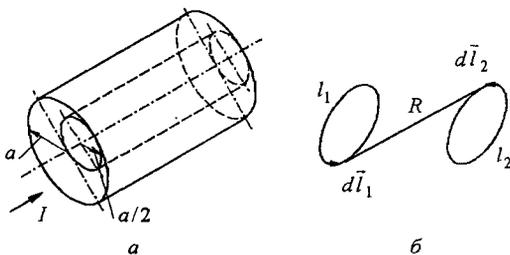


Рис. 21.32

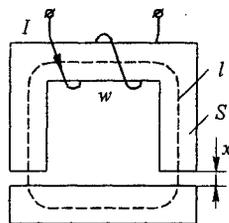


Рис. 21.33

Показать, что напряженность поля во всех точках отверстия одинакова и равна $I / (4 \pi a)$. 27. Два тонких проводящих контура l_1 и l_2 (рис. 21.32, б) находятся в воздухе. Элементы длины их обозначены $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$. Расстояние между текущими элементами длины R . Воспользовавшись выражением для векторного потенциала A элемента тока и выражением магнитного потока через A , покажите, что взаимная индуктивность между контурами может быть определена по формуле $M = \frac{\mu_0}{4 \pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}$. 28. На рис. 21.33 изображен электромагнит постоянного тока. Магнитная цепь его выполнена из магнитного материала и находится в ненасыщенном состоянии. Длина средней магнитной линии на пути в стали l_c , длина каждого воздушного зазора x . Площадь поперечного сечения S . Полагая, что магнитная энергия, запасенная в воздушном зазоре W_{Bz} , много больше магнитной энергии, запасенной на ферромагнитных участках магнитной цепи, $W_{ФМ}$, выведите формулу тягового усилия магнита F , считая известной магнитную индукцию в воздушном зазоре B . (Ответ: $F = B^2 S / \mu_0$.) 29. Выведите формулу тягового усилия F магнита постоянного тока (рис. 21.33) по известной м. д. с. катушки $I w$, полагая, как и в вопросе 28, что $W_{Bz} \gg W_{ФМ}$ и что падение магнитного напряжения на пути в стали $H_c l_c$ много меньше падения магнитного напряжения на воздушных зазорах $H_B \cdot 2x$. (Ответ: $F = \mu_0 S (I w)^2 / (4 x^2)$.) 30. Вы-

ведите формулу для L катушки, намотанной на ферромагнитный сердечник с воздушным зазором (рис. 21.33), полагая известными w , l , S , x и μ_r сердечника. (Ответ: $L = \mu_0 \mu_r w^2 S / [l(1 + 2x\mu_r/l)]$.) 31. Определите взаимную индуктивность M между двумя коаксиальными витками с радиусами R_1 и R_2 , находящимися в воздухе на расстояния $Z > R_1 > R_2$ (рис. 21.34). (Ответ: $M = \mu_0 \pi R_1^2 R_2^2 / (2Z^3)$.) 32. Выведите формулу для M

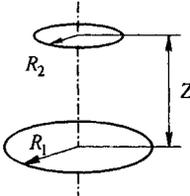


Рис. 21.34

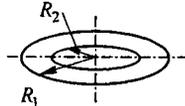


Рис. 21.35

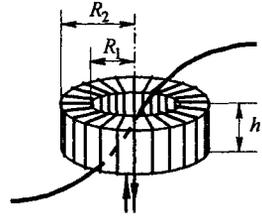


Рис. 21.36

между коаксиальными витками (рис. 21.35) при $R_2 \ll R_1$. (Ответ: $M = \mu_0 \pi R_2^2 / (2R_1)$.)

33. Чем физически можно объяснить смену отталкивания двух магнитов (рис. 21.9) на притяжение при превышении грузом P некоторого критического значения? 34. Используя аналогю между электростатическим и магнитным безвихревым полем и выкладки § 19.51, покажите, что на ферромагнитный шарик радиусом a и магнитной проницаемостью μ_{ri} , находящейся в неравномерном магнитном поле напряженностью H и магнитной проницаемостью μ_{re} , действует сила $\vec{F} = 4\pi a^3 \mu_{ae} \frac{\mu_{ri} - \mu_{re}}{\mu_{ri} + 2\mu_{re}} H \text{ grad } H$.

35. Докажите, что взаимная индуктивность M между тороидальной катушкой с числом витков w_1 , равномерно намотанной на тороидальный сердечник внутренним радиусом R_1 , наружным R_2 , высотой h , и одиночным проводом, проходящим через внутреннюю полость тороида и расположенным произвольно (рис. 21.36), равна $w \frac{\mu_0 \mu_r h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$, где μ_r — относительная магнитная проницаемость тела тороида. Учтите, что одиночный провод является частью одновиткового контура.

36. На рис. 21.37 дан эскиз униполярного генератора постоянной ЭДС. На вал двигателя, не показанного на рисунке, посажен диск из проводящего материала. Диск охвачен двумя половинками ферромагнитного статора из магнитомягкого материала. В статоре имеется полость, в которую помещена катушка кольцевой формы с числом витков w , по которой протекает постоянный ток I . Катушка с током создает постоянное магнитное поле, силовые линии которого показаны пунктиром. Эти линии замыкаются через статор, диск и воздушные зазоры. Суммарную длину немагнитного участка пути обозначим δ . При вращении вала с угловой скоростью ω между периферией диска и валом (в этих точках помещены щетки) возникает постоянная ЭДС e . Активная часть диска расположена между радиусами R_2 и R_1 . Полагая, что падение магнитного напряжения в теле статора из магнитомягкого материала значительно меньше падения магнитного напряжения

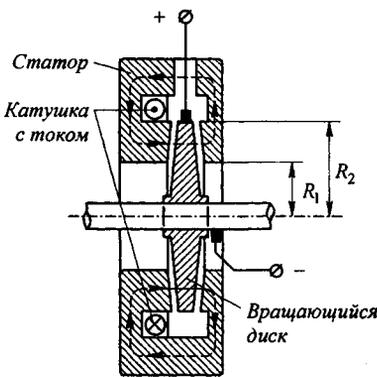


Рис. 21.37

в немагнитном участке длиной δ , предлагается вывести приближенную формулу для ЭДС e . Указание: воспользоваться выражением для магнитной (Лоренцевой) составляющей напряженности электрического поля $\vec{E} = [\vec{v} \vec{B}]$. Убедиться также в том, что с помощью закона электромагнитной индукции определить ЭДС в данном случае невозможно. (Ответ: $e \approx I w \mu_0 (R_2^2 - R_1^2) / \delta$.) 37. Решите задачи 21.1; 21.4; 21.12; 21.21; 21.24; 21.25.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 22.1. Определение переменного электромагнитного поля. Под переменным электромагнитным полем понимают совокупность изменяющихся во времени и взаимно связанных и обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей. Оно определяется двумя векторными величинами — напряженностью электрического поля \vec{E} и напряженностью магнитного поля \vec{H} .

Переменное электромагнитное поле является одним из видов материи. Оно обладает энергией, массой, количеством движения, может превращаться в другие виды материи и самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн. Любые возмущения поля в диэлектрике с огромной скоростью, для вакуума равной примерно $3 \cdot 10^8$ м/с, передаются на большие расстояния.

При исследовании процессов в переменном электромагнитном поле пользуются уравнениями Максвелла.

Систему уравнений Максвелла образуют четыре уравнения¹⁾.

1. Уравнение (22.1), выражающее связь между ротором напряженности магнитного поля и плотностью тока в той же точке поля, — первое уравнение Максвелла.

2. Уравнение (22.4), которое определяет связь между ротором напряженности электрического поля и скоростью изменения магнитной индукции в той же точке поля, — второе уравнение Максвелла.

3. Уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, выражающее принцип непрерывности магнитного потока [оно следует из (22.4) после взятия от обеих частей его дивергенции]; векторы \vec{B} , \vec{H} , \vec{J} связаны соотношениями $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_a \vec{H}$.

4. Уравнение $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}$, выражающее связь между истоком вектора \vec{D} электрического поля и плотностью свободных зарядов в той же точке поля; векторы \vec{D} , \vec{E} , \vec{P} связаны соотношениями $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_a \vec{E}$.

Эту систему дополняют уравнением непрерывности (см. § 22.3) и теоремой Умова—Пойнтинга (см. § 22.6).

§ 22.2. Первое уравнение Максвелла. Первое уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (22.1)$$

¹⁾ Уравнения были сформулированы английским ученым Дж.К. Максвеллом (1831–1879) в его книге «Трактат об электричестве и магнетизме», изданной в 1873 г.

В его правой части имеются две плотности тока: плотность тока проводимости \vec{j} и плотность тока электрического смещения $\partial\vec{D}/\partial t$. Ток электрического смещения возникает в любом диэлектрике, в том числе и в вакууме, при изменении напряженности электрического поля во времени. Ток смещения порождает магнитное поле так же, как и ток проводимости. Хотя природа тока проводимости и тока смещения неодинакова, оба они обладают одним и тем же свойством — вызывать магнитное поле.

Таким образом, смысл первого уравнения Максвелла состоит в том, что всякое изменение электрического смещения во времени ($\partial\vec{D}/\partial t$) в некоторой точке поля (т. е. возникновение в ней тока смещения), как и ток проводимости, вызывает в этой точке вихрь магнитного поля ($\text{rot}\vec{H}$), т. е. вихревое магнитное поле. Если среда однородна и изотропна, то $\epsilon_a = \text{const}$, и тогда

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

С током смещения в предыдущих разделах (особенно в гл. 3 и 8) приходилось встречаться неоднократно. Так, известно, что при зарядке конденсатора через него протекает ток. Этот ток протекает через диэлектрик и является током смещения.

Если, например, взять незаряженный плоский воздушный конденсатор и подключить его к источнику ЭДС напряжением U через сопротивление R , то напряжение на обкладках конденсатора будет расти по закону $u_C = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. Так как напряженность электрического поля в плоском конденсаторе $E = u_C/d$, где d — расстояние между обкладками, то

$$E = \frac{U}{d} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon_a S/d.$$

Ток смещения, протекающий через единицу поверхности сечения диэлектрика, взятой перпендикулярно силовым линиям, равен

$$\epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_a \frac{U}{d} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{1}{RC} = \frac{U}{RS} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Через поверхность S ток смещения в S раз больше, т. е. он равен току проводимости, протекающему по проводникам, соединяющим конденсатор с источником ЭДС.

Отметим, что первое уравнение Максвелла представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

Убедимся в том, что из закона полного тока следует уравнение (22.1). С этой целью возьмем произвольный контур и составим для него уравнение по закону полного тока. Полный ток, пронизывающий площадь, ограниченную контуром, равен сумме тока проводи-

мости и тока смещения. Поэтому

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

На основании теоремы Стокса $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S}$. Следовательно,

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \left(\vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (22.2)$$

Равенство (22.2) должно выполняться при любой площади S , поэтому

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

§ 22.3. Уравнение непрерывности. Линии полного тока $\vec{\delta} + \epsilon_a \partial \vec{E} / \partial t$ являются непрерывными. Физически это означает, что на границе проводящей среды и диэлектрика ток проводимости переходит в ток смещения.

Можно математически сформулировать *принцип непрерывности (замкнутости) линий полного тока*. С этой целью от обеих частей уравнения (22.1) возьмем дивергенцию. Из предыдущего известно, что дивергенция от ротора тождественно равна нулю (см. § 21.12). Поэтому

$$\text{div} \left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (22.3)$$

Уравнение (22.3) можно записать в другой форме. Действительно, из него следует, что

$$\text{div } \vec{\delta} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D}.$$

Но $\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{своб}}$. Поэтому

$$\text{div } \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t}. \quad (22.3a)$$

Уравнение непрерывности (22.3a) называют также *законом сохранения заряда*. Этот закон означает, что изменение во времени свободного заряда, находящегося в некотором малом объеме, может происходить только за счет перемещения заряда через поверхность, окружающую этот заряд.

§ 22.4. Второе уравнение Максвелла. Второе уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (22.4)$$

Физический смысл его состоит в том, что всякое изменение магнитного поля во времени ($\partial \vec{B} / \partial t$) в какой-либо точке поля возбуждает вихрь или ротор электрического поля в той же точке поля, т. е. вызывает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму закона электромагнитной индукции.

Чтобы убедиться в этом, проведем следующие рассуждения. Мысленно возьмем некоторый замкнутый контур, расположенный в переменном электромагнитном поле. Переменный магнитный поток, пронизывающий контур, наведет в нем ЭДС $e = \oint \vec{E} d\vec{l} = -\partial\Phi/\partial t$. Но $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$, поэтому $\oint \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$, причем площадка \vec{S} опирается на контур l .

На основании теоремы Стокса $\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}$, поэтому

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (22.5)$$

Равенство (22.5) должно выполняться при любых площадях S , что возможно только в том случае, когда равны подынтегральные функции обоих интегралов. Следовательно

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Знак «минус» в правой части второго уравнения Максвелла (как и в формуле $e = -\partial\Phi/\partial t$) объясняется тем, что в основу применения этой формулы положено правило правого винта. Если заворачивать правый винт так, что положительное направление вектора магнитной индукции \vec{B} в некоторой точке пространства при возрастании индукции в этой точке совпадает с направлением движения острия винта, то положительное направление для вектора напряженности электрического поля \vec{E} при составлении циркуляции вектора \vec{E} вдоль бесконечно малого контура, окружающего эту точку и лежащего в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} , совпадает с направлением вращения головки винта.

Знак «минус» в правой части (22.4) поставлен для того, чтобы привести в соответствие действительное направление для \vec{E} при оговоренных ранее условиях с направлением, принятым для \vec{E} за положительное.

Как в первом, так и во втором уравнениях Максвелла участвуют частные (не полные) производные во времени. Объясняется это тем, что уравнения Максвелла записаны для таких тел и контуров, которые неподвижны по отношению к выбранной системе координат. (Вопросы электродинамики движущихся сред кратко рассмотрены в § 22.11.)

В переменном электромагнитном поле кроме силовых линий электрического поля, «начинающихся» и «оканчивающихся» на электрических зарядах (как в электростатическом поле), могут быть и замкнутые на себя силовые линии электрического поля, охватывающие замкнутые на себя силовые линии магнитного поля (см., например, рис. 25.5, а).

§ 22.5. Уравнения Максвелла в комплексной форме записи. Уравнения (22.1) и (22.4) записаны для мгновенных значений. Если H и E изменяются во времени синусоидально, то можно воспользоваться символическим методом и записать уравнения (22.1) и (22.4) в иной форме. Пусть $H = H_m \sin(\omega t + \psi_H)$ и $E = E_m \sin(\omega t + \psi_E)$.

Можно записать $H = \text{Im } \dot{H}_m e^{j\omega t}$ (Im — мнимая часть) или, условно, $H \rightarrow \dot{H}_m e^{j\omega t}$ (\rightarrow значок соответствия), где комплексная амплитуда $\dot{H}_m = H_m e^{j\psi_H}$. В свою очередь $E \rightarrow \dot{E}_m e^{j\omega t}$.

Так как напряженности E и H , кроме того, что они меняются во времени по синусоидальному закону, являются функциями векторными, т. е. определенным образом ориентированными в пространстве векторами, то

над ними ставят стрелку и точку: $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$. Стрелка означает, что речь идет о векторе в пространстве, точка — о том, что проекции этого вектора на любую из координатных осей во времени изменяются синусоидально^{*)}.

Тогда $\bar{\delta}$ можно заменить на $\gamma \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}$, а

$$\epsilon_a \frac{\partial \bar{\vec{E}}}{\partial t} \text{ — на } j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} = j\omega \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \right)$$

и

$$\text{rot } \bar{\vec{H}} \text{ — на } \text{rot}[\dot{\vec{H}} e^{j\omega t}] = e^{j\omega t} \text{rot } \dot{\vec{H}}.$$

($e^{j\omega t}$ как постоянную величину, не зависящую от координат, можно вынести за знак ротора). При этом первое уравнение Максвелла запишем так:

$$e^{j\omega t} \text{rot } \dot{\vec{H}} = (\gamma \dot{\vec{E}} + j\epsilon_a \omega \dot{\vec{E}}) e^{j\omega t}.$$

После сокращения на $e^{j\omega t}$ получим

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\epsilon_a \omega \dot{\vec{E}}. \quad (22.6)$$

Аналогично, второе уравнение Максвелла в комплексной форме

$$\text{rot } \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}. \quad (22.7)$$

§ 22.6. Теорема Умова—Пойнтинга для мгновенных значений.

Кроме уравнений Максвелла, большое значение в теории электромагнитного поля имеет теорема Умова—Пойнтинга, которая описывает энергетические соотношения в поле. Теорема Умова—Пойнтинга имеет две формы записи: первая — для мгновенных значений, вторая (комплексная форма) — для синусоидально изменяющихся величин.

Из § 19.46 известно, что энергия электрического поля в единице объема равна $\epsilon_a E^2/2$. Энергия магнитного поля в единице объема — $\mu_a H^2/2$. Энергия в объеме dV равна

$$(\epsilon_a E^2/2 + \mu_a H^2/2) dV.$$

Для того чтобы получить выражение, в которое вошла бы полная энергия в объеме dV , умножим (22.1) на $\vec{E} dV$, а (22.4) на $\vec{H} dV$. Будем иметь

$$\vec{E} \text{rot } \vec{H} dV = \left(\gamma \vec{E} \vec{E} + \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (22.8)$$

$$\vec{H} \text{rot } \vec{E} dV = \left(-\mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV = \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (22.9)$$

^{*)} В дальнейшем от амплитудных значений переходим к действующим и индекс m опускаем.

Из (22.8) вычтем (22.9). Тогда

$$(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) dV = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right] dV. \quad (22.10)$$

Так как $\operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^*$, то левая часть (22.10) есть $-\operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}] dV$. Следовательно,

$$-\operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}] dV = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right] dV.$$

Для сокращения записи обозначим векторное произведение \vec{E} на \vec{H} через $\vec{\Pi}$, т. е. примем, что $\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}]$; $\vec{\Pi}$ — это вектор, называемый *вектором Пойнтинга*; его единица измерения равна произведению единиц измерения E и H , т. е. произведению вольт на метр на ампер на метр: вольт-ампер на метр в квадрате ($\text{В}/\text{м} \cdot \text{А}/\text{м} = \text{В} \cdot \text{А}/\text{м}^2$).

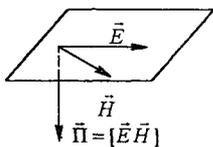


Рис. 22.1

Таким образом, вектор Пойнтинга имеет размерность мощности (или энергии в единицу времени), отнесенной к единице поверхности, и направление его (рис. 22.1) совпадает с направлением движения острия правого винта, если голову-

ку последнего вращать по кратчайшему направлению от \vec{E} к \vec{H} .

$$-\operatorname{div} \vec{\Pi} dV = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right] dV. \quad (22.11)$$

Распространим (22.11) на некоторый объем конечных размеров. С этой целью проинтегрируем (22.11) по объему V :

$$-\int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dV = \int_V \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (22.11a)$$

Подобно тому, как поверхностный интеграл по теореме Стокса преобразовывается в линейный (см. § 21.14): $\int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \oint \vec{A} d\vec{l}$, объемный интеграл в свою очередь может быть преобразован в поверхностный. Это преобразование осуществляют с помощью теоремы Остроградского—Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dV = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}.$$

* Напомним вывод этого соотношения. Введем индексы a и b , указывающие, по какой переменной (A или B) производится дифференцирование, и учтем, что можно в циклическом порядке менять множители. Будем иметь: $\operatorname{div}[\vec{A} \vec{B}] = \nabla_a [\vec{A} \vec{B}] + \nabla_b [\vec{A} \vec{B}] = \vec{B} [\nabla_a \vec{A}] + \vec{A} [\vec{B} \nabla_b] = \vec{B} [\nabla_a \vec{A}] - \vec{A} [\nabla_b \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}$. Замена \vec{A} на \vec{E} и \vec{B} на \vec{H} и дает соотношение $\operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}$.

Качественно поясним это преобразование. Разобьем объем V (рис. 22.2, а) на отдельные объемы ΔV , заменим $\operatorname{div} \vec{\Pi}$ на $\sum \frac{\vec{\Pi} \Delta \vec{S}}{\Delta V}$ (строго говоря, надо было бы записать $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \frac{\vec{\Pi} \Delta \vec{S}}{\Delta V}$), где $\Delta \vec{S}$ — элемент поверхности объема ΔV , а знак \sum означает суммирование по всем поверхностям объема ΔV . В этом случае

$$\int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dV = \sum \sum \frac{\vec{\Pi} \Delta \vec{S}}{\Delta V} \Delta V = \sum \sum \vec{\Pi} \Delta \vec{S}.$$

Первый знак суммы означает суммирование по поверхностям малого объема, а второй — по отдельным объемам.

Сумма $\sum \sum \vec{\Pi} \Delta \vec{S}$ может быть разбита на две суммы: сумму произведений $\vec{\Pi} \Delta \vec{S}$ по всем поверхностям, отделяющим один объем от соседнего (по «внутренним» поверхностям), и сумму произведений $\vec{\Pi} \Delta \vec{S}$ по всем «периферийным» поверхностям. Первая сумма равна нулю, так как для двух смежных объемов внешние нормали к общей поверхности направлены встречно. Рис. 22.2, б поясняет это; mn — общая грань двух объемов. Для верхнего объема нормаль к грани направлена вниз ($\Delta \vec{S}_1$), для нижнего — вверх ($\Delta \vec{S}_2$); вектор $\vec{\Pi}$ будучи умноженным на $(\Delta \vec{S}_1 + \Delta \vec{S}_2)$, даст нуль. Сумма произведений $\vec{\Pi} \Delta \vec{S}$ по всем периферийным поверхностям и представляет собой $\oint \vec{\Pi} d\vec{S}$.



Рис. 22.2

Теорему Умова—Пойнтинга³⁾ для мгновенных значений записывают следующим образом:

$$-\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (22.12)$$

Левая часть (22.12) представляет собой поток вектора Пойнтинга (направленный внутрь объема) сквозь любую замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый объем V .

Поясним смысл знака «минус» в левой части формулы (22.12). Элемент поверхности $d\vec{S}$ в любой ее точке направлен в сторону внешней по отношению к рассматриваемому объему нормали. Вектор Пойнтинга направлен внутрь этого объема. Поскольку угол между $\vec{\Pi}$ и $d\vec{S}$ больше 90° , то скалярное произведение $\vec{\Pi} d\vec{S} < 0$, а $-\vec{\Pi} d\vec{S} > 0$. Таким образом, за счет знака «минус» левая часть формулы (22.12) — величина положительная.

В соответствии с уравнением Джоуля—Ленца в дифференциальной форме γE^2 — энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени. Поэтому $\int_V \gamma E^2 dV$ есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единицу времени в объеме V ;

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right)$$

³⁾ Н.А. Умов (1846–1915) с 1893 по 1911 г. являлся профессором Московского университета. В 1874 г. защитил докторскую диссертацию «О движении энергии в упругих средах», где рассмотрел вопрос о потоке энергии в упругих средах и о плотности потока энергии. Применительно к электромагнитному полю понятие о потоке энергии было развито английским физиком Дж.Г. Пойнтингом в 1885 г.

есть скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема.

Но скорость изменения электромагнитной энергии есть мощность. Следовательно, поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V , равен мощности, выделяющейся в объеме V в виде теплоты, и мощности, идущей на приращение энергии электромагнитного поля.

Теорему Умова—Пойнтинга следует трактовать как уравнение энергетического баланса; левая часть формулы (22.12) — это мощность или энергия в единицу времени, доставляемая в виде потока вектора Пойнтинга внутрь некоторого объема; а правая часть — энергия, расходуемая в единицу времени внутри объема.

Соотношение (22.12) было получено в предположении, что среда внутри объема V однородна и изотропна, а также в предположении, что отсутствует отраженная волна и внутри объема нет источников электродвижущей силы, создающих стороннюю напряженность поля $\vec{E}_{\text{стор}}^*$.

Если поле не изменяется во времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) = 0 \quad \text{и} \quad -\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV.$$

Обратим внимание также на то, что формула (22.12) учитывает возможность прохождения потока вектора $\vec{\Pi}$ транзитом через объем V .

Электромагнитная энергия от места ее генерирования передается к месту потребления по диэлектрику (провода в линиях передачи выполняют двойную роль: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике).

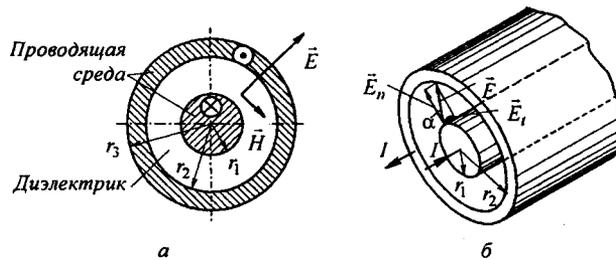


Рис. 22.3

Покажем справедливость этого утверждения на простейшем примере. Пусть энергия постоянного тока передается по коаксиальному кабелю (рис. 22.3, а). Радиус жилы r_1 , внутренний радиус оболочки r_2 . Примем проводимость материала жилы и оболочки настолько большой

^{*)} Если в объеме V есть $\vec{E}_{\text{стор}}$, то плотность тока $\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$ и вместо формулы (22.12) будет $-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \frac{\delta^2}{\gamma} dV + \int_V (-\vec{\delta}) \vec{E}_{\text{стор}} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$. Второе слагаемое правой части — мощность сторонних источников.

(теоретически бесконечной большой), что напряженности поля $E = \delta/\gamma$ в жиле и оболочке стремятся к нулю. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком. Убедимся, что энергия $U I$, передаваемая приемнику в единицу времени, действительно канализируется по диэлектрику. С этой целью подсчитаем поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, в рассматриваемом примере представляющее собой кольцо с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 . Напряженность магнитного поля в диэлектрике по закону полного тока $H = I/(2\pi r)$.

Напряженность электрического поля в диэлектрике при постоянном токе определяется так же, как и в условиях электростатики:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a r l} = \frac{U}{r \ln(r_2/r_1)},$$

где Q — полный заряд жилы на длине l ; U — напряжение между жилой и оболочкой. Следовательно, в некоторой точке диэлектрика, расположенной на расстоянии r от оси ($r_1 \leq r \leq r_2$)

$$\Pi = E H = \frac{U I}{2\pi r^2 \ln(r_2/r_1)}$$

(\vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны; см. рис. 22.3, а). Поток вектора Пойнтинга через кольцо с радиусами r_1 и r_2 :

$$\int_{\vec{\Pi}} d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_2} \Pi 2\pi r dr = 2\pi \frac{U I}{2\pi \ln(r_2/r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = U I.$$

Таким образом, вся поступающая к приемнику энергия передается по диэлектрику. По жиле и оболочке энергия к приемнику не передается. Более того, если учесть, что γ конечна и напряженность электрического поля в жиле и оболочке направлена по току и не равна нулю, то нетрудно убедиться в наличии потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность провода внутри провода, т. е. провода сами потребляют из диэлектрика энергию на покрытие тепловых потерь.

Пример 220. Определить тангенс угла α , составляемого напряженностью электрического поля с нормалью к поверхности жилы в точке, находящейся на поверхности жилы коаксиального кабеля (рис. 22.3, б), а также подсчитать значение потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность жилы на длине 1 м и сопоставить это значение с потерями энергии в жиле на длине 1 м. Радиус медной жилы $r_1 = 0,3$ см; внутренний радиус оболочки $r_2 = 1$ см. Протекающий по кабелю постоянный ток $I = 50$ А. Напряжение между жилой и оболочкой $U = 10$ кВ.

Решение. Нормальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы:

$$E_n = \frac{U}{r_1 \ln(r_2/r_1)} = \frac{10^4}{0,003 \cdot \ln(1/0,3)} = 2,77 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы по закону Ома:

$$E_t = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \frac{50}{\pi \cdot 0,003^2 \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ В/м.}$$

Вектор напряженности электрического поля \vec{E} составляет с нормалью к поверхности жилы угол α (рис. 22.3, б):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_t}{E_n} = 1,1 \cdot 10^{-7}.$$

Напряженность магнитного поля на поверхности жилы (по закону полного тока)

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{50}{2 \cdot \pi \cdot 0,003} = 2650 \text{ А/м.}$$

Для определения значения потока вектора Пойнтинга внутрь жилы на длине 1 м следует умножить составляющую вектора Пойнтинга $E_t H$, проникающую внутрь жилы, на размер боковой поверхности жилы на длине 1 м:

$$E_t H \cdot 2\pi r_1 \cdot 1 = 3,05 \cdot 10^{-2} \cdot 2650 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,003 \cdot 1 = 1,523 \text{ Вт.}$$

Эта величина равна потерям энергии в жиле кабеля на длине 1 м:

$$I^2 R = I^2 \frac{l}{\gamma S} = 50^2 \frac{1}{5,8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot 0,003^2} = 1,523 \text{ Вт.}$$

Пример 221. На рис. 22.4, а и б изображен сердечник трансформатора и один виток, окружающий сердечник. Концы витка обозначены а и б. Намагничивающая обмотка трансформатора на рисунке не показана. По сердечнику проходит синусоидально изменяющийся во времени магнитный поток $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$. Поток вне сердечника отсутствует. К концам витка а и б присоединим вольтметр электродинамической системы с сопротивлением R_V в одном случае в соответствии с рис. 22.4, а, в другом — в соответствии с рис. 22.4, б. Определим показание вольтметра в этих двух случаях, полагая, что активное сопротивление самого витка $R_b \ll R_V$ и что индуктивность рассеяния L_S витка ничтожно мала.

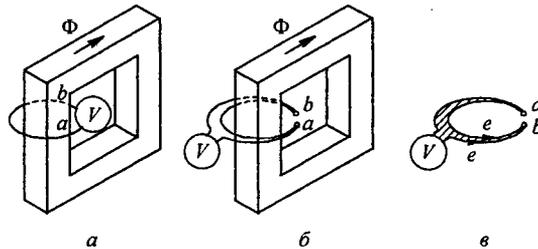


Рис. 22.4

Обозначим ток в контуре i и для рис. 22.4, а составим уравнение по второму закону Кирхгофа: $i R_b + i R_V + L_S \frac{di}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} = 0$.

Пренебрегая слагаемыми iR_a и $L_s \frac{di}{dt}$ по сравнению с iR_V и $\frac{d\Phi}{dt}$, обозначив $I R_V = U_V$, найдем показание вольтметра в схеме рис. 22.4, а: $U_V = \omega \Phi_m / \sqrt{2}$. В схеме рис. 22.5, б вольтметр покажет нуль. Это можно пояснить двояко.

1. Провода, идущие от точек а и б витка к вольтметру на рис. 22.4, б образуют второй виток, в котором изменяющимся магнитным потоком наводится такая же ЭДС, что и в основном витке (см. рис. 22.4, в). При обходе контура, состоящего из двух витков, убеждаемся, что суммарная ЭДС в контуре равна нулю.

2. Такой же вывод сделаем, если учтем, что суммарный поток, пронизывающий заштрихованную площадь контура рис. 22.4, в, равен нулю (поток вне сердечника по условию отсутствует).

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что при измерениях в переменном электромагнитном поле показание вольтметра зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения.

§ 22.7. Теорема Умова—Пойнтинга в комплексной форме записи. Перед тем как записать теорему Умова—Пойнтинга в комплексной форме, рассмотрим вопрос о полной мощности в цепи переменного тока. Полная мощность $\tilde{S} = \dot{U} \dot{I} = P + jQ$. Знак * означает, что комплекс сопряженный.

Пусть цепь переменного тока содержит последовательно соединенные активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Тогда реактивная мощность

$$Q = I^2 X = I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \omega \left[I^2 L - I^2 \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 C \right] = 2 \omega (w_m - w_3).$$

Здесь

$$w_m = \frac{L I^2}{2} \quad \text{и} \quad w_3 = \frac{C U_C^2}{2},$$

где U_C — напряжение на конденсаторе.

Таким образом, реактивная мощность Q равна разности между магнитной w_m и электрической w_3 энергиями цепи, умноженной на 2ω . В цепи переменного тока для вычисления полной мощности \tilde{S} надо умножить комплекс напряжения \dot{U} на сопряженный комплекс тока \dot{I} . Подобно этому в данном случае вводится в употребление комплексный вектор Пойнтинга $\tilde{\Pi} = [\tilde{E} \tilde{H}]$. Вместо $-\oint \tilde{\Pi} d\tilde{S}$ теперь будет

$$-\oint \tilde{\Pi} d\tilde{S} = - \int_V \text{div} \tilde{\Pi} dV = \int_V (\dot{\tilde{E}} \text{rot} \dot{\tilde{H}} - \dot{\tilde{H}} \text{rot} \dot{\tilde{E}}) dV.$$

В соответствии с (22.6) и (22.7)

$$\text{rot} \dot{\tilde{H}} = \gamma \dot{\tilde{E}} + j \omega \epsilon_a \dot{\tilde{E}}, \quad \text{rot} \dot{\tilde{E}} = -j \omega \mu_a \dot{\tilde{H}}.$$

Следовательно, $\text{rot} \dot{\tilde{H}} = \gamma \dot{\tilde{E}} - j \omega \epsilon_a \dot{\tilde{E}}$ и

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{E}} \text{rot} \dot{\tilde{H}} - \text{rot} \dot{\tilde{E}} \dot{\tilde{H}} &= \gamma \dot{\tilde{E}} \dot{\tilde{E}} - j \omega \epsilon_a \dot{\tilde{E}} \dot{\tilde{E}} + j \omega \mu_a \dot{\tilde{H}} \dot{\tilde{H}} = \\ &= \gamma E^2 + 2j \omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$-\oint \tilde{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + 2j\omega \int_V \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (22.13)$$

Первое слагаемое правой части (22.13) представляет собой активную мощность, второе — реактивную. Таким образом, теорему Умова—Пойнтинга можно записать еще следующим образом: $-\oint \tilde{\Pi} d\vec{S} = P + jQ$.

В таком виде ее часто используют для определения активного и внутреннего реактивного сопротивления проводников на переменном токе (подробнее см. § 23.7).

§ 22.8. Зависимость параметров вещества от частоты. В уравнения Максвелла входят параметры ϵ_a , γ , μ_a , характеризующие усредненные в пространстве и во времени свойства вещества. При низких частотах эти параметры представляют собой действительные (некомплексные) числа — такими в основном и будем их считать в курсе ТОЭ. При высоких частотах в диэлектриках существенную роль начинают играть диэлектрическая вязкость и другие процессы.

В ферромагнитных веществах резко сказываются явления гистерезиса, магнитной вязкости и ряд других. В силу этих причин ϵ_a , γ и μ_a оказываются функциями частоты и комплексными величинами^{*)}.

Убедимся в том, что вязкостные процессы при поляризации диэлектриков с полярными молекулами приводят к тому, что ϵ_a становится комплексным числом.

Обозначим через $E_{\text{п}}$ напряженность поля, обусловленную приложенным к конденсатору напряжением u ; например, для плоского конденсатора с расстоянием d между обкладками $u = E_{\text{п}} d$; $E_{\text{д}}$ — действующая на диполи полярных молекул напряженность поля, вызывающая их поворот.

За счет вязкостных процессов при поляризации (повороте) полярных молекул $E_{\text{д}} < E_{\text{п}}$ на величину, пропорциональную скорости поляризации:

$$E_{\text{д}} = E_{\text{п}} - k_1 \frac{dP}{dt}, \quad (22.14)$$

где k_1 — некоторый коэффициент.

Но $P = k_2 E_{\text{д}}$, поэтому $E_{\text{д}} = E_{\text{п}} + k dE_{\text{д}}/dt = E_{\text{п}}$, где $k = k_1 k_2$. При нулевых начальных условиях $E_{\text{д}} = E_{\text{п}} (1 - e^{-t/k})$. Коэффициент k называют *постоянной времени релаксации*.

При переменном токе частотой ω :

$$\dot{E}_{\text{д}} = \frac{\dot{E}_{\text{п}}}{1 + j\omega k}; \quad \dot{P} = k_2 \dot{E}_{\text{д}}; \quad \dot{D} = \epsilon_0 \dot{E}_{\text{п}} + \dot{P} = \dot{E}_{\text{п}} \frac{\epsilon_0 (1 + j\omega k) + k_2}{1 + j\omega k}.$$

^{*)} Зависимость параметров веществ от частоты впервые была обнаружена русским ученым В.К. Аркадьевым в 1908–1911 гг. Физическое объяснение этим явлениям было дано им в 1913 г. в работе «Теория электромагнитного поля в ферромагнитном металле».

Комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\tilde{\epsilon}_a = \frac{\dot{D}}{\dot{E}_n} = \epsilon'_a - j \epsilon''_a; \quad \epsilon'_a = \frac{\epsilon_0 + k_2 + \omega^2 k^2 \epsilon_0}{1 + (\omega k)^2}; \quad \epsilon''_a = \frac{\omega k k_2}{1 + (\omega k)^2}.$$

Из формул видно, что ϵ'_a и ϵ''_a являются функциями частоты. Примерный вид зависимости ϵ'_a и ϵ''_a от частоты показан на рис. 22.5, а и б; на рис. 22.5, а приведена зависимость для однокомпонентного диэлектрика, на рис. 22.5, б — для композита.

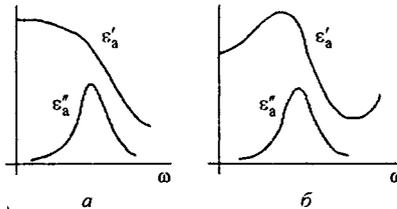


Рис. 22.5

Мгновенное значение плотности тока через диэлектрик, у которого проводимость $\gamma = 0$, $\bar{\delta}_{cm} = \partial \bar{D} / \partial t$. При переменном токе частотой ω :

$$\dot{\delta}_{cm} = j \omega \dot{D} = j \omega \dot{E}_n (\epsilon'_a - j \epsilon''_a) = \omega \dot{E}_n (\epsilon''_a + j \epsilon'_a).$$

Мгновенное значение полной плотности тока через несовершенный диэлектрик ($\gamma \neq 0$):

$$\dot{\delta}_n = \gamma \dot{E}_n + \partial \dot{D} / \partial t.$$

При переменном токе частотой ω :

$$\dot{\delta} = (\gamma + \omega \epsilon''_a) \dot{E}_n + j \omega \epsilon'_a \dot{E}_n.$$

Первое слагаемое правой части находится в фазе с приложенным напряжением, второе на 90° его опережает.

Тангенс угла потерь несовершенного диэлектрика (см. § 3.9)

$$\text{tg } \alpha = (\epsilon''_a + \gamma / \omega) / \epsilon'_a.$$

Если учесть гистерезисные и вязкостные процессы, а также наличие вихревых токов в ферромагнетиках, то можно вывести аналогичные формулы и для комплексной магнитной проницаемости и получить формулу $\tilde{\mu} = \mu' - j \mu''$.

Заметим, что дифференциальное уравнение, описывающее процесс зарядки конденсатора с вязким диэлектриком через резистор сопротивлением R от источника постоянной ЭДС, если учесть вязкостные процессы по уравнению (22.14), будет иметь второй (не первый!) порядок.

§ 22.9. Запись уравнений Максвелла с учетом тока переноса. В § 22.2 рассматривалось первое уравнение Максвелла (22.1). В правой части этого уравнения записаны две плотности тока — проводимости $\bar{\delta}$ и электрического смещения $\partial \bar{D} / \partial t$. Но кроме токов проводимости и элек-

трического смещения существует третий вид тока — ток переноса (это собирательное название).

Под *током переноса* понимают ток, природа которого отлична от природы тока проводимости и тока смещения. Это, например, ток, возникающий в электронной лампе вследствие термоэлектронной эмиссии.

Плотность тока переноса равна объемной плотности переносимых зарядов ρ , умноженной на скорость их переноса \bar{v} .

Если ток переноса создается движением со скоростью \bar{v}_+ положительно заряженных частиц с объемной плотностью ρ_+ и движущихся со скоростью \bar{v}_- отрицательно заряженных частиц с объемной плотностью ρ_- , то плотность тока переноса равна $\rho_+ \bar{v}_+ + \rho_- \bar{v}_-$. Ток переноса, так же как и остальные виды токов, создает магнитное поле.

С учетом тока переноса первое уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \rho \bar{v}.$$

Для тех задач, которые рассматриваются в ч. III учебника, ток переноса отсутствует, поэтому первое уравнение Максвелла и взято в форме (22.1).

§ 22.10. Зависимость между \bar{B} и \bar{H} , \bar{D} и \bar{E} , $\bar{\delta}$ и \bar{E} в анизотропных средах. В курсе ТОЭ в основном рассматривают поля в изотропных линейных средах. В них вектор $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$ совпадает по направлению с вектором \bar{H} , вектор $\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$ — с вектором \bar{E} и вектор $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$ — с вектором \bar{E} .

В *изотропных средах* μ_a , ϵ_a и γ представляют собой некоторые постоянные числа, не зависящие от H или E (но зависящие от частоты). Если проекции вектора \bar{B} на оси x , y , z обозначить соответственно B_x , B_y , B_z , а проекции вектора \bar{H} — H_x , H_y , H_z , то для изотропных сред

$$B_x = \mu_a H_x, \quad B_y = \mu_a H_y, \quad B_z = \mu_a H_z.$$

Аналогично

$$D_x = \epsilon_a E_x, \quad D_y = \epsilon_a E_y, \quad D_z = \epsilon_a E_z,$$

$$\delta_x = \gamma E_x \text{ и т. д.}$$

В *анизотропных средах* $\bar{B} = \bar{\mu}_a \bar{H}$ не совпадает по направлению с \bar{H} , \bar{D} — с \bar{E} , $\bar{\delta}$ — с \bar{E} . Любая проекция \bar{B} , \bar{D} и $\bar{\delta}$ зависит не только от одноименной проекции \bar{H} или \bar{E} , но и от разноименных проекций. Так, B_x зависит не только от H_x , но и от H_y и H_z ; аналогично

$$B_y = \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z,$$

где μ_{yx} , μ_{yy} , μ_{yz} — составляющие тензора магнитной проницаемости $\bar{\mu}_a$:

$$\vec{\mu}_a = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

Подобные выражения существуют и для тензоров $\vec{\epsilon}_a$ и $\vec{\gamma}$.

§ 22.11. Основные положения электродинамики движущихся сред (основы релятивистской электродинамики). Положим, что имеются две системы отсчета координат и времени. Одна система неподвижна, имеет начало в точке O , координаты произвольной точки в ней x, y, z и время t (система O). Другая система отсчета связана с движущейся по отношению к предыдущей системе отсчета средой, имеет начало в точке O_1 , а координаты той же точки в ней x_1, y_1, z_1 и времени t_1 (система O_1).

Допустим, что в момент времени $t = 0$ обе системы координат совпадают и скорость движения среды \vec{v} направлена по оси x . Тогда в соответствии с теорией относительности можно записать преобразования Лоренца, связывающие координаты и время в обеих системах отсчета:

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y_1 = y; \quad z_1 = z; \quad t_1 = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (22.15)$$

где c — скорость света, $\beta = v/c$.

Обозначим напряженность электрического поля и магнитную индукцию в произвольной точке, которые бы измерил наблюдатель, неподвижный по отношению к системе O , соответственно \vec{E} и \vec{B} . Физически \vec{E} означает силу, действующую на единичный покоящийся заряд в системе O , а \vec{B} — силу, действующую на единичный элемент тока, неподвижный в системе O :

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z; \quad \vec{B} = \vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z.$$

Напряженность электрического поля и магнитную индукцию, которые бы измерил наблюдатель, неподвижный по отношению к системе O_1 (т. е. движущийся со средой со скоростью \vec{v}), обозначим \vec{E}_1 и \vec{B}_1 . Физически \vec{E}_1 означает силу, действующую на единичный покоящийся в системе O_1 заряд; B_1 — силу, действующую на единичный элемент тока, покоящийся в движущейся среде:

$$\vec{E}_1 = \vec{i} E_{x1} + \vec{j} E_{y1} + \vec{k} E_{z1}; \quad \vec{B}_1 = \vec{i} B_{x1} + \vec{j} B_{y1} + \vec{k} B_{z1}.$$

Перейдем от уравнений Максвелла для неподвижных сред к уравнениям Максвелла для движущихся сред. С этой целью частные производные по x, y, z при взятии ротора и дивергенции и частные производные по t заменим частными производными по x_1, y_1, z_1 и по времени t_1 , имея в виду, что в соответствии с (22.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \right); & \frac{\partial}{\partial t} &= \alpha \left(-v \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t_1} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x_1} &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right); & \frac{\partial}{\partial t_1} &= \alpha \left(v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial y}; & \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{\partial}{\partial z}; & \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

После раскрытия ротора и объединения членов с одинаковыми ортами в первом уравнении Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \partial \vec{D} / \partial t$, получим

$$\text{rot } \vec{H}_1 = \vec{\delta}_1 + \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t}. \quad (22.16)$$

Проекции векторов на координатные оси в обеих системах отсчета связаны соотношениями:

$$H_{x1} = H_x; \quad H_{y1} = \alpha (H_y + v D_z); \quad H_{z1} = \alpha (H_z - v D_y); \quad (22.17)$$

$$\bar{\delta}_1 = \bar{i} \delta_{x1} + \bar{j} \delta_{y1} + \bar{k} \delta_{z1}; \quad \delta_{x1} = \alpha (\delta_x - \rho v); \quad \delta_{y1} = \delta_y; \quad \delta_{z1} = \delta_z; \quad (22.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}_1 &= \bar{i} D_{x1} + \bar{j} D_{y1} + \bar{k} D_{z1}; \\ D_{x1} &= D_x; \quad D_{y1} = \alpha \left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right); \quad D_{z1} = \alpha \left(D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right). \end{aligned} \right\} \quad (22.19)$$

Аналогичные преобразования второго уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \text{rot } \bar{E}_1 = -\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial t} \quad (22.20)$$

дают связь между проекциями векторов:

$$E_{x1} = E_x; \quad E_{y1} = \alpha (E_y - v B_z); \quad E_{z1} = \alpha (E_z + v B_y); \quad (22.21)$$

$$B_{x1} = B_x; \quad B_{y1} = \alpha \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right); \quad B_{z1} = \alpha \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right). \quad (22.22)$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла в системе O_1 имеют вид:

$$\text{div } \bar{D}_1 = \rho_1; \quad (22.23)$$

$$\text{div } \bar{B}_1 = 0. \quad (22.24)$$

Здесь

$$\rho_1 = \alpha \left(\rho - \frac{v}{c^2} \delta_x \right). \quad (22.25)$$

Обратим внимание еще раз на то, что в системе O_1 операции дифференцирования при взятии ротора и дивергенции производят по координатам x_1, y_1, z_1 .

В системе O_1 , для которой среда неподвижна, выполняется условие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности E_{t1} , тангенциальной составляющей H_{t1} и непрерывность нормальных составляющих D_{n1} и B_{n1} .

В системе O_1 :

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{B}_1}{\mu_0} - \bar{H}_1; \quad \bar{P}_1 = \bar{D}_1 - \epsilon_0 \bar{E}_1. \quad (22.26)$$

В системе O :

$$\bar{J} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{H}; \quad \bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0 \bar{E}. \quad (22.27)$$

Здесь \bar{J}, \bar{J}_1 — намагниченность и \bar{P}, \bar{P}_1 — поляризованность в системах O и O_1 соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \bar{J} &= \bar{i} J_x + \bar{j} J_y + \bar{k} J_z; & \bar{J}_1 &= \bar{i} J_{x1} + \bar{j} J_{y1} + \bar{k} J_{z1}; \\ \bar{P} &= \bar{i} P_x + \bar{j} P_y + \bar{k} P_z; & \bar{P}_1 &= \bar{i} P_{x1} + \bar{j} P_{y1} + \bar{k} P_{z1}. \end{aligned} \right\}$$

Используя уравнения (22.17), (22.19), (22.21), получим связи между проекциями векторов намагниченности и поляризованности в системах O и O_1 :

$$\left. \begin{aligned} J_{x1} &= J_x; & J_{y1} &= \alpha (J_y + v P_z); & J_{z1} &= \alpha (J_z - v P_y); \\ P_{x1} &= P_x; & P_{y1} &= \alpha \left(P_y - \frac{v}{c^2} P_z \right); & P_{z1} &= \alpha \left(P_z + \frac{v}{c^2} P_y \right). \end{aligned} \right\} \quad (22.28)$$

Из уравнений (22.17) и (22.22) следует, что если в системе O магнитное поле отсутствует ($B = 0$), но имеется электрическое ($E \neq 0$), то в системе O_1 имеется не только электрическое, но и магнитное поле. Из уравнений (22.19) и (22.21) заключаем, что если в

системе O отсутствует электрическое поле, но есть магнитное, то в системе O_1 наблюдается не только магнитное, но и электрическое поле.

Плотность тока $\vec{\delta}_1$ в системе O_1 создается не только током проводимости $\vec{\delta}$, но и током переноса $\alpha v \rho$ [см. уравнение (22.18)].

В соответствии с уравнением (22.25) перемещение тока плотностью δ_x параллельно самому себе в системе O_1 наблюдатель в системе O воспринимает, как возникновение объемного заряда $\frac{v}{c} \delta_x$, *дополнительного к объемной плотности зарядов* ρ_1 . В соответствии с уравнением (22.28) движение поляризованной среды со скоростью v воспринимается в системе O как появление *дополнительной намагниченности*, а движение намагниченной среды со скоростью v — как возникновение *дополнительной поляризованности*.

Для поля, связанного с системами O и O_1 , имеют место следующие инварианты:

$$\frac{E_1^2}{c} - B_1^2 = \frac{E^2}{c} - B^2; \quad \vec{E}_1 \vec{B}_1 = \vec{E} \vec{B}; \quad D_1^2 - \frac{H_1^2}{c} = D^2 - \frac{H^2}{c}; \quad \vec{D}_1 \vec{H}_1 = \vec{D} \vec{H}.$$

Если скорость движения среды мала по сравнению со скоростью света, то $v^2/c^2 \ll 1$; $\alpha \approx 1$, при этом преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея: $x_1 = x - vt$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $t_1 = t$, а связи между величинами в системах O и O_1 становятся такими:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]; & \vec{B}_1 &= \vec{B} - \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2}; & \vec{H}_1 &= \vec{H} - [\vec{v} \vec{D}]; & \vec{D}_1 &= \vec{D} + \frac{[\vec{v} \vec{H}]}{c^2}; \\ \vec{\delta}_1 &= \vec{\delta} - \vec{v} \rho; & \rho_1 &= \rho - \frac{\vec{v} \vec{\delta}}{c^2}; & \vec{J}_1 &= \vec{J} + [\vec{v} \vec{P}]; & \vec{P}_1 &= \vec{P} - \frac{[\vec{v} \vec{J}]}{c^2}. \end{aligned}$$

§ 22.12. Уравнения Максвелла в симметричной форме. Для неподвижных тел и сред уравнения Максвелла записывают еще в иной, чем в § 22.1–22.4 форме, вводя в них объемную плотность магнитного заряда ρ_m (оставляя открытым вопрос о его существовании) и плотность магнитного тока проводимости $\vec{\delta}_m$. Тогда уравнения будут выглядеть симметрично:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \tag{а}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\vec{\delta}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \tag{б}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho; \tag{в}$$

$$\text{div } \vec{B} = \rho_m. \tag{г}$$

Взяв дивергенцию от уравнения (б), получим уравнение непрерывности

$$\text{div } \vec{\delta}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}. \tag{д}$$

Плотность магнитного тока $\vec{\delta}_m$ пропорциональна напряженности магнитного поля: $\vec{\delta}_m = \gamma_m \vec{H}$, γ_m — магнитная проводимость (не проницаемость); $[\gamma_m] = \text{В}/\text{А}_m$.

Магнитный заряд выражают в вольт-секундах, плотность магнитного заряда ρ_m — в вольт-секундах на метр в кубе, магнитный ток i_m — в вольтах, слагасмос $\partial \vec{B} / \partial t$ можно рассматривать как плотность магнитного тока смещения (по аналогии со слагасмым $\partial \vec{D} / \partial t$, являющимся электрическим током смещения); $[\vec{\delta}_m] = \text{В}/\text{м}^2$.

Уравнения Максвелла в симметричной форме и связанные с ними понятия магнитных зарядов, магнитных токов проводимости, магнитных токов смещения в данном учебнике использованы при рассмотрении следующих вопросов: теории магнитных линий с распределенными параметрами на синусоидальном токе (§ 14.24), потребовавшей введения таких новых понятий, как магнитная емкость и магнитная индуктивность для магнитного потока; задачи о электромагнитном излучении из щели в стенке прямоугульн ого волновода (§ 26.2); второго метода интегральных уравнений [10], в котором в качестве вторичных источников поля приняты магнитные заряды и магнитные токи.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение переменного электромагнитного поля и запишите совокупность уравнений Максвелла. 2. Какими атрибутами, присущими материи, обладает электромагнитное поле? 3. Сформулируйте и запишите математически принцип непрерывности полного тока. 4. Покажите, что из первого уравнения Максвелла следует принцип непрерывности магнитной индукции. 5. Чем объяснить, что во втором уравнении Максвелла, в отличие от первого, поставлен знак минус? 6. Какие уравнения в интегральной форме соответствуют первому и второму уравнениям Максвелла? 7. Установите связь закона электромагнитной индукции с законом Ленца. 8. Прокомментируйте теорему Умова—Пойнтинга для мгновенных значений величин и для величин в комплексной форме записи. 9. Как формируется комплексный вектор Пойнтинга? Каков смысл знака минус в левой части записи теоремы Умова—Пойнтинга? 10. Можно ли утверждать, что при постоянном токе

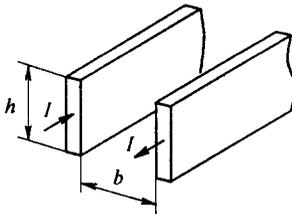


Рис. 22.6

электромагнитная энергия передается по проводам? 11. Поясните смысл преобразования, осуществляемого с помощью теоремы Остроградского—Гаусса. 12. Чем объяснить, что показание вольтметра в переменном электромагнитном поле зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения? 13. Поясните, в силу каких причин ϵ_a , γ и μ_a могут оказаться комплексными числами. 14. Какие среды называют анизотропными? 15. Назовите анизотропные проводящие, магнитные, диэлектрические среды. 16. Две металлические плоские шины рис. 22.6 высотой h расположены в диэлектрике на расстоянии b ($b \ll h$) и служат прямым и обратным проводами, по которым проходит постоянный ток I при напряжении U . Покажите, что поток вектора Пойнтинга в направлении шин (в пространстве между ними) через поперечное сечение диэлектрика равен UI . 17. Изменится ли магнитное поле вне цилиндрического постоянного магнита, если его начать вращать вокруг его продольной оси? 18. Решите задачи 22.2; 22.9; 22.11; 22.12.

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 23.1. Уравнения Максвелла для проводящей среды. Рассмотрим особенности распространения электромагнитной волны в проводящей среде с проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ_a .

Обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени E и H :

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j \omega \epsilon_a \dot{\vec{E}} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j \omega \mu_a \dot{\vec{H}}.$$

В проводящей среде даже при очень высоких частотах произведение $\omega \epsilon_a$ много меньше проводимости γ . Поэтому с большой степенью точности слагаемым $j \omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}$ в первом уравнении Максвелла для проводящих сред можно пренебречь.

Таким образом, первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}}; \tag{23.1}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j \omega \mu_a \dot{\vec{H}}. \tag{23.2}$$

Эти два уравнения представляют собой уравнения с двумя неизвестными $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$. Решим их совместно. С этой целью возьмем ротор от уравнения (23.1): $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{H}} - \nabla^2 \dot{\vec{H}} = \gamma \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}$.

Учтем, что $\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0$, и поэтому $\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0$. Вместо $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}$ в соответствии с (23.2) подставим $-j \omega \mu_a \dot{\vec{H}}$. Получим

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = j \omega \gamma \mu_a \dot{\vec{H}}. \tag{23.3}$$

Уравнение (23.3) является дифференциальным относительно $\dot{\vec{H}}$. В общем случае, когда $\dot{\vec{H}}$ зависит от всех трех или даже только от двух координат, решение уравнения (23.3) довольно сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением его решения для частных случаев — для плоской и цилиндрической электромагнитных волн.

§ 23.2. Плоская электромагнитная волна. В общем случае под *плоской электромагнитной волной* понимают волну, векторы \vec{E} и \vec{H} которой расположены в плоскости xOy , перпендикулярной направлению распространения волны (ось z), и изменяются только в функции координаты z и времени t . В дальнейшем под плоской волной будем понимать *плоскую линейно поляризованную* волну, в которой вектор \vec{E} направлен

вдоль одной, а вектор \vec{H} — вдоль другой координатной оси плоскости xOy . Плоская линейно поляризованная волна показана на рис. 23.1. На

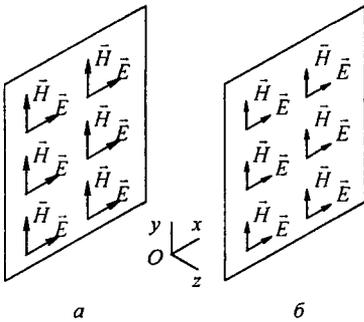


Рис. 23.1

рисунке изображены для одного и того же момента времени векторы \vec{E} и \vec{H} в двух параллельных плоскостях, перпендикулярных оси z декартовой системы координат. Во всех точках первой плоскости (рис. 23.1, а) напряженность электрического (магнитного) поля одинакова по значению и направлению. Во всех точках второй плоскости (рис. 23.1, б) напряженность электрического (магнитного) поля также одинакова по значению и направлению, но не равна напряженности поля в первой

плоскости. В силу определения плоской волны:

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \dot{E}}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \dot{E}}{\partial y} = 0.$$

В плоской волне \dot{E} и \dot{H} являются функциями только одной координаты, в рассматриваемом случае — функцией только z .

Повернем координатные оси таким образом, чтобы ось y совпала с напряженностью магнитного поля \vec{H} . При этом $\vec{H} = \vec{j} \dot{H}$, где \vec{j} — единичный орт оси y декартовой системы координат. Подставим $\vec{H} = \vec{j} \dot{H}$ в уравнение (23.3) и раскроем ∇^2 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{j} \dot{H} = j \omega \gamma \mu_a \vec{i} \dot{H}. \quad (23.4)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j \omega \gamma \mu_a \dot{H}. \quad (23.5)$$

В уравнении (23.5) вместо частной написана обыкновенная производная. Переход от частной производной к обыкновенной для плоской волны является естественным, так как \dot{H} — это функция только одной переменной z . Уравнение (23.5) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение записывают следующим образом:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{Pz} + \dot{C}_2 e^{-Pz}, \quad (23.6)$$

где \dot{C}_1 и \dot{C}_2 — постоянные интегрирования; это комплексы, которые определяют из граничных условий; для каждой конкретной задачи свои

постоянные. Из характеристического уравнения $p^2 = j \omega \gamma \mu_a$ найдем постоянную распространения

$$p = \sqrt{j \omega \gamma \mu_a}. \quad (23.7)$$

Если γ выражено в ом-метрах в минус первой степени $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, μ_a — в генри на метр $(\text{Гн}/\text{м})$, то постоянная распространения p выражается в метрах в минус первой степени (м^{-1}) . Так как

$$\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = (1 + j)/\sqrt{2},$$

то p можно представить и так:

$$p = k(1 + j), \quad (23.8)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}}. \quad (23.9)$$

Найдем напряженность электрического поля с помощью уравнений (23.1) и (23.6). Из (23.1) следует, что $\dot{\vec{E}} = \frac{1}{\gamma} \text{rot } \dot{\vec{H}}$.

Найдем $\text{rot } \dot{\vec{H}}$. В соответствии с уравнением (21.6) (учитывая, что $\partial \dot{H} / \partial x = \partial \dot{H} / \partial y = 0$) имеем

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \right). \quad (23.10)$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right). \quad (23.10a)$$

Производная

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} = p(\dot{C}_1 e^{pz} - \dot{C}_2 e^{-pz}). \quad (23.11)$$

Выражение (23.10a) показывает, что напряженность электрического поля в плоской волне при выбранном расположении осей координат направлена вдоль оси x , об этом свидетельствует присутствие единичного орта оси x (орта \vec{i}). Таким образом, в плоской электромагнитной волне между $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ есть пространственный сдвиг в 90° ($\dot{\vec{E}}$ направлено по оси x , а $\dot{\vec{H}}$ — по оси y).

Частное от деления p на γ принято называть *волновым сопротивлением*:

$$Z_w = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{j45^\circ}. \quad (23.12)$$

Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$, измеряемое в омах, зависит от свойств среды (от γ и μ_a) и угловой частоты ω . В соответствии с (23.10а) и (23.11) проекция \vec{E} на ось x равна

$$\dot{E} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}},$$

где

$$\dot{E}_{\text{пад}} = Z_{\text{в}} \dot{C}_2 e^{-\rho z} \quad \text{и} \quad \dot{E}_{\text{отр}} = -Z_{\text{в}} \dot{C}_1 e^{\rho z}.$$

Проекция \vec{H} на ось y в соответствии с (21.6):

$$\dot{H} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}},$$

где

$$\dot{H}_{\text{пад}} = \dot{C}_2 e^{-\rho z} \quad \text{и} \quad \dot{H}_{\text{отр}} = \dot{C}_1 e^{\rho z}.$$

Компоненты падающей волны $\vec{E}_{\text{пад}}$ и $\vec{H}_{\text{пад}}$ определяют вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}_{\text{пад}}$ (рис. 23.2, а), направленный вдоль положительного направления оси z . Следовательно, движение энергии падающей волны происходит вдоль положительного направления оси z . Компоненты отраженной волны $\vec{E}_{\text{отр}}$ и $\vec{H}_{\text{отр}}$ определяют вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}_{\text{отр}}$ (рис. 23.2, б), направленный вдоль отрицательного направления оси z . Это означает, что отраженная волна несет с собой энергию вдоль отрицательного направления оси z . Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ можно трактовать как отношение $\dot{E}_{\text{пад}} / \dot{H}_{\text{пад}}$. Волновое сопротивление является числом комплексным

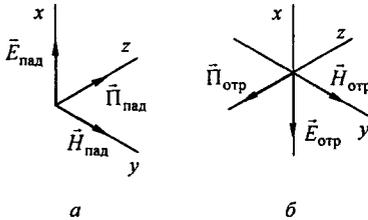


Рис. 23.2

является числом комплексным [см. формулу (23.12)] и имеет аргумент 45° , поэтому сдвиг во времени между $\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{H}_{\text{пад}}$ для одной и той же точки поля тоже равен 45° .

§ 23.3. Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве. Рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородной проводящей среде, простирающейся теоретически в бесконечность (рис. 23.3).

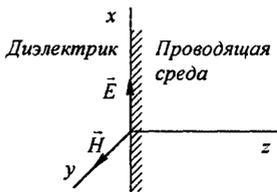


Рис. 23.3

Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в проводящую среду и распространяется в ней. Так как среда простирается теоретически в бесконечность и падающая волна в толще проводящей среды не встречает границы, которая «возмутила» бы ее распространение, то отраженная волна в данном случае не возникает.

При наличии только одной падающей волны $\dot{H} = \dot{C}_2 e^{-\rho z}$ и $\dot{E} = Z_{\text{в}} \dot{C}_2 e^{-\rho z}$. Постоянную интегрирования \dot{C}_2 найдем из граничных

^{*)} Отношение $\dot{E}_{\text{отр}}$ к $\dot{H}_{\text{отр}}$ также равно $Z_{\text{в}}$.

условий. Если обозначить напряженность магнитного поля на поверхности проводящей среды через $\dot{H}_a = H_a e^{j\psi_a}$, то при $z=0$ $\dot{C}_2 = \dot{H}_a$. Поэтому с учетом (23.8)

$$\dot{H} = H_a e^{-kz} e^{jkz} e^{j\psi_a}. \quad (23.13)$$

В свою очередь

$$\dot{E} = H_a e^{-kz} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-jkz} e^{j\psi_a} e^{j45^\circ}. \quad (23.14)$$

Чтобы записать выражения для мгновенных значений H и E , необходимо правые части (23.13) и (23.14) умножить на $e^{j\omega t}$ и взять мнимые части от получившихся произведений. Тогда получим:

$$\dot{H} = H_a e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a) \quad (23.15)$$

и

$$\dot{E} = H_a \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45^\circ). \quad (23.16)$$

Проанализируем эти выражения. Амплитуда $H = H_a e^{-kz}$; амплитуда $E = H_a \sqrt{\omega \mu_a / \gamma} e^{-kz}$. С увеличением z множитель e^{-kz} уменьшается по показательному закону. Следовательно, по мере проникновения электромагнитной волны в проводящую среду амплитуды E и H уменьшаются по показательному закону. На рис. 23.4 изображены огибающие амплитуд H , построенные на основе $H_a e^{-kz}$. Мгновенное значение H и E определяется аргументом синуса, который в выражении (23.15), например, зависит от z и ωt . Если принять $\omega t = \text{const}$, то на графике мгновенных значений H в функции от z будет получена кривая 1 (см. рис. 23.4) при $\omega t + \psi_a = 0$ и кривая 2 при $\omega t + \psi_a = 90^\circ$.

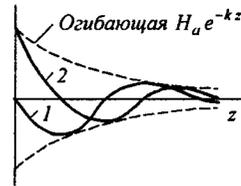


Рис. 23.4

Для того чтобы охарактеризовать, насколько быстро уменьшается амплитуда падающей волны по мере проникновения волны в проводящую среду, вводят понятие «глубина проникновения».

§ 23.4. Глубина проникновения и длина волны. Под *глубиной проникновения* Δ понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором амплитуда падающей волны E (или H) уменьшается в $e = 2,71$ раз. Глубину проникновения определяют с помощью выражения $e^{-k\Delta} = e^{-1}$. Отсюда следует, что $k\Delta = 1$ или

$$\Delta = 1/k. \quad (23.17)$$

Глубина проникновения зависит от свойств проводящей среды (γ и μ_r) и частоты ω . Так, если электромагнитная волна имеет частоту $f = 5000$ Гц и проникает в проводящую среду, у которой

$\gamma = 10^7$ (Ом·м)⁻¹ и $\mu_r = 10^3$, то^{*)}

$$k = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot 5000 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7}{2}} = 14100 \text{ м}^{-1}.$$

Глубина проникновения $\Delta = 1/k \approx 7 \cdot 10^{-5}$ м, т. е. на расстоянии в 0,007 см амплитуды H и E снизились в 2,71 раза.

Под *длиной волны* λ в проводящей среде понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором фаза колебания изменяется на 2π . Длину волны определяют из уравнения $\lambda k = 2\pi$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (23.18)$$

Для рассмотренного числового примера

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{14100} \approx 0,000445 \text{ м}.$$

Познакомимся с понятием фазовой скорости распространения электромагнитной волны в проводящей среде.

Под *фазовой скоростью* понимают скорость, с которой надо бы перемещаться вдоль оси z , чтобы колебание имело одну и ту же фазу. Фаза колебания определяется выражением $\omega t - k z + \psi_a$.

Производная от постоянной есть нуль, поэтому $\frac{d}{dt}(\omega t - k z + \psi_a) = 0$, или

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}}; \quad v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad (23.19)$$

Для рассмотренного числового примера $v_{\text{фаз}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5000}{14100} \approx 2,25$ м/с.

§ 23.5. Магнитный поверхностный эффект. В качестве примера распространения плоских электромагнитных волн в проводящей среде рассмотрим поле в стальном листе при прохождении вдоль листа переменного магнитного потока Φ_m .

Лист (рис. 23.5) имеет толщину $2a$, высоту h ($h \gg 2a$) и большую протяженность в направлении, перпендикулярном рисунку. Средняя плотность магнитного потока по сечению листа $B_{\text{ср}} = \Phi_m / (2ah)$.

Задача состоит в определении законов изменения H и E по сечению листа.

В силу симметрии напряженность магнитного поля на левой поверхности листа та же, что и на его правой поверхности. Обозначим ее через H_a и будем полагать известной (в дальнейшем выразим ее через $B_{\text{ср}}$).

^{*)} Полагаем, что μ_a не зависит от величины H . Решение, в котором учтено, что μ_a является функцией величины H , дано в [11].

Так как толщина листа $2a$ много меньше высоты листа h , то искажающим влиянием краев листа на поле можно в первом приближении пренебречь и считать, что в лист с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна.

Расположим оси координат декартовой системы в соответствии с рис. 23.5. Примем, как и прежде, $\dot{\vec{H}} = \vec{j} \dot{H}$. Общее решение для \dot{H} таково:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}.$$

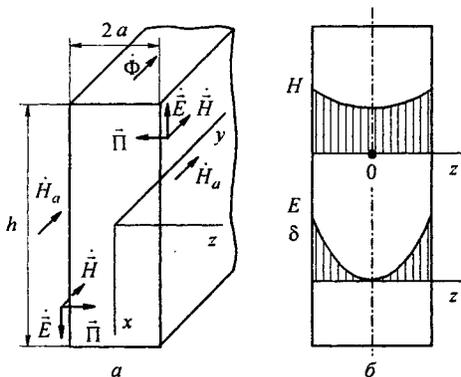


Рис. 23.5

Из граничных условий найдем постоянные интегрирования. При $z = -a$, т. е. для точек, находящихся на левой стороне листа,

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa}; \tag{23.20}$$

при $z = +a$

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{pa} + \dot{C}_2 e^{-pa}. \tag{23.21}$$

Совместное решение (23.20) и (23.21) относительно \dot{C}_1 и \dot{C}_2 дает

$$\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \frac{\dot{H}_a}{e^{pa} + e^{-pa}} = \frac{\dot{H}_a}{2 \operatorname{ch} pa}.$$

Следовательно, в произвольной точке

$$\dot{H} = \frac{\dot{H}_a}{2 \operatorname{ch} pa} (e^{pz} + e^{-pz}) = \dot{H}_a \frac{\operatorname{ch} pz}{\operatorname{ch} pa}. \tag{23.22}$$

Напряженность электрического поля

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right) = -\vec{i} \left(\frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa} \right) = -\vec{i} \dot{E},$$

где

$$\dot{E} = \frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa}. \tag{23.23}$$

При $z = +a$ напряженность $\dot{\vec{E}}$ направлена вверх (вдоль оси $-x$); при $z = -a$ — вниз (вдоль оси $+x$, см. рис. 23.5, а). Вектор Пойнтинга направлен к средней плоскости листа (внутри листа).

Как известно из ч. II учебника, ток, возникающий при прохождении по листу переменного магнитного потока, принято называть *вихревым*.

Вектор плотности вихревого тока $\dot{\vec{\delta}} = \gamma \dot{\vec{E}}$ в любой точке листа коллинеарен с вектором $\dot{\vec{E}}$ в этой же точке. Магнитная индукция в произвольной точке

$$\dot{B} = \mu_a \dot{H} = \frac{\mu_a \dot{H}_a \operatorname{ch} p z}{\operatorname{ch} p a}. \quad (23.24)$$

Среднее значение магнитной индукции в листе

$$\dot{B}_{\text{ср}} = \frac{1}{a} \int_0^a \dot{B} dz = \frac{\mu_a \dot{H}_a \operatorname{sh} p a}{a p \operatorname{ch} p a} = \frac{\mu_a \dot{H}_a \operatorname{th} p a}{a p}. \quad (23.25)$$

Если считать $\dot{B}_{\text{ср}}$ известной и равной $\dot{\Phi}_m / (2 a h)$, то из (23.25) можно найти напряженность поля на поверхности листа:

$$\dot{H}_a = \frac{a p \dot{B}_{\text{ср}}}{\mu_a \operatorname{th} p a}. \quad (23.26)$$

Заметим, что аргумент $p a = k a + j k a$ является комплексом и $\operatorname{th} p a$ есть гиперболический тангенс от комплексного аргумента; он также является комплексом:

$$\operatorname{th} p a = \operatorname{th} (k a + j k a) = \frac{\operatorname{sh} 2 k a + j \sin 2 k a}{\operatorname{ch} 2 k a + \cos 2 k a}. \quad (23.27)$$

Отношение среднего значения магнитной индукции по сечению листа $\dot{B}_{\text{ср}}$ к напряженности поля на поверхности листа \dot{H}_a называют *комплексной магнитной проницаемостью*:

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a \operatorname{th} p a}{a p} \quad (\tilde{\mu}_a = \mu_0 \tilde{\mu}_r).$$

Она зависит от величины μ_r , частоты ω и толщины листа. При больших значениях аргумента $2 k a$ имеем $\operatorname{sh} 2 k a \approx \operatorname{ch} 2 k a$, значения этих функций намного больше 1. Поэтому при больших значениях $2 k a$

$$\operatorname{th} p a \approx \frac{\operatorname{sh} 2 k a}{\operatorname{ch} 2 k a} \approx 1$$

и комплексная магнитная проницаемость $\tilde{\mu}_a = \mu_a / (p a)$.

Так, например, при толщине листа $2 a = 0,015$ см, $\mu_r = 20000$, $\gamma = 1,8 \cdot 10^6$ (Ом·м)⁻¹ и $f = 50000$ Гц получаем $k = \sqrt{\omega \gamma \mu_a / 2} = 84200$; $p = 84200 \sqrt{2} e^{j 45^\circ}$; $k a = 6,31$; $2 k a = 12,62$; $\operatorname{th} p a = \frac{\operatorname{sh} 12,62}{\operatorname{ch} 12,62} \approx 1$.

Следовательно,

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{p a} = \frac{20000 \cdot \mu_0}{84200 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j 45^\circ} \cdot 0,000015} = 2250 \cdot e^{-j 45^\circ} \cdot \mu_0.$$

Напряженность поля в средней плоскости листа (при $z=0$) $\dot{H}_{z=0} = \dot{H}_a / \operatorname{ch} pa$. Отношение напряженности поля на краю листа (при $z=a$) к напряженности поля в средней плоскости листа:

$$\dot{H}_a / \dot{H}_{z=0} = \operatorname{ch} pa. \quad (23.28)$$

Левая и правая части формулы (23.28) являются комплексами. Модуль $\operatorname{ch} pa$ показывает, во сколько раз модуль \dot{H}_a больше модуля $\dot{H}_{z=0}$. Найдем модуль $\operatorname{ch} pa$. С этой целью запишем два сопряженных комплекса:

$$\operatorname{ch}(ka + jka) = \operatorname{ch} ka \cos ka + j \operatorname{sh} ka \sin ka$$

и

$$\operatorname{ch}(ka - jka) = \operatorname{ch} ka \cos ka - j \operatorname{sh} ka \sin ka.$$

Произведение сопряженных комплексов дает квадрат модуля. Следовательно,

$$|\operatorname{ch} pa|^2 = \operatorname{ch}(ka + jka) \operatorname{ch}(ka - jka) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka]^*.$$

Таким образом,

$$|\operatorname{ch} pa| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka}{2}}. \quad (23.29)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\mu_r = 100$, $f = 500$ Гц, $\gamma = 10^7$ (Ом·м)⁻¹. При этом $k = 1410$ м⁻¹.

Найдем отношение напряженности поля в средней плоскости к напряженности поля на поверхности листа при толщине листа $2a = 1$ мм; 2 мм; 4 мм; $2ka = 1,41$; 2,82; 5,64; $1/|\operatorname{ch} pa| = 0,91$; 0,52; 0,1.

Таким образом, напряженность поля в средней плоскости листа может быть во много меньше напряженности поля на краю листа.

Явление неравномерного распределения поля по сечению проводящего тела, вызванное затуханием электромагнитной волны при ее распространении в проводящую среду, называют *поверхностным эффектом*. Если вдоль листа направлен магнитный поток, то поверхностный эффект часто называют *магнитным*, если вдоль плоской шины направлен переменный ток, то — *электрическим* поверхностным эффектом. Природа их одна и та же, а слова «магнитный» или «электрический» свидетельствуют лишь о том, что направлено вдоль листа (шины): поток или ток.

На рис. 23.5, б построены две кривые. Кривая $H(z)$ характеризует изменение модуля напряженности магнитного поля в функции z . В средней плоскости листа H до нуля не снижается, так как $\operatorname{ch} 0 \neq 0$. Кривая H строится по уравнению (23.22). Кривая $E(z)$ характеризует изменение модуля напряженности электрического поля в функции от z . Эта кривая строится по (23.23); $\operatorname{sh} pz|_{z=0} = 0$ и потому кривая проходит через нуль при $z=0$. Кривая плотности вихревых токов $\delta = \gamma E$ качественно повторяет кривую E от z (разница только в масштабе).

* В силу того, что $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$.

§ 23.6. Электрический поверхностный эффект в прямоугольной шине. Эффект близости. При электрическом поверхностном эффекте (рис. 23.6, а) вдоль пластины (шины) направлен синусоидальный ток I частотой ω . В этом случае поле внутри пластины определяется по формулам:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I} \operatorname{sh} p z}{2 h \operatorname{sh} p a}; \quad \dot{E} = \frac{p \dot{I} \operatorname{ch} p z}{\gamma 2 h \operatorname{sh} p a}; \quad \delta = \gamma \dot{E}.$$

Модуль $\operatorname{sh} p a$ определим по формуле

$$|\operatorname{sh} p a| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2 k a - \cos 2 k a}{2}}.$$

Сопротивление единицы длины шины (пластины)

$$Z = R + j X = \frac{P}{\gamma 2 h \operatorname{th} p a}.$$

В этом случае зависимость модуля $H(z)$ такая же, как и $E(z)$ на рис. 23.5, б, а зависимость $E(z)$ такая же, как и $H(z)$ на этом же рисунке.

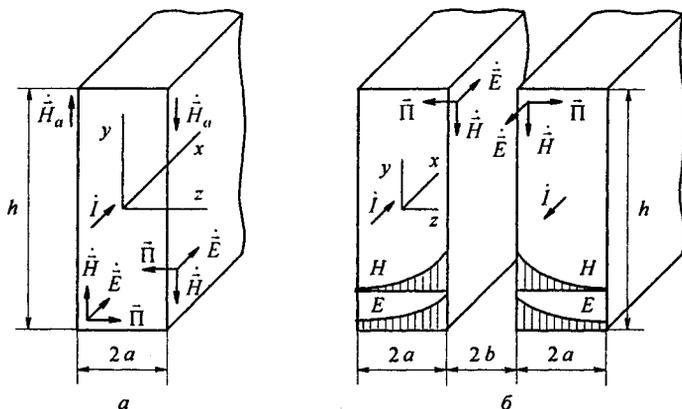


Рис. 23.6

Если высота шины h соизмерима с толщиной $2a$ или шина в поперечном сечении имеет профиль (отличный от прямоугольного) сечением S , периметром q , то при $\lambda \ll \sqrt{S}$ (λ — длина волны) сопротивление единицы длины шины $R + j X = \frac{1}{q} \sqrt{\omega \mu_a / (2 \gamma)} (1 + j)$.

Для ферромагнитной шины, когда $\lambda \ll \sqrt{S}$, в соответствии с [11] $R = \frac{1}{q} \sqrt{\omega \mu_a / \gamma}$ и $X = 0,6 R$; μ_a определяют по основной кривой намагничивания материала шины по действующему значению напряженности поля на ее поверхности $H = I/q$, где I — ток по шине.

Если по двум параллельным близко расположенным плоским шинам (рис. 23.6, б) будет протекать в противоположных направлениях синусоидально изменяющийся во времени ток I частотой ω , а размеры

$2a \ll h$ и $2b \ll h$, то, поместив начало декартовой системы координат в средней плоскости левой шины и учтя, что слева от левой шины напряженность поля $H = 0$, а в пространстве между шинами $\dot{H} = -\dot{i}/h$ (в этом можно убедиться на основании закона полного тока), получим формулы для \dot{H} и \dot{E} в левой шине:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{i} \operatorname{sh} p(a+z)}{h \operatorname{sh} 2pa}; \quad \dot{E} = \frac{p \dot{i} \operatorname{ch} p(a+z)}{\gamma h \operatorname{sh} 2pa}.$$

Эпюры модулей H и E в функции от координаты z показаны на рис. 23.6, б. Поле одной шины влияет на распределение поля в другой шине. Это явление называют *эффектом близости*. Комплексное сопротивление единицы длины двух плоских шин, расположенных в воздухе, равно двум комплексным сопротивлениям самих шин плюс индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком, проходящим в пространстве между шинами:

$$Z = R + jX = \frac{2p}{\gamma h \operatorname{th} 2pa} + j \frac{\mu_0 \omega 2b}{h}.$$

Напомним, что p и $\operatorname{th} pa$ — комплексные числа.

§ 23.7. Неравномерное распределение тока в прямоугольной шине, находящейся в пазу электрической машины. Расположим оси декартовой системы в соответствии с рис. 23.7, а. Обозначим: \dot{i} — ток по шине; b — ширина, h — высота паза. Магнитную проницаемость ферромагнитного материала, в котором сделан паз, полагаем очень большой, теоретически стремящейся к бесконечности. При этом допущении индукция в ферромагнитном материале будет конечна, а напряженность поля в нем будет стремиться к нулю.

В шине вектор \vec{H} направлен по оси y , \vec{E} — по оси x . Вектор Пойнтинга направлен по оси z . Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в шину через наружную поверхность $mnsq$ и по мере проникновения в шину затухает по амплитуде.

По закону полного тока при $z = 0$ $\dot{H} = \dot{i}/b$, при $z = h$ $H = 0$. Для определения постоянных интегрирования \dot{C}_1 и \dot{C}_2 в выражении

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz} \quad (a)$$

составим два уравнения: $\dot{C}_1 + \dot{C}_2 = \dot{i}/b$ и $\dot{C}_1 e^{ph} + \dot{C}_2 e^{-ph} = 0$. После определения \dot{C}_1 и \dot{C}_2 и подстановки их в (а) получим:

$$\dot{H} = \frac{\dot{i} \operatorname{sh} p(h-z)}{b \operatorname{sh} ph}; \quad \dot{E} = \dot{i} \dot{E}_x = \dot{i} \dot{E}; \quad \dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} = \frac{p \dot{i} \operatorname{ch} p(h-z)}{\gamma b \operatorname{sh} ph}; \quad \dot{\delta} = \gamma \dot{E}.$$

Графики напряженностей магнитного (H) и электрического (E) полей по высоте шины изображены на рис. 23.7, б и в соответственно.

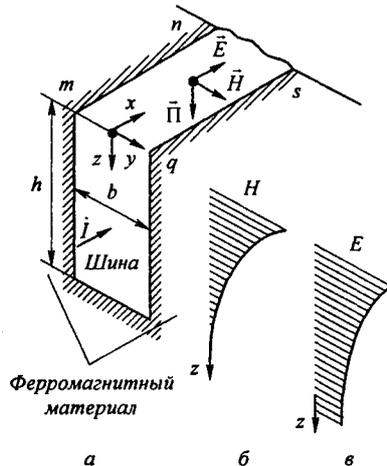


Рис. 23.7

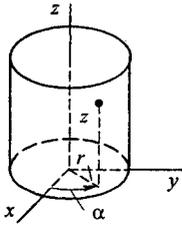


Рис. 23.8

§ 23.8. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе. По цилиндрическому проводу радиусом a протекает синусоидальный ток I частотой ω . Требуется вывести формулы для определения плотности тока $\dot{\delta}$ и напряженности \dot{H} в любой точке сечения провода. Полагаем обратный провод настолько далеко удаленным от прямого, что влияние обратного провода на поле в прямом проводе можно не учитывать. Решение проведем в цилиндрической системе координат (рис. 23.8). Плотность тока $\dot{\delta}$

направлена по оси z , поэтому $\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 \dot{z}_0$. Воспользуемся уравнениями (23.1) и (23.2), предварительно умножив последнее на γ . Получим

$$\text{rot } \dot{H} = \dot{\delta}; \tag{23.30}$$

или
$$\text{rot } \dot{\delta} = -j \omega \gamma \mu_a \dot{H} \tag{23.31}$$

т. е.
$$\text{rot rot } \dot{\delta} = -j \omega \gamma \mu_a \dot{\delta},$$

$$(\text{grad div } \dot{\delta} - \nabla^2 \dot{\delta}) \dot{z}_0 = (-j \omega \gamma \mu_a) \dot{\delta} \dot{z}_0.$$

Учтем, что $\text{div } \dot{\delta} = 0$. Поэтому $\nabla^2 \dot{\delta} = j \omega \gamma \mu_a \dot{\delta}$.

Раскроем $\nabla^2 \dot{\delta}$ в цилиндрической системе координат [см. формулу (19.30)] и учтем, что $\dot{\delta}$ от α и от z не зависит. Получим

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d\dot{\delta}}{dr} + r \frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} \right) = j \omega \gamma \mu_a \dot{\delta},$$

или
$$\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} = j \omega \gamma \mu_a \dot{\delta}.$$

Обозначим

$$q^2 = -j \omega \gamma \mu_a. \tag{23.32}$$

Тогда

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} + q^2 \dot{\delta} = 0$$

или

$$\frac{d^2\dot{\delta}}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d\dot{\delta}}{d(qr)} + \dot{\delta} = 0. \tag{23.33}$$

Уравнение (23.33) является частным случаем уравнения Бесселя (15.4) при $p=0$. Роль x выполняет qr , а роль y — $\dot{\delta}$.

Как известно из курса математики, решение уравнения (23.33) можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \dot{A} J_0(qr) + \dot{B} N_0(qr), \tag{23.34}$$

где \dot{A} и \dot{B} — постоянные интегрирования; $J_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Функция $N_0(qr)$ обладает той особенностью, что при $qr = 0$ (т. е. на оси провода при $r = 0$) она обращается в бесконечность. Но из физических соображений ясно, что плотность тока должна быть всюду конечна, в том числе и на оси провода. Поэтому слагаемое $\dot{B} N_0(qr)$ в решении отбрасываем (принимая $\dot{B} = 0$). Следовательно,

$$\dot{\delta} = \dot{A} J_0(qr). \quad (23.35)$$

В соответствии с уравнением (23.31) и формулами (23.32) и (21.7)

$$\dot{H} = \frac{1}{q^2} \operatorname{rot} \dot{\delta} = \dot{\alpha}^\circ \left(-\frac{1}{q^2} \frac{d\dot{\delta}}{dr} \right) = \dot{\alpha}^\circ \dot{H};$$

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -\frac{1}{q^2} \frac{d}{dr} [\dot{A} J_0(qr)] = -\frac{\dot{A}}{q^2} \frac{d[J_0(qr)]}{d(qr)} \frac{d(qr)}{dr} = \\ &= -\frac{\dot{A}}{q^2} q [-J_1(qr)] = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr), \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{H} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr), \quad (23.36)$$

где $J_1(qr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Определим постоянную интегрирования \dot{A} . С этой целью по закону полного тока найдем \dot{H} на поверхности провода (при $r = a$) и приравняем его значению \dot{H} , которое получается из формулы (23.36):

$$\frac{\dot{i}}{2\pi a} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qa); \quad \dot{A} = \frac{q \dot{i}}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (23.37)$$

Подставив найденное значение \dot{A} в формулы (23.35) и (23.36), получим

$$\dot{\delta} = \frac{q \dot{i} J_0(qr)}{2\pi a J_1(qa)}; \quad (23.38)$$

$$\dot{H} = \frac{\dot{i} J_1(qr)}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (23.39)$$

С помощью этих формул можно определить комплекс плотности тока $\dot{\delta}$ и комплекс напряженности поля \dot{H} в любой точке сечения провода.

Радиус r может принимать значения от 0 до a . Для точки на оси провода $r = 0$; для точек на поверхности $r = a$. Так как $J(0) = 1$ (см. табл. 23.1), то на оси провода плотность тока

$$\dot{\delta}_0 = \frac{q \dot{i}}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (23.40)$$

Сопоставление (23.40) с (23.38) дает

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 J_0(qr). \quad (23.41)$$

Из формулы (23.41) следует, что на поверхности провода плотность тока

$$\dot{\delta}_a = \dot{\delta}_0 J_0(qa). \quad (23.41')$$

Из предыдущего известно, что произведение qr есть комплексное число:

$$qr = r \sqrt{\omega \gamma \mu_a} \sqrt{-j}. \quad (23.42)$$

Бесселевы функции $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$ от комплексного аргумента qr тоже являются комплексами и могут быть представлены в показательной форме:

$$J_0(qr) = b_0 e^{j\beta_0}; \quad (23.43)$$

$$J_1(qr) = b_1 e^{j\beta_1}, \quad (23.44)$$

где b_0 — модуль, а β_0 — аргумент функции $J_0(qr)$; b_1 — модуль, а β_1 — аргумент функции $J_1(qr)$; b_0 , b_1 , β_0 , β_1 (β_0 и β_1 выражены в градусах) определяют по значению $r \sqrt{\omega \gamma \mu_a}$ с помощью табл. 23.1. При ее составлении наличие множителя $\sqrt{-j}$ в составе аргумента qr уже учтено.

Таблица 23.1

Таблица модулей и аргументов функций $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$

$r \sqrt{\omega \gamma \mu_a}$	b_0	β_0	b_1	β_1
0	1	0	0	-45,00
1	1,015	14,22	0,501	-37,84
2	1,229	52,28	1,041	-16,73
3	1,95	96,52	1,80	15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,50	173,51
8	40,82	300,92	39,07	213,69
9	77,96	341,52	74,97	253,95
10	149,8	382,10	144,58	294,27

Пример 222. По стальному проводу ($\gamma = 10^7$ (Ом·м) $^{-1}$; $\mu_r = 10^3$) диаметром 6,04 мм течет синусоидальный ток $I = 100$ А частотой 50 Гц. Определить плотность тока на поверхности и оси провода.

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega \gamma \mu_a} &= \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 10^7} = 1985 \text{ м}^{-1}; \\ q &= 1985 \sqrt{-j} = 1985 e^{-j45^\circ}; \quad a \sqrt{\omega \gamma \mu_a} = 0,00302 \cdot 1985 = 6. \end{aligned}$$

По табл. 23.1 найдем

$$J_0(qa) = J_0(6\sqrt{-j}) = 11,5 e^{j219,6^\circ}; \quad b_0 = 11,5; \quad \beta_0 = 219,6^\circ;$$

$$J_1(qa) = J_1(6\sqrt{-j}) = 10,85 e^{j133,45^\circ}; \quad b_1 = 10,85; \quad \beta_1 = 133,45^\circ.$$

По формуле (23.40) определим плотность тока на оси провода:

$$\dot{\delta}_0 = \frac{q \dot{I}}{2 \pi a J_1(qa)} = 96,5 \cdot 10^4 e^{-j178^\circ 30'} \text{ А/м}^2.$$

По формуле (23.42) на поверхности провода плотность тока

$$\dot{\delta}_a = \dot{\delta}_0 J_0(qa) = 111 \cdot 10^5 e^{j41,1^\circ} \text{ А/м}^2.$$

§ 23.9. Применение теоремы Умова—Пойнтинга для определения активного и внутреннего индуктивного сопротивлений проводников при переменном токе. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводников при переменном токе часто определяют с помощью теоремы Умова—Пойнтинга в комплексной форме. С этой целью подсчитывают поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность проводника на длине 1 м и делят его на квадрат тока, протекающего по проводнику; получают комплексное сопротивление проводника на единицу длины.

Действительно,

$$\text{и} \quad -\oint [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}] d\vec{S} = P + jQ = I^2 R + j I^2 X = I^2 Z$$

$$Z = R + j X = \frac{-\oint [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}] d\vec{S}}{I^2}.$$

В качестве примера определим активное и внутреннее индуктивное сопротивления цилиндрического провода (см. рис. 23.8) на длине 1 м:

$$Z = \frac{\dot{E}_a \dot{H}_a 2 \pi a \cdot 1}{I^2} = \frac{\sqrt{\omega \gamma \mu_a} b_0 e^{-j45^\circ} e^{j\beta_0}}{2 \pi \gamma a b_1 e^{j\beta_1}};$$

$$R = \frac{\sqrt{\omega \gamma \mu_a} b_0}{2 \pi \gamma a b_1} \cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ); \quad X = \frac{\sqrt{\omega \gamma \mu_a} b_0}{2 \pi \gamma a b_1} \sin(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ).$$

§ 23.10. Экранирование в переменном электромагнитном поле. Явление затухания электромагнитной волны в поверхностном слое металла используют для экранировки в переменном электромагнитном поле.

Электромагнитные экраны представляют собой полые цилиндрические, сферические или прямоугольные оболочки, внутрь которых помещают экранируемое устройство (например, катушку индуктивности, измерительный прибор и т. п.).

Экран выполняет две функции:

1) защищает устройство, заключенное в экран, от влияния внешнего по отношению к экрану электромагнитного поля;

2) защищает внешнее по отношению к экрану пространство от электромагнитного поля, создаваемого устройством, заключенным в экране.

Поскольку на расстоянии, равном длине волны, электромагнитная волна в металле почти полностью затухает, то для хорошей экранировки толщина стенки экрана должна быть примерно равна длине волны в металле. Практически приходится учитывать и другие факторы (механическую прочность экрана, его стоимость и т. д.).

§ 23.11. Сопоставление принципов экранирования в электростатическом, магнитном и электромагнитном полях. Электростатическое экранирование основано на компенсации внешнего поля полями зарядов, выявившихся на стенках экрана из проводящего материала вследствие электростатической индукции (см. § 19.21). Толщина стенок экрана при электростатическом экранировании в отличие от экранирования в магнитном и электромагнитном полях может быть сколь угодно малой.

Экранирование в магнитном поле постоянного тока (см. § 21.21) основано на том, что силовые линии магнитного поля преимущественно проходят по участкам с меньшим магнитным сопротивлением (по стенкам экрана).

Экранирование в переменном электромагнитном поле основано, главным образом, на том, что электромагнитная волна, проникающая в стенки экрана, быстро затухает, расходуя энергию на покрытие потерь, обусловленных вихревыми токами в стенках экрана.

Если экран выполнен из ферромагнитного материала и частота ω относительно низкая, то экранирование достигается не только за счет затухания волны в стенке экрана, но и за счет стремления силовых линий магнитного поля пройти по участкам с меньшим магнитным сопротивлением.

§ 23.12. Высокочастотный нагрев металлических деталей и несовершенных диэлектриков. *Нагрев* металлических деталей перед ковкой и штамповкой, *сушку* древесины, *наплавку* и *реставрацию* инструментов часто производят путем помещения этих предметов (деталей) в электромагнитное поле сравнительно невысокой частоты (1...20 кГц). Стальные изделия (например, валы, шестеренки) нередко подвергают *поверхностной закалке*, помещая их в электромагнитное поле более высокой частоты (порядка 10...500 кГц).

В соответствии с § 22.7 энергия, выделяющаяся в виде тепла в проводящем теле, равна $\operatorname{Re}\{-\oint_S [\dot{\vec{E}} \times \vec{H}] d\vec{S}\}$. Электромагнитная волна, проникающая в толщу металла, быстро затухает. Поэтому теплота выделяется практически лишь в относительно тонком поверхностном слое стального изделия.

Под действием теплоты, выделившейся в поверхностном слое, последний быстро разогревается до температуры, необходимой для поверхностной закалки. Высокочастотные поля используют также для нагрева несовершенных диэлектриков (проводимость их хотя и мала, но не равна нулю). Так, область еще более высоких частот (1...30 МГц) используется для высокочастотного *нагрева пластмасс* перед штамповкой, для *термической обработки* пищевых продуктов, *вулканизации* резины и других целей.

§ 23.13. Переходный процесс при проникновении электромагнитного поля в однородное проводящее полупространство. В воздухе вблизи однородного проводящего полупространства (для которого известны γ и μ_a), начиная с момента времени $t = 0$, внешним источником скачком создается постоянное магнитное поле, направленное по оси y : $\vec{j} H_0 I(t)$. Расположение осей координат соответствует рис. 23.3. При проникновении поля в проводящую среду в ней возникают вихревые токи, задерживающие его распространение. Напряженность магнитного поля в проводящей среде $\vec{H} = \vec{j} H_y(z, t) = \vec{j} H$; напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{i} E_x(z, t) = \vec{i} E$. Уравнения Максвелла $-\partial H / \partial z = \gamma E$ и $-\partial E / \partial z = \mu_a \partial H / \partial t$ запишем в операторной форме: $-dH(p, z) / dz = \gamma E(p, z)$ и $-dE(p, z) / dz = \mu_a p H(p, z)$. Отсюда

$$\frac{d^2 H(p, z)}{dz^2} = a^2 p H(p, z),$$

где $a^2 = \gamma \mu_a$. Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение, корни которого $\alpha_{1,2} = \pm a \sqrt{p}$. Следовательно,

$$H(p, z) = C_1 e^{a\sqrt{p}z} + C_2 e^{-a\sqrt{p}z}.$$

Так как полупространство в направлении оси z простирается в бесконечность, то $C_1 = 0$ и $H(p, z) = C_2 e^{-a\sqrt{p}z}$. Определим постоянную C_2 . На границе двух сред ($z = 0$) тангенциальные составляющие \vec{H} в воздухе и в проводящей среде равны, следовательно, равны и их операторные изображения. Отсюда $C_2 = H_0 / p$, а

$$H(p, z) = \frac{H_0}{p} e^{-a\sqrt{p}z}; \quad E(p, z) = -\frac{1}{\gamma} \frac{dH(p, z)}{dz} = -\frac{H_0}{p} \sqrt{\frac{\mu_a}{\gamma}} e^{-a\sqrt{p}z}.$$

По таблицам соответствия § 8.39 перейдем к функциям времени:

$$H(t, z) = H_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{az}{2\sqrt{t}} \right) \right] \quad \text{и} \quad E(t, z) = -\frac{H_0}{\sqrt{\pi t}} \sqrt{\frac{\mu_a}{\gamma}} e^{-\frac{a^2 z^2}{4t}}. \quad (23.46)$$

Кривая интеграла ошибок Гаусса

$$\Phi \left(\frac{az}{2\sqrt{t}} \right) = \Phi(z)$$

изображена на рис. 12.10, а. Формулы (23.46) дают возможность подсчитать H и E в любой точке проводящего полупространства в функции координаты z и времени t .

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение плоской линейно поляризованной электромагнитной волны. 2. От каких факторов зависит постоянная распространения $p = k + jk$, волновое сопротивление Z_a , глубина проникновения Δ ? 3. Чем объяснить, что электромагнитная волна затухает, проникая в проводящую среду? 4. Какой угол в пространстве составляют \vec{E} и \vec{H} падающей волны и на какой угол смещены во времени их мгновенные значения? 5. Во сколько

раз модуль вектора \vec{E} падающей волны на поверхности больше, чем модуль вектора \vec{E} на глубине проникновения? 6. Какой процесс отображает фазовая скорость? 7. Дайте определение поверхностному эффекту. 8. В чем различие между магнитным и электрическим поверхностными эффектами? 9. Какой физический процесс учитывает $\tilde{\mu}_a$? 10. Чем следует руководствоваться при проектировании электромагнитного экрана? 11. Будет ли нагреваться ферромагнитный экран при работе его: а) в неизменном во времени поле; б) в переменном поле? 12. Какой экран лучше экранирует в переменном поле — медный или алюминиевый (при прочих равных условиях)? 13. В чем заключается эффект близости? 14. Запишите граничные условия для определения постоянных интегрирования в случае цилиндрического провода и для случая, когда провод (шина) находится в пазу электрической машины. 15. Составьте уравнение, при котором плотность тока на поверхности цилиндрического провода находится в противофазе с плотностью тока на оси провода. 16. Как применить теорему Умова—Пойнтинга для определения комплексного сопротивления провода? 17. Почему сердечник высокочастотного трансформатора выполняют из феррита, а низкочастотного — из листового материала? 18. Почему в высокочастотной технике вместо сплошных проводов можно применять полые (трубчатые)? 19. По ферромагнитному цилиндру (проволоке) проходит синусоидально изменяющийся магнитный поток. Выведите законы изменения E и H в функции радиуса r . 20. Вдоль параллельных плоских шин (см. рис. 23.6, б) протекает синусоидальный ток в одинаковом направлении. Определите законы изменения E и H в функции координаты z . 21. Решите задачи 23.2; 23.4; 23.6; 23.7; 23.10.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ И В ПОЛУПРОВОДЯЩИХ И ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

§ 24.1. Распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектрике. Проводимость γ идеального диэлектрика равна нулю. Поэтому в первом уравнении Максвелла (22.1) первое слагаемое правой части ($\delta = \gamma \vec{E}$) отсутствует, и уравнения Максвелла для диэлектрика получают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j \omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}; \quad (24.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j \omega \mu_a \dot{\vec{H}}; \quad (24.2)$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \rho_{\text{своб}} / \epsilon_a.$$

Для однородных и изотропных диэлектриков $\mu_a = \text{const}$ и условие $\operatorname{div} \mu_a \dot{\vec{H}} = 0$ равносильно условию $\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0$.

Решим совместно уравнения (24.1) и (24.2). С этой целью возьмем ротор от уравнения (24.1). Получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{H}} - \nabla^2 \dot{\vec{H}} = j \omega \epsilon_a \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}.$$

Так как $\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0$, то и $\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0$. В свою очередь $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}$ на основании второго уравнения Максвелла равен $-j \omega \mu_a \dot{\vec{H}}$. Поэтому

$$-\nabla^2 \dot{\vec{H}} = j \omega \epsilon_a (-j \omega \mu_a \dot{\vec{H}})$$

или

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a \dot{\vec{H}}. \quad (24.3a)$$

Произведение $\epsilon_a \mu_a$ измеряется в секундах в квадрате на метр в квадрате ($\text{с}^2 / \text{м}^2$):

$$[\epsilon_a][\mu_a] = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{с}^2 / \text{м}^2,$$

т. е. $\epsilon_a \mu_a$ имеет размерность, обратную размерности квадрата скорости v , и потому можно принять $\epsilon_a \mu_a = 1/v^2$. После введения такого обозначения уравнение (24.3a) получает следующий вид:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = -(\omega/v)^2 \dot{\vec{H}}. \quad (24.3)$$

Для плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся в направлении оси z в соответствии с гл. 23, можно

принять, что напряженность магнитного поля направлена вдоль оси y , т. е.

$$\dot{H} = \vec{j} \dot{H}. \quad (24.4)$$

Так как для плоской волны \dot{H} зависит только от координаты z и не зависит от координат x и y , то уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{j} \dot{H} = - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \vec{j} \dot{H}.$$

приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \dot{H}. \quad (24.5)$$

Уравнению (24.5) соответствует характеристическое уравнение $p^2 = -(\omega/v)^2$, корни которого $p_1 = j\omega/v$ и $p_2 = -j\omega/v$.

Общее решение уравнения (24.4)

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} + \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}. \quad (24.6)$$

где \dot{C}_1 и \dot{C}_2 — комплексные коэффициенты, зависящие от граничных условий. Как и всякое комплексное число, их можно представить в показательной форме: $\dot{C}_1 = C_1 e^{j\psi_0}$ и $\dot{C}_2 = C_2 e^{j\psi_n}$.

Слагаемое $\dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}$ представляет собой падающую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z , а слагаемое $\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z}$ — отраженную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z .

Напряженность электрического поля \dot{E} найдем из уравнения (24.1):

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \text{rot} \dot{H}.$$

Как следует из формулы (23.10), для плоской волны

$$\text{rot} \dot{H} = \vec{i} \left(-\frac{d\dot{H}}{dz} \right).$$

Поэтому

$$\dot{E} = \left\{ \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left[\left(-j\frac{\omega}{v} \right) \left(\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} - \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z} \right) \right] \right\}.$$

Величину

$$1/(\epsilon_a v) = \sqrt{\epsilon_a \mu_a} / \epsilon_a = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a} = Z_B$$

называют *волновым сопротивлением диэлектрика*. Волновое сопротив-

ление является действительным числом (измеряется в омах):

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \sqrt{\frac{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м} \cdot \mu_r}{8,86 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot \epsilon_r}} = 377 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Оно не зависит от угловой частоты колебаний ω . Для вакуума $\epsilon_r = 1$ и $\mu_r = 1$, поэтому $Z_B = 377$ Ом. Следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \dot{E}, \tag{24.7}$$

где

$$\dot{E} = Z_B \dot{C}_2 e^{-j \frac{\omega}{v} z} - Z_B \dot{C}_1 e^{j \frac{\omega}{v} z}. \tag{24.7a}$$

Присутствие единичного орта оси x (орта \vec{i}) в формуле (24.7) свидетельствует о том, что вектор напряженности электрического поля направлен по оси x .

Таким образом, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в диэлектрике, как и для проводящей среды, \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны: \vec{H} направлена по оси y , \vec{E} — по оси x .

Запишем выражения для мгновенных значений H и E падающей волны. Чтобы получить мгновенное значение падающей волны H , необходимо комплекс $\dot{H} = \dot{C}_2 e^{j \psi_n} e^{-j \frac{\omega}{v} z}$ умножить на $e^{j \omega t}$ и от произведения взять мнимую часть. В результате получим

$$H = C_2 \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z\right); \tag{24.8}$$

аналогично

$$E = C_2 Z_B \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z\right). \tag{24.9}$$

По мере продвижения падающей волны вдоль оси z амплитуды E и H остаются неизменными, т. е. затухания волны не происходит, так как в диэлектрике нет токов проводимости и выделения энергии в виде теплоты.

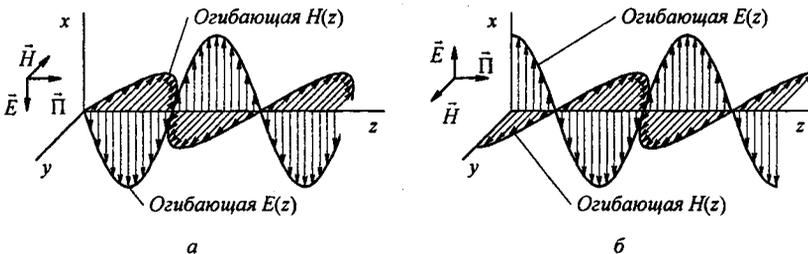


Рис. 24.1

На рис. 24.1, а изображены пространственные кривые, представляющие собой графики мгновенных значений H и E . Эти графики построены по уравнениям (24.8) и (24.9) для момента времени $\omega t + \psi_n = 0$. Для

более позднего момента времени, например для $\omega t + \psi_n = 90^\circ$, аналогичные кривые изображены на рис. 24.1, б.

Как видно из рис. 24.1, а и б, вектор \vec{E} при движении волны остается направленным вдоль оси x , а вектор \vec{H} — вдоль оси y , сдвига по фазе между H и E нет.

Проверим правильность построения графика $E = f(z)$ на рис. 24.1, а. Кривые на этом рисунке построены при $\omega t + \psi_n = 0$, поэтому уравнением кривой $E = f(z)$ является выражение [в соответствии с (24.9)]

$$C_2 Z_b \sin\left(-\frac{\omega}{v} z\right).$$

При $z=0$ $E=0$. В интервале от $\omega z/v=0$ до $\omega z/v=\pi$ мгновенные значения E отрицательны. При $\omega z/v=\pi$ $E=0$ и т. д.

Вектор Пойнтинга падающей волны направлен вдоль оси z . Модуль Π изменяется по закону $\Pi = C_2^2 Z_b \sin^2\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z\right)$. Так как $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, то

$$\Pi = \frac{C_2^2 Z_b}{2} \left(1 - \cos\left(2\omega t + 2\psi_n - \frac{2\omega}{v} z\right)\right),$$

т. е. вектор Пойнтинга имеет постоянную составляющую $C_2^2 Z_b/2$ и переменную, изменяющуюся во времени с двойной угловой частотой.

Фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике

$$v_{\text{фаз}} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}. \quad (24.10)$$

Если волна распространяется в вакууме, то $\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, и тогда фазовая скорость равна скорости света:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}}} \approx 300000 \text{ км/с.}$$

Таким образом, фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике очень велика и несоизмеримо больше фазовой скорости плоской электромагнитной волны в проводящей среде.

Длина волны λ есть расстояние вдоль оси z , на котором фаза колебания изменится на 2π . Ее находят из соотношения $\frac{\omega}{v} \lambda = 2\pi$:

$$\lambda = v/f. \quad (24.11)$$

Из (24.11) видно, что длина волны в диэлектрике обратно пропорциональна частоте f . Так, при $f = 10^6$ Гц $\lambda = \frac{300000 \text{ км/с}}{10^6 \text{ с}^{-1}} = 300 \text{ м.}$

Пример 223. В плоскости $z=0$ напряженность электрического поля плоской волны изменяется по закону $E = E_m \sin(\omega t + \psi_n)$, где $E_m = 0,2 \text{ В/м}$, $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ и $\psi_n = 30^\circ$; диэлектрик — воздух.

Записать выражения для мгновенного значения напряженности магнитного поля и вектора Пойнтинга в плоскости $z = 0,5$ км.

Решение.

$$H = \frac{E_m}{Z_B} \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z\right);$$

$$\frac{E_m}{Z_B} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{377} = 5,315 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}, \quad \frac{\omega}{v} z = \frac{10^6 \cdot 0,5}{3 \cdot 10^5} = 1,665 \text{ рад} \approx 95^\circ 20'.$$

Следовательно, $H = 5,315 \cdot 10^{-4} \sin(10^6 t - 65^\circ 20')$ А/м. При $z = 0,5$ км мгновенное значение вектора Пойнтинга

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{E_m H_m}{2} \left(1 - \cos\left(2\omega t + 2\psi_n - \frac{2\omega}{v} z\right)\right) = \\ &= 5,315 \cdot 10^{-5} [1 - \cos(2 \cdot 10^6 t - 130^\circ 40')] \text{ Вт/м}^2. \end{aligned}$$

§ 24.2. Плоские волны, поляризованные по кругу и по эллипсу.

Сумма двух плоских линейно поляризованных волн, распространяющихся вдоль оси z , одинаковой частоты и сдвинутых по фазе на 90° , у одной из которых вектор напряженности электрического поля \vec{E}_1 направлен по оси x , а у другой вектор \vec{E}_2 — по оси y (рис. 24.2, *a* и *б*), дает электромагнитную волну, вектор \vec{E} которой, находясь в плоскости xOy , скользит по кругу (волна поляризована по окружности), если амплитуды E_1 и E_2 равны, и волну, поляризованную по эллипсу, если амплитуды E_1 и E_2 не равны.

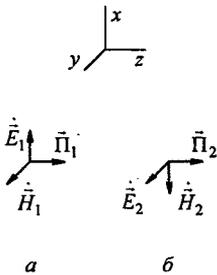


Рис. 24.2

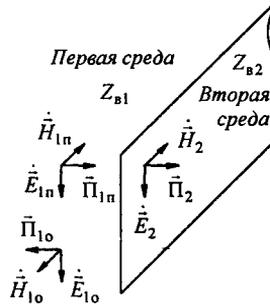


Рис. 24.3

§ 24.3. Переход плоской линейно поляризованной волны из одной среды в другую при нормальном падении. Рассмотрим условия перехода плоской синусоидально изменяющейся электромагнитной волны из первой среды с волновым сопротивлением Z_{B1} во вторую среду с волновым сопротивлением Z_{B2} . Примем, что волна падает перпендикулярно границе раздела сред (рис. 24.3). Волна частично пройдет во вторую среду, частично отразится.

В первой среде будут присутствовать падающая (индекс «п») и отраженная (индекс «о») волны, во второй — только падающая (поэтому индекс «п» у нее не будем ставить). Волну, распространяющуюся во второй среде, называют также преломленной.

Для удобства восприятия рис. 24.3 векторы, характеризующие падающую и отраженную волны в первой среде, смещены по вертикали и несколько отодвинуты от границы раздела сред. На границе раздела сред должны быть равны тангенциальные составляющие напряженности электрического поля и тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля:

$$\dot{E}_{1п} + \dot{E}_{1о} = \dot{E}_2; \quad (24.12)$$

$$\dot{H}_{1п} - \dot{H}_{1о} = \dot{H}_2. \quad (24.13)$$

Уравнения (24.12) и (24.13) полностью тождественны уравнениям, которыми связаны напряжения и токи падающей, отраженной и преломленной волны при переходе волны с одной линии с распределенными параметрами на другую (см. § 12.6).

Комплекс напряженности электрического поля $\dot{E}_{1п}$ равен комплексу напряженности магнитного поля $\dot{H}_{1п}$, умноженному на $Z_{в1}$: $\dot{E}_{1п} = \dot{H}_{1п} Z_{в1}$.

Для отраженной волны $\dot{E}_{1о} = \dot{H}_{1о} Z_{в1}$. Для преломленной волны $\dot{E}_2 = \dot{H}_2 Z_{в2}$. С учетом этого из уравнений (24.12) и (24.13) получаем:

$$\dot{E}_{1о} = \frac{Z_{в2} - Z_{в1}}{Z_{в1} + Z_{в2}} \dot{E}_{1п}; \quad (24.14)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{2 Z_{в1}}{Z_{в1} + Z_{в2}} \dot{H}_{1п}; \quad (24.15)$$

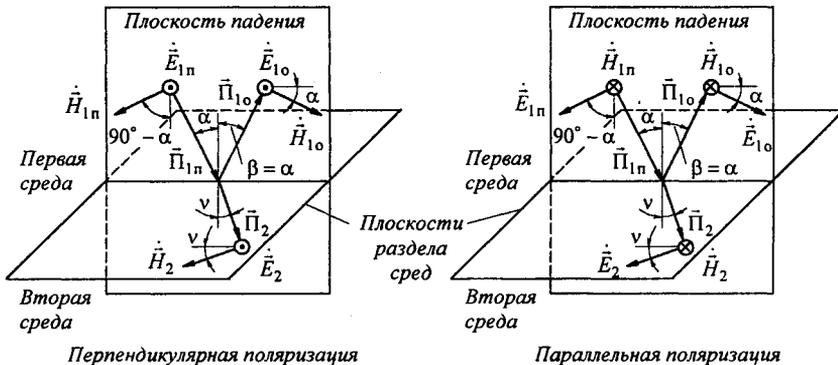
$$\dot{H}_{1о} = \frac{Z_{в1} - Z_{в2}}{Z_{в1} + Z_{в2}} \dot{H}_{1п}. \quad (24.16)$$

Проанализируем полученные результаты. Значения $\dot{E}_{1о}$, $\dot{H}_{1о}$ и \dot{E}_2 зависят от соотношения между волновыми сопротивлениями обеих сред. Наибольший практический интерес представляет случай, когда волна падает из воздуха на поверхность металла. При этом первой средой является воздух, а второй — металл. Так как волновое сопротивление проводящей среды зависит не только от ее проводимости и магнитной проницаемости, но и от частоты [см. формулу (23.12)], то для определенности положим, что проводящей средой является медь, а частота $f = 10^8$ Гц. Сопоставим значения волновых сопротивлений для диэлектрика и для металла (см. формулы для $Z_{в}$). Для воздуха $Z_{в1} = 377$ Ом. Для меди ($\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ Ом⁻¹·м⁻¹) при $f = 10^8$ Гц $Z_{в2} = 0,00357 e^{j45^\circ}$ Ом. Если подставить значения $Z_{в1}$ и $Z_{в2}$ в (24.14), (24.16), то получим $\dot{E}_{1о} \approx -\dot{E}_{1п}$; $\dot{H}_{1о} \approx \dot{H}_{1п}$, т. е. от поверхности металла электромагнитная волна почти полностью

отражается с переменной знака у напряженности электрического поля. Та часть волны, которая все же проникает в металл, быстро в нем затухает. Если бы проводящая среда имела γ , стремящуюся к бесконечности, то тогда она являлась бы идеальным зеркалом для электромагнитной волны.

Явление отражения электромагнитных волн от проводящих сред лежит в основе радиолокации.

§ 24.4. Наклонное падение плоской линейно поляризованной волны на границу раздела двух диэлектриков. Полагаем, что волна распространяется из первой среды во вторую (рис. 24.4). В первой среде $Z_{в1} = \sqrt{\mu_{a1}/\epsilon_{a1}}$, во второй $Z_{в2} = \sqrt{\mu_{a2}/\epsilon_{a2}}$; $p_1 = j\omega\sqrt{\epsilon_{a1}\mu_{a1}}$ и $p_2 = j\omega\sqrt{\epsilon_{a2}\mu_{a2}}$. Векторы Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн $\vec{\Pi}_{1п}$, $\vec{\Pi}_{1о}$, $\vec{\Pi}_2$ находятся в одной плоскости. Их углы с вертикалью к границе раздела сред на рис. 24.4 обозначены α , β , ν . Полагаем $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$.



а

б

Рис. 24.4

При наклонном падении выполняются два закона Снеллиуса:

1. Угол падения α равен углу отражения β .
2. Угол преломления ν и угол падения α находятся в следующей зависимости от коэффициентов преломления сред n_1 и n_2 :

$$\frac{\sin \nu}{\sin \alpha} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}; \quad (a)$$

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}; \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}. \quad (б)$$

Плоскую линейно поляризованную волну в общем случае можно представить в виде суммы двух волн.

1. Волны, у которой вектор $\vec{E}_{1п}$ перпендикулярен плоскости падения, а вектор $\vec{H}_{1п}$ находится в плоскости падения (рис. 24.4, а) — такую волну

называют *волной с перпендикулярной поляризацией*. В этом случае напряженность электрического поля отраженной волны $\dot{E}_{1o} = R_E^\perp \dot{E}_{1n}$, а напряженность поля преломленной волны $\dot{E}_2 = T_E^\perp \dot{E}_{1n}$.

2. Волны, у которой вектор \dot{E}_{1n} находится в плоскости падения, а вектор \dot{H}_{1n} перпендикулярен плоскости падения (рис. 24.4, б). Такую волну называют *волной с параллельной поляризацией*. В этом случае $\dot{E}_{1o} = R_E^\parallel \dot{E}_{1n}$, а $\dot{E}_2 = T_E^\parallel \dot{E}_{1n}$.

Определим коэффициенты R и T для этих случаев, исходя из непрерывности тангенциальных составляющих векторов \dot{E} и \dot{H} на границе раздела сред.

На рис. 24.4, а и б кружки с точкой или крестиком означают векторы, направленные соответственно к читателю или от него.

Из условия равенства тангенциальных составляющих векторов \dot{E} и соответственно \dot{H} на границе в первой и второй средах для перпендикулярной поляризации (рис. 24.4, а) имеем

$$\dot{E}_{1n} + \dot{E}_{1o} = \dot{E}_2; \quad (\dot{H}_{1n} - \dot{H}_{1o}) \cos \alpha = \dot{H}_2 \cos \nu.$$

Учитываем, что

$$\dot{E}_{1n} = Z_{в1} \dot{H}_{1n}; \quad \dot{E}_{1o} = Z_{в1} \dot{H}_{1o}; \quad \dot{E}_2 = Z_{в2} \dot{H}_2,$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{1o} = R_E^\perp \dot{E}_{1n} &= \frac{Z_{в2} \cos \alpha - Z_{в1} \cos \nu}{Z_{в2} \cos \alpha + Z_{в1} \cos \nu} \dot{E}_{1n}; \\ \dot{E}_2 = T_E^\perp \dot{E}_{1n} &= \frac{2 Z_{в2} \cos \alpha}{Z_{в2} \cos \alpha + Z_{в1} \cos \nu} \dot{E}_{1n}. \end{aligned} \right\} \quad (24.17)$$

Для случая параллельной поляризации (рис. 24.4, б) имеем:

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{1n} - \dot{E}_{1o}) \cos \alpha &= \dot{E}_2 \cos \nu; & \dot{H}_{1n} + \dot{H}_{1o} &= \dot{H}_2; \\ \dot{E}_{1n} = Z_{в1} \dot{H}_{1n}; & \dot{E}_{1o} = Z_{в1} \dot{H}_{1o}; & \dot{E}_2 &= Z_{в2} \dot{H}_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{1o} = R_E^\parallel \dot{E}_{1n} &= \frac{Z_{в1} \cos \alpha - Z_{в2} \cos \nu}{Z_{в2} \cos \nu + Z_{в1} \cos \alpha} \dot{E}_{1n}; \\ \dot{E}_2 = T_E^\parallel \dot{E}_{1n} &= \frac{2 Z_{в2} \cos \alpha}{Z_{в2} \cos \nu + Z_{в1} \cos \alpha} \dot{E}_{1n}. \end{aligned} \right\} \quad (24.18)$$

Формулы (24.17) и (24.18) называют *формулами Френеля*.

При наклонном падении плоской волны из первой среды во вторую при определенных условиях могут возникать два физических явления, рассмотренных в § 24.5.

§ 24.5. Полное преломление (отсутствие отраженной волны) и полное отражение (отсутствие преломленной волны). Связь между углом падения α и углом отражения ν определяет второй закон Снеллиуса [уравнение (а)]. Если $\alpha + \nu = 90^\circ$, то $\cos \nu = \sin \alpha$, а $\operatorname{tg} \alpha = Z_{в1} / Z_{в2}$.

В этом случае угол α обозначают α_B и называют *углом Брюстера*

$$\alpha_B = \operatorname{arctg} \frac{Z_{в1}}{Z_{в2}}.$$

При $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ $\alpha_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}}$.

Если *параллельно поляризованная волна* падает из первой среды во вторую под углом α_B , то она, преломляясь на границе раздела сред, полностью проходит во вторую среду (отраженной волны не будет). Убедимся в этом. С этой целью запишем числитель формулы (24.18) для E_{10} $Z_{в1} \cos \alpha - Z_{в2} \cos \nu$. Заменяем в нем $\cos \nu$ на $\sin \alpha$, $\sin \alpha$ на $\operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, а $\cos \alpha$ на $1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Получим нуль:

$$\frac{Z_{в1}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} - \frac{Z_{в2} \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = 0.$$

Однако, при любом угле падения α перпендикулярно поляризованной волны на границу раздела сред (в том числе и при $\alpha = \alpha_B$) полного преломления не возникает. (Если допустить, что $R_E^\perp = 0$, то при $\mu_1 = \mu_2$ и учете формулы (а) получим, что $\sin^2 \alpha = \infty$. Но такого угла не существует.)

Рассмотрим теперь при каком угле падения возникает полное внутреннее отражение от границы раздела сред. Полное отражение возникает при переходе из оптически более плотной среды (с большей ϵ_{r1}) в среду оптически менее плотную (с меньшей ϵ_{r2}), например, из стекла в воздух. Из формулы (а) следует, что $\sin \nu = \sqrt{\epsilon_{r1} / \epsilon_{r2}} \sin \alpha$. Предельному значению угла преломления $\nu_{\text{пр}} = 90^\circ$ соответствует $\sin \nu_{\text{пр}} = 1$ и предельное значение угла $\alpha_{\text{пр}} = \arcsin \sqrt{\epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}}$.

Угол $\alpha_{\text{пр}}$ называют *углом полного внутреннего отражения*. При $\alpha \geq \alpha_{\text{пр}}$ вместо нормального волнового процесса на границе возникает поверхностная волна, распространяющаяся в первой среде вдоль границы раздела сред, практически не заходя во вторую среду.

Полное внутреннее отражение используют в различных целях, в частности для канализации колебаний сверхвысокой частоты (возбуждаемых лазерами) в диэлектрических волноводах. Плоский диэлектрический волновод иллюстрирует рис. 24.5. Волновод выполнен в виде диэлектрической пленки толщиной порядка сотых долей миллиметра с коэффициентом преломления $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$. Сверху и снизу от этой пленки находятся оптически менее плотные пленки, у них $n_2 < n_1$ и $n_3 < n_1$. Толщина сред-

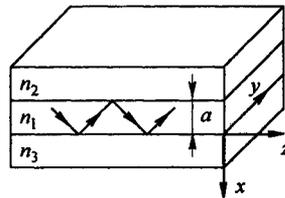


Рис. 24.5

оптически менее плотные пленки, у них $n_2 < n_1$ и $n_3 < n_1$. Толщина сред-

ней пленки a лишь немного больше длины волны лазера. Волна движется зигзагообразно, отражаясь от верхней и нижней пленок, не заходя в них. Фазовая скорость вдоль оси z $v_{\text{фл}} = v_c / (n_1 \sin \alpha)$ немного меньше скорости света v_c , поэтому волну называют медленной, а так как она движется вдоль поверхности, то ее называют поверхностной.

Пример 223а. Плоская электромагнитная волна параллельной поляризации из немагнитной среды 1 с $\epsilon_{r1} = 2$ попадает на границу раздела с немагнитной средой 2 с $\epsilon_{r2} = 4$. Угол падения $\alpha = 30^\circ$. $E_{1\text{н}} = 10$ В/м. Определить $E_{1\text{о}}$, E_2 , $H_{1\text{н}}$, $H_{1\text{о}}$, H_2 , модули векторов Пойнтинга на границе раздела сред и мгновенное значение E_2 на границе раздела. Выяснить, при каком угле падения отраженная волна будет отсутствовать.

Решение. По закону Снеллиуса определим угол преломления

$$\nu = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin \alpha \right) = 19^\circ 45'$$

Подсчитаем волновые сопротивления первой и второй сред:

$$Z_{\text{в1}} = 377 \sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\epsilon_{r1}}} = 261 \text{ Ом}; \quad Z_{\text{в2}} = 377 \sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\epsilon_{r2}}} = 188,4 \text{ Ом}.$$

Определим коэффициенты R_E^{\parallel} и T_E^{\parallel} и по ним — $\dot{E}_{1\text{о}}$ и \dot{E}_2 :

$$R_E^{\parallel} = \frac{Z_{\text{в1}} \cos \alpha - Z_{\text{в2}} \cos \nu}{Z_{\text{в1}} \cos \alpha + Z_{\text{в2}} \cos \nu} = 0,1165;$$

$$T_E^{\parallel} = \frac{2 Z_{\text{в2}} \cos \alpha}{Z_{\text{в1}} \cos \alpha + Z_{\text{в2}} \cos \nu} = 0,910;$$

$$\dot{E}_{1\text{о}} = R_E^{\parallel} \dot{E}_{1\text{н}} = 1,16 \text{ В/м}; \quad \dot{E}_2 = T_E^{\parallel} \dot{E}_{1\text{н}} = 9,1 \text{ В/м};$$

$$\dot{H}_{1\text{о}} = \frac{\dot{E}_{1\text{о}}}{Z_{\text{в1}}} = 0,0045 \text{ А/м}; \quad \dot{H}_2 = \frac{\dot{E}_2}{Z_{\text{в2}}} = 0,0349 \text{ А/м}.$$

Модули векторов Пойнтинга на границе раздела сред

$$\Pi_{1\text{н}} = \frac{E_{1\text{н}}^2}{Z_{\text{в1}}} = 0,383 \text{ Вт/м}^2; \quad \Pi_{1\text{о}} = \frac{E_{1\text{о}}^2}{Z_{\text{в1}}} = 0,00516 \text{ Вт/м}^2;$$

$$\Pi_2 = \frac{E_2^2}{Z_{\text{в2}}} = 0,439 \text{ Вт/м}^2.$$

Мгновенное значение E_2 на границе раздела сред $9,1 \sqrt{2} \sin \omega t$ В/м.

Отраженной волны не будет при угле $\alpha = \alpha_B = \arctg \frac{Z_{\text{в1}}}{Z_{\text{в2}}} = 54^\circ 40'$.

§ 24.6. Дифракция электромагнитных волн. Дифракцией называют явление отражения и преломления электромагнитных волн от проводящего или диэлектрического тела, а также изменение структуры и направления волн при прохождении их через отверстие (щель) в каком-либо теле, например в пластинке, когда размеры тела или щели соизмеримы с длиной электромагнитной волны.

Качественно рассмотрим, как влияет на поле плоской волны помещенный в это поле длинный цилиндр радиусом a , полагая, что ось цилиндра расположена перпендикулярно вектору Пойнтинга падающей волны, а ее вектор \vec{E} параллелен оси цилиндра.

Рассмотрим три характерных случая.

1. Если длина волны $\lambda \ll a$, то действуют законы геометрической оптики и за цилиндром будет область тени (рис. 24.6, *a*).

2. Если вне и внутри цилиндра $\lambda \gg a$, то можно пренебречь запаздыванием, и тогда поля \vec{E} и \vec{H} внутри и вне цилиндра определяются в условиях, близких к статическим.

3. Если $\lambda/a \approx 1$, а это случай наиболее типичный для дифракционных задач, то в области за цилиндром, где на рис. 24.6, *a* была тень, появляется интенсивное поле. На рис. 24.6, *б* изображена эпюра для напряженности H рассеянного поля, когда проводимость γ цилиндра стремится к бесконечности. Физически интенсивное поле вместо тени получается за счет того, что наводимые

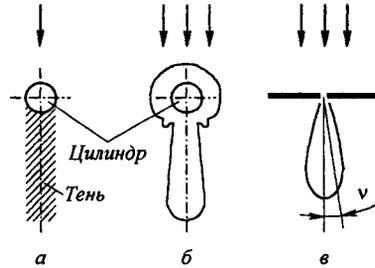


Рис. 24.6

в верхней части проводящего цилиндра токи затекают в нижнюю его часть и там служат излучателем (вторичным источником поля). Наличие мелких углублений на диаграмме объясняется интерференцией волн.

Рис. 24.6, *в* иллюстрирует дифракцию плоской однородной электромагнитной волны (длина волны λ) при нормальном падении на квадратное отверстие со стороной a в большом хорошо проводящем экране. Отверстие вырезает участок фронта волны и само становится излучателем — элементом Гюйгенса. На рисунке показана полярная диаграмма вектора E (или H). Приблизительно она может быть описана функцией

$$\frac{\sin m}{m},$$

где $m = \pi \frac{a}{\lambda} \sin v$. Размер a соизмерим с длиной волны λ .

§ 24.7. Устранение отражения электромагнитных волн. Прием, который используют для устранения отражения электромагнитных волн от границы раздела двух диэлектриков и от границы диэлектрик — поверхность хорошо проводящего тела, сходен с тем, который применяют в линиях с распределенными параметрами (четвертьволновый трансформатор, § 11.24).

1. Устранение отражения от границы раздела двух диэлектриков. Пусть плоская электромагнитная (ЭМ) волна распространяется из диэлектрика с ϵ_{r1} и μ_{r1} и волновым сопротивлением $Z_{в1} = \sqrt{\mu_{r1}/\epsilon_{r1}}$ (например, воздуха) в диэлектрик с ϵ_{r2} , μ_{r2} и волновым сопротивлением $Z_{в2} = \sqrt{\mu_{r2}/\epsilon_{r2}}$. Для устранения отражения от границы раздела между первым и вторым диэлектриками помещают слой третьего диэлектрика (рис. 24.7, а) с параметрами ϵ_{r3} , μ_{r3} , толщиной в четверть длины вол-

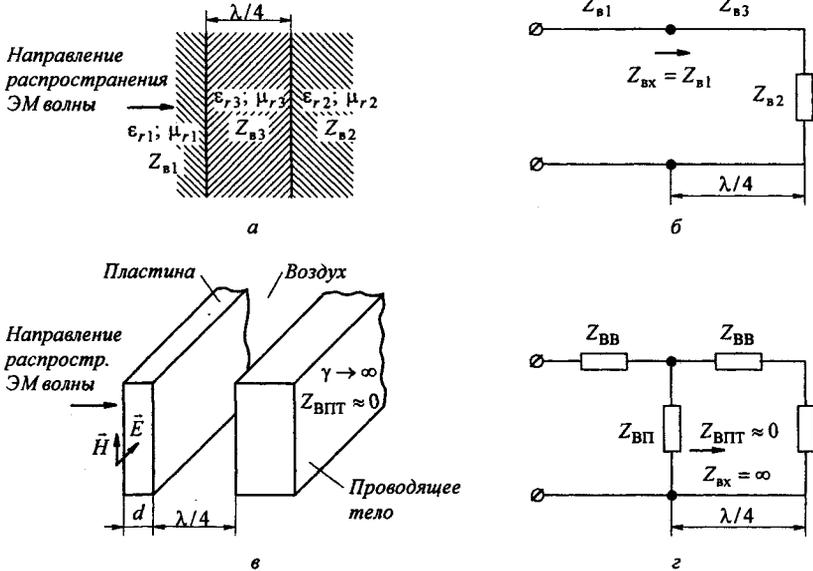


Рис. 24.7

ны $\lambda/4 = (4f\sqrt{\epsilon_{r3}\mu_{r3}})^{-1}$ и волновым сопротивлением $Z_{в3}$, равным среднему геометрическому из $Z_{в1}$ и $Z_{в2}$ (см. § 11.24), т. е.

$$Z_{в3} = 4\sqrt{\frac{\mu_{a1}\mu_{a2}}{\epsilon_{a1}\epsilon_{a2}}}$$

Цепной аналог изображен на рис. 24.7, б. Входное сопротивление четвертьволновой линии равно $Z_{в1}$, поэтому от границы между средами 1 и 3 волна не отражается. Стоячие волны имеются в среде 3.

2. Устранение отражения от границы диэлектрик — проводящая среда. Плоскую поверхность хорошо проводящего тела ($\gamma \rightarrow \infty$, $Z_{ВПТ} \rightarrow 0$), от которой надо устранить отражение (рис. 24.7, в), отделяют слоем воздуха или какого-либо другого диэлектрика толщиной $\lambda/4$ (волновое сопротивление воздуха $Z_{ВВ} = 377$ Ом) от проводящей пластины толщиной d и удельным сопротивлением ρ . Сопротивление единицы длины и единицы ширины этой пластины $Z_{ВП}$ в направлении вектора \vec{E} волны

$$\frac{\rho l}{s} = \frac{\rho \cdot l}{d \cdot l} = \frac{\rho}{d}$$

берут равным волновому сопротивлению среды (воздуха), откуда поступает электромагнитная волна. Таким образом,

$$Z_{ВВ} = Z_{ВП} = \rho / d = 377 \text{ Ом.}$$

Цепным аналогом полученного устройства является схема рис. 24.7, з. Входное сопротивление четвертьволновой линии, короткозамкнутой на конце, $Z_{вх} = j Z_{ВВ} \operatorname{tg} 90^\circ = \infty$ (см. § 11.19). В воздухе, откуда поступает электромагнитная волна, отраженная волна отсутствует, так как линия с волновым сопротивлением $Z_{ВВ}$ согласована с линией, имеющей волновое сопротивление $Z_{ВП}$.

§ 24.8. Плоские волны в однородных и изотропных полупроводящих средах. Кратко рассмотрим вопрос о распространении плоской ЭМ волны в однородных и изотропных полупроводящих средах (морской воде, почве, ионосфере, ферритах). При достаточно высоких частотах токи проводимости и токи смещения в полупроводящих средах оказываются соизмеримыми. Уравнения $\operatorname{rot} \vec{H} = (\gamma + j \omega \epsilon_a) \vec{E}$ и $\operatorname{rot} \vec{E} = -j \omega \mu_a \vec{H}$ после введения обозначений $\epsilon_1 = \epsilon_a - j \gamma / \omega = \epsilon_a - j \epsilon'$, где $\epsilon' = \gamma / \omega$, для плоской волны приводятся к следующему виду:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = -\omega^2 \epsilon_1 \mu_a \dot{H}. \quad (24.20)$$

Последнему выражению соответствует характеристическое уравнение $p^2 = -\omega^2 \epsilon_1 \mu_a$. Решение уравнения (24.20)

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{p_1 z} + \dot{C}_2 e^{p_2 z},$$

где \dot{C}_1 и \dot{C}_2 — постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий. Постоянные распространения: $p_1 = \beta + j \omega / v_1$, $p_2 = \beta - j \omega / v_1$. Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}\right)^2}} \quad (a)$$

и фазовая скорость $v_\phi = \omega / \alpha$, $\alpha = \omega / v_1$,

$$v_\phi = v_1 = \frac{\sqrt{2}}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}\right)^2}}} \quad (б)$$

зависят от величины ϵ' / ϵ_a . При выводе использованы формулы $\sin(\alpha/2) = \sqrt{0,5(1 - \cos \alpha)}$ и $\cos(\alpha/2) = \sqrt{0,5(1 + \cos \alpha)}$.

Напряженность электрического поля для падающей волны $\dot{E}_n = \dot{H}_n Z_n$, где волновое сопротивление

$$Z_n = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left(\sqrt{1 - j \frac{\epsilon'}{\epsilon_a}} \right)^{-1}. \quad (в)$$

Сдвиг по фазе между \dot{E}_n и \dot{H}_n находится в интервале от 0 до 45° в зависимости от соотношения между единицей и ϵ' / ϵ_a .

Заметим, что параметры ϵ_a , γ и μ_a полупроводящих сред являются функциями частоты и комплексными числами (ср. с § 22.8). Эти зависимости должны быть известны

перед проведением расчета. Для ферритов решение приближенно, так как μ_a ферритов зависит еще и от значения напряженности магнитного поля.

Среды с потерями, для которых фазовая скорость и коэффициент затухания зависят от частоты, называют *диспергирующими*.

В заключение коснемся понятия групповой скорости. Оно используется главным образом при рассмотрении вопроса о распространении радиосигналов в среде с потерями. Так как радиосигнал образован совокупностью волн, имеющих разные частоты, а β и v_1 зависят от ω , то огибающая импульса при его движении в среде с потерями непрерывно деформируется.

Групповой скоростью называют скорость перемещения максимума огибающей сигнала (импульса). Скорость перемещения этого максимума характеризует скорость перемещения энергии группы волн.

Выведем приближенную формулу для групповой скорости $v_{гр}$ распространения волн в полупроводящей среде. Положим, что вдоль оси z распространяются два колебания: $A \sin \omega t$ и $A \sin(\omega + \Delta\omega)t$. Для частоты ω $p = \beta + j\alpha$ ($\alpha = \omega/v_1$), для частоты $\omega + \Delta\omega$ $p = (\beta + \Delta\beta) + j(\alpha + \Delta\alpha)$. Сумма колебаний вдоль оси z

$$A e^{-\beta z} \sin(\omega t - \alpha z) + A e^{-\beta z} e^{-\Delta\beta z} \sin[(\omega + \Delta\omega)t - (\alpha + \Delta\alpha)z].$$

Полагая, что $\Delta\beta z \ll 1$ и $e^{-\Delta\beta z} \approx 1$, и используя формулу

$$\sin v + \sin p = 2 \cos \frac{v-p}{2} \sin \frac{v+p}{2},$$

получаем

$$2 A e^{-\beta z} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\alpha}{2}z\right) \sin\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)z\right].$$

Скорость перемещения огибающей результирующего колебания вдоль оси z найдем, взяв производную по времени от аргумента $\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\alpha}{2}z$ (полагая его постоянным):

$$v_{гр} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\alpha} \approx \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)^{-1}. \quad (24.21)$$

При $e^{-\Delta\beta z}$, заметно отличающемся от 1, форма сигнала при его движении вдоль оси z настолько деформируется, что исчезает информация, заключенная в сигнале. В этом случае понятие $v_{гр}$ теряет смысл.

§ 24.9. Граничные условия на поверхности раздела двух полупроводящих сред. Указанные граничные условия обобщают граничные условия на границе раздела двух идеальных диэлектриков (см. § 19.24) и на границе раздела двух проводящих сред (см. § 20.6).

Запишем граничные условия для синусоидально изменяющегося поля (поэтому над \vec{E} ставим точку), частным случаем которого является поле, неизменное во времени. Формула (19.24), совпадающая с формулой (20.10), справедлива и для полупроводящей среды. Однако, учитывая синусоидальный характер поля во времени, ставим точки над тангенциальной составляющей \vec{E}_t :

$$\dot{\vec{E}}_{1t} = \dot{\vec{E}}_{2t}. \quad (24.22)$$

Формулы (19.35) и (20.11) различны и потому следует образовать более общее выражение, частными случаями которого были бы эти формулы. Для этого возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = (\gamma + j\omega \epsilon_a) \dot{\vec{E}}.$$

Так как

$$\text{div rot } \dot{\vec{H}} = 0,$$

то и

$$\text{div}(\gamma + j\omega \epsilon_a) \dot{\vec{E}} = 0. \quad (24.23)$$

На границе раздела двух полупроводящих сред выделим прямой сплюснутый параллелепипед очень малых размеров. Его донышко находится в одной среде, а крышка — в

другой. Из (24.23) следует, что

$$(\gamma_1 + j \omega \epsilon_{a1}) \dot{\vec{E}}_{1n} = (\gamma_2 + j \omega \epsilon_{a2}) \dot{\vec{E}}_{2n} \quad (24.24)$$

Формулы (24.22) и (24.24) представляют искомые граничные условия (с индексом n обозначены нормальные составляющие вектора \vec{E}).

§ 24.10. Переходные и релаксационные процессы в несовершенных диэлектриках. Процессы в полупроводящих средах должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} \quad (24.25)$$

и теореме Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}} \quad (24.26)$$

В соответствии с законом Ома в уравнение (24.25) подставим $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$:

$$\vec{E} \operatorname{grad} \gamma + \gamma \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} \quad (24.25a)$$

В уравнении (24.26) заменим \vec{D} на $\epsilon_a \vec{E}$:

$$\operatorname{grad} \epsilon_a \vec{E} + \epsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}} \quad (24.26a)$$

Из (24.26a) найдем

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} - \vec{E} \operatorname{grad} \epsilon_a}{\epsilon_a} \quad (24.27)$$

Подставим (24.27) в (24.25):

$$\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \vec{E} \operatorname{grad} \epsilon_a - \vec{E} \operatorname{grad} \gamma \quad (24.28)$$

Преобразуем правую часть (24.28):

$$\vec{E} \gamma \left(\frac{1}{\epsilon_a} \operatorname{grad} \epsilon_a - \frac{\epsilon_a}{\gamma^2} \operatorname{grad} \gamma \right) = \vec{\delta} \frac{\gamma}{\epsilon_a} \operatorname{grad} \frac{\epsilon_a}{\gamma}$$

или

$$\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \vec{\delta} \operatorname{grad} \frac{\epsilon_a}{\gamma} \quad (24.28a)$$

Уравнение (24.28a) является дифференциальным уравнением относительно свободно-го объемного заряда. Оно описывает переходные и установившиеся процессы в самой полупроводящей среде (не идеальной диэлектрике).

В установившемся режиме $\rho_{\text{своб}} = \vec{\delta} \operatorname{grad} (\epsilon_a / \gamma)$. Если среда однородна $\epsilon_a / \gamma = \text{const}$, то в установившемся режиме свободный объемный заряд не накапливается, т. е. $\rho_{\text{своб}} = 0$. Переходные процессы в однородной полупроводящей среде описываются уравнением

$$\frac{d \rho_{\text{своб}}}{dt} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = 0.$$

Если к началу переходного процесса при $t = 0_-$ $\rho_{\text{своб}} = \rho_{\text{своб}}(0_-)$, то объемный заряд в этой точке поля рассеивается по экспоненте:

$$\rho_{\text{своб}} = \rho_{\text{своб}}(0_-) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_a} t}.$$

Время уменьшения $\rho_{\text{своб}}$ в $e = 2,72$ раза называют *временем релаксации*. В несовершенной изоляции время релаксации может составлять от нескольких единиц до нескольких десятков секунд. Если конденсатор с несовершенной изоляцией, находящийся под

напряжением, отключить от источника напряжения, затем на некоторое время замкнуть проводником накоротко и после этого проводник убрать, то на зажимах отключенного от сети конденсатора вновь появится напряжение за счет рассасывания объемного заряда. В металлах время релаксации составляет около 10^{-17} с, т. е. рассасывание объемного заряда происходит практически мгновенно.

§ 24.11. О расчете полей в несовершенных диэлектриках и вязких средах при установившемся синусоидальном режиме. В соответствии с § 24.8 в синусоидально изменяющемся поле проводимость является комплексным числом $\tilde{\gamma} = \gamma + j \omega \epsilon_a$.

Изменяющийся во времени ток, протекающий по несовершенному диэлектрику, создает в нем изменяющееся во времени магнитное поле. Однако если последнее слабое, то его влиянием на электрическое поле в первом приближении можно пренебречь и рассчитывать электрическое поле в полупроводящих средах по формулам для статических полей в проводящих средах, вводя в соответствующие формулы комплексную $\tilde{\gamma}$ вместо вещественной γ . А так как формулы для расчета электрических полей в проводящих средах в условиях статики следуют из формул для расчета соответствующих электростатических задач (см. § 19.32–19.36, 19.39, 19.40 и др.), то надлежит использовать формулы электростатики, заменяя в них ϵ на $\tilde{\gamma}$.

Аналогичный подход применяют при расчетах квазистатических электрических полей в вязких диэлектриках, вводя комплексное $\tilde{\epsilon}_a$, и при расчетах квазистатических магнитных полей в магнитно вязких материалах при отсутствии вихревых токов (в ферритах), вводя комплексное $\tilde{\mu}_a$.

§ 24.12. Определение гиротропной среды. *Гиротропными* (вращающими) называют среды, в которых плоскость поляризации электромагнитной волны поворачивается по мере распространения волны вдоль некоторого направления.

В гиротропной среде μ_a или ϵ_a для малых переменных составляющих является тензором. Наиболее распространенными на практике магнитными гиротропными (гиромагнитными) средами являются намагниченные постоянным магнитным полем ферриты (у них тензором являются $\tilde{\mu}_a$) и намагниченные постоянным магнитным полем ионизированные газы — гирозлектрические среды (у них тензор $\tilde{\epsilon}_a$). Далее в качестве гиротропной среды будем использовать феррит.

§ 24.13. Тензор магнитной проницаемости феррита. Сначала вспомним, что называют прецессией.

Из механики известно, что скорость изменения момента количества движения $d\vec{M}/dt$ вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω волчка (гироскопа) равна приложенному к нему вращающему моменту (рис. 24.8, а):

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{r} \vec{F}]. \quad (24.29)$$

Здесь \vec{r} — расстояние волчка от вертикальной оси z ; \vec{F} — сила тяжести.

Радиус R вращающегося волчка описывает боковую поверхность конуса. Такое движение называют *прецессией*.

В феррите, помещенном в постоянное магнитное поле индукции $\vec{B} = k \vec{B}$, вектор намагниченности \vec{J} единицы объема вещества совершает прецессионное движение подобно вращающемуся волчку (рис. 24.8, б). Если не учитывать создаваемое вязким трением затухание, прецессия описывается уравнением Ландау—Лившица

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \gamma [\vec{B} \vec{J}], \quad (24.30)$$

где коэффициент $\gamma = 1,756 \cdot 10^{-11} \text{ Тл}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

При наличии вязкого трения индукция \vec{B} оказывается уменьшенной на величину, пропорциональную скорости изменения $d\vec{J}/dt$, т. е. $\vec{B} - \mu_0 \alpha d\vec{J}/dt$. Поэтому

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \gamma \left[\left(\vec{B} - \mu_0 \alpha \frac{d\vec{J}}{dt} \right) \vec{J} \right]. \quad (24.31)$$

Если в начало координат поместить малую ферритовую сферу (рис. 24.8, а) и постоянное магнитное поле индукции \vec{B} направить по оси z , а малое по амплитуде синусоидаль-

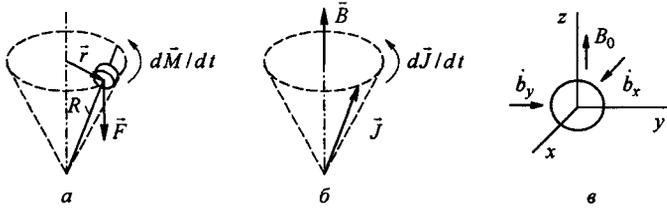


Рис. 24.8

но изменяющееся переменное поле индукции \dot{b} частотой ω — по осям x и y , $\dot{b} = \vec{i} \dot{b}_x + \vec{j} \dot{b}_y$, то $\vec{B} = \vec{i} \dot{b}_x + \vec{j} \dot{b}_y + \vec{k} B_0$. В свою очередь намагниченность

$$\vec{J} = \vec{i} j_x + \vec{j} j_y + \vec{k} (J_0 + j_z).$$

Учитывая временной фактор множителем $e^{j\omega t}$, производную dJ/dt заменим на $j\omega (\vec{i} j_x + \vec{j} j_y + \vec{k} j_z)$. После подстановки всех величин в (24.31), пренебрежения слагаемыми второго порядка малости (например, произведением $\dot{b}_x j_y$) окажется, что j_x зависит не только от \dot{b}_x , но и от \dot{b}_y , а j_y — не только от \dot{b}_y , но и от \dot{b}_x :

$$j_x = K_{xx} \frac{\dot{b}_x}{\mu_0} + K_{xy} \frac{\dot{b}_y}{\mu_0}; \quad j_y = K_{yx} \frac{\dot{b}_x}{\mu_0} + K_{yy} \frac{\dot{b}_y}{\mu_0};$$

$$K_{xx} = K_{yy} = \frac{(B_0 + j\omega\mu_0\alpha J_0)\mu_0 J_0 \gamma^2}{m}; \quad K_{xy} = -K_{yx} = -\frac{j\omega\gamma\mu_0 J_0}{m};$$

$$m = \gamma^2 (B_0 + j\omega\mu_0\alpha J_0)^2 - \omega^2.$$

Коэффициенты K_{xx} и K_{xy} играют роль магнитной восприимчивости. Коэффициент K_{xx} имеет действительную K_{xx1} и мнимую K_{xx2} части. Аналогично две части имеет и K_{xy} . При

$$\omega = \omega_p = B_0 / \sqrt{\alpha^2 \mu_0^2 J_0^2 + \gamma^{-2}}$$

действительная часть m равна 0. При этом K_{xx1} достигает максимума и наблюдается гиромангнитный резонанс.

Когда вязкое трение отсутствует, $\alpha = 0$ и $\omega = \omega_p = \gamma B_0$. При $B_0 = 1 \text{ Тл}$ имеем $\omega_p = 1,75 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.

Если $\dot{b} = \vec{i} \dot{b}_x$ ($\dot{b}_y = 0$), то $j_x = B_0 / (\gamma^2 B_0^2 - \omega^2)$ и $j_y = -j\omega\gamma J_0 / (\gamma^2 B_0^2 - \omega^2)$, т. е. несмотря на то, что $\dot{b}_y = 0$, переменная составляющая вектора имеет компоненты по осям x и y , сдвинутые во времени на 90° (множитель $-j$ у j_y). Это означает, что поле векто-

ра \vec{J} поляризовано в плоскости xOy .

Тензор абсолютной проницаемости $\vec{\mu}_a$ феррита, намагничиваемого постоянным магнитным полем индукции \vec{B}_0 , направленным по оси z , и малым переменным полем по осям x и y , следующий:

$$\vec{\mu}_a = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu & -jc & 0 \\ jc & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}; \quad (24.32)$$

$$\mu = 1 + K_{xx}; \quad c = \frac{\omega \gamma \mu_0 J_0}{m}; \quad \mu_z = 1 + k_0,$$

где k_0 — восприимчивость феррита в постоянном магнитном поле.

§ 24.14. Распространение плоской волны в гиромангнитной среде. Положим, что в феррите в направлении оси z , вдоль которой направлено постоянное магнитное поле индукции B_0 , распространяется плоская электромагнитная волна частотой ω . В соответствии с формулой (24.32)

$$\begin{aligned} \dot{B}_x &= \mu_0 (\mu \dot{H}_x - jc \dot{H}_y); & \dot{B}_y &= \mu_0 (jc \dot{H}_x + \mu \dot{H}_y); & \dot{B}_z &= \mu_0 \mu \dot{H}_z; \\ E_z &= H_z = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0; & \dot{E} &= \vec{i} \dot{E}_x + \vec{j} \dot{E}_y. \end{aligned}$$

Подставим в уравнения Максвелла $\text{rot} \dot{H} = j \omega \epsilon_a \dot{E}$ и $\text{rot} \dot{E} = -\dot{\partial B} / \partial t$ значения \dot{E} и \dot{B} . Получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\dot{H}_y}{dz} &= j \omega \epsilon_a \dot{E}_x; & \frac{d\dot{H}_x}{dz} &= j \omega \epsilon_a \dot{E}_y; \\ -\frac{d\dot{E}_y}{dz} &= j \omega \mu_0 (\mu \dot{H}_x - jc \dot{H}_y); & \frac{d\dot{E}_x}{dz} &= -j \omega \mu_0 (jc \dot{H}_x + \mu \dot{H}_y). \end{aligned} \right\} \quad (24.33)$$

Полагаем, что потери в феррите отсутствуют, и поэтому волна будет распространяться без затухания. Тогда можно принять:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{0x} e^{-jpz}; \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{0y} e^{-jpz}; \quad \dot{H}_x = \dot{H}_{0x} e^{-jpz}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{0y} e^{-jpz}, \quad (24.34)$$

где \dot{E}_{0x} , \dot{E}_{0y} , \dot{H}_{0x} и \dot{H}_{0y} — значения \dot{E}_x , \dot{E}_y , \dot{H}_x и \dot{H}_y при $z=0$.

Совместно решая уравнения (24.33) с учетом (24.34), получаем:

$$\left. \begin{aligned} p \dot{H}_{0y} &= \omega \epsilon_a \dot{E}_{0x}; & p \dot{H}_{0x} &= -\omega \epsilon_a \dot{E}_{0y}; \\ p \dot{E}_{0y} &= -\omega \mu_0 (\mu \dot{H}_{0x} - jc \dot{H}_{0y}); & p \dot{E}_{0x} &= \omega \mu_0 (jc \dot{H}_{0x} + \mu \dot{H}_{0y}). \end{aligned} \right\} \quad (24.35)$$

Из первых двух уравнений (24.35) найдем \dot{H}_{0y} и \dot{H}_{0x} и подставим их в остальные два уравнения:

$$(p^2 - \epsilon_a \omega^2 \mu \mu_0) \dot{E}_{0y} = jc \epsilon_a \omega^2 \mu_0 \dot{E}_{0x}; \quad (24.36)$$

$$(p^2 - \epsilon_a \omega^2 \mu \mu_0) \dot{E}_{0x} = -jc \epsilon_a \omega^2 \mu_0 \dot{E}_{0y}. \quad (24.37)$$

Совместно решая (24.36) и (24.37), получаем уравнение относительно p :

$$(p^2 - \epsilon_a \omega^2 \mu \mu_0 - t \epsilon_a \mu_0 \omega^2) (p^2 - \epsilon_a \omega^2 \mu \mu_0 + t \epsilon_a \mu_0 \omega^2) = 0. \quad (24.38)$$

Уравнение (24.38) имеет два корня, удовлетворяющих условию задачи:

$$p^+ = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_0 (\mu + c)} \quad \text{и} \quad p^- = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_0 (\mu - c)}.$$

Подставляя найденные значения p в (24.36) и (24.37), находим $\dot{E}_{0y} = \pm j \dot{E}_{0x}$. Если $p = p^+$, то $\dot{E}_{0y} = j \dot{E}_{0x}$, т. е. \dot{E}_{0y} по фазе опережает \dot{E}_{0x} на 90° . Этому соответствует правое вращение плоскости поляризации и фазовая скорость

$$v^+ = \frac{\omega}{p^+} = \left(\sqrt{\epsilon_a \mu_0 (\mu + c)} \right)^{-1}.$$

Если $p = p^-$, то $\dot{E}_{0y} = -j \dot{E}_{0x}$, т. е. \dot{E}_{0y} отстает на 90° от \dot{E}_{0x} — левое вращение плоскости поляризации. Ему соответствует фазовая скорость

$$v^- = \frac{\omega}{p^-} = \left(\sqrt{\epsilon_a \mu_0 (\mu - c)} \right)^{-1}.$$

Положим, что вдоль оси z распространяется волна, компоненты которой, соответствующие правой и левой поляризации, имеют одинаковые амплитуды E_m :

$$\begin{aligned} E_x^+ &= E_m \sin(\omega t - p^+ z); & E_y^+ &= E_m \cos(\omega t - p^+ z); \\ E_x^- &= E_m \sin(\omega t - p^- z); & E_y^- &= -E_m \cos(\omega t - p^- z). \end{aligned}$$

Проекция суммы напряженностей на оси x и y :

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^+ + E_x^- = 2 E_m \cos[0,5(p^+ - p^-)z] \sin[\omega t - 0,5(p^+ + p^-)z]; \\ E_y &= E_y^+ + E_y^- = 2 E_m \sin[0,5(p^+ - p^-)z] \sin[\omega t - 0,5(p^+ + p^-)z]. \end{aligned}$$

Результирующая напряженность поля

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 2 E_m \sin[\omega t - 0,5(p^+ + p^-)z].$$

Волна поляризована в плоскости, проходящей через вектор \vec{E}_p и ось z . Тангенс угла β между вектором \vec{E}_p и осью x определяется выражением $\operatorname{tg} \beta = E_y / E_x = \operatorname{tg}[0,5(p^+ - p^-)z]$. Угол β увеличивается пропорционально расстоянию z . Среда называется гиротропной (вращающей) потому, что плоскость поляризации волны непрерывно поворачивается с ростом z (эффект Фарадея).

Если электромагнитная волна будет распространяться вдоль оси $-z$ (т. е. встречно постоянному полю B_0), то коэффициент c изменит знак, в результате направление вращения плоскости поляризации (если смотреть вслед волне) сохраняется прежним, а не изменится на противоположное, т. е. для гиротропной среды не выполняется принцип взаимности.

Эффект вращения плоскости поляризации волны используется для создания вентиляных устройств волноводного тракта, например в устройстве, называемом *циркулятором* (отрезок волноводного тракта, заполненного ферритом), с двух сторон которого находятся поляризаторы. В волноводе с таким устройством электромагнитная волна может проходить только в одном направлении, а в другом задерживается одним из поляризаторов.

Вопросы для самопроверки

1. На какую долю процента скорость света в воздухе ($\epsilon_r = 1,0006$) и волновое сопротивление меньше, чем в вакууме? (Ответ: на 0,03 %). 2. В некоторой точке диэлектрика $\vec{E} = \vec{i} 100 \sin(1000 t)$. Определите \vec{H} и $\operatorname{rot} \vec{H}$ в этой точке, если $\epsilon_r = 10$. 3. В некоторой точке диэлектрика с $\epsilon_r = 2$ и $\mu_r = 1$ $\vec{H} = \vec{j} H_m \cos(\omega t)$. Определите \vec{E} и $\operatorname{rot} \vec{E}$ в этой точке. 4. Дайте определение плоской электромагнитной волны с параллельной (перпендикулярной) поляризацией. 5. Сформулируйте законы Снеллиуса и запишите формулы Френеля. 6. Плоская линейно поляризованная волна, у которой вектор \vec{E} находится в плоскости падения, падает из среды 1 ($\epsilon_{r1} = 4$, $\mu_{r1} = 1$) в среду 2 ($\epsilon_{r2} = \mu_{r2} = 1$). Определите угол падения α , при котором будет отсутствовать отраженная волна. (Ответ: $54^\circ 10'$). 7. Что понимают под дифракцией? Поясните три характерных случая дифракции. 8. Поясните, каким образом можно устранить отражение электромагнитной волны при нормальном

падении ее на границу раздела: а) диэлектрик — диэлектрик и б) диэлектрик — проводящая среда. 9. Дайте определение полупроводящей среде. Приведите примеры. 10. При какой частоте амплитуда плотности тока проводимости равна амплитуде плотности тока смещения для сухой почвы, у которой $\gamma = 10^{-3} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, а $\epsilon_r = 5$? 11. Какими параметрами характеризуют проводящие среды? 12. Каковы особенности распространения электромагнитной волны в полупроводящей среде? 13. Из формул для Z_v , v_ϕ и коэффициента распространения для полупроводящей среды получите формулы соответствующих величин для диэлектрика, для проводящей среды. 14. Что понимают под групповой скоростью полупроводящей среды? 15. Сопоставьте формулы для фазовой и групповой скоростей. 16. Какие среды называют диспергирующими? 17. При каких ограничениях синусоидально изменяющееся во времени электромагнитное поле в полупроводящих средах, а также в вязких магнитных и диэлектрических средах может быть рассчитано по соответствующим формулам электростатического поля? 18. Какие процессы в конденсаторах с несовершенными диэлектриками называют релаксационными? К каким неожиданным последствиям они могут привести? 19. Какое явление называют прецессией? 20. Выведите формулу для тензора абсолютной магнитной проницаемости феррита, на который воздействует вдоль оси z постоянное магнитное поле \vec{B}_0 , а вдоль осей x и y — синусоидально изменяющееся магнитное поле малой амплитуды. 21. В чем особенности распространения электромагнитных волн в гиротропных средах? 22. При каком условии наступает полное преломление? 23. Дайте определение дифракции. Качественно поясните, почему, когда длина волны λ соизмерима с линейными размерами проводящего тела, то в той области, где должна бы быть тень, может возникнуть интенсивное поле? 24. Объясните, почему устройство, предназначенное для устранения отражения плоской электромагнитной волны частотой f от проводящей (диэлектрической) поверхности, не будет выполнять свои функции, если изменится частота f . 25. Решите задачи 24.2; 24.4; 24.8; 24.14; 24.15.

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

§ 25.1. Вывод уравнений для \vec{A} и φ в переменном электромагнитном поле и их решение. Переменное электромагнитное поле создается токами и зарядами, зависящими не только от координат, но и от времени. Рассмотрим, каким уравнениям подчиняются векторный и скалярный потенциалы A и φ в переменном электромагнитном поле. С этой целью запишем систему уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (25.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (25.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (25.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}^*}{\epsilon_a}. \quad (25.4)$$

Дополним ее уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (25.5)$$

и выражением магнитной индукции через векторный потенциал

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (25.6)$$

Для того чтобы составить уравнение относительно векторного потенциала, необходимо проделать ряд выкладок. Умножив (25.1) на μ_a , получим

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta} + \mu_a \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

В последнем уравнении заменим $\mu_a \epsilon_a$ на $1/v^2$:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (25.7)$$

В (25.7) вместо \vec{B} подставим $\operatorname{rot} \vec{A}$, получим $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, или

* В дальнейшем индекс «своб» писать не будем.

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (25.8)$$

Затем в (25.2) вместо $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ подставим $\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (операция взятия ротора и дифференцирование во времени не зависят друг от друга и потому взаимно переместимы). Тогда (25.2) приобретает следующий вид:

$$\text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (25.9)$$

Если равны роторы двух функций (от \vec{E} и $\partial \vec{A} / \partial t$), то сами функции равны с точностью до градиента от некоторой скалярной функции. Объясняется это тем, что ротор от градиента скалярной функции тождественно равен нулю ($\text{rot grad } \phi \equiv 0$).

Таким образом,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi. \quad (25.10)$$

В (25.10) в качестве градиента скалярной функции взят $\text{grad } \phi$. Объясняется это тем, что уравнение (25.10) должно быть справедливо и для статического поля. А так как в статическом поле $\partial \vec{A} / \partial t = 0$, то выражение, которое получается из (25.10) для статического поля, должно совпадать с известным из электростатики выражением $\vec{E} = -\text{grad } \phi$.

В соответствии с (25.10) можно сказать, что в переменном электромагнитном поле напряженность электрического поля имеет две составляющие. Одна из них ($-\partial \vec{A} / \partial t$) обусловлена переменным магнитным полем, другая ($-\text{grad } \phi$) — неподвижными зарядами⁷. Возьмем циркуляцию от вектора \vec{E} по любому замкнутому контуру:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A} d\vec{l} - \oint \text{grad } \phi d\vec{l}.$$

Циркуляция от градиента ϕ тождественно равна нулю, а $\oint \vec{A} d\vec{l}$ в соответствии с уравнением (21.26) есть магнитный поток Φ , пронизывающий выбранный контур. Таким образом,

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (25.10a)$$

т. е. из (25.10) получили (25.10a) — закон электромагнитной индукции.

Обратим внимание на то, что формула (25.10), определяющая \vec{E} , записана для случая неподвижных тел и сред при отсутствии сторонней напряженности поля $E_{\text{стор}}$, возникающей, например, при соприкосновении проводящих тел различного химического состава или имеющих различную температуру.

⁷ Первую из них можно назвать *вихревой* составляющей, вторую — *потенциальной* (или *кулоновой*).

В более общем случае, когда тело или среда движется со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} (\vec{v} и \vec{B} измеряются в одной и той же системе координат, а скорость \vec{v} значительно меньше скорости света) и когда в данной точке поля имеется $E_{\text{стор}}$, результирующая напряженность поля будет состоять из четырех компонентов:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \vec{e}_z + \vec{E}_{\text{стор}} + [\vec{v} \vec{B}].$$

Первые два слагаемых имеют тот же смысл, что и в (25.10), третье — сторонняя напряженность поля, четвертое — магнитная составляющая силы Лоренца, представляющая собой силу, действующую на единичный заряд, двигающийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} . Все четыре компонента \vec{E} в одной и той же точке поля одновременно, как правило, не возникают.

В уравнении (25.8) участвует производная $\partial \vec{E} / \partial t$. Найдем ее из (25.10):

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

и подставим в (25.8):

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (25.11)$$

Вектор-потенциал представляет собой функцию, ротор которой равен \vec{B} . В гл. 21 отмечалось, что вектор-потенциал A должен быть подчинен определенному условию, а именно: в постоянном магнитном поле $\text{div} A = 0$, т. е. линии вектора представляют собой замкнутые сами на себя линии.

В переменном электромагнитном поле таким требованием к вектор-потенциалу является следующее требование (калибровка Лоренца):

$$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (25.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что для неизменного во времени поля условие (25.12) сводится к условию $\text{div} A = 0$. В дальнейшем будет показано, что это условие является уравнением непрерывности $\text{div} \vec{\delta} = -\partial \rho / \partial t$ (§ 22.3), записанным в иной форме.

Вместе с тем уравнение (25.12) свидетельствует о том, что в переменном электромагнитном поле между векторным потенциалом A и скалярным потенциалом φ существует связь и что функции A и φ зависят друг от друга.

С учетом (25.12) уравнение (25.11) приобретает вид

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta} \quad (25.13)$$

и называется *уравнением Даламбера*.

Если \vec{A} не является функцией t , то $\partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = 0$ и уравнение (25.13) переходит в уравнение Пуассона.

Уравнение (25.13) является неоднородным векторным волновым уравнением. Его часто записывают в иной форме:

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (25.13a)$$

Оператор $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ называют *четырёхмерных лапласианом* (за четвертое измерение принимают время t).

Выясним, какому уравнению в переменном электромагнитном поле подчиняется потенциал φ . С этой целью в уравнение (25.4) вместо напряженности \vec{E} подставим ее эквивалент по (25.10):

$$\operatorname{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \frac{\rho}{\epsilon_a} \quad \text{или} \quad -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Но

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

и, следовательно,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

В свою очередь

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi.$$

Поэтому уравнение (25.4) приобретает следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (25.14)$$

Таким образом, в переменном электромагнитном поле скалярный потенциал φ удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (25.14). Если поле статическое и потенциал не является функцией времени, то $\partial^2 \varphi / \partial t^2 = 0$ и уравнение (25.14) переходит в уравнение Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_a$, обсуждавшееся в § 19.19.

Для того чтобы убедиться в том, что уравнение (25.12) совпадает с уравнением непрерывности (22.3), проделаем следующие выкладки.

Применим оператор \square^2 к обеим частям уравнения (25.12):

$$\square^2 \operatorname{div} \vec{A} = -\square^2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Внесем оператор \square^2 под знак дивергенции и под знак производной по времени. Получим

$$\operatorname{div} \square^2 \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \square^2 \varphi. \quad (25.15)$$

В соответствии с (25.13а) в (25.15) вместо $\square^2 \vec{A}$ подставим $-\mu_a \vec{\delta}$, а вместо $\square^2 \varphi$ подставим $-\rho/\epsilon_a$. Будем иметь

$$-\operatorname{div} \mu_a \vec{\delta} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \rho}{\partial t \epsilon_a}. \quad (25.15a)$$

Вынесем μ_a из-под знака дивергенции, а ϵ_a — из-под знака производной по времени, поменяем знаки и разделим обе части равенства на μ_a :

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{1}{v^2 \epsilon_a \mu_a} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (25.16)$$

Так как $(v^2 \epsilon_a \mu_a)^{-1} = 1$, то уравнение (25.16) есть уравнение непрерывности $\operatorname{div} \vec{\delta} = -\partial \rho / \partial t$.

Обсудим вопрос о решении уравнения (25.14). Запишем решение уравнения для двух частных случаев: для случая, когда $\partial^2 \varphi / \partial t^2 = 0$, но $\rho / \epsilon_a \neq 0$, и когда $\rho / \epsilon_a = 0$, но $\partial^2 \varphi / \partial t^2 \neq 0$. После этого на основании физических соображений запишем решение уравнения (25.14) в общем виде, так что оно будет переходить в известные решения для частных случаев.

Если $\partial^2 \varphi / \partial t^2 = 0$, то уравнение (25.14) переходит в уравнение Пуассона, общее решение которого известно из раздела электростатики (см. § 19.19):

$$\varphi = \frac{1}{4 \pi \epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{R}.$$

Составляющая потенциала φ от элементарного заряда ρdV равна $\frac{1}{4 \pi \epsilon_a} \frac{\rho dV}{R}$.

При $\rho = 0$ уравнение (25.14) приобретает вид волнового уравнения:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (25.17)$$

В частном случае для плоской волны φ зависит только от пространственной координаты z :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (25.17a)$$

Решением (25.17а) является выражение:

$$\varphi = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v).$$

Причем функции f_1 и f_2 могут быть любыми, лишь бы они позволяли дважды дифференцировать их по t и z . Вид функций определяется граничными условиями.

Функция $f_1(t - z/v)$ представляет собой падающую волну, распространяющуюся в направлении оси $+z$, функция $f_2(t + z/v)$ это отраженная волна, двигающаяся в направлении оси $-z$.

Напомним, что о волновом уравнении (25.17а) уже говорилось в гл. 12 при рассмотрении вопроса о переходных процессах в линиях с распределенными параметрами.

Чтобы определить, в каком направлении перемещается волна $f_1(t - z/v)$, надо выяснить, как должна изменяться z с увеличением времени t , чтобы аргумент функции $f_1(t - z/v)$

оставался постоянным, например равным нулю. Если принять $t - z/v = 0$, то $z = vt$, т. е. с ростом t увеличивается z . Это означает, что волна распространяется вдоль положительного направления оси z .

Покажем, что в сферической системе координат уравнению (25.17) удовлетворяет функция $f(t - z/v)/R$, где R — координата сферической системы; v — скорость распространения волны. Действительно, в сферической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

Так как в силу сферической симметрии φ является функцией только R , то $\partial \varphi / \partial \theta = 0$ и $\partial \varphi / \partial \alpha = 0$. Поэтому

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right). \quad (25.17б)$$

Если в (25.17б) подставить $f(t - z/v)/R$, то окажется, что

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R v^2} f''(t - R/v); \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{R v^2} f''(t - R/v).$$

Таким образом, функция $f(t - z/v)/R$ удовлетворяет уравнению (25.17) в сферической системе координат.

Для неизменного во времени поля (см. § 19.19)

$$\varphi = \frac{\rho dV}{4 \pi \epsilon_a R}$$

и в то же время решение для φ в пространстве, не занятом зарядами, имеет вид

$$\varphi = f(t - R/v)/R.$$

Сопоставляя эти два выражения, находим

$$f(t - R/v) = \frac{\rho(t - R/v) dV}{4 \pi \epsilon_a}.$$

Таким образом, составляющая потенциала от заряда $\rho(t) dV$, изменяющегося во времени, на расстоянии R от него равна

$$\frac{\rho(t - R/v) dV}{4 \pi \epsilon_a R}. \quad (25.18)$$

Выражение $\rho(t - R/v)$ следует понимать так: объемный заряд ρ является функцией аргумента $(t - R/v)$. Результирующее значение потенциала получим, если просуммируем составляющие потенциала от зарядов, распределенных в объеме V :

$$\varphi = \frac{1}{4 \pi \epsilon_a} \int_V \frac{\rho(t - R/v) dV}{R}. \quad (25.19)$$

Обсудим решение уравнения (25.13). В общем случае это уравнение можно разбить на три уравнения для трех проекций вектор-потенциала^{*)}. Каждое из уравнений в проекциях будет составлено относительно скалярной величины (проекция вектора есть величина скалярная). Общее решение для каждой из проекций проводится точно так же, как проводилось решение для скалярной величины φ , но вместо объемного заряда будет участвовать соответствующая проекция плотности тока и μ_a вместо $1/\epsilon_a$.

После умножения решений на соответствующие орты и сложения окажется, что составляющая вектор-потенциала от элемента тока $\vec{\delta} dV$ в некоторой точке пространства, удаленной от элемента тока на расстояние R , имеет вид

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta}(t - R/v) dV}{4 \pi R}. \quad (25.20)$$

Для получения результирующего значения \vec{A} необходимо геометрически просуммировать составляющие от всех элементов тока:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4 \pi} \int_V \frac{\vec{\delta}(t - R/v) dV}{R}. \quad (25.21)$$

§ 25.2. Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля. Рассмотрим, в чем физический смысл выражений (25.18) и (25.20). Электромагнитная волна распространяется со скоростью v . Расстояние R она пройдет за время R/v . Поэтому значение составляющей потенциала φ в переменном электромагнитном поле в некоторой точке, удаленной от заряда на расстояние R в момент времени t , определяется значением заряда в момент времени $(t - R/v)$. Так же следует понимать и выражение

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta}(t - R/v) dV}{4 \pi R}.$$

В силу конечной скорости распространения электромагнитной волны значение вектор-потенциала от элемента тока $\vec{\delta} dV$ в точке, удаленной от элемента тока на расстояние R , изменяется с запаздыванием во времени на величину R/v . Поэтому потенциалы переменного электромагнитного поля называют *запаздывающими потенциалами*.

^{*)} Подобно тому, как это сделано в § 21.13.

Так как скорость распространения электромагнитной волны в диэлектрике очень велика (в воздухе $v \approx 300000$ км/с), то запаздывание проявляется заметно только при значительных R . При малых R запаздывание настолько мало, что им практически можно пренебречь.

Наиболее часто понятием запаздывающих потенциалов пользуются в радиотехнике при рассмотрении вопросов, связанных с излучением электромагнитной энергии.

§ 25.3. Комплексная форма записи запаздывающего векторного потенциала. В гл. 21 [см. уравнение (21.27)] отмечалось, что составляющая векторного потенциала от элемента линейного тока $i d\vec{l}$ записывается как

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i d\vec{l}}{R}.$$

В переменном электромагнитном поле с учетом явления запаздывания имеем

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i(t - R/v)}{R} d\vec{l}.$$

Ток i может изменяться во времени по любому закону. С практической точки зрения наиболее интересен синусоидальный закон изменения тока во времени, поэтому полагаем

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Ток можно представить в показательной форме $\dot{I}_m e^{j\omega t}$, где $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$ (строго говоря, надо было бы написать еще символ взятия мнимой части, но его часто опускают). Ток $i(t - R/v) = I_m \sin[\omega(t - R/v) + \psi]$ или в показательной форме $\dot{I}_m e^{j\omega(t - R/v)}$. Следовательно, комплексную амплитуду вектор-потенциала от элемента тока $d\vec{l} I_m \sin(\omega t + \psi)$ можно записать так:

$$d\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{\dot{I}_m e^{j\omega(t - R/v)} d\vec{l}}{R}. \quad (25.22)$$

Аналогично, если электрические заряды, создающие поле, меняются во времени по синусоидальному закону, то комплексная амплитуда потенциала ϕ от объемного заряда $\dot{\rho}_m e^{j\omega t} dV$ записывается выражением

$$\dot{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \frac{\dot{\rho}_m e^{j\omega(t - R/v)} dV}{R}. \quad (25.23)$$

Пример 224. Найти закон изменения векторного потенциала от тока $100 \sin(10^5 t + 30^\circ)$ А, протекающего по элементу проводника длиной $dl = 30$ см, в точке, удаленной от элемента тока на расстояние $R = 100$ км, $\mu_a = \mu_0$.

Решение.

$$dA = \frac{\mu_0 I_m \sin[\omega(t - R/v) + \psi] dl}{4\pi R} =$$

$$= \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 0,3 \cdot 100 \sin[10^5(t - 100/300000) + 30^\circ]}{4 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^{-11} \sin(10^5 t - 80^\circ) \text{ В} \cdot \text{с/м};$$

$$33 \text{ рад} \approx 110^\circ; \quad -110^\circ + 30^\circ = -80^\circ.$$

§ 25.4. Излучение электромагнитной энергии. Рассмотрим вопрос об излучении электромагнитной энергии элементом тока. Пусть по отрезку проводника длиной dl , находящемуся в воздухе ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$), протекает ток $I_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 25.1). Далее будем пользоваться цилиндрической и отчасти сферической системами координат. Ось z цилиндрической системы направим вдоль проводника. Пусть положительное направление тока по проводнику совпадает с положительным направлением оси z .

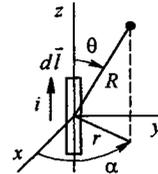


Рис. 25.1

Найдем значение вектор-потенциала в произвольной точке, удаленной от элемента тока на расстояние R . В соответствии с (25.22)

$$d\dot{A} = \frac{\mu_a I_m e^{j\omega(t-R/v)} d\vec{l}}{4\pi R},$$

или, если исключить множитель $e^{j\omega t}$,

$$d\dot{A} = \frac{\mu_a I_m e^{-j\omega R/v} d\vec{l}}{4\pi R}.$$

Направление $d\dot{A}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{l}$ (вдоль оси z). Найдем магнитную индукцию в произвольной точке поля: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Раскроем ротор в цилиндрической системе координат:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \vec{r}^\circ \left(\frac{\partial \dot{A}_z}{r \partial \alpha} - \frac{\partial \dot{A}_\alpha}{\partial z} \right) + \vec{\alpha}^\circ \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial (r \dot{A}_\alpha)}{\partial r} - r \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \alpha} \right).$$

Так как \dot{A} имеет единственную составляющую \dot{A}_z и она зависит только от R и в силу симметрии поля не зависит от α , то

$$\vec{B} = \vec{\alpha}^\circ \left(-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right). \tag{25.24}$$

Из формулы (25.24) следует, что магнитная индукция имеет α -е направление. Для нахождения комплекса магнитной индукции надо вычислить $-\partial \dot{A}_z / \partial r$; \dot{A}_z зависит в явном виде от R , а не от r . Поэтому

^{*)} В дальнейшем для сокращения записи вместо $d\dot{A}$ будем писать \dot{A} .

$$-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (25.25)$$

Для любой точки пространства справедливо, очевидно, вытекающее из теоремы Пифагора соотношение

$$z^2 + r^2 = R^2. \quad (25.26)$$

Продифференцируем (25.26) по r , получим

$$2r = 2R \frac{\partial R}{\partial r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R} = \sin \theta. \quad (25.27)$$

Составляющая \dot{A}_z состоит из произведения двух функций R : $e^{-j\omega R/v}$ и $1/R$. Поэтому

$$\dot{B} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \dot{I}_m dl}{4\pi} \sin \theta \left(-\frac{1}{R^2} e^{-j\omega R/v} - j \frac{\omega}{vR} e^{-j\omega R/v} \right),$$

или

$$\dot{B} = \frac{\mu_0 \dot{I}_m dl \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{R^2} e^{-j\omega R/v} + j \frac{\omega}{vR} e^{-j\omega R/v} \right). \quad (25.28)$$

Выражение (25.28) можно переписать и в ином виде, перейдя к мгновенным значениям:

$$B = \frac{\mu_0 I_m dl \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{1}{R^2} \sin \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right) + \frac{\omega}{vR} \cos \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right) \right]. \quad (25.28a)$$

Формула (25.28a) позволяет сделать вывод, что в любой точке пространства магнитная индукция от элемента переменного тока имеет две составляющие, одна из них убывает обратно пропорционально квадрату радиуса и изменяется по закону синуса во времени, другая убывает обратно пропорционально первой степени радиуса и изменяется по закону косинуса во времени.

Найдем закон изменения напряженности электрического поля. В соответствии с первым уравнением Максвелла

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \text{rot } \dot{\vec{H}}. \quad (25.29)$$

Так как $\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{B}}/\mu_0$, то

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\alpha}} \circ \left[\frac{\dot{I}_m dl \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{R^2} e^{-j\omega R/v} + j \frac{\omega}{vR} e^{-j\omega R/v} \right) \right]. \quad (25.30)$$

Далее целесообразно перейти к сферической системе координат. Проекция $\text{rot } \dot{\vec{H}}$ в сферической системе следующие:

$$\text{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\alpha) - \frac{\partial \dot{H}_\theta}{\partial \alpha} \right];$$

$$\text{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \dot{H}_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\alpha);$$

$$\text{rot}_\alpha \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\theta) - \frac{\partial \dot{H}_R}{\partial \theta} \right].$$

Так как $\dot{H}_\theta = 0$, $\dot{H}_R = \theta$, то

$$\text{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\alpha); \quad (25.31)$$

$$\text{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\alpha). \quad (25.32)$$

Найдем проекцию $\text{rot } \dot{\vec{H}}$ на направление R :

$$\text{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{\dot{I}_m dl \cos \theta e^{-j\omega R/v}}{2\pi R^3} + \frac{\dot{I}_m dl \cos \theta j \omega e^{-j\omega R/v}}{2\pi R^2 v}. \quad (25.33)$$

В свою очередь проекция $\text{rot } \dot{\vec{H}}$ на направление θ по формуле (25.32)

$$\text{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = \frac{\dot{I}_m dl \sin \theta e^{-j\omega R/v}}{4\pi R^3} + \frac{\dot{I}_m dl \sin \theta j \omega e^{-j\omega R/v}}{4\pi R^2 v} - \frac{\dot{I}_m dl \sin \theta \omega^2 e^{-j\omega R/v}}{4\pi R v^2}. \quad (25.34)$$

Для того чтобы получить проекции $\dot{\vec{E}}$ на направления R и θ , необходимо соответствующие проекции $\text{rot } \dot{\vec{H}}$ разделить на $j \omega \epsilon_0$ [см. уравнение (25.29)]:

$$\dot{E}_\theta = \frac{-j \dot{I}_m dl \sin \theta e^{-j\omega R/v}}{4\pi R^3 \omega \epsilon_0} + \frac{\dot{I}_m dl \sin \theta e^{-j\omega R/v}}{4\pi \epsilon_0 R^2 v} + \frac{j \dot{I}_m dl \sin \theta \omega e^{-j\omega R/v}}{4\pi R v^2 \epsilon_0}; \quad (25.35)$$

$$\dot{E}_R = \frac{-j \dot{I}_m dl \cos \theta e^{-j\omega R/v}}{2\pi R^3 \omega \epsilon_0} + \frac{\dot{I}_m dl \cos \theta e^{-j\omega R/v}}{2\pi R^2 v \epsilon_0}. \quad (25.36)$$

Таким образом, напряженность электрического поля имеет две составляющие: одна направлена по θ , другая — по R ; \dot{E}_θ содержит три слагаемых [см. уравнение (25.35)], изменяющихся обратно пропорционально

соответственно третьей, второй и первой степеням расстояния R ; \dot{E}_R состоит из двух слагаемых, изменяющихся обратно пропорционально R^3 и R^2 . Частное

$$\frac{v}{\omega} = \frac{v}{2\pi f} = \frac{vT}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Отношение модуля первого слагаемого в (25.33) к модулю второго равно $\lambda/(2\pi R)$ (λ — длина волны).

Если $R \gg \lambda/(2\pi)$, то первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь; если $R \ll \lambda/(2\pi)$, то, наоборот, можно пренебречь вторым слагаемым. Аналогичные соотношения имеют место между модулями слагаемых в (25.34).

Принято все поле делить на ближнюю, среднюю и дальнюю зоны. Для ближней зоны $R \ll \lambda/(2\pi)$; для дальней $R \gg \lambda/(2\pi)$. В средней зоне R соизмеримо с $\lambda/(2\pi)$.

В соответствии с этим для ближней зоны

$$\left. \begin{aligned} \dot{H} &= \bar{\alpha}^\circ \frac{\dot{I}_m dl \sin \theta e^{-j\omega R/v}}{4\pi R^2}; & \dot{E}_\theta &= \frac{-j \dot{I}_m dl \sin \theta e^{-j\omega R/v}}{4\pi R^3 \omega \epsilon_0}; \\ \dot{E}_R &= \frac{-j \dot{I}_m dl \cos \theta e^{-j\omega R/v}}{2\pi R^3 \omega \epsilon_0}; \end{aligned} \right\} (25.37)$$

для дальней зоны

$$\dot{H} = \frac{\bar{\alpha}^\circ j \dot{I}_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2R\lambda}; \quad \dot{E}_\theta = \frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} j \dot{I}_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2R\lambda}. \quad (25.38)$$

Запишем мгновенные значения H и E для дальней зоны:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= \frac{I_m dl \sin \theta}{2R\lambda} \cos(\omega t - \omega R/v + \psi); \\ E_\theta &= \frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} I_m dl \sin \theta}{2R\lambda} \cos(\omega t - \omega R/v + \psi). \end{aligned} \right\} (25.39)$$

Таким образом, в дальней зоне, т. е. в зоне, для которой $R \gg \lambda/(2\pi)$, напряженность магнитного поля имеет только одну α -составляющую, а напряженность электрического поля — только одну θ -составляющую [см. формулу (25.38)]. Если провести сферу радиусом R , то во всех точках этой сферы (назовем ее эквифазной поверхностью) H имеет одну и ту же фазу колебания в какой-то конкретный момент времени (фаза колебания определяется аргументом косинуса). Амплитуда H для точек сферы $R = \text{const}$ различна, она зависит от угла θ ; на «полюсах» при $\theta = 0$ и при $\theta = 180^\circ$ амплитуда колебания для любого момента времени равна нулю, так как $\sin 0 = \sin 180^\circ = 0$, амплитуда колебания максималь-

на на «экваторе» сферы при $\theta = 90^\circ$. По фазе H и E совпадают [см. уравнения (25.39)]. Модуль E в $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = Z_b$ раз больше модуля H , т. е. $E = H Z_b$.

Диаграмму зависимости модуля E и H в дальней зоне от угла θ принято называть *диаграммой направленности*. Она будет представлять собой объемную фигуру — тор, сечение которого плоскостью, проходящей через полярную ось, представляет собой две соприкасающиеся окружности (рис. 25.2, а).

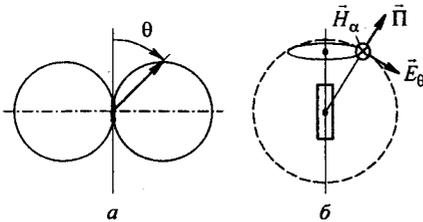


Рис. 25.2

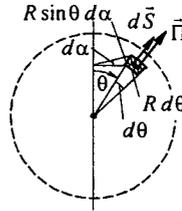


Рис. 25.3

Составим выражение вектора Пойнтинга для дальней зоны: $\vec{\Pi} = [\vec{E}_\theta \vec{H}_\alpha] = \vec{\Pi}_R$. Векторное произведение двух векторов, один из которых имеет θ -е направление, а другой — α -е, дает вектор $\vec{\Pi}$, направленный по радиусу (рис. 25.2, б). Так как H и E в дальней зоне совпадают по фазе, то с изменением направления H на противоположное (H изменяется во времени по косинусоиде) одновременно меняется на противоположное и направление вектора E . Но вектор $\vec{\Pi}$ своего направления не меняет, он все время направлен вдоль радиуса.

Найдем модуль вектора Пойнтинга. С этой целью умножим модуль E на модуль H :

$$\Pi = \frac{Z_b (dl)^2 I_m^2 \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - \omega R/v + \psi)}{4 R^2 \lambda^2}. \quad (25.40)$$

Среднее значение модуля вектора Пойнтинга за период $T = 2\pi/\omega$

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{Z_b (dl)^2 I_m^2 \sin^2 \theta}{8 R^2 \lambda^2}.$$

Подсчитаем поток вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R . Элемент $d\vec{S}$ сферической поверхности радиусом R направлен по радиусу. Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ также направлен по радиусу. Угол между ними равен нулю (рис. 25.3).

Элемент сферической поверхности можно рассматривать как криволинейный квадрат, площадь его (см. рис. 25.3):

$$dS = R d\theta R \sin \theta d\alpha = R^2 \sin \theta d\theta d\alpha; \quad \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi;$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = - \int_1^{-1} \sin^2 \theta d\cos \theta = \int_1^{-1} (\cos^2 \theta - 1) d\cos \theta = \frac{4}{3}.$$

Заменим I_m^2 на $2I^2$ (I — действующее значение тока). В результате окажется, что поток вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R , представляющий собой мощность P_s , излученную элементом тока, не зависит от радиуса и равен

$$\oint \bar{\Pi} d\bar{S} = P_s = R_s I^2, \quad (25.41)$$

где

$$R_s = \frac{2}{3} \frac{\pi Z_0 (dl)^2}{\lambda^2}. \quad (25.42)$$

Величину R_s называют *сопротивлением излучения*. Чем больше R_s , тем больше излученная мощность при том же токе I . Сопротивление излучения прямо пропорционально квадрату длины излучателя и, что особенно важно, обратно пропорционально квадрату длины волны λ .

Так как длина волны $\lambda = v/f$, то излученная мощность прямо пропорциональна квадрату частоты. Если частота мала, например всего 50 Гц, то излучения практически нет. При радиочастоте излучение значительно. Например, при частоте $50 \cdot 10^6$ Гц излучение больше, чем при частоте 50 Гц, в 10^{12} раз.

Пример 225. По отрезку линейного провода длиной $dl = 3$ см протекает переменный ток $I = 0,2$ А. Частота тока $f = 10^9$ Гц. Найти сопротивление и мощность излучения.

Решение. Длина волны $\lambda = 30$ см. По формуле (25.42)

$$R_s = \frac{2}{3} \frac{\pi \cdot 377 \cdot 3^2}{30^2} = 7,8 \text{ Ом.}$$

По формуле (25.41) $P_s = R_s I^2 = 7,8 \cdot 0,2^2 = 0,312$ Вт.

§ 25.5. Понятие об излучающем диполе. При выводе формул § 25.4 в качестве излучателя электромагнитной энергии был взят небольшой отрезок провода, по которому протекал синусоидальный ток. Но точно

такие же формулы были бы получены, если бы вместо элемента тока был взят излучающий диполь. Под *излучающим диполем* понимают отрезок линейного провода с сосредоточенными на концах его емкостями в виде шаров (рис. 25.4, а).

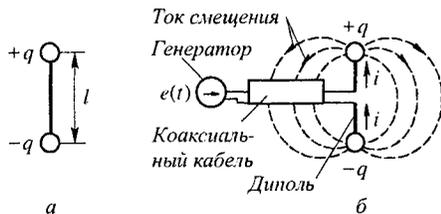


Рис. 25.4

Полагают, что длина диполя l много меньше длины волны λ и сечение провода ничтожно мало. При этих условиях распределенную емкость самого проводника в первом приближении можно не принимать во внимание и учитывать только емкости шаров.

На рис. 25.4, б показана схема, в которой генератор синусоидального напряжения высокой частоты через коаксиальный кабель присоединен к

двум вертикально расположенным проводникам (изображены «жирными» линиями), соединенным в свою очередь с двумя шарами (шариками) диполя.

Под воздействием напряжения генератора шарики диполя периодически перезаряжаются. Положим, что заряд верхнего шарика q изменяется по закону $-Q_m \cos(\omega t)$, а заряд нижнего шарика — по закону $Q_m \cos(\omega t)$. Тогда по вертикальным проводникам при периодической перезарядке шариков будет протекать ток проводимости $i = dq/dt = \omega Q_m \sin(\omega t)$. Этот ток замыкается через диэлектрик в виде тока смещения, как показано на рис. 25.4, б.

Важно обратить внимание на то, что по двум вертикальным проводникам (длиной $l/2$ каждый) при периодической перезарядке шариков протекает ток проводимости i , т. е. два вертикальных проводника длиной $l/2$ (или $dl/2$) с током i , которыми соединены шарики диполя, представляют собой элемент тока $i\vec{l}$ (или $i d\vec{l}$), о котором шла речь в § 25.4.

Посредине элемента тока на рис. 25.4, б есть разрыв, а в элементе тока (см. рис. 25.1) разрыва нет. Но это не имеет существенного значения, так как разрыв может быть весьма малым по сравнению с длиной l (dl).

Таким образом, все выводы § 25.4, сделанные по отношению к элементу тока $i d\vec{l}$, применимы и к излучателю в виде диполя, т. е. излучателю, составленному двумя периодически перезаряжающимися шариками, соединенными тонким проводником.

§ 25.6. Дополнительный анализ поля излучения. Как уже говорилось в § 25.4, в ближней зоне излучателя основную роль играют составляющие напряженности электрического поля E_θ и E_R , обратно пропорциональные третьей степени расстояния рассматриваемой точки до излучателя.

Эти составляющие на 90° отстают по фазе от протекающего по проводнику тока. Иначе говоря, они по фазе совпадают с зарядом одного из шаров излучающего диполя.

Из предыдущего [см. формулы (19.74), (19.75)] известно, что напряженность электрического поля, созданного диполем, заряды которого неизменны во времени, также обратно пропорциональна третьей степени расстояния рассматриваемой точки до центра диполя.

Следовательно, для определения мгновенного значения напряженности электрического поля излучающего диполя в ближней зоне практически можно пользоваться формулами, вытекающими из закона Кулона. В свою очередь, напряженность магнитного поля в ближней зоне излучателя [см. формулу (25.37)] обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки до элемента тока и по фазе совпадает с током.

Из закона Био—Савара—Лапласа [см. формулу (21.36)] следует, что напряженность магнитного поля, создаваемого элементом постоянного тока, также обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки до элемента тока. На основании этого можно сделать вывод, что в ближней зоне (при $R \ll \lambda$) для определения мгновенного

значения напряженности магнитного поля практически можно пользоваться формулой Био—Савара—Лапласа. Применимость формул, описывающих статические поля, для подсчета мгновенных значений E и H переменных полей в ближней зоне (при $R \ll \lambda$), объясняется тем, что в ближней зоне можно пренебречь запаздыванием.

Границы ближней зоны зависят от частоты. Так, например, при $f = 50$ Гц $\lambda = 6 \cdot 10^6$ м; при $f = 10^{10}$ Гц $\lambda = 3$ см. Следовательно, при частоте 50 Гц законами Кулона и Био—Савара—Лапласа практически можно пользоваться при любом расстоянии точки до элемента тока или диполя. Совершенно иная картина будет при частоте 10^{10} Гц. В этом случае границы ближней зоны удалены от излучателя всего на доли сантиметра и все пространство вокруг него следует рассматривать как дальнюю зону. В дальней зоне «кулонова» составляющая напряженности электрического поля ничтожно мала по сравнению с волновой составляющей E , а «био—саварова» составляющая напряженности магнитного поля ничтожно мала по сравнению с волновой составляющей H .

В ближней зоне поток вектора Пойнтинга имеет две составляющие: первая изменяется во времени по закону $\sin 2\omega t$ или $\cos 2\omega t$; вторая — по закону $\sin^2 \omega t$ или $\cos^2 \omega t$.

При подсчете потока вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R в ближней зоне за период переменного тока оказывается, что поток от первой составляющей равен нулю, поскольку среднее за период значение функции $\sin 2\omega t$ или $\cos 2\omega t$ равно нулю; поток от второй составляющей отличен от нуля. Физически это означает, что в ближней зоне происходит два качественно различных в энергетическом отношении процесса.

Первый — это процесс периодического обмена энергией между источником энергии, к которому присоединен излучатель, и ближней зоной. Энергия то забирается от источника и накапливается в электромагнитном поле ближней зоны, то отдается обратно источнику. Этот процесс характерен для «кулонова» и «био—саварова» полей ближней зоны.

Второй — это процесс излучения энергии, характеризующий волновой процесс в ближней зоне. Излученная энергия составляет относительно небольшую величину по сравнению с энергией, периодически накапливаемой в электромагнитном поле ближней зоны и затем отдаваемой источнику питания.

От излучателя в пространство распространяются электромагнитные волны^{*)}. Эти волны для фиксированного момента времени схематически можно представить рис. 25.5, а. На нем линии E образуют замкнутые фигуры, лежащие в меридиональных плоскостях. Линии E охвачены линиями H , которые представляют собой окружности с центром на оси

^{*)} Существование электромагнитных волн экспериментально было доказано Г. Герцем в 1887—1888 гг. Справедливость электромагнитной теории света была подтверждена опытами П.Н. Лебедева в 1895 г., который измерил световое давление, теоретически предсказанное Дж.К. Максвеллом. А.С. Поповым 7 мая 1895 г. на заседании Русского физико-химического общества был прочитан доклад об успешно проведенных опытах по приему и передаче радиосигналов. Поэтому 7 мая отмечают как День радио.

элемента тока. Чтобы не загромождать рис. 25.5, а, на нем изображены всего две линии E и две линии H .

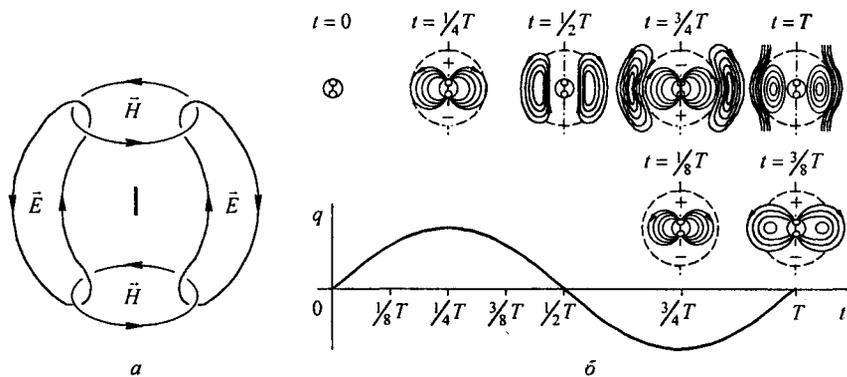


Рис. 25.5

Линии напряженности электрического поля в меридиональной плоскости для волновой зоны излучателя при различных моментах времени представлены на рис. 25.5, б, где изображена также кривая изменения заряда излучающего диполя в функции времени. Чем больше становятся абсолютные значения зарядов диполя, тем большее количество линий E начинается или соответственно оканчивается на них.

По мере распространения электромагнитной волны в окружающее пространство форма линий E непрерывно меняется. Когда абсолютные значения зарядов диполя начинают уменьшаться, начинает уменьшаться и число исходящих из них линий E . При этом образуются замкнутые на себя линии E . Пакет замкнутых на себя линий E сцеплен с пронизывающими этот пакет линиями H (см. рис. 25.5, а). В следующий полупериод, когда заряды шаров меняют знаки на противоположные, образуется аналогичный пакет замкнутых на себя линий E , отличающийся от предыдущего лишь направлением вихря E .

§ 25.7. Теорема взаимности для ЭДС, наведенных излученным полем. Положим, что в дальней зоне излучателя длиной $d\vec{l}_1$ с током $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 25.6) на расстоянии R от него находится элемент $d\vec{l}_2$ приемной антенны [небольшой кусок провода ($d\vec{l}_2 \ll R$)], расположенный по направлению напряженности поля \vec{E}_{θ_1} , создаваемой элементом $i d\vec{l}_1$. Элементы $d\vec{l}_1$, $d\vec{l}_2$ и радиус R находятся в одной меридиональной плоскости.

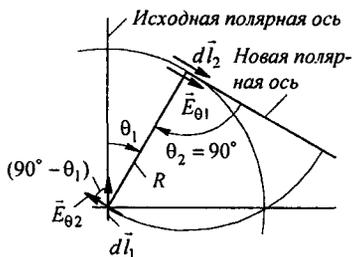


Рис. 25.6

Все пространство вокруг излучателя однородно и изотропно и не содержит сред с нелинейными свойствами. В элементе $d\vec{l}_2$ наводится ЭДС

$e_2 = \vec{E}_{\theta_1} d\vec{l}_2 = E_{\theta_1} dl_2 \cos 0 = E_{\theta_1} dl_2$. Используя формулу (25.39), определяем

$$e_2 = \frac{Z_{\text{в}} I_m dl_1 dl_2 \sin \theta_1}{2 R \lambda} \cos(\omega t - \omega R/v + \psi). \quad (\text{а})$$

После этого излучателем сделаем элемент $d\vec{l}_2$, пропустив по нему ток i , и определим ЭДС e_1 , наведенную излученным полем в отрезке $d\vec{l}_1$. Для этого воспользуемся новой системой координат, совместим центр ее с серединой отрезка $d\vec{l}_2$ и направим полярную ось по $d\vec{l}_2$. Отрезки $d\vec{l}_1$, $d\vec{l}_2$ и радиус R , как и ранее, будут находиться в одной меридиональной плоскости. Так как угол между радиусом R и отрезком $d\vec{l}_2$ равен 90° , а \vec{E}_{θ_2} перпендикулярна радиусу R , то $\theta_2 = 90^\circ$. При этом угол между \vec{E}_{θ_2} и $d\vec{l}_1$ составляет $90^\circ - \theta_1$. ЭДС, наведенная в элементе $d\vec{l}_1$ током i в элементе $d\vec{l}_2$, описывается выражением

$$\begin{aligned} e_1 &= \vec{E}_{\theta_2} d\vec{l}_1 = E_{\theta_2} dl_1 \cos(90^\circ - \theta_1) = \\ &= \frac{Z_{\text{в}} I_m dl_2 dl_1 \sin \theta_1}{2 R \lambda} \cos(\omega t - \omega R/v + \psi). \quad (\text{б}) \end{aligned}$$

Сопоставляя (а) и (б), устанавливаем, что $e_1 = e_2$. Это положение принято называть *теоремой взаимности для ЭДС, наведенных излученным полем*. Теорему используют при расчете излучающих и приемных антенн.

Убедимся в том, что эта теорема имеет место и в том случае, когда элемент $d\vec{l}_2$ и \vec{E}_{θ_1} по направлению не совпадают. С этой целью повернем отрезок $d\vec{l}_2$ в пространстве на угол $\Delta\alpha$ сферической системы так, что средняя точка этого отрезка останется на прежнем месте. В этом случае в правой части формулы (а) вместо $d\vec{l}_2$ будет проекция повернутого отрезка $d\vec{l}_2$ на направление \vec{E}_{θ_1} , т. е. $dl_2 \cos \Delta\alpha$. Если теперь пропустить ток i по повернутому на угол $\Delta\alpha$ отрезку $d\vec{l}_2$, то, как и на рис. 25.6, вектор \vec{E}_{θ_2} будет по-прежнему перпендикулярен радиусу R , но \vec{E}_{θ_2} на угол $\Delta\alpha$ повернется по отношению к своему положению, показанному на рис. 25.6. В соответствии с этим в правой части формулы (б) для ЭДС e_1 появится множитель $\cos \Delta\alpha$, т. е. и в этом случае $e_1 = e_2$. Аналогичными рассуждениями убедимся в равенстве $e_1 = e_2$, если отрезок повернем около его средней точки на угол $\Delta\theta$, а в более общем случае и на углы $\Delta\alpha$ и $\Delta\theta$.

В теории поля пользуются понятием взаимного сопротивления двух излучателей. Положим, что первый элемент $d\vec{l}_1$ на рис. 25.6 является излучающей антенной, второй — приемной. Напряжение U_2 на элементе $d\vec{l}_2$, отсчитываемое в направлении $d\vec{l}_2$, пропорционально току I_1 в элементе $d\vec{l}_1$, поэтому $U_2 = Z_{21} I_1$.

Если второй элемент будет излучающей антенной с током I_2 , а первый — приемной, то в направлении $d\vec{l}_1$ напряжение $U_1 = Z_{12} I_2$. На основании теоремы взаимности $Z_{12} = Z_{21}$, и для расположения излучателей в соответствии с рис. 25.6

$$Z_{12} = Z_{21} = -j \frac{\sqrt{\mu_a / \epsilon_a} dl_1 dl_2}{2 R \lambda} e^{-j \omega R / v} \quad (B)$$

§ 25.8. Принцип двойственности. Излучение магнитного диполя.
 В § 19.47 и 25.5 шла речь об электрическом диполе, обладающем электрическим моментом $\vec{P}_3 = q_3 \vec{l}$. В теории поля пользуются также понятием магнитного диполя. Магнитный диполь образован двумя магнитными зарядами q_m и $-q_m$, расположенными на расстоянии l . Диполь обладает магнитным моментом $\vec{P}_m = q_m \vec{l}$ (рис. 25.7, а).

Из § 14.24 известно, что виток (рамка) с током i , охватывающим площадь S , также обладает магнитным моментом $\vec{P}_m = i \vec{S}$ (рис. 25.7, б).

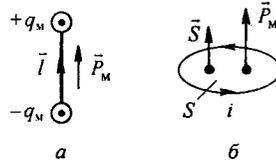


Рис. 25.7

Магнитный диполь можно рассматривать как расчетный эквивалент витка с током, если равны их магнитные моменты, т. е. если $q_m \vec{l} = i \vec{S}$. Изменение тока в рамке соответствует изменению магнитных зарядов диполя по времени и протеканию между ними «магнитного тока смещения». Излучение энергии рамкой с током в расчетном смысле можно представить как излучение магнитного диполя.

Если обратиться к уравнениям Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \epsilon_a \partial \vec{E} / \partial t$ и $\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \partial \vec{H} / \partial t$, то нетрудно заметить, что первое уравнение получается из второго, а второе из первого, если заменить H на \vec{E} , а ϵ_a на $-\mu_a$. Это свойство уравнений Максвелла называют *принципом двойственности*. Его применяют для решения задач электродинамики, двойственных уже решенным.

Так, имея решение для поля, создаваемого электрическим диполем, получают решение для поля, создаваемого магнитным диполем, т. е. рамкой с синусоидально изменяющимся током (считая, что координаты R , α , θ выбраны в соответствии с рис. 25.1). Так как в случае электрического диполя $i = dq/dt$, то при $i = I_m \sin \omega t$ имеем $I_m = j \omega \dot{q}_m$, а $\dot{I}_m dl = j \omega \dot{q}_m dl = j \omega \dot{P}_3$.

Подставив в (25.38) $j \omega \dot{P}_3$ вместо $\dot{I}_m dl$, запишем формулу для напряженности магнитного поля в дальней зоне через электрический момент \dot{P}_3 :

$$\dot{H}_\alpha = - \frac{\omega \dot{P}_3 \sin \theta e^{-j \omega R / v}}{2 R \lambda}$$

В соответствии с принципом двойственности в этой формуле заменим \dot{H}_α на \dot{E}_α и \dot{P}_3 на $\dot{P}'_m = -\mu_a \dot{I}_m S$. Получим формулу для комплексов напряженности электрического поля в дальней зоне магнитного диполя:

$$\dot{E}_\alpha = \frac{\omega \mu_a \dot{I}_m S \sin \theta e^{-j \omega R / v}}{2 R \lambda} \quad (25.43)$$

и формулу для комплекса напряженности магнитного поля в дальней зоне

$$\dot{H}_\theta = -\frac{\omega \mu_a \dot{I}_m S \sin \theta e^{-j\omega R/v}}{2 R \lambda Z_b}. \quad (25.44)$$

Знаки правых частей формул для \dot{E}_α и \dot{H}_θ соответствуют направлению вектора Пойнтинга вдоль радиуса от излучателя.

§ 25.9. Рефракция электромагнитных волн. Под *рефракцией* здесь понимаем плавное изменение направления луча, показывающего путь вектора Пойнтинга в среде с гладко изменяющимся коэффициентом преломления n .

На рис. 25.8, *а* и *б* в среде 1 $\epsilon_{r1} = \text{const}$; в среде 2 на рис. 25.8, *а* ϵ_{r2} плавно возрастает вдоль оси z , а на рис. 25.8, *б* ϵ_{r2} плавно уменьшается. В каждой точке среды в соответствии со вторым законом Снеллиуса

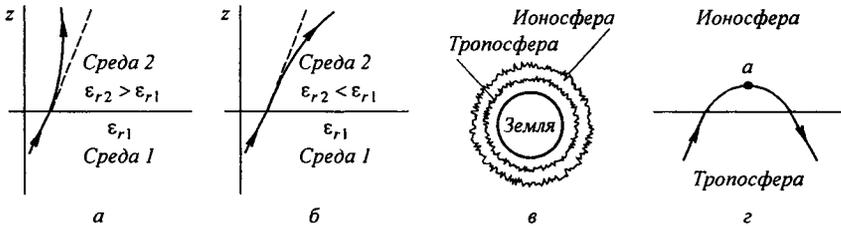


Рис. 25.8

луч на рис. 25.8, *а* поворачивается немного вверх, а на рис. 25.8, *б* немного вниз. Особенно существенно рефракция проявляется при распространении электромагнитных волн в плазме.

Земля окружена двумя сферическими слоями — *тропосферой* и *ионосферой* (рис. 25.8, *в*).

В тропосфере сосредоточено около 80 % массы воздуха. Верхняя граница ее находится примерно на расстоянии 15 км от поверхности земли. Тропосферный слой почти не оказывает влияния на распространение электромагнитных волн.

Иначе ведет себя ионосфера. Нижняя граница ее находится примерно на расстоянии 60 км от поверхности земли. Толщина ионосферного слоя несколько сот километров.

В ионосфере разреженный газ ионизирован рентгеновским и ультрафиолетовым излучением солнца. Свойства этого слоя зависят от концентрации свободных электронов, температуры, земного магнетизма и от частоты электромагнитной волны, распространяющейся в ионосфере (плазме). Коэффициент преломления плазмы n при удалении от поверхности земли уменьшается и в некоторой точке, в которой резонансная частота плазмы ω_0 становится равной частоте ω электромагнитной волны, коэффициент преломления n становится равным нулю. При этом луч сначала принимает горизонтальное положение в точке *а* (рис. 25.8, *г*), а затем направляется к земле.

§ 25.10. Распространение радиоволн в реальных условиях. Радиоволны от излучателя, находящегося в точке 1 рис. 25.9, а вблизи поверхности земли, к приемнику, находящемуся в точке 2, могут распространяться тремя путями:

- 1) под малым углом к горизонту вдоль поверхности земли — это так называемая земная волна (рис. 25.9, а);
- 2) отражаясь от ионосферы (рис. 25.9, б);
- 3) путем многократного отражения от ионосферы и от земли (рис. 25.9, в).

Кроме того радиосвязь может осуществляться с подводными объектами и объектами в космосе (в последнем случае в соответствии с рис. 25.9, з).

Распространение радиоволн зависит от того, каким путем дойдет волна до приемника, и от длины волны.

Если волна земная, то ее распространение сильно зависит от свойств поверхности земли на частоте волны, вдоль которой она распространяется, а если волна отражается от ионосферы, то от свойств ионосферы на частоте волны.

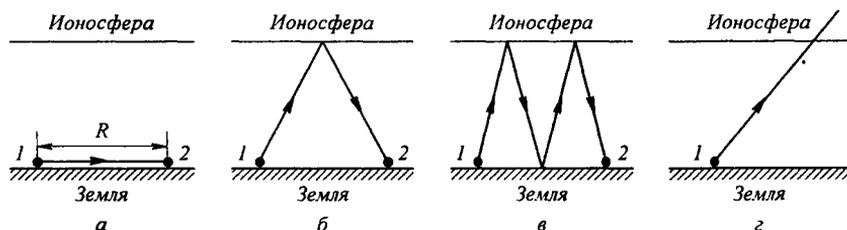


Рис. 25.9

Спектр практически используемых длин волн λ для радиосвязи и соответствующих им частот $f = v_c / \lambda$ (v_c — скорость света) условно подразделяют на следующие диапазоны:

- сверхдлинные $\lambda = (100 \dots 10)$ км, $f = (3 \dots 30)$ кГц;
- длинные $\lambda = (10 \dots 1)$ км, $f = (30 \dots 100)$ кГц;
- средние $\lambda = (1000 \dots 100)$ м, $f = (300 \dots 3000)$ кГц;
- короткие $\lambda = (100 \dots 10)$ м, $f = (3 \dots 30)$ МГц;
- ультракороткие с поддиапазонами: метровые $\lambda = (10 \dots 3)$ м, $f = (30 \dots 100)$ МГц; дециметровые $\lambda = (1 \dots 0,1)$ м, $f = (0,3 \dots 3)$ ГГц; сантиметровые $\lambda = (0,1 \dots 0,01)$ м, $f = (3 \dots 30)$ ГГц.

Поверхностный слой земли в общем случае является средой полупроводящей. Удельная проводимость сухой земли $\gamma = (1 \dots 200) \cdot 10^{-5}$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$ и ее относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r = 3 \dots 6$; влажная земля имеет $\gamma = (2 \dots 30) \cdot 10^{-3}$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$ и $\epsilon_r = 10 \dots 30$; пресная вода имеет $\gamma \approx 2,5 \cdot 10^{-2}$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$, $\epsilon_r \approx 80$.

В диапазоне длинных и сверхдлинных волн, т. е. при относительно низких частотах, земля — проводник ($\gamma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon_r$); при средних частотах — земля полупроводник, величины γ и $\omega \epsilon_0 \epsilon_r$ соизмеримы; при сверхвысоких частотах — земля диэлектрик ($\gamma \ll \omega \epsilon_0 \epsilon_r$).

Сверхдлинные волны используют для связи с подводными объектами, так как при низких частотах глубина проникновения $\Delta = \sqrt{2/\omega\gamma\mu_a}$ радиоволн в морскую воду оказывается достаточно значительной.

Длинные волны отражаются от ионосферы с малыми потерями, поэтому связь на них может осуществляться на больших расстояниях. Волны средневолнового диапазона могут доходить до приемника либо в виде волн, отраженных от ионосферы, либо в виде земной волны, либо одновременно этими двумя путями. Земная волна умеренно ослабляется потерями в земной поверхности, а волна средневолнового диапазона, отраженная от ионосферы, в дневное время может сильно поглощаться атмосферой, так что в дневное время может не доходить до приемника.

Короткие волны при определенных условиях могут свободно проходить через ионосферу и поэтому их используют для связи с космическими объектами. Их применяют и для связи на больших расстояниях при использовании отражения от ионосферы. Связь земной волной на коротких волнах осуществляется на расстояниях всего в несколько десятков километров, так как короткие волны сильно ослабляются земной поверхностью. При связи на коротких волнах может появиться зона молчания, в которую земная волна уже не доходит, а ионосферная еще не появилась.

Ультракороткие волны используют для связи на расстояниях прямой видимости (ионосфера не возвращает ультракороткие волны на землю).

Рассмотрим методику расчета реальных излучателей.

Если считать землю идеально проводящим телом, то поле электрического диполя, расположенного в воздухе перпендикулярно поверхности земли (рис. 25.10, а), можно определить как поле диполя и его

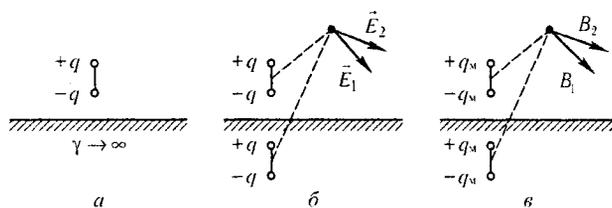


Рис. 25.10

зеркального отображения в поверхности земли (рис. 25.10, б), расположенных в свободном пространстве. Напряженность электрического поля в любой точке верхнего полупространства равна векторной сумме векторов напряженностей поля от двух излучателей.

Аналогично поступают при определении поля, создаваемого магнитным диполем, расположенным над поверхностью земли (рис. 25.10, в).

Этот прием используют для расчета поля антенн. Простейшая антенна представляет собой отрезок провода длиной l , расположенный вертикально к поверхности земли (рис. 25.11, а). Генератор высокой частоты включают между антенной и землей. За счет наличия распределенных

емкостей антенны и проходящих через них токов смещения, ток по высоте антенны меняется по амплитуде и по фазе (см. эпюру изменения амплитуд на рис. 25.11, а). Антенна обладает высокой способностью к

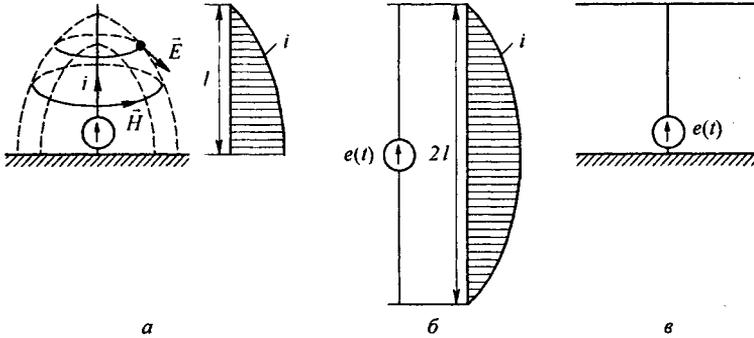


Рис. 25.11

излучению вследствие того, что создаваемые ею электрическое и магнитное поля распределены в одной и той же области пространства, окружающего антенну (см. рис. 25.11, а).

Влияние земли на поле учитывают, вводя в расчет зеркальное изображение антенны (полагая, что земля является идеальным проводником). При этом длина антенны оказывается равной $2l$, а эпюра тока дополняется второй половиной (рис. 25.11, б). Для расчета поля, создаваемого антенной, ее заменяют совокупностью малых отрезков длиной dl , на каждом из которых ток принимают неизменным по амплитуде и фазе. Тогда напряженность поля в произвольной точке пространства можно найти как геометрическую сумму напряженностей, создаваемых всеми малыми отрезками антенны.

Так как процесс сложения векторов от многих пар отрезков антенны с различными по величине токами довольно трудоемок, то полагают, что ток по высоте антенны неизменен и равен действующему значению тока $I = I_m / \sqrt{2}$. В этом случае антенна излучает в верхнее полупространство половину мощности, которую излучал бы диполь длиной $2l$ с током I .

Для увеличения емкости антенны, а следовательно, и проходящего по ней тока при том же напряжении генератора антенну часто дополняют горизонтальным участком (рис. 25.11, в).

Учет влияния земли на распространение земной электромагнитной волн осуществляют, используя понятие относительной комплексной диэлектрической проницаемости несовершенного диэлектрика

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r - j \frac{\gamma}{\omega \epsilon_0}.$$

Вектор электрической индукции при использовании $\tilde{\epsilon}_r$ равен $\vec{D} = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r \vec{E}$, а плотность «тока смещения» при синусоидальном изменении \vec{E} во времени будет равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{D} e^{j\omega t} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \tilde{\epsilon}_r \dot{E}_m e^{j\omega t} = (\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon_r) \dot{E}_m e^{j\omega t}.$$

Первое слагаемое правой части последнего выражения представляет собой плотность тока проводимости, второе — плотность тока смещения в диэлектрике без потерь.

Рассмотрим подход к методике учета затухания земной волны, предложенный Шулейкиным и Ван-дер-Подем. Сначала полагают, что излучатель в точке 1 и приемник в точке 2 рис. 25.9, *a* находятся в свободном пространстве и определяют амплитуду напряженности электрического поля в точке 2 (назовем ее E_{2mc}) с помощью формулы (25.39), а для магнитного диполя — по формуле (25.43). Затем учитывают, что в действительности излучатель и приемник находятся вблизи поверхности земли и поэтому поле в точке 2 создается не только излучателем, находящимся в точке 1, но и его зеркальным изображением по рис. 25.10. Принимают, что электрическое поле в точке 2 при этом возрастет в $\sqrt{2}$ раз и станет равным $\sqrt{2} E_{2mc}$. Ослабление поля вследствие потерь в земле учитывают коэффициентом ослабления *k*. В результате напряженность поля в точке 2 оказывается равной $k\sqrt{2} E_{2mc}$. Коэффициент *k* зависит от расстояния *R*, от длины волны λ , от проводящих и диэлектрических свойств земли на используемой частоте, от вида поляризации волны, от шаровидности земли и т. д. Берроузом (*Burrous C.R., Gray M.C. Proc. IRE. 1941. V. 29. P. 16*) дана наиболее полная формула для приближенного его определения (25.46)

$$k = \frac{4 + 0,3 a}{4 + a + 0,3 a^2}. \quad (25.46)$$

При вертикальной поляризации волны, когда вектор \vec{E} перпендикулярен поверхности земли

$$a = 2\pi \frac{R}{\lambda} \left| \frac{1}{\tilde{\epsilon}_r} - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_r^2} \right|. \quad (25.47)$$

При горизонтальной поляризации волны, когда вектор \vec{E} параллелен поверхности земли

$$a = 2\pi \frac{R}{\lambda} \left| \frac{1}{\tilde{\epsilon}_r} - 1 \right|. \quad (25.48)$$

В этих формулах $\tilde{\epsilon}_r$ это относительная комплексная диэлектрическая проницаемость поверхности земли, вдоль которой распространяется волна^{*)}. Прямые скобки в формулах (25.47) и (25.48) означают, что имеется в виду модуль комплексного числа в этих скобках. На рис. 25.12 изобра-

^{*)} Заметим, что $\tilde{\epsilon}_r$ связана с абсолютной комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ_1 в § 24.8 соотношением $\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_1 / \epsilon_0$.

жены кривые зависимости k от a при различных видах поляризации и различных $\text{tg } \Delta = \gamma / (\omega \epsilon_0 \epsilon_r)$.

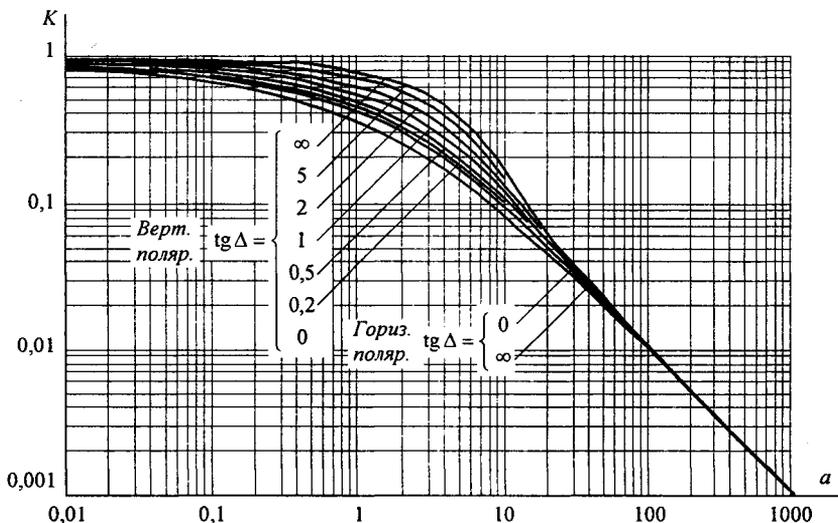


Рис. 25.12

Рассмотрение кривых на рис. 25.12 позволяет сделать следующие выводы.

1. При одном и том же значении параметра a электромагнитная волна, у которой вектор \vec{E} вблизи поверхности земли перпендикулярен ее поверхности, ослабляется в меньшей степени, чем волна, у которой вектор \vec{E} параллелен поверхности.

2. Влияние величины $\text{tg } \Delta$ на затухание волны проявляется сильнее у волны, в которой вектор \vec{E} вблизи поверхности земли перпендикулярен поверхности земли, и проявляется в меньшей степени у волны, в которой вектор \vec{E} параллелен поверхности.

В длинноволновом диапазоне для определения k пользуются также эмпирической формулой Остина

$$k = \frac{1}{2} e^{-\frac{0,014 R}{\lambda^{0,6}}},$$

где R — длина трассы между точками 1 и 2, λ — длина волны.

Вопросы для самопроверки

1. Как связан исток вектора \vec{A} с потенциалом φ ?
2. Покажите, что условие, выражающее собой нормировку Лоренца, является иной формой записи уравнения непрерывности.
3. Почему первое слагаемое правой части формулы $\vec{E} = -\partial A / \partial t - \text{grad } \varphi$ называют вихревой, а второе — потенциальной составляющей?
4. Запишите уравнения, которым удовлетворяют \vec{A} и φ в переменном поле.
5. Покажите, что функция $\varphi = \frac{\rho(t - R/v)}{4 \pi \epsilon_a R}$ яв-

ляется решением уравнения Даламбера $\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$. 6. Почему \vec{A} и φ называют запаздывающими потенциалами? Зависит ли запаздывание по фазе (измеряемое в радианах) от частоты? 7. Качественно поясните ход решения задачи об излучении энергии элементом тока (электрическим диполем). 8. Исходя из формы фазового фронта электромагнитной волны дайте определение плоской, цилиндрической и сферической волнам. Покажите, что на большом удалении от излучателя сферическая волна становится плоской. 9. Докажите, что в отношении излучения электромагнитной энергии в окружающее пространство излучающий диполь эквивалентен элементу тока длиной dl с током $I_m \sin \omega t$. 10. Дайте определение магнитному излучающему диполю и покажите, что ему эквивалентен виток с синусоидальным током. 11. От каких факторов зависит излученная мощность электрическим и магнитным диполями? 12. Правильно ли записан критерий дальней зоны: $R \gg v/\omega$? 13. С какого расстояния начинается дальняя зона у излучателя, работающего на частоте 300 МГц? 14. Какой физический смысл может быть придан сопротивлению R_s ? 15. В чем различие физических процессов в ближней и дальней зонах? 16. Какова последовательность расчета напряженности поля от излучающей антенны конечных размеров, расположенной перпендикулярно поверхности земли? 17. Чем объяснить малую способность к излучению электромагнитной энергии в окружающее пространство у колебательного контура (образованного индуктивной катушкой и конденсатором) по сравнению с антенной? 18. Поясните, какое свойство уравнений Максвелла называют свойством перестановочной двойственности. 19. Выведите формулу для мощности, излученной магнитным диполем. (Ответ: $P_s = \frac{8}{3} \pi^3 Z_a \frac{(SI)^2}{\lambda^4}$.) 20. Запишите систему уравнений Максвелла в симметричной форме. Что понимают под магнитным током проводимости и магнитным током смещения? 21. Виток с синусоидальным током частотой ω вращается с угловой скоростью $0,5\omega$ вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр. Скажется ли вращение витка с током на излучение электромагнитной энергии? 22. Решите задачи 25.1; 25.2; 25.4; 25.5; 25.8.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

§ 26.1. Понятие о волноводах и объемных резонаторах. Канализация энергии очень высокой частоты по обычным двухпроводным линиям передачи практически невозможна ввиду того, что: 1) провода линии играют роль антенн и, вместо того чтобы передавать энергию потребителю, излучают ее в пространство; 2) активное сопротивление проводов линии при сверхвысоких частотах в силу резко выраженного поверхностного эффекта оказывается настолько большим, что весьма значительная часть энергии затрачивается на нагрев проводов.

Применение коаксиального кабеля (коаксиальной линии, см. рис. 22.4) для канализации энергии весьма высокой частоты экономически также невыгодно. Хотя в этом случае энергия в окружающее пространство и не излучается (так как оболочка кабеля одновременно является и экраном), однако в кабеле велики потери энергии в жиле и диэлектрических шайбах (например из полистирола или полиэтилена), с помощью которых жила крепится внутри кабеля. Коаксиальный кабель применяют для передачи сигналов с диапазоном частот от нуля до нескольких мегагерц и используют в силовых, телефонных и телевизионных устройствах.

При частоте больше 10^9 Гц энергию передают по волноводам. Волновод представляет собой полую трубу прямоугольного или круглого сечения.

На рис. 26.1, *a* изображен прямоугольный волновод. Размеры *a* и *b* находятся в определенном соотношении с длиной волны. Так, например, при длине волны $\lambda = 10$ см берут $b = 3,4$ см и $a = 7,2$ см.

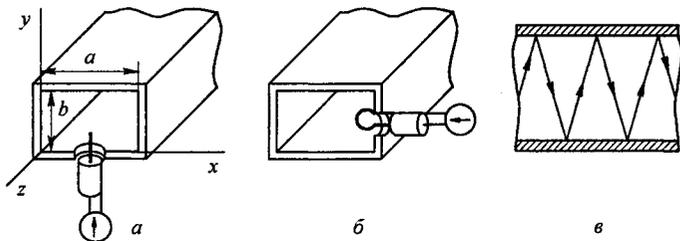


Рис. 26.1

Энергия внутрь волновода обычно доставляется с помощью небольшого стерженька, помещенного в волновод, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (рис. 26.1, *a*), или с помощью петли с током, помещаемой в волновод, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (рис. 26.1, *б*). Иногда волновод возбуждают, соединяя его через щель или диафрагму с другим

волноводом или резонатором. Отвод энергии с другого конца волновода производят с помощью стерженька, петли или через щель.

Энергия передается вдоль волновода, отражаясь от его стенок (рис. 26.1, в). Стенки волновода являются как бы направляющими для потока энергии. Небольшая часть энергии проникает в стенки волновода и выделяется в них в виде теплоты. Для уменьшения потерь энергии в стенках волновода внутреннюю поверхность труб полируют и покрывают слоем хорошо проводящего металла, например серебра.

В качестве резонансных контуров при не очень высоких частотах применяют контуры с сосредоточенными индуктивностями и емкостями или отрезки линий с распределенными параметрами. При сверхвысоких частотах (при длине волн сантиметрового диапазона) контуры с сосредоточенными параметрами L и C и отрезки линий с распределенными параметрами оказываются малоприменимыми, так как они излучают электромагнитную энергию и вследствие этого, а также в силу резко выраженного поверхностного эффекта обладают малой добротностью.

При сверхвысоких частотах в качестве устройства, выполняющего функции резонансного контура с высокой добротностью, применяют объемные резонаторы. Объемный резонатор представляет собой полый прямоугольный параллелепипед или полый металлический цилиндр с доньшками. Стенки резонаторов выполняют из хорошо проводящего материала и полируют. Длины трех ребер прямоугольного резонатора и длина и радиус цилиндрического резонатора находятся, как и в волноводе, в определенных соотношениях с длиной волны и составляют несколько сантиметров. Резонатор возбуждают так же, как и волновод, например, с помощью стерженька или петли с током. В полости объемного резонатора возникают стоячие электромагнитные волны, так как со всех сторон полость ограничена хорошо проводящими стенками.

Качественно переход от обычного колебательного контура L, C к прямоугольному объемному резонатору иллюстрируют рис. 26.2, $a-z$. На рис. 26.2, a изображены две пластины конденсатора, соединенные двумя индуктивностями, на рис. 26.2, b индуктивности заменены на две полоски, на рис. 26.2, $в$ — на четыре полоски; на рис. 26.2, $г$ полоски заменены проводящими стенками.

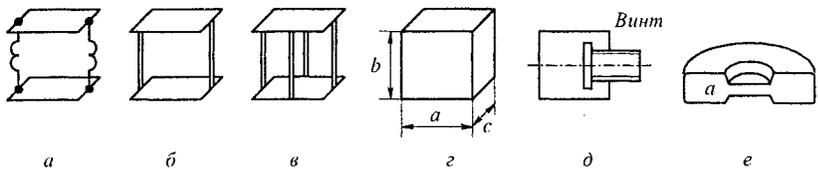


Рис. 26.2

При колебательном процессе в резонаторе энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля и обратно. В прямоугольном и цилиндрическом резонаторах энергия каждого из полей распределена по всей полости резонатора. В других устройствах сверхвысоких частот (клистронах, магнетронах) энергии этих полей распределены преимущественно

ственно в различных областях. Так, в резонансной полости клистрона (рис. 26.2, e) электрическое поле сосредоточено преимущественно в узком зазоре a (как бы в плоском конденсаторе), а магнитное связано с индуктивностью, роль которой выполняет полость резонатора, примыкающая к узкому зазору.

Под добротностью резонатора понимают $Q = \omega_0 W_0 / P$. Здесь W_0 — энергия электромагнитного поля, запасенная в резонаторе; P — активная мощность, затрачиваемая на потери от вихревых токов в стенках резонатора, на потери через щель в виде излучения, а если диэлектрик, имеющийся в полости резонатора, не идеальный, то и на потери в диэлектрике. Добротность Q достигает значения 10^4 и более.

§ 26.2. Типы волн в волноводе. Прямоугольный волновод. Решение для H -волны. Процесс распространения электромагнитных волн в полости прямоугольного волновода будем рассматривать, полагая, что его стенки выполнены из сверхпроводящего материала ($\gamma \rightarrow \infty$). При этом условии напряженность электрического поля на стенках волновода будет равна нулю (плотность тока на стенках волновода $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ конечна, поэтому при $\gamma \rightarrow \infty$ $E \rightarrow 0$).

Полость волновода заполнена диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого ϵ_a . Оси координат расположим в соответствии с рис. 26.3, a . Размеры полости волновода в направлении оси x обозначим буквой a , а в направлении оси y — буквой b . Длина волновода в направлении оси z неограничена. Электромагнитное поле в волноводе описывается уравнением (24.3): $\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{H} = 0$ или аналогичным ему уравнением $\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{E} = 0$.

Распространяющиеся в волноводе электромагнитные волны являются волнами, бегущими вдоль оси волновода (оси z) и стоячими в двух остальных направлениях. Стоячие волны в направлении x и y образуются вследствие многократных отражений волн от стенок волновода.

Тот факт, что волны являются бегущими вдоль оси z , в формально математическом отношении находит свое выражение в том, что при записи каждой из составляющих волн (подобно бегущим волнам в линии с распределенными параметрами) используется множитель $e^{-k_p z}$, где k_p — коэффициент распространения.

Волны, распространяющиеся в волноводах, разделяют на два типа: H -волны и E -волны. H -волну называют также поперечно-электрической и обозначают TE ; E -волну — поперечно-магнитной и обозначают TM .

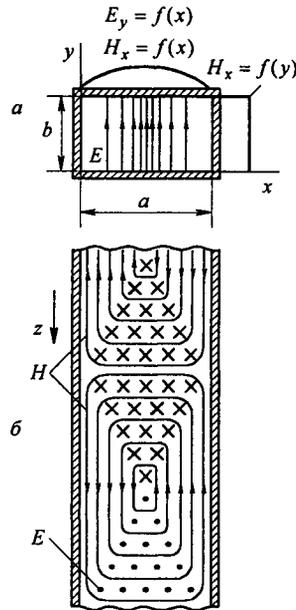


Рис. 26.3

Кроме волн H и E могут быть еще волны TEM . Они возникают в коаксиальном кабеле (не в волноводе) и полосковой линии. В волне TEM векторы \vec{E} и \vec{H} лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Структура H -волны такова, что составляющую вдоль оси волновода имеет только напряженность магнитного поля, а напряженность электрического поля расположена в плоскости, перпендикулярной оси волновода, т. е. для H -волны

$$\dot{\vec{H}} = \vec{i} \dot{H}_x + \vec{j} \dot{H}_y + \vec{k} \dot{H}_z; \quad \dot{\vec{E}} = \vec{i} \dot{E}_x + \vec{j} \dot{E}_y. \quad (26.1)$$

Для E -волны наблюдается обратная картина: составляющую вдоль оси волновода имеет только напряженность электрического поля, а векторы напряженности магнитного поля расположены в плоскостях, перпендикулярных оси волновода, т. е. для E -волны.

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \dot{E}_x + \vec{j} \dot{E}_y + \vec{k} \dot{E}_z; \quad \dot{\vec{H}} = \vec{i} \dot{H}_x + \vec{j} \dot{H}_y.$$

Какой из этих типов волн возникает, зависит от условий возбуждения и геометрических размеров поперечного сечения волновода. Если возбуждение производить с помощью штырька (см. рис. 26.1, а), то в волноводе возникнут H -волны. При возбуждении с помощью петли с током, расположенной вблизи узкой стенки волновода в соответствии с рис. 26.1, б, в последнем возникают также H -волны. Для E -волны штырек следует направить вдоль оси z .

Приводимые далее выкладки проделаны для H -волны, но они будут почти такими же и для E -волны. Если подставить (26.1) в уравнение (24.3), то последнее разобьется на три уравнения для проекций. Для проекции на ось z будем иметь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \dot{H}_z + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \dot{H}_z = 0. \quad (26.2)$$

Воспользуемся методом разделения переменных, который рассмотрен в § 19.39. С этой целью положим

$$\dot{H}_z = X Y e^{-k_p z}, \quad (26.3)$$

где X — функция только x ; Y — функция только y . Множитель $e^{-k_p z}$ свидетельствует о том, что вдоль оси z движется бегущая волна.

Подставим (26.3) в (26.2):

$$Y e^{-k_p z} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X e^{-k_p z} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_p^2 X Y e^{-k_p z} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a X Y e^{-k_p z} = 0. \quad (26.3a)$$

Обозначим

$$k_p^2 + \omega^2 \epsilon_a \mu_a = k^2 \quad (26.4)$$

и разделим (26.3a) на $X Y e^{-k_p z}$. Получим

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 = 0. \quad (26.5)$$

Сумма двух функций $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ и $\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$, из которых одна является функцией только x , а другая — y , может равняться постоянному числу $-k^2$ только тогда, когда каждая из этих функций есть постоянное число.

Перейдем от частных производных к обыкновенным и положим:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -p^2; \quad (26.5a)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -q^2, \quad (26.5b)$$

где p и q — некоторые постоянные числа.

Решением уравнений (26.5a) и (26.5b) являются функции

$$X = \dot{C}_1 \sin(px + \varphi), \quad Y = \dot{C}_2 \sin(qy + \psi),$$

где \dot{C}_1 , q и \dot{C}_2 , ψ — постоянные интегрирования, которые найдем из граничных условий. Таким образом, в соответствии с (26.3)

$$\dot{H}_z = \dot{H}_m \sin(px + \varphi) \sin(qy + \psi) e^{-k_p z}. \quad (26.6)$$

Здесь комплексная амплитуда $\dot{H}_m = \dot{C}_1 \dot{C}_2$.

Для определения значений p , q , φ , ψ обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным через проекции напряженностей на оси координат:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j \omega \epsilon_a \dot{E}_x; \quad (26.7)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j \omega \epsilon_a \dot{E}_y; \quad (26.8)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j \omega \epsilon_a \dot{E}_z; \quad (26.9)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j \omega \mu_a \dot{H}_x; \quad (26.10)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j \omega \mu_a \dot{H}_y; \quad (26.11)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j \omega \mu_a \dot{H}_z. \quad (26.12)$$

В силу того, что для H-волны $E_z = 0$, и поскольку волны являются бегущими вдоль оси z , то $\partial \dot{E}_y / \partial z = -k_p \dot{E}_y$, а $\partial \dot{E}_x / \partial z = -k_p \dot{E}_x$.

Из уравнений (26.10) и (26.11) следует, что

$$k_p \dot{E}_y = -j \omega \mu_a \dot{H}_x; \quad k_p \dot{E}_x = j \omega \mu_a \dot{H}_y. \quad (26.13)$$

Как уже говорилось, на внутренних поверхностях стенок волновода напряженность электрического поля равна нулю. Следовательно, $E_x = 0$ при $y=0$ и $y=b$, а $E_y = 0$ при $x=0$ и $x=a$. Если это учесть, то из уравнений (26.13) имеем $H_y|_{y=0} = H_y|_{y=b}$ и $H_x|_{x=0} = H_x|_{x=a} = 0$.

Так как $\partial \dot{H}_y / \partial z = -k_p \dot{H}_y$, $\partial \dot{H}_x / \partial z = -k_p \dot{H}_x$, а $H_y = 0$ при $y=0$ и $y=b$ и $H_x = 0$ при $x=0$ и $x=a$, то из (26.7) и (26.8) следует:

$$\left. \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right|_{y=b} = 0; \quad (26.14)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (26.15)$$

Уравнения (26.14), (26.15) служат для определения значений p , q , ϕ , ψ .

Подставив (26.6) в (26.14), найдем $\psi = \pi/2$, $q = n\pi/b$. Из (26.15) определим $\phi = \pi/2$ и $p = m\pi/a$, где m и n — целые числа; m равно числу популовн электромагнитной волны, которое разместится по ширине волновода; n показывает, сколько популовн разместится по высоте волновода. Таким образом,

$$\dot{H}_z = \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}. \quad (26.16)$$

Найдем теперь \dot{H}_x , \dot{H}_y и \dot{E}_x , \dot{E}_y . Для определения \dot{E}_x в уравнении (26.7) $\partial \dot{H}_y / \partial z$ заменим на $-k_p \dot{H}_y = -k_p \frac{k_p \dot{E}_x}{j\omega\mu_a}$.

Тогда

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \frac{k_p^2 \dot{E}_x}{j\omega\mu_a} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_x.$$

Отсюда

$$\dot{E}_x = -\frac{j\omega\mu_a}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = \frac{j\omega\mu_a}{k^2} \frac{n\pi}{b} \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}, \quad (26.17)$$

где

$$k^2 = k_p^2 + \omega^2 \epsilon_a \mu_a.$$

Аналогично

$$\dot{H}_y = \frac{k_p \dot{E}_x}{j\omega\mu_a} = \frac{k_p}{k^2} \frac{n\pi}{b} \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}; \quad (26.18)$$

$$\dot{E}_y = \frac{j\omega\mu_a}{k^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\mu_a}{k^2} \frac{m\pi}{a} \dot{H}_m \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}; \quad (26.19)$$

$$\dot{H}_x = -\frac{k_p \dot{E}_y}{j\omega\mu_a} = \frac{k_p}{k^2} \frac{m\pi}{a} \dot{H}_m \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}. \quad (26.20)$$

Проанализируем полученные результаты. Коэффициент k_p играет роль постоянной распространения электромагнитной волны вдоль оси z . Если k_p будет действительным числом, то волна при своем продвиже-

нии по волноводу будет затухать. Затухание будет отсутствовать, если k_p — мнимое число.

Для того чтобы связать k_p с геометрическими размерами волновода a и b и числами m и n , подставим (26.16) в (26.2). Получим $k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$. Но $k^2 = k_p^2 + \omega^2 \epsilon_a \mu_a$. Поэтому

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_p^2 + \omega^2 \epsilon_a \mu_a. \quad (26.21)$$

Отсюда следует, что $k_p = \sqrt{k^2 - \omega^2 \epsilon_a \mu_a}$.

Угловую частоту, при которой $k_p = 0$ называют *критической угловой частотой* $\omega_{кр}$

$$\omega_{кр} = \frac{\pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (26.21a)$$

Если $\epsilon_r = \mu_r = 1$, то $\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = (\omega/v_c)^2$, где v_c — скорость света в свободном пространстве. В этом случае k_p можно записать так:

$k_p = \sqrt{k^2 - (\omega/v_c)^2}$, а $\omega_{кр} = 2\pi f_{кр} = k v_c$. Ей соответствует частота

$$f_{кр} = \frac{k v_c}{2\pi} = \frac{v_c \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}{2}$$

и критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{v_c}{f_{кр}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}.$$

Если угловая частота возбудителя колебаний (тока в стерженьке или петле рис. 26.1) $\omega = 2\pi f$ будет больше $\omega_{кр}$, то $k_p = j\beta = j\sqrt{(\omega/v_c)^2 - k^2}$ оказывается числом мнимым. Поскольку рабочая частота $f > f_{кр}$, то длина волны в свободном пространстве $\lambda_c = v_c/f$ меньше критической длины волны в волноводе $\lambda_{кр} = v_c/f_{кр}$.

Числа m и n могут принимать целые значения, но не могут равняться нулю одновременно, так как тогда все составляющие E и H отсутствовали бы. Наибольшее значение имеет волна $m=1$ и $n=0$ (волна H_{10}), для нее по ширине волновода укладывается одна полуволна, а по его высоте интенсивность поля не изменяется.

В качестве примера определим $\omega_{кр}$ при $a=7,2$ см по формуле (26.21a) для волны H_{10} . Она равна $13 \cdot 10^9$ рад/с. Таким образом по волноводу может распространяться энергия лишь весьма высокой частоты. Амплитуда максимальной напряженности электрического поля E_m должна быть меньше пробивной напряженности поля, иначе произойдет пробой диэлектрика (воздуха, газа или какого-либо другого диэлектрика).

При любом способе возбуждения волновода вблизи возбуждителя может возникать несколько различных типов волн. Для устранения на некотором расстоянии от излучателя высших типов волн, размеры a и b выбирают так, чтобы для низшего типа волн, например H_{10} , при выбранной ω значение коэффициента распространения k_p являлось мнимым числом, а для ближайшего высшего типа волн, например H_{20} или H_{11} , k_p являлось числом действительным. В зависимости от длины волны λ_c размеры a и b берут равными $a \approx (0,7 \dots 0,8) \lambda_c$ и $b \approx (0,3 \dots 0,4) \lambda_c$. Размеры a и b стандартизованы.

Под картиной поля в полости волновода понимают совокупность линий E и линий H для выбранного типа поля. Картины поля строят либо в нескольких ортогональных плоскостях (см., например, рис. 26.3, a и b или рис. 26.6, a), либо объемную (например, рис. 26.6, b). Сначала целесообразно строить картину поля в плоскости xOy , так как у H -поля вектор \vec{E} расположен в плоскости xOy и имеет либо только одну, либо две проекции (в зависимости от типа волны), а у E -поля вектор \vec{H} в этой плоскости имеет тоже либо одну, либо две проекции. В плоскости xOy проекции линий H и линий E пересекаются друг с другом под прямым углом (см. например рис. 26.6, a). Картина поля для волны H_{10} изображена на рис. 26.3, a и b . Токи смещения в полости волновода переходят в токи проводимости по его стенкам (см. рис. 26.4, a). При проводимости γ

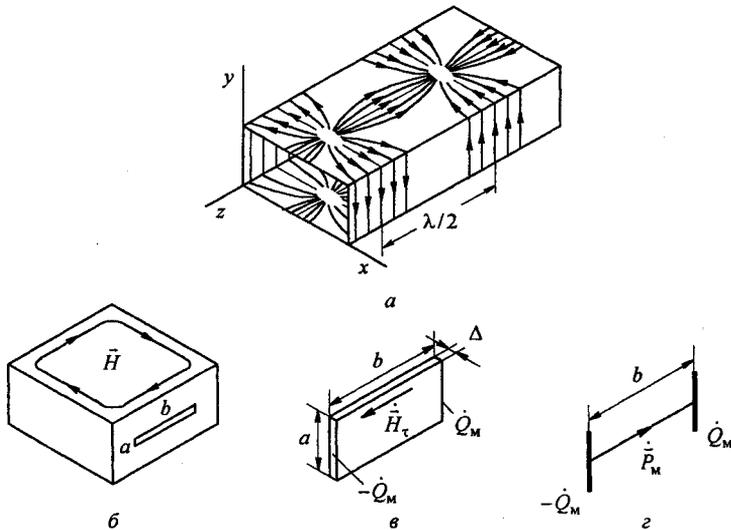


Рис. 26.4

стенки волновода, стремящейся к бесконечности, напряженность поля E на стенках волновода стремится к нулю, но плотность тока $\delta = \gamma E$ конечна. В действительности γ имеет конечное значение (это будет далее учтено при определении потерь в стенках от протекающего по ним тока проводимости).

Для измерительных целей в стенках волновода делают щели (прорези), располагая их так, чтобы они не препятствовали протеканию по ним токов проводимости.

Щель в стенке волновода используют также для излучения волн из возбужденного волновода в окружающее пространство.

Пусть в волноводе возбуждена волна типа H_{10} . Поле в волноводе изображено на рис. 26.3, б, эскиз волновода — на рис. 26.4, б. Воздушная щель размером $a \times b$ расположена вдоль узкой стенки волновода. Отдельно щель изображена на рис. 26.4, в. Напряженность магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}_\tau$ направлена вдоль щели. Вдоль щели по воздуху проходит магнитный ток смещения

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \dot{H} e^{j\omega t}) a \Delta \rightarrow -\mu_0 \dot{H}_\tau j \omega a \Delta.$$

Поверхность, через которую течет магнитный ток смещения, равна произведению $a \Delta$. Этот ток можно рассматривать как производную по времени от магнитного заряда $Q_m e^{j\omega t}$ на боковых стенках щели, т. е. как $j \omega Q_m$. Отсюда комплексная амплитуда магнитного заряда $Q_m = -\mu_0 a \Delta \dot{H}_\tau$ В · с.

Магнитный момент щели равен $\dot{P}_m = b \dot{Q}_m = -\mu_0 a b \Delta \dot{H}_\tau$ и направлен встречно \dot{H}_τ . Единица измерения \dot{P}_m равна В · с · м.

Поле, излучаемое щелью в окружающее пространство, определим как поле магнитного диполя (оно рассмотрено в § 25.8).

Так как в воздухе $\dot{H}_\tau = \dot{E}_z / Z_B$, а $Z_B = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$, то $\dot{P}_m = -a b \Delta \mu_0 \dot{E}_z / Z_B$. Магнитный момент пропорционален магнитному напряжению на щели $a E_z$.

§ 26.3. Волновое сопротивление волновода. Фазовая и групповая скорости. Под волновым сопротивлением волновода $Z_{ВВ}$ понимают отношение комплексных значений взаимно перпендикулярных составляющих \vec{E} и \vec{H} . Так, для основной волны H_{10}

$$Z_{ВВ} = \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\sqrt{\mu_a}}{\epsilon_a} / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (26.22)$$

Зависимость $Z_{ВВ}$ от $\lambda_c / \lambda_{кр}$ для H -волны изображена на рис. 26.5, а (для волны H_{10} $\lambda_{кр} = 2a$), а для E -волны — на рис. 26.5, в.

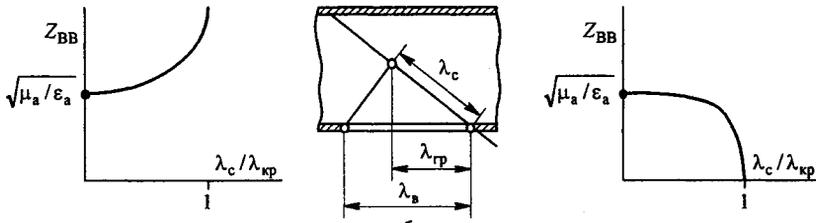


Рис. 26.5

Скорость перемещения по волноводу неизменного фазового состояния бегущей волны $e^{j\omega t - k_p z}$ принято обозначать $v_{ФВ}$. Чтобы определить ее, надо продифференцировать $j\omega t - k_p z$ по t и учесть, что производная от постоянной величины равна нулю. Получим

$$v_{\Phi B} = \frac{j\omega}{k_p} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - k^2}} = \frac{v_c}{\sqrt{1 - (\lambda_c / \lambda_{\text{кп}})^2}}. \quad (26.23)$$

Скорость $v_{\Phi B}$ направлена под углом к оси волновода.

Зависимость $v_{\Phi B}$ от частоты называют дисперсией. Так как $\lambda_c / \lambda_{\text{кп}} < 1$, то $v_{\Phi B}$ больше скорости света v_c . Энергия вдоль оси волновода распространяется с групповой скоростью $v_{\text{гр}} = v_c \sqrt{1 - (\lambda_c / \lambda_{\text{кп}})^2}$. Величины $v_{\Phi B}$ и $v_{\text{гр}}$ можно сопоставить, соответственно, со скоростью смыкания кромок ножниц и скоростью движения навстречу друг другу рукояток этих ножниц. Рис. 26.5, б иллюстрирует связь между длиной волны в свободном пространстве $\lambda_c = v_c / f$, длиной волны в волноводе $\lambda_b = v_{\Phi B} / f$ и групповой длиной волны $\lambda_{\text{гр}} = v_{\text{гр}} / f$; $\lambda_{\text{гр}}$ представляет собой расстояние, на которое распространяется энергия вдоль оси волновода за одно колебание; $\lambda_b \lambda_{\text{гр}} = \lambda_c^2$ и $v_{\Phi B} v_{\text{гр}} = v_c^2$.

Для определения мощности P , переносимой электромагнитной волной, распространяющейся по волноводу, следует подсчитать поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение волновода.

В случае основной волны H_{10}

$$P_{H_{10}} = \iint_{00}^{ab} \dot{E}_y \dot{H}_x dx dy = \frac{ab H_m^2 (\beta/k)^2 Z_{\text{ВВ}}}{4}.$$

Для волны H_{mn}

$$P_{H_{mn}} = \iint_{00}^{ab} (\dot{E}_x \dot{H}_y - \dot{E}_y \dot{H}_x) dx dy = \frac{ab H_m^2 (\beta/k)^2 Z_{\text{ВВ}}}{8};$$

$$(\beta/k)^2 = \frac{(2f/v_c)^2}{(m/a)^2 + (n/b)^2} - 1.$$

Рассмотрим влияние нагрузки на конце волновода на характер волновых процессов в нем.

Если сопротивление нагрузки на конце волновода не будет равно $Z_{\text{ВВ}}$, то в волноводе кроме падающей возникает и отраженная волна. Если волновод на конце будет открыт, то часть мощности, переносимой падающей волной, будет излучаться в окружающее пространство, часть отразится обратно в волновод. Если на конце волновода поместить решетку из проводящих стержней (проволок), то влияние решетки на возникновение отраженной волны зависит от того, как расположены стержни (продольно или поперечно) по отношению к вектору \vec{E} волны. Когда стержни будут параллельны вектору \vec{E} , то в них возникают токи и большая часть падающей волны отражается обратно в волновод. Когда стержни решетки перпендикулярны линиям \vec{E} на конце волновода, они мало влияют на излучаемую мощность. Если на конце волновода установить сплошную металлическую перегородку, то это будет соответствовать режиму короткого замыкания на конце волновода. В этом случае вдоль волновода возникает стоячая волна с удвоенным значением H на конце волновода. Согласованную нагрузку на конце волновода при небольших

мощностях конструктивно выполняют, помещая в конце волновода клинообразную диэлектрическую пластину, покрытую тонким проводящим слоем (например, грифитом). В этом случае отраженная волна почти отсутствует за счет клинообразной формы пластинки.

§ 26.4. Компоненты E -волны в прямоугольном волноводе. Волна E_{mn} имеет E -компоненты по осям x, y, z и H -компоненты по осям x и y .

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= \dot{E}_m \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}; \\ \dot{E}_x &= -j \frac{k_p}{k^2} \frac{m \pi}{a} \dot{E}_m \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}; \\ \dot{E}_y &= -j \frac{k_p}{k^2} \frac{n \pi}{b} \dot{E}_m \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}; \\ \dot{H}_x &= j \frac{k_p}{k^2} \frac{n \pi}{b} \frac{\dot{E}_m}{Z_{\text{ВВ}}} \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}; \\ \dot{H}_y &= -j \frac{k_p}{k^2} \frac{m \pi}{a} \frac{\dot{E}_m}{Z_{\text{ВВ}}} \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}; \\ Z_{\text{ВВ}} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Простейшим представителем E -волн является волна E_{11} . На рис. 26.6, а в трех проекциях изображена картина поля для волны E_{11} . Сплошные линии соответствуют линиям E , пунктирные, а также

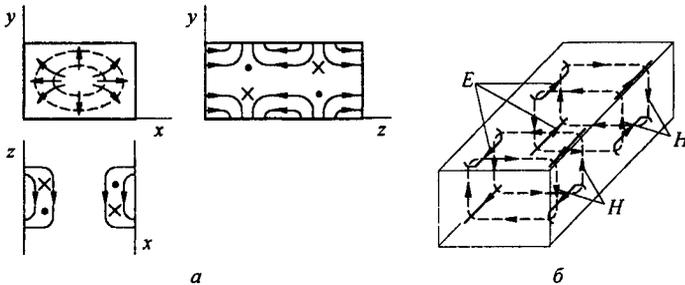


Рис. 26.6

точки и крестики — линиям H . На рис. 26.6, б изображена объемная картина поля. Линии E замыкаются по стенкам волновода. Мощность, передаваемая волной типа E_{mn} определяется по формуле

$$P_{E_{mn}} = \iint_{00}^{ab} (\dot{E}_x \dot{H}_y - \dot{E}_y \dot{H}_x) dx dy = \frac{ab E_m^2 (\beta/k)^2}{8 Z_{\text{ВВ}}}.$$

Коэффициент β/k для E -волны подсчитывается по тому же выражению, что и для H -волны.

Пример 226. В волноводе с воздушным заполнением размеры $a \times b = 4,8 \times 2,2$ см². Частота $f = 7,8$ ГГц. По волноводу распространяется волна E_{11} . Определить $\lambda_{кр}$, $\lambda_{ВВ}$, $v_{ФВ}$, $v_{гр}$, $Z_{ВВ}$, k_p , а также мощность, передаваемую по волноводу при максимальной напряженности электрического поля $E_m = 10^5$ В/м.

Решение.

Длина волны в свободном пространстве

$$\lambda_c = \frac{v_c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{7,8 \cdot 10^9} = 0,0384 \text{ м.}$$

Критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(100/4,8)^2 + (100/2,2)^2}} = 0,04 \text{ м.}$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_{ВВ} = \frac{\lambda_c}{\sqrt{1 - (\lambda_c/\lambda_{кр})^2}} = \frac{3,84}{\sqrt{1 - (3,84/4)^2}} = 0,138 \text{ м.}$$

Фазовая скорость в волноводе

$$v_{ФВ} = \frac{v_c}{\sqrt{1 - (\lambda_c/\lambda_{кр})^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - (3,84/4)^2}} = 10,8 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Групповая скорость

$$v_{гр} = \frac{v_c^2}{v_{ФВ}} = \frac{(3 \cdot 10^8)^2}{10,8 \cdot 10^8} = 0,833 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Волновое сопротивление волновода

$$Z_{ВВ} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{кр}}\right)^2} = 104,7 \text{ Ом.}$$

Коэффициент распространения волны

$$k_p = j\beta = j \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = j 44,85 \text{ м}^{-1}.$$

Передаваемая по волноводу мощность

$$P_{E_{11}} = \frac{ab E_m^2 (\beta/k)^2}{8 Z_{ВВ}};$$

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \pi^2 (20,83^2 + 45,45^2) = 24647;$$

$$\frac{\omega}{v_c} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7,8 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 163,3; \quad \left(\frac{\omega}{v_c}\right)^2 = 26659;$$

$$\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 = \left(\frac{\omega/v_c}{k}\right)^2 - 1 = \frac{26659}{24647} - 1 = 0,0816;$$

$$P_{E_{11}} = \frac{4,8 \cdot 2,2 \cdot 10^{-4} \cdot (10^5)^2 \cdot 0,0816}{8 \cdot 104,7} = 1028 \text{ Вт.}$$

§ 26.5. Аналогия между волноводом и линией с распределенными параметрами. Измерение комплексного сопротивления нагрузки волновода. Между волноводом и линией с распределенными параметрами имеет место формальная аналогия. Действительно, для x и y компонент волн \dot{E} и \dot{H} , распространяющихся вдоль оси волновода z , справедливы уравнения $d^2 \dot{E}/dz^2 = k_p^2 \dot{E}$ и $d^2 \dot{H}/dz^2 = k_p^2 \dot{H}$. Аналогичного вида уравнения справедливы для волн напряжения \dot{U} и тока \dot{I} для однородной линии с распределенными параметрами, распространяющихся вдоль оси z : $d^2 \dot{U}/dz^2 = \gamma^2 \dot{U}$ и $d^2 \dot{I}/dz^2 = \gamma^2 \dot{I}$. Сходными величинами и соотношениями в линии и в волноводе являются соответственно: \dot{U} , \dot{I} , $\dot{U} = \dot{I} Z_B$, L_0 , C_0 , $Z_B = \sqrt{L_0/C_0}$ и \dot{E} , \dot{H} , $\dot{E} = \dot{H} Z_{ВВ}$, μ_a , ϵ_a , $Z_{ВВ} = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} / \sqrt{1 - [\lambda_c/(2a)]^2}$ (последнее для волны H_{10}).

Аналогию используют в различных целях, например для выяснения влияния неоднородностей в волноводах (перегородок, решеток, диафрагм, клиньев, открытого конца) на распространение волн на некотором удалении от неоднородностей; на работу источника питания и для других целей. Для выяснения влияния неоднородностей составляют схему замещения, в которой волновод замещен линией с распределенными параметрами, а неоднородность или нагрузка волновода представлена в виде отрезка новой линии или в виде нагрузки на конце линии.

Измерение комплексного сопротивления нагрузки волновода осуществляют с помощью схем рис. 26.7, а и б. В них 1 — генератор, 2 — аттенуатор (ослабитель), 3 — измерительная линия с волновым сопротивлением $Z_{ВВ}$, вдоль широкой стенки которой сделана узкая прорезь для измерения E . На рис. 26.7, а на конце измерительной линии поставлена заглушка 4'. На рис. 26.7, б 4'' — несогласованная нагрузка, которую надо измерить, 5 — согласованная с $Z_{ВВ}$ нагрузка. Последняя нужна для того, чтобы от нагрузки 4'' в измерительной линии 3 в схеме рис. 26.7, б не было отраженных волн. Сначала градуируют установку по схеме рис. 26.7, а в режиме короткого замыкания. В волноводе 3 возникает стоячая волна E . С помощью аттенуатора устанавливают максимальное показание измерительного прибора б в точке, где $E = E_{\max}$. Затем определяют координату $z = z_0$ (около середины линии 3), в которой $E = E_{\min}$ (рис. 26.7, в) и длину $\lambda_B/2$ между двумя минимумами. После этого заглушку 4' снимают и переходят к схеме рис. 26.7, б. При этом в измерительной линии возникает смешанная волна (рис. 26.7, г). Для нее определяют коэффициент стоячей волны $k_{СВ} = E_{\max}/E_{\min}$ и расстояние Δz , на которое сместится E_{\min} по сравнению с координатой z_0 в предыдущем опыте; $\Delta z > 0$, если E_{\min} сместится в сторону генератора, и $\Delta z < 0$, если от генератора.

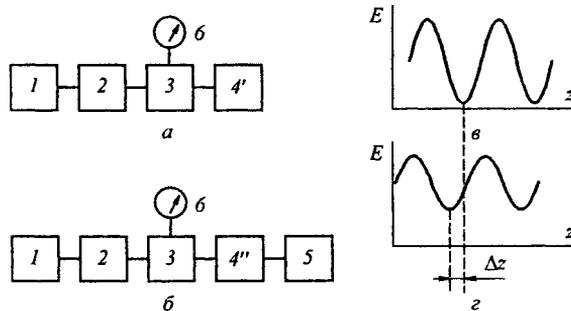


Рис. 26.7

Комплексное сопротивление нагрузки $4''$ $Z_n = R_n + j X_n$ определяют по следующим формулам:

$$R_n = Z_{\text{ВВ}} \frac{k_{\text{СВ}} [1 + \text{tg}^2(\beta \Delta z)]}{k_{\text{СВ}}^2 + \text{tg}^2(\beta \Delta z)}; \quad X_n = Z_{\text{ВВ}} \frac{(k_{\text{СВ}}^2 - 1) \text{tg}(\beta \Delta z)}{k_{\text{СВ}}^2 + \text{tg}^2(\beta \Delta z)}; \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}.$$

Исходным для вывода этих выражений являются формулы для входного сопротивления линии с распределенными параметрами без потерь — один раз при К.З., а другой, когда она нагружена на $R_n + j X_n$ (§ 11.16).

§ 26.6. Граничные условия Леонтовича. При расчете поля в волноводе было принято, что стенки его имеют проводимость $\gamma \rightarrow \infty$. В действительности γ конечна, поэтому в стенках волновода есть потери энергии, которые подсчитывают следующим образом. Сначала определяют H_x и H_y на стенках волновода, считая $\gamma \rightarrow \infty$ и $E_x = E_y = 0$. Затем по найденным значениям H_x и H_y определяют приближенные значения E_x и E_y на стенках, полагая, что γ конечна и для стенок $Z_b = \sqrt{\omega \mu_a / \gamma} e^{j 45^\circ}$ [см. формулу (23.12)]. Тогда для волны H_{10}

$$\dot{E}_x = Z_b \dot{H}_y; \quad \dot{E}_y = -Z_b \dot{H}_x. \quad (\text{a})$$

Два последних соотношения называют *граничными условиями Леонтовича*. Поясним их. На рис. 26.8, а показана поверхность стенки волновода. Оси декартовой системы (местной системы координат) расположены так, что ось z (орт \vec{k}) направлена вглубь стенки. Составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} , образующие поток вектора $\vec{\Pi}$ вглубь стенки, в общем случае имеют x , y и z компоненты:

$$\vec{\dot{H}} = \vec{i} \dot{H}_x + \vec{j} \dot{H}_y + \vec{k} \dot{H}_z; \quad \vec{\dot{E}} = \vec{i} \dot{E}_x + \vec{j} \dot{E}_y \quad (\text{б})$$

и связаны соотношением (в) для точек проводящей среды (на стенках волновода)

$$Z_b [\vec{\dot{H}} \vec{k}] = \vec{\dot{E}}. \quad (\text{в})$$

Подставляя (б) в (в) и сопоставляя слагаемые с одинаковыми ортами, получаем (а). Потери в стенках равны потоку вектора Пойнтинга внутрь стенок.

Действительная часть Z_b , равная $R_b = \sqrt{\omega \mu_a / (2 \gamma)}$, представляет собой резистивное сопротивление единицы длины и ширины тонкого поверхностного слоя (скин-слоя) стенок волновода, в котором течет ток проводимости и создает потери. Потери на единицу площади стенок вол-

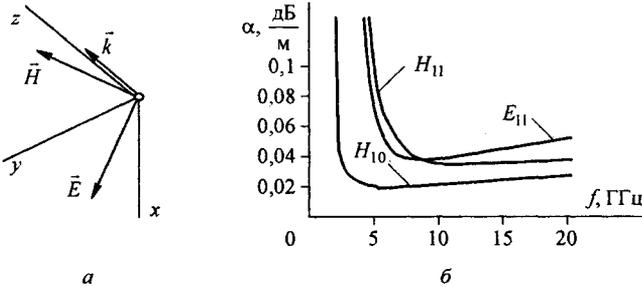


Рис. 26.8

новода можно записать в виде $\text{Re}\{\dot{E}_x \dot{H}_y + \dot{E}_y \dot{H}_x\} = R_b |H_\tau|^2$. Здесь H_τ компонента \vec{H} на внутренней стенке волновода, лежащая в плоскости xOy , перпендикулярной оси волновода.

Потери ΔP на один метр длины волновода равны $R_b \oint |H_\tau|^2 dl$.

Активную мощность на входе отрезка волновода длиной один метр назовем P_1 , мощность на выходе этого отрезка $P_2 = P_1 - \Delta P$. P_1 равна потоку вектора Пойнтинга по внутренней полости волновода вдоль оси z $P_1 = \int_S \vec{\Pi} d\vec{S}$.

Затухание α определим из соотношения

$$e^{-\alpha} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1} = 1 - \frac{\Delta P}{P_1}.$$

При $\alpha \ll 1$ $e^{-\alpha} \approx 1 - \alpha = 1 - \Delta P / P_1$. Следовательно,

$$\alpha = \frac{\Delta P}{P_1} = \frac{R_b \oint |H_\tau|^2 dl}{\int_S \vec{\Pi} d\vec{S}}$$

Единицей измерения затухания α является 1/м либо дБ/м.

$$\alpha_{\text{дБ/м}} = 20 \ln \frac{\Delta P}{P_1}.$$

Ниже приведены формулы для подсчета затухания основных типов волн в прямоугольном волноводе с воздушным заполнением. Формула (г) для волны H_{11} , формула (д) для волны H_{10} , формула (е) для волны E_{11} . Следует иметь ввиду, что для волн H_{11} и E_{11} $\lambda_{\text{кр}} = 2b / \sqrt{1 + (b/a)^2}$; для волны H_{10} $\lambda_{\text{кр}} = 2a$. Обозначим $Z_c = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$.

$$\alpha_{H_{11}} = \frac{2 R_B}{b Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}} \left[\frac{(b/a)^2 + b/a}{(b/a)^2 + 1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \frac{(b/a)^3 + 1}{(b/a)^2 + 1} \right]. \quad (\Gamma)$$

$$\alpha_{H_{10}} = \frac{R_B}{b Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}} \left[1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right]. \quad (\Delta)$$

$$\alpha_{E_{11}} = \frac{2 R_B}{b Z_c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}} \frac{(b/a)^3 + 1}{(b/a)^2 + 1}. \quad (\epsilon)$$

На рис. 26.8, б в качестве примера изображены зависимости затухания α от частоты f для трех типов волн волновода с поперечными размерами $a = 7,2$ см, $b = 3,4$ см [21].

В заключение несколько слов о том, как следует выбирать размеры поперечного сечения прямоугольного волновода при известной частоте генератора $f = v_c / \lambda$. Исходят из того, что волновод должен обеспечивать в волноводе существование одночастотного режима и возможность передавать по нему достаточно большую мощность при относительно небольших потерях в стенках. Волновод будет удовлетворять этим требованиям при выполнении следующих условий:

$$a \geq 2b; \quad 1,05a < \lambda < 1,6a.$$

Этот диапазон значений λ называют рабочим диапазоном. Коэффициентом перекрытия рабочего диапазона называют отношение максимального значения λ к минимальному. Для прямоугольного волновода он равен 1,5.

Для круглого волновода, рассматриваемого в § 26.8, рабочий диапазон определяют из соотношения $2,61R < \lambda < 3,41R$. В этом случае коэффициент перекрытия равен 1,3.

§ 26.7. Запредельный волновод. За счет того, что при конечной γ на стенках волновода значения E_x и E_y , хотя и малы, но все же не равны нулю, картина поля в волноводе несколько отлична от картины поля при $\gamma \rightarrow \infty$. Практически оказывается, что энергия может передаваться по волноводу и при $\omega < \omega_{кр}$ (до некоторой частоты ω_1). При этом $Z_{ВВ}$ оказывается комплексным числом. Волновод, работающий при $\omega < \omega_{кр}$ (до некоторой частоты ω_1), называют *запредельным*, его используют как ослабитель. Коэффициент затухания около $2\pi/\lambda_{кр}$. При $\omega \leq \omega_1$ структура (характер) поля в волноводе отличается от случая $\omega \geq \omega_1$. Поле E -волны приобретает тип электростатического поля, поле H -волны — тип магнитостатического поля (магнитного поля постоянного тока). Эти поля рассчитывают методом зеркальных изображений относительно стенок (зарядов или токов, соответственно).

§ 26.8. Круглый волновод. В нем, как и в прямоугольном волноводе, могут существовать и H - и E -волны. Только теперь решать уравнения $\nabla^2 \vec{H} = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{H}$ или $\nabla^2 \vec{E} = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{E}$ следует в цилиндрической системе координат, где координатами яв-

лютятся r, α, z (рис. 26.9). Через R обозначим радиус внутренней стенки волновода. Рассмотрим сначала H -волны. H -волна имеет компоненты $H_r, H_\alpha, H_z, E_r, E_\alpha$. Уравнение относительно H_z имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \alpha^2} = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a \dot{H}_z. \quad (26.25)$$

В соответствии с методом разделения переменных представим \dot{H}_z в виде произведения двух функций: $X(r)$ и $Y(\alpha)$, а то обстоятельство, что волна движется вдоль оси z , учтем в дальнейшем множителем $e^{-k_p z}$, где $k_p = jF$, при всех проекциях H и E . Решение (26.25):

$$\dot{H}_z = X Y. \quad (26.26)$$

Подставим (26.26) в (26.25), разделим полученное уравнение на $X Y$ и умножим на r^2 . Получим

$$r^2 \frac{X''}{X} + r \frac{X'}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a \dot{H}_z r^2. \quad (26.27)$$

Так как функции X и Y независимы, то (26.27) распадается на два уравнения:

$$\frac{Y''}{Y} = -n^2; \quad (26.28)$$

$$X'' + 1 X' + \left(\omega^2 \epsilon_a \mu_a - \frac{n^2}{r^2} \right) X = 0. \quad (26.29)$$

Решение (26.28):

$$Y = A \cos(n \alpha) + B \sin(n \alpha) = C \cos(n \alpha + \varphi).$$

Повернем систему координат на угол φ . Тогда $Y = C \cos(n \alpha)$.

Уравнение (26.29) является уравнением Бесселя. Его решение $X = \dot{H}_0 J_n(r \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a})$; \dot{H}_0 — постоянная, а J_n — бесселева функция n -го порядка от действительного переменного $r \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$. Графики J_n 0, 1, 2, ... порядков изображены на рис. 7.15. Каждая из функций представляет собой колебательно затухающую кривую, несколько раз проходящую через нулевое значение при различных значениях аргумента.

Таким образом,

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 J_n(r \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}) \cos(n \alpha). \quad (26.30)$$

На внутренней стенке волновода должна отсутствовать E_α , следовательно, $\partial \dot{H}_z / \partial r|_{r=R} = 0$. Отсюда следует, что

$$J'_n(R \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}) = 0. \quad (26.31)$$

Функция J'_n также несколько раз проходит через нулевое значение. Значения аргумента $R \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, при которых J'_n проходит через нуль, обозначим M_{nm} ; n соответствует порядку бесселевой функции, а m — номеру корня при возрастании аргумента.

В табл. 26.1 приведены значения M_{nm} при нескольких n и m .

Частоту ω , при которой $J'_n(M_{nm}) = 0$, назовем критической, тогда $R \omega_{кр} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = g = R g = M_{nm}$, где

$$g = \omega_{кр} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = M_{nm} / R; \quad (26.32)$$

$$\omega_{кр} = \frac{M_{nm}}{R \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}; \quad f_{кр} = \frac{M_{nm}}{2 \pi R \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (26.33)$$

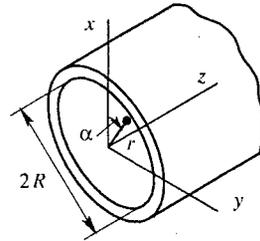


Рис. 26.9

Таблица 26.1

$n \backslash m$	1	2	3
0	3,832	7,016	10,173
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,70	9,97

$$\text{При } n = m = 1 \quad f_{\text{кр}} = \frac{1,841}{2 \pi R \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{3,413 R \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}.$$

Введем обозначение

$$\text{Тогда} \quad k_1 = \sqrt{1 - (f_{\text{кр}}/f)^2}. \quad (26.34)$$

$$F = k_1 \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}. \quad (26.35)$$

Волновое сопротивление для H -волны

$$Z_{\text{ВВ}} = \frac{\sqrt{\mu_a / \epsilon_a}}{k_1}. \quad (26.36)$$

Таким образом,

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 J_n(g r) \cos(n\alpha).$$

Из уравнений Максвелла, записанных в цилиндрической системе координат, с учетом того, что у H -волны $E_z = 0$, следует:

$$\dot{H}_r = -j \frac{F}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = -j \frac{F}{g} \dot{H}_0 J'_n(g r) \cos(n\alpha);$$

$$\dot{H}_\alpha = -j \frac{F}{r g} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \alpha} = -j \frac{n F}{r g^2} \dot{H}_0 J_n(g r) [-\sin(n\alpha)];$$

$$\dot{E}_r = -j \frac{F}{r g^2} Z_{\text{ВВ}} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = -j \frac{n F Z_{\text{ВВ}}}{r g^2} \dot{H}_0 J_n(g r) [-\sin(n\alpha)];$$

$$\dot{E}_\alpha = j \frac{F}{r g} Z_{\text{ВВ}} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = j \frac{F Z_{\text{ВВ}}}{g} \dot{H}_0 J'_n(g r) \cos(n\alpha).$$

В круглом волноводе основной является волна H_{11} . Неосновные волны: H_{21} , H_{12} и др. Запишем составляющие волны H_{11} :

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 J_1(g r) \cos\alpha; \quad \dot{H}_r = j \frac{F}{g} \dot{H}_0 J'_1(g r) \cos\alpha; \quad \dot{H}_\alpha = j \frac{F}{r g^2} \dot{H}_0 J_1(g r) \sin\alpha;$$

$$\dot{E}_r = j \frac{F Z_{\text{ВВ}}}{r g^2} \dot{H}_0 J_1(g r) \sin\alpha; \quad \dot{E}_\alpha = j \frac{F Z_{\text{ВВ}}}{g} \dot{H}_0 J'_1(g r) \cos\alpha.$$

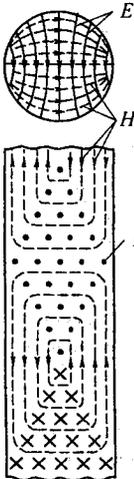


Рис. 26.10

Картина поля волны H_{11} изображена на рис. 26.10. Фазовая скорость

$$v_\phi = v_c / k_1. \quad (26.38)$$

Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = v_c k_1. \quad (26.39)$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_{\text{в}} = \lambda_c / k_1. \quad (26.40)$$

Здесь λ_c и v_c — соответственно длина волны и скорость света в свободном пространстве с параметрами ϵ_a и μ_a .

Групповая длина волны

$$\lambda_{\text{гр}} = \lambda_c^2 / \lambda_{\text{в}}. \quad (26.41)$$

Переносимую волной H_{11} мощность определяют по формуле (а)

$$P_{H_{11}} = H_{0m}^2 \frac{\pi R^2}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2} J_1^2(M_{11}) \left(1 - \frac{1}{M_{11}^2} \right). \quad (\text{а})$$

Рассмотрим E -волны. E -волна имеет компоненты E_z , E_r , E_α и H_r , H_α . Решение, аналогичное решению для H -волны, дает:

$$\dot{E}_z = \dot{E}_0 J_n(r \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}) \cos(n \alpha). \quad (26.42)$$

На внутренней стенке волновода $E_z|_{r=R} = 0$. Отсюда следует уравнение

$$J_n(R \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}) = 0. \quad (26.43)$$

Как уже говорилось, функция J_n при изменении $R \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = gR$ несколько раз проходит через нуль. Корни уравнения (26.43) обозначим N_{nm} . Как и для H -волны, индекс n соответствует порядку бesselовой функции, а m — номеру корня в порядке возрастания аргумента. В табл. 26.2 приведены значения N_{nm} при нескольких n и m .

Из уравнений Максвелла определим остальные компоненты волн через \dot{E}_z , учитывая, что $\dot{H}_z = 0$ и используя прежние обозначения для g , k_1 , F :

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= -j \frac{F}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = -j \frac{F}{g} \dot{E}_0 J'_n(g r) \cos(n \alpha); \\ \dot{E}_\alpha &= -j \frac{F}{r g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \alpha} = -j \frac{n F}{r g^2 Z_{BB}} \dot{E}_0 J_n(g r) [-\sin(n \alpha)]; \\ \dot{H}_r &= j \frac{F}{r g^2 Z_{BB}} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \alpha} = j \frac{n F}{r g^2 Z_{BB}} \dot{E}_0 J_n(g r) [-\sin(n \alpha)]; \\ \dot{H}_\alpha &= -j \frac{F}{g^2 Z_{BB}} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \alpha} = -j \frac{F}{g Z_{BB}} \dot{E}_0 J'_n(g r) \cos(n \alpha). \end{aligned}$$

Для E -волны волновое сопротивление

$$Z_{BB} = k_1 \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}. \quad (26.44)$$

Основной является волна E_{01} . Компоненты этой волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_z &= \dot{E}_0 J_0(g r); & \dot{E}_r &= -j \frac{F}{g} \dot{E}_0 J'_0(g r); & \dot{E}_\alpha &= \dot{H}_r = 0; \\ \dot{H}_\alpha &= -j \frac{F}{g Z_{BB}} \dot{E}_0 J'_0(g r). \end{aligned} \right\} \quad (26.45)$$

Поле волны E_{01} не зависит от угла α . Объемная картина поля для некоторого момента времени изображена на рис. 26.11.

Таблица 26.2

$n \backslash m$	1	2	3
0	2,405	5,52	8,654
1	3,832	7,016	10,173
2	5,136	8,417	11,62

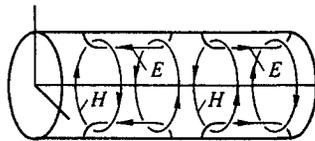


Рис. 26.11

Заметим, что коэффициенты M_{nm} для H -волны и коэффициенты N_{nm} для E -волны в формулах для цилиндрического волновода выполняют ту же роль, какую выполняют коэффициенты m и n в формулах для прямоугольного волновода.

Пример 227. Круглый волновод с воздушным заполнением радиусом $R = 10$ мм возбужден на частоте 10 ГГц. Выяснить, какой тип волны возник в волноводе. Для выбранного типа волны определить волновое

сопротивление волновода, коэффициент распространения k_p , фазовую и групповую скорости, критическую длину волны. При $H_m = 1000$ А/м определить мощность, переносимую по волноводу.

Решение. Определим критические частоты $f_{кр}$ для основных типов волн H_{11} , E_{01} , H_{21} .

$$\text{Для волны } H_{11} \quad M_{11} = 1,841, \quad f_{кр} = \frac{M_{11} v_c}{2 \pi R} = \frac{1,841 \cdot 3 \cdot 10^8}{6,28 \cdot 10^{-2}} = 0,879 \cdot 10^{10} \text{ Гц.}$$

$$\text{Для волны } E_{01} \quad N_{01} = 2,405, \quad f_{кр} = \frac{N_{01} v_c}{2 \pi R} = 1,149 \cdot 10^{10} \text{ Гц.}$$

$$\text{Для волны } H_{21} \quad M_{21} = 3,054, \quad f_{кр} = \frac{M_{21} v_c}{2 \pi R} = 1,459 \cdot 10^{10} \text{ Гц.}$$

В волноводе возникает волна H_{11} , так как критическая частота этой волны меньше частоты возбуждения $f = 10$ ГГц.

$$\text{Для волны } H_{11} \text{ определяем } k_1 = \sqrt{1 - (f_{кр} / f)^2} = \sqrt{1 - 0,879^2} = 0,477.$$

Волновое сопротивление волновода $Z_{ВВ} = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} / k_1 = 790$ Ом.

$$\text{Коэффициент распространения волны вдоль оси } z \quad k_p = j \beta = j \sqrt{(\omega / v_c)^2 - (M_{11} / R)^2} = 100 j.$$

Фазовая скорость $v_\phi = v_c / k_1 = 3 \cdot 10^8 / 0,477 = 6,29 \cdot 10^8$ м/с, групповая скорость $v_{гр} = v_c k_1 = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,477 = 1,43 \cdot 10^8$ м/с.

Длина волны в свободном пространстве $\lambda_c = 3 \cdot 10^8 / f = 3$ см. Критическая длина волны $\lambda_{кр} = v_c / f_{кр} = 3 \cdot 10^8 / (0,879 \cdot 10^{10}) = 3,412$ см.

Мощность, переносимую по волноводу волной H_{11} , определим по формуле (а)

$$P = 1000^2 \frac{\pi 10^{-4}}{4} 377 \left(\frac{3,412}{3} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{3}{3,412} \right)^2} J_1^2(1,841) \left(1 - \frac{1}{1,841^2} \right) = 8020 \text{ Вт.}$$

§ 26.9. Полосковые линии. Вместо волноводов иногда применяют полосковые линии.

Два варианта выполнения полосковой линии (ПЛ) изображены на рис. 26.12, а и б. В первом случае в пространстве между двумя металлическими полосками расположена параллельно им более узкая металлическая полоска между полосками диэлектрика ($\epsilon_r > 1$). Во втором случае ПЛ образована двумя параллельными напыленными металлическими полосками, разделенными диэлектриком.

В пространстве между полосками образуется так называемая T -волна. Структура электрического поля в ней (рис. 26.12, а) подобна структуре электростатического поля, а магнитного — структуре магнитного поля линии постоянного тока. Излучение в окружающее пространство относительно мало, если $a > 5b$.

Волновое сопротивление ПЛ $Z_{ВПЛ} \approx 25 \dots 100$ Ом и может быть определено по приближенной формуле $Z_{ВПЛ} = \sqrt{\epsilon_r} / (C_0 v_c)$. Здесь C_0 —

емкость между узкой полоской и двумя широкими для рис. 26.12, а и между узкой и широкой для рис. 26.12, б; v_c — скорость света.

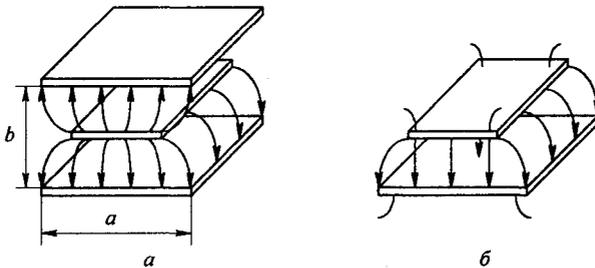


Рис. 26.12

Достоинства ПЛ — простота изготовления, малый вес и дешевизна. ПЛ широко применяются в интегральных схемах СВЧ. Подробнее о ПЛ см. [22].

§ 26.10. Замедляющие системы. Замедляющие системы (ЗС) — это системы, в которых фазовая скорость волны v_ϕ вдоль оси системы z замедлена по сравнению со скоростью света v_c и составляет $(0,03 \dots 0,35) v_c$. ЗС применяют для увеличения времени взаимодействия электронного пучка, движущегося со скоростью, меньшей v_c , с составляющей E_z бегущей вдоль оси z электромагнитной волны.

На рис. 26.13 изображена простейшая ЗС в виде коаксиальной линии, в котором внутренний проводник выполнен в виде спирали радиусом r и шагом a .

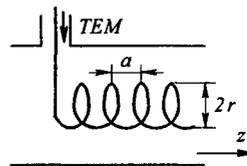


Рис. 26.13

В линию поступает волна TEM и движется вдоль спирали со скоростью света. Один виток она пройдет за время $t_1 = \sqrt{a^2 + (2\pi r)^2} / v_c$. Вдоль оси z за время t_1 она продвинется на a , т. е. $t_1 = a / v_\phi$. Отсюда

$$v_\phi = v_c / \sqrt{1 + (2\pi r / a)^2}.$$

Если $a = 1$ мм, $2r = 3$ мм, то $v_\phi \approx 0,052 v_c$.

Вблизи спирали \vec{E} имеет и z -составляющую. Поэтому вблизи спирали волна может быть отнесена к волне E -типа. ЗС рис. 26.13 применяют при небольших замедлениях и малых мощностях. Другие типы ЗС здесь не рассматриваем.

§ 26.11. S- и T-параметры элементов высокочастотного тракта. Устройства, входящие в высокочастотный тракт (волноводы, ответвители, ВЧ транзисторы), часто рассматривают как четырехполюсники, характеризующиеся своими волновыми S- и T-параметрами (а не A-, Z-, Y-, H-, G-параметрами, как в теории цепей, так как токи и

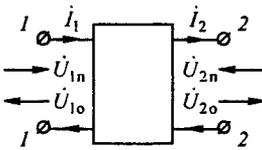


Рис. 26.14

напряжения на СВЧ трудно измерить).

На рис. 26.14 изображен четырехполюсник; его входные зажимы 1—1, выходные зажимы 2—2. На зажимах 1—1 имеется падающая волна напряжения \dot{U}_{1n} и отраженная волна \dot{U}_{1o} . Стрелки указывают положительные направления отсчета для них. На зажимах 2—2 соответственно: \dot{U}_{2n} и \dot{U}_{2o} .

Волны \dot{U}_{1o} и \dot{U}_{2o} определяют через \dot{U}_{1n} и \dot{U}_{2n} с помощью S -параметров:

$$\dot{U}_{1o} = S_{11} \dot{U}_{1n} + S_{12} \dot{U}_{2n}; \quad \dot{U}_{2o} = S_{21} \dot{U}_{1n} + S_{22} \dot{U}_{2n}. \quad (26.46)$$

В свою очередь \dot{U}_{1n} и \dot{U}_{1o} можно определить через \dot{U}_{2n} и \dot{U}_{2o} и T -параметры:

$$\dot{U}_{1n} = T_{11} \dot{U}_{2o} + T_{12} \dot{U}_{2n}; \quad \dot{U}_{1o} = T_{21} \dot{U}_{2o} + T_{22} \dot{U}_{2n}. \quad (26.47)$$

Связь T - и S -параметров:

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{S_{21}}, & T_{12} &= -\frac{S_{22}}{S_{21}}, & T_{21} &= \frac{S_{11}}{S_{21}}, & T_{22} &= -\frac{\Delta S}{S_{21}}; \\ S_{11} &= \frac{T_{21}}{T_{11}}, & S_{12} &= \frac{\Delta T}{T_{11}}, & S_{21} &= \frac{1}{T_{11}}, & S_{22} &= -\frac{T_{12}}{T_{11}}; \\ \Delta S &= S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}, & \Delta T &= T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (26.48)$$

Для взаимных четырехполюсников $S_{12} = S_{21}$ и $T_{12} = T_{21}$. Если $S_{21} = 0$, то T -параметры становятся неопределенными. Если каскадно соединено несколько четырехполюсников, то T -матрица каскада равна произведению T -матриц этих четырехполюсников.

Волновое сопротивление высокочастотного тракта, присоединенного к зажимам 1—1 четырехполюсника, обозначим $Z_{в1}$, а к зажимам 2—2 — $Z_{в2}$.

Направления токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 четырехполюсника возьмем, как в системе A -параметров (рис. 26.14), тогда:

$$\dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2. \quad (26.49)$$

Выразим токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{1n}}{Z_{в1}} - \frac{\dot{U}_{1o}}{Z_{в1}}; \quad \dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_{2n}}{Z_{в2}} + \frac{\dot{U}_{2o}}{Z_{в2}} \quad (26.50)$$

и учтем, что $\dot{U}_1 = \dot{U}_{1n} + \dot{U}_{1o}$ и $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2n} + \dot{U}_{2o}$.

Подставим (26.50) в (26.49) и сначала сложим полученные уравнения, а затем вычтем из первого второе. После этого разрешим уравнения относительно \dot{U}_{1n} и \dot{U}_{1o} и сопоставим с (26.47). Сопоставление

позволяет выразить *T*-параметры через *A*-параметры:

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{Z_{B2}} + C Z_{B1} + D \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \right); \\ T_{12} &= \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{Z_{B2}} + C Z_{B1} - D \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \right); \\ T_{21} &= \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{Z_{B2}} - C Z_{B1} - D \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \right); \\ T_{22} &= \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{Z_{B2}} - C Z_{B1} + D \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (26.51)$$

Параметры *S* определяют и опытным путем, измеряя мощности, переносимые падающими и отраженными волнами. С этой целью волны напряжения нормируют, деля их соответственно на $\sqrt{Z_{B1}}$ и $\sqrt{Z_{B2}}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1ПН} &= \frac{\dot{U}_{1н}}{\sqrt{Z_{B1}}}; & \dot{U}_{1ОН} &= \frac{\dot{U}_{1о}}{\sqrt{Z_{B1}}}; \\ \dot{U}_{2ПН} &= \frac{\dot{U}_{2н}}{\sqrt{Z_{B2}}}; & \dot{U}_{2ОН} &= \frac{\dot{U}_{2о}}{\sqrt{Z_{B2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (26.52)$$

Полные мощности, переносимые падающими и отраженными волнами:

$$P_{1н} = \dot{U}_{1ПН} \dot{U}_{1ПН}^*; \quad P_{1о} = \dot{U}_{1ОН} \dot{U}_{1ОН}^*. \quad (26.53)$$

Нормированные волны напряжения имеют размерность квадратного корня из размерности мощности. Они связаны друг с другом с помощью *S^н*-параметров:

$$\dot{U}_{1ОН} = S_{11}^н \dot{U}_{1ПН} + S_{12}^н \dot{U}_{2ПН}, \quad \dot{U}_{2ОН} = S_{21}^н \dot{U}_{1ПН} + S_{22}^н \dot{U}_{2ПН}, \quad (26.54)$$

или с помощью *T^н*-параметров:

$$\dot{U}_{1ПН} = T_{11}^н \dot{U}_{2ОН} + T_{12}^н \dot{U}_{2ПН}, \quad \dot{U}_{1ОН} = T_{21}^н \dot{U}_{2ОН} + T_{22}^н \dot{U}_{2ПН}. \quad (26.55)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^н &= S_{11}, & S_{12}^н &= S_{12} \sqrt{\frac{Z_{B2}}{Z_{B1}}}, & S_{21}^н &= S_{21} \sqrt{\frac{Z_{B1}}{Z_{B2}}}, & S_{22}^н &= S_{22}; \\ T_{11}^н &= T_{11} \sqrt{\frac{Z_{B2}}{Z_{B1}}}, & T_{12}^н &= T_{12} \sqrt{\frac{Z_{B2}}{Z_{B1}}}, & & & & \\ T_{21}^н &= T_{21} \sqrt{\frac{Z_{B2}}{Z_{B1}}}, & T_{22}^н &= T_{22} \sqrt{\frac{Z_{B2}}{Z_{B1}}}. & & & & \end{aligned} \right\} \quad (26.56)$$

§ 26.12. Прямоугольный объемный резонатор. Размеры внутренней полости резонатора по осям x , y , z на рис. 26.15, a обозначены соответственно a , b , c . По всем трем осям в полости резонатора будут стоячие

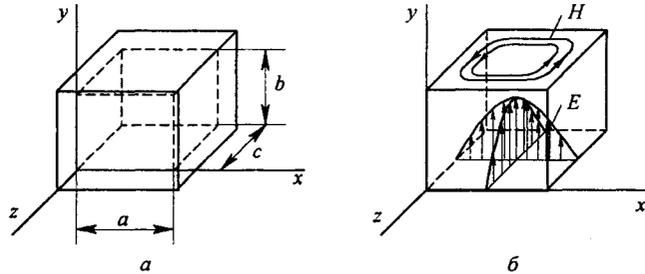


Рис. 26.15

волны. H -поле имеет компоненты \dot{H}_z , \dot{H}_x , \dot{H}_y , \dot{E}_x , \dot{E}_y . Как и в случае волновода, компонент \dot{H}_z подчиняется уравнению (26.2). Принимаем решение в виде произведения трех функций $\dot{H}_z = X Y Z$; X зависит только от координаты x , Y — только от y , Z — только от z . Подставив \dot{H}_z в (26.2), получим уравнение

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\omega_0^2 \epsilon_a \mu_a. \quad (26.58)$$

Запишем его в виде двух уравнений:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\rho^2; \quad (26.59)$$

$$\frac{Z''}{Z} = -\omega_0^2 \epsilon_a \mu_a + \rho^2, \quad (26.60)$$

где ρ — некоторое действительное число.

Решение (26.59) и (26.60) будет иметь вид:

$$X Y = H'_0 \cos(r x) \cos(q y); \quad (26.61a)$$

$$Z = H''_0 \sin(s z). \quad (26.61b)$$

Подставив (26.61a) в (26.59), получим

$$r^2 + q^2 = \rho^2. \quad (26.62)$$

Подставив (26.61b) в (26.60), найдем

$$\rho^2 = \omega_0^2 \epsilon_a \mu_a - s^2. \quad (26.62a)$$

Учтем граничные условия:

$$H_z = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = c;$$

$$E_x = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b;$$

$$E_y = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a.$$

При этом получаем

$$r = \frac{m \pi}{a}; \quad q = \frac{n \pi}{b}; \quad s = \frac{p \pi}{c}. \quad (26.63)$$

Из (26.62) и (26.62а) следует, что

$$\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p \pi}{c}\right)^2 = \omega_0^2 \varepsilon_a \mu_a. \quad (26.64)$$

Таким образом, собственная частота колебаний резонатора связана с геометрическими размерами a , b , c и числами m , n , p формулой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p \pi}{c}\right)^2}, \quad (26.65)$$

а

$$\dot{H}_z = \dot{H}_0 \cos(r x) \cos(q y) \sin(s z). \quad (26.66)$$

Здесь $H_0 = H'_0 H''_0$.

Используя уравнения (26.7)–(26.12) и (26.66), находим остальные компоненты H -поля (его обозначают H_{mnp}):

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_x &= -\dot{H}_0 \frac{r s}{k^2} \sin(r x) \cos(q y) \cos(s z); \\ \dot{H}_y &= -\dot{H}_0 \frac{q s}{k^2} \cos(r x) \sin(q y) \cos(s z); \\ \dot{E}_x &= j \dot{H}_0 \frac{q \omega_0 \mu_a}{k^2} \cos(r x) \sin(q y) \sin(s z); \\ \dot{E}_y &= -j \dot{H}_0 \frac{r \omega_0 \mu_a}{k^2} \sin(r x) \cos(q y) \sin(s z). \end{aligned} \right\} \quad (26.67)$$

Связь r , q , s с числами m , n , p определяется формулами (26.63). Числа m , n , p могут принимать значения 1, 2, 3... Для H -поля число m или n может быть нулем.

E -поле (его обозначают E_{mnp}) в прямоугольном резонаторе имеет компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_z &= \dot{E}_0 \sin(r x) \sin(q y) \cos(s z); \\ \dot{E}_x &= -\dot{E}_0 \frac{r s}{k^2} \cos(r x) \sin(q y) \sin(s z); \\ \dot{E}_y &= -\dot{E}_0 \frac{q s}{k^2} \sin(r x) \cos(q y) \sin(s z); \\ \dot{H}_x &= j \dot{E}_0 \frac{q \omega_0 \varepsilon_a}{k^2} \sin(r x) \cos(q y) \cos(s z); \\ \dot{H}_y &= -j \dot{E}_0 \frac{r \omega_0 \varepsilon_a}{k^2} \sin(r x) \cos(q y) \sin(s z). \end{aligned} \right\} \quad (26.68)$$

Связь r, q, s с числами m, n, p определяется формулами (26.63). Для E -поля p может быть нулем. Поле E_{110} описывают формулы:

$$\begin{aligned}\dot{E}_z &= \dot{E}_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ \dot{H}_x &= j \dot{E}_0 \frac{\pi}{b \omega_0 \mu_a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ \dot{H}_y &= -j \dot{E}_0 \frac{\pi}{a \omega_0 \mu_a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.\end{aligned}$$

Объемная картина поля E_{110} изображена на рис. 26.15, б.

Пример 228. Прямоугольный объемный резонатор с воздушным заполнением имеет размеры $a = 3,5$ см; $b = 3$ см; $c = 2,5$ см. Медные стенки его посеребрены и отполированы. В нем могут существовать следующие низшие типы волн: E_{110} , H_{101} , H_{011} . Требуется:

1) определить резонансные частоты и длины волн этих колебаний и оценить какой тип колебаний является основным;

2) для основного типа колебаний подсчитать энергию, запасенную в полости резонатора, полагая, что амплитуда напряженности электрического поля $E_0 = 10^5$ В/м;

3) для основного типа колебаний подсчитать комплексные значения проекций вектора \vec{H} магнитного поля в полости резонатора на оси x, y, z в точке с координатами $x = y = z = 1$ см;

4) определить добротность резонатора, обусловленную потерями в стенках $Q^{\text{ст}}$.

Решение.

1. Резонансную частоту ω_0 и длину волны λ_0 определим по формулам:

$$\omega_0 = \frac{\pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/c)^2}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}; \quad \lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/c)^2}}.$$

Подсчеты по этим формулам для трех перечисленных типов волн дают:

для E_{110} $m = n = 1, p = 0, \omega_0 = 4,13 \cdot 10^{10}$ с⁻¹, $\lambda_0 = 4,89$ см;

для H_{101} $m = p = 1, n = 0, \omega_0 = 4,63 \cdot 10^{10}$ с⁻¹, $\lambda_0 = 4,07$ см;

для H_{011} $n = p = 1, m = 0, \omega_0 = 4,89 \cdot 10^{10}$ с⁻¹, $\lambda_0 = 3,84$ см.

Основным типом будет колебание, у которого ω_0 наименьшая, а λ_0 наибольшая. В данном случае основным является колебание типа E_{110} .

2. Энергия в поле резонатора в процессе колебаний переходит из энергии электрического поля в равное ей количество энергии магнитного поля. Подсчитаем амплитудное значение энергии электрического поля резонатора W_3 . Учтем, что у колебания типа E_{110} имеется единственная проекция вектора напряженности электрического поля на ось z $\dot{E}_z = \dot{E}_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$, что она не зависит от координаты z и что

энергия электрического поля в единице объема равна $\epsilon_0 E^2 / 2$.

$$W_3 = \frac{c \epsilon_0 E_0^2}{2} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{8} abc = 0,29 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

3. Вектор \dot{H} магнитного поля в любой точке полости резонатора имеет две проекции, одну на ось x , другую на ось y .

$$\dot{H}_x = j \dot{E}_0 \frac{\pi}{b \omega_0 \mu_a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b};$$

$$\dot{H}_y = -j \dot{E}_0 \frac{\pi}{a \omega_0 \mu_a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Подставляя цифры в эти формулы, получим комплексные значения \dot{H}_x и \dot{H}_y в заданной точке поля:

$$\dot{H}_x = 78 j \text{ А/м,} \quad \dot{H}_y = -89,6 j \text{ А/м.}$$

4. Добротность, обусловленную потерями в стенках волновода, подсчитаем по формуле (26.78), имея в виду, что магнитная проницаемость стенок и полости волновода одинакова и равна μ_0 , что проводимость серебра $\gamma = 6,21 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ и $\omega_0 = 4,13 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Получим $Q^{\text{ст}} = 1905$.

§ 26.13. Цилиндрический объемный резонатор. Резонатор изображен на рис. 26.16, а. Длина его внутренней полости l , радиус R . В полости может существовать либо H -, либо E -поле. Рассмотрим H -поле.

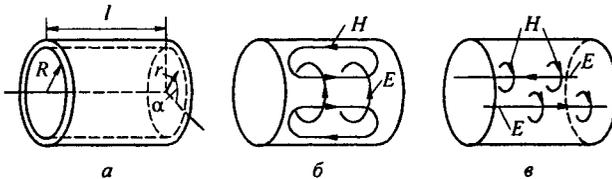


Рис. 26.16

Компонент \dot{H}_z подчиняется уравнению (26.25). Представляя \dot{H}_z в виде произведения трех функций и учитывая граничные условия, сначала определяем \dot{H}_z , а затем, привлекая уравнения Максвелла, записанные в цилиндрической системе координат, находим остальные компоненты H -поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_z &= \dot{H}_0 J_n(g r) \cos(n \alpha) \sin(d z); \\ \dot{H}_r &= \dot{H}_0 \frac{d}{g} J'_n(g r) \cos(n \alpha) \cos(d z); \\ \dot{H}_\alpha &= -\dot{H}_0 \frac{n d}{r g^2} J_n(g r) \sin(n \alpha) \cos(d z); \\ \dot{E}_r &= j \dot{H}_0 \frac{n \omega_0 \mu_a}{r} J_n(g r) \sin(n \alpha) \sin(d z); \\ \dot{E}_\alpha &= j \dot{H}_0 \frac{\omega_0 \mu_a}{g} J'_n(g r) \cos(n \alpha) \sin(d z), \end{aligned} \right\} \quad (26.69)$$

где

$$g = \omega_0 \sqrt{\epsilon_a \mu_a}; \quad d = p \pi / l. \quad (26.70)$$

Частота колебаний H -поля

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{M_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p \pi}{l}\right)^2}. \quad (26.71)$$

Длина волны

$$\lambda = 2 \pi / \sqrt{\left(\frac{M_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p \pi}{l}\right)^2}.$$

Как и для цилиндрического волновода, под M_{nm} понимают корни уравнения $J'_n(gR) = 0$; n соответствует порядку бesselевой функции, а m — номеру корня при возрастании аргумента gR ; p — число полуоволн напряженности поля, укладываемых на расстоянии l . Этот же смысл имеют индексы H -поля в записи H_{nmp} .

В качестве примера на рис. 26.16, б изображена объемная картина поля H_{011} .

Запишем формулы компонентов E -поля (поля E_{nmp}):

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_z &= \dot{E}_0 J_n(g r) \cos(n \alpha) \cos(d z); \\ \dot{E}_r &= -\dot{E}_0 \frac{d}{g} J'_n(g r) \cos(n \alpha) \sin(d z); \\ \dot{E}_\alpha &= \dot{E}_0 \frac{n d}{r g^2} J_n(g r) \sin(n \alpha) \sin(d z); \\ \dot{H}_r &= -j \dot{E}_0 \frac{n \omega_0 \epsilon_a}{r g^2} J_n(g r) \sin(n \alpha) \cos(d z); \\ \dot{H}_\alpha &= -j \dot{E}_0 \frac{\omega_0 \epsilon_a}{g} J'_n(g r) \cos(n \alpha) \cos(d z). \end{aligned} \right\} \quad (26.72)$$

Для E -поля

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{N_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p \pi}{l}\right)^2}. \quad (26.73)$$

Как и для E -волны в цилиндрическом волноводе N_{nm} — это корень уравнения $J_n(gR) = 0$. Индексы E -поля в записи E_{nmp} обозначают: n — порядок бesselевой функции, m — номер корня уравнения $J_n(gR) = 0$ в порядке возрастания аргумента, p — число полуоволн E_z , укладываемых на длине l .

На рис. 26.16, в изображена картина поля E_{110} .

§ 26.14. Добротность объемных резонаторов. Полные потери (Π) в резонаторе состоят из потерь в проводящих стенках (ст), потерь в диэлектрике (д) и потерь на излучение в элементах связи (св) с внешним пространством

$$P^\Pi = P^{\text{ст}} + P^{\text{д}} + P^{\text{св}}.$$

Если энергию, запасенную в поле резонатора, обозначить W_p , то под добротностью резонатора понимают величину

$$Q = \omega_0 W_p / P^\Pi. \quad (26.74)$$

Добротность резонатора зависит от частичных добротностей:

$$Q^{\text{ст}} = \frac{\omega_0 W_p}{P^{\text{ст}}}, \quad Q^{\text{д}} = \frac{\omega_0 W_p}{P^{\text{д}}}, \quad Q^{\text{св}} = \frac{\omega_0 W_p}{P^{\text{св}}}; \quad (26.75)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q^{\text{ст}}} + \frac{1}{Q^{\text{д}}} + \frac{1}{Q^{\text{св}}}. \quad (26.76)$$

Добротность, обусловленная потерями в проводящих стенках,

$$Q^{CT} = \frac{2}{\Delta} \frac{\mu_a}{\mu_a^{CT}} \int_{V_0} H_m^2 dV \bigg/ \int_S H_m^2 dS,$$

где μ_a — магнитная проницаемость полости резонатора; μ_a^{CT} — магнитная проницаемость стенок резонатора; $\Delta = \sqrt{2/(\omega \mu_a^{CT} \gamma)}$ — толщина стенок резонатора [см. формулу (23.17)]; V_0 — объем внутренней полости резонатора; S — поверхность внутренних стенок.

Добротность, обусловленная потерями в диэлектрике с комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$,

$$Q^D = \epsilon'_a / \epsilon''_a.$$

Добротность Q^{CB} , обусловленную излучением резонатора через элементы связи во внешнее пространство, называют внешней добротностью. Она характеризует идеализированный резонатор без потерь в стенках и в диэлектрике. Формулу (26.76) перепишем в виде

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q^{CB}} + \frac{1}{Q^0}, \quad Q^0 = \left(\frac{1}{Q^{CT}} + \frac{1}{Q^D} \right)^{-1}; \quad (26.77)$$

Q называют нагруженной, а Q^0 — собственной добротностью резонатора.

Добротность, обусловленную потерями в стенках резонатора Q^{CT} , для колебаний типа E_{110} определяют по следующей формуле.

$$Q^{CT} = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_a^{CT} \gamma}{2} \frac{\mu_a a b c (a^2 + b^2)}{\mu_a^{CT} [a b (a^2 + b^2) + 2c (a^3 + b^3)]}}. \quad (26.78)$$

В ней под c следует понимать самое короткое ребро резонатора.

Вопросы для самопроверки

1. Почему энергию СВЧ практически невозможно передавать по обыкновенным открытым линиям и коаксиальному кабелю? 2. Охарактеризуйте достоинства и недостатки известных Вам направляющих систем СВЧ. 3. Начиная примерно с каких частот энергию передают по волноводам? 4. Как связана собственная частота объемного резонатора с его размерами? 5. Дайте определение волн H , E , TEM . 6. Покажите, что распространяющаяся в коаксиальном кабеле электромагнитная волна является волной типа TEM . 7. Каким соотношением связана постоянная распространения k_p с геометрическими размерами a и b волновода и с числами n и m ? Что определяют собой числа n и m ? 8. Как определить критическую частоту $\omega_{кр}$, ниже которой электромагнитная волна не может распространяться вдоль волновода без затухания (полагая, что стенки волновода имеют $\gamma \rightarrow \infty$). Чем физически можно объяснить затухание, когда потери в стенках отсутствуют? 9. Чем руководствуются при выборе размеров сторон a и b в прямоугольном волноводе, чтобы в нем вдаль от излучателя распространялась волна H_{10} , а волны высших типов отсутствовали? 10. Начертите картину волн типов H_{10} и H_{11} . 11. Что понимают под волновым сопротивлением $Z_{ВВ}$ и как оно зависит от $\lambda_c / \lambda_{кр}$ для волны типа H_{10} и для E_{11} ? 12. Каков физический смысл групповой скорости? С какой скоростью ($v_{ФВ}$ или $v_{ГР}$) перемещается волна вдоль оси волновода? 13. Почему превышение фазовой скоростью скорости света не противоречит утверждению, что все физические процессы происходят со скоростью, не большей скорости света? 14. Как осуществить режим согласованной нагрузки на конце волновода? 15. На конце волновода установлена сплошная металлическая перегородка. Начертите картину напряженности электрического поля вдоль оси волновода для волны H_{10} . 16. Выведите граничные условия Леонтовича и поясните, как, используя их, можно определить E_x и E_y на стенках волновода при конечной проводимости стенок. 17. Каким свойством обладает запердельный волновод и с какой целью он может быть использован? 18. Определить максимальную мощность, которую можно передать по прямоугольному волноводу 23×10 мм на частоте 9 ГГц, полагая максимально допустимой

напряженность электрического поля в волноводе 30 кВ/см. (Ответ: 0,945 МВт.) 19. В прямоугольном волноводе $a = 2b$. Определить критические длины волн типов H_{10} , H_{01} , H_{20} , H_{11} . (Ответ: $2a$, $2b$, a , $2a/5$.) 20. В круглом волноводе диаметром 5 см распространяется волна H_{11} частотой 4 ГГц. Определите $Z_{ВВ}$, v_{ϕ} , $v_{гр}$. (Ответ: $Z_{ВВ} = 773$ Ом, $v_{\phi} = 6,18 \cdot 10^8$ м/с, $v_{гр} = 1,42 \cdot 10^8$ м/с.) 21. Определите диапазон частот, при котором в круглом волноводе диаметром 5 см может распространяться только основной вид волн H_{11} и E_{01} . (Ответ: 3,52...4,59 ГГц.) 22. Определить резонансную частоту основного типа колебаний в кубическом резонаторе со сторонами 2 см. (Ответ: 2,12 ГГц.) 23. Прямоугольный объемный резонатор со сторонами $a = 3$, $b = 2$ и $c = 4$ см заполнен диэлектриком с $\epsilon_r = 2,5$. Определите резонансную частоту основного типа колебаний. (Ответ: 4,56 ГГц.) 24. Поясните картину поля полосковой линии и укажите положительные качества этой линии. 25. Выведите формулу для мощности, передаваемой по волноводу волной E_{11} . 26. Поясните аналогию между волноводом и линией с распределенными параметрами. 27. Как измерить сопротивление комплексной нагрузки, включенной на конце волновода? 28. С какой целью применяют замедляющие системы? 29. Что понимают под нормированием падающих и отраженных волн напряжения? 30. Как определить S -параметры четырехполюсника? 31. Выразите T -параметры через S -параметры. 32. Решите задачи 26.2; 26.3; 26.4; 26.7; 26.9.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

§ 27.1. Движение электрона в равномерном магнитном поле, неизменном во времени и направленном перпендикулярно скорости. В § 27.1–27.6 под заряженной частицей понимаем электрон. Заряд его обозначим $q = -q_3$ и массу m ; $q_3 = 1,601 \cdot 10^{-19}$ Кл, при скорости движения, значительно меньшей скорости света, масса $m = 0,91 \cdot 10^{-27}$ г. Полагаем, что имеет место достаточно высокий вакуум, так что при движении электрон не сталкивается с другими частицами. На электрон, движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле индукции \vec{B} , действует сила Лоренца $\vec{f} = q [\vec{v} \vec{B}]$.

На рис. 27.1 учтено, что заряд электрона отрицателен и скорость его $\vec{v} = j v$ направлена по оси y , а индукция $\vec{B} = -i B$ — по оси x . Сила \vec{f} направлена перпендикулярно скорости и является центробежной силой. Она изменяет направление скорости, не влияя на числовое значение.

Электрон будет двигаться по окружности радиусом r с угловой частотой ω_u , которую называют *циклотронной частотой*. Центробежное ускорение равно силе f , деленной на массу: $v^2/r = q_3 v B/m$. Отсюда

$$r = \frac{v m}{B q_3}. \quad (27.1)$$

Время одного оборота

$$T = \frac{2 \pi r}{v} = \frac{2 \pi m}{B q_3}.$$

Следовательно,

$$\omega_u = \frac{2 \pi}{T} = \frac{B q_3}{m}. \quad (27.2)$$

§ 27.2. Движение электрона в неизменном во времени магнитном поле, когда скорость электрона не перпендикулярна силовым линиям. Рассмотрим два случая: в первом — электрон будет двигаться в равномерном поле, во втором — в неравномерном поле.

1. *Движение в равномерном поле.* Через α на рис. 27.2, a обозначен угол между скоростью электрона \vec{v} и индукцией \vec{B} . Разложим \vec{v} на \vec{v}_1 , направленную по \vec{B} и численно равную $v \cos \alpha$, и на \vec{v}_2 , направленную перпендикулярно \vec{B} и численно равную $v \sin \alpha$. Так как $[\vec{v}_1 \vec{B}] = 0$, то наличие составляющей скорости \vec{v}_1 не воздействует на электрон. Движение со скоростью \vec{v}_2 приводит к вращению электрона вокруг линии

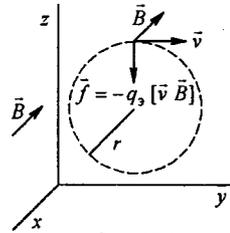


Рис. 27.1

\vec{B} подобно тому, как это было рассмотрено в § 27.1. В целом электрон будет двигаться по спирали (рис. 27.2, б), осевой линией которой является линия магнитной индукции. Радиус спирали $r = v_2 m / (B q_3)$, шаг спирали

$$\lambda = T v_1 = \frac{2 \pi m}{B q_3} v_1. \quad (27.3)$$

Поступательное и одновременно вращательное движение иногда называют *дрейфом электрона*.

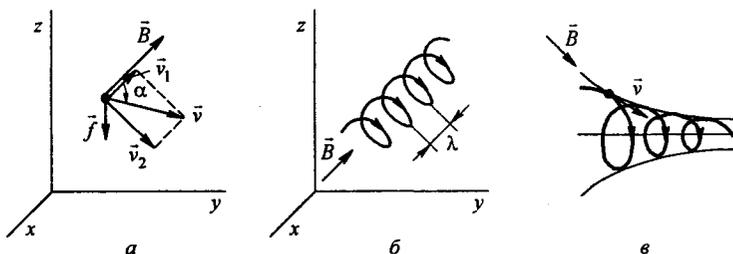


Рис. 27.2

2. *Движение в неравномерном поле*. Если магнитное поле неравномерно, например сгущается (рис. 27.2, в), то при движении по спирали электрон будет попадать в точки поля, где индукция B увеличивается. Но чем больше B , тем при прочих равных условиях меньше радиус спирали r [см. формулу (27.1)]. Дрейф электрона будет происходить в этом случае по спирали со все уменьшающимся радиусом. Если бы магнитные силовые линии образовывали расходящийся пучок, то электрон при своем движении попадал бы в точки поля со все уменьшающейся индукцией и радиус спирали возрастал бы.

§ 27.3. **Фокусировка пучка электронов постоянным во времени магнитным полем (магнитная линза)**. Из катода электронного прибора (рис. 27.3) выходит расходящийся пучок электронов. Со скоростью \vec{v}

электроны входят в неравномерное магнитное поле узкой цилиндрической катушки с током.

Разложим скорость электрона \vec{v} в произвольной точке m на две составляющие: \vec{v}_1 и \vec{v}_2 .

Первая составляющая \vec{v}_1 направлена противоположно вектору \vec{B} , а вторая \vec{v}_2 — перпендикулярно вектору \vec{B} . Возникшая ситуация повторяет рассмотренную в § 27.2. Электрон начнет двигаться по спирали, осью

которой является \vec{v}_1 . В результате электронный пучок фокусируется в точке b .

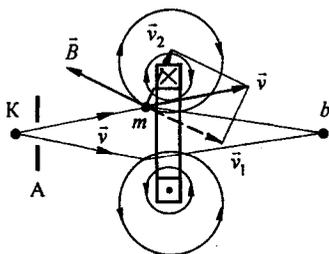


Рис. 27.3

§ 27.4. Движение электронов в равномерном электрическом поле. Принцип работы электронного осциллографа. Электрон, пройдя расстояние от катода К до узкого отверстия в аноде А (рис. 27.4, а), под дей-

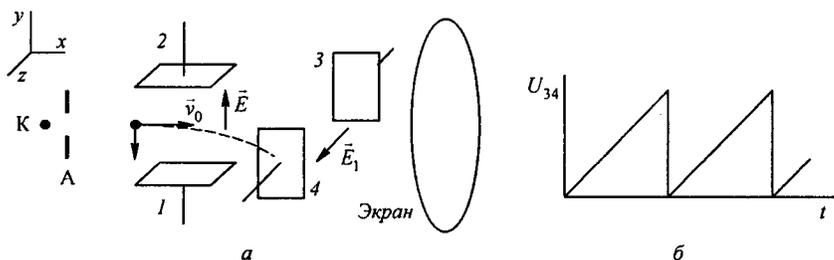


Рис. 27.4

ствием ускоряющего напряжения U_{AK} увеличивает свою энергию на величину работы сил поля.

Скорость v_0 , с которой электрон будет двигаться после выхода из отверстия в аноде А, найдем из соотношения $m v_0^2 / 2 = q_3 U_{AK}$:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 q_3 U_{AK}}{m}}$$

При дальнейшем прямолинейном движении по оси x электрон попадает в равномерное электрическое поле напряженностью \vec{E} между отклоняющими пластинами 1 и 2 (находятся в плоскостях, параллельных плоскости zOx). Напряженность \vec{E} направлена вдоль оси y . Пока электрон движется между отклоняющимися пластинами на него действует постоянная сила $\vec{F}_y = -q_3 \vec{E}$, направленная по оси $-y$. Под действием этой силы электрон движется вниз равноускоренно, сохраняя постоянную скорость v_0 вдоль оси x . В результате в пространстве между отклоняющимися пластинами электрон движется по параболе. Когда он выйдет из поля пластин 1—2, в плоскости yOx он будет двигаться по касательной к параболе. Далее он попадает в поле пластин 3—4, которые создают развертку во времени. Напряжение U_{34} между пластинами 3—4 и напряженность поля между ними E_1 линейно нарастают во времени (рис. 27.4, б). Электрон получает отклонение в направлении оси z , что и дает развертку во времени.

§ 27.5. Фокусировка пучка электронов постоянным во времени электрическим полем (электрическая линза). Фокусировка основана на том, что, проходя через участок неравномерного электрического поля, электрон отклоняется в сторону эквипотенциали с большим значением потенциала (рис. 27.5, а). Электрическая линза образована катодом, испускающим электроны, анодом, куда пучок электрона приходит сфокусированным, и фокусирующей диафрагмой, представляющей собой пластину с круглым отверстием в центре (рис. 27.5, б). Диафрагма имеет отрицательный потенциал по отношению к окружающим ее точкам про-

странства, вследствие этого эквипотенциали электрического поля как бы выпучиваются через диафрагму по направлению к катоду. Электроны,

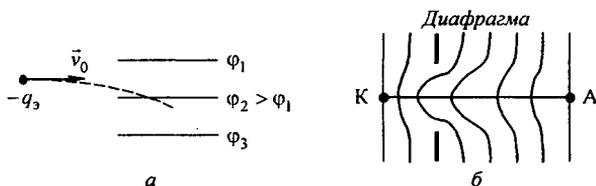


Рис. 27.5

проходя через отверстие в диафрагме и отклоняясь в сторону, фокусируются на аноде.

§ 27.6. Движение электрона в равномерных, взаимно перпендикулярных, неизменных во времени магнитном и электрическом полях. Пусть электрон с зарядом $q = -q_3$ и массой m с начальной скоростью \vec{v}_0 оказался при $t = 0$ в начале координат (рис. 27.6, а) в магнитном

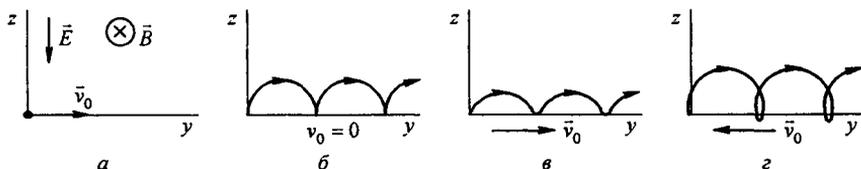


Рис. 27.6

и электрическом полях. Магнитная индукция направлена по оси $-x$: $\vec{B} = -\vec{i} B$, т. е. $B_x = B$. Напряженность электрического поля направлена по оси $-z$: $\vec{E} = -\vec{k} E$, т. е. $E_z = E$. Движение электрона будет происходить в плоскости zOy со скоростью $\vec{v} = \vec{j} v_y + \vec{k} v_z$. Уравнение движения:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q_3 \vec{E} - q_3 [\vec{v} \vec{B}]$$

или

$$\vec{j} m \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} m \frac{dv_z}{dt} = \vec{k} (q_3 E - q_3 v_y B) + \vec{j} q_3 v_z B.$$

Следовательно,

$$m \frac{dv_y}{dt} = q_3 v_z B, \quad m \frac{dv_z}{dt} = q_3 E - q_3 v_y B.$$

В соответствии с формулой (27.2) заменим $q_3 B/m$ на циклотронную частоту ω_u . Тогда

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega_u v_z; \quad (27.4)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q_3 E}{m} - \omega_u v_y. \quad (27.5)$$

Продифференцируем (27.4) по t и в правую часть полученного уравнения подставим (27.5):

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_u^2 v_y = \omega_u \frac{q_3 E}{m}. \quad (27.6)$$

Решим уравнение классическим методом:

$$v_y = v_{y \text{ пр}} + v_{y \text{ св}},$$

где

$$v_{y \text{ пр}} = \frac{q_3 E}{m \omega_u} = \frac{E}{B}; \quad v_{y \text{ св}} = A \sin(\omega_u t + \psi).$$

Составим два уравнения для определения постоянных интегрирования. Так как при $t=0$ $v_y = v_0$, $A \sin \psi + E/B = v_0$, то при $t=0$ $v_z = 0$. Поэтому $(dv_y/dt)_{t=0} = 0$ или $A \cos \psi = 0$. Отсюда $\psi = 90^\circ$ и $A = v_0 - E/B$. Таким образом,

$$v_y = \frac{E}{B} + \left(v_0 - \frac{E}{B}\right) \cos(\omega_u t), \quad v_z = \frac{1}{\omega_u} \frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{E}{B} - v_0\right) \sin(\omega_u t).$$

Пути, пройденные электроном по осям y и z :

$$y = \int_0^t v_y dt = \frac{E}{B} t - \frac{E/B - v_0}{\omega_u} \sin(\omega_u t);$$

$$z = \int_0^t v_z dt = \frac{E/B - v_0}{\omega_u} [1 - \cos(\omega_u t)].$$

На рис. 27.6, б–г изображены три характерных случая движения при различных значениях v_0 . На рис. 27.6, б — трохоида при $v_0 = 0$, ее максимальное отклонение по оси z равно $z_{\text{max}} = 2mE/(q_3 B^2)$. Если $v_0 > 0$ и направлена по оси $+y$, то траекторией является растянутая трохоида (рис. 27.6, в) с максимальным отклонением $z_{\text{max}} = \frac{2m}{q_3 B^2} \left(\frac{E}{B} - v_0\right)$. Если $v_0 < 0$ и направлена по оси $-y$, то траекторией будет сжатая трохоида (рис. 27.6, г) с $z_{\text{max}} = \frac{2m}{q_3 B^2} \left(\frac{E}{B} + v_0\right)$.

Когда магнитное и электрическое поля мало отличаются от равномерных, траектории движения электронов близки к трохоидам.

§ 27.7. Движение заряженных частиц в кольцевых ускорителях. Циклотрон представляет собой две полые камеры в виде полуцилиндров из проводящего неферромагнитного материала. Эти камеры находятся в сильном равномерном магнитном поле индукции \vec{B} , направленном на рис. 27.7 сверху вниз. Камеры помещают в вакуумированный сосуд (на рисунке не показан) и присоединяют к источнику напряжения $U_m \cos(\omega t)$. При $t=0$, когда напряжение между камерами имеет максимальное значение, а потенциал левой камеры положителен по отношению к правой, в пространство между камерами вводят положительный заряд q . На него будет действовать сила $q\vec{E}$. Заряд начнет двигаться слева направо и с начальной скоростью v_0 войдет в правую камеру. Но внутри камеры напряженность электрического поля равна нулю. Поэтому, пока он находится там, на него не

действует сила $q\vec{E}$, но действует сила $q[\vec{v}\vec{B}]$, обусловленная магнитным полем. Под действием этой силы положительный заряд, движущийся со скоростью v , начинает движение по окружности радиусом $r = m v / (q B)$. Время, в течение которого он совершит поворот, $t_1 = \pi r / v = \pi m / (q B)$. Если частоту приложенного между камерами напряжения взять равной $f = 1/T = 1/(2 t_1)$, то к моменту времени, когда заряд выйдет из правой камеры, он окажется под воздействием электрического поля, направленного справа налево. Под действием этого поля заряд увеличивает свою скорость и входит в левую камеру, где совершает следующий поворот, но уже большего радиуса, так как имеет большую скорость. После k полуоборотов заряженная частица приобретает такую скорость и энергию, какую она приобрела бы, если в постоянном электрическом поле пролетела бы между электродами, разность потенциалов между которыми $k U_m$.

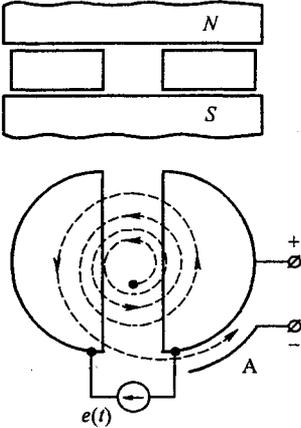


Рис. 27.7

Вывод заряда из циклотрона осуществляется с помощью постоянного электрического поля, создаваемого между одной из камер (на рис. 27.7 правой) и вспомогательным электродом А. С увеличением скорости v , когда она становится соизмеримой со скоростью света, масса частицы m во много раз увеличивается. Возрастет и время t_1 прохождения полуоборота. Поэтому одновременно с увеличением скорости частицы необходимо уменьшать либо частоту

источника напряжения $U_m \cos(\omega t)$ (фазотрон), либо индукцию магнитного поля (синхротрон), либо частоту и индукцию (синхрофазотрон).

Вопросы для самопроверки

1. В постоянном магнитном поле индукции $\vec{B} = -i B$ ($B = 1$ Тл) движется электрон со скоростью $\vec{v} = \vec{j} v$. Определите циклотронную частоту ω_c . (Ответ: $1,76 \cdot 10^8$ с $^{-1}$.) 2. Определите угол α между вектором магнитной индукции B постоянного во времени магнитного поля и скоростью \vec{v} электрона, если он движется по спирали, шаг которой λ равен ее радиусу r . (Ответ: $80^\circ 56'$.) 3. Электрон, имея очень малую начальную скорость, под действием ускоряющего напряжения U_{AK} приобрел скорость 10^6 м/с. Определите значение напряжения U_{AK} . (Ответ: ~ 2840 В.) 4. Электрон движется во взаимно перпендикулярных неизменных во времени электрическом и магнитном полях (см. рис. 27.6). Начальная скорость электрона $v_0 = 10^5$ м/с. Магнитная индукция $B = 1$ Тл. Траектория движения электрона представляет собой сжатую трохойду с максимальным отклонением $z_{\max} = 2,27$ мм. Определите значение напряженности электрического поля. (Ответ: 10^5 В/м.) 5. Цилиндрический поток электронов радиусом r_0 ускорен напряжением U_{AK} . Объемная плотность заряда в пучке равномерна и равна ρ . Определите радиальные электрическую \vec{F}_3 и магнитную \vec{F}_m силы, действующие на крайние электроны пучка, обусловленные собственным электрическим и магнитными полями. При решении использовать понятие тока переноса

$\vec{\delta}_n = \rho \vec{v}_0$. (Ответ: $\vec{F}_3 = \vec{r}_0 \frac{q_2 \rho r_0}{2 \epsilon_0}$; $\vec{F}_m = -\vec{r}_0 \frac{q_2 \mu_0 \rho v_0^2}{2}$; $v_0 = \sqrt{\frac{2 q_2}{m} U_{AK}}$.) 6. Расходящийся пучок электронов (угол расходимости α составляет несколько градусов) движется со скоростью v вдоль оси цилиндрической катушки с током. При входе в равномерное магнитное поле катушки индукции B радиус пучка равен r_0 . Определите B , при которой граничные электроны пучка будут двигаться по спирали с радиусом r_0 . (Ответ: $B = \frac{v_0 m \cos(\alpha/2)}{r_0 q_2}$.)

7. Поясните принцип работы магнитной линзы. 8. Объясните, в силу каких причин электрическая линза осуществляет фокусировку электронного пучка. 9. Расскажите о принципе работы электронного осциллографа. 10. В чем отличие принципа работы фазотрона от принципа работы синхрофазотрона и циклотрона? 11. Решите задачи 27.3; 27.4; 27.10; 27.13; 27.14; 27.17.

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 28.1. Определение магнитной гидродинамики и краткая характеристика областей ее применения. Магнитная гидродинамика — это область науки, в которой изучают поведение плазмы или проводящей жидкости (расплавленных металлов или солей) в магнитном или электромагнитном поле.

Плазмой называют полностью или частично ионизированный газ, в котором концентрация положительных и отрицательных ионов одинакова, а суммарный заряд в единице объема равен нулю. Этот газ в магнитогидродинамическом приближении можно рассматривать как своеобразную проводящую жидкость. При движении жидкости (плазмы) в магнитном (электромагнитном) поле в ней возникают электрические токи, взаимодействия которых с магнитным полем вызывают механические силы, влияющие на характер ее движения.

За последние годы магнитная гидродинамика особенно интенсивно развивалась в трех направлениях:

- 1) исследование космических проблем;
- 2) изучение способов воздействия на высокотемпературную плазму (ее термоизоляция, импульсное ускорение; управляемую термоядерную реакцию);
- 3) разработка методов электромагнитного воздействия на жидкий металл при его плавке, транспортировке, дозировании.

В космосе имеется полностью ионизированный газ (плазма). Проводимость его в некоторых случаях приближается к проводимости металла. Если учесть, что ионизированные газы занимают колоссальные объемы, то, несмотря на большие расстояния между космическими телами, сопротивления между ними относительно невелики. В то же время магнитное поле в космосе может быть значительным. Так, регулярное магнитное поле солнца составляет приблизительно $25 \cdot 10^{-4}$ Тл, а в области солнечных пятен достигает 0,2...0,4 Тл. Эти магнитные поля создают огромные медленно затухающие токи в плазме, взаимодействие которых с магнитным полем создает механические силы. Даже если силы и оказываются небольшими по числовому значению, то их влияние на движение плазмы значительно, так как они воздействуют на нее в течение длительного времени.

Различают высокотемпературную и низкотемпературную плазмы. По степени концентрации заряженных частиц плазму подразделяют на разреженную и на плазму с большой концентрацией. У высокотемпературной плазмы температура доходит до нескольких миллионов градусов. Низкотемпературная плазма имеет место, например, в столбе ионизированного газа при тлеющем и дуговом разрядах. Плазма с температурой

в несколько тысяч градусов образуется, например, вблизи поверхности ракеты при ее вхождении в плотные слои атмосферы.

Магнитная гидродинамика наряду с другими науками является теоретической основой при разработке магнитогидродинамических генераторов, а также плазменных и ионных двигателей.

Применение жидкометаллических теплоносителей в паровых машинах и турбинах, охлаждение атомных реакторов щелочными металлами, натрием и калием, разлив и транспортировка жидкого металла в металлургии — все это вызвало потребность в магнитных насосах, вентилях, дозаторах.

При исследовании поведения проводящей жидкости в магнитном поле ее характеризуют проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ_a . Значения γ и μ_a полагают известными из молекулярно-кинетической теории. Точно так же, когда изучают поведение плазмы в магнитном поле, значения γ и μ_a для нее считают известными из электронной теории. Обычно полагают, что среда является однородной и изотропной и что ее свойства не зависят от температуры. Однако при определенных условиях γ плазмы может оказаться величиной тензорной, например γ плазмы в области солнечной короны. Иногда необходимо рассматривать плазму как двухкомпонентную (не однокомпонентную) среду.

§ 28.2. Уравнения магнитной гидродинамики. Систему уравнений гидродинамики образуют следующие группы уравнений.

Уравнения Максвелла применительно к движущейся проводящей среде. Проводящая среда по отношению к некоторой системе отсчета движется со скоростью \vec{v} во внешнем магнитном поле индукции \vec{B} . Скорость движения среды ничтожно мала по сравнению со скоростью света, поэтому релятивистские поправки в уравнениях Максвелла не вносят. Ток смещения не учитывают, так как он ничтожно мал по сравнению с током проводимости.

Напряженность электрического поля равна сумме электрической и магнитной составляющих: $\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]$. Тогда

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma (\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]); \quad (28.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (28.2)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0; \quad (28.3)$$

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]), \quad (28.4)$$

где $\vec{\delta}$ — плотность тока.

Уравнение (28.4) представляет собой закон Ома. Решим систему уравнений (28.1)–(28.4) относительно вектора \vec{B} . С этой целью найдем \vec{E} из (28.1), заменив \vec{H} на \vec{B}/μ_a :

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma \mu_a} \text{rot } \vec{B} - [\vec{v} \vec{B}].$$

Подставим \vec{E} в (28.2):

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} - \operatorname{rot}[\vec{v} \vec{B}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Так как $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \nabla^2 \vec{B}$, а $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, то

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \nabla^2 \vec{B} + \operatorname{rot}[\vec{v} \vec{B}] = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (28.5)$$

Уравнение Навье—Стокса выражает второй закон Ньютона применительно к единице объема проводящей среды, движущейся в магнитном поле.

Произведение массы единицы объема жидкости (ρ), движущейся со скоростью \vec{v} , на ее ускорение $d\vec{v}/dt$ равно сумме сил, действующих на единицу объема:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4,$$

где $d\vec{v}/dt$ — полная или материальная производная, учитывающая изменение \vec{v} в данной точке во времени и в результате того, что точка наблюдения попадает в поле с иными значениями \vec{v} вследствие движения; $\vec{F}_1 = -\operatorname{grad} p$ — сила, вызванная перепадом давления и направленная в сторону уменьшения давления (тогда как $\operatorname{grad} p$ направлен в сторону увеличения давления); $\vec{F}_2 = \rho \vec{g}$ — сила тяжести, действующая на единицу объема (\vec{g} — ускорение силы тяжести в данной точке); $\vec{F}_3 = \rho \nu \nabla^2 \vec{v}$ — сила вязкого трения на единицу объема, ν — кинематический коэффициент вязкости; сила вязкого трения взята пропорциональной второй производной скорости потому, что равна разности сил, действующих с каждых двух противоположных граней объема, отнесенной к расстоянию между гранями.

Выражение для электромагнитной силы \vec{F}_4 получим из формулы (21.2). Для этого надо ввести ток I в квадратные скобки и заменить его произведением плотности тока $\vec{\delta}$ на сечение $\Delta \vec{S}$, через которое он проходит; затем обе части выражения $\vec{F} = [I \Delta \vec{S} \vec{\delta} \vec{B}]$ разделить на выделенный объем проводящего тела $\Delta l \Delta S = \Delta \vec{l} \Delta \vec{S}$.

Силы \vec{F}_2 и \vec{F}_3 малы по сравнению с \vec{F}_1 и \vec{F}_4 и потому их не учитывают. Окончательно имеем

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + [\vec{\delta} \vec{B}]. \quad (28.6)$$

Уравнение непрерывности, выражающее то, что изменение массы в элементарном объеме обусловлено притоком жидкости (плазмы):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (28.7)$$

Уравнение теплового баланса

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + \frac{\delta^2}{\gamma} + W_{\text{тр}} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (28.8)$$

где $\rho c dT/dt$ — теплота, расходуемая на увеличение температуры объема; c — удельная теплоемкость; $\lambda \nabla^2 T$ — теплота, приносимая в единичный объем за счет теплопроводности; λ — коэффициент теплопроводности; δ^2/γ — джоулевы потери в единице объема; $W_{\text{тр}}$ — теплота, выделяемая в объеме в силу наличия трения; p — давление; $\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ — теплота, выделяющаяся в объеме при изменении плотности ρ .

В установившемся тепловом режиме температура T неизменна, и в этом случае уравнение (28.8) не используется.

§ 28.3. Просачивание (диффузия) магнитного поля. Положим, что плазма неподвижна. Из уравнений (28.5) и (28.6) при $\vec{v} = 0$ следует:

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \nabla^2 \bar{B} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad (28.9)$$

$$[\bar{\delta} \bar{B}] = \text{grad } p. \quad (28.10)$$

Уравнение (28.9) является уравнением диффузии или уравнением теплопроводности, где $1/(\gamma \mu_a)$ — коэффициент диффузии. Если принять, что \bar{B} имеет только одну не равную нулю составляющую в декартовой системе координат $\bar{B} = \bar{i} B_x(x, t)$, то решением (28.9) будет

$$B_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu^2 t}{\gamma \mu_a}} [a(\nu) \cos(\nu x) + b(\nu) \sin(\nu x)] d\nu, \quad (28.11)$$

где ν — параметр $[\nu] = \frac{1}{\text{м}}$; $a(\nu)$, $b(\nu)$ — постоянные интегрирования, определяемые из начальных и граничных условий.

Из (28.11) следует, что поле, просачиваясь сквозь плазму, затухает с постоянной времени

$$\tau = \gamma \mu_a l^2, \quad (28.12)$$

где l — линейный размер области, занятой полем.

На расстоянии l укладывается одно колебание $\sin(\nu x)$ или $\cos(\nu x)$ при $\nu = 2\pi/l$.

§ 28.4. Электромагнитный барьер. Согласно уравнению (28.10) $\text{grad } p$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\bar{\delta}$ и \bar{B} (рис. 28.1). Отсюда следует, что при определенной конфигурации поля давление p может быть уравновешено электромагнитной силой. Это особенно важно хотя бы для кратковременной локализации плазмы с температурой порядка миллиона градусов, когда не приходится рассчитывать на барьеры из какого-либо вещества.

§ 28.5. Вмороженное поле. Положим, что проводимость плазмы γ очень велика, теоретически стремится к бесконечности, и что плазма находится в движении со скоростью \vec{v} . На рис. 28.2, *a* показана плос-

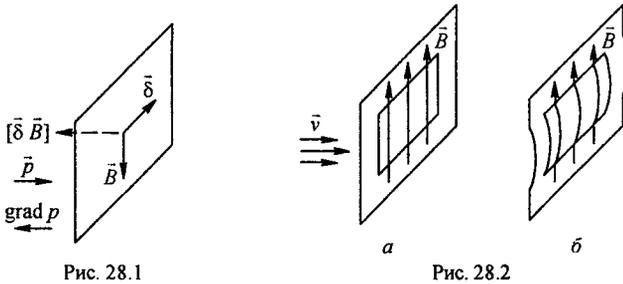


Рис. 28.1

Рис. 28.2

кость, в которой в исходном состоянии расположены линии магнитной индукции. Возьмем произвольный контур в этой плоскости и допустим, что скорость движения плазмы перпендикулярно линиям \vec{B} стала неодинаковой (см. стрелки для \vec{v} на рис. 28.2, *a*). Через некоторое время плоскость деформируется и примет вид, изображенный на рис. 28.2, *б*. Силовые линии растянутся вместе с контуром, они как бы «приклеены», или вморожены в плазму (поток через контур останется неизменным). Физически это объясняется тем, что при движении плазмы поперек линий \vec{B} в ней индуцируются токи, поле которых, складываясь с первоначальным, так его деформирует, что силовые линии смещаются вместе с плазмой. Практически проводимость γ не бесконечно велика, поэтому деформация линии \vec{B} несколько отстает от деформации контура.

§ 28.6. Возникновение волн в плазме. При определенных условиях в плазме могут возникать магнитогидродинамические волны. Для выяснения механизма их возникновения обратимся к рис. 28.3. Для упрощения выкладок примем, что проводимость плазмы $\gamma \rightarrow \infty$. Прямоугольная система координат расположена в плазме так, что внешнее магнитное поле индукции \vec{B}_0 направлено по оси z . Положим, что по какой-либо причине слой плазмы *l* (рис. 28.3, *б*) начал двигаться со скоростью \vec{v} в направлении оси y . Так как движение этого слоя есть движение проводящего тела в магнитном поле, то в каждой точке слоя *l* возникает напряженность поля $[\vec{v} \vec{B}] = \vec{i} v B$. Под ее действием в плазме возникнут токи проводимости с плотностью $\vec{\delta} = (1/\mu_a) \text{rot } \vec{B}$, замыкающиеся через соседние слои, как показано на рис. 28.3, *а*. Результирующая индукция \vec{B} равна сумме индукции внешнего поля \vec{B}_0 и индукции \vec{b} от токов проводимости:

$$\vec{B} = [\vec{j} \vec{b}] + [\vec{k} \vec{B}_0].$$

На движущийся в магнитном поле ток будет действовать механическая сила, в каждой точке слоя равная

$$\begin{aligned}
 [\bar{\delta} \bar{B}] &= \frac{1}{\mu_a} [\text{rot } \bar{B} \bar{B}] = \frac{1}{\mu_a} \left[\left(-\bar{i} \frac{\partial b}{\partial z} \right) (\bar{j} b + \bar{k} \bar{B}_0) \right] = \\
 &= \frac{1}{\mu_a} \left[\bar{k} \left(-b \frac{\partial b}{\partial z} \right) + \bar{j} B_0 \frac{\partial b}{\partial z} \right].
 \end{aligned}$$

Сила \bar{F}_1 , действующая на слой плазмы 1, начавший двигаться первым, будет замедлять его движение. Слои 2 и 3, расположенные выше и ниже слоя 1 (в них токи направлены в противоположную сторону по сравнению с током в слое 1), будут испытывать силы \bar{F}_2 и \bar{F}_3 , под воздействием которых слои начнут двигаться по оси z .

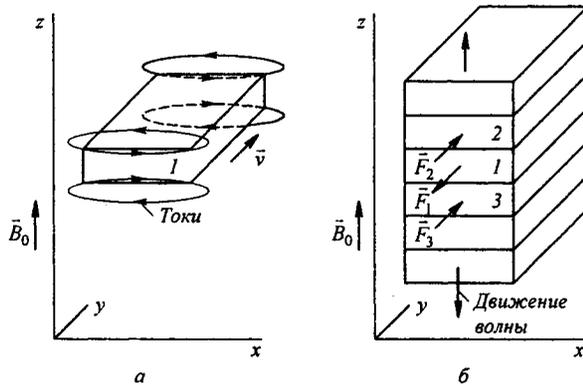


Рис. 28.3

Вдоль направления внешнего магнитного поля возникают две волны, распространяющиеся со скоростью $\bar{v}_1 = \pm k v_1$. Одна из них распространяется вверх, другая — вниз. Волны будут поперечными — слои плазмы движутся перпендикулярно направлению распространения волны. Рассмотренный тип волн называют *волнами Альфвена*.

Давление p волны изменяется только в направлении оси z :

$$\text{grad } p = \bar{k} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Уравнение (28.5) имеет только одну проекцию на ось y :

$$B_0 \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial t}. \quad (28.13)$$

Уравнение (28.6) дает проекции на оси y и z :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = B_0 \frac{1}{\mu_a} \frac{dp}{dz}; \quad (28.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{b}{\mu_a} \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (28.15)$$

Дифференцируя (28.13) по t и (28.14) по z , получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\rho \mu_a} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}.$$

Решение его следующее:

$$b = f_1(t - z/v_1) + f_2(t + z/v_1).$$

В направлении оси z скорость распространения волны $v_1 = B/\sqrt{\rho \mu_a}$. При $B_0 = 1 \dots 1,5$ Тл, $\rho = 1 \dots 10^4$ кг/м³ значение v_1 составляет от нескольких сантиметров до нескольких десятков метров в секунду.

Если

$$b = A \sin(\omega t - \omega z/v_1),$$

то из уравнения (28.13) следует, что скорость движения плазмы

$$v_1 = -\frac{A}{\sqrt{\rho \mu_a}} \sin(\omega t - \omega z/v_1).$$

Из уравнения (28.15) определяем давление

$$p = p_0 - A^2 / (2 \mu_a) \sin^2(\omega t - \omega z/v_1),$$

где A и p_0 некоторые постоянные.

Плотность тока $\bar{\delta} = \bar{i} \delta_x$,

$$\delta_x = \frac{1}{\mu_a} \text{rot}_x \bar{B} = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{A \omega}{B_0} \sqrt{\frac{\rho}{\mu_a}} \cos(\omega t - \omega z/v_1).$$

Если учесть, что γ конечна, не бесконечно велика, то вследствие потерь от вихревых токов и вязкого трения амплитуда волны A по мере продвижения волны вдоль оси z будет затухать по экспоненте.

В плазме могут возникнуть и другие типы волн, при которых силовые линии, увлекаемые частицами плазмы или жидкости, участвуют в турбулентном движении.

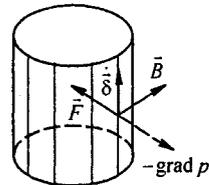


Рис. 28.4

§ 28.7. Эффект сжатия (пинч-эффект). В цилиндрическом столбе электрической дуги (рис. 28.4) нити тока параллельны. Каждый элемент этой нити находится в магнитном поле индукции \bar{B} , направленной по касательной к нити тока. На каждый элемент тока с плотностью $\bar{\delta}$ действует сила $\bar{F} = [\bar{\delta} \bar{B}]$. Под действием этих сил нити стремятся сжаться, а столб дуги уплотниться. Но температура газа (плазмы), а, следовательно, и давление будут максимальны на оси. Силе сжатия противостоит давление. Система находится в равновесии, когда электромагнитная сила сжатия уравновешена силой давления.

§ 28.8. Принцип работы магнитного насоса и магнитного вентиля. В магнитном насосе механическое воздействие на проводящую жидкость создается магнитным полем. Принцип работы насоса кондукционного типа поясняет рис. 28.5. Участок трубопровода находится в скрещенных магнитном и электрическом полях. Магнитное поле направлено сверху вниз, электрическое — от точки m к точке n . Под действием электрического поля в направлении от m к n через жидкость течет ток I . На каждый элемент объема жидкости с плотностью тока \vec{j} действует сила $\vec{F} = [\vec{j} \vec{B}]$, направленная согласно с направлением движения жидкости по трубопроводу, т. е. устройство действует как насос.

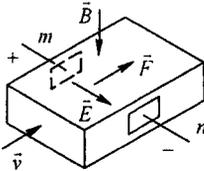


Рис. 28.5

Если при прочих равных условиях изменить направление электрического или магнитного поля, то возникает сила, препятствующая движению. В этом случае устройство будет работать в качестве тормоза или вентиля. Управлять числовым значением силы можно, изменяя величину B .

§ 28.9. Принцип работы гидродинамического генератора. Через канал с большой скоростью \vec{v} продувают плазму, нагретую до высокой температуры (рис. 28.6, а). В перпендикулярном направлении создают

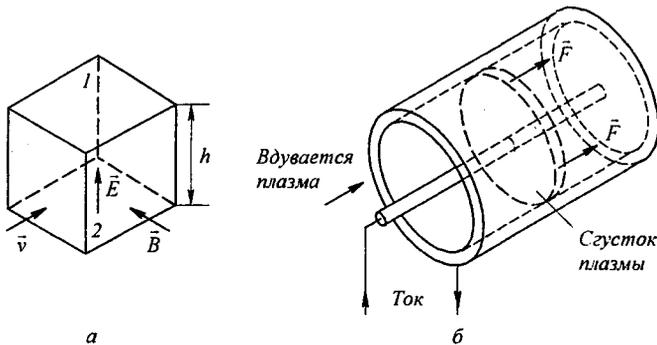


Рис. 28.6

сильное магнитное поле индукции \vec{B} . На ионы плазмы воздействует лоренцова сила $\vec{E} = [\vec{v} \vec{B}]$. Под ее действием положительные заряды движутся по направлению \vec{E} к электроду 1, а отрицательные — встречно \vec{E} к электроду 2. Между электродами возникает разность потенциалов, равная Eh . Если электроды замкнуть на сопротивление R , то по замкнутому контуру потечет ток, а плазма будет испытывать тормозящее воздействие.

§ 28.10. Принцип работы плазменного реактивного двигателя. Сгустки плазмы вдуваются в полость между проводящей трубкой и проводником, расположенным по оси трубки (рис. 28.6, б). Плазма замыкает

собой трубку и осевой проводник. Ток, протекающий по трубке, плазме и осевому проводнику, создает магнитное поле, которое выдувает плазму вправо. Плазма, получив ускорение, с силой выбрасывается из трубки в вакуум вправо, а трубка получает импульс движения влево.

§ 28.11. Устойчивость плазменных образований. Токомак. Воздействуя на некоторую конфигурацию неподвижной плазмы постоянным магнитным полем, можно добиться того, что эта конфигурация некоторое время будет существовать устойчиво. Устойчивость будет достигнута, если на границе между плазмой и магнитным полем вне плазмы внутреннее давление в плазме, равное

$$p = (e_+ n_+ + e_- n_-) T,$$

где e_+ и e_- — заряды плюс- и минус-ионов, n_+ и n_- — концентрация плюс- и минус-ионов в 1 м^3 и T — абсолютная температура, будет уравновешено магнитным давлением в этих точках границы, т. е. будет выполнено условие $P = B^2 / (2\mu_0)$. В устойчивой конфигурации магнитные силовые линии своей выпуклостью должны быть обращены к плазме.

На рис. 28.7 изображено устройство из двух одинаковых катушек с противоположно направленными токами и магнитными потоками, в пространстве между которыми находится плазма (на рисунке плазма заштрихована).

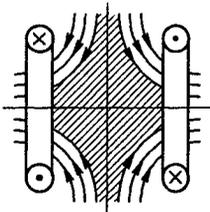


Рис. 28.7

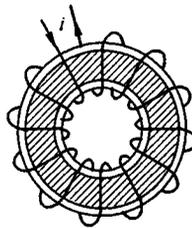


Рис. 28.8

Для кратковременного удержания высокотемпературной плазмы (температурой миллион и более градусов) от соприкосновения со стенками сосуда, в котором она находится, используют устройство, названное *токомаком*. Токомак (рис. 28.8) представляет собой пустотелый тороид, на котором равномерно намотана катушка. Во внутреннюю полость тороида вводят сгустки высокотемпературной плазмы и по обмотке при этом проходит ток i . Этот ток создает изменяющийся во времени магнитный поток вдоль осевой линии тороида. Изменяющийся во времени поток создает ЭДС в плоскости, перпендикулярной осевой линии тороида, а ЭДС создает в плазме ток плотностью $\bar{\delta}$ (аналог вихревого тока в сердечнике трансформатора). Плазма не будет касаться стенок токомака, когда на поверхности плазменного шнура будет выполнено условие $P = |[\bar{\delta} \bar{B}]|$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение магнитной гидродинамике. 2. В каких практических случаях приходится иметь дело с плазмой и с движением проводящей жидкости в магнитном или электромагнитном полях? 3. Запишите и прокомментируйте уравнения магнитной гидродинамики. 4. Запишите уравнение, описывающее процесс диффузии магнитного поля, и поясните его решение. 5. Каким образом магнитное поле может быть использовано для удержания высокотемпературной плазмы? 6. При каких условиях в плазме могут возникнуть магнитогиродинамические волны (волны Альфвена)? 7. В чем заключается пинч-эффект? 8. Что нужно сделать, чтобы превратить магнитный насос в магнитный тормоз? 9. Какие принципы положены в основу работы плазменного реактивного двигателя? 10. Внешнее магнитное поле индукции B просачивается в сферический сгусток высокотемпературной плазмы радиусом $R=1000$ м и $\gamma=10^6$ Ом⁻¹·м⁻¹. За какое время поле просочится в плазму? (Ответ: $3 \cdot 10^9$ с.) 11. С какой скоростью распространяются в направлении магнитного поля индукции B волны Альфвена в плазме, если $B=1$ Тл, $\rho=6 \cdot 10^7$ Ом·м. (Ответ: 0,1155 м/с.) 12. Решите задачи 28.2; 28.4; 28.6; 28.8; 28.12.

СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ СРЕДЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

§ 29.1. **Сверхпроводимость.** Особое состояние проводящей среды, возникающее при понижении температуры до некоторой критической T_k , при которой удельное сопротивление среды становится равным нулю с одновременным скачкообразным изменением ее магнитных и тепловых свойств называют *сверхпроводимостью*.

При плавном понижении температуры переход из нормального состояния в сверхпроводящее происходит скачком. Этот переход иллюстрируется кривой 1 рис. 29.1. По оси абсцисс откладывается температура T ; по оси ординат — удельное сопротивление. Кривая 2 — иллюстрация зависимости $\rho = f(T)$ для обычного проводника.

Удельное сопротивление ρ при переходе от обычного к сверхпроводящему состоянию уменьшается на 14...17 порядков по сравнению с удельным сопротивлением меди при нормальной температуре.

Изучение свойств проводящих сред при низких температурах началось после того, как в 1908 г. в лаборатории нидерландского физика Х. Камерлинг-Онесса в Лейдене был получен жидкий гелий, температура конденсации которого при нормальном давлении составляла 4,1 К. Само явление сверхпроводимости (СП) было открыто в 1911 г., когда Камерлинг-Онесс обнаружил, что при температуре 4 К удельное сопротивление ртути скачком упало до значения меньшего 10^{-23} Ом·см.

Различают низкотемпературную (НТ) и высокотемпературную (ВТ) сверхпроводимости. Низкотемпературная СП наблюдается у относительно плохих проводников, таких как ртуть, ниобий, олово, свинец и сплавы последних, а также у сплавов ниобия с германием, ванадия с галлием и др. СП наблюдается у них при различных температурах в области 3,7...22,3 К (грубо говоря, при температуре жидкого гелия). У металлов с высокой проводимостью (медь, серебро и др.) СП не обнаружена. Низкотемпературная СП рассмотрена в § 29.1–29.7.

Высокотемпературная СП обнаружена в 1986 г. у металлооксидной керамики при температуре 93...100 К и выше (грубо говоря, при температуре жидкого азота). ВТ СП будет рассмотрена в § 29.9.

Явление НТ СП физически состоит в том, что при низких температурах электронное облако в металле (его называют также электронной жидкостью), взаимодействуя с ионами решетки, так изменяет ее периодическую структуру, что электрон оказывается как бы окруженным облаком положительных зарядов и вследствие этого не отталкивается от

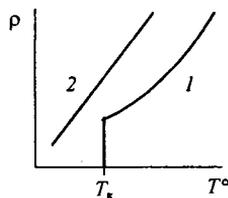


Рис. 29.1

другого электрона из-за проявления кулоновских сил, а притягивается к нему. При этом вся электронная система оказывается как бы связанным электронным коллективом, в котором электроны с противоположными спинами попарно образуют связанные (куперовские) пары. Элементы этих пар могут быть удалены друг от друга на расстояния, во много раз превышающие период кристаллической решетки.

Куперовские пары могут находиться в состоянии с одинаковой энергией, при этом частоты их волновых функций будут равны. Эти пары можно рассматривать как совокупность сильно связанных друг с другом осцилляторов, частоты которых одинаковы, а фазы волновых функций синхронизированы. Совокупность куперовских пар описывается единой волновой функцией — в системе наблюдается коллективный квантовый эффект. При малых скоростях движения вся электронная система перемещается в теле без трения. Возникновение сверхпроводящих свойств зависит от температуры образца и интенсивности магнитного поля, в котором он находится.



Рис. 29.2

На рис. 29.2 качественно показано, как изменяется состояние вещества в зависимости от температуры T и напряженности магнитного поля H . Кривая имеет вид параболы. Она отделяет сверхпроводящую фазу от нормальной. Таким образом, переход при низких температурах из состояния СП в состояние нормальной проводимости

может быть осуществлен при неизменной $T < T_k$ путем изменения напряженности магнитного поля в образце.

Сверхпроводники по своим магнитным и электрическим свойствам могут быть трех родов.

§ 29.2. Сверхпроводники первого рода. Сверхпроводниками первого рода называют такие, по толще которых не может проходить магнитный ток. В то же время по ним может проходить электрический ток, при котором в сверхпроводнике не возникает критическая напряженность поля (при возникновении ее вещество переходит из состояния СП в обычное). Напряженность определяется по закону полного тока. Низкотемпературные сверхпроводники первого рода представляют собой обычно чистые металлы без примесей, например ниобий ($T_k = 9,22$ К), олово ($T_k = 3,72$ К), свинец ($T_k = 7,2$ К). Таким образом, как уже говорилось, в сверхпроводники первого рода внешнее магнитное поле не проникает. Это показано в опыте В. Мейснера и Р. Оксенфельда.

§ 29.3. Сверхпроводники первого рода в магнитном поле. В 1933 г. Мейснером и Оксенфельдом был проведен опыт, который показал, что сверхпроводники — это не только проводники с чрезвычайно большой (бесконечно большой) проводимостью, но и вещества, у которых имеют место необычные магнитные свойства. Опыт состоял в следующем. Во внешнее постоянное магнитное поле при $T > T_k$ был помещен шарик из

олова (или свинца); магнитные силовые линии проходили через шарик в соответствии с рис. 29.3, а. Если температуру образца T сделать меньше критической ($T < T_k$), то образец из обычного состояния переходит в сверхпроводящее. При этом магнитное поле вытесняется из шарика, так что магнитные силовые линии будут теперь как бы обтекать шарик, не заходя внутрь его (рис. 29.3, б). (Если такой же опыт проделать с обычным проводником, у которого $\rho \rightarrow 0$ при понижении температуры, то магнитный поток в нем сохранится неизменным.)

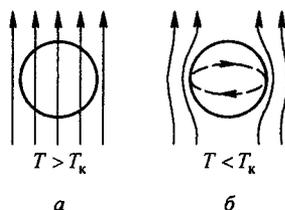


Рис. 29.3

Вытеснение магнитного потока из шарика (шарик был из сверхпроводника первого рода) объясняется тем, что в поверхностном слое шарика на глубине всего около 10^{-5} см возникает поверхностный постоянный ток, незатухающий по числовому значению (показан пунктиром на рис. 29.3, б), не испытывающий сопротивления и образующий свое собственное магнитное поле, направленное встречно внешнему магнитному полю. Наложение внешнего и внутреннего магнитных полей приводит к тому, что результирующее магнитное поле в образце будет отсутствовать.

Можно сказать, что сверхпроводник ведет себя в магнитном поле как идеальный диамагнетик. Рис. 29.4, а иллюстрирует применение эффекта Мейсснера и Оксенфельда

для устойчивого парения (левитации) сверхпроводящего тела (шарика) над круговым витком с током I . Вес шарика уравновешен подъемной силой, возникающей при взаимодействии поверхностного тока по шару с радиальной составляющей индукции B_r на поверхности тела, создаваемой витком с током I . На узкую полоску сверхпроводящего тела с поверхностным током I_1 действует сила $dF = I_1 B_r 2\pi r$ (рис. 29.4, б). Эффект парения обратим. Рис. 29.4, в иллюстрирует опыт В.К. Аркадьева (1945 г.): постоянный магнит парит над ванной со свинцом, охлажденным жидким гелием.

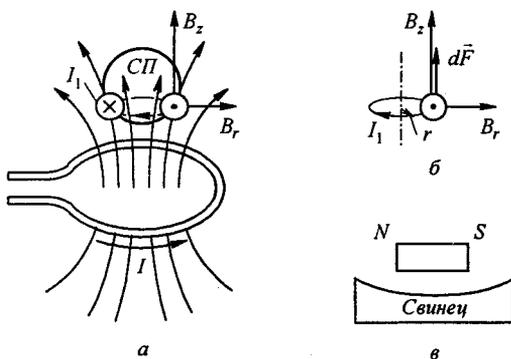


Рис. 29.4

§ 29.4. Уравнение Лондонов. В 1935 г. Ф. и Г. Лондоны предложили систему уравнений для макроскопического описания СП первого рода в электромагнитном поле. Прежде чем записать эти уравнения, отметим, что при температурах выше критической электронная жидкость в про-

воднике обладает и нормальными и сверхпроводящими свойствами. В соответствии с этим плотность тока обусловлена и нормальными (индекс «н») и сверхпроводящими (индекс «с») свойствами электронов.

Нормальная плотность тока $\bar{\delta}_n$ в некоторой точке связана с напряженностью электрического поля \bar{E} в этой точке законом Ома:

$$\bar{\delta}_n = \gamma_n \bar{E}. \quad (29.1)$$

Здесь γ_n — проводимость электронной жидкости, связанная с нормальными свойствами электронов.

Плотность тока, обусловленная сверхпроводящими свойствами электронов, $\bar{\delta}_c$, может быть выражена через заряд электрона e , скорость движения электронов в электронном облаке \bar{v}_c и число электронов n_c , проходящих через единицу поверхности:

$$\bar{\delta}_c = e n_c \bar{v}_c. \quad (29.2)$$

С учетом тока смещения $\partial \bar{D} / \partial t$ первое уравнение Максвелла можно записать в виде

$$\text{rot } \bar{B} = \mu_0 \left(\bar{\delta}_n + \bar{\delta}_c + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right). \quad (29.3)$$

Ток смещения ничтожно мал по сравнению с $\bar{\delta}_n$ и $\bar{\delta}_c$, поэтому его в дальнейшем учитывать не будем. При понижении температуры ниже критической электроны теряют свои свойства в отношении нормальной проводимости и увеличивают свои сверхпроводящие свойства. Поэтому уравнение (29.3) для состояния СП запишем так:

$$\text{rot } \bar{B} = \mu_0 \bar{\delta}_c. \quad (29.4)$$

Сила $e \bar{E}$, действующая на электрон, равна произведению массы электрона m на его ускорение $d\bar{v}_c / dt$, т. е.

$$m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = e \bar{E}. \quad (29.5)$$

Если во второе уравнение Максвелла

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (29.6)$$

подставить $\bar{E} = \frac{m}{e} \frac{d\bar{v}_c}{dt}$, а значение \bar{v}_c взять из (29.2) $\bar{v}_c = \frac{1}{e n_c} \bar{\delta}_c$, то будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{e^2 n_c} \text{rot } \bar{\delta}_c + \bar{B} \right) = 0.$$

Лондоны предположили, что выражение в скобках равно нулю, т. е.

$$\text{rot } \bar{\delta}_c = -\frac{e^2 n_c}{m} \bar{B}. \quad (29.7)$$

Уравнения (29.4) и (29.7) получены из уравнений Максвелла для сверхпроводящей среды. Их в литературе называют уравнениями Лондонов.

§ 29.5. Сверхпроводящее тело в постоянном магнитном поле. Возьмем ротор от обеих частей уравнений (29.4):

$$\text{rot rot } \vec{B} = \mu_0 \text{rot } \vec{\delta}_c.$$

В правую часть полученного уравнения подставим (29.7). Имеем

$$\text{grad div } \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \left(-\frac{e^2 n_c}{m} \vec{B} \right). \quad (29.8)$$

Учитывая, что $\text{div } \vec{B} = 0$, получим

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{\mu_0 n_c e^2}{m} \vec{B}. \quad (29.9)$$

Решим уравнение (29.9) для случая, когда в постоянное во времени магнитное поле помещено сверхпроводящее тело первого рода. Положим, что индукция внешнего магнитного поля \vec{B} параллельна поверхности этого тела, что тело имеет плоскую границу (случай плоской одномерной задачи). Тогда поле будет функцией одной координаты (рис. 29.5, а). Индукцию в сверхпроводящем теле при $z=0$ обозначим $B(0)$. Кроме того, обозначим

$$\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 n_c e^2}. \quad (29.10)$$

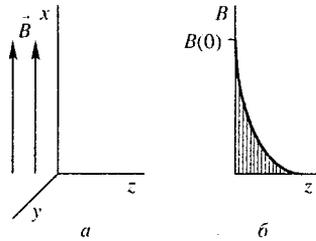


Рис. 29.5

Тогда уравнение (29.9) для модуля B запишем так:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = \frac{1}{\lambda^2} B. \quad (29.11)$$

Учитывая граничное условие и протяженность тела в направлении оси z , запишем решение уравнения (29.11):

$$B = B(0) e^{-z/\lambda}, \quad (29.12)$$

т. е. постоянное магнитное поле в направлении координаты z затухает по экспоненте рис. 29.5, б.

Коэффициент λ имеет смысл глубины проникновения постоянного во времени поля в среду СП. На глубине $z = \lambda$ индукция снизится по сравнению с индукцией на поверхности тела в $e = 2,718$ раза.

Если подставить значения μ_0 , m , n_c и e в формулу (29.10), то, например для олова, при $T = 0$ К $\lambda = 5,1 \cdot 10^{-6}$ см, т. е. магнитное поле

проникает в сверхпроводник первого рода на ничтожную глубину, а в толще его магнитное поле отсутствует.

Плотность сверхпроводящего тока определим по (29.4):

$$\vec{\delta}_c = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B}; \quad \vec{v}_c = \vec{j} \frac{dB_x}{dz}; \quad \vec{v}_c = \vec{j} \left(-\frac{1}{\lambda \mu_0} \right) B(0) e^{-z/\lambda}.$$

Плотность тока направлена по оси $-\vec{j}$.

Теория Лондонов справедлива качественно. Экспериментальные и теоретические значения λ различаются в 2...3 раза. В дальнейшем современная микроскопическая теория низкотемпературной СП была создана в 1957 г. Дж. Бардиным, Л. Купером и Дж. Шриффером.

§ 29.6. Сверхпроводники второго рода. Сверхпроводники второго рода обладают таким свойством: если их поместить во внешнее магнитное поле, то в некоторой области значений индукции внешнего поля ($B_{к1} < B < B_{к2}$) оно частично проникает в толщу проводника за счет того, что в нем образуются тонкие нити магнитных потоков, расположенных по внешнему магнитному полю (рис. 29.6). Эти нити в сечении сверхпроводника расположены по углам равносторонних треугольников. По каждой нити проходит обычно один квант магнитного потока $\Phi_0 = h/(2e)$, где h — постоянная Планка, а e — заряд электрона; числовое значение Φ_0 равно $2,07 \cdot 10^{-15}$ Вб.

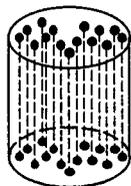


Рис. 29.6

Каждая магнитная нить окружена вращающимися вокруг нее электронами, которые создают в ней магнитное поле. Магнитные нити находятся в состоянии нормальной проводимости, а вещество между нитями — в состоянии сверхпроводимости.

Если интенсивность внешнего магнитного поля увеличивать при $B > B_{к1}$, то число магнитных нитей растет, нити сближаются и при некоторой $B = B_{к2}$, когда расстояние между нитями становится равным приблизительно 10^{-4} см, сверхпроводящее состояние образца разрушается, и он целиком переходит в нормальное проводящее состояние.

Состояние образца, когда у него сочетаются сверхпроводящие области с областями нормальной проводимости, называют смешанным состоянием или шубниковской фазой (по имени русского физика Л.В. Шубникова).

Если вдоль сверхпроводника второго рода пропустить ток от внешнего источника (так называемый транспортный ток, он пойдет по областям СП), то вследствие механического взаимодействия тока с нитями магнитного потока последние придут в движение и нитевидная структура разрушится. Таким образом, по толще сверхпроводников второго рода в отличие от сверхпроводников первого рода может проходить магнитный поток, но не может проходить транспортный ток.

Низкотемпературные сверхпроводники второго рода изготавливают из сплавов металлов, например, из сплава свинца с висмутом (чистый свинец — сверхпроводник первого рода).

§ 29.7. Сверхпроводники третьего рода. Низкотемпературные сверхпроводники третьего рода (или жесткие проводники) так же, как и сверхпроводники второго рода, изготавливают из сплавов металлов, но образцы должны иметь крупные неоднородности.

В этом случае магнитные нити, о которых шла речь в предыдущем параграфе, как бы закрепляются на неоднородностях (это явление называется *пиннингом*). При этом если по сверхпроводнику пропускать небольшой транспортный ток, то магнитные нити благодаря их закреплению не приходят в движение и структура не разрушается. Если транспортный ток увеличивать, то при достижении им некоторого критического значения нити магнитных потоков сорвутся с закреплений и весь образец перейдет в состояние нормальной проводимости.

Значение критического тока зависит от размера и количества неоднородностей в сверхпроводнике (причем неоднородности не должны быть точечными), температуры, интенсивности внешнего магнитного поля и механической обработки, которой подвергается образец. Таким образом, по сверхпроводникам третьего рода при выполнении определенных условий могут проходить и магнитный поток и транспортный ток.

§ 29.8. Описание поля в сверхпроводниках с нитевидной структурой. Расчет переноса во времени электромагнитного поля в сверхпроводниках с нитевидной структурой должен дать возможность определить конфигурацию поля, значения допустимых транспортных токов, потерь от гистерезиса, потерь от вихревых токов в областях нормальной проводимости. Методы расчета в настоящее время разрабатываются. Один из возможных методов расчета полей в сверхпроводниках с нитевидной структурой изложен в статье: Carr W.T. // *Physical Review. Ser. B.* 1975. № 4. В этом методе поле описывается уравнениями Максвелла в анизотропной среде с различными μ и γ в направлении и поперек нитей. Второй способ макроскопического расчета поля рассмотрен в [17].

§ 29.9. Высокотемпературная сверхпроводимость. Как уже говорилось, низкотемпературная СП наблюдается при температурах в диапазоне 3,7...22,3 К (сплав ниобия с германием Nb₃Ge). Во всех случаях в качестве охладителя нужен жидкий гелий.

Открытие СП при относительно высоких температурах [93...100 К (температура жидкого азота) в металлооксидной керамике] явилось как бы вторым рождением СП, очень важным в экономическом отношении, так как жидкий азот примерно в 200 раз дешевле жидкого гелия. Основой для изготовления металлооксидной керамики служат тонкодисперсионные порошки, содержащие такие компоненты, как барий, лантан, иттрий, медь, кислород, скандий, стронций, фтор и др.

В настоящее время общепринятого объяснения физического механизма ВТ СП в металлооксидной керамике нет. Предложено три теории: биполярная, экситонная, магнитная. Согласно биполярной теории основную роль выполняют новые частицы — биполяроны. Они отличны от куперовских пар, которые исчезают при переходе сверхпроводника в нормальное состояние. Биполяроны ведут себя как газ независимых частиц, которые при некоторой критической температуре «конденсируются» и переходят в когерентное состояние, подобно тому, как переходит в сверхтекучее состояние жидкий гелий.

Экситонная теория ВТ СП в металлооксидной керамике объясняет объединение электронов в пары влиянием квазичастиц экситонов, которые, как и кванты колебаний смещений решетки фононы, существуют в конденсированной среде.

Расчеты зон существования и масс спаренных частиц и при биполярной и при экситонной теориях дают существенные расхождения с результатами экспериментов. Магнитная теория высокотемпературной сверхпроводимости основана, грубо говоря, на магнитных флуктуациях конгломерата спаренных частиц^{*)}. Несмотря на то, что механизм ВТ СП пока

^{*)} См.: Высокотемпературная сверхпроводимость керамических систем / В.И. Ильичев, М.А. Савченко, А.В. Стефанович. М.: Наука, 1992. 166 с.

окончательно не установлены, практические работы по созданию эффективной технологии изготовления пленок, проволоки и лент из мелкозернистой металлокерамики ведутся весьма интенсивно. Как для НТ СП, так и для ВТ СП существуют определенные проблемы: поддержание стабильности свойств в отношении критической температуры T_c , значения транспортного тока, уменьшения влияния старения, хрупкости, радиационного облучения и других факторов. Исследуются вопросы создания сплошных (не зернистых) ВТ СП.

§ 29.10. Применение сверхпроводников. Наиболее широко применяются сверхпроводники в сверхмощных магнитах, которые могут создавать магнитные поля с индукцией в 10 и даже 20 Тл. Такие магниты используют в физике элементарных частиц, в термоядерном синтезе, при создании магнитогидродинамических генераторов, магнитных насосов и других устройств. Так как сопротивление обмоток этих магнитов равно нулю, то тепловая энергия в обмотках при протекании постоянного тока не выделяется, и при работе энергия расходуется лишь на получение жидкого гелия, а в перспективе — жидкого азота, в котором находится магнит.

Уже существуют поезда на магнитной подушке (левитирующие поезда). Поезд висит над рельсами на высоте 20...30 см и перемещается без трения о рельсы. Созданы образцы бесшумных морских судов с двигателями реактивного типа (проводником является морская вода в канале судна, а магнитное поле создается сверхпроводящим магнитом). Обсуждаются проекты шоссейных дорог для левитирующих автомобилей.

Явление сверхпроводимости применяется также в радиотехнике, вычислительной и измерительной технике, в трансформаторо- и электромашиностроении. Если объемный резонатор поместить в жидкий гелий, то потери в стенках резонатора становятся ничтожно малыми, вследствие чего добротность его возрастает в тысячи раз.

В основу принципа действия сверхчувствительных магнитометров положен эффект квантования магнитного потока в сверхпроводниках второго рода.

Интенсивно идут работы по созданию сверхпроводящих силовых кабелей с жилами из ниобия или свинца.

Однако в настоящее время основное применение ВТ СП металлокерамики — в микроэлектронике и вычислительной технике. Охлаждение до температуры жидкого азота снижает также уровень шумов в радиотехнических и радиоэлектронных схемах.

При применении сверхпроводников особое значение придается надежному функционированию системы подачи жидкого гелия (азота).

Вопросы для самопроверки

1. Какие физические свойства скачком изменяются у сверхпроводников при плавном снижении температуры до критической? 2. Может ли переход от состояния нормальной проводимости к состоянию сверхпроводимости происходить под действием магнитного поля при неизменной температуре? 3. Дайте определение сверхпроводников первого рода. 4. Шарик из ниобия при температуре выше критической находится в постоянном магнитном поле. Какое явление произойдет, если температура шарика станет ниже критической? 5. Поясните, как можно получить уравнения Лондонов из уравнений Максвелла. 6. В постоянном во времени однородном магнитном поле индукции B_0 при температуре выше критической находится отрезок проволоки из ниобия. Ось проволоки параллельна B_0 . Составьте уравнение для описания поля в проволоке, если температура станет ниже критической; решите его. (Ответ: $\frac{d^2 B}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{dB}{d(qr)} + B = 0$; $q = j e \sqrt{\mu_0} n_c / m$; $B = B_0 J_0(qr)$.) 7. Как определить квант магнитного потока через постоянную Планка и заряд электрона? Каково значение кванта магнитного потока? 8. Чем отличаются сверхпроводник третьего рода от сверхпроводника второго рода? 9. Охарактеризуйте свойства высокотемпературных сверхпроводников. В чем преимущества их перед низкотемпературными? 10. Объясните явление левитации СП в магнитном поле. 11. Почему при относительно высоких частотах сопротивление сверхпроводников оказывается все же не равным нулю? 12. Назовите известные Вам применения сверхпроводников. 13. Тонкое полупроводящее кольцо, через которое отсутствует магнитный поток (площадь кольца S) вносят в соосное ему постоянное магнитное поле индукции B . Какую энергию надо затратить, чтобы внести кольцо в поле и какой ток возникнет в кольце? (Ответ: $(BS)^2 / (2L)$; BS / L .) 14. Решите задачи 28.16; 28.17; 28.18.

ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Учебники

1. *Нейман Л.Р., Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники. Т. II. М.: Высшая школа, 1981.
2. *Ионкин П.А., Диревский А.И., Кухаркин Е.С.* Теоретические основы электротехники. В 2-х т. М.: Высшая школа, 1976.

Учебные пособия и монографии

3. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: ГТТИ, 1954.
4. *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Наука, 1972.
5. *Поливанов К.М.* Теоретические основы электротехники. Т. 3. М.: Энергия, 1969.
6. *Меерович Э.А.* Методы релятивистской электродинамики в электротехнике. М.: Энергия, 1966.
7. *Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н.* Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963.
8. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978.
9. *Демирчян К.С., Чечурин В.Л.* Машинные расчеты электромагнитных полей. М.: Высшая школа, 1986.
10. *Тозони О.В.* Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975.
11. *Нейман Л.Р.* Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. М.: Госэнергиздат, 1948.
12. *Иванов-Смоленский А.В., Кузнецов В.А.* Универсальный численный метод моделирования электромагнитных преобразователей и систем // Электричество. 2000. № 7.
13. *Максвелл Дж. К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Пер. с англ. З.А. Цейтлина. М.: Гостеориздат, 1952.
14. *Кресин В.З.* Сверхпроводимость и сверхтекучесть. М.: Наука, 1978.
15. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1964.
16. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
17. *Лутидзе Ш.И.* Параметрические нелокальные модели сверхпроводников // Электричество. 1987. — № 8.
18. *Иоссель, Кочанов Э.С., Струнский М.Г.* Расчет электрической емкости. М.: Энергоиздат, 1981.
19. *Ушаков А.Н., Ушакова Н.Ю.* О развитии метода вторичных источников // Электричество. 1999. № 9.
20. *Фейнман Р., Лейтенс С., Сендс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 5, 6. М.: Мир, 1966.
21. *Фальковский О.И.* Техническая электродинамика. М.: Связь, 1978.
22. *Григорьев А.Д.* Электродинамика и техника СВЧ. М.: Высшая школа, 1990.
23. *Говорков В.А., Купалян С.Д.* Теория электромагнитного поля в упражнении и задачах. М.: Советское радио, 1957.

24. *Баскаков С.И.* Сборник задач по курсу электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высшая школа, 1992.

Задачники

25. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди, С.А. Миленина, С.Э. Расовская, В.П. Каменская. М.: Высшая школа, 2000.

26. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / Под ред. П.А. Ионкина. М.: Энергоиздат, 1982.

27. *Колли Я.Н., Соболева Л.П., Фрадкин Б.М.* Задачник по теоретическим основам электротехники (теория поля). М.: Энергия, 1972.

Контрольные задания и методические указания

28. Контрольные задания и методические указания по курсу ТОЭ / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди, С.Э. Расовская, Т.А. Любарская. М.: Высшая школа, 2001.

Справочные пособия по основам теории электромагнитного поля

29. *Татур Т.А.* Основы теории электромагнитного поля. М.: Высшая школа, 1989.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЧАСТИ III

Приложение И

РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ СЕТОК И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТОК

Довольно широко распространены: а) числовой расчет электрических и магнитных полей по методу сеток; б) моделирование электрических и неэлектрических (магнитных) полей по методу электрических сеток. Несмотря на близость названий содержание методов существенно различно.

§ И.1. Расчет полей по методу сеток. Метод сеток представляет собой числовой метод интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных путем сведения их к уравнениям в конечных разностях.

На рис. И.1, а изображен участок двумерного поля. На нем показаны оси x и y декартовой системы и квадратная сетка со стороной b . Точки (узлы) сетки обозначены цифрами 0, 1, 2, 3, 4. Примем φ_0 — потенциал точки 0, φ_1 — потенциал точки 1 и т. д. Выведем приближенное соотношение между потенциалами $\varphi_0, \dots, \varphi_4$, вытекающее из уравнения Пуассона. Среднее значение первой производной $\partial\varphi/\partial x$ на участке 1—0 приближенно равно

$$(\Delta\varphi/\Delta x)_{1-0} = (\varphi_1 - \varphi_0)/b;$$

на участке 0—2 равно

$$(\Delta\varphi/\Delta x)_{2-0} = (\varphi_0 - \varphi_2)/b.$$

Вторая производная $\partial^2\varphi/\partial x^2$ в точке 0 приближенно равна разности средних значений первых производных $\partial\varphi/\partial x$ на участках 1—0 и 0—2, отнесенной к расстоянию b между серединами отрезков 1—0 и 0—2:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x^2} = \frac{\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_{1-0} - \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_{0-2}}{b} = \frac{\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{b} - \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{b}}{b} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{b^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_3 + \varphi_4 - 2\varphi_0}{b^2}.$$

Запишем уравнение Пуассона для двумерного электростатического поля:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a},$$

где $\rho_{\text{своб}}$ — свободный заряд в точке 0.

Подставим в уравнение Пуассона приближенные выражения для $\partial^2\varphi/\partial x^2$ и $\partial^2\varphi/\partial y^2$. Получим

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a} b^2. \quad (\text{И.1})$$

Если поле описывается уравнением Лапласа, то $\rho_{\text{своб}} = 0$ и

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = 0. \quad (\text{И.2})$$

Уравнения (И.1) и (И.2) определяют связь между потенциалами квадратной сетки и являются основными в методе сеток. Чем меньше шаг сетки b , тем меньше погрешность от замены уравнений Пуассона или Лапласа соответственно уравнениями (И.1) или (И.2).

При расчете по методу сеток применяют не только квадратные, но и иные сетки, например полярные. Для них имеются формулы в конечных разностях, в общем случае отличные от формул (И.1) и (И.2).

Допустим, что двумерное поле, подчиняющееся уравнению Лапласа, ограничено некоторыми поверхностями и известны значения производной от потенциала по нормали к каждой граничной поверхности во всех точках (задача Неймана). Возможны и комбинированные типы задач, когда для одной части граничных поверхностей известны значения потенциалов, а для другой — значения нормальной производной от потенциала. Требуется найти значения потенциалов прямоугольной сетки этого поля. Последовательность расчета для задачи Дирихле проиллюстрируем на примере расчета поля, образованного двумя параллельными прямыми углами рис. И.1, б. В месте поворота расстояние между

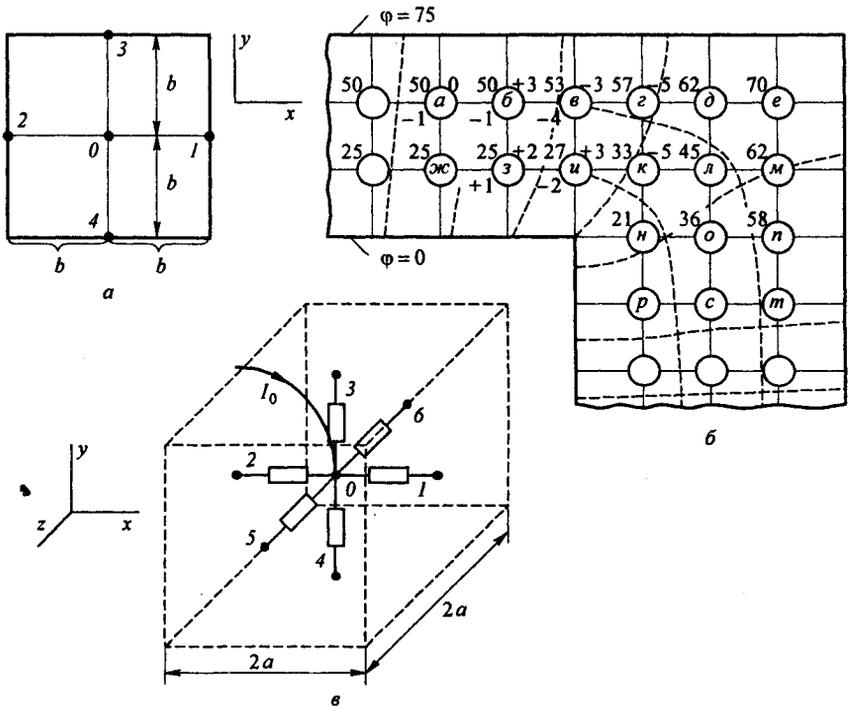


Рис. И.1

параллельными сторонами угла изменяется. Потенциал верхней границы положим равным 75 единицам, нижней — нулю. Будем полагать, что объемные заряды отсутствуют.

1. Тонкими сплошными линиями нанесем квадратную сетку. Обозначим узлы получившихся квадратов буквами, $a, б, в, \dots$ (расположены в кружках).

2. Произвольно выберем значения потенциалов узлов $a, б, в, \dots$. Объем дальнейшей вычислительной работы в значительной мере зависит от того, насколько близко к действительному выбрано первоначальное распределение потенциала. Поэтому следует стремиться к возможно более правдоподобию первоначальному распределению потенциала.

Для этой цели нанесем на рис. И.1, б приближенную картину силовых и эквипотенциальных линий и, руководствуясь ею, запишем начальные значения потенциалов узлов (цифры слева и вверху у каждого узла).

3. Для каждого узла находим остаток в формуле (И.2). Так, для точки $б$ остаток $53 + 50 + 75 + 25 - 4 \cdot 50 = 3$. Записываем значение остатка в правом верхнем углу у каждого узла.

4. Поскольку в каждом узле остаток должен быть равен нулю, то дальнейший и наиболее трудоемкий этап расчета состоит в таком изменении потенциалов узлов, чтобы остатки во всех узлах не превышали некоторого заданного значения (скажем, 1 или 2). Поэтому в одной из точек с наибольшим значением остатка изменяем потенциал приблизительно на 1/4 от остатка (в рассматриваемом случае в точке θ уменьшаем потенциал на единицу и затем пересчитываем остатки во всех остальных узлах). Вновь полученные остатки записываем в левом нижнем углу у каждого узла (на рис. И.1, θ они выписаны не для всех узлов). Такая операция выполняется несколько раз до тех пор, пока все остатки не станут равны или меньше заданного значения. Процесс является сходящимся. При расчетах используют вычислительные машины.

Метод применим для магнитных и электрических полей, линейных и нелинейных сред, неизменных и изменяющихся во времени полей.

§ И.2. Моделирование полей по методу электрических сеток. Моделирование полей с помощью электрических сеток представляет собой метод экспериментального исследования полей, подчиняющихся уравнению Пуассона, путем измерения потенциалов узлов электрической сетки, которой заменяется сплошная среда. Положим, что требуется выяснить распределение потенциалов в некоторой области (сплошной среде), потенциалы границ которой заданы. Кроме того, известны электрическая или соответственно магнитная проницаемость среды, а также плотность распределенных источников в исследуемом поле (например, плотность свободных зарядов $\rho_{своб}$ в моделируемом электрическом поле).

Исследуемое поле заменим полем в проводящей среде с проводимостью γ . Моделируемую область разделим на элементарные объемы, например на кубы. Каждый элементарный объем заменим электрической схемой замещения в соответствии с рис. И.1, θ .

Пусть ребро куба имеет длину $2a$. Центр куба обозначим цифрой θ , а точки, лежащие в серединах его граней, — цифрами 1–6. Шаг сетки в направлении осей x, y, z обозначим $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = a$). Проводимость между любой из точек 1–6 и центральной точкой θ — $g = \gamma \cdot 2a \cdot 2a/a = 4\gamma a$.

К узлу θ от источника тока подтекает ток $I_0 = 2\delta(x, y, z)a^3$. К остальным узлам, не показанным на рис. И.1, θ , подтекают свои токи. Эти токи, подводимые в центры кубов, выполняют функции распределенных источников в исходном поле. Значения токов определяются по заданной плотности распределенных источников. По первому закону Кирхгофа сумма токов, подтекающих к узлу θ , должна быть равна нулю, т. е.

$$(\varphi_1 - \varphi_0)g + (\varphi_2 - \varphi_0)g + (\varphi_3 - \varphi_0)g + (\varphi_4 - \varphi_0)g + (\varphi_5 - \varphi_0)g + (\varphi_6 - \varphi_0)g + I_0 = 0. \tag{И.3}$$

Потенциал точки θ

$$\varphi_0 = \varphi(x, y, z).$$

Потенциал точки 1

$$\varphi_1 = \varphi(x + \Delta x, y, z) \approx \varphi(x, y, z) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots$$

Потенциал точки 2

$$\varphi_2 = \varphi(x - \Delta x, y, z) \approx \varphi(x, y, z) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots$$

Следовательно,

$$(\varphi_1 - \varphi_0)g + (\varphi_2 - \varphi_0)g = (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} g = 4\gamma a^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Проделав аналогичные выкладки с остальными слагаемыми уравнения (И.3), подставив в него выражение для I_0 и сократив на $4a^3$, получим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\delta(x, y, z)}{\gamma}.$$

Таким образом, распределение потенциалов в электрической сетке с точностью до частных производных четвертого порядка от φ , умноженных на $a^2/(4!)$, удовлетворяет тому же уравнению, что и распределение потенциалов в сплошной среде.

Распределение потенциалов в узлах θ элементарных объемов измеряется компенсационным способом.

Моделирование позволяет на относительно дешевой модели исследовать поля, с трудом или совсем не поддающиеся аналитическому расчету.

Приложение К МЕТОД ГРИНА

§ К.1. Формулы Грина. Формулы Грина получают из теоремы Остроградского—Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS, \quad (\text{К.1})$$

где D_n — нормальная составляющая некоторого вектора \vec{D} на поверхности \vec{S} , ограничивающей объем V ; D_n направлена в сторону внешней нормали \vec{n} по отношению к объему V .

Положим $\vec{D} = \alpha \vec{F}$, где α — произвольный скаляр, а вектор \vec{F} представим как градиент некоторой скалярной функции φ : $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} \varphi) = \nabla(\alpha \nabla \varphi) = \alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha.$$

Подстановка в (К.1) дает

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha) dV = \oint_S D_n dS.$$

Учтем, что проекция вектора \vec{D} на направление нормали \vec{n} есть $\alpha \partial \varphi / \partial n$. При этом

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha) dV = \oint_S \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (\text{К.2})$$

Формулу (К.2) называют первой формулой Грина.

Поменяв местами скаляры α и φ и вычтя одно равенство из другого, получим вторую формулу Грина

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \alpha) dV = \oint_S \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{К.3})$$

§ К.2. Гармонические функции. Функцию, непрерывную в рассматриваемой области вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющую уравнению Лапласа в этой области, называют гармонической. Центральная симметричная функция $1/r$, где r — расстояние от некоторой фиксированной точки объема (например, от точки A рис. К.1, а) до текущей точки B , является гармонической функцией. Для плос-

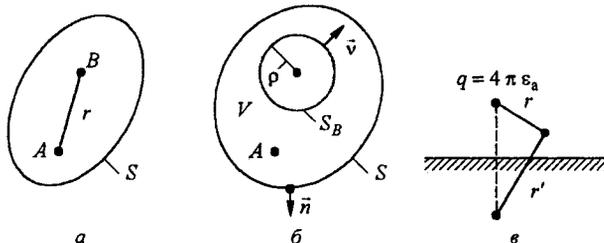


Рис. К.1

копараллельного поля гармоническая функция равна $\ln r$. Примем в формуле (К.3), что α и φ — гармонические функции, $\alpha = 1/r$ и функция φ выполняет роль потенциала. Тогда $\nabla^2 \varphi = 0$, $\nabla^2 \alpha = 0$ и для поверхности, ограничивающей область V , имеет место соотношение

$$\oint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right] dS = 0. \quad (K.4)$$

§ К.3. Интеграл Грина для гармонических функций. Применим формулу (K.4) для определения потенциала в произвольной точке B объема V . С этой целью окружим точку B сферой S_B малого радиуса ρ (рис. К.1, б) и применим формулу (K.4) к поверхностям S и S_B :

$$\int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right] dS + \int_{S_B} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \Phi \frac{\partial(1/r)}{\partial \nu} \right] dS = 0,$$

где \vec{n} — нормаль к поверхности S ; $\vec{\nu}$ — нормаль к поверхности S_B , обе они внешние к объему V .

Устремим радиус ρ к нулю. При этом

$$\lim \int_{S_B} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} dS = 0,$$

так как $\partial \Phi / \partial \nu$ — величина ограниченная (функция Φ непрерывна в области V); S_B стремится к нулю, как ρ^2 , а $1/r$ возрастает как $1/\rho$. При $\rho \rightarrow 0$ потенциал точек поверхности S_B примерно равен потенциалу Φ_B точки B :

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial \nu} = -\frac{\partial(1/r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}.$$

Дополнительно учтем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{S_B} \Phi \frac{\partial(1/r)}{\partial \nu} dS \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi_B \int_{S_B} \frac{dS}{r^2} = \Phi_B \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \Phi_B.$$

Таким образом, потенциал произвольной точки B внутри области

$$\Phi_B = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right] dS. \quad (K.5)$$

Он определяется значением потенциала и нормальной производной потенциала на поверхности, ограничивающей область V . Физически первое слагаемое формулы (K.5) обусловлено поверхностными зарядами, как бы «вкрапленными» в поверхность S , а второе — зарядами диполей на поверхности, т. е. двойным заряженным слоем.

§ К.4. Функция Грина. Положим, что в точке A (рис. К.1, в) находится точечный заряд $q = 4\pi \epsilon_a$, а поверхность S является проводящей и заземлена, т. е. потенциал ее равен нулю. Вследствие электростатической индукции на внутренней стороне поверхности возникают отрицательные наведенные заряды плотностью $-\sigma$, а на наружной $+\sigma$. Суммарный отрицательный заряд на внутренней поверхности равен суммарному положительному заряду на внешней поверхности и каждый из них численно равен q .

Обозначим расстояние произвольной точки B до точки A через r , а до произвольной точки на поверхности — через R . Тогда:

$$\Phi_B = \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \int_S \frac{\sigma dS}{R}.$$

Если точка B будет находиться на поверхности S , то ее потенциал по условию задачи должен быть равен нулю.

Функцией Грина $G = 1/r + g$ называют функцию, которая обладает свойством потенциала произвольной точки B в рассматриваемой задаче, т. е. она является гармонической функцией и принимает нулевое значение на поверхности S .

Функция G определена через функцию g , представляющую собой решение уравнения Лапласа для рассматриваемой задачи.

Основная трудность решения методом функций Грина заключается в отыскании функции g . Она найдена лишь для некоторых частных случаев: например, в поле точечного заряда $q = 4\pi\epsilon_a$, расположенного на расстоянии h от проводящей плоскости (см. рис. К.1, θ), $G = 1/r - 1/r'$.

§ К.5. Определение потенциала ϕ через функции Грина в общем случае. В объеме V , ограниченном поверхностью S , имеются объемные заряды ρ , распределенные с заданной плотностью, известны потенциалы поверхностей и функция Грина. Положим в формуле (К.3) $\alpha = g = G - 1/r$; учтем, что $\nabla^2\alpha = 0$, а $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_a$. Тогда

$$\int_V \left(G - \frac{1}{r} \right) \frac{\rho}{\epsilon_a} dV = \oint_S \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(G - \frac{1}{r} \right) - \left(G - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS. \quad (\text{К.6})$$

Кроме того, из физических соображений следует, что потенциал производной точки B определяется объемными и поверхностными зарядами, а также двойным заряженным слоем (диполями) на границе:

$$\phi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS. \quad (\text{К.7})$$

Вычтем (К.6) из (К.7) и учтем, что функция Грина на поверхности S равна нулю. Получим формулу для определения потенциала произвольной точки ϕ_B через функцию Грина и ее нормальную производную:

$$\phi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V G \rho dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS, \quad (\text{К.8})$$

где n — внешняя нормаль к объему. Примеры на применение формулы (К.8) см. в [4].

Приложение Л

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод интегральных уравнений (ИУ) представляет собой метод расчета магнитных и электрических полей, основанный на введении вторичных источников и состоящий в сведении задачи к интегральным уравнениям и их численному решению на ЭВМ. В настоящее время его главным образом применяют для решения двухмерных задач, но с увеличением объема памяти ЭВМ он может быть применен и к трехмерным полям.

Имеется два варианта метода интегральных уравнений, различающиеся видом вторичных источников. Идея метода и его первый вариант предложены Г.А. Гринбергом [4]. Дальнейшее развитие метода и доведение его до практических расчетов осуществлено О.В. Тозони, В.М. АLEXИНИМ, Э.В. КОЛЕСНИКОВЫМ и др. Разработка второго варианта метода выполнена О.В. Тозони [10], К.С. Демирьяном, В.Л. Чечуриным и др.

§ Л.1. Первый вариант метода интегральных уравнений. Идею метода рассмотрим применительно к магнитному полю, образованному намагничивающимися обмотками, геометрия и ток в которых известны, и намагниченными ферромагнитными телами. Согласно этому методу для расчета магнитных полей однородно ферромагнитные тела заменяют вакуумом (воздухом), предположив, что на единице тела протекает поверхностный ток с плотностью σ (пояснения о поверхностных токах см. в § 14.24, где они были обозначены δ_m). Значение δ в различных точках поверхности неизвестно и подлежит определению. Значение плотности тока проводимости δ в обмотках известно.

Рассмотрим условия на границе между ферромагнитным телом (среда ϵ) и воздухом (среда i) — рис. Л.1, a . На рис. Л.1, b показана та же граница, что и на рис. Л.1, a , но ферромагнитное (ф. м.) тело заменено воздухом, а на границе протекает поверхностный ток с плотностью σ на единицу длины.

Тангенциальные (о чем свидетельствует индекс t) составляющие напряженности поля на границе H_t^i в среде i и H_t^e в среде e содержат каждая два компонента: составляющую H_t^i , обусловленную всеми токами проводимости, протекающими по обмоткам электрического аппарата, и всеми поверхностными токами (их называют *связанными*) на границе ферромагнитной области, кроме поверхностного тока σdl , протекающего по рассматриваемому элементу поверхности, и составляющую H_t^e , обусловленную поверхностным током σdl в рассматриваемом элементе поверхности ферромагнитного тела (выбран направленным к читателю).

Тангенциальные составляющие индукции на границе: $B_t^i = \mu_0 H_t^i$; $B_t^e = \mu_\Phi H_t^e$, где μ_Φ — абсолютная магнитная проницаемость ферромагнитного тела. Каждая из них состоит из двух компонентов:

$$B_t^i = B_t^i - B_t^*, \quad B_t^e = B_t^i + B_t^*, \tag{Л.1}$$

но

$$B_t^i = \mu_0 H_t^i \quad \text{и} \quad B_t^e = \mu_0 H_t^e, \tag{Л.2}$$

так как они определены, когда среда неферромагнитная.

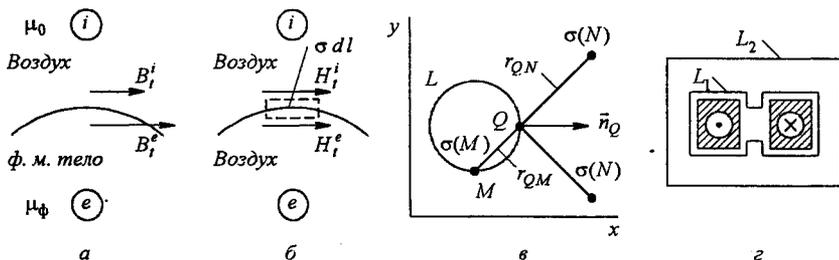


Рис. Л.1

Применив закон полного тока к пунктирному контуру на рис. Л.1, б, охватывающему кусочек границы длиной dl , получим

$$2 H_t^e = \sigma. \tag{Л.3}$$

При составлении циркуляции по этому контуру учли, что по верхней и нижней границам контура составляющих H_t^i в соответствии с рис. Л.1, б нет. Так как тангенциальные составляющие напряженности поля на границе воздух — ферромагнитное тело равны, то

$$B_t^i / \mu_0 = B_t^e / \mu_\Phi. \tag{Л.4}$$

Имея в виду (Л.2), (Л.3), (Л.1) и (Л.4), получаем

$$H_t^i = \frac{\sigma \mu_\Phi + \mu_0}{2 \mu_\Phi - \mu_0}.$$

Следовательно,

$$B_t^i = \mu_0 H_t^i = \frac{\mu_0 \sigma \mu_\Phi + \mu_0^2}{2 \mu_\Phi - \mu_0}.$$

Отсюда находим поверхностную плотность тока для гладких участков поверхности ферромагнитного тела через B_t^i , μ_Φ и μ_0 :

$$\sigma = \frac{2 \mu_\Phi - \mu_0}{\mu_0 \mu_\Phi + \mu_0} B_t^i. \tag{Л.5}$$

Но B_t^i можно выразить как ротор от векторного потенциала \vec{A} , который определяется всеми токами проводимости δ в обмотках и поверхностными токами σ на поверхности ферромагнитных тел.

Для плоскопараллельного поля

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_S \delta(N) \ln \frac{1}{r_{QN}} dS_N + \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_L \sigma(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M,$$

где A — значение вектора потенциала в произвольной точке наблюдения Q , расположенной на контуре ферромагнитного тела L ; N — произвольная точка сечения обмотки с током, плотность тока в которой $\delta(N)$; r_{QN} — расстояние от точки Q до точки N (рис. Л.1, в); M — произвольная точка на контуре L с плотностью поверхностного тока $\sigma(M)$.

Обход контура выберем против часовой стрелки, а нормаль n направим во внешнюю область по отношению к контуру L . Тогда $B'_i = -\partial A / \partial n$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{QN}} = \frac{d}{dr_{QN}} \ln r_{QN} \frac{\partial r_{QN}}{\partial n} = \frac{1}{r_{QN}} \cos(r_{QN}, n),$$

то

$$B'_i = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_S \frac{\delta(N) \cos(r_{QN}, n_Q)}{r_{QN}} dS_N - \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_L \frac{\sigma(M) \cos(r_{QM}, n_Q)}{r_{QM}} dl_M. \quad (\text{Л.6})$$

Подставив формулу (Л.6) в (Л.5), получим интегральное уравнение второго рода Фредгольма относительно плотности поверхностного тока на контуре L ферромагнитного тела:

$$\sigma(Q) + \frac{1}{\pi} \lambda \oint_L \frac{\sigma(M) \cos(r_{QM}, n_Q)}{r_{QM}} dl_M = -F(Q). \quad (\text{Л.7})$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\mu_\Phi - \mu_0}{\mu_\Phi + \mu_0}; \quad F(Q) = \frac{1}{\pi} \lambda \int_S \frac{\delta(N) \cos(r_{QN}, n_Q)}{r_{QN}} dS_N. \quad (\text{Л.8})$$

Для каждой точки Q контура L функцию $F(Q)$ можно подсчитать до решения уравнения (Л.7), так как распределение тока проводимости $\delta(N)$ и геометрия магнитной системы известны. Если контуров, ограничивающих ферромагнитную область, несколько, т. е. область многосвязна (например, на рис. Л.1, з область ограничивают два контура L_1 и L_2 , то уравнение (Л.7) заменяют системой уравнений (число уравнений равно числу контуров). В каждое уравнение входят также слагаемые от поверхностных токов в других контурах (а не только от поверхностных токов в своем контуре).

Уравнение типа (Л.7) решают на ЭВМ итерационным методом, заменяя интегралы конечными суммами. Чтобы итерационный процесс сходиллся, используют интегральные соотношения для контуров L , вытекающие из закона полного тока. После нахождения $\sigma(Q)$ определяют B'_i , а по ним и по A — любую точечную или интегральную характеристику поля.

Подробное рассмотрение первого варианта метода, составление программ для ЭВМ, числовые примеры и распространение метода на нелинейные магнитные системы читатель найдет в [10]. О применении метода к электростатическим полям см. [4].

§ Л.2. Второй вариант метода интегральных уравнений. Первый вариант метода ИУ имеет тот недостаток, что если параметр λ в уравнении (Л.7) окажется близок к единице, то малая погрешность, допущенная при подсчете $F(Q)$ по формуле (Л.8), приведет к большой погрешности при определении закона распределения σ . Чтобы этого недостатка избежать, в [10] описан второй вариант метода ИУ с иными вторичными источниками. Рассмотрим основы второго варианта. С этой целью запишем систему уравнений Максвелла сначала через векторы \vec{B} и \vec{E} , а затем через векторы \vec{D} и \vec{H} , полагая, что ϵ_r и μ_r являются функциями координат.

Первое уравнение Максвелла:

$$\text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{1}{\mu_r} \text{rot} \vec{B} + \left[\text{grad} \frac{1}{\mu_r} \vec{B} \right] \right\} = \vec{\delta},$$

но

$$\text{grad} \frac{1}{\mu_r} = -\frac{d}{d\mu_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right) \text{grad} \mu_r = -\frac{\nabla \mu_r}{\mu_r^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{\delta} + \mu_0 \left\{ -\frac{1}{\mu_0} \frac{[B \nabla \mu_r]}{\mu_r} \right\}. \quad (\text{Л.9})$$

С учетом того, что ϵ_r — функция координат, теорему Гаусса $\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \rho$ запишем так:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 [\epsilon_r \operatorname{div} \vec{E} + (\vec{E} \operatorname{grad} \epsilon_r)] = \rho$$

или

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho}{\epsilon_r} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left[-\epsilon_0 \frac{(\vec{E} \nabla \epsilon_r)}{\epsilon_r} \right]. \quad (\text{Л.10})$$

В свою очередь

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{Л.11})$$

Поле векторов \vec{B} и \vec{E} в вакууме описывается системой уравнений (Л.9)–(Л.11). Из нее следует, что поле создается первичными источниками $\mu_a \vec{\delta}$ и зарядами ρ/ϵ_a , а также вторичными источниками — плотностями тока намагнитченности

$$\vec{\delta}_n(Q, t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{[\vec{B}(Q, t) \nabla_Q \mu_r]}{\mu_r Q} \quad (\text{Л.12})$$

и объемными зарядами поляризации плотностью

$$\rho_n(Q, t) = -\epsilon_0 \frac{\vec{E}(Q, t) \nabla_Q \epsilon_r}{\epsilon_r Q}. \quad (\text{Л.13})$$

Здесь Q — произвольная точка наблюдения; t — время.

Запишем теперь систему уравнений Максвелла через векторы \vec{D} и \vec{H} (исключив \vec{B} и \vec{E}):

$$\operatorname{rot} \vec{D} = -\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon_0 \left\{ -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{[\vec{D} \nabla \epsilon_r]}{\epsilon_r} \right\}; \quad (\text{Л.14})$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}; \quad (\text{Л.15})$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ -\mu_0 \frac{[\vec{H} \nabla \mu_r]}{\mu_r} \right\}. \quad (\text{Л.16})$$

Системы (Л.14)–(Л.16) свидетельствуют о том, что поле векторов \vec{D} и \vec{H} в вакууме создается системой первичных источников-плотностей токов проводимости $\vec{\delta}$ и объемных зарядов ρ и системой вторичных источников-плотностей магнитных токов

$$\sigma_M(Q, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{[\vec{D}(Q, t) \nabla_Q \epsilon_r]}{\epsilon_r Q} \quad (\text{Л.17})$$

и магнитных зарядов

$$\rho_M(Q, t) = -\mu_0 \frac{[\vec{H}(Q, t) \nabla_Q \mu_r]}{\mu_r Q}. \quad (\text{Л.18})$$

Сумма свободных магнитных зарядов в системе равна нулю, поэтому

$$\int_V \rho_M(Q, t) dV + \int_S \sigma_M(Q, t) dS = 0. \quad (\text{Л.19})$$

Если расчет магнитного поля постоянного тока в кусочно-неоднородной среде вести с использованием вторичных источников второго типа, т. е. магнитных зарядов $\rho_M(Q, t)$ и поверхностной плотности токов на поверхностях ферромагнитных тел $\sigma_M(Q, t)$, то, вы-

разив $\bar{H}(Q, t)$ через первичные и вторичные источники и подставив ее в формулу

$$\sigma_m(Q, t) = 2 \frac{\mu_l - \mu_e}{\mu_l + \mu_e} [\bar{H}(Q, t) \bar{n}(Q)] = 2 \lambda_m [\bar{H}(Q, t) \bar{n}(Q)] \quad (\text{Л.20})$$

и в формулу (Л.18), получим два следующих интегральных уравнения относительно σ_m и ρ_m (в статическом поле σ_m и ρ_m будут функциями только Q):

$$\begin{aligned} \sigma_m(Q) + \int_{S_\phi} \sigma_m(M) \lambda(Q) \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{n}_Q)}{2 \pi r_{QM}^3} dS_M + \int_{S_\phi} \rho_m(M) \lambda(Q) \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{n}_Q)}{2 \pi r_{QM}^3} dV_M = \\ = - \frac{\mu_0}{2 \pi} \int_D \bar{\sigma}(N) \lambda(Q) \frac{(\bar{r}_{QN}, \bar{n}_Q)}{r_{QN}^3} dV_N; \quad (\text{Л.21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_m(Q) - \int_{V_\phi} \rho_m(M) \frac{(\bar{r}_{QM}, \nabla_Q \mu_r)}{4 \pi \mu_r(Q) r_{QM}^3} dV_M - \int_{S_\phi} \sigma_m(M) \frac{(\bar{r}_{QM}, \nabla_Q \mu_r)}{4 \pi \mu_r(Q) r_{QM}^3} dS_M = \\ = \frac{\mu_0}{4 \pi} \int_D \bar{\sigma}(N) \frac{(\nabla_Q \mu_r, \bar{r}_{QN})}{\mu_r(Q) r_{QN}^3} dV_N, \quad (\text{Л.22}) \end{aligned}$$

где S_ϕ — поверхность, а V_ϕ — объем ферромагнетика; D — объем, занятый токами проводимости δ ; \bar{n}_Q — единичная нормаль к поверхности в точке Q .

Систему уравнений (Л.21)–(Л.22) решают совместно с уравнением (Л.19) либо прямым, либо итерационным методом. Методику решения и программы для ЭВМ см. в [10]. О дальнейшем развитии метода интегральных уравнений см. [19].

§ Л.3. Расчет полей с использованием интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Ряд задач на расчеты полей может быть сведен к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В качестве примера рассмотрим определение линейной плотности поверхностных зарядов на двух цилиндрических электродах A и B длиной l_1 и l_2 соответственно и радиусом r_0 , расположенных в воздухе, как показано на рис. Л.2, а.

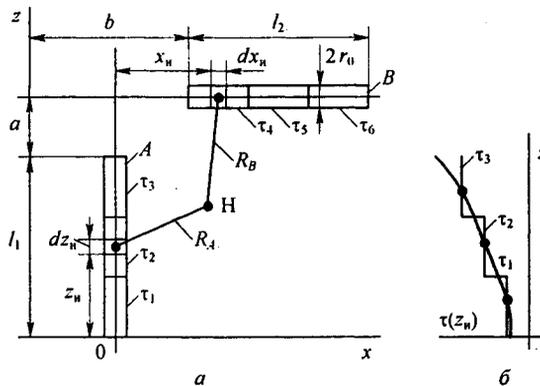


Рис. Л.2

Размеры l_1 , l_2 , a , b намного больше r_0 . Потенциал электрода A равен ϕ_A , электрода B — минус ϕ_A . Воспользуемся декартовой системой координат; полагаем, что плоскость проходит через осевые сечения электродов.

Индекс «и» будет относиться к точке истока, «н» — к точке наблюдения. Координаты точки истока: x_i , z_i , координаты точки наблюдения H : x_n , z_n .

Потенциал произвольной точки наблюдения ϕ_n определяется распределенными по поверхностям обоих электродов зарядами.

При отмеченных допущениях примем, что распределенные по поверхностям заряды электродов находятся на оси каждого электрода. Потенциал точки наблюдения

$$\varphi_n = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left[\int_0^{l_1} \frac{\tau(z_n) dz_n}{R_A} + \int_b^{b+l_2} \frac{\tau(x_n) dx_n}{R_B} \right]$$

Здесь

$$R_A = \sqrt{(z_n - z_n)^2 + x_n^2}; \quad R_B = \sqrt{(z_n - z_n)^2 + (x_n - x_n)^2}.$$

Поместим точку наблюдения на поверхность электрода *A*. Тогда $\varphi_n = \varphi_A$, $x_n = r_0$ и

$$4 \pi \epsilon_0 \varphi_A = \int_0^{l_1} \frac{\tau(z_n) dz_n}{\sqrt{(z_n - z_n)^2 + r_0^2}} + \int_b^{b+l_2} \frac{\tau(x_n) dx_n}{\sqrt{(a+l_1 - z_n)^2 + (x_n - r_0)^2}}. \quad (Л.23)$$

Поместим точку наблюдения на поверхность электрода *B*, тогда $\varphi_n = -\varphi_A$, $z_n = a + l_1$ и

$$-4 \pi \epsilon_0 \varphi_A = \int_0^{l_1} \frac{\tau(z_n) dz_n}{\sqrt{[z_n - (a+l_1)]^2 + x_n^2}} + \int_b^{b+l_2} \frac{\tau(x_n) dx_n}{\sqrt{r_0^2 + (x_n - x_n)^2}}. \quad (Л.24)$$

Уравнения (Л.23) и (Л.24) являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода относительно линейной плотности поверхностных зарядов $\tau(z_n)$ и $\tau(x_n)$ на электродах *A* и *B*. Эти плотности являются плавно изменяющимися функциями координат z_n и x_n соответственно. На рис. Л.2, б показан примерный график зависимости $\tau(z_n)$ на электроде *A* в функции от координаты *z*.

Уравнения (Л.23) и (Л.24) решим приближенно. С этой целью разделим каждый электрод на *n* участков одинаковой длины. Для пояснения хода решения положим $n = 3$. Тогда электрод *A* состоит из участков 1, 2, 3, электрод *B* — из участков 4, 5, 6. Положим, что на каждом участке плотность τ своя и неизменна. В соответствии с этим заменим плавную кривую $\tau(z_n)$ на рис. Л.2, б на ступенчатую с плотностями τ_1, τ_2, τ_3 и плавную зависимость $\tau(x_n)$ на ступенчатую с плотностями τ_4, τ_5, τ_6 .

Полагаем, что суммарный заряд каждого электрода при плавном изменении τ и при ступенчатом одинаков. Каждый из интегралов в (Л.23) и (Л.24) может быть заменен на три интеграла, и соответствующая τ (поскольку она постоянна) может быть вынесена из под знака интеграла. После деления уравнений (Л.23) и (Л.24) на $4 \pi \epsilon_0 \varphi_A$ и введения линейной плотности зарядов в относительных единицах $\tau'_k = \tau_k / (4 \pi \epsilon_0 \varphi_A)$, получим систему из шести (в общем случае из $2n$) уравнений с шестью неизвестными τ'_1, \dots, τ'_6 :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \alpha_{51} & \alpha_{61} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \alpha_{52} & \alpha_{62} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & \alpha_{53} & \alpha_{63} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & \alpha_{54} & \alpha_{64} \\ \alpha_{15} & \alpha_{25} & \alpha_{35} & \alpha_{45} & \alpha_{55} & \alpha_{65} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{36} & \alpha_{46} & \alpha_{56} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \tau'_3 \\ \tau'_4 \\ \tau'_5 \\ \tau'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (Л.25)$$

Первый индекс *i* у коэффициента α_{ij} соответствует участку истока, второй индекс *j* — участку наблюдения. Если обозначить $z_{ИН}$ и $x_{ИН}$ — нижние пределы изменения координат точки истока и $z_{ИВ}$ и $x_{ИВ}$ — верхние пределы изменения координат точки истока, то при $i = j = 1 \dots 3$

$$\alpha_{ij} = \int_{z_{ИН}}^{z_{ИВ}} \frac{dz_n}{\sqrt{(z_n - z_n)^2 + r_0^2}} = \ln \frac{z_{ИВ} - z_n + \sqrt{(z_{ИВ} - z_n)^2 + r_0^2}}{z_{ИН} - z_n + \sqrt{(z_{ИН} - z_n)^2 + r_0^2}}. \quad (Л.26)$$

При $i = j = 4 \dots 6$

$$\alpha_{ij} = \int_{x_{ИН}}^{x_{ИВ}} \frac{dx_n}{\sqrt{(x_n - x_n)^2 + r_0^2}} = \ln \frac{x_{ИВ} - x_n + \sqrt{(x_{ИВ} - x_n)^2 + r_0^2}}{x_{ИН} - x_n + \sqrt{(x_{ИН} - x_n)^2 + r_0^2}} \quad (\text{Л.27})$$

При $i = 4 \dots 6, j = 1 \dots 3$

$$\alpha_{ij} = \int_{x_{ИН}}^{x_{ИВ}} \frac{dx_n}{\sqrt{(z_n - z_n)^2 + (x_n - x_n)^2}} = \ln \frac{x_{ИВ} - x_n + \sqrt{(x_{ИВ} - x_n)^2 + (z_n - z_n)^2}}{x_{ИН} - x_n + \sqrt{(x_{ИН} - x_n)^2 + (z_n - z_n)^2}} \quad (\text{Л.28})$$

По формуле (Л.28) могут быть подсчитаны и коэффициенты α_{ij} при $i = 4 \dots 6, j = 4 \dots 6$, когда $i \neq j$, если принять $z_n - z_n = r_0$. При $i = 1 \dots 3, j = 4 \dots 6$

$$\alpha_{ij} = \int_{z_{ИН}}^{z_{ИВ}} \frac{dz_n}{\sqrt{(z_n - z_n)^2 + x_n^2}} = \ln \frac{z_{ИВ} - z_n + \sqrt{(z_{ИВ} - z_n)^2 + x_n^2}}{z_{ИН} - z_n + \sqrt{(z_{ИН} - z_n)^2 + x_n^2}} \quad (\text{Л.29})$$

По формуле (Л.29) могут быть определены также коэффициенты α_{ij} при $j = 1 \dots 3, i = 1 \dots 3$ и $i \neq j$, если заменить x_n на r_0 .

Емкость между электродами A и B равна суммарному заряду электрода A :

$Q = \frac{l_1}{3} (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$, разделенному на разность потенциалов ($\varphi_A - \varphi_B$) между электродами:

$$C = \frac{Q}{2\varphi_A} = \frac{2}{3} \pi \epsilon_0 l_1 (\tau'_1 + \tau'_2 + \tau'_3).$$

Приложение М

МЕТОД КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ОТОБРАЖЕНИЙ)

Метод конформных преобразований — это метод анализа и расчета неизменных во времени двумерных электрических и магнитных полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа, основу которого составляет конформное преобразование совокупности точек одной плоскости комплексного переменного в совокупность точек другой плоскости.

§ М.1. Комплексный потенциал. Расположим оси декартовой системы в исследуемом поле так, что ось z будет перпендикулярна полю. Плоскость xOy будем называть плоскостью z . Каждая точка поля имеет некоторые координаты x и y . Плоскость xOy можно называть комплексной плоскостью. Тогда положение точки на плоскости будет характеризоваться комплексным числом $z = x + j y$.

Совокупность точек x, y , принадлежащих эквипотенциальной линии, обозначим $U(x, y) = U$, а совокупность точек, принадлежащих силовой линии, — $V(x, y) = V$. Из § 19.5 известно, что в любой точке поля силовые и эквипотенциальные линии взаимно перпендикулярны. Следовательно, одну из функций, например U , можно принять в качестве действительной, а другую V — в качестве мнимой части некоторого комплексного числа $w = U + j V$.

Функцию w называют *комплексным потенциалом*. Он описывает совокупность силовых и эквипотенциальных линий поля, т. е. ортогональную сетку или картину поля. Функцию U называют *потенциальной функцией*, а V — *функцией потока* (так как через нее может быть найден поток вектора, характеризующего это поле).

Функциям U и V можно придать и противоположный смысл, т. е. U считать функцией потока, а V — потенциальной функцией. Если считать U потенциальной функцией, то проекция вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y$, на оси x и y соответственно равны:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \tag{M.1}$$

ср. с формулами (19.8). Отсюда следует, что модуль напряженности поля

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \left| \frac{dw}{dz} \right|.$$

Аналогичные формулы можно записать и для магнитного поля.

§ М.2. Конформные преобразования. Конформными называют преобразования совокупности точек плоскости $z = x + jy$ в совокупность точек плоскости $w = U + jV$, осуществляемые с помощью аналитической функции $w = f(z)$.

Функцию $w = U + jV = f(x + jy) = f(z)$ называют аналитической, если производная $dw/dz = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\Delta w/\Delta z)$ не зависит от направления, вдоль которого взято приращение Δz , т. е. производная dw/dz аналитической функции должна быть одна и та же, если приращение dz один раз взять вдоль оси x ($dz = dx$), а другой раз — вдоль оси y ($dz = j dy$). Так, когда приращение Δz взято вдоль оси x , приращение функции $\Delta_x w = \Delta_x U + j \Delta_x V$. Если же приращение Δz взять вдоль оси y , то приращение функции $\Delta_y w = \Delta_y U + j \Delta_y V$.

Учитывая сказанное, имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x}; \tag{M.2}$$

$$\frac{\partial w}{j \partial y} = -j \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}. \tag{M.3}$$

Приравняв правые части (M.2) и (M.3), получаем уравнения, называемые уравнениями Коши—Римана:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \tag{M.4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{M.5}$$

Можно доказать, что функции U и V удовлетворяют уравнению Лапласа. Чтобы убедиться в том, что функция U удовлетворяет уравнению Лапласа, продифференцируем (M.4) по x , а (M.5) — по y :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}.$$

Если сложить эти равенства, то получим уравнение Лапласа относительно U . Аналогичное доказательство можно провести и по отношению к функции V .

Если в произвольной точке a плоскости z (рис. М.1. а) взять два приращения: $dz_1 = |dz_1| e^{j\beta z_1}$ и $dz_2 = |dz_2| e^{j\beta z_2}$, то в точке a плоскости w (каждой точке плоскости z со-

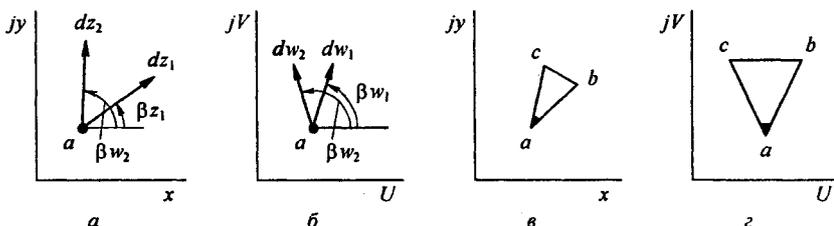


Рис. М.1

ответствует некоторая точка в плоскости w , рис. М.1, б) им будут соответствовать приращение $dw_1 = |dw_1| e^{j\beta w_1}$, и $dw_2 = |dw_2| e^{j\beta w_2}$.

В силу аналитичности функции w

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{dz=dz_1} = \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{dz=dz_2}$$

Поэтому

$$\frac{|dw_1|}{|dz_1|} e^{j(\beta w_1 - \beta z_1)} = \frac{|dw_2|}{|dz_2|} e^{j(\beta w_2 - \beta z_2)}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|dw_1|}{|dz_1|} = \frac{|dw_2|}{|dz_2|} \quad \text{и} \quad \beta w_2 - \beta w_1 = \beta z_2 - \beta z_1,$$

т. е. бесконечно малой фигуре на плоскости z (рис. М.1, в) соответствует подобная бесконечно малая фигура на плоскости w (рис. М.1, г).

По определению напряжение между двумя близлежащими точками на плоскости z равно

$$E_z dz \cos(\hat{E}_z d\bar{z}) = \operatorname{Re} \bar{E}_z d\bar{z}^*$$

Напряжение между одноименными точками на плоскости w равно $\operatorname{Re} \bar{E}_w d\bar{w}$. Следовательно, $\operatorname{Re} \bar{E}_z d\bar{z}^* = \operatorname{Re} \bar{E}_w d\bar{w}$. Усилим это равенство: $\bar{E}_z d\bar{z}^* = \bar{E}_w d\bar{w}$. Отсюда

$$\bar{E}_z = \bar{E}_w (dw/dz)^*$$

Здесь $(dw/dz)^*$ — сопряженный с dw/dz комплекс. Составим выражение для $(dw/dz)^*$ и \bar{E}_w в декартовой системе координат, отсчитывая углы от осей x и U , расположив их параллельно. Когда U — потенциальная функция, то, используя (М.4) и (М.5), имеем

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^* = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial U}{\partial y} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2} e^{j \arctg \frac{\partial U / \partial y}{\partial U / \partial x}},$$

и так как напряженность направлена от более высокого потенциала к более низкому, то $\bar{E}_w = E_w e^{j180^\circ}$. Если V — потенциальная функция, то $\bar{E}_w = E_w e^{-j90^\circ}$ и

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^* = \frac{\partial V}{\partial y} - j \frac{\partial V}{\partial x} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2} e^{j \arctg \frac{-\partial V / \partial x}{\partial V / \partial y}}.$$

§ М.3. Прямая и обратная задачи расчета полей по методу конформных преобразований. Прямая задача формулируется следующим образом. Известны эквипотенциальные линии плоскости z (обычно известны две линии в соответствии с тем, что поле создается двумя электродами, поверхность каждого электрода является эквипотенциалью). Требуется найти такую функцию $w = f(z)$, действительная U или мнимая V часть которой удовлетворяла бы уравнению $U(x, y) = \text{const}$ (соответственно уравнению $V(x, y) = \text{const}$) на поверхности каждого электрода^{*)}. Если такая функция будет найдена, то на основании теоремы единственности она будет правильно описывать поле во всех точках.

Очертания электродов в плоскости z могут быть самыми различными. Если очертания электродов таковы, что их можно представить кусочно-ломаными прямыми, то задачу нахождения функции $w = f(z)$ можно решить в общем виде (по крайней мере, принци-

^{*)} Отметим, что ортогональная сетка на плоскости w может быть описана не только в декартовой, но и в полярной системе координат. В полярной системе $w = r e^{j\beta}$ и линии $r = \text{const}$ могут быть приняты за силовые линии, а линии $\beta = \text{const}$ — за эквипотенциали. Полярная сетка использована в § М.4–М.6.

пиально) с помощью интеграла Кристоффеля—Шварца (см. § М.5).

Если же очертания электродов в плоскости таковы, что не могут быть представлены кусочно-ломаными прямыми, то общий метод нахождения функции $w = f(z)$ для таких задач неизвестен.

Тем не менее метод конформных отображений часто стремятся применить и в этом случае, решая задачу обходным путем — просматривают уже известные решения, имеющиеся в учебной и специальной литературе, и пытаются найти такое, в котором форма двух эквипотенциалей, если не полностью, совпадает с формой (очертаниями) электродов исследуемого поля, то достаточно близка к ним. Это решение и принимают в качестве искомого.

Обратная задача формулируется так. Задана некоторая аналитическая функция $w = f(z)$. Требуется выяснить, для каких полей может быть осуществлено взаимное конформное преобразование. В качестве примера обратной задачи рассмотрим преобразование, выполняемое функцией

$$w = m \operatorname{Arch}(z/k), \tag{M.6}$$

где m и k — некоторые числовые коэффициенты.

Разрешим (M.6) относительно z , будем иметь

$$z = x + jy = k \operatorname{ch} \frac{U + jV}{m} = k \operatorname{ch} \frac{U}{m} \cos \frac{V}{m} + j k \operatorname{sh} \frac{U}{m} \sin \frac{V}{m}.$$

Следовательно,

$$x = k \operatorname{ch} \frac{U}{m} \cos \frac{V}{m}; \tag{M.7}$$

$$y = k \operatorname{sh} \frac{U}{m} \sin \frac{V}{m}. \tag{M.8}$$

Разделим уравнение (M.7) на $k \operatorname{ch}(U/m)$ и уравнение (M.8) на $k \operatorname{sh}(U/m)$, возведем полученные уравнения в квадрат и сложим. Получим уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{k^2 \operatorname{ch}^2(U/m)} + \frac{y^2}{k^2 \operatorname{sh}^2(U/m)} = 1. \tag{M.9}$$

Полуоси его:

$$a = k \operatorname{ch}(U/m), \quad b = k \operatorname{sh}(U/m).$$

Из (M.9) следует, что различным $U = \operatorname{const}$ соответствует семейство конфокальных эллипсов с фокусным расстоянием от центра

$$k = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Разделим уравнение (M.7) на $k \cos(V/m)$ и уравнение (M.8) на $k \sin(V/m)$, а затем, возведя их в квадрат и вычтя одно из другого, получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{k^2 \cos^2(V/m)} - \frac{y^2}{k^2 \sin^2(V/m)} = 1 \tag{M.10}$$

с полуосями

$$a_1 = k \cos(V/m), \quad b_1 = k \sin(V/m).$$

Уравнение (M.10) при $V = \operatorname{const}$ описывает семейство конфокальных гипербол с фокусным расстоянием

$$k = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.$$

Таким образом, функция $w = m \operatorname{Arch}(z/k)$ конформно преобразует совокупность взаимно перпендикулярных эллипсов и гипербол на плоскости z (рис. М.2. а) в совокупность

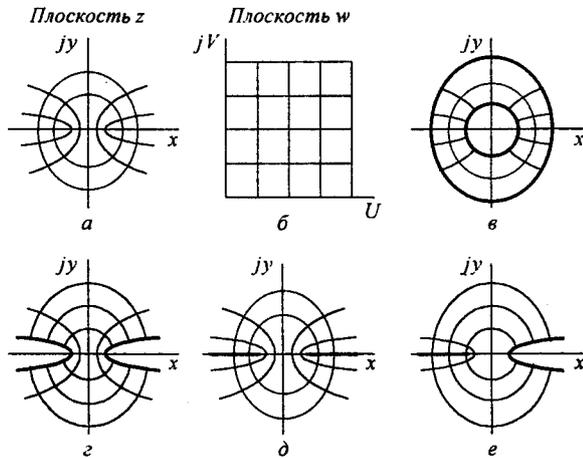


Рис. М.2

взаимно перпендикулярных прямых на плоскости w (рис. М.2, б).

В § М.2 говорилось, что роль потенциальной функции может выполнять либо функция U , либо функция V . Если в рассматриваемом случае под потенциальной функцией понимать функцию U , то эквипотенциальные поверхности будут эллипсами, а поле на плоскости z представляет собой поле между двумя конфокальными эллиптическими электродами (рис. М.2, в). Если же под потенциальной функцией в рассматриваемом примере понимать функцию V , то поле на плоскости z является полем между двумя электродами гиперболической формы (рис. М.2, г). В предельном случае, когда полуось $b_1 = 0$, гипербола вырождается в прямую (рис. М.2, д) и исследуемое поле представляет собой поле между двумя плоскими пластинками.

Электроды могут иметь и неодинаковую форму, например левый электрод — форму плоской пластинки, а правый — форму гиперболы (рис. М.2, е). Постоянные m и k определяют из граничных условий.

§ М.4. Преобразование равномерного поля на плоскости z в поле верхней полуплоскости w . Координату некоторой точки на плоскости w запишем в полярной системе координат: $w = r e^{j\beta}$ (обозначения см. на рис. М.3, б). Свяжем переменные z и w соотношением $z = x + jy = A \ln(w/r_0)$. Здесь A и r_0 — некоторые постоянные. Тогда

$$x = A \ln(r/r_0) \quad \text{и} \quad y = A\beta.$$

На плоскости z (рис. М.3, а) имеется равномерное поле, образованное двумя плоскими электродами. Один электрод совпадает с осью x и имеет потенциал $\varphi_1 = 0$, второй удален от оси x на расстояние d и имеет потенциал φ_2 . На плоскости z эквипотенциали являются прямыми, параллельными оси x , а силовые линии параллельны оси y .

На плоскости w при использовании полярной системы координат линии равного потенциала соответствуют линиям $A\beta = \text{const}$, т. е. являются лучами, проведенными из начала координат, а эквипотенциали $A \ln(r/r_0) = \text{const}$ будут окружностями.

Положим, что эквипотенциаль $y = d$ плоскости z отображена на плоскость w отрицательной полуосью $-U$, а эквипотенциаль $y = 0$ — положительной полуосью $+U$. Точке

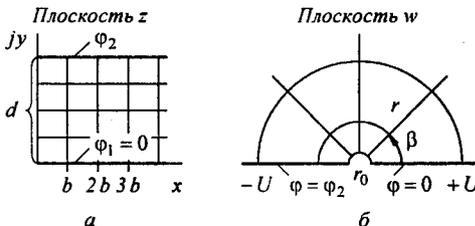


Рис. М.3

$w = 0$ соответствует $x = -\infty$. Определим постоянную A . Полупрямой $-U$ соответствует $\beta = \pi$, поэтому $y = d = A\pi$. Отсюда $A = d/\pi$.

Найдем соответствие между силовыми линиями в плоскостях z и w . Силовой линии $x = 0 = (d/\pi) \ln(r/r_0)$ соответствует полуокружность радиусом $r = r_0$ (r_0 — произвольный радиус, играющий роль единицы измерения); силовой линии $x = b = (d/\pi) \ln(r/r_0)$ — полуокружность радиусом $r = r_0 e^{b\pi/d}$; силовой линии $x = 2b$ — полуокружность радиусом $r = r_0 e^{2b\pi/d}$ и т. д.

Таким образом, поле в верхней полуплоскости w , конформно отображающее равномерное поле на плоскости z , образовано двумя полупрямыми, совпадающими с осью $+U$ и $-U$, которые отделены друг от друга в точке $w = 0$ и разность потенциалов между которыми φ_2 .

§ М.5. Интеграл Кристоффеля—Шварца. Поле на плоскости z , образованное осью x и ломаной линией $z_0 - z_1 - z_2 - \dots - z_n$ с конечным числом изломов (рис. М.4, а), может быть отображено на верхнюю полуплоскость w с помощью преобразования Кристоффеля—Шварца:

$$dz = A(w - U_1)^{-\alpha_1} (w - U_2)^{-\alpha_2} \dots (w - U_n)^{-\alpha_n} e^{j\gamma\pi} dw. \quad (M.11)$$

Здесь A — некоторая постоянная; U_1, U_2, \dots, U_n — произвольно выбранные точки на оси (рис. М.4, б), соответствующие одноименным точкам z_1, z_2, \dots, z_n . Оси x и U расположим параллельно. Исходной точке z_0 отвечает некоторая точка U_0 на оси U . Углы α и γ в формуле (М.11) измеряются в долях от π . Угол α положителен, если при переходе от предшествующего участка к последующему совершается поворот против часовой стрелки. Так, для рис. М.4, а $\alpha_1 > 0$, но $\alpha_2 < 0$. Угол $\gamma\pi$ отсчитывается от оси $+x$ до отрезка $z_0 - z_1$. Линия

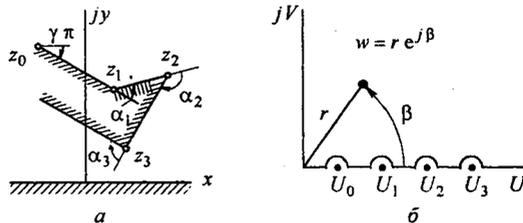


Рис. М.4

$z_0 - z_1 - z_2 - \dots - z_n$ представляет собой след электрода, поэтому она является эквипотенциалью. В более общем случае перемещение производят по следу электрода, по выбранной силовой линии и по следу второго электрода или эквипотенциальной линии. Этому перемещению соответствует перемещение вдоль линии U плоскости w ¹⁾.

При обходе по контуру на плоскости z надо следить за тем, чтобы область, занятая полем, располагалась слева. Биномы $(w - U_k)^{-\alpha_k}$ учитывают, что модуль \vec{E}_z изменяется на каждом линейном участке, но аргумент \vec{E}_z на каждом участке остается неизменным. При переходе через точку излома z_k аргумент \vec{E}_z (он пропорционален $\arg(dw/dz)$) скачком изменяется на угол α_k , поскольку при переходе через точку U_k бином $(w - U_k)$ изменяет знак. В формуле (М.11) граничные условия в поле учтены правильным изменением аргумента dw/dz на всей границе области. Интегрируя (М.11), получаем формулу

$$z = A \int (w - U_1)^{-\alpha_1} (w - U_2)^{-\alpha_2} \dots (w - U_n)^{-\alpha_n} e^{j\gamma\pi} dw + C_1 + j C_2, \quad (M.12)$$

которую называют интегралом Кристоффеля—Шварца (C_1 и C_2 — постоянные).

§ М.6. Применение интеграла Кристоффеля—Шварца. Рассмотрим картину поля на краю плоского конденсатора (рис. М.5, а). Оси координат плоскости z расположим так, что ось x совпадает со средней линией конденсатора (потенциал ее примем равным нулю). Верхний электрод, параллельный оси x , удален от нее на расстояние h и простирается от точки b до $-\infty$, имея потенциал φ_2 . Пунктиром показан нижний электрод.

¹⁾ Для полярной системы координат $U = \text{const}$ не является уравнением эквипотенциали.

Ломаной линией $z_0 - z_1 - z_2 - \dots - z_n$ в данном случае является линия, состоящая из трех участков (рис. М.5, б). Первый идет по верхней части электрода из точки a (из $-\infty$) до точки b . Участок расположен параллельно оси x , поэтому $\gamma = 0$. Второго участ

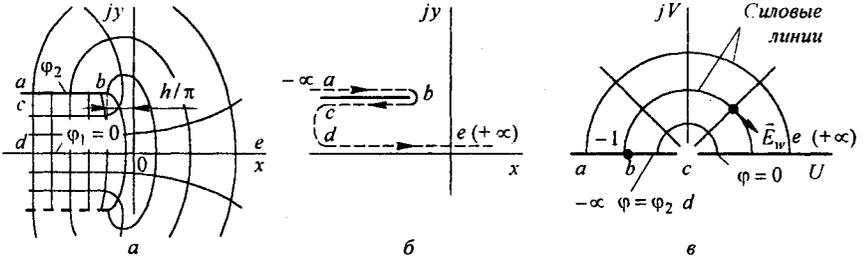


Рис. М.5

ток — от точки b до точки c (до $-\infty$) по нижней части электрода. Угол $\alpha_1 = -1$. Третий участок — от точки c ($-\infty$) вдоль положительного направления оси x до точки e , находящейся в $+\infty$. Так как при переходе от второго участка к третьему совершается поворот по часовой стрелке на 180° , то $\alpha_2 = +1$.

Линию ab плоскости z отобразим на отрицательную полуось $-U$ плоскости w (рис. М.5, в) так, чтобы точка a находилась в точке $U = -\infty$; точка b — в точке $U = -r_0 = -1$; точки c и d — в точке $U = 0$ и точка e — в точке $U = +\infty$. Тогда в соответствии с формулой (М.11)

$$dz = A(w+1)^{-1}(w-0)^{-1}dw, \quad (a)$$

$$z = x + jy = A \int (w+1)^{-1} w^{-1} dw + C_1 + jC_2$$

или

$$z = x + jy = A[w + r_0 \ln(w/r_0)] + C_1 + jC_2. \quad (б)$$

На плоскости w воспользуемся полярной системой координат $w = r e^{j\beta}$. Разделяя действительные и мнимые части, находим

$$x = A[r \cos \beta + r_0 \ln(r/r_0)] + C_1, \quad (М.13)$$

$$y = A[r \sin \beta + r_0 \beta] + C_2. \quad (М.14)$$

Определим постоянные A , C_1 и C_2 . Постоянную C_2 найдем из условия, что для участка de плоскости z имеем $y = 0$ и что ему на плоскости w соответствует $\beta = 0$. Подставляя $\beta = 0$ и $y = 0$ в (М.14), находим $C_2 = 0$.

Для нахождения A учтем, что для участка ab плоскости z $y = h$, а на плоскости w этому участку соответствует $\beta = \pi$. Подставляя эти данные в (М.14), определяем $A = h/\pi$.

Подставляя данные, соответствующие точке b ($x = -h/\pi$, $\beta = \pi$), в уравнение (М.13), находим $C_1 = 0$. С учетом того, что $r_0 = 1$, перепишем (М.13) и (М.14):

$$x = \frac{h}{\pi} [r \cos \beta + \ln(r/r_0)], \quad (М.15)$$

$$y = \frac{h}{\pi} (r \sin \beta + \beta), \quad (М.16)$$

Эквипотенциалами на плоскости w являются прямые $\beta = \text{const}$. Для построения на плоскости z эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ ($\varphi_2 > \varphi > 0$) поступаем следующим образом. Находим угол $\beta = \pi \varphi / \varphi_2$, подставляем найденное β в формулы (М.15) и (М.16) и, придавая r/r_0 различные значения, находим координаты x и y точек искомой эквипотенциала. Для построения силовой линии в формулах (М.15) и (М.16) следует положить $r = \text{const}$ и изменять β от 0 до π . Определяем напряженность поля \vec{E}_w на плоскости w , исходя из того, что $\text{pr} E_w = \varphi_2$. Так как \vec{E}_w перпендикулярна эквипотенциальной

линии, проведенной под углом β к оси $+U$, то \vec{E}_w с осью $+U$ составляет угол $\beta - \pi/2$. Таким образом,

$$\vec{E}_w = \frac{\Phi_2}{\pi r} e^{j(\beta - \pi/2)}. \tag{М.17}$$

Напряжение между какими-либо двумя бесконечно близко расположенными друг к другу точками плоскости z и между соответствующими им точками плоскости w одинаково и равно $\vec{E}_z dz = \vec{E}_w dw$. Здесь \vec{E}_z — напряженность поля на плоскости z . Отсюда $\vec{E}_z = \vec{E}_w (dw/dz)^*$. Подставляя в это выражение значение \vec{E}_w из (М.17), производную dw/dz из (6) и $A = h/\pi$, находим

$$\vec{E}_z = -j \frac{\Phi_2}{r h} \left(\frac{w}{r_0 + w} \right)^* e^{j\beta}.$$

В качестве примера использования формул (М.15) и (М.16) на рис. М.6 построена картина поля на краю конденсатора при $h = \pi$ и $r_0 = 1$. Эквипотенциали построены при углах 30, 60, 90, 150, 165°. Силовые линии проведены через точки, для которых $r = 0,5; 1; 2; 4; 6$.

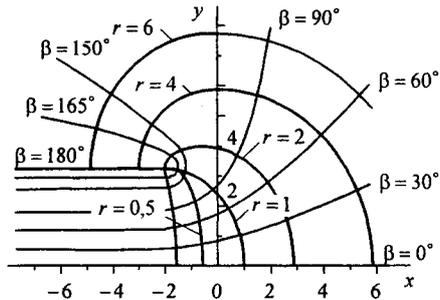


Рис. М.6

Применим интеграл Кристоффеля-Шварца к расчету поля, образованного зарядом, находящимся в точке A на оси x плоскости z (рис. М.7, а), заряженной полоской на отрезке $C-D$ и диполем в окрестности точки F . Характер изменения dz/dw при перемещении по оси U плоскости w такой:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{w-b}{(w-a)\sqrt{(w-c)(w-d)(w-f)^2}}. \tag{М.18}$$

Точки a_1, a_2 оси U плоскости w (рис. М.7, б) соответствуют точкам A, B оси x плоскости z (рис. М.7, а).

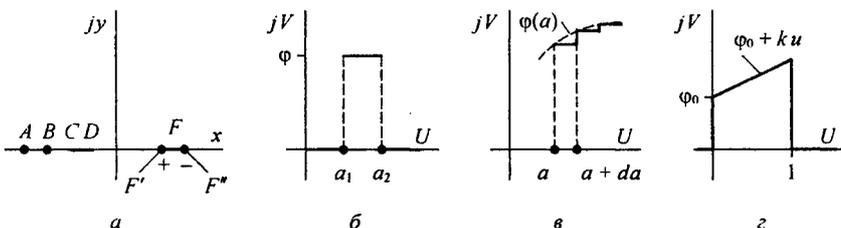


Рис. М.7

Поясним формулу (М.18). При переходе через точку A напряженность \vec{E}_z , принимая бесконечно большое значение в точке A , скачком изменяет направление на 180°. Такой характер изменения \vec{E}_z создает множитель $1/(w-a)$ в формуле (М.18). В точках C и D аргумент \vec{E}_z изменяется на 90°. Это учтено наличием в формуле (М.18) множителя $[(w-c)(w-d)]^{-1/2}$. В некоторой точке B оси x плоскости z $E_z = 0$. Это учтено множителем $(w-b)$ в числителе (М.18). В окрестности точки F , где расположен диполь, характер изменения \vec{E}_z получим предельным переходом, устремив точки F' и F'' к точке F ; при этом в формуле (М.18) появляется множитель $1/(w-f)^2$. Интегрируя (М.18), получаем $z = f(w)$, а затем находим и $w = f_1(z)$.

§ М.7. Интеграл Шварца. Положим, что на некотором участке границы исследуемой области поля на оси x плоскости z в интервале значений x от A_1 до A_2 потенциал равен φ , а вне этого отрезка $\varphi=0$. Упомянутым точкам на оси U плоскости w соответствуют точки a_1 и a_2 (рис. М.7, б). При переходе через эти точки скачком изменится направление напряженности поля, скачком должно изменяться и значение dz/dw . В соответствии с этим

$$\frac{dz}{dw} = \frac{M}{(w-a_1)(w-a_2)} = N \left(\frac{1}{w-a_2} - \frac{1}{w-a_1} \right).$$

Здесь

$$N = (a_2 - a_1) M.$$

Следовательно,

$$z = N \ln \frac{w-a_2}{w-a_1} + jC, \quad (\text{М.19})$$

где jC — некоторая постоянная.

При $w < a_1$ и $w > a_2$ имеем

$$z = x + jy = x + j0.$$

Дробь под знаком логарифма положительна, поэтому $C=0$.

При переходе через точку a_1 под знаком логарифма в (М.19) оказывается отрицательное число, поэтому

$$z = x + jy = N \ln |(w-a_1)/(w-a_2)| + j\pi N.$$

Приращение аргумента комплексного потенциала w при переходе через точку a_1 равно $V=\varphi$. Но при этом приращение аргумента w должно быть равно приращению аргумента z (см. § М.2), поэтому $\pi N = \varphi$, $N = \varphi/\pi$ и

$$z = (\varphi/\pi) \ln |(w-a_1)/(w-a_2)|.$$

Если потенциал φ вдоль оси U плоскости w будет изменяться плавно, то, заменив U на переменную интегрирования a , сначала представим плавную кривую в виде ступенчатой, как это показано на рис. М.7, в, и составим приращение потенциала на бесконечно малом отрезке da оси U плоскости w :

$$dz = \frac{\varphi(a)}{\pi} \ln \frac{w-(a+da)}{w-a} = \frac{\varphi(a)}{\pi} \ln \left(1 + \frac{da}{a-w} \right).$$

Разложим логарифм в ряд и, учитывая, что $da/(a-w) \ll 1$, возьмем лишь первый член этого ряда

$$dz = \frac{\varphi(a)}{\pi} \frac{da}{a-w}.$$

Комплексный потенциал z получим, просуммировав приращения dz от всех скачков потенциала на отрезках da , т. е. осуществив интегрирование:

$$z = \frac{1}{\pi} \int \varphi(a) \frac{da}{a-w}. \quad (\text{М.20})$$

В качестве примера составим $z = f(w)$ для поля, образованного границей магнитопровода трансформатора с потенциалом $\varphi=0$ (отрезок $-\infty, 0$ оси U плоскости w) и высоковольтной обмоткой на участке $0-l$, потенциал которой линейно нарастает по закону $\varphi_0 + ka$ (рис. М.7, з). В этом случае

$$z = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\varphi_0 + ka}{a-w} da = \frac{1}{\pi} (\varphi_0 + kw) \ln \frac{w-l}{w} + \frac{k}{\pi}.$$

Приложение Н

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ Н.1. Метод конечных элементов (МКЭ). Это метод расчета полей в некоторой области G , основанный на представлении данной области в виде совокупности подобластей — конечных элементов (например, для двумерных полей подобласти это треугольники, для трехмерных — тетраэдры). в аппроксимации искомой функции, например потенциала ϕ , в каждом из этих элементов в функции координат, в составлении выражения для энергии поля всей области через потенциалы ϕ_k фиксированных точек (узлов) этих элементов и в получении системы алгебраических уравнений относительно ϕ путем минимизации выражения для энергии поля.

Метод был предложен в 1956 г. Тернером с соавторами. Вначале он был применен к задачам механики и аэро- и гидродинамики. Ниже рассмотрены основные этапы расчета этим методом, когда задано распределение потенциала на границе области G (задача Дирихле). Обозначения соответствуют принятым в литературе [16].

В качестве примера на рис. Н.1, а изображена двумерная область G и ее разбиение на треугольники. Подобласти пронумерованы римскими цифрами, всего областей M (для рис. Н.1, а $M = 9$). Текущий номер области в дальнейшем будет обозначаться e . Узлы элементов обозначены арабскими цифрами. Полное число узлов во всей области K (для рис. Н.1, а $K = 9$).

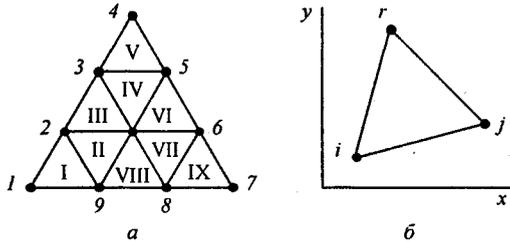


Рис. Н.1

§ Н.2. Аппроксимация потенциала в каждой подобласти. На рис. Н.1, б изображен один из конечных элементов области G . Его вершины i, j, r имеют координаты $i(x_i, y_i)$, $j(x_j, y_j)$ и $r(x_r, y_r)$ и потенциалы ϕ_i, ϕ_j, ϕ_r .

Полагаем, что текущий потенциал ϕ в каждом двумерном конечном элементе может быть аппроксимирован как функция координат x, y .

При линейной аппроксимации

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \tag{Н.1}$$

При квадратичной

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x y + \alpha_6 y^2. \tag{Н.1а}$$

Существуют и другие виды аппроксимаций, например кубическая, но для рассмотренных основ метода воспользуемся линейной. Подставим в (Н.1) координаты узлов i, j, r :

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ \phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ \phi_r &= \alpha_1 + \alpha_2 x_r + \alpha_3 y_r. \end{aligned} \right\} \tag{Н.2}$$

Из (Н.2) определим

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta} (a_i \phi_i + a_j \phi_j + a_r \phi_r), \tag{Н.3}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Delta} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_r \phi_r), \tag{Н.4}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\Delta} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_r \phi_r), \tag{Н.5}$$

Здесь

$$a_i = x_j y_r - x_r y_j, \quad a_j = x_r y_i - x_i y_r, \quad a_r = x_i y_j - x_j y_i; \quad (\text{H.6})$$

$$b_i = y_j - y_r, \quad b_j = y_r - y_i, \quad b_r = y_i - y_j; \quad (\text{H.7})$$

$$c_i = x_r - x_j, \quad c_j = x_j - x_r, \quad c_r = x_j - x_i; \quad (\text{H.8})$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_r & y_r \end{vmatrix} = 2 S_e, \quad (\text{H.9})$$

где S_e — площадь треугольного элемента.

Подставим (H.3)–(H.5) в (H.1) и сгруппируем слагаемые с $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_r$:

$$\varphi = N_i \varphi_i + N_j \varphi_j + N_r \varphi_r, \quad (\text{H.10})$$

где

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2 S_e} (a_i + b_i x + c_i y), \\ N_j &= \frac{1}{2 S_e} (a_j + b_j x + c_j y), \\ N_r &= \frac{1}{2 S_e} (a_r + b_r x + c_r y). \end{aligned} \right\} \quad (\text{H.11})$$

Коэффициенты N_i, N_j, N_r называют функциями формы. Свойства их таковы: N_i в узле i равно 1, а в узлах j и r равно нулю. Аналогично N_j в j равно 1, а узлах i и r равно нулю; $N_r = 1$ в узле r и равно нулю в узлах i и j .

Покажем, например, что N_i в узле i равно 1:

$$N_i = \frac{1}{2 S_e} (a_i + b_i x + c_i y) = N_i = \frac{1}{2 S_e} (x_i y_r - x_r y_j + x_i y_j - x_i y_r + x_r y_i - x_j y_i) = 1.$$

Далее пользуемся матричной формой записи. Обозначим

$$[\varphi] = [\varphi_i \quad \varphi_j \quad \varphi_r]^T; \quad (\text{H.12})$$

$$[\alpha] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T; \quad (\text{H.13})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_r & y_r \end{bmatrix}; \quad (\text{H.14})$$

$$[N] = [N_i \quad N_j \quad N_r]^T; \quad (\text{H.15})$$

$$[R] = [1 \quad x \quad y]. \quad (\text{H.16})$$

Тогда вместо (H.2) будет

$$[\varphi] = [C][\alpha]. \quad (\text{H.17})$$

Вместо (H.3)–(H.5) будет

$$[\alpha] = [C]^{-1} [\varphi], \quad (\text{H.18})$$

где

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_r & y_r \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_r \\ b_i & b_j & b_r \\ c_i & c_j & c_r \end{bmatrix}. \quad (\text{H.19})$$

Вместо (H.10)

$$\varphi = [N][\alpha] = \frac{1}{2 S_e} [R][C]^{-1} [\varphi]. \quad (\text{H.20})$$

Из (H.20) следует

$$[N] = \frac{1}{2 S_e} [R][C]^{-1}. \quad (\text{H.21})$$

§ Н.3. Минимизация энергии электрического поля. Электрическое поле в общем случае в трехмерной однородной и изотропной области G в объеме V с внесенными в эту область объемными зарядами ρ обладает энергией

$$W_3 = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV - \int_V \rho \varphi dV.$$

Первое слагаемое — энергия поля в той части объема V , которая не занята объемными зарядами. Второе слагаемое обусловлено работой источников поля на перенос зарядов ρ из точек с нулевым потенциалом в рассматриваемые точки поля с потенциалом φ .

Если учесть, что

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z \quad \text{и} \quad E^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2.$$

то

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_V \frac{\epsilon_a}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] dV - \int_V \rho \varphi dV = \\ &= \int_V f \left(x, y, z, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dV. \end{aligned} \quad (\text{Н.22})$$

Энергию W_3 можно рассматривать как некоторый функционал. Чтобы он принимал минимальное значение, его подынтегральная функция f должна в соответствии с методом Ритца удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial (\partial \varphi / \partial y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial (\partial \varphi / \partial z)} \right] - \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0. \quad (\text{Н.23})$$

Но

$$\frac{\partial f}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} = \epsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial (\partial \varphi / \partial y)} = \epsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial (\partial \varphi / \partial z)} = \epsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \rho.$$

Подставим частные производные f в уравнение (Н.23). Получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (\text{Н.24})$$

Таким образом, определение φ , исходя из минимизации функционала W_3 (Н.22), эквивалентно решению уравнения (Н.24) для области G при заданных граничных условиях для φ .

§ Н.4. вывод основных формул метода. В соответствии с уравнением (Н.20) внутри каждого (конечного) e -элемента (e — номер подобласти, а не показатель степени) имеем

$$\varphi^e = [N^e][\varphi]. \quad (\text{Н.25})$$

У текущего e -элемента номера узлов входят в интервал $1, \dots, K$. Поэтому

$$[N^e] = [N_1^e, N_2^e, \dots, N_k^e]; \quad (\text{Н.26})$$

$$[\varphi] = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k]^T. \quad (\text{Н.27})$$

Энергия поля в объеме V для однородного и изотропного диэлектрика

$$W_3 = \int_V \frac{1}{2} \{ [g]^T \epsilon_a [1] [g] - 2 \varphi \rho \} dV. \quad (\text{Н.28})$$

Здесь

$$[g]^T = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]; \quad (\text{Н.29})$$

$$[1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{H.30})$$

Интеграл в (H.28) представим в виде суммы интегралов по всем e -элементам (1, ..., M):

$$W_3 = \sum_{e=1}^M \int_{V^e} \frac{1}{2} \{ [g^e]^T \varepsilon_a [1] [g^e] - 2 \varphi^e \rho \} dV = \sum_{e=1}^M F^e. \quad (\text{H.31})$$

Имея в виду (H.26) и (H.29), а также то, что у текущего e -элемента номера узлов вписываются в интервал от 1 до K , получаем:

$$[g^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^e}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & \frac{\partial N_2^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{bmatrix} = [B^e] [\varphi], \quad (\text{H.32})$$

где

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial z} & \frac{\partial N_2^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_k^e}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{H.33})$$

Заметим, что

$$[g^e]^T = [\varphi]^T [B^e]^T. \quad (\text{H.34})$$

Запишем выражение для энергии, запасенной в одном e -элементе с учетом формул (H.32) и (H.34):

$$F^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} [\varphi]^T [B^e]^T \varepsilon_a [1] [B^e] [\varphi] dV - \int_{V^e} \rho [N^e] [\varphi] dV. \quad (\text{H.35})$$

Из (H.35) следует, что F^e является функцией $[\varphi]$. Для того чтобы минимизировать F^e , надо приравнять нулю производную $\partial F^e / \partial [\varphi]$. Так как $[B^e]^T \varepsilon_a [1] [B^e] = [A]$ является симметричной матрицей (у которой $a_{ij} = a_{ji}$), то по правилам матричного дифференцирования (см., например, [16]) имеем

$$\frac{\partial [\varphi]^T [A] [\varphi]}{\partial [\varphi]} = 2 [A] [\varphi]; \quad (\text{H.36})$$

$$\frac{\partial [N^e] [\varphi]}{\partial [\varphi]} = [N^e]^T. \quad (\text{H.37})$$

Таким образом, условие $\partial F^e / \partial [\varphi]$ для одного e -элемента приводит к уравнению

$$\left\{ \int_{V^e} [B^e]^T \varepsilon_a [1] [B^e] dV \right\} [\varphi] - \int_{V^e} \rho [N^e]^T dV = 0, \quad (\text{H.38})$$

а для всех M конечных элементов получим совокупность уравнений

$$\sum_{e=1}^M [K^e] [\varphi] = \sum_{e=1}^M \rho [N^e]^T dV. \quad (\text{H.39})$$

Здесь

$$[K^e] = \int_{V^e} [B^e]^T \epsilon_a [1] [B^e] dV. \tag{H.40}$$

Выражение $\sum_{e=1}^M [K^e][\varphi]$ называют глобальной матрицей системы, а $\sum_{e=1}^M \rho [N^e]^T dV$ — глобальным вектором внешних воздействий. После интегрирования и суммирования (H.39) будет представлять систему алгебраических уравнений относительно потенциалов всех K узлов. Если поле двумерно, то, принимая размер поля в направлении одной из координат единичным, объемные интегралы заменяют на интегралы по площади и тогда

$$[K^e] = \int_{S^e} [B^e]^T \epsilon_a [1] [B^e] dS; \tag{H.41}$$

$$\sum_{e=1}^M [K^e][\varphi] = \sum_{e=1}^M \int_{S^e} \rho [N^e]^T dS. \tag{H.42}$$

Если диэлектрик анизотропный, то его ϵ_a — тензор $\vec{\epsilon}_a = \vec{i} \epsilon_{ax} + \vec{j} \epsilon_{ay} + \vec{k} \epsilon_{az}$. Компоненты тензора $\epsilon_{ax}, \epsilon_{ay}, \epsilon_{az}$ могут быть функциями координат x, y, z . В этом случае оси координат располагают по направлению главных осей анизотропии и для трехмерного случая

$$F^e = \int_{V^e} \left\{ \frac{1}{2} \left[\epsilon_{ax} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \epsilon_{ay} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \epsilon_{az} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - \rho \varphi \right\} dV. \tag{H.43}$$

Основные расчетные формулы (H.39) и (H.40) справедливы и в этом случае, но в (H.40) $\epsilon_a [1]$ следует заменить на

$$[D_3] = \begin{bmatrix} \epsilon_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{az} \end{bmatrix}. \tag{H.44}$$

Метод справедлив и для магнитных изотропных и анизотропных сред. В этом случае роль φ выполняет магнитный потенциал A , роль ρ — плотность тока проводимости δ . Если $\vec{\delta} = \vec{i} \delta_x, A = \vec{i} A_x, \vec{\mu}_a = \vec{i} \mu_{ax} + \vec{j} \mu_{ay} + \vec{k} \mu_{az}$, то для трехмерного случая, расположив оси x, y, z параллельно главным осям анизотропии, имеем

$$F^e = \int_{V^e} \left\{ \left[\frac{1}{\mu_{ax}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\mu_{ay}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\mu_{az}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right)^2 \right] - \delta_x A_x \right\} dV.$$

В формуле, аналогичной (H.41), произведение $\epsilon_a [1]$ следует заменить на

$$[D_\mu] = \begin{bmatrix} 1/\mu_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu_{az} \end{bmatrix}.$$

§ H.5. L-координаты конечных элементов. Для облегчения вычислений интегралов в формулах (H.39) и (H.42) используют так называемые L -координаты. Рассмотрим, что понимают под ними в двумерном случае, когда конечные элементы — треугольники. На рис. H.2, а изображен треугольник. Внутри его взята произвольная точка m . Из нее опущены три перпендикуляра на его три стороны a, b, c и они названы r_1, r_2, r_3 . Три высоты обозначены соответственно h_1, h_2, h_3 .

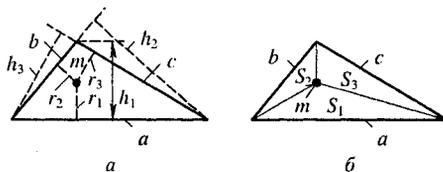


Рис. H.2

Три координаты являются функциями формы треугольника: $L_1 = r_1/h_1$, $L_2 = r_2/h_2$, $L_3 = r_3/h_3$. Сумма площадей трех треугольников (рис. Н.2, б) равна площади треугольника

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_e, \quad (\text{Н.43})$$

но

$$S_1 = 0,5 a r_1, \quad S_2 = 0,5 b r_2, \quad S_3 = 0,5 c r_3,$$

а

$$S_e = 0,5 a h_1 = 0,5 c h_2 = 0,5 b h_3.$$

Поделив обе части (Н.43) на S_e , получим $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. При линейной аппроксимации [см. (Н.1)] L -координаты равны функциям формы N , т. е. $L_1 = N_1$, $L_2 = N_2$, $L_3 = N_3$.

При квадратичной аппроксимации [см. (Н.1)] будет шесть функций формы [см. (Н.1а)], они определяются уже через произведения L -координат. Поэтому при интегрировании по площади выражений (Н.42) под интегралами будут произведения L -координат соответствующего элемента в различных степенях. Интегралы берут по формуле

$$\int_{S^e} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dS = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2 S_e. \quad (\text{Н.44})$$

§ Н.6. Учет граничных условий. При практическом решении уравнений (Н.42) или (Н.39) будет получена система из K алгебраических уравнений относительно потенциалов всех узловых точек всех конечных элементов. Но в этой системе пока еще не учтены граничные условия, т. е. то обстоятельство, что потенциалы узлов, находящихся на границах области G , известны. Для того чтобы учесть граничные условия, систему преобразуют [16]. Положим, что известны значения φ_i и φ_j в узлах i и j на границах области. Преобразование осуществляют в два этапа. На первом приравнивают нулю все коэффициенты в i и j строках левой части системы за исключением членов на главной диагонали (их оставляют неизменными), а правые части i и j строк системы уравнений заменяют на $k_{ii} \varphi_i$ и $k_{jj} \varphi_j$.

Второй этап состоит в исключении из левой части системы всех недиагональных элементов, коэффициенты которых умножены на φ_i и φ_j . С этой целью упомянутые члены, содержащие φ_i и φ_j , переносят в правые части соответствующих строк с изменением знака и их добавляют к ранее имевшимся правым частям этих строк.

Приложение О

ЭФИР — ФИЗИЧЕСКИЙ ВАКУУМ

Вся мировая среда заполнена эфиром. Каковы его свойства, какие физические процессы происходят в нем и какова его математическая модель — всеми этими вопросами или частью их занимались в свое время крупнейшие ученые, начиная с VI в. до н. э., в том числе Фалес Милетский, Демокрит, Р. Декарт, И. Ньютон, Дж. Томсон, Г. Гельмгольц, М. Фарадей, Дж. Максвелл, Э. Резерфорд, А. Эйнштейн и многие другие.

Дж. Максвелл при выводе своих уравнений электродинамики, базируясь на представлениях Гельмгольца, рассматривал эфир как вязкую, сплошную, несжимаемую жидкость, свойства которой неизменны и в которой происходят вихревые движения.

Предлагавшиеся до 1990 г. многочисленные модели эфира и их слабые стороны рассмотрены в первых двух главах книги В.А. Ацюковского «Общая эфиродинамика», Энергоатомиздат, 1990 г. В книге содержится библиография из 423 наименований. В остальных шести главах автором книги дана новая, предложенная им в 1980 г. модель эфира и ее применение к объяснению электромагнитных явлений, явления тяготения, сильного и слабого ядерного взаимодействия, оптических явлений, а также интерпретируются уравнения квантовой механики с позиций его теории.

Поскольку эта модель прошла двадцатилетнее испытание временем, мы посчитали целесообразным вкратце ознакомить читателя книги с электротехнической частью модели, а для более детального изучения отсылаем читателя к упомянутой книге автора модели.

Эфир рассматривается в этой модели как газоподобная среда с малой плотностью, малой вязкостью, сжимаемостью в широких пределах. Свойства эфира в свободном пространстве и в веществе предполагаются различными.

В основу модели положено введенное еще Демокритом в VI веке до н. э. представление об элементарном кирпичике мироздания, о материальном образовании амере (а он, видимо, состоит из еще более мелких образований, свойства которых пока неизвестны). Свойства амера таковы: масса $m_a \leq 7 \cdot 10^{-117}$ кг, диаметр $\leq 4 \cdot 10^{-45}$ м, количество амеров в $1 \text{ м}^3 \leq 1,3 \cdot 10^{105}$. Средняя длина свободного пробега $\leq 5 \cdot 10^{-17}$ м. Средняя скорость теплового движения $\approx 6,6 \cdot 10^{21}$ м/с.

Свойства эфира в свободном от вещества пространстве таковы: плотность $\rho = 8,85 \cdot 10^{-12}$ кг/м³, давление $\geq 2 \cdot 10^{32}$ Н/м², температура $\leq 7 \cdot 10^{-51}$ К. Внутренняя энергия в $1 \text{ м}^3 \geq 2 \cdot 10^{32}$ Дж.

Автор модели приходит к выводу, что:

1. Процессы в микромире эфира подчиняются всем известным в настоящее время для макромира законам газовой динамики реального вязкого сжимаемого газа.

2. Ограничения на скорость различных процессов величиной $3 \cdot 10^8$ м/с справедливо только для электромагнитных (и в том числе оптических) явлений и несправедливо для гравитационных явлений.

Отдельно взятый амер может двигаться поступательно и взаимодействовать и объединяться с другими амерами. Совокупность амеров может иметь три формы движений — диффузионную, поступательную и вращательную. Все они подчиняются законам газовой динамики реального вязкого сжимаемого газа, значительно пополненным к шестидесятым годам 20 столетия.

Диффузионная форма обеспечивает перенос плотности эфира, перенос количества движения и перенос энергии.

Поступательное движение может быть либо ламинарным, либо продольно колебательным. Вращательное может быть либо разомкнутовращательным типа смерча при числе Рейнольдса больше 2000, либо замкнутовращательным, типа тороида, когда объемы амеров имеют тороидальное и кольцевое движение.

Вектор скорости \vec{v} этого типа движения в любой точке тела тороида (рис. О.1, а и рис. О.2, а) может быть разложен на две компоненты — на вектор скорости кольцевого движения \vec{v}_k и на вектор скорости тороидального движения \vec{v}_t (рис. О.1, б и рис. О.2, б соответственно). Эти скорости могут быть очень велики, например у протона скорость v_k равна $\approx 2 \cdot 10^{21}$ м/с.

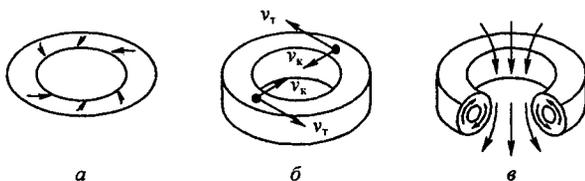


Рис. О.1

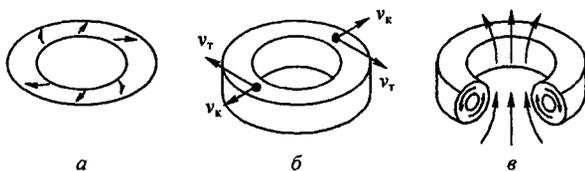


Рис. О.2

На рис. О.1, в и О.2, в изображены тороидальные газовые вихри в разрезе и векторы движения эфира в окружающей этот вихрь среде. В канал по осевой линии тороида входит и из него выходит газовый поток эфира. Его поступательное вращательное движение переходит в поступательное вращательное движение эфира вокруг тора.

Плотность эфира в тороидальном вихре выше, чем в окружающей этот вихрь среде, что способствует устойчивости тороидального вихревого образования.

В окрестности тороидального вихря происходит термодиффузионное движение эфира, описываемое уравнением теплопроводности, тороидальное движение, описываемое уравнением Био—Савара (оно может быть интерпретировано как магнитное поле), и кольцевое движение, описываемое теоремой Остроградского—Гаусса (оно может быть интерпретировано как электрическое поле).

Полярность электрического поля определяет ориентация кольцевого движения относительно тороидального (лево или правовинтовое движение). В рассматриваемой модели кольцевое движение эфира в тороидальном вихре соответствует электрической напряженности, а заряд q определяется поверхностной циркуляцией кольцевого движения вихря эфира

$$q = k_q V \omega_k.$$

Здесь k_q — коэффициент пропорциональности, V — объем вихревого кольца, ω_k — угловая скорость кольцевого движения.

Магнитное поле в рассматриваемой модели определяется тороидальной составляющей скорости вихревого движения эфира в торе.

Магнитный момент вихря определяется циркуляцией тороидального объема тороида и равен произведению объема тороида V на угловую скорость тороидального вращения ω_T , k_T — коэффициент пропорциональности.

$$M = k_T V \omega_T.$$

Тороидальное вихревое образование уплотненного эфира в зависимости от того на какое расстояние от него распространяется в окружающем эфире его тороидальное и кольцевое воздействие на окружающий эфир и увлекает его, могут рассматриваться как различные по величине и знаку электрические заряды.

У модели протона тороидальное и кольцевое воздействие распространяется на значительное расстояние от порождающего их тороидального вихря. У модели нейтрона за счет присоединенного вихря на периферии тороида в окрестности пограничного слоя вихря толщиной порядка $0,1$ Ферми гасится кольцевое движение и он обладает только слабым тороидальным воздействием на окружающий его эфир; отдельно взятый нейтрон неустойчив и распадается на протон и электрон. Свободный электрон образуется из уплотненного эфира, входящего в пограничный слой нейтрона, и представляет собой тонкое вихревое кольцо, в котором эфир движется по винтовой линии с углом наклона $\approx 45^\circ$. Радиус кольца электрона и угол наклона не постоянен и изменяется в зависимости от внешних факторов.

Позитрон это тоже вихревое кольцо, но у него изменено направление кольцевого движения вихря на противоположное по сравнению с электроном.

Из изложенного следует, что тороидальная составляющая скорости винтового движения эфира в некоторой точке характеризует магнитное поле в этой точке, а кольцевая составляющая скорости винтового движения эфира определяет электрическое поле в этой точке.

Постоянное во времени магнитное поле, например вокруг провода с постоянным током, можно интерпретировать, как совокупность замкнутых вокруг этого провода вихревых трубок, основным видом движения эфира вдоль осей которых является движение, вызванное тороидальной составляющей скорости тороидально-вихревых образований.

Постоянное во времени электрическое поле между двумя внешними постоянными во времени электрическими зарядами различных знаков можно представить в виде совокупности вихревых трубок, начинающихся на одном заряде и оканчивающихся на другом заряде. В каждой их этих трубок основным видом движения эфира вдоль осей трубок является движение эфира, вызванное кольцевой составляющей скорости тороидально-вихревых образований.

Переменное во времени электромагнитное поле можно представить совокупностью движущихся в пространстве замкнутых трубок, созданных тороидальной составляющей винтового движения эфира, и охватывающих их и движущихся совместно с ними в пространстве трубок с кольцевой составляющей скорости винтового движения тех же и дру-

гих винтовых образований эфира.

Роль носителей тока смещения в физическом вакууме в переменном во времени поле выполняют протоны и электроны.

Из электрических зарядов протонов и нейтронов и присоединенных вихрей электронных оболочек в физическом вакууме могут создаваться и создаются атомы и молекулы различных веществ.

Электрическая постоянная ϵ_0 равна плотности эфира в околоземном пространстве. Относительная электрическая проницаемость ϵ , характеризует свойство веществ увеличивать плотность эфира в веществе за счет снижения скорости движения эфира.

Относительная магнитная проницаемость вещества μ , характеризует свойство вещества увеличивать плотность эфира в трубках магнитного поля, проходящих через вещество.

В работе рассмотрена также модель наименьшего элемента света — фотона. Как известно, фотон это частица, которая не имеет заряда, обладает энергией, корпускулярными и волновыми свойствами, распространяется в вакууме прямолинейно с постоянной скоростью.

Согласно автору модели фотон представляет собой двухрядную цепочку линейных (не кольцевых) винтовых вихрей, в которой вихри одного ряда вращаются в одну сторону, а вихри второго ряда — в противоположную. Образование фотона в этой модели трактуется как результат колебаний увеличенной в размерах вихревой электронной оболочки возбужденного атома вокруг центра атома. Эти колебания возбуждают в прилегающих к электронной оболочке поверхностях слоев эфира винтовые струи.

В гипотезе В.А. Ацюковского показано, что представляет собой эфир (физический вакуум), каковы его свойства, какие физические процессы происходят в нем, каким образом и в силу каких физических причин в нем формируются электрические заряды различных знаков, как из них создаются атомы различных веществ, как физические могут быть интерпретированы явления и процессы, которые мы называем магнитным, электрическим и электромагнитным полями, током смещения в вакууме, а также другие важные вопросы.

Все они имеют фундаментальное значение для познания мира и не в последнюю очередь для теории электромагнитного поля, которой посвящена данная книга.

Насколько и в какой мере гипотеза В.А. Ацюковского будет одобрена и принята миром ученых, насколько потребуются ее дальнейшее развитие, дополнение и, возможно, изменение отдельных частных положений — покажет время.

Приложение П

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И СТАНОВЛЕНИЕ КУРСА ТОЭ

История развития электротехники — это постепенное, сначала медленное, а затем более быстрое накопление опытных фактов об электромагнитных явлениях, обобщение и анализ их, формулировка основных теоретических положений и законов и вытекающих из них следствий. Теоретическое осмысление электромагнитных явлений шло одновременно с применением их для нужд практической деятельности человека. Термин «электротехника» происходит от слова «электричество». Под электричеством принято понимать совокупность электрических зарядов и токов и связанных с ними электромагнитных полей и явлений. Термин «электричество» происходит от греческого слова «электрон», что означает янтарь. Еще со времен Фалеса Милетского (VI в. до н.э.) была известна способность янтаря электризоваться при трении о сукно. Происхождение второго основополагающего термина, используемого в электротехнике, — магнита — связывают с именем пастуха Магнеса, который пас овец на склонах горы Иды на острове Крит и его сандали, скрепленные железными шипами, притягивались кусками магнитного железняка на этой горе.

Термин «электричество» был введен в первом трактате об электрических и магнитных явлениях: «О магните, магнитных телах и о большом магните — Земле», составленном в 1600 г. английским ученым У. Гильбертом. В то время электрические явления рассматривались вне связи с магнитными.

Понятие проводника и непроводника электричества было введено С. Греем в 1729 г. Два вида электричества (которым впоследствии присвоили знаки + и –) установлены французским физиком Ш.Ф. Дюфе в 1733–1737 гг.

Американский ученый (и одновременно крупный общественный деятель) В. Франклин в 1748 г. сформулировал закон сохранения заряда. Им впервые была высказана мысль об электрической природе молнии и предложен громоотвод как средство защиты от нее.

Великий русский физик, астроном, химик, художник и поэт М.В. Ломоносов сформулировал принцип сохранения вещества (материи). По предложению М.В. Ломоносова Петербургская Академия наук выдвинула конкурсную тему на 1755 г. «Сыскать подлинную электрической силы причину и составить точную ее теорию». М.В. Ломоносов в «Слове о явлениях воздушных от электрической силы происходящих» в 1753 г. дал объяснение происхождению атмосферного электричества и высказал мысль, что опыты с электричеством «великую надежду к благополучию человеческому показывают».

На взаимную связь электрических и магнитных явлений указал русский академик Ф. Эпинус в 1758 г. в своем докладе на тему «Речь о родстве электрической силы и магнетизма» в Петербургской Академии наук.

Французский ученый Ш.О. Кулон в 1785 г. сформулировал закон, получивший его имя. Им было введено понятие напряженности электрического поля. Понятие электрической цепи ввел итальянский физик А. Вольта в 1794 г., им же предложены электрометр и конденсатор. Вольтов столб датируют 1800 г. Серия опытов с электрической дугой, питаемой от батареи из 4200 медных и цинковых кружков, была предпринята русским академиком В.В. Петровым в 1802 г. Он же является основоположником электрохимии.

Воздействие тока на магнитную стрелку изучалось датским ученым Х. Эрстедом в 1819 г., а взаимодействие токов — французским ученым А. Ампером в 1820 г. Ампер ввел термины «электрический ток», «сила тока», «электрическое напряжение». Опытные данные Ж.Б. Био и Ф.М. Савара по исследованию магнитных полей были математически обобщены П.С. Лапласом в 1820 г. (Закон Био—Савара—Лапласа).

Понятие физического поля своими истоками восходит к английскому ученому И. Ньютону и французскому философу и математику Р. Декарту. В законе тяготения, установленном И. Ньютоном в 1687 г., поле играло вспомогательную роль: под ним понималась область пустого пространства, в котором могли проявляться силы дальнего действия. Несколько ранее, в 1644 г. в книге Р. Декарта «Начала философии» было развито представление о близкодействии, когда взаимодействие в поле физическом трактовалось как происходящее путем изменения состояния промежуточной среды — эфира. Однако и в концепции Декарта поле было лишено самостоятельного существования.

Применительно к электромагнитному полю материалистическая концепция близкодействия была развита английским ученым М. Фарадеем. Для описания электрических и магнитных полей им введены понятия о силовых и эквипотенциальных линиях. Заряды он рассматривал как особые точки поля, как узлы электрических силовых линий. В математических работах термин «потенциал» введен Д. Грином в 1828 г.

Французский математик, астроном и физик П.С. Лаплас в работах по теории тяготения в 1782 г. впервые применил уравнение, названное затем уравнением Лапласа. Уравнение, получившее название «уравнение Пуассона», изучалось французским математиком С.Д. Пуассоном в 1812 г.

Закон электромагнитной индукции открыт М. Фарадеем в 1831 г. Им же сформулированы законы электрохимии и введен термин «диэлектрик». М. Фарадей первым высказал мысль о поляризации диэлектрика в 1837 г. Электромагнитный телеграф был изобретен российским инженером П.Л. Шиллингом в 1832 г. Российский академик Б.С. Якоби в 1838 г. построил первую электрическую машину, которая двигала по Неве лодку с 14 пассажирами. Он же является основателем гальванопластики. Закон Ома предложен в 1826 г. немецким ученым Г.С. Омом.

Абсолютная система электромагнитных единиц была создана немецкими учеными К.Ф. Гауссом и Т. Вебером в 1831–1833 гг. Основы теории потенциала были изложены К.Ф. Гауссом в 1834–1840 гг. в работе «О силах, действующих обратно пропорционально расстоянию». В 1838 г. вышла также его книга «Общая теория земного магнетизма».

Закон Джоуля—Ленца о тепловом действии тока сформулирован английским физиком Д.П. Джоулем (1841 г.), а также русским академиком Э.Х. Ленцем (1842 г.). В 1844 г. Э.Х. Ленц сформулировал закон электромагнитной инерции. Законы (правила) Кирхгофа предложены

немецким ученым Г.Р. Кирхгофом в 1845 г., им же впервые предложено понятие δ -функции, впоследствии (в 1937 г.) использованное П.А. Дираком в работах по атомной физике.

Векторный потенциал A , индуктивность L и взаимную индуктивность M впервые применил немецкий ученый Ф. Нейман в 1845 г.

Английский ученый Д.К. Максвелл в 1873 г. ввел понятие о токах смещения и сформулировал совокупность уравнений переменного электромагнитного поля, носящих его имя. Гипотеза Максвелла о токах смещения в совокупности с представлениями Фарадея о электромагнитном поле дала возможность Максвеллу сделать вывод о существовании электромагнитных волн, в том числе электромагнитных волн в вакууме. Теоретические работы Максвелла явились основой для того, чтобы рассматривать электромагнитное поле как самостоятельный вид материи. Однако и после работ Максвелла понадобилось еще около 25 лет, прежде чем окончательно восторжествовала точка зрения о том, что электромагнитное поле это самостоятельный вид материи.

Движение энергии в упругих средах было теоретически изучено российским ученым Н.А. Умовым в 1874 г. Понятие о массе и количестве движения электромагнитного поля введено немецким ученым М. Абрагамом в 1903 г. Первые опыты по передаче электрической энергии мощностью 4,4 кВт постоянным током на расстоянии 1 км были проведены российским инженером Ф.А. Пироцким в 1875 г. В 1882 г. французский инженер М. Депре передавал электрическую энергию мощностью 2,2 кВт на расстояние 57 км при напряжении 2 кВ.

Одним из первых применений электричества явилось использование его для электрического освещения («Русский свет») вместо газового. Лампа накаливания была изобретена А.Н. Лодыгиным в 1875 г., а с 1876 г. для электрического освещения на переменном токе стали применять «Свечу Яблочкова».

Движение энергии в электромагнитном поле теоретически было изучено английским ученым Д. Пойнтингом в 1884 г. Российский инженер и ученый М.О. Доливо-Добровольский разработал все основные элементы трехфазной системы передачи энергии. Им был разработан к 1889 г. трехфазный двигатель, трехфазный генератор и трансформатор и осуществлена передача энергии трехфазным током на расстоянии в 175 км (напряжение 15 кВ, мощность установки 150 кВА).

Российский ученый А.Г. Столетов известен открытием фотоэффекта, исследованием электрического разряда в газе и исследованием свойств ферромагнитных материалов (1872 г.).

Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн осуществлено немецким ученым Г. Герцем в 1887–1888 гг. Экспериментальное доказательство наличия светового давления, предсказанного Максвеллом, осуществил в своих опытах проф. Московского университета П.Н. Лебедев в 1885 г. Про него лорд Кельвин — титул лорда пожалован за научные заслуги английскому физiku Уильяму Томсону — в разговоре с К.А. Тимирязевым сказал: «Вы может быть знаете, что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, а вот Ваш Лебедев заставил меня сдать перед его опытами». Профессор П.Н. Лебедев, один из тех, кто составлял гордость русской науки, покинул свою лабораторию в Московском университете в знак протеста против исключения из университета передовых студентов царским министром Кассо в 1911 г.

Цикл работ по исследованию зависимости параметров вещества от частоты был проведен в 1908–1911 гг. российским ученым В.К. Аркадьевым.

Принцип радиосвязи был изобретен профессором Петербургского электротехнического института А.С. Поповым и опубликован в августе 1895 г. и январе 1896 г. в журнале Русского физико-химического общества. В 1896 г. он осуществил радиосвязь между кораблями Балтийского флота. Итальянский радиоинженер и предприниматель Г. Маркони в июне 1896 г. подал заявку на «усовершенствование в передаче электрических импульсов и сигналов и аппаратуре для этого» и в июле 1897 г. получил на нее патент. Им впервые была осуществлена радиосвязь через Атлантику в 1901 г.

Развитие релятивистской электродинамики происходило в основном в 1905–1908 гг. и связано с именами Г. Лоренца, Г. Минковского и А. Эйнштейна. К тому времени электромагнитное поле уже трактовали как самостоятельный вид материи. В развитие теории распространения радиоволн существенный вклад внесен российскими учеными М.В. Шулейкиным и Д.А. Рожанским в 1922 г., голландским ученым Ван-дер-Полеми и английским ученым О. Хевисайдом. Русские ученые П.Е. Краснушкин, Л.И. Мандельштам, Г.В. Кисунько, а впоследствии В.В. Никольский выполнили важные исследования по волноводам.

Явление низкотемпературной сверхпроводимости открыл немецкий ученый Х. Камерлинг-Оннес в 1911 г. В раскрытии физической природы явления низкотемпературной сверхпроводимости и построении ее математической теории большой вклад внесли немецкие ученые В. Мейснер и Р. Оксенфельд, российские ученые П.Л. Капица, Л. Ландау, А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, Н.Н. Боголюбов и др., английские ученые Г. и Ф. Лондоны, американские — Д. Бардин, Л. Купер, Д. Шриффер и др. Высокотемпературная сверхпроводимость в металлооксидной керамике была открыта 18 апреля 1986 г. Георгом Беднаршем и Алексом Мюллером.

В 1920 г. была создана комиссия ГОЭЛРО под председательством Г.М. Кржижановского по разработке плана электрификации России. Этот план был рассчитан на 10–15 лет и успешно и досрочно выполнен. В разработке этого плана принимали участие видные российские электротехники М.А. Шателен, А.А. Горев, В.С. Кулебакин, А.А. Ларионов. В их числе и основатель московской электротехнической школы К.А. Круг.

Большой вклад в исследование свойств сегнетодиэлектриков был внесен в тридцатых годах 20 столетия российскими учеными И.В. Курчатозвым и Б.М. Вулом, в 1944 г. создавшими керамический сегнетодиэлектрик — титанат бария. Слово «электрет» было введено в литературу английским ученым О. Хевисайдом в 1896 г. Первые электреты были получены японским физиком М. Егути в 1919 г.

Приведем сведения о времени появления до сих пор не упомянутых основополагающих математических и общетеоретических работ, имеющих непосредственное отношение к курсу ТОЭ.

Французский математик и философ, член Петербургской Академии наук Ж.Л. Даламбер разработал теорию волнового уравнения и совместно с членами Петербургской Академии наук Л. Эйлером и Д. Бернулли заложил основы математической физики. Начала теории конформных отображений были созданы Л. Эйлером в 1777 г. Термин «конформный» был введен академиком Ф.В. Шубертом в 1789 г.

Прямое преобразование Лапласа датируют 1782 г. Формула преобразования объемного интеграла в поверхностный дана российским ученым М.В. Остроградским в 1828 г. В развитии операторного метода существенную роль сыграла работа российского математика М.Е. Ващенко-Захарченко «Символическое исчисление и применение его к интегрированию дифференциальных уравнений» (1862 г.).

Теорема свертки впервые была сформулирована российским ученым П.Л. Чебышевым в 1867 г. Интеграл Дюамеля (французский ученый) датируют 1883 г. Основы теории устойчивости движения были созданы российским академиком А.М. Ляпуновым в 1892 г.

Операторный метод на основе преобразования Коши был введен в электротехнику английским ученым О. Хевисайдом в 1892–1912 гг. В тот же период Хевисайдом была введена в обращение единичная функция. Спектральные представления функций времени и связь спектра функции с энергией — теорему Рейли — датируют 1894 г. Одним из первых, кто применил спектральные представления к электрическим колебаниям, был российский ученый Н.Н. Андреев (1915 г.).

Символический (комплексный) метод расчета электрических цепей синусоидального тока предложен американским ученым Ч. Штейнметцем в 1894 г. Штейнметц известен также своими исследованиями ферромагнитных материалов и другими работами.

Метод гармонического баланса как метод расчета нелинейных электрических цепей при периодических воздействиях был впервые введен французским ученым М. Жюли в 1911 г. Кусочно-линейный метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений электрических цепей был предложен российским ученым Н.Д. Папалекси в 1912 г. Графоаналитический метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений был введен в электротехнику российским инженером В. Волюнкиным в 1916 г. Российский ученый С.А. Гершгорин в 1929 г. предложил метод электрических сеток для решения уравнения Лапласа. Метод медленно меняющихся амплитуд предложил в 1927 г. голландский ученый Б. Ван-дер-Поль. Метод малого параметра — французский ученый Г. Пуанкаре в 1928 г.

Крупные работы по исследованию полей в поляризуемых и ферромагнитных средах проведены российскими учеными И.Е. Таммом (1929 г.), а также Л.Д. Ландау и Е.М. Лившицем. Большую роль в становлении науки об электричестве сыграла изданная в 1929 г. книга академика И.Е. Тамма «Основы теории электричества». Основополагающие работы по теории нелинейных колебаний выполнены школами российских академиков

Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси и академика А.А. Андропова к 1937 г. Методику расчета электрических цепей с нелинейными элементами, имеющими идеально прямоугольные характеристики, предложил немецкий инженер В. Кремер в 1938 г. Частотные методы анализа нелинейных цепей развиты российскими учеными Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым в 1934–1937 гг.

Дискретное преобразование Лапласа развито в работах российского ученого Я.З. Цыпкина в 1948–1950 гг. Метод трансцендентальных частотных характеристик разработан российским ученым В.В. Солодовниковым в 1950 г. Первое обстоятельное исследование комбинационных колебаний в нелинейных цепях, мягкого и жесткого возбуждения выполнено немецким ученым К. Хеегером в 1924 г. Влияние переменной составляющей магнитного потока на постоянную в нелинейной магнитной цепи обнаружено немецким ученым Г. Шунком в 1923 г., а селективное выпрямление — российским ученым М.А. Розенблатом в 1949 г.

Первые работы по синтезу электрических цепей выполнены немецким ученым И.О. Цобелем и американским ученым Р. Фостером в 1924 г., немецким ученым В. Кауером в 1927 г., российскими учеными Г.В. Брауде в 1934 г., С.Н. Евлановым в 1937 г., Б.В. Булгаковым в 1949 г. и др. Теорема В.А. Котельникова о передаче непрерывных сообщений дискретными значениями сформулирована в 1933 г.

В.Г. Мироновым, начиная с 1970 г., опубликован ряд работ по методам анализа и синтеза электрических цепей, основанных на применении методов матричной алгебры и электронных вычислительных машин.

Автором настоящей книги в 1955 г. были объяснены причины возникновения хаоса, автомодуляции и других видов движений в нелинейных электрических цепях переменного тока. Было показано, по каким каналам в них действуют внутренние нелинейные невязно выраженные обратные связи, почему в цепях возникают отрицательные дифференциальные индуктивности и емкости по постоянным составляющим тока, магнитного потока, электрического заряда и напряжения. (Монография Л.А. Бессонов. Автоколебания в электрических цепях со сталью. — Госэнергоиздат, 1958.) Причины многообразия типов движений рассмотрены в учебнике автора «Электрические цепи».

Первые работы по структурному анализу и теории сигнальных графов выполнены российским ученым Б.Н. Петровым в 1945 г. и американским ученым С. Мезоном в 1953 г. Применение метода интегральных уравнений к задачам теории поля осуществлено российскими учеными Г.А. Гринбергом в 1948 г. и впоследствии В.М. АLEXИНЫМ, О.В. ТОЗОНИ, Э.В. КОЛЕСНИКОВЫМ, К.С. ДЕМИРЧАНОМ и др. Метод конечных элементов был предложен в работе Тернера, Клужа, Мартина и Топпа в 1956 г. Приоритет исследования задач теории различных полей на моделях принадлежит российским ученым академикам А.Н. Крылову и Н.Н. Павловскому.

С 1 июля 1880 г. начал издаваться первый в России электротехнический журнал «Электричество», редакторами которого в то время были В.Н. Чиколев и Д.А. Лачинов. Первая в мире электротехническая выставка была открыта в Петербурге в апреле 1880 г.

Первым в России высшим учебным заведением электротехнического профиля было основанное в 1886 г. Петербургское техническое училище телеграфных инженеров, которое через пять лет было преобразовано в Петербургский электротехнический институт.

Первая в России электротехническая школа для рабочих была организована в Петербурге в 1896 г. Первое электротехническое училище на уровне техникума было организовано в Москве в 1907 г. В его организации деятельное участие принимал один из основателей электротехнического образования в России профессор Л.И. Сиротинский.

Как самостоятельная дисциплина курс ТОЭ начал формироваться с 1904 г., когда профессор В.Ф. Миткевич (впоследствии академик) в Петербургском политехническом институте (ныне СПбПУ) начал читать курс «Теория электрических и магнитных явлений», а профессор К.А. Круг (впоследствии член-корреспондент АН СССР) с 1905 г. в МВТУ — курс «Теория переменных токов». Первое издание учебника по ТОЭ К.А. Круга датировано 1916 г., а последнее (шестое) — 1946 г.

В настоящее время учебники и учебные пособия издаются авторами, работающими (или работавшими) в Московском энергетическом институте, Московском институте радиотехники, электроники и автоматики, Санкт-Петербургском политехническом институте, Московском авиационном институте, Санкт-Петербургском электротехническом институте и других вузах. Кроме коллективов московских и Санкт-Петербургских ученых заметный вклад

в развитие курса ТОЭ вносят коллективы ученых Киева, Таганрога, Новочеркаска, Новосибирска, Минска, Львова и многих других городов.

Программа курса ТОЭ через каждые 6–7 лет пересматривается и обновляется. В соответствии с этим периодически пересматривается и обновляется содержание учебников и учебных пособий по ТОЭ. Из них устраняется относительно второстепенное и добавляется существенно новое, появляющееся за последние годы. Современный учебник по ТОЭ должен не только соответствовать программе, но и перспективно опережать ее и это, как правило, имеет место. Исторически дисциплина «Теоретические основы электротехники» явилась как бы той колыбелью, в которой сначала зарождались, развивались, а затем из нее выделялись и становились самостоятельными многие электротехнические, энергетические, радиотехнические, связистские и другие дисциплины (например, электроника, информатика, вычислительная техника). В то же время дальнейшее развитие отпочковавшихся от ТОЭ дисциплин оказывало и оказывает существенное влияние на содержание курса ТОЭ.

В период с 1915 г. по 1935 г. курс ТОЭ формировался в основном под влиянием энергетики, связи, светотехники, электромашиностроения. В последующий период — примерно с 1936 по 1950 г. — под влиянием радиотехники, автоматики и телемеханики. В последующие годы на курсе ТОЭ в значительной мере сказалось развитие электроники, вычислительной техники и теории информации.

Приложение P

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

Значения удельной электрической проводимости, выраженной в сименсах на метр (См / м) при 20 °С для различных проводниковых материалов.

Алюминий	$(3,47...3,8) \cdot 10^7$	Сталь	$(0,73...0,97) \cdot 10^7$
Бронза	$(1,92...4,76) \cdot 10^7$	Серебро	$(6,17...6,25) \cdot 10^7$
Латунь	$(1,26...3,23) \cdot 10^7$	Чугун	$(2...2,5) \cdot 10^7$
Медь	$(5,5...5,72) \cdot 10^7$	Константан	$(1,9...2,22) \cdot 10^7$
Никель	$(1,26...1,32) \cdot 10^7$	Нихром	$(0,735...0,48) \cdot 10^7$

Основные свойства некоторых диэлектриков. В таблице даны значения относительной диэлектрической проницаемости ϵ_r при частоте 100 Гц и 100 МГц, тангенса угла потерь $\text{tg } \delta$ при частоте 1000 Гц и пробивной напряженности, выраженной в киловольтах на сантиметр (кВ/см), в равномерном поле при частоте 50 Гц.

Сухая земля имеет: $\gamma \approx 10^{-5} \dots 200 \cdot 10^{-5}$ См/м и $\epsilon_r \approx 3 \dots 6$.

Влажная земля имеет: $\gamma \approx 2 \cdot 10^{-3} \dots 3 \cdot 10^{-2}$ См/м и $\epsilon_r \approx 10 \dots 30$.

При низкой частоте земля — проводник, при СВЧ — диэлектрик.

Вода дистиллированная имеет: $\gamma \approx 2 \cdot 10^{-4}$ См/м и $\epsilon_r = 80$.

Вода пресная имеет: $\gamma \approx 10^{-3} \dots 2,5 \cdot 10^{-2}$ См/м.

Материал	ϵ_r		$\text{tg } \delta$	$E_{\text{проб}}$
	100 Гц	100 МГц		
Бакелит	4,9	3,7	0,03	240
Бумага	3,7	—	0,009	160
Кварц	3,8	3,8	0,001	80
Плексиглас	3,4	2,6	0,06	400
Полихлорвинил	3,2	2,8	0,01	320
Полистирол	2,55	2,52	0,0005	240
Слюда	5,4	5,4	0,002	100 – 1000
Трансформаторное масло	2,24	2,18	0,001	120
Фарфор	7	—	—	57

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть III. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ	5
Предисловие	5
Введение	7
Глава девятнадцатая. Электростатическое поле	11
§ 19.1. Определение электростатического поля	11
§ 19.2. Закон Кулона	11
§ 19.3. Напряженность и потенциал электростатического поля	12
§ 19.4. Электрическое поле — поле потенциальное	14
§ 19.5. Силовые и эквипотенциальные линии	15
§ 19.6. Выражение напряженности в виде градиента потенциала	16
§ 19.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла)	18
§ 19.8. Выражение градиента потенциала в цилиндрической и сферической системах координат	19
§ 19.9. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность	19
§ 19.10. Свободные и связанные заряды. Поляризация вещества	20
§ 19.11. Поляризованность	20
§ 19.12. Вектор электрической индукции \vec{D}	22
§ 19.13. Теорема Гаусса в интегральной форме	23
§ 19.14. Применение теоремы Гаусса для определения напряженности и потенциала в поле точечного заряда	24
§ 19.15. Теорема Гаусса в дифференциальной форме	25
§ 19.16. Вывод выражения для $\operatorname{div} \vec{E}$ в декартовой системе координат	27
§ 19.17. Использование оператора набла для записи операции взятия дивергенции	28
§ 19.18. Выражение $\operatorname{div} \vec{E}$ в цилиндрической и сферической системах координат	28
§ 19.19. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа	28
§ 19.20. Граничные условия	31
§ 19.21. Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики	31
§ 19.22. Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика	32
§ 19.23. Условия на границе раздела двух диэлектриков	32
§ 19.24. Теорема единственности решения	34
§ 19.25. Общая характеристика задач электростатики и методов их решения	35
§ 19.26. Поле заряженной оси	37
§ 19.27. Поле двух параллельных заряженных осей	37
§ 19.28. Поле двухпроводной линии	38
§ 19.29. Емкость	39
§ 19.30. Метод зеркальных изображений	41
§ 19.31. Поле заряженной оси, расположенной вблизи проводящей плоскости	41
§ 19.32. Поле заряженной оси, расположенной вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями	42
§ 19.33. Электростатическое поле системы заряженных тел, расположенных вблизи проводящей плоскости	44
§ 19.34. Потенциальные коэффициенты. Первая группа формул Максвелла	45
§ 19.35. Емкостные коэффициенты. Вторая группа формул Максвелла	46
§ 19.36. Частичные емкости. Третья группа формул Максвелла	47
§ 19.37. Поле точечного заряда, расположенного вблизи проводящей сферы	49
§ 19.38. Поле заряженной оси, расположенной параллельно цилиндру	50

§ 19.39. Шар в равномерном поле	50
§ 19.40. Проводящий шар в равномерном поле	54
§ 19.41. Диэлектрический шар в равномерном поле	55
§ 19.42. Диэлектрический цилиндр в равномерном поле	57
§ 19.43. Понятие о плоскопараллельном, плоскомеридианном и равномерном полях	58
§ 19.44. Графическое построение картины плоскопараллельного поля	59
§ 19.45. Графическое построение картины плоскомеридианного поля	60
§ 19.46. Объемная плотность энергии электрического поля и выражение механической силы в виде производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате	61
§ 19.47. Энергия поля системы заряженных тел	62
§ 19.48. Метод средних потенциалов	71
§ 19.49. Электреты	75
§ 19.50. Изменение заряда (напряжения) на конденсаторе, вызванное помещением в него диэлектрическим телом, имеющим остаточную поляризацию	77
§ 19.51. Электрическое поле двойного заряженного слоя	79
§ 19.52. Силовое воздействие неравномерного электрического поля на незаряженные диэлектрические и проводящие тела, находящиеся в этом поле	80
<i>Вопросы для самопроверки</i>	81
Глава двадцатая. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде	83
§ 20.1. Плотность тока и ток	83
§ 20.2. Закон Ома и второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме	83
§ 20.3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме	85
§ 20.4. Дифференциальная форма закона Джоуля—Ленца	86
§ 20.5. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде	86
§ 20.6. Переход тока из среды с проводимостью γ_1 в среду с проводимостью γ_2 . Граничные условия	87
§ 20.7. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем	88
§ 20.8. Экспериментальное исследование полей	88
§ 20.9. Соотношение между проводимостью и емкостью	90
§ 20.10. Общая характеристика задач расчета электрического поля в проводящей среде и методов их решения	92
§ 20.11. Расчет электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами	93
<i>Вопросы для самопроверки</i>	95
Глава двадцать первая. Магнитное поле постоянного тока	97
§ 21.1. Связь основных величин, характеризующих магнитное поле. Механические силы в магнитном поле	97
§ 21.2. Интегральная форма закона полного тока	99
§ 21.3. Дифференциальная форма закона полного тока	100
§ 21.4. Раскрытие выражения $\operatorname{rot} H = \delta$ в декартовой системе координат	101
§ 21.5. Запись ротора в виде векторного произведения	102
§ 21.6. Раскрытие $\operatorname{rot} H$ в виде определителя в декартовой системе	103
§ 21.7. Выражение проекций ротора в цилиндрической и сферической системах координат	103
§ 21.8. Принцип непрерывности магнитного потока и запись его в дифференциальной форме	103
§ 21.9. Магнитное поле в областях «занятым» и «не занятым» постоянным током	104
§ 21.10. Скалярный потенциал магнитного поля	104
§ 21.11. Граничные условия	106

§ 21.12. Векторный потенциал магнитного поля	107
§ 21.13. Уравнение Пуассона для вектора-потенциала	108
§ 21.14. Выражение магнитного потока через циркуляцию вектор-потенциала	109
§ 21.15. Векторный потенциал элемента тока	111
§ 21.16. Взаимное соответствие электростатического (электрического) и магнитного полей	113
§ 21.17. Задачи расчета магнитных полей	114
§ 21.18. Общая характеристика методов расчета и исследования магнитных полей	115
§ 21.19. Графическое построение картины поля и определение по ней магнитного сопротивления	115
§ 21.20. Опытное исследование картины магнитного поля	117
§ 21.21. Построение эквипотенциалей магнитного поля путем использования принципа наложения	118
§ 21.22. Магнитное экранирование	119
§ 21.23. Эллипсоид во внешнем однородном поле. Кэффициент размагничивания	123
§ 21.24. Применение метода зеркальных изображений	123
§ 21.25. Закон Био—Савара—Лапласа	129
§ 21.26. Определение скалярного магнитного потенциала контура с током через телесный угол	132
§ 21.27. Магнитное поле намагниченной пленки (ленты)	133
§ 21.28. Определение магнитного потока, созданного в некотором контуре намагниченным ферромагнитным телом	133
§ 21.29. Выражение механической силы в виде производной от энергии магнитного поля по координате	134
§ 21.30. Магнитное поле двойного токового слоя	135
<i>Вопросы для самопроверки</i>	136

Глава двадцать вторая. Основные уравнения переменного электромагнитного поля

§ 22.1. Определение переменного электромагнитного поля	139
§ 22.2. Первое уравнение Максвелла	139
§ 22.3. Уравнение непрерывности	141
§ 22.4. Второе уравнение Максвелла	141
§ 22.5. Уравнения Максвелла в комплексной форме записи	142
§ 22.6. Теорема Умова—Пойнтинга для мгновенных значений	143
§ 22.7. Теорема Умова—Пойнтинга в комплексной форме записи	149
§ 22.8. Зависимость параметров вещества от частоты	150
§ 22.9. Запись уравнений Максвелла с учетом тока переноса	151
§ 22.10. Зависимость между \vec{B} и \vec{H} , \vec{D} и \vec{E} , $\vec{\delta}$ и \vec{E} в анизотропных средах	152
§ 22.11. Основные положения электродинамики движущихся сред (основы релятивистской электродинамики)	153
§ 22.12. Уравнения Максвелла в симметричной форме	155
<i>Вопросы для самопроверки</i>	156

Глава двадцать третья. Переменное электромагнитное поле в однородной и изотропной проводящей среде

§ 23.1. Уравнения Максвелла для проводящей среды	157
§ 23.2. Плоская электромагнитная волна	157
§ 23.3. Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве	160
§ 23.4. Глубина проникновения и длина волны	161
§ 23.5. Магнитный поверхностный эффект	162
§ 23.6. Электрический поверхностный эффект в прямоугольной шине. Эффект близости	166

§ 23.7.	Неравномерное распределение тока в прямоугольной шине, находящейся в пазу электрической машины	167
§ 23.8.	Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе	168
§ 23.9.	Применение теоремы Умова—Пойнтинга для определения активного и внутреннего индуктивного сопротивлений проводников при переменном токе	171
§ 23.10.	Экранирование в переменном электромагнитном поле	171
§ 23.11.	Сопоставление принципов экранирования в электростатическом, магнитном и электромагнитном полях	172
§ 23.12.	Высокочастотный нагрев металлических деталей и несовершенных диэлектриков	172
§ 23.13.	Переходный процесс при проникновении электромагнитного поля в однородное проводящее полупространство	173
<i>Вопросы для самопроверки</i>		173

Глава двадцать четвертая. Распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектрике и в полупроводящих и гиротропных средах 175

§ 24.1.	Распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектрике	175
§ 24.2.	Плоские волны, поляризованные по кругу и по эллипсу	179
§ 24.3.	Переход плоской линейно поляризованной волны из одной среды в другую при нормальном падении	179
§ 24.4.	Наклонное падение плоской линейно поляризованной волны на границу раздела двух диэлектриков	181
§ 24.5.	Полное преломление (отсутствие отраженной волны) и полное отражение (отсутствие преломленной волны)	183
§ 24.6.	Дифракция электромагнитных волн	185
§ 24.7.	Устранение отражения электромагнитных волн	185
§ 24.8.	Плоские волны в однородных и изотропных полупроводящих средах	187
§ 24.9.	Граничные условия на поверхности раздела двух полупроводящих сред	188
§ 24.10.	Переходные и релаксационные процессы в несовершенных диэлектриках	189
§ 24.11.	О расчете полей в несовершенных диэлектриках и вязких средах при установившемся синусоидальном режиме	190
§ 24.12.	Определение гиротропной среды	190
§ 24.13.	Тензор магнитной проницаемости феррита	190
§ 24.14.	Распространение плоской волны в гиромангнитной среде	192
<i>Вопросы для самопроверки</i>		193

Глава двадцать пятая. Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля и излучение электромагнитной энергии 195

§ 25.1.	Вывод уравнений для \vec{A} и $\vec{\varphi}$ в переменном электромагнитном поле и их решение	195
§ 25.2.	Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля	201
§ 25.3.	Комплексная форма записи запаздывающего векторного потенциала	202
§ 25.4.	Излучение электромагнитной энергии	203
§ 25.5.	Понятие об излучающем диполе	208
§ 25.6.	Дополнительный анализ поля излучения	209
§ 25.7.	Теорема взаимности для ЭДС, наведенных излученным полем	211
§ 25.8.	Принцип двойственности. Излучение магнитного диполя	213
§ 25.9.	Рефракция электромагнитных волн	214
§ 25.10.	Распространение радиоволн в реальных условиях	215
<i>Вопросы для самопроверки</i>		219

Глава двадцать шестая. Электромагнитные волны в направляющих системах 221

§ 26.1.	Понятие о волноводах и объемных резонаторах	221
---------	---------------------------------------------	-----

§ 26.2.	Типы волн в волноводе. Прямоугольный волновод. Решение для H -волны	223
§ 26.3.	Волновое сопротивление волновода. Фазовая и групповая скорости	229
§ 26.4.	Компоненты E -волны в прямоугольном волноводе	231
§ 26.5.	Аналогия между волноводом и линией с распределенными параметрами. Измерение комплексного сопротивления нагрузки волновода	233
§ 26.6.	Граничные условия Леонтовича	234
§ 26.7.	Запредельный волновод	236
§ 26.8.	Круглый волновод	236
§ 26.9.	Полосковые линии	240
§ 26.10.	Замедляющие системы	241
§ 26.11.	S - и T -параметры элементов высокочастотного тракта	241
§ 26.12.	Прямоугольный объемный резонатор	244
§ 26.13.	Цилиндрический объемный резонатор	247
§ 26.14.	Добротность объемных резонаторов	248
<i>Вопросы для самопроверки</i>		249
Глава двадцать седьмая. Движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях		251
§ 27.1.	Движение электрона в равномерном магнитном поле, неизменном во времени и направленном перпендикулярно скорости	251
§ 27.2.	Движение электрона в неизменном во времени магнитном поле, когда скорость электрона не перпендикулярна силовым линиям	251
§ 27.3.	Фокусировка пучка электронов постоянным во времени магнитным полем (магнитная линза)	252
§ 27.4.	Движение электронов в равномерном электрическом поле. Принцип работы электронного осциллографа	253
§ 27.5.	Фокусировка пучка электронов постоянным во времени электрическим полем (электрическая линза)	253
§ 27.6.	Движение электрона в равномерных, взаимно перпендикулярных, неизменных во времени магнитном и электрическом полях	254
§ 27.7.	Движение заряженных частиц в кольцевых ускорителях	255
<i>Вопросы для самопроверки</i>		256
Глава двадцать восьмая. Основы магнитной гидродинамики		257
§ 28.1.	Определение магнитной гидродинамики и краткая характеристика областей ее применения	257
§ 28.2.	Уравнения магнитной гидродинамики	258
§ 28.3.	Просачивание (диффузия) магнитного поля	260
§ 28.4.	Электромагнитный барьер	260
§ 28.5.	Вмороженное поле	261
§ 28.6.	Возникновение волн в плазме	261
§ 28.7.	Эффект сжатия (пинч-эффект)	263
§ 28.8.	Принцип работы магнитного насоса и магнитного вентиля	264
§ 28.9.	Принцип работы гидродинамического генератора	264
§ 28.10.	Принцип работы плазменного реактивного двигателя	264
§ 28.11.	Устойчивость плазменных образований. Токомак	265
<i>Вопросы для самопроверки</i>		266
Глава двадцать девятая. Сверхпроводящие среды в электромагнитных полях		267
§ 29.1.	Сверхпроводимость	267
§ 29.2.	Сверхпроводники первого рода	268
§ 29.3.	Сверхпроводники первого рода в магнитном поле	268
§ 29.4.	Уравнение Лондонов	269
§ 29.5.	Сверхпроводящее тело в постоянном магнитном поле	271
§ 29.6.	Сверхпроводники второго рода	272

§ 29.7. Сверхпроводники третьего рода	273
§ 29.8. Описание поля в сверхпроводниках с нитевидной структурой	273
§ 29.9. Высокотемпературная сверхпроводимость	273
§ 29.10. Применение сверхпроводников	274
<i>Вопросы для самопроверки</i>	274
Литература по теории электромагнитного поля и смежным вопросам	275
Приложения к части III	277
Приложение И. Расчет полей по методу сеток и моделирование полей по методу электрических сеток	277
§ И.1. Расчет полей по методу сеток	277
§ И.2. Моделирование полей по методу электрических сеток	279
Приложение К. Метод Грина	280
§ К.1. Формулы Грина	280
§ К.2. Гармонические функции	280
§ К.3. Интеграл Грина для гармонических функций	281
§ К.4. Функция Грина	281
§ К.5. Определение потенциала ϕ через функции Грина в общем случае	282
Приложение Л. Метод интегральных уравнений	282
§ Л.1. Первый вариант метода интегральных уравнений	282
§ Л.2. Второй вариант метода интегральных уравнений	284
§ Л.3. Расчет полей с использованием интегрального уравнения Фредгольма первого рода	286
Приложение М. Метод конформных преобразований (отображений)	288
§ М.1. Комплексный потенциал	288
§ М.2. Конформные преобразования	289
§ М.3. Прямая и обратная задачи расчета полей по методу конформных преобразований	290
§ М.4. Преобразование равномерного поля на плоскости z в поле верхней полуплоскости w	292
§ М.5. Интеграл Кристоффеля—Шварца	293
§ М.6. Применение интеграла Кристоффеля—Шварца	293
§ М.7. Интеграл Шварца	296
Приложение Н. Метод конечных элементов	297
§ Н.1. Метод конечных элементов (МКЭ)	297
§ Н.2. Аппроксимация потенциала в каждой подобласти	297
§ Н.3. Минимизация энергии электрического поля	299
§ Н.4. Вывод основных формул метода	299
§ Н.5. L -координаты конечных элементов	301
§ Н.6. Учет граничных условий	302
Приложение О. Эфир — физический вакуум	302
Приложение П. История развития электротехники и становление курса ТОЭ	305
Приложение Р. Свойства некоторых проводниковых материалов и диэлектриков	310

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ЛЕВ АЛЕКСЕЕВИЧ БЕССОНОВ — один из известнейших российских ученых и педагогов, родился 25 ноября 1915 г.

В 1934 г. Л.А. Бессонов поступил в Московский энергетический институт, который с отличием окончил в марте 1940 г. С июня 1939 г. по апрель 1944 г. работал инженером в лаборатории завода № 624 НКЭП, после чего по конкурсу поступил в аспирантуру на кафедру ТОЭ МЭИ. Научным руководителем его был основатель Московской электротехнической школы К.А. Круг. В июне 1946 г. в МЭИ защитил кандидатскую диссертацию. Доцент с 1948 г. В том же году в издательстве Госэнергоиздат выходит в свет первая книга Л.А. Бессонова «Электрические цепи со сталью», а в 1951 г. — вторая книга «Переходные процессы в нелинейных электрических цепях со сталью». Всего в МЭИ на кафедре ТОЭ проработал 10 лет.

В 1954 г. Л.А. Бессонов перешел из МЭИ на работу в ВЗЭИ, который в 1967 г. был преобразован в Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (ныне технический университет). Докторскую диссертацию Л.А. Бессонов защитил в 1956 г. Некоторые из полученных научных результатов отражены в монографии «Автоколебания (автомодуляция) в электрических цепях со сталью» (Госэнергоиздат, 1958). С 1955 по 2000 г. он являлся заведующим кафедрой ТОЭ, проработав в МИРЭА 46 лет. В 1958 г. ему присвоено ученое звание профессора.

Миллионы инженеров познали теоретическую электротехнику по книгам Л.А. Бессонова. В 1957 г. им был написан учебник «Теоретические основы электротехники», вышедший в трех частях. Впоследствии, каждый раз существенно переработанный и дополненный, этот учебник переиздавался на русском языке 10 раз. Учебник трижды переведен на английский язык, а также на французский, испанский и португальский. Книги Л.А. Бессонова «Нелинейные электрические цепи» и «Линейные электрические цепи» переиздавались по три раза. Написанный под его редакцией и при его участии «Сборник задач по теоретическим основам электротехники» выдержал пять переизданий.

За научную и педагогическую деятельность Льву Алексеевичу Бессонову присуждены звания «Заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации», «Заслуженный деятель высшего образования России», «Почетный работник высшего образования России».

Учебное издание

Лев Алексеевич Бессонов

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ**

Учебник

Редактор *И.Г. Давыдова*

Корректор *Г.Д. Шаровка*

Оформление переплета *А.Л. Бондаренко*

Художественный редактор *И.С. Соколов*

Компьютерная верстка и графика *А.В. Штыков*

Изд. лиц. № 066160 от 02.11.98.

Подписано в печать 15.05.03. Формат 60×90 ¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,0. Уч.-изд. л. 19,02.

Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 2746

УИЦ «Гардарики»

101000, Москва, Лубянский пр., д. 7, стр. 1.

Тел.: (095) 921-0289, 925-6840

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93